Angewandte Hydromechanik

Von

Dr.-Ing. Walther Kaufmann
o. Professor der Mechanik an der Techn. Hochschule München

Zweiter Band

Ausgewählte Kapitel aus der technischen Strömungslehre

Mit 210 Textabbildungen

Berlin
Verlag von Julius Springer
1934

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1934

ISBN 978-3-7091-9752-3 ISBN 978-3-7091-9999-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-7091-9999-2

Vorwort.

Das Erscheinen des nun vorliegenden zweiten Bandes der „Angewandten Hydromechanik" hat länger auf sich warten lassen, als ich beim Abschluß des ersten Bandes voraussehen konnte. Obwohl die Stoffauswahl damals bereits in großen Zügen feststand, machten sich durch die ständig fortschreitende Entwicklung — besonders auf dem Gebiete der Rohrströmung sowie der Tragflügel- und Propellertheorie — im Laufe der Zeit verschiedentlich Um- und Neubearbeitungen erforderlich, durch welche die Fertigstellung des Buches naturgemäß verzögert wurde. Auch meine Übersiedlung von Hannover nach München im Herbst 1932 brachte durch die damit verbundene berufliche Umstellung mancherlei Verzögerungen in der literarischen Arbeit mit sich.

Wie im Vorwort des ersten Bandes bereits angekündigt wurde, beschäftigt sich der zweite Band ausschließlich mit technischen Anwendungen der Hydromechanik, wobei auf die allgemeinen theoretischen Untersuchungen des ersten Bandes weitgehend Bezug genommen wird. Indessen ist die Darstellung so gewählt, daß der zweite Band auch als selbständiges Werk für sich benutzt werden kann, sofern der Leser mit den Grundgesetzen der Hydromechanik hinreichend vertraut ist. Daß dabei an manchen Stellen Wiederholungen von bereits früher Gesagtem vorkommen, ließ sich mit Rücksicht auf die Geschlossenheit der Darstellung nicht vermeiden. Ich sehe dieses aus didaktischen Gründen auch nicht als Nachteil an, wenn nur dadurch das Verständnis des Vorgetragenen gehoben wird.

Bei der Fülle des Stoffes und dem vorgezeichneten Rahmen des Buches war natürlich von vornherein eine gewisse Beschränkung geboten. Ich habe dem Buche aus diesem Grunde auch den Untertitel „Ausgewählte Kapitel aus der technischen Strömungslehre" gegeben, um dadurch anzudeuten, daß nur ein Teil der in der Technik vorkommenden Strömungsvorgänge behandelt wird.

Bevorzugt wurden diejenigen Gebiete, die einerseits für die Technik besonders wichtig, andererseits aber auch einer theoretischen Behandlung einigermaßen zugänglich sind. Im einzelnen werden besprochen: Ausfluß und Überfall, Strömung in Rohren und offenen Gerinnen, Wellenbewegung, Grundwasserströmung, Hydrodynamische Theorie der Schmiermittelreibung, Tragflügel-, Propeller- und Kreiselradströmung, Schiffswiderstand und schließlich Windkräfte auf Bauwerke. Dieses letzte Kapitel, das (meines Wissens) bislang in der modernen Auffassung noch keine lehrbuchhafte Darstellung gefunden hat, stammt von Herrn Professor Dr.-Ing. Flachsbart, Hannover, dem ich an dieser Stelle für seine freundliche Mitarbeit meinen besonderen Dank ausspreche.

Weiter danke ich auch meinen Assistenten, den Herren Priv.-Doz. Dr.-Ing. Waltking, Dr.-Ing. Thiersch und Dipl.-Ing. Jehle für ihre wertvolle Hilfe bei der Herstellung der Abbildungen und beim Lesen der Korrektur, sowie der Verlagsbuchhandlung Julius Springer, die in bekannt mustergültiger Weise für Druck und Ausstattung des Buches gesorgt und mir auch sonst jederzeit Entgegenkommen gezeigt hat.

München, im März 1934.

W. Kaufmann.

Inhaltsverzeichnis.

I. Ausfluß und Überfall.

A. Ausfluß aus Gefäßen.

1. Einführung.

Tritt eine raumbeständige Flüssigkeit durch eine Öffnung in der Wand eines Gefäßes aus, so bildet sich im allgemeinen ein Flüssigkeitsstrahl. Bei diesem Vorgang interessiert in erster Linie die Ausflußgeschwindigkeit und die von der Strahlform abhängige sekundliche Ausflußmenge.

Im I. Band (S. 53) wurde bereits gezeigt, daß die Anwendung der Bernoullischen Energiegleichung für stationäre Strömung sofort einen Ausdruck für die Ausflußgeschwindigkeit liefert, sofern es sich um eine Ausflußöffnung handelt, deren Abmessungen klein gegen diejenigen des Behälters und gegen die Spiegelhöhe h über der Öffnung sind (Abb. 1). Als ideelle Ausflußgeschwindigkeit (reibungsfreie Flüssigkeit vorausgesetzt) erhält man den Wert

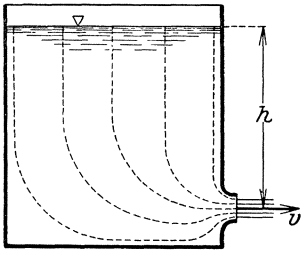


Abb. 1. Ausfluß aus kleiner Öffnung.

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\,g\left(\frac{p_0 - p}{\gamma} + h\right)}, \tag{1}$$

wo v_0 und p_0 Geschwindigkeit und Druck in der Höhe des Spiegels, v, p die entsprechenden Werte in der Ausflußöffnung sind, während γ das spezifische Gewicht der Flüssigkeit bezeichnet. Man kann in dieser Gleichung unter Benutzung der Kontinuitätsbedingung $v \cdot F = v_0 \cdot F_0$ noch v_0 durch v ausdrücken, wenn F den Ausfluß- und F_0 den Gefäßquerschnitt am Spiegel darstellen. Dann lautet Gl. (1)

$$v^2 = v^2 \frac{F^2}{F_0^2} + 2\,g\left(\frac{p_0 - p}{\gamma} + h\right)$$

oder

$$v = \sqrt{\frac{2\,g\left(\frac{p_0 - p}{\gamma} + h\right)}{1 - \frac{F^2}{F_0^2}}}. \tag{1a}$$

Bei großem Querschnitt des Behälters gegenüber der Ausflußöffnung ist aus Gründen der Kontinuität v_0 klein gegenüber v; grenzen außerdem Flüssigkeitsspiegel und Ausflußöffnung an die Luft, so wird p_0

gleich p, und Gl. (1) geht über in das Torricellische Theorem

$$v = \sqrt{2gh}\,. \tag{2}$$

Infolge der Flüssigkeitsreibung wird dieser ideelle Wert jedoch nicht ganz erreicht; die tatsächliche Geschwindigkeit ist vielmehr etwas kleiner und hat die Größe

$$v = \varphi\sqrt{2gh}\,, \tag{2a}$$

wo φ den sog. Geschwindigkeitsbeiwert bezeichnet, welcher dem nichtidealen Charakter der Flüssigkeit Rechnung trägt. Nach Weisbach ist φ von der Druckhöhe h abhängig und hat für Wasser bei glattpolierten, gut abgerundeten Mundstücken (Abb. 1) von 1 cm Lichtweite die aus beistehender Tabelle ersichtlichen Werte:

$h =$	0,02	0,5	3,5	17	103 [m],
$\varphi =$	0,959	0,967	0,975	0,994	0,994.

Bei kleinen Öffnungen kann der oben angegebene Wert v als Mittelwert für alle Stromlinien des Ausflußstrahles gelten, wobei die Druckhöhe h auf den Schwerpunkt des Ausflußquerschnittes bezogen wird. Streng genommen gehört zu jeder Stromlinie des Ausflußstrahles in vertikaler Richtung eine andere Druckhöhe. Bei größeren, nicht waagerecht liegenden Öffnungen hat man deshalb zu setzen

$$v = \varphi\sqrt{2gz}\,,$$

wo z den (veränderlichen) vertikalen Abstand der betreffenden Stelle des Strahles vom Flüssigkeitsspiegel bezeichnet. Außerdem ist zu beachten, daß der Druck im Innern des Strahles von dem äußeren Luftdruck etwas abweicht. Es handelt sich hier also — wie man sieht — nur um eine summarische Betrachtung, die aber bei kleinen Öffnungen zu befriedigenden Ergebnissen führt.

Experimentell kann man das Torricellische Theorem (2) prüfen durch Messung der Sprungweite des austretenden Strahles. Tritt der Strahl — wie hier angenommen — aus einer lotrechten Öffnung aus, so haben alle Flüssigkeitsteilchen beim Verlassen der Öffnung die horizontale Anfangsgeschwindigkeit v. Da sie im übrigen nur der Schwere unterworfen sind (der Luftwiderstand sei als hinreichend klein vernachlässigt), so beschreiben sie Wurfparabeln. Man beziehe nun diese Parabeln auf ein Koordinatenkreuz mit waagerechter X- und lotrecht abwärts gerichteter Y-Achse, dessen Ursprung mit dem Mittelpunkt der Ausflußöffnung zusammenfällt. Dann legt ein Flüssigkeitsteilchen während der Zeit t nach Austritt aus der Öffnung in der X-Richtung den Weg $x = v \cdot t$, in der Y-Richtung $y = \frac{g}{2} \cdot t^2$ (freier Fall) zurück. Durch Elimination der Zeit folgt daraus

$$y = \frac{g}{2}\,\frac{x^2}{v^2} = \frac{g}{2}\,\frac{x^2}{2gh} = \frac{x^2}{4h}$$

oder

$$x = 2\sqrt{hy}\,.$$

Soll nun der durch (2) dargestellte Wert für v richtig sein, so muß der Strahl eine um y [m] unter der Ausflußöffnung liegende Ebene im horizontalen Abstand x [m] treffen. Damit läßt sich das Torricellische Theorem kontrollieren.

Für die Ausflußmenge Q müßte sich nach (2a) bei kleiner Ausflußöffnung F theoretisch

$$Q = F \cdot v = \varphi F \sqrt{2gh}$$

ergeben. Dieser Wert wird jedoch, wie die Versuche gezeigt haben, nur dann erreicht, wenn an der Ausflußöffnung ein gut abgerundetes Ansatzstück vorgesehen ist, so daß sämtliche Stromlinien beim Verlassen der Ausflußöffnung parallel laufen (Abb. 1). Beim Austritt durch scharfkantige oder weniger gut abgerundete Öffnungen erfährt der Strahl dagegen eine Einschnürung (Kontraktion). Er verjüngt sich noch beim Durchschreiten der Ausflußöffnung und erreicht erst in größerer Entfernung von dieser seinen kleinsten Querschnitt (Abb. 1a). Bezeichnet man diesen „eingeschnürten" Querschnitt mit F_e, so erhält man als Ausflußmenge

$$Q = \varphi F_e \sqrt{2gh} = \varphi \psi F \sqrt{2gh}, \tag{3}$$

wenn

$$F_e = \psi F$$

gesetzt wird, wo $\psi < 1$ die „Einschnürungsziffer" darstellt.

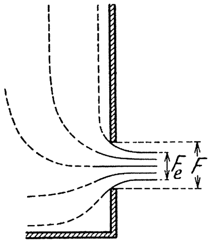


Abb. 1a. Eingeschnürter Strahl.

Die Bestimmung des Wertes ψ für verschiedene Form und Lage der Ausflußöffnung ist somit die Hauptaufgabe bei der Ermittlung der Ausflußmenge. Theoretisch ist das Problem zur Zeit nur für einige Sonderfälle gelöst und auch nur unter gewissen vereinfachenden Annahmen (vgl. Ziff. 2). Das Produkt der beiden Beiwerte φ und ψ in Gl. (3) ersetzt man gewöhnlich durch einen einzigen Faktor μ, den man als Ausflußziffer bezeichnet, und schreibt demnach die sekundliche Ausflußmenge in der Form

$$Q = \mu F \sqrt{2gh}. \tag{3a}$$

Während nun, wie oben bereits bemerkt wurde, der Geschwindigkeitsbeiwert φ für Wasser nur wenig von Eins verschieden ist, kann die Einschnürungsziffer ψ wesentlich kleiner sein als Eins; letztere ist also auf die Größe der Ausflußziffer μ von entscheidendem Einfluß.

Bei größeren, nicht waagerechten Öffnungen ist die Druckhöhe z für die einzelnen Stromfäden verschieden, weshalb in solchen Fällen Q gewöhnlich in etwas anderer Form dargestellt wird. Man faßt zu diesem Zwecke jeden Stromfaden als selbständigen Ausflußstrahl auf und integriert über die Querschnittsfläche. Dann wird mit Rücksicht auf (1), wenn dort $p_0 = p$ gesetzt wird, und mit den Bezeichnungen der Abb. 2

$$Q' = \int\limits_{(F)} v \cdot dF = \frac{1}{\sin\vartheta} \int\limits_{z=h_1}^{z=h_2} y \sqrt{2gz + v_0^2} \cdot dz, \tag{4}$$

wo y als Funktion von z eingeführt werden muß. Dabei ist zunächst vorausgesetzt, daß der Druck an der Oberfläche jedes einzelnen Fadens gleich dem äußeren Luftdruck sei und daß alle Stromfäden ohne gegenseitige Beeinflussung rechtwinkelig zur Ebene der Öffnung austreten, zwei Voraussetzungen, die sicher nicht erfüllt sind. Um diesen Vernachlässigungen Rechnung zu tragen, führt man wieder einen Beiwert μ' ein und setzt

$$Q = \mu' Q'.$$

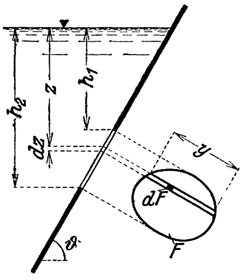


Abb. 2. Ausfluß durch eine große Öffnung in schräger Wand.

Für den Sonderfall $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $y = l = \text{const.}$ (Rechteck in lotrechter Wand) erhält man auf diese Weise den Ausdruck

$$Q = \mu' l \sqrt{2g} \int_{h_1}^{h_2} \left(z + \frac{v_0^2}{2g}\right)^{1/2} dz$$

$$= \frac{2}{3} \mu' l \sqrt{2g} \left\{ \left(h_2 + \frac{v_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(h_1 + \frac{v_0^2}{2g}\right)^{3/2} \right\}. \quad (4a)$$

Die Aufgabe läuft also auch hier wieder auf die Ermittlung des Beiwertes μ' hinaus (vgl. hierzu S. 13).

2. Zur Theorie der Ausflußziffer.

In ihren grundlegenden Untersuchungen über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen haben Helmholtz[1] und Kirchhoff[2] die Hilfsmittel entwickelt, welche gestatten, die Probleme der Strahlbildung beim Ausfluß aus scharfkantigen, spaltförmigen Öffnungen eines großen Gefäßes mittels der Methode der konformen Abbildung zu behandeln und auf diese Weise die Ausflußziffer zu bestimmen. Wegen der grundsätzlichen Bedeutung des Verfahrens für die Lösung praktischer Aufgaben der Hydrodynamik soll hier — wenigstens für den einfachsten Sonderfall — etwas genauer darauf eingegangen werden.

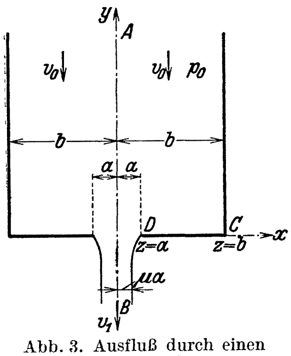


Abb. 3. Ausfluß durch einen Bodenspalt.

Zu diesem Zwecke denke man sich ein rechteckiges Gefäß (Abb. 3), in dessen Boden ein symmetrisch zur Mitte liegender, über die ganze Tiefe des Gefäßes sich erstreckender, rechteckiger Spalt vorhanden sei, aus dem die Flüssigkeit ausströmen soll. Die Gesamtbreite des Gefäßes sei $2b$, diejenige des Spaltes $2a$. Hinsichtlich der Flüssigkeitsbewegung seien folgende Voraussetzungen getroffen:

---

[1] Helmholtz, H.: Monatsber. Akad. Wissensch. Berlin 1868 S. 215.

[2] Kirchhoff, G.: Crelles J. Bd. 70 (1869).

1. Die Bewegung erfolge so, daß alle Flüssigkeitsteilchen Bahnen beschreiben, die der XY-Ebene parallel sind (ebene Bewegung).

2. Die Flüssigkeit sei ideal; es herrsche also Reibungsfreiheit und Raumbeständigkeit.

3. Die Bewegung sei stationär, was durch einen oberen Zufluß erreicht werden kann bzw. was näherungsweise erfüllt ist, wenn der Gefäßquerschnitt sehr groß gegenüber der Ausflußöffnung ist. Im letzteren Falle tritt während einer verhältnismäßig kurzen Zeit ein merkliches Absinken des Flüssigkeitsspiegels nicht auf.

4. Die Bewegung erfolge nicht unter dem Einfluß der Schwere, sondern werde durch einen Überdruck p_0 erzeugt, den man sich über den Flüssigkeitsspiegel gleichmäßig verteilt vorstellt.

5. Die Bewegung sei wirbelfrei.

Die Voraussetzungen 1 bis 3 und 5 sind bei einem Strahle, der in der oben angegebenen Weise aus einem großen Gefäße ins Freie austritt, mit sehr guter Annäherung erfüllt. Daß die Reibung keinen wesentlichen Einfluß haben kann, folgt aus dem Umstande, daß erstens der freie Strahl rings von Luft umgeben ist, wodurch nur ganz unbedeutende Tangentialkräfte auftreten können, und daß zweitens die Geschwindigkeit im Gefäße in einiger Entfernung von der Öffnung sehr schnell abnimmt, also auch keine nennenswerten Reibungswirkungen auslösen kann (vgl. Bd. I, S. 90). Da ferner die Bewegung aus der Ruhe erfolgen soll und durch Kräfte erzeugt wird, die ein Potential besitzen, so muß nach dem Satz von Thomson (Bd. I, S. 115) die Bewegung wirbelfrei sein; es existiert demnach ein Geschwindigkeitspotential. Fraglich bleibt somit nur die Voraussetzung 4, die aus Gründen der mathematischen Vereinfachung notwendig ist. Nun ist aber anzunehmen, daß beim lotrechten Austritt des Strahles aus dem horizontalen Boden eines Gefäßes die Ausflußgeschwindigkeit in unmittelbarer Nähe der Öffnung bei dem durch die Schwere erzeugten Strahl nicht erheblich von derjenigen eines durch Überdruck p_0 erzeugten Strahles abweichen kann, weil ja die Schwerkraft die Richtung des Strahles besitzt. Da aber gerade die Strömungsverhältnisse in nächster Nähe der Öffnung für die Größe der Ausflußziffer entscheidend sind, so wird man auch die Voraussetzung 4 als zulässig ansehen dürfen.

Nach den Ausführungen des I. Bandes (S. 126ff.) über ebene Potentialbewegungen können der Real- bzw. Imaginärteil einer beliebigen analytischen Funktion

$$w(z) = \varphi + i\,\psi$$

der komplexen Veränderlichen $z = x + i\,y$ als Potential φ bzw. Stromfunktion ψ einer ebenen, wirbelfreien Strömung gedeutet werden[1]. Außerdem ist dort gezeigt worden (S. 125), daß die sekundliche Durchflußmenge zwischen zwei Stromlinien (bezogen auf die Tiefe Eins) gleich der Differenz der Werte ist, welche die Stromfunktion ψ längs der betreffenden Stromlinien besitzt. In dem hier betrachteten Gefäße

[1] Man verwechsele diese Größen φ und ψ nicht mit den Koeffizienten φ und ψ auf S. 3.

(Abb. 3) erfolgt in hinreichend (theoretisch unendlich) großer Entfernung (A) vom Boden die Bewegung aller Stromfäden mit der abwärts gerichteten Geschwindigkeit v_0. Zwischen der mittleren Stromlinie (Symmetrieachse) und der durch den Gefäß- bzw. Strahlrand gebildeten Randstromlinie fließt also in der Sekunde die Flüssigkeitsmenge $\frac{Q}{2} = v_0 \cdot b$. Wählt man nun die in der Stromfunktion steckende additive Konstante so, daß für die mittlere Stromlinie der Wert $\psi_0 = 0$ gilt, so ist für die Randstromlinie $\psi_r = \frac{Q}{2} = v_0 \cdot b$. Beim Ausfluß aus dem Gefäß erfährt der Strahl eine Einschnürung, und erst in einiger (theoretisch unendlich großer) Entfernung (B) von der Ausflußöffnung laufen die Stromlinien parallel. Ihre Geschwindigkeit sei an dieser Stelle mit v_1 bezeichnet. Der Strahl hat dort die Breite $\mu \cdot 2a$ angenommen, wo μ die gesuchte Ausflußziffer darstellt (die hier wegen der vorausgesetzten Reibungsfreiheit identisch mit der Einschnürungsziffer ist). Es ist somit nach dem Kontinuitätsgesetz auch $\psi_r = \frac{Q}{2} = \mu \cdot a \cdot v_1$ und demnach

$$v_0 b = \mu a v_1 . \tag{5}$$

Faßt man nun die XY-Ebene der Abb. 3 als Ebene der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ (z-Ebene) auf, so kann nach den Erläuterungen des I. Bandes (S. 129) die Flüssigkeitsbewegung im Gefäße zwischen den Stromlinien $\psi = 0$ und $\psi = \psi_r = \frac{Q}{2}$ als eine konforme Abbildung eines Streifens der w-Ebene ($w = \psi + i\varphi$) zwischen zwei Parallelen $\psi =$ const. dargestellt werden. In dieser unmittelbaren Form läßt sich die Aufgabe jedoch nicht lösen. Es bedarf dazu eines Umweges über den sog. Geschwindigkeitsplan, den man erhält, wenn man die den einzelnen Flüssigkeitselementen einer Stromlinie zugehörigen Geschwindigkeitsvektoren von einem Festpunkt aus aufträgt und die Endpunkte dieser Vektoren miteinander verbindet.

Differenziert man $w = w(z)$ nach z, so wird (I. Bd., S. 127)

$$\frac{dw}{dz} = \bar{v} = v_x - i v_y ,$$

wo $\bar{v} = \bar{v}(z)$ wieder eine analytische Funktion von z bzw. von w ist und das Spiegelbild der Geschwindigkeit $v_x + i v_y$ an der reellen Achse darstellt. Man kann also auch die $\bar{v}$-Ebene konform auf die z-Ebene (Abb. 3) bzw. die w-Ebene (siehe oben) abbilden.

Für die Folge ist nun die Feststellung wichtig, daß das Bild in der $\bar{v}$-Ebene nichts anderes ist als der an der reellen Achse gespiegelte Geschwindigkeitsplan, dessen Gestalt festgelegt werden kann. Längs der Symmetrieachse von Abb. 3 steigt die Geschwindigkeit von v_0 auf v_1 an und ist überall abwärts gerichtet. Zur Konstruktion des Geschwindigkeitsplanes hat man also vom Nullpunkt O aus zunächst $\overrightarrow{OA} = v_0$ und $\overrightarrow{OB} = v_1$ aufzutragen (Abb. 4a). Dann entspricht $\overrightarrow{AB}$ im Geschwindigkeitsplan der mittleren Stromlinie $\psi = 0$ des Gefäßes (Abb. 3). Auf dem Strahlrande hat die Geschwindigkeit nach der Bernoullischen Gleichung überall die konstante Größe v_1, da ja der Strahl schwerelos vorausgesetzt wurde und am Strahlrand überall der konstante Luftdruck p_a herrscht. Es ist also wegen $\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_a}{\gamma} = \text{const.}$ auch $v_1 = \text{const.}$ Danach muß an der Öffnungskante D (Abb. 3) die Geschwindigkeit ebenfalls gleich v_1 sein, und zwar horizontal gerichtet. Von D bis B dreht sich der Geschwindigkeitsvektor bei gleichbleibender Größe um 90^0. Im Geschwindigkeitsplan hat man also $\overline{OD} = v_1$ zu machen und mit v_1 um O einen Viertelkreis zu schlagen. Auf der rechten Randstromlinie sinkt die Geschwindigkeit von $v_0 = \overrightarrow{OA}$ auf den Wert Null in der Ecke C und steigt von C bis D wieder auf den Wert $v_1 = \overline{OD}$ an. Punkt C fällt im Geschwindigkeitsplan mit O zusammen, und man erkennt, daß der Linienzug $ACDB$ im Geschwindigkeitsplan der Stromlinie $\psi_r = \frac{Q}{2}$

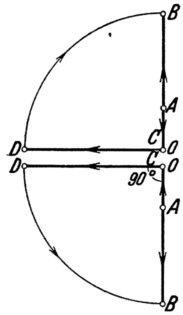


Abb. 4b. Geschwindigkeitsplan an der reellen Achse gespiegelt ($\bar{v}$-Plan).

Abb. 4a. Geschwindigkeitsplan (v-Plan).

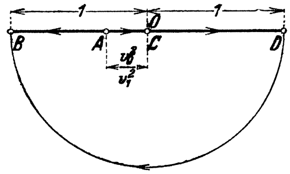


Abb. 5. ζ-Plan.

entspricht. Durch Spiegelung an der reellen Achse ergibt sich aus Abb. 4a der $\bar{v}$-Plan in Abb. 4b.

Um diesen $\bar{v}$-Plan auf den Streifen der w-Ebene abbilden zu können (siehe oben), bedarf es noch der Angabe der die konforme Abbildung vermittelnden Funktion $w(v)$. Zu diesem Zwecke soll der $\bar{v}$-Plan weiter umgeformt werden. Zunächst setze man

$$\zeta = \left(\frac{\bar{v}}{v_1}\right)^2. \tag{6}$$

Ist nun $\bar{v} = r \cdot e^{i\vartheta}$, wo r den Betrag und ϑ das Argument von $\bar{v}$ bezeichnen (I. Bd., S. 131), so wird

$$\zeta = \frac{r^2}{v_1^2} \cdot e^{2i\vartheta} = \varrho\, e^{i\delta},$$

d. h. der Betrag von ζ ist $\varrho = \left(\frac{r}{v_1}\right)^2$ und das Argument $\delta = 2\vartheta$.

Durch die Transformation (6) gehen also die Längen r der $\bar{v}$-Vektoren in die Längen ϱ, die Winkel ϑ in die Winkel δ über, so daß Abb. 4b in Abb. 5 übergeführt wird. Weiter setze man

$$\eta = \zeta + \frac{1}{\zeta} = \frac{\bar{v}^2}{v_1^2} + \frac{v_1^2}{\bar{v}^2}. \tag{7}$$

Durch diese neue Transformation wird Abb. 5 auf die obere Halbebene der Abb. 6 abgebildet; die Punkte A, B, C, D liegen dabei auf der reellen Achse, C rückt ins Unendliche. Im einzelnen ist

$$\eta_A = -\left\{\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^2 + \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2\right\}; \quad \eta_B = -2; \quad \eta_C = \infty; \quad \eta_D = 2.$$

AB entspricht der Stromlinie $\psi = 0$, $ACDB$ der Stromlinie $\psi = \psi_r = \frac{Q}{2}$. Alle anderen Stromlinien der rechten Gefäßhälfte in Abb. 3 liegen zwischen $\psi = 0$ und $\psi = \psi_r$. Sie beginnen in A (Quelle im unendlich fernen Punkt) und enden in B (Senke im unendlich fernen Punkt). Da nun alle Punkte innerhalb des Halbkreises der Abb. 5 sich durch die Transformation (7) auf die obere Halbebene der Abb. 6 abbilden, so liegen in dieser Abbildung alle Stromlinien zwischen $\psi = 0$ und $\psi = \psi_r$ oberhalb der reellen Achse; sie beginnen in A und enden in B.

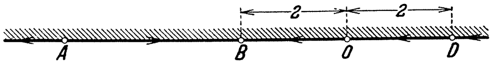


Abb. 6. η-Plan.

Schließlich mache man für das komplexe Strömungspotential $w = \varphi + i\psi$ den Ansatz

$$w = \frac{Q}{2\pi} \ln\left(-\frac{\eta - \eta_A}{\eta - \eta_B}\right), \tag{8}$$

welcher mit

$$\eta_A - \eta = r_1 \cdot e^{i\vartheta_1}, \qquad \eta - \eta_B = r_2 \cdot e^{i\vartheta_2}$$

übergeht in (vgl. Bd. I, S. 140)

$$w = \varphi + i\psi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r_1 e^{i\vartheta_1}}{r_2 e^{i\vartheta_2}} = \frac{Q}{2\pi}\left\{\ln\frac{r_1}{r_2} + i(\vartheta_1 - \vartheta_2)\right\},$$

so daß

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}(\vartheta_1 - \vartheta_2).$$

In Abb. 7 ist für einen beliebigen Punkt η der oberen Halbebene der Winkel $\vartheta_1 - \vartheta_2$ dargestellt. Man erkennt, daß den Achsenparallelen

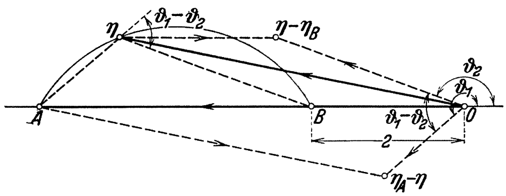


Abb. 7. Darstellung des Winkels $\vartheta_1 - \vartheta_2$.

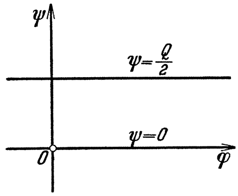


Abb. 8.

$\psi =$ const. der w-Ebene (Abb. 8) in der oberen Halbebene eine Schar von Kreisen entspricht, die durch die Punkte A und B gehen ($\vartheta_1 - \vartheta_2$ $=$ const.). Speziell entspricht der φ-Achse ($\psi = 0$) der Winkel $\vartheta_1 - \vartheta_2$ $= 0$, d. h. die Stromlinie AB; der Geraden $\psi = \frac{Q}{2}$ der Winkel $\vartheta_1 - \vartheta_2$

$=\pi$, d. h. die Verlängerung von AB nach beiden Seiten ins Unendliche, bzw. die Stromlinie $ACDB$.

Setzt man jetzt in Gl. (8) die Werte η aus (7) ein, so hat man die gesuchte Funktion $w\ (\bar{v})$ gefunden, welche die konforme Abbildung des $\bar{v}$-Planes auf die w-Ebene vermittelt. Man erhält dann:

$$w = \frac{Q}{2\pi}\cdot \ln\left\{-\frac{\frac{\bar{v}^2}{v_1^2}+\frac{v_1^2}{\bar{v}^2}+\frac{v_0^2}{v_1^2}+\frac{v_1^2}{v_0^2}}{\frac{\bar{v}^2}{v_1^2}+\frac{v_1^2}{\bar{v}^2}+2}\right\}.$$

Nun ist (S. 6)

$$\frac{dw}{dz} = \bar{v} = \frac{dw}{d\bar{v}}\cdot\frac{d\bar{v}}{dz}; \qquad dz = \frac{dw}{d\bar{v}}\cdot\frac{d\bar{v}}{\bar{v}},$$

weshalb

$$z = \int \frac{dw}{d\bar{v}}\,\frac{d\bar{v}}{\bar{v}} + C. \tag{9}$$

Um diese Integration ausführen zu können, bilde man zunächst nach (8)

$$\frac{dw}{d\bar{v}} = \frac{Q}{2\pi}\left\{\frac{\eta-\eta_B}{\eta-\eta_A}\cdot\frac{d\left(\frac{\eta-\eta_A}{\eta-\eta_B}\right)}{d\eta}\cdot\frac{d\eta}{d\bar{v}}\right\},$$

wo

$$\frac{d\left(\frac{\eta-\eta_A}{\eta-\eta_B}\right)}{d\eta} = \frac{\eta_A-\eta_B}{(\eta-\eta_B)^2}; \qquad \frac{d\eta}{d\bar{v}} = \frac{2\bar{v}}{v_1^2} - \frac{2v_1^2}{\bar{v}^3},$$

so daß

$$\frac{dw}{d\bar{v}} = \frac{Q}{2\pi}\left\{\frac{\eta_A-\eta_B}{(\eta-\eta_A)(\eta-\eta_B)}\left(\frac{2\bar{v}}{v_1^2}-\frac{2v_1^2}{\bar{v}^3}\right)\right\}.$$

Nach Einführung von η, η_A und η_B aus (7) folgt daraus

$$\frac{dw}{dz} = \frac{Q}{2\pi}\cdot\frac{\left(2-\frac{v_0^2}{v_1^2}-\frac{v_1^2}{v_0^2}\right)\left(\frac{2\bar{v}}{v_1^2}-\frac{2v_1^2}{\bar{v}^3}\right)}{\left(\frac{\bar{v}^2}{v_1^2}+\frac{v_1^2}{\bar{v}^2}+\frac{v_0^2}{v_1^2}+\frac{v_1^2}{v_0^2}\right)\left(\frac{\bar{v}^2}{v_1^2}+\frac{v_1^2}{\bar{v}^2}+2\right)}$$

und nach einigen Zwischenrechnungen wird

$$\frac{1}{\bar{v}}\cdot\frac{dw}{d\bar{v}} =$$

$$\frac{Q}{\pi}\,\frac{(v_1^2+\bar{v}^2)^2\cdot(v_0^4+v_1^4+2\,\bar{v}^2 v_0^2)-2\,(v_1^2+\bar{v}^2)\,[v_0^2\,(v_1^4+\bar{v}^4)+\bar{v}^2\,(v_0^4+v_1^4)]}{(v_1^2+\bar{v}^2)^2\cdot[v_0^2\,(\bar{v}^4+v_1^4)+\bar{v}^2\,(v_0^4+v_1^4)]}.$$

Damit geht (9) über in[1]

$$z = \frac{Q}{\pi}\int\frac{(v_0^4+v_1^4+2\,\bar{v}^2 v_0^2)\,d\bar{v}}{v_0^2\,(\bar{v}^4+v_1^4)+\bar{v}^2\,(v_0^4+v_1^4)} - \frac{2\,Q}{\pi}\int\frac{d\bar{v}}{v_1^2+\bar{v}^2} + C$$

oder

$$z = \frac{Q}{\pi}\int\frac{d\bar{v}}{\bar{v}^2+v_0^2} + \frac{Q}{\pi}\int\frac{v_0^2\,d\bar{v}}{v_0^2\,\bar{v}^2+v_1^4} - \frac{2\,Q}{\pi}\int\frac{d\bar{v}}{v_1^2+\bar{v}^2} + C$$

[1] Bieberbach, L.: Funktionentheorie S. 117. 1922.

und nach Ausführung der Integration folgt

$$z = \frac{Q}{\pi}\left\{\frac{1}{v_0}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\bar v}{v_0}\right) + \frac{v_0}{v_1^2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\bar v\, v_0}{v_1^2}\right) - \frac{2}{v_1}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\bar v}{v_1}\right)\right\} + C\,.$$

Für $z = b$ ist $\bar v = 0$ (Abb. 3), weshalb $C = b$. Für $z = a$ ist $\bar v = -v_1$, weshalb

$$a = -\frac{Q}{\pi}\left\{\frac{1}{v_0}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \frac{v_0}{v_1^2}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{v_0}{v_1}\right) - \frac{2}{v_1}\cdot\frac{\pi}{4}\right\} + b\,.$$

Nun ist nach (5) $\frac{Q}{2} = v_0 b = \mu a v_1$, demnach $\frac{Q}{v_0} = 2b$, $\frac{v_0}{v_1} = \mu\frac{a}{b}$, $\frac{Q}{v_1} = 2\mu a$. Damit geht vorstehende Gleichung über in

$$b - a = \frac{1}{\pi}\left\{2b\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{\mu a}\right) + 2\mu a\cdot\mu\frac{a}{b}\operatorname{arc\,tg}\left(\mu\frac{a}{b}\right) - \mu a\pi\right\}$$

oder, wenn man $\mu\frac{a}{b} = \varkappa$ setzt,

$$b - a = \frac{2b}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\varkappa} + \frac{2\mu a}{\pi}\cdot\varkappa\cdot\operatorname{arc\,tg}\varkappa - \mu a\,.$$

Durch Division mit μa folgt daraus

$$\frac{1}{\mu} = 1 + \frac{1}{\varkappa} - \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\varkappa}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\varkappa} - \frac{2}{\pi}\varkappa\cdot\operatorname{arc\,tg}\varkappa\,.$$

Nun ist

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\varkappa} = \operatorname{arc\,ctg}\varkappa = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\varkappa\,,$$

somit

$$\frac{1}{\mu} = 1 + \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\varkappa} - \varkappa\right)\operatorname{arc\,tg}\varkappa\,. \tag{10}$$

Durch Gleichung (10) ist ein Ausdruck für μ in Abhängigkeit lediglich von den Gefäßabmessungen a und b gefunden, so daß μ jetzt berechnet werden kann. Für den Grenzfall des sehr weiten Gefäßes geht $\frac{a}{b} \to 0$, damit auch $\varkappa \to 0$. Man erhält dann aus (10)

$$\frac{1}{\mu} = 1 + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\varkappa}\operatorname{arc\,tg}\varkappa\,; \qquad (\varkappa \to 0)\,.$$

Da aber

$$\lim_{\varkappa\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg}\varkappa}{\varkappa} = \frac{1}{1+\varkappa^2} = 1\,,$$

so wird

$$\frac{1}{\mu} = 1 + \frac{2}{\pi}$$

oder

$$\mu = \frac{\pi}{\pi + 2} = 0{,}611\,.$$

Dieser Wert wurde zuerst von Kirchhoff[1] als Ausflußzahl für einen

[1] Vgl. die Literaturangabe auf S. 4.

Spalt im Boden eines unendlich weiten Gefäßes berechnet und befindet sich mit den Versuchsergebnissen in guter Übereinstimmung.

Um den Wert μ für endliche Gefäßbreiten zu bestimmen, kann man nach R. v. Mises[1] folgendermaßen vorgehen. Man setze

$$\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \varkappa\,, \quad \text{wo} \quad 0 < \vartheta < \frac{\pi}{2}\,, \tag{11}$$

so daß

$$\frac{1}{\varkappa} - \varkappa = \operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} - \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = 2\operatorname{ctg}\vartheta\,.$$

Damit lautet Gl. (10)

$$\frac{1}{\mu} = 1 + \frac{2}{\pi}\,\vartheta\operatorname{ctg}\vartheta\,. \tag{12}$$

Man kann nun zu jedem Winkel ϑ zwischen Null und $\frac{\pi}{2}$ aus Gl. (12) μ und aus (11) $\varkappa$ berechnen. Führt man diese Werte in die Beziehung

$$\varkappa = \mu\,\frac{a}{b}$$

ein, so erhält man das zu dem betreffenden μ gehörige Verhältnis $\frac{a}{b}$, womit umgekehrt auch die gesuchte Abhängigkeit der Zahl μ von den Gefäßabmessungen gefunden ist. Auf diese Weise findet man[1]

$a:b =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\mu =$	0,611	0,612	0,616	0,622	0,633	0,644

Für die Ausflußgeschwindigkeit in die freie Luft ergibt sich im vorliegenden Falle nach (1a) wegen $p = p_0$, $F = 2\mu a$ und $F_0 = 2b$

$$v = v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{\mu a}{b}\right)^2}}$$

und somit die sekundliche Ausflußmenge, bezogen auf die Spaltlänge Eins:

$$Q = 2\,\mu\,a\,v_1 = \frac{2\,\mu\,a\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mu a}{b}\right)^2}}\,.$$

Will man diese auf die Form der Gleichung (3a) bringen, so hat man als Ausflußziffer den Wert

$$\mu_1 = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \left(\frac{\mu a}{b}\right)^2}} \tag{13}$$

einzuführen, womit

$$Q = 2\,\mu_1 a\sqrt{2gh} \tag{14}$$

[1] v. Mises, R.: Berechnung von Ausfluß- und Überfallzahlen. Z. VDI 1917 S. 471.

wird. Für die Werte μ_1 erhält man

$a:b=$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\mu_1=$	0,611	0,613	0,621	0,633	0,653	0,681

Die hier gewonnenen Rechnungsergebnisse stimmen gut mit Messungen von Weisbach[1] überein. Einen Vergleich liefert die nachstehende Tabelle, in der wieder $\frac{a}{b}$ das Verhältnis der Spaltweite zur Gefäßbreite bezeichnet, während $\frac{\mu_0}{\mu_1}$ das Verhältnis der Ausflußziffer $\mu=\mu_0$ bei $\frac{a}{b}=0$ zur Ausflußziffer μ_1 angibt. Man erhält für

$a:b=$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Nach Weißbach . . . . $\mu_1=$	1,006	1,026	1,058	1,103	1,160
Nach der obigen v. Misesschen Tabelle $\mu_1=$	1,004	1,016	1,04	1,07	1,11

R. v. Mises[2] hat die Helmholtz-Kirchhoffschen Gedankengänge auf eine Reihe technisch wichtiger Fälle angewandt, bei denen Flüssigkeit durch scharfkantige, spaltförmige Öffnungen in Boden- oder Seitenwänden eines Gefäßes austritt. Die wichtigsten Ergebnisse dieser Rechnungen seien nachstehend mitgeteilt:

1. Gefäß mit trichterförmigem Ansatz (Abb. 9):

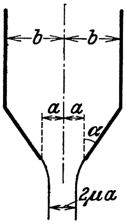


Abb. 9. Ausfluß aus einem Gefäß mit trichterförmigem Ansatz.

	$\alpha=45^0$		$\alpha=135^0$		$\alpha=180^0$	
	μ	μ_1	μ	μ_1	μ	μ_1
$\frac{a}{b}=$ 0	0,746	0,746	0,537	0,537	0,500	0,500
0,1	0,747	0,749	0,546	0,547	0,513	0,514
0,2	0,747	0,755	0,555	0,558	0,528	0,531
0,3	0,748	0,767	0,569	0,578	0,544	0,551
0,4	0,749	0,785	0,580	0,597	0,564	0,578
0,5	0,752	0,812	0,599	0,628	0,586	0,613

Der Fall $\alpha=90^0$ ist identisch mit dem oben behandelten Beispiel (Abb. 3). Der Fall $\alpha=180^0$ führt für $\frac{a}{b}=0$ zur sog. Bordaschen Mündung (Abb. 9a), für welche sich die Ausflußziffer $\mu=0{,}5$ ergibt. Dieser Wert läßt sich, wie Borda[3] erstmalig gezeigt hat, auch unmittelbar mit Hilfe des Impulssatzes ableiten. Durch Versuche ist $\mu\approx 0{,}51$ festgestellt worden, wobei zu beachten ist, daß das Verhältnis $\frac{a}{b}=0$ praktisch nicht genau erreicht werden kann.

---

[1] Weisbach, J.: Lehrb. d. Ing.- u. Masch.-Mechanik, 1. Teil S. 418. 1845. Vgl. auch Forchheimer, Ph.: Hydraulik 2. Aufl. S. 265. 1924.

[2] Fußnote 1 S. 11.

[3] Borda, J. C.: Mém. de l'Acad. Royale des Sciences. Paris 1766.

2. Trichter (Abb. 10):

Dieser Fall geht aus Abb. 9 hervor, wenn man $\frac{a}{b} = 0$ setzt. Es ergibt sich für

$\alpha =$	$22{,}5^0$	45^0	$67{,}5^0$	90^0
$\mu =$	0,855	0,746	0,666	0,611

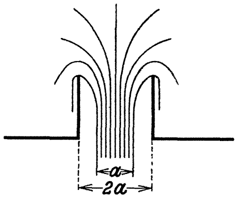


Abb. 9a. Bordasche Mündung.

während nach Versuchen von Weisbach[1] die entsprechenden Werte sind

$\mu =$	0,882	0,753	0,684	0,632

3. Seitlich liegende Öffnung in waagerechtem Boden (Abb. 11):

$\frac{a}{b} =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\mu =$	0,673	0,676	0,680	0,686	0,693	0,702

Aus μ kann μ_1 nach Gl. (13) und damit Q nach (14) berechnet werden.

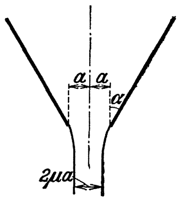


Abb. 10. Ausfluß aus einem Trichter.

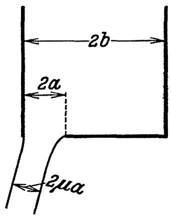


Abb. 11. Ausfluß durch seitlich liegende Öffnung in waagerechtem Boden.

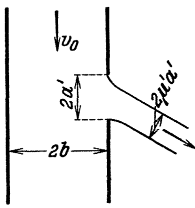


Abb. 12. Seitlicher Ausfluß.

4. Seitlicher Ausfluß bei großem Abstand der Öffnung vom Spiegel und vom Gefäßboden (Abb. 12):

Bezeichnet wieder v_0 die Geschwindigkeit im Gefäße weit oberhalb der Ausflußöffnung und v_1 die einheitliche Geschwindigkeit der einzelnen Stromfäden des Strahles in größerer Entfernung vom Gefäße, so kann mit den Bezeichnungen der Abb. 12 die sekundliche Ausflußmenge

$$Q = 2\,b\,v_0 = 2\,\mu'\,a'\,v_1$$

gesetzt werden. Damit ist die Ausflußziffer durch den Quotienten $\mu' = \frac{v_0\,b}{v_1\,a'}$ definiert.

---

[1] Forchheimer: Hydraulik 2. Aufl. S. 269.

Man erhält für

$a' : b =$	0	0,5	1,0	1,5	2	3	5
$\mu' =$	0,611	0,600	0,544	0,483	0,420	0,319	0,200

Vergleichende Versuche sind hierüber nicht bekannt.

Um im vorliegenden Falle die Ausflußmenge Q zu berechnen, muß man auf Gl. (4a), S. 4 zurückgehen, in welcher für die Tiefe Eins die Spaltlänge $l = 1$ zu setzen ist. Man entnimmt μ' aus der obigen Tabelle, schätzt zunächst v_0 und kann damit einen Näherungswert für Q nach (4a) bestimmen. Darauf ermittelt man aus $Q = 2\,b\,v_0$ das neue v_0, setzt wieder in (4a) ein, usf.

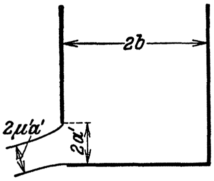


Abb. 13. Seitlicher Ausfluß am Gefäßboden.

5. Seitenöffnung am Gefäßboden (Abb. 13):

$a' : b =$	0	0,5	1,0	1,5	2	3	5
$\mu' =$	0,673	0,640	0,582	0,504	0,438	0,320	0,200

Die Ausflußmenge Q ist wieder so zu bestimmen wie unter Ziff. 4 gezeigt wurde.

Weiter oben wurde bereits verschiedentlich bemerkt, daß die hier mitgeteilten Rechnungswerte gut mit den bekanntgewordenen Versuchsergebnissen übereinstimmen, soweit letztere zu Vergleichen herangezogen werden können. In diesem Zusammenhange sei jedoch noch auf eine Arbeit von Odquist[1] hingewiesen, in der gezeigt wird, daß die Kirchhoffsche Methode der Ausflußstrahlen zu keiner eindeutigen Lösung führt, wenn man annimmt, daß in den Ecken des Gefäßes (Abb. 3) ein ruhendes Flüssigkeitsgebiet vorhanden ist, das an dem Ausflußvorgang nicht teilnimmt. Es können, wie Odquist zeigt, auf diese Weise nicht unwesentliche Abweichungen in den μ-Werten eintreten. Nach Odquists Ansicht müßten zur Behebung dieser Unbestimmtheiten weitere physikalische Tatsachen berücksichtigt werden (Zähigkeit, Adhäsion), was naturgemäß auf erhebliche Schwierigkeiten stößt.

Die vorstehend besprochene Methode der konformen Abbildung ist grundsätzlich nicht mehr verwendbar, wenn es sich um dreidimensionale Strömungen handelt, wie das z. B. der Fall ist beim Ausfluß durch Öffnungen von beliebiger Gestalt. Indessen hat sich gezeigt, daß ihre Ergebnisse im allgemeinen auch auf solche Fälle angewendet werden können (vgl. S. 18).

Um zunächst bei kreisförmiger Bodenöffnung zu einer Abschätzung der Ausflußzahl μ zu kommen, betrachte man ein seitlich unbegrenztes Gefäß, in dessen horizontalem Boden eine kreisrunde Öffnung vom Durchmesser d vorhanden ist (Abb. 14). Denkt man sich d hinreichend klein, so wird die Bewegung der Flüssigkeit im Gefäße in einiger Ent-

[1] Odquist, F. K. G.: On the determination of certain hydrodynamical problems, Ark. f. Matem., Astron. och Fysik Bd. 19 A Nr. 30. Vgl. auch Z. angew. Math. Mech. 1927 S. 409, sowie St. Bergmann: Mehrdeutige Lösungen bei Potentialströmungen mit freien Grenzen. Z. angew. Math. Mech. 1932 S. 95.

fernung von der Ausflußöffnung nahezu wie bei einer punktförmigen Senkenströmung vor sich gehen (vgl. Bd. I, S. 169), bei welcher die Geschwindigkeit radial nach der Senke gerichtet ist und den Betrag $\frac{c}{\varrho^2}$ hat ($c = \text{const.}$). Beim Verlassen der Ausflußöffnung wird der austretende Strahl eingeschnürt und hat in einiger Entfernung unterhalb der Öffnung den festbleibenden Querschnitt $\frac{\mu \pi d^2}{4}$ erreicht, wo μ wieder die Ausflußzahl bedeutet. Die Geschwindigkeit an dieser Stelle sei mit v_e bezeichnet. Zur Verwirklichung der Senkenströmung denke man sich den Wasserspiegel unendlich hoch über der Ausflußöffnung. In diesem Falle wird, wie es für die Senke sein muß, $v_e = \infty$. Nach der Energiegleichung muß dann die Geschwindigkeit auf dem ganzen Strahlrand unendlich groß sein (S. 7), also auch die horizontal gerichtete Geschwindigkeit am Rande der Ausflußöffnung. Das kann theoretisch dadurch erreicht werden, daß man $d \to 0$ gehen läßt.

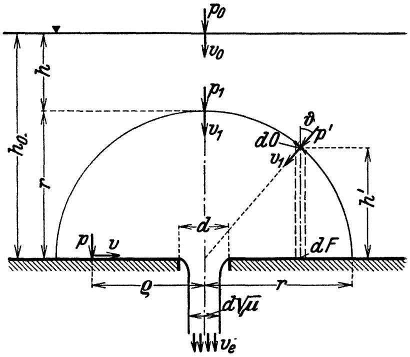


Abb. 14. Ausfluß durch kreisförmige Bodenöffnung.

Über der Ausflußöffnung grenze man jetzt durch eine Halbkugel vom Radius r einen Flüssigkeitsbereich ab und wende auf diesen den Impulssatz an (Bd. I, S. 58). Der Radius r sei so groß gewählt, daß gegenüber der Schwere dieser Halbkugel diejenige des Ausflußstrahles von der Öffnung bis zur Erreichung der größten Einschnürung vernachlässigbar klein wird. Dann muß — da die Strömung als stationär angesehen werden kann — der Überschuß des in der Zeiteinheit aus dem abgegrenzten Bereiche in vertikaler Richtung austretenden Impulses über den eintretenden gleich der Gesamtheit der auf die abgegrenzte Flüssigkeitsmasse wirkenden lotrechten Kräfte sein. Als solche kommen in Betracht: die Schwere G, die Druckresultante D auf die Oberfläche der Halbkugel und der aufwärts gerichtete Druck P des Behälterbodens.

Mit den Bezeichnungen der Abb. 14 ist nach der Bernoullischen Gleichung

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + h_0 = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma}\,.$$

Versteht man unter p lediglich den Überdruck über den Luftdruck p_0, so kann $p_0 = 0$ gesetzt werden; außerdem geht bei den hier vorausgesetzten Gefäßabmessungen $v_0 \to 0$, so daß wegen $v = \frac{c}{\varrho^2}$

$$\frac{p}{\gamma} = h_0 - \frac{v^2}{2g} = h_0 - \frac{c^2}{2g\varrho^4}\,.$$

Daraus folgt

$$P = \int p \cdot dF = \gamma \int\limits_{\varrho=\frac{d}{2}}^{\varrho=r} \left(h_0 - \frac{c^2}{2\,g\,\varrho^4}\right) 2\,\pi\,\varrho \cdot d\varrho$$

oder

$$P = 2\,\pi\,\gamma\,h_0\left(\frac{r^2}{2} - \frac{d^2}{8}\right) + 2\,\pi\,\gamma\,\frac{c^2}{2\,g}\left(\frac{1}{2\,r^2} - \frac{2}{d^2}\right).$$

Weiter ist

$$\frac{v_1^2}{2\,g} + \frac{p_1}{\gamma} + r = \frac{v_1^2}{2\,g} + \frac{p'}{\gamma} + h'$$

oder

$$p' = p_1 + \gamma\,(r - h').$$

Daraus folgt, wenn dO ein Element der Kugeloberfläche bezeichnet,

$$D = \int p' \cos\vartheta \cdot dO = \int p' \cdot dF = \int (p_1 + \gamma\,r - \gamma\,h')\,dF,$$

wobei das letzte Integral über den Grundkreis der Halbkugel zu erstrecken ist. Demnach erhält man

$$D = (p_1 + \gamma\,r)\,\pi\,r^2 - \gamma\,\tfrac{2}{3}\,\pi\,r^3.$$

Da aber

$$p_1 = \gamma\,h - \frac{\gamma\,v_1^2}{2\,g} = \gamma\,h - \frac{\gamma\,c^2}{2\,g\,r^4};$$

so wird mit $\varrho = \dfrac{\gamma}{g}$

$$D = \gamma\,h_0\,\pi\,r^2 - \frac{\varrho\,c^2\,\pi}{2\,r^2} - \frac{2}{3}\,\gamma\,\pi\,r^3.$$

Als Gesamtheit der äußeren Kräfte, die an der abgegrenzten Flüssigkeitsmasse in lotrechter Richtung wirken, erhält man somit

$$V = G + D - P = \frac{1}{4}\,\pi\,\gamma\,h_0\,d^2 - \varrho\,\pi\,\frac{c^2}{r^2} + 2\,\pi\,\varrho\,\frac{c^2}{d^2}.$$

Nach der Kontinuitätsbedingung ist

$$\mu\,\frac{\pi\,d^2}{4}\,v_e = \int v_1 \cdot dO = v_1\,2\,\pi\,r^2,$$

da aber $v_1 = \dfrac{c}{r^2}$, also $v_1\,r^2 = c$, so folgt

$$c = \frac{\mu\,d^2}{8}\,v_e.$$

Mit diesem Werte für c und wegen $h_0 = \dfrac{v_e^2}{2\,g}$ geht V über in

$$V = \frac{\pi\,\varrho\,v_e^2\,d^2}{8}\left(1 - \frac{\mu^2\,d^2}{8\,r^2} + \frac{\mu^2}{4}\right).$$

Der aus dem abgegrenzten Bereich in der Zeiteinheit unten austretende Impuls ist

$$J_u = \varrho\,Q\,v_e = \varrho\,\mu\,\frac{\pi\,d^2}{4}\,v_e^2,$$

der oben durch die Halbkugeloberfläche in lotrechter Richtung eintretende Impuls ist

$$J_o = \varrho \int v_1 \cdot dO \cdot v_1 \cos\vartheta = \varrho\, v_1^2 \int dF = \varrho\, v_1^2 \pi r^2 .$$

Wegen $v_1^2 r^2 = \frac{c^2}{r^2} = \frac{\mu^2 d^4 v_e^2}{64 r^2}$ wird also der Impulsüberschuß pro Zeiteinheit

$$\Delta J = J_u - J_o = \frac{\pi\,\varrho\, v_e^2 d^2}{8}\left(2\mu - \frac{\mu^2 d^2}{8 r^2}\right).$$

Durch Gleichsetzung der äußeren Kräfte V und des Impulsüberschusses folgt somit

$$1 + \frac{\mu^2}{4} - 2\mu = 0$$

oder

$$\mu = 4 - \sqrt{12} = 0{,}536\,^*.$$

Da sich die hier getroffenen Voraussetzungen unendlich großer Druckhöhe und unendlich kleiner Ausflußöffnung praktisch nicht verwirklichen lassen, so ist es nicht weiter verwunderlich, daß der wahre Wert μ von dem obigen Grenzwert abweicht. Die hier vorausgesetzte Senkenströmung kann sich in strenger Form nur dann einstellen, wenn die Senke punktförmig ist. Bei endlichem Spaltdurchmesser d treten jedoch in unmittelbarer Nähe der Öffnung Abweichungen von dem genauen Strömungsbild der Senke auf, welche auf die Strahlform entscheidenden Einfluß ausüben. Man erkennt das sofort aus folgender einfacher Überlegung: Hat der Durchmesser der Ausflußöffnung den endlichen Wert d, so wäre bei der hier gemachten Annahme einer Senkenströmung die horizontal gerichtete Geschwindigkeit an der Kante der Ausflußöffnung $v_a = \frac{c}{d^2/4} = \frac{\mu}{2} v_e$. Theoretisch müßte aber auf dem Strahlrande v_e konstant sein; v_a ist also zu klein. Damit wird der aufwärts gerichtete Druck P des Behälterbodens zu groß, der Impulsüberschuß also zu klein und mit ihm auch der obige Wert μ zu klein, was mit den praktischen Erfahrungen übereinstimmt.

Eine im Sinne der Hydrodynamik strenge Lösung des Problems hat E. Trefftz[1] gegeben, welcher den Ausflußvorgang als axial-symmetrische Potentialströmung (Bd. I, S. 165) behandelt. Aus der Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ (φ = Geschwindigkeitspotential, Bd. I, S. 113) entwickelt er mit Hilfe des Greenschen Satzes eine Integralgleichung und bestimmt den Strahlrand sowie die Ausflußziffer μ mittels eines Verfahrens sukzessiver Annäherung. Auf diese Weise findet er im Mittel die mit praktischen Messungen und — überraschenderweise — auch mit dem Kirchhoffschen Wert (S. 10) gut übereinstimmende

* Diesen Wert hat zuerst Fr. Kötter als untere Grenze für die Ausflußziffer angegeben; als obere Grenze findet er $\mu = 0{,}71$; vgl. Arch. Math. Phys. 1887 S. 415, 417.

[1] Trefftz, E.: Diss. Straßburg 1914; vgl. auch Z. Math. Phys. 1916 S. 34: Über die Kontraktion kreisförm. Flüssigkeitsstrahlen.

Zahl $\mu = 0{,}61$. Man darf demnach wohl vermuten, daß bei sonst gleichen Voraussetzungen (große Druckhöhe, sehr weites Gefäß) die Form der Ausflußöffnung auf die Größe von μ keinen wesentlichen Einfluß hat.

3. Weitere Angaben über die Ausflußziffer.

Mit Rücksicht auf die große Bedeutung, die der Ausflußvorgang für die Praxis besitzt, sind zur Ermittlung der Ausflußziffer von Technikern und Physikern sehr eingehende Versuche angestellt worden. Eine sorgfältige Zusammenstellung dieser Versuche ist in Forchheimers[1] „Hydraulik" zu finden. Hier sollen nur noch einige die vorhergehenden Betrachtungen ergänzende Angaben folgen.

Für kreisförmige Bodenöffnungen in dünner Wand fand Borda[2] $\mu = 0{,}625$ in guter Übereinstimmung mit dem theoretischen Ergebnis von Trefftz (s. oben). Weisbach[3] untersuchte den Ausfluß durch scharfkantige, kreisrunde Öffnungen in lotrechter Wand und fand für

Durchmesser von	1	2	3	4 [cm]
bei $h = 0{,}6$ [m] Druckhöhe . . . . . $\mu =$	0,628	0,621	0,614	0,607
bei $h = 0{,}25$ [m] Druckhöhe . . . . . $\mu =$	0,637	0,629	0,622	0,614

Die sekundliche Ausflußmenge Q ist hier nach Gl. (3a) zu berechnen. Man erkennt aus vorstehender Tabelle bereits die Abhängigkeit der Zahl μ von der Druckhöhe h. Noch besser tritt diese Abhängigkeit in Erscheinung bei den Messungen von Farmer[4]. Dieser benutzte einen Wasserbehälter von 28 Fuß Höhe (1 Fuß = 0,3048 m) und 25 Quadratfuß Querschnitt; die Öffnung betrug für alle Versuche 0,19635 Quadratzoll (1 Zoll = 25,4 mm). Farmer fand (auf 3 Dezimalen abgerundet):

h (Fuß)	μ			
	Kreis	Quadrat stehend	Rechteck 4:1 breit	Rechteck 16:1 breit
1	0,620	0,628	0,643	0,664
2	0,613	0,623	0,636	0,651
4	0,608	0,618	0,629	0,642
6	0,607	0,616	0,627	0,637
8	0,606	0,614	0,625	0,635
10	0,605	0.613	0,624	0,633
20	0,603	0.611	0,621	0,629

Weiter seien noch einige Messungen von Poncelet, Lesbros und Smith mitgeteilt, die sich auf rechteckige und kreisrunde Öffnungen in lotrechten, dünnen Wänden beziehen, und zwar in Abhängigkeit von

[1] 3. Aufl. S. 335ff. Leipzig-Berlin 1930. [2] Vgl. S. 12. [3] a. a. O. S. 405.
[4] Farmer, J. T.: Proc. Roy. Soc. Canada Bd. 2 (1896); vgl. auch Auerbach-Hort: Handb. d. phys. u. techn. Mech. Bd. 5 S. 229.

der Größe und Tiefenlage der Ausflußöffnung[1]. Dabei ist mit den Bezeichnungen der Abb. 15 und 15a für das Rechteck

$$Q = \mu\, a\, b \sqrt{2\, g\, h_0}$$

und für den Kreis

$$Q = \mu\, \pi\, r^2 \sqrt{2\, g\, h_0}\,.$$

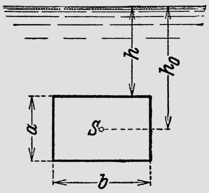


Abb. 15. Ausfluß durch rechteckigen Querschnitt.

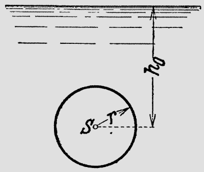


Abb. 15a. Ausfluß durch kreisförmigen Querschnitt.

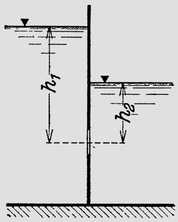


Abb. 16. Ausfluß unter Wasser.

Höhe h in cm über dem oberen Rand	μ für Rechteck von 20 cm Breite				
	Rechteckshöhe a in cm				
	1	2	5	10	20
5	0,680	0,658	0,625	0,605	0,585
10	0,667	0,655	0,630	0,611	0,592
20	0,655	0,649	0,631	0,615	0,598
60	0,641	0,638	0,627	0,617	0,604
100	0,629	0,632	0,625	0,615	0,605
200	0,613	0,613	0,613	0,607	0,601
300	0,609	0,608	0,606	0,603	0,601

Höhe h_0 über Mittelpunkt in cm	μ für den Kreis				
	Radius r in cm				
	1	2	6	18	30
10	0,642	0,626			
20	0,639	0,619			
50	0,626	0,609	0,600		
100	0,619	0,605	0,599	0,598	
200	0,611	0,603	0,597	0,596	0,596
600	0,600	0,597	0,596	0,596	0,594
1500	0,596	0,595	0,594	0,594	0,593

Die vorstehenden Angaben beziehen sich auf den Fall „vollkommener“ Einschnürung, d. h. auf Öffnungen, die so weit von dem Gefäßboden entfernt sind, daß die Gefäßform praktisch keinen Einfluß auf die Einschnürung des Strahles besitzt. Befindet sich die Ausflußöffnung jedoch in der Nähe einer Gefäßwand, so kann eine teilweise Behinderung der Einschnürung eintreten, was eine entsprechende Vergrößerung der Zahl μ und damit der Ausflußmenge Q zur Folge hat. Man spricht dann von „unvollkommener“ Einschnürung (vgl. dazu die Rechnungsergebnisse auf S. 13 u. 14).

Beim Ausfluß von Wasser aus einem weiten Gefäß mit kleiner Seitenöffnung in ein Nachbargefäß, das ebenfalls Wasser enthält, jedoch von kleinerer Spiegelhöhe als das erste (Abb. 16), ist die ideelle Ausflußgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2\, g\, (h_1 - h_2)}\,.$$

[1] Forchheimer: a. a. O. S. 344 u. 346, sowie Grundriß der Hydraulik S. 79 u. 80. Leipzig 1920.

Demnach würde, mit F als Ausflußquerschnitt, die sekundliche Ausflußmenge

$$Q = \mu_1 F \sqrt{2\,g\,(h_1 - h_2)}$$

betragen, wo μ_1 wieder die Ausflußziffer bezeichnet. Nach Versuchen von Weisbach ist dieser Beiwert stets etwas kleiner als der entsprechende Wert μ beim Ausfluß in die freie Luft, und zwar im Mittel $\mu_1 \approx 0{,}98\,\mu$.

Schließlich sei noch auf einen Ausflußvorgang hingewiesen, der mit den unter Ziffer 2 besprochenen Rechnungen im engen Zusammenhange steht: Es ist das der freie (vom Unterwasser unbeeinflußte) Ausfluß am Fuße einer Wand mit scharfer Öffnungskante (Grundablaß, Abb. 17). Im Falle lotrechter Wand erhält man diesen Strömungsvorgang, wenn man sich die linke Gefäßhälfte der Abb. 3 (S. 4) um 90^0 gedreht

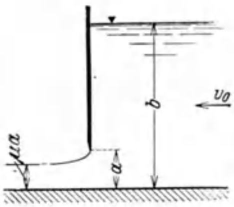


Abb. 17. Grundablaß.

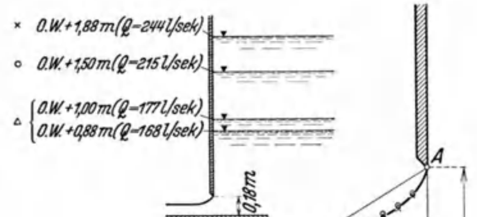
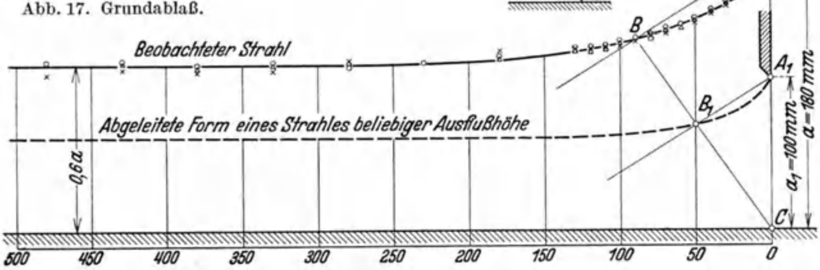



Abb. 17a. Grundablaß nach Versuchen von Koch.

denkt. (Über den Einfluß der Schwerewirkung vgl. S. 33). Nach der Theorie müßte also bei hinreichend großem Verhältnis $b:a$ die Ausflußziffer μ etwa 0,61 bis 0,62 betragen (vgl. die Tabelle auf S. 11). Dieses Ergebnis stimmt nun recht gut überein mit Messungen von Koch[1], welcher $\mu = 0{,}6$ fand; allerdings soll nach Koch dieser Wert unabhängig von der Oberwasserhöhe, d. h. dem Verhältnis $a:b$ sein. Koch stellte auf Grund seiner Versuche weiter fest, daß veränderten Höhen der Ausflußöffnung geometrisch ähnliche Ausflußzahlen entsprechen. In Abb. 17a sind die Versuchsergebnisse zur Darstellung gebracht[2].

Nach Messungen von Keutner[3] ist die Geschwindigkeit in dem

---

[1] Koch-Carstanjen: Von der Bewegung des Wassers und den dabei auftretenden Kräften, S. 214. Berlin 1926.

[2] Aus dem unter [1] zitierten Werke entnommen.

[3] Keutner, Chr.: Wasserabführungsvermögen von scharfkantigen und abgerundeten Planschützen. Bautechn. 1932 S. 268 Abb. 4.

eingeschnürten Strahl nahezu konstant und besitzt die Größe

$$v = \sqrt{2\,g\left(b + \frac{v_0^2}{2\,g} - \mu\,a\right)},$$

so daß die sekundliche Ausflußmenge

$$Q = v\,B\,\mu\,a = \mu\,B\,a\sqrt{2\,g\left(b + \frac{v_0^2}{2\,g} - \mu\,a\right)}$$

beträgt, wenn B die Breite der Ausflußöffnung bezeichnet.

In ähnlicher Weise können bei schräggestellter Wand (Abb. 18) die v. Misesschen Rechnungsergebnisse für das Gefäß mit trichterförmigem Ansatz (Abb. 9) verwendet werden. Bei $\alpha = 45^0$ ergibt sich z. B. aus der zugehörigen Tabelle für $a : b = 0{,}4$ der Wert $\mu_1 = 0{,}785$, für $a : b = 0{,}5$ der Wert $\mu_1 = 0{,}812$. Zum Vergleiche können die Messungen von Poncelet[1] herangezogen werden, nach denen bei $\alpha = 45^0$ $\mu_1 = 0{,}8$ sein soll, wobei allerdings das Verhältnis $a : b$ nicht angegeben ist.

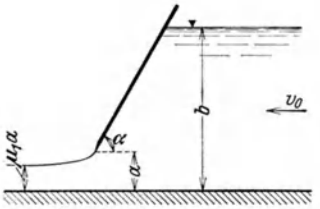


Abb. 18. Grundablaß mit schrägstehender Wand.

Die hier besprochene Strömung stellt sich nur beim sog. freien Ausfluß ein, der von den Abflußvorgängen im Unterwasser unbeeinflußt bleibt. Daneben ist noch eine andere Abflußart möglich, bei welcher der Unterwasserspiegel höher liegt als die Unterkante der Wand, so daß der Ausfluß unter Wasser erfolgt. Dieser Strömungsvorgang ist wesentlich verwickelter als der hier beschriebene (vgl. dazu die oben genannte Arbeit von Keutner).

4. Ausfluß durch Ansatzrohre.

Setzt man vor die Ausflußöffnung eines weiten Gefäßes ein zylindrisches Ansatzrohr mit scharfkantigem Übergang von der Gefäßwand zur Rohrwandung (Abb. 19), so ergibt sich im allgemeinen eine Steigerung der Ausflußmenge Q gegenüber dem scharfkantigen Ausfluß ohne Ansatzrohr. Beim Eintritt in das Rohr findet zunächst eine Einschnürung des Strahles statt, der sich dann aber wieder erweitert und an die Rohrwandung anlegt. Zwischen dem eingeschnürten Strahl und der Rohrwand entsteht ein mit Luft vermischtes wirbelndes Totwassergebiet. Beim Austritt an die Luft sind — hinreichend große Rohrlänge l vorausgesetzt — die einzelnen Stromfäden parallel und stehen unter dem äußeren Druck p_0. Da nun die Geschwindigkeit v_e an der Einschnürungsstelle aus

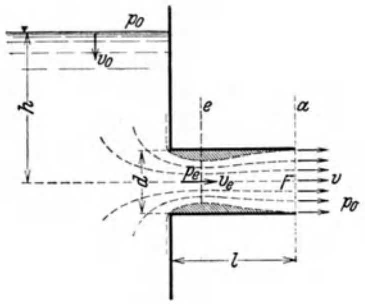


Abb. 19. Ausfluß durch Ansatzrohr.

[1] Forchheimer: Hydraulik, a. a. O. S. 351.

Gründen der Kontinuität größer als die Ausflußgeschwindigkeit v ist, so muß an der Einschnürungsstelle ein Unterdruck ($p_e < p_0$) herrschen. Der Geschwindigkeit v_e entspricht also eine Druckhöhe, die größer als h ist, so daß v_e größer sein muß als wenn der Strahl an dieser Stelle ins Freie treten würde. Die größere Geschwindigkeit hat aber eine Steigerung der Ausflußmenge Q zur Folge. Damit dieser Vorgang eintreten kann, ist es notwendig, daß der Strahl im Rohre keine freie Oberfläche besitzt, sondern vor seinem Austritt an der Rohrwand anliegt, was bei kleiner Druckhöhe h eher der Fall ist als bei großer. Nach Messungen von Bidone, Weisbach u. a. ist bei einem Verhältnis $l:d = 2\frac{1}{2}$ bis 3 der Ausflußbeiwert in der Formel

$$Q = \mu' F \sqrt{2gh}$$

im Mittel $\mu' = 0{,}815$. Bei wachsender Rohrlänge nimmt μ' ab, was auf Reibungseinflüsse zurückzuführen ist. Für $\frac{l}{d} \leqq 1$ wird μ' etwa so groß wie beim scharfkantigen Ausfluß ohne Ansatzrohr, da bei dieser kleinen Rohrlänge der Strahl an der Rohrwand nicht mehr zum Anliegen kommt. Eine Vergrößerung der Ausflußmenge Q findet auch bei hinreichend langem Rohr nicht statt, wenn der Strahl in einen luftleeren Raum austritt, da in diesem Falle ein Unterdruck sich nicht einstellen kann.

Ohne Ansatzrohr würde beim scharfkantigen Ausfluß bekanntlich

$$Q \approx 0{,}62 F \sqrt{2gh}$$

sein, woraus die durch das Ansatzrohr bedingte Vergrößerung von Q ersichtlich ist. Daß Q unter dem theoretischen Wert $F\sqrt{2gh}$ bleibt, hat seinen Grund einmal in der Flüssigkeitsreibung und ferner darin, daß im Rohre beim Übergang der Geschwindigkeit von dem Werte v_e auf den Wert v durch Vermischung mit dem Totwasser, das den Strahl umgibt, ein Verlust an Strömungsenergie stattfindet.

Man kann diesen Verlust näherungsweise mit Hilfe des Impulssatzes berechnen, wenn man sich in Abb. 19 den durch die Linien e und a eingeschlossenen Flüssigkeitsbereich abgegrenzt denkt. Dann muß — stationäre Strömung vorausgesetzt — der Überschuß des aus diesem Bereiche austretenden Impulses über den eintretenden Impuls pro Zeiteinheit gleich der Druckdifferenz auf die Stirnflächen sein, also

$$(p_e - p_0) F = \varrho Q (v - v_e) = \varrho F v (v - v_e).$$

Andererseits ist nach der Bernoullischen Gleichung unter Berücksichtigung einer „Verlusthöhe" h_v (Bd. I S. 69)

$$\frac{p_e - p_0}{\gamma} = \frac{v^2 - v_e^2}{2g} + h_v.$$

Demnach ergibt sich als Verlusthöhe in dem Bereiche $e - a$:

$$h_v = \frac{(v_e - v)^2}{2g}.$$

Wendet man jetzt auf einen Punkt des Spiegels und des Strahlaustrittes die **erweiterte Bernoullische Gleichung** an, so erhält man (Abb. 19)

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + h = \frac{v^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + h_v$$

oder mit $v_0 \approx 0$

$$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{(v_e - v)^2}{2g}.$$

Die Geschwindigkeit v_e hängt von der Größe der Einschnürungsziffer ψ im Rohre ab und ist mit der Austrittsgeschwindigkeit v durch die Beziehung verknüpft $v_e = \frac{v}{\psi}$. Demnach wird

$$h = \frac{v^2}{2g\psi^2}(2\psi^2 - 2\psi + 1)$$

Abb. 20. Konisches Ansatzrohr.

und somit

$$v = \frac{\psi}{\sqrt{2\psi^2 - 2\psi + 1}}\sqrt{2gh}.$$

Für $\psi = 0{,}62$ folgt daraus $v = 0{,}85\sqrt{2gh}$, in befriedigender Übereinstimmung mit den oben angegebenen Messungen.

Weisbach untersuchte auch den Fall eines gegen die Wandnormale um den Winkel δ geneigten Ansatzrohres und fand für die Ausflußziffer[1] bei

$\delta =$ 0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
$\mu' =$ 0,815	0,799	0,782	0,764	0,747	0,731	0,719

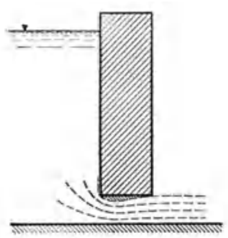


Abb. 21. Ausfluß unter einer Staumauer.

Für konische Ansatzrohre (Abb. 20) hat Zeuner[2] auf Grund einer Versuchsreihe von Weisbach mit Kegelstutzen von 2 cm Austrittsweite und abgerundeter Innenkante eine empirische Formel aufgestellt. Danach soll sein:

$$\mu' = 0{,}6385 + 0{,}2121\cos^3\left(\frac{\delta}{2}\right) + 0{,}1065\cos^4\left(\frac{\delta}{2}\right).$$

Die Tatsache des Unterdruckes in Ansatzrohren spielt u. a. auch eine Rolle im praktischen Wehrbau. Abb. 21 zeigt z. B. eine vertikale Stauwand, die im angehobenen Zustande in ähnlicher Weise wirkt wie ein Gefäß mit Ansatzrohr. Der am Fuße der Wand auftretende Unterdruck kann zu einer erheblichen Verminderung des Auftriebes führen, worauf bei der Bemessung des Hubmechanismus zu achten ist. Aus diesem Grunde empfiehlt es sich, die Stauwand am Fuß so auszubilden, daß Unterdrücke bzw. Saugwirkung nach Möglichkeit ausgeschlossen sind, was am besten durch scharfe Unterkanten erreicht werden könnte (Abb. 17 u. 18). Da diese aber mit Rücksicht auf die erforderliche Ab-

[1] Nach Forchheimer: Hydraulik, a. a. O. S. 354.
[2] Ziviling. 1856 S. 54.

dichtung nicht möglich sind, so schlägt H. Kulka[1] eine Formgebung nach Abb. 22 vor, bei welcher der Dichtungsbalken wie ein Mundstück wirkt, durch das eine Kontraktion des austretenden Strahles verhindert wird.

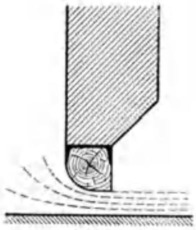


Abb. 22. Düsenartige Form des Dichtungsbalkens einer Stauwand.

Hinsichtlich des Abflusses unter walzen- und segmentförmigen Staukörpern wird auf die entsprechenden Ausführungen in Bd. I S. 144 u. 145 verwiesen.

5. Gefäßentleerung und Ausflußzeit.

Ein beliebig gestaltetes Gefäß sei mit Flüssigkeit gefüllt, deren Spiegel anfangs um die Höhe z_0 über der Ausflußöffnung F_2 liegt (Zustand der Ruhe zur Zeit $t = 0$, Abb. 23). Nach Öffnung des Ausflußquerschnittes tritt eine nichtstationäre Flüssigkeitsbewegung ein, in deren Verlauf der Spiegel sinkt. Zur Zeit t habe er die Höhe z_1 über der Ausflußöffnung erreicht. Der von ihm zu dieser Zeit erfüllte Gefäßquerschnitt sei F_1, c_1 die mittlere Spiegelgeschwindigkeit, während F und c die entsprechenden Werte eines beliebigen anderen Querschnittes unter dem Spiegel und c_2 die Ausflußgeschwindigkeit bezeichnen mögen.

Zur Darstellung des Bewegungsvorganges schreibe man die erweiterte Bernoullische Gleichung für Stromfäden von großen Querschnittsabmessungen an (Bd. I S. 71):

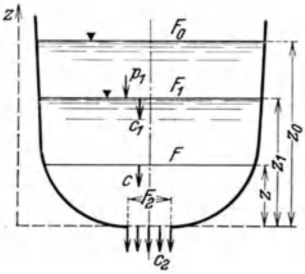


Abb. 23. Zur Berechnung der Ausflußzeit.

$$\frac{\alpha_1 c_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\alpha_2 c_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + h_v + \frac{\alpha'}{g}\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial c}{\partial t}\, ds\,. \tag{15}$$

Darin bedeuten α_1, α_2 und α' Korrekturfaktoren, durch welche die ungleichmäßige Verteilung der Geschwindigkeit über den Gefäßquerschnitt berücksichtigt werden soll, p_1 und p_2 die den Querschnitten F_1 und F_2 entsprechenden mittleren Drücke und h_v die sog. „Verlusthöhe" infolge der Wandreibung. Nun ist nach dem Kontinuitätsgesetz

$$c_2^2 = \frac{c_1^2 F_1^2}{\mu^2 F_2^2}\,, \tag{16}$$

wenn μ die Ausflußziffer bezeichnet. Wirkt außerdem, wie hier angenommen sei, auf den Spiegel der atmosphärische Luftdruck und erfolgt auch der Ausfluß in die freie Luft, so wird p_1 gleich p_2 und Gl. (15) geht unter Berücksichtigung von (16) über in:

$$\frac{c_1^2}{2g}\left(\alpha_1 - \alpha_2 \frac{F_1^2}{\mu^2 F_2^2}\right) + z_1 = h_v + \frac{\alpha'}{g}\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial c}{\partial t}\, ds\,. \tag{17}$$

[1] Kulka, H.: Der Eisenwasserbau Bd. 1 S. 133. Berlin 1928.

Für die Verlusthöhe h_v gilt (Bd. I S. 90)

$$h_v = \int_{s_1}^{s_2} \psi \frac{c^2}{2 g r_h} \cdot ds ,$$

wo ψ die Widerstandsziffer und r_h den hydraulischen Radius bezeichnen. Wegen $cF = c_1 F_1$ wird also

$$h_v = \frac{c_1^2 F_1^2}{2g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\psi}{r_h F^2} ds . \tag{18}$$

Weiter ist

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial c}{\partial t} ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{c_1 F_1}{F}\right) ds = F_1 \frac{d c_1}{dt} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{F} . \tag{19}$$

Führt man die Ausdrücke (18) und (19) in Gl. (17) ein, so geht diese über in

$$\frac{c_1^2}{2g}\left(\alpha_2 \frac{F_1^2}{\mu^2 F_2^2} - \alpha_1 + F_1^2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{\psi \cdot ds}{r_h F^2}\right) - z_1 + \frac{\alpha' F_1}{g} \frac{d c_1}{dt} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{F} = 0 . \tag{20}$$

Zur Abkürzung setze man jetzt

$$\frac{1}{2g}\left(\alpha_2 \frac{F_1^2}{\mu^2 F_2^2} - \alpha_1 + F_1^2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{\psi \cdot ds}{r_h F^2}\right) = f(z_1) \tag{21}$$

und

$$\frac{\alpha' F_1}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{F} = g(z_1) , \tag{22}$$

wo $f(z_1)$ und $g(z_1)$ zwei (von der Gefäßform abhängige) Funktionen von z_1 sind. Damit lautet Gl. (20)

$$c_1^2 \cdot f(z_1) - z_1 + \frac{d c_1}{dt} g(z_1) = 0 .$$

Führt man hier schließlich noch

$$c_1 = -\frac{d z_1}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d c_1}{dt} = -\frac{d^2 z_1}{dt^2}$$

ein, so erhält man die Bewegungsgleichung

$$\left(\frac{d z_1}{dt}\right)^2 f(z_1) - z_1 - \frac{d^2 z_1}{dt^2} g(z_1) = 0 ,$$

welche mit

$$F(z_1) = \frac{f(z_1)}{g(z_1)} \quad \text{und} \quad G(z_1) = \frac{z_1}{g(z_1)} \tag{23}$$

übergeht in

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} - \left(\frac{d z_1}{dt}\right)^2 F(z_1) + G(z_1) = 0 .$$

Durch die Substitution

$$\frac{dz_1}{dt} = u; \qquad \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{dz_1}{dt} \cdot \frac{du}{dz_1} = u \frac{du}{dz_1}$$

wird diese Gleichung übergeführt in die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{du}{dz_1} - u F(z_1) = - \frac{G(z_1)}{u},$$

welche nach der Methode von **B e r n o u l l i** integriert werden kann[1]. Zu diesem Zwecke setze man

$$u = v w; \qquad \frac{du}{dz_1} = v \frac{dw}{dz_1} + w \frac{dv}{dz_1},$$

so daß

$$v \frac{dw}{dz_1} + w \left[\frac{dv}{dz_1} - v F(z_1) \right] = - \frac{G(z_1)}{v w}. \tag{24}$$

Von den Funktionen v und w kann e i n e willkürlich gewählt werden; es sei also v so bestimmt, daß in vorstehender Gleichung die eckige Klammer verschwindet. Dann wird

$$\frac{dv}{dz_1} = v \cdot F(z_1) \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{v} = F(z_1)\, dz_1,$$

woraus folgt

$$\ln v = \int F(z_1)\, dz_1 \quad \text{oder} \quad v = e\,.$$

Weiter ergibt sich aus (24)

$$v \frac{dw}{dz_1} = - \frac{G(z_1)}{v w} \quad \text{oder} \quad w \cdot dw = - \frac{G(z_1)}{e^{2 \int F(z_1)\, dz_1}}\, dz_1$$

und daraus durch Integration

$$w^2 = -2 \int \left[G(z_1) \cdot e^{-2 \int F(z_1)\, dz_1} \right] dz_1 + C\,.$$

Demnach wird

$$u = v w = \pm e^{\int F(z_1)\, dz_1} \sqrt{C - 2 \int \left[G(z_1) \cdot e^{-2 \int F(z_1)\, dz_1} \right] dz_1}\,. \tag{25}$$

Da aber

$$u = \frac{dz_1}{dt} = - c_1\,, \tag{26}$$

so bestimmt sich die Integrationskonstante C aus der Bedingung $u = 0$ für $z_1 = z_0$. Schließlich erhält man die Zeit t, die verstreicht, bis der Spiegel von der Höhe z_0 auf die Höhe z_1 gesunken ist, aus (25) und (26) zu

$$t = \pm \int \frac{dz_1}{e^{\int F(z_1)\, dz_1} \sqrt{C - 2 \int \left[G(z_1) \cdot e^{-2 \int F(z_1)\, dz_1} \right] dz_1}} + C'. \tag{27}$$

Die Integrationskonstante C' findet man aus der Bedingung $t = 0$ für $z_1 = z_0$.

---

[1] Vgl. etwa L. **K i e p e r t**: Integralrechnung 14. Aufl. Bd. 2 S. 167. 1929.

Durch die Gl. (25) und (27) ist prinzipiell die Spiegelgeschwindigkeit c_1 und die Ausflußzeit t bestimmt, sobald F_1 als Funktion von z_1 gegeben, d. h. die Gefäßform bekannt ist. Die gesamte Entleerungszeit erhält man aus (27), indem man dort nach Ausführung der Integration $z_1 = 0$ setzt.

Prismatische Gefäße mit kleiner Bodenöffnung.

In diesem praktisch besonders wichtigen Falle tritt eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung ein. Zunächst ist $F_1 = F = \text{const.}$ Bezeichnet man ferner mit $n = \frac{F}{F_2}$ das Verhältnis des Gefäßquerschnittes zum Ausflußquerschnitt, wobei n in konkreten Fällen im allgemeinen ein großer Wert ist (etwa $n = 100$), so geht $f(z_1)$ nach (21) über in

$$f(z_1) = \frac{1}{2g}\left(\alpha_2 \frac{n^2}{\mu^2} - \alpha_1 + \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{\psi}{r_h}\, ds\right). \tag{28}$$

Für die Widerstandsziffer $\psi = \frac{\lambda}{4}$ kann in erster Näherung (S. 64) $\psi = \frac{0{,}03}{4} = 0{,}0075$ eingeführt werden, so daß der Integralwert in (28) mit $r_h = \text{const.}$ übergeht in $0{,}0075 \cdot \frac{z_1}{r_h}$; er stellt also eine sehr kleine Zahl dar, die gegenüber $\frac{n^2}{\mu^2}$ unbedenklich vernachlässigt werden darf. Physikalisch bedeutet dieses, daß im vorliegenden Falle die „Verlusthöhe" praktisch keine Rolle spielt. Da aber auch $\alpha_1 \ll \alpha_2 \frac{n^2}{\mu^2}$ ist, so kann an Stelle von (28) mit hinreichender Genauigkeit $f(z_1) = \frac{1}{2g}\left(\alpha_2 \frac{n^2}{\mu^2}\right) = \text{const.}$ gesetzt werden. In Wirklichkeit ist μ zwar mit z_1 etwas veränderlich (vgl. die Versuche von Farmer, S. 18), worauf hier aber keine Rücksicht genommen werden soll. Ferner ist nach (22) $g(z_1) = \frac{\alpha' z_1}{g}$, so daß nach (23)

$$F(z_1) = \frac{\alpha_2}{\alpha'} \cdot \frac{n^2}{2\mu^2 z_1} = \frac{C_1}{z_1}, \quad \text{wo} \quad C_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha'} \cdot \frac{n^2}{2\mu^2}$$

und

$$G(z_1) = \frac{g}{\alpha'} = C_2.$$

Mit diesen Werten wird

$$v = e^{\int F(z_1)\, dz_1} = e^{C_1 \int \frac{dz_1}{z_1}} = e^{C_1 \ln z_1} = z_1^{C_1}$$

und

$$w^2 = -2C_2 \int \left(e^{-2C_1 \int \frac{dz_1}{z_1}}\right) dz_1 + C$$
$$= -2C_2 \int \left(z_1^{-2C_1}\right) dz_1 + C = -2C_2 \frac{z_1^{1-2C_1}}{1-2C_1} + C.$$

Somit ist nach (25)

$$u = vw = \pm z_1^{C_1} \sqrt{C + \frac{2 C_2}{2 C_1 - 1} z_1^{-(2 C_1 - 1)}} = - c_1 .$$

Für $z_1 = z_0$ wird $c_1 = 0$, also $C = - \frac{2 C_2}{2 C_1 - 1} z_0^{-(2 C_1 - 1)}$, demnach

$$c_1 = z_1^{C_1} \sqrt{\frac{2 C_2}{2 C_1 - 1} \left(\frac{1}{z_1^{2 C_1 - 1}} - \frac{1}{z_0^{2 C_1 - 1}} \right)} . \tag{29}$$

Schließlich wird nach (26)

$$t = - \int \frac{d z_1}{z_1^{C_1} \sqrt{\frac{2 C_2}{2 C_1 - 1} \left(\frac{1}{z_1^{2 C_1 - 1}} - \frac{1}{z_0^{2 C_1 - 1}} \right)}} + C' . \tag{30}$$

Die Gleichungen (29) und (30) sollen jetzt noch weiter umgeformt werden. Aus (29) folgt

$$c_1 = \sqrt{\frac{2 C_2}{2 C_1 - 1} \left(z_1 - \frac{z_1^{2 C_1}}{z_0^{2 C_1 - 1}} \right)} = \sqrt{\frac{2 C_2}{2 C_1 - 1} z_1 \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{z_0}{z_1} \right)^{2 C_1 - 1}} \right]} .$$

Führt man hier die Werte $C_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha'} \cdot \frac{n^2}{2 \mu^2}$ und $C_2 = \frac{g}{\alpha'}$ ein, so wird

$$c_1 = \sqrt{\frac{2 g z_1}{\alpha' \left(\frac{\alpha_2}{\alpha'} \frac{n^2}{\mu^2} - 1 \right)} \, 1 - \left[\frac{1}{\left(\frac{z_0}{z_1} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha'} \cdot \frac{n^2}{\mu^2} - 1}} \right]} ,$$

wofür bei einem großen Verhältniswert n genau genug gesetzt werden kann

$$c_1 = \frac{\mu}{n \sqrt{\alpha_2}} \sqrt{2 g z_1} .$$

Schließlich darf mit Rücksicht auf die Unsicherheit in der Wahl der Ausflußziffer μ näherungsweise $\sqrt{\alpha_2} = 1$ gesetzt werden, so daß

$$c_1 = \frac{\mu}{n} \sqrt{2 g z_1} \tag{31}$$

wird. Dieser Spiegelgeschwindigkeit entspricht nach dem Kontinuitätsgesetz $c_1 F_1 = \mu c_2 F_2$ und wegen $\frac{F_1}{F_2} = n$ die Ausflußgeschwindigkeit

$$c_2 = \sqrt{2 g z_1} ,$$

d. h. man kann letztere ohne Rücksicht auf den nichtstationären Charakter der Strömung sofort nach dem Torricellischen Theorem anschreiben. Für die Ausflußzeit ergibt sich somit wegen (31) und unter

Beachtung von (26)

$$t = -\frac{n}{\mu}\int \frac{d z_1}{\sqrt{2g}} z_1^{-1/2} + C' = -\frac{2n}{\mu\sqrt{2g}} z_1^{1/2} + C'.$$

Für $t = 0$ ist $z_1 = z_0$, also $C' = \frac{2n}{\mu\sqrt{2g}} z_0^{1/2}$ und demnach

$$t = \frac{2n}{\mu\sqrt{2g}}\left(\sqrt{z_0} - \sqrt{z_1}\right).$$

Die gesamte Entleerungszeit beträgt also mit $z_1 = 0$

$$t' = \frac{2n}{\mu}\sqrt{\frac{z_0}{2g}}.$$

Aus dem vorstehenden Beispiel ist ersichtlich, daß die Beschleunigung der an sich nicht stationären Flüssigkeitsbewegung keinen wesentlichen Einfluß auf den Ausflußvorgang hat, sobald der Behälterquerschnitt groß gegenüber der Ausflußöffnung ist, was praktisch fast immer der Fall sein wird. Man kann also die hier gewonnenen Ergebnisse auch auf nichtprismatische Gefäße anwenden (z. B. Abb. 23), sofern nur F_2 sehr viel größer als F ist. Sie gelten allerdings nicht mehr, wenn der Flüssigkeitsspiegel der Ausflußöffnung sehr nahe gekommen ist, da dann erfahrungsgemäß ein Wirbel über der Ausflußöffnung entsteht. Indessen kommt dieser Vorgang nur für den letzten Teil der Gefäßentleerung in Betracht, kann also die Dauer der gesamten Gefäßentleerung nur unwesentlich beeinflussen.

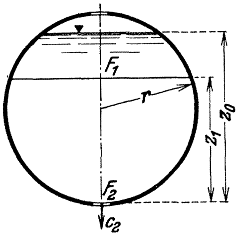


Abb. 24. Kugelbehälter.

Bei nichtprismatischen Gefäßen mit kleiner Ausflußöffnung hat man demnach folgendermaßen zu verfahren:

Zunächst ist die Ausflußgeschwindigkeit wie oben

$$c_2 = \sqrt{2 g z_1},$$

woraus sich mit Rücksicht auf die Kontinuität die Spiegelgeschwindigkeit zu

$$c_1 = c_2 \frac{\mu F_2}{F_1} = \frac{\mu F_2}{F_1}\sqrt{2 g z_1}$$

ergibt. Da aber $c_1 = -\frac{d z_1}{d t}$, so folgt

$$t = -\frac{1}{\mu F_2 \sqrt{2g}}\int F_1 \frac{d z_1}{\sqrt{z_1}} + C',$$

wo F_1 als Funktion von z_1 gegeben sein muß.

Handelt es sich z. B. um einen Kugelbehälter vom Radius r (Abb. 24), so ist

$$F_1 = \pi\left[r^2 - (z_1 - r)^2\right] = \pi\left(2 z_1 r - z_1^2\right),$$

demnach

$$t = -\frac{\pi}{\mu F_2 \sqrt{2g}} \int (2 z_1 r - z_1^2)\, z_1^{-1/2} \cdot dz_1 + C$$

$$= -\frac{\pi}{\mu F_2 \sqrt{2g}} \left(\frac{4}{3} r z_1^{3/2} - \frac{2}{5} z_1^{5/2}\right) + C.$$

Für $t = 0$ ist $z_1 = z_0$, also

$$C = \frac{\pi}{\mu F_2 \sqrt{2g}} \left(\frac{4}{3} r z_0^{3/2} - \frac{2}{5} z_0^{5/2}\right),$$

somit

$$t = \frac{\pi}{\mu F_2 \sqrt{2g}} \left[\frac{4}{3} r (z_0^{3/2} - z_1^{3/2}) - \frac{2}{5} (z_0^{5/2} - z_1^{5/2})\right].$$

Für die völlige Entleerung des Gefäßes erhält man mit $t = t'$ für $z_1 = 0$:

$$t' = \frac{\pi z_0^{3/2}}{\mu F_2 \sqrt{2g}} \left(\frac{4}{3} r - \frac{2}{5} z_0\right).$$

B. Überfall über ein Wehr.

6. Allgemeines.

Überfallwehre der verschiedensten Form, zumeist mit abgerundeter Wehrkrone (s. unten), dienen zum Stau des Wassers in offenen Gerinnen. Wehre mit scharfer Überfallkante, senkrecht zur Strömungsrichtung stehend, werden vielfach zur Messung von Flüssigkeitsmengen benützt. In allen Fällen ist die Kenntnis der sekundlichen Überfallmenge von besonderer Wichtigkeit. Je nachdem ob der Spiegel des Unterwassers tiefer oder höher liegt als die Wehrkrone, spricht man in der praktischen Hydraulik gewöhnlich von einem „vollkommenen Überfall" (Abb. 25) oder von einem „unvollkommenen Überfall" (Abb. 26). Schließlich bezeichnet man den Überfallstrahl als einen „freien" oder „belüfteten" Strahl, wenn die atmosphärische Luft ungehinderten Zutritt unter den Strahl besitzt, was durch natürliche oder gegebenenfalls künstliche Verbindung des unter dem Strahle befindlichen Raumes mit der äußeren Luft erreicht werden kann (vgl. dazu S. 45).

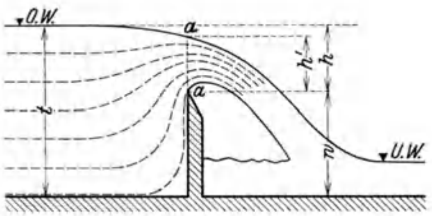


Abb. 25. Vollkommener Überfall über ein scharfkantiges Wehr.

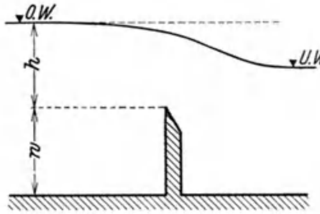


Abb. 26. Unvollkommener Überfall.

In der Hydraulik hat es sich auf Grund der Arbeiten von Poleni und Weisbach eingebürgert, den vollkommenen freien Überfall aus dem Ausfluß aus einem Gefäße mit rechteckiger Seitenöffnung abzuleiten, für welchen die sekundliche Ausflußmenge Q durch Gl. (4a) dargestellt wurde. (Die Breite der Ausflußöffnung bzw. des Wehres soll in der Folge mit b bezeichnet werden.) Läßt man in Abb. 27 $h_1 \to 0$ gehen, so ergibt sich aus (4a) mit $h_2 = h$ und $\mu' = \mu$ nach Weisbach (1841) für die Überfallmenge

$$Q = \frac{2}{3}\mu b \sqrt{2g}\left\{\left(h + \frac{v_0^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right\}, \tag{32}$$

wo h als Differenz $t - w$ aus Gerinnetiefe und Wehrhöhe einzuführen ist (Abb. 25), die aber wegen der eintretenden Absenkung des Strahles größer ist als die wirkliche Strahldicke h' über der Wehrkrone. Bei Vernachlässigung der Zulaufgeschwindigkeit v_0 entsteht daraus die Polenische Überfallformel (1717)

$$Q = \frac{2}{3}\mu b h \sqrt{2gh}. \tag{32a}$$

Die praktische Brauchbarkeit der Formeln (32) und (32a) hängt wesentlich von der Kenntnis des Beiwertes μ ab. Dieser Wert ist — wie hier gleich bemerkt sei — keine Konstante, sondern eine von anderen die Strömung bestimmenden Größen abhängige dimensionslose Zahl. Als solche Größen kommen u. a. in Betracht: Überfallhöhe und Wehrhöhe, Ausbildung des Zulaufgerinnes und der Wehrkrone und — bei stärkeren Krümmungen des Überfallstrahles — gegebenenfalls Oberflächenspannungen (vgl. Bd. I S. 38).

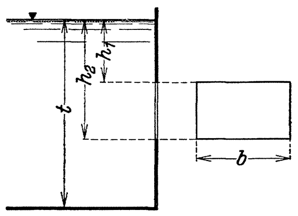


Abb. 27.

Bei der Ableitung von Gl. (32) ist der ganze nicht abgesenkte Überfallstrahl von der Höhe h in lauter einzelne Stromfäden zerlegt, die als selbständige Strahlen betrachtet werden. Dabei wird zunächst angenommen, daß der Druck an der Oberfläche dieser einzelnen Stromfäden gleich dem äußeren Luftdruck ist, daß alle Stromfäden rechtwinkelig zum Überfallquerschnitt stehen und daß sie gegenseitig keine tangentialen Kräfte aufeinander ausüben. Wären diese Voraussetzungen wirklich erfüllt, so würde Gl. (32) mit $\mu = 1$ den richtigen Wert für Q liefern. Tatsächlich ist das aber nicht der Fall. Wie man aus einer Betrachtung der Abb. 25 erkennt, konvergieren die einzelnen Stromlinien stark nach dem Überfallquerschnitt hin, besitzen also beachtliche Vertikalgeschwindigkeiten, so daß die oben gemachte Voraussetzung eines rechtwinkeligen Durchgangs der Stromlinien durch den Überfallquerschnitt nicht zutrifft. Damit ist auch die der Weisbachschen Formel zugrunde liegende Geschwindigkeitsverteilung hinfällig (vgl. S. 46). Auf der Strahloberfläche und beim gelüfteten Strahl auch auf der Unterfläche ist der Druck zwar, wie vorausgesetzt wurde, gleich dem äußeren Luftdruck p_0; im Strahlinneren dagegen wird er infolge der Konvergenz der Stromlinien im Überfallquerschnitt größer als p_0 sein, wie auch durch Messungen einwandfrei festgestellt worden ist (vgl. S. 47). Die dritte bei der Ableitung von Gl. (32) gemachte Annahme, daß die einzelnen Stromfäden aufeinander keine tangentialen Kräfte ausüben, dürfte nahezu erfüllt sein, da nach dem Elementaransatz für die Flüssigkeitsreibung (Bd. I S. 71) bei kleiner Zähigkeit (Wasser) die Reibung nur dann einen merklichen Einfluß ausüben kann, wenn ein großes Geschwindigkeitsgefälle quer zur Strömungsrichtung vorhanden ist, was hier aber nur in beschränktem Maße zutrifft (vgl. S. 46).

Aus dieser Überlegung folgt, daß man in Gl. (32) einen Korrekturfaktor $\mu < 1$ hinzufügen muß, um das Rechnungsergebnis nachträglich mit den gemessenen Werten in Einklang zu bringen. Gelingt es, diesen Faktor μ in Abhängigkeit von den obengenannten Größen darzustellen, so ist an sich gegen eine Anwendung von Gl. (32) nichts einzuwenden; nur muß man sich darüber klar sein, daß diese Gleichung keine theoretische Lösung des Überfallproblems darstellt.

In der neueren Hydraulikliteratur[1] ist in letzter Zeit ein lebhafter Meinungsaustausch über die Brauchbarkeit der Polenischen bzw. Weisbachschen Gleichung im Hinblick auf die ihr zugrunde liegenden Annahmen geführt worden, wodurch zwar mancherlei wichtige Erkenntnisse, besonders über die Geschwindigkeitsverteilung im Strahle, gewonnen wurden, ohne daß es jedoch gelungen wäre, diese Gleichungen durch eine theoretisch besser begründete Formel, unter Verzicht auf empirische Daten, zu ersetzen.

Eine rationelle Theorie des Überfallproblems muß von der Form des Überfallstrahles und der in ihm herrschenden Geschwindigkeitsverteilung ausgehen oder — anders gesprochen — von dem Netz der Äquipotential- und Stromlinien. Ist dieses gefunden, dann kann neben anderen Erscheinungen (Druckverteilung im Strahle) auch die Überfallmenge unter Verzicht auf alle Beiwerte errechnet werden. Verschiedene Versuche nach dieser Richtung sind in neuerer Zeit mit Erfolg unternommen worden, worüber im nächsten Abschnitt berichtet wird.

7. Theorie des vollkommenen Überfalles über ein scharfkantiges Wehr.

Den ersten Versuch, das Überfallproblem mit Hilfe der Potentialtheorie zu behandeln, hat v. Mises[2] in Anlehnung an die Helmholtz-Kirchhoffsche Methode der Ausflußstrahlen (vgl. S. 4) unternommen. Eine wichtige Voraussetzung dieser Theorie war die Vernachlässigung der unmittelbaren Wirkung der Schwere und ihr Ersatz durch einen gleichmäßig über den Wasserspiegel im Gefäße verteilten Kolbenüberdruck. Daß diese Annahme bei senkrecht nach unten gerichteten Strah-

[1] Vgl. hierzu R. Winkel: Bautechn. 1928 S. 721; 1929 S. 438. Bundschu, F.: Angew. Hydraulik. Berlin 1929. Bauing. 1930 S. 375. Keutner, Chr.: Bautechn. 1929 S. 575. Schoklitsch, A.: Wasserkr. u. Wasserwirtsch. 1930 S. 85. Musterle-Bundschu: Bauing. 1930 S. 780. Jacoby, E.: Bauing. 1931 S. 54.

[2] v. Mises, R.: Z. VDI 1917 S. 496.

len berechtigt ist, wurde bereits auf S. 5 erörtert; sie ist auch durch die Versuchsergebnisse sichergestellt. Beim Überfall handelt es sich aber um einen seitlichen Ausfluß, und hier wird die Gestalt des Strahles durch die Schwerewirkung wesentlich beeinflußt (Abb. 25). Indessen darf aus der guten Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung auch bei seitlich bzw. schräg austretenden Strahlen gefolgert werden, daß selbst hier die Schwere nahezu ohne Einfluß auf die Kontraktion und damit die Größe der Ausflußziffer ist. Auf dieser Erkenntnis hat v. Mises seine Theorie des gelüfteten Überfalls über ein scharfkantiges, senkrechtes Wehr aufgebaut, unter Benützung der früher gefundenen Werte für die Ausflußziffer μ aus dem Spalt eines rechteckigen Gefäßes, indem er den Überfallstrahl — abgesehen von der Absenkung durch die Schwere — als die untere Hälfte des um 90^0 gedrehten Strömungsbildes der Abb. 3 auffaßt. Dann läßt sich die Überfallmenge Q in der Form darstellen

$$Q = \psi h b \sqrt{2 g h}$$

oder

$$Q = \psi_1 w b \sqrt{2 g w},$$

worin wieder b die Wehrbreite, h die Überfallhöhe und w die Wehrhöhe bezeichnen (Abb. 25), während ψ und ψ_1 zwei von dem Verhältnis $x = h : w$ abhängige Zahlen sind. Für diese Überfallzahlen hat v. Mises die aus nachstehender Tabelle ersichtlichen Werte errechnet, welche von den sehr genauen Messungen Rehbocks (vgl. S. 44) im Mittel um weniger als 2% abweichen.

$x = \frac{h}{w} = 0$	$\psi = 0{,}407$	$\psi_1 = 0{,}000$
0,5	0,427	0,151
1,0	0,458	0,458
1,5	0,490	0,900
2,0	0,517	1,462
2,5	0,541	2,138
3,0	0,563	2,925
3,5	0,585	3,831
4,0	0,607	4,856
4,5	0,627	5,985
5,0	0,648	7,245

Daß die von Mises gemachte Annahme hinsichtlich des Einflusses der Schwerewirkung (s. oben) zu brauchbaren Ergebnissen führt, hat später Lauck[1] durch eine strenge Behandlung des der Schwere unterworfenen Überfallstrahles für den Sonderfall des unendlich hohen Wehres nachgewiesen. Wegen der grundsätzlichen Bedeutung des von ihm eingeschlagenen Weges soll hier — soweit es hydrodynamisch von Interesse ist — etwas näher darauf eingegangen werden.

Es werden folgende Voraussetzungen gemacht:

Der ungestörte Oberwasserspiegel sei der Spiegel eines großen Behälters ($v_0 \approx 0$) und liege um h [m] über der horizontalen, scharfkantigen Krone eines senkrechten Wehres von so großer Höhe w, daß eine Beeinflussung des Überfallvorganges durch die Wehrsohle nicht mehr stattfindet (Abb. 28).

Die Flüssigkeit sei unzusammendrückbar, reibungs- und wirbelfrei.

[1] Lauck, A.: Z. angew. Math. Mech. 1925 S. 1.

Die Bewegung wird als stationär und eben vorausgesetzt (Begrenzung des Überfalles durch parallele Seitenwände rechtwinkelig zur Wehrkrone).

Dann gelten die Gesetze der ebenen Potentialströmung (Bd. I S. 123), speziell die Laplacesche Gleichung (Kontinuitätsbedingung)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \equiv \Delta \varphi = 0\,, \tag{33}$$

worin $\varphi(x, y)$ das Geschwindigkeitspotential darstellt.

Die Aufgabe läuft nun darauf hinaus, die partielle Differentialgleichung (33) unter Berücksichtigung der verfügbaren Randbedingungen in eine Integro-Differentialgleichung überzuführen, die nur Randwerte enthält, und diese durch sukzessive Näherung numerisch zu lösen. Es handelt sich also vorerst darum, etwas über die Ränder des betrachteten Flüssigkeitsbereiches auszusagen. Dieser wird (Abb. 28) oben und unten begrenzt durch die zunächst unbekannten Ränder des freien Überfallstrahles, sowie den gegebenen inneren Rand des Wehres. Weiter werden hinsichtlich der seitlichen Abgrenzung folgende Annahmen gemacht: In hinreichender Entfernung rechts von der Überfallkante A wird der Druck im Überfallstrahl wegen des nahezu parallelen Verlaufes der Geschwindigkeiten ungefähr gleich dem atmosphärischen Luftdruck sein; der Überdruck im Strahl darf also dort vernachlässigt werden. Der Bereich wird hier durch die Gerade BC (Äquipotentiallinie, normal zur Stromlinienrichtung) abgegrenzt. Schließlich wird als linksseitige Abgrenzung eine nach einem Viertelkreis mit dem Radius R gekrümmte Äquipotentiallinie EF eingeführt, da angenommen werden darf, daß in genügend weiter Entfernung von der Wehrkrone A die Zuströmung radial gegen O erfolgt (Senkenströmung). In dem auf diese Weise abgegrenzten Flüssigkeitsgebiet $ABCDEF$ sind die zunächst unbekannten Strahlränder EDC und AB sowie der feste Rand FA Stromlinien, während BC und EF zwei Äquipotentiallinien der ebenen Strömung darstellen. Für die unbekannten Strahlränder EDC und AB lassen sich mittels der Energiegleichung zwei Randbedingungen anschreiben. Nach dieser ist bekanntlich

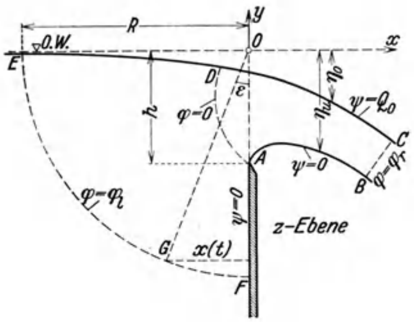


Abb. 28. Form des Überfallstrahles.

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + y = \text{const.}\,, \tag{34}$$

wenn y die vom Oberwasserspiegel (X-Achse) positiv aufwärts gerichtete Ordinatenachse bezeichnet. An den freien Rändern herrscht oben und unten der atmosphärische Luftdruck p_a. Deswegen gilt z. B. für den oberen Rand nach (34)

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p_a}{\gamma} - \eta_o = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_a}{\gamma}$$

oder, wegen $v_0 \approx 0$,

$$v = \sqrt{2g\,\eta_o} \tag{35}$$

und entsprechend für den unteren freien Rand

$$v = \sqrt{2g\,\eta_u}\,. \tag{35a}$$

Die vorliegende Aufgabe stellt sich somit als eine Randwertaufgabe dar, indem sie auf die Bestimmung einer Funktion $\varphi(x, y)$ hinausläuft, die innerhalb des festgelegten Bereiches $ABCDEF$ der Laplaceschen Gl. (33) genügt und gewisse Randbedingungen zu erfüllen hat. Als solche kommen in Betracht: $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ (n = Tangente an die Äquipotentiallinie, Bd. I S. 125) für alle Randpunkte des Bereiches und ferner die Bedingungen (35) und (35a) für die freien Grenzen EC und AB; die feste Grenze FA ist gegeben durch $y \gtreqless -h$ für $x = 0$.

Da die Differentialgleichung (33) homogen ist, so kann sie auch durch ein endlich Vielfaches von φ befriedigt werden. Nach (35) ist

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \sqrt{2g\,\eta_o} \quad \text{oder} \quad \varphi = \sqrt{2g}\int_{s_0}^{s} \sqrt{\eta_0}\,ds\,. \tag{36}$$

Ist nun $\varphi = \varphi_0$ diejenige Lösung von (33), welche der Überfallhöhe

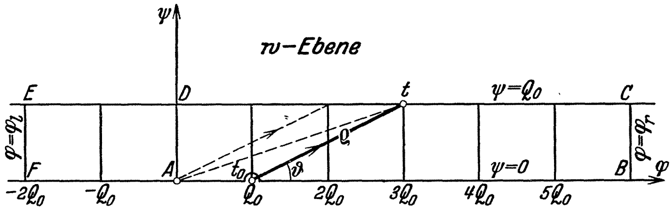


Abb. 29. Konforme Abbildung des Überfallstrahles.

h_0 entspricht, so wird für einen ähnlichen Strahl mit der Höhe h

$$\varphi_h = \sqrt{2g}\int_{s_0}^{s} \sqrt{\eta_0 \frac{h}{h_0}}\,ds \cdot \frac{h}{h_0} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^{3/2} \sqrt{2g}\int_{s_0}^{s} \sqrt{\eta_0}\,ds\,.$$

φ_h ist also ein konstantes Vielfaches von φ, das nach Obigem Gl. (33) ebenfalls befriedigt. Daraus folgt die Gültigkeit des Ähnlichkeitsgesetzes für alle Strahlformen.

Da also φ nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt werden muß, so kann in (36) zunächst $\sqrt{2g} = 1$ gesetzt werden, nachträglich ist dann das Ergebnis mit $\sqrt{2g}$ zu multiplizieren. Auf diese Weise vereinfachen sich die Randbedingungen (35) und (35a) zu

$$v = \sqrt{\eta_o} \quad \text{bzw.} \quad v = \sqrt{\eta_u}\,. \tag{37}$$

Zur Lösung der Aufgabe wird die Methode der konformen Abbildung (Bd. I, S. 128) herangezogen, wonach der durch den Rand $ABCDEF$ begrenzte Überfallstrahl in der z-Ebene (XY-Ebene, Abb. 28) als das konforme Bild des Rechtecks $BCEF$ der w-Ebene ($w = \varphi + i\psi$, Abb. 29) aufgefaßt werden kann. Hinsichtlich der additiven Konstanten der Stromfunktion ψ und des Geschwindigkeitspotentials φ soll so verfügt werden, daß der unteren Randstromlinie der Wert $\psi = 0$, der oberen der Wert $\psi = Q_0$ entspricht, wo Q_0 die sekundliche Überfallmenge, bezogen auf die Tiefe „Eins", darstellt (Bd. I S. 125). Ferner sei $\varphi = 0$ für den Punkt A der Wehrkrone, während φ_r und φ_l die Werte des Geschwindigkeitspotentials der den Strahl rechts und links begrenzenden Äquipotentiallinien bezeichnen (Abb. 28 und 29).

Zur Ermittlung der die konforme Abbildung vermittelnden analytischen Funktion $z(w)$ kann die Integralformel von Cauchy herangezogen werden.

Bevor diese Formel angeschrieben wird, sei hier kurz ihre Ableitung eingeschaltet[1].

Es bezeichne $z(w)$ eine in einem einfach zusammenhängenden Bereiche B (dessen Rand also aus einem einzigen Stück besteht) analytische und eindeutige Funktion. Dann ist nach dem Hauptsatz der Funktionentheorie das Integral

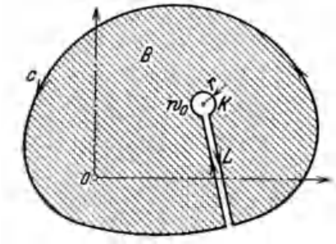


Abb. 30.

$$\int_{(C)} z(w)\,dw = 0\,,$$

wenn C eine in dem Bereiche B geschlossene Kurve darstellt. Man betrachte nun die Funktion $\frac{z(w)}{w - w_0}$, wo w_0 einen bestimmt gewählten Punkt innerhalb des von C begrenzten Gebietes bezeichnet. Diese ist in dem Bereiche B ebenfalls analytisch, mit Ausnahme der Stelle $w = w_0$ (Bd. I S. 126). Schließt man aber die Stelle w_0 durch einen um w_0 als Mittelpunkt gelegten Kreis K aus dem Bereiche B aus (Abb. 30), so ist $\frac{z(w)}{w - w_0}$ analytisch in dem von C, K und der Doppellinie L begrenzten einfach zusammenhängenden Bereiche. Nach dem Hauptsatz der Funktionentheorie gilt also die Beziehung

$$\oint_{(C)} \frac{z(w)\,dw}{w - w_0} + \oint_{(K)} \frac{z(w)}{w - w_0}\,dw = 0\,,$$

da die Doppellinie L bei der Integration zweimal im entgegengesetzten Sinne durchlaufen wird oder, wenn C und K beide im gleichen (mathematisch positiven) Sinne durchlaufen werden,

$$\oint_{(C)} \frac{z(w)}{w - w_0}\,dw = \oint_{(K)} \frac{z(w)}{w - w_0}\,dw\,. \qquad (38)$$

Bezeichnet r den hinreichend kleinen Radius des Kreises K und ω seinen von 0 bis 2π variierenden Neigungswinkel, dann ist für einen Punkt w längs des Kreisrandes (Bd. I S. 131)

$$w = w_0 + r \cdot e^{i\omega}\,,$$

[1] Vgl. hierzu etwa L. Bieberbach: Funktionentheorie, S. 40. Leipzig u. Berlin 1922, oder Rothe-Ollendorf-Pohlhausen: Funktionentheorie, S. 26. Berlin 1931, oder Serret-Scheffers: Lehrb. d. Diff.- u. Integral-Rechnung, 2. Bd. 6. u. 7. Aufl. S. 492.

woraus folgt

$$dw = i\, r\, e^{i\omega} \cdot d\omega$$

und

$$\frac{dw}{w - w_0} = i \cdot d\omega\,.$$

Damit geht (38) über in

$$\oint_{(C)} \frac{z(w)}{w - w_0}\, dw = i \int_0^{2\pi} z(w_0 + r\, e^{i\omega})\, d\omega\,.$$

Wegen der Stetigkeit von $z(w) = z(w_0 + r e^{i\omega})$ gilt

$$\lim_{r \to 0} i \int_0^{2\pi} z(w_0 + r\, e^{i\omega})\, d\omega = i \int_0^{2\pi} z(w_0)\, d\omega = 2\pi\, i\, z(w_0)\,. \tag{39}$$

Da aber nach (38) das über K erstreckte Integral von der Größe des Radius r unabhängig ist, so folgt aus (38) und (39)

$$\oint_{(C)} \frac{z(w)}{w - w_0}\, dw = 2\pi\, i\, z(w_0) \tag{40}$$

und das ist die Cauchysche Integralformel. Mit ihrer Hilfe ist es möglich, die Funktion $z(w_0)$ im Innern eines einfach zusammenhängenden Bereiches aus den Werten zu berechnen, welche die Funktion am Rande (C) annimmt.

Für einen Punkt $w_0 = t_0$, der selbst auf dem Rande des Rechtecks $BCEF$ liegt (Abb. 29) und als solcher durch einen kleinen Halbkreis aus dem Rechteck ausgeschlossen werden muß, gilt nach (40) — da jetzt nur über den Umfang des Halbkreises integriert wird, von $\omega = 0$ bis $\omega = \pi$, s. oben —

$$z(t_0) = \frac{1}{\pi\, i} \oint \frac{z(t)}{t - t_0}\, dt\,, \tag{41}$$

wenn $z(t)$ die Werte bezeichnet, welche die Funktion $z(w)$ auf dem Rechteckrand annimmt. Für Punkte t_0 in den Ecken B, C, E, F tritt in obiger Gl. $\frac{\pi}{2}$ an Stelle von π (Viertelkreis). Die Integration ist in dem in (41) angedeuteten Sinne über den ganzen Rechteckrand zu erstrecken. $t - t_0$ wird als Differenz zweier komplexer Größen durch einen Vektor dargestellt, dessen Betrag ϱ und dessen Arcus ϑ sei (Abb. 29), so daß

$$t - t_0 = \varrho\, e^{i\vartheta}$$

gesetzt werden kann (Bd. I S. 131). Demnach ist

$$\frac{dt}{t - t_0} = d \ln (t - t_0) = d \ln (\varrho\, e^{i\vartheta}) = d \ln \varrho + i\, d\vartheta\,.$$

Führt man diesen Ausdruck in (41) ein, so folgt, wenn noch $z = x + i y$ gesetzt wird,

$$x(t_0) + i\, y(t_0) = \frac{1}{\pi\, i} \oint \{x(t) + i\, y(t)\}\, (d \ln \varrho + i\, d\vartheta)$$

oder durch Trennung der reellen und imaginären Glieder und mit $\eta = -y$ (Abb. 28)

$$\pi\, x(t_0) = \oint x(t)\, d\vartheta - \oint \eta(t)\, d \ln \varrho\,, \tag{42}$$

$$\pi\, \eta(t_0) = \oint x(t)\, d \ln \varrho + \oint \eta(t)\, d\vartheta\,, \tag{43}$$

wobei die Integration über den ganzen Rand des Rechtecks $BCEF$ in der w-Ebene auszuführen ist.

In den vorstehenden Gleichungen treten nur Randpunkte auf, für die bestimmte Randbedingungen zur Verfügung stehen (s. oben).

Da der freie Strahlrand oben und unten je eine Stromlinie darstellt, so ist dort wegen $w = t = \varphi + i\psi$ und $\psi = \text{const.}$ $v = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{dt}{ds} = \sqrt{\eta}$ [Gl. (37)], also

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\eta}$$

und

$$x(t) = \int \sqrt{\frac{1}{\eta(t)} - \left(\frac{d\eta(t)}{dt}\right)^2} \cdot dt\,. \tag{44}$$

Auf der rechten Strahlbegrenzung BC (Abb. 28) soll nach S. 34 der Druck gleich dem atmosphärischen Luftdruck gesetzt werden. Deshalb gelten dort die gleichen Verhältnisse wie für den freien Strahlrand, und die Abhängigkeit der Abszisse x von η ist ebenfalls durch (44) gegeben; η stellt dabei die nach unten gemessene Ordinate der einzelnen Randpunkte dar.

Als linke Begrenzung des Strahles wurde nach S. 34 eine nach einem Viertelkreis mit dem Radius R gekrümmte Äquipotentiallinie eingeführt. Da durch diesen Rand die Zuströmung radial gegen O erfolgt, so verhält sich die durch das Bogenstück FG strömende Wassermenge ψ zur gesamten Wassermenge Q_0, die durch FE geht, wie der Winkel ε zu $\frac{\pi}{2}$ (Abb. 28), also $\frac{\psi}{Q_0} = \frac{2\varepsilon}{\pi}$. Demnach wird

$$x(t) = -R \cdot \sin\varepsilon = -R \cdot \sin \frac{\pi\psi}{2Q_0}, \tag{45}$$

wo ψ jeweils in Teilen von Q_0 ausgedrückt werden kann. Schließlich gilt $x(t) = 0$ für alle Punkte des festen Randes FA.

Nach Einführung der vorstehenden Bedingungen für $x(t)$ in Gl. (43) erhält man eine Integrodifferentialgleichung für η, die nur Randwerte enthält und durch sukzessive Annäherung gelöst werden kann.

Das Verfahren ist von Lauck in der Weise durchgeführt, daß er als 1. Näherung eine von Bazin gemessene Strahlform (allerdings für endliche Wehrhöhe!) zugrunde legt. Um aus der gemessenen unteren Strahlgrenze (Abb. 31) zunächst einen Anhalt für den oberen Strahlrand zu bekommen, kann man folgendermaßen vorgehen: Am unteren Strahlrande ist nach (37) $v = \sqrt{\eta_u} = \frac{\partial\varphi}{\partial s}$, oder $\varphi = \int \sqrt{\eta_u} \cdot ds$, wo

ds ein Längenelement der Randstromlinie bezeichnet. Wickelt man also letztere auf eine Gerade ab und trägt $\sqrt{\eta_u}$ als Funktion der Länge s auf, so kann φ durch graphische Integration bestimmt werden (vgl. Bd. I S. 153). Da bei der quadratischen Netzteilung (Abb. 29 und 31) $\Delta\varphi = \Delta\psi$ ist, $\Delta\psi$ aber die sekundliche Durchflußmenge zwischen zwei Stromlinien darstellt, so empfiehlt es sich, als Einheit von φ die sekundliche Überfallmenge Q_0 des Strahles zu wählen.

Bei Modellversuchen kann Q_0 entweder unmittelbar gemessen oder aus der Strahlform bestimmt werden. Da nämlich in einiger Entfernung unterhalb des Wehres die Geschwindigkeit im Strahle nahezu aus-

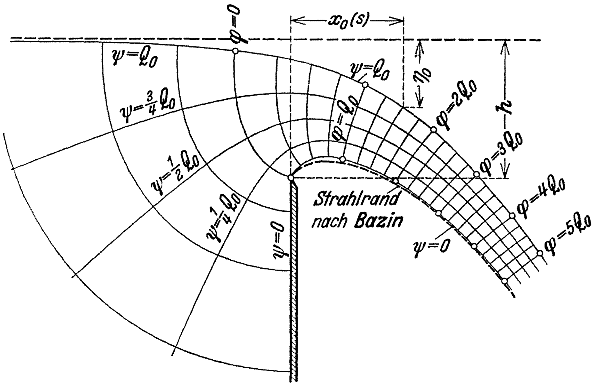


Abb. 31. Potentialnetz des Überfallstrahles.

geglichen ist (S. 34), so beträgt für einen Querschnitt BC (Abb. 28) die mittlere Geschwindigkeit

$$v_m = \sqrt{\frac{\eta_B + \eta_C}{2}},$$

woraus folgt

$$Q_0 = \overline{BC}\sqrt{\frac{\eta_B + \eta_C}{2}}. \tag{46}$$

Die Lauck sche Rechnung ist mit $Q_0 = 0{,}452$ für $\sqrt{2g} = 1$ durchgeführt.

Nachdem so die Einheit von φ festliegt, kann man aus der durch Integration gewonnenen φ-Kurve für $\varphi = Q_0,\ 2Q_0\ \ldots$ die entsprechenden Punkte des unteren Randes bestimmen, in denen dieser von den Äquipotentiallinien geschnitten wird. In hinreichend weitem Abstande von der Überfallkante darf die Äquipotentiallinie BC mit Rücksicht auf die obigen Voraussetzungen als Gerade, senkrecht zum unteren Strahlrande, angesehen werden. Man kann also mit Hilfe der quadratischen Netzteilung zunächst den Punkt C und im Anschluß daran die übrigen Punkte des oberen Strahlrandes näherungsweise festlegen, wobei allerdings aus Genauigkeitsgründen zweckmäßig die Unterteilung in $\frac{Q_0}{4}$ (statt Q_0) gewählt wird.

Führt man nun die so gewonnenen Werte $\eta(t)$ bzw. $x(t)$ in Gl. (43) ein, so können für eine Reihe von Randpunkten die entsprechenden

	$s =$	$-2Q_0$	$-Q_0$	$-\frac{1}{2}Q_0$	0	$\frac{1}{4}Q_0$
Unterer Strahlrand	$\eta_u(t_0) =$	17,506	3,705	1,795	1,070	0,977
Oberer Strahlrand	$\eta_0(t_0) =$	—	—	—	—	—
„ „	$x_0(t_0) =$	—	$-3,560$	$-1,500$	$-0,449$	—

Größen $\eta(t_0)$ ausgerechnet und mit denen der ersten Näherung verglichen werden. Als zweite Näherung dienen dann diejenigen Werte, die zwischen den zunächst angenommenen und den errechneten liegen. Mit ihnen wird der Rechnungsgang wiederholt usf., bis schließlich bei der fünften Näherung die Unterschiede sich innerhalb der Genauigkeitsgrenzen des Verfahrens befinden. Die Ergebnisse der Lauckschen Rechnung sind in vorstehender Tabelle wiedergegeben (vgl. dazu Abb. 29 und 31). Damit ist die Form des freien Überfallstrahles für ein unendlich hohes scharfkantiges Wehr festgelegt.

Die Rechnung wurde für die sekundliche Überfallmenge $Q = Q_0 = 0,452$ und $\sqrt{2g} = 1$ durchgeführt; die zugehörige Überfallhöhe ergibt sich aus vorstehender Tabelle für $t_0 = 0$ (Wehrkrone A) zu $\eta_u(t_0) = h_0 = 1,07$. Da Q_0 als Stromfunktion des oberen Strahlrandes von derselben Dimension ist wie das Geschwindigkeitspotential φ, so wird unter Beachtung der Bemerkungen auf S. 35 die einer Überfallhöhe h entsprechende wirkliche Wassermenge

$$Q = Q_0 \left(\frac{h}{h_0}\right)^{3/2} \sqrt{2g} = \frac{Q_0}{h_0^{3/2}} h^{3/2} \sqrt{2g},$$

wobei mit den obigen Zahlenwerten

$$\frac{Q_0}{h_0^{3/2}} = \frac{0,452}{1,07^{3/2}} = 0,408$$

wird. Nach der weiter oben besprochenen v. Misesschen Rechnung ist für die Tiefe $b = 1$ nach Seite 33

$$Q = \psi h^{3/2} \sqrt{2g},$$

und zwar hat die „Überfallzahl" ψ für $w \to \infty$, d. h. $x = \frac{h}{w} = 0$, den Wert $\psi = 0,407$ (Tabelle S. 33). Die Übereinstimmung mit dem Ergebnis von Lauck ist also überraschend gut.

Um den Strömungsverlauf im Strahlinnern zu untersuchen, könnte man nun, nachdem der Strahlrand festgelegt ist, mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel (40) zu jedem Punkt des Rechtecks $BCEF$ der w-Ebene den zugehörigen Punkt der z-Ebene rechnerisch ermitteln. Eine derartige Rechnung würde aber äußerst mühsam und zeitraubend sein. In solchen Fällen leistet das bereits im Bd. I (S. 151) besprochene zeichnerische Verfahren mit Hilfe der Netzkonstruktion gute Dienste, das hier sinngemäße Anwendung finden kann.

Das Lauck sche Verfahren kann mit gutem Erfolge auch auf ein Überfallwehr mit beweglicher Klappe angewandt werden, bei dem an die senkrechte Stauwand oben eine Klappe angeschlossen ist,

$\frac{1}{2} Q_0$	Q_0	$2 Q_0$	$3 Q_0$	$4 Q_0$	$5 Q_0$	$6 Q_0$
0,928	0,930	1,089	1,343	1,598	1,855	(2,133)
0,186	0,342	0,688	1,035	1,351	1,641	(1,928)
—	0,570	—	1,440	—	—	—

die sich um eine feste Welle drehen läßt[1] (Abb. 32). Mit Hilfe einer derartigen Anordnung ist eine Regulierung des Oberwasserspiegels möglich, indem man von Fall zu Fall der Klappe eine verschiedene Neigung gibt. Neben der sekundlichen Überfallmenge ist hier besonders der Druckverlauf längs der Klappe von Interesse, da dieser zur Berechnung des Drehmomentes erforderlich ist. Es kommt also zunächst darauf an, das Netzbild der Potentialströmung zu konstruieren, aus diesem die Geschwindigkeit zu ermitteln und darauf mit Hilfe der Bernoullischen Gleichung den Druck p an der Klappe zu berechnen.

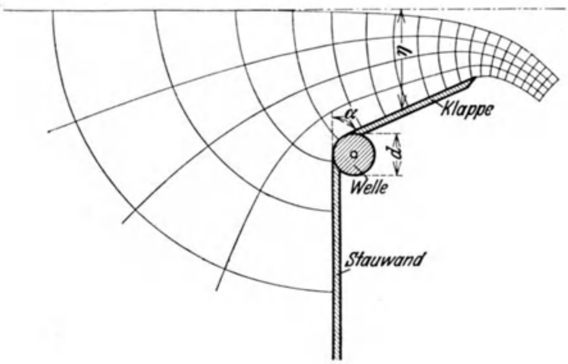


Abb. 32. Überfall über ein Wehr mit beweglicher Klappe nach Dernedde.

Bei der Festlegung der Strahlform ist hier zu beachten, daß außer der senkrechten Stauwand auch noch der obere Klappenrand eine feste Grenze bildet. Liegen hinsichtlich der freien Strahlbegrenzung weder Versuchsergebnisse noch sonstige Erfahrungswerte vor, so muß man die Strahlränder bei gegebener Oberwasserhöhe zunächst gefühlsmäßig auftragen und das so abgegrenzte Gebiet durch ein orthogonales Netz von Strom- und Äquipotentiallinien unterteilen. Dabei beachte man, daß bei entsprechend kleiner Teilung die Diagonalen bis auf Größen höherer Ordnung gleich lang sind und aufeinander senkrecht stehen. Das Diagonalnetz bildet demnach ebenfalls ein quadratisches Netz (Bd. I S. 152).

Um eine Kontrolle für die Brauchbarkeit der angenommenen Randkurve zu haben, bediene man sich der Bedingung $v = \frac{\delta \varphi}{\delta s}$ (Bd. I S. 152),

[1] Dernedde, W.: Der Überfall über ein bewegliches Wehr. Diss. Hannover 1929 und Bautechn. 1927 Heft 48 S. 698. Vgl. auch H. Kulka: Eisenwasserbau Bd. 1 (1928) S. 59.

woraus bei quadratischer Netzteilung wegen $\delta\varphi = \text{const.}$ folgt (Abb. 33)

$$v_i \cdot \delta s_i = v_k \cdot \delta s_k \tag{47}$$

oder

$$\frac{v_i}{v_k} = \frac{\delta s_k}{\delta s_i} = \frac{\delta n_k}{\delta n_i};$$

ebenso ist

$$\frac{v_i}{v_m} = \frac{\delta s_m}{\delta s_i} = \frac{\delta n_m}{\delta n_i}.$$

Da aber für den freien Strahlrand $v_i = \sqrt{2g \cdot \eta_i}$ und $v_k = \sqrt{2g \cdot \eta_k}$, so erhält man

$$\frac{\delta s_k}{\delta s_i} = \frac{\delta n_k}{\delta n_i} = \sqrt{\frac{\eta_i}{\eta_k}},$$

$$\frac{\delta s_m}{\delta s_i} = \frac{\delta n_m}{\delta n_i} = \sqrt{\frac{\eta_i}{\eta_m}} \text{ usw.}$$

Durch die vorstehenden Bedingungen ist man in der Lage, die angenommene Strahlform und damit das ganze Netzbild so lange zu berichtigen, bis die gewünschte Genauigkeit erzielt ist. Allerdings leuchtet ein, daß dieser Genauigkeit gewisse Grenzen gesetzt sind, da schon Bruchteile von Millimetern in den Abständen der Äquipotential- oder Stromlinien die Verhältnisse an der betreffenden Stelle beeinflussen können. Eine Verfeinerung des graphisch gefundenen Netzbildes kann mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel in ähnlicher Weise vorgenommen werden, wie weiter oben für das senkrechte Wehr gezeigt wurde.

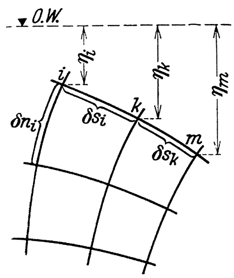


Abb. 33.

Aus dem Netzbild erhält man die Geschwindigkeit an jeder beliebigen Stelle des Strahles — also auch an der Klappenoberfläche — wenn die Geschwindigkeit v_P irgend eines Punktes bekannt ist, da ja die Bedingung (47) für beliebige Punkte i und k gilt. (Wegen der Bestimmung von v_P vgl. S. 39, sowie Bd. I S. 153.)

Nachdem die Geschwindigkeit v für alle Punkte der Klappe festliegt, kann mit Hilfe der Bernoullischen Gleichung

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} - \eta = \frac{p_a}{\gamma}$$

der Druck p bestimmt werden, in der η den senkrechten Abstand des betreffenden Klappenpunktes vom Oberwasserspiegel (Abb. 32) und p_a den atmosphärischen Luftdruck bezeichnet. Da es hier nur auf den Überdruck $p' = p - p_a$ ankommt, so erhält man

$$\frac{p'}{\gamma} = \eta - \frac{v^2}{2g}. \tag{48}$$

Dann ergibt sich das Moment M, welches das überfließende Wasser auf die Wellenachse ausübt, durch Integration über die Klappenlänge l zu

$$M = \int_0^l p' \cdot dx \cdot b \cdot x\,, \tag{49}$$

wo b die Breite der Klappe angibt und x den Abstand von der Drehachse.

Abb. 34* zeigt die Geschwindigkeits- und Druckverteilung längs der Klappe bei einer Klappenneigung von $\alpha = 65^0$. Die punktierte Linie gibt die von Dernedde im Institut für Wasserkraftmaschinen an der Technischen Hochschule Hannover gemessenen Drücke wieder, woraus die gute Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch ersichtlich ist. Daraus darf wohl mit Recht geschlossen werden, daß auch in ähnlich gelagerten Fällen des Wehrbaues die Potentialtheorie über die wirklichen Strömungsverhältnisse innerhalb der für die Praxis im allgemeinen erforderlichen Genauigkeitsgrenzen wertvolle Aufschlüsse erteilt[1].

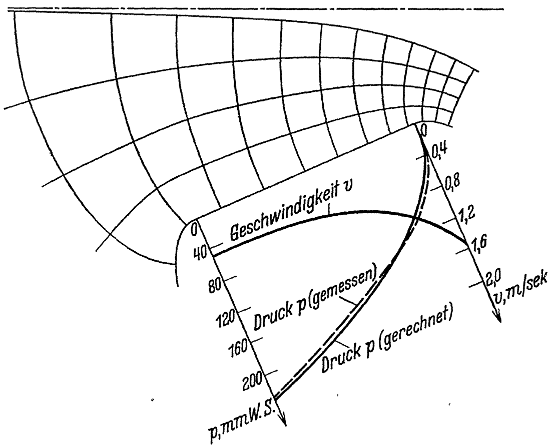


Abb. 34. Druck- und Geschwindigkeitsverteilung längs der beweglichen Klappe eines Überfallwehres nach Dernedde.

Schließlich ist noch zu bemerken, daß auch hier das Ähnlichkeitsgesetz gilt, vorausgesetzt, daß der Strahl sich nicht von der Klappe ablöst — was nach den Derneddeschen Versuchen mit einem Wellendurchmesser $d = 80$ mm (Abb. 32) bei $\alpha \geqq 117^0$ eintritt — da dann die Voraussetzungen der Theorie hinsichtlich der unteren Strahlbegrenzung nicht mehr zutreffen. Dieser Fall möge hier außer Betracht bleiben. Bezeichnet nun $n > 1$ das Verhältnis der Längenmaßstäbe bei ähnlicher Vergrößerung des Wehres, so gilt für das Verhältnis der Geschwindigkeiten wegen $v = \frac{\partial \varphi}{\partial s}$ und mit Rücksicht auf die Bemerkungen auf S. 35

$$v = \frac{n^{3/2}}{n} \frac{\partial \varphi_0}{\partial s_0} = n^{1/2} v_0\,,$$

wenn der Index 0 sich auf den kleineren (Modell-)Maßstab bezieht. Daraus folgt für den Druck p' nach (48)

$$\frac{p'}{\gamma} = n\,\eta_0 - n\,\frac{v_0^2}{2g} = n\,\frac{p_0'}{\gamma}\,,$$

* Der Dissertation von Dernedde entnommen; vgl. Fußnote 1 S. 41.

[1] Vgl. hierzu auch Bd. I S. 144.

und für das Drehmoment an der Klappe, bezogen auf die Breite „Eins“ nach (49)

$$M = n^3 M_0 .$$

Schließlich erhält man für das Verhältnis der sekundlichen Überfallmengen, auf die Breiteneinheit bezogen, nach (46)

$$Q = n^{3/2} Q_0 . \tag{50}$$

Einen Vergleich der theoretisch gefundenen und der experimentell bestimmten Werte für die sekundliche Überfallmenge Q und die Drehmomente M um die Klappenachse gibt nachstehende Zusammenstellung. Das zugrunde gelegte Modellwehr hatte folgende Abmessungen: Höhe der festen senkrechten Wehrwand 300 mm; Klappenlänge 280 mm; Durchmesser der Klappenwelle 80 mm; Modellbreite (senkrecht zur Bildebene) 350 mm.

$\alpha =$	0^0	35^0	50^0	65^0	75^0	90^0	105^0	115^0	120^0
Q [l/sek] gemessen .	—	4,16	14,0	36,1	56,2	81,4	96,7	103,1	95,7
Q [l/sek] berechnet .	—	—	—	35,0	55,1	80,6	96,7	102,8	—
M [kg cm] gemessen .	128,1	142,9	166,1	184,7	186,5	166,5	137,2	111,0	—
M [kg cm] aus Druckmessungen beberechnet .	—	142,7	165,0	186,0	187,6	164,9	138,7	109,9	—

8. Praktische Angaben für den vollkommenen Überfall.

Wie weiter oben bereits bemerkt wurde, dient das scharfkantige Überfallwehr u. a. zur Wassermengenmessung, und es ist deshalb verständlich, daß sich die praktische Hydraulik besonders mit der Ermittlung eines geeigneten Ausdrucks für die sekundliche Überfallmenge Q beschäftigte. Diese Meßwehre sind in Gerinne eingebaut und erstrecken sich im allgemeinen über die ganze Gerinnebreite, so daß die Gerinnewände den Überfallstrahl seitlich begrenzen. Man spricht dann von einem Überfall ohne seitliche Einzwängung (im Gegensatz zu den Wehren mit Seitenzwängung, S. 47). Geht man bei der Bestimmung von Q von der auf S. 31 erörterten Auffassung aus, so handelt es sich im wesentlichen um die experimentelle Bestimmung des Überfallbeiwertes μ, dessen Ermittlung das Ziel zahlreicher Hydrauliker gewesen ist.

Rehbock[1] gab 1913 den Wert an

$$\mu = 0{,}605 + \frac{1}{1050\,h - 3} + 0{,}08\,\frac{h}{w} , \tag{51}$$

wo w die Wehrhöhe bezeichnet (Abb. 25). Dieser Ausdruck ist nicht dimensionsecht, da μ bekanntlich eine reine Zahl sein muß. 1929 stellte

[1] Rehbock, Th.: Z. Verb. dtsch. Arch. u. Ing.-Ver. 1913.

Rehbock[1] eine neue Überfallformel auf, in der die Dimensionsunstimmigkeit beseitigt ist. An Stelle der Polenischen Gleichung (32a) verwendet er den Ansatz

$$Q = \frac{2}{3}\,\mu\, b\, h_e \sqrt{2\, g\, h_e}\,, \tag{52}$$

wo

$$h_e = h + 0{,}0011\,[\mathrm{m}] \tag{53}$$

ist (h in Metern gerechnet) und der zusätzliche Beitrag zu h vermutlich mit Kapillarwirkungen zusammenhängt. Für den Beiwert μ gilt

$$\mu = 0{,}6035 + 0{,}0813\,\frac{h_e}{w}\,. \tag{54}$$

Diese neue Überfallformel liefert sehr genaue Werte für Q; der Fehler wird von Rehbock auf 0,1 bis 0,2% geschätzt.

Die obigen Angaben über die Größe von μ gelten nur für den besonderen Fall des freien oder belüfteten Strahles, bei dem die atmosphärische Luft auf natürlichem oder künstlichem Wege (etwa vermittels eines Röhrensystems) ungehindert Zutritt unter den Überfallstrahl hat (Abb. 25). Die genaue Form dieses Strahles ist aus Abb. 31 ersichtlich, in der auch die Bazinschen Messungen eingetragen sind.

Bei teilweisem oder vollständigem Luftabschluß bildet sich unter dem Überfallstrahl ein luftverdünnter, zum Teil von wirbelndem Wasser erfüllter Raum aus. Die dadurch bedingte Saugwirkung hat sowohl eine Änderung der Strahlform als auch eine Vergrößerung der sekundlichen Überfallmenge zur Folge (Abb. 35).

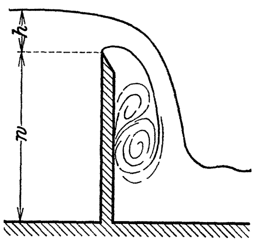


Abb. 35. Unbelüfteter Überfall.

Nach Messungen von Keutner[2] kann der μ-Wert in Gl. (32a) beim vollangesaugten Strahl (mit vom Unterwasser bedecktem Fuß) bis zu $\mu = 0{,}80$ anwachsen gegenüber $\mu \approx 0{,}65$ beim freien, belüfteten Strahl.

Außer den stabilen Formen des vollkommenen Überfalls können verschiedene Übergangsformen auftreten, die ihre Gestalt mitunter plötzlich ändern. Das Wasserabführungsvermögen hängt wesentlich von der Strahlform und dem Einfluß des Unterwassers ab, wobei Unterschiede bis zu etwa 30% auftreten[2].

Außer der Strahlform ist die Geschwindigkeitsverteilung im Überfallstrahl von besonderem Interesse. Theoretisch kann die Geschwindigkeit beim freien Strahl an jeder beliebigen Stelle bestimmt werden, sofern man nach dem weiter oben besprochenen Verfahren das Netz der Äquipotential- und Stromlinien gezeichnet hat (vgl. S. 39).

[1] Rehbock, Th.: Z. VDI 1929 S. 817.
[2] Keutner, Chr.: Bautechn. 1931 S. 714, und Abflußuntersuchungen und Berechnungen für Überfälle an scharfkantigen Wehren, 1931.

Genaue Messungen über die Geschwindigkeitsverteilung sind in neuerer Zeit von Winkel[1] und Keutner[2] an rundkronigen und scharfkantigen Wehren durchgeführt worden. Bei der Ableitung der Weisbachschen Formel (32) wurde die Geschwindigkeit im Abstand z unter dem noch nicht abgesenkten Oberwasserspiegel durch den theoretischen Ansatz

$$v_t = \sqrt{2\,g\,z + v_0^2}$$

dargestellt (S. 3), wo v_0 die mittlere Zuflußgeschwindigkeit bezeichnet. Schreibt man dafür mit $\frac{v_0^2}{2\,g} = k$

$$v_t = \sqrt{2\,g\,(z + k)}\,,$$

so erkennt man, daß das zugehörige Geschwindigkeitsdiagramm durch eine Parabel dargestellt wird, deren Scheitel A um die Geschwindigkeitshöhe k über dem Oberwasserspiegel liegt (Abb. 36). Die Winkelschen Messungen an Wehrmodellen mit abgerundeter Krone haben gezeigt, daß das wirkliche Geschwindigkeitsdiagramm für den Strahlquerschnitt über der Wehrkrone von dem theoretischen nach Weisbach abweicht, was mit Rücksicht auf die unzutreffenden Annahmen hinsichtlich des Druckes im Strahlinnern (vgl. S. 31) auch nicht anders zu erwarten war. Danach sind die wirklichen Geschwindigkeiten v im Strahlinnern durchweg kleiner als die theoretischen v_t. Lediglich an der Oberfläche des abgesenkten Strahles lotrecht über der Wehrkrone (Punkt D) und bei großen Überströmungshöhen auch an der Wehrkrone C stimmen die wirkliche und die theoretische Geschwindigkeit überein. Ähnliche Verhältnisse liegen vor beim Überfall über ein scharfkantiges Wehr.

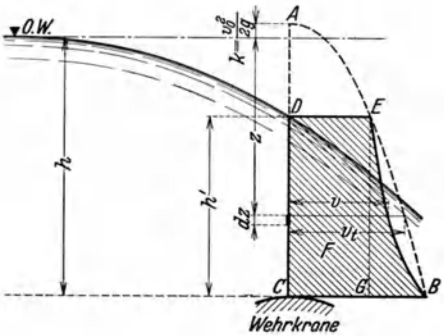


Abb. 36. Geschwindigkeitsverteilung im Überfallstrahl eines rundkronigen Wehres nach Winkel und Keutner.

Nach Messungen Bazins[3] und Rehbocks[4] steigt in solchen Fällen die untere Strahlkante bis zu 0,11 h über die Wehrkrone an und erreicht im waagerechten Abstand 0,25 h von der inneren Wehrkante ihren Scheitelpunkt. Für einen durch diesen Scheitelpunkt gelegten Strahlquerschnitt $a\,b$ ergibt sich nach Keutner[5] das in Abb. 37 schraffierte Geschwindigkeitsdiagramm, in das wieder die theoretische Geschwindigkeitsparabel punktiert eingetragen ist.

[1] Winkel, R.: Bautechn. 1929 S. 438.
[2] Keutner, Chr.: Bautechn. 1929 S. 575, sowie Abflußuntersuchungen usw. s. oben.
[3] Forchheimer: Hydraulik, a. a. O. S. 381.
[4] Weyrauch, R.: Hydraul. Rechnen 4. u. 5. Aufl. S. 173. 1921.
[5] Fußnote 2 S. 45.

Der parabolischen Geschwindigkeitsverteilung würde im Innern des Strahles durchweg ein Druck von der Größe des äußeren Luftdruckes entsprechen (vgl. S. 31), was aber wegen der Konvergenz der Stromfäden über der Wehrkrone in Wirklichkeit nicht der Fall ist. Aus den Geschwindigkeitsdiagrammen in Abb. 36 und 37 geht hervor, daß den kleineren Geschwindigkeiten gegenüber der Weisbachschen Annahme größere Drücke entsprechen; nur an den Strahlrändern ist beim vollbelüfteten Strahle der Druck gleich dem atmosphärischen Luftdruck. Beim nichtbelüfteten Strahle ist der Druck auf der Strahlunterfläche gleich dem dort herrschenden Unterdrucke.

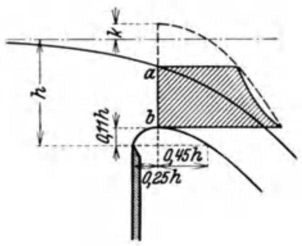


Abb. 37. Überfallstrahl bei scharfkantigem Wehr und Geschwindigkeitsverteilung im Strahle nach Keutner.

Diese Überlegungen stimmen überein mit Messungen von A. Koch[1] für belüfteten und unbelüfteten Strahl. In den Abb. 38 und 39 sind die entsprechenden Druckdiagramme dargestellt; man erkennt, daß beim unbelüfteten Strahl an der Strahlunterkante tatsächlich Unterdruck festgestellt wurde. Kurz oberhalb der Stauwand herrscht im Strahle nahezu hydrostatischer Druck (Abb. 38).

Erfolgt der Überfall über das Wehr nicht in voller Breite des Zu-

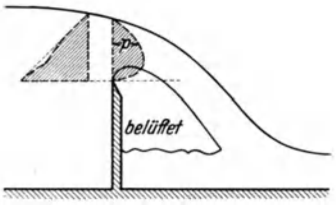


Abb. 38. Druckverteilung im belüfteten Überfallstrahl nach Koch.

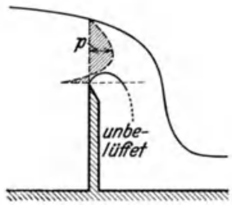


Abb. 39. Druckverteilung im unbelüfteten Überfallstrahl nach Koch.

laufgerinnes, sondern über eine Stauwand, deren Breite b geringer ist als die Gerinnebreite B (Abb. 40), so findet eine seitliche Kontraktion des Überfallstrahles statt, die bei gleicher Überfallhöhe h eine Verringerung der Überfallmenge zur Folge hat. In solchen Fällen ist nach Messungen von Frese[2] für das scharfkantige Wehr bei vollkommenem Überfall

$$Q = \frac{2}{3}\, b\, h \sqrt{2\, g\, h}\left(0{,}5755 + \frac{0{,}017}{h + 0{,}18} - \frac{0{,}075}{b + 1{,}2}\right)$$
$$\times \left[1 + \left(0{,}25\,\frac{b^2}{B^2} + 0{,}025 + \frac{0{,}0375}{h^2/H^2 + 0{,}02}\right)\frac{h^2}{H^2}\right],$$

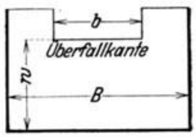


Abb. 40. Stauwand mit Seitenzwängung.

wo h wieder die Überfallhöhe und $H = h + w$ die Gerinnetiefe vor dem

[1] Koch-Carstanjen: Von der Bewegung des Wassers usw., S. 194, 195. Berlin 1926.

[2] Frese, F.: Z. VDI 1890 S. 1339 u. 1365.

Wehr bezeichnet (alle Längen sind in Meter einzusetzen; gültig für $0{,}1\,[\mathrm{m}] < h < 0{,}6\,[\mathrm{m}]$).

Als weiterer Anhaltspunkt können die vom Schweizerischen Architekten- und Ingenieurverein 1924 aufgestellten Normen für rechteckige Überfälle mit Seitenkontraktion dienen, wonach

$$Q = \frac{2}{3}\,b\,h\,\sqrt{2gh}\left[0{,}578 + 0{,}037\,\frac{b^2}{B^2} + \frac{3{,}615 - 3\,\frac{b^2}{B^2}}{1000\,h + 1{,}6}\right] \times \left(1 + 0{,}5\,\frac{b^4}{B^4}\cdot\frac{h^2}{H^2}\right).$$

9. Überfallwehre mit abgerundeter Krone.

Wehre mit scharfer Überfallkante finden fast ausschließlich als Meßwehre zur Wassermengenbestimmung Verwendung. Dagegen werden im praktischen Wehrbau — bei festen Einbauten in Flußläufen usw. — mit Rücksicht auf größere Haltbarkeit und größeres Wasserabführungsvermögen gewöhnlich Wehrkörper mit mehr oder weniger abgerundeter Krone ausgeführt (Abb. 41).

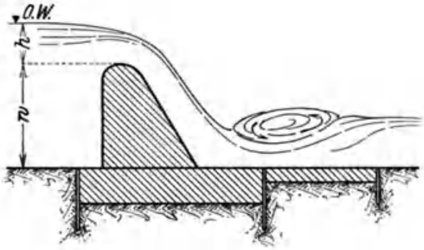


Abb. 41. Überfallwehr mit abgerundeter Krone.

Auf S. 46 wurde gezeigt, daß beim scharfkantigen Wehr der Überfallstrahl um ein gewisses Maß über die Überfallkante emporspringt (Abb. 37). Beim nicht scharfkantigen Überfall wird es also wesentlich von der Form und Breite der Wehrkrone abhängen, ob der Strahl frei überfällt oder sich an den Wehrrücken anschmiegt. Gewisse Anhaltspunkte geben in dieser Beziehung die Versuche von Dernedde an einem lotrechten Überfallwehr mit beweglicher Klappe (S. 43), nach denen bei einem Wellendurchmesser von $d = 80$ [mm] der Überfallstrahl sich von der Klappe ablöst, sobald diese den Winkel $\alpha \geqq 117^0$ mit der Lotrechten bildet (Abb. 42). Diese Ergebnisse lassen sich bis zu einem gewissen Grade auch auf feste Wehre mit lotrechter Stauwand, kreiszylindrisch geformter Wehrkrone und entsprechender Abfallneigung übertragen, wobei — wie auf S. 35 gezeigt wurde — das Ähnlichkeitsgesetz gilt. Freilich spielen dabei die Verhältnisse am Strahlfuß eine Rolle, der bei den Derneddeschen Versuchen als frei, d. h. unbeeinflußt vom Unterwasser, vorausgesetzt wurde. Liegt die untere Begrenzung des Überfallstrahles durch den Wehrrücken eindeutig fest, so kann die Methode der konformen Abbildung angewandt werden (Abb. 43), welche sowohl über die Geschwindigkeits- und Druckverhältnisse als auch über die Größe der Überfallmenge Q Aufschluß gibt (vgl. dazu Ziff. 7).

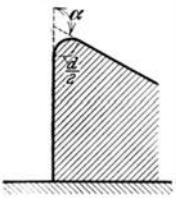


Abb. 42.

Bei stärkerer Abfallneigung der stromab liegenden Wehrfläche — bzw. bei stark gekrümmtem Wehrrücken — hebt sich der überfallende Strahl von letzterer ab; gleichzeitig treten Saugwirkungen auf, welche die Geschwindigkeits- und Druckverteilung im Strahle wesentlich beeinflussen (vgl. S. 47). Im allgemeinen darf gesagt werden, daß bei Wehren mit steiler Abfallwand durch eine Abrundung der Wehrkrone die Überfallmenge gegenüber dem scharfkantigen Überfall bis zu 30% vergrößert werden kann, vorausgesetzt, daß die Überfallhöhe h nicht zu klein ist.

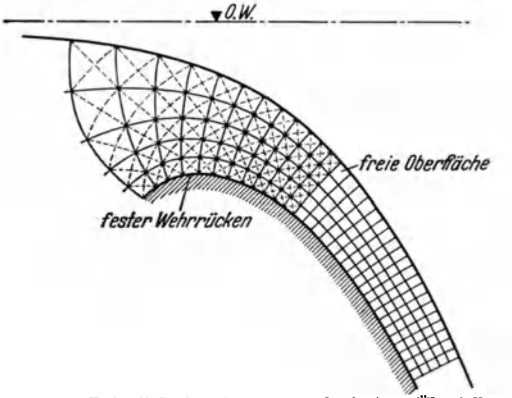


Abb. 43. Potentialnetz eines angeschmiegten Überfallstrahles.

Wehre mit abgerundeter Krone sind besonders von Rehbock[1] untersucht worden. Bei lotrechter Stauwand, kreiszylindrischer Krone vom Radius r und einer Abfallneigung 3:2 ($\alpha = 56^0\,20'$, Abb. 44) fand er für die Überfallmenge den empirischen Wert

$$Q = \frac{2}{3}\, b\, h \sqrt{2gh}\left[0{,}312 + 0{,}09\,\frac{h}{w} + \sqrt{0{,}30 - 0{,}01\left(5 - \frac{h}{r}\right)^2}\,\right], \tag{55}$$

und zwar gültig für $r \geqq 0{,}02[\mathrm{m}]$; $\frac{h}{r} \leqq 6 - \frac{20\,r}{w + 3\,r}$; $\frac{h}{w} \leqq 1$.

E. Kramer[2] untersuchte im Karlsruher Flußbaulaboratorium Dammbalkenwehre mit kreiszylindrischem Kopf, sowie lotrechter Stau- und Abfallwand und fand dafür als Überfallmenge

$$Q = \frac{2}{3}\, b\, h \sqrt{2\,g\,h}\left\{1{,}02 - \frac{1{,}015}{\frac{h}{r} + 2{,}08} + \left[0{,}04\left(\frac{h}{r} + 0{,}19\right)^2 + 0{,}0223\right]\frac{r}{w}\right\}. \tag{56}$$

Die vorstehenden Formeln sind neuerdings von O. Kirchmer[3] überprüft worden, wobei sich bei einem rundkronigen Wehr mit einer Abfallneigung von $\alpha = 60^0$ eine sehr gute Übereinstimmung mit der Rehbockschen Formel (55) ergab (welche an Wehren mit $56^0\,20'$ Neigungswinkel gewonnen wurde), während bei Wehren mit lotrechter Abfallwand geringe Differenzen gegenüber der Kramerschen Formel (56) festgestellt wurden, die im Maximum

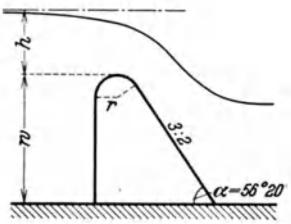


Abb. 44.

[1] Rehbock, Th.: Handb. d. Ing.-Wiss. Bd. 3; Wasserbau 4. Aufl. Bd. 2 (1912) S. 53.

[2] Vgl. R. Weyrauch: Hydraul. Rechnen 5. Aufl. 1921 S. 198.

[3] Mitt. d. Hydr. Inst. der T. H. München, herausgegeb. von D. Thoma, Heft 2 S. 1.

2,5% betrugen. Daraus ergibt sich die praktische Brauchbarkeit der obigen Formeln für entsprechende Wehrformen.

Keutner[1] untersuchte die Geschwindigkeitsverteilung im Überfallstrahl an einem rundkronigen Dachwehr mit einer An- und Ablaufneigung von rund 1 : 2,5. Der Krümmungshalbmesser der Wehrkrone betrug angenähert $r = 12{,}2$ [cm], die Gesamthöhe des Wehres 21,6 [cm] (Abb. 45). Dabei ergab sich für den durch den Wehrscheitel gelegten Querschnitt des Strahles bei nicht zu kleinen Überfallhöhen h ein Geschwindigkeitsdiagramm etwa von der Form $BCDE$ in Abb. 36. Durch Multiplikation dieser Fläche F mit der Wehrbreite b erhält man die sekundliche Überfallmenge Q, da $Q = b \int\limits_{(h')} v \cdot dz = bF$ (vorausgesetzt, daß v die horizontale Geschwindigkeitskomponente darstellt). Bezeichnet nun $m = \frac{F}{F_R}$ das Verhältnis der Fläche F zur Fläche F_R des Rechtecks $CDEG$, so kann Q auch wie folgt geschrieben werden

$$Q = b\,m\,F_R = b\,m\,h'\,\overline{DE}\,,$$

wo

$$\overline{DE} = \sqrt{2\,g\,(h + k - h')}$$

die Geschwindigkeit an der Stelle D bezeichnet. Demnach läßt sich die sekundliche Überfallmenge auf die allgemeine Form

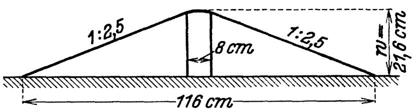


Abb. 45. Dachwehr.

$$Q = b\,m\,h' \sqrt{2\,g\,(h + k - h')} \tag{57}$$

bringen, woraus Q berechnet werden kann, wenn m und h' bekannt sind. Keutner bestimmte aus seinen Versuchen $m = 1{,}258 = \text{const.}$ und $h' = 0{,}73\,h \sqrt[5]{\frac{h}{w}}$ und erhielt damit für den vollkommenen Überfall über den oben skizzierten Wehrkörper die Formel

$$Q\left[\frac{\text{m}^3}{\text{sec}}\right] = 4{,}067\,b\,h \sqrt[5]{\frac{h}{w}} \sqrt{h + k - 0{,}73\,h \sqrt[5]{\frac{h}{w}}}\,,$$

welche die gemessenen Überfallmengen gut wiedergibt. Bei den Versuchen konnte festgestellt werden, daß der Überfallstrahl sich nicht von der Wehrablauffläche abhob, sondern an diese angeschmiegt blieb. Im Gegensatz dazu zeigte sich[2] bei einem Wehrkörper mit nahezu kreiszylindrischer Wehrkrone und einer Ablaufneigung von 1: 1 ein Abheben des Strahles von der Abfallwand. Weiter wurden für die beiden Wehrformen noch die der Weisbachschen Gl. (32) entsprechenden Beiwerte μ ermittelt; es ergab sich für das Dachwehr mit der Abfallneigung 1 : 2,5 der Wert $\mu = 0{,}736$, für das Wehr mit steiler Abfallwand $\mu = 0{,}95$.

Bei flachem Wehrrücken mit angeschmiegtem Überfallstrahl kann man eine einfache Beziehung zwischen der sekundlichen Überfallmenge

[1] Keutner, Chr.: Bautechn. 1929 S. 575.

[2] Keutner, Chr.: Abflußuntersuchungen usw., siehe Fußnote 2 auf S. 45.

und der Wassertiefe über der Wehrkrone wie folgt ableiten[1]. Sieht man in erster Näherung von der Krümmung der Stromfäden ab (vgl. dazu S. 123), nimmt ferner die Geschwindigkeit als gleichförmig über den Querschnitt verteilt an, so gilt, wenn v_0 die ungestörte Geschwindigkeit im Oberlauf bezeichnet, nach der Bernoullischen Gleichung bei verlustlos gedachter Strömung für die Geschwindigkeit im Punkte a (Abb. 46):

$$\frac{v_0^2}{2g} + t' = \frac{v^2}{2g}. \tag{58}$$

Außerdem ist mit Q_0 als sekundlicher Wassermenge, bezogen auf die Breite „Eins“,

$$1 \cdot t \cdot v = Q_0. \tag{59}$$

Daraus folgt, wenn man zur Abkürzung für die Geschwindigkeitshöhe im Oberlauf $k = \frac{v_0^2}{2g}$ setzt,

$$H = k + t' + t = \frac{v^2}{2g} + \frac{Q_0}{v}.$$

Für $v = 0$ wird $H = \infty$ und für $v = \infty$ wird ebenfalls $H = \infty$. Dazwischen muß es also eine Geschwindigkeit v geben, bei welcher H für die zu fördernde Durchflußmenge Q_0 ein Minimum erreicht. Diesem Minimum entspricht

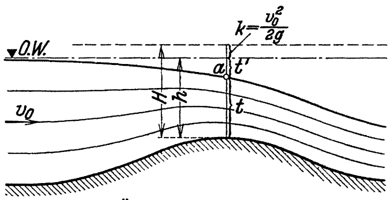


Abb. 46. Überströmung eines flachen Wehrrückens.

$$\frac{dH}{dv} = 0 = \frac{v}{g} - \frac{Q_0}{v^2},$$

woraus für die Geschwindigkeit v über der Wehrkrone folgt

$$v = \sqrt[3]{Q_0 g}. \tag{60}$$

Die Wassertiefe über der Wehrkrone ergibt sich damit nach (59) zu

$$t = \frac{Q_0}{v} = \sqrt[3]{\frac{Q_0^2}{g}}.$$

Setzt man v aus (60) in (58) ein, so folgt

$$k + t' = \frac{(Q_0 g)^{2/3}}{2g} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{Q_0^2}{g}},$$

und man erkennt, daß $t = 2(k + t')$ wird, bzw.

$$H = t + t' + k = \frac{3}{2}\,t.$$

Damit also die ganze Wassermenge Q_0 über den Wehrrücken abgeführt werden kann, muß der Wasserspiegel vor dem Wehr so hoch angestaut werden, daß die Höhe $h = H - k$ über der Wehrkrone erreicht wird.

[1] Prandtl, L.: Abriß der Strömungslehre 1931 S. 81.

Wie sich die Verhältnisse stromabwärts weiter gestalten, hängt von dem Gefälle im Unterlauf ab. Vgl. hierzu im übrigen die Ausführungen auf S. 126 und S. 134.

10. Unvollkommener Überfall.

Liegt bei einem Wehr der Unterwasserspiegel höher als die Wehrkrone, so spricht man gewöhnlich von einem „unvollkommenen" Überfall und nennt das Wehr ein Grundwehr (Abb. 47). Dem Vorgehen Du Buats[1] und Weisbachs folgend wurde bislang angenommen, daß in solchen Fällen der Wasserabfluß über das Wehr in zwei Teile zerlegt werden kann: einen „vollkommenen" Überfall von der Höhe h_1 und einen Ausfluß unter Wasser (vgl. S. 19) von der Öffnung h_2. Für diese Abflußvorgänge müßten zwei verschiedene Beiwerte μ_1 und μ_2 eingeführt werden, über deren Größe jedoch nichts Genaueres bekannt ist, so daß man auf Schätzungen angewiesen ist. Die vorstehende Auffassung über das Wesen des „unvollkommenen" Überfalls darf heute als überholt angesehen werden. Auf eine Wiedergabe der Formel für die auf diese Weise errechnete Überfallmenge Q soll deshalb verzichtet werden.

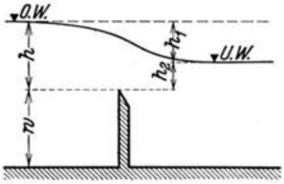


Abb. 47. „Unvollkommener" Überfall.

Unvollkommene Überfälle spielen hauptsächlich im praktischen Wehrbau eine Rolle, d. h. fast ausschließlich bei Wehren mit abgerundeter Krone oder breitem Wehrrücken. Bereits Bazin hat darauf hingewiesen, daß beim unvollkommenen Überfall zwei verschiedene Abflußarten zu unterscheiden sind, nämlich der „tauchende" Abfluß, wobei sich der abfließende Strahl — ähnlich wie beim vollkommenen Überfall — absenkt, sein Fuß aber von dem rückströmenden Unterwasser bedeckt wird, und der „wellige" Abfluß, bei dem ein wellenförmiges Überströmen des Wehrkörpers stattfindet. (Über eine theoretische Erklärung dieses Vorganges vgl. S. 132.)

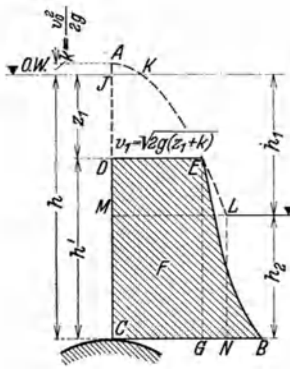


Abb. 48. Geschwindigkeitsverteilung beim „unvollkommenen" Überfall nach Winkel und Keutner.

Systematische Versuche zur Ermittlung der Geschwindigkeitsverteilung im Strahlquerschnitt über der Wehrkrone sind von Winkel[2] und Keutner[3] an rundkronigen Wehren angestellt worden. Dabei ergab sich ein Geschwindigkeitsdiagramm, das generell die Form der in Abb. 48 schraffierten Fläche $BCDE$ hat. In dieser Abbildung ist weiter die Geschwindigkeitsparabel $JKLM$ eingetragen, die nach der alten Theorie dem Überfall von der Höhe h_1 entsprechen würde (s. oben) und das Recht-

[1] Vgl. Ph. Forchheimer: Hydraulik 3. Aufl. 1930 S. 390.
[2] Winkel, R.: Bautechn. 1929 S. 439.
[3] Keutner, Chr.: Bautechn. 1929 S. 578ff.

eck $LNCM$, das die theoretische Geschwindigkeitsverteilung für den Abfluß unter Wasser von der Öffnung h_2 darstellt. Die Strahldicke h' über der Wehrkrone ist im allgemeinen von der Unterwasserhöhe h_2 wesentlich verschieden.

Außer den beiden oben genannten Formen des unvollkommenen Überfalls ist nach Keutners Versuchen als weitere Abflußform noch der Übergang vom vollkommenen zum unvollkommenen Überfall bemerkenswert. Bei diesem Abfluß sinkt der Überfallstrahl — ähnlich wie beim vollkommenen Überfall — zunächst bis unter die Wehrkrone. Von dort ab steigt das Unterwasser allmählich (nicht sprunghaft) wieder von der tiefsten Absenkungsstelle zum normalen Unterwasserstand über der Wehrkrone an (Abb. 49).

In ähnlicher Weise wie auf S. 50 beschrieben, hat Keutner[1] seine Geschwindigkeitsmessungen an dem Dachwehr (Abb. 45) benützt, um die Überfallmengen Q für die außer dem vollkommenen Überfall noch möglichen Abflußarten zu bestimmen. Unter Beachtung der Abb. 48 kann für Q wieder gesetzt werden (vgl. S. 50)

$$Q = b\,F = b\,m\,h'\,\overline{DE},$$

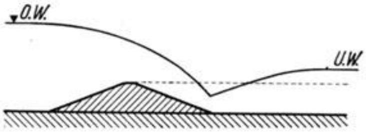


Abb. 49. Übergang vom „vollkommenen" zum „unvollkommenen" Überfall.

wo b die Wehrbreite und m das Verhältnis der Fläche F zur Rechteckfläche $CDEG$ bezeichnet, während die Strecke $\overline{DE}$ die Geschwindigkeit $v_1 = \sqrt{2g\,(z_1 + k)}$ darstellt. Somit wird

$$Q = b\,m\,h'\,\sqrt{2\,g\,(z_1 + k)}\,, \tag{61}$$

und zwar ist $b\,h'$ der Strahlquerschnitt über der Wehrkrone und $\sqrt{2g\,(z_1 + k)}$ die an der Strahloberfläche dieses Querschnitts herrschende Geschwindigkeit. Nach dieser Darstellung ist es möglich, die Überfallmenge Q für alle Arten des Überfalls durch eine einzige Formel auszudrücken. Freilich ist dazu die Kenntnis der Größen m und h' (bzw. $z_1 = h - h'$) erforderlich, die von Keutner für das untersuchte Dachwehr (Abb. 45) wie folgt bestimmt wurden (w = Wehrhöhe):

1. Übergang vom vollkommenen zum unvollkommenen Überfall.

$$m \approx 1{,}258 \approx \text{const.}; \qquad h' = 0{,}70\,h\,\sqrt[10]{\frac{h}{w}}\,.$$

2. Unvollkommener Überfall — Tauchform.

a) $1{,}174 < \dfrac{h}{h_2} < 1{,}29; \qquad m = 0{,}965\,\dfrac{h}{h_2}; \qquad h' = 0{,}745\,h\,\sqrt[10]{\dfrac{h}{w}}\,.$

b) $\dfrac{h}{h_2} > 1{,}29; \qquad m = 1{,}24 = \text{const.}; \qquad h' = 0{,}745\,h\,\sqrt[10]{\dfrac{h}{w}}\,.$

[1] Keutner, Chr.: Bautechn. 1929 S. 578ff.

3. Unvollkommener Überfall — Wellenform.

$$\frac{h}{h_2} < 1{,}174; \qquad m = 0{,}965\,\frac{h}{h_2}; \qquad h' = 0{,}84\,h\,\sqrt[10]{\frac{h}{w}}\,.$$

Bei sehr großen Oberwasserhöhen h über der Wehrkrone findet ein wellenförmiges Überströmen des Wehrkörpers statt, ohne daß sich ein wesentlicher Unterschied zwischen Ober- und Unterwasser einstellt. In solchen Fällen verlieren die obigen Gleichungen ihre Gültigkeit; als Grenzwert gibt Keutner $\frac{h}{w} \approx 1{,}5$ an.

Zur Anwendung der Gl. (57) und (61) ist noch zu bemerken, daß in der Geschwindigkeitshöhe $k = \frac{v_0^2}{2g}$ die Überfallmenge Q enthalten ist, da ja $v_0 = \frac{Q}{F_0}$ ist, wenn F_0 den Querschnitt des Zulaufgerinnes oberhalb des Wehres bezeichnet. Um also Q bestimmen zu können, muß man zunächst eine Annahme für k machen (etwa $k = 0$). Mit diesem Werte k wird Q in erster Näherung berechnet, darauf $k = \frac{Q^2}{2gF_0^2}$ bestimmt, in die Gleichung für Q eingesetzt usf.

II. Strömung in geschlossenen Leitungen.

1. Allgemeines.

Die Frage nach der Bewegung einer Flüssigkeit in geschlossenen Leitungen — speziell in kreiszylindrischen Rohren — hat von jeher eine große praktische Bedeutung für die Technik gehabt. So ist es denn nicht weiter verwunderlich, daß besonders die Ingenieure diesem Problem schon frühzeitig ihre Aufmerksamkeit gewidmet haben. Freilich ließ der Erfolg dieser Bemühungen anfangs viel zu wünschen übrig, was nicht zuletzt auf den Gegensatz zurückzuführen ist, der lange Zeit — etwa bis zur Jahrhundertwende — zwischen den Methoden der theoretischen Hydrodynamik und denen der praktischen Hydraulik bestand. Erst die Verbindung der Theorie der zähen Flüssigkeiten mit dem reichhaltigen Versuchsmaterial der Hydraulik sowie planmäßig in den Forschungsanstalten durchgeführten Modellversuchen haben wesentlich zur Klärung der Vorgänge bei Rohrströmungen beigetragen, obwohl auch heute noch manche Frage auf diesem wichtigen Gebiete der Strömungslehre ihrer endgültigen Lösung harrt.

Als besonders fruchtbar zur Erforschung von Strömungsvorgängen der verschiedensten Art hat sich die Anwendung der physikalischen Ähnlichkeitsgesetze erwiesen. Für die Strömung in geschlossenen Leitungen, die wesentlich von der Flüssigkeitsreibung beherrscht wird, kommt in erster Linie das Reynoldssche Ähnlichkeitsgesetz in Frage. Nach diesem verlaufen zwei geometrisch ähnliche Strömungen, die außer von Trägheitskräften nur noch von Reibungskräften beeinflußt werden, auch mechanisch ähnlich, wenn für beide die gleiche

Reynoldssche Zahl

$$\mathfrak{R} = \frac{L\,V}{\nu}$$

gilt (vgl. Bd. I S. 86). Hierbei bezeichnet L eine charakteristische Länge (etwa den Rohrdurchmesser), V eine charakteristische Geschwindigkeit (mittlere oder maximale Geschwindigkeit) und $\nu\left[\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{sec}}\right]$ die kinematische Zähigkeit. Wie bereits im I. Bande gezeigt wurde, ist man gerade durch dieses Gesetz imstande, eine Reihe von Erscheinungen zu erklären, für die früher ein systematischer Zusammenhang nicht erkennbar war.

Bei der Beurteilung der Strömungsvorgänge in Leitungen ist besonders beachtenswert, daß zwei verschiedene Fließarten möglich sind: laminare oder Schichtenströmung und turbulente oder wirbelige Strömung, die wesentlich verschiedene Merkmale aufweisen (Bd. I S. 72 und 79). Die Grenze zwischen beiden liefert die kritische Reynoldssche Zahl, welche für (hinreichend lange) glatte Kreisrohre bei

$$\mathfrak{R}_k = \left(\frac{c\,d}{\nu}\right)_k = 2320$$

liegt, bezogen auf die mittlere Geschwindigkeit c und den Rohrdurchmesser d. Unterhalb dieser Grenze ist die Bewegung stets laminar, oberhalb der kritischen Reynoldsschen Zahl ist ein gewisser Störungsbetrag nötig, um die Turbulenz hervorzurufen, der um so kleiner ist, je größer $\mathfrak{R}$ wird.

Während sich nun die laminare Rohrströmung eindeutig aus den Gesetzen der zähen Flüssigkeiten herleiten läßt (Geschwindigkeitsverteilung, Hagen-Poiseuillesches Gesetz), ist das — zur Zeit wenigstens — hinsichtlich der turbulenten Strömungsform noch nicht möglich, so daß man hier auf halbempirische Ansätze angewiesen ist. Letztere werden gewonnen unter Zugrundelegung allgemein gültiger Schlußfolgerungen aus der theoretischen und experimentellen Hydrodynamik, sowie unter Verwendung der Ähnlichkeitsgesetze; die in ihnen auftretenden Konstanten müssen durch den Versuch bestimmt werden.

Über das Wesen der Turbulenz und die damit zusammenhängenden Erscheinungen bei Rohrströmungen (Widerstand, Geschwindigkeitsverteilung usw.) ist bereits im I. Bande eingehend berichtet worden, worauf hier verwiesen wird (S. 79 ff., vgl. auch Ziff. 2 des vorliegenden Abschnittes). An dieser Stelle sei nur noch kurz eines für die Folge wichtigen Punktes Erwähnung getan, das ist die Frage nach der Wandbeschaffenheit. Erfahrungsgemäß besteht nämlich hinsichtlich der Größe des Rohrwiderstandes sowie der Geschwindigkeitsverteilung ein Unterschied, je nachdem ob es sich um glatte oder rauhe Rohrwandungen handelt. Nun gibt es zwar absolut glatte Flächen selbst bei feinster Polierung der Oberfläche in der Natur nicht. Indessen hat sich gezeigt, daß auch annähernd glatte Rohre, die gewöhnlich als technisch glatt bezeichnet werden, sich anders verhalten als rauhe Rohre, aber untereinander gleich, selbst wenn sie hinsichtlich des Grades ihrer Glattheit gewisse Abweichungen voneinander aufweisen.

Die Gesetze der Strömung in glatten Rohren sind heute theoretisch und experimentell so weit erforscht, daß nach dieser Richtung bis zu sehr hohen Reynoldsschen Zahlen $\left(\mathfrak{R} = \frac{c\,d}{\nu} = 10^8\right)^*$ ziemliche Klarheit herrscht. Dagegen ist die Frage, wann ein Rohr als hydraulisch glatt zu gelten hat, noch nicht endgültig entschieden. Vermutlich ist das der Fall, wenn die unvermeidlichen Wandunebenheiten so klein sind, daß sie von einer laminaren Randschicht (Bd. I S. 104) vollkommen eingehüllt werden.

Bei hydraulisch rauhen Rohren bereitet die Feststellung des Rauhigkeitsgrades einer Wand erhebliche Schwierigkeiten, besonders, wenn man dabei an die praktisch vorhandenen Rauhigkeiten denkt, wie sie durch Rostbildung, Verschmutzung, Nietköpfe, Holzfaserung usw. bedingt sind. Es ist anzunehmen, daß hier nicht nur die mittlere Größe der Wandunebenheiten — bzw. deren Verhältnis zum Rohrradius (relative Rauhigkeit) — eine Rolle spielt, sondern auch ihre Dicke, ihr seitlicher Anstieg und ihr mittlerer Abstand. Man wird also bei praktischen Rechnungen vorläufig mehr oder weniger auf Schätzungen und Erfahrungswerte angewiesen sein, solange eine systematische Klärung des Rauhigkeitsbegriffes unter Angabe entsprechender Zahlenwerte nicht erfolgt ist.

2. Stationäre Strömung in geraden Kreisrohren.

An dieser Stelle sollen nur turbulente Strömungen ins Auge gefaßt werden, da solche bei Rechnungen der Praxis fast ausschließlich in Frage kommen[1]. Von besonderem Interesse ist dabei die Kenntnis des Widerstandsgesetzes und der Geschwindigkeitsverteilung über den Rohrquerschnitt, da alle anderen Fragen beantwortet werden können, sobald jene bekannt sind. Im I. Bande ist über diesen Gegenstand bereits berichtet worden (S. 88ff.). Um des Zusammenhanges willen sollen hier jedoch die wichtigsten Gesetze — darunter einige neuere Forschungsergebnisse — noch einmal zusammengestellt werden, soweit sie für Rohre mit kreisförmigem Querschnitt in Betracht kommen.

a) Widerstandsgesetz.

Die Widerstandsziffer λ ist definiert durch den Ausdruck

$$J = \lambda \frac{c^2}{2\,g\,d}, \tag{62}$$

in dem J das Gefälle, c die mittlere Geschwindigkeit und d den Rohrdurchmesser darstellen. Für gerade Rohre ist

$$J = \frac{p_1 - p_2}{\gamma\, l} + \frac{z_1 - z_2}{l}, \tag{63}$$

wo p_1 und p_2 die mittleren Drücke zweier Querschnitte 1 und 2 vom Abstand l, z_1 und z_2 die Ortshöhen der Querschnittsschwerpunkte in bezug auf einen beliebigen Horizont und γ das spezifische Gewicht der

* Nikuradse, J.: VDI-Forsch.-Heft Nr. 356. Berlin 1932.

[1] Über laminare Rohrströmung vgl. Bd. I S. 72ff.

Flüssigkeit bezeichnen (Abb. 50). Gl. (62) liefert also ein Maß für den Druckabfall in der Strömungsrichtung. Mittels dieses Ausdruckes läßt sich jetzt auch die in die Bernoullische Gleichung für nicht ideale Flüssigkeiten eingeführte Verlusthöhe h_v darstellen. Im Falle stationärer Strömung lautet erstere bekanntlich (Bd. I S. 69 u. 71)

$$\frac{c_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{c_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_v .$$

Da aber für Rohre von konstantem Durchmesser aus Gründen der Kontinuität $c_1 = c_2$ ist, so folgt mit Rücksicht auf (62) und (63)

$$h_v = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + z_1 - z_2 = J\,l = \frac{\lambda\, c^2}{2\,g\,d}\,l . \tag{64}$$

Schließlich besteht zwischen der sekundlichen Durchflußmenge Q, der mittleren Geschwindigkeit c und dem Querschnitt F die Durchflußgleichung

$$Q = c\,F = c\,\frac{\pi\, d^2}{4} .$$

Zur Lösung praktischer Aufgaben ist also die Kenntnis der Widerstandsziffer λ erforderlich. Dabei muß, wie oben bereits erwähnt wurde, zwischen hydraulisch glatten und hydraulisch rauhen Rohren unterschieden werden.

α) **Glatte Rohre.** Hier hängt λ lediglich von der Reynoldsschen Zahl $\mathfrak{R} = \frac{c\,d}{\nu}$ ab. Bis zu $\mathfrak{R} \approx 100000$ gilt das Blasiussche Potenzgesetz[1]

$$\lambda = 0{,}316 \cdot \mathfrak{R}^{-1/4} . \tag{65}$$

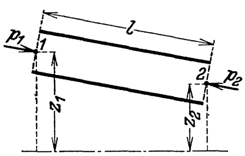


Abb. 50.

Für größere Reynoldssche Zahlen — etwa bis $\mathfrak{R} = 450000$ — fanden Lees[2] sowie Jakob und Erk[3] das empirische Gesetz

$$\lambda = 0{,}00714 + 0{,}6104\, \mathfrak{R}^{-0{,}35} , \tag{66}$$

während Schiller[4] auf Grund der Versuche von Hermann und Burbach im Bereiche von $\mathfrak{R} = 2 \cdot 10^4$ bis $2 \cdot 10^6$ die ebenfalls empirische Formel

$$\lambda = 0{,}0054 + 0{,}396\, \mathfrak{R}^{-0{,}3} \tag{66a}$$

angibt.

Auf theoretischem Wege hat v. Kármán[5] für die Widerstandsziffer den Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi}} = \frac{1}{\varkappa\sqrt{2}} \ln \left(\mathfrak{R}_m \sqrt{\varphi}\right) + C \tag{67}$$

---

[1] Blasius, H.: Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Heft 131. Berlin: VDI-Verlag 1913.

[2] Lees: Proc. Roy. Soc., Lond. (A) Bd. 91 (1915) S. 46.

[3] Forsch.-Arb. Ing.-Wes. Heft 267. Berlin: VDI-Verlag 1924.

[4] Ing.-Arch. Bd. 1 (1930) S. 392.

[5] v. Kármán: Verhandl. d. 3. Intern. Kongr. f. Techn. Mech. Stockholm I (1930) S. 85.

abgeleitet (vgl. Bd. I S. 94 u. 102), worin φ mit λ durch die Beziehung $\varphi = \frac{2\tau_0}{\varrho\, v_{\max}^2} = \frac{\lambda}{4}\frac{c^2}{v_{\max}^2}$ verknüpft und $\Re_m = \frac{v_{\max}\cdot d/2}{\nu}$ ist ($v_{\max}$ = Maximalgeschwindigkeit, τ_0 = mittlere Schubspannung am Rande). Mit den Konstanten $\varkappa = 0{,}417$ und $C = 4{,}16$ steht diese Formel nach neueren Messungen von Nikuradse[1] in guter Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen.

Die Benutzung der Kármánschen Gl. (67) ist jedoch für praktische Rechnungen wenig geeignet, da man es bei solchen fast ausschließlich mit der mittleren Geschwindigkeit c und nicht mit der maximalen zu tun hat. Prandtl[2] hat neuerdings auf etwas anderem Wege als v. Kármán gezeigt, daß man das Widerstandsgesetz für glatte Rohre in der analogen Form

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A \log(\Re\sqrt{\lambda}) + B \qquad (68)$$

darstellen kann, wo $\Re = \frac{c\,d}{\nu}$ ist und λ die frühere Bedeutung hat; außerdem tritt darin an Stelle des natürlichen der Briggsche Logarithmus. Trägt man nun die aus Messungen gewonnenen Werte $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ als Ordinaten und die zugehörigen Werte $\log(\Re\sqrt{\lambda})$ als Abszissen auf, so erhält man in der Tat mit sehr großer Genauigkeit eine Gerade (Abb. 51, in der die Abszissen viermal so groß aufgetragen sind wie die Ordinaten), welche die Ordinatenachse im Abstand $B = -0{,}8$ schneidet und die Steigung $A = \operatorname{tg}\alpha = 2{,}0$ besitzt[3]. Mit diesen Konstanten liefert Gl. (68) das Widerstandsgesetz

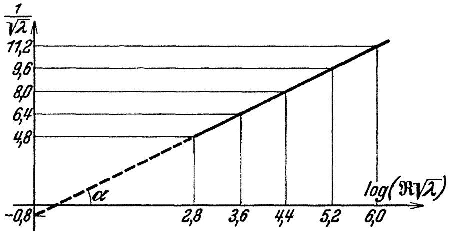


Abb. 51. Widerstandsgesetz für glatte Rohre nach Prandtl und Nikuradse.

$$\lambda = \frac{1}{\{2\log(\Re\sqrt{\lambda}) - 0{,}8\}^2}, \qquad (68a)$$

das mit den Versuchsergebnissen bis zu $\Re$-Werten von $3{,}4\cdot 10^6$ in sehr guter Übereinstimmung steht. Um λ aus vorstehender Gleichung zu bestimmen, hat man zunächst $\sqrt{\lambda}$ abzuschätzen — etwa nach Gl. (65) —

$\Re =$	5000	10000	20000	50000	70000
$\lambda_{theor.} =$	0,0374	0,0309	0,0259	0,0209	0,0194
$\lambda_{emp.} =$	0,0381	0,0314	0,0262	0,0210	0,0194

[1] VDI-Forsch.-Heft Nr. 356 S. 27. Berlin 1932. v. Kármán hat für $\varkappa$ den Wert 0,38 angegeben (Bd. I S. 94).

[2] Prandtl, L.: Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung. Z. VDI 1933 Nr. 5 S. 105 ff.

[3] Nikuradse, J.: Gesetzmäßigkeiten der turb. Strömung in glatten Rohren. VDI-Forsch.-Heft Nr. 356 S. 32. Berlin: VDI-Verlag 1932.

und in (68a) einzuführen. Das Verfahren muß so lange wiederholt werden, bis die Abweichung innerhalb der gewünschten Genauigkeit liegt, wozu im allgemeinen nur eine Wiederholung erforderlich ist.

Einen Vergleich der Ergebnisse nach Gl. (68a) mit den empirischen Werten aus (66) bzw. (66a) zeigt die auf S. 58 u. 59 stehende Tabelle.

Neuerdings hat Nikuradse[1] auf Grund seiner Göttinger Versuche noch folgende Näherungsformel zwischen $\mathfrak{R} = 10^5$ und 10^8 angegeben

$$\lambda = 0{,}0032 + 0{,}221\mathfrak{R}^{-0{,}237}. \tag{68b}$$

Zum Vergleiche sei darauf hingewiesen, daß für laminare Strömung in glatten Rohren

$$\lambda_{lam.} = \frac{64}{\mathfrak{R}}$$

gefunden war (Bd. I S. 92).

β) **Rauhe Rohre.** Wie die Versuche gezeigt haben, ist der Strömungswiderstand bei rauhen Rohren stets größer als bei glatten. Andererseits lassen die an rauhen Rohren gewonnenen Erkenntnisse hinsichtlich des Strömungswiderstandes darauf schließen, daß man hier vermutlich zwei verschiedene Arten von Rauhigkeit zu unterscheiden hat, die einen voneinander abweichenden Verlauf der ($\lambda\mathfrak{R}$)-Kurve aufweisen, und die Hopf[2] als Wandrauhigkeit schlechthin und Wandwelligkeit bezeichnet hat (Bd. I S. 97). Wandrauhigkeit ist besonders vorhanden bei scharfkantigen und unregelmäßigen Rauhigkeitselementen, Wandwelligkeit dagegen, wenn die Unebenheiten der Wand sanfter und regelmäßiger sind. Bei den natürlichen Rohrwandungen, wie sie in der Praxis vorkommen, treten vermutlich beide Arten von Rauhigkeit gleichzeitig auf. Außerdem lassen die Versuche darauf schließen, daß bei größeren $\mathfrak{R}$-Werten ein Übergang von Wandwelligkeit zu Wandrauhigkeit angenommen werden muß und umgekehrt.

Nach Hopf[3] und Fromm[4] soll für Wandrauhigkeit gelten

$$\lambda = 4 \cdot 10^{-2} \left(\frac{k}{r_h}\right)^{0{,}314} \tag{69}$$

$\left(r_h = \frac{d}{4} = \text{hydraulischer Radius}\right)$, und zwar ist für

Neues, ziemlich glattes Metallrohr, asphaltiertes Blech	$k = 4 \cdot 10^{-3}$ [m]
Neues Gußeisen, Eisenblech, gut geglätteter Zement	$7 \cdot 10^{-3}$ [m]
Älteres Eisenrohr, angerostet	$15 \cdot 10^{-3}$ [m]
Rauher Zement, verkrustetes Eisen, rauhe Bretter	$20 \cdot 10^{-3}$ [m]

100000	200000	400000	600000	1000000	2000000
0,0180	0,0156	0,0137	0,0127	0,0116	0,0104
0,0180	0,0157	0,0137	0,0127	0.0117	0,0105

[1] VDI-Forsch.-Heft 1932 Nr. 356 S. 32.
[2] Hopf, L.: Z. angew. Math. Mech. 1923 S. 329.
[3] Hopf, L.: Handb. d. Phys. v. Geiger u. Scheel Bd. 7 S. 146—151.
[4] Fromm, K.: Z. angew. Math. Mech. 1923 S. 339ff.

Hier erscheint λ lediglich als Funktion der relativen Rauhigkeit $\frac{k}{r_h}$, d. h. in Gl. (62) ist J proportional dem Quadrat der mittleren Geschwindigkeit. Dagegen soll im Falle der Wandwelligkeit

$$\lambda = \lambda_0 \xi \tag{70}$$

sein, wo λ_0 die entsprechende Widerstandsziffer für glatte Wandungen $[\lambda_0 = f(\mathfrak{R})]$ und ξ einen Rauhigkeitsparameter bezeichnet, der nach Hopf für Holzrohre etwa 1,5 bis 2,0, für asphaltierte Eisenrohre 1,2 bis 1,5 beträgt.

Für sehr rauhe Rohre, bei denen die mittlere Wandunebenheit ε groß gegenüber der Dicke δ der Laminarschicht ist (vgl. S. 56), hat v. Kármán ein Gesetz abgeleitet, das berufen scheint, die Frage nach der Widerstandsziffer wesentlich zu klären. Ist nämlich ε groß gegen δ, so darf nach v. Kármán angenommen werden, daß der Kleinstwert des Mischungsweges l (Bd. I S. 99) am Rande der Laminarschicht wesentlich durch die Abmessungen der Rauhigkeitselemente bedingt ist und aus Dimensionsgründen proportional ε gesetzt werden kann. Nun gilt für die maximale Geschwindigkeit in Rohrmitte nach Bd. I S. 102 die Beziehung

$$v_{\max} = \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}\left(\ln\frac{r\sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}}{\nu} + \text{const.}\right),$$

wo τ_0 die Wandschubspannung und r den Rohrradius bezeichnen, während $\varkappa$ wieder die bereits oben erwähnte Konstante ($\varkappa \approx 0{,}4$) darstellt. Da aber der Mischungsweg l an der Wand nur von τ_0, ϱ und ν abhängen kann und demnach als Länge proportional dem Werte $\frac{\nu}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}}$ sein muß, so kann wegen der oben angedeuteten Proportionalität zwischen l und ε die vorstehende Gleichung (mit einer anderen Konstanten) auch wie folgt geschrieben werden

$$v_{\max} = \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}\left(\ln\frac{r}{\varepsilon} + \text{const.}\right). \tag{71}$$

Definitionsgemäß ist (Bd. I S. 102) $\tau_0 = \frac{\lambda}{4}\varrho\frac{c^2}{2}$, womit aus Gl. (71) für $v_{\max}$ folgt

$$\frac{v_{\max}\cdot\varkappa\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{\lambda c^2}{4}}} = \ln\frac{r}{\varepsilon} + \text{const.}$$

oder, wegen

$$\sqrt{\frac{\lambda}{4}c^2} = v_{\max}\sqrt{\varphi} \quad \text{(S. 58)},$$

$$\frac{\varkappa\sqrt{2}}{\sqrt{\varphi}} = \ln\frac{r}{\varepsilon} + \text{const.} \tag{71a}$$

Da ε die mittlere Rauhigkeitserhebung und r den Rohrhalbmesser bezeichnet, so stellt $\frac{\varepsilon}{r}$ die relative Rauhigkeit dar. Der vorstehende Ausdruck spricht also — ähnlich wie Gl. (69) — die Gültigkeit des quadratischen Widerstandsgesetzes aus, da φ nur von $\frac{\varepsilon}{r}$ abhängt (vgl. S. 60). Das obige Gesetz (71a) ist durch Prandtl[1] bestätigt, der in einer für die Rechnung etwas bequemeren Form fand

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A \log \frac{r}{\varepsilon} + B\,. \tag{71b}$$

Eingehende Messungen zur Erforschung des Widerstandsgesetzes in rauhen Rohren wurden in der Göttinger Versuchsanstalt vorgenommen, die mittels besonderer Vorrichtungen über den laminaren und turbulenten Bereich bis zu Reynoldsschen Zahlen von $\mathfrak{R} = \frac{c\,d}{\nu} = 10^6$ aus-

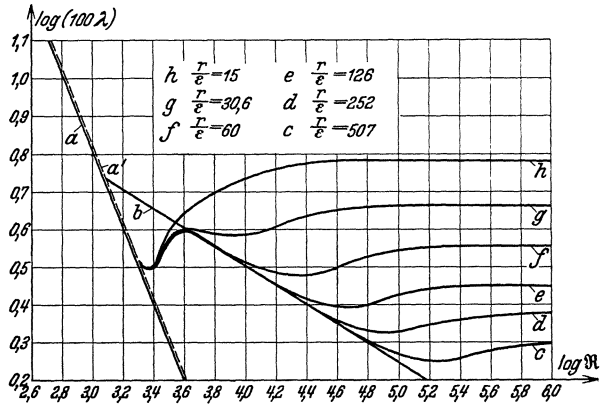


Abb. 52. Widerstandsgesetz für rauhe Rohre nach Prandtl und Nikuradse.

gedehnt werden konnten[2]. Als Versuchsrohre wurden gezogene Messingrohre verwendet, deren Innenwand durch ein Gemisch aus Lack und Sand von bestimmter Korngröße künstlich rauh gemacht wurde. Als relative Rauhigkeit wurde das Verhältnis $\frac{\varepsilon}{r}$ bestimmt, wo ε wieder die mittlere Erhebung und r den Rohrradius bezeichnen.

Die Versuchsergebnisse zeigt Abb. 52, in der die Widerstandsziffer λ als Funktion der Reynoldsschen Zahl $\mathfrak{R} = \frac{c\,d}{\nu}$ aufgetragen ist[3]. Die

[1] Fußnote 2 auf S. 58.

[2] Nikuradse: Über turbulente Wasserströmungen in geraden Rohren bei sehr großen Reynoldsschen Zahlen. Vortr. aus d. Gebiete d. Aerodynamik u. verwandter Gebiete, herausgegeben von Gilles, Hopf und v. Kármán, S. 63. Berlin: Julius Springer 1930.

[3] Nach L. Prandtl: Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung. Z. VDI 1933 Nr. 5 S. 111. Vgl. auch J. Nikuradse: Strömungsgesetze in rauhen Rohren, VDI-Forsch.-Heft Nr. 361 S. 6 Berlin: VDI-Verlag 1933.

stark geneigte Gerade a stellt λ im laminaren Bereich für glatte Rohre dar, die ihr parallele, gestrichelte Gerade a' die Widerstandsziffer im gleichen Bereich für rauhe Rohre. Wie man sieht, unterscheiden sich die entsprechenden λ-Werte nur wenig voneinander. Als kritische Reynoldssche Zahl wurde für rauhe Rohre $\mathfrak{R} = 2160$ bis 2440 gefunden, also rd. der gleiche Wert wie bei glatten Rohren. Die übrigen Kurven entsprechen der turbulenten Strömungsform, und zwar stellt b die Widerstandsziffer für glatte Rohre nach Blasius dar, während c bis h für rauhe Rohre bei wachsender relativer Rauhigkeit gelten. Dabei entspricht

Kurve	c	d	e	f	g	h
$\frac{\varepsilon}{r}$	0,00197	0,00397	0,00794	0,0167	0,0327	0,0667

Alle λ-Werte für rauhe Rohre liegen höher als diejenigen für glatte.

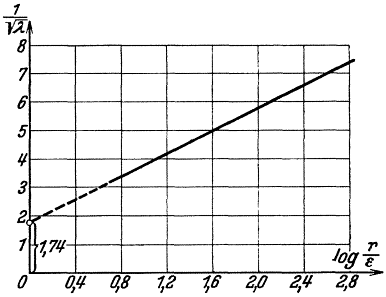


Abb. 52a. Graphische Darstellung der Gl. (72).

Außerdem erkennt man, daß bei größeren $\mathfrak{R}$-Werten für alle untersuchten Rauhigkeiten das quadratische Widerstandsgesetz gilt, da λ nur noch von der relativen Rauhigkeit abhängt, und zwar wird dieses Gebiet um so eher erreicht, je größer $\frac{\varepsilon}{r}$ ist. Im Gegensatz dazu konnte bisher aus Messungen an glatten Rohren bis zu $\mathfrak{R} = 3 \cdot 10^6$ eine Unabhängigkeit des λ-Wertes von $\mathfrak{R}$ nicht festgestellt werden[1]. Bei kleiner relativer Rauhigkeit besteht zunächst eine ziemlich genaue Übereinstimmung mit den λ-Werten für glatte Rohre, bevor das quadratische Widerstandsgesetz zur Geltung gelangt. Wichtig ist besonders die Feststellung, daß nach Eintritt des turbulenten Strömungszustandes für ein gewisses Übergangsgebiet Kurven mit anfangs fallendem λ (kleine relative Rauhigkeit) und solche mit anfangs steigendem λ (große relative Rauhigkeit) auftreten, was auch mit den von Fromm gemachten Beobachtungen übereinstimmt[2].

Die in Gl. (71b) zum Ausdruck kommende lineare Abhängigkeit der Werte $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ und $\log\frac{r}{\varepsilon}$ wird durch die oben beschriebenen Versuche sehr gut bestätigt. Trägt man nämlich $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ als Funktion von $\log\frac{r}{\varepsilon}$ auf (Abb. 52a), so erhält man mit großer Genauigkeit eine Gerade, die auf der Ordinatenachse $B = 1{,}74$ abschneidet und die Steigung $A = 2{,}0$ besitzt (in Abb. 52a sind die Abszissen vierfach vergrößert). Mit diesen Werten liefert Gl. (71b) innerhalb des Bereiches, für welchen

[1] Fußnote 2 auf S. 61. [2] Fußnote 4 auf S. 59.

das quadratische Widerstandsgesetz gilt,

$$\lambda = \frac{1}{\left(2\log\frac{r}{\varepsilon} + 1{,}74\right)^2}\,{}^*. \tag{72}$$

Die in vorstehender Gleichung auftretenden Konstanten gelten zunächst nur für Rauhigkeiten von der Art, wie sie den obigen Versuchen zugrunde gelegt wurden (Sandkornrauhigkeit). Es wäre also sehr erwünscht, derartige Versuche auch auf andere Rauhigkeitselemente auszudehnen. Nimmt man indessen zunächst einmal an, daß die Abweichungen bei anderen Rauhigkeitsarten nicht allzu groß sind, so kann Gl. (72) für praktische Rechnungen im Falle der Gültigkeit des quadratischen Widerstandsgesetzes (große $\mathfrak{R}$-Werte) bis auf weiteres angewandt werden, falls die Größe von ε bekannt ist.

Eine große Schwierigkeit für die Übertragung der theoretisch und experimentell gewonnenen Erkenntnisse auf die Fälle der Praxis liegt in der dauernden Veränderung, welche die Innenwand der Rohre im Betriebszustande durch Rostbildung, Verschleimung, Verkrustung, chemische Einwirkung von Säuren usw. erleidet, wodurch nicht nur die Wandbeschaffenheit, sondern auch die Größe des Durchflußquerschnitts beeinflußt wird. Man wird also auf gewisse Erfahrungswerte niemals ganz verzichten können, und die Leistungsfähigkeit eines neuen Rohres wird stets eine andere sein als die eines gebrauchten.

In nachstehender Tabelle sind für verschiedene praktisch wichtige Materialien einige ε-Werte zusammengestellt, die natürlich nur als Schätzungen angesehen werden dürfen und in besonders gelagerten Fällen nach oben und unten Abweichungen erfahren können. Nachstehend soll noch kurz auf den Zusammenhang der Gl. (69) und (72) eingegangen werden. Schreibt man erstere unter Einführung der relativen Rauhigkeit $\frac{\varepsilon}{r}$ in der Form

$$100\,\lambda = a\left(\frac{1000\,\varepsilon}{r}\right)^n,$$

wo a und n Zahlen sind, und logarithmiert, so folgt

$$\log(100\,\lambda) = \text{const.} + n\cdot\log\left(\frac{1000\,\varepsilon}{r}\right),$$

Tabelle der ε-Werte.

Material	cm
Gußeisen, neu	0,05 bis 0,10
„ angerostet	0,10 „ 0,15
„ verkrustet	0,15 „ 0,30 (und mehr)
Zement, geglättet	0,03 „ 0,08
„ unbearbeitet	0,10 „ 0,20
Rauhe Bretter	0,10 „ 0,25
Backsteinmauerwerk, gut gefugt	0,12 „ 0,25
Bruchsteinmauerwerk, bearbeitet	0,15 „ 0,30
Roher Bruchstein	0,80 „ 1,50

d. h. eine lineare Beziehung zwischen $\log(100\,\lambda)$ und $\log\left(\frac{1000\,\varepsilon}{r}\right)$. Würde man also $\log\left(\frac{1000\,\varepsilon}{r}\right)$ als Abszissen und $\log(100\,\lambda)$ als Ordinaten

* Vgl. hierzu die von L. Prandtl gegebene Ableitung der Gleichung (72) in der Z. VDI 1933 Nr. 5 S. 110.

auftragen, so müßte sich eine Gerade mit der Steigung n ergeben. Tatsächlich erhält man jedoch, wenn man die obigen Versuchsergebnisse (Abb. 52) in der geschilderten Weise aufträgt, eine leicht gekrümmte Kurve (Abb. 53), deren mittlere Steigung $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}32$ ungefähr dem Exponenten der Gl. (69) entspricht, während die kleineren relativen Rauhigkeiten eine kleinere, die größeren eine größere Steigung der Kurve aufweisen. Es dürfte sich demnach bei der Gl. (69) — ähnlich wie bei der Blasiusschen Formel (65) im Falle des glatten Rohres — um eine Annäherung einer logarithmischen Kurve durch eine höhere Parabel handeln[1].

Einen überschläglichen Anhalt für eine erste Abschätzung der Widerstandziffer liefert der von Dupuit angegebene Wert $\lambda = 0{,}03$, der für neue Rohre zu groß ist, aber für gebrauchte Rohre mit dünner Ansatzschicht bei mittleren Geschwindigkeiten von 0,5 bis 1 [m/sec] ungefähr zutrifft.

Auf die Wiedergabe der vielen in der Hydraulik verwendeten Widerstandsformeln muß hier verzichtet werden, zumal sie vielfach den Bedingungen der mechanischen Ähnlichkeit nicht gerecht werden und häufig nur unter bestimmten Voraussetzungen Gültigkeit besitzen. Lediglich die Formeln von v. Mises und von Biel, die auf Grund großer Versuchsreihen der älteren Hydraulik entwickelt wurden, sollen nachstehend noch angeführt werden.

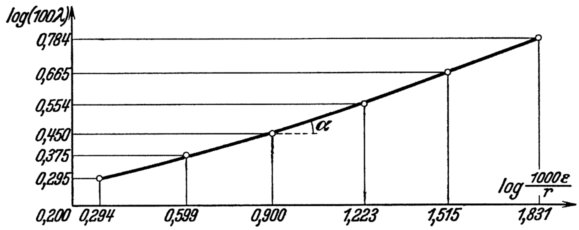


Abb. 53. Vergleich der Hopfschen Formel (69) mit der neuen Gl. (72).

Die v. Misessche Formel[2] besitzt vor anderen den Vorzug, daß sie dem Ähnlichkeitsgesetz genügt und lautet in der hier benutzten Schreibweise

$$\lambda = 0{,}0096 + \sqrt{\frac{32\,k'}{d}} + \sqrt{\frac{2{,}88}{\mathfrak{R}}} \tag{73}$$

und in der Nähe der kritischen Reynoldsschen Zahl (im turbulenten Bereich)

$$\lambda = \left(0{,}0096 + \sqrt{\frac{32\,k'}{d}}\right)\left(1 - \frac{2000}{\mathfrak{R}}\right) + \sqrt{\left(1 - \frac{2000}{\mathfrak{R}}\right)\frac{2{,}88}{\mathfrak{R}}} + \frac{64}{\mathfrak{R}}\,. \tag{73a}$$

Darin bedeutet wieder $\mathfrak{R} = \frac{c\,d}{\nu}$ die Reynoldssche Zahl und k' eine Rauhigkeitslänge, die von der Wandbeschaffenheit abhängt und der mittleren Unebenheit der Wand proportional ist. Für k' gibt v. Mises

[1] Vgl. v. Kármán: Fußnote 5 S. 57.
[2] v. Mises, R.: Elemente der techn. Hydromechanik, S. 62. 1914.

bei verschiedenem Wandmaterial folgende Zahlenwerte an:

Material	$10^6 k'$ [cm]
Glas	0,2 bis 0,8
Gezogenes Messing, Blei, Kupfer	0,2 „ 1,0
Zement, geschliffen	7,5 „ 15
„ roh	20 „ 40
Gummischlauch, gewöhnlich	6 „ 12
„ rauh	15 „ 30
Gasrohr	20 „ 50
Asphaltiertes Blech oder Gußrohr	30 „ 60
Gußeisen, neu	100 „ 200
„ gebrauchte Leitung	250 „ 500
Genietete Blechrohrleitung	200 „ 500
Holz, glatt gehobelt	25 „ 50
„ gewöhnlich	50 „ 100
„ rauhe Bretter	200 „ 400
Mauerwerk, bearbeitete Quadern	200 „ 400
„ gutgefügte Backsteine	200 „ 400
„ gewöhnlich	300 „ 600
„ rohe Bruchsteine	2000 „ 4000
Erdwände und Kiesböschungen	10000 „ 20000

Die von Biel[1] aufgestellte, ebenfalls dimensionsrichtige (neue) Formel lautet

$$\lambda = 0{,}00942 + \sqrt{\frac{\varepsilon'}{d}} + \frac{3{,}9}{\mathfrak{R}}\sqrt{\frac{d}{\varepsilon'}},$$

wobei ε' eine Rauhigkeitsgröße von der Dimension einer Länge ist. Die Formel hat einen ähnlichen Aufbau wie Gl. (73), nur ist das letzte Glied außer von $\mathfrak{R}$ auch noch von der relativen Rauhigkeit abhängig. Für ε' gibt Biel folgende Zahlenwerte an

Material	ε' [cm]
Glatte Rohre, z. B. gezogene Messingrohre	0,0001
Schmiedeeiserne Rohre und Bleche	0,0008
Gußeisen	0,0032
Rauhe Bretter	0,0072
Backsteine	0,0128
Bruchsteine	0,080
Rohe Bruchsteine	0,207

Für glatte Rohre besitzt die Bielsche Formel keine Gültigkeit, da mit $\varepsilon' \to 0$ $\lambda \to \infty$ geht. Auch bei kleinen relativen Rauhigkeiten und kleinen Reynoldsschen Zahlen sind ihre Ergebnisse unbrauchbar, was von Biel auch bemerkt wird[2].

In Abb. 54a u. 54b sind für drei verschiedene Rauhigkeitsgrade die λ-Werte als Funktion von $\mathfrak{R}$ nach den Formeln von v. Mises,

[1] Biel, R.: Strömungswiderstand in Rohrleitungen. Techn. Mech. 1925 S. 39. Berlin: VDI-Verlag. Biel hat bereits 1907 in dem VDI-Forsch.-Heft Nr. 44 eine Formel für λ aufgestellt, die aber nicht dimensionsrichtig ist; die oben angeschriebene Formel stellt den verbesserten Ausdruck dar.

[2] Biel, R.: a. a. O. S. 40.

Biel und nach Gl. (72) für einen Rohrdurchmesser von 5 cm und einen von 50 cm aufgetragen. Abb. 54b zeigt außerdem unter *I* zum Vergleich die λ-Kurve für hydraulisch glatte Rohre nach Gl. (68a). Daraus erkennt man zunächst die starke Abweichung der Bielschen Kurven bei

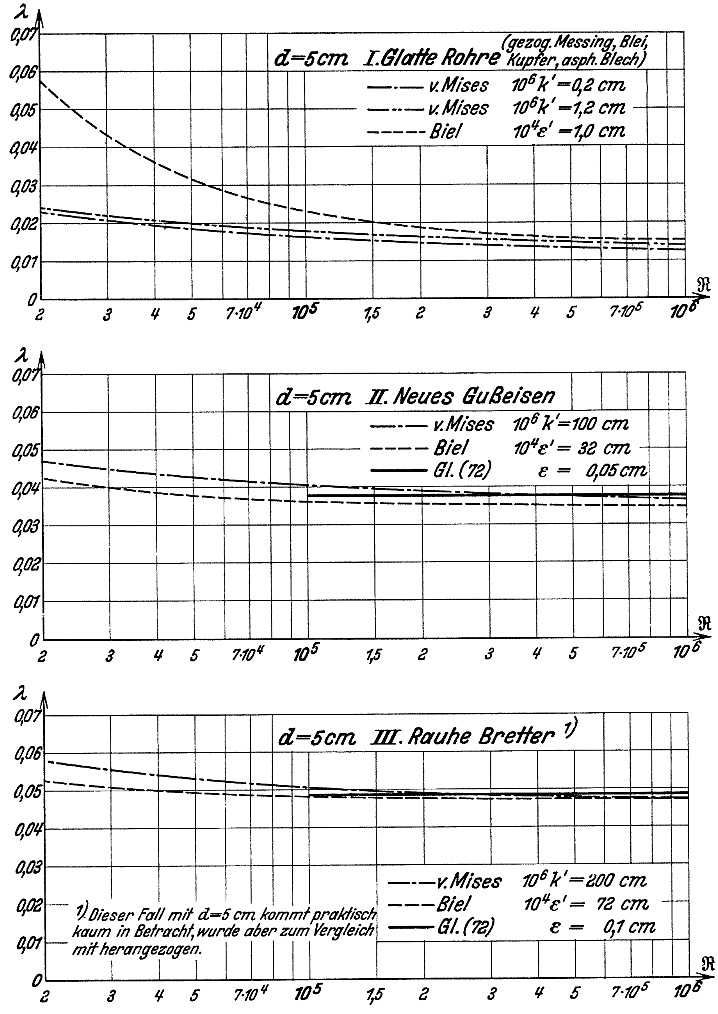


Abb. 54a. Vergleich der Widerstandsformeln von v. Mises, Biel und Prandtl.

kleinen relativen Rauhigkeiten und kleinen Reynoldsschen Zahlen. Für große $\Re$-Werte gehen alle drei Formeln in das quadratische Widerstandsgesetz über, wobei zu beachten ist, daß Gl. (72) überhaupt nur für diesen Bereich gilt.

Zur praktischen Berechnung der λ-Werte lassen sich aus dem oben Gesagten etwa folgende Gesichtspunkte herausschälen: Bei technisch glatten Rohren können die Gl. (65), (66), (66a), (68a) und (68b) innerhalb der dort angegebenen Gültigkeitsbereiche verwendet werden. Bei rauhen Rohren von kleiner relativer Rauhigkeit und kleinen $\mathfrak{R}$-Werten dürfte die v. Misessche Gl. (73) brauchbare

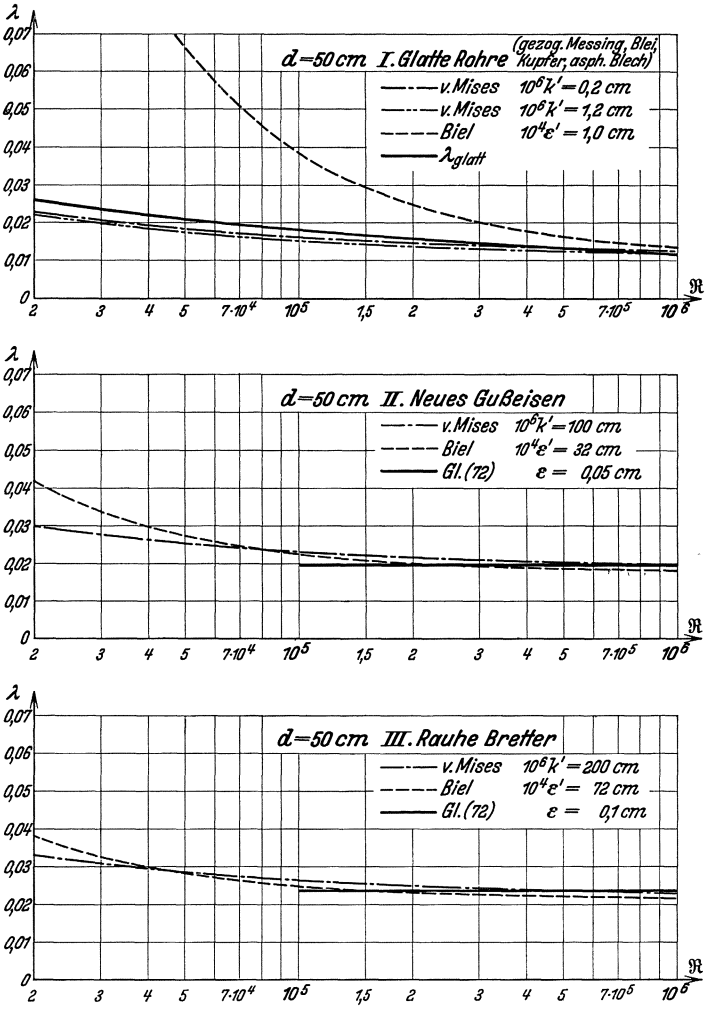


Abb. 54b. Vergleich der Widerstandsformeln von v. Mises, Biel und Prandtl.

Werte liefern, sofern nicht Gl. (70) in Betracht kommt. Auch die Blasiussche Gl. (65) kann evtl. herangezogen werden, da gemäß Abb. 52 die λ-Kurven kleinerer Rauhigkeit sich auf eine längere Strecke mit der Blasiusschen Geraden decken. Im Falle größerer relativer Rauhigkeit und großer $\mathfrak{R}$-Werte kann Gl. (72) angewendet werden, jedoch auch die v. Misessche und die Bielsche

Formel. Für sehr große relative Rauhigkeiten und kleine $\mathfrak{R}$ wird es sich empfehlen, λ nach Abb. 52 abzuschätzen, wobei die ε-Werte auf S. 63 ungefähre Anhaltspunkte liefern. Die vorstehenden Angaben für rauhe Rohre gelten im Falle der Wandrauhigkeit; bei Wandwelligkeit ist nach Gl. (70) zu rechnen. Ist es zweifelhaft, welche der beiden Rauhigkeiten vorliegt, so bestimme man λ für beide Arten und wähle für die Ausführung den größeren der beiden Werte.

b) Geschwindigkeitsverteilung.

Charakteristisch für die Geschwindigkeitsverteilung der turbulenten Strömung ist ein starker Anstieg in der Nähe der Rohrwand, während im mittleren Teil des Rohres die Geschwindigkeit wesentlich gleichmäßiger verteilt ist als bei laminarer Rohrströmung (Abb. 55).

Für Reynoldssche Zahlen $\mathfrak{R} < 100000$ (Gültigkeitsbereich des Blasiusschen Gesetzes) hat v. Kármán[1] die Geschwindigkeitsverteilung in hydraulisch glatten Rohren durch eine Ähnlichkeitsbetrachtung wie folgt ermittelt

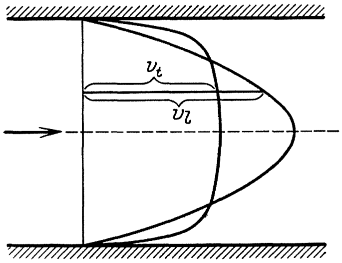


Abb. 55. Geschwindigkeitsverteilung bei laminarer (v_l) und turbulenter (v_t) Strömung.

$$v = v_{\max}\left[1 - \left(\frac{z}{r}\right)^n\right]^{1/7},$$

wo z den Abstand von der Rohrachse und r den Rohrradius bezeichnet, während der Exponent n nach den Versuchsergebnissen zwischen 1,25 und 2 liegt (Bd. I S. 104).

Für größere Reynoldssche Zahlen ist dagegen — abgesehen von einer dünnen Randschicht —

$$v = v_{\max} + \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho\,\varkappa^2}}\left\{\sqrt{\frac{z}{r}} + \ln\left(1 - \sqrt{\frac{z}{r}}\right)\right\}. \tag{74}$$

Hier bedeutet τ_0 die mittlere Schubspannung am Rande, für die bekanntlich die Beziehung gilt $\tau_0 = \frac{\lambda}{4}\frac{\varrho}{2}c^2$ (Bd. I S. 89), weshalb $\frac{\tau_0}{\varrho} = \frac{\lambda}{4}\frac{c^2}{2}$ oder, wegen Gl. (62), $\frac{\tau_0}{\varrho} = \frac{J\,g\,d}{4}$; $\varkappa$ bezeichnet eine Konstante, die aus Versuchen zu rd. 0,4 ermittelt wurde. Am Rande befindet sich vermutlich eine dünne Laminarschicht von der Dicke $\delta = \text{const.}\,\frac{\nu}{\sqrt{\tau_0/\varrho}}$, in welcher der Geschwindigkeitsanstieg linear erfolgt, und an die nach dem Rohrinnern zu die durch (74) dargestellte Geschwindigkeitsverteilung anschließt. Für die maximale Geschwindigkeit in der Rohrachse gilt (Bd. I S. 102)

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho\,\varkappa^2}}\left(\ln\frac{r\sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}}{\nu} + C_1\right). \tag{75}$$

[1] v. Kármán, Th.: Z. angew. Math. Mech. 1921 S. 238; Innsbr. Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- u. Aerodynamik, S. 160. Berlin 1924.

Eine den Kármánschen Formeln nahe verwandte Darstellung der Geschwindigkeitsverteilung ist neuerdings von L. Prandtl[1] gegeben, auf die hier noch kurz eingegangen werden soll.

Nach Prandtl kann man bekanntlich die turbulente Schubspannung durch den Ansatz

$$\tau = \varrho\, l^2 \left|\frac{dv}{dy}\right| \frac{dv}{dy} \tag{76}$$

ausdrücken, wo l den sogenannten Mischungsweg und v den zeitlichen Mittelwert der Geschwindigkeit parallel der Rohrachse im Abstande y von der Rohrwand bezeichnen (Bd. I S. 100). Das Vorzeichen von τ ist in dieser Gleichung durch dasjenige von $\frac{dv}{dy}$ bestimmt. Für eine Geschwindigkeitsverteilung gemäß Abb. 56 wird $\frac{dv}{dy}$ positiv, weshalb an Stelle von (76) einfacher geschrieben werden kann

$$\tau = \varrho\left(l\,\frac{dv}{dy}\right)^2. \tag{76a}$$

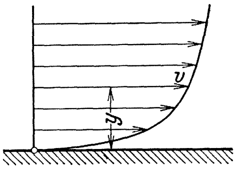


Abb. 56.

Bei wenig zähen Flüssigkeiten (Wasser) ist diese Schubspannung entscheidend für die Geschwindigkeitsverteilung über den Rohrquerschnitt, während die Zähigkeit lediglich auf eine dünne Randschicht beschränkt bleibt. Sieht man von der Zähigkeit zunächst ganz ab, so kann der Mischungsweg l in der Nähe einer glatten, ebenen oder wenig gekrümmten Wand nur vom Wandabstand y abhängen, da andere Größen von der Dimension einer Länge nicht vorhanden sind. Man kann also aus Dimensionsgründen

$$l = \varkappa\, y$$

setzen[2] und erhält somit nach (76a) in der Nähe der Rohrwand

$$\tau = \varrho\left(\varkappa\, y\,\frac{dv}{dy}\right)^2.$$

Nimmt man noch als einfachsten Fall in dem in Frage kommenden Bereich $\tau = \tau_0$ als konstant an, wo τ_0 die Schubspannung an der Rohrwand bezeichnet, so wird

$$\frac{dv}{dy} = \frac{1}{\varkappa\, y}\sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}$$

und durch Integration ergibt sich

$$v = \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}\cdot\ln y + \text{const.} = \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}\cdot\ln\frac{y}{y_0}. \tag{77}$$

---

[1] Ergebn. d. Aerodyn. Versuchsanstalt zu Göttingen, 4. Lief. München u. Berlin 1932; sowie Z. VDI 1933 Nr. 5 S. 105. Vgl. auch J. Nikuradse: VDI-Forsch.-Heft Nr. 356. Berlin: VDI-Verlag 1932.

[2] Von der gleichen Voraussetzung geht auch v. Kármán bei der Ableitung seiner Geschwindigkeitsformel aus.

Der Ausdruck $\sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}$ ist dimensionsmäßig eine Geschwindigkeit, weshalb Prandtl hierfür eine besondere Bezeichnung — die Schubspannungsgeschwindigkeit —

$$v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}$$

eingeführt hat.

Die in Gl. (77) auftretende Konstante y_0 ist der Dimension nach ebenso wie y eine Länge. Bildet man nun aus den die Strömung bestimmenden Größen ν und v_* die Länge $\frac{\nu}{v_*}$, so kann y_0 dieser Länge proportional gesetzt werden, also $y_0 = m\frac{\nu}{v_*}$. Damit geht Gl. (77) über in

$$v = \frac{v_*}{\varkappa}\left(\ln\frac{y\,v_*}{\nu} - \ln m\right),$$

wofür man auch schreiben kann

$$\frac{v}{v_*} = \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{y\,v_*}{\nu} - \frac{1}{\varkappa}\ln m. \tag{77a}$$

$\frac{v}{v_*}$ erscheint demnach als lineare Funktion von $\ln\frac{y\,v_*}{\nu}$. Trägt man nun die aus Messungen gefundenen Werte $\frac{v}{v_*}$ als Ordinaten und die zugehörigen Werte $\ln\frac{y\,v_*}{\nu}$ als Abszissen auf, so ergibt sich — abgesehen von kleinen Werten $\frac{y\,v_*}{\nu}$, für die eine merkliche Abweichung besteht (Einfluß der Zähigkeit) — in der Tat mit ziemlicher Genauigkeit eine Gerade, die auf der Ordinatenachse (gemittelt) die Strecke $-\frac{1}{\varkappa}\ln m = 5{,}5$ abschneidet und die Steigung $\frac{1}{\varkappa} = 2{,}5$ besitzt (also $\varkappa = 0{,}4$; vgl. S. 58). Aus diesem experimentellen Ergebnis folgt, daß die zunächst nur für Punkte in Wandnähe aufgestellten Beziehungen näherungsweise bis zur Rohrmitte gelten.

Als Geschwindigkeitsverteilung in glatten Rohren erhält man somit nach (77a) angenähert[1]

$$v = v_*\left(2{,}5\ln\frac{y\,v_*}{\nu} + 5{,}5\right)$$

oder, wenn man wieder den natürlichen Logarithmus durch den Briggschen ersetzt,

$$v = v_*\left(5{,}76\log\frac{y\,v_*}{\nu} + 5{,}5\right).$$

Für die wandnahen Punkte lautet die vorstehende Gleichung besser

$$v = v_*\left(5{,}52\log\frac{y\,v_*}{\nu} + 5{,}84\right),$$

[1] Ergebn. d. Aerodyn. Versuchsanst. zu Göttingen, 4. Lief. S. 21.

für die der Rohrmitte nahen Punkte bei größeren Reynoldsschen Zahlen

$$v = v_* \left(5{,}52 \log \frac{y\, v_*}{\nu} + 6{,}68\right).$$

Mit $y = r$ erhält man daraus als maximale Geschwindigkeit

$$v_{\max} = v_* \left(5{,}52 \log \frac{r\, v_*}{\nu} + 6{,}68\right),$$

und man erkennt, daß dieser Ausdruck prinzipiell vollkommen mit der Kármánschen Gl. (75) übereinstimmt.

Die Geschwindigkeitsverteilung in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl $\Re$ zeigt Abb. 57*, aus der besonders ersichtlich ist, daß mit wachsendem $\Re$ eine immer gleichmäßigere Verteilung der Geschwindigkeit über den Querschnitt eintritt.

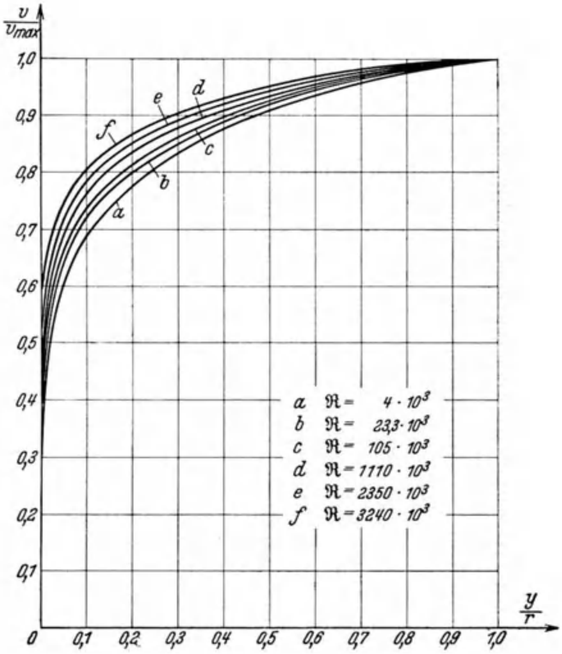


Abb. 57. Geschwindigkeitsverteilung in hydraulisch glatten Rohren in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl nach Nikuradse.

Um eine Beziehung zwischen der maximalen und der mittleren Geschwindigkeit zu bekommen, beachte man, daß nach Gl. (74)

$$v_{\max} - v = v_* f\left(\frac{z}{r}\right) \qquad (78)$$

ist. Für die mittlere Geschwindigkeit c muß also ein Ausdruck von der Form

$$v_{\max} - c = n\, v_*$$

bestehen, wo n eine Zahl bezeichnet, die nach Göttinger Messungen $n \approx 4{,}07$ beträgt[1], weshalb

$$c = v_{\max} - 4{,}07\, v_* .$$

Da aber nach S. 68 $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}} = \sqrt{\frac{J g d}{4}}$ ist, so kann c bei gegebenem Gefälle J aus $v_{\max}$ berechnet werden und umgekehrt.

Eine andere Darstellung erhält man mit Hilfe der Gl. (67), wenn man diese unter Einführung der gewöhnlichen Logarithmen und der dort genannten Konstanten in der Form schreibt

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi}} = 3{,}9 \log\left(\Re_m \sqrt{\varphi}\right) + 4{,}16 .$$

---

* Nach Nikuradse: Fußnote 3 S. 58.

[1] Prandtl und Nikuradse: Fußnote 1 S. 69.

Nun ist nach S. 58

$$\sqrt{\varphi} = \frac{1}{2}\,\frac{c}{v_{\max}}\,\sqrt{\lambda} \quad \text{und} \quad \mathfrak{R}_m\,\sqrt{\varphi} = \frac{v_{\max}\cdot d}{2\,\nu}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{c}{v_{\max}}\,\sqrt{\lambda} = \frac{1}{4}\,\mathfrak{R}\,\sqrt{\lambda}\,,$$

woraus folgt:

$$\frac{v_{\max}}{c} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\left\{3{,}9\log\mathfrak{R}\,\sqrt{\lambda} - 3{,}9\log 4 + 4{,}16\right\}$$

oder

$$\frac{v_{\max}}{c} = \sqrt{\lambda}\left\{1{,}95\log\mathfrak{R}\,\sqrt{\lambda} + 0{,}91\right\}.$$

Damit ist das Verhältnis $\frac{v_{\max}}{c}$ in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl $\mathfrak{R}$ gefunden. Die Widerstandsziffern λ können dabei aus Gl. (68a) berechnet werden.

Um die Geschwindigkeitsverteilung in rauhen Rohren zu bekommen, stelle man die Geschwindigkeit v im Abstand y von der Rohrwand entsprechend der Gl. (71) durch den Ansatz dar

$$v = \frac{v_*}{\varkappa}\left(\ln\frac{y}{\varepsilon} + \text{const.}\right) = \frac{v_*}{\varkappa}\ln\frac{m\,y}{\varepsilon}\,,$$

wo die Konstante m eine Zahl bezeichnet. Zur Befriedigung der Randbedingung $v = 0$ für $y = 0$ kann man dafür

$$v = \frac{v_*}{\varkappa}\ln\left(\frac{m\,y}{\varepsilon} + 1\right)$$

setzen, was einer Verschiebung des Koordinatenursprungs in der y-Richtung um $\frac{\varepsilon}{m}$ entspricht. Da $\frac{\varepsilon}{m}$ nur einen Bruchteil von ε darstellt, liegt der Koordinatenursprung demnach innerhalb der Wandunebenheiten, deren Mittelwert ja ε ist.

Aus den auf S. 61 beschriebenen Göttinger Versuchen an rauhen Rohren ergibt sich die Zahl $m = 30$, weshalb man für diesen Rauhigkeitstypus (Sandkornrauhigkeit) mit $\varkappa = 0{,}4$ und unter Einführung der gewöhnlichen Logarithmen die Geschwindigkeitsverteilung

$$v = 5{,}76\,v_*\log\left(\frac{30\,y}{\varepsilon} + 1\right)$$

erhält. Es ist anzunehmen, daß bei anderen Rauhigkeitsarten die Zahl 30 durch eine andere Zahl ersetzt werden muß[1].

Versuche, die zur Erforschung der Geschwindigkeitsverteilung in rauhen Rohren in letzter Zeit besonders von Fritsch[2] und von Nikuradse[3] angestellt worden sind, zeigen, daß die Geschwindigkeitsprofile mit steigender Rauhigkeit — bei konstant gehaltener Durchflußmenge — spitzer werden (Abb. 58a). Dagegen weisen alle Ge-

[1] Prandtl, L.: Fußnote 2 S. 58.
[2] Fritsch, W.: Z. angew. Math. Mech. 1928 S. 214.
[3] Nikuradse, J.: Verhandl. d. 3. Internat. Kongr. f. Techn. Mech. Bd. 1 S. 239. Stockholm 1930.

schwindigkeitsprofile bei den verschiedensten Rauhigkeiten im mittleren Teil des Rohres nahezu die gleiche Form auf, sobald die Schubspannung τ_0 am Rande überall dieselbe ist, d. h. solange der Druckabfall im Rohre der gleiche bleibt (Abb. 58 b). Durch dieses Ergebnis wird der theoretische Ansatz (78) sehr gut bestätigt.

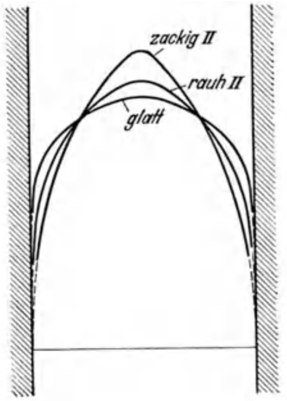


Abb. 58a. Geschwindigkeitsverteilung in rauhen Rohren bei verschiedener Rauhigkeit und konstant gehaltener Durchflußmenge nach Fritsch.

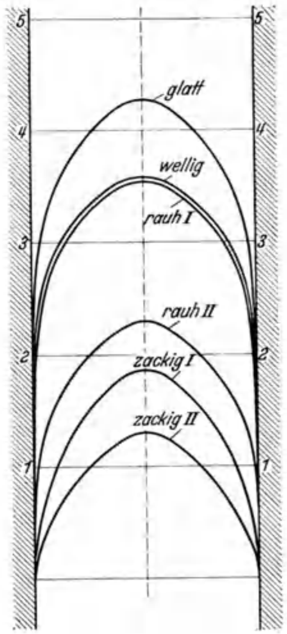


Abb. 58b. Geschwindigkeitsverteilung in rauhen Rohren bei verschiedener Rauhigkeit und gleicher Schubspannung am Rande nach Fritsch.

c) Praktische Rohraufgaben.

Für die Lösung praktischer Rohraufgaben stehen zunächst zwei Gleichungen zwischen der sekundlichen Durchflußmenge Q, der mittleren Geschwindigkeit c, dem Rohrdurchmesser d und dem Gefälle J zur Verfügung. Es sind das die Durchflußgleichung

$$Q = c\,F = c\,\frac{\pi\,d^2}{4}\left[\frac{m^3}{\text{sec}}\right] \tag{79}$$

und die Widerstandsgleichung

$$J = \lambda\,\frac{c^2}{2\,g\,d}\,. \tag{80}$$

Die in der letzten Gleichung noch auftretende Widerstandsziffer λ ist nach den weiter oben getroffenen Festsetzungen entsprechend einzuführen. Sie hängt im allgemeinen von der Reynoldsschen Zahl $\mathfrak{R} = \frac{c\,d}{\nu}$ und der relativen Rauhigkeit $\frac{\varepsilon}{r}$ ab, so daß zu den oben genannten, die Strömung im Rohre bestimmenden Größen Q, c, d und J noch die mit der Temperatur veränderliche kinematische Zähigkeit ν (Bd. I S. 78) und die Wandrauhigkeit ε (bzw. die ihr proportionalen Werte k und k') treten[1]. Die letzteren beiden Werte können bei bestimmtem Rohrmaterial und bekannter Temperatur als gegeben angesehen werden. Von den vier erstgenannten Größen müssen also zwei gegeben sein, damit die beiden übrigen berechnet werden können. Am einfachsten gestaltet sich die Rechnung, wenn c und d unmittelbar gegeben sind oder aus (79) ermittelt werden können, da sich aus ihnen die Widerstandsziffer λ mit einiger Sicherheit bestimmen läßt. Ist das nicht der Fall, z. B. wenn Q und J gegeben sind, so muß

[1] v. Mises, R.: Elem. d. techn. Hydromech. 1914 S. 75.

man für λ zunächst eine Schätzung vornehmen, dann in (80) c durch d ausdrücken und diesen Wert in (79) einsetzen. Nachdem c und d — und damit $\mathfrak{R}$ — gefunden sind, hat man zu prüfen, ob die gemachte Annahme für λ richtig war (was im allgemeinen nicht zutreffen wird), andernfalls den neuen λ-Wert zu bestimmen usw. Für eine erste Schätzung empfiehlt sich bei nicht zu großen Rauhigkeiten der Dupuitsche Wert $\lambda = 0{,}03$. Wie man im einzelnen zu verfahren hat, soll nachstehend an vier Beispielen gezeigt werden.

1. Gegeben sind Q und d, gesucht J und c.

Aufgabe: Eine horizontal verlegte, gerade gußeiserne Rohrleitung von 800 [m] Länge und 55 [cm] lichtem Durchmesser soll in der Stunde 1000 [m^3] Wasser von 10^0 C fördern. Es ist damit zu rechnen, daß während des Betriebes durch Krustenbildung an der inneren Rohrwand der nutzbare Durchmesser sich um 50 [mm] verringert[1]. Welche mittlere Geschwindigkeit besitzt das Wasser, wie groß ist das erforderliche Druckgefälle und die für den Betrieb erforderliche Leistung der Pumpe?

Aus (79) folgt sofort mit $d = 50$ [cm] nutzbarem Durchmesser

$$c = \frac{4\,Q}{\pi\, d^2} = \frac{4 \cdot 1000}{3600 \cdot \pi \cdot 0{,}25} = 1{,}41 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}\right].$$

Für Wasser von 10^0 C ist $\nu = 0{,}0131 \left[\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{sec}}\right]$; demnach wird

$$\mathfrak{R} = \frac{c\,d}{\nu} = \frac{141 \cdot 50}{0{,}0131} = 538000\,.$$

Hier gilt vermutlich bereits das quadratische Widerstandsgesetz (vgl. Abb. 52), so daß λ nach Gl. (72) berechnet werden kann. Man erhält dafür mit $\varepsilon = 0{,}30$ [cm] für verkrustete gußeiserne Leitung

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \log \frac{25}{0{,}3} + 1{,}74\right)^2} = 0{,}032\,.$$

Zum Vergleich soll λ noch nach Gl. (73) berechnet werden, welche mit $k' = \frac{500}{10^6}$ [cm] liefert:

$$\lambda = 0{,}0096 + \sqrt{\frac{32 \cdot 500}{10^6 \cdot 50}} + \sqrt{\frac{2{,}88}{538000}} \approx 0{,}03\,.$$

Gewählt wird $\lambda = 0{,}032$. Damit erhält man für das Druckgefälle nach Gl. (80) (vgl. auch S. 56)

$$J = \frac{p_1 - p_2}{\gamma\, l} = 0{,}032\, \frac{1{,}41^2}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5} = 0{,}0065$$

und für die „Verlusthöhe" auf die Länge l

$$h_v = J \cdot l = 0{,}0065 \cdot 800 = 5{,}2\ [\mathrm{m}]\,.$$

[1] Genauere Angaben über Verkrustung usw. sind zu finden in Hütte 26. Aufl. Bd. 1 S. 374.

Die für den Betrieb erforderliche Leistung der Pumpe

$$L = \gamma\, Q\, h_v$$

wird also mit $\gamma = 1000 \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]$ und $Q = \frac{1000}{3600} \left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{sec}}\right]$

$$L = \frac{1000 \cdot 1000 \cdot 5{,}2}{3600} = 1444 \left[\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{sec}}\right]$$

oder

$$N = \frac{1444}{75} = 19{,}3\ [\mathrm{PS}]\,.$$

2. Gegeben sind d und J, gesucht c und Q.

Aufgabe: Für ein Wasser führendes Rohr aus asphaltiertem Eisenblech von $d = 15$ [cm] nutzbarem Durchmesser steht ein Gefälle $J = 0{,}003$ zur Verfügung. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit und die sekundliche Durchflußmenge, wenn das Wasser eine Temperatur von 5^0 C besitzt?

Man schätze zunächst $\lambda = 0{,}03$ nach Dupuit (S. 64) und berechne damit aus (80) die mittlere Geschwindigkeit, nämlich

$$c = \sqrt{\frac{2\,g\,d\,J}{\lambda}} \approx 0{,}54 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}\right].$$

Dann ist mit $\nu = 0{,}015 \left[\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{sec}}\right]$ (vgl. Bd. I S. 79)

$$\mathfrak{R} = \frac{c\,d}{\nu} = \frac{54 \cdot 15}{0{,}015} = 54000\,.$$

Nach den Göttinger Messungen (Abb. 52) gilt bei dieser kleinen Reynoldsschen Zahl und der hier vorliegenden geringen relativen Rauhigkeit vermutlich das Blasiussche Gesetz (65) (vgl. die Bem. auf S. 67). Danach ist

$$\lambda = \frac{0{,}316}{54000^{1/4}} = 0{,}0207\,,$$

woraus als zweite Näherung für die Geschwindigkeit folgt

$$c = 0{,}54 \sqrt{\frac{0{,}03}{0{,}0207}} = 0{,}65 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}\right].$$

Dieser entspricht

$$\mathfrak{R} = \frac{65 \cdot 15}{0{,}015} = 65000$$

und somit als dritte Näherung

$$\lambda = \frac{0{,}316}{65000^{1/4}} = 0{,}0198$$

und

$$c = 0{,}65 \sqrt{\frac{0{,}0207}{0{,}0198}} = 0{,}665 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}\right].$$

Rechnet man mit dieser Geschwindigkeit, so erhält man als sekundliche Durchflußmenge

$$Q = \frac{c\,\pi\,d^2}{4} = \frac{0{,}665 \cdot \pi \cdot 0{,}15^2}{4} = 0{,}0118\left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{sec}}\right] = 11{,}8\left[\frac{\mathrm{Liter}}{\mathrm{sec}}\right].$$

Zum Vergleich sei noch die Rechnung für „Wandwelligkeit" nach Gl. (70) durchgeführt. Mit $\xi = 1{,}2$ und $\lambda_0 = 0{,}0198$ wird in diesem Falle

$$\lambda = 1{,}2 \cdot 0{,}0198 = 0{,}0238,$$

also

$$c = 0{,}54\sqrt{\frac{0{,}03}{0{,}0238}} = 0{,}605\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}\right].$$

Dieser Geschwindigkeit entspricht

$$\mathfrak{R} = \frac{60{,}5 \cdot 15}{0{,}015} = 60500,$$

$$\lambda = \xi\,\lambda_0 = 1{,}2 \cdot \frac{0{,}316}{60500^{1/4}} = 0{,}0242$$

und somit als maßgebende Geschwindigkeit

$$c = 0{,}605\sqrt{\frac{0{,}0238}{0{,}0242}} = 0{,}60\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}\right].$$

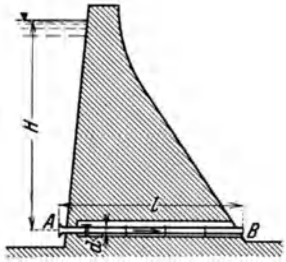


Abb. 59. Sperrmauer mit Grundablaßrohr.

Die sekundliche Durchflußmenge betrüge demnach nur

$$Q = 11{,}8 \cdot \frac{0{,}60}{0{,}665} = 10{,}7\left[\frac{\mathrm{Liter}}{\mathrm{sec}}\right].$$

Je nachdem, nach welcher Seite man sicher gehen will, wird man sich für den einen oder für den anderen Wert Q zu entscheiden haben.

3. Gegeben J und Q, gesucht d und c.

Aufgabe[1]**:** Am Fuße einer Sperrmauer soll ein horizontal liegendes Grundablaßrohr von $l = 30$ [m] Länge eingebaut werden, dessen Durchmesser so zu berechnen ist, daß der Wasserstand bei der zu erwartenden größten Zuflußmenge von 5 $\left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{sec}}\right]$ nicht höher als $H = 35$ [m] ansteigt (Abb. 59). Welcher Rohrdurchmesser ist zu wählen, wenn ein gußeisernes Rohr verwendet wird, das zur Verringerung des Eintrittswiderstandes bei A ein glockenförmiges Mundstück besitzt? Eine öftere Reinigung des Rohres ist vorgesehen.

Würde die Bewegung im Rohr AB reibungslos erfolgen, so würde die gesamte verfügbare Druckhöhe H in Geschwindigkeitshöhe umgesetzt, d. h. für die Austrittsgeschwindigkeit bei B würde die Beziehung bestehen $H = \frac{c^2}{2g}$ (vgl. S. 2). Der Geschwindigkeitsbeiwert φ

[1] Vgl. O. Streck: Aufgaben aus dem Wasserbau, S. 146. Berlin 1924.

ist hier gleich 1 gesetzt, was in der Praxis allgemein üblich ist. In Wirklichkeit wird jedoch ein Teil von H durch Reibung im Rohre verbraucht, nämlich die „Verlusthöhe" h_v, so daß[1]

$$H - h_v = \frac{c^2}{2g} \quad \text{oder} \quad H = \frac{c^2}{2g} + h_v \,.$$

Wegen $h_v = J\,l$ und unter Beachtung von (80) folgt daraus

$$H = \frac{c^2}{2g}\left(1 + \frac{\lambda\,l}{d}\right) .$$

oder mit $c = \dfrac{4\,Q}{\pi\,d^2}$

$$H = \frac{8\,Q^2}{\pi^2\,d^4\,g}\left(1 + \frac{\lambda\,l}{d}\right)$$

bzw.

$$\frac{H}{Q^2}\,\frac{\pi^2\,g}{8}\,d^4 - \frac{l}{d}\,\lambda - 1 = 0 \,.$$

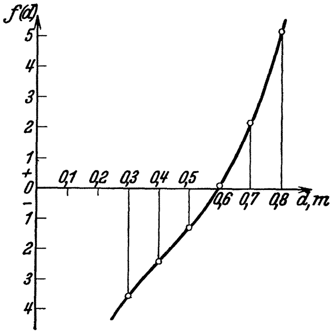


Abb. 60.

In vorstehende Gleichung führe man jetzt λ nach (72) ein, dann wird

$$\frac{H}{Q^2}\,\frac{\pi^2\,g}{8}\,d^4 - \left\{\frac{l}{d\left(2\log\dfrac{d}{2\,\varepsilon} + 1{,}74\right)^2} + 1\right\} = f\,(d) = 0 \,,$$

wo nach der Tabelle auf S. 63 $\varepsilon = 0{,}1$ [cm] $= 0{,}001$ [m] gesetzt werden soll.

Die Auflösung dieser Gleichung erfolgt zweckmäßig graphisch, wie nachstehend gezeigt wird:

d [m]	$\dfrac{H\,\pi^2\,g\,d^4}{8\,Q^2}$	$\dfrac{l}{d\left(2\log\dfrac{d}{2\,\varepsilon} + 1{,}74\right)^2} + 1$	$f\,(d)$
0,8	6,942	1,779	5,16
0,7	4,070	1,919	2,15
0,6	2,197	2,134	0,06
0,5	1,059	2,392	− 1,33
0,4	0,434	2,865	− 2,43
0,3	0,137	3,695	− 3,56

Trägt man die in obiger Tabelle gefundenen Funktionswerte $f\,(d)$ als Ordinaten über dem Durchmesser d auf, so ergibt sich eine Kurve, deren Schnittpunkt mit der Abszissenachse den gesuchten Durchmesser d liefert (Abb. 60). Man findet dafür $d \approx 0{,}58$ [m]; gewählt wird $d = 0{,}6$ m. Damit ist aber auch die Geschwindigkeit im Rohre bekannt, für welche man erhält

$$c = \frac{4\,Q}{\pi\,d^2} = \frac{4 \cdot 5}{\pi \cdot 0{,}36} = 17{,}7 \left[\frac{\text{m}}{\text{sec}}\right] .$$

[1] Wegen Berücksichtigung des Eintrittsverlustes bei A vgl. S. 79.

4. Gegeben J und c, gesucht d und Q.

Aufgabe: Für einen Wasserstollen aus rohem Bruchsteinmauerwerk steht ein Gefälle $J = 0{,}002$ zur Verfügung. Wie groß muß der Durchmesser d gewählt werden, damit die Geschwindigkeit den Wert $c = 1{,}5 \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}\right]$ nicht überschreitet?

Schätzt man zunächst $\lambda = 0{,}03$, so folgt aus Gl. (80) als 1. Annäherung

$$d = \frac{\lambda\, c^2}{2\, g\, J} = 1{,}72\,[\mathrm{m}]\,.$$

Damit ergibt sich aus Gl. (72), wenn $\varepsilon = 1{,}0\,[\mathrm{cm}]$ gesetzt wird (Tabelle auf S. 63)

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \log \frac{172}{2} + 1{,}74\right)^2} = 0{,}0318\,.$$

2. Annäherung:

$$d = 1{,}72\,\frac{0{,}0318}{0{,}03} = 1{,}82\,[\mathrm{m}]\,; \qquad \lambda = 0{,}0312\,.$$

3. Annäherung:

$$d = 1{,}82 \cdot \frac{0{,}0312}{0{,}0318} = 1{,}78\,[\mathrm{m}]\,.$$

Gewählt wird $d = 1{,}8\,[\mathrm{m}]$.

3. Besondere Widerstände in geschlossenen Leitungen.

Die unter Ziff. 2 dieses Abschnittes angestellten Überlegungen zur Berechnung der Verlusthöhe h_v gelten zunächst nur für gerade, zylindrische Rohre. Bei ausgeführten Leitungsanlagen handelt es sich aber meistens nicht nur um ein einziges gerades Rohr, sondern um mehrere gerade Rohrstücke, die zum Zwecke der Querschnitts- oder Richtungsänderung durch Zwischenstücke miteinander verbunden sind und für den Betrieb der Leitung häufig besondere Einbauten wie Schieber, Hähne, Ventile usw. aufweisen. Alle diese Zwischenstücke und Einbauten haben gewisse Strömungsverluste in der Leitung zur Folge, die — ähnlich wie der Reibungsverlust in geraden Rohren — durch eine Verlusthöhe (d. h. Verlust an Strömungsenergie bezogen auf die Einheit der Schwere; vgl. Bd. I S. 69) dargestellt werden können. Die Größe dieser Verluste hängt wesentlich von der Art der durch den betreffenden Einbau usw. bedingten Flüssigkeitsbewegung ab; ihre theoretische Ermittlung begegnet in fast allen praktisch wichtigen Fällen erheblichen Schwierigkeiten, so daß man in der Hauptsache auf halbempirische Ansätze angewiesen ist.

Beachtet man, daß die Verlusthöhe aus Reibung in einem geraden Rohr von der Länge l nach Gl. (64) durch den Ausdruck $h_v = \lambda\,\frac{c^2}{2\,g\,d}\,l$ dargestellt wird, so liegt es nahe, alle übrigen Verluste auf eine ähnliche Form zu bringen, indem man für jeden Einbau usw. eine Verlust-bzw. Widerstandshöhe

$$h'_v = \zeta \frac{c^2}{2g}$$

einführt. Darin bezeichnet ζ eine dimensionslose Größe, die außer von der relativen Rauhigkeit im allgemeinen auch von der Reynoldsschen Zahl abhängig sein wird, während unter c die mittlere Geschwindigkeit im Rohre hinter dem betreffenden Einbau verstanden werden soll[1]. Im übrigen ist h'_v genau so zu behandeln wie h_v, so daß jetzt die Bernoullische Gleichung für nicht ideale Flüssigkeiten im Falle stationärer Strömung wie folgt geschrieben werden kann (vgl. S. 57)

$$\frac{c_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{c_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_v + \sum h'_v .$$

Handelt es sich um ein Rohr, das aus mehreren geraden Stücken von verschiedenen Durchmessern besteht, so ist $h_v = \sum\left(\lambda \frac{c^2}{2gd} l\right)$ zu setzen, wobei die Summierung über alle geraden Stücke erstreckt werden muß. Bei langen Rohren ist h_v wesentlich größer als $\sum h'_v$.

Eine bildliche Darstellung der obigen Gleichung zeigt Abb. 61, in der h'_{v_1} die Höhe des Eintrittsverlustes im Rohreintritt *1* und h'_{v_2} die Verlusthöhe infolge der Querschnitts- und Richtungsänderung an der Stelle *2* bezeichnet. Der atmosphärische Luftdruck p_0 kann im Spiegel des Entnahmebehälters und am freien Rohrende gleich groß angenommen werden; auf den Strömungsvorgang im Rohr ist er ohne Einfluß, weshalb häufig nur der Überdruck $p_1 - p_0$ usw. angegeben wird.

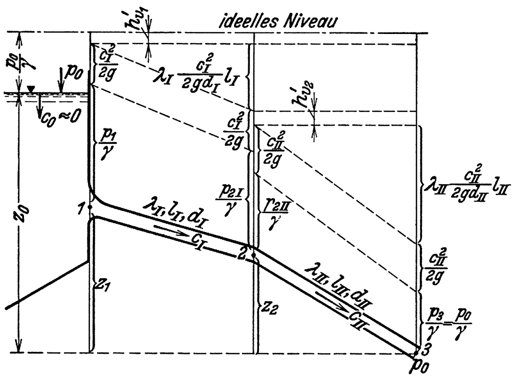


Abb. 61. Graphische Darstellung der Bernoullischen Gleichung mit Verlustgliedern.

Für die Berechnung der Verlusthöhe h'_v ist die Kenntnis der Widerstandszahl ζ erforderlich, bei deren Ermittlung man in der Hauptsache auf Versuche angewiesen ist. In Einzelfällen führen auch theoretische Überlegungen wenigstens zu einer ungefähren Abschätzung der Größe von ζ, wie weiter unten gezeigt wird.

a) Eintrittsverlust.

Der Rohranfang steht gewöhnlich mit einem Behälter in Verbindung, aus dem das Wasser entnommen wird. Bei gut abgerundetem Rohranschluß an den Behälter ist der Eintrittswiderstand sehr klein, bei

[1] Selbstverständlich könnte man ebenso gut die Geschwindigkeit vor dem Einbau oder an einer anderen Stelle wählen und ζ auf diese beziehen.

scharfkantigem Anschluß größer. Bezeichnet c_i die ideelle Eintrittsgeschwindigkeit (bei reibungsfreier Flüssigkeitsbewegung und gut abgerundetem Rohranschluß) und $c = \varphi \cdot c_i$ die wirkliche Geschwindigkeit ($\varphi < 1$), so faßt man die Differenz der Geschwindigkeitshöhen $\frac{c_i^2}{2g} - \frac{c^2}{2g}$ auf als eine Verlusthöhe h_v', die für die Erzeugung von Geschwindigkeit „verloren" gegangen ist. Die Größe der Zahl φ hängt dabei einerseits von den Reibungswiderständen im Entnahmebehälter ab, andererseits von dem Druckverlust im scharfkantigen Rohransatz (vgl. S. 21). Man erhält also mit $c_i = \frac{c}{\varphi}$

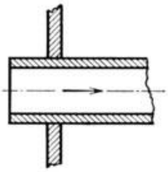


Abb. 62.

$$h_v' = \frac{c^2}{2g}\left(\frac{1}{\varphi^2} - 1\right) = \zeta \frac{c^2}{2g},$$

wo

$$\zeta = \frac{1}{\varphi^2} - 1.$$

Bei gut abgerundetem Rohranschluß ist im Mittel $\varphi = 0{,}96$ bis $0{,}97$ (S. 2), demnach $\zeta \approx 0{,}09$ bis $0{,}06$; bei scharfkantigem Rohransatz ist $\varphi = 0{,}82$ bis $0{,}85$ (S. 23), also $\zeta \approx 0{,}5$ bis $0{,}4$. In besonderen Fällen kann ζ noch größer werden, so z. B. wenn das Rohr nicht von der Behälterwand ausgeht, sondern diese durchdringt (Abb. 62). Hier kann ζ bei scharfer Einlaufkante bis zu 3,0 ansteigen.

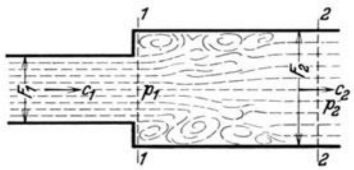


Abb. 63.
Plötzliche Querschnittserweiterung.

b) Querschnittsänderungen.

α) Plötzliche Querschnittsänderungen. Bei der plötzlichen Querschnittserweiterung eines Rohres von F_1 auf F_2 (Abb. 63 u. 63a) tritt die strömende Flüssigkeit nicht als geschlossener, von ruhender Flüssigkeit umgebener Strahl vom Querschnitt F_1 in den weiteren Rohrteil ein (was nur bei reibungsfreier

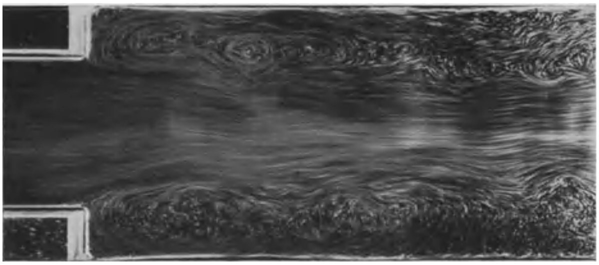


Abb. 63a. Verlauf der Strömung bei einer plötzlichen Erweiterung.

Flüssigkeit möglich wäre), sondern sie vermischt sich unter starker Wirbelbildung mit der sie umgebenden Flüssigkeit, die dadurch mitgerissen wird, und erst am Ende eines gewissen Übergangsgebietes stellt sich wieder eine geordnete Parallelströmung mit der kleineren Geschwindigkeit c_2 ein. Der durch diesen Mischvorgang bedingte Verlust an Strömungsenergie kann mittels des Impulssatzes (Bd. I S. 58) berechnet werden. Zu diesem Zwecke denke man sich in Abb. 63 den Bereich zwischen den Ebenen *1—1* und *2—2* abgegrenzt. Dann ist im Falle stationärer Strömung die auf die Zeiteinheit bezogene Impulsänderung der durch den angegebenen Bereich abgegrenzten Masse gleich dem Überschuß des austretenden über den eintretenden Impuls, also $\varrho\, Q(c_2 - c_1)$. Diese Impulsänderung muß gleich der Resultante der in der Bewegungsrichtung wirkenden Druckkräfte sein. Setzt man dafür $(p_1 - p_2) F_2$, nimmt also den Druck p_1 über den ganzen linken Querschnitt *1—1* als gleichmäßig verteilt an, so wird mit $Q = F_2\, c_2$

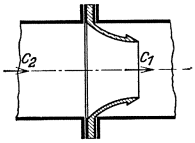


Abb. 63b.

$$p_1 - p_2 = \varrho\,(c_2^2 - c_1\, c_2)$$

oder

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{1}{2g}\,(2\,c_2^2 - 2\,c_1\, c_2)\,. \tag{81}$$

Andererseits liefert die Bernoullische Gleichung mit Verlustglied

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{1}{2g}\,(c_2^2 - c_1^2) + h_v'\,, \tag{82}$$

so daß durch Verbindung der Gl. (81) u. (82) für die Verlusthöhe folgt

$$h_v' = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2g}\,. \tag{83}$$

Setzt man hier noch mit Rücksicht auf die Kontinuität $c_1 = c_2 \frac{F_2}{F_1}$, so wird

$$h_v' = \left(\frac{F_2}{F_1} - 1\right)^2 \frac{c_2^2}{2g} = \zeta\, \frac{c_2^2}{2g} \tag{83a}$$

bzw.

$$\zeta = \left(\frac{F_2}{F_1} - 1\right)^2.$$

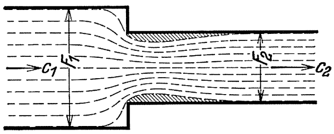


Abb. 64. Plötzliche Querschnittsverengung.

Durch Versuche von H. Schütt[1] mittels in eine Rohrleitung eingebauter Düsen (Abb. 63b) ist die Brauchbarkeit der Carnotschen Gl. (83) zur Berechnung des Energieverlustes infolge plötzlicher Querschnittserweiterung bestätigt worden. Die Abweichungen von dem theoretischen Wert liegen bei diesen Versuchen durchschnittlich unter 1%. Wichtig ist ferner besonders die Feststellung, daß der Mischvorgang von der Erweiterungsstelle ab eine Längenausdehnung l von ca. $l = 8 d_2$ besitzt, wenn d_2 den Durchmesser des erweiterten Rohres bezeichnet. Erst dort haben sich wieder normale Strömungsverhältnisse eingestellt. Soll also der Energieverlust durch Messung festgestellt werden, so hat man darauf zu achten, daß eine genügend lange Versuchsstrecke ($l > 8 d_2$) zur Verfügung steht, da andernfalls keine brauchbaren Ergebnisse gewonnen werden können.

Erfährt der Rohrquerschnitt eine plötzliche Verengung (Abb. 64), so entsteht eine Strahleinschnürung, ähnlich wie beim Ausflußstrahl

[1] Mitt. d. hydraul. Inst. der T.H. München 1926 Heft 1 S. 42.

(vgl. S. 3), die von einem Totwassergebiet (Wirbelraum) umgeben ist. Auch hier tritt ein Verlust an Strömungsenergie auf, der aber kleiner ist als derjenige in Abb. 63. Man kann die Verlusthöhe wieder auf die Form bringen

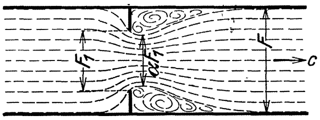


Abb. 65. Strömungsverlauf beim Einbau einer Drosselscheibe.

$$h_v' = \eta \frac{(c_2 - c_1)^2}{2g} = \eta \left(1 - \frac{F_2}{F_1}\right)^2 \frac{c_2^2}{2g},$$

wo nach Versuchen von Weisbach[1] $\eta \approx 0{,}4$ bis $0{,}5$ zu setzen ist.

Bei einer Drosselung des Strahles gemäß Abb. 65 erfährt der Strahl unmittelbar hinter der Drosselscheibe eine Einschnürung auf den Querschnitt αF_1, wenn F_1 die lichte Öffnung der Scheibe bezeichnet. Nennt man c' die Geschwindigkeit des eingeschnürten Strahles, so kann die Verlusthöhe h_v' nach Gl. (83) wegen $c' = \frac{cF}{\alpha F_1}$ berechnet werden zu

$$h_v' = \frac{(c' - c)^2}{2g} = \frac{c^2}{2g}\left(\frac{F}{\alpha F_1} - 1\right)^2,$$

worin nach Weisbach $\alpha = 0{,}63 + 0{,}37 \left(\frac{F_1}{F}\right)^3$ zu setzen ist.

β) Allmähliche Querschnittsänderungen[2]. Die oben besprochenen Verluste bei Querschnittsänderungen können wesentlich herabgesetzt werden, wenn der Übergang von dem engen zum breiten Querschnitt nicht plötzlich, sondern allmählich erfolgt. Bei stetiger Erweiterung des Querschnittes (Abb. 66) tritt Druckanstieg in der Strömungsrichtung ein, da die Geschwindigkeit mit wachsendem Querschnitt kleiner wird. In der Grenzschicht (vgl. Bd. I S. 214) stauen sich die gegen den wachsenden Druck strömenden Flüssigkeitsteilchen an, wodurch die Grenzschicht rasch an Dicke zunimmt. Erfolgt die Rohrerweiterung zu plötzlich, d. h. ist der Winkel δ in Abb. 66 zu groß, so findet eine „Ablösung" der Strömung von der Wand statt (vgl. Bd. I S. 215); die Hauptströmung vermischt sich im weiteren Verlaufe mit dem sie umgebenden wirbelnden Totwasser, wodurch wieder Energieverluste ausgelöst werden (Abb. 66a). Der günstigste Öffnungswinkel ist etwa $\delta = 8^0$, während bei $\delta = 10^0$ in rechteckigen Kanälen

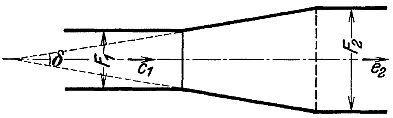


Abb. 66. Allmähliche Querschnittsänderung.

[1] v. Mises, R.: Elem. d. techn. Hydromech., S. 170. Berlin 1914.

[2] Vgl. hierzu folgende im VDI-Verlag erschienenen Forschungsarbeiten: K. Andres: Versuche über die Umsetzung von Wassergeschwindigkeit in Druck 1909 Heft 76. H. Hochschild: Versuche über Strömungsvorgänge in erweiterten und verengten Kanälen 1910 Heft 114. R. Kröner: Versuche über Strömungen in stark erweiterten Kanälen 1920 Heft 222. F. Dönch: Divergente und konvergente turbulente Strömungen mit kleinen Öffnungswinkeln 1926 Heft 282. J. Nikuradse: Untersuchungen über die Strömung des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen 1929 Heft 289; ferner A. Hofmann: Die Energieumsetzung in saugrohrähnlich erweiterten Düsen. Mitt. d. Hydraul. Inst. d. T. H. München 1931 Heft 4.

bereits Ablösungserscheinungen beobachtet wurden[1]. Für $\delta = 8^0$ kann

$$h_v' = \eta \frac{c_2^2}{2g}\left[\left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2 - 1\right]$$

mit $\eta = 0{,}15$ bis $0{,}20$ gesetzt werden[2].

Wendet man auf die ungestörte Strömung vor und hinter der Düse (Rohrerweiterung) die Bernoullische Gleichung mit Verlustglied an, so erhält man bei horizontal verlegtem Rohre

$$\frac{c_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} = \frac{c_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + h_v'$$

oder, wegen $\frac{c_2 F_2}{F_1} = c_1$,

$$p_2 - p_1 = \frac{\varrho}{2}(c_1^2 - c_2^2) - \eta\frac{\varrho}{2}(c_1^2 - c_2^2) = \frac{\varrho}{2}(c_1^2 - c_2^2)(1-\eta)\,.$$

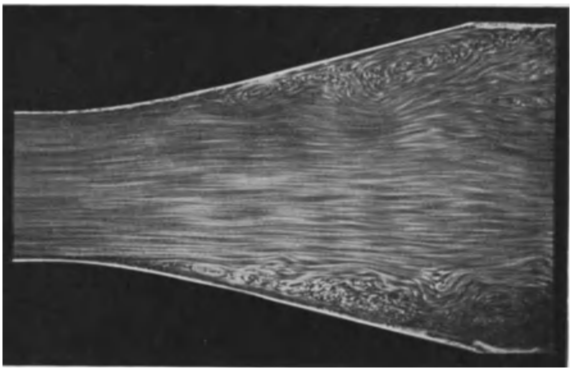


Abb. 66a. Ablösung der Strömung bei zu großem Öffnungswinkel.

Man nennt den Quotienten

$$\frac{p_2 - p_1}{\frac{\varrho}{2}(c_1^2 - c_2^2)} = 1 - \eta$$

auch den Wirkungsgrad der Rohrerweiterung, der mit den oben angegebenen Werten für η ca. 0,8 bis 0,85 beträgt. Für $h_v' = 0$ (verlustfreie Strömung) wäre der Wirkungsgrad gleich Eins.

Ein rechnerischer Ansatz zur Ermittlung der Verlusthöhe h_v' infolge allmählicher Rohrerweiterung ist von H. Lorenz[3] aufgestellt, der dafür den Ausdruck

$$h_v' = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g}\cdot\frac{4}{3}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$$

und unter Berücksichtigung der turbulenten Wandreibung

$$h_v' = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g}\left\{\frac{\lambda}{4\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}} + \frac{4}{3}\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\right\}$$

[1] Nikuradse: Vgl. Fußnote 2 S. 82. [2] Hütte 26. Aufl. Bd. 1 S. 377.
[3] Lorenz, H.: Physik. Z. 1928 S. 77.

angegeben hat, wo λ die Widerstandsziffer bezeichnet. Es scheint, daß diese Formel die tatsächlichen Verhältnisse für glatte Rohre bei kleinen Erweiterungswinkeln gut wiedergibt. Immerhin ist ihre physikalische Begründung nicht recht überzeugend, da auf den Mischvorgang hinter der Düse, der für die Größe des Verlustes von entscheidender Bedeutung ist (vgl. S. 81), keine Rücksicht genommen wird[1].

Im umgekehrten Falle, nämlich bei stetiger Verengung des Querschnittes, treten nur ganz geringe Energieverluste auf. Hier strömt die Flüssigkeit im Sinne des fallenden Druckes. Das durch die Wandreibung verzögerte Grenzschichtmaterial erhält also ständig neuen Antrieb durch den Druckunterschied, so daß die Vorwärtsbewegung in der Grenzschicht erhalten bleibt und letztere nur geringe Stärke besitzt.

c) Richtungsänderungen.

Ähnliche Erscheinungen von Ablösung und Wirbelbildung treten auch bei Richtungsänderungen eines Rohres auf und haben entsprechende Verluste an Strömungsenergie zur Folge.

α) **Rohrkrümmer.** Krümmer finden in der Technik u. a. Verwendung als Verbindungsstücke gerader Rohrstränge zwecks Richtungsänderung, ferner aber auch als Spiralgehäuse von Kreiselpumpen, Wasserturbinen usw. Die Kenntnis der in solchen Krümmern auftretenden Strömungsverluste ist also von hoher praktischer Wichtigkeit. So ist es auch erklärlich, daß eine große Reihe von Ingenieuren der Krümmerströmung ihr besonderes Augenmerk zugewandt und eine Lösung des Problems entweder auf theoretischem[2] oder auf experimentellem[3] Wege gesucht haben. Wie aus den folgenden Darstellungen hervorgehen wird, handelt es sich hier um einen sehr verwickelten Strömungsvorgang, der heute auf Grund der vorliegenden Messungen qualitativ wohl einigermaßen geklärt ist, einer strengen theoretischen Behandlung aber erhebliche Schwierigkeiten bereitet[4].

Um ein ungefähres Bild der Strömung zu erlangen, kann man sich die Flüssigkeit zunächst als ideal und die Strömung als ebene Potentialströmung vorstellen, wozu allerdings vorerst ein rechteckiger Querschnitt vorausgesetzt werden muß. Man kann dann in der früher geschilderten Weise das quadratische Netz der Äquipotential- und Stromlinien zeichnen (Bd. I S. 151), das über die theoretische Geschwindigkeitsverteilung im Krümmer und — mit Hilfe der Energiegleichung

$$\frac{\varrho}{2} v^2 + p = \text{const.} \tag{84}$$

— auch über die Druckverteilung Aufschluß gibt. (In vorstehender

---

[1] Vgl. hierzu H. Peters: Energieumsetzung in Querschnittserweiterungen bei verschiedenen Zulaufbedingungen. Ing.-Arch. Bd. 2 (1932) S. 92.

[2] Lorenz, H.: Der Widerstand von Rohrkrümmern. Physik. Z. 1929 S. 228.

[3] Eine systematische Literaturübersicht über dieses Gebiet ist zu finden in dem VDI-Forsch.-Heft 1929 Nr. 320: Über den Strömungsverlust in gekrümmten Kanälen von H. Nippert; vgl. auch W. Spalding: Versuche über den Strömungsverlust in gekrümmten Leitungen. Z. VDI 1933 S. 143.

[4] Vgl. hierzu M. Adler: Strömung in gekrümmten Rohren. Dissert. München 1933.

Gleichung ist ein horizontal liegender Kanal vorausgesetzt, so daß die Schwere ohne Einfluß bleibt.) Abb. 67 zeigt ein derartiges Netz. Da sich nun bekanntlich im quadratischen Netz die Geschwindigkeiten an zwei verschiedenen Punkten umgekehrt wie die Abstände der zugehörigen Strom- bzw. Äquipotentiallinien verhalten (vgl. S. 42), so erkennt man, daß an der Innenwand größere Geschwindigkeiten vorhanden sind als an der Außenwand, während für die Drücke mit Rücksicht auf Gl. (84) das Entgegengesetzte zutrifft.

Der Einfluß der Krümmerwirkung ist nicht nur auf den Krümmer selbst beschränkt, sondern auch auf die Strömung in dem geraden Rohr vor und hinter ihm. Auf der Einlaufseite bereitet sich nämlich bereits die für den Krümmer maßgebende Geschwindigkeitsverteilung vor, während sie auf der Auslaufseite allmählich wieder in diejenige der Parallelströmung zurückgebildet wird.

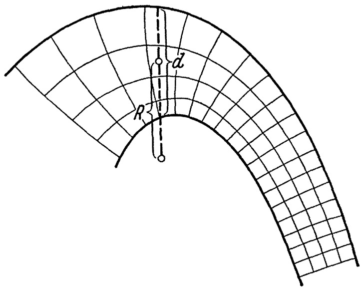


Abb. 67. Ebene Potentialströmung in einem gekrümmten Kanal.

Bei den natürlichen (nicht idealen) Flüssigkeiten treten nun — besonders infolge der Wandreibung — erhebliche Abweichungen gegenüber dieser Idealströmung auf und zwar um so stärker, je größer die mittlere Durchflußgeschwindigkeit und die Wandrauhigkeit sind und je kleiner das Verhältnis $\frac{R}{d}$, d. h. je stärker die Krümmung ist (Abb. 67). Besonders die Geschwindigkeitsverteilung zeigt ein vollkommen verändertes Bild, und zwar nicht nur quantitativ, sondern auch qualitativ.

Weiter oben war darauf hingewiesen, daß im Krümmer bei der Idealströmung ein radiales Druckgefälle von der Außen- zur Innenwand vorhanden ist (vgl. auch Bd. I S. 48). Da nun die natürliche Flüssigkeit an den Kanalwandungen haftet, so werden die der oberen und unteren Kanalwand benachbarten, nur langsam vorwärts bewegten Teilchen dem bestehenden Druckgefälle folgend von außen nach innen wandern, während sich in der Mitte ein Rückstrom einstellt. Auf diese Weise entsteht eine Nebenströmung in Gestalt eines Doppelwirbels (Abb. 68), die sich der Hauptströmung überlagert und mit dieser ein spiralförmiges Strömungsbild liefert (Abb. 68a)[1]. Die Druckverteilung der Idealströmung wird — abgesehen von der unmittelbaren Nähe der Wand — durch die Wirkung des Doppelwirbels anscheinend nicht wesentlich beeinflußt.

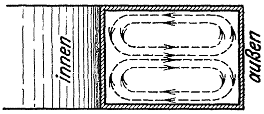


Abb. 68. Doppelwirbel als Nebenströmung in einem Krümmer von rechteckigem Querschnitt.

Ganz ähnliche Verhältnisse wie für den rechteckigen Querschnitt gelten auch für den Kreisquerschnitt; insbesondere bildet sich auch hier die oben erwähnte Nebenströmung aus (Abb. 69).

[1] Nach A. Hinderks: Z. VDI Bd. 71 (1927) S. 1779.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Größe des durch den Einbau eines Krümmers in eine Leitung entstehenden **Verlustes an Strömungsenergie**. Dieser setzt sich zusammen aus dem Einfluß der

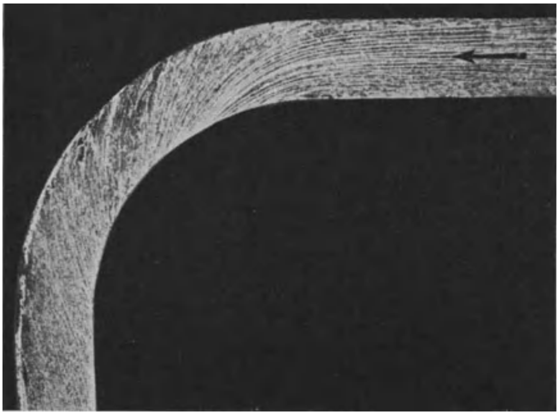


Abb. 68a. Spiralströmung in einem Krümmer, entstanden durch Überlagerung der Haupt- und Nebenströmung.

Wandreibung (wie beim geraden Rohr), dem Einfluß der Nebenströmung und einem durch Ablösung und Wirbelbildung bedingten Verlust. Über die Entstehung des letztgenannten Anteiles kann man sich folgende Vorstellung verschaffen (Abb. 70 und 70a). Im Falle der „idealen" Krümmerströmung wächst der Druck an der Außenseite des Einlaufs infolge Krümmung der Stromfäden und der damit verbundenen Fliehkraft von dem normalen Werte p_0 der Parallelströmung bis zu einem Größtwert bei B, so daß im Bereich AB die Flüssigkeit gegen steigenden Druck strömt. Auf der Innenseite sinkt der Druck zunächst bis zum Punkt C und steigt dann im Auslauf wieder an; auch im Bereich CD strömt also die Flüssigkeit (innen) gegen wachsenden Druck. Es liegen hier somit ähnliche Verhältnisse vor wie im Falle eines konisch erweiterten Rohres (S. 82), die zur Ablösung und Wirbelbildung führen. Letztere hat einen Verlust an Strömungsenergie zur Folge, der demnach wesentlich von der Krümmung der Stromlinien abhängig sein wird.

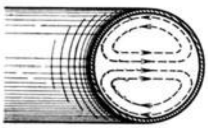


Abb. 69. Doppelwirbel als Nebenströmung in einem Krümmer von Kreisquerschnitt.

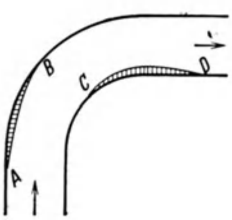


Abb. 70. Im Krümmer herrscht auf der Außenseite zwischen A und B, auf der Innenseite zwischen C und D Druckanstieg.

Für die Durchführung von Versuchen ist noch besonders beachtenswert, daß zur Rückbildung der Krümmerströmung in die normale Parallelströmung des geraden Rohres eine Rohrlänge von ca. 50 bis 70 d (d = Rohrdurchmesser) hinter dem Krümmer erforderlich ist[1]. Erst am Ende dieser Strecke

[1] Hofmann, A.: Mitt. Hydraul. Inst. T. H. München Heft 2 u. 3.

macht sich der Krümmereinfluß nicht mehr bemerkbar. Man muß also die Meßstelle hinter dem Krümmer entsprechend weit nach hinten verlegen, da man andernfalls nur einen Teil des Krümmerverlustes erfaßt.

Eingehende Versuche zur Ermittlung der Verluste in 90°-Rohrkrümmern (Ellenbogen, Abb. 71) mit gleichbleibendem Kreisquerschnitt wurden im Hydraulischen Institut der Technischen Hochschule München angestellt[1]. Dabei wurde der Verlust an Strömungsenergie wieder durch die Verlusthöhe

$$h_v' = \zeta \frac{c^2}{2g}$$

dargestellt und die Zahl ζ lediglich infolge der Krümmerwirkung — also ohne den Einfluß der Wandreibung — getrennt für glatte und rauhe Rohre ermittelt. Abb. 72[2] zeigt die ζ-Werte für **glattes Rohr** von 43 mm Durchmesser in Abhängigkeit von der Wassergeschwindigkeit c und der **Reynoldsschen** Zahl $\mathfrak{R} = \frac{c\,d}{\nu}$ für verschiedene Verhältnisse $\frac{R}{d}$. Man erkennt daraus insbesondere, daß die ζ-Werte mit wachsenden **Reynoldsschen** Zahlen kleiner werden.

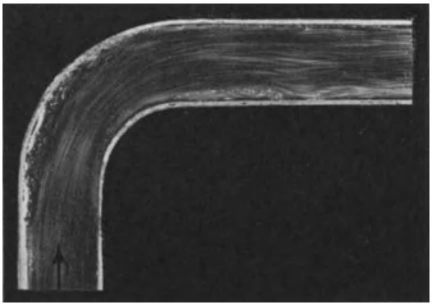


Abb. 70a. In den Gebieten des steigenden Druckes der Abb. 70 findet Ablösung und Wirbelbildung statt.

Zur Erlangung einer relativ großen Wandrauhigkeit wurde die Innenwand des Rohres mit einem Anstrich versehen, der aus einem Gemisch von Ölfarbe und Sand hergestellt war. Die maximale Wandunebenheit betrug bei Beginn der Versuche ca. 0,25 mm. Im übrigen wurden die gleichen Verhältnisse wie bei glatten Rohren beibehalten. Für diese so aufgerauhten Rohre ergaben sich die aus Abb. 73 ersichtlichen ζ-Werte, die sich — wie man erkennt — mit wachsender **Reynoldsscher** Zahl schnell einer Konstanten nähern und bei $\mathfrak{R} = 150000$ ca. 2- bis 2,1 mal so groß sind wie im Falle glatter Rohrwand. Der kleinste Widerstandsbeiwert trat auf bei $\frac{R}{d} = 7$ bis 8, jedoch waren die ζ-Werte für $\frac{R}{d} = 6$ und $\frac{R}{d} = 10$ davon nur wenig verschieden. In Abb. 72 und 73 sind die ζ-Werte durch Kurvenbänder dargestellt, um die unvermeidlichen Ablesefehler zum Ausdruck zu bringen. Als Mittelwerte erhält man für **rauhe Rohre** (siehe oben) und **Reynoldssche** Zahlen von $\mathfrak{R} = 140000$

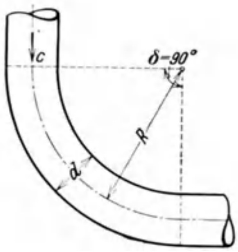


Abb. 71. 90°-Rohrkrümmer (Ellenbogen).

[1] Fußnote 1 S. 86. [2] Nach der unter Fußnote 1 S. 86 zitierten Arbeit.

bis 220000	$\frac{R}{d} = 1$	2	4	6	10
	$\zeta = 0{,}52$	0,29	0,23	0,18	0,20.

Bei Krümmern mit einem Zentriwinkel $\delta \gtrless 90^0$ kann man — solange nichts Genaueres darüber bekannt ist — angenähert $h'_v = \frac{\delta^0}{90^0}\,\zeta\,\frac{c^2}{2g}$ setzen, wo ζ aus den Abb. 72 und 73 zu entnehmen ist.

Durch Unterteilung eines rechteckigen Krümmerquerschnittes mittels besonderer Führungswände (Umlenkschaufeln, Leitapparate, Abb. 74) kann der Krümmerverlust nicht unwesentlich herabgesetzt werden. Voraussetzung ist dabei allerdings richtige Formgebung und Bemessung der Leitapparate, wozu vorherige Modellversuche erforderlich sind[1].

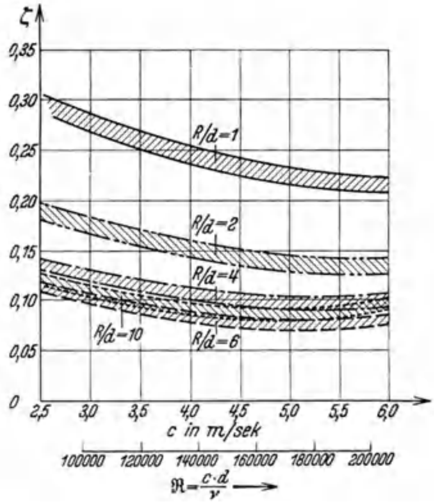


Abb. 72. Widerstandszahlen für den Krümmerverlust bei glatter Rohrwand in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl.

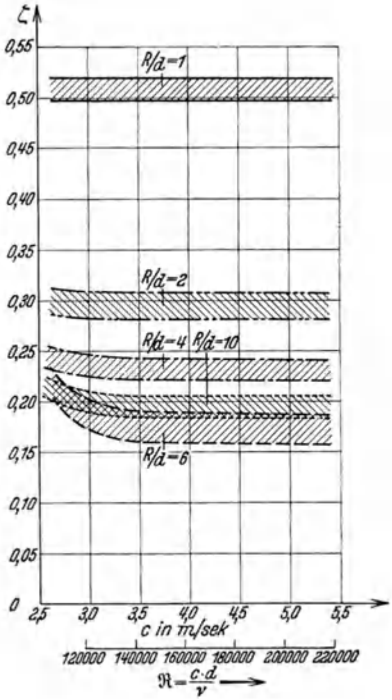


Abb. 73. Widerstandszahlen für den Krümmerverlust bei rauher Rohrwand in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl.

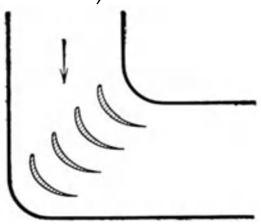


Abb. 74. Durch Unterteilung des Krümmerquerschnitts mittels richtig geformter Umlenkschaufeln kann der Krümmerverlust vermindert werden.

Theoretisch ist das Krümmerproblem von H. Lorenz[2] in Angriff genommen worden, der für den reinen Krümmerverlust (ohne Wandreibung) in der hier benützten Schreibweise für kreisförmigen Querschnitt den Ausdruck

$$h'_i = \frac{\delta}{\pi}\,\frac{c^2}{2g}\,\frac{d}{R}$$

[1] Ergebn. d. Aerodyn. Versuchsanst. zu Göttingen, 1923 1. Lief. S. 17. Ferner G. Kröber: Schaufelgitter zur Umlenkung von Flüssigkeitsströmungen mit geringem Energieverlust. Ing.-Arch. Bd. 3 (1932) S. 516.

[2] Lorenz, H.: Der Widerstand in Rohrkrümmern. Physik. Z. 1929 S. 228.

abgeleitet hat, woraus für den 90°-Krümmer mit $\frac{\delta}{\pi} = \frac{1}{2}$ folgt $h'_v = \frac{c^2}{2g}\,\frac{d}{2R}$ oder $\zeta = \frac{d}{2R}$. Demnach würde also sein für

$$\frac{R}{d} = 1 \quad 2 \quad 4 \quad 6$$

$$\zeta = 0{,}5 \quad 0{,}25 \quad 0{,}125 \quad 0{,}083\,.$$

Man erkennt, daß die beiden ersten Werte ganz gut mit den Hofmannschen für rauhe Wand übereinstimmen. Bei größeren Verhältnissen für $\frac{R}{d}$ treten jedoch erhebliche Abweichungen auf. Außerdem besteht insofern ein grundsätzlicher Unterschied, als nach Lorenz ζ mit wachsendem $\frac{R}{d}$ immer kleiner wird, während Hofmann[1] bei $\frac{R}{d} \approx 7$ ein Minimum festgestellt hat. Die Abweichung des theoretischen von dem experimentellen Werte dürfte darauf zurückzuführen sein, daß der Mischvorgang hinter dem Krümmer erst im Abstand von ca. 50 bis 70 d beendet ist (siehe oben), worauf in der Lorenzschen Ableitung keine Rücksicht genommen ist.

Der gesamte Druckhöhenverlust aus Krümmerwirkung und Wandreibung zwischen zwei um die Länge l voneinander entfernten Meßpunkten ist

$$h'_v = \frac{c^2}{2g}\left(\zeta + \lambda\,\frac{l}{d}\right),$$

wo λ wieder die Widerstandsziffer der Wandreibung bezeichnet und l die Länge der abgewickelten Rohrachse. Nach den Hofmannschen Versuchen tritt das Minimum des Gesamtverlustes bei Krümmungsverhältnissen auf, die etwas größer sind als diejenigen, für welche ζ ein Minimum wird, und zwar für glatte Wand bei etwa $\frac{R}{d} = 8{,}8$, für rauhe Wand bei etwa $\frac{R}{d} = 8{,}4$.

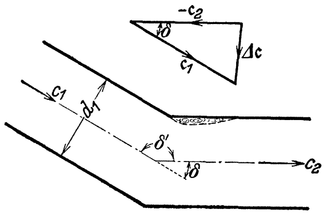


Abb. 75. Kniestück.

β) Kniestücke. Ähnliche Verhältnisse wie bei Krümmern liegen bei Kniestücken vor. Man kann hier die zugehörige Verlusthöhe der Gl. (83) nachbilden, indem man die Vektordifferenz $\mathfrak{c}_1 - \mathfrak{c}_2$ statt des Betrages $c_1 - c_2$ einführt (Abb. 75) und den Berichtigungsfaktor η beifügt[2]. Man erhält dann

$$h'_v = \eta\,\frac{(\mathfrak{c}_1 - \mathfrak{c}_2)^2}{2g} = \eta\,\frac{|\Delta\mathfrak{c}|^2}{2g} = \eta\,\frac{c_1^2 + c_2^2 - 2\,c_1\,c_2\cos\delta}{2g}$$

und zwar ist angenähert $\eta = 0{,}7$ bis $1{,}0$.

Schreibt man die Verlusthöhe wieder in der Form $h'_v = \zeta\,\frac{c^2}{2g}$ an, so kann nach Weisbach für Kniestücke von konstantem Durchmesser

[1] Fußnote 1 S. 86.
[2] v. Mises, R.: Elem. d. techn. Hydromech. 1914 S. 170.

angenähert

$$\zeta = \sin^2 \frac{\delta}{2} + 2 \sin^4 \frac{\delta}{2}$$

gesetzt werden.

Eingehende Versuche zur Ermittlung der Widerstandsbeiwerte ζ (ohne den Einfluß der Wandreibung) sind von H. Kirchbach[1] und W. Schubart[1] im Hydraulischen Institut der Technischen Hochschule München an glatten und rauhen Kniestücken, sowie an verschiedenen durch Aneinanderreihung von Kniestücken gebildeten Formstücken von 43 mm lichtem Durchmesser angestellt worden. Die Aufrauhung wurde in gleicher Weise wie bei den Hofmannschen Versuchen (vgl. S. 87) bewerkstelligt. Untersucht wurde die Abhängigkeit des Wertes ζ von der Reynoldsschen Zahl $\mathfrak{R} = \frac{c\,d}{\nu}$ für verschiedene Winkel δ. Dabei zeigte sich, daß ζ für einen bestimmten Winkel δ von etwa $\mathfrak{R} = 200000$ ab nahezu als konstant angesehen werden darf. Wichtig ist ferner die Feststellung, daß die Wirkung des Kniestückes auf die Geschwindigkeitsverteilung bei einem 90°-Kniestück bereits im Abstand $25\,d$ hinter dem Krümmer beendet ist (d = Rohrdurchmesser), während sie bei kleinen Winkeln δ erst etwa in einer Entfernung von $50\,d$ abgeklungen ist. Die Abb. 76 bis 78 zeigen die Abhängigkeit des Wertes ζ von $\mathfrak{R}$ für Kniestücke von $\delta = 30^0$, $\delta = 60^0$ und $\delta = 90^0$. Eine Zusammenstellung der wichtigsten Versuchsergebnisse für $\mathfrak{R} \approx 225000$ enthalten die nachstehenden Tabellen[2].

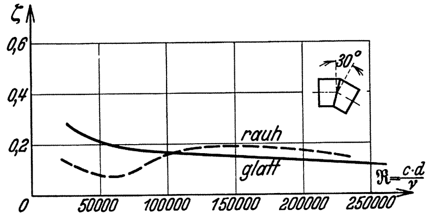


Abb. 76. Widerstandszahlen für den Verlust in einem Kniestück von 30° Winkeländerung.

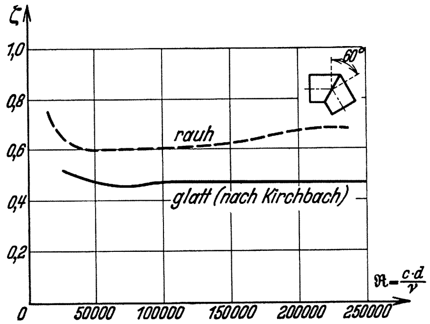


Abb. 77. Widerstandszahlen für den Verlust in einem Kniestück von 60°-Winkeländerung.

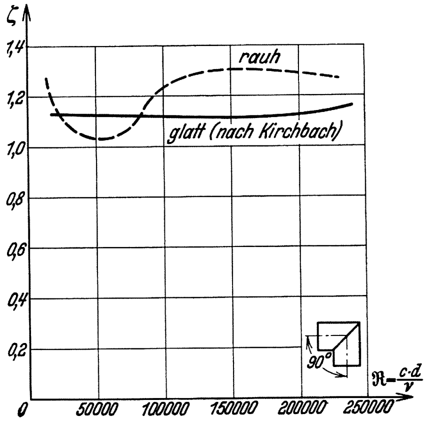


Abb. 78. Widerstandszahlen für den Verlust in einem Kniestück von 90°-Winkeländerung.

[1] Mitt. Hydraul. Inst. T. H. München Heft 3 S. 68, 121.
[2] Mitt. Hydraul. Inst. T. H. München Heft 3 S. 144.

Einfaches Kniestück.

$\delta =$	10^0	15^0	$22{,}5^0$	30^0	45^0	60^0	90^0
ζ glatt =	0,034	0,042	0,066	0,130	0,236	0,471	1,129
ζ rauh =	0,044	0,062	0,154	0,165	0,320	0,684	1,265

Formstück Abb. 79.

$\frac{a}{d} =$	0,71	0,943	1,174	1,42	1,86	2,56	3,72	6,28
ζ glatt. . .	0,507	0,350	0,333	0,261	0,289	0,356	0,356	0,399
ζ rauh. . .	0,510	0,415	0,384	0,377	0,390	0,429	0,460	0,444

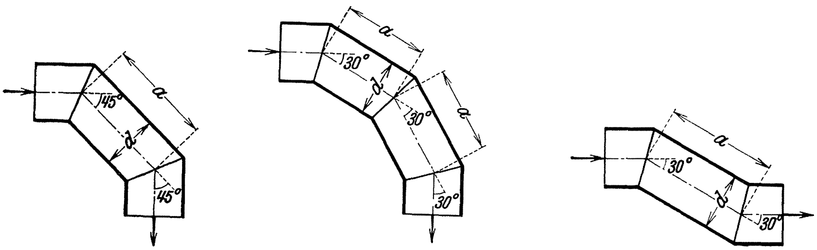


Abb. 79 bis 81. Formstücke.

Formstück Abb. 80.

$\frac{a}{d} =$	1,23	1,44	1,67	1,70	1,91	2,37	2,96	4,11	4,70	6,10
ζ glatt. . .	0,195	0,196	0,150	0,149	0,154	0,167	0,172	0,190	0,192	0,201
ζ rauh. . .	0,347	0,320	0,300	0,299	0,312	0,337	0,342	0,354	0,360	0,360

Formstück Abb. 81.

$\frac{a}{d} =$	1,23	1,67	2,37	3,77
ζ glatt . . .	0,157	0,156	0,143	0,160
ζ rauh. . .	0,300	0,378	0,264	0,242

Weitere Angaben über die Widerstandsziffer ζ sind zu finden in Hütte Bd. I 26. Aufl. sowie in den verschiedentlich schon genannten „Mitteilungen des Hydraulischen Instituts der Technischen Hochschule zu München", auf die hier verwiesen werden muß.

4. Rohrverzweigung.

Im Falle einer Rohrgabelung nach Abb. 82 tritt außer dem bereits früher besprochenen „Reibungsverlust" noch ein „Abzweigverlust" auf, der für die Rohre BC und BD im allgemeinen verschieden groß ist. Die zugehörige „Verlusthöhe" soll wieder in der Form $\zeta \frac{c^2}{2g}$ dargestellt und für das Rohr BC mit $h'_{v_1} = \zeta_1 \frac{c^2}{2g}$, für das Rohr BD mit $h'_{v_2} = \zeta_2 \frac{c^2}{2g}$ bezeichnet werden. (Man beachte, daß hier sowohl ζ_1 als auch ζ_2 auf die mittlere Geschwindigkeit c im Hauptrohr bezogen sind; vgl. S. 79.)

Mit den Bezeichnungen der Abb. 82 lautet die erweiterte Bernoullische Gleichung im Falle stationärer Strömung für einen durch A, B, C gehenden Stromfaden, bezogen auf A und C:

$$\frac{c^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + h_1 = \frac{c_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + \lambda \frac{c^2}{2gd} l + \lambda_1 \frac{c_1^2}{2g d_1} l_1 + \zeta_1 \frac{c^2}{2g},$$

woraus folgt:

$$\frac{p - p_1}{\gamma} + h_1 = \frac{c^2}{2g}\left(\lambda \frac{l}{d} + \zeta_1 - 1\right) + \frac{c_1^2}{2g}\left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + 1\right). \tag{85}$$

Entsprechend erhält man für den Stromfaden A, B, D

$$\frac{p - p_2}{\gamma} + h_2 = \frac{c^2}{2g}\left(\lambda \frac{l}{d} + \zeta_2 - 1\right) + \frac{c_2^2}{2g}\left(\lambda_2 \frac{l_2}{d_2} + 1\right). \tag{86}$$

Zu diesen beiden Gleichungen treten noch die Bedingungen

$$c = \frac{4\,Q}{\pi d^2}; \qquad c_1 = \frac{4\,Q_1}{\pi d_1^2}; \qquad c_2 = \frac{4\,Q_2}{\pi d_2^2} \tag{87}$$

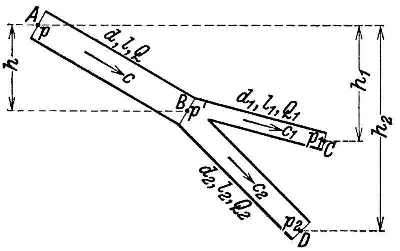


Abb. 82. Rohrgabelung.

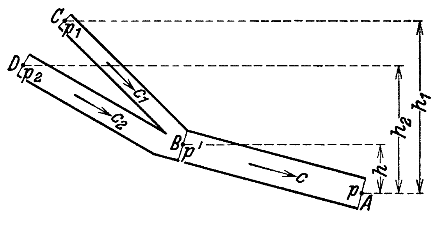


Abb. 83. Rohrvereinigung.

und die Kontinuitätsgleichung

$$Q = Q_1 + Q_2. \tag{88}$$

In ganz ähnlicher Weise kann man verfahren, wenn es sich um die Vereinigung zweier Rohre gemäß Abb. 83 handelt.

Die weitere Rechnung richtet sich nun danach, welche Größen in den obigen Gl. (85) bis (88) gegeben und welche gesucht sind. Dabei wird es im allgemeinen notwendig sein, im ersten Rechnungsgang $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ zu setzen und dafür einen Mittelwert, etwa $\lambda = 0{,}03$ anzunehmen (nach Dupuit, S. 64). Außerdem ist noch die Kenntnis der Widerstandsziffern ζ_1 und ζ_2 erforderlich.

Zur systematischen Erforschung dieser Werte sind im Hydraulischen Institut der Techn. Hochschule München von G. Vogel und F. Petermann umfangreiche Versuche angestellt worden[1], über deren Ergebnisse hier kurz berichtet werden soll. Bei den Versuchen wurde eine durchgehende Hauptleitung von konstantem Durchmesser $d = d_1 = 43$ mm zugrunde gelegt, also ohne Knick bei B (Abb. 82), und von dieser ein Rohr a) unter dem Winkel $\delta = 90^0$ (Vogel), b) unter dem Winkel $\delta = 45^0$ (Petermann) seitlich abgezweigt. Der Durchmesser des Ab-

[1] Mitt. Heft 1, 2 u. 3.

zweigrohres wurde außerdem variiert ($d_2 = 15$ mm, 25 mm, 43 mm), um den Einfluß des Durchmesserverhältnisses zwischen Haupt- und Abzweigrohr auf die Größe der ζ-Werte verfolgen zu können. Weitere Varianten wurden erreicht durch Abrundung der Anschlußkanten, bzw. durch konisch ausgebildeten Übergang (siehe unten). Ähnlich wie früher (Rohrkrümmer usw.) wurden auch hier die reinen Abzweigverluste ohne den Reibungsverlust im Rohre festgestellt. (Der Reibungsverlust wurde gesondert untersucht.)

Abb. 84 und 85 zeigen schematisch die beiden Fälle der „Trennung“ und der „Vereinigung“ der Flüssigkeitsströme, sowie die gewählten Bezeichnungen für die Geschwindigkeiten und Durchflußmengen. Außerdem bedeutet ζ_a die Widerstandszahl für das abgezweigte Wasser, ζ_d diejenige für das geradeaus strömende Wasser, so daß

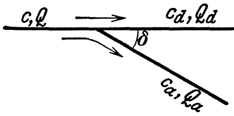


Abb. 84.

$$h'_{va} = \zeta_a \frac{c^2}{2g}; \qquad h'_{vd} = \zeta_d \frac{c^2}{2g}.$$

Bei allen Versuchen zeigte sich, daß ζ innerhalb des Bereiches der Meßgenauigkeit nur von dem Verhältnis $\frac{Q_a}{Q}$ abhängig ist. Im einzelnen ergab sich folgendes Bild: Die größten Verluste traten auf bei rechtwinkligem Anschluß ($\delta = 90^0$) und großem Verhältnis des Hauptrohrdurchmessers zum Durchmesser des Abzweigrohres, die kleinsten bei schiefwinkligem Anschluß ($\delta = 45^0$) und gleichen Durchmessern der Haupt- und Abzweigleitung. Durch Abrundung der Übergangsstellen bzw. konischen Anschluß des Abzweigrohres konnten die Verluste in den einzelnen Fällen herabgedrückt werden. Einige Angaben über die Größe von ζ (in runden Zahlen) enthalten die nachstehenden Zusammenstellungen (vgl. dazu die Abb. 86 bis 91).

Beispiel. Gegeben seien nach Abb. 92 der bei A zur Verfügung stehende Druck p, die sekundlichen Wassermengen Q und Q_2, ferner l, l_1, l_2 und h_1, h_2; außerdem seien die Drücke p_1 und p_2 vorgeschrieben. Es soll der erforderliche Durchmesser d für das durchgehende Rohr ABC und d_2 für das Abzweigrohr BD berechnet werden.

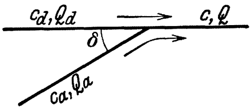


Abb. 85.

Zunächst ist $Q_1 = Q - Q_2$, ferner wegen $c = \frac{Q}{F}$

$$c^2 = \frac{16\,Q^2}{\pi^2 d^4}; \qquad c_1^2 = \frac{16\,Q_1^2}{\pi^2 d^4}; \qquad c_2^2 = \frac{16\,Q_2^2}{\pi^2 d_2^4}.$$

Führt man diese Werte in Gl. (85) ein, so erhält man

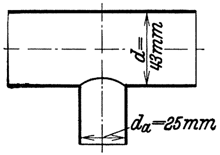
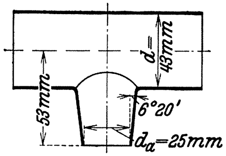
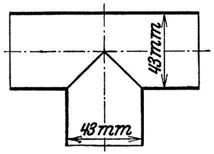
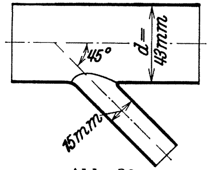
$$\frac{p - p_1}{\gamma} + h_1 = \frac{16\,Q^2}{2\,g\,\pi^2 d^4}\left(\lambda \frac{l}{d} + \zeta_1 - 1\right) + \frac{16\,Q_1^2}{2\,g\,\pi^2 d^4}\left(\lambda_1 \frac{l_1}{d} + 1\right),$$

woraus folgt

$$d^5 = \frac{Q^2(\lambda\,l + \zeta_1 d - d) + Q_1^2\,(\lambda_1 l_1 + d)}{\frac{g\pi^2}{8}\left(\frac{p - p_1}{\gamma} + h_1\right)}. \tag{89}$$

In ähnlicher Weise erhält man aus Gl. (86)

$$d_2^5 = \frac{Q_2^2\,(\lambda_2\,l_2 + d_2)}{\frac{g\pi^2}{8}\left(\frac{p - p_2}{\gamma} + h_2\right) - \frac{Q^2}{d^4}\left(\lambda \frac{l}{d} + \zeta_2 - 1\right)}. \tag{90}$$

Verschiedene Arten und Formen der Rohrabzweigungen		$\frac{Q_a}{Q} =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
 Abb. 86.	Trennung	$\zeta_a =$	1,3	1,4	1,5	1,8	2,4	3,2	4,3	5,6			
		$\zeta_d =$	+ 0,15	− 0,14	− 0,15	− 0,1	− 0,05	0,0	+ 0,05	0,13	0,2	0,25	0,3
	Vereinigung	$\zeta_a =$	− 0,7	− 0,25	+ 0,25	+ 0,7	+ 1,25	1,9	2,75	3,7	4,7	6,0	7,2
		$\zeta_d =$	0,28	0,4	0,52	0,64	0,77	0,89	1,0	1,13	1,26	1,38	1,50
 Abb. 87.	Trennung	$\zeta_a =$	1,1	1,1	1,15	1,25	1,4	1,65	2,05	2,6	3,25	4,05	4,9
		$\zeta_d =$	+ 0,15	− 0,14	− 0,15	− 0,10	− 0,05	0,0	+ 0,05	0,13	0,2	0,25	0,3
	Vereinigung	$\zeta_a =$	− 0,95	− 0,5	− 0,1	+ 0,35	0,8	1,3	1,75	2,25	2,8	3,25	4,0
		$\zeta_d =$	0,08	0,19	0,30	0,41	0,52	0,63	0,74	0,85	0,96	1,07	1,18
 Abb. 88.	Trennung	$\zeta_a =$	0,96	0,91	0,88	0,88	0,89	0,92	0,96	1,02	1,10	1,2	1,29
		$\zeta_d =$	+ 0,05	− 0,04	− 0,08	− 0,08	− 0,04	0,0	+ 0,07	0,14	0,21	0,28	0,35
	Vereinigung	$\zeta_a =$	− 1,04	− 0,68	− 0,4	− 0,15	+ 0,1	0,3	0,47	0,6	0,73	0,83	0,92
		$\zeta_d =$	+ 0,06	0,11	0,18	0,24	0,3	0,35	0,4	0,46	0,5	0,55	0,6
 Abb. 89.	Trennung	$\zeta_a =$	1,0	0,5	0,8	2,0	3,8	6,3	9,8	13,8	18,8	24,3	30,5
		$\zeta_d =$	− 0,01	− 0,03	− 0,04	− 0,04	− 0,02	+ 0,02	0,08	0,13	0,18	0,24	0,32
	Vereinigung	$\zeta_a =$	− 0,94	0	1,6	4,4	8,3	13,4	19,6	26,6	34,5	43,8	54,0
		$\zeta_d =$	0	+ 0,1	− 0,1	− 0,54	− 1,1	− 1,9	− 2,9	− 4,2	− 5,7	− 7,5	− 9,6

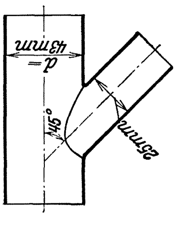


Abb. 90.

Trennung	$\zeta_a =$	0,88	0,63	0,42	0,35	0,41	0,60	0,93	1,32	1,82	2,5	3,38
	$\zeta_d =$	0	− 0,04	− 0,05	− 0,04	− 0,02	+ 0,01	+ 0,07	0,13	0,2	0,28	0,35
Vereinigung	$\zeta_a =$	− 1,0	− 0,46	− 0,08	+ 0,31	0,75	1,38	2,07	2,85	3,65	4,50	5,40
	$\zeta_d =$	0	+ 0,1	0,1	0	− 0,15	− 0,4	− 0,70	− 1,05	− 1,5	− 2,10	− 2,90

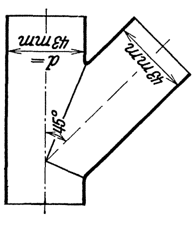


Abb. 91.

Trennung	$\zeta_a =$	0,9	0,78	0,66	0,56	0,47	0,4	0,33	0,30	0,29	0,31	0,35
	$\zeta_d =$	+ 0,04	− 0,04	− 0,06	− 0,06	− 0,04	+ 0,01	0,07	0,14	0,20	0,27	0,33
Vereinigung	$\zeta_a =$	− 0,9	− 0,62	− 0,37	− 0,16	0	+ 0,12	0,22	0,30	0,37	0,39	0,38
	$\zeta_d =$	0,05	0,12	0,17	0,19	0,18	0,12	0,05	− 0,05	− 0,20	− 0,38	− 0,57

Aus diesen Gleichungen können d und d_2 nur durch Probieren gewonnen werden, wobei $\zeta_1 = \zeta_d$ und $\zeta_2 = \zeta_a$ sowie λ, λ_1 und λ_2 zunächst zu schätzen sind. Bei sehr großen Rohrlängen spielen die Abzweigverluste gegenüber den großen Reibungsverlusten nur eine untergeordnete Rolle, zumal wenn das Durchmesserverhältnis $\frac{d}{d_2}$ nicht zu groß ist. In solchen Fällen können die Gl. (89) und (90) in erster Annäherung

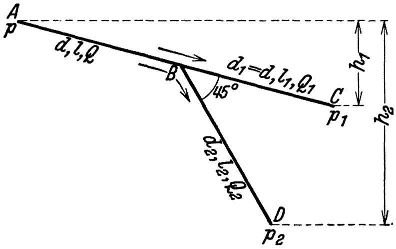


Abb. 92.

mit $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ wie folgt geschrieben werden

$$d \approx \sqrt[5]{\frac{\lambda\,(Q^2 l + Q_1^2 l_1)}{\frac{g\,\pi^2}{8}\left(\frac{p - p_1}{\gamma} + h_1\right)}}, \tag{89a}$$

$$d_2 \approx \sqrt[5]{\frac{Q_2^2\,\lambda\,l_2}{\frac{g\,\pi^2}{8}\left(\frac{p - p_2}{\gamma} + h_2\right) - \frac{Q^2\,\lambda\,l}{d^5}}}, \tag{90a}$$

woraus die gesuchten Durchmesser unmittelbar zu bestimmen sind. Die so gefundenen Werte und die ihnen entsprechenden Widerstandszahlen ζ_1, ζ_2, λ, λ_1, λ_2 können nun in die Gl. (89) und (90) eingesetzt und die Rechnung so lange wiederholt werden, bis die richtigen Durchmesser gefunden sind.

5. Heberleitungen.

Liegt die Achse eines Rohres, das zwei Wasserbehälter A und B von verschiedener Spiegelhöhe miteinander verbindet, an irgendeiner Stelle höher als der Oberwasserspiegel (Abb. 93), so spricht man von einer **Heberleitung**, deren Wirkungsweise bereits im Bd. I erklärt wurde (Bd. I S. 14). Mit p_s und c_s als Druck und Geschwindigkeit im Scheitelpunkt S der Rohrleitung lautet die erweiterte Bernoullische Gleichung, bezogen auf einen Punkt des Oberwasserspiegels und den Rohrscheitel S im Falle stationärer Strömung

$$\frac{c_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} = \frac{c_s^2}{2g} + \frac{p_s}{\gamma} + h_s + \sum h_v ,$$

wo c_0 die Geschwindigkeit am Oberwasserspiegel und $\sum h_v$ die Gesamtheit der Verlusthöhen zwischen OW und S bezeichnet. Setzt man unter der Annahme eines großen Querschnittes von A $c_0 \approx 0$, so folgt für den Druck an der Stelle S

$$\frac{p_s}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} - \left(\frac{c_s^2}{2g} + h_s + \sum h_v\right), \tag{91}$$

der, wie ersichtlich, kleiner als der atmosphärische Luftdruck p_0 wird. Damit ein ungestörtes Arbeiten des Hebers möglich ist, muß der absolute Druck p_s im Rohrscheitel größer als der Dampfdruck p_d sein, welcher der jeweiligen Flüssigkeitstemperatur entspricht. Wird nämlich p_s gleich oder kleiner als p_d, dann kommt die Flüssigkeit (Wasser) zum Sieden und scheidet unter Hohlraumbildung Luft- bzw. Gasblasen aus, wodurch der Zusammenhang des kontinuierlichen Flüssigkeitsfadens gestört wird. Man hat dann die bekannte Erscheinung der Kavitation. Bei Heberleitungen muß also darauf geachtet werden, daß p_s auch bei etwa auftretenden Druckschwankungen immer größer als p_d bleibt, damit ein ungestörter Betrieb gesichert ist. Die Größe des Dampfdruckes für Wasser bei verschiedenen Temperaturen ist aus nachstehender Tabelle zu entnehmen[1].

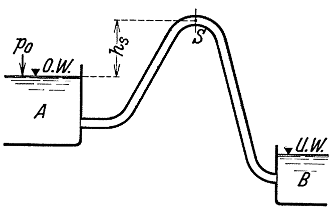


Abb. 93. Heberleitung.

$t =$	0	5	10	15	20	25	30° C
$p_d =$	0,0063	0,0089	0,0125	0,0173	0,0236	0,0320	0,0429

$t =$	50	70	100° C
$p_d =$	0,125	0,317	1,033 $\left[\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}\right]$.

Für die größte „Betriebshöhe“ h_s der Heberleitung folgt aus Gl. (91), wenn dort $p_s = p_d$ gesetzt wird,

$$h_s < \frac{p_0}{\gamma} - \left(\frac{p_d}{\gamma} + \frac{c_s^2}{2g} + \sum h_v\right).$$

Der praktische Grenzwert von h_s liegt bei etwa 7 bis 8 [m] und hängt von der Temperatur ab.

[1] Handb. d. Experimentalphysik, herausgegeb. von W. Wien u. F. Harms Bd. 4 Hydro- u. Aerodynamik 1. Teil S. 465.

6. Ungleichförmige Strömung.

a) Schwingungen in kommunizierenden Röhren und Gefäßen.

Zwei mit Flüssigkeit gefüllte, oben offene prismatische Gefäße von den Querschnitten F_1 und F_2 seien durch ein Rohr vom Querschnitt F_3 gemäß Abb. 94 miteinander verbunden. Im Ruhezustande steht die Flüssigkeit nach dem Gesetz der kommunizierenden Gefäße (Bd. I S. 13) in beiden Gefäßen gleich hoch. Denkt man sich das Gleichgewicht durch irgendeine äußere Ursache vorübergehend gestört, so führt die sich selbst überlassene Flüssigkeit Schwingungen aus, die je nach der Art, in welcher man die Reibung berücksichtigt, verschiedenen Charakter haben.

Nach der erweiterten Bernoullischen Gleichung für nicht stationäre Strömung (Bd. I S. 71) ist für die beiden Spiegelquerschnitte wegen $p_1 = p_2$ (atmosphärischer Luftdruck)

$$\frac{\alpha_1 c_1^2}{2g} + z_1 = \alpha_2 \frac{c_2^2}{2g} - z_2 + \sum h_v + \frac{1}{g}\int_{s_1}^{s_2} \alpha' \frac{\partial c}{\partial t} ds. \tag{92}$$

In dieser Gleichung bezeichnen c_1 und c_2 die Spiegelgeschwindigkeiten, c die Geschwindigkeit an einer beliebigen Stelle s zwischen den beiden Spiegeln, z_1 und z_2 die Abweichungen der Spiegel vom Ausgleichsspiegel, $\sum h_v$ die Gesamtheit der Verlusthöhen, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha'$ Korrekturfaktoren, durch welche die ungleichförmige Geschwindigkeitsverteilung über den Gefäßquerschnitt berücksichtigt werden soll (Bd. I S. 70 u. 71), und ds ein Längenelement, gemessen in der Strömungsrichtung. Wegen $c_1F_1 = c_2F_2$ und $z_1F_1 = z_2F_2$ folgt aus (92), wenn noch $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ gesetzt wird,

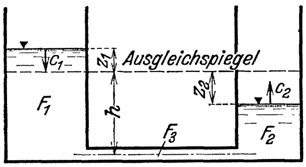


Abb. 94. Schwingung in prismatischen Gefäßen.

$$\alpha \frac{c_1^2}{2g}\left\{1 - \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2\right\} + z_1\left(1 + \frac{F_1}{F_2}\right) = \sum h_v + \frac{1}{g}\int_{s_1}^{s_2} \alpha' \frac{\partial c}{\partial t} ds$$

oder mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$\alpha \frac{1 - \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2}{2} = \varkappa_1; \quad 1 + \frac{F_1}{F_2} = \varkappa_2 \tag{93}$$

und unter Beachtung von $c_1 = -\frac{dz_1}{dt}$ (Abwärtsbewegung)

$$\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 \varkappa_1 + z_1 g \varkappa_2 = g \sum h_v + \int_{s_1}^{s_2} \alpha' \frac{\partial c}{\partial t} ds. \tag{94}$$

Weiter ist wegen $c = c_1 \frac{F_1}{F}$, wo F den Querschnitt an einer beliebigen Stelle s bezeichnet,

$$\int_{s_1}^{s_2} \alpha' \frac{\partial c}{\partial t} ds = F_1 \int_{s_1}^{s_2} \alpha' \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{c_1}{F}\right) ds = F_1 \frac{d c_1}{d t} \int_{s_1}^{s_2} \alpha' \frac{d s}{F},$$

da c_1 für die hier in Betracht kommende Bewegung nicht von s, sondern nur von der Zeit abhängt. Setzt man noch

$$F_1 \int_{s_1}^{s_2} \alpha' \frac{d s}{F} = \sigma + \alpha_1' z_1 - \alpha_2' z_2 \frac{F_1}{F_2} = \sigma + z_1 \left\{\alpha_1' - \left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 \alpha_2'\right\} = f(z_1), \tag{95}$$

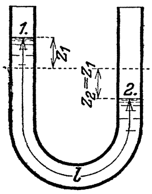


Abb. 95. Schwingung in einem U-Rohr.

wo $\sigma = \text{const.}$ den Wert von $f(z_1)$ für die Spiegelgleiche bezeichnet, so wird

$$\int_{s_1}^{s_2} \alpha' \frac{\partial c}{\partial t} ds = f(z_1) \frac{d c_1}{d t} = -f(z_1) \frac{d^2 z_1}{d t^2},$$

so daß (94) übergeht in

$$f(z_1) \frac{d^2 z_1}{d t^2} + \varkappa_1 \left(\frac{d z_1}{d t}\right)^2 + g \varkappa_2 z_1 = g \sum h_v. \tag{96}$$

An Verlusthöhen kommen in Betracht diejenigen aus Reibung sowie aus Eintritts- und Austrittsverlust des Verbindungsrohres. Bei entsprechender Abrundung der Rohranschlußstellen sind die zuletzt genannten hinreichend klein und sollen hier außer Betracht bleiben. Ihre Berücksichtigung in der Form $\zeta \frac{c^2}{2g}$ (S. 80) bereitet grundsätzlich keine Schwierigkeiten. Bezüglich der Reibung sollen hier drei verschiedene Fälle behandelt werden.

α) **Die Reibung wird vollkommen vernachlässigt.** Dann lautet die Bewegungsgleichung nach (96)

$$f(z_1) \frac{d^2 z_1}{d t^2} + \varkappa_1 \left(\frac{d z_1}{d t}\right)^2 + g \varkappa_2 z_1 = 0. \tag{97}$$

Am einfachsten gestaltet sich ihre Lösung, wenn $F_1 = F_2$ ist, da dann das quadratische Glied wegen $\varkappa_1 = 0$ verschwindet. Außerdem ist $\varkappa_2 = 2$ und, wegen $\alpha_1' = \alpha_2'$, nach (95) $f(z_1) = \sigma$. Handelt es sich um ein U-Rohr von konstantem Querschnitt (Abb. 95), so ist außerdem $\sigma = \alpha' l$, wo l die Länge der schwingenden Flüssigkeitssäule *1—2* bezeichnet. Mit diesen Werten geht (97) über in die bekannte Differentialgleichung der einfachen harmonischen Schwingung

$$\frac{d^2 z_1}{d t^2} = -\frac{2 g z_1}{\sigma}, \tag{98}$$

deren Integral mit der Anfangsbedingung $z_1 = 0$ für $t = 0$ lautet

$$z_1 = A \sin\left(t \sqrt{\frac{2g}{\sigma}}\right).$$

Die Dauer einer vollen Schwingung folgt daraus zu

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2g}{\sigma}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\sigma}{2g}},$$

unabhängig von der Größe des Schwingungsausschlages A (isochrone Schwingung).

Sind die Querschnitte F_1 und F_2 voneinander verschieden, aber beide sehr groß, die maximalen Ablenkungen aus der Gleichgewichtslage außerdem nicht sehr groß, so kann $\left(\frac{dz_1}{dt}\right)^2 = c_1^2 \approx 0$ und $f(z_1) \approx \sigma$ gesetzt werden, womit Gl. (97) lautet:

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} = -\frac{g\varkappa_2 z_1}{\sigma} = -\frac{g(F_2+F_1)}{F_2\sigma} z_1,$$

d. h. abgesehen von der Konstanten dieselbe Differentialgleichung wie (98). Ihre allgemeine Lösung ist mit A und B als Integrationskonstanten und $\frac{g(F_2+F_1)}{F_2\sigma} = k^2$

$$z_1 = A\sin(kt) + B\cos(kt),$$

woraus je nach den gegebenen Anfangsbedingungen alle weiteren Fragen beantwortet werden können. Ist z. B. zur Zeit $t = 0$ der größte Ausschlag $z_1 = z_0$ gegeben, so erhält man als Integrationskonstante, da für $t = 0$ auch $\frac{dz_1}{dt} = 0$ sein muß, $A = 0$, $B = z_0$, weshalb

$$z_1 = z_0\cos(kt) = z_0\cos\left\{t\sqrt{\frac{g(F_2+F_1)}{F_2\sigma}}\right\}.$$

Die Dauer einer vollen Schwingung ist

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{F_2\sigma}{g(F_2+F_1)}}.$$

β) Die Reibung ist proportional der Geschwindigkeit. Hier sollen hinsichtlich der Querschnittsgrößen F_1 und F_2 sowie hinsichtlich der maximalen Ablenkungen aus der Gleichgewichtslage dieselben Voraussetzungen gemacht werden wie unter Ziffer α), außerdem sollen zylindrische Querschnitte angenommen werden. Dann lautet Gl. (96)

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{g\varkappa_2 z_1}{\sigma} = \frac{g\sum h_v}{\sigma}. \tag{99}$$

Nach Definition ist die Summe der Verlusthöhen aus Reibung von Spiegel zu Spiegel

$$\sum h_v = \int_{s_1}^{s_2} \lambda\frac{c^2}{2gd}\,ds,$$

wo d den Durchmesser an einer beliebigen Stelle s bezeichnet. Im Falle laminarer Strömung ist nach Bd. I S. 92 $\lambda = \frac{64}{c\,d}\,\nu$, womit obige Gleichung übergeht in

$$\sum h_v = \frac{32\,\nu}{g} \int_{s_1}^{s_2} c\,\frac{ds}{d^2}$$

oder, wegen $c = c_1 \frac{F_1}{F}$, in

$$\sum h_v = c_1 \frac{32\,\nu}{g}\, F_1 \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{F\,d^2}\,.$$

Setzt man noch

$$F_1 \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{F\,d^2} = \varepsilon + \frac{z_1}{d_1^2} - \frac{z_2}{d_2^2}\,\frac{F_1}{F_2}\,,$$

wo ε = const. den Wert der linken Seite für die Spiegelgleiche bezeichnet und die zusätzlichen Glieder mit Rücksicht auf die oben gemachten Voraussetzungen unterdrückt werden sollen, so wird schließlich

$$\sum h_v = c_1 \frac{32\,\nu}{g}\,\varepsilon = -\frac{d z_1}{d t} \cdot \frac{32\,\nu}{g}\,\varepsilon\,, \tag{100}$$

und man erkennt, daß hier tatsächlich die Reibung proportional der Geschwindigkeit c_1 ist. Im Falle eines U-Rohres von konstantem Querschnitt (Abb. 95) ist $\varepsilon = \frac{l}{d^2}$.

Der in Gl. (95) auftretende Korrekturfaktor α' ist definiert durch den Ausdruck $\alpha' = \frac{\int v^2 dF}{c^2 F}$ (vgl. Bd. I S. 70), wobei für laminare Strömung $v = \frac{J g}{4\,\nu}(r^2 - z^2)$ und $c = \frac{J g r^2}{8\,\nu}$ zu setzen ist (r = Gefäßhalbmesser, z = radialer Abstand eines Flüssigkeitselementes von der Gefäßachse, Bd. I S. 74 und 75). Führt man diese Ausdrücke in obige Gleichung für α' ein, so erhält man mit $F = \pi r^2$ und $dF = 2\,\pi z \cdot dz$ nach Ausführung der Integration $\alpha' = 4/3$.

Setzt man nun den Ausdruck (100) für $\sum h_v$ in Gl. (99) ein, so wird

$$\frac{d^2 z_1}{d t^2} + \frac{d z_1}{d t}\,\frac{32\,\nu\,\varepsilon}{\sigma} + \frac{g\,\varkappa_2\,z_1}{\sigma} = 0\,. \tag{101}$$

Das ist aber die bekannte Differentialgleichung einer gedämpften Schwingung, deren allgemeines Integral mit A und B als Integrationskonstanten in der Form

$$z_1 = A\,e^{r_1 t} + B\,e^{r_2 t}$$

angeschrieben werden kann, wo r_1 und r_2 die Wurzeln der „charakteristischen Gleichung“

$$r^2 + \frac{32\,\nu\,\varepsilon\,r}{\sigma} + \frac{g\,\varkappa_2}{\sigma} = 0$$

sind. Demnach wird, wenn zur Abkürzung

$$\frac{32\,\nu\,\varepsilon}{\sigma} = a; \qquad \frac{g\,\varkappa_2}{\sigma} = b; \qquad \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = \varrho \tag{102}$$

gesetzt wird,

$$r_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = -\frac{a}{2} + \varrho\,,$$

$$r_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = -\frac{a}{2} - \varrho$$

und somit

$$z_1 = e^{-\frac{a}{2}t}\left(A\,e^{\varrho t} + B\,e^{-\varrho t}\right). \tag{103}$$

Zur weiteren Behandlung der Aufgabe sei zunächst angenommen, daß $z_1 = 0$ für $t = 0$ sei, d. h. daß der Spiegel zu Anfang der Zeit t durch die Gleichgewichtslage gehe. Dann erhält man für die Konstanten A und B die einfache Beziehung $A = -B$, weshalb

$$z_1 = A\,e^{-\frac{a}{2}t}\left(e^{\varrho t} - e^{-\varrho t}\right) = 2\,A\,e^{-\frac{a}{2}t}\,\mathfrak{Sin}\,(\varrho\,t)\,. \tag{104}$$

Je nachdem ob $\varrho = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ reell oder imaginär ist, ergeben sich zwei verschiedene Bewegungsarten. Im ersten Falle, d. h. für $\frac{a^2}{4} > b$, ist z_1 keine periodische Funktion von t, da, wie man leicht erkennt, z_1 mit wachsendem t sein Vorzeichen nicht ändern kann. Man hat es also hier nicht mit einer Schwingung zu tun, sondern mit einer aperiodischen Bewegung, bei welcher sich die Spiegel asymptotisch wieder der Gleichgewichtslage nähern. Für $t = \infty$ wird $z_1 = 0$, da nach Gl. (104) wegen $\frac{a}{2} > \varrho$

$$z_1\Big]_{t=\infty} = A\left(\frac{1}{e^{\left(\frac{a}{2}-\varrho\right)t}} - \frac{1}{e^{\left(\frac{a}{2}+\varrho\right)t}}\right)\Bigg]_{t=\infty} = 0\,.$$

Ist dagegen ϱ imaginär, so setze man

$$\varrho = i\sqrt{b - \frac{a^2}{4}} = i\,\varrho'\,,$$

wo $\varrho' = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$ jetzt reell wird, und führe diesen Ausdruck in (104) ein. Dann ergibt sich

$$z_1 = 2\,A\,e^{-\frac{a}{2}t}\,\mathfrak{Sin}\,(i\,\varrho'\,t) = 2\,A\,i\,e^{-\frac{a}{2}t}\sin(\varrho'\,t)\,. \tag{105}$$

Das Produkt $A\,i$ hat eine einfache mechanische Bedeutung. Bezeichnet c_0 die Geschwindigkeit c_1 zur Zeit $t = 0$ (Spiegelgleiche), so folgt durch Differentiation von (105) mit $t = 0$

$$c_0 = 2\,A\,i\,\varrho',$$

so daß

$$z_1 = \frac{c_0}{\varrho'}\,e^{-\frac{a}{2}t}\sin(\varrho' t)\,.$$

Man erhält also eine gedämpfte Schwingung mit der Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{\varrho'} = \frac{2\pi}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}}\,. \tag{106}$$

Auch diese Schwingung ist isochron (vgl. S. 99).

Wie aus der obigen Ableitung hervorgeht, tritt diese Bewegung ein, wenn $b > \frac{a^2}{4}$, d. h. der Einfluß der Reibung nicht zu groß ist. Verschwindet letztere ganz, wird also $a = 0$, so geht (106) über in die Schwingungsdauer der ungedämpften Schwingung (S. 99).

Im allgemeinen wird nicht c_0, sondern der größte Ausschlag $z_1 = z_0$ gegeben sein. Rechnet man den Beginn der Zeit t von dieser Lage aus, so wird $z_1 = z_0$ und $c_1 = 0$ für $t = 0$. Zur Bestimmung der Konstanten A und B in Gl. (103) stehen dann die Bedingungen

$$z_0 = A + B,$$
$$0 = A\left(-\frac{a}{2} + \varrho\right) - B\left(\frac{a}{2} + \varrho\right)$$

zur Verfügung, aus denen folgt:

$$A = \frac{z_0}{2}\left(1 + \frac{a}{2\varrho}\right); \quad B = \frac{z_0}{2}\left(1 - \frac{a}{2\varrho}\right).$$

Mit vorstehenden Werten geht Gl. (103) über in

$$z_1 = \frac{z_0}{2}\,e^{-\frac{a}{2}t}\left\{(e^{\varrho t} + e^{-\varrho t}) + \frac{a}{2\varrho}(e^{\varrho t} - e^{-\varrho t})\right\}$$

oder

$$z_1 = \frac{z_0}{2}\,e^{-\frac{a}{2}t}\left\{2\,\mathfrak{Cos}\,(\varrho t) + \frac{a}{\varrho}\,\mathfrak{Sin}\,(\varrho t)\right\}. \tag{107}$$

Dieser Ausdruck stellt bei reellem ϱ die aperiodische Bewegung dar. Ist ϱ dagegen imaginär, so setze man wieder in (107) $\varrho = \varrho' i$, wodurch man die gedämpfte Schwingung

$$z_1 = \frac{z_0}{2}\,e^{-\frac{a}{2}t}\left\{2\cos(\varrho' t) + \frac{a}{\varrho'}\sin(\varrho' t)\right\}$$

mit der Schwingungsdauer (106) erhält.

γ) **Die Reibung ist proportional dem Geschwindigkeitsquadrat.** Als Ausgangsgleichung dient wieder Gl. (96). Beschränkt man sich auf gleiche Querschnitte $F_1 = F_2$ oder, bei ungleichen Querschnitten, auf kleine Ablenkungen aus der Gleichgewichtslage, so kann nach (95) wieder $f(z_1) \approx \sigma$ gesetzt werden. Als Summe der Reibungsverlusthöhen erhält man bei beliebiger Querschnittsform

$$\sum h_v = \int\limits_{s_1}^{s_2} \psi \frac{c^2}{2\,g\,r_h}\,ds\,,$$

wo r_h den hydraulischen Radius bezeichnet (Bd. I S. 90) und die Widerstandsziffer ψ nach Voraussetzung unabhängig von der Reynoldsschen Zahl ist (quadratisches Widerstandsgesetz; vgl. dazu S. 60 und Bd. I S. 97). Wegen $c = c_1 \frac{F_1}{F}$ folgt daraus

$$\sum h_v = \frac{c_1^2 F_1^2}{2\,g} \int\limits_{s_1}^{s_2} \frac{\psi\,ds}{r_h F^2} = c_1^2 \left(\zeta + \frac{\psi_1 z_1}{2\,g\,r_{h\,1}} - \frac{\psi_2 z_2}{2\,g\,r_{h\,2}} \frac{F_1^2}{F_2^2}\right),$$

wobei der erste Summand mit $\zeta = \text{const.}$ den Wert von $\sum h_v$ für die Spiegelgleiche darstellt. Mit Rücksicht auf die oben gemachten Voraussetzungen ist bei gleichen Querschnitten $F_1 = F_2$ genau, bei ungleichen Querschnitten, aber sehr kleinen Ablenkungen aus der Gleichgewichtslage, angenähert $\sum h_v = c_1^2 \zeta$, so daß jetzt Gl. (96) folgende Form annimmt:

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} + \frac{\varkappa_1}{\sigma}\left(\frac{d\,z_1}{d\,t}\right)^2 + \frac{g\,\varkappa_2}{\sigma} z_1 = c_1^2 \frac{\zeta\,g}{\sigma}. \tag{108}$$

Für ein U-Rohr von konstantem Querschnitt (Abb. 95) ist $\zeta = \frac{\psi\,l}{2\,g\,r_h}$, außerdem (siehe oben) $\varkappa_1 = 0$; $\varkappa_2 = 2$; $\sigma = \alpha' l$. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\varkappa_1 - \zeta\,g}{\sigma} = -p\,; \qquad \frac{g\,\varkappa_2}{\sigma} = q\,,$$

so geht Gl. (108) wegen $c_1^2 = \left(\frac{d\,z_1}{d\,t}\right)^2$ über in

$$\frac{d^2 z_1}{dt^2} - p\left(\frac{d\,z_1}{d\,t}\right)^2 + q\,z_1 = 0\,. \tag{109}$$

Das hier gewählte Vorzeichen von ζ bezieht sich auf die in Abb. 94 eingetragene Richtung von c_1; bei der rückläufigen Bewegung wäre das Vorzeichen umzukehren. Das erste Integral der Differentialgleichung (109) ist bekannt; es lautet[1]:

$$\frac{d z_1}{d t} = \pm \frac{\sqrt{C - 2q \int z_1 e^{-2 p z_1} d z_1}}{e^{-p z_1}}\,,$$

wo C eine Integrationskonstante darstellt. Wegen

$$\int z_1 e^{-2 p z_1} d z_1 = -\frac{1}{4 p^2}\left\{e^{-2 p z_1}(2\,p\,z_1 + 1)\right\}$$

[1] Vgl. etwa L. Kiepert: Integral-Rechnung 14. Aufl. Bd. 2 (1929), S. 167.

folgt daraus nach einfacher Umformung:

$$\frac{dz_1}{dt} = \pm\sqrt{C\,e^{2pz_1} + \frac{q}{2p^2}(2\,p\,z_1 + 1)}\,. \tag{110}$$

Bezeichnet Z_I den größten Wert von z_1, so entspricht diesem $\frac{dz_1}{dt} = 0$ (Umkehrstelle). Damit erhält man aus (110)

$$C = -\frac{q}{2\,p^2}\,e^{-2pZ_I}(2\,p\,Z_I + 1) \tag{111}$$

und

$$\frac{dz_1}{dt} = \pm\sqrt{\frac{q}{2\,p^2}\{2\,p\,z_1 + 1 - (2\,p\,Z_I + 1)\,e^{2p(z_1 - Z_I)}\}}\,. \tag{110a}$$

$\frac{dz_1}{dt}$ ist aber auch für jede andere Umkehrstelle gleich Null. Ist nun Z_I' die auf Z_I folgende Umkehrordinate des Spiegels *1*, und zwar so, daß ζ zwischen Z_I und Z_I' sein Vorzeichen nicht wechselt (Hingang), so folgt aus (111)

$$e^{-2pZ_I}(2\,p\,Z_I + 1) = e^{-2pZ_I'}(2\,p\,Z_I' + 1)$$

oder, nach Logarithmierung und einfacher Umstellung[1],

$$2\,p\,Z_I - \ln(2\,p\,Z_I + 1) = 2\,p\,Z_I' - \ln(2\,p\,Z_I' + 1)\,.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung ist man in der Lage, Z_I' zu berechnen, wenn Z_I gegeben ist; Z_I' wird negativ und ist — absolut genommen — kleiner als Z_I. Sieht man dann für den Rückgang Z_I' als bekannt an, so kann die auf Z_I' folgende Umkehrordinate Z_I'' gefunden werden usf. Eine graphische Lösung obiger Gleichung hat R. v. Mises[2] gegeben.

Zur Berechnung der Dauer eines Hin- oder Rückganges kann man Gl. (110a) integrieren, und man erhält

$$t = \int\limits_{z_1 = Z_n}^{z_1 = Z_{n+1}} \frac{dz_1}{\sqrt{\frac{q}{2\,p^2}\{2\,p\,z_1 + 1 - (2\,p\,Z_I + 1)\,e^{2p(z_1 - Z_I)}\}}}\,,$$

wo Z_n und Z_{n+1} zwei aufeinander folgende Umkehrordinaten bezeichnen. Das vorstehende Integral läßt sich allerdings nicht in geschlossener Form darstellen, so daß man auf eine mechanische Auswertung angewiesen ist. Die sich ergebenden Schwingungen sind nicht mehr isochron.

---

[1] Prášil, F.: Schweiz. Bauztg. Bd. 52 (1908) S. 334; vgl. auch Ph. Forchheimer: Hydraulik 3. Aufl. S. 437.

[2] v. Mises: Elemente der techn. Hydromechanik, S. 188.

b) Schwingungen in Wasserschlössern[1].

Aus einem Stausee von sehr großem Spiegel werde mittels einer Druckrohrleitung einer Turbine Wasser zugeführt. Sobald sich in den Abflußverhältnissen der Turbine etwas ändert, etwa durch Abdrosselung eines Teiles des zufließenden Wassers, tritt in der Druckrohrleitung eine Vergrößerung der strömenden Flüssigkeit ein, die eine entsprechende Druckvergrößerung zur Folge hat. Derartig plötzlich auftretende Druckschwankungen können für den Bestand der Leitung gefährlich werden, falls nicht durch eine Entlastungsvorrichtung eine Ausgleichsmöglichkeit geschaffen wird.

In geschlossenen Rohrleitungen entstehen durch Verstellen einer Drosselvorrichtung Druckänderungen, die sich nach Allievi wellenförmig mit der Geschwindigkeit

$$a = \sqrt{\frac{1}{\varrho\left(\frac{1}{E_f} + \frac{d}{E_r\,\delta}\right)}}$$

im Rohre fortpflanzen, wo ϱ die Dichte der Flüssigkeit, E_f und E_r die Elastizitätsziffern der Flüssigkeit und des Rohrmaterials, d den lichten Rohrdurchmesser und δ die Dicke der Rohrwandung bezeichnen. Für Wasser ist $E_f = 2{,}07 \cdot 10^8\,[\mathrm{kg/m^2}]$, so daß sich bei den üblichen Abmessungen eiserner Rohrleitungen durchschnittlich $a = 1000$ [m/sec] ergibt. Als Reflexions- oder Laufzeit bezeichnet man die Zeit $t_r = \frac{2l}{a}$, welche die Druckwelle benötigt, um die Rohrlänge l einmal hin und — nachdem sie am Einlaufbecken reflektiert ist — wieder zurück zu durchlaufen. Der durch diesen Vorgang bedingte Druckanstieg im Rohre (Wasserschlag, Widderstoß) nimmt verschieden große Werte an, je nachdem die Dauer des Schließvorganges $t_s \lesseqgtr t_r$ ist. Der größte Überdruck (über den normalen Betriebsdruck) ergibt sich für $t_s \leqq t_r$ und hat den Wert $p_a = \varrho c_0 a$, wo c_0 die stationäre Strömungsgeschwindigkeit im Rohre bezeichnet[2].

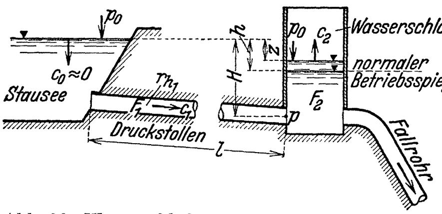


Abb. 96. Wasserschloß als Entlastungsvorrichtung für eine Druckrohrleitung.

Als Entlastungsvorrichtung dient das sogenannte Wasserschloß, das in seiner einfachsten Ausführung nichts anderes ist als ein oben offener prismatischer Behälter[3], der zwischen Druckstollen und Fallrohr eingebaut wird (Abb. 96). Bei gleichmäßigem Abfluß, d. h. im Beharrungszustand, befindet sich der Flüssigkeitsspiegel im Wasser-

---

[1] Vgl. dazu: F. Prášil: Schweiz. Bauztg. 1908 S. 271. H. Lorenz: Techn. Hydromech. 1910 S. 191. Ph. Forchheimer: Hydraulik 3. Aufl. (1930) S. 442. Th. Pöschl: Z. angew. Math. Mech. 1926 S. 494. F. Vogt: Berechnung und Konstruktion des Wasserschlosses. Stuttgart 1923.

[2] Vgl. hierzu Dubs-Bataillard: Allgemeine Theorie über die veränderliche Bewegung des Wassers in Leitungen von Allievi. Berlin: Julius Springer 1909. R. Löwy: Druckschwankungen in Druckrohrleitungen. Wien: Julius Springer 1928. F. Bundschu: Druckrohrleitungen. Berlin: Julius Springer 1929.

[3] Über andere Ausführungen vgl. Forchheimer: Hydraulik 3. Aufl. (1930) S. 447ff., wo auch weitere Literaturangaben zu finden sind.

schloß in Ruhe, und zwar liegt er in einem Abstand h unter dem Spiegel des Stausees, der wie folgt berechnet werden kann. Da der Spiegel des Stausees sehr groß angenommen ist, kann seine Höhenlage als unveränderlich gelten und die Spiegelgeschwindigkeit $c_0 \approx 0$ gesetzt werden. Bezogen auf einen Punkt des Stauseespiegels und den Endquerschnitt des Druckstollens lautet somit die erweiterte Bernoullische Gleichung für den stationären Zustand mit den Bezeichnungen der Abb. 96

$$\frac{p_0}{\gamma} + H = \frac{c_1^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + h_v$$

oder

$$\frac{p - p_0}{\gamma} = H - \frac{c_1^2}{2g} - h_v = H - h\,,$$

woraus folgt:

$$h = \frac{c_1^2}{2g} + h_v\,.$$

Die Verlusthöhe h_v setzt sich zusammen aus dem Eintrittsverlust am Eintritt in den Druckstollen und dem Reibungsverlust in ihm. Bei Ausbildung eines trichterförmigen, gut abgerundeten Einlaufs in den Stollen kann ersterer näherungsweise gleich Null gesetzt werden, während die Verlusthöhe aus Reibung bekanntermaßen

$$h_v = \frac{\psi_1 c_1^2}{2g\,r_{h_1}}\,l$$

ist, wobei r_{h1} den hydraulischen Radius und l die Länge des Druckstollens bezeichnen (Bd. I S. 90). Man erhält also für die Differenz der Spiegel im Beharrungszustande

$$h = \frac{c_1^2}{2g}\left(1 + \frac{\psi_1 l}{r_{h_1}}\right). \tag{112}$$

Wird nun infolge Schließens der Turbine der gesamte Abfluß (oder ein Teil desselben) plötzlich gesperrt, so steigt das Wasser im Wasserschloß zunächst an. Der Spiegel gelangt aber in der neuen Gleichgewichtslage nicht gleich zur Ruhe, sondern schwingt über diese hinaus, bis unter dem Einfluß der Reibung allmählich der Ausgleich bewirkt wird. Zur Bestimmung dieser Bewegung soll hier nur der einfachste Fall zugrunde gelegt werden, nämlich der, daß der gesamte Abfluß plötzlich gehemmt wird, so daß aus dem Wasserschloß überhaupt kein Wasser mehr abfließt. Da nun die Flüssigkeit im Druckstollen im Augenblick des Absperrens noch die Geschwindigkeit c_1 besitzt, so tritt eine nichtstationäre Strömung ein, für welche wieder die erweiterte Bernoullische Gleichung nach Bd. I S. 71 angeschrieben werden kann.

Es bezeichnen z den (veränderlichen) Abstand des Wasserschloßspiegels von dem als unveränderlich angenommenen Spiegel des Stausees und c_2 die Geschwindigkeit im Wasserschloß. Dann lautet die erweiterte Bernoullische Gleichung, bezogen auf die beiden Spiegel:

$$z = \frac{c_2^2}{2g} + \sum h_v + \frac{1}{g}\int_{s_0}^{s_2} \alpha' \frac{\partial c}{\partial t}\,ds\,. \tag{113}$$

Darin ist (unter Vernachlässigung des Eintrittswiderstandes, siehe oben)

$$\sum h_v = \frac{\psi_1 c_1^2}{2 g r_{h_1}} l + \frac{\psi_2 c_2^2}{2 g r_{h_2}} (H - z), \tag{114}$$

wenn r_{h_2} den hydraulischen Radius des Wasserschlosses bezeichnet. Für die weitere Rechnung sei vorausgesetzt, daß der Querschnitt F_2 des letzteren um ein Vielfaches größer ist als der Stollenquerschnitt F_1, demnach c_2^2 sehr viel kleiner als c_1^2. Da außerdem $H - z$ praktisch immer viel kleiner als l ist[1], so kann der zweite Summand in (114) gegenüber dem ersten vernachlässigt werden, womit $\sum h_v \approx \frac{\psi_1 c_1^2 l}{2 g r_{h_1}}$ oder, wegen $c_1 = c_2 \frac{F_2}{F_1}$,

$$\sum h_v \approx \frac{\psi_1 c_2^2 F_2^2}{2 g r_{h_1} F_1^2} l \tag{114a}$$

wird. Weiter ist (vgl. S. 98)

$$\frac{1}{g}\int_{s_0}^{s_2} \alpha' \frac{\partial c}{\partial t} ds = \frac{1}{g}\int_{(l)} \alpha_1' \frac{\partial c_1}{\partial t} ds + \frac{1}{g}\int_{(H-z)} \alpha_2' \frac{\partial c_2}{\partial t} ds$$

$$= \frac{1}{g}\frac{d c_2}{dt}\left\{\frac{F_2}{F_1}\alpha_1' l + \alpha_2'(H - z)\right\} \approx \frac{\alpha_1'}{g}\frac{d c_2}{dt}\frac{F_2}{F_1} l. \tag{115}$$

Mit den Ausdrücken (114a) und (115) geht Gl. (113), wenn noch $c_2 = -\frac{dz}{dt}$ gesetzt wird, nach einfacher Umformung über in die Differentialgleichung der Schwingung

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \left(\frac{F_1}{2 \alpha_1' l F_2} + \frac{\psi_1 F_2}{2 r_{h_1} F_1 \alpha_1'}\right) + \frac{g F_1}{\alpha_1' l F_2} z = 0.$$

Führt man hier zur Abkürzung die Bezeichnungen

$$\frac{F_1}{2 \alpha_1' l F_2} + \frac{\psi_1 F_2}{2 r_{h_1} F_1 \alpha_1'} = p; \qquad \frac{g F_1}{\alpha_1' l F_2} = q$$

ein, so wird in formaler Übereinstimmung mit Gl. (109)

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - p \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + q z = 0. \tag{116}$$

Das positive Vorzeichen von ψ_1 gilt dabei für die in Abb. 96 angegebene Richtung von c_2; bei der rückläufigen Bewegung ist es umzukehren. Als erstes Integral folgt gemäß (110)

$$\frac{dz}{dt} = \pm \sqrt{C e^{2pz} + \frac{q}{2p^2}(2pz + 1)}. \tag{117}$$

Im Beharrungszustande möge der Turbine die sekundliche Wassermenge Q zugeführt werden. Dann herrscht im Stollen die Geschwindigkeit $c_1 = \frac{Q}{F_1}$, während im Wasserschloß der Spiegel in Ruhe ist ($c_2 = 0$).

[1] Beispielsweise ist $l \gtreqqless 1000$ [m], während H nur wenige Meter beträgt.

Wird nun der Abfluß aus dem Wasserschloß plötzlich abgesperrt, so erhält der Wasserschloßspiegel aus Gründen der Kontinuität die Anfangsgeschwindigkeit $c_{2_0} = \frac{Q}{F_2}$, da jetzt das aus dem Stollen zuströmende Wasser im Schloß ansteigen muß. Dagegen ist die Anfangsbeschleunigung des Spiegels $-\frac{d^2 z}{d t^2} = 0$, weshalb aus Gl. (116) für $z = h$ folgt:

$$p\left(\frac{dz}{dt}\right)^2_{z=h} = q\,h,$$

womit (117) liefert:

$$C = -\frac{q}{2p^2}\,e^{-2ph}.$$

Nach Einführung dieses Wertes in Gl. (117) folgt schließlich

$$\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{\frac{q}{2p^2}\left(2pz + 1 - e^{2p(z-h)}\right)}. \tag{118}$$

Für die Dimensionierung des Wasserschlosses ist nun die Kenntnis der größten Erhebung des Wasserspiegels im Schlosse über denjenigen des Stausees besonders wichtig. Diese maximale Erhebung sei mit h_1 bezeichnet. Für $-z = h_1$ muß dann $\frac{dz}{dt} = 0$ sein, womit aus Gl. (118) folgt[1]:

$$-2ph_1 + 1 = e^{-2p(h_1+h)}$$

oder, etwas anders angeordnet:

$$e^{-2p(h_1+h)} + 2p(h_1 + h) = 2ph + 1. \tag{119}$$

Bei gegebenen Abmessungen ist h nach (112) für den Beharrungszustand wegen $c_1 = \frac{Q}{F_1}$ bekannt; demnach kann aus (119) die größte Erhebung h_1 über den Stauseespiegel berechnet werden. Aus dieser höchsten Lage schwingt der Wasserspiegel unter den Spiegel des Stausees zurück, bis er schließlich nach einiger Zeit auf gleicher Höhe mit letzterem zur Ruhe gelangt (kommunizierende Gefäße).

Beim plötzlichen Öffnen der Turbine (nach vorheriger Ruhe) sinkt der Wasserschloßspiegel zunächst unter die dem Beharrungszustand entsprechende Normallage und spielt erst allmählich in diese ein. Dabei ist die Feststellung wichtig, ob die maximale Absenkung nicht etwa bis zu den Öffnungen des Druckstollens bzw. des Fallrohres reicht, da andernfalls Luft in die Rohrleitung eindringen könnte.

Zur Untersuchung dieses Vorganges gehe man wieder von Gl. (113) aus, die auch hier gültig bleibt, nur ist jetzt die Geschwindigkeit c_2 abwärts gerichtet. Darin ist

$$\sum h_v \approx \frac{\psi_1 c_1^2 l}{2 g r_{h_1}} \tag{120}$$

[1] Forchheimer, Ph.: Z. VDI 1912 S. 1292.

und
$$\frac{1}{g}\int_{s_0}^{s_2} \alpha' \frac{\partial c}{\partial t}\, ds \approx \frac{\alpha_1'}{g} \frac{d c_1}{d t}\, l \tag{121}$$

zu setzen (vgl. die entsprechende Bemerkung auf S. 107).

Bezeichnet nun Q die konstante, von der Turbine verbrauchte Wassermenge, so ist, da vor dem Eintritt des Beharrungszustandes sowohl der Druckstollen als auch das Wasserschloß einen Beitrag zu Q liefern,
$$Q = F_1 c_1 + F_2 c_2 .$$

Wegen
$$c_2 = \frac{dz}{dt} \tag{122}$$

folgt daraus:
$$c_1 = \frac{Q}{F_1} - \frac{F_2}{F_1}\frac{dz}{dt}, \tag{123}$$

$$\frac{dc_1}{dt} = -\frac{F_2}{F_1}\frac{d^2 z}{dt^2}. \tag{123a}$$

Führt man die Ausdrücke (120) bis (123a) in Gl. (113) ein, so lautet diese
$$2gz = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{\psi_1 l}{r_{h_1}}\left(\frac{Q}{F_1} - \frac{F_2}{F_1}\frac{dz}{dt}\right)^2 - 2\alpha_1' l \frac{F_2}{F_1}\frac{d^2 z}{dt^2}$$

oder nach einfacher Umformung:
$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \left\{\frac{F_1}{2\alpha_1' l F_2} + \frac{\psi_1 F_2}{2\alpha_1' r_{h_1} F_1}\right\} + \frac{dz}{dt}\frac{\psi_1 Q}{\alpha_1' r_{h_1} F_1}$$
$$+ \frac{F_1}{\alpha_1' l F_2} z - \frac{\psi_1 Q^2}{2\alpha_1' r_{h_1} F_1 F_2} = 0 . \tag{124}$$

Zu Beginn der Bewegung herrscht im Druckstollen augenblicklich die Geschwindigkeit Null, da die beiden Spiegel noch in gleicher Höhe liegen. Im ersten Augenblick muß demnach das Wasserschloß alles von der Turbine gebrauchte Wasser liefern, weshalb die Anfangsgeschwindigkeit im Wasserschloß $c_2\Big]_{t=0} = \frac{dz}{dt}\Big]_{t=0} = \frac{Q}{F_2}$ beträgt. Die größte Absenkung des Spiegels $z = z_{\max}$ ist erreicht, wenn $\frac{dz}{dt} = 0$ geworden ist.

Mit den Abkürzungen
$$-\left\{\frac{F_1}{2\alpha_1' l F_2} + \frac{\psi_1 F_2}{2\alpha_1' r_{h_1} F_1}\right\} = u; \qquad \frac{\psi_1 Q}{\alpha_1' r_{h_1} F_1} = v;$$
$$\frac{F_1}{\alpha_1' l F_2} = w; \qquad -\frac{\psi_1 Q^2}{2\alpha_1' r_{h_1} F_1 F_2} = k,$$

und der Substitution
$$\frac{dz}{dt} = x; \qquad \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt}\frac{dx}{dz} = x\frac{dx}{dz}$$

geht (124) über in eine nichtlineare Differentialgleichung 1. Ordnung von der Form

$$x^2 u + x v + x \frac{dx}{dz} + w z + k = 0\,,$$

deren Lösung sich auf graphischem Wege durchführen läßt. Näherungsweise gilt nach *Forchheimer*[1] für die größte Absenkung mit $h_1 = \frac{\psi_1 Q^2 l}{2 g r_{h_1} F_1^2}$

$$z_{\max} = 0{,}178\, h_1 + \sqrt{0{,}178^2 h_1^2 + \frac{l Q^2}{g F_1 F_2}}\,.$$

III. Strömung in offenen Gerinnen.

1. Einleitung.

Die Bewegung einer Flüssigkeit in offenen Gerinnen (Kanälen, Flüssen usw.) hat mancherlei gemeinsame Kennzeichen mit der im vorigen Abschnitt besprochenen Strömung in geschlossenen Leitungen. Während jedoch bei vollgefüllten Rohren die Flüssigkeit allseitig von festen Wandungen umgeben ist, hat man es bei offenen Gerinnen außer mit festen Wänden auch noch mit einer „*freien Oberfläche*" zu tun. In der überwiegenden Mehrzahl der praktisch wichtigen Fälle bildet diese freie Oberfläche eine Trennungsfläche zwischen *Wasser* (bzw. einer anderen tropfbaren Flüssigkeit) und *Luft*, weshalb an ihr überall der als konstant anzusehende atmosphärische Luftdruck herrscht. Eine weitere Schwierigkeit entsteht bei *natürlichen Gerinnen* (Flüssen und Bächen), wenn der Abflußvorgang von einer bestimmten Geschwindigkeit ab mit einer *Geschiebebewegung* verbunden ist, so daß auch nicht mehr mit vollkommen *festen* Gerinnewandungen gerechnet werden kann, da diese einer ständigen Umformung unterworfen sind. Es liegt auf der Hand, daß bei derartigen Erscheinungen die Schwierigkeiten, welche sich schon bei der Rohrströmung hinsichtlich einer genaueren Definition der „*Wandrauhigkeit*" ergaben, noch wesentlich gesteigert werden, ja, daß dann vollkommen neue Vorstellungen Platz greifen müssen, um die wirklichen Vorgänge einigermaßen richtig zu erfassen. Darüber wird später noch einiges zu sagen sein.

Die Bewegung in offenen Gerinnen kann *stationär* sein, d. h. mit der Zeit unveränderlich, sie kann aber auch *nichtstationär* sein, z. B. beim Hochwasserablauf, beim Öffnen und Schließen gewisser Absperrvorrichtungen (Schieber, Schützen) usw. Die stationäre Strömung ist dadurch gekennzeichnet, daß durch jeden Querschnitt des Gerinnes zu jeder Zeit dieselbe sekundliche Wassermenge Q fließt. Eine solche Bewegung ist *gleichförmig*, wenn die Querschnitte überall gleich groß sind (Abb. 97); sie ist *beschleunigt*, wenn die Querschnitte in der Strömungsrichtung kleiner werden (Senkung Abb. 98) oder *verzögert*, wenn sie größer werden (Stau Abb. 99).

---

[1] Forchheimer, Ph.: Z. VDI Bd. 57 (1913) S. 545.

Wie bei der Bewegung in geschlossenen Leitungen hat man auch hier zu unterscheiden zwischen laminarer und turbulenter Strömung. (Über die besonderen Kennzeichen beider Strömungsarten vgl. Bd. I S. 72 und 79). Im vorliegenden Falle spielt jedoch fast ausschließlich die turbulente Fließart eine Rolle, da bei den praktisch in Frage kommenden Gerinneabmessungen und Geschwindigkeiten die kritische Reynoldssche Zahl in der Regel bei weitem überschritten wird. Man

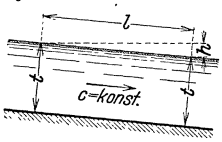


Abb. 97. Gleichförmige Strömung, $c = \text{const.}$

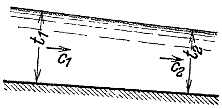


Abb. 98. Beschleunigte Strömung, $c_2 > c_1$.

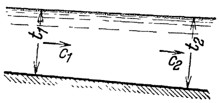


Abb. 99. Verzögerte Strömung, $c_2 < c_1$.

bezieht letztere hier gewöhnlich auf den hydraulischen Radius $r_h = \frac{F}{u}$ (F = wassererfüllter Querschnitt, u = benetzter Umfang, Abb. 100), stellt sie also in der Form

$$\mathfrak{R}_h = \frac{c\, r_h}{\nu}$$

dar, wo $c = \frac{Q}{F}$ wieder die mittlere Geschwindigkeit und ν die kinematische Zähigkeit bezeichnen. Wie bei Rohren beträgt die kritische Reynoldssche Zahl ungefähr $\mathfrak{R}_h = 500$ bis 600.

Bei den offenen Gerinnen unterscheidet man zwischen künstlichen und natürlichen Gerinnen. Zu den ersteren gehören die Kanäle und Gräben mit mehr oder weniger regelmäßigen Querschnitten (Rechteck, Trapez, Parabel usw.), zu den letzteren die Flüsse und Bäche mit häufig stark veränderlichen Querschnitten.

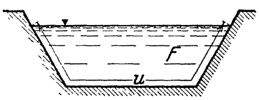


Abb. 100. Hydraulischer Radius gleich Fläche F durch benetzter Umfang u.

Die Bewegung des Wassers in einem offenen Gerinne ist eine Folge des vorhandenen Gefälles, und zwar hat man zu unterscheiden zwischen dem Spiegelgefälle und dem Sohlengefälle (vgl. dazu auch S. 119). Bei gleichförmiger Bewegung und unter der Voraussetzung eines prismatischen Bettes ist das Spiegelgefälle gleich dem Sohlengefälle und hat die Größe

$$J = \frac{h}{l}, \tag{125}$$

wenn h den Höhenunterschied zweier Punkte des Spiegels im Abstand l — gemessen in der Bewegungsrichtung — bezeichnet (Abb. 97). Ein Druckgefälle ist bei gleichförmiger Bewegung nicht vorhanden, da erstens an der Oberfläche überall der atmosphärische Luftdruck herrscht und zweitens der Druck in je zwei um die Länge l voneinander entfernten, zur Strömungsrichtung senkrechten Querschnitten als statisch verteilt angenommen werden darf, so daß bei gleicher Tiefe t ein Druckunterschied sich nicht einstellen kann.

Die höher liegenden Flüssigkeitsteilchen (Oberlauf) besitzen eine gewisse potentielle Energie, die beim Abwärtsfließen in Bewegungsenergie umgesetzt wird und zur Überwindung der Bewegungswiderstände (innere Reibung und Wandreibung) dient. Der Bewegungszustand hängt also — ähnlich wie bei der Rohrströmung — wesentlich ab von der Größe des vorhandenen Gefälles und von den Bewegungswiderständen.

2. Gleichförmige Bewegung in Gerinnen mit fester Sohle.

a) Widerstandsgesetz.

Setzt man — was hier zunächst geschehen soll — prismatische Gerinne mit festen Wandungen voraus, so führen ganz ähnliche Überlegungen, wie sie früher bei den Rohrströmungen angestellt wurden, zur Darstellung des Widerstandsgesetzes der gleichförmigen Bewegung. Die dort gewonnenen Erkenntnisse können also zum großen Teil unmittelbar übernommen werden.

Im Falle eines rechteckigen Gerinnes, dessen Breite groß gegenüber seiner Tiefe ist, läßt sich die Untersuchung der laminaren Bewegung in ganz ähnlicher Weise durchführen wie beim vollgefüllten Kreisrohr (vgl. Bd. I S. 73), wenn man annimmt, daß alle Punkte eines Querschnitts im gleichen Abstand x von der freien Oberfläche die gleiche Geschwindigkeit v haben (Abb. 101). Man erhält für diese[1]

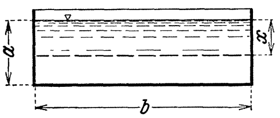


Abb. 101.

$$v = \frac{gJ}{2\nu}(a^2 - x^2), \tag{126}$$

woraus durch Integration für die sekundliche Durchflußmenge ein ganz analoger Ausdruck zum Poiseuilleschen Gesetz der laminaren Rohrströmung entsteht, nämlich

$$Q = b\int_{x=0}^{x=a} v \cdot dx = \frac{J g a^3 b}{3\nu}.$$

Wegen der geringen praktischen Bedeutung der laminaren Bewegung in offenen Gerinnen soll in der Folge nur noch von turbulenten Strömungen die Rede sein.

Die Widerstandsziffer ψ der turbulenten Strömung wird definiert durch den Ausdruck

$$J = \psi \frac{c^2}{2 g r_h}, \tag{127}$$

der aus Gl. (62) entsteht, wenn man dort $d = 4 r_h$ und $\lambda = 4 \psi$ setzt (vgl. auch Bd. I S. 90). Als Gefälle J ist hier der Wert aus Gl. (125) einzuführen. Es kommt also jetzt wieder darauf an, die Zahl ψ in Abhängigkeit von den die Strömung bestimmenden Größen darzustellen.

Eine besondere Beachtung verdient dabei die Frage der Wandrauhigkeit, die bei offenen Gerinnen — besonders bei Flüssen — noch

[1] Vgl. R. v. Mises: Elemente der technischen Hydromechanik, S. 87. Leipzig u. Berlin 1914.

schwieriger zu entscheiden ist als dieses bei den physikalisch besser definierbaren Rohrmaterialien ohnehin schon der Fall war (vgl. S. 56). Grundsätzlich ist die Widerstandsziffer bei den praktisch hier allein in Frage kommenden „hydraulisch rauhen“ Gerinnen eine Funktion der Reynoldsschen Zahl und der relativen Rauhigkeit, wobei indessen noch nicht ohne weiteres festliegt, in welcher Form letztere in diese Funktion eingeht. Aus der Erfahrung und der Analogie bei der Rohrströmung ist bekannt, daß bei großen Reynoldsschen Zahlen ψ nicht oder doch nur sehr wenig von der Reynoldsschen Zahl abhängt (quadratisches Widerstandsgesetz), so daß in solchen Fällen lediglich die Wandrauhigkeit und die Querschnittsform von Einfluß auf ψ sind. Man stellt diese Abhängigkeit gewöhnlich in der Form dar:

$$\psi \approx \psi\left(\frac{\varepsilon}{r_h}\right), \tag{128}$$

wo ε ein (absolutes) Rauhigkeitsmaß bezeichnet, das im allgemeinen nicht einfach der Mittelwert der Wandunebenheiten sein, sondern noch von deren gegenseitigem Abstand im Verhältnis zu ihrer Höhe und von ihrer „Anstellung“ gegen die Strömung (d. h. von der Form der Unebenheiten) abhängen wird. Daraus erkennt man schon die großen Schwierigkeiten, die sich einer genaueren Definition der relativen Rauhigkeit entgegenstellen. Auch sei noch darauf hingewiesen, daß durch den hydraulischen Radius die Querschnittsform nicht eindeutig gekennzeichnet ist, da einem bestimmten hydraulischen Radius verschiedene Querschnitte entsprechen können[1]. Zu jeder anderen (nicht ähnlichen) Querschnittsform gehört deshalb eine andere Funktion $\psi\left(\frac{\varepsilon}{r_h}\right)$, da zunächst nicht angenommen werden kann, daß alle Elemente des benetzten Umfanges — unabhängig von der Form des Querschnitts — in gleichem Maße an der Übertragung der Wandschubspannung beteiligt sind. Es müßte also auf der rechten Seite von (128) besser noch ein Formfaktor hinzugefügt werden. Bei großen Reynoldsschen Zahlen scheint die Abhängigkeit von der Profilform indessen nur von untergeordneter Bedeutung zu sein, so daß hier weiter keine Rücksicht darauf genommen werden soll[2].

Besonders schwierig ist die Feststellung der maßgebenden relativen Rauhigkeit bei natürlichen Gerinnen, da in diesem Falle nicht allein die eigentlichen Wandunebenheiten den Ausdruck $\frac{\varepsilon}{r_h}$ bestimmen, sondern es müssen in ihm auch alle die Einflüsse zusammengefaßt werden, welche durch die Bettunregelmäßigkeiten, Profiländerungen usw. be-

---

[1] So hat z. B. ein Rechteck von der Breite 5 und der Höhe 1 dasselbe r_h wie ein Rechteck von der Breite 2 und der Höhe 2,5, obwohl die Querschnittsformen vollkommen verschieden sind.

[2] Vgl. R. v. Mises: a. a. O. S. 89 bis 92 und im Gegensatz dazu H. Lang: Mitt. d. Preuß. Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau Heft 6. Berlin 1931, der die Einführung eines von der Spiegelbreite abhängigen Formfaktors vorschlägt. Eine endgültige Klärung dieser Frage dürfte erst durch systematische, den Einfluß der Profilform berücksichtigende Versuche erzielt werden.

dingt sind. Daraus geht schon die große Unsicherheit hervor, die bei der Veränderlichkeit eines natürlichen Flußbettes dem Ausdruck $\frac{\varepsilon}{r_h}$ anhaftet.

Bei praktischen Rechnungen an natürlichen und größeren künstlichen Gerinnen sind die Reynoldsschen Zahlen in der Regel so groß, daß das quadratische Widerstandsgesetz mit hinreichender Genauigkeit als erfüllt angesehen werden kann. Dann darf nach dem oben Gesagten zur Ermittlung von ψ der Ansatz (128) benutzt werden. Andernfalls tritt zu der darin enthaltenen Abhängigkeit noch eine solche von der Reynoldsschen Zahl.

Aus Gl. (127) folgt durch Auflösung nach c die bekannte de Chézysche Gleichung für die Geschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{2g}{\psi}}\,\sqrt{J\,r_h}\,, \tag{129}$$

wobei aber — entgegen früheren Anschauungen — der erste Faktor keine Konstante und auch keine reine Zahl ist, da er ja die Dimension von $\sqrt{g}$, d. h. $\left[\frac{\mathrm{cm}^{1/2}}{\mathrm{sec}}\right]$ hat.

Über die Widerstandsziffer ψ ist oben bereits das Nötigste gesagt worden. Grundsätzlich dürfte ihre Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl wohl ähnlich sein wie dieses aus Abb. 52 für die λ-Werte der Rohrströmung hervorgeht. Jedoch liegen zur Zeit hinreichende Versuchsergebnisse darüber noch nicht vor, um eine genauere Gesetzmäßigkeit feststellen zu können. Aus der Analogie mit der Rohrströmung darf indessen geschlossen werden, daß das Gebiet, in dem ψ unabhängig von der Reynoldsschen Zahl $\frac{c\,r_h}{\nu}$ ist, um so eher erreicht wird, je größer die relative Rauhigkeit $\frac{\varepsilon}{r_h}$ ist.

Die in der Literatur vorhandenen Geschwindigkeitsformeln genügen vielfach den hier aufgestellten Forderungen über die Abhängigkeit der Widerstandszahl ψ nicht (besonders sind viele von ihnen nicht dimensionsrichtig), womit nicht gesagt sein soll, daß sie nicht für bestimmte Bereiche und unter bestimmten sonstigen Voraussetzungen numerisch richtige Ergebnisse liefern. Von einer solchen Formel muß indessen gefordert werden, daß sie auch mit den Grundanschauungen der Mechanik (Ähnlichkeitsgesetze) nicht in Widerspruch steht.

Die Abhängigkeit $\psi = \psi\left(\mathfrak{R}_h, \frac{\varepsilon}{r_h}\right)$ kommt besonders zum Ausdruck in der von R. v. Mises[1] aufgestellten Formel für solche Strömungen in künstlichen Gerinnen, die der Strömung in Kreisrohren nahe verwandt sind,

$$\psi = 0{,}0024 + \sqrt{\frac{k'}{2\,r_h}} + \frac{0{,}3}{\sqrt{2\,\mathfrak{R}_h}}\,, \tag{130}$$

---

[1] v. Mises, R.: Elemente der technischen Hydromechanik, S. 95.

worin die Werte k' aus der auf S. 65 angegebenen Tabelle einzusetzen sind.

Für hydraulisch rauhe Gerinne, bei denen die Gültigkeit des quadratischen Widerstandsgesetzes angenommen werden darf, d. h. etwa bei Reynoldsschen Zahlen $\mathfrak{R}_h > 10^5$ bis 10^6 (die Grenze hängt im übrigen von der Größe der relativen Rauhigkeit ab; siehe oben), ist nach v. Mises an Stelle von (130) unter Weglassung des letzten Gliedes

$$\psi = 0{,}0024 + \sqrt{\frac{k'}{2\,r_h}}\,. \tag{130a}$$

Einen ähnlichen Aufbau besitzt die „neue Bazinsche Formel" (1897)

$$\psi = 0{,}0026\left(1 + \sqrt{\frac{k''}{r_h}}\right)^2.$$

Führt man diesen Wert in (129) ein, so folgt

$$c = \sqrt{\frac{2g}{0{,}0026}} \cdot \frac{\sqrt{J \cdot r_h}}{1 + \sqrt{\frac{k''}{r_h}}}$$

oder, wenn alle Längen in Metern ausgedrückt werden,

$$c = \frac{87}{1 + \frac{\alpha}{\sqrt{r_h}}}\sqrt{J \cdot r_h}\,. \tag{131}$$

Darin ist für die Konstante α gemäß nachstehender Tabelle zu setzen[1]:

Glatter Verputz und gehobeltes Holz	$\alpha = 0{,}06$ [$m^{1/2}$]
nicht gehobeltes Holz, Quader und Ziegel . . .	$= 0{,}16$ [$m^{1/2}$]
Bruchsteinmauerwerk	$= 0{,}46$ [$m^{1/2}$]
Pflaster, regelmäßiges Erdbett	$= 0{,}85$ [$m^{1/2}$]
Erdkanäle üblichen Zustands	$= 1{,}30$ [$m^{1/2}$]
Erdkanäle mit besonderem Reibungswiderstand	$= 1{,}75$ [$m^{1/2}$]
Flußläufe mit Geröll	$= 2{,}00$ [$m^{1/2}$]

Mit dem Ausdruck (131) nahezu übereinstimmend ist die vielfach im praktischen Gebrauch befindliche „vereinfachte Kuttersche Formel", wonach

$$c = \frac{100}{1 + \frac{\alpha'}{\sqrt{r_h}}}\sqrt{J \cdot r_h}\,.$$

Die den verschiedenen Wandmaterialien entsprechenden Konstanten α' sind von ähnlicher Größe wie die obigen Werte α und bewegen sich zwischen 0,10 für polierten Zement und 2,5 für steinige Kanäle.

Außer diesen im Aufbau nahe verwandten Formeln sind noch sogenannte Potenzformeln

$$c = k\,r_h^n\,J^m$$

im Gebrauch, wo k einen Rauhigkeitswert, n und m verschiedene

[1] Nach Forchheimer: Hydraulik 1930 2. Aufl. S. 148.

Zahlenwerte darstellen. So ist z. B. nach Manning[1]

$$c = k\, r_h^{2/3} J^{1/2},$$

während Forchheimer[2] statt dessen — besonders für Werkkanäle —

$$c = k\, r_h^{0,7} J^{0,5}$$

vorgeschlagen hat. Die Dimension der Werte k ist dabei natürlich so festzulegen, daß die rechte Seite der obigen Ausdrücke von der Dimension $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}\right]$ ist. Für die Konstante k ist nach Forchheimer zu setzen:

geglätteter Beton	$k = 90$—80	$\left[\frac{\mathrm{m}^{0,3}}{\mathrm{sec}}\right]$
neuer Beton	$k = 60$	$\left[\frac{\mathrm{m}^{0,3}}{\mathrm{sec}}\right]$
angegriffener Beton	$k = 50$	$\left[\frac{\mathrm{m}^{0,3}}{\mathrm{sec}}\right]$
künstlich hergestellte Erdgräben	$k = 42$—30	$\left[\frac{\mathrm{m}^{0,3}}{\mathrm{sec}}\right]$
natürliche Flüsse	$k = 30$—24	$\left[\frac{\mathrm{m}^{0,3}}{\mathrm{sec}}\right]$

Auf die Nennung weiterer Formeln wird hier verzichtet; der Leser, der sich darüber genau unterrichten will, muß auf die einschlägige Literatur verwiesen werden.

Offen ist vorläufig noch die Frage, wie weit das neue Kármán-Prandtlsche Widerstandsgesetz (71a) bzw. (71b) (vgl. S. 60), das zunächst nur für geschlossene Leitungen abgeleitet wurde, auch auf die Strömung in offenen Gerinnen anwendbar ist. Es darf vielleicht vermutet werden, daß dieses Gesetz für große Reynoldssche Zahlen auch hier gilt, wenigstens dann, wenn es sich um nicht allzu unregelmäßige ähnliche Querschnitte handelt. Die in (71b) auftretenden Konstanten A und B müßten natürlich durch Versuche für verschiedene Profilformen und verschiedene Rauhigkeitsarten ermittelt werden.

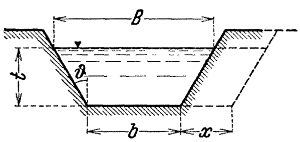


Abb. 102.

Beispiel[3]: Ein mit Bruchsteinmauerwerk ausgekleideter, symmetrischer Kanal führt Q [cbm] Wasser pro Sekunde. Seine Sohle soll unter Beibehaltung der seitlichen Wandneigung und der Fülltiefe t derart verbreitert werden, daß er bei gleichem Gefälle Q' [cbm] führen kann. Wie groß muß die Verbreiterung gemacht werden? (Abb. 102.)

Für die sekundliche Durchflußmenge Q gilt zunächst, wenn man die mittlere Geschwindigkeit c aus Gl. (131) einführt,

$$Q = c F = \frac{87\, F \sqrt{J\, r_h}}{1 + \dfrac{\alpha}{\sqrt{r_h}}},$$

[1] Manning, R.: Trans. Inst. Civ. Eng. Ireland Bd. 12 (1890) S. 68.
[2] a. a. O. S. 147.
[3] Wittenbauer: Aufg. aus der Techn. Mech. Bd. 3 S. 46. Berlin 1911.

woraus für das Gefälle J folgt

$$J = \frac{Q^2}{87^2 F^2 r_h}\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{r_h}}\right)^2.$$

Nach der Verbreiterung lautet die entsprechende Gleichung

$$J = \frac{Q'^2}{87^2 F'^2 r_h'}\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{r_h'}}\right)^2,$$

und durch Gleichsetzen erhält man daraus

$$\frac{Q^2}{F^2 r_h}\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{r_h}}\right)^2 = \frac{Q'^2}{F'^2 r_h'}\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{r_h'}}\right)^2. \tag{132}$$

Nun ist

$$F' = F + x\,t = \frac{b+B}{2}\,t + x\,t; \quad r_h = \frac{F}{u} = \frac{F}{2\,\frac{t}{\cos\vartheta} + b};$$

$$r_h' = \frac{F'}{u+x} = \frac{F + x\,t}{u+x},$$

womit Gl. (132) übergeht in

$$\frac{Q}{Q'}\,\frac{F + x\,t}{F} = \frac{r_h}{r_h'}\,\frac{\sqrt{r_h'} + \alpha}{\sqrt{r_h} + \alpha}$$

oder in

$$\frac{Q}{Q'}\,\frac{(F + x\,t)^2}{u+x}\cdot\frac{u}{F^2} = \frac{\sqrt{r_h'} + \alpha}{\sqrt{r_h} + \alpha}. \tag{133}$$

Setzt man hier

$$\frac{\sqrt{r_h'} + \alpha}{\sqrt{r_h} + \alpha} = \varkappa,$$

so kann Gl. (133) nach einfacher Umformung wie folgt geschrieben werden:

$$x^2 + x\left(\frac{2F}{t} - \frac{\varkappa F^2}{u\,t^2}\cdot\frac{Q'}{Q}\right) = \frac{F^2}{t^2}\left(\varkappa\,\frac{Q'}{Q} - 1\right).$$

Die Auflösung erfolgt durch Probieren, indem man zunächst $\varkappa = 1$ wählt, das zugehörige x aus vorstehender Gleichung berechnet, darauf das diesem x entsprechende $r_h' = \frac{F + x\,t}{u+x}$ und damit den verbesserten Wert $\varkappa$ ermittelt usw., bis x richtig gefunden ist. Der Wert α für Bruchsteinmauerwerk ist aus der Tabelle auf S. 115 zu entnehmen; die Abmessungen t, b, B sind als gegeben anzusehen.

b) Geschwindigkeitsverteilung.

Wie aus Gl. (126) hervorgeht, ist bei der laminaren Strömung die Geschwindigkeit längs einer Lotrechten parabolisch über den Querschnitt verteilt, und zwar liegt das Maximum im Spiegel ($x = 0$), während an der Sohle $v = 0$ wird.

Wesentlich schwieriger ist es, ein theoretisch einigermaßen begründetes Gesetz für die Geschwindigkeitsverteilung bei turbulenter Bewegung anzugeben, zumal hier nicht mehr die Symmetrieeigenschaften vorhanden sind, welche die Kreisrohrströmung auszeichnen. Es liegt auf der Hand, daß die Verteilung um so unbestimmter ausfällt, je unregelmäßiger der Querschnitt ist. Deshalb soll hier davon abgesehen werden, die verschiedentlich für rechteckige Gerinne aufgestellten Verteilungsformeln anzuführen, zumal sie durchweg von bestimmten, schwer nachprüfbaren Voraussetzungen ausgehen, die mit den neueren, bei der Rohrströmung gewonnenen Erkenntnissen (S. 68ff.) wenig gemein haben. Das Geschwindigkeitsprofil für eine Lotrechte hat etwa die nebenstehende Gestalt (Abb. 103). Die maximale Geschwindigkeit liegt in der Regel nicht genau im Wasserspiegel, wie man eigentlich annehmen sollte (wenigstens bei hinreichend breiten Gerinnen), sondern etwas unterhalb desselben; bei unsymmetrischem Querschnitt auch nicht in der Gerinnemitte, sondern mehr oder weniger seitlich verschoben. An der Sohle ist, wie genaue Laboratoriumsmessungen zeigen, die Geschwindigkeit gleich Null. Allerdings erfolgt der Abfall in einer sehr dünnen Randschicht so schnell, daß bei praktischen Messungen gewöhnlich eine bestimmte Sohlengeschwindigkeit angenommen wird. Auch von der Mitte nach den seitlichen Wandungen hin nimmt die Geschwindigkeit ab und erreicht am Rande wieder (theoretisch, siehe oben) den Wert Null.

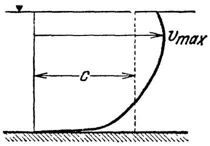


Abb. 103. Geschwindigkeitsverteilung bei turbulenter Gerinneströmung.

Bei Flußläufen ist wegen der bestehenden Unregelmäßigkeiten eine rechnerische Ermittlung der Geschwindigkeitsverteilung so gut wie ausgeschlossen; man ist hier vielmehr auf Messungen angewiesen. Zu diesem Zwecke werden u. a. sogenannte **hydrometrische Flügel** (Abb. 104) verwendet[1], bei denen mittels eines Flügelrades (ähnlich einem Propeller) durch Betätigung eines Zählwerkes oder dgl. die Wassergeschwindigkeit bestimmt wird. Bei Laboratoriumsversuchen wird mit Vorteil das **Staugerät** nach **Prandtl** benützt, dessen Wirkungsweise bereits im I. Bande (S. 51) besprochen wurde. Hat man auf diese Weise die Wassergeschwindigkeit für eine Anzahl gesetzmäßig festgelegter Punkte des Querschnitts ermittelt, so kann man alle Punkte gleicher Geschwindigkeit miteinander verbinden und erhält so eine Anzahl von Kurven, sog. **Isotachen**, welche ein anschauliches Bild über die Geschwindigkeitsverteilung liefern (Abb. 105).

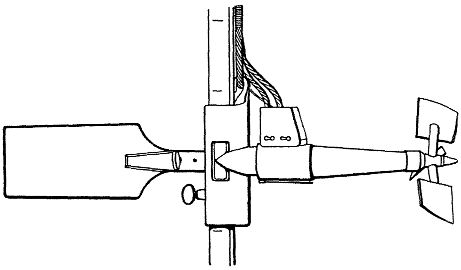


Abb. 104. Hydrometrischer Flügel.

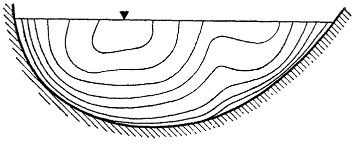


Abb. 105. Isotachen.

[1] Nach ihrem ersten Konstrukteur, dem Wasserbauinspektor Woltmann (1790), werden diese Flügel häufig auch als Woltmann-Flügel bezeichnet. Die obige Abbildung stellt eine Ausführung dar, wie sie von der Firma A. Ott, Kempten, hergestellt wird.

Besonders leicht läßt sich die Oberflächengeschwindigkeit durch Schwimmer bestimmen. Das Verhältnis der mittleren Geschwindigkeit c zur größten Oberflächengeschwindigkeit v_0 beträgt bei Flüssen ungefähr $\frac{c}{v_0} = 0{,}7$ bis $0{,}8$ und nimmt mit wachsender Rauhigkeit ab.

3. Strömen und Schießen.

Für einen Punkt der Spiegelfläche eines offenen Gerinnes von der Tiefe t und der mittleren Geschwindigkeit c ist die „hydraulische Höhe" oder „Strömungsenergie pro Gewichtseinheit" (Bd. I S. 49 und 69), bezogen auf eine um die Höhe z unter der Sohle liegende Horizontale, definiert durch den Ausdruck

$$h = \frac{c^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + t + z\,.$$

Da am Spiegel überall der konstante atmosphärische Luftdruck herrscht, so spielt p_0 beim Vergleich verschiedener hydraulischer Höhen keine Rolle, weshalb man mit $h' = h - \frac{p_0}{\gamma}$ einfacher schreiben kann

$$h' = \frac{c^2}{2g} + t + z\,.$$

Trägt man nun für verschiedene aufeinanderfolgende Querschnitte die jedem dieser Querschnitte zugehörige Geschwindigkeitshöhe $\frac{c^2}{2g}$ vom Spiegel aus nach oben auf und verbindet die Endpunkte dieser Höhen, so erhält man einen Linienzug, der in der Hydraulik als „Energielinie" bezeichnet wird. Entsprechend heißt die auf die Gerinnesohle bezogene Höhe

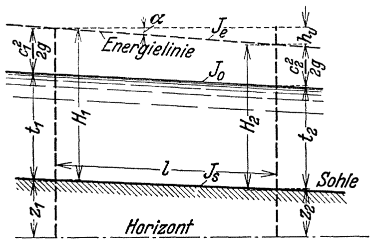


Abb. 106. Energielinie.

$$h' - z = H = \frac{c^2}{2g} + t \tag{134}$$

die „Energielinienhöhe" (Abb. 106), welche unter Beachtung der Kontinuitätsgleichung $Q = F\,c$ auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$H = \frac{Q^2}{2gF^2} + t\,. \tag{134a}$$

Das Gefälle J_e der Energielinie ist identisch mit dem Reibungsgefälle, da die Differenz der hydraulischen Höhen $z_1 + H_1 - (z_2 + H_2)$ gleich der Verlusthöhe h_v aus Reibung ist (vgl. Bd. I S. 69).

Bei gleichförmiger Bewegung stimmt das Gefälle J_e der Energielinie wegen $t_1 = t_2$ und $c_1 = c_2$ mit demjenigen des Spiegels (J_0) und der Sohle (J_s) überein, also

$$J_e = J_0 = J_s\,.$$

Da nun (Abb. 106) wegen $J_e = \sin\alpha = \frac{h_v}{l}$

$$J_e l + \frac{c_2^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g} = J_0 l,$$

so folgt

$$J_e = J_0 + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2g}.$$

Man erkennt daraus, daß bei verzögerter Bewegung ($c_2 < c_1$) das Gefälle J_e der Energielinie größer ist als J_0, bei beschleunigter Bewegung ($c_2 > c_1$) dagegen kleiner als J_0*.

Die weitere Untersuchung sei auf rechteckige Querschnitte von konstanter Breite b_0 beschränkt (wegen anderer Querschnittsformen vgl. S. 121). Dann ist $\frac{Q^2}{F^2} = \frac{Q^2}{b_0^2 t^2}$; wenn man noch zur Abkürzung

$$k = \frac{Q^2}{2g b_0^2} \tag{135}$$

setzt, geht Gl. (134a) nach einfacher Umformung über in

$$t^3 - H t^2 + k = 0.$$

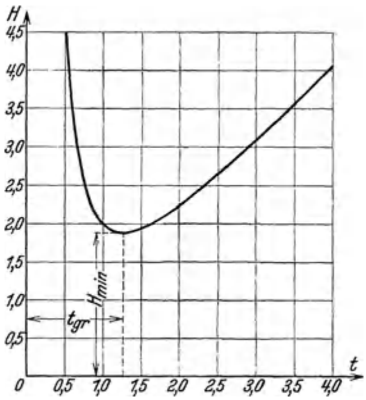


Abb. 107. Energielinienhöhe H in Abhängigkeit von der Gerinnetiefe t.

Für diese Gleichung 3. Grades existieren drei reelle Wurzeln (casus irreducibilis), von denen eine negativ ist. Den zwei positiven Wurzeln entsprechen somit bei gleicher Wassermenge Q und gleichem H zwei verschiedene Abflußtiefen t_1 und t_2 und diesen wiederum zwei verschiedene Abflußgeschwindigkeiten c_1 und c_2. Man unterscheidet danach zwischen „schießendem Abfluß“ (Wildbäche) — großes c bei kleinem t — und „strömendem Abfluß“ (Flüsse) — kleines c bei großem t**.

Trägt man $H = \frac{t^3 + k}{t^2}$ bei konstant gehaltenem k als Funktion von t auf, so ergibt sich die aus Abb. 107 ersichtliche Kurve, nach der H bei einem Grenzwert $t = t_{gr}$ ein Minimum erreicht. Um t_{gr} zu bekommen, differenziere man H nach t. Dann wird mit Rücksicht auf (134a) und wegen $\frac{Q}{b_0 t} = c$

$$\frac{dH}{dt} = 0 = 1 - \frac{Q^2}{g b_0^2 t^3} = 1 - \frac{c^2}{g t}.$$

Man erhält also für die Grenztiefe

$$t_{gr} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g b_0^2}} \tag{136}$$

* Böß, P.: VDI-Forsch.-Heft Nr. 284. Berlin 1927.

** Die Bezeichnungen „Schießen“ und „Strömen“ sind von Rehbock in die Hydraulik eingeführt, „Betrachtungen über Abfluß, Stau und Walzenbildung bei fließenden Gewässern“, Berlin 1917, während St.-Venant die entsprechenden Wasserläufe als „Wildbäche“ und „Flüsse“ bezeichnet.

und für die Grenzgeschwindigkeit (Grenze zwischen Schießen und Strömen)

$$c_{gr} = \sqrt{g\, t_{gr}} = \sqrt[3]{\frac{Q\, g}{b_0}}. \tag{137}$$

Letztere ist, wie sich später zeigen wird, gerade gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Grundwelle (S. 158). Da nun beim Schießen $c > c_{gr}$, so können sich Störungen des Wasserabflusses (etwa durch einen Aufstau usw.) bei dieser Fließart nicht stromaufwärts fortpflanzen, wohl aber beim Strömen, bei welchem $c < c_{gr}$ ist (vgl. dazu Abb. 111 und 112).

Führt man noch in Gl. (134) für c und t die Grenzwerte c_{gr} und t_{gr} ein, so folgt

$$H_{gr} = H_{\min} = \frac{c_{gr}^2}{2g} + t_{gr} = \frac{3}{2}\, t_{gr},$$

d. h. das Minimum der Energielinienhöhe beträgt 3/2 der Grenztiefe.

Gl. (137) gilt gemäß der hier gegebenen Ableitung nur für rechteckige Querschnitte. Es macht jedoch, wie Eisner[1] gezeigt hat, grundsätzlich keine Schwierigkeiten, einen entsprechenden Ausdruck auch für beliebige Querschnittsformen aufzustellen. Danach gilt allgemein

$$c_{gr} = \sqrt{\frac{g\, F}{\alpha\, \dfrac{\partial F}{\partial T_m}}},$$

wobei unter α ein die ungleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt berücksichtigender Faktor zu verstehen ist [der übrigens streng genommen auch im Nenner von Gl. (137) auftreten müßte, bei praktischen Rechnungen aber gewöhnlich gleich Eins gesetzt wird, vgl. auch Bd. I S. 70]. T_m bezeichnet den Quotienten $\frac{\text{Querschnittsfläche}}{\text{Spiegelbreite}}$, stellt also die mittlere Querschnittstiefe dar.

Eine einfache Beziehung erhält man noch für das Grenzgefälle J_{gr}. Da nämlich nach (129)

$$c = \sqrt{\frac{2g}{\psi}}\, \sqrt{J\, r_h},$$

so folgt für Gerinne, deren Breite groß gegen ihre Tiefe ist, wegen $c_{gr} = \sqrt{g\, t_{gr}} \approx \sqrt{g (r_h)_{gr}}$

$$g\, (r_h)_{gr} = \frac{2g}{\psi}\, J_{gr}\, (r_h)_{gr}$$

oder

$$J_{gr} = \frac{\psi}{2}.$$

Beim Schießen ist $J > J_{gr}$, beim Strömen $J < J_{gr}$.

[1] Eisner, F.: Offene Gerinne. Handb. d. Experimentalphysik von Wien u. Harms Bd. 4 (1932) 4. Teil S. 293.

4. Ungleichförmige Bewegung.

a) Ableitung der Hauptgleichung[1].

In einem prismatischen, offenen Gerinne denke man sich durch Einbau irgendeines Hindernisses — etwa eines Wehres oder dergleichen — den gleichförmigen Normalabfluß gestört. Dann wird diese Störung, da jetzt in den einzelnen Querschnitten des Gerinnes verschiedene Geschwindigkeiten herrschen, auch einen Einfluß auf den Verlauf des Wasserspiegels vor bzw. hinter der Störungsstelle ausüben, und es kommt nun darauf an, diese Erscheinungen etwas genauer zu verfolgen. Dabei soll vorausgesetzt werden, daß die jetzt vorhandene ungleichförmige Bewegung wieder stationär verlaufe (d. h. unabhängig von der Zeit) und im übrigen turbulent sei, wie das praktisch fast ausschließlich der Fall sein wird. Weiter wird angenommen, daß die Störung sich gleichmäßig über die ganze Breite des Gerinnes erstreckt, so daß alle Spiegelpunkte eines Querschnittes die gleiche Erhöhung oder Senkung gegenüber der ungestörten Lage erfahren.

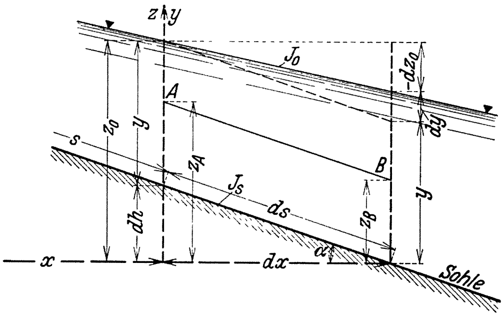


Abb. 108.

Abb. 108 zeigt ein Längenelement des Gerinnes von der Länge ds. Die Sohle ist unter dem kleinen Winkel α gegen die Horizontale geneigt, ihr Gefälle ist

$$J_s = \frac{dh}{ds} = \sin\alpha,$$

wofür man bei nicht zu starker Neigung auch schreiben kann:

$$J_s = \frac{dh}{dx}.$$

Entsprechend hat das Spiegelgefälle J_0 den Wert

$$J_0 = -\frac{dz_0}{dx} = \frac{y + dh - y - dy}{dx} = J_s - \frac{dy}{dx}, \tag{138}$$

wo y die lotrecht gemessene Gerinnetiefe bezeichnet.

Wendet man jetzt auf irgendeinen Stromfaden $A - B$ die Bernoullische Gleichung an, so erhält man mit den Bezeichnungen der Abb. 108 und unter Berücksichtigung einer Widerstandshöhe h_v

$$\frac{p_A}{\gamma} + z_A - \left(\frac{p_B}{\gamma} + z_B\right) = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2g} + h_v. \tag{139}$$

Unter der Voraussetzung, daß der Druck in jedem Querschnitt statisch verteilt ist, wird (Bd. I S. 11):

$$\frac{p_A}{\gamma} + z_A = \frac{p_0}{\gamma} + z_0; \quad \frac{p_B}{\gamma} + z_B = \frac{p_0}{\gamma} + (z_0 + dz_0). \tag{140}$$

[1] Vgl. hierzu die grundlegenden Untersuchungen von Boussinesq: Mémoires présentés par divers savants Bd. 23. Paris 1877. Ferner R. v. Mises: Elemente der technischen Hydromechanik, S. 107ff.

In diesen Ausdrücken stellen, wie ersichtlich, die „statischen Höhen" $\frac{p_A}{\gamma} + z_A$ und $\frac{p_B}{\gamma} + z_B$ wegen $p_0 = \text{const.}$ für die beiden durch A und B gehenden Querschnitte konstante Werte dar, gelten also für jeden Stromfaden. Das trifft jedoch nicht mehr zu, wenn man eine Krümmung der Stromfäden berücksichtigen will, da in diesem Falle nach Bd. I S. 48 in der Normalenrichtung ein Gefälle der statischen Höhe von der Größe

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{p}{\gamma} + z\right) = -\frac{v^2}{g\,r} \tag{141}$$

vorhanden ist, wobei r den Krümmungsradius und n die nach dem Krümmungsmittelpunkt positiv angenommene Normalenrichtung bezeichnen.

Die statische Höhe $\frac{p}{\gamma} + z$ ist also nicht mehr konstant, sondern mit der Tiefe veränderlich. Unter der Annahme schwacher Krümmung und geringer Neigung der Stromfäden kann die Krümmung $\frac{1}{r}$ mit hinreichender Genauigkeit gleich $\pm \frac{d^2 z}{d x^2}$ gesetzt werden, so daß man bei konkav nach oben gekrümmtem Stromfaden $\left(\frac{d^2 z}{d x^2} > 0\right)$ erhält:

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{p}{\gamma} + z\right) = -\frac{v^2}{g}\frac{d^2 z}{d x^2}.$$

Dieses Gefälle gilt streng genommen für die positive Normalenrichtung; bei der vorausgesetzten geringen Neigung der Stromfäden darf es jedoch näherungsweise auch für die y- bzw. z-Richtung angesetzt werden. Schreitet man also vom Punkte A um δz nach abwärts, so wächst die statische Höhe um

$$\delta\left(\frac{p}{\gamma} + z\right) = \frac{v^2}{g}\frac{d^2 z}{d x^2}\,\delta z\,; \tag{142}$$

speziell ist am Spiegel mit $v = v_0$ und $z = z_0 = dh + y$

$$\delta\left(\frac{p}{\gamma} + z\right)_{[z = z_0]} = \frac{v_0^2}{g}\frac{d^2 y}{d x^2}\,\delta y\,. \tag{143}$$

Nach der Tiefe zu wird die Krümmung der Stromfäden immer schwächer, der Ausdruck (142) somit immer kleiner. Der über den ganzen Querschnitt an der Stelle x genommene Mittelwert der statischen Höhe setzt sich also zusammen aus dem Wert $\frac{p_0}{\gamma} + z$ — ohne Berücksichtigung der Stromfadenkrümmung — und einem zusätzlichen Beitrag, den man mit Rücksicht auf (142) bzw. (143) in der Form anschreiben kann:

$$\frac{(\lambda\,c)^2}{g}\frac{d^2 y}{d x^2}\,\lambda' y\,, \tag{144}$$

wobei $\lambda = \frac{v_0}{c}$ und λ' zunächst unbestimmte Zahlenwerte, $c = \frac{Q}{F}$ die mittlere Querschnittsgeschwindigkeit und y die Gerinnetiefe an der Stelle x bezeichnen.

Soll nun die oben angeschriebene Gl. (139) nicht auf einen unendlich dünnen Stromfaden angewandt werden, sondern auf den gesamten das Gerinne erfüllenden Wasserfaden von der Länge dx, so hat man folgendes zu beachten: Zunächst ist unter Einführung eines Korrekturfaktors α (siehe S. 121)

$$\frac{v_B^2 - v_A^2}{2g} = \alpha \frac{(c + dc)^2 - c^2}{2g} = \frac{\alpha}{2g} 2c \cdot dc = \frac{\alpha}{2g} \frac{d(c^2)}{dx} dx . \tag{145}$$

Als gesamte Widerstandshöhe, bezogen auf die Länge dx, kommt für das Gerinne ähnlich wie bei der Rohrströmung (vgl. S. 57) der Wert

$$h_v = \frac{\psi c^2}{2 g r_h} dx \tag{146}$$

in Ansatz, wo ψ die früher definierte Widerstandsziffer und r_h den hydraulischen Radius bezeichnen. Schließlich hat man zu bedenken, daß unter Berücksichtigung einer Stromfadenkrümmung die Differenz der statischen Höhen auf der linken Seite von (139) noch einer Korrektur um den aus (144) fließenden Differenzbeitrag

$$-\frac{d}{dx}\left[\frac{(\lambda c)^2}{g} \frac{d^2 y}{dx^2} \lambda' y\right] dx \tag{147}$$

bedarf. Führt man nun in (139) die Ausdrücke (140), (145), (146) ein und fügt links das Korrekturglied (147) hinzu, so erhält man

$$-\frac{dz_0}{dx} dx - \frac{d}{dx}\left[\frac{(\lambda c)^2}{g} \frac{d^2 y}{dx^2} \lambda' y\right] dx = \frac{\alpha}{2g} \frac{d(c^2)}{dx} dx + \frac{\psi c^2}{2 g r_h} dx . \tag{148}$$

Nach Division mit dx und Beachtung von (138) folgt daraus die **Hauptgleichung der ungleichförmigen, stationären Bewegung in einem prismatischen Gerinne**

$$J_s - \frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx}\left[\frac{(\lambda c)^2}{g} \frac{d^2 y}{dx^2} \lambda' y\right] - \psi \frac{c^2}{2 g r_h} = \frac{\alpha}{2g} \frac{d(c^2)}{dx}, \tag{148a}$$

in der bei nicht zu stark veränderlichen Strömungen

$$\lambda^2 \lambda' \approx \frac{1}{3}; \qquad \alpha = 1{,}08 \text{ bis } 1{,}15$$

gesetzt werden kann[1].

Beschränkt man sich zunächst auf solche Fälle, bei denen eine merkliche **Krümmung der Stromfäden nicht vorhanden ist**, so lautet (148a) mit $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ einfacher

$$J_s - \frac{dy}{dx} - \psi \frac{c^2}{2 g r_h} = \frac{\alpha}{2g} \frac{d(c^2)}{dx} . \tag{149}$$

Für das Gefälle der gleichförmigen Strömung, das nach früherem dem

[1] v. Mises: a. a. O. S. 111.

Sohlengefälle J_s entspricht, gilt nach (127)

$$J_s = \frac{\psi_0 c_0^2}{2 g r_{h_0}} = \frac{\psi_0 c_0^2 u_0}{2 g F_0}, \tag{150}$$

wobei alle mit dem Index 0 behafteten Größen auf die gleichförmige Bewegung bezogen sein sollen. Da ferner aus Kontinuitätsgründen

$$c = c_0 \frac{F_0}{F}$$

ist, so wird

$$c^2 = c_0^2 \frac{F_0^2}{F^2}; \qquad \frac{d c^2}{d x} = -2 \frac{c_0^2 F_0^2}{F^3} \cdot \frac{dF}{dx},$$

womit (149) übergeht in

$$J_s - \frac{dy}{dx} - \psi \frac{c_0^2 F_0^2}{2 g r_h F^2} = -\frac{2\alpha}{2g} \frac{c_0^2 F_0^2}{F^3} \cdot \frac{dF}{dx}. \tag{151}$$

Nun ist (Abb. 109) $dF = b \cdot dy$, also

$$\frac{dF}{dx} = b \frac{dy}{dx},$$

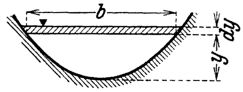


Abb. 109.

womit wegen $r_h = \frac{F}{u}$ Gl. (151) auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$\frac{dy}{dx}\left(F^3 - \frac{\alpha}{g} c_0^2 F_0^2 b\right) = J_s\left(F^3 - \psi \frac{c_0^2 F_0^2 u}{2 g J_s}\right). \tag{151a}$$

Setzt man weiter

$$\frac{\alpha}{g} c_0^2 F_0^2 b = F_0^3 \frac{b}{b'},$$

wo

$$\frac{1}{b'} = \frac{\alpha c_0^2}{g F_0} \tag{152}$$

als gegeben anzusehen ist, und beachtet, daß wegen (150)

$$\frac{\psi c_0^2 F_0^2 u}{2 g J_s} = \frac{\psi F_0^3 u}{\psi_0 u_0}$$

ist, so erhält man aus (151a) einfacher

$$\frac{dy}{dx}\left(F^3 - F_0^3 \frac{b}{b'}\right) = J_s\left(F^3 - F_0^3 \frac{\psi u}{\psi_0 u_0}\right)$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = J_s \frac{F^3 - F_0^3 \dfrac{\psi u}{\psi_0 u_0}}{F^3 - F_0^3 \dfrac{b}{b'}} \tag{153}$$

als Differentialgleichung der Spiegelkurve bei Vernachlässigung einer Stromfadenkrümmung und Annahme eines prismatischen Gerinnes.

Sind F, u und b als Funktionen von y gegeben (bekannte Querschnittsform), so kann bei bekannter Wandrauhigkeit auch ψ durch y

ausgedrückt werden [etwa nach Gl. (130a)]. Dann läßt sich aber mit Hilfe von (153) y als Funktion von x darstellen, d. h. die Änderung der Spiegelhöhe an jeder Stelle x ermitteln.

b) Verschiedene Formen der Spiegelkurve.

Ohne zunächst an eine Integration der Gl. (153) für besondere Fälle heranzutreten, kann man diese Gleichung doch benutzen, um einige allgemeine Aussagen über den möglichen Verlauf der Spiegelkurve zu machen.

Da es sich hier zunächst nur um grundsätzliche Fragen handelt, soll der Einfachheit halber ein rechteckiger Querschnitt von konstanter Breite $b = b_0$ angenommen werden, und zwar sei b_0 überall groß gegenüber der Tiefe y. Dann kann $u \approx u_0 \approx b_0$ und $\psi \approx \psi_0$ gesetzt werden; außerdem ist $F = b_0 y$ und $F_0 = b_0 y_0$, womit (153) übergeht in

$$\frac{dy}{dx} = J_s \frac{y^3 - y_0^3}{y^3 - y_0^3 \dfrac{\alpha c_0^2}{g y_0}}.$$

Darin stellt y die mit x veränderliche Gerinnetiefe dar, y_0 die der gleichförmigen Bewegung entsprechende Tiefe. Setzt man hier noch zur Abkürzung

$$y_0^3 \frac{\alpha c_0^2}{g y_0} = h_0^3 \, [\mathrm{cm}^3], \tag{154}$$

wo h_0 ebenso wie y_0 eine Länge bezeichnet, so wird

$$\frac{dy}{dx} = J_s \frac{y^3 - y_0^3}{y^3 - h_0^3}, \tag{155}$$

bzw. unter Beachtung von (138)

$$J_0 = J_s \left(1 - \frac{y^3 - y_0^3}{y^3 - h_0^3}\right) = J_s \frac{y_0^3 - h_0^3}{y^3 - h_0^3}. \tag{156}$$

Aus vorstehender Gleichung folgt nun sofort, daß das Spiegelgefälle J_0 sein Vorzeichen mit $y_0^3 - h_0^3$ ändert, d. h. unter sonst gleichen Verhältnissen wird die Spiegelkurve anders ausfallen, je nachdem $y_0 \gtreqless h_0$ ist; speziell wird $J_0 = 0$ für $y_0 = h_0$ und $y \gtreqless h_0$.

Nun ist nach (150) wegen $u_0 \approx b_0$ (siehe oben)

$$J_s = \frac{\psi_0 c_0^2 u_0}{2 g F_0} = \frac{\psi_0 c_0^2}{2 g y_0}; \qquad y_0 = \frac{\psi_0 c_0^2}{2 g J_s}.$$

Aus dem Vergleich mit (154), worin jetzt angenähert $\alpha \approx 1$ gesetzt werden soll, folgt also für

$$y_0 > h_0, \qquad J_s < \frac{\psi_0}{2},$$

$$y_0 < h_0, \qquad J_s > \frac{\psi_0}{2}.$$

Der erste Fall liegt nach den Ausführungen auf S. 121 vor bei strömendem Abfluß (Flüsse), der zweite Fall dagegen bei schießendem (Wildbäche). Diesen beiden Fällen entsprechen voneinander abweichende

Spiegelkurven, welche ihrerseits wieder je nach den vorliegenden Randbedingungen (Störungsursachen der gleichförmigen Bewegung) verschiedene Form haben können.

In Abb. 110 sind die den Fällen $y_0 > h_0$ und $y_0 < h_0$ entsprechenden Lösungen der Differentialgleichung (155) generell dargestellt. Hinsichtlich ihres Verlaufes lassen sich mit Hilfe von (155) und (156) leicht folgende Aussagen machen, wobei durchweg ein positives Sohlengefälle J_s vorausgesetzt wird. Zunächst sei noch bemerkt, daß $\frac{dy}{dx} = 0$ nach (138) einem Spiegelgefälle entspricht, welches gerade gleich dem Sohlengefälle J_s ist. $\frac{dy}{dx} > 0$ bedeutet eine Zunahme von y, bzw. eine verzögerte Strömung, $\frac{dy}{dx} < 0$ eine Abnahme von y, bzw. eine beschleunigte Strömung. Dabei kann das Spiegelgefälle J_0 positiv (fallend) oder negativ (steigend) sein. Nach diesen Erklärungen erkennt man leicht folgende Zusammenhänge für die einzelnen Äste der Spiegelkurven (Abb. 110).

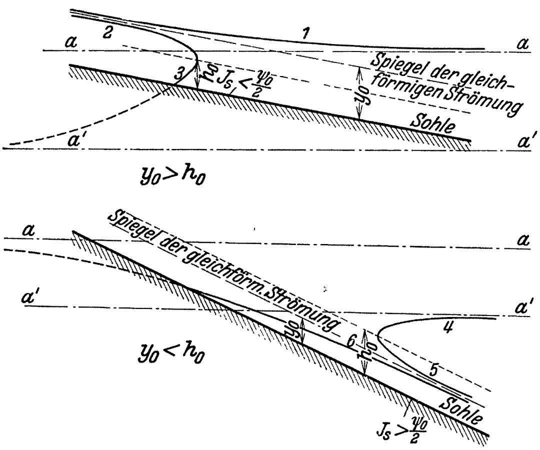


Abb. 110. Formen der Spiegelkurve bei „strömendem“ Abfluß ($y_0 > h_0$) und „schießendem“ Abfluß ($y_0 < h_0$).

a) $y_0 > h_0$ (Fluß)

$$y > y_0; \quad \frac{dy}{dx} > 0 \quad \text{(verzögert)}; \quad J_0 > 0 \quad \text{(Ast } \mathit{1}\text{)};$$

$$y_0 > y > h_0; \quad \frac{dy}{dx} < 0 \quad \text{(beschleunigt)}; \quad J_0 > 0 \quad \text{(Ast } \mathit{2}\text{)};$$

$$y < h_0; \quad \frac{dy}{dx} > 0 \quad \text{(verzögert)}; \quad J_0 < 0 \quad \text{(Ast } \mathit{3}\text{)};$$

b) $y_0 < h_0$ (Wildbach)

$$y > h_0; \quad \frac{dy}{dx} > 0 \quad \text{(verzögert)}; \quad J_0 < 0 \quad \text{(Ast } \mathit{4}\text{)};$$

$$h_0 > y > y_0; \quad \frac{dy}{dx} < 0 \quad \text{(beschleunigt)}; \quad J_0 > 0 \quad \text{(Ast } \mathit{5}\text{)};$$

$$y < y_0; \quad \frac{dy}{dx} > 0 \quad \text{(verzögert)}; \quad J_0 > 0 \quad \text{(Ast } \mathit{6}\text{)}.$$

Für $y = h_0 = y_0 \sqrt[3]{\frac{\alpha c_0^2}{g y_0}}$ (Gl. 154) wird $\frac{dy}{dx} = \pm \infty$; es sind dieses die beiden Punkte, in denen die Äste *2* und *3* bzw. *4* und *5* aneinander schließen. Weiter wird $J_0 = 0$ für $y = \pm\infty$; dieser Bedingung entspricht der asymptotische Verlauf der Äste *1* und *3* bzw. *4* und *6* an die Geraden a—a und a'—a'.

Schließlich stellt auch der Spiegel der gleichförmigen Strömung eine Asymptote an die Spiegelkurve der ungleichförmigen Bewegung dar, wie man durch folgende Überlegung erkennt.

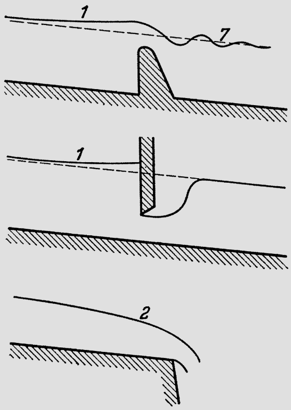


Abb. 111. Verschiedene Spiegelkurven bei „strömender" Bewegung.

Schreibt man Gl. (155) in der Form

$$J_s\,dx = dy\left(1 + \frac{y_0^3 - h_0^3}{y^3 - y_0^3}\right),$$

so folgt daraus durch Integration

$$J_s\,x = y + (y_0^3 - h_0^3)\int \frac{dy}{y^3 - y_0^3} + C$$

oder mit $y = \eta\, y_0$

$$J_s x = y + \frac{y_0^3 - h_0^3}{y_0^2}\int \frac{d\eta}{\eta^3 - 1} + C\,.$$

Das Integral läßt sich durch Partialbruchzerlegung auswerten und liefert

$$\int \frac{d\eta}{\eta^3 - 1} = \frac{1}{6}\ln\frac{(\eta - 1)^2}{\eta^2 + \eta + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,ctg}\frac{2\,\eta + 1}{\sqrt{3}} + \text{const.}\,,$$

weshalb, wenn jetzt wieder $y = \eta\, y_0$ eingesetzt wird,

$$J_s x = y + \frac{y_0^3 - h_0^3}{6\, y_0^2}\left\{\ln\frac{(y - y_0)^2}{y^2 + y\, y_0 + y_0^2} + \frac{6}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,ctg}\frac{2y + y_0}{y_0\sqrt{3}}\right\} + C\,. \quad (157)$$

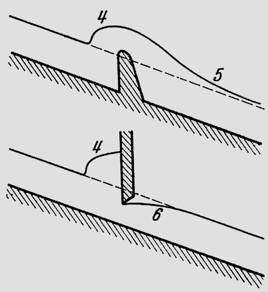


Abb. 112. Verschiedene Spiegelkurven bei „schießender" Bewegung.

Man erkennt nun leicht aus vorstehender Gleichung, daß für $y_0 > h_0$ (Fluß) x gegen $-\infty$ geht, wenn y gegen y_0 geht (gleichförmige Strömung), da dann der Logarithmus gleich $-\infty$ wird. Im anderen Falle, also $y_0 < h_0$ (Wildbach) geht x gegen $+\infty$, wenn y gegen y_0 geht.

Die aus Abb. 110 ersichtlichen Formen der Spiegelkurve werden praktisch in der Tat beobachtet; einige charakteristische Fälle sind in Abb. 111 und 112 dargestellt.

Störungen der gleichförmigen Strömung, wie sie im Wasserbau besonders häufig vorkommen, werden u. a. verursacht durch Stauwehre, Sohlenstufen, Gefällsknicke, Schütze, Pfeilereinbauten und dgl. (s. auch Ziff. f und g).

c) Wassersprung.

Bei Wildbächen vollzieht sich gemäß Abb. 112 der Übergang aus der gleichförmigen in die ungleichförmige Bewegung kurz oberhalb der Störungsstelle in Gestalt einer nahezu plötzlichen Erhebung des Wasserspiegels, die nach Bidone (1819) als Wassersprung bezeichnet wird. Seine theoretische Behandlung ist bereits im 1. Bande (S. 65) als Anwendung des Impulssatzes besprochen worden. Hier sollen nur noch einige ergänzende Bemerkungen folgen.

Im 1. Bande wurde gezeigt, daß ein Wassersprung sich nur einstellen kann, wenn die Geschwindigkeit oberhalb der Störungsstelle (Wassertiefe t_1) größer ist als die Grenzgeschwindigkeit $c_{gr} = \sqrt{g t_1}$ (vgl. auch S. 121), d. h. eben bei schießendem Abfluß. Außerdem erkennt man aus der dort entwickelten Gleichung für die Steighöhe

$$h = -\frac{3}{2} t_1 + \sqrt{\frac{t_1^2}{4} + \frac{2\, t_1 c_1^2}{g}}\,,$$

daß h um so größer ausfällt, je größer der Unterschied zwischen c_1 und der Grenzgeschwindigkeit $\sqrt{g t_1}$ ist. Für $c_1 \lesseqgtr c_{gr}$ wird $h = 0$.

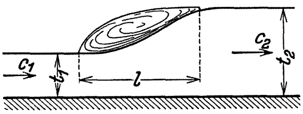


Abb. 113. Wassersprung mit „Deckwalze".

Bei größeren Sprunghöhen ist der Wassersprung von einem starken Wirbel, einer sogenannten Deckwalze, überlagert (Abb. 113), die — wie der ganze Vorgang überhaupt — mit erheblichen Energieverlusten verbunden ist[1].

Zur Berechnung der Länge des Wassersprunges hat Safranez[2] die empirische Formel

$$l \approx 6\, t_1 \frac{c_1}{\sqrt{g t_1}}$$

vorgeschlagen, welche sich für $\frac{c_1}{\sqrt{g t_1}} \geqq 4$ in guter Übereinstimmung mit seinen Versuchsergebnissen befindet. Bei kleineren „Abflußkennzahlen" $\frac{c_1}{\sqrt{g t_1}}$ hat sie wahrscheinlich keine Gültigkeit mehr. Sobald c_1 sich der Grenzgeschwindigkeit $c_{gr} = \sqrt{g t_1}$ nähert, ist der Wassersprung nur wenig ausgeprägt (geringer Energieverlust) und bildet lediglich eine flache Gegenneigung, deren Länge sich im allgemeinen nicht genau feststellen läßt.

d) Berücksichtigung der Stromfadenkrümmung.

Eine interessante und praktisch wichtige Schlußfolgerung läßt sich noch aus Gl. (148a) für das Übergangsgebiet von gleichförmiger zu ungleichförmiger Bewegung ziehen bzw. umgekehrt. Weil es

---

[1] Vgl. hierzu K. Safranez: Bauing. 1930 Heft 20. A. Schoklitsch: Wasserwirtsch. 1932 Heft 16 u. 17.

[2] Safranez, K.: Bauing. 1929 Heft 37 u. 38.

sich dabei nur um eine Betrachtung allgemeiner Art handelt, soll der Einfachheit halber wieder ein rechteckiger Querschnitt ins Auge gefaßt werden, dessen Breite b_0 hinreichend groß gegenüber seiner Tiefe sei. Der Unterschied der Gerinnetiefe y für die ungleichförmige Bewegung gegenüber derjenigen der gleichförmigen Strömung (y_0) sei mit $y_0\eta$ bezeichnet (Abb. 114), wobei η für das hier allein in Frage kommende Übergangsgebiet so klein vorausgesetzt wird, daß seine höheren Potenzen gegenüber der Einheit vernachlässigt werden können.

Sieht man zunächst einmal von dem die Stromfadenkrümmung darstellenden 3. Summanden auf der linken Seite der Gl. (148a) ab, so läßt sich diese, wie oben gezeigt wurde, umformen in Gl. (155), wofür man auch schreiben kann:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx}\frac{h_0^3}{y^3} = J_s\left(1 - \frac{y_0^3}{y^3}\right)$$

oder, wegen $\frac{ay}{dx}\frac{1}{y^3} = -\frac{1}{2}\frac{d(y^{-2})}{dx}$,

$$\frac{dy}{d\,x} + \frac{h_0^3}{2}\frac{d(y^{-2})}{d\,x} = J_s\left(1 - \frac{y_0^3}{y^3}\right). \quad (158)$$

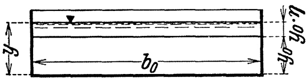


Abb. 114.

Nun ist aber (Abb. 114)

$$y = y_0(1+\eta); \qquad \frac{1}{y} = \frac{1}{y_0}\frac{1}{1+\eta},$$

wofür man unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von η auch schreiben kann:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{y_0}(1-\eta).$$

Entsprechend wird dann

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{y_0^2}(1-2\,\eta); \qquad \frac{1}{y^3} = \frac{1}{y_0^3}(1-3\,\eta),$$

womit Gl. (158) übergeht in

$$\frac{dy}{dx} - \frac{h_0^3}{y_0^2}\frac{d\eta}{dx} = 3\,J_s \cdot \eta. \quad (159)$$

Setzt man noch

$$x = y_0\,\xi; \qquad dx = y_0 \cdot d\xi,$$

so lautet (159) einfacher:

$$\frac{d\eta}{d\xi}\left(1 - \frac{h_0^3}{y_0^3}\right) = 3\,J_s\,\eta. \quad (160)$$

Nun soll hier aber auch die Stromfadenkrümmung berücksichtigt werden, d. h. das den Faktor $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{y_0}\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ enthaltende Glied der Gl. (148a). Da dieser Faktor im vorliegenden Falle bereits klein von der 1. Ordnung ist, genügt es, an Stelle der in dem betreffenden Gliede noch auftretenden Faktoren c und y die konstanten Werte c_0 und y_0 zu setzen[1], also zu schreiben:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(\lambda c)^2}{g}\lambda' y \frac{d^2 y}{dx^2}\right] = \frac{\lambda^2 \lambda' c_0^2 y_0}{g}\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\lambda^2 \lambda' c_0^2}{y_0 g}\frac{d^3\eta}{d\xi^3}.$$

Da dieses Glied in (148a) das gleiche Vorzeichen hat wie $\frac{dy}{dx}$, ist es hier in (160) links mit dem positiven Vorzeichen hinzuzufügen. Setzt man noch den Zahlenfaktor

$$\lambda^2 \lambda' = \varkappa,$$

so erhält man jetzt an Stelle von (160)

$$\frac{d^3\eta}{d\xi^3} + \frac{d\eta}{d\xi}\cdot\frac{y_0 g}{\varkappa c_0^2}\left(1 - \frac{h_0^3}{y_0^3}\right) = 3 J_s \eta \frac{y_0 g}{\varkappa c_0^2}$$

oder mit Rücksicht auf (154)

$$\frac{d^3\eta}{d\xi^3} + \frac{d\eta}{d\xi}\left(\frac{y_0 g}{\varkappa c_0^2} - \frac{\alpha}{\varkappa}\right) = 3 J_s \eta \frac{y_0 g}{\varkappa c_0^2}.$$

Da aber nach (150) wegen $\frac{F_0}{u_0} \approx y_0$ (breites Rechteck) $J_s = \frac{\psi_0 c_0^2}{2 g y_0}$ ist, so erhält man schließlich als Differentialgleichung für das Übergangsgebiet

$$\frac{d^3\eta}{d\xi^3} + \frac{d\eta}{d\xi}\left(\frac{\psi_0}{2 J_s} - \alpha\right)\frac{1}{\varkappa} - \frac{3}{2}\frac{\psi_0}{\varkappa}\eta = 0. \tag{161}$$

Die allgemeine Lösung dieser homogenen Differentialgleichung 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten lautet bekanntlich:

$$\eta = C_1 e^{r_1 \xi} + C_2 e^{r_2 \xi} + C_3 e^{r_3 \xi}, \tag{162}$$

wo C_1, C_2, C_3 die Integrationskonstanten darstellen und r_1, r_2, r_3 die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$r^3 + p r + q = 0 \tag{163}$$

mit

$$p = \left(\frac{\psi_0}{2 J_s} - \alpha\right)\frac{1}{\varkappa}; \qquad q = -\frac{3}{2}\frac{\psi_0}{\varkappa}.$$

Setzt man hier den Korrekturfaktor $\alpha \approx 1$, nimmt also angenähert gleichförmige Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt an, so wird $p \lesseqgtr 0$, wenn $J_s \gtreqless \frac{\psi_0}{2}$. Dem „Fluß“ $\left(J_s < \frac{\psi_0}{2};\ \text{S. } 126\right)$ entspricht also eine positive Konstante p, weshalb

$$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} > 0.$$

In diesem Falle hat aber, wie aus der Lehre von den kubischen Gleichungen bekannt ist, Gl. (163) eine positive reelle und zwei konjugiert

[1] v. Mises: a. a. O. S. 115.

komplexe Wurzeln, welch letztere in der Form

$$r_{\frac{1}{2}} = -u \pm i\,v \tag{164}$$

dargestellt sein mögen (u und v sind positive Konstante)[1]. Faßt man nur das den komplexen Wurzeln entsprechende partikuläre Integral ins Auge, so folgt aus (162) mit $C_3 = 0$

$$\eta_1 = C_1\, e^{(-u+i\,v)\,\xi} + C_2\, e^{-(u+i\,v)\,\xi}, \tag{165}$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\begin{aligned}\eta_1 &= e^{-u\,\xi}\left\{C_1\, e^{i\,v\,\xi} + C_2\, e^{-i\,v\,\xi}\right\}\\ &= e^{-u\,\xi}\left\{C_1\,(\cos v\,\xi + i\sin v\,\xi) + C_2\,(\cos v\,\xi - i\sin v\,\xi)\right\}\\ &= e^{-u\,\xi}\left\{(C_1 + C_2)\cos v\,\xi + (C_1 - C_2)\, i\sin v\,\xi\right\}.\end{aligned}$$

Damit η_1 reell wird, hat man sich unter C_1 und C_2 zwei komplexe Werte

$$C_1 = \frac{A_1 - i\,A_2}{2}; \qquad C_2 = \frac{A_1 + i\,A_2}{2}$$

vorzustellen, worin jetzt A_1 und A_2 zwei neue reelle Konstante bezeichnen. Mit diesen Werten für C_1 und C_2 wird

$$\eta_1 = e^{-u\,\xi}\,(A_1 \cos v\,\xi + A_2 \sin v\,\xi)\,. \tag{165a}$$

Man erkennt, daß die vorstehende Lösung einen wellenartigen Verlauf des Spiegels mit stromabwärts (positives ξ) abklingender Amplitude darstellt. Besonders deutlich tritt dieses in Erscheinung, wenn $A_1 = 0$, d. h. $C_1 = -C_2$ wird. Aus Gl. (165) oder (165a) geht hervor, daß dieser Fall vorliegt, wenn $\eta_1 = 0$ für $\xi = 0$ ist, d. h. wenn der Anfangspunkt der ξ-Achse in einen Schnittpunkt der Wellenlinie mit dem Spiegel der gleichförmigen Strömung fällt.

Mit wachsendem ξ geht η_1 gegen Null (gleichförmige Strömung), dagegen nicht mit wachsendem negativen ξ. Die durch Gl. (165a) dargestellte Lösung gilt demnach für das Übergangsgebiet unterhalb einer Störungsstelle. Ein derartiger Verlauf der Spiegelkurve kann bei Flüssen unterhalb eines Stauwehres mitunter tatsächlich beobachtet werden (Abb. 111, Ast 7).

Wird
$$\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} < 0\,,$$

dann liegt der „casus irreducibilis“ vor, und Gl. (163) hat drei reelle Wurzeln, zu denen andere Formen der Spiegelkurve gehören (s. oben).

e) Numerische Bestimmung der Staukurve.

Von besonderer Bedeutung für die Praxis ist die Ermittlung der Form des gestauten Spiegels eines Flusses durch ein Wehr. Allgemein kann dazu im Anschluß an die unter b) angestellten Überlegungen

[1] Vgl. etwa Hütte Bd. 1 26. Aufl. S. 65.

gesagt werden, daß die Staukurve $\left(\text{unter der Voraussetzung } J_s < \frac{\psi_0}{2}\right)$ im Unterlauf eine horizontale Asymptote besitzt, während sie sich im Oberlauf asymptotisch dem Spiegel der gleichförmigen Bewegung nähert (Abb. 110 oben). Theoretisch erstreckt sich demnach der Stau unendlich weit stromaufwärts; praktisch wird man jedoch sagen können, der Stau ist beendet, sofern die Höhe y des gehobenen Spiegels diejenige der gleichförmigen Bewegung nur noch um einen geringen Prozentsatz übertrifft. Von dieser Festsetzung wird also die „Stauweite" abhängen.

Für den rechteckigen Querschnitt von großer Breite ist der Zusammenhang zwischen x und y durch Gl. (157) gegeben. Ist z. B. die Stauhöhe $y = y_1$ kurz oberhalb des Wehres vorgeschrieben, und legt man an diese Stelle den Anfangspunkt der x-Achse, so kann die Integrationskonstante C aus der Bedingung $y = y_1$ für $x = 0$ bestimmt werden. Damit läßt sich dann zu jeder Höhe $y < y_1$ mit Hilfe von (157) das zugehörige x berechnen.

Bei Querschnitten von nicht rechteckiger Form, welche praktisch die Regel bilden, geht man zweckmäßig von Gl. (153) aus, indem man dort die Differentiale durch endliche Längen ersetzt, also

$$\Delta y = J_s \frac{F^3 - F_0^3 \dfrac{\psi u}{\psi_0 u_0}}{F^3 - F_0^3 \dfrac{b}{b'}} \Delta x\,. \quad (166)$$

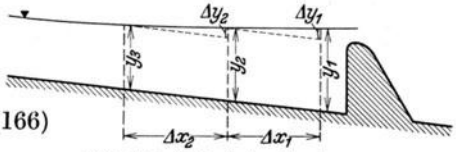


Abb. 115. Verlauf der Staukurve.

Darin sind als gegeben anzusehen die Größen J_s, c_0, F_0, u_0, ψ_0, also nach (152) auch $\frac{1}{b'} = \frac{\alpha c_0^2}{g F_0}$, ferner die Querschnittsform und die Stauhöhe $y = y_1$ kurz oberhalb des Wehres. Die ohnehin nicht sehr scharf bestimmbare Widerstandsziffer ψ wird man angenähert gleich ψ_0 setzen können, jedoch macht eine genauere Berücksichtigung nach den früheren Angaben (S. 114) keine Schwierigkeiten. Man kann nun aus der gegebenen Querschnittsform für $y = y_1$ die zugehörigen Werte F, b und u (gegebenenfalls auch ψ) bestimmen und aus (166) Δy_1 als diejenige Abnahme von y_1 berechnen, die zu einem bestimmten Intervall Δx_1 gehört. Damit ist $y_2 = y_1 - \Delta y_1$ gefunden, und durch wiederholte Anwendung des Verfahrens läßt sich die Staukurve punktweise festlegen (Abb. 115). Es liegt auf der Hand, daß das Ergebnis um so genauer ausfällt, je kleiner man die Intervalle Δx wählt, jedoch genügen praktisch meistens schon Intervalle von 100 [m] und mehr.

f) Die Wasserspiegellage bei Profiländerungen des Gerinnes.

Bei Profiländerungen, wie sie etwa durch das Vorhandensein einer Sohlenstufe, durch Pfeilervorbauten, Querschnittserweiterungen bzw. -Verengungen oder dgl. bedingt sind, kann je nach den vorliegenden Verhältnissen die ungleichförmige Bewegung ohne oder mit einem Wechsel der Fließweise (Strömen oder Schießen) vor sich gehen. In solchen Fällen bietet, wie Böß[1] gezeigt hat, die Energielinie (S. 119) ein bequemes Hilfsmittel, um sich über den ungefähren Verlauf des Wasserspiegels ein Bild zu verschaffen.

Abb. 116 zeigt ein Gerinne mit strömendem Normalfluß, in welches eine nicht zu hohe und allmählich ansteigende Sohlenstufe eingebaut ist. Sieht man von einer Änderung der Reibung infolge der Querschnittsverkleinerung in erster Näherung ab und betrachtet den Vorgang im übrigen als verlustlos (allmählicher Übergang), so kann die Differenz der hydraulischen Höhen $h_1 - h$ vor der Stufe und unmittelbar über der Stufe gegenüber dem ungestörten Zustand keine Änderung erfahren (da ja kein weiterer Energieverlust hinzutritt). Dagegen ist die Energielinienhöhe H über der Stufe jetzt kleiner geworden als vorher. Nun entspricht aber, wie man aus Abb. 107 erkennt, einer Verminderung der Höhe H bei strömendem Abfluß (rechter Ast der H-Linie) eine Verkleinerung der Tiefe t (bei gleichbleibendem Q), d. h. der Wasserspiegel muß über der Stufe eine Senkung erfahren. Die zugehörige Tiefe t kann man etwa aus Gl. (134a) mit $F = b_0 t$ (rechteckiges Profil)

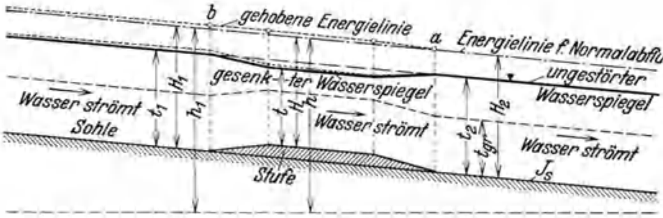


Abb. 116. Senkung des Wasserspiegels bei „strömender" Bewegung infolge einer Sohlenschwelle.

berechnen, in welcher H, b_0 und Q bekannt sind, oder man kann t unmittelbar aus der Abb. 107 abgreifen. Infolge der geringeren Wassertiefe $t < t_1$ muß die Geschwindigkeit entsprechend größer sein, bis hinter der Stufe wieder der Normalzustand erreicht ist. Die vorstehende Überlegung ist so lange anwendbar, als die neue Tiefe t größer als die theoretische Grenztiefe t_{gr} über der Stufe ist. Für $t = t_{gr}$ wird $H = H_{\min}$, und dieses ist nach Abb. 107 der kleinste Wert von H, bei welchem die gegebene Wassermenge Q gerade noch abfließen kann. Im vorliegenden Falle stimmt die theoretische Grenztiefe $t_{gr} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g\,b_0^2}}$ [Gl. (136)] für die Stufe mit derjenigen für das normale Bett überein; bei seitlichen Querschnittserweiterungen bzw. Verengungen wird dagegen wegen der veränderten Breite b innerhalb der Unstetigkeit t_{gr} kleiner bzw. größer als im normalen Bett.

In Wirklichkeit wird sich der Wasserspiegel noch etwas anders einstellen als eben geschildert, was mit den veränderten Reibungsverhältnissen innerhalb der Einengung zusammenhängt. Unterhalb der Einengung, also vom Punkte a flußabwärts, ist die Energielinie festgelegt durch die Wassertiefe t_2 und die Geschwindigkeit c_2, die ihrerseits be-

[1] Böß, P.: Berechnung der Wasserspiegellage. VDI-Forsch.-Heft Nr. 284. Berlin 1927.

stimmt sind durch das gegebene Sohlengefälle, die Rauhigkeit des Bettes, die Querschnittsform und die Wassermenge[1]. Die Höhe H_2 im Punkte a ist also durch die vorliegenden Abflußverhältnisse vorgeschrieben. Da nun innerhalb der Einengung wegen der größeren Geschwindigkeit c das Reibungsgefälle größer ist als unterhalb derselben, so muß die Energielinie oberhalb des Punktes a jetzt etwas stärker geneigt sein als diejenige für den Normalabfluß. Auch im Punkte b liegt diese neue E-Linie noch oberhalb der alten. Von b flußaufwärts muß sie sich allmählich in die Normallage zurückbilden. Dieser erhöhten Lage der E-Linie entspricht beim strömenden Abfluß eine Vergrößerung der Gerinnetiefe, d. h. oberhalb der Einengung ist der Wasserspiegel gestaut (in Abb. 116 punktiert eingetragen).

In Abb. 117 ist noch der Fall dargestellt, bei dem infolge geringerer Wassertiefe der Normalabfluß zwar noch strömend verläuft, die ihm entsprechende Energielinienhöhe H innerhalb der Einengung aber kleiner als $H_{\min}$ geworden ist. Da unter diesen geänderten Verhältnissen ein glatter Abfluß der Wassermenge Q nicht vor sich gehen kann,

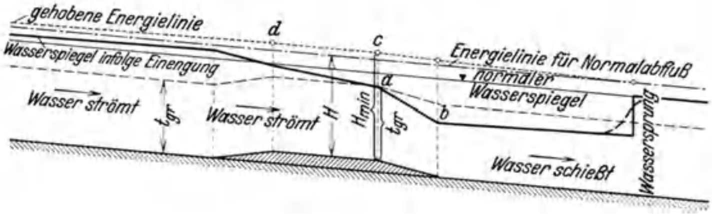


Abb. 117. Senkung des Wasserspiegels bei Wechsel des Fließzustandes vom Strömen zum Schießen infolge einer Sohlenschwelle.

(siehe oben), so muß sich das Wasser vor der Einengung aufstauen, was eine Hebung der Energielinie zur Folge hat. Der volle Abfluß ist erst möglich, wenn die Energielinienhöhe den Mindestwert $H_{\min}$ erreicht hat, dem die Wassertiefe t_{gr} entspricht. Infolge des vergrößerten Reibungseinflusses innerhalb der Einengung kann die neue E-Linie zwischen den Punkten c und d aber nicht der Sohle parallel sein, sondern muß ein stärkeres Gefälle haben als diese. In der Einengung ist demnach nicht die konstante Wassertiefe t_{gr} vorhanden, sondern diese Tiefe muß stromaufwärts größer werden, da beim strömenden Abfluß — der hier wegen der Verhältnisse im Oberlauf offenbar vorhanden ist — einer Hebung der Energielinie eine Vergrößerung der Gerinnetiefe entspricht. Oberhalb der Einengung geht die neue Energielinie und mit ihr der aufgestaute Spiegel allmählich in die ungestörte Lage zurück. Es fragt sich nun, welche Fließart vom Punkte a flußabwärts vorhanden ist. Nimmt man zunächst einmal strömenden Abfluß an, so müßte sich wegen der gehobenen Lage der Energielinie unterhalb der Einengung ein Wasserspiegel einstellen, der höher wäre als der dem Normalabfluß entsprechende. Mit Rücksicht auf die vorliegenden Werte für Rauhigkeit und Sohlengefälle müßte sich dieser Spiegel flußabwärts allmählich

[1] Es ist ja $J_s = \dfrac{\psi\, c^2}{2\, g\, r_h} = \psi\, \dfrac{Q^2}{2\, g\, F^2\, r_h}$.

wieder dem ungestörten Zustande nähern. Aus Abb. 110 erkennt man aber, daß eine solche Spiegellage beim „Strömen“ unterhalb der Störungsstelle nicht möglich ist, wogegen der Verlauf des Spiegels oberhalb der Einengung dem Ast *1* entspricht. Es bleibt also unterhalb des Punktes a nur der schießende Abfluß übrig. Mit wachsender Energielinienhöhe verringert sich die Tiefe zunächst bis zum Punkte b; sie wächst dann entsprechend der fallenden E-Linie (die ja auch in die normale Lage zurück muß) noch etwas, bis schließlich im Schnittpunkt der beiden E-Linien der Übergang zur strömenden Bewegung durch einen Wassersprung erfolgt (vgl. hierzu auch Abb. 111 Mitte).

In ähnlicher Weise wäre die Untersuchung durchzuführen, wenn eine andere Art der Profiländerung vorliegt, oder wenn es sich um schießenden Normalabfluß handelt. Im letzteren Falle bewirkt eine Querschnittsverminderung unter der Voraussetzung, daß kein Wechsel der Fließweise eintritt, eine Hebung des Wasserspiegels über der Störungsstelle[1].

g) Pfeilerstau.

Unter „Pfeilerstau“ oder „Brückenstau“ versteht man im praktischen Wasserbau eine Erscheinung, die sich in Gestalt einer Hebung des Wasserspiegels unmittelbar vor einem in einen Fluß eingebauten Brückenpfeiler gegenüber der ungestörten Spiegellage bemerkbar macht. Der theoretischen Behandlung setzt dieser Pfeilerstau erhebliche Schwierigkeiten entgegen, da es sich hier offenbar um ein Widerstandsproblem handelt, bei dem — mit Rücksicht auf die freie Oberfläche — nicht nur der Reibungs- und Druckwiderstand eine Rolle spielen, sondern auch der sogenannte Wellenwiderstand (Bd. I S. 87; vgl. auch die nachfolgende Ziffer 7 sowie das Kapitel über „Schiffswiderstand“, S. 265). Man ist deshalb bei dem heutigen Stande unserer Kenntnis über den Flüssigkeitswiderstand in der Hauptsache auf Modellversuche angewiesen, die allein eine Klärung der recht verwickelten Vorgänge beim Pfeilerstau herbeiführen können[2].

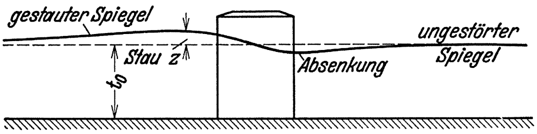


Abb. 118. Pfeilerstau.

Außer dem Stau vor dem Pfeiler tritt in dem eingeschnürten Querschnitt, d. h. also zwischen Pfeiler und Gerinnewand bzw. — bei mehreren Pfeilern — zwischen den einzelnen Pfeilern, eine Absenkung auf, und erst in einiger Entfernung hinter dem Pfeiler stellt sich wieder der ungestörte Spiegel ein (Abb. 118). Es liegen also im Prinzip ähnliche Verhältnisse vor wie im Falle der Abb. 116.

Versuche zur genauen Erforschung des Pfeilerstaus sind von verschiedenen Seiten durchgeführt worden, ohne daß es bisher gelungen

[1] Wegen der Einzelheiten muß auf die oben genannte Quelle verwiesen werden, wo einzelne Rechnungsergebnisse auch durch Versuche belegt sind.

[2] Vgl. hierzu F. Eisner: Widerstandsmessungen an umströmten Zylindern von Kreis- und Brückenpfeilerquerschnitt. Berlin 1929.

wäre, einwandfreie Unterlagen für die Großausführung in der Praxis zu erlangen, was in der Hauptsache auf die Schwierigkeiten zurückzuführen ist, die sich bei der Übertragung der Modellversuchsergebnisse einstellen (vgl. hierzu Ziffer 7 S. 149). Immerhin haben diese Versuche, unter denen besonders die von Rehbock[1] im Flußbaulaboratorium der Technischen Hochschule Karlsruhe angestellten hervorgehoben seien, wertvolle Aufschlüsse und Fingerzeige geliefert.

Nach Rehbock sind beim Pfeilerstau hinsichtlich des Fließzustandes drei Fälle zu unterscheiden: 1. Der Durchfluß im eingeengten Querschnitt erfolgt wie vorher strömend. 2. Die anfangs strömende Bewegung geht zwischen den Pfeilern in eine schießende über (bei stärkerer Einengung des Flußbettes). 3. Die Einengung ist so stark, daß auch noch hinter den Pfeilern schießende Strömung vorhanden ist. Bei größeren Flüssen, für welche fast ausschließlich Pfeiler in Betracht kommen, ist in der Regel Fall 1 maßgebend.

Bezeichnet nun F_0 den Querschnitt des „unverbauten Flusses“, f den durch Pfeiler verbauten Teil von F_0 und c_0 die mittlere Geschwindigkeit im unverbauten Fluß, so ist nach Rehbock für rein strömenden Abfluß und ein Verbauungsverhältnis $0{,}06 < \frac{f}{F_0} < 0{,}16$ der Pfeilerstau angenähert

$$z = \delta \frac{f}{F} \frac{c_0^2}{2g}. \tag{167}$$

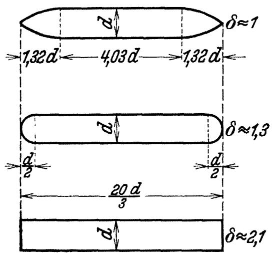


Abb. 119. Verschiedene Pfeilerformen, welche einen verschieden großen Pfeilerstau verursachen.

Darin stellt δ einen Formfaktor dar, welcher von der Gestalt des Pfeilers abhängt. Es zeigt sich nämlich, was nach der Grenzschichtentheorie verständlich ist (Bd. I S. 215ff.), daß bei Pfeilern, die vorn nicht gut abgerundet oder zugespitzt sind, infolge Ablösung der Flüssigkeit an den beiden Längsseiten sogenannte „Seitenwalzen“ entstehen, welche an der Hauptströmung nicht teilnehmen bzw. sich wesentlich langsamer bewegen und somit die Wirkung einer weiteren Einengung des Querschnitts haben. In Abb. 119 sind einige charakteristische Pfeilerformen und die ihnen entsprechenden Werte δ angegeben.

An der Hinterseite der Pfeiler bildet sich ein ausgeprägtes Totwassergebiet aus — sogenannte „Unterwalzen“ — die für die Größe des Staus von entscheidender Bedeutung sind. Um also einen möglichst kleinen Stau zu bekommen, muß man eine Pfeilerform wählen, die zu geringer Wirbelbildung Anlaß gibt (vgl. die entsprechenden Bemerkungen in Bd. I S. 219).

Die Rehbockschen Versuchsergebnisse können mit Vorteil zum Vergleich verschiedener Pfeilerformen herangezogen werden. Ihre Übertragbarkeit auf Großausführungen ist jedoch bezweifelt worden[2], da

[1] Brückenstau und Walzenbildung. Bauing. 1921 S. 341.

[2] Lindquist, E.: Tekn. Tidskrift 1927. Eisner, F.: Offene Gerinne, a. a. O. S. 316, 321.

bei den verwendeten relativ geringen Abmessungen und Geschwindigkeiten die modellähnliche Nachbildung der Wellenerscheinungen an der Oberfläche nicht gesichert ist (vgl. hierzu das Kapitel über Modellversuche, S. 153).

5. Mit der Zeit veränderliche Bewegung.

a) Kennzeichnung der Strömungserscheinungen.

Bei den bisherigen Betrachtungen handelte es sich durchweg um Vorgänge, die von der Zeit unabhängig waren (stationäre Bewegungen). Dabei wurde unterschieden zwischen gleichförmigen Bewegungen, bei denen die Erscheinungen unabhängig von Ort und Zeit waren, und ungleichförmigen, bei denen eine Abhängigkeit vom Orte — d. h. von der Lage des Querschnittes — bestand. Im vorliegenden Falle der nichtstationären Strömung tritt nun auch noch eine Abhängigkeit von der Zeit hinzu, und es ist einleuchtend, daß dadurch sowohl die Beobachtung als auch die theoretische Behandlung der einzelnen Vorgänge wesentlich verwickelter wird als früher.

Alle an der freien Oberfläche eines Gerinnes beobachtbaren nichtstationären Erscheinungen können im weiteren Sinne als „Wellen" aufgefaßt werden. Was man darunter im einzelnen zu verstehen hat und welche Formen diese Wellenbewegungen annehmen, wird in Kapitel IV etwas eingehender besprochen. Hier sollen deshalb nur einige für offene Gerinne besonders wichtige Vorgänge erörtert werden, die in verhältnismäßig kurzer Zeit zu einer Hebung bzw. Senkung des Wasserspiegels führen. Dazu gehören z. B. die kleinen Anschwellungen, welche durch vorübergehende Störung einer an sich stationären Strömung bedingt sind, sowie die Wasserbewegungen, welche in Kanälen und Werkgräben beim Öffnen und Schließen von Abschlußorganen entstehen und die man gewöhnlich als Schwall und Sunk (Hebung bzw. Senkung des Wasserspiegels) bezeichnet. Auch die Frage nach dem Verlauf des Hochwassers in Flüssen sowie des als „Flutwelle" flußaufwärts wandernden Schwalles beim Eindringen der Ebbe und Flut in Flußmündungen u. a. m. gehört in den Gedankenkreis dieser Untersuchungen (siehe S. 165). Für die Hebungs- und Senkungswellen, welche in Werkgräben usw. infolge Regulierung des Wasserabflusses für technische Zwecke hervorgerufen werden, hat sich eine von Forchheimer[1] angegebene Bezeichnungsweise als vorteilhaft erwiesen, durch welche das Wesen und die Entstehungsweise der einzelnen Vorgänge in übersichtlicher Form zum Ausdruck gebracht werden.

Danach kommen vier Haupttypen in Betracht, deren Unterschiede in den vorhandenen Randbedingungen liegen: 1. Der Stauschwall, welcher durch eine Verminderung des Abflusses im Unterlauf entsteht und flußaufwärts wandert. 2. Der Füllschwall, welcher durch eine Zuflußvermehrung im Oberlauf entsteht und flußabwärts wandert. 3. Der Absperrsunk, welcher durch eine Zuflußverminderung im Oberlauf entsteht und flußabwärts wandert. 4. Der Entnahme-

[1] Forchheimer, Ph.: Wasserschwall und Wassersunk. Leipzig u. Wien 1924.

sunk, welcher durch eine Abflußvermehrung im Unterlauf entsteht und flußaufwärts wandert.

Von Wichtigkeit für die technische Praxis sind hier insbesondere zwei Dinge: erstens die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schwalles und zweitens die Höhe, welche der Schwall bzw. Sunk unter bestimmten Voraussetzungen erreichen kann. Auf diese Fragen soll weiter unten etwas genauer eingegangen werden.

b) Die Differentialgleichung der nichtstationären Gerinneströmung.

Den Ausgangspunkt für die Ableitung der Hauptgleichung der stationär-ungleichförmigen Bewegung bildete die Bernoullische Gleichung (139). Man kann den gleichen Gedankengang wie dort auch hier verwenden, wenn man nur beachtet, daß jetzt noch eine Abhängigkeit von der Zeit vorliegt. Zu diesem Zwecke hat man zunächst aus der Energiegleichung für nichtstationäre Strömungen (Bd. I S. 56 und 71) zu folgern, daß auf der rechten Seite der Gl. (139) noch das Zeitglied $\frac{1}{g}\frac{\partial v}{\partial t}\,dx$ für den unendlich dünnen Stromfaden von der Länge dx hinzuzufügen ist, statt dessen man bei einem Stromfaden von großem Querschnitt schreiben kann $\frac{\alpha'}{g}\frac{\partial c}{\partial t}\,dx$ ($\alpha' \approx 1{,}03$ bis $1{,}05$), wenn c wieder die mittlere Geschwindigkeit bezeichnet. Sieht man zunächst von der Stromfadenkrümmung ab, so erhält man aus (148), wenn man jetzt die gewöhnlichen Differentialzeichen durch die partiellen ersetzt, und unter Hinzufügung des obigen Zeitgliedes

$$-\frac{\partial z_0}{\partial x}\,dx = \frac{\alpha}{2g}\frac{\partial c^2}{\partial x}\,dx + \frac{\psi c^2}{2g r_h}\,dx + \frac{\alpha'}{g}\frac{\partial c}{\partial t}\,dx,$$

woraus nach Division mit dx und unter Beachtung von (138) folgt:

$$J_s - \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\alpha}{2g}\frac{\partial c^2}{\partial x} + \frac{\psi c^2}{2g r_h} + \frac{\alpha'}{g}\frac{\partial c}{\partial t}. \tag{168}$$

Dieses ist die Hauptgleichung der nichtstationären Gerinneströmung bei Vernachlässigung der Stromfadenkrümmung; sie wurde bereits von Saint-Venant abgeleitet[1].

Damit y und c vollständig bestimmt sind, muß zu Gl. (168) noch die Kontinuitätsbedingung treten, die man wie folgt erhält. In der Zeiteinheit strömt durch den Querschnitt an der Stelle x die Wassermenge Fc, durch den um die Länge dx von x entfernten Querschnitt dagegen die Wassermenge $\left(F + \frac{\partial F}{\partial x}\,dx\right)\left(c + \frac{\partial c}{\partial x}\,dx\right)$. Der Überschuß der sekundlich austretenden über die eintretende Wassermenge in dem durch die beiden Querschnitte bestimmten Bereiche beträgt also unter Weglassung des kleinen Gliedes höherer Ordnung $c\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + F\frac{\partial c}{\partial x}\,dx$. Er muß offenbar gleich der auf die Zeiteinheit bezogenen Verminderung

[1] de Saint-Venant, B.: Comptes rendus Bd. 73 (1871) S. 153.

des Wasservolumens in dem betrachteten Bereiche sein, also gleich $-\frac{\partial F}{\partial t}\,dx$. Daraus folgt

$$c\frac{\partial F}{\partial x}dx + F\frac{\partial c}{\partial x}dx = -\frac{\partial F}{\partial t}dx$$

oder als Kontinuitätsgleichung der nichtstationären Strömung

$$c\frac{\partial F}{\partial x} + F\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0\,. \tag{169}$$

c) Fortpflanzung kleiner Anschwellungen auf fließendem Wasser.

Unter der Voraussetzung, daß nur kleine Abweichungen von der an sich stationären Strömung in einem prismatischen Gerinne auftreten, führt die weitere Diskussion der Gl. (168) und (169) zu praktisch wichtigen Aussagen hinsichtlich der Art und der Geschwindigkeit, mit welcher sich diese Störungen fortpflanzen, wie nachstehend für den Fall eines rechteckigen Gerinnes gezeigt werden soll, dessen Breite b_0 groß im Verhältnis zu seiner Tiefe y ist[1].

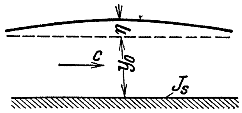


Abb. 120.

Dabei sollen — da es sich ohnehin nur um eine Näherungsrechnung handelt (Vernachlässigung der Stromfadenkrümmung) — folgende Annahmen gemacht werden: 1. Die Reibung bei der nichtstationären Bewegung soll gleich derjenigen bei der stationären Bewegung gesetzt werden, da nur kleine Abweichungen von letzterer zugelassen sind. Das bedeutet, daß in Gl. (168) $\frac{\psi c^2}{2\,g\,r_h} \approx J_s$ wird (siehe S. 112). 2. Die Abweichung der gestörten Spiegelordinate von der ungestörten sei mit η bezeichnet (Abb. 120); die Abweichung der Geschwindigkeit entsprechend mit w. Diese Abweichungen sollen so klein sein, daß ihre höheren Potenzen gegenüber den ungestörten Werten vernachlässigt werden können. 3. Die Zahlenfaktoren α und α' sollen angenähert gleich Eins gesetzt werden. Man hat also

$$y = y_0 + \eta\,; \qquad F = F_0 + b_0\,\eta\,;$$
$$c = c_0 + w\,; \qquad c^2 = c_0^2 + 2\,c_0\,w\,.$$

Unter diesen Voraussetzungen geht Gl. (168) über in

$$-\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{c_0}{g}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{g}\frac{\partial w}{\partial t}$$

oder, wenn man noch nach x differenziert, in

$$-\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \frac{c_0}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}\,. \tag{170}$$

[1] Diese Aufgabe ist in etwas erweiterter Form von Boussinesq behandelt: Eaux courantes, S. 283ff.; vgl. auch v. Mises: Technische Hydromechanik, S. 201, und Forchheimer: Hydraulik 3. Aufl. S. 247.

Aus der Kontinuitätsgleichung (169) folgt unter Beachtung der obigen Ansätze für F und c

$$(c_0 + w)\, b_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + (F_0 + b_0 \eta) \frac{\partial w}{\partial x} + b_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0.$$

Vernachlässigt man hier w gegenüber c_0 und $b_0 \eta$ gegenüber F_0, so erhält man wegen $F_0 = b_0 y_0$

$$c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} + y_0 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0.$$

Daraus folgt durch Differentiation einmal nach x und einmal nach t

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{1}{y_0} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial t} - \frac{c_0}{y_0} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial t} = -\frac{1}{y_0} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{c_0}{y_0} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial t}.$$

Setzt man diese Werte in (170) ein, so erhält man

$$-\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = -\frac{c_0}{g\, y_0}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial t} + c_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right) - \frac{1}{g\, y_0}\left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + c_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial t}\right)$$

oder, etwas anders geordnet,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\left(1 - \frac{g\, y_0}{c_0^2}\right) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial t} \frac{2}{c_0} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0. \tag{170a}$$

Zur Lösung der vorstehenden Differentialgleichung sei der Ansatz gemacht:

$$\eta = f(x - \omega t), \tag{171}$$

wo f eine beliebige Funktion und ω eine zunächst unbekannte Konstante von der Dimension $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}\right]$ bedeuten. Bildet man aus (171)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\omega f'; \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} = f';$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \omega^2 f''; \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial t} = -\omega f''; \qquad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = f''$$

und setzt diese Werte in (170a) ein, so folgt

$$f''\left(1 - \frac{g\, y_0}{c_0^2}\right) - \frac{2\omega}{c_0} f'' + \frac{\omega^2}{c_0^2} f'' = 0.$$

Nach Streichung von f'' entsteht daraus eine quadratische Gleichung für ω, nämlich

$$\omega^2 - 2\,\omega\, c_0 + (c_0^2 - g\, y_0) = 0$$

mit den Wurzeln

$$\omega = c_0 \pm \sqrt{g\, y_0}. \tag{172}$$

Gl. (170a) wird also durch den Ansatz (171) befriedigt, wenn ω die durch (172) dargestellten Werte annimmt.

Die Bedeutung von ω geht nun aus folgender Überlegung hervor. Ist η die Erhebung des gestörten Wasserspiegels über den ungestörten an der Stelle x zur Zeit t, und soll dieselbe Erhebung an der Stelle $x + \varDelta x$ zur Zeit $t + \varDelta t$ auftreten, so muß nach (171) sein

$$f(x - \omega t) = f\{x + \varDelta x - \omega(t + \varDelta t)\}.$$

Daraus folgt aber

$$\varDelta x = \omega \varDelta t,$$

d. h. ω gibt die Geschwindigkeit an, mit welcher die Erhebung ohne Änderung ihrer Gestalt von der Stelle x zur Stelle $x + \varDelta x$ vorrückt. Dabei entspricht das positive Vorzeichen in (172) einem Vorrücken der Stufe mit dem Strom, das negative einem solchen gegen den Strom. In „Flüssen" (strömende Bewegung) ist c_0 kleiner als die Grenzgeschwindigkeit $c_{gr} = \sqrt{g y_0}$; in ihnen kann sich also eine Anschwellung flußaufwärts fortpflanzen. In „Wildbächen" ist dieses nach (172) wegen $c_0 > c_{gr}$ nicht möglich (vgl. hierzu die Ausführungen auf S. 121). Aus Gl. (172) folgt weiter die bekannte Erscheinung, daß eine Hochwasserwelle flußabwärts schneller fortschreitet, als dieses der normalen Stromgeschwindigkeit entsprechen würde.

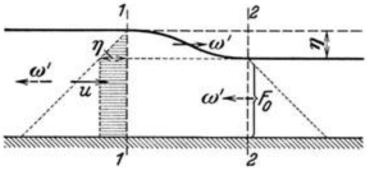


Abb. 121. Fortschreitender Schwall auf ruhendem Unterwasser.

Man kann das Ergebnis dieser Näherungsrechnung, welche hier in der Hauptsache zur Klarlegung des ganzen Gedankenganges durchgeführt wurde, wesentlich schneller (und vollständiger) auch mit Hilfe des Impulssatzes ableiten, wie nachstehend gezeigt wird.

In Abb. 121 bezeichne η wieder die Schwallhöhe und ω' die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schwalles gegen das ruhend vorausgesetzte Unterwasser. Wenn der Schwall, dessen mittlere Breite b sei, mit der Geschwindigkeit ω' nach rechts fortschreitet, vergrößert sich das Wasservolumen rechts vom Querschnitt *1—1* in der Zeiteinheit um $\omega' b \eta$*. Das gleiche Volumen muß also durch diesen Querschnitt hindurchströmen. Demnach herrscht links vom Querschnitt *1—1* eine Wassergeschwindigkeit u, die sich wie folgt berechnet:

$$u(F_0 + b\eta) = \omega' b \eta, \tag{173}$$

wenn F_0 den ungestörten Querschnitt unterhalb der Stufe bezeichnet.

Man denke sich nun durch die beiden Querschnitte *1—1* und *2—2* eine Wassermasse abgegrenzt und wende auf diese den Impulssatz an. Um die Strömung stationär zu machen, betrachte man die Bewegung von einem Koordinatensystem aus, das mit dem Schwall fest verbunden ist. Dann herrscht im Querschnitt *1—1* von rechts nach links die Geschwindigkeit $\omega' - u$, im Querschnitt *2—2* die Geschwindigkeit ω'. Nach dem Impulssatz ist (bei stationärer Strömung) der Überschuß des aus dem abgegrenzten Bereich pro Zeiteinheit austretenden Im-

* Man denke sich, um das einzusehen, den Schwall vorn geradlinig begrenzt.

pulses über den eintretenden gleich der Summe der äußeren Kräfte. Letztere werden gebildet von den als statisch verteilt angenommenen Wasserdrücken auf die beiden Schnittflächen; die Reibung wird bei der geringen Entfernung der Querschnitte vernachlässigt. Der Impulssatz liefert also folgende Beziehung (Abb. 121)

$$-\gamma\left(F_0\eta+\frac{b\,\eta^2}{2}\right)=\varrho\,Q'\,(\omega'-u-\omega')$$

oder, wegen $Q'=F_0\,\omega'$,

$$F_0\,\eta+\frac{b\,\eta^2}{2}=\frac{F_0\,\omega'\,u}{g}\,.$$

Man kann hier noch u aus (173) einführen, womit vorstehender Ausdruck übergeht in

$$F_0\,\eta+\frac{b\,\eta^2}{2}=\frac{F_0\omega'^2 b\eta}{g(F_0+b\eta)}$$

oder

$$2\,F_0\,\omega'^2\,b=g\,(2F_0^2+3F_0 b\,\eta+b^2\eta^2)\,.$$

Vernachlässigt man schließlich das dritte Glied in der Klammer als klein höherer Ordnung, so erhält man als Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schwalles

$$\omega'=\sqrt{g\left(\frac{F_0}{b}+\frac{3}{2}\,\eta\right)}\,. \tag{174}$$

Dieser Ausdruck ist zuerst von Saint-Venant[1] abgeleitet worden, welcher für die Geschwindigkeit des Schwalles ω' die Bezeichnung „Schnelligkeit" (célérité) einführte, zum Unterschied von der Geschwindigkeit der einzelnen Wasserteilchen. Besitzt das Wasser vor der Ankunft des Schwalles bereits eine Fließgeschwindigkeit c_0, so wird die absolute Schwallgeschwindigkeit je nach der Richtung des Schwalles

$$\omega=c_0\pm\omega',$$

und man erkennt die Übereinstimmung mit (172), wenn man in (174) für rechteckige Gerinne $\frac{F_0}{b}=y_0$ setzt und außerdem das von η herrührende Glied bei sehr kleinen Schwallhöhen in erster Näherung streicht.

Für rechteckige Gerinne läßt sich (174) noch wie folgt umformen:

$$\omega'=\sqrt{g\left(y_0+\frac{3}{2}\,\eta\right)}=\sqrt{g\,y_0}\sqrt{1+\frac{3}{2}\,\frac{\eta}{y_0}}\approx\sqrt{g\,y_0}\left(1+\frac{3}{4}\,\frac{\eta}{y_0}\right). \tag{175}$$

Bei den Überlegungen, welche zu Gl. (172) führten, wurde neben anderen Vereinfachungen auch auf die Krümmung der Stromfäden keine Rücksicht genommen, wodurch natürlich manche Feinheiten der Rechnung verlorengehen. Indessen kann hierauf an dieser Stelle nicht

[1] de Saint-Venant, B.: Comptes rendus Bd. 71 S. 186. Paris 1870.

weiter eingegangen werden. Leser, die sich darüber genauer unterrichten wollen, seien besonders auf die Arbeiten von Boussinesq[1], Flamant[2] und v. Mises[3] verwiesen. Erwähnt sei nur noch die von Boussinesq abgeleitete Gleichung für die „Schnelligkeit" einer Ordinate, vor welcher der Schwall stets dasselbe Volumen besitzt. Sie lautet:

$$\omega'' = c_0 \pm \sqrt{g\,y_0}\left(1 + \frac{3}{4}\,\frac{\eta}{y_0} + \frac{y_0^2}{6\,\eta}\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right), \tag{176}$$

wobei c_0 wieder die bereits vorhandene Fließgeschwindigkeit des Wassers und η die Erhebung über den ungestörten Spiegel bezeichnet. Bei Vernachlässigung der Stromfadenkrümmung geht der vorstehende Ausdruck mit $c_0 = 0$ wieder in den Wert ω' der Gl. (175) über. Aus (176) erkennt man insbesondere, daß den Wasserteilchen mit positiver Krümmung der Stromfäden eine größere Geschwindigkeit entspricht als solchen mit negativer Krümmung, womit offenbar eine Formänderung der Anschwellung verbunden sein muß, die schließlich zum Überkippen führen kann.

Zur Erforschung der hier besprochenen Erscheinungen sind von verschiedenen Seiten umfangreiche Versuche angestellt worden, durch welche die obigen Darlegungen im großen und ganzen gut bestätigt werden[4].

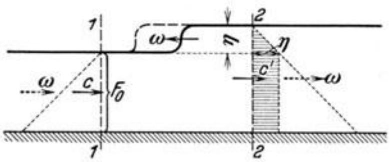


Abb. 122. Flußaufwärts wandernder Stauschwall.

d) Berechnung der Schwallhöhe.

Bei den bisherigen Überlegungen handelte es sich im wesentlichen um die Ermittlung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der durch irgendeine Störung in einem Gerinne erzeugten Einzelwelle. Hält die Störung längere Zeit an — etwa durch Verminderung des Abflusses — so entsteht ein zusammenhängender, stromaufwärts wandernder Schwall, dessen Höhe jetzt berechnet werden soll.

In Abb. 122 bezeichne c die ungestörte Geschwindigkeit oberhalb des Schwalles, c' diejenige unterhalb der Schwallstufe, welche durch ruckartige Hemmung des Abflusses bedingt sei, und ω sei die stromaufwärts gerichtete „Schnelligkeit" des Schwalles. Ferner sei F_0 der ungestörte Querschnitt, η die Schwallhöhe und b die mittlere Schwallbreite. Dann ist aus Gründen der Kontinuität

$$F_0\,c = (F_0 + b\,\eta)\,c' + \omega\,b\,\eta\,. \tag{177}$$

Zur Berechnung von η soll auch hier der Impulssatz angewendet werden.

[1] Théorie des eaux courantes, S. 348ff.; vgl. auch Forchheimer: Hydraulik 3. Aufl. S. 250.

[2] Annales des ponts et chaussées 1889 II S. 5 sowie Hydraulique 2. Aufl. S. 418.

[3] Technische Hydromechanik, S. 193, 203.

[4] Feifel, E.: VDI-Forsch.-Heft Nr. 205. Berlin 1918. P. Böß: VDI-Forsch.-Heft Nr. 284. Berlin 1927. R. Winkel: Aufnahme der beim Schleusen in einer Kanalhaltung entstandenen Senkungswellen, Bautechnik 1924 S. 251.

Wie früher (S. 142) sei die Strömung wieder stationär gemacht, indem man das Koordinatenkreuz mit dem Schwall fest verbunden ansieht. Dann herrscht im Schnitt *1—1* die Geschwindigkeit $\omega + c$, im Schnitt *2—2* $\omega + c'$ (Abb. 122), und man erhält ähnlich wie früher folgende Impulsgleichung

$$-\gamma\left(F_0\eta + \frac{b\eta^2}{2}\right) = \varrho F_0(\omega + c)\left[c' + \omega - (\omega + c)\right]$$

oder

$$F_0\eta + \frac{b\eta^2}{2} = \frac{F_0}{g}(\omega + c)(c - c'). \tag{178}$$

Nun folgt aus (177)

$$\omega = \frac{F_0(c - c')}{b\eta} - c',$$

womit (178) übergeht in

$$F_0\eta + \frac{b\eta^2}{2} = \frac{F_0}{g}(c - c')\left\{c - c' + \frac{F_0}{b\eta}(c - c')\right\}.$$

Streicht man hier das Glied $\frac{b\eta^2}{2}$ als hinreichend klein gegenüber $F_0\eta$, so erhält man

$$\eta = \frac{(c - c')^2}{g}\left(1 + \frac{F_0}{b\eta}\right)$$

oder die quadratische Gleichung

$$\eta^2 - \frac{(c - c')^2}{g}\eta = \frac{(c - c')^2}{g}\frac{F_0}{b}. \tag{179}$$

Ihre Wurzeln sind

$$\eta = \frac{(c - c')^2}{2g} \underset{(-)}{+} \sqrt{\left[\frac{(c - c')^2}{2g}\right]^2 + \frac{(c - c')^2}{g}\frac{F_0}{b}}, \tag{180}$$

von denen bei positivem η ersichtlich nur diejenige mit dem positiven Zeichen in Betracht kommt.

Bei plötzlicher Hemmung des gesamten Abflusses folgt aus (180) mit $c' = 0$ sofort

$$\eta = \eta_{\max} = \frac{c^2}{2g} + \sqrt{\left(\frac{c^2}{2g}\right)^2 + 2\frac{c^2}{2g}\frac{F_0}{b}}.$$

Im allgemeinen wird es sich nicht um eine plötzliche, sondern um eine allmähliche Drosselung des Unterwassers handeln. Dann kann man wie folgt vorgehen. Man denke sich den Schwall allmählich bis zur Höhe η angestiegen und sperre jetzt das Wasser weiter um so viel ab, daß dadurch eine Geschwindigkeitsänderung $\delta c'$ bedingt ist. Dann gilt für die entsprechende Änderung der Schwallhöhe nach (179)

$$(\delta\eta)^2 = \frac{(\delta c')^2}{g}\left(\eta + \frac{F_0}{b}\right).$$

Beachtet man noch, daß einem positiven $\delta\eta$ ein negatives $\delta c'$ entsprechen muß (da ja die Geschwindigkeit c' kleiner wird, wenn der

Spiegel steigt), so folgt aus obiger Gleichung

$$\delta\eta = -\frac{\delta c'}{\sqrt{g}}\sqrt{\eta + \frac{F_0}{b}}$$

oder

$$\frac{\delta\eta}{\sqrt{\eta + \frac{F_0}{b}}} = -\frac{\delta c'}{\sqrt{g}},$$

woraus durch Integration folgt:

$$2\sqrt{\left(\eta + \frac{F_0}{b}\right)g} = -c' + C. \tag{181}$$

Die Konstante C bestimmt sich aus der Bedingung $\eta = 0$ für $c' = c$, also

$$2\sqrt{\frac{F_0}{b}g} + c = C,$$

womit (181) übergeht in

$$2\left\{\sqrt{\left(\eta + \frac{F_0}{b}\right)g} - \sqrt{\frac{F_0}{b}g}\right\} = c - c'.$$

Soll das Wasser auf die Geschwindigkeit $c' = c_1$ abgedrosselt werden, so erhält man das zugehörige $\eta = \eta_1$ aus vorstehender Gleichung, indem man $c' = c_1$ setzt und nach η auflöst, zu

$$\eta_1 = \frac{(c - c_1)^2}{4g} + (c - c_1)\sqrt{\frac{F_0}{gb}}.$$

Speziell folgt daraus für $c_1 = 0$ (vollständige Drosselung)

$$\eta_{(c_1=0)} = \frac{c^2}{4g} + c\sqrt{\frac{F_0}{gb}}\ *.$$

6. Geschiebebewegung.

Bei den bisherigen Betrachtungen des vorliegenden Abschnittes war durchweg ein der Form nach bekanntes Gerinne mit festen Wandungen vorausgesetzt. Die Bewegung des Wassers in derartigen Gerinnen ist heute so weit geklärt, daß man die theoretischen Gesetzmäßigkeiten — wenigstens bei den von der Zeit unabhängigen Vorgängen — mit einiger Sicherheit beherrscht und die Gesichtspunkte kennt, nach denen weitere Versuche — insbesondere zur Erforschung des Einflusses der „Wandrauhigkeit“ und der Querschnittsform — anzustellen sind.

Anders liegen die Verhältnisse, wenn man dazu übergeht, den Einfluß der „Geschiebebewegung“ in natürlichen Flüssen und Bächen auf den Bewegungsvorgang und die Querschnittsform genauer zu studieren. Hier harren, was bei der Mannigfaltigkeit der Erscheinungen erklärlich ist, noch viele Fragen ihrer endgültigen Lösung, und es kann

* Vgl. hierzu auch E. Feifel: Fußnote 4 S. 144.

natürlich nicht die Aufgabe dieses Buches sein, eine auch nur einigermaßen erschöpfende Darstellung dieser äußerst verwickelten Vorgänge zu geben, zumal dabei Fragen angeschnitten werden müßten, die aus dem Rahmen der eigentlichen Hydrodynamik herausfallen (z. B. geologisch-petrographische, chemisch-biologische und allgemein physikalische).

Hier sollen nur einige kurze Bemerkungen über die Art der Geschiebebewegung und ihren Einfluß auf den Bewegungsvorgang des Wassers in natürlichen Gerinnen Platz finden, während der Einfluß der mechanischen Wirkung des Geschiebes auf die Gestaltung des Flußbettes (Verlagerung, Versandung, Kolkbildung usw.) außerhalb des Rahmens dieses Buches liegt[1].

Gegenstand der Betrachtung sind also nicht diejenigen Gerinne, die wie ein gemauerter oder betonierter Kanal von festen Wandungen gebildet werden, sondern die natürlichen Flüsse, welche auf ihrem Laufe vom Gebirge zum Meer mehr oder weniger grobe bewegliche Körper — von feinem Schlamm über Sand und Kies bis zu größeren Steinblöcken — mitführen. Diese Geschiebeteile lassen, wie die Erfahrung gelehrt hat, eine vielseitige Bewegung erkennen, die je nach der Größe des Gefälles bzw. der Geschwindigkeit des Wassers und nach der Korngröße der beweglichen Teile in einem Kanten, Rollen, Hüpfen oder auch freiem Schweben über der Sohle bestehen kann. Es liegt auf der Hand, daß damit eine ständige Umbildung des Flußbettes, besonders der Sohle, verbunden ist, indem einzelnes Material abgetragen, anderes vom Oberlauf her wieder zugeführt wird. Daß dabei die jeweilige Höhe des Wasserstandes einen wesentlichen Einfluß hat, ist ohne weiteres zu verstehen. Aus der Erfahrung ist weiter bekannt, daß die Geschiebe im allgemeinen am größten sind im Oberlauf der Flüsse, dagegen am kleinsten im Mündungsgebiet, und daß sie auf ihrem Wege einen „Abrieb", d. h. eine Abrundung, zum Teil auch eine Zertrümmerung (besonders im Oberlauf) erleiden. Abgesehen von dem Einfluß, den die Geschiebe auf die hydraulisch wirksame Rauhigkeit des Flußbettes ausüben, haben sie häufig auch eine Umbildung der Querschnittsform zur Folge und beeinflussen auf diese Weise den gesamten Strömungsvorgang, der damit nicht als etwas Endgültiges, sondern vielfach Veränderliches erscheint.

Um eine Vorstellung über den Beginn der Geschiebebewegung zu bekommen, kann man von der Wandschubspannung τ_0 ausgehen und die Frage erheben: bei welchem Werte von τ_0 beginnt die Bewegung des Geschiebes? — Für die „mittlere Wandschubspannung", d. h. die auf die Flächeneinheit bezogene Widerstandskraft der Gerinnewandung, ist nach Bd. I S. 89

$$\tau_{0_m} = \psi' \frac{\varrho}{2} c^2 ,$$

[1] Zum tieferen Studium der mit der Geschiebebewegung zusammenhängenden Vorgänge sei insbesondere auf die Darstellungen von Forchheimer: Hydraulik 3. Aufl. S. 527; Neményi: Wasserbauliche Strömungslehre 1933 S. 115; Eisner: Offene Gerinne, Handb. d. Experimentalphysik Bd. 4 Teil 4 S. 420; Schoklitsch: Über Schleppkraft und Geschiebebewegung, Leipzig und Berlin 1914, verwiesen.

wo ψ' die jetzt maßgebende „Widerstandsziffer" und c die mittlere Geschwindigkeit bezeichnet. Setzt man in Analogie zu Gl. (127) $\frac{\psi' c^2}{2} = J g r_h$, so läßt sich die Wandschubspannung auch in der Form

$$\tau_{0_m} = J \gamma r_h$$

darstellen, woraus als gesamte, auf den laufenden Meter Gerinnelänge entfallende „Schleppkraft" entsteht:

$$S = \tau_{0_m} u \cdot 1^{[m]} = J \gamma F,$$

wenn $u \cdot r_h = F$ den von Wasser erfüllten Querschnitt bezeichnet.

Im allgemeinen darf nicht angenommen werden, daß τ_0 an jeder Stelle der Sohle oder der Seitenwand denselben Wert hat, besonders dann nicht, wenn die Wandrauhigkeit — und damit ψ — an verschiedenen Stellen als verschieden angenommen werden muß. Auch die Querschnittsform und die Reynoldssche Zahl dürften von Einfluß auf τ_0 sein. Das leuchtet ein, wenn man τ_0 nach dem Newtonschen Ansatz (Bd. I S. 72) in der Form

$$\tau_0 = \mu \left[\frac{dv}{dz}\right]_{z=0}$$

anschreibt, wonach τ_0 von dem Geschwindigkeitsgefälle an der Wand und damit von der Querschnittsform und der Reynoldsschen Zahl abhängt. Bei rechteckigen Querschnitten scheint indessen, wie entsprechende Versuche gezeigt haben, bei den verwendeten Geschwindigkeiten, abgesehen von den Ecken, ein nahezu konstanter Wert von τ_0 vorhanden zu sein, vorausgesetzt, daß die Rauhigkeit überall die gleiche ist.

Über die Größe der „Grenzschubspannung" $(\tau_0)_{gr}$ (Grenzschleppkraft pro Flächeneinheit), bei welcher die Geschiebebewegung beginnt, liegen einige Versuche und auch Beobachtungen an Flüssen vor, jedoch ist eine theoretische Gesetzmäßigkeit, d. h. Abhängigkeit des Wertes $(\tau_0)_{gr}$ von der Korngröße und Form, dem spezifischen Gewicht, dem Korngefüge usw., noch nicht so weit geklärt, daß sich darüber schon ein abschließendes Urteil bilden ließe. Sicher scheint zu sein, daß diejenige Grenzschubspannung, die notwendig ist, um das Geschiebe in Bewegung zu setzen, größer ist als der Wert, bei dem das Geschiebe zur Ruhe kommt. Zur Veranschaulichung der ungefähren Größenordnung der Grenzschubspannung sei mitgeteilt, daß $(\tau_0)_{gr}$ nach den vorliegenden Beobachtungen an natürlichen Flüssen je nach Korngröße und Geschiebematerial etwa zwischen 1,0 und 4,0 kg/m² liegen dürfte[1].

Hinsichtlich der Berechnung der mittleren Geschwindigkeit ist man zur Zeit noch auf die Benutzung der für feste Wandungen angegebenen Geschwindigkeitsformel (129) angewiesen, also

$$c = \sqrt{\frac{2g}{\psi'}} \sqrt{J r_h}$$

[1] Kreuter, F.: Handb. der Ingenieurwissenschaften, 3. Teil; Wasserbau Bd. 6; Flußbau 1921 5. Aufl. S. 12.

(an deren Stelle natürlich auch eine „Potenzformel" treten kann, siehe S. 115), wo ψ' jetzt aber einen anderen, und zwar größeren Wert haben wird als früher. Dieser Wert muß vorläufig noch aus Beobachtungen ermittelt werden, solange die genauere Abhängigkeit von den die Strömung bestimmenden Größen — insbesondere auch von der Geschiebebewegung — nicht bekannt ist. Auch die richtige Einführung des Gefälles J bereitet bei natürlichen Flüssen wegen der Veränderlichkeit der Sohle und der Wasserzufuhr gewisse Schwierigkeiten.

Aus den vorstehenden Bemerkungen dürfte schon hervorgehen, daß auf dem Gebiete der Geschiebebewegung noch viele Fragen ihrer Lösung harren. Hier eröffnet sich also ein wichtiges Betätigungsfeld sowohl für die theoretische als auch für die Versuchsforschung. Denn nach den Erfahrungen bei der Rohrströmung, wo man es mit ungleich einfacheren und übersichtlicheren Verhältnissen zu tun hat, unterliegt es keinem Zweifel, daß ein Erfolg nur durch eine Zusammenfassung allgemein gültiger Ansätze der Physik mit planmäßig angelegten Versuchen zu erwarten ist.

7. Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln.

Wie aus den bisherigen Untersuchungen dieses und auch der vorhergehenden Abschnitte ersichtlich ist, können zwar eine große Reihe von Strömungserscheinungen theoretisch vollkommen befriedigend erfaßt werden, andere bedürfen dagegen zu ihrer genaueren Erforschung des planmäßig angestellten Versuches. Es wäre im allgemeinen wünschenswert, wenn solche Versuche in natürlicher Größe ausgeführt werden könnten. Indessen scheitert dieses gewöhnlich entweder an den dabei entstehenden Kosten oder an den Schwierigkeiten, die sich einer unmittelbaren Beobachtung entgegenstellen. In solchen Fällen muß der Modellversuch zu Hilfe genommen werden. Um nun die an solchen Modellen gewonnenen Erkenntnisse auf die Großausführung übertragen zu können, hat man bestimmte Modellregeln zu beachten, die ihre Begründung in den allgemeinen physikalischen Ähnlichkeitsgesetzen finden.

Für Strömungen, welche außer von den bei allen dynamischen Vorgängen auftretenden Trägheitskräften wesentlich von der Flüssigkeitsreibung beherrscht werden, kommt, wie bereits früher des öfteren erwähnt wurde, das Reynoldssche Ähnlichkeitsgesetz in Frage. Bei zwei geometrisch ähnlichen Strömungen verhalten sich die Trägheitskräfte (bezogen auf die Raumeinheit) wie die entsprechenden Werte $\frac{\varrho V^2}{L}$, die Reibungskräfte wie die Werte $\frac{\mu V}{L^2}$ (Bd. I S. 86). Die dimensionslose Verhältniszahl

$$\mathfrak{R} = \frac{\varrho V^2}{L} : \frac{\mu V}{L^2} = \frac{\varrho L V}{\mu} = \frac{L V}{\nu} \tag{182}$$

stellt die Reynoldssche Zahl dar, welche im Falle mechanischer Ähnlichkeit an ähnlich gelegenen Punkten für beide Strömungen denselben Wert haben muß (L = charakteristische Länge, V = charakteristische Geschwindigkeit).

Während nun das Reynoldssche Gesetz allein genügt, um die Vorgänge bei der Strömung in geschlossenen, vollaufenden Leitungen von einem Modell auf eine Ausführung anderen Maßstabes (aber geometrischer Ähnlichkeit) zu übertragen — da derartige Strömungen fast ausschließlich von der Flüssigkeitsreibung beherrscht werden — spielen bei den Bewegungen in offenen Gerinnen außer den Reibungskräften wegen der vorhandenen freien Oberfläche auch noch die Schwerkraft und gegebenenfalls Kapillarkräfte (Oberflächenspannungen) eine mehr oder weniger entscheidende Rolle. Jeder dieser Kraftwirkungen entspricht ein anderes Ähnlichkeitsgesetz.

Das Zusammenwirken von Trägheitskräften und Schwerkräften findet seinen Ausdruck im Froudeschen Gesetz, zu dem man gelangt, indem man ähnlich wie oben beim Reynoldsschen Gesetz die dimensionslose Verhältniszahl der Trägheitskräfte $\frac{\varrho V^2}{L}$ zu den Schwerekräften ϱg (wieder bezogen auf die Raumeinheit) bildet, also

$$\mathfrak{F} = \frac{V^2}{L g}. \tag{183}$$

Zwei derartige Strömungen verlaufen also mechanisch ähnlich, wenn beide außer geometrischer Ähnlichkeit an ähnlich gelegenen Punkten noch die gleiche Zahl $\mathfrak{F}$ besitzen. Im Schiffbau, wo das Froudesche Modellgesetz (wie bei allen Wellenproblemen) eine besondere Rolle spielt, wird gewöhnlich an Stelle von $\mathfrak{F}$ der Wurzelwert

$$\mathfrak{F}' = \frac{V}{\sqrt{L g}} \tag{183a}$$

als Froudesche Kennzahl eingeführt. Bei der Bewegung in offenen Gerinnen findet dieses Gesetz Anwendung zur Untersuchung von Vorgängen, die durch besondere Einbauten (z. B. Brückenpfeiler usw.) bedingt sind, wodurch gewisse Erscheinungen an der freien Oberfläche hervorgerufen werden.

Neben diesen beiden Modellgesetzen muß bei Vorgängen mit einer stark gekrümmten freien Oberfläche mitunter noch das Webersche Gesetz herangezogen werden, welches das Zusammenwirken von Trägheits- und Kapillarkräften berücksichtigt (z. B. beim freien Überfall, vgl. S. 31). Um dieses in ähnlicher Weise wie oben abzuleiten, hat man zu beachten, daß die auf die Raumeinheit bezogene Kapillarkraft die Dimension $\frac{T}{L^2}$ besitzt, wo T die Kapillaritätskonstante darstellt (vgl. Bd. I S. 39). Die Verhältniszahl der Trägheitskräfte $\frac{\varrho V^2}{L}$ zu den Kapillarkräften $\frac{T}{L^2}$ ist also

$$W = \frac{\varrho V^2 L}{T} \tag{184}$$

und wird als Webersche Modellzahl bezeichnet[1].

[1] Weber, M.: Die Grundlagen der Ähnlichkeitsmechanik und ihre Verwertung bei Modellversuchen. Jb. Schiffbautechn. Ges. 1919 S. 355; vgl. auch Jb. 1930 S. 318.

Streng genommen müßte auch noch thermische Ähnlichkeit verlangt werden, wovon allerdings bei den hier in Frage kommenden Untersuchungen gewöhnlich abgesehen wird, da die Erfüllung der obigen Bedingungen ohnehin schon erhebliche Schwierigkeiten bereitet, ja in strenger Form überhaupt nicht möglich ist, wie sich weiter unten noch zeigen wird.

Zur vollkommenen dynamischen Ähnlichkeit zweier Flüssigkeitsbewegungen muß außer geometrischer Ähnlichkeit der Flüssigkeitsbahnen noch verlangt werden, daß die beiden Strömungen auch zeitlich sowie hinsichtlich der auftretenden Kräfte in allen Teilen ähnlich verlaufen. Bezeichnen $\lambda, \tau, \varkappa$ die drei Maßstabverhältnisse für entsprechende Längen, Zeiten und Kräfte, so ist $\lambda = \frac{L}{l}$; $\tau = \frac{\mathfrak{T}}{t}$; $\varkappa = \frac{K}{k}$, wenn $L, \mathfrak{T}, K$ die Längen, Zeiten und Kräfte der einen Ausführung, l, t, k die entsprechenden Werte der anderen darstellen (etwa der Hauptausführung und des Modelles). Für jedes der oben angegebenen Modellgesetze lassen sich die Zahlen τ und $\varkappa$, weiter die Umrechnungsfaktoren für Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, sekundliche Wassermengen usw. eindeutig durch den Längenmaßstab λ ausdrücken. Für die Geschwindigkeiten erhält man wegen $V = \frac{L}{\mathfrak{T}} = \frac{\lambda l}{\tau t}$ und $v = \frac{l}{t}$

$$\frac{V}{v} = \frac{\lambda}{\tau} \tag{185}$$

und für die Beschleunigungen

$$\frac{B}{b} = \frac{\lambda}{\tau^2}. \tag{186}$$

Da weiter Kraft = Masse $\times$ Beschleunigung, so ist

$$K = M B = \text{Vol.}\, \varrho_1 B = L^3 \varrho_1 B = \lambda^3 l^3 \varrho_1 B \quad \text{und} \quad k = l^3 \varrho_2 b\,.$$

Daraus folgt aber bei Verwendung desselben Mediums ($\varrho_1 = \varrho_2$)

$$\varkappa = \frac{K}{k} = \lambda^3 \frac{B}{b} = \frac{\lambda^4}{\tau^2}. \tag{187}$$

Für die sekundlich einen Querschnitt durchströmende Wassermenge gilt $Q = \frac{L^3}{\mathfrak{T}} = \frac{\lambda^3 l^3}{\tau t}$ und $q = \frac{l^3}{t}$, weshalb

$$\frac{Q}{q} = \frac{\lambda^3}{\tau}. \tag{188}$$

Es braucht also aus dem betreffenden Modellgesetz nur τ ermittelt zu werden, um die Umrechnungsfaktoren (185) bis (188) durch λ ausdrücken zu können.

Reynoldssches Gesetz. Aus (182) erhält man zunächst, wenn für beide Ausführungen die gleiche Flüssigkeit verwendet wird ($\nu_1 = \nu_2$), wegen $L V = \lambda l V = l v$, $\frac{V}{v} = \frac{1}{\lambda}$ oder, mit Rücksicht auf (185), $\tau = \lambda^2$. Damit folgt aus (187) für die Kräfte $\varkappa = 1$ und aus (188) für die sekundlichen Wassermengen $\frac{Q}{q} = \lambda$.

Froudesches Gesetz. Aus (183) erhält man, da bei irdischen Vorgängen den beiden Ausführungen die gleiche Schwerebeschleunigung g entspricht, wegen $\frac{V^2}{L} = \frac{V^2}{\lambda l} = \frac{v^2}{l}$, $\frac{V}{v} = \lambda^{1/2}$ oder, mit Rücksicht auf (185), $\tau = \lambda^{1/2}$. Damit folgt aus (187) $\varkappa = \lambda^3$ und aus (188) $\frac{Q}{q} = \lambda^{5/2}$.

Webersches Gesetz. Aus (184) erhält man mit $\varrho_1 = \varrho_2$ und $T_1 = T_2$ (gleiche Flüssigkeit bei beiden Ausführungen) $V^2 L = V^2 \lambda l = v^2 l$ oder $\frac{V}{v} = \lambda^{-1/2}$. Demnach wird $\tau = \lambda^{3/2}$; $\varkappa = \lambda$; $\frac{Q}{q} = \lambda^{3/2}$.

Vergleicht man nun die vorstehend ermittelten Maßstabsfaktoren, so erkennt man, daß bei Verwendung gleicher Flüssigkeit mechanische Ähnlichkeit zwischen zwei Strömungsvorgängen in strenger Form überhaupt nicht hergestellt werden kann, sobald außer Trägheitskräften mehr als eine der den obigen Gesetzen entsprechenden Kraftarten (Reibung, Schwere, Oberflächenspannung) in Erscheinung treten. Bei Rohrströmungen, bei denen allein die Flüssigkeitsreibung eine entscheidende Rolle spielt, kann mechanische Ähnlichkeit mit Hilfe des Reynoldsschen Gesetzes eindeutig erzielt werden. Bei Strömungen in offenen Gerinnen ist das jedoch im allgemeinen nicht der Fall, da eben hier außer der Reibung noch die Schwere von Einfluß ist (Oberflächenerscheinungen; die Kapillarkräfte können in den meisten Fällen unberücksichtigt bleiben). Nach dem Reynoldsschen Gesetz müßten sich die Kräfte bei einer Hauptausführung (K) zu denen am Modell (k) verhalten wie 1 : 1, die Geschwindigkeiten $\frac{V}{v}$ wie $1 : \lambda$; nach dem Froudeschen Gesetz dagegen die Kräfte wie $\lambda^3 : 1$ und die Geschwindigkeiten wie $\sqrt{\lambda} : 1$, wo $\lambda > 1$ ist. Nach dem Reynoldsschen Gesetz müßten also die Geschwindigkeiten am Modell das λ-fache derjenigen bei der Hauptausführung sein, nach dem Froudeschen Gesetz dagegen nur das $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$-fache. Beide Forderungen lassen sich nicht gleichzeitig in Einklang bringen. Grundsätzlich könnte man in einzelnen Fällen diese Schwierigkeit beheben durch Wahl verschiedener Flüssigkeiten und gegebenenfalls verschiedener Temperaturen (was verschiedene ϱ, ν, T zur Folge hätte); indessen sind damit gewöhnlich wieder andere Nachteile verbunden, durch welche das Experimentieren erschwert wird.

Überwiegt, wie das praktisch häufig der Fall ist, eine der Kraftwirkungen bei weitem — etwa die Schwere gegenüber der Reibung — so wird man nur das dieser Kraft entsprechende Modellgesetz (im vorliegenden Falle also das Froudesche) beachten und den Einfluß der Reibung nachträglich durch Erfahrungswerte oder durch besondere, lediglich die Reibung erfassende Versuche berücksichtigen (vgl. hierzu S. 267). Genügt dieses Verfahren nicht mehr, so kann man mehrere geometrisch ähnliche Modelle von verschiedener Größe untersuchen und durch Vergleich der durch Messung gefundenen Werte gegebenenfalls einen Schluß auf die Hauptausführung mittels einer Extrapolation ziehen. Eine eingehende kritische Betrachtung der bei Modellversuchen an offenen Gerinnen auftretenden Schwierigkeiten — besonders auch hinsichtlich der unvollkommenen Rauhigkeitsnachbildung der Modellwandungen und die zu ihrer Überwindung erforderlichen bzw. möglichen Maßnahmen hat neuerdings F. Eisner[1] angestellt, worauf hier verwiesen werden muß. Es sei nur noch bemerkt, daß man bei der Wahl der Modellabmessungen selbstverständlich darauf zu achten hat, daß im Modell die gleiche Fließart vorhanden ist wie bei der Hauptausführung (laminar oder turbulent, Schießen oder Strömen), daß Kavitationserscheinungen ausgeschlossen sind und daß die für das Auftreten von Wellen mindestens erforderliche Geschwindigkeit von rund 23 $\left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right]$ im Modell nicht unterschritten wird (vgl. hierzu S. 163).

IV. Wellenbewegung.

1. Einleitung.

Die Gesamtheit der nicht-stationären Erscheinungen, welche man in der Hydrodynamik als „Wellenbewegungen" bezeichnet, kann man zunächst rein äußerlich unterteilen in stehende und fortschreitende Wellen. Zu den ersteren gehören diejenigen Vorgänge, bei denen dieselbe Erscheinung am gleichen Orte periodisch wiederkehrt (Schwingungsknoten und Schwingungsbäuche bleiben an derselben Stelle), während die letzteren durch ein seitliches Fortschreiten der Erscheinung gekennzeichnet sind, das aber nicht mit einem Fortschreiten der Substanz identisch ist. Die einzelnen Teilchen beschreiben vielmehr geschlossene — oder doch nahezu geschlossene — Bahnen (Orbitalbewegung), vorausgesetzt, daß keine translatorische Bewegung der ganzen Flüssigkeit vorhanden ist. Gerade dieser Unterschied zwischen dem Fortschreiten der Welle einerseits und der Teilchenbewegung andererseits ist charakteristisch für das Wesen der fortschreitenden Wellen.

Neben dieser Unterteilung unterscheidet man noch zwischen Schwerewellen und Kapillarwellen, permanenten, d. h. ihre Form beibehaltenden und formändernden Wellen, geraden und kreisförmigen, kurzen und langen Wellen, Wellengruppen und Einzelwellen u. a. m., woraus schon die große Mannigfaltigkeit der Erscheinungsformen hervorgeht. Bei der Bedeutung und Wichtigkeit des Problems für Schiffahrt, Wasserbau und Geophysik ist es nicht verwunderlich, daß die Wellenbewegung seit langem Gegenstand eifriger Forschungen der Mathematiker, Physiker und Ingenieure gewesen ist, die sowohl auf theoretischem als auch auf experimentellem Wege oder durch direkte Beobachtungen in der Natur versucht haben, zu einer Erklärung der vielseitigen und z. T. äußerst verwickelten Vorgänge zu

[1] Eisner, F.: Offene Gerinne. Handb. d. Experimentalphysik von Wien u. Harms Bd. 4, 4. Teil S. 226. Leipzig 1932.

gelangen[1]. Leider sind unsere theoretischen Kenntnisse in dieser Hinsicht noch ziemlich lückenhaft, so daß die auf theoretischem Wege meist unter Zuhilfenahme gewisser Idealisierungen abgeleiteten Gesetze die wirklichen Vorgänge nur zum Teil richtig wiedergeben.

Als Entstehungsursache für Flüssigkeitswellen kommen in der Hauptsache in Betracht: Störungen der Flüssigkeit durch das Eintauchen, Herausziehen oder Fortbewegen fester Körper, Entnahme oder Zuführung von Flüssigkeit, Wirkung des Windes, Gleichgewichtsstörungen durch Erschütterungen usw., sowie Anziehung durch andere Weltkörper (Gezeitenwellen). Aus dieser Aufzählung geht hervor, daß Wellen fast ausschließlich an der Oberfläche erzeugt werden (eine Ausnahme bilden die etwa durch Sprengungen oder Eruptionsvorgänge unter Wasser erzeugten Wellen). Mit wachsender Entfernung von der Oberfläche klingen diese Bewegungen ziemlich schnell ab, weshalb man gewöhnlich von Oberflächenwellen spricht.

Den Ausgangspunkt theoretischer Untersuchungen bilden wieder die allgemeinen Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik in Verbindung mit der Kontinuitätsgleichung und den Randbedingungen. Letztere sind festgelegt durch das Vorhandensein fester Wände, z. B. der Sohle, und einer „freien Oberfläche“, d. h., bei den hier allein interessierenden Fällen, einer Trennungsfläche zwischen Wasser und Luft (Fläche gleichen Druckes). Die Flüssigkeit wird dabei als ideal angesehen, was bei Vorgängen an der Oberfläche (geringer Reibungseinfluß) zulässig sein dürfte. Die strenge Erfüllung der Randbedingungen an der Sohle bereitet jedoch ziemliche Schwierigkeiten, wenn man beachtet, daß nach der Idealtheorie ein Gleiten längs einer festen Wand möglich ist, während in Wirklichkeit die natürlichen Flüssigkeiten an der Wand haften. Man wird also von Fall zu Fall auf gewisse Hilfsannahmen nicht verzichten können.

2. Gerade, fortschreitende Wellen[2].

Vorausgesetzt sei eine in einer horizontalen X-Richtung unendlich ausgedehnte, ideale Flüssigkeit, welche nach unten durch eine horizontale Sohle im Abstand h vom ungestörten Spiegel begrenzt sei. Die zu untersuchende Wellenbewegung soll als eben angesehen werden, d. h. es wird vorausgesetzt, daß alle Wellenkämme quer zur Fortpflanzungs-

[1] Zusammenfassende Darstellungen sind u. a. zu finden bei Lamb: Lehrbuch der Hydrodynamik, deutsch von J. Friedel, S. 291, 424. Leipzig u. Berlin 1907. Thorade: Probleme der Wasserwellen. Hamburg 1931. Auerbach-Hort: Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik Bd. 5 (1931) S. 300. Die experimentellen Methoden sind besonders eingehend in dem Referat von F. Eisner über „Offene Gerinne“ im Handbuch der Experimentalphysik Bd. 4, 4. Teil S. 337, Leipzig 1932, behandelt.

[2] Die nachstehende Theorie ist im wesentlichen von Airy begründet worden (Tides and Waves 1845 § 160ff.). In neuerer Zeit haben Levi-Civita und seine Schüler die Wellentheorie nach verschiedenen Gesichtspunkten weiter ausgebaut. Vgl. etwa „Fragen der klassischen und relativistischen Mechanik“, Berlin: Julius Springer 1924; Mathematische Annalen 1924 und 1925; sowie A. Weinstein: Verh. d. 2. Internat. Kongresses für Technische Mechanik, S. 445. Zürich 1926.

richtung einander parallel sind (gerade Wellen) und daß in allen zu dieser Richtung parallelen Ebenen derselbe Bewegungszustand herrscht. Der Koordinatenursprung sei in die ungestörte Spiegelfläche gelegt; die X-Achse falle in die Fortschreitungsrichtung, die Y-Achse sei lotrecht nach abwärts gerichtet; von der Z-Richtung sei der Vorgang unabhängig.

Da einerseits die Flüssigkeit als ideal angesehen wird, die Bewegung andererseits aus dem Zustand der Ruhe, und zwar unter dem Einfluß konservativer Kräfte (Schwere) erfolgt, so ist die Bewegung nach dem Satz von Thomson wirbelfrei (Bd. I S. 116). Es existiert also ein Geschwindigkeitspotential φ, womit die Kontinuitätsgleichung die bekannte Form

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{189}$$

annimmt (Bd. I S. 113). Für das Geschwindigkeitspotential $\varphi = \varphi(x, y, t)$, welches die vorstehende Gleichung befriedigen muß, soll jetzt der Ansatz

$$\varphi = Y \cos(\alpha x - \beta t) \tag{190}$$

gemacht werden, worin α und β Konstante sein sollen, während Y eine reine Funktion von y ist. Mit diesem Werte für φ liefert (189)

$$-\alpha^2 Y \cos(\alpha x - \beta t) + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} \cos(\alpha x - \beta t) = 0,$$

woraus folgt

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} - \alpha^2 Y = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet bekanntlich

$$Y = A e^{\alpha y} + B e^{-\alpha y},$$

wovon man sich durch Ausdifferenzieren leicht überzeugt, so daß (190) übergeht in

$$\varphi = (A e^{\alpha y} + B e^{-\alpha y}) \cos(\alpha x - \beta t). \tag{191}$$

An der unteren Begrenzung der Flüssigkeit muß die vertikale Geschwindigkeitskomponente verschwinden, d. h. für $y = h$ ist $v_y = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$. Daraus folgt

$$A e^{\alpha h} = B e^{-\alpha h} = \frac{C}{2},$$

wenn als neue Konstante $\frac{C}{2}$ eingeführt wird, womit (191) einfacher lautet

$$\varphi = \frac{C}{2}\{e^{-\alpha(h-y)} + e^{\alpha(h-y)}\} \cos(\alpha x - \beta t)$$

oder

$$\varphi = C \operatorname{Cof} \alpha(h - y) \cdot \cos(\alpha x - \beta t). \tag{191a}$$

Nun gilt für die Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y der Teilchenbewegung

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\alpha C \mathfrak{Cof}\, \alpha (h - y) \sin (\alpha x - \beta t)\,,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\alpha C \mathfrak{Sin}\, \alpha (h - y) \cos (\alpha x - \beta t)\,,$$

wofür man unter der Voraussetzung unendlich kleiner Bewegungen auch schreiben kann

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha C \mathfrak{Cof}\, \alpha (h - y_1) \sin (\alpha x_1 - \beta t)\,,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha C \mathfrak{Sin}\, \alpha (h - y_1) \cos (\alpha x_1 - \beta t)\,,$$

wo x_1, y_1 die Koordinaten der mittleren Lage des betreffenden Teilchens bezeichnen, um welche dieses schwingt. Durch Integration nach der Zeit t folgt daraus mit c und d als Integrationskonstanten

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{\alpha}{\beta} C \mathfrak{Cof}\, \alpha (h - y_1) \cos (\alpha x_1 - \beta t) + c\,, \\ y &= \frac{\alpha}{\beta} C \mathfrak{Sin}\, \alpha (h - y_1) \sin (\alpha x_1 - \beta t) + d\,. \end{aligned}\right\} \tag{192}$$

Quadriert man diese beiden Gleichungen und addiert darauf, so erhält man

$$\frac{(x - c)^2}{\left[-\frac{\alpha}{\beta} C \mathfrak{Cof}\, \alpha (h - y_1)\right]^2} + \frac{(y - d)^2}{\left[\frac{\alpha}{\beta} C \mathfrak{Sin}\, \alpha (h - y_1)\right]^2} = 1\,,$$

d. h. die Gleichung einer Ellipse, deren große und kleine Halbachse die Werte

$$a = -\frac{\alpha}{\beta} C \mathfrak{Cof}\, \alpha (h - y_1)\,; \qquad b = \frac{\alpha}{\beta} C \mathfrak{Sin}\, \alpha (h - y_1) \tag{193}$$

haben[1]. Die einzelnen Teilchen beschreiben demnach in Vertikalebenen geschlossene Ellipsen, deren Halbachsen mit der Tiefe veränderlich sind; speziell wird für $y_1 = h$ die kleine Halbachse $b = 0$. An der Sohle sind also, wie es der oben eingeführten Randbedingung entsprechen muß, keine vertikalen Teilchenbewegungen vorhanden.

Die hier mit Hilfe des Ansatzes (190) gefundenen Ergebnisse stehen in guter Übereinstimmung mit Versuchen der Gebrüder E. H. und W. Weber[2], so daß der gewählte Ansatz als geeignete Grundlage für die weitere Rechnung angesehen werden kann. Übrigens sei hier gleich bemerkt, daß für Wellen von endlicher Amplitude in Wirklichkeit die Teilchenbahnen keine vollständig geschlossenen Kurven sind, was seinen Grund darin hat, daß in den Wellenbergen die Vorwärtsbewegung stärker ist als die Rückwärtsbewegung in den Wellentälern. Die einzelnen

[1] Lorenz, H.: Technische Hydromechanik, S. 309.

[2] Wellenlehre, auf Experimente gegründet. Göttingen 1825. Vgl. auch F. Eisner: Offene Gerinne, a. a. O. S. 347.

Flüssigkeitsteilchen bleiben also nicht durchschnittlich am gleichen Orte, wie es den geschlossenen Bahnen entsprechen würde, sondern es findet ein Massentransport in der Welle statt, der allerdings im allgemeinen so gering ist, daß man für eine erste Näherung davon wird absehen können.

Zur Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird die Energiegleichung der nichtstationären Strömung herangezogen. Diese lautet nach Bd. I S. 120, wenn man die willkürliche Funktion $F(t)$ in den Wert von $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ einschließt,

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + U + \frac{p}{\varrho} = 0\,.$$

Unter der Annahme kleiner Ausschläge der Teilchen kann in vorstehender Gleichung v^2 vernachlässigt werden, weshalb mit $U = -gy$ folgt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - g\,y + \frac{p}{\varrho} = 0\,. \tag{194}$$

Bezeichnet nun η die Erhebung der Oberfläche über den ungestörten Spiegel, so folgt aus (194) mit $y = -\eta$ und $p = p_a = 0$ (da der atmosphärische Luftdruck an der Oberfläche überall derselbe ist)

$$\eta = -\frac{1}{g}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big]_{y=-\eta}$$

wofür man angenähert (s. oben) schreiben kann

$$\eta = -\frac{1}{g}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big]_{y=0}\,. \tag{195}$$

Weiter darf bei den vorausgesetzten kleinen Amplituden bzw. kleinen Krümmungen der Oberfläche

$$-\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big]_{y=0} \tag{196}$$

gesetzt werden, als Bedingung dafür, daß die Normalkomponente der Oberflächengeschwindigkeit gleich der Normalkomponente der Teilchengeschwindigkeit an dieser Stelle sein muß.

Führt man η aus (195) in (196) ein, so wird

$$\frac{1}{g}\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\Big]_{y=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\Big]_{y=0}\,.$$

Mit Rücksicht auf (191a) folgt daraus

$$-\beta^2 C \,\mathrm{Cof}\,(\alpha h)\cos(\alpha x - \beta t) = -\alpha g C\,\mathrm{Sin}\,(\alpha h)\cos(\alpha x - \beta t)$$

oder

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \frac{g}{\alpha}\,\mathrm{Tg}\,(\alpha h)\,. \tag{197}$$

Die Bedeutung der Konstanten α und β geht aus folgender Überlegung hervor:

Führt man in Gl. (195) für φ den Wert aus (191a) ein, so erhält man mit $y = 0$

$$\eta = \beta \frac{C}{g} \mathfrak{Cof}(\alpha h) \cdot \sin(\alpha x - \beta t)$$

oder, wenn man noch zur Abkürzung

$$\beta \frac{C}{g} \mathfrak{Cof}(\alpha h) = A_0$$

setzt,

$$\eta = A_0 \sin(\alpha x - \beta t) \tag{198}$$

als Gleichung der freien Oberfläche.

Wie man sieht, nimmt η bei festgehaltener Zeit den gleichen Wert wieder an, wenn man x um $\frac{2\pi}{\alpha}$ wachsen läßt. Die zugehörige Länge

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$$

stellt also die Wellenlänge dar, womit $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$ definiert ist.

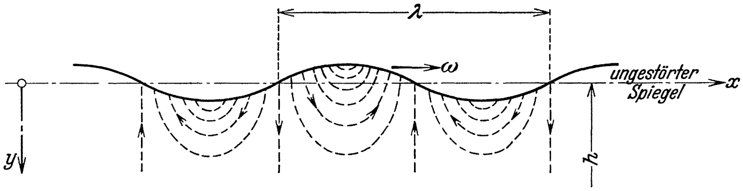


Abb. 123. Stromlinienverlauf einer geraden, fortschreitenden Welle.

Weiter folgt aus (198), daß η seinen Wert beibehält, wenn x während der Zeit Δt um die Länge $\frac{\beta}{\alpha} \Delta t$ geändert wird, da ja

$$\alpha x - \beta t = \alpha \left[x + \frac{\beta}{\alpha} \Delta t\right] - \beta [t + \Delta t].$$

Das heißt aber, daß die Wellenform sich mit der Geschwindigkeit $\omega = \frac{\beta}{\alpha}$ im Sinne der X-Achse verschiebt. Unter Beachtung von (197) erhält man somit für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle

$$\omega = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \mathfrak{Tg} \frac{2\pi h}{\lambda}}. \tag{199}$$

Für flache Wellen auf seichtem Wasser, — d. h. bei kleinem $\frac{h}{\lambda}$ — folgt daraus wegen $\mathfrak{Tg} \frac{2\pi h}{\lambda} \approx \frac{2\pi h}{\lambda}$

$$\omega = \sqrt{g h} \tag{199a}$$

in Übereinstimmung mit dem früher dafür gefundenen Werte (vgl. S. 141). Die entsprechende Welle wird häufig auch als Lagrangesche Welle oder als Grundwelle bezeichnet.

Ist dagegen $\frac{2h}{\lambda} > 1$, so kann $\mathfrak{Tg}\frac{2\pi h}{\lambda} \approx 1$ gesetzt werden, und man erhält

$$\omega = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}\,. \tag{199b}$$

Diese Formel gilt also für Wellen, deren Länge kleiner ist als die doppelte Wassertiefe h. Wie man sieht, ist ω jetzt von der Wellenlänge abhängig (Dispersion), und man erkennt daraus, daß im tiefen Wasser lange Wellen schneller fortschreiten als kurze. Den ungefähren Verlauf der Stromlinien bei der Wellenbewegung zeigt Abb. 123.

3. Stehende Wellen.

Nach (198) lautet die Gleichung der freien Oberfläche für einen Wellenzug, der sich mit der Geschwindigkeit ω im Sinne der positiven X-Achse fortpflanzt,

$$\eta = A_0 \sin(\alpha x - \beta t)\,.$$

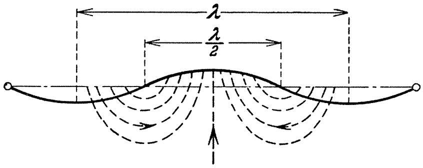


Abb. 124. Stromlinienverlauf einer stehenden Welle.

Trifft nun dieser Wellenzug auf einen zweiten von gleicher Amplitude, gleicher Wellenlänge und gleich großer, aber entgegengesetzt gerichteter Fortpflanzungsgeschwindigkeit, also dergestalt, daß für letzteren

$$\eta' = A_0 \sin(\alpha x + \beta t)$$

gilt, so werden durch Interferenz der beiden sich begegnenden Wellenzüge stehende Wellen erzeugt. Da nämlich

$$\eta_1 = \eta + \eta' = 2A_0 \sin(\alpha x)\cos(\beta t)\,,$$

so erkennt man, daß η_1 für $\alpha x = k\pi$ ($k = 1, 2, 3 \ldots$) unabhängig von der Zeit stets zu Null wird. In den durch

$$x = \frac{k\pi}{\alpha} = \frac{k\lambda}{2}$$

bestimmten Punkten liegen die Schwingungsknoten, deren Abstände demnach gleich der halben Länge der fortschreitenden Welle sind. Die Dauer einer vollen Schwingung ist

$$T = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{\lambda}{\omega}\,.$$

Für Wellen, deren Länge klein gegen die ungestörte Wassertiefe h ist, folgt daraus mit Rücksicht auf (199b)

$$T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}\,.$$

Der Verlauf der Stromlinien einer stehenden Welle ist generell in Abb. 124 dargestellt. In den Schwingungsbäuchen findet nur vertikale Bewegung der Teilchen statt. Denkt man sich also durch einen Schwingungsbauch eine lotrechte Wand gelegt, so erhält man eine stehende Welle, wie sie etwa durch Interferenz einer gegen die Wand fortschreitenden und der durch die Wand reflektierten Welle erzeugt wird.

Legt man auch noch durch einen zweiten Schwingungsbauch eine lotrechte Wand, so ergeben sich stehende Wellen, wie sie z. B. in einem parallelwandigen Wassertrog auftreten können. Voraussetzung ist dabei allerdings, daß die Breite des Troges gerade $b = \frac{k\lambda}{2}$ beträgt, wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

4. Wellengruppen[1].

Von besonderer Bedeutung, und wohl zu unterscheiden von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω eines Wellenkopfes, ist diejenige Geschwindigkeit, mit der eine Wellengruppe als Ganzes betrachtet fortschreitet, und die man als Gruppengeschwindigkeit bezeichnet. Man erhält die einfachste Form einer solchen Wellengruppe durch Überlagerung zweier im gleichen Sinne fortschreitender Wellenzüge vom Typus der Gl. (198), wobei vorausgesetzt sei, daß beide die gleiche Amplitude, aber etwas voneinander verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Wellenlänge haben sollen. Bezeichnet man die entsprechenden Werte mit β' und α', so ergibt sich durch Superposition als Gleichung der freien Oberfläche nach (198)

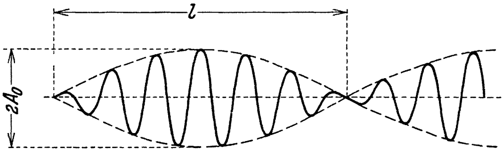


Abb. 125. Wellengruppe.

$$\eta_1 = A_0 \sin(\alpha x - \beta t) + A_0 \sin(\alpha' x - \beta' t)\,,$$

wofür man gemäß dem Additionstheorem

$$\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}$$

auch schreiben kann

$$\eta_1 = 2A_0 \sin\left(\frac{\alpha+\alpha'}{2}x - \frac{\beta+\beta'}{2}t\right)\cos\left(\frac{\alpha-\alpha'}{2}x - \frac{\beta-\beta'}{2}t\right). \qquad (200)$$

Die vorstehende Gleichung stellt eine Gruppe von Sinuswellen dar, deren Amplitude

$$2A_0\cos\left(\frac{\alpha-\alpha'}{2}x - \frac{\beta-\beta'}{2}t\right)$$

bei wenig voneinander verschiedenen Werten α und α' bzw. β und β' langsam zwischen 0 und $2A_0$ schwankt (Abb. 125). Die Länge l der Wellengruppe ist durch zwei aufeinander folgende Abszissen x bestimmt,

[1] Lord Rayleigh: Theory of Sound, § 191.

für welche die Amplitude, d. h. also der cos in Gl. (200) zu Null wird. Diese Punkte erhält man, wenn man das Argument gleich $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \ldots$ werden läßt. So ergibt sich z. B.

$$\frac{\alpha-\alpha'}{2}x_1 - \frac{\beta-\beta'}{2}t = \frac{\pi}{2}; \qquad x_1 = \frac{\pi}{\alpha-\alpha'} + \frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}t,$$

$$\frac{\alpha-\alpha'}{2}x_2 - \frac{\beta-\beta'}{2}t = \frac{3}{2}\pi; \qquad x_2 = \frac{3\pi}{\alpha-\alpha'} + \frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'}t,$$

woraus als Länge der Gruppe folgt

$$l = x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{\alpha-\alpha'}. \tag{201}$$

Weiter ergibt sich aus (200) für die Zeit, welche die Gruppe braucht, um die Länge l zu durchschreiten,

$$\frac{\beta-\beta'}{2}t = \pi, \quad \text{bzw.} \quad t = \frac{2\pi}{\beta-\beta'}. \tag{202}$$

Durch Verbindung von (201) und (202) erhält man somit als Gruppengeschwindigkeit

$$\omega^* = \frac{l}{t} = \frac{\beta-\beta'}{\alpha-\alpha'},$$

wofür man bei kleinen Differenzen bzw. langen Wellengruppen auch schreiben kann

$$\omega^* = \frac{d\beta}{d\alpha}.$$

Beachtet man noch, daß $\beta = \omega\alpha$ (S. 158), so wird

$$\omega^* = \frac{d(\omega\alpha)}{d\alpha}, \tag{203}$$

wo ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des einzelnen Wellenkopfes darstellt. Für flache Wellen, deren Länge groß ist im Verhältnis zur Wassertiefe h, wird mit Rücksicht auf (199a)

$$\omega^* = \frac{d(\alpha\sqrt{gh})}{d\alpha} = \sqrt{gh},$$

d. h. die Gruppengeschwindigkeit stimmt hier überein mit der Geschwindigkeit der einzelnen Wellen.

Wichtiger ist der Fall großer Wassertiefe im Verhältnis zur Wellenlänge. Dann wird nach (199b) wegen $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\omega^* = \frac{d\left(\alpha\sqrt{\frac{g}{\alpha}}\right)}{d\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{\alpha}} = \frac{\omega}{2},$$

wonach jetzt die Gruppengeschwindigkeit nur noch gleich der halben Geschwindigkeit der Einzelwellen ist. Letztere wandern also gewissermaßen durch die Gruppe hindurch. Zwischen den einzelnen Gruppen befinden sich Streifen, in denen die Oberfläche nahezu glatt ist; es sind dieses die Stellen, wo die oben genannten Amplituden gleich Null oder wenig davon verschieden sind. In der Natur können derartige Wellengruppen auf Seen und Meeren gut beobachtet werden.

5. Einfluß der Oberflächenspannung.

Bei Wellen von geringer Länge macht sich auch die Oberflächenspannung bemerkbar und hat einen merklichen Einfluß auf die Größe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Es ist dieses zurückzuführen auf das Vorhandensein eines in die Richtung der Flächennormalen fallenden Krümmungs- oder Kapillardruckes, welcher die Resultierende der nach dieser Richtung genommenen Komponenten der Oberflächenspannung darstellt, die an einem gekrümmten Flächenelement wirksam sind. Auf die Flächeneinheit bezogen hat dieser Kapillardruck die Größe

$$P = T\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right),$$

wo T die Kapillaritätskonstante in $\left[\frac{\text{gr-Gewicht}}{\text{cm}}\right]$, ϱ_1 und ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien der Oberfläche darstellen (Bd. I S. 40).

An der freien Oberfläche herrscht also jetzt nicht mehr allein der als konstant anzusehende atmosphärische Luftdruck p_a, sondern es tritt noch der von der Krümmung abhängige Kapillardruck hinzu, so daß

$$p = p_a + T\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)$$

zu setzen ist.

Der Einfluß der Kapillarkraft auf die Wellengeschwindigkeit ist zuerst von W. Thomson[1] untersucht worden. Ohne hier auf die Theorie näher einzugehen, sei nur bemerkt, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer geraden Welle an der Oberfläche eines tiefen Wassers unter Berücksichtigung der Kapillarkräfte sich angenähert in der Form darstellen läßt

$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi} + T\frac{2\pi}{\lambda\varrho}}\,. \tag{204}$$

Man erkennt, daß in dieser Formel der erste Summand unter der Wurzel der Wellenlänge λ direkt proportional ist, der zweite dagegen umgekehrt proportional. Bei großen Wellenlängen ist der zweite Summand gegenüber dem ersten bedeutungslos. Man kann dann genau genug

$$\omega = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}} \tag{204a}$$

setzen [vgl. die obige Gleichung (199b)] und nennt diese von der Oberflächenspannung unabhängigen Wellen „Schwerewellen".

---

[1] Thomson, W. (Lord Kelvin): Hydrokinetic Solutions and Observations. Philos. Mag. (4) Bd. 42 (1871) S. 368, 374.

Bei sehr kleinen Wellenlängen dagegen hängt die Größe von ω fast ausschließlich von dem zweiten Summanden in (204) ab, weshalb für die sog. Kapillar- oder Kräuselwellen gilt:

$$\omega = \sqrt{T \frac{2\pi}{\lambda \varrho}}. \tag{204b}$$

Differenziert man (204) nach λ, so erhält man

$$\frac{d\omega}{d\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda g}{2\pi} + T\frac{2\pi}{\lambda\varrho}\right)^{-1/2}\left(\frac{g}{2\pi} - \frac{2\pi T}{\lambda^2 \varrho}\right).$$

Daraus folgt, daß $\frac{d\omega}{d\lambda}$ zu Null, d. h. ω zu einem Minimum wird, wenn

$$\frac{g}{2\pi} = \frac{2\pi T}{\lambda^2 \varrho}$$

ist oder, mit anderen Worten, wenn die beiden Summanden unter der Wurzel von (204) gerade gleich groß sind. Die diesem Minimum entsprechende Wellenlänge ist

$$\lambda_0 = 2\pi\sqrt{\frac{T}{\varrho g}}, \tag{205}$$

womit (204) als Minimum der Wellengeschwindigkeit liefert

$$\omega_{\min} = \sqrt[4]{\frac{4\,T g}{\varrho}}. \tag{206}$$

Für $\omega > \omega_{\min}$ gibt es demnach zwei Wellen, von denen die eine (Schwerewelle) ein größeres λ besitzt als λ_0, während für die andere (Kapillarwelle) $\lambda < \lambda_0$ ist.

Für Wasser gegen Luft ist $T = 0{,}077 \left[\frac{\text{gr}}{\text{cm}}\right]$, $\varrho\, g = \gamma = 1 \left[\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}\right]$ und $\varrho \approx 0{,}001 \left[\frac{\text{gr sec}^2}{\text{cm}^4}\right]$. Demnach wird $\lambda_0 = 1{,}74$ [cm] und $\omega_{\min} = 23{,}4 \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right]$. Diese Grenze ist besonders beachtenswert für die Ausführung von Modellversuchen zur Erforschung von Strömungserscheinungen, welche mit Wellenbildung verbunden sind, wie das etwa der Fall ist, wenn ein Schiff sich in ruhendem Wasser bewegt oder ein Hindernis in strömendem Wasser festgehalten wird. Die dabei entstehenden Wellen haben in bezug auf das Hindernis eine feste Lage; sie bewegen sich also relativ gegen das Wasser. Da nun die Wellengeschwindigkeit den Wert $\omega_{\min}$ nicht unterschreiten kann, so hat man die Modellgeschwindigkeiten entsprechend zu wählen, damit überhaupt Wellen auftreten können[1].

Beachtenswert ist noch die Größe der Gruppengeschwindigkeit bei reinen Kapillarwellen. Für diese erhält man mit Rücksicht auf (203) und (204b) und wegen $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\omega^* = \frac{d}{d\alpha}\left(T\frac{\alpha^3}{\varrho}\right)^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{T\alpha}{\varrho}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{T\cdot 2\pi}{\lambda\varrho}} = \frac{3}{2}\,\omega,$$

[1] Eisner, F.: Offene Gerinne, a. a. O. S. 232; vgl. auch H. Lamb: Hydrodynamik, a. a. O. S. 546.

d. h. die Gruppengeschwindigkeit ist hier größer als die Geschwindigkeit der Einzelwellen, im Gegensatz zu den Schwerewellen (S. 161). Darauf ist eine Erscheinung zurückzuführen, die man mitunter an einem ruhenden Hindernis in strömendem Wasser beobachten kann, dessen Geschwindigkeit wenig größer als $\omega_{\min}$ ist. Es zeigen sich dabei oberhalb des Hindernisses Kapillarwellen, unterhalb Schwerewellen. Die Kapillarwellen eilen also der Störungsstelle voraus. Entsprechendes gilt, wenn das Wasser ruht und das Hindernis in ihm mit konstanter Geschwindigkeit bewegt wird.

6. Schiffswellen.

Bei der Bewegung eines Schiffes in hinreichend tiefem Wasser beobachtet man zwei vom Bug und Heck ausgehende charakteristische Wellensysteme, die dem Schiffe nachfolgen und gewöhnlich als Schiffswellen bezeichnet werden. Die Form dieser Wellen hat große Ähnlichkeit mit denjenigen, welche durch eine punktförmige Druckstörung hervorgerufen werden, die sich mit konstanter Geschwindigkeit vorwärts bewegt. Die theoretische Untersuchung einer derartigen gleichförmigen Druckpunktwanderung ist von Lord Kelvin[1] zuerst durchgeführt und hat folgendes wichtiges Ergebnis geliefert (Abb. 126). An der Oberfläche eines tiefen Wassers bildet sich hinter dem Druckpunkt ein System von leicht gekrümmten Quer- und Seitenwellen aus, die miteinander interferieren und mit dem Druckpunkt fortschreiten. Der Abstand der Querwellen, d. h. deren Wellenlänge, ist nach (199b)

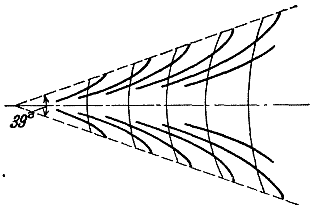


Abb. 126. Durch eine punktförmige Druckstörung hervorgerufene Wellen.

$$\lambda = \frac{2\pi\omega^2}{g}.$$

Der Winkel, welcher das ganze Wellengebilde einschließt, beträgt bei großer Wassertiefe rund $\alpha = 39^0$.

Ganz ähnliche Verhältnisse liegen bei der Bewegung eines Schiffes vor. Die Druckänderungen gegenüber dem ungestörten Zustande sind hier am größten am Bug und am Heck, so daß man sich an diesen beiden Stellen je einen der oben genannten Druckpunkte konzentriert denken kann. Auf diese Weise entstehen zwei miteinander interferierende Wellensysteme, welche in großen Zügen die Form der Abb. 126 zeigen. Voraussetzung ist dabei, daß die Geschwindigkeit des Schiffes größer ist als der oben (S. 163) ermittelte Kleinstwert für die Fortschrittsgeschwindigkeit eines Wellenzuges.

Ferner sei noch auf eine Erscheinung hingewiesen, die sich auf seich-

[1] Lord Kelvin: Popular Lectures and Adresses III 1891. London. Vgl. auch Lamb: Hydrodynamik, a. a. O. S. 505. Eine zusammenfassende Darstellung des Gegenstandes gibt Hogner in den Proceedings of the Intern. Congr. for Applied Mechanics, S. 146. Delft 1924.

tem Wasser bemerkbar macht. Hier hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle außer von der Wellenlänge auch noch von der Wassertiefe h ab (Gl. 199). Es zeigt sich nun, daß bei gleichbleibender Tiefe h der das Wellensystem begrenzende Winkelraum (Abb. 126) sich mit der Schiffsgeschwindigkeit V vergrößert und bei dem Grenzwerte $V = \sqrt{gh}$, welcher der Gl. (199a) entspricht, den Wert $\alpha = 180^0$ erreicht. Bei größerer Geschwindigkeit V nimmt α wieder ab, während die Querwellen verschwinden[1].

Zur Erzeugung der Schiffswellen wird ständig Energie verbraucht, welche vom Schiffsantrieb geleistet werden muß. Diese Energie ist notwendig zur Überwindung des sog. „Wellenwiderstandes", welcher neben dem Reibungs- und Druckwiderstand einen Teil des gesamten Schiffswiderstandes darstellt (vgl. hierzu S. 266).

7. Gezeiten.

Bekanntlich unterliegt an den meisten Meeresküsten der Wasserspiegel periodischen Schwankungen, und zwar dergestalt, daß in rund 12 Stunden und 25 Minuten das Wasser einmal steigt (Flut) und fällt (Ebbe). Dieser Vorgang, der zu den Wellenerscheinungen gehört und an verschiedenen Küsten in verschiedener Stärke auftritt, bildet die sog. Gezeiten oder Tiden. Ihre Ursache haben die Gezeiten in der anziehenden Wirkung von Sonne und Mond, und zwar besonders des letzteren, dessen Einfluß etwa 2,3 mal so groß ist wie derjenige der Sonne. Zur Zeit des Neumondes und Vollmondes treten besonders hohe Fluten — Springfluten — auf, zur Zeit des ersten und letzten Viertels die wesentlich kleineren Nippfluten.

Auf die theoretische Behandlung der Gezeiten kann hier nicht eingegangen werden, zumal die Theorie noch nicht so weit ausgebildet ist, daß es gelänge, die ziemlich verwickelten Vorgänge im einzelnen ohne Zuhilfenahme gewisser Idealisierungen zu erklären. Dagegen soll noch kurz auf einige für den Wasserbau-Ingenieur wichtige Erscheinungen hingewiesen werden, die sich bei Ebbe und Flut in den Flußmündungen bemerkbar machen.

Infolge des durch die Tiden sich ändernden Meeresniveaus bildet sich in Richtung des jeweiligen Spiegelgefälles ein Ebbe- und Flutstrom aus. Während nun im offenen Meere die sog. „Flutkurven", welche die Abhängigkeit der Spiegelbewegung von der Zeit darstellen, Sinuslinien bilden, stellt sich an den Flußmündungen eine gewisse Abweichung von dieser Form ein, die ihre Ursache in den besonderen Verhältnissen der Flußmündung (Reibung, Gefälle, Strömungsgeschwindigkeit) hat. Dabei zeigt sich, daß der Ebbestrom von längerer Dauer ist als der Flutstrom, und daß diese Unsymmetrie um so größer wird, je weiter man flußaufwärts geht[2].

---

[1] Horn: Theorie des Schiffes. Handb. d. phys. u. techn. Mech. Bd. 5 (1931) S. 610.

[2] Vgl. etwa Krey: Die Flutwelle in Flußmündungen und Meeresbuchten. Mitt. d. Versuchsanst. f. Wasserbau und Schiffbau, Heft 3. Berlin 1926.

Das Umschlagen von Flut- in Ebbestrom, das sog. „Kentern", tritt nicht gleichzeitig mit dem höchsten bzw. tiefsten Wasserstand ein, sondern erst einige Zeit später.

Bei der stromaufwärts wandernden Flutwelle wächst nach Gl. (174) die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit wachsender Wassertiefe, so daß jeder nachfolgende Schwall schneller fortschreitet als der vorangehende. Außerdem besitzt das den nachfolgenden Schwall tragende Wasser nach den Ausführungen auf S. 142 bereits eine relativ zum ungestörten Wasser stromaufwärts gerichtete Bewegung, weshalb der nachfolgende Schwall den vorangehenden einholt. Weist die Flußmündung außerdem noch eine allmähliche Verengung nach rückwärts auf, so können Wellen von sehr großer Amplitude entstehen in Gestalt einer nahezu senkrechten, flußaufwärts fortschreitenden Stufe von mehreren Metern Höhe, die als Bore oder Mascaret in manchen Flüssen eine bekannte und gefürchtete Erscheinung bildet (so z. B. in der Seine, Garonne, dem Ganges, Tsien-Tang-Kiang u. a.).

V. Grundwasserbewegung[1].

1. Das Filtergesetz.

Bei der stationären Bewegung des Wassers durch poröses Erdreich bestehen hinsichtlich des Strömungscharakters ähnliche Verhältnisse wie bei der laminaren Bewegung in engen Rohren. Im 1. Bande (S. 87) wurde gezeigt, daß sich eine Laminarströmung ausbildet, sobald die Reynoldssche Zahl $\mathfrak{R} = \frac{VL}{\nu}$ eine gewisse kritische Größe nicht überschreitet. Dabei bezeichnet V eine charakteristische Geschwindigkeit, L eine charakteristische Länge und ν die kinematische Zähigkeit der Flüssigkeit. Nun ist bei der Bewegung des Wassers durch Erdreich infolge eines vorhandenen Druck- oder Spiegelgefälles die Geschwindigkeit V, mit der das Wasser die einzelnen Poren durchströmt, im allgemeinen sehr klein, und das gleiche gilt auch von den Porendurchmessern L. Es liegt also nahe, den Strömungsvorgang im Erdreich als eine Laminarbewegung aufzufassen und die für diese an engen Rohren gefundenen Gesetze generell auch hier anzuwenden. Voraussetzung ist dabei, daß die Wirkung der Kapillarkräfte (Bd. I S. 40) gegenüber den Reibungskräften und der Schwere vernachlässigt werden dürfen, was bei den hier ins Auge gefaßten Vorgängen erfahrungsgemäß mit einiger Sicherheit der Fall ist.

Das besondere Merkmal der laminaren Rohrströmung (Poiseuille-Strömung, Bd. I S. 74) ist die Proportionalität zwischen dem Gefälle und der sekundlichen Durchflußmenge $Q\left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{sec}}\right]$. Daß ein analoges Gesetz unter bestimmten Voraussetzungen (s. unten) auch für die Grund-

[1] Eine ausführliche Darstellung dieses Gegenstandes ist zu finden in Ph. Forchheimer: Hydraulik 1930, 3. Aufl. S. 51ff.; sowie im Handb. phys. und techn. Mech. von Auerbach-Hort: Bd. 5 S. 1097ff. (Ref. von Neményi).

wasserströmung gilt, zeigt der folgende Filterversuch. Läßt man durch ein waagerechtes, mit feinem Sand gefülltes Rohr, das gemäß Abb. 127 mit zwei engen „Standrohren" (oben offenen Piezometerrohren) im Abstande l versehen ist, in der angedeuteten Richtung vermöge eines linksseitigen Überdruckes Wasser strömen, so steigt es entsprechend den in den Querschnitten *1* und *2* herrschenden Drücken in den Rohren verschieden hoch. Der Unterschied h der Standrohrspiegel ist dabei gleich dem Verlust an Druckhöhe auf der Länge l (Bd. I S. 50), derart, daß $h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$ ist.

Als sekundliche Durchflußmenge sei diejenige Wassermenge eingeführt, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit quer zur Strömungsrichtung fließt. Sie wird, da sie von der Dimension $\left[\frac{m^3}{sec \cdot m^2}\right] = \left[\frac{m}{sec}\right]$ ist, die Filtergeschwindigkeit genannt und ist nicht zu verwechseln mit der Geschwindigkeit, welche das Wasser beim Durchströmen der einzelnen Poren besitzt.

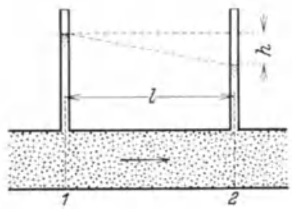


Abb. 127. Die Filtergeschwindigkeit ist proportional dem Gefälle h/l (Darcysches Filtergesetz).

Der obige Versuch zeigt nun, daß die Filtergeschwindigkeit in Richtung der Rohrachse, wenn man längs der letzteren ein konstantes Druckgefälle voraussetzt,

$$v = k\,\frac{h}{l}\left[\frac{m}{sec}\right] \qquad (207)$$

wird, wo k einen Proportionalitätsfaktor, die sog. Durchlässigkeit, bezeichnet, deren Dimension die einer Geschwindigkeit ist.

Die Gültigkeit des vorstehenden Ausdrucks ist von Darcy für feinen Sand 1856 zum ersten Male nachgewiesen, weshalb Gl. (207) häufig auch als das Darcysche Filtergesetz bezeichnet wird. Voraussetzung dafür ist ein Erdmaterial, in dem sich in der Tat eine laminare Strömung ausbilden kann, was bei Boden mit engen Poren und bei kleinen Geschwindigkeiten der Fall ist[1]. Nur auf solche Bodenarten können die hier angestellten Überlegungen Anwendung finden.

Wie aus Gl. (207) hervorgeht, ist die Durchlässigkeit k die dem Gefälle „Eins" entsprechende Filtergeschwindigkeit. Ihre Größe hängt u. a. von der Korngröße des Erdmaterials, von dessen Dichtigkeit und besonders von dem Umstande ab, ob das Erdmaterial frei von tonigen Beimengungen ist oder nicht. Im letzteren Falle, d. h. also bei bindigen Bodenarten, kann die Durchlässigkeit k stark herabsinken, weshalb es sich stets empfiehlt, k von Fall zu Fall durch vorherige Versuche zu bestimmen[2]. Als ungefährer Anhalt kann die von Hazen

[1] Nach Ehrenberger gilt das Darcysche Gesetz unter normalen Verhältnissen, solange $v < 0{,}3 \div 0{,}4 \left[\frac{cm}{sec}\right]$ ist. Z. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1928. Heft 9 bis 14.

[2] Verschiedene Versuchsanordnungen sind in der oben zitierten Arbeit von Ehrenberger zu finden.

für reinen, feinen Sand bei loser Schüttung und Wasser von 10° C angegebene Formel

$$k = 116\, d_0^2 \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right]$$

dienen, wo d_0 derjenige Korndurchmesser ist, durch den der gesamte Filtersand in 10% Körner mit $d < d_0$ und 90% Körner mit $d > d_0$ getrennt wird[1].

Den Versuch, die Größe k theoretisch in Anlehnung an die Strömung in Kapillarrohren zu bestimmen, hat neuerdings Kozeny[2] unternommen. Danach soll

$$k = \frac{\gamma}{\mu}\, \zeta\, \frac{p^3}{(1-p)^2}\, \delta^2 \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right]$$

sein, wo $\gamma \left[\frac{\text{gr}}{\text{cm}^3}\right]$ das spez. Gewicht des Wassers, $\mu \left[\frac{\text{gr sec}}{\text{cm}^2}\right]$ den Zähigkeitskoeffizienten, ζ eine reine Zahl, δ [cm] einen ideellen Korndurchmesser und $p = \frac{f}{F}$ das Verhältnis Porenfläche:Bodenquerschnittsfläche (Porenverhältnis) bezeichnen. Der Durchmesser δ ist definiert durch die Gleichung

$$\frac{1}{\delta} = \sum_i \frac{\Delta g_i}{d_{i\,m}},$$

in der Δg_i und $d_{i\,m}$ folgende Bedeutung haben: Denkt man sich die vorhandenen Bodenkörner in Gruppen eingeteilt, und zwar so, daß innerhalb jeder Gruppe der Korndurchmesser zwischen einer oberen und einer unteren Grenze $d_i \div d_i'$ liegt, so bezeichnet Δg_i den prozentualen Gewichtsanteil dieser Gruppe am Gesamtkorngewicht (Δg_i ist also eine Zahl), während $d_{i\,m}$ — der mittlere Korndurchmesser dieser Gruppe — aus der Beziehung

$$d_{i\,m} = \frac{3}{\frac{1}{d_i} + \frac{2}{d_i + d_i'} + \frac{1}{d_i'}}$$

berechnet wird. Da in dem Ausdruck für k der Zähigkeitskoeffizient μ auftritt, ist die Durchlässigkeit von der Temperatur abhängig. Versuche von Donat[3] haben die Kozenysche Formel für luftfreien Sand im wesentlichen bestätigt. Nach dessen Messungen ist bei 10° C für scharfkantigen Quarzsand $\frac{\gamma}{\mu}\,\zeta \approx 75 \left[\frac{1}{\text{cm sec}}\right]$, für Glaskugeln $\frac{\gamma}{\mu}\,\zeta \approx 400 \left[\frac{1}{\text{cm sec}}\right]$ zu setzen. Dieser Faktor hängt also offenbar stark von der Form des Kornmaterials ab. Im übrigen muß auf die über diesen Gegenstand bestehende reichhaltige Spezialliteratur verwiesen werden[4].

Gl. (207) gilt unter den obigen Voraussetzungen nicht nur für einen horizontal gerichteten Grundwasserstrom, sondern sie läßt sich für eine beliebige Strömungsrichtung entsprechend erweitern. Bringt man in ein Grundwasser führendes Erdreich zwei (oben offene) Standrohre ein, so hat der Spiegel, wenn das Wasser ruht, in beiden Rohren die gleiche Höhenlage, da die Rohre dann als kommunizierende Rohre wirken. Strömt das Wasser jedoch von A nach B, so sinkt der Spiegel

---

[1] Forchheimer: Grundriß der Hydraulik 1926 2. Aufl. S. 24.

[2] Kozeny, J.: Über Grundwasserbewegung. Wasserkr. u. Wasserwirtsch. 1927 S. 67ff.

[3] Wasserkr. u. Wasserwirtsch. 1929 S. 228. [4] Fußnote 1 S. 166.

im Rohre B um die Höhe h, welche dem durch den Strömungswiderstand bedingten Druckhöhenverlust entspricht (Abb. 128). Unter Vernachlässigung der als sehr klein anzusehenden Geschwindigkeitshöhe erhält man somit als Differenz der Standrohrspiegel (Bd. I S. 50)

$$h = -\left[\frac{p_2}{\gamma} + z_2 - \left(\frac{p_1}{\gamma} + z_1\right)\right]. \tag{208}$$

Erweitert man nun das obige Filtergesetz derart, daß man allgemein für das Strömen durch poröses Erdreich (welches selbst als „starr" angesehen wird) die sekundlich in einer beliebigen Richtung fließende Wassermenge proportional dem Gefälle nach dieser Richtung setzt, so erhält man für die Komponenten der Filtergeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ an der Stelle x, y, z mit Rücksicht auf (208)

$$v_x = -\frac{k}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial x}; \quad v_y = -\frac{k}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial y}; \quad v_z = -k\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\gamma} + z\right),$$

wofür man vektoriell auch schreiben kann (Bd. I S. 10)

$$\mathfrak{v} = -k \operatorname{grad} \frac{p + \gamma z}{\gamma}. \tag{209}$$

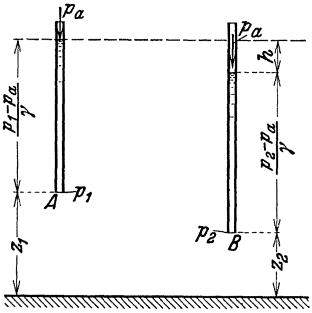


Abb. 128.

2. Darstellung als Potentialströmung.

Aus Gl. (209) folgt, daß sich die Geschwindigkeitskomponenten darstellen lassen als die partiellen Ableitungen einer Funktion

$$\varphi = -\frac{k(p + \gamma z)}{\gamma} \tag{210}$$

der Ortskoordinaten x, y, z, welche somit für die vorliegende Aufgabe die Bedeutung eines Geschwindigkeitspotentials besitzt (vgl. Bd. I S. 113). Daraus folgt aber, daß alle die für wirbel- und reibungsfreie, raumbeständige Flüssigkeiten entwickelten Rechnungsverfahren auch im vorliegenden Falle zur Anwendung gelangen können.

Als Randbedingungen stehen zunächst die beiden folgenden zur Verfügung: An jeder Stelle einer das Grundwasser begrenzenden undurchlässigen Berandung muß die Geschwindigkeit der Grundwasserbewegung in diese Berandung fallen. An der freien Oberfläche des Grundwasserstromes ist der Druck gleich dem als konstant angenommenen Druck p_a der Atmosphäre. (Im allgemeinen wird letzterer gleich Null gesetzt, d. h. nur der Überdruck bestimmt.) Außerdem besteht die freie Oberfläche aus lauter Stromlinien. Weitere Randbedingungen sind von Fall zu Fall gesondert anzusetzen; ihre richtige Formulierung kann mitunter erhebliche Schwierigkeiten bereiten.

Für die praktische Durchführung derartiger Rechnungen nach der Potentialtheorie kommen in erster Linie ebene und axialsymmetrische Vorgänge in Frage, da diese der mathematischen Behandlung am ehesten zugänglich sind (vgl. Bd. I S. 123 und 165). Insbesondere kann für **ebene** Strömungen auch hier die Methode der konformen Abbildung zur Anwendung gelangen, wie Hopf und Trefftz[1] an dem praktisch wichtigen Beispiel der Grundwasserströmung in einem abfallenden Gelände mit Abfanggraben gezeigt haben.

Die dabei zu lösende Aufgabe besteht im wesentlichen darin, die Absenkung des Grundwasserspiegels zu ermitteln, wenn der Graben eine bestimmte Wassermenge wegführen soll, oder umgekehrt. Daneben ist natürlich auch die Kenntnis des Stromlinienverlaufes und die Form der Spiegelkurve von Interesse. Angenommen wurde ein Grundwasserstrom von der Tiefe H_1, der anfangs (ohne Abfanggraben) parallel einer undurchlässigen Schicht mit dem Neigungswinkel α verläuft und die Wassermenge Q_1 führt (Abb. 129). Die Berandung der undurchlässigen Schicht und der Grundwasserspiegel sind Stromlinien, denen als Stromfunktionen die Werte $\psi = 0$ bzw. $\psi_1 = Q_1$ zugewiesen sind, da ja zwischen ihnen die gesamte Wassermenge Q_1 strömen muß. Am Grundwasserspiegel ist außerdem nach (210), wenn $p = p_a = 0$ gesetzt wird (s. oben), $\varphi = -kz$, während längs der Grabensohle unter Beachtung des in Abb. 129 eingeführten Koordinatensystems $\varphi = -\frac{k}{\gamma}(\gamma t - \gamma t) = 0$ gesetzt werden kann.

Bei obiger Aufgabe liegen ähnliche Verhältnisse vor wie im Falle des Ausflusses aus einer spaltförmigen Öffnung eines großen Gefäßes (vgl. S. 4), insbesondere ist auch hier wie dort der freie Strömungsrand zunächst nicht bekannt. Auf die Einzelheiten der Lösung kann indessen nicht weiter eingegangen werden; es sei nur darauf hingewiesen, daß es sich dabei insofern um einen Spezialfall handelt, als die Einmündungsstelle des Grundwasserspiegels in den Graben in gleicher Höhe wie der Grabenwasserspiegel angenommen wurde, während praktisch der Grabenspiegel auch tiefer liegen kann als die Stelle, an welcher der abgesenkte Grundwasserspiegel die Grabenböschung schneidet; das Wasser würde dann an dieser herabsickern (S. 174).

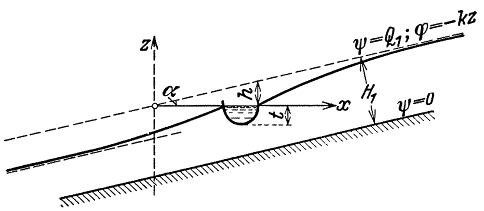


Abb. 129. Grundwasserströmung in einem abfallenden Gelände mit Abfanggraben nach Hopf und Trefftz.

Als Ergebnis ihrer Untersuchung finden die beiden Verfasser unter der Voraussetzung eines kleinen Spiegelgefälles des ungestörten Grundwasserstromes

$$\frac{Q'}{Q_1} = \frac{h}{H_1},$$

wo Q' die im Graben abgefangene Wassermenge und h die Absenkung am bergseitigen Grabenrand bezeichnet (Abb. 129). Bemerkenswert ist dabei — im Gegensatz zu verschiedenen praktischen Näherungsformeln —, daß die dem Grundwasserstrom entzogene Wassermenge Q'

[1] Z. angew. Math. Mech. 1921 S. 290ff.

außer von Q_1 und H_1 im wesentlichen nur von der Absenkungshöhe h abhängt, nicht aber von den Abmessungen des Grabens.

Wie aus der Theorie der ebenen Potentialströmung bekannt ist, bilden die Stromlinien $\psi =$ const. und die Äquipotentiallinien $\varphi =$ const. ein Netz sich rechtwinklig schneidender Kurven, das insbesondere in ein quadratisches übergeht, wenn die Unterschiede $\delta\varphi$ und $\delta\psi$ überall gleich groß angenommen werden (Bd. I S. 124; 130). Bei gegebener fester Berandung des Grundwasserstromes kann dieses Netz in der früher besprochenen Weise (Bd. I S. 151) aufgetragen und zur Untersuchung der Geschwindigkeits- und Druckverhältnisse in dem von Grundwasser durchströmten Bereich herangezogen werden.

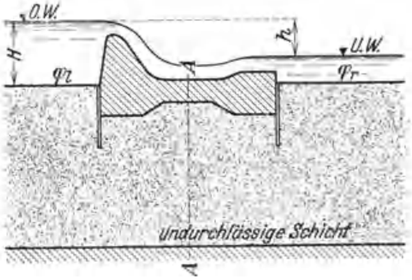


Abb. 130. Durchsickerung des Bodens zwischen einer undurchlässigen Schicht und einem Wehrkörper.

Abb. 130 veranschaulicht ein Beispiel, bei dem es sich darum handelt, die Durchsickerung zwischen einer undurchlässigen Schicht und einem Wehrkörper zu untersuchen[1]. Zunächst zeichnet man das quadratische Netz der Äquipotential- und Stromlinien (Abb. 130a), wobei zu beachten ist, daß die Unterkante

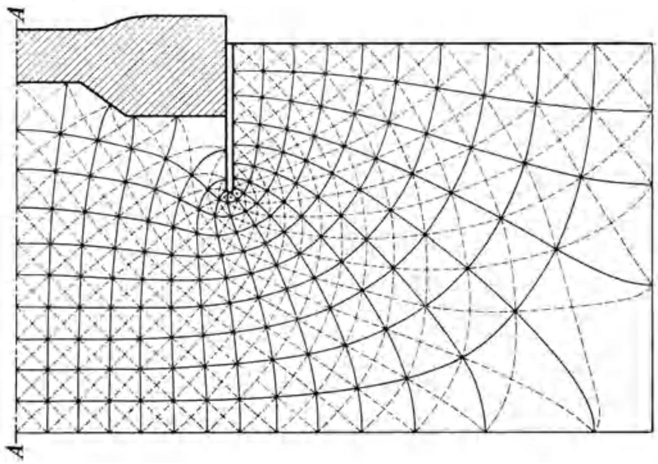


Abb. 130a. Verlauf der Äquipotential- und Stromlinien für die Sickerströmung unter dem Wehrkörper.

des Wehrkörpers und die undurchlässige Schicht Stromlinien bilden, während die Flußsohle links und rechts des Wehres Äquipotentiallinien darstellt[2]. Nimmt man den Druck im Flußlauf statisch verteilt an, so

[1] Forchheimer, Ph.: Hydraulik 3. Aufl. S. 82.

[2] Zur schnellen Feststellung der Stromlinien kann man mit Vorteil das im 1. Bande S. 155 u. 205 beschriebene Verfahren von Hele Shaw anwenden. Die Stromlinien der Abb. 130a sind nach einiger Korrektur auf diese Weise gefunden.

kann — wenn die xy-Ebene in die Flußsohle gelegt wird — das Potential der linksseitigen Flußsohle nach (210)

$$\varphi_l = -\frac{k p}{\gamma} = -kH,$$

an der rechtsseitigen Flußsohle

$$\varphi_r = -k(H-h)$$

gesetzt werden, woraus als Potentialdifferenz folgt:

$$\varphi_r - \varphi_l = kh. \tag{211}$$

Wie oben schon bemerkt wurde, ist beim quadratischen Netz der Potentialunterschied $\delta\varphi$ je zweier Äquipotentiallinien konstant. Hat man also den ganzen Bereich zwischen φ_l und φ_r in n Potentialintervalle (Streifen zwischen je zwei Äquipotentiallinien) zerlegt, so folgt aus (211)

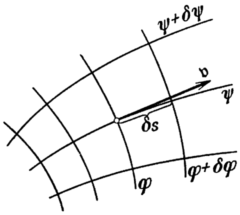


Abb. 131.

$$\delta\varphi = \frac{\varphi_r - \varphi_l}{n} = \frac{kh}{n}. \tag{212}$$

Bezeichnet ferner (Abb. 131) δs die Länge eines beliebigen Quadrates, so ist (Bd. I S. 125 und 152)

$$v = \frac{\delta\varphi}{\delta s}. \tag{213}$$

Da nun $\delta\varphi$ nach (212) bekannt ist, wenn man die Durchlässigkeit k des Bodens kennt, so ist mit (213) auch die Geschwindigkeitsverteilung für das ganze in Frage kommende Strömungsgebiet gegeben. Kleinen Quadraten entsprechen große Geschwindigkeiten und umgekehrt.

Im quadratischen Netz ist $\delta\varphi = \delta\psi$, weshalb durch (212) auch der Durchfluß zwischen je zwei Stromlinien gegeben ist. Um die gesamte unter dem Wehr durchgehende Wassermenge Q zu bestimmen, hat man also nur $\delta\psi$ mit der Anzahl m der Streifen zu multiplizieren, in welche der ganze Bereich zwischen Wehr und undurchlässiger Schicht zerlegt ist.

Als sekundliche Durchflußmenge, bezogen auf die Tiefe Eins (senkrecht zur Bildebene) erhält man somit nach (212)

$$Q = m \cdot 1 \cdot \delta\psi = m \cdot 1 \cdot \delta\varphi = \frac{k h m}{n}.$$

Von besonderer Wichtigkeit ist noch die Bestimmung des Flüssigkeitsdruckes auf die Wehrsohle (Auftrieb). Auch diesen kann man aus dem Quadratnetz leicht ermitteln, wenn man beachtet, daß mit Rücksicht auf (210) und (212)

$$\delta\varphi = \frac{kh}{n} = -\frac{k}{\gamma}\,\delta p - k\cdot\delta z$$

ist, woraus folgt

$$\delta p = -\gamma\left(\frac{h}{n} + \delta z\right)$$

als Druckunterschied zwischen je zwei Äquipotentiallinien. Man kann also, von der linksseitigen Flußsohle ausgehend, den Druck $p + \delta p$ für alle Punkte bestimmen, in denen die Äquipotentiallinien die Wehrsohle schneiden. Aus dem Druckdiagramm läßt sich schließlich der Auftrieb ermitteln.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß auch eine Reihe anderer ebener Vorgänge mit Hilfe der komplexen Methode untersucht werden kann.

3. Näherungslösungen.

Die strenge Behandlung der Grundwasserbewegung in dem vorstehend besprochenen Sinne bereitet immer dann erhebliche Schwierigkeiten, wenn der Grundwasserstrom eine freie Oberfläche besitzt, deren Gestalt unbekannt ist, wie im Falle der Abb. 129. Man ist deshalb bei praktischen Rechnungen vielfach auf Näherungslösungen angewiesen.

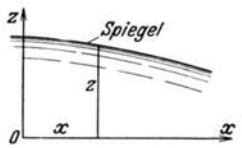


Abb. 132.

Handelt es sich um einen waagerechten Untergrund der wasserführenden Schicht, so kann bei nicht zu starker Neigung der einzelnen Stromlinien nach dem Vorgang von Dupuit mit einiger Annäherung die Filtergeschwindigkeit für alle Punkte einer Senkrechten gleich groß angenommen und bei ebenen Vorgängen

$$v = -k\frac{dz}{dx} \tag{214}$$

gesetzt werden (Abb. 132), wenn z die Höhenkoordinate der Spiegelpunkte über dem undurchlässigen Untergrund bezeichnet.

Mit Hilfe dieses Ansatzes läßt sich, wie besonders von Forchheimer[1] gezeigt wurde, eine Reihe praktisch wichtiger Aufgaben behandeln. Die auf diese Weise gewonnenen Ergebnisse können jedoch — besonders mit Rücksicht auf die Unsicherheit der Randbedingungen — nur als mehr oder weniger grobe Näherungen gewertet werden, zumal sie mit neueren Versuchen z. T. in Widerspruch stehen.

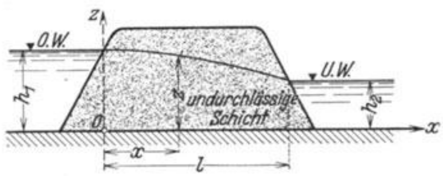


Abb. 133. Durchsickerung eines geraden Dammes bei einseitigem Überdruck.

Nachstehend soll das Verfahren an zwei einfachen Beispielen erläutert werden:

a) Durchsickerung eines geraden Dammes bei einseitigem Überdruck (Abb. 133).

Durch einen Querschnitt von der Höhe z und der Tiefe Eins (senkrecht zur Bildebene) strömt nach (214) die sekundliche Wassermenge

$$Q = z \cdot 1 \cdot v = -kz\frac{dz}{dx},$$

[1] Hydraulik 3. Aufl. S. 70ff.

woraus durch Integration folgt

$$Qx = -k\frac{z^2}{2} + C.$$

Für $x = 0$ ist $z = h_1$, weshalb $C = \frac{k h_1^2}{2}$ und

$$Qx = \frac{k}{2}(h_1^2 - z^2). \tag{215}$$

Die Spiegelkurve hat also einen parabolischen Verlauf. Mit $x = l$ und $z = h_2$ geht (215) über in

$$Ql = \frac{k}{2}(h_1^2 - h_2^2),$$

woraus Q berechnet werden kann, wenn k bekannt ist. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Absenkungskurve des Sickerwassers rechtsseitig gerade am Spiegel des Unterwassers austritt, was jedoch im allgemeinen nicht der Fall zu sein braucht. Diese Kurve kann bei größeren Höhenunterschieden $h_1 - h_2$ die rechte Böschung wesentlich oberhalb des Unterwasserspiegels schneiden, wobei das austretende Wasser dann an der Böschung herabsickert. Damit wäre aber eine von der oben angenommenen vollkommen abweichende Randbedingung vorhanden, die auf das Ergebnis der Rechnung nicht ohne Einfluß sein kann, weshalb der parabolische Verlauf des Wasserspiegels sich höchstens im mittleren Teil des Dammes einstellen könnte. Der obigen Rechnung haftet also in dieser Hinsicht ein erheblicher Mangel an.

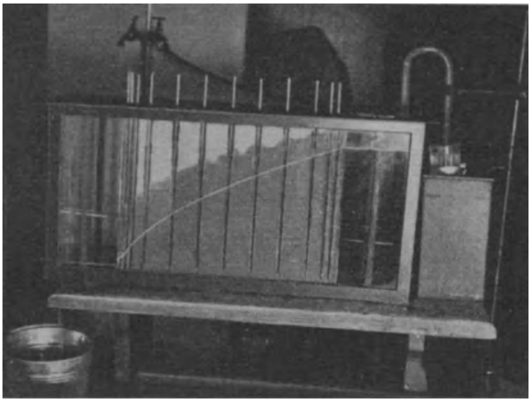


Abb. 133a. Laboratoriumsversuch zur Ermittlung der Spiegelkurve bei der Durchsickerung eines von lotrechten Wänden begrenzten Dammes.

Abb. 133a zeigt eine Versuchsanordnung, aus welcher der Verlauf des Sickerwasserspiegels ersichtlich ist. In einem von Glasscheiben begrenzten rechteckigen Kasten befindet sich zwischen zwei lotrechten Scheidewänden aus engmaschigem Drahtnetz feinkörniger Sand, der unter einem rechtsseitigen Wasserüberdruck steht. Der Strömungsvorgang wurde mittels zweier Überläufe links und rechts am Kasten stationär gemacht. Um die Spiegelkurve kenntlich zu machen, wurden in die Sandmasse eine Anzahl ┗┓-förmig gebogener Standrohre eingebaut, deren langer Schenkel unmittelbar an die vordere Glaswand gesetzt und mittels einer Klebmasse an dieser befestigt wurde. Die Standrohrspiegel sind durch eine weiße Linie miteinander verbunden und geben auf diese Weise den Spiegelverlauf wieder. Am linken Ende ist der sprungartige Übergang in den Unterwasserspiegel erkennbar.

Nach einem Vorschlag von F. Weinig[1] kann man für den Fall, daß das Grundwasser, wie oben angedeutet, oberhalb des Unterwasserspiegels als „Hangquelle" ins Freie austritt, die Randbedingung an dieser Stelle wie folgt formulieren:

$$p = p_a; \quad v_s = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = -k\frac{dz}{ds} = k \sin\alpha,$$

wenn s ein Linienelement der Dammböschung in der Fallrichtung bezeichnet und α dessen Winkel gegen die Horizontale.

b) Schachtbrunnen (Abb. 134).

In einer Grundwasser führenden Schicht, die über einem undurchlässigen Untergrund mit waagerechter Oberfläche lagert, sei ein runder Schachtbrunnen mit durchlässiger Wandung bis auf den undurchlässigen Grund herniedergebracht. Ein solcher Brunnen wird gewöhnlich als „vollkommener Brunnen" bezeichnet, im Gegensatz zum „unvollkommenen Brunnen", der nicht bis zur undurchlässigen Schicht reicht. Macht man wieder die Dupuitsche Annahme gleichgroßer Geschwindigkeit für alle Punkte einer Lotrechten und setzt weiter zunächst voraus, daß die Grundwasser führende Schicht seitlich beliebig weit ausgedehnt ist, so kann die durch einen Zylindermantel von der Höhe z und dem Radius r sekundlich fließende Wassermenge in der Form

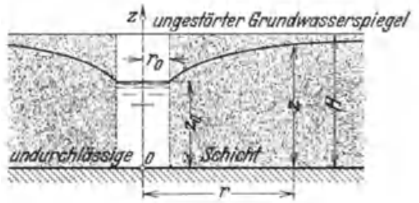


Abb. 134. Grundwasserabsenkung mittels eines „vollkommenen" Brunnens.

$$Q = 2\pi r z v \tag{216}$$

angeschrieben werden. Zur Bestimmung des Verlaufs der Spiegelkurve des abgesenkten Grundwassers genügt die Betrachtung eines Meridianschnittes durch die Brunnenachse, da es sich hier um einen axialsymmetrischen Strömungsvorgang handelt. Setzt man weiter nach Dupuit in Anlehnung an den Ausdruck (214)

$$v = k\frac{dz}{dr},$$

so erhält man aus (216)

$$Q = 2\pi r z k \frac{dz}{dr},$$

woraus durch Integration folgt:

$$Q \ln r = \pi k z^2 + C. \tag{217}$$

[1] Neményi, P.: Z. VDI 1932 Nr. 49 S. 1197; vgl. auch Wasserbauliche Strömungslehre, S. 195. Leipzig 1933.

Nun ist $z = z_0$ für $r = r_0$, also $C = Q \ln r_0 - \pi k z_0^2$, so daß sich als Gleichung der Spiegelkurve bei einer Entnahme Q aus dem Brunnen der Ausdruck

$$Q \ln \frac{r}{r_0} = \pi k (z^2 - z_0^2) \tag{218}$$

ergibt.

Auf einer Meridiankurve des Spiegels seien jetzt in einiger Entfernung vom Brunnen (s. unten) zwei Punkte mit den Koordinaten (z_1, r_1) und (z_2, r_2) betrachtet. Dann folgt aus Gl. (218)

$$Q \ln \frac{r_2}{r_1} = \pi k (z_2^2 - z_1^2),$$

wofür man auch schreiben kann

$$z_2 + z_1 = \frac{Q}{\pi k (z_2 - z_1)} \ln \frac{r_2}{r_1}. \tag{219}$$

Sind nun z. B. Q und k bekannt, ist ferner der Spiegelunterschied $z_2 - z_1 = a$ durch Messung festgestellt, so kann aus (219) $z_2 + z_1 = b$ berechnet und daraus $z_2 = \frac{a+b}{2}$ gefunden werden, womit auch die Lage der undurchlässigen Schicht bekannt ist.

Läßt man in Gl. (218) bei gegebenem Q den Radius $r \to \infty$ gehen, so würde sich für die (von bestimmter Mächtigkeit H vorausgesetzte) wasserführende Schicht der unmögliche Wert $z = \infty$ ergeben. Man könnte nun in Gl. (217) die Randbedingung zur Bestimmung von C so einführen, daß man der Höhe $z = H$ einen bestimmten Radius $r = R$ (Wirkungsradius des Brunnens) zuordnet. Da man aber bei Festsetzung von R nur auf Schätzungen angewiesen ist, so wäre dadurch auch nichts wesentlich Neues gewonnen. In der näheren Umgebung des Brunnens dürfte der Dupuitsche Ansatz wegen der starken Krümmung der Stromlinien die wirklichen Verhältnisse ebenfalls nur angenähert wiedergeben. Schließlich haben neuere Untersuchungen gezeigt[1], daß die bei der Ableitung der Gl. (218) gemachte Annahme gleicher Höhenlage des Brunnenspiegels und des abgesenkten Grundwasserspiegels an der Brunnenwand nicht zutrifft, daß vielmehr schon bei relativ kleinen Absenkungen $H - z_0$ der Spiegel im Rohre tiefer liegt als der Grundwasserspiegel an der Brunnenwand. Es wiederholt sich hier also die gleiche Erscheinung, die bereits bei der vorhergehenden Aufgabe erörtert wurde.

Versuche, die vorstehend kurz angedeuteten Schwierigkeiten zu beheben, sind von verschiedenen Seiten unternommen worden, ohne daß es bislang gelungen wäre, eine einwandfreie Theorie unter Vermeidung aller willkürlichen Annahmen zu schaffen. Immerhin sind durch diese Arbeiten mancherlei Unstimmigkeiten, welche der oben angegebenen

[1] Ehrenberger, R.: Z. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1928 S. 71, 89, 109.

Lösung mangels richtiger Randbedingungen anhaften, einer Klärung näher gebracht worden[1].

Aus den Versuchen Ehrenbergers[2] geht hervor, daß die Abhängigkeit der Wassermenge Q von dem Absenkungsverhältnis $\frac{H - z_0}{H}$ durch Gl. (218) richtig wiedergegeben wird, sofern man unter z_0 die Spiegelhöhe im Brunnen versteht. Dagegen scheint, wie Kozeny[1] gezeigt hat, im Gegensatz zu Gl. (218) die vom Brunnen gelieferte Wassermenge dem Radius des Brunnens nahezu proportional zu sein, was sich grundsätzlich mit den im praktischen Brunnenbau geltenden Anschauungen decken würde.

VI. Hydrodynamische Theorie der Schmiermittelreibung.

1. Einleitung.

Zwei relativ gegeneinander bewegte und aufeinander Druckkräfte ausübende Maschinenteile werden bekanntlich zur Verhütung schneller Abnützung ihrer Lagerflächen und zur Herabsetzung der Reibungsverluste durch eine dünne Schmierschicht (Ölschicht) voneinander getrennt. Die Erfahrung hat gelehrt, daß die in den „geschmierten" Lagern auftretenden Reibungskräfte wesentlich anderen Gesetzen folgen als bei der „trockenen" Reibung ohne Schmierschicht. Während im letzteren Falle nach dem Coulombschen Gesetz[3] die Reibung in der Hauptsache abhängig ist vom Normaldruck und von der Beschaffenheit der Oberflächen der sich berührenden Körper, zeigt sich bei der „vollkommenen Schmiermittelreibung", daß die Reibungskraft unabhängig ist von der Oberflächenbeschaffenheit der Körper, dagegen abhängig von der Zähigkeit des Schmiermittels und von der Größe der Relativgeschwindigkeit. Da die zähe Flüssigkeit an den Wandungen der von ihr getrennten Körper (Zapfen und Lager usw.) haftet, so wird diese Relativgeschwindigkeit auch auf die Flüssigkeit übertragen. Man wird also die Schmiermittelreibung im wesentlichen auf Flüssigkeitsreibung in der Schmierschicht zurückführen und nach den Gesetzen der Hydrodynamik behandeln müssen.

Bei den hier ins Auge gefaßten Flüssigkeitsbewegungen handelt es sich durchweg um Querschnitte von sehr geringer Höhe und Flüssigkeiten von großer Zähigkeit (Öl). Die Reynoldssche Zahl wird also

[1] Vgl. hierzu J. Kozeny: Wasserkr. u. Wasserwirtsch. 1927 S. 120ff. J. Schulze: Die Grundwasserabsenkung in Theorie und Praxis. Berlin 1924. H. Weber: Die Reichweite von Grundwässerabsenkungen mittels Rohrbrunnen. Berlin 1928; sowie Auerbach-Hort: Handb. phys. techn. Mech. Bd. 5 S. 1108, 1115 (Ref. von Neményi). P. Neményi: Über Sickerstörungen. Z. VDI 1932 Nr. 49 S. 1197.

[2] Siehe Fußnote 1 S. 176.

[3] $R = fN$, wo f der „Reibungskoeffizient" und N der Normaldruck.

immer sehr klein sein, so daß man in den hydrodynamischen Gleichungen der zähen Flüssigkeit die Trägheitsglieder gegenüber den Reibungsgliedern vernachlässigen (vgl. Bd. I S. 203) und die Bewegung des Schmiermittels als eine Schichtenströmung auffassen kann.

Bevor an die Lösung der eigentlichen Aufgabe herangegangen wird, sei zunächst die laminare Strömung zwischen zwei parallelen Platten untersucht (Abb. 135), von denen die obere ruht, während die untere parallel zur oberen mit der Geschwindigkeit V bewegt wird. Außerdem sei vorausgesetzt, daß die Platten eine große Tiefenausdehnung senkrecht zur Bildebene besitzen, so daß die Strömung — abgesehen von den Plattenrändern — als eben angesehen werden darf. Der Abstand der beiden Platten sei h. Das Koordinatensystem werde so gewählt, daß die X-Achse in die Richtung der unteren Platte fällt, während die Z-Achse senkrecht zur Plattenebene steht; von der Y-Richtung sei die Strömung unabhängig. An den beiden Platten haftet die Flüssigkeit; es herrscht also oben die Geschwindigkeit $v_x = 0$, unten die Geschwindigkeit $v_x = V$. Da man weiter annehmen darf, daß im vorliegenden Falle v_x nur von z abhängt, außerdem $v_y = v_z = 0$ ist, so folgt aus den Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen der zähen Flüssigkeit im Falle stationärer Strömung (vgl. Bd. I S. 202)

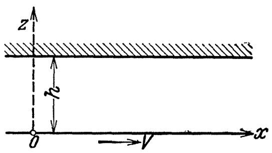


Abb. 135.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \varrho Z, \tag{220}$$

wo μ den Zähigkeitskoeffizienten und $Z = -g$ die auf die Masseneinheit bezogene Schwere bezeichnet. Bei den hier ins Auge gefaßten Anwendungen ist der Plattenabstand h sehr klein (die Dicke der Schmierschicht beträgt nur Bruchteile von Millimetern), weshalb der Einfluß der Schwere vernachlässigt und $\frac{\partial p}{\partial z} \approx 0$ gesetzt werden kann. Demnach folgt aus (220), daß der Druck p nur von x abhängig, für einen bestimmten Querschnitt aber konstant ist, weshalb die erste Gleichung von (220) mit $v_x = v$ auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 v}{dz^2}. \tag{221}$$

Durch zweimalige Integration erhält man daraus mit C_1 und C_2 als Integrationskonstanten

$$\frac{dp}{dx}\frac{z^2}{2} = \mu v + C_1 z + C_2. \tag{222}$$

Für $z = 0$ ist $v = V$ und für $z = h$ ist $v = 0$, woraus folgt $C_2 = -\mu V$, $C_1 = \frac{dp}{dz}\frac{h}{2} + \frac{\mu V}{h}$. Führt man diese Werte in (222) ein, so ergibt sich für die Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von z:

$$v = V\left(1 - \frac{z}{h}\right) - \frac{dp}{dx} \cdot \frac{hz - z^2}{2\mu}. \tag{223}$$

Der erste Summand liefert eine geradlinige Geschwindigkeitsverteilung über die Höhe h (die sich einstellen würde für $\frac{dp}{dx} = 0$, vgl. Bd. I S. 76), der zweite Summand eine parabolische Verteilung.

Mit Hilfe der Gl. (223) läßt sich auch die sekundliche Durchflußmenge durch einen Querschnitt senkrecht zur Stromrichtung ermitteln. Man erhält nach einfacher Integration, bezogen auf die Tiefe Eins,

$$Q = \int_{z=0}^{z=h} v \cdot dz = \frac{Vh}{2} - \frac{dp}{dx}\frac{h^3}{12\,\mu}. \tag{224}$$

Da nun aus Gründen der Kontinuität Q für alle Querschnitte denselben Wert hat, außerdem V als Geschwindigkeit der unteren Platte unabhängig von x ist, so folgt aus (224) $\frac{dp}{dx} = \text{const.}$

Im Falle eines Gleitlagers von endlicher Länge $x = l$ herrscht an den Stellen $x = 0$ und $x = l$ der atmosphärische Luftdruck $p = p_0$. Sollen nun von dem Lagerkörper auf die Unterlage Druckkräfte übertragen werden, so ist das nur dadurch möglich, daß sich in der Schmierschicht eine Druckresultante einstellt, die der äußeren Kraft Gleichgewicht hält. Zu diesem Zwecke müßte in der Schmierschicht der Druck mit p_0 für $x = 0$ beginnend mit wachsendem x größer werden, für $0 < x_0 < l$ ein Maximum erreichen und bei $x = l$ wieder auf p_0 absinken. Man erkennt, daß die zwischen zwei parallelen Platten befindliche Schmierschicht wegen $\frac{dp}{dx} = \text{const.}$ eine solche Druckverteilung nicht zu liefern vermag. Nimmt man dagegen den Plattenabstand h mit x veränderlich an (Abb. 136), so liefert Gl. (224) auch ein mit x veränderliches Druckgefälle, aus dem die gewünschte Druckverteilung bei entsprechender Berücksichtigung der Randbedingungen gefunden werden kann. Ähnliche Verhältnisse liegen beim Zapfenlager vor, wie weiter unten gezeigt wird.

2. Gleitlager auf ebener Führung.

Die vorstehenden Überlegungen finden Anwendung bei der erstmalig von O. Reynolds[1] entwickelten zweidimensionalen Theorie der Schmiermittelreibung in Lagern, Zapfen usw. Hier soll zunächst der Fall eines auf ebener Führung bewegten Gleitschuhs behandelt werden, dessen Breite zwecks Erzeugung einer ebenen Strömung hinreichend groß angenommen sei.

Wie oben gezeigt wurde, muß der Lagerkörper gegen die Unterstützung unter einem gewissen Winkel α geneigt sein, damit das Lager äußere Kräfte auf die Unterstützung übertragen kann. In Abb. 136 stelle die obere Berandung den unteren Teil des Gleitlagers dar, das

[1] Philos. Trans. Roy. Soc., Lond. I. 1886. Ostwalds Kassiker Nr. 218 S. 39; vgl. auch A. Sommerfeld: Zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung. Z. Math. Phys. Bd. 50 (1904) S. 103ff.

gegen die im allgemeinen feste Unterstützungsebene mit der Relativgeschwindigkeit V nach links bewegt werde. Es kommt auf dasselbe hinaus, wenn man — zwecks Erlangung einer stationären Bewegung — den Lagerkörper ruhend annimmt und der Stützebene eine relative Geschwindigkeit V nach rechts erteilt. Das Koordinatensystem wird in gleicher Weise wie in Abb. 135 gewählt; in ihm befindet sich der Lagerkörper in Ruhe, während die Unterstützungsebene längs der X-Achse bewegt ist.

Im vorliegenden Falle ist die Spalthöhe h nicht mehr konstant, sondern eine lineare Funktion von x, und zwar gilt mit den Bezeichnungen der Abb. 136

$$h = h_1 - \alpha x . \tag{225}$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gl. (224) ein und löst nach $\frac{dp}{dx}$ auf, so erhält man

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6 \mu V}{(h_1 - \alpha x)^2} - \frac{12 \mu Q}{(h_1 - \alpha x)^3} \tag{226}$$

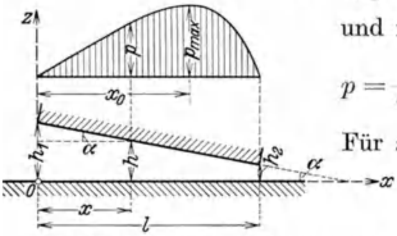


Abb. 136. Gleitschuh auf ebener Führung und zugehörige Druckverteilung im Falle „ebener" Strömung.

und nach Integration

$$p = \frac{6 \mu V}{\alpha (h_1 - \alpha x)} - \frac{12 \mu Q}{2 \alpha (h_1 - \alpha x)^2} + C . \tag{227}$$

Für $x = 0$ ist $p = p_0$ (atm. Luftdruck), womit aus (227) für die Konstante C folgt:

$$p_0 = \frac{6 \mu V}{\alpha h_1} - \frac{12 \mu Q}{2 \alpha h_1^2} + C$$

und somit

$$p = p_0 + \frac{6 \mu V}{\alpha} \left\{ \frac{1}{h_1 - \alpha x} - \frac{1}{h_1} \right\} + \frac{6 \mu Q}{\alpha} \left\{ \frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{(h_1 - \alpha x)^2} \right\} . \tag{228}$$

Da aber auch $p = p_0$ für $x = l$ werden muß, so ergibt sich aus vorstehender Gleichung ein Ausdruck für die zunächst noch unbekannte Durchflußmenge Q. Man erhält, wenn man die genannten Randwerte einsetzt, wegen $h_1 - \alpha l = h_2$

$$Q = \frac{V h_1 h_2}{h_1 + h_2} . \tag{229}$$

Mit Hilfe der Gl. (226) und (229) läßt sich jetzt das veränderliche Druckgefälle $\frac{dp}{dx}$ und damit die Geschwindigkeitsverteilung aus Gl. (223) ermitteln.

Führt man den Wert Q in Gl. (228) ein, so findet man für den Druck p an der beliebigen Stelle x nach einigen einfachen Zwischenrechnungen

$$p = p_0 + \frac{6 \mu V x (l - x)(h_1 - h_2)}{l h^2 (h_1 + h_2)} . \tag{230}$$

Für $h_1 = h_2 = h$, d. h. für parallele Begrenzungsflächen, wird $p = p_0$; ein Überdruck über den äußeren Luftdruck kann in diesem Falle nicht geleistet, eine Last also nicht übertragen werden (vgl. die obige diesbezügliche Bemerkung).

In Abb. 136 (oben) ist der Druckverlauf schematisch dargestellt. Das Druckmaximum findet man, wenn in Gl. (226) $\frac{dp}{dx} = 0$ gesetzt wird; man erhält dann mit $h_1 - \alpha x = h$

$$h = h_0 = \frac{2\,Q}{V} = h_1 - \alpha\, x_0$$

oder mit Rücksicht auf (229) die zugehörige Abszisse $x = x_0$

$$x_0 = \frac{h_1 (h_1 - h_2)}{\alpha\,(h_1 + h_2)} = \frac{h_1\, l}{h_1 + h_2}.$$

Zur Bestimmung des resultierenden Überdruckes auf 1 m Breite des Gleitlagers bilde man

$$P = \int\limits_{x=0}^{x=l} (p - p_0)\, dx = \frac{6\,\mu\, V (h_1 - h_2)}{l\,(h_1 + h_2)} \int\limits_{x=0}^{x=l} \frac{l\,x - x^2}{h^2}\, dx .$$

In das Integral rechts substituiere man mit Rücksicht auf (225)

$$x = \frac{h_1 - h}{\alpha}; \qquad dx = -\frac{dh}{\alpha},$$

so daß

$$\int\limits_{x=0}^{x=l} \frac{l\,x - x^2}{h^2}\, dx = -\int\limits_{h=h_1}^{h=h_2} \left\{ \frac{h_1 - h}{h^2}\,\frac{l}{\alpha^2} - \frac{h_1^2 - 2\,h_1 h + h^2}{\alpha^3 h^2} \right\} dh .$$

Führt man die Integration durch und setzt die Grenzen h_1 und h_2 ein, so erhält man

$$\int\limits_{x=0}^{x=l} \frac{l\,x - x^2}{h^2}\, dx = \frac{1}{\alpha^3} \left\{ (h_1 + h_2) \ln \frac{h_1}{h_2} - 2\,(h_1 - h_2) \right\}$$

und somit

$$P = \frac{6\,\mu\, V\,(h_1 - h_2)}{\alpha^3 l\,(h_1 + h_2)} \left\{ (h_1 + h_2) \ln \frac{h_1}{h_2} - 2\,(h_1 - h_2) \right\}.$$

Setzt man schließlich noch $\alpha\, l = h_1 - h_2$ und $\frac{h_1}{h_2} = c$, so wird nach einigen Kürzungen

$$P = \frac{6\,\mu\, V\, l^2}{h_2^2 (c-1)^2} \left(\ln c - 2\,\frac{c-1}{c+1} \right). \tag{231}$$

Die resultierende Druckkraft P — die nicht mit $p_{\max}$ zusammenzufallen braucht — liegt, wie man aus dem Druckdiagramm der Abb. 136 erkennt, nicht in der Lagermitte, sondern hinter dieser, was für die praktische Anwendung auf Gleitlager besonders beachtenswert ist.

Die Bedingung $\frac{dP}{dc} = 0$ liefert eine transzendente Gleichung in c, woraus der Verhältniswert $c = \frac{h_1}{h_2} \approx 2{,}2$ für $P = P_{\max}$ gefunden wird. Damit geht (231) über in

$$P_{\max} = \frac{0{,}16\,\mu\, V\, l^2}{h_2^2}. \tag{232}$$

Man kann hier noch h_2 durch die mittlere Höhe $h_m = \frac{h_1 + h_2}{2}$ ersetzen, wenn man folgende Beziehungen beachtet

$$h_1 = h_m + \frac{\alpha l}{2}; \qquad h_2 = h_m - \frac{\alpha l}{2}; \qquad \frac{h_1}{h_2} = c = \frac{2 h_m + \alpha l}{2 h_m - \alpha l}.$$

Aus der dritten Gleichung folgt $\frac{\alpha l}{2} = h_m \frac{c-1}{c+1}$ und somit $h_2 = \frac{2 h_m}{c+1}$. Mit diesem Werte und $c = 2{,}2$ geht (232) über in

$$P_{\max} = \frac{0{,}41 \, \mu \, V \, l^2}{h_m^2}. \tag{233}$$

Man erkennt aus Gl. (233), daß durch ein derartiges Lager in der Tat eine große Druckkraft übertragen werden kann, wenn die Schmierschicht eine sehr geringe Höhe h_m besitzt.

Zur Berechnung der Schubspannung an der oberen Wand bilde man (Bd. I S. 72) $\tau_h = \mu \left.\frac{dv}{dz}\right]_{z=h}$, wo v aus Gl. (223) einzusetzen ist. Man erhält damit

$$\tau_h = -\frac{\mu V}{h} + \frac{h}{2} \frac{dp}{dx}$$

oder, mit Rücksicht auf Gl. (225), (226) und (229),

$$\tau_h = \frac{2 \mu V}{h} - \frac{6 \mu V}{h^2} \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}.$$

Die gesamte Schubkraft pro Tiefeneinheit (Reibungswiderstand) wird also

$$T = \int_{x=0}^{x=l} \tau_h \cdot dx = 2 \mu V \int_{x=0}^{x=l} \frac{dx}{h} - \frac{6 \mu V h_1 h_2}{h_1 + h_2} \int_{x=0}^{x=l} \frac{dx}{h^2}.$$

Setzt man hier noch $dx = -\frac{dh}{\alpha}$ (S. 180) und führt als Integrationsgrenzen h_1 für $x = 0$ und h_2 für $x = l$ ein, so liefert die Integration wegen $c = \frac{h_1}{h_2}$

$$T = 2 \frac{\mu V}{\alpha} \left(\ln c - 3 \frac{c-1}{c+1} \right).$$

Mit $\alpha = \frac{2 h_m}{l} \frac{c-1}{c+1}$ (s. oben) und $c = 2{,}2$ folgt daraus

$$T = -0{,}9 \frac{\mu V l}{h_m}.$$

Das negative Vorzeichen deutet an, daß T gegen die positive X-Achse gerichtet ist. Der Reibungswiderstand ist also proportional der Relativgeschwindigkeit V und dem Zähigkeitskoeffizienten, dagegen umgekehrt proportional der Schichtdicke.

Wegen der Neigung der oberen Platte liefert auch P einen Beitrag zum gesamten Horizontalwiderstand H, nämlich $P\alpha$, so daß man für letzteren im Falle $c = 2{,}2$ den absoluten Wert

$$H = \frac{0{,}41 \, \mu \, V \, l^2}{h_m^2} \alpha + \frac{0{,}9 \, \mu \, V \, l}{h_m}$$

erhält. Setzt man hier wieder

$$\alpha = \frac{2\,h_m}{l}\,\frac{c-1}{c+1} = \frac{3}{4}\,\frac{h_m}{l}$$

ein, so wird schließlich

$$H = 1{,}21\,\frac{\mu V l}{h_m}\,.$$

Die aus der vorstehenden Theorie gewonnenen Erkenntnisse, besonders der Umstand, daß die Gleitflächen zur Erzeugung großer spezifischer Drücke gegeneinander um einen gewissen Winkel α geneigt sein müssen, finden neuerdings Anwendung bei den Michellschen Spurlagern[1].

Abb. 137a.

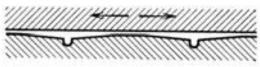


Abb. 137b.

Abb. 137a und b. Keilförmig geneigte Gleitflächen bei Einscheibenlagern.

Man bildet dabei entweder keilförmig geneigte Gleitflächen aus, die in das eigentliche Lager eingearbeitet werden und durch Ölnuten getrennt sind (Einscheibenlager, Abb. 137a und 137b), oder man verwendet mehrere einzelne „Blöcke", die zwischen den Lagerkörper und ein darüber liegendes Druckstück eingeschaltet sind und sich um eine Stützkuppe oder Kippkante zu drehen vermögen (Blocklager, Abb. 138), so daß eine der Belastung und Geschwindigkeit entsprechende Einstellung der Keilfläche möglich ist. Durch das Hineinziehen des Schmiermaterials in den Keilraum wird ständig eine gute Schmierung gewährleistet. Derartige Lager, die als Axialdrucklager (für drehende Bewegung) ausgebildet werden und bei denen die einzelnen Blöcke Kreissegmente sind (Abb. 138a), können sehr hohe spezifische Drücke übertragen.

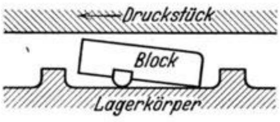


Abb. 138. Blocklager.

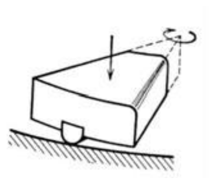


Abb. 138a. Segmentförmiger Block eines Axialdrucklagers.

Der ebene Gleitschuh von endlicher Plattenbreite (dreidimensionales Problem) ist von A. G. M. Michell[2] untersucht worden. In diesem Fall strömt das Öl nicht nur in der Bewegungsrichtung des Lagers, sondern es fließt auch eine gewisse Menge nach den Seitenkanten hin, was eine Abnahme des Druckes und eine Zunahme des Reibungswiderstandes zur Folge hat. Die oben entwickelten Formeln geben also die wirklichen Verhältnisse nur qualitativ richtig wieder, und zwar ändert sich nach der Michellschen Rechnung der Druck bei endlicher Lagerbreite b gemäß nachstehender Tabelle.

$\frac{b}{l}$	$= \infty$	1	$\frac{1}{3}$
Über-Druck	$= P$	$0{,}422\,P$	$0{,}031\,P$

[1] Vgl. etwa Commentz: Z. VDI 1919 S. 965, und Kraft: Neuere Spurlager. Masch.-Bau 1928 S. 357.

[2] Michell, A. G. M.: The Lubrication of Plane Surfaces. Z. Math. Phys. 1905 S. 123.

In Abb. 139 ist die Druckverteilung und der ungefähre Verlauf der Stromlinien unter einem ebenen Gleitstück nach der Michellschen Theorie dargestellt.

3. Zapfenlager.

Die unter Ziff. 2 angestellten Überlegungen können prinzipiell auch auf den sich in einer Lagerschale umdrehenden Lagerzapfen übertragen werden, wenn man — wie das praktisch immer der Fall ist — voraussetzt, daß der zwischen Zapfen und Lagerschale vorhandene, von einer zähen Schmierflüssigkeit ausgefüllte Spielraum h sehr eng und der Zapfenradius r sehr viel größer als h ist.

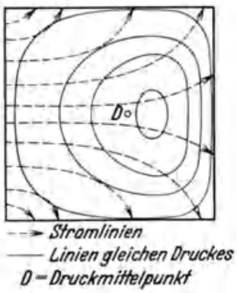


Abb. 139. Druckverteilung und Stromlinien beim ebenen Gleitschuh von endlicher Breite nach der Theorie von Michell.

Nimmt man zunächst eine zentrische Lage des Zapfens in der Lagerschale an, so liegt der analoge Fall zu Abb. 135 vor, und es ergibt sich in der ganzen Flüssigkeit ein konstanter Druck p (vgl. S. 186). Außerdem ist mit Rücksicht auf Gl. (223) die Schubspannung am Zapfenumfang $\tau = \mu \frac{dv}{dz} = -\mu \frac{V}{h} = \text{const.}$ Da somit die Summe aller Druck- und Schubspannungen am Zapfenumfang aus Symmetriegründen nach jeder beliebigen Richtung verschwindet, so ist ein solcher Zapfen nicht in der Lage, eine endliche Belastung zu übertragen, sondern er muß sich zu diesem Zwecke aus seiner zentralen Lage in eine exzentrische Lage verschieben (Abb. 140). Dagegen tritt auch beim zentrischen Zapfen ein Reibungsmoment von der Größe

$$M_R = 2\pi r \cdot \tau \cdot r = -\frac{2\pi r^2 \mu V}{h},$$

bezogen auf die Zapfenlänge Eins, auf, das dem äußeren Kraftmoment entgegengesetzt gerichtet ist.

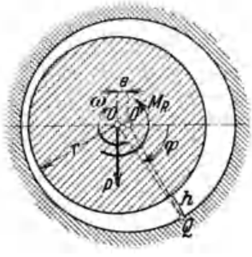


Abb. 140. Exzentrische Lage des Lagerzapfens bei Schmiermittelreibung.

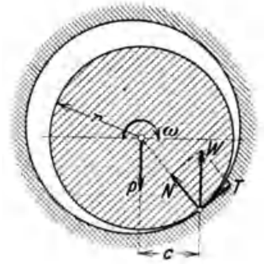


Abb. 141. „Auflaufen“ des Lagerzapfens bei „trockener“ Reibung.

Die zentrale Lage kann sich nur für den Grenzfall des unbelasteten Zapfens einstellen. Beim belasteten Zapfen dagegen tritt — wie die Erfahrung gelehrt hat — eine Verschiebung im Sinne der Drehbewegung ein, von der Richtung des Zapfendruckes aus gerechnet, im Gegensatz zur trockenen Reibung, bei der das „Auflaufen“ im Lager entgegen der Drehrichtung erfolgt (Abb. 141).

Infolge dieser Verschiebung des Zapfenmittelpunktes O aus der zentralen Lage O', die hier zunächst in horizontaler Richtung angenommen wurde (Abb. 140), wird der Spielraum h zwischen Zapfen und

Lager veränderlich, was der Keilwirkung des Spaltes in Abb. 136 entspricht, so daß hier hinsichtlich der Druckverteilung ähnliche Verhältnisse vorliegen wie dort; insbesondere kann sich jetzt aus den Druck- und Schubspannungen eine Resultante einstellen, die der Zapfenbelastung P das Gleichgewicht hält.

Es bezeichne nun $e = \overline{OO'}$ die Exzentrizität des Zapfenmittelpunktes, $\delta = R - r$ den Unterschied zwischen dem Radius R der Lagerschale und demjenigen des Zapfens (r) und φ den Winkel, den ein beliebiger Radius r im Sinne der Drehbewegung mit der Horizontalen durch O einschließt. Dann folgt aus Abb. 140, da der Winkel $O'QO$ sehr klein ist,

$$r + h = e \cdot \cos\varphi + R = e \cdot \cos\varphi + r + \delta$$

oder

$$h = e \cdot \cos\varphi + \delta\,. \tag{234}$$

Wegen der Kleinheit von h im Vergleich zu r kann man nun mit hinreichender Genauigkeit ein Längenelement $dx = r \cdot d\varphi$ der Spaltflüssigkeit als eben betrachten und den unter Ziffer 2 entwickelten Ausdruck (226) für das Druckgefälle unmittelbar auch hier anwenden. Dann wird

$$\frac{dp}{r \cdot d\varphi} = \frac{6\mu}{h^3}(Vh - 2Q)\,, \tag{235}$$

wo h nach (234) als Funktion von φ dargestellt ist. Die sekundliche Durchflußmenge Q ist zunächst unbekannt. Nimmt man an, daß es sich im vorliegenden Falle um Vollschmierung handelt, schließt also eine metallische Berührung zwischen Zapfen und Lager vollständig aus, so ist p eine stetige und periodische Funktion von φ, d. h.

$$p(0) = p(2\pi)\,. \tag{236}$$

Mit Hilfe dieser Bedingung läßt sich zunächst Q berechnen[1]. Dazu bilde man mit Rücksicht auf (234), (235) und (236)

$$p(2\pi) - p(0) = 6\mu V r \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{d\varphi}{(e \cdot \cos\varphi + \delta)^2} - 12\mu Q r \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \frac{d\varphi}{(e \cdot \cos\varphi + \delta)^3} = 0\,,$$

woraus folgt

$$V \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(e \cdot \cos\varphi + \delta)^2} = 2Q \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(e \cdot \cos\varphi + \delta)^3}\,. \tag{237}$$

Nun ist für $\delta^2 > e^2$

$$J_1 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{e \cdot \cos\varphi + \delta} = \frac{2}{\sqrt{\delta^2 - e^2}} \operatorname{arc\,tg}\left[\sqrt{\frac{\delta - e}{\delta + e}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{\delta^2 - e^2}}\,. \tag{238}$$

Ferner

$$J_2 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(e \cdot \cos\varphi + \delta)^2} = -\int_0^{2\pi} \frac{d\,\frac{1}{(e \cdot \cos\varphi + \delta)}}{d\delta}\, d\varphi = -\frac{dJ_1}{d\delta} = \frac{2\pi\delta}{(\sqrt{\delta^2 - e^2})^3} \tag{239}$$

[1] Sommerfeld, A.: Z. Math. Phys. Bd. 50 (1904) S. 108.

und

$$J_3 = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(e \cdot \cos\varphi + \delta)^3} = -\frac{1}{2}\frac{dJ_2}{d\delta} = \frac{\pi\,(2\,\delta^2 + e^2)}{(\sqrt{\delta^2 - e^2})^5}\,. \tag{240}$$

Mit diesen Integralen geht (237) über in

$$\frac{2\,\pi\,\delta\,V}{(\sqrt{\delta^2 - e^2})^3} = \frac{2\,\pi\,Q\,(2\,\delta^2 + e^2)}{(\sqrt{\delta^2 - e^2})^5}\,,$$

woraus folgt

$$Q = \frac{V\,\delta\,(\delta^2 - e^2)}{2\,\delta^2 + e^2}\,. \tag{241}$$

Damit ist aber nach Gl. (235) auch das Druckgefälle festgelegt, nämlich

$$\frac{dp}{d\varphi} = \frac{6\,\mu\,r\,V}{h^3}\left\{h - \frac{2\,\delta\,(\delta^2 - e^2)}{2\,\delta^2 + e^2}\right\}. \tag{242}$$

Zur Bestimmung des Druckmaximums bzw. Minimums setze man $\frac{dp}{d\varphi} = 0$; dann ergibt sich aus (242)

$$h = e \cdot \cos\varphi + \delta = \frac{2\,\delta\,(\delta^2 - e^2)}{2\,\delta^2 + e^2}$$

oder

$$\cos\varphi = -\frac{3\,\delta e}{2\,\delta^2 + e^2}\,. \tag{243}$$

Ist also die Lage des Zapfens innerhalb der Lagerschale — und damit die Exzentrizität e — bekannt, so können die Stellen größten und kleinsten Druckes aus (243) berechnet werden. Für $e = 0$ und $h = \delta = \text{const.}$ folgt aus (242) $\frac{dp}{d\varphi} = 0$, also $p = \text{const.}$, wie auf S. 184 bemerkt wurde.

Die Schubspannung am Zapfenumfang ergibt sich mit Hilfe von Gl. (223) aus der Bedingung

$$\tau = \mu \left.\frac{dv}{dz}\right]_{z=0} = -\left(\frac{\mu\,V}{h} + \frac{h}{2}\frac{dp}{dx}\right),$$

wo $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{r \cdot d\varphi}$ aus (235) einzusetzen ist. Damit wird

$$\tau = -\frac{2\,\mu}{h^2}\,(2\,V\,h - 3\,Q) \tag{244}$$

und somit das auf die Längeneinheit des Zapfens bezogene Reibungsmoment

$$M_R = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \tau\,r^2\,d\varphi = -4\,\mu\,V\,r^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h} + 6\,\mu\,Q\,r^2 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{h^2}\,.$$

Führt man hier den Ausdruck Q aus (241) sowie die Integralwerte (238) und (239) ein, so erhält man nach einfacher Zwischenrechnung

$$M_R = -\frac{4\,\mu\,r^2\,V\,\pi}{\sqrt{\delta^2 - e^2}} \cdot \frac{\delta^2 + 2\,e^2}{2\,\delta^2 + e^2}\,. \tag{245}$$

Das negative Vorzeichen gibt an, daß M_R gegen den Sinn des positiven Winkels φ gerichtet ist (Abb. 140). Man erkennt, daß dieses Moment wieder abhängig von der Umfangsgeschwindigkeit V und von der Zähigkeit des Schmiermittels ist. Mit $e = 0$, d. h. bei zentrisch gelagertem Zapfen, geht (245) in die bereits auf S. 184 für diesen Fall angeschriebene Gleichung für M_R über.

Um die Beziehung zwischen der Größe des Zapfendruckes P, der Umfangsgeschwindigkeit V und der Exzentrizität e des Zapfenmittelpunktes zu erhalten, soll jetzt die Summe der vertikalen und horizontalen Komponenten aus den über den Zapfenumfang verteilten Druck- und Schubspannungen gebildet werden.

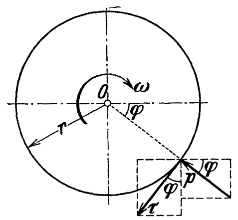


Abb. 142.

Mit den Bezeichnungen der Abb. 142 erhält man als Summe der vertikal aufwärts gerichteten Spannungskomponenten, bezogen auf die Längeneinheit des Zapfens:

$$\sum \mathfrak{V} = r\int_0^{2\pi} p \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi - r\int_0^{2\pi} \tau \cos\varphi \cdot d\varphi\,. \tag{246}$$

Nun ist

$$\int_0^{2\pi} p \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi = -\int_0^{2\pi} p \cdot d\cos\varphi = -p \cdot \cos\varphi\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos\varphi \cdot d\varphi \frac{dp}{d\varphi}\,,$$

wo $p \cdot \cos\varphi\big]_0^{2\pi} = 0$ wegen der Periodizität von p und $\cos\varphi$. Damit geht Gl. (246) über in

$$\sum \mathfrak{V} = r\int_0^{2\pi} \cos\varphi \left(\frac{dp}{d\varphi} - \tau\right) d\varphi\,. \tag{247}$$

Mit Rücksicht auf (235) und (244) ist

$$\frac{dp}{d\varphi} - \tau = \frac{6\,\mu\, r}{h^3}(V h - 2\,Q) + \frac{2\,\mu}{h^2}(2\,V h - 3\,Q)\,,$$

und man erkennt, daß der zweite Summand rechts gegen den ersten klein im Verhältnis $h : r$ ist, also bei den hier vorausgesetzten kleinen h-Werten vernachlässigt werden kann. Setzt man noch h aus (234) ein, so kann Gl. (247) jetzt wie folgt geschrieben werden:

$$\sum \mathfrak{V} = 6\,\mu\, r^2 \left\{ V\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi \cdot d\varphi}{(e \cdot \cos\varphi + \delta)^2} - 2\,Q\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi \cdot d\varphi}{(e \cdot \cos\varphi + \delta)^3} \right\}. \tag{248}$$

Nun ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi \cdot d\varphi}{(e \cdot \cos\varphi + \delta)^2} = \frac{1}{e}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{e \cdot \cos\varphi + \delta} - \frac{\delta}{e}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(e \cdot \cos\varphi + \delta)^2}$$

und

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi \cdot d\varphi}{(e \cdot \cos\varphi + \delta)^3} = \frac{1}{e}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(e \cdot \cos\varphi + \delta)^2} - \frac{\delta}{e}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(e \cdot \cos\varphi + \delta)^3}\,.$$

Ersetzt man die vorstehenden Integrale durch die dafür gefundenen Werte (238) bis (240), dann lautet Gl. (248)

$$\sum \mathfrak{V} = 6\,\mu\,r^2 \left\{ \frac{2\,\pi\,V}{e\sqrt{\delta^2 - e^2}} - \frac{2\,\pi\,\delta^2\,V}{e\left(\sqrt{\delta^2 - e^2}\right)^3} - \frac{4\,Q\,\pi\,\delta}{e\left(\sqrt{\delta^2 - e^2}\right)^3} + \frac{2\,Q\,\pi\,\delta\,(2\,\delta^2 + e^2)}{e\left(\sqrt{\delta^2 - e^2}\right)^5} \right\},$$

und nach einigen Zwischenrechnungen ergibt sich, wenn man noch für Q den Wert (241) einführt,

$$\sum \mathfrak{V} = \frac{12\,\mu\,\pi\,V\,r^2\,e}{(2\,\delta^2 + e^2)\sqrt{\delta^2 - e^2}}. \tag{249}$$

Entsprechend erhält man für die Summe der horizontalen Spannungskomponenten

$$\sum H = r\int_0^{2\pi} p\cos\varphi \cdot d\varphi + r\int_0^{2\pi} \tau\sin\varphi \cdot d\varphi .$$

Da aber

$$\int_0^{2\pi} p\cos\varphi \cdot d\varphi = \int_0^{2\pi} p\,d\sin\varphi = p\sin\varphi\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin\varphi\,d\varphi\,\frac{dp}{d\varphi},$$

so wird mit $p\sin\varphi\Big]_0^{2\pi} = 0$

$$\sum H = -r\int_0^{2\pi} \sin\varphi\left(\frac{dp}{d\varphi} - \tau\right)d\varphi .$$

Berücksichtigt man das oben über $\frac{dp}{d\varphi} - \tau$ Gesagte, so erhält man nach Einführung des Wertes h aus (234)

$$\sum H = -6\,\mu\,r^2\left\{V\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi \cdot d\varphi}{(e\cos\varphi + \delta)^2} - 2\,Q\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi \cdot d\varphi}{(e\cos\varphi + \delta)^3}\right\}. \tag{250}$$

Da aber

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi \cdot d\varphi}{(e\cos\varphi + \delta)^2} = -\int_0^{2\pi}\frac{d\cos\varphi}{(e\cos\varphi + \delta)^2} = -\frac{1}{e}\int_0^{2\pi}\frac{d(e\cos\varphi + \delta)}{(e\cos\varphi + \delta)^2} = 0$$

und

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{(e\cos\varphi + \delta)^3} = -\int_0^{2\pi}\frac{d\cos\varphi}{(e\cos\varphi + \delta)^3} = 0,$$

so folgt aus (250)

$$\sum H = 0 .$$

In horizontaler Richtung heben sich also die Spannungskomponenten längs des Zapfenumfanges auf, während in vertikaler Richtung nach (249) eine aufwärts gerichtete Resultante

$$R = P = \frac{12\,\mu\,\pi\,V\,r^2\,e}{(2\,\delta^2 + e^2)\sqrt{\delta^2 - e^2}} \tag{251}$$

vorhanden ist, die dem Zapfendruck P das Gleichgewicht halten muß. Damit ist die gesuchte Beziehung zwischen P, V und e gefunden. Bei endlicher Umfangsgeschwindigkeit V und verschwindender Exzentrizität e wird $R = 0$, d. h. ein Zapfendruck kann in diesem Falle nicht übertragen werden (vgl. S. 184). Andererseits wird bei konstant gehaltenem P die Exzentrizität mit wachsendem V immer kleiner und geht gegen 0 für $V \to \infty$.

Nach dem Coulombschen Reibungsgesetz ist das Reibungsmoment bei „trockener" Reibung bekanntlich $M_R = fPr$, wenn f den „Reibungskoeffizienten" und P den Zapfendruck bezeichnet. Um nun diesen Reibungskoeffizienten auch für die Schmiermittelreibung zu bestimmen, hat man nur den Quotienten $f = \frac{M_R}{Pr}$ zu bilden und die absoluten Werte für M_R und P aus (245) und (251) einzusetzen. Dann wird

$$f = \frac{\delta^2 + 2e^2}{3re}. \tag{252}$$

Für den Grenzfall $e = \delta$ folgt daraus $f = \frac{\delta}{r}$ oder $M_R = \delta P$, und zwar tritt — wie man aus (251) leicht erkennt — dieser Fall bei konstantem Zapfendruck P dann ein, wenn $V \to 0$ geht. Für den entgegengesetzten Fall, daß $V \to \infty$ geht, ergab sich bei endlichem Zapfendruck P die Exzentrizität $e = 0$. Dann liefert Gl. (245) das Reibungsmoment (absolut)

$$M_R = \frac{2\mu r^2 V\pi}{\delta}.$$

Um das Minimum des Reibungsmomentes zu ermitteln, bilde man mit Hilfe von (252) $\frac{df}{de} = 0$, woraus folgt $e = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ und somit $f_{\min} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\delta}{r} = 0{,}943\,\frac{\delta}{r}$; demnach wird das kleinste Reibungsmoment

$$M_{R\min} = 0{,}943\,\delta P.$$

Setzt man den Wert $e = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ in (251) ein, so erhält man bei gegebenem Zapfendruck P diejenige Umfangsgeschwindigkeit V, bei der das Reibungsmoment ein Minimum wird, nämlich

$$V = \frac{5}{24}\frac{P\delta^2}{\mu\pi r^2}.$$

Man kann die Reibungszahl f noch in etwas anderer Form schreiben, wenn man in (252) die Verhältniszahl $\frac{\delta}{e} = \varkappa$ einführt. Dann wird

$$f = \frac{\delta}{r}\,\frac{\varkappa^2 + 2}{3\varkappa},$$

und man erkennt, daß f außer von dem gegebenen Verhältnis $\frac{\delta}{r}$ nur noch von der Zahl $\varkappa$ abhängt. Bildet man weiter unter Benützung von

(251) den Quotienten

$$\frac{\mu V}{P} = \left(\frac{\delta}{r}\right)^2 \frac{\sqrt{\varkappa^2 - 1}\,(2\varkappa^2 + 1)}{12\pi\varkappa^2},$$

so zeigt sich, daß auch dieser Quotient außer von $\frac{\delta}{r}$ nur von $\varkappa$ abhängig ist. Man kann also $\varkappa$ eliminieren und erhält eine Beziehung

$$f = F\left(\frac{\delta}{r}, \frac{\mu V}{P}\right), \tag{253}$$

welche aussagt, daß bei gegebenen geometrischen Verhältnissen (δ und r) die **Reibungszahl** f **eine reine Funktion des Quotienten** $\frac{\mu V}{P}$ ist (**Ähnlichkeitsgesetz der Schmiermittelreibung**)[1]. Danach ändert sich (theoretisch!) bei ein und demselben Lager die Reibungszahl f nicht, wenn bei gleichzeitiger Änderung der Größen μ, V und P der Quotient $\frac{\mu V}{P}$ derselbe bleibt.

Eine von A. Sommerfeld[2] durchgeführte strengere Behandlung der Zapfenreibung hat die vorstehenden Ergebnisse mit sehr guter Annäherung bestätigt. Er geht dabei von den Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen der zähen Flüssigkeit aus (Bd. I S. 202), in denen er die Trägheitsglieder sowie alle äußeren Kräfte (Schwere) vernachlässigt[3]. Unter der weiteren Voraussetzung einer stationären, ebenen Bewegung (XY-Ebene) nehmen dann die Navier-Stokesschen Gleichungen die einfache Form an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right), \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= \mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{254}$$

Differenziert man hier die erste Gleichung partiell nach y, die zweite partiell nach x und subtrahiert die zweite von der ersten, so ergibt sich

$$0 = \frac{\partial^3 v_x}{\partial y\,\partial x^2} + \frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 v_y}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v_y}{\partial x\,\partial y^2}. \tag{254a}$$

Die Kontinuitätsbedingung $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$ wird befriedigt durch den Ansatz

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{255}$$

wo ψ die Stromfunktion bezeichnet. Mit diesen Werten für v_x und v_y geht (254a) über in

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \equiv \varDelta\varDelta\psi = 0, \tag{256}$$

---

[1] Sommerfeld, A.: Zur Theorie der Schmiermittelreibung. Z. techn. Physik 1921 S. 60.

[2] Fußnote 1 S. 179.

[3] Voraussetzung ist dabei, daß die Trägheitsglieder gegenüber den Reibungsgliedern von untergeordneter Bedeutung sind, d. h. große Zähigkeit und kleine Querschnittshöhe, also kleine Reynoldssche Zahl (vgl. Bd. I S. 203).

wo

$$\Delta\psi \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}.$$

Die Lösung der Aufgabe läuft also hinaus auf die Integration der partiellen Differentialgleichung (256). Als Randbedingungen stehen dabei mit den Bezeichnungen der Abb. 140 die folgenden zur Verfügung, wenn ϱ und φ Polarkoordinaten bezüglich des Zapfenmittelpunktes O sind (vgl. Bd. I S. 125)

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} = V; \quad \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0 \quad \text{für} \quad \varrho = r,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0 \quad \text{für} \quad \varrho = r + h.$$

Für das Druckgefälle ergibt sich aus (254) und (255) die Beziehung

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\mu\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi,$$

wofür man auch schreiben kann

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \mu\frac{\partial}{\partial n}\Delta\psi,$$

wenn s und n zwei in demselben Sinne wie x und y aufeinanderfolgende lotrechte Richtungen sind. Speziell gilt für die Richtungen φ und ϱ

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial\varphi} = \mu\frac{\partial}{\partial\varrho}\Delta\psi.$$

Die Schubspannung am Zapfenumfang wird

$$\tau_\varphi = \mu\left.\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varrho}\right]_{\varrho=r} = \mu\left.\frac{\partial^2\psi}{\partial\varrho^2}\right]_{\varrho=r}.$$

Ist also ψ durch Integration der Gl. (256) gefunden, so können Druckgefälle und Schubspannung bestimmt werden.

Die Rechnung ist von A. Sommerfeld durchgeführt worden mit dem Ergebnis

$$\frac{\partial p}{\partial\varphi} = 6\mu r\frac{Vh - 2Q}{h^3} - \mu\frac{4Vh - 6Q}{h^2} - \mu\frac{V}{r},$$

$$\tau_\varphi = -\frac{2\mu}{h^2}(2Vh - 3Q).$$

Man erkennt, daß der Wert für das Druckgefälle in seinem ersten Glied genau mit dem früher gefundenen Werte (235) übereinstimmt; da aber die beiden übrigen Glieder gegen das erste klein von der Ordnung $\frac{h}{r}$ bzw. $\left(\frac{h}{r}\right)^2$ sind, so kann Gl. (235) als hinreichend genau angesehen werden. Die Schubspannung am Zapfenrand stimmt nach der strengeren Rechnung genau mit dem früheren Werte (244) überein, so daß also auch in dieser Hinsicht die Ergebnisse der elementaren Theorie durch die strengere gerechtfertigt werden.

Es erhebt sich nun die Frage, wie weit die hier behandelte Theorie mit der Erfahrung an Lagern, bei denen die Voraussetzungen der

Theorie einigermaßen erfüllt sind, übereinstimmt. Um dieses zu prüfen, können besonders die Versuche von Stribeck[1] und Biel[2] herangezogen werden. Abb. 143 zeigt die Ergebnisse einer Versuchsreihe von Stribeck an einem Sellers-Lager mit Ringöler, bei der die Reibungszahl f in Abhängigkeit vom Zapfendruck und von der Umfangsgeschwindigkeit V (bzw. von der Tourenzahl n/Min) ermittelt wurde. Die den

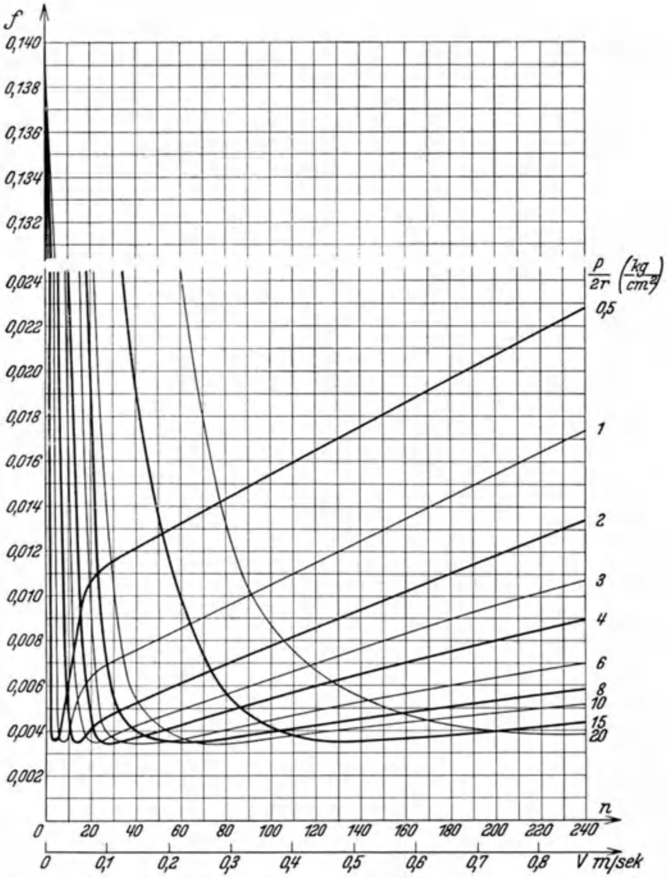


Abb. 143. Reibungszahl f in Abhängigkeit vom Zapfendruck und von der Umfangsgeschwindigkeit V bei einem Sellers-Lager mit Ringöler nach Stribeck.

einzelnen Kurven beigefügten Zahlen geben die Pressungen $\frac{P}{2r}$ [kg/cm²] an, wo P wieder den auf die Längeneinheit bezogenen Zapfendruck bezeichnet. Aus der Abbildung geht zunächst hervor, daß f — wenigstens für kleinere Pressungen — mit zunehmender Geschwindigkeit V zunächst abnimmt, dann ein für alle Werte $\frac{P}{2r}$ gleich großes Minimum erreicht

[1] Stribeck: Z. VDI 1902 S. 1340; Forsch.-Arb. VDI 1903 Heft 7.
[2] Biel: Z. VDI 1920 S. 447 u. 483.

und mit weiter wachsendem V wieder ansteigt. Qualitativ stimmt dieser allgemeine Verlauf mit der Sommerfeldschen Theorie überein, denn diese ergab ja ein von P und V unabhängiges Minimum $f_{\min} = 0{,}943\,\frac{\delta}{r}$ für $V > 0$ (S. 189). Diesem Minimum entspricht eine Exzentrizität $e = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$. Da nun mit wachsendem V bei konstant gehaltenem P die Exzentrizität weiter abnimmt (S. 189), so folgt aus (252), daß nach Überschreitung des Minimums die Reibungszahl f mit wachsendem V wieder zunimmt. Auch das Ähnlichkeitsgesetz (253) ist in der Nähe des Minimums gut erfüllt, da die zu gleichen Verhältnissen $\frac{V}{P}$ gehörigen Reibungszahlen die gleichen sind. (Bei den Stribeckschen Versuchen wurde durchweg das gleiche Schmiermittel — Deutzer Gasmotorenöl — verwendet, weshalb μ nach der Theorie als konstant anzusehen ist. Die Lagertemperatur betrug 25° C.)

Daß im übrigen die theoretischen Reibungswerte von den wirklichen zum Teil erheblich abweichen, ist wohl in erster Linie darauf zurückzuführen, daß bei praktischen Ausführungen die der Theorie zugrundeliegenden Voraussetzungen nie ganz erfüllt sind. Vor allem ändert sich mit wachsender Geschwindigkeit die Temperatur und damit die Zähigkeit des Schmiermittels. Außerdem ist — besonders bei kleinen Geschwindigkeiten — die Voraussetzung einer ringsum zusammenhängenden Schmierschicht nicht mehr erfüllt, so daß die Unebenheiten der Oberflächen einen Einfluß auf die Größe von f haben werden. Schließlich können auch elastische Verformungen der Lagerschale eine gewisse Rolle spielen. Besonders auffallend ist der große Unterschied zwischen Theorie und Versuch hinsichtlich der Reibungszahl $f = f_0$ für den Ruhezustand. Theoretisch würde f_0 nur wenig größer sein als $f_{\min}$ (S. 189), während nach den Stribeckschen Versuchen f_0 ein Vielfaches von $f_{\min}$ ist. Diese starke Abweichung läßt sich darauf zurückführen, daß mit immer enger werdender Schichtdicke der Druck in der Flüssigkeit negativ wird, was zu einem Zerreißen des Schmierfilms führt, so daß eine grundlegende Annahme der Theorie nicht mehr erfüllt ist. In der Nähe des Minimums ist die Sommerfeldsche Theorie jedoch gut durch die Versuche bestätigt, womit ein wichtiger Fingerzeig für praktische Ausführungen gegeben ist[1].

[1] Eine zusammenfassende Darstellung über den heutigen Stand der Schmiermittelreibung ist im Handb. d. phys. u. techn. Mech. von Auerbach-Hort Bd. 5 S. 797 gegeben, wo auch reichliche Literaturangaben zu finden sind. Vgl. auch das kürzlich erschienene Buch „Das Schwimmlager", hydrodynamische Theorie des Gleitlagers, von W. Stieber. Berlin: VDI-Verlag 1933.

VII. Elemente der Tragflügel-, Propeller- und Kreiselradströmung[1].

1. Abgrenzung des Gebietes und allgemeiner Überblick.

In dem vorliegenden Abschnitt soll ein kurzer Abriß derjenigen Strömungsvorgänge gegeben werden, welche die Grundlage bilden zur Berechnung der Tragflügel von Flugzeugen, der Schraubenpropeller sowie der Schaufelräder von Turbinen und Pumpen. Dabei kommt — wie schon aus dieser Aufzählung hervorgeht — als strömende Flüssigkeit sowohl Wasser als auch Luft in Frage. Beide Medien sollen fürs erste als homogene, raumbeständige Flüssigkeiten angesehen werden (vgl. Bd. I S. 3), was so lange zulässig ist, als die auftretenden Relativgeschwindigkeiten für Luft hinreichend weit unter der Schallgeschwindigkeit liegen und für Wasser klein genug sind, um eine eventuelle Hohlraumbildung auszuschließen (Vermeidung von Kavitationserscheinungen, vgl. dazu S. 242).

Obwohl sich die Ausführungen dieses Abschnittes lediglich auf rein strömungstechnische Fragen beschränken und nicht eine Beschreibung einzelner Maschinen bezwecken, erscheint es doch zum besseren Verständnis des Folgenden ratsam, die kennzeichnenden Merkmale der für die Anwendung in erster Linie in Betracht kommenden Mechanismen kurz hervorzuheben.

Beim Flugzeug unterscheidet man zwischen Ein- und Mehrdecker, je nachdem das Tragwerk aus einem oder mehreren Tragflügeln besteht. Im letzteren Falle sind die Flügel übereinander angeordnet, brauchen aber dabei nicht genau lotrecht übereinander zu liegen, sondern können auch gestaffelt sein (Abb. 144). Schließen die Flügelsehnen einen gewissen Winkel δ ein, so spricht man von einer „Schränkung" (Abb. 145). Im übrigen kann die Vorderkante eines Flügels geradlinig durchlaufen oder in der Mitte einen stumpfen Winkel bilden, so daß die linke und rechte Flügelebene gegeneinander geneigt sind (V-Form, Abb. 146).

---

[1] Vgl. hierzu außer den weiter unten im Text genannten Arbeiten insbesondere folgende Werke in Buchform: Fuchs-Hopf: Aerodynamik. Berlin 1922. L. Prandtl u. A. Betz: Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik. Göttingen 1927. C. Eberhard: Einführung in die theoretische Aerodynamik. München u. Berlin 1927. W. Müller: Mathematische Strömungslehre. Berlin 1928. H. Glauert: Die Grundlagen der Tragflügel- und Luftschraubentheorie. Berlin 1929. Prandtl-Tietjens: Hydro- und Aeromechanik, 2 Bände. Berlin 1929 u. 1931. L. Prandtl: Abriß der Strömungslehre. Braunschweig 1931. Geiger-Scheel: Handb. d. Physik Bd. 7 Kap. 4: Tragflügel und hydraulische Maschinen, Beitrag von A. Betz. W. Spannhake: Kreiselräder als Pumpen und Turbinen Bd. 1. Berlin 1931. Auerbach-Hort: Handb. der physikalischen und technischen Mechanik Bd. 5, Beitrag „Hydraulische Maschinen" von W. Hahn, und Bd. 6, Beitrag „Luftkräfte an Fahrzeugen" von E. Everling. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, 1. bis 4. Lieferung. Wien-Harms: Handb. der Experimentalphysik Bd. 4 3. Teil, Beiträge von L. Hopf, W. Spannhake und O. Flachsbart über Flugtechnik, Kreiselpumpen und Turbinen, Luftschrauben.

Von den außer dem Tragwerk noch zum Flugzeug gehörenden Teilen: Rumpf nebst Fahrgestell, Steuerung (bestehend aus Rudern und Flossen) und Motor mit Propeller hat für die hier anzustellenden

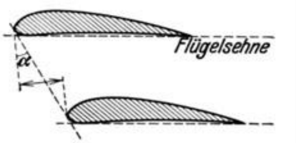


Abb. 144. Staffelung der Tragflügel beim Doppeldecker.

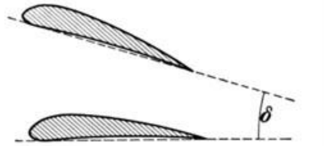


Abb. 145. Schränkung der Tragflügel beim Doppeldecker.

Überlegungen noch der Propeller ein besonderes Interesse und wird weiter unten Gegenstand einer genaueren Betrachtung sein.

Bei den hydraulischen Maschinen, die als Anwendungsgebiet für die im vorliegenden Abschnitte zu besprechenden Strömungsvorgänge in Frage kommen, handelt es sich durchweg um eine Vereinigung mehrerer „Flügel" zu Schaufel- oder Flügelreihen, auch Schaufelgitter genannt. Man unterscheidet dabei zwischen geraden Schaufelgittern, wenn die Flügel parallel und in gleichen Abständen nebeneinander angeordnet sind (Abb. 147) und kreisförmigen, auch Flügelräder genannt, wenn sie gemäß Abb. 148 auf einem Kreise verteilt liegen. Beide Gitterformen sind als Idealisierungen der wirklichen Verhältnisse

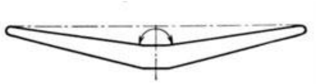


Abb. 146. V-Form eines Tragflügels.


Abb. 147. Gerades Schaufelgitter.

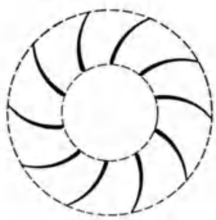


Abb. 148. Kreisförmiges Schaufelgitter.

aufzufassen, zumal die einzelnen Flügel im allgemeinen räumlich gekrümmt sind.

Die Schaufelgitter können verschiedenen Zwecken dienen, je nach-

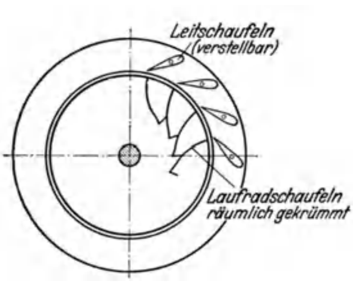


Abb. 149. Lauf- und Leitrad einer Wasserturbine.

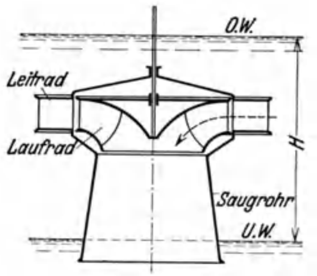


Abb. 150. Radialturbine.

dem sie Energie von dem strömenden Medium (Luft, Wasser) aufnehmen, wie Turbinen und Windräder, oder aber Energie an dieses abgeben, wie Schraubenpumpen und Propeller. Windräder und Propeller arbeiten im freien Luft- oder Wasserstrom, während Turbinen und Pumpen von einem Gehäuse umgeben sind. Bei der letztgenannten Gruppe ist das eigentliche Arbeitsorgan, das sogenannte Laufrad, im allgemeinen von feststehenden Leitapparaten umgeben, die der Zuführung der Flüssigkeit dienen und häufig ebenfalls als Schaufelgitter ausgeführt werden (Abb. 149). Nach der Durchflußrichtung der Flüssigkeit durch Leit- bzw. Laufrad unterscheidet man noch zwischen axial beaufschlagten Rädern, wenn die Flüssigkeit in der Hauptsache parallel der Radachse strömt (Propeller) und radial beaufschlagten, wenn die Strömung wesentlich radial gerichtet ist (Radialturbine, Abb. 150).

Abb. 151. Laufrad einer Becherturbine. (Voith.)

Wasserturbinen werden nach ihrer Wirkungsweise in zwei Hauptarten unterteilt, nämlich in Freistrahl- und Überdruckturbinen. Bei der ersten Gruppe wird das gesamte verfügbare Gefälle bis zum Austritt aus dem Leitapparat in kinetische Energie umgesetzt, so daß das Wasser ohne Überdruck in das Laufrad eintritt, wogegen bei der


Abb. 152. Laufräder einer Francisturbine. (Voith.)

zweiten Gruppe nur ein Teil des Gefälles in kinetische Energie verwandelt wird. Im letzteren Falle bewirkt die überschüssige Druckenergie einen

Überdruck im Laufrad und demnach vollgefüllte Schaufelkanäle. Von modernen Ausführungen seien hier nur erwähnt die Becherturbine als Freistrahlturbine (Abb. 151), die aber für die nachstehenden Betrachtungen nicht weiter von Interesse ist, und von Überdruckturbinen die Francisturbine (Abb. 152) sowie die rasch laufende Kaplanturbine (Abb. 153).

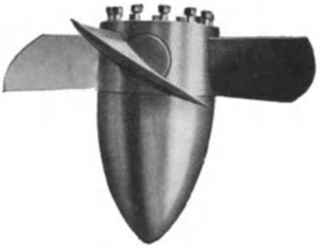


Abb. 153. Laufrad einer Kaplanturbine. (Voith.)

Die Schaufelradpumpen können im Prinzip als eine Umkehrung der Überdruckturbinen aufgefaßt werden. Man unterscheidet auch hier zwischen radial beaufschlagten Rädern (Kreiselpumpen) und axial beaufschlagten (Schraubenpumpen, Gebläse). Die Wirkungsweise der einfachen Schraubenpumpen ist generell die gleiche wie die eines Propellers, nur mit dem Unterschied, daß erstere in einem geschlossenen Kanal arbeiten. Kreiselpumpen sind von einem festen Gehäuse umgeben, das bei einfacheren Ausführungen (Niederdruckpumpen bis ca. 25 m Förderhöhe) im allgemeinen spiralig ausgebildet ist, und in dem das herausgeschleuderte Wasser bis auf die Geschwindigkeit in dem anschließenden Druckrohr verzögert wird. Bei Hochdruckpumpen wird gewöhnlich um das Laufrad noch ein besonderes Leitrad vorgesehen.

A. Tragflügel.

2. Grundbegriffe und Bezeichnungen.

Im 1. Bande (S. 217) wurde bereits gezeigt, daß auf einen festen Körper von beliebiger Gestalt bei der Bewegung durch eine Flüssigkeit (Luft oder Wasser) eine Kraft ausgeübt wird, die durch Reibungskräfte und Druckunterschiede an der Körperoberfläche bedingt ist. Die resultierende Kraft R besitzt im allgemeinen eine in die Bewegungsrichtung fallende Komponente — kurz Widerstand (W) genannt — und eine normal dazu gerichtete Komponente, den sogenannten Auftrieb (A) oder Quertrieb. Durch geeignete Formgebung kann man es erreichen, daß der bei der Vorwärtsbewegung allein Energie verzehrende Widerstand möglichst klein gehalten wird, so daß die aus der Bewegung resultierende Kraft R im wesentlichen nur aus dem Auftrieb besteht.

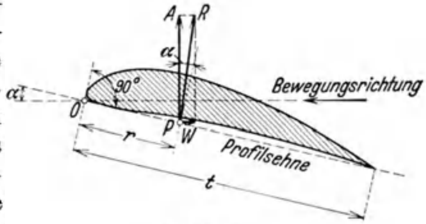


Abb. 154.

Derartige Körper werden — dem Sprachgebrauch der Flugtechnik folgend — als Tragflügel oder kurz als Flügel bezeichnet; sie besitzen im allgemeinen sichelförmige Querschnitte (Profile) mit einer vorderen Abrundung und scharfer Kante am hinteren Ende (Abb. 154). Bei vorstehenden Überlegungen ist es prinzipiell gleichgültig, ob der Körper in einer ruhenden oder gleichförmig strömenden Flüssigkeit bewegt wird (im zweiten Falle kommt nur die Relativgeschwindigkeit zwischen Körper und Flüssigkeit in Betracht) oder ob umgekehrt der Körper ruht und von der Flüssigkeit gleichförmig umströmt wird. Die zuletzt genannte Anordnung liefert eine stationäre Flüssigkeitsbewegung, was für theoretische Untersuchungen von besonderem Vorteil ist (vgl. Bd. I S. 147). Am Flugzeug dient der Tragflügelauftrieb zur Überwindung der Schwere, während der Widerstand (auf Tragflügel und die übrigen Teile des Flugzeuges) durch die Zugkraft des Propellers überwunden wird. Bei gleichförmiger, geradliniger Bewegung stehen Auftrieb, Widerstand, Zugkraft des Propellers und Schwere gerade im Gleichgewicht.

Ein Tragflügel wird also für die ihm zufallende Aufgabe um so besser geeignet sein, je größer der Auftrieb (A) im Verhältnis zum Widerstand (W) ist. Der dieses Verhältnis ausdrückende Quotient

$$\varepsilon = \frac{W}{A} \tag{257}$$

wird als Gleitzahl bezeichnet. Letztere hängt außer von der Flügelform wesentlich ab vom sogenannten Anstellwinkel α, d. h. dem Winkel, den die Profilsehne (Abb. 154) mit der Bewegungsrichtung relativ zur Flüssigkeit einschließt. (Beim ruhenden, einem gleichförmigen Luftstrom ausgesetzten Flügel ist α entsprechend der Winkel zwischen der Profilsehne und der Anströmungsrichtung der ungestörten Flüssigkeit.) Für gut durchgebildete Flügelprofile und kleine Anstellwinkel ist ε ein kleiner Wert, da in diesem Falle A um ein Vielfaches größer als W ausfällt (vgl. Abb. 155 und 156).

Die größte Ausdehnung eines Flügels senkrecht zur Bewegungsrichtung heißt seine Spannweite (s), in der Bewegungsrichtung dagegen seine Tiefe (t, Abb. 154), während man unter der Flügelfläche gewöhnlich das Produkt $F = st$ versteht (rechteckiger Flügel vorausgesetzt), d. h. die größte Projektion des Flügels. Ein guter Tragflügel hat etwa das Seitenverhältnis $t : s = 1/5$ bis $1/6$.

Im 1. Bande (S. 219) wurde gezeigt, daß man den Widerstand, den ein gleichförmig bewegter Körper in einer ruhenden, unendlich ausgedehnten Flüssigkeit von dieser erfährt, in der Form schreiben kann:

$$W = c\,F_0\,\frac{\varrho}{2}\,v_0^2\,, \tag{258}$$

wo F_0 die größte Querschnittsfläche des Körpers rechtwinklig zur Bewegungsrichtung, v_0 seine Geschwindigkeit, ϱ die Flüssigkeitsdichte und c eine dimensionslose Größe, die sogenannte Widerstandszahl bezeichnen. Man kann sich diese Darstellung auch hier für den Widerstand und den Auftrieb zunutze machen, jedoch ist es dabei wegen der Veränderlichkeit von F_0 zweckmäßig, eine konstante Fläche, z. B. die Flügelfläche F, an Stelle von F_0 zu setzen. Führt man weiter in Gl. (258) den Staudruck $q = \frac{\varrho}{2}\,v_0^2$ ein (Bd. I S. 50), so lassen sich Auftrieb und Widerstand in der Form darstellen:

$$A = c_a\,q\,F\,; \qquad W = c_w\,q\,F\,. \tag{259}$$

Die dimensionslosen Größen c_a und c_w werden als **Auftriebs- und Widerstandsziffer** bezeichnet. Sie sind Funktionen des Anstellwinkels α; ihr Quotient $\varepsilon = \frac{c_w}{c_a}$ stellt gemäß Gl. (257) die **Gleitzahl** dar[1].

Die Abhängigkeit der Beiwerte c_a und c_w vom Anstellwinkel wird durch Messung in den Modellversuchsanstalten festgestellt und fällt naturgemäß für verschiedene Flügelformen verschieden aus. In Abb. 155 sind c_a und c_w als Funktionen des Winkels α in Kurvenform aufgetragen. Man erkennt daraus, daß c_a innerhalb des praktisch wichtigen Anstellwinkelbereiches von $\alpha = -4^0$ bis etwa $\alpha = 12^0$ nahezu geradlinig ansteigt, bei ca. 15^0 ein Maximum erreicht und mit weiter wachsendem α schnell abfällt (vgl. S. 208). Der Widerstandsbeiwert c_w ist innerhalb der oben genannten Grenzen wesentlich kleiner als c_a und folgt eher einem quadratischen Gesetz. Sein Minimum liegt etwa bei $\alpha = -2^0$; bei größeren Anstellwinkeln ($\alpha > 15^0$) steigt c_w sehr rasch an.

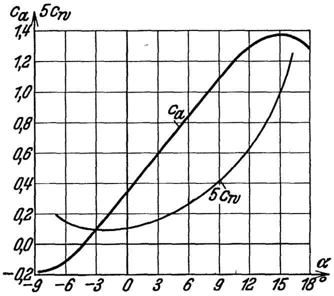


Abb. 155. Auftriebs- und Widerstandsziffer in Abhängigkeit vom Anstellwinkel α.

Eine andere, neuerdings gewöhnlich verwendete Darstellung der Beiwerte c_a und c_w ist die mittels des sogenannten **Polardiagramms**, in dem c_a als Funktion von c_w aufgetragen und α als Parameter auf der Kurve angegeben wird. Der Maßstab für c_w wird dabei im allgemeinen fünfmal so groß gewählt wie für c_a (Abb. 156).

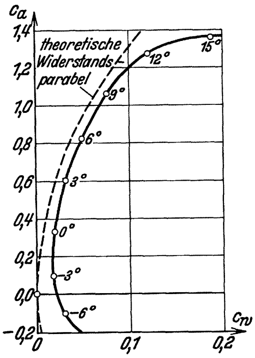


Abb. 156. Polardiagramm.

Während mit A und W auch die Größe der resultierenden Kraft R (siehe oben) festliegt, ist deren relative Lage zum Tragflügel noch unbestimmt. Zu ihrer Kennzeichnung benutzt man das Moment von R in bezug auf eine ausgezeichnete Achse des Flügels, z. B. die aus Abb. 154 ersichtliche Achse O. Bezeichnet r den Abstand des in der Symmetrieebene des Flügels liegenden **Druckpunktes** P, in dem die Richtungslinie der Kraft R die untere Tangentialebene des Flügels schneidet, so ist mit den Bezeichnungen der Abb. 154

$$M_0 = r\,(A \cos\alpha + W \sin\alpha)\,, \tag{260}$$

wobei man das Moment positiv rechnet, wenn die Kraft R die Hinterkante des Flügels bezüglich O zu heben versucht. Ähnlich wie A und W wird in der Flugtechnik das Moment M_0 durch einen besonderen Ansatz

$$M_0 = c_m\, q\, F\, t \tag{261}$$

---

[1] In England werden Auftriebs- und Widerstandsziffer im allgemeinen nicht auf den Staudruck q, sondern auf ϱv_0^2 bezogen, so daß die entsprechenden Werte c_a und c_w nur die halbe Größe haben wie im vorliegenden Falle.

dargestellt, wo die dimensionslose Größe c_m als Momentenziffer bezeichnet wird, während t die Profiltiefe darstellt. Durch die Angabe von c_m ist also das Moment bestimmt und damit nach (260) auch die Lage von R — bzw. die Druckpunktwanderung —, sobald A und W bekannt sind.

Die Ermittlung der oben eingeführten Beiwerte c_a, c_w und c_m erfolgt in der Regel im Windkanal, indem man an Flügelmodellen mittels

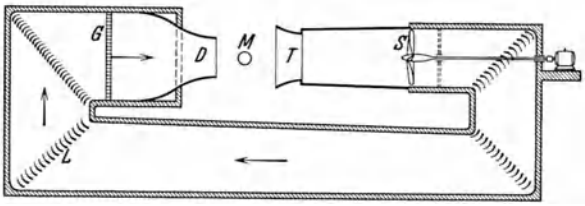


Abb. 157. Schema einer Windkanalanordnung.

einer besonderen Wägevorrichtung Auftrieb, Widerstand und Moment bestimmt. Abb. 157 zeigt eine generelle Darstellung des Göttinger Windkanals[1], in dem das ruhend aufgehängte Modell M einem Luftstrom von bekannter Geschwindigkeit ausgesetzt wird. Durch die Schraube S wird die Luft in Bewegung gesetzt und durchströmt in der angedeuteten Richtung den Kanal, an dessen Ecken besondere Umlenkvorrichtungen L (vgl. S. 88) vorgesehen sind. Um den Druck längs der Kanalachse nahezu konstant zu halten, besitzt der Kanal in der Strömungsrichtung eine allmähliche Erweiterung. Vor dem Eintritt in die Düse D, welche die Luft dem Versuchskörper zuführt, befindet sich ein Gleichrichter G, dessen Aufgabe darin besteht, die dem ankommenden Luftstrom anhaftenden Drehgeschwindigkeiten auszuschalten. Schließlich wird die Luft hinter dem Modell durch den Trichter T wieder aufgefangen und beginnt ihren Kreislauf von neuem.

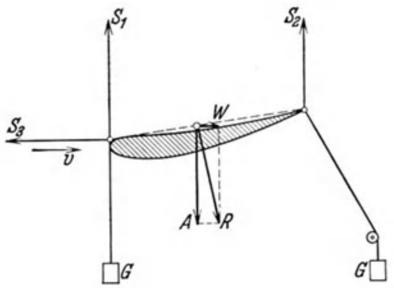


Abb. 158. Generelle Darstellung der Aufhängung eines Tragflügels im Windkanal zur Messung von Auftrieb, Widerstand und Luftkraftmoment.

Um die auf einen Tragflügel ausgeübten Luftkräfte zu messen, hängt man den Flügel (oder gegebenenfalls ein ganzes Flugzeugmodell) zweckmäßig mit Hilfe von Drähten, die ihrerseits wieder an Hebelwaagen befestigt sind, so auf, daß bei symmetrischer Ausbildung des Modells und der Anströmung die resultierende Luftkraft R in drei Komponenten zerlegt wird (Dreikomponentenwaage). In Abb. 158 ist der Flügel umgekehrt aufgehängt, um in den Drähten, welche durch angehängte Gewichte G eine geeignete Vorspannung erhalten, Zugkräfte zu bekommen. An drei Waagen

[1] Prandtl, L.: Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen 1923 1. Lief.

lassen sich dann die Kräfte S_1, S_2 und S_3 ablesen, womit Größe, Lage und Richtung der Kraft R bestimmt sind. Die Untersuchung ist für verschiedene Anstellwinkel durchzuführen. Bei unsymmetrischer Anströmung (räumliches Problem) kann man in entsprechender Weise nach Betz eine Sechskomponentenwaage verwenden[1].

Um die Ergebnisse der Windkanalmessungen an Modellen unmittelbar auf die Großausführung übertragen zu können, müßte das Reynoldssche Ähnlichkeitsgesetz beachtet werden. Dazu wäre im Windkanal eine Geschwindigkeit erforderlich, die im Verhältnis $\lambda = \frac{L}{l}$ der Längenmaßstäbe größer wäre als die Geschwindigkeit der Großausführung (vgl. S. 151), was praktisch unmöglich ist. Man ist aus diesem Grunde gezwungen, von der Einhaltung einer strengen mechanischen Ähnlichkeit abzusehen, zumal auch die Verhältnisse an den Grenzen des Luftstromes im Windkanal im allgemeinen anders sind als in der freien Atmosphäre. Indessen ist dieser Mangel nicht von erheblicher Bedeutung, da die Auftriebs- und Widerstandszahlen von Flügeln in den praktisch besonders wichtigen Bereichen Reynoldsscher Zahlen ziemlich unveränderlich bleiben.

3. Auftrieb und Zirkulation bei ebener Strömung.

Im ersten Bande (S. 172) wurde gezeigt, daß zur Aufrechterhaltung der geradlinigen, gleichförmigen Bewegung eines Körpers in einer reibungs- und wirbelfreien Flüssigkeit eine Kraft nicht erforderlich ist oder, mit anderen Worten, daß ein solcher Körper in einer Potentialströmung keinerlei Widerstand erfährt. Diese Erscheinung steht bei natürlichen Flüssigkeiten (Wasser, Luft) in offenbarem Widerspruch mit der Erfahrung, weshalb man zur Untersuchung des Widerstandes die Vorstellung der idealen Flüssigkeit verlassen und zur zähen Flüssigkeit übergehen muß (Bd. I S. 217). Im Gegensatz hierzu läßt sich der hydrodynamische Auftrieb sehr wohl aus der idealen Flüssigkeitsbewegung ableiten, wenn man den betreffenden Körper einer translatorischen und einer zirkulatorischen Strömung aussetzt. Am einfachsten liegen die Verhältnisse für den Fall der ebenen Strömung, die man sich entweder durch einen Tragflügel von konstantem Profil und unendlich großer Spannweite oder einen solchen von endlicher Spannweite mit seitlicher Begrenzung durch parallele Wände verwirklicht denken kann. Die grundsätzlichen Überlegungen, die zur Erklärung und Berechnung des Auftriebes auf ein Tragflügelprofil führen, sind bereits im 1. Bande (S. 157 bis 165; 176 bis 180) mitgeteilt. Hier soll um des Zusammenhanges willen das Wichtigste davon kurz wiederholt werden.

Setzt man ein Tragflügelprofil der oben geschilderten Art in einer reibungs- und wirbelfreien Flüssigkeit einer translatorischen (Parallel-) Strömung aus, so stellt sich ein Stromlinienbild gemäß Abb. 159 und

[1] Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen 1932 4. Lief. S. 8.

Abb. 159a[1] ein mit einem hinteren Staupunkt S (Bd. I S. 146) an der Flügeloberseite. Die scharfe Hinterkante wird dabei von unten her mit einer unendlich großen Geschwindigkeit umströmt, die im Staupunkt S auf Null abfällt. Eine resultierende Einzelkraft auf den Flügel wird durch diese Strömung nicht erzeugt. Damit überhaupt ein Auftrieb — d. h. eine Kraft rechtwinklig zur Strömungsrichtung — entstehen kann, muß der gesamte auf die Unterseite entfallende Strömungsdruck notwendigerweise größer sein als derjenige auf die Oberseite des Flügels. Nach der Bernoullischen Gleichung (Energiegleichung) ist im Falle stationärer Strömung

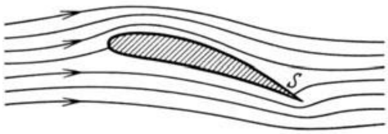


Abb. 159. Parallelströmung um ein Tragflügelprofil.

$$\frac{\varrho}{2} v^2 + p + \gamma z = \text{const.} \tag{262}$$

Beachtet man weiter, daß für den Druck p' der in Ruhe befindlichen Flüssigkeit nach Bd. I S. 11

$$p' = -\gamma z = \text{const.}$$

bzw.

$$\gamma z = -p' + \text{const.}$$

gilt, so kann (262) auch in der Form geschrieben werden:

$$\frac{\varrho}{2} v^2 + p - p' = \text{const.}$$

Für zwei lotrecht übereinander liegende Punkte (o und u) an der Ober- bzw. Unterseite des Tragflügels erhält man somit, wenn die geringen Unterschiede der Werte p' als unwesentlich vernachlässigt werden,

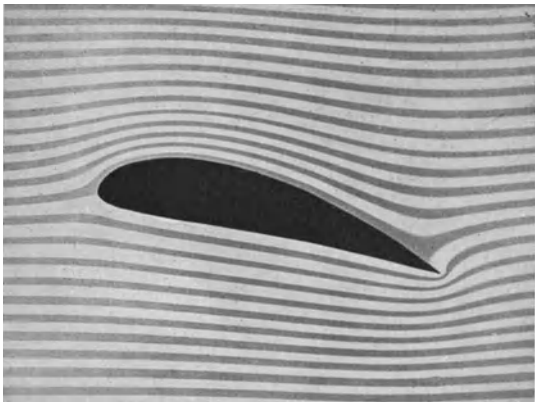


Abb. 159a. Tragflügel in einem Stromlinienapparat nach Hele Shaw.

$$\frac{\varrho}{2} v_o^2 + p_o = \frac{\varrho}{2} v_u^2 + p_u \,. \tag{262a}$$

Daraus erkennt man, daß p_u nur dann größer sein kann als p_o, wenn v_u kleiner als v_o ist oder, mit anderen Worten, wenn die Geschwindigkeit der Parallelströmung oben vergrößert, unten dagegen verkleinert wird. Dieses ist dadurch möglich, daß man sich der Parallelströmung (Abb. 159) eine Zirkulationsströmung (Bd. I S. 156) gemäß Abb. 160 überlagert denkt, und zwar mit der durch die Pfeile angegebenen Geschwindigkeitsrichtung.

[1] Abb. 159a wurde in einem Stromlinienapparat nach dem Verfahren von Hele Shaw (Bd. I S. 155) ermittelt.

Auf diese Weise addieren sich auf der Oberseite des Flügels die gleichsinnigen Geschwindigkeitskomponenten, während sie sich unten zum Teil aufheben, wodurch der oben erwähnte Druckunterschied ermöglicht wird.

Über die Größe des auf diese Weise entstehenden Auftriebes A gibt der Kutta-Joukowskysche Satz (Bd. I S. 179) Auskunft, wonach unabhängig von der Profilform und bezogen auf die Tiefe „Eins“

$$A = \varrho \Gamma v_\infty \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\right] \tag{263}$$

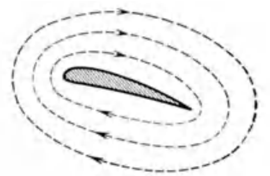


Abb. 160. Zirkulationsströmung.

ist. Hierin bezeichnen ϱ die Flüssigkeitsdichte, v_∞ die Geschwindigkeit des Flügels in der ruhenden Flüssigkeit — bzw. die Geschwindigkeit der ungestörten Parallelströmung im Unendlichen gegen den ruhenden Flügel — und Γ die Zirkulation, d. h. das Linienintegral $\oint \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s}$, genommen um das Flügelprofil. Aus Gl. (263) folgt sofort die auf S. 202 aufgestellte Behauptung, daß in einer reibungsfreien Flüssigkeit durch eine Parallelströmung auf den Flügel keine resultierende Einzelkraft ausgeübt werden kann, da mit $\Gamma = 0$ auch der Auftrieb A verschwindet, während eine in die Strömungsrichtung fallende Widerstandskraft nach Bd. I S. 178 überhaupt nicht vorhanden ist ($P_x = 0$).

Man kann die Kutta-Joukowskysche Auftriebsformel in einfacher Weise auch aus der ebenen Potentialströmung durch ein gerades Flügelgitter ableiten[1]. Mit Rücksicht auf spätere Anwendungen sei diese Ableitung hier noch eingeschaltet.

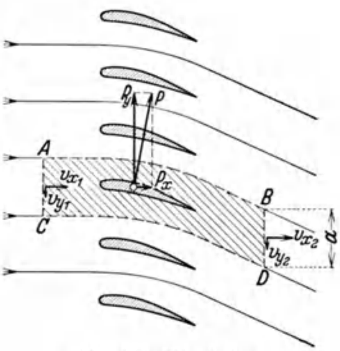


Abb. 161. Flügelgitter.

Die in Abb. 161 dargestellten gleich großen und einander parallelen Flügel von unendlicher Spannweite mögen einem geraden Flügel- oder Schaufelgitter mit dem konstanten Flügelabstand a angehören. Zur Erlangung einer stationären Flüssigkeitsbewegung sei angenommen, daß das Gitter sich in Ruhe befinde und einer strömenden Flüssigkeit ausgesetzt sei. Mit anderen Worten heißt das, es wird die Relativbewegung der Flüssigkeit gegen das Gitter betrachtet. Da bei einem aus unendlieh vielen Flügeln bestehenden Gitter an jedem Flügel sich derselbe Strömungsvorgang wiederholt, so herrschen längs zweier kongruenter Stromlinien AB und CD vom Abstand a die gleichen Geschwindigkeits- und Druckverhältnisse.

Zur Berechnung der resultierenden Kraft P, die von der strömenden Flüssigkeit auf jeden Flügel des Gitters ausgeübt wird, kann der Impulssatz herangezogen werden. Zu diesem Zwecke betrachte man nach

[1] Grammel, R.: Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges, S. 37. Braunschweig 1917. Prandtl, L.: Abriß der Strömungslehre, S. 70. Braunschweig 1931.

Abb. 161 einen Flüssigkeitsbereich, der in der Bildebene von den beiden kongruenten Stromlinien AB und CD sowie zwei der Gitterebene parallelen Geraden AC und BD vor bzw. hinter dem ins Auge gefaßten Flügel begrenzt wird. Senkrecht zur Bildebene habe dieser Bereich die Tiefe „Eins“. Die Geraden AC und BD seien so weit vom Gitter entfernt, daß sich dort die Störung der Strömung durch den Flügel nicht mehr bemerkbar macht. Die mittlere Geschwindigkeit rechtwinklig zur Gitterebene sei vor dem Gitter mit v_{x1}, hinter ihm mit v_{x2}, die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten parallel zur Gitterebene mit v_{y1} und v_{y2} bezeichnet. Ferner mögen P_x und P_y die Komponenten der von der Flüssigkeit auf den Flügel ausgeübten Druckkraft darstellen, d. h. das Entgegengesetzte derjenigen Kraft, die der Flügel auf die Flüssigkeit überträgt.

Nach dem Impulssatz (Bd. I S. 59) ist im Falle stationärer Strömung der Überschuß des aus dem abgegrenzten Bereich $ABDC$ in der Zeiteinheit austretenden Impulses über den eintretenden Impuls gleich der geometrischen Summe der auf die Flüssigkeitsmasse wirkenden äußeren Kräfte. Da die beiden kongruenten Stromlinien AB und CD vollkommen gleiche Verhältnisse aufweisen, so können sie weder zur Impulsänderung noch zur äußeren Kraft einen Beitrag liefern. Die weitere Betrachtung beschränkt sich also auf die Vorgänge an den beiden parallelen Geraden AC und BD. Für die beiden Richtungen x und y erhält man somit (unter Beachtung des weiter oben über den Sinn von P_x und P_y Gesagten) folgende Gleichungen:

$$\varrho\, Q\,(v_{x2} - v_{x1}) = -P_x + (p_1 - p_2)\,a\,, \tag{264}$$

$$\varrho\, Q\,(v_{y2} - v_{y1}) = P_y\,. \tag{265}$$

Darin bezeichnet Q die sekundliche Durchflußmenge zwischen den beiden Stromlinien AB und CD, während p_1 und p_2 die mittleren Drücke auf die Parallelen AC und BD darstellen. Nun ist aber aus Gründen der Kontinuität

$$Q = a\,v_{x1} = a\,v_{x2}$$

oder

$$v_{x1} = v_{x2} = v_x\,,$$

womit (264) übergeht in

$$P_x = (p_1 - p_2)\,a\,.$$

Weiter liefert die Bernoullische Gleichung die Beziehung

$$\frac{\varrho}{2}\,(v_{x1}^2 + v_{y1}^2) + p_1 = \frac{\varrho}{2}\,(v_{x2}^2 + v_{y2}^2) + p_2$$

oder wegen $v_{x1} = v_{x2}$

$$p_1 - p_2 = \frac{\varrho}{2}\,(v_{y2}^2 - v_{y1}^2)\,,$$

so daß jetzt P_x in der Form geschrieben werden kann:

$$P_x = a\,\frac{\varrho}{2}\,(v_{y2}^2 - v_{y1}^2)\,. \tag{266}$$

Zur weiteren Umformung der Gl. (265) und (266) sei jetzt die Zirkulation Γ um den betrachteten Tragflügel gebildet. Da diese bei der Potentialbewegung vom Integrationswege unabhängig ist, kann jeder den Flügel umschlingende Linienzug benutzt werden, also auch die Randlinie $ABDC$ des abgegrenzten Flüssigkeitsbereiches. Bei der Bildung der Zirkulation wird die Stromlinie AB im entgegengesetzten Sinne durchlaufen wie die Stromlinie CD. Wegen der bestehenden Kongruenz beider Linien können sie keinen Beitrag zur Tragflügelzirkulation liefern. Es bleiben also nur die Beiträge der Linien BD und CA übrig, so daß

$$\Gamma = a\,(v_{y\,2} - v_{y\,1})\,. \tag{267}$$

Führt man diesen Wert in (265) und (266) ein, so erhält man mit $Q = a v_x$

$$P_y = \varrho\, v_x\, \Gamma \tag{268}$$

und

$$P_x = \frac{\varrho}{2}\,\Gamma\,(v_{y\,1} + v_{y\,2})\,. \tag{269}$$

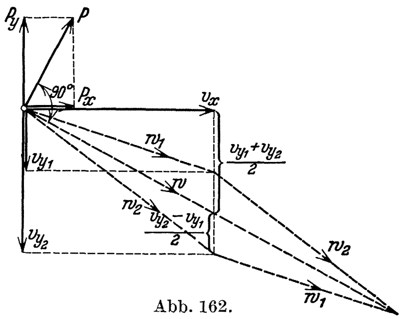


Abb. 162.

Damit sind die gesuchten Kraftkomponenten durch die Flügelzirkulation und die Geschwindigkeiten vor und hinter dem Flügel ausgedrückt. Bildet man aus (268) und (269)

$$\frac{P_y}{P_x} = \frac{v_x}{\frac{v_{y\,1} + v_{y\,2}}{2}}\,,$$

so erkennt man mit Rücksicht auf Abb. 162, daß die resultierende Kraft $P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$ rechtwinklig zur mittleren Geschwindigkeit $w = \sqrt{v_x^2 + \left(\frac{v_{y\,1} + v_{y\,2}}{2}\right)^2}$ steht und die Größe

$$P = \varrho\,\Gamma\, w \tag{270}$$

besitzt.

Die Geschwindigkeit w kann gemäß Abb. 162 aus den resultierenden Relativgeschwindigkeiten w_1 (vor dem Gitter) und w_2 (hinter dem Gitter) ermittelt werden.

Der Übergang vom Flügelgitter zum einzelnen Flügel läßt sich nun leicht dadurch bewirken, daß man die Gitterteilung $a \to \infty$ gehen läßt. Da die Zirkulation $\Gamma = a\,(v_{y\,2} - v_{y\,1})$ endlich bleibt (Bd. I S. 179), so muß $v_{y\,1} = v_{y\,2} = v_y$ werden, d. h. die resultierende Geschwindigkeit $w = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ ist nach Größe und Richtung in großer Entfernung vor und hinter dem Flügel dieselbe. Schreibt man dafür wieder $w = v_\infty$, wo v_∞ die ungestörte Anströmungsgeschwindigkeit bezeichnet, so liefert Gl. (270) den zur Richtung von v_∞ senkrecht stehenden Auftrieb pro Längeneinheit

$$A = \varrho\,\Gamma\, v_\infty\,,$$

in Übereinstimmung mit Gl. (263).

Die Berechnung des Auftriebes A setzt die Kenntnis der Zirkulation Γ voraus. Über die erforderliche Größe dieser Zirkulation kann man sich folgende Vorstellung verschaffen, die eine geeignete Grundlage für die Berechnung von Γ liefert. Wie oben bereits bemerkt wurde, liegt der hintere Staupunkt S, in dem sich die beiden Äste der Randstromlinie wieder vereinigen, bei der Parallelströmung auf der Oberseite des Flügelprofils, und die scharfe Hinterkante wird mit unendlich großer Geschwindigkeit umströmt. Die Erfahrung hat jedoch gelehrt, daß ein solches Umströmen einer scharfen Kante, wie sie bei Tragflügeln im allgemeinen vorhanden ist, nicht stattfindet, daß vielmehr ein Zusammenfluß der Strömungen von der Ober- und Unterseite her erfolgt. Infolge der Zirkulationsströmung allein würde ein Umströmen der scharfen Hinterkante im entgegengesetzten Sinne stattfinden. Damit also ein glattes Abfließen an der Hinterkante eintritt, muß die Zirkulation eine solche Größe annehmen, daß durch sie der hintere Staupunkt S in Abb. 159 gerade in die Hinterkante des Flügels verschoben wird (Abb. 163). Mit Hilfe dieser Überlegung ist es möglich, die Größe von Γ bei gegebener Profilform und gegebener Anströmungsgeschwindigkeit zu berechnen (vgl. Bd. I S. 164).

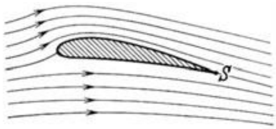


Abb. 163. Glattes Abfließen der Strömung an der Hinterkante des Flügels.

Es erhebt sich jetzt noch die Frage, wie diese Zirkulation überhaupt entstehen kann. Darüber gibt, wie bereits im 1. Bande gezeigt wurde (S. 216), die Prandtlsche Grenzschichtentheorie eine befriedigende Erklärung. Beim Beginn der Bewegung stellt sich zunächst eine Potentialströmung (gemäß Abb. 159) ein, und auch bei den natürlichen Flüssigkeiten Wasser und Luft, deren Zähigkeit nur gering ist, kann man im ersten Augenblick ein rasches Umströmen der scharfen Hinterkante beobachten. Da aber die Geschwindigkeit von der Hinterkante bis zum Staupunkt S sehr schnell auf Null abfällt, so herrscht in dieser Richtung ein starker Druckanstieg, der zur Abspaltung eines Wirbels, des sogenannten Anfahrwirbels, führt (Abb. 164). Während nun bei einem symmetrischen Körper (z. B. Kreiszylinder) derartige Wirbel immer paarweise mit entgegengesetztem Drehsinn entstehen (Bd. I S. 215), wird durch den einseitigen Anfahrwirbel das Strömungsbild dergestalt geändert, daß sich um den Tragflügel eine Zirkulation von gleicher Stärke, aber entgegengesetztem Drehsinn wie der Anfahrwirbel ausbildet.

Abb. 164. Anfahrwirbel.

Durch diese Zirkulationsströmung verschiebt sich nach den obigen Erläuterungen der hintere Staupunkt S weiter nach der Profilhinterkante, aber erst, wenn er mit dieser zusammenfällt, d. h. sobald ein glattes Abströmen der Flüssigkeit an der Hinterkante eingetreten ist, hört das Anwachsen des Anfahrwirbels und damit der gegensinnigen Tragflügelzirkulation auf. Da nach dem 1. Helmholtzschen Wirbelsatz (Bd. I S. 182) eine Wirbellinie stets von denselben Flüssigkeitsteilchen gebildet wird, so entfernt sich der Anfahrwirbel vom Tragflügel in demselben

Maße, wie letzterer relativ zur Flüssigkeit fortschreitet, und am Flügel stellt sich — konstante Geschwindigkeit vorausgesetzt — die oben erwähnte Parallelströmung mit Zirkulation ein, die den Flügelauftrieb A zur Folge hat (vgl. im übrigen Bd. I S. 216).

Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ der resultierenden Strömung um den Flügel kann man sich zusammengesetzt denken aus der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_\infty$ der Parallelströmung und einer zusätzlichen Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ (Abb. 165). Von letzterer läßt sich zeigen[1], daß sie mit wachsendem Abstande R vom Flügel mindestens wie $\frac{1}{R}$ kleiner wird, für hinreichend große Werte R senkrecht zu R steht und auf dem Kreise mit R um O einen konstanten Betrag

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi R} \tag{271}$$

hat, wo Γ die Zirkulation des Flügels bedeutet (Bd. I S. 179). Da aber das durch Gl. (271) gekennzeichnete Geschwindigkeitsfeld identisch ist mit demjenigen eines geraden Wirbelfadens (Bd. I S. 186), so kann man zur Beschreibung der Strömung in größerer Entfernung vom Tragflügel (praktisch schon in einer Entfernung von der Größe der Profiltiefe t) den Flügel durch einen Wirbelfaden von der Zirkulation Γ ersetzen, dessen Achse etwa in Richtung der Flügellängsachse verläuft. Da für diesen substituierten Wirbel der 1. Helmholtzsche Wirbelsatz (Bd. I S. 182), wonach eine Wirbellinie bzw. ein Wirbelfaden stets von denselben Flüssigkeitsteilchen gebildet wird, keine Gültigkeit besitzt, nennt man diesen den Tragflügel ersetzenden Wirbel im Gegensatz zu den „freien Wirbeln" einen „gebundenen oder tragenden Wirbel".

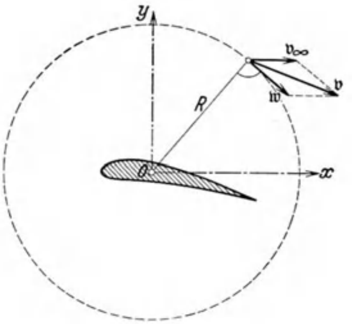


Abb. 165.

Der auf Grund der obigen Überlegungen theoretisch ermittelte Auftrieb A (siehe Ziff. 4) stimmt, wie Versuche von Betz[2] an einem Joukowsky-Profil (vgl. S. 212 und Bd. I S. 159) gezeigt haben, gut mit den gemessenen Werten überein, solange es sich um ebene Strömungen handelt. Daß dabei der gemessene Auftrieb etwas kleiner ausfällt als der aus der Theorie abgeleitete, findet seine Erklärung in dem Vorhandensein eines kleinen Totwassergebietes an der Flügeloberseite (Saugseite, Abb. 166), das sich auch bei gut geformten Flügelprofilen und kleinen Anstellwinkeln als Folge der Grenzschichtbildung einstellt und eine Verkleinerung der Zirkulation bzw. des Auftriebes zur Folge hat. Mit dem Auftreten des Totwassers ist ein geringer Widerstand

[1] Grammel, R.: Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges, 1917 S. 11 u. 34.

[2] Betz, A.: Z. Flugtechn. Motorluftsch. 1915 S. 173.

in der Strömungsrichtung verbunden, der allerdings bei der ebenen Strömung praktisch ohne große Bedeutung ist.

Durch eine Vergrößerung des Anstellwinkels α vergrößert sich auch die Zirkulation, jedoch nicht in dem Maße, wie es theoretisch der Fall

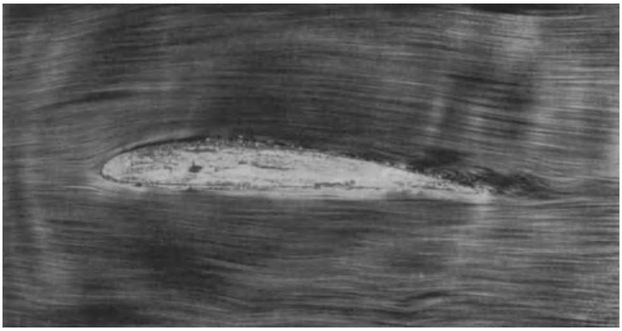


Abb. 166. Bei kleinem Anstellwinkel bildet sich hinter dem Flügel nur ein geringes Totwassergebiet aus.

sein müßte, da gleichzeitig eine Verbreiterung des Totwassergebietes eintritt, wodurch nach den obigen Ausführungen umgekehrt die Zirkulation wieder herabgedrückt wird.

Die wirkliche Zirkulation — und damit der Auftrieb A — erreicht bei einem gewissen, von der Profilform abhängigen Winkel α ein Maxi-

Abb. 167. Bei zu großem Anstellwinkel reißt die Strömung vom Flügel ab.

mum, dem bei den üblichen Flügelprofilen ein Auftriebsbeiwert $c_a = 1{,}2$ bis 1,5 entspricht. Bei weiterer Vergrößerung des Winkels α reißt die Strömung vom Flügel ab und bildet ein breites Totwassergebiet (Abb. 167), während gleichzeitig der Auftrieb sinkt[1].

[1] Eine theoretische Behandlung des offenbar bestehenden Zusammenhanges zwischen Widerstand und Auftriebsverminderung infolge der Totwasserbildung

4. Konforme Abbildung.

Zur theoretischen Untersuchung der ebenen Strömung um ein Tragflügelprofil (unendlich langer Tragflügel von konstantem Querschnitt) kann die Methode der konformen Abbildung herangezogen werden.

Man geht dabei aus von der ebenen, wirbelfreien Parallelströmung mit Zirkulation um einen Kreiszylinder und sucht diejenige abbildende Funktion auf, welche die Strömung um das vorgelegte Tragflügelprofil

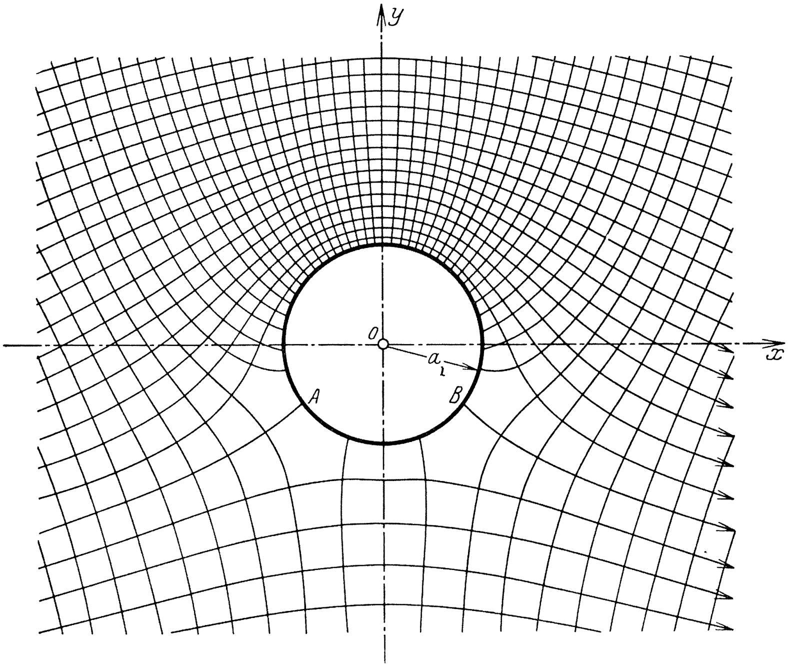


Abb. 168. Parallelströmung mit Zirkulation um einen Kreiszylinder.

in die bekannte Strömung um den Kreiszylinder überführt. Die einfachste Abbildungsfunktion nach Kutta und Joukowsky und ihre geometrische Deutung ist bereits im 1. Bande S. 160ff. besprochen worden. Hier sollen nur noch einige ergänzende Bemerkungen eingeschaltet werden.

Das komplexe Strömungspotential für die ebene Parallelströmung mit Zirkulation um einen Kreiszylinder vom Radius a_1 (Abb. 168) lautet mit $z = x + iy$ nach Bd. I S. 158

$$w(z) = v_\infty \left(z + \frac{a_1^2}{z}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z, \tag{272}$$

ist bislang noch nicht durchgeführt. Experimentell ist die Frage von C. Wieselsberger in Angriff genommen worden, der diesbezügliche Messungen an Joukowsky-Profilen durchgeführt hat. Vgl. hierzu „Innsbrucker Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik", herausgegeben von v. Kármán und Levi-Civita. Berlin 1924, sowie A. Betz und J. Lotz: Z. Flugtechn. Motorluftsch. 1932 Nr. 10 S. 277.

wenn v_∞ die der X-Achse parallele Anströmungsgeschwindigkeit im Unendlichen gegen den ruhend gedachten Zylinder und Γ die Stärke der Zirkulation bezeichnen. Nimmt man nun an, daß die Richtung der Anströmungsgeschwindigkeit mit der positiven X-Achse den Winkel β einschließt, so erhält man das komplexe Strömungspotential $w(z')$ in der z'-Ebene (deren Achsen mit denen der z-Ebene zusammenfallen mögen), wenn man $z' = z e^{i\beta}$ setzt, was einer Drehung um den Winkel β entspricht (Bd. I S. 132). Mit $z = z' e^{-i\beta}$ geht (272) über in

$$w(z') = v_\infty \left(z' e^{-i\beta} + \frac{a_1^2}{z'} e^{i\beta}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln (z' e^{-i\beta}). \tag{273}$$

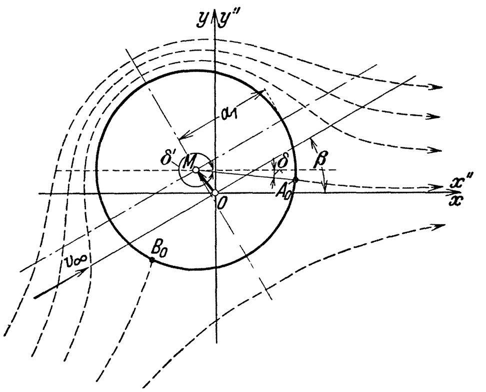


Abb. 169.

Bisher war angenommen, daß der Mittelpunkt M des Kreises mit dem Koordinatenursprung O zusammenfällt. Denkt man sich jetzt M aus O heraus um die Strecke $\overrightarrow{OM} = \mathfrak{u}$ verschoben (Abb. 169), so kann das komplexe Strömungspotential $w(z'')$ in der z''-Ebene aus (273) gefunden werden, wenn man $z'' = z' + \mathfrak{u}$ setzt, was einer Verschiebung des Punktes O nach M entspricht. Mit $z' = z'' - \mathfrak{u}$ folgt aus (273)

$$w(z'') = v_\infty \left\{(z'' - \mathfrak{u}) e^{-i\beta} + \frac{a_1^2}{z'' - \mathfrak{u}} e^{i\beta}\right\} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left\{(z'' - \mathfrak{u}) e^{-i\beta}\right\}$$

oder, wenn man nachträglich wieder die z''-Ebene mit der z-Ebene zusammenfallen läßt,

$$w(z) = v_\infty \left\{(z - \mathfrak{u}) e^{-i\beta} + \frac{a_1^2}{z - \mathfrak{u}} e^{i\beta}\right\} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left\{(z - \mathfrak{u}) e^{-i\beta}\right\}. \tag{274}$$

Der Ausdruck (274) stellt somit das komplexe Strömungspotential der Parallelströmung mit Zirkulation um den Kreis vom Radius a_1 und Mittelpunkt M dar, welcher mit der Geschwindigkeit v_∞ angeströmt wird, die ihrerseits mit der X-Achse den Winkel β einschließt (Abb. 169).

Gelingt es nun, eine analytische Funktion $z = z(\zeta)$ anzugeben, durch welche das zu untersuchende Tragflügelprofil der ζ-Ebene konform in einen Kreis der z-Ebene transformiert wird, so erhält man aus (274) durch Einführung der Funktion $z = z(\zeta)$ das komplexe Strömungspotential

$$w[z(\zeta)] = \Phi(\xi, \eta) + i\Psi(\xi, \eta), \tag{275}$$

wobei $\Phi(\xi, \eta)$ und $\Psi(\xi, \eta)$ Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion der Tragflügelströmung in der ζ-Ebene darstellen ($\zeta = \xi + i\eta$). Durch diese Transformation wird die Zirkulation Γ nicht geändert, d. h. für den Tragflügel ist der gleiche Wert Γ maßgebend wie für die Kreisströmung. Die Aufgabe läuft also jetzt darauf hinaus, die Abbildungsfunktion $z = z(\zeta)$ aufzusuchen.

Dazu ist, wie R. v. Mises in seiner „Theorie des Tragflächenauftriebes" gezeigt hat[1], in besonderem Maße ein von L. Bieberbach aufgestellter Satz aus der Funktionentheorie geeignet. Danach hat die Funktion, durch welche der Außenraum einer einfach geschlossenen, im übrigen aber beliebig gestalteten Kontur in der ζ-Ebene eindeutig auf den Außenraum eines Kreises in der z-Ebene abgebildet wird, die Form

$$z = \zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \frac{c_3}{\zeta^3} + \cdots. \tag{276}$$

Die darin auftretenden Größen $c_1, c_2 \ldots$ sind im allgemeinen komplexe Konstante, können aber in speziellen Fällen auch reell sein (s. unten). Läßt man in Gl. (276) $\zeta \to \infty$ gehen, so geht $z \to \zeta$, d. h. bei der Abbildung mittels der Funktion (276) bleibt das unendlich Ferne unverändert. Die Konstanten $c_1, c_2 \ldots$ sowie der Radius des Kreises, in den die gegebene Kontur (Flügelprofil) durch die Funktion (276) übergeführt wird, sind durch die Form der Kontur eindeutig bestimmt; dasselbe gilt von dem Kreismittelpunkt, wenn man beide Bildebenen mit den Bezugsachsen aufeinanderlegt.

Einen speziellen Fall von (276) bildet die bereits im 1. Bande (S. 160) behandelte Kutta-Joukowskysche Abbildung mittels der Funktion

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z}. \tag{277}$$

Löst man nämlich (277) nach z auf, also

$$z = \frac{\zeta}{2} \pm \sqrt{\frac{\zeta^2}{4} - a^2} = \frac{\zeta}{2} \pm \frac{\zeta}{2}\left(1 - \frac{4a^2}{\zeta^2}\right)^{1/2} \tag{277a}$$

und entwickelt die Wurzel nach einer binomischen Reihe, so erhält man, da $z = \zeta$ für $\zeta = \infty$ sein soll,

$$z = \zeta - \frac{a^2}{\zeta} - \frac{a^4}{\zeta^3} - \frac{2a^6}{\zeta^5} \cdots \tag{278}$$

d. h. die Reihe (276), wenn dort $c_1 = -a^2$, $c_2 = 0$, $c_3 = -a^4 \ldots$ gesetzt wird.

Hat man also die Funktion (276) für ein vorgelegtes Tragflügelprofil bestimmt, so erhält man durch Einführung in (274) das komplexe Strömungspotential (275) für das zu untersuchende Profil und kann daraus durch Trennung der reellen und imaginären Glieder in der früher gezeigten Weise Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion angeben.

Wie oben bereits bemerkt wurde, ist die Auftriebskraft A bestimmt durch den Kutta-Joukowskyschen Satz, wonach

$$A = \varrho \Gamma v_\infty, \tag{279}$$

[1] Z. Flugtechn. Motorluftsch. 1917 S. 157; 1920 S. 68 u. 87, sowie Z. angew. Math. Mech. 1922 S. 71.

bezogen auf die Einheit der Flügelspannweite. Bei gegebener Anströmungsgeschwindigkeit v_∞ kann also A berechnet werden, sobald die Zirkulation Γ bekannt ist. Um diese zu finden, geht man von der auf Seite 206 erörterten Hypothese aus, wonach die Zirkulation eine solche Größe annehmen muß, daß die Strömung an der scharfen Hinterkante glatt abfließen kann. Mit anderen Worten: der Punkt S des Tragflügelprofils, in dem die obere und untere Randstromlinie wieder zusammentreffen, fällt mit der Hinterkante des Profils zusammen (Abb. 163). Durch die Abbildungsfunktion (276) ist diesem Punkte S ein ganz bestimmter Punkt des Kreises in der z-Ebene zugeordnet, nämlich der hintere Staupunkt A_0 (Abb. 169). Durch Differentiation von (274) folgt

$$\frac{dw(z)}{dz} = v_x - i\,v_y = v_\infty\left(e^{-i\beta} - \frac{a_1^2}{(z-\mathfrak{u})^2}\,e^{i\beta}\right) + \frac{i\,\Gamma}{2\pi}\,\frac{1}{z-\mathfrak{u}}, \tag{280}$$

wo $v_x - i v_y$ die konjugierte Geschwindigkeit darstellt (Bd. I S. 127). Der Betrag $\left|\frac{dw(z)}{dz}\right|$ muß an der Stelle A_0 verschwinden, da dieser Punkt hinterer Staupunkt der Kreisströmung sein soll. Bezeichnet nun in Abb. 169 δ' den Winkel, den der Radius MA_0 gegen die X-Achse bildet, so wird der Punkt A_0 in der z-Ebene festgelegt durch $z = \mathfrak{u} + a_1 e^{i\delta'}$. Für diesen Wert muß demnach die rechte Seite von (280) zu Null werden, weshalb

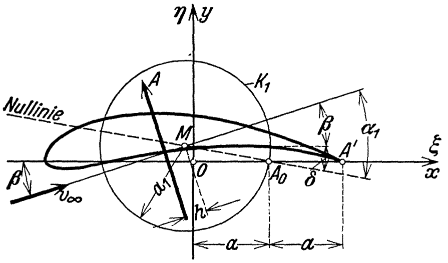


Abb. 170. Joukowsky-Profil.

$$\frac{i\,\Gamma}{2\pi} = v_\infty\,a_1\left\{e^{i(\beta-\delta')} - e^{-i(\beta-\delta')}\right\}$$

oder

$$\Gamma = 4\pi\,v_\infty\,a_1\sin(\beta - \delta') = 4\pi\,v_\infty\,a_1\sin(\beta + \delta), \tag{281}$$

wenn $\delta = 2\pi - \delta'$ gesetzt wird. (Vgl. hierzu die entsprechenden Ausführungen über die Joukowskysche Abbildung in Bd. I S. 163.)

Abb. 170 zeigt ein Joukowsky-Profil und den Kreis K_1 der z-Ebene, auf den das Profil durch die Funktion (277a) abgebildet wird. Der Spitze A' entspricht der Kreispunkt A_0 (hinterer Staupunkt für die Kreisströmung). Die Verbindungslinie des Kreismittelpunktes M mit A_0 ist demnach eine für das dargestellte Profil charakteristische Achse, die nach v. Mises als Nullinie bezeichnet werden möge und mit der Anströmungsrichtung den Winkel $\alpha_1 = \beta + \delta$ einschließt. Führt man diesen Winkel in (281) ein, so nimmt die Zirkulation Γ die einfache Form an

$$\Gamma = 4\pi\,v_\infty\,a_1\sin\alpha_1\,. \tag{281a}$$

Sie ist also bekannt, sobald der Radius a_1 des Bildkreises und die Nullinie festgelegt sind, und zwar gilt Gl. (281a) ihrer Ableitung entsprechend nicht nur für Joukowskysche, sondern auch für beliebig andere Profilformen. Mit ihr geht Gl. (279) für den Auftrieb über in

$$A = 4\,\pi\,\varrho\,v_\infty^2\,a_1 \sin\alpha_1. \tag{282}$$

Zur vollständigen Bestimmung des Auftriebes A muß außer seiner Größe auch die Lage seiner Richtungslinie angegeben werden. Zu diesem Zwecke hat man das Moment $\mathfrak{M}$ des Auftriebes für einen beliebigen Punkt des Flügelquerschnittes zu ermitteln und erhält dann aus dem Quotienten $\frac{\mathfrak{M}}{A}$ die Größe des Hebelarmes in bezug auf den gewählten Momentenpunkt. Man kann sich dabei — ähnlich wie bei der Ableitung des Kutta-Joukowskyschen Satzes (Bd. I S. 177) — wieder des Impulssatzes bedienen. Unter der Voraussetzung stationärer Bewegung hat man zu diesem Zwecke das Moment aller auf eine in bestimmter Weise abgegrenzte Flüssigkeitsmasse wirkenden äußeren Kräfte gleich dem Überschuß des Momentes des in der Zeiteinheit aus dem abgegrenzten Bereiche austretenden Impulses über dasjenige des eintretenden Impulses zu setzen (Bd. I S. 59 und 60). Auf diese Weise hat v. Mises[1] einen allgemeinen Ausdruck für das Auftriebsmoment bei beliebiger Profilform abgeleitet; danach ist, wenn man den Mittelpunkt M des Kreises K_1 als Momentenpunkt wählt,

$$\mathfrak{M}_M = 2\,\varrho\,\pi\,v_\infty^2\,c^2 \sin 2\,(\beta + \gamma)\,, \tag{283}$$

wobei das Moment positiv gerechnet werden soll, wenn es um M im Uhrzeigersinn dreht (vgl. Abb. 170).

In Gl. (283) stellen c und γ zwei reelle Konstante dar, die mit der (im allgemeinen komplexen) Konstanten c_1 der Reihe (276) durch die Beziehung

$$c_1 = k_1 + i\,k_1' = -\,c^2\,e^{2\gamma i}$$

verknüpft sind. Sobald durch die gewählte Profilform über k_1 und k_1' verfügt ist, sind auch c und γ vermittels der Beziehung

$$k_1 + i\,k_1' = -\,c^2\,(\cos 2\,\gamma + i\,\sin 2\,\gamma)$$

oder

$$k_1 = -\,c^2 \cos 2\,\gamma\,; \qquad k_1' = -\,c^2 \sin 2\,\gamma$$

bestimmt.

Für das Joukowsky-Profil ist nach S. 211 $c_1 = -\,a^2$, wo $a = \overline{OA_0}$ (Abb. 170), demnach $k_1 = -\,a^2$, $k_1' = 0$. Daraus folgt $c^2 = a^2$, $\gamma = 0$ und für das Moment

$$\mathfrak{M}_M = 2\,\varrho\,\pi\,v_\infty^2\,a^2 \sin 2\,\beta\,. \tag{283a}$$

Unter Beachtung der Gl. (282) und (283) erhält man für den Hebelarm h (Abb. 170) die Größe

$$h = \frac{\mathfrak{M}_M}{A} = \frac{c^2}{2\,a_1}\,\frac{\sin 2\,(\beta + \gamma)}{\sin\alpha_1}\,,$$

speziell für das Joukowsky-Profil

$$h = \frac{a^2}{2\,a_1}\,\frac{\sin 2\,\beta}{\sin\alpha_1}\,.$$

[1] Fußnote 1 S. 211.

Damit ist aber auch die relative Lage der Auftriebskraft gegen das Flügelprofil bestimmt.

R. v. Mises[1] und W. Müller[2] haben die geometrischen Eigenschaften der Flügelprofile genauer untersucht und eine Reihe wichtiger Zusammenhänge zwischen Auftrieb, Profilform und Anstellwinkel dargelegt.

Weiter oben wurde darauf hingewiesen, daß man mittels der Funktion (277) ein Joukowskysches Tragflügelprofil aus dem Kreise K_1 (Abb. 170) ableiten kann. Ein graphisches Verfahren hat E. Trefftz[3] angegeben, das bereits im 1. Bande besprochen wurde. Durch entsprechende Wahl der Länge $a = \overline{OA_0}$, sowie Größe und Richtung von $\mathfrak{u} = \overrightarrow{OM}$ ist man in der Lage, Größe, Krümmung und Dicke des Profils weitgehend zu variieren. Die auf diese Weise entstehenden Profile weichen jedoch insofern von den praktisch verwendeten Flügelquerschnitten ab, als sie am hinteren Ende eine Schneide mit dem Kantenwinkel $\tau = 0$ aufweisen.

Man kann nun, wie Th. v. Kármán und E. Trefftz[4] in Anlehnung an einen Gedanken von Kutta gezeigt haben, durch Erweiterung der Joukowskyschen Methode zu Profilen gelangen, bei denen der hintere Kantenwinkel τ einen von Null verschiedenen Wert hat, wenn man statt der Gl. (277) die Abbildungsfunktion

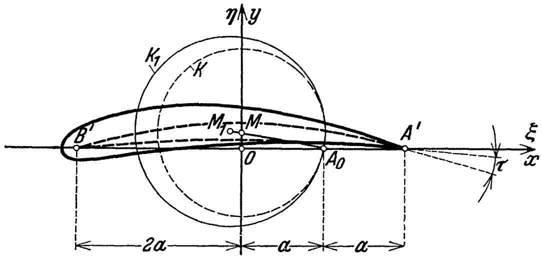


Abb. 171. Tragflügelprofil mit endlichem Kantenwinkel τ.

$$\frac{\zeta + na}{\zeta - na} = \left(\frac{z+a}{z-a}\right)^n \qquad (284)$$

anwendet, worin der Exponent

$$n = 2 - \frac{\tau}{\pi}$$

wenig kleiner als 2 ist. Für $\tau = 0$ wird $n = 2$, und (284) geht über in

$$\frac{\zeta + 2a}{\zeta - 2a} = \left(\frac{z+a}{z-a}\right)^2, \qquad (284\text{a})$$

woraus man durch Ausmultiplizieren wieder die Joukowskysche Abbildungsfunktion (277)

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z}$$

erhält.

Durch die Transformation (284) geht der Kreis K mit dem Mittelpunkt M (Abb. 171) über in das Kreiszweieck $A'B'A'$, der Kreis K_1 mit dem Mittelpunkt M_1 in das gezeichnete Tragflügelprofil, dessen hinterer Kantenwinkel τ von Null verschieden ist.

[1] Vgl. die auf S. 211 genannten Arbeiten.

[2] Z. angew. Math. Mech. 1924 S. 213, und Mathem. Strömungslehre, S. 148. Berlin 1928.

[3] Z. Flugtechn. Motorluftsch. 1913 S. 130.

[4] Z. Flugtechn. Motorluftsch. 1918 S. 111; vgl. auch v. Mises: Z. Flugtechn. Motorluftsch. 1920 S. 72.

5. Tragflügel von endlicher Spannweite. Induzierter Widerstand.

Wie oben bereits erwähnt wurde (vgl. S. 207) stimmen die theoretisch ermittelten Auftriebswerte beim unendlich langen Flügel (ebenes Problem) recht befriedigend mit den Versuchsergebnissen überein. Die bei den Versuchen festgestellte Widerstandskraft W, welche nach der Theorie gleich Null sein müßte, läßt sich ohne Schwierigkeit aus dem an der Flügeloberseite auftretenden Totwassergebiet sowie aus Reibungswirkungen an der Flügeloberfläche erklären. Anders verhält es sich jedoch bei Tragflügeln von endlicher Spannweite, wie sie praktisch allein in Frage kommen. Hier treten erfahrungsgemäß auch schon bei kleinen Anstellwinkeln Widerstandskräfte auf, die ihre Ursache nicht allein in den oben genannten Einflüssen haben, sondern wesentlich durch die Vorgänge an den Flügelenden bedingt sind.

Auf Seite 202 wurde gezeigt, daß durch Überlagerung der translatorischen und der zirkulatorischen Strömung an der Flügelunterseite (Druckseite) ein Überdruck, an der Flügeloberseite (Saugseite) dagegen ein Unterdruck entsteht, wodurch erst die Ausbildung der Auftriebs-

Abb. 172.

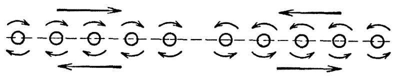


Abb. 173. Wirbelschicht hinter dem Tragflügel.

kraft ermöglicht wird. Diese Druckunterschiede haben ein Umströmen der seitlichen Flügelenden in dem aus Abb. 172 ersichtlichen Sinne zur Folge. Die dadurch bedingte Sekundärströmung hält auch dann noch an, wenn die entsprechenden Flüssigkeitsteilchen den Tragflügel schon verlassen haben, so daß jetzt hinter dem Flügel zwei Flüssigkeitsschichten vorhanden sind, die mit verschiedenen Geschwindigkeiten aneinander vorbeifließen. Es bildet sich also eine Unstetigkeitsfläche aus, die man sich nach Bd. I S. 190 auch durch zwei Wirbelschichten von entgegengesetztem Drehsinn ersetzt denken kann (Abb. 173). Diese Wirbelschichten sind labil und zerfallen im weiteren Verlauf der Strömung durch „Aufwicklung“ infolge von Zähigkeitseinwirkungen in zwei Randwirbel, die sich theoretisch über die ganze Länge des Flugweges erstrecken und deren Achsen, von den Flügelspitzen ausgehend, in die Fortschreitungsrichtung des Flugzeuges fallen. Da nun bei der Vorwärtsbewegung des Tragflügels diese Wirbel immer neu gebildet werden müssen, was einen ständigen Energieaufwand zur Folge hat, so ist zur Vorwärtsbewegung eine Arbeitsleistung erforderlich oder, anders gesprochen, der Flügel muß einen Widerstand überwinden. Die theoretische Erklärung dieses sogenannten Rand- oder induzierten Widerstandes ist L. Prandtl[1] zu verdanken und stellt einen der größten Fortschritte der Tragflügeltheorie dar.

[1] Prandtl, L.: Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys. Klasse 1918 u. 1919; wieder abgedruckt in „Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik“ (zus. mit A. Betz). Göttingen 1927.

Auf Seite 207 wurde gezeigt, daß man zur Beschreibung der Vorgänge in einiger Entfernung des unendlich langen Flügels (ebenes Problem) letzteren durch einen „tragenden Wirbel“ von der Zirkulation Γ ersetzen kann. Ein solcher „Wirbelfaden“ kann im Innern einer Flüssigkeit weder beginnen noch enden (Bd. I S. 183). Er muß sich also entweder bis an die Grenzen der Flüssigkeit erstrecken — wie beim unendlich langen Tragflügel — oder, in sich zusammenlaufend, einen geschlossenen Wirbelring bilden. Nimmt man nun einen Tragflügel von endlicher Spannweite an und setzt eine über die ganze Spannweite gleichmäßig verteilte Zirkulation voraus, die an den Flügelenden plötzlich auf Null abfällt, so kann man die oben erwähnten Randwirbel als Fortsetzung des tragenden Wirbels auffassen. Bei unendlich langem Flugwege enden diese Randwirbel (und damit der ganze Wirbelfaden) theoretisch erst im Unendlichen (Hufeisenwirbel Abb. 174), bei endlichem Flugwege dagegen bilden sie mit dem „Anfahrwirbel“ einen geschlossenen Wirbelring (Abb. 175).

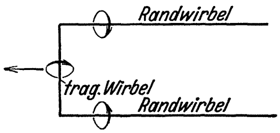


Abb. 174. Hufeisenwirbel.

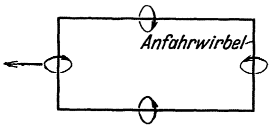


Abb. 175. Der tragende Wirbel bildet mit den beiden Randwirbeln und dem Anfahrwirbel einen geschlossenen Wirbelring.

Außerhalb der Achse dieses Wirbelringes herrscht Potentialströmung. Zieht man also gemäß Abb. 176 in dieser Potentialströmung eine geschlossene Linie, die einen einfach zusammenhängenden Bereich umschließt (man kann sie auf einen Punkt zusammenziehen, ohne daß sie die Wirbelachse schneidet), so muß das Linienintegral der Geschwindigkeit längs dieser Linie verschwinden (Bd. I S. 114, 157 und 186). Für den Fall, daß die Punkte a und b unendlich nahe aneinander rücken, ist das Linienintegral der Geschwindigkeit für die Kurve I identisch mit der Zirkulation Γ des tragenden Wirbels (bzw. des Tragflügels), weshalb das Linienintegral der Geschwindigkeit für die Kurve II gleich $-\Gamma$ sein muß. Daraus folgt aber, daß die Zirkulation des Randwirbels in Abb. 174 ebenfalls gleich Γ ist (entgegengesetzter Drehsinn).

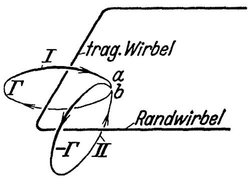


Abb. 176. Die Zirkulation des Randwirbels ist gleich der Tragflügelzirkulation.

In Wirklichkeit liegen die Verhältnisse nun nicht so einfach wie im vorstehenden Falle, da der Auftrieb — und mit ihm die Zirkulation — bei Flügeln von endlicher Spannweite wegen des über die Flügelränder stattfindenden Druckausgleichs nicht gleichmäßig über die Spannweite verteilt ist, sondern von einem Maximum in der Mitte nach einem zunächst unbekannten Verteilungsgesetz allmählich nach den Seiten hin auf Null abfällt. Dementsprechend werden sich unmittelbar hinter dem Flügel auch nicht nur die beiden oben erwähnten Randwirbel ausbilden, die ja die Fortsetzung der plötzlich aufhörenden Tragflügelzirkulation darstellen sollten, sondern es wird ein ganzes System paralleler Stabwirbel hinter dem Flügel entstehen, deren Verteilung und Intensität von der Verteilung der Zirkulation längs des Tragflügels abhängig sein wird, da jeder Änderung der Zirkulation ein vom Tragflügel nach hinten abgehender Wirbelfaden entsprechen muß.

Man kann sich in diesem Falle eine ungefähre Vorstellung von dem Wirbelsystem verschaffen, wenn man gemäß Abb. 177 mehrere Hufeisenwirbel von verschiedenem Randwirbelabstand überlagert, was einer stufenartigen Verteilung der Zirkulation längs des Tragflügels entsprechen würde. Bei stetiger Änderung der Zirkulation bilden die abgehenden Wirbelfäden eine zusammenhängende Wirbelschicht, die man auch als „Wirbelband" bezeichnet, und die mit wachsendem Abstand vom Flügel die oben erwähnte Umgestaltung erfährt.

Abb. 177. Überlagerung mehrerer Hufeisenwirbel.

Bleibt man zunächst bei der Vorstellung einzelner isolierter Wirbelfäden, so kann aus der Darstellung in Abb. 176 geschlossen werden, daß jede Änderung der Zirkulation $\Gamma = \Gamma(x)$ um die Größe $\frac{d\Gamma(x)}{dx}dx$ längs des Elementes dx der Flügelspannweite einen rückwärts abgehenden Wirbelfaden von der Zirkulation $\frac{d\Gamma(x)}{dx}\,dx$ zur Folge hat. Ist also das Verteilungsgesetz $\Gamma = \Gamma(x)$ bekannt, so kann auch die Intensität des Wirbelbandes unmittelbar hinter dem Tragflügel angegeben werden.

Für die Folge ist es nun wichtig, die Wirkung der abgehenden Stabwirbel auf ihre Umgebung unmittelbar hinter dem Tragflügel festzustellen. Nach Bd. I S. 186 und unter Beachtung der Bezeichnungen in Abb. 178 erzeugt das Stück $L - L'$ eines geraden Wirbelfadens von der Wirbelstärke Γ' in einem Punkte P, dessen Abstand von der Wirbelachse $x - \xi$ beträgt, die Geschwindigkeit

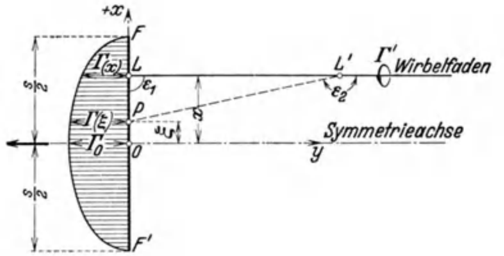


Abb. 178. Veränderliche Zirkulationsverteilung über die Längsachse des Flügels.

$$w = \frac{\Gamma'}{4\pi(x-\xi)}(\cos\varepsilon_1 - \cos\varepsilon_2)\,.$$

Erstreckt sich der Wirbelfaden nach rechts bis ins Unendliche, so geht vorstehender Ausdruck mit $\varepsilon_1 = \frac{\pi}{2}$ und $\varepsilon_2 = \pi$ über in

$$w = \frac{\Gamma'}{4\pi(x-\xi)}\,. \tag{285}$$

In Abb. 178 stelle $F - F'$ die Längsachse eines Tragflügels von der Spannweite s dar, $\Gamma(x)$ die mit x veränderliche Verteilung der Tragflügelzirkulation und $L - L'$ einen infolge dieser Veränderlichkeit rückwärts abgehenden Wirbelfaden von der Stärke $\Gamma' = -\frac{d\Gamma(x)}{dx}\,dx$ (siehe oben), der sich nach rechts bis ins Unendliche erstrecken soll. Da bei der angenommenen Zirkulationsverteilung längs des Tragflügels $\Gamma(x)$ von der Mitte nach beiden Seiten hin abnehmen soll, so ist Γ' bei positivem x positiv, bei negativem x dagegen negativ. Dann erteilt dieser Wirbelfaden nach (285) dem Punkte P eine Abwärtsgeschwindigkeit von der Größe

$$dw_\xi = -\frac{1}{4\pi(x-\xi)}\,\frac{d\Gamma(x)}{dx}\,dx\,,$$

und die Geschwindigkeit des Punktes P infolge der gesamten vom Flügel abgehenden Wirbelschicht hat den Wert

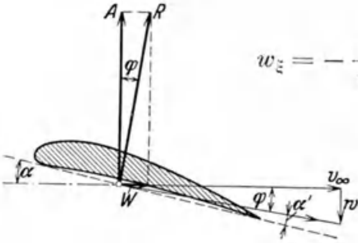


Abb. 179. Durch die induzierte Geschwindigkeit wird der wirksame Anstellwinkel verkleinert.

$$w_\xi = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{x=-\frac{s}{2}}^{x=+\frac{s}{2}} \frac{d\Gamma(x)}{dx}\,\frac{dx}{x-\xi}\,. \tag{286}$$

Sobald also die Verteilung $\Gamma(x)$ gegeben ist, läßt sich w_ξ an jeder beliebigen Stelle ξ berechnen.

Es fragt sich nun, welchen Einfluß diese vom Tragflügel „induzierte Geschwindigkeit" w_ξ auf das Strömungsfeld um den Tragflügel ausübt. Nimmt man zunächst einmal an, $w = w_\xi$ sei an jeder Stelle ξ eine konstante, abwärts gerichtete Geschwindigkeit, so tritt zur Anströmungsgeschwindigkeit v_∞ noch eine Vertikalkomponente w — eben die induzierte Geschwindigkeit — weshalb die resultierende Strömung jetzt unter dem (kleinen) Winkel φ gegen die ungestörte Strömung nach abwärts geneigt ist (Abb. 179). Durch diese Neigung der Stromlinien wird der wirksame Anstellwinkel — d. h. der Winkel zwischen Profilsehne und resultierender Strömung — kleiner, nämlich gleich der Differenz $\alpha - \varphi = \alpha'$, was eine Verkleinerung der Zirkulation und damit des Auftriebes zur Folge hat. Außerdem steht die mit der Zirkulation verbundene Luftkraft R jetzt nicht mehr senkrecht zur Richtung von v_∞, sondern senkrecht zur Richtung der aus v_∞ und w resultierenden Geschwindigkeit, ist also in Abb. 179 schräg nach rückwärts geneigt. Zerlegt man sie in ihre Komponenten senkrecht zur ungestörten Geschwindigkeit v_∞ und in Richtung derselben, so liefert die erste definitionsgemäß den Auftrieb A (der wegen der Kleinheit von φ gleich R gesetzt werden kann), die zweite dagegen den gesuchten induzierten Widerstand W. Für letzteren gilt also wegen

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{w}{v_\infty} = \frac{W}{A}$$

die einfache Beziehung

$$W = A\,\frac{w}{v_\infty}\,. \tag{287}$$

Ist die hier gemachte Annahme eines konstanten w nicht erfüllt, so läßt sich der induzierte Widerstand wie folgt darstellen: Auf ein Längenelement $d\xi$ der Flügelspannweite (Abb. 178) entfällt nach dem Kutta-Joukowskyschen Satz der Auftrieb

$$dA = \varrho\, v_\infty\, \Gamma(\xi)\, d\xi$$

und nach (287) ein induzierter Widerstand

$$dW = dA \frac{w_\xi}{v_\infty} = \varrho\, w_\xi\, \Gamma(\xi)\, d\xi\,.$$

Der gesamte Widerstand auf den ganzen Flügel beträgt also

$$W = \varrho \int\limits_{\xi=-\frac{s}{2}}^{\xi=+\frac{s}{2}} \Gamma(\xi)\, d\xi\, w_\xi$$

oder, wenn man den Wert von w_ξ aus (286) einführt,

$$W = \frac{\varrho}{4\pi} \int\limits_{\xi=-\frac{s}{2}}^{\xi=+\frac{s}{2}} \Gamma(\xi)\, d\xi \int\limits_{x=-\frac{s}{2}}^{x=+\frac{s}{2}} \frac{d\Gamma(x)}{dx} \frac{dx}{\xi - x}\,.$$

Die Berechnung von W nach vorstehender Gleichung setzt also die Kenntnis der Zirkulations- bzw. Auftriebsverteilung über die Flügelspannweite voraus.

Es erhebt sich jetzt die Frage, ob es eine praktisch mögliche Zirkulationsverteilung gibt, bei der — wie oben angenommen — w_ξ = const. wird. Tatsächlich zeigt sich, daß dieses der Fall ist, wenn man die Zirkulation nach einer Halbellipse über die Tragflügelspannweite verteilt annimmt, also

$$\Gamma(x) = \Gamma_0 \sqrt{1 - \frac{x^2}{\left(\frac{s}{2}\right)^2}} \tag{288}$$

setzt, wo die maximale Zirkulation Γ_0 gleich der kleinen Halbachse der Ellipse ist (Abb. 178).

Bildet man also

$$\frac{d\Gamma(x)}{dx} = -\frac{\Gamma_0 \cdot x}{\frac{s}{2}\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - x^2}}$$

und führt diesen Wert in (286) ein, so erhält man

$$w_\xi = \frac{\Gamma_0}{2\pi s} \int\limits_{x=-\frac{s}{2}}^{x=+\frac{s}{2}} \frac{x}{x-\xi} \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - x}}$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$x' = \frac{2x}{s} \text{ und } \xi' = \frac{2\xi}{s}$$

gesetzt wird,

$$w_\xi = \frac{\Gamma_0}{2\pi s} \int\limits_{x'=-1}^{x'=+1} \frac{x'}{x'-\xi'} \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}}.$$

Dafür kann man auch schreiben

$$w_\xi = \frac{\Gamma_0}{2\pi s}\left\{\int\limits_{-1}^{+1} \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}} + \xi' \int\limits_{-1}^{+1} \frac{dx'}{(x'-\xi')\sqrt{1-x'^2}}\right\}. \tag{289}$$

Nun ist

$$\int\limits_{-1}^{+1} \frac{dx'}{\sqrt{1-x'^2}} = \arcsin x' \Big]_{-1}^{+1} = \pi$$

und

$$\int\limits_{-1}^{+1} \frac{dx'}{(x'-\xi')\sqrt{1-x'^2}} = 0. \tag{290}$$

Zur Integration des letzten Ausdrucks setze man

$$x' = \frac{2t}{t^2+1}; \qquad \sqrt{1-x'^2} = \frac{t^2-1}{t^2+1}; \qquad dx' = -\frac{2(t^2-1)\,dt}{(t^2+1)^2}.$$

Dann wird

$$J = \int \frac{dx'}{(x'-\xi')\sqrt{1-x'^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2\xi' - 2t + \xi'} = 2r\int \frac{dt}{t^2 - 2tr + 1},$$

wo $\xi' = \frac{1}{r}$.

Im vorliegenden Falle ist $\xi'^2 < 1$, also $r^2 = \frac{1}{\xi'^2} > 1$. Nun ist

$$J = 2r\int \frac{dt}{t^2-2tr+1} = \frac{r}{\sqrt{r^2-1}} \ln \frac{t-r-\sqrt{r^2-1}}{t-r+\sqrt{r^2-1}},$$

also wegen $t = \frac{1+\sqrt{1-x'^2}}{x'}$ und $r = \frac{1}{\xi'}$

$$J = \frac{1}{\sqrt{1-\xi'^2}} \ln \frac{\frac{\xi'}{x'}(1+\sqrt{1-x'^2}) - 1 - \sqrt{1-\xi'^2}}{\frac{\xi'}{x'}(1+\sqrt{1-x'^2}) - 1 + \sqrt{1-\xi'^2}}. \tag{290a}$$

Setzt man hier die Grenzen $\int\limits_{x'=1}^{x'=+1}$ ein, so ergibt sich ein unbrauchbarer Wert, was darauf zurückzuführen ist, daß in (290) der Integrand für $x' = \xi'$ unendlich groß wird. Man hat deshalb aus (290a) den Grenzwert

$$\lim_{\lambda\to 0}\left\{ J\Big]_{x'=-1}^{x'=\xi'-\lambda} + J\Big]_{x'=\xi'+\lambda}^{x'=+1}\right\}$$

zu bilden und gelangt auf diese Weise zu dem Ergebnis (290).

Somit folgt aus (289)

$$w_\xi = w = \frac{\Gamma_0}{2s} = \text{const.}, \tag{291}$$

also unabhängig von der Abszisse x. Damit läßt sich nun der induzierte Widerstand nach (287) leicht berechnen. Zunächst gilt nach dem Kutta-Joukowskyschen Satz für den gesamten Flügelauftrieb unter Beachtung von (288)

$$A = \varrho\, v_\infty \int\limits_{-\frac{s}{2}}^{+\frac{s}{2}} \Gamma(x)\, dx = 2\,\varrho\, v_\infty\, \Gamma_0 \int\limits_0^{\frac{s}{2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\left(\frac{s}{2}\right)^2}}\, dx\,,$$

woraus durch Integration folgt

$$A = \frac{\varrho\, \pi\, v_\infty\, \Gamma_0\, s}{4} \tag{292}$$

oder

$$\Gamma_0 = \frac{4A}{\varrho\, \pi\, v_\infty\, s}\,. \tag{293}$$

Führt man diesen Wert in (291) ein, so wird

$$w = \frac{2A}{\varrho\, \pi\, v_\infty\, s^2}$$

und nach (287)

$$W = \frac{2A^2}{\varrho\, \pi\, v_\infty^2\, s^2} = \frac{A^2}{\pi\, s^2\, q}\,, \tag{294}$$

wo $q = \frac{\varrho}{2} v_\infty^2$ wieder den Staudruck bezeichnet. Man erkennt daraus, daß der induzierte Widerstand bei einem bestimmten Auftrieb um so kleiner wird, je größer die Flügelspannweite ist.

Die der vorstehenden Überlegung zugrunde liegende elliptische Auftriebs- bzw. Zirkulationsverteilung läßt sich praktisch bei einem Tragflügel verwirklichen, dessen Vorder- und Hinterkante durch Halbellipsen gebildet werden (Abb. 180) und dessen Profile sämtlich geometrisch ähnlich sind und parallele Sehnen haben. In diesem Falle ist wegen $w = \text{const.}$ für alle Flügelelemente der wirksame Anstellwinkel (vgl. S. 218) derselbe, und der Auftrieb ist proportional der Profiltiefe [vgl. Gl. (282)], d. h. eben elliptisch über die Spannweite verteilt.

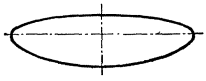


Abb. 180. Elliptische Flügelform.

Dieser Auftriebsverteilung entspricht, wie oben gezeigt wurde, eine über die ganze Flügelspannweite konstante induzierte Geschwindigkeit $w_\xi = w$. Die hinter dem Tragflügel vorhandene Unstetigkeitsfläche (Wirbelband) bewegt sich also im vorliegenden Sonderfall wie ein starres Gebilde nach abwärts, während sie bei veränderlichem w_ξ eine Deformation erleidet. Es läßt sich nun ganz allgemein zeigen[1], daß der induzierte Widerstand bei gegebener Auftriebsverteilung dann am kleinsten wird, wenn die induzierte Geschwindigkeit $w_\xi = w = \text{const.}$ ist. Der hier besprochene Fall elliptischer Auftriebsverteilung liefert also

[1] Munk, M.: Isoperimetr. Aufgaben aus der Theorie des Fluges. Dissert. Göttingen 1919. Betz, A.: Handb. der Physik von Geiger u. Scheel Bd. 7, S. 245.

das Minimum des induzierten Widerstandes und hat als solcher besondere Bedeutung.

Für die Praxis hat der rechteckige Flügel von konstantem Profil besonderes Interesse. Genauere Untersuchungen haben ergeben, daß bei dieser Flügelform die Auftriebsverteilung nicht allzu viel von der elliptischen abweicht, sofern das Seitenverhältnis $\frac{s}{t}$ des Flügels nicht zu groß ist. So ergibt sich nach Rechnungen von A. Betz[1] beim rechteckigen Flügel vom Seitenverhältnis

$$\frac{s}{t} = 3 \quad 5 \quad 8 \quad 10$$

$$\frac{W}{W_{\min}} = 1{,}02 \quad 1{,}04 \quad 1{,}07 \quad 1{,}09\,.$$

Nach Gl. (294) ist die Abhängigkeit des Widerstandes vom Auftrieb durch eine Parabel, die sog. Widerstandsparabel, gegeben. Drückt man W und A durch ihre Beiwerte c_w bzw. c_a aus (S. 198), so läßt sich die theoretische Abhängigkeit $c_a = f(c_w)$ graphisch darstellen und mit dem entsprechenden Polardiagramm vergleichen (Abb. 156 gestrichelte Linie). Der Unterschied zwischen dem gemessenen c_w der Polarkurve und dem theoretischen Wert (induzierter Widerstand) stellt den Einfluß des Reibungs- und Druckwiderstandes dar (vgl. S. 215), der von der Profilform abhängig ist (Profilwiderstand). Man kann also schreiben

$$c_w = c_{w_i} + c_{w_p}, \tag{295}$$

wenn c_{w_i} den Beiwert des induzierten Widerstandes und c_{w_p} denjenigen des Profilwiderstandes bezeichnet; c_{w_i} ist wesentlich abhängig vom Seitenverhältnis $\frac{s}{t}$, c_{w_p} dagegen erfahrungsgemäß nahezu nicht. Führt man in Gl. (294) die Beiwerte c_{w_i} und c_a gemäß Gl. (259) ein, so erhält man

$$c_{w_i} = c_a^2 \frac{F}{\pi s^2}$$

und somit nach (295)

$$c_w = c_a^2 \frac{F}{\pi s^2} + c_{w_p}. \tag{296}$$

Dieser Ausdruck gilt streng genommen nur für elliptische Auftriebsverteilung; er kann aber nach den obigen Ausführungen auch noch für rechteckige Flügel von nicht zu großem Seitenverhältnis benützt werden. Da ferner c_{w_p} vom Seitenverhältnis nahezu unabhängig ist, so gestattet Gl. (296) die Umrechnung der Widerstandsziffer eines Flügels, dessen Polarkurve bekannt ist, in diejenige eines Flügels von gleichem Profil aber anderem Seitenverhältnis. Für die beiden Flügel 1 und 2 gilt nämlich nach (296)

$$c_{w1} = c_{a1}^2 \frac{F_1}{\pi s_1^2} + c_{w_p}$$

$$c_{w2} = c_{a2}^2 \frac{F_2}{\pi s_2^2} + c_{w_p},$$

[1] Beiträge zur Tragflügeltheorie mit besonderer Berücksichtigung des einfachen rechteckigen Flügels. Dissert. Göttingen 1919.

woraus durch Differenzbildung für den gleichen Auftriebsbeiwert $c_{a1} = c_{a2} = c_a$ folgt

$$c_{w2} = c_{w1} + \frac{c_a^2}{\pi}\left(\frac{F_2}{s_2^2} - \frac{F_1}{s_1^2}\right). \tag{297}$$

Man kann somit aus einer vorliegenden Polarkurve (Abb. 156) für jedes c_a das zugehörige c_{w2} der neuen Polarkurve berechnen.

In ähnlicher Weise läßt sich auch der Anstellwinkel bei gleichem c_a-Wert umrechnen nach der Formel

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{c_a}{\pi}\left(\frac{F_2}{s_2^2} - \frac{F_1}{s_1^2}\right). \tag{297a}$$

Beide Formeln, besonders diejenige für c_w, stimmen für $\frac{F}{s^2} < \frac{1}{2}$ sehr gut mit den Versuchsergebnissen überein[1].

6. Doppeldecker.

Die Überlegungen der vorigen Nummer, die zur Erklärung und rechnerischen Ermittlung des induzierten Widerstandes beim Eindecker führten, lassen sich sinngemäß auch auf Mehrdecker übertragen, von denen hier jedoch nur die Doppeldecker kurz gestreift werden sollen.

Da jeder Tragflügel von endlicher Spannweite bei seiner Bewegung ein Wirbelsystem erzeugt, so muß sich der gesamte induzierte Widerstand des Doppeldeckers aus vier Teilen zusammensetzen, nämlich aus den beiden Widerständen, welche die Flügel als Eindecker aufweisen würden, und den beiden Widerständen, die aus der Wirkung jedes Flügels auf den anderen hervorgehen. Man hat somit als gesamten induzierten Widerstand

$$W = W_{11} + W_{12} + W_{21} + W_{22}, \tag{298}$$

wenn W_{12} den Widerstand des ersten Flügels, hervorgerufen durch das Wirbelsystem des zweiten Flügels bezeichnet usw. Dabei läßt sich W_{12} nach S. 219 in der Form anschreiben:

$$W_{12} = \varrho \int_{-\frac{s}{2}}^{+\frac{s}{2}} \Gamma_1(\xi)\, w_{12}(\xi)\, d\xi,$$

worin $\Gamma_1(\xi)$ die Zirkulation um den Flügel 1 und $w_{12}(\xi)$ die vom Flügel 2 induzierte Geschwindigkeit am Orte des Flügels 1 — und zwar an der Stelle ξ — bedeuten.

Die theoretische Untersuchung der Mehrdecker durch L. Prandtl[2]

---

[1] Betz, A.: Techn. Ber. d. Flugzeugmeisterei Bd. 1 (1917) S. 98; vgl. auch Handb. der Physik Bd. 7 S. 248 sowie Prandtl-Tietjens: Hydro- und Aeromechanik Bd. 2 S. 220.

[2] Prandtl, L.: Nachr. Ges. Wiss. Göttingen math. phys. Klasse 1919 S. 107 bis 137; wieder abgedruckt in „Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aero-

und seine Mitarbeiter hat eine Reihe wichtiger Folgerungen ergeben, auf die hier jedoch nur andeutungsweise eingegangen werden kann.

Zunächst wurde von Munk[1] gezeigt, daß beim ungestaffelten Doppeldecker (vgl. S. 195) die Widerstandsbeiträge W_{12} und W_{21} einander gleich sind, und zwar auch dann, wenn die beiden Flügel verschiedene Spannweite s haben.

Beim gestaffelten Doppeldecker ist zwar W_{12} nicht mehr gleich W_{21}, wohl aber ist die Summe $W_{12} + W_{21}$ vom Staffelungswinkel α unabhängig (Abb. 144, S. 195). Der induzierte Widerstand des nach vorn verschobenen Flügels wird dabei in demselben Maße kleiner, wie derjenige des rückwärtigen Flügels vergrößert wird. Voraussetzung dafür ist allerdings, daß die Auftriebsverteilung der beiden Flügel bei einer Änderung des Staffelungswinkels unverändert bleibt, was durch entsprechende Änderung des Anstellwinkels erreicht werden kann.

Von besonderer Wichtigkeit ist ferner der zuerst von Munk bewiesene Minimumsatz. Danach entsteht das Widerstandsminimum beim Doppeldecker (in gleicher Weise wie beim Eindecker) für eine solche Zirkulationsverteilung über die Flügelspannweite, durch die an jedem der beiden Flügel eine Zusatzgeschwindigkeit $w_\xi = \text{const.}$ erzeugt wird, so daß sich die zugehörige Unstetigkeitsfläche wie ein starres Gebilde nach abwärts bewegt (vgl. S. 221). Dazu wäre nach den Überlegungen der vorigen Nummer eine elliptische Auftriebsverteilung erforderlich. Da aber nach den Betzschen Rechnungen[2] beim rechteckigen Flügel von konstantem Profil und nicht zu großem Seitenverhältnis die Auftriebsverteilung nur wenig von der elliptischen abweicht, so wird der für diese Flügelform errechnete induzierte Widerstand das Minimum nicht allzu viel übertreffen.

Zur Darstellung des gesamten induzierten Widerstandes kann man demnach von Gl. (294) ausgehen und erhält zunächst

$$W_{11} = \frac{A_1^2}{\pi q s_1^2}; \qquad W_{22} = \frac{A_2^2}{\pi q s_2^2}. \tag{299}$$

Da beim ungestaffelten Doppeldecker die gegenseitig induzierten Widerstände einander gleich sind, ihre Summe aber bei einer Staffelung unter der oben genannten Voraussetzung unverändert bleibt, so kann man in Analogie zu (299) setzen:

$$W_{12} + W_{21} = 2\frac{\sigma}{\pi q}\frac{A_1}{s_1}\frac{A_2}{s_2}, \tag{300}$$

und zwar bedeutet darin σ einen Beiwert, der vom Verhältnis $\frac{s_2}{s_1}$ der Flügelspannweiten und vom Verhältnis des (senkrecht zur Bewegungsrichtung gemessenen) Flügelabstandes h zur mittleren Spannweite, also von $\frac{2h}{s_1+s_2}$ abhängt.

---

dynamik" (zus. mit A. Betz) S. 36. Göttingen 1927. Jb. wiss. Ges. Luftf. 1918 S. 37. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, 2. Lief. 1923. Betz, A.: Z. Flugtechn. Motorluftsch. Bd. 5 (1914) S. 253; Techn. Ber. d. Flugzeugmeisterei Bd. 1 (1917) S. 103. Munk, M.: Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges. Dissert. Göttingen 1919.

[1] Fußnote 2 S. 223. [2] Fußnote 1 S. 222.

Führt man die Werte (299) und (300) in (298) ein, so erhält man den gesamten induzierten Widerstand des Doppeldeckers in der Form

$$W = \frac{1}{\pi q}\left(\frac{A_1^2}{s_1^2} + 2\sigma\frac{A_1}{s_1}\frac{A_2}{s_2} + \frac{A_2^2}{s_2^2}\right). \tag{301}$$

Für $A_1 = A_2$ und $s_1 = s_2$ nimmt W ein Minimum an; man erhält dafür

$$W_{\min} = \frac{2\,A_1^2}{\pi q s^2}(1+\sigma)$$

oder, wenn $A = A_1 + A_2$ den Gesamtauftrieb bezeichnet,

$$W_{\min} = \frac{A^2}{\pi q s^2}\,\frac{1+\sigma}{2}. \tag{301a}$$

Da der Beiwert $\sigma < 1$ ist (siehe nachstehende Tabelle), so folgt aus (301a) durch einen Vergleich mit (294), daß der Doppeldecker geringeren induzierten Widerstand aufweist als ein Eindecker von gleichem Auftrieb und gleicher Spannweite.

Einige Werte für σ enthält die nachstehende Tabelle[1]:

Werte von σ.

$\frac{2h}{s_1+s_2} =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\frac{s_2}{s_1} = 1{,}0$	1,000	0,655	0,485	0,370	0,290	0,230
0,8	0,800	0,600	0,459	0,355	0,282	0,225
0,6	0,600	0,485	0,394	0,315	0,255	0,210

Nach einem Vorschlage von Munk[2] kann man die Umrechnungsformel (297) auch für zusammengesetzte Tragflügelanordnungen — z. B. Doppeldecker — verwenden, wenn man sie in der Form

$$c_{w2} = c_{w1} + \frac{c_a^2}{\pi}\left(\frac{\varkappa_2 F_2}{s_2^2} - \frac{\varkappa_1 F_1}{s_1^2}\right) \tag{302}$$

schreibt, wo $\varkappa$ einen von der Flügelanordnung abhängigen Zahlenwert bezeichnet. Für Doppeldecker mit gleichen Spannweiten beider Tragflügel ist für $s = 2\,h$ bis $s = 15\,h$ (h = lotrechter Flügelabstand) angenähert[3]:

$$\varkappa = \frac{0{,}975 + 1{,}44\,\frac{h}{s}}{1 + 3{,}5\,\frac{h}{s}}.$$

Mit Hilfe der Gl. (302) ist es also möglich, den induzierten Widerstand von einem bekannten Flügelsystem auf ein anderes in ähnlicher Weise umzurechnen, wie dieses beim Eindecker bereits gezeigt wurde.

[1] Prandtl, L.: Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, S. 42.

[2] Munk, M.: Beitrag zur Aerodynamik der Flugzeugtragorgane. Techn. Ber. d. Flugzeugmeisterei Bd. 2 S. 187.

[3] Prandtl, L.: Abriß der Strömungslehre, S. 154. Braunschweig 1931.

B. Propeller.

7. Begriff und Wirkungsweise des Propellers.

Propeller sind Vortriebsorgane, denen die Aufgabe zufällt, Luft- oder Wasserfahrzeuge (Schiffe, Luftschiffe, Flugzeuge) vorwärts zu bewegen, indem sie das von einer mit dem Fahrzeug verbundenen Kraftquelle (Motor) gelieferte Drehmoment in axialen Schub umsetzen. Diese Umsetzung erfolgt derart, daß der sich drehende Propeller immer neue Flüssigkeitsmassen nach rückwärts in Bewegung setzt, wodurch nach dem Impulssatz eine vorwärts gerichtete Kraft — der Propellerschub S — ausgelöst wird.

Konstruktiv werden die Propeller als Flügel- oder Schaufelräder ausgebildet, wobei jedoch in der Wirkungsweise ein grundsätzlicher Unterschied besteht, je nachdem ob der Propellerschub wesentlich durch den Widerstand oder durch den Auftrieb der einzelnen Flügel hervorgerufen wird.

Zu der ersten Art gehören z. B. die Schaufelradpropeller, bei denen die einzelnen Schaufeln der Reihe nach ins Wasser eintauchen und den Vortrieb durch die normal zur Schaufelebene wirkende Widerstandskraft erzeugen. Sie arbeiten mit geringen Drehzahlen, erfordern große Raddurchmesser und großen Kraftaufwand und finden in der Hauptsache bei Fahrzeugen in seichten Gewässern (Flüssen, Binnenseen) Verwendung.

Für die Technik weitaus wichtiger sind die auf Ausnutzung der Auftriebskomponente am Propellerflügel beruhenden Schraubenpropeller. Ihre Wirkungsweise beruht im wesentlichen auf dem Prinzip des Tragflügels, jedoch mit dem Unterschied, daß der Schraubenflügel eine aus der Vorwärtsbewegung des Fahrzeuges und der Drehbewegung des Propellers resultierende Schraubenbewegung ausführt, im Gegensatz zu der rein fortschreitenden Bewegung des Tragflügels. Bei der Ausbildung der Schraubenflügel werden also ähnliche Überlegungen eine Rolle spielen wie in der Tragflächentheorie, besonders hinsichtlich der richtigen Bemessung der Gleitzahl, die nach früherem (S. 198) das Verhältnis des Widerstandes zum Auftrieb darstellt.

Schraubenpropeller finden bei See- und Luftfahrzeugen fast ausschließlich Verwendung. Sie arbeiten bei kleineren Propellerdurchmessern mit wesentlich größeren Drehzahlen als die Schaufelradpropeller und ermöglichen damit die Verwendung leichterer Antriebsmaschinen. In der Folge soll nur noch von ihnen die Rede sein.

Bei der Untersuchung der Strömungsvorgänge an einem Propeller ist zu beachten, daß diese wesentlich durch die Zusammenwirkung zwischen Propeller und bewegtem Fahrzeug beeinflußt werden. Eine allgemeine theoretische Behandlung des Gesamtproblems bereitet naturgemäß erhebliche Schwierigkeiten und ist bis heute noch nicht gelungen, wenn auch verschiedene Ansätze nach dieser Richtung vorliegen[1].

---

[1] Vgl. hierzu Fresenius: Das grundsätzliche Wesen der Wechselwirkung zwischen Schiffskörper und Propeller. Schiffbau 1921/22 S. 257. Kempf: Dem

Man beschränkt sich deshalb zunächst darauf, die Verhältnisse am „alleinfahrenden“ — d. h. vom Fahrzeug unbeeinflußten — Propeller zu studieren, vorbehaltlich einer späteren Berichtigung der so gewonnenen Ergebnisse (erforderliche Drehzahl, Schraubendurchmesser, Flügelzahl usw.) für den Fall, daß der Propeller am Fahrzeug arbeitet. Diese letztere, für die Praxis in erster Linie maßgebende Frage — nämlich die Wechselwirkung zwischen Schraube und Fahrzeug — muß bis auf weiteres auf experimentellem Wege (Modellversuche) gelöst werden, wozu in den hydro- und aerodynamischen Versuchsanstalten verschiedene Verfahren entwickelt worden sind.

Bei der großen Bedeutung, die der Schraubenpropeller für die Technik besitzt, ist es nicht verwunderlich, daß seine theoretische Behandlung schon frühzeitig in Angriff genommen wurde, so daß heute eine ganze Reihe von Propellertheorien vorliegt. Alle diese Theorien gehen von gewissen Idealisierungen des wirklichen Strömungsbildes aus und können deshalb die wirklichen Verhältnisse — je nach den gemachten Voraussetzungen — nur zum Teil richtig wiedergeben. Grundsätzlich läßt sich eine Unterteilung nach zwei Gesichtspunkten vornehmen in die sog. Strahltheorie, die unter Anwendung des Impuls- und Energiesatzes den Vorgang in der Hauptsache eindimensional betrachtet, und in die Flügelblattheorie, welche die Strömungsverhältnisse an den einzelnen Propellerflügeln zu erfassen sucht, wobei neuerdings die aus der Tragflügeltheorie gewonnenen Erkenntnisse weitgehende Berücksichtigung finden.

An dieser Stelle sollen nur die grundlegenden Gesichtspunkte entwickelt werden. Leser, die sich über Einzelheiten unterrichten wollen, müssen auf die einschlägige Spezialliteratur verwiesen werden[1].

8. Die einfache Strahltheorie.

Bei der Drehung des Propellers wird ständig neue Flüssigkeit durch die Propellerebene nach rückwärts transportiert. Es entsteht auf diese Weise ein „Flüssigkeitsstrahl“, der relativ zu der übrigen Flüssigkeit nicht nur eine fortschreitende, sondern auch eine drehende Bewegung ausführt (Schraubenstrahl) und dessen Querschnitt von den Abmessungen und der sonstigen Ausbildung des Propellers abhängt. Man kann sich nun vorstellen, daß jedes durch die Propellerebene F hindurchtretende Flüssigkeitsteilchen eine Druckerhöhung Δp erleidet, und

---

Nachstrom angepaßte Propeller. Werft Reed. Hafen 1924 S. 93. Betz, A.: Propellerfragen. Z. angew. Math. Mech. 1927 S. 434. Helmbold, H. B.: Nachstromschrauben. Werft Reed. Hafen 1927 S. 528. Horn, F.: Schiffsschleppversuche, im Handbuch d. Experimentalphysik von Wien und Harms Bd. 4 3. Teil S. 3. Helmbold, H. B.: Bemerkungen zum Problem der Wechselwirkung zwischen Schiffsschraube und Schiffskörper, in Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebs S. 380, herausgegeben von G. Kempf und E. Foerster, Hamburg 1932.

[1] Eine Würdigung der verschiedenen Propellertheorien hat A. Pröll in seinem Vortrag: Kritische Betrachtungen zu den Theorien des Schraubenpropellers gegeben, abgedr. im Jb. schiffbautechn. Ges. 1923 S. 269, wo auch ausführliche Literaturangaben zu finden sind.

zwar so, daß der Integralwert $\int\limits_{(F)} \Delta p\, dF$ das Äquivalent des Propellerschubes S darstellt.

Die von Rankine[1] begründete Strahltheorie geht von folgenden vereinfachenden Annahmen aus: Die Schraube wird als „alleinfahrend“ angesehen, die oben erwähnte Strahldrehung sowie alle Energieverluste durch Reibung werden vernachlässigt, und der Propellerschub wird als gleichmäßig über die Fläche F des von der Schraube beschriebenen Kreises verteilt angenommen — was einer unendlichen Anzahl von Flügeln entsprechen würde — so daß

$$S = F \cdot \Delta p\,. \tag{303}$$

Auf Grund dieser vereinfachenden Vorstellung eines Idealpropellers, dessen Abmessungen in axialer Richtung (Hauptströmungsrichtung) außerdem vernachlässigbar klein seien, lassen sich über die Geschwindigkeits- und Druckverhältnisse des (rotationsfrei gedachten) Strahles die nachstehenden Aussagen machen (Abb. 181).

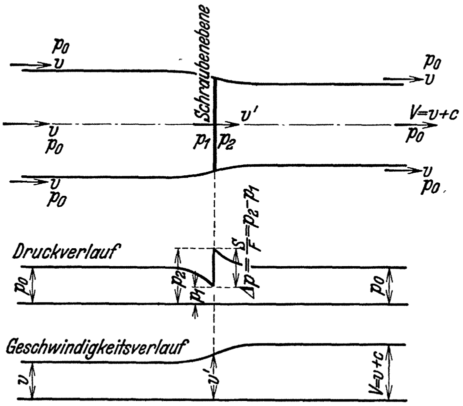


Abb. 181. Zur Rankineschen Strahltheorie.

Zur Erlangung einer stationären Strömung soll die Schraubenachse als ruhend angesehen und von der Flüssigkeit mit einer Geschwindigkeit v angeströmt werden, die das Entgegengesetzte der tatsächlichen Fahrgeschwindigkeit der Schraube darstellt. Außerhalb des Schraubenstrahles sowie in hinreichender Entfernung vor und hinter der Schraube herrscht überall der ungestörte Druck p_0. Dem Drucksprung $\Delta p = p_2 - p_1$ in der Propellerebene entspricht eine erhöhte Abstromgeschwindigkeit $V = v + c$, wobei c die Geschwindigkeitszunahme gegenüber der Zustromgeschwindigkeit v bezeichnet. Die Geschwindigkeit v', mit der die Schraubenebene durchströmt wird, ist offenbar $> v$, aber $< V$.

Zur Beurteilung der Druckdifferenz Δp wende man nacheinander den Energiesatz auf das Gebiet vor und hinter der Schraubenebene an. Dann wird mit den Bezeichnungen der Abb. 181

$$\frac{\varrho}{2}\,(v^2 - v'^2) = p_1 - p_0$$

und

$$\frac{\varrho}{2}\,(V^2 - v'^2) = p_2 - p_0\,,$$

woraus folgt:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \frac{\varrho}{2}\,(V^2 - v^2) = \varrho\, c \left(v + \frac{c}{2}\right). \tag{304}$$

[1] Trans. Inst. Naval Archit. Bd. 6 (1865).

Unter Beachtung von Gl. (303) erhält man somit für den Propellerschub

$$S = \varrho\, c\, F\left(v + \frac{c}{2}\right). \tag{305}$$

Eine weitere Gleichung für S kann man mit Hilfe des Impulssatzes ableiten. Zu diesem Zwecke betrachte man eine Flüssigkeitsmasse, die seitlich durch die Randstromlinien des Strahles, vorn und hinten in hinreichend weitem Abstand von der Schraubenebene durch je eine Ebene senkrecht zur Strahlrichtung begrenzt ist. Da die Drücke p_0 auf die Begrenzungsflächen des Strahles (einschl. der Mantelfläche) sich gegenseitig aufheben, so kommt unter Vernachlässigung aller Tangentialspannungen als äußere Kraft in der Strömungsrichtung nur der vom Propeller auf die Flüssigkeit übertragene Schub S in Betracht. Mit $Q = \varrho F v'$ als sekundliche Durchflußmenge erhält man somit nach dem Impulssatz

$$S = \varrho\, F\, v'\,(V - v) = \varrho\, F\, v'\, c\,, \tag{306}$$

woraus mit Rücksicht auf (305) folgt:

$$v' = v + \frac{c}{2} = \frac{V + v}{2}\,. \tag{307}$$

Danach ist also die axiale Geschwindigkeit v', mit welcher der Strahl die Schraube durchströmt, gleich dem arithmetischen Mittel aus den Axialgeschwindigkeiten v und V weit vor und hinter der Schraube (Theorem von Froude). Außerdem besagt Gl. (307), daß der Geschwindigkeitszuwachs $\left(\frac{c}{2}\right)$ an der Schraubenebene halb so groß ist wie in größerer Entfernung hinter der Schraube. Der Geschwindigkeits- und Druckverlauf ist aus Abb. 181 ersichtlich; der zunehmenden Geschwindigkeit entspricht nach dem Kontinuitätsgesetz eine Strahleinschnürung.

Setzt man noch die den Propeller idealisierende Kreisfläche $F \approx \frac{\pi d^2}{4}$, wo d den Schraubendurchmesser bezeichnet, so liefert Gl. (306) in Verbindung mit (307) eine Aussage über die Beziehungen zwischen Schub, Schraubendurchmesser und Fahrgeschwindigkeit.

Zur Ermittlung des theoretischen Wirkungsgrades des hier betrachteten Idealpropellers bilde man das Verhältnis der Nutzleistung L_n zur effektiven Leistung L_e. Erstere ist, wenn v die Relativgeschwindigkeit des Fahrzeuges gegen das Medium bezeichnet, $L_n = S \cdot v$, letztere dagegen $L_e = S \cdot v'$, wo v' wieder die oben angegebene Bedeutung hat. Demnach wird

$$\eta_{th} = \frac{L_n}{L_e} = \frac{v}{v'} \tag{308}$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (307)

$$\eta_{th} = \frac{1}{1 + \frac{c}{2\,v}}\,. \tag{308a}$$

Bei der Berechnung dieses Wertes ist, wie oben bereits hervorgehoben wurde, auf irgendwelche Verluste aus Strahldrehung und Flüssigkeitsreibung keine Rücksicht genommen. Außerdem wurde eine konstante Schubverteilung über die Schraubenkreisfläche F vorausgesetzt. Grundsätzlich kann aber aus Gl. (308a) gefolgert werden, daß der Wirkungsgrad eines Propellers um so höher ausfällt, je kleiner der Geschwindigkeitszuwachs c ist bzw. — bei vorgeschriebenem Schub S, mit Rücksicht auf Gl. (306) — je größer die sekundlich durch die Schraube tretende Wassermenge $Q = F v'$ ist. Da bei wirklichen Schrauben weitere Verluste unvermeidlich sind (siehe oben), so gibt η_{th} einen oberen Grenzwert an, welcher mit dem wirklichen Wirkungsgrad durch die Beziehung

$$\eta = \zeta \, \eta_{th} \tag{309}$$

verknüpft ist, wobei der Gütegrad ζ einen Erfahrungswert darstellt, der für gut durchgebildete Schrauben etwa 0,85 bis 0,90 beträgt.

Schreibt man Gl. (307) in der Form

$$c = V - v = 2\,(v' - v)$$

und führt diesen Wert in (306) ein, so wird

$$S = \frac{\varrho}{2} F v' \cdot 4\,(v' - v)\,,$$

wofür man auch setzen kann:

$$S = \frac{\varrho}{2} F v^2 \left(4 \frac{v'^2}{v^2} - 4 \frac{v'}{v}\right). \tag{310}$$

Der Quotient

$$\sigma = \frac{S}{\frac{\varrho}{2} F v^2}$$

wird als Belastungsgrad der Schraube bezeichnet. Mit ihm liefert (310) nach $\frac{v'}{v}$ aufgelöst

$$\frac{v'}{v} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \sigma}\right)$$

oder

$$\eta_{th} = \frac{v}{v'} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \sigma}}\,,$$

womit eine andere Formel für den theoretischen Wirkungsgrad gefunden ist, deren Anwendung sich in solchen Fällen besonders vorteilhaft erweist, in denen der Belastungsgrad gegeben bzw. vorgeschrieben ist. Man erkennt daraus, daß der Wirkungsgrad mit wachsendem σ abnimmt.

Aus den vorstehenden Überlegungen geht hervor, daß die Rankinesche Strahltheorie zwar einen brauchbaren Näherungsweg zur Berechnung des Schubes einer gegebenen Schraube sowie einen oberen Grenzwert für den Wirkungsgrad liefert, daß sie aber gar nichts auszusagen vermag über alle Vorgänge, die sich an den einzelnen Schraubenflügeln abspielen; insbesondere gibt sie keinen Aufschluß über den Einfluß der Flügelzahl und der Profilform. Dazu kommt, daß die Annahme eines drehungsfreien, zylindrischen Strahles, der sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit durch die ihn umgebende, ruhende Flüssigkeit bewegen soll, physikalisch unbefriedigend ist.

Es entstanden deshalb schon frühzeitig Bestrebungen nach einer Vervollkommnung der Rankineschen Strahltheorie, die sich nach verschiedenen Richtungen bewegten, indem sie entweder den Einfluß der Strahldrehung zu berücksichtigen[1] oder die Vorgänge am Flügelblatt genauer zu erforschen suchten[2]. Ein entscheidender Fortschritt in der Theorie wurde jedoch erst erzielt durch die Verwendung des Wirbelbegriffs, welche durch die Arbeiten von Reißner[3], Grammel[4], Lanchester[5] und Föttinger[6] angebahnt und von Betz und Prandtl (S. 233) weiter ausgebaut wurde.

9. Die neuere, auf dem Tragflügelprinzip aufbauende Propellertheorie.

Der wirkliche Charakter des Schraubenstrahls, der nach der einfachen Strahltheorie physikalisch nur schwer vorstellbar ist, tritt klarer zutage, wenn man die Wirbelbildung verfolgt, die durch die Bewegung der einzelnen Propellerflügel bedingt ist. Es gelten hier ganz ähnliche Überlegungen wie beim einzelnen Tragflügel, nur mit dem Unterschied, daß letzterer eine Parallelverschiebung erleidet, während ersterer außer der Parallelverschiebung noch eine Drehung ausführt.

Betrachtet man zunächst einen Propeller mit nahezu konstanter Auftriebsverteilung über die Flügel, bei welcher der Auftrieb an den Flügelspitzen plötzlich auf Null abfällt, so ergibt sich infolge der auf S. 216 geschilderten Verhältnisse an jedem Schraubenflügel ein Wirbelgebilde, das dem Hufeisenwirbel des Tragflügels entspricht und etwa die in Abb. 182 schematisch dargestellte Form hat. Die äußeren, von den Flügelspitzen ausgehenden schraubenförmigen Wirbelgebilde heißen nach Föttinger[6] Spitzenwirbel und umschlingen den durch

---

[1] Greenhill, A.: A theory of the screw propeller. Trans. Inst. Naval Archit. 1888. Lorenz, H.: Theorie und Berechnung der Schiffspropeller. Jb. schiffbautechn. Ges. 1906. Betz, A.: Eine Erweiterung der Schraubenstrahltheorie. Z. Flugtechn. Motorluftsch. 1920 S. 105.

[2] Froude, W.: Trans. Inst. Naval Archit. 1878. Gümbel: Das Problem des Schraubenpropellers. Jb. schiffbautechn. Ges. 1914, worin das Schraubenelement, der Schraubenpropeller als Ganzes, alleinfahrend, und der am Schiff arbeitende Schraubenpropeller behandelt werden.

[3] Reißner, H.: Studium zur Berechnung und planmäßigen Prüfung der Luftschrauben. Z. Flugtechn. Motorluftsch. 1910, 1911, 1912.

[4] Grammel, R.: Ein Beitrag zur Theorie des Propellers. Jb. schiffbautechn. Ges. 1916.

[5] Lanchester: Aerodynamik (deutsche Übersetzung von Runge) 1909 S. 149, 270.

[6] Föttinger, H.: Vorträge auf der flugwissenschaftlichen Versammlung zu Göttingen 1911 (München 1912 S. 40); Neue Grundlagen für die theoretische und experimentelle Behandlung des Propellerproblems. Jb. schiffbautechn. Ges. 1918 S. 385.

den Propeller tretenden „Flüssigkeitsstrahl“. Außer diesen Spitzenwirbeln gehen von den verschiedenen Flügeln an der Nabe sogenannte **Nabenwirbel** ab. Die Propellerflügel selbst hat man sich (wie beim Tragflügel) durch gerade Wirbelfäden von zunächst konstanter Zirkulation Γ ersetzt zu denken, die ihre Fortsetzung an den Flügelenden in den Spitzenwirbeln, an der Nabe in dem gemeinsamen Nabenwirbel finden. Das ganze Wirbelgebilde wird am hinteren Ende durch den **Anfahrwirbel** (vgl. S. 216) geschlossen (der allerdings nach einiger Zeit durch die Flüssigkeitsreibung aufgezehrt wird). Hinsichtlich der Wirbelstärke Γ gelten ähnliche Überlegungen, wie sie an Abb. 176 angestellt wurden; die Wirbelstärken der einzelnen Nabenwirbel überlagern sich.

Um eine Vorstellung von den am Flügel herrschenden Kraft- und Geschwindigkeitsverhältnissen zu bekommen, sei zunächst ein Flügelelement von der Länge dr im Abstand r von der Schraubenachse betrachtet, das man sich als Element eines unendlich langen Flügels denke

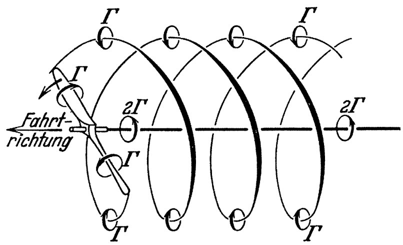


Abb. 182. Spitzenwirbel und Nabenwirbel bei einem Propeller.

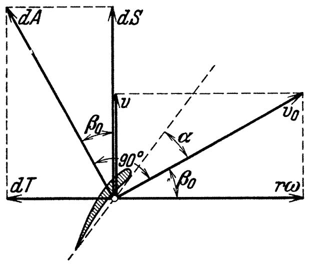


Abb. 183. Auftrieb am Flügelblattelement bei verlustfreier Strömung.

(Abb. 183). Die axiale Vorwärtsgeschwindigkeit der Schraube sei v, die Winkelgeschwindigkeit ω, so daß die resultierende (störungsfreie) Geschwindigkeit des betrachteten Flügelelementes $v_0 = \sqrt{v^2 + r^2\omega^2}$ beträgt, die um den Anstellwinkel α gegen die Profilsehne geneigt ist. Die Flüssigkeit wird als ruhend angenommen; außerdem sollen alle Reibungseinflüsse zunächst vernachlässigt werden. In diesem Falle kann, wie beim unendlich langen Tragflügel, ein Widerstand nicht auftreten. Das Flügelelement erfährt vielmehr aus der Bewegung lediglich einen Auftrieb dA, der nach dem Kutta-Joukowskyschen Satz die Größe $dA = \varrho v_0 \Gamma dr$ besitzt — wenn Γ die Zirkulation bezeichnet — und senkrecht zur Geschwindigkeit v_0 gerichtet ist. Seine Komponenten in axialer und tangentialer Richtung liefern den Schub $dS = dA \cos\beta_0 = \varrho r\omega\Gamma dr$ und die Tangentialkraft $dT = dA \sin\beta_0 = \varrho v\Gamma dr$. Um den gesamten Schub S zu bekommen, hat man über die Flügellänge zu integrieren und erhält (für einen Flügel)

$$S = \int_{(s)} dS = \varrho\,\omega \int_{(s)} r\,\Gamma dr\,. \tag{311}$$

Entsprechend ergibt sich für das Drehmoment

$$M = \int_{(s)} dT\,r = \varrho\,v \int_{(s)} r\,\Gamma dr\,. \tag{312}$$

Die Nutzleistung der Schraube ist $S v$, die Motorleistung $M \omega$. Aus dem Vergleich von (311) und (312) folgt, daß bei vollkommen verlustfreier Bewegung beide Leistungen einander gleich sind.

Bei einem Flügelblatt von endlicher Länge treten nun infolge der oben geschilderten Spitzen- und Nabenwirbel Störungs- oder Zusatzgeschwindigkeiten auf, welche eine Drehung der auf das Element wirkenden resultierenden Kraft und damit die Entstehung eines induzierten Widerstandes zur Folge haben (vgl. S. 218). Das Geschwindigkeits- und Kraftfeld an dem betrachteten Flügelelement erfährt damit die aus Abb. 184 ersichtliche Abänderung, wobei jetzt die Relativgeschwindigkeiten gegen den ruhend gedachten Flügel angegeben sind.

Die resultierende Störungsgeschwindigkeit w_r setzt sich am Orte des betrachteten Blattelementes mit der ungestörten Relativgeschwindigkeit v_0 zur Geschwindigkeit v_0' zusammen. Senkrecht zu letzterer steht die auf das Blattelement entfallende resultierende Kraft dP, deren Komponente nach der Richtung von v_0 den induzierten Widerstand dW_i liefert. Andererseits kann dP zerlegt werden in den axialen Schub dS und die Tangentialkraft dT. Der durch den induzierten Widerstand bedingte Leistungsverlust findet sein Äquivalent in der hinter der Schraube pro Zeiteinheit zurückbleibenden kinetischen Energie des Wirbelgebildes, die für den Bewegungsvorgang als „verloren“ anzusehen ist (induzierte Verlustenergie).

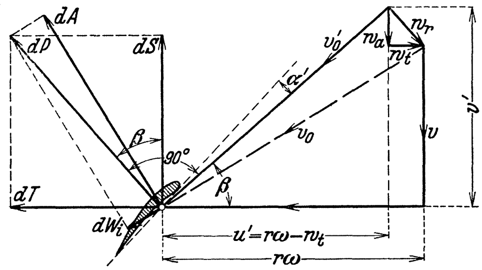


Abb. 184. Auftrieb und induzierter Widerstand am Flügelblattelement.

Die weiter oben zunächst gemachte Annahme einer über den Flügel nahezu konstanten Auftriebsverteilung, bei welcher der Auftrieb (bzw. die Zirkulation) an den Flügelspitzen plötzlich auf Null abfällt, trifft in Wirklichkeit nicht zu, da an den seitlichen Flügelenden der zur Entstehung des Auftriebs erforderliche Druckunterschied auf der Ober- und Unterseite des Flügels durch Umströmen seines Randes ausgeglichen wird. Ähnlich wie beim Tragflügel (S. 217) hat man es hier mit einer veränderlichen Auftriebs- bzw. Zirkulationsverteilung zu tun, so daß nicht nur von den Flügelenden, sondern von allen Stellen des Flügels Wirbelfäden ausgehen, die eine kontinuierliche, schraubenförmige Unstetigkeitsfläche bilden. Durch Übertragung der entsprechenden Gedankengänge vom Tragflügel auf den Schraubenflügel ist es Betz[1] gelungen, einige für die Propellertheorie grundlegende Zusammenhänge

[1] Betz, A.: Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse 1919 S. 193; abgedruckt in Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik von Prandtl und Betz, Göttingen 1927. Vgl. hierzu auch H. Reißner: Stationärer Bewegungszustand einer schraubenförmigen Wirbelfläche. Z. angew. Math. Mech. 1922 S. 106.

aufzudecken. Insbesondere hat er gezeigt, daß die für Tragflügel bestehende Bedingung für das Minimum des induzierten Widerstandes (vgl. S. 222) in erweiterter Form auch für Schraubenflügel gilt. Beim Tragflügel wird dieser Widerstand zu einem Minimum, wenn die durch den Flügel induzierte Geschwindigkeit w konstant ist, d. h. wenn die hinter dem Flügel vorhandene Unstetigkeitsfläche sich wie ein starres Gebilde nach abwärts bewegt, was bei elliptischer Auftriebsverteilung der Fall ist. Die entsprechende Minimumsbedingung für den schwach belasteten, isolierten Propeller lautet in der Formulierung von Betz[1]: „Die Strömung hinter einer Schraube mit geringstem Energieverlust ist so, wie wenn die von jedem Schraubenflügel durchlaufene Bahn (Schraubenfläche) erstarrt wäre und sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit nach hinten verschiebt oder sich mit einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit um die Schraubenachse dreht."

Wenn nun auch dieser Idealzustand bei praktischen Ausführungen nie ganz erreicht werden wird, so dürften doch für gut arbeitende Propeller die Verhältnisse nicht allzu viel davon abweichen, so daß die aus der obigen Bedingung gewonnenen Erkenntnisse auch für solche Fälle von Wert sind, die dem Idealzustand nahekommen.

Wirkungsgrad. Zur Vereinfachung der Aufgabe sei zunächst eine Schraube von unendlicher Flügelzahl betrachtet. Weiter soll angenommen werden, daß die von den abgehenden Schraubenwirbelbändern induzierten Zusatz- oder Störungsgeschwindigkeiten klein gegenüber der Fahrgeschwindigkeit v sind, und zwar sei im einzelnen 1. die Tangentialkomponente w_t (Abb. 184) so klein, daß die mit der Strahldrehung verbundenen Zentrifugalkräfte in radialer Richtung kein merkliches Druckgefälle erzeugen, 2. sei die Änderung w_a der Axialkomponente so gering, daß die damit verbundene Strahleinschnürung (vgl. S. 229) praktisch bedeutungslos ist, und 3. sollen Radialkomponenten unberücksichtigt bleiben. Unter diesen einschränkenden Voraussetzungen, die bei kleinem Propellerschub bzw. geringem Belastungsgrade mit ziemlicher Genauigkeit erfüllt sind (bei Schiffspropellern mit hohen Belastungsgraden treffen sie nicht mehr zu), lassen sich in Verbindung mit der obigen Minimumsbedingung einige wichtige Aussagen über die Störungsgeschwindigkeit sowie den theoretischen Wirkungsgrad machen, wobei zunächst wieder alle Reibungseinflüsse außer Betracht bleiben sollen.

Infolge der obigen Annahmen kann — wie im Falle der einfachen Strahltheorie — die axiale Komponente w_a der Störungsgeschwindigkeit in der Schraubenebene, d. h. also am Ort des betrachteten Flügelblattelements, gleich der Hälfte der axialen Geschwindigkeitszunahme c_a weit hinter der Schraube gesetzt werden (vgl. S. 229, Theorem von Froude). In gleicher Weise läßt sich mit Hilfe des Impulsmomentensatzes zeigen, daß auch die Tangentialkomponente w_t der Störungsgeschwindigkeit am Ort des Elements die halbe Größe der entsprechenden Geschwindigkeit c_t im ausgebildeten Schraubenstrahl besitzt.

[1] Fußnote 1 S. 234.

Nach dem Impulsmomentensatz, bezogen auf eine Ringfläche des Schraubenstrahls zwischen r und $r + dr$, ist nämlich

$$dM = dm \cdot c_t \cdot r = dJ \frac{c_t}{r},$$

wenn dm die sekundlich durch die Ringfläche strömende Masse, dJ ihr Trägheitsmoment und dM den auf die Ringfläche entfallenden Anteil des Moments der äußeren Kräfte an der Schraube bezeichnen. Der zusätzlichen Tangentialgeschwindigkeit c_t entspricht in der Zeiteinheit die kinetische Energie $\frac{dJ}{2}\left(\frac{c_t}{r}\right)^2$, bzw. eine Leistung $dM \frac{w_t}{r}$ an der Schraube, weshalb

$$dM \frac{w_t}{r} = \frac{dJ}{2}\left(\frac{c_t}{r}\right)^2$$

oder, wenn man hier dJ aus der obigen Beziehung einführt,

$$dM \frac{w_t}{r} = \frac{dM}{2} \frac{c_t}{r}.$$

Daraus folgt aber

$$w_t = \frac{c_t}{2}, \tag{313}$$

und entsprechend gilt nach früherem für die Axialkomponente

$$w_a = \frac{c_a}{2}. \tag{313a}$$

Zur Bestimmung des „induzierten" Wirkungsgrades für das Flügelelement im Abstand r von der Achse bilde man den Quotienten aus der nutzbaren Schubleistung $dS \cdot v$ und der aufgewandten Leistung des Drehmomentes $dT \cdot r\omega$, wo dT die zugehörige Tangentialkraft und ω die Winkelgeschwindigkeit bezeichnen. Dann wird

$$\eta_i = \frac{dS \cdot v}{dT \cdot r\omega}.$$

Nun ist gemäß Abb. 184

$$\frac{dS}{dT} = \operatorname{ctg} \beta = \frac{r\omega - w_t}{v + w_a},$$

weshalb

$$\eta_i = \frac{r\omega - w_t}{r\omega} \frac{v}{v + w_a} \tag{314}$$

oder, wenn man zur Abkürzung $r\omega = u$, $r\omega - w_t = u'$, $v + w_a = v'$ setzt,

$$\eta_i = \frac{u'}{u} \frac{v}{v'}. \tag{314a}$$

Läßt man in Gl. (314) die Tangentialkomponente w_t gegen Null gehen (Vernachlässigung der Strahldrehung), so geht η_i gegen $\frac{v}{v + w_a}$, d. h. man erhält den theoretischen Wirkungsgrad (308) der einfachen Strahltheorie.

Für die Geschwindigkeiten w_a und w_t besteht nun unter den oben gemachten Voraussetzungen eine einfache Beziehung zu der Verschiebungsgeschwindigkeit c der starr zu denkenden Unstetigkeitsflächen (vgl. S. 234). Beim zylindrischen Strahle entsprechen letztere den von den Flügeln durchstrichenen Bahnen. Da sie außerdem bei einer unendlich-flügeligen Schraube unendlich nahe beieinander liegen, also keine Radialgeschwindigkeiten vorkommen, so stehen die bei ihrer Verschiebung auftretenden Störungsgeschwindigkeiten normal zu diesen Schraubenflächen[1]. Man kann dann w_a und w_t in einfacher Weise durch c ausdrücken.

In Abb. 185 ist die Schraube schematisch dargestellt, v bezeichnet die Fahrgeschwindigkeit, ω die Winkelgeschwindigkeit, R den Schraubenradius, c die Verschiebungsgeschwindigkeit der Unstetigkeitsfläche und c_n ihre Normalkomponente. Ist ferner (Abb. 185a) h die Steigung (Ganghöhe) der Schraubenfläche und ϑ der Steigungswinkel im Abstand r von der Achse, so gilt

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{h}{2\pi r} = \frac{v}{r\omega}.$$

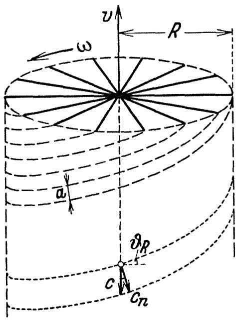


Abb. 185. Schematische Darstellung einer vielflügeligen Schraube nebst der von ihr durchstrichenen Schraubenflächen.

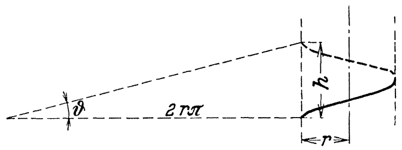


Abb. 185a. Zur Definition des Steigungswinkels ϑ.

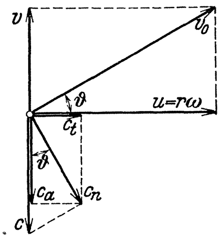


Abb. 185b. Zur Definition der Störungsgeschwindigkeiten im fertig ausgebildeten Schraubenstrahl.

Man erhält also nach Abb. 185b zunächst

$$c_n = c \cos \vartheta$$

und für die axiale bzw. tangentiale Komponente

$$c_a = c_n \cos \vartheta = c \cos^2 \vartheta,$$

$$c_t = c_n \sin \vartheta = c \cos \vartheta \sin \vartheta.$$

Nun ist aber

$$\cos^2 \vartheta = \frac{u^2}{u^2 + v^2}; \qquad \cos \vartheta \sin \vartheta = \frac{u\,v}{u^2 + v^2},$$

also

$$c_a = c\frac{u^2}{u^2 + v^2}; \qquad c_t = c\frac{u\,v}{u^2 + v^2}. \tag{315}$$

In der Schraubenebene sind die Störungsgeschwindigkeiten nach Gl. (313) und (313a) gerade halb so groß wie im fertig ausgebildeten Schraubenstrahl, weshalb mit Rücksicht auf (315) folgt

$$w_a = \frac{c}{2}\frac{u^2}{u^2 + v^2}; \quad w_t = \frac{c}{2}\frac{u\,v}{u^2 + v^2}. \tag{316}$$

---

[1] Prandtl, L.: Zusatz zu der Arbeit von Betz, Fußnote 1 auf S. 233, sowie A. Betz: Tragflügel und hydraulische Maschinen im Handb. der Physik von Geiger und Scheel Bd. 7 S. 265.

Führt man diese Werte in Gl. (314) ein, so erhält man mit $u = r\omega$ für kleine w_a und w_t *

$$\eta_i \approx \frac{v}{v + \frac{c}{2}} \,. \tag{317}$$

Da dieser Wert, der zunächst nur den induzierten Wirkungsgrad für das betrachtete Flügelelement im Falle des geringsten Energieverlustes angibt, unabhängig vom Radius r ist, so gibt er auch den induzierten Widerstand der ganzen Schraube (bei schwacher Belastung) an.

Eine wichtige Beziehung besteht noch zwischen der Verschiebungsgeschwindigkeit c der Unstetigkeitsfläche und dem Belastungsgrad σ der Schraube. Nach dem Impulssatz läßt sich der Schub im Falle des zylindrischen Strahles vom Radius R wie folgt darstellen:

$$S = \varrho\, v \int\limits_{r=0}^{r=R} 2\pi r \cdot dr \cdot c_a$$

oder, mit Rücksicht auf (315), wenn dort $u = r\omega$ gesetzt wird,

$$S = 2\pi \varrho\, v\, c \int\limits_0^R \frac{r^3\, dr}{\frac{v^2}{\omega^2} + r^2} \,.$$

Nach Ausführung der Integration erhält man[1]

$$S = \pi \varrho\, v\, c\, R^2 \left\{1 - \frac{v^2}{R^2 \omega^2} \ln\left(1 + \frac{R^2 \omega^2}{v^2}\right)\right\}. \tag{318}$$

Mit dem sogenannten Fortschrittsgrad

$$\lambda = \frac{v}{R\,\omega}$$

kann Gl. (318) auch wie folgt geschrieben werden:

$$S = \pi \varrho\, v\, c\, R^2 \left\{1 - \lambda^2 \ln\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)\right\} \tag{318a}$$

---

* Wenn man c^2 gegenüber v^2 vernachlässigt.

[1] Um das Integral zu berechnen, setze man

$$r^2 = x; \quad 2\, r\, dr = dx, \quad r^3\, dr = \frac{x \cdot dx}{2}; \quad \frac{v^2}{\omega^2} = a \,.$$

Dann wird

$$\int \frac{r^3\, dr}{\frac{v^2}{\omega^2} + r^2} = \frac{1}{2} \int \frac{x \cdot dx}{a + x} \,.$$

Substituiert man weiter $a + x = y$; $x = y - a$; $dx = dy$, so folgt

$$\int\limits_0^R \frac{r^3\, dr}{\frac{v^2}{\omega^2} + r^2} = \left[\frac{1}{2}\, y - \frac{a}{2} \ln y\right]_0^R = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{\omega^2} + r^2\right) - \frac{v^2}{2\,\omega^2} \ln\left(\frac{v^2}{\omega^2} + r^2\right)\right]_0^R \,.$$

oder, wenn man jetzt nach c auflöst und den Belastungsgrad

$$\sigma = \frac{S}{\frac{\varrho}{2} F v^2}$$

einführt ($F = \pi R^2$),

$$c = \frac{\sigma v}{2\left\{1 - \lambda^2 \ln\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right)\right\}}. \tag{318b}$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen c, λ und σ gefunden.

Einfluß des Profilwiderstandes. Bei den bisherigen Überlegungen war auf die Flüssigkeitsreibung und den durch sie bedingten Profilwiderstand (vgl. S. 222) keine Rücksicht genommen. Gl. (314a) enthält demnach nur die Axialverluste und die Verluste infolge der Strahldrehung bei reibungsfreier Bewegung.

In Abb. 186 bezeichne dW_p den in die Richtung der wirklichen Anströmgeschwindigkeit v_0' fallenden Profilwiderstand, bezogen auf das Flügelelement im Abstand r von der Achse, und dP die von der Flüssigkeit auf das Profil ausgeübte resultierende Kraft. Wäre ein Profilwiderstand nicht vorhanden (reibungsfreie Bewegung), so würde dP normal zu v_0' stehen, so aber weicht dP von dieser Normalen um den Winkel δ ab, und zwar ist

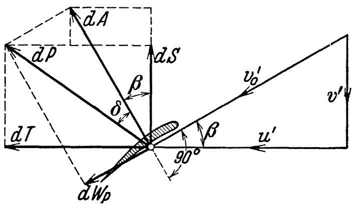


Abb. 186. Zur Definition des Profilwiderstandes.

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{dW_p}{dA} = \varepsilon \tag{319}$$

die (auf ebene Strömung bezogene) Profilgleitzahl des Blattelementes (vgl. S. 198). Zerlegt man wieder dP in seine axiale und tangentiale Komponente, so wird, wenn β den Winkel zwischen v_0' und u' bezeichnet,

$$\left.\begin{aligned} dS &= dA \cos\beta - dW_p \sin\beta, \\ dT &= dA \sin\beta + dW_p \cos\beta. \end{aligned}\right\} \tag{320}$$

Der Gesamtwirkungsgrad des Elements ist also mit $u = rw$ (vgl. S. 235)

$$\eta_r = \frac{dS \cdot v}{dT \cdot u} = \frac{v}{u} \frac{dA \cos\beta - dW_p \sin\beta}{dA \sin\beta + dW_p \cos\beta}.$$

Teilt man hier im Zähler und Nenner durch $dA \cos\beta$ und beachtet die Beziehung (319), so wird

$$\eta_r = \frac{v}{u} \frac{1 - \varepsilon \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta + \varepsilon}$$

oder wegen $\operatorname{tg}\beta = \frac{v'}{u'}$

$$\eta_r = \frac{v}{u} \frac{u'}{v'} \frac{1 - \varepsilon \frac{v'}{u'}}{1 + \varepsilon \frac{u'}{v'}} = \eta_i \frac{1 - \varepsilon \frac{v'}{u'}}{1 + \varepsilon \frac{u'}{v'}}. \tag{321}$$

Man erkennt, daß der Einfluß des Profilwiderstandes in vorstehender Gleichung durch den Bruch

$$\eta_p = \frac{1 - \varepsilon \dfrac{v'}{u'}}{1 + \varepsilon \dfrac{u'}{v'}}$$

zum Ausdruck kommt, während der andere Faktor η_i den **induzierten Wirkungsgrad** (siehe oben) darstellt.

Im Falle des geringsten Energieverlustes hat η_i für die ganze Schraube einen konstanten Wert; der durch den Profilwiderstand bedingte Teilwirkungsgrad η_p — auch **Gütegrad des Elementes** genannt — ist dagegen mit dem Abstand des Elementes von der Achse veränderlich.

Um den **Wirkungsgrad der ganzen Schraube** zu bestimmen, hat man also über den Radius zu integrieren.

Aus

$$v \int\limits_{r=0}^{r=R} \frac{\dfrac{dS}{dr}\,dr}{\eta_i\,\eta_p} = \frac{vS}{\eta}$$

folgt wegen $\eta_i = \text{const.}$

$$\eta = \eta_i \frac{S}{\displaystyle\int\limits_0^R \frac{\dfrac{dS}{dr}\,dr}{\eta_p}}\,.$$

Bei bekannter Schubverteilung über den Radius läßt sich somit η berechnen. Als Näherungswert kann mit $\lambda' = \dfrac{\lambda}{\eta_i} = \dfrac{v}{R\,\omega\,\eta_i}$ und unter Voraussetzung einer für den ganzen Radius konstanten Gleitzahl ε gesetzt werden[1]

$$\eta = \eta_i \frac{1 - 2\,\varepsilon\,\lambda'}{1 + \dfrac{2}{3}\,\dfrac{\varepsilon}{\lambda'}} \tag{322}$$

Günstigste Schubverteilung und Einfluß der endlichen Flügelzahl. Bei der einfachen Strahltheorie, welche auf die Strahldrehung und die mit ihr verbundenen tangentialen Geschwindigkeitskomponenten keine Rücksicht nimmt, wurde der Schub zur Erlangung des besten Wirkungsgrades als gleichmäßig verteilt über die ganze Schraubenfläche angenommen. Der auftretende Energieverlust war also lediglich eine Folge der hinter der Schraube vorhandenen axialen Geschwindigkeiten. In Wirklichkeit liefern aber auch die (tangentialen) Drehgeschwindigkeiten einen Beitrag zum Energieverlust, wie ja aus Gl. (314) für den induzierten Wirkungsgrad hervorgeht. Da nun einerseits die axialen und tangentialen Geschwindigkeiten voneinander abhängen, die axialen außerdem für die Schuberzeugung verantwortlich sind, so entsteht die

[1] Bienen u. v. Kármán: Z. VDI 1924 S. 1240.

Frage, wie bei gegebenem Belastungsgrund der Schub über die Schraubenfläche verteilt sein muß, damit die gesamte Verlustenergie aus tangentialen und axialen Geschwindigkeiten zu einem Minimum wird[1]. Diese Frage steht offenbar in engem Zusammenhang mit dem auf S. 234 erwähnten Minimalproblem für die Schraube mit geringstem Energieverlust, welcher dann vorhanden ist, wenn das System von Schraubenflächen, das bei der Bewegung der Schraube erzeugt wird, sich wie ein starres Gebilde mit der Geschwindigkeit c nach rückwärts verschiebt.

In diesem Falle kann die tangentiale Geschwindigkeit c_t weit hinter der Schraube nach Gl. (315) mit $u = r\omega$ wie folgt dargestellt werden

$$c_t = c\,\frac{r\,\omega\,v}{r^2\,\omega^2 + v^2}\,, \tag{323}$$

wobei eine unendlich-flügelige Schraube von kleinem Belastungsgrade vorausgesetzt wurde.

Mit Hilfe dieser Geschwindigkeit läßt sich nun auch die Größe der Zirkulation Γ für einen Schraubenflügel im Abstand r von der Achse angeben. Zu diesem Zwecke sei daran erinnert, daß bei veränderlicher Auftriebs- bzw. Zirkulationsverteilung über die Länge eines Schraubenflügels nicht nur an der Spitze und Nabe Wirbelfadenelemente abgehen, sondern auch an jeder dazwischenliegenden Stelle (vgl. Abb. 177), und zwar liegen diese Wirbelfäden sämtlich auf Zylinderflächen. Die Zirkulation längs eines Kreises vom Radius r im fertig ausgebildeten Schraubenstrahl ist also bei n Flügeln das n-fache der Zirkulation um einen Flügel an der Stelle r, weshalb für die Tangentialgeschwindigkeit c_t im Abstand r von der Achse weit hinter der Schraube die Beziehung gilt

$$n\,\Gamma = 2\,\pi\,r\,c_t\,. \tag{324}$$

Unter Beachtung von (323) folgt daraus[2]

$$\Gamma = \frac{2\,\pi\,c}{n}\,\frac{r^2\,\omega\,v}{r^2\,\omega^2 + v^2}\,. \tag{325}$$

Man erkennt, daß Γ für $r = 0$ (Nabe) verschwindet und an der Stelle $r = R$ (Flügelspitze) seinen Größtwert erreicht.

Wie bereits bemerkt, gilt diese Überlegung nur für schwach belastete Schrauben. Man kann sie jedoch nach Betz grundsätzlich auch auf stark belastete anwenden, wenn man in Gl. (323) an Stelle von v und $r\omega$ die Werte $v' = v + w_a$ bzw. $u' = r\omega - w_t$ setzt (Abb. 184)[3].

Die vorstehende Betrachtung setzt weiter eine gleichmäßige Verteilung der Geschwindigkeiten über ein Ringelement der Schraubenkreis-

---

[1] Betz, A.: Eine Erweiterung der Schraubenstrahl-Theorie. Z. Flugtechn. Motorluftsch. 1920 S. 105.

[2] Prandtl, L.: in einem Zusatz zu der Arbeit von A. Betz, Fußnote 1, S. 233.

[3] Vgl. hierzu auch Th. Bienen und Th. v. Kármán: Zur Theorie der Luftschrauben. Z. VDI 1924 S. 1237. E. Möller: Im offenen Flüssigkeitsstrom arbeitende Flügelräder. Z. VDI 1924 S. 675. H. B. Helmbold: Zur Aerodynamik der Treibschraube. Z. Flugtechn. Motorluftsch. 1924 S. 150, 170. Th. Troller: Zur Wirbeltheorie der Luftschrauben. Z. angew. Math. Mech. 1928 S. 426.

fläche voraus, was nur bei unendlich vielen Flügeln möglich ist. Bei einer Schraube von endlicher Flügelzahl müssen daher entsprechende Abweichungen in der Schubverteilung auftreten, die sich naturgemäß besonders an den Flügelspitzen bemerkbar machen. In diesem Fall tritt nämlich ein Umströmen der Ränder der von der Schraube zurückgelassenen starren Schraubenflächen ein, da letztere jetzt nicht mehr wie bei der unendlichflügeligen Schraube unendlich nahe beieinander liegen, sondern einen endlichen Abstand besitzen. Eine Näherungslösung für diesen Randeinfluß hat Prandtl[1] gegeben, indem er die Ränder der Schraubenfläche durch ein System äquidistanter Ebenen ersetzte, die zweidimensionale Potentialströmung um diese Ebenenränder untersuchte (Abb. 187) und den Potentialsprung an den Unstetigkeitsflächen proportional dem Zirkulationsabfall an den Flügelenden setzte. Auf diese Weise ergibt sich für die Zirkulationsverteilung in Abhängigkeit von r die Beziehung

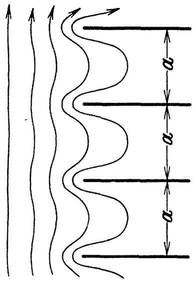


Abb. 187. Zweidimensionale Strömung um ein System äquidistanter Ebenen als Ersatz der Strömung um die Ränder der Schraubenflächen.

$$\Gamma = \frac{4c}{n} \frac{\left(v + \frac{c}{2}\right) r^2 \omega}{\left(v + \frac{c}{2}\right)^2 + r^2 \omega^2} \arccos e^{-\frac{\pi (R-r)}{a}}, \tag{326}$$

worin

$$a = \frac{2\pi \left(v + \frac{c}{2}\right) R}{n \sqrt{\left(v + \frac{c}{2}\right)^2 + R^2 \omega^2}}$$

der senkrechte Abstand der Schraubenflächen ist (Abb. 185) und c wieder deren Verschiebungsgeschwindigkeit bezeichnet. Geht $a \to 0$, so geht Gl. (326) über in (325), wenn man dort für mäßig belastete Schrauben v durch $v + \frac{c}{2}$ ersetzt als Näherungswert für $v + w_a = v + \frac{c_a}{2}$ (s. oben). Den durch Gl. (326) gegebenen Verlauf von Γ von der Achse zur Spitze zeigt generell Abb. 188; die gestrichelte Linie entspricht der Zirkulationsverteilung im Falle einer unendlich-flügeligen Schraube, bei welcher die Zirkulation an der Flügelspitze plötzlich auf Null abfällt.

Abb. 188. Zirkulationsverteilung über den Flügel von der Nabe bis zur Spitze.

Eine Schraube von endlicher Flügelzahl und dem Radius R ist annähernd dynamisch gleichwertig einer unendlich-flügeligen Schraube von kleinerem Radius R', wenn man gemäß Abb. 188 die Zirkulationsverteilung an der Spitze durch ein Rechteck ausgleicht, und zwar wird nach der Prandtlschen Näherungstheorie[2]

$$R' \approx R - 0{,}22\, a\,.$$

[1] Fußnote 2 S. 240.

[2] Eine strenge Lösung des Problems ist für schwach belastete Schrauben mit geringstem Energieverlust von S. Goldstein gegeben: On the vortex theory of

Nachdem die Zirkulationsverteilung gegeben ist, können Schub und Tangentialkraft an jeder Stelle r der Schraube berechnet werden. So erhält man im Falle reibungsfreier Bewegung nach dem Kutta-Joukowskyschen Satz unter Beachtung von Abb. 184 für ein Flügelblattelement zwischen r und $r + dr$ mit der Zirkulation Γ

$$dP = \varrho\, v_0'\, \Gamma dr$$

und durch Zerlegung nach dS (axial) und dT (tangential)

$$\left.\begin{aligned} dS &= dP \cos\beta = \varrho\,\Gamma (r\omega - w_t)\, dr, \\ dT &= dP \sin\beta = \varrho\,\Gamma (v + w_a)\, dr, \end{aligned}\right\} \qquad (327)$$

wo die Zirkulation Γ aus Gl. (326) einzusetzen ist. Bei n Flügeln beträgt der auf einen Kreisring der Schraubenfläche zwischen r und $r + dr$ entfallende Schub $n \cdot dS$ und die entsprechende Tangentialkraft $n \cdot dT$.

Die Prandtlsche Näherungstheorie liefert für mäßig belastete Schrauben (um solche handelt es sich im allgemeinen bei den Flugzeugpropellern) um so genauere Werte, je größer die Flügelzahl ist.

Bei stark belasteten Schrauben treten insofern gewisse Schwierigkeiten auf, als die Störungsgeschwindigkeiten nicht mehr klein gegenüber der Fahrgeschwindigkeit sind. Der Strahl erfährt infolgedessen nach dem Kontinuitätsgesetz eine Einschnürung (vgl. S. 229), so daß sein Querschnitt wesentlich kleiner ist als die Schraubenkreisfläche F und demnach die Radien der sich am Propeller und im Schraubenstrahl entsprechenden Punkte verschieden groß ausfallen. Dazu kommt, daß infolge der stärkeren Strahldrehung im Strahlinnern merkliche Unterdrücke auftreten, was von Einfluß auf die sekundlich durch die Schraubenkreisfläche tretende Flüssigkeitsmenge sein muß. Diese hier angedeuteten Schwierigkeiten sind bislang noch nicht vollständig überwunden, wenn auch verschiedene Ansätze nach dieser Richtung bereits vorliegen, worauf hier aber nicht weiter eingegangen werden kann[1].

Auf eine für den Propellerentwurf wichtige Erscheinung, die bei großer Geschwindigkeit eintritt, muß hier noch hingewiesen werden: das ist die Kavitation bei Wasserschrauben und die starke Dichteänderung der Luft bei Erreichung der Schallgeschwindigkeit. Aus der Bernoullischen Gleichung $\frac{\varrho}{2} v^2 + p = \text{const.}$ (vgl. S. 202) folgt, daß mit wachsender Geschwindigkeit der Druck sinkt. Bei sehr großen Geschwindigkeiten, wie sie besonders an den Propellerspitzen auftreten,

---

screw propellers. Proc. Roy. Soc. A. Bd. 123 (1929) S. 440. Vgl. auch H. B. Helmbold: Z. Flugtechn. Motorluftsch. 1931 S. 429, wo die wichtigsten Ergebnisse der Goldsteinschen Lösung dargestellt sind.

[1] Betz, A. und H. B. Helmbold: Zur Theorie stark belasteter Schraubenpropeller. Ing.-Arch. Bd. 3 (1932) S. 1. Vgl. auch H. B. Helmbold: Die Betz-Prandtlsche Wirbeltheorie der Treibschraube und ihre Ausgestaltung zum technischen Berechnungsverfahren. Werft Reed. Hafen 1926 S. 565, 588; ferner Helmbold und Lerbs: Modellversuche zur Nachprüfung der Treibschrauben-Wirbeltheorie. Werft Reed. Hafen 1927 S. 347, und Horn: Versuche mit Tragflügel-Schiffsschrauben. Jb. Schiffbautechn. Ges. 1927 S. 342.

kann also der Druck im Wasser bis auf den Dampfdruck abfallen (vgl. S. 96). Das Wasser scheidet dann unter Hohlraumbildung (Kavitation) Dampf- und Luftblasen aus, was zu einem Abreißen der Strömung an der betreffenden Stelle und damit zu einer Verschlechterung des Wirkungsgrades führt. Außerdem sind diese Erscheinungen mit starkem Wasserschlag verbunden und haben mitunter erhebliche Materialanfressungen — sogenannte Korrosion — zur Folge[1].

Wie bereits im 1. Bande (S. 3 und 122) bemerkt wurde, können die für raumbeständige Flüssigkeiten geltenden Bewegungsgesetze auch für Gase (Luft) angewandt werden, wenn die Dichteänderungen, welche bei der strömenden Bewegung relativ gegen einen festen Körper auftreten, nur gering sind. Praktisch ist dieses der Fall, solange es sich um Geschwindigkeiten handelt, die erheblich kleiner sind als die Schallgeschwindigkeit. Für Luft von gewöhnlichem Druck und normaler Temperatur ergibt sich z. B. bei einer Geschwindigkeit von 50 [m/sec] nur eine Dichteänderung von 1 bis 2%. Merkliche Abweichungen treten jedoch auf, wenn die Geschwindigkeit etwa die Hälfte der Schallgeschwindigkeit erreicht. Dabei ist besonders die Saugseite der Flügel gefährdet, weil dort infolge der Zirkulationswirkung eine Steigerung der Geschwindigkeit gegenüber der ungestörten Anströmgeschwindigkeit auftritt (vgl. S. 203). Zur tunlichen Vermeidung dieser Erscheinung, welche wie die Kavitation bei Wasserschrauben eine Verschlechterung der Gleitzahl und damit des Wirkungsgrades zur Folge hat, wählt man für schnell umlaufende Flügel möglichst dünne Profile und kleine Anstellwinkel, um die Geschwindigkeit auf der Saugseite in niedrigen Grenzen zu halten.

10. Bemerkungen zur Dimensionierung der Propeller.

Als Konstruktionsunterlagen werden zum Entwurf eines Propellers im allgemeinen gegeben sein: Der erforderliche Schub S, die Fahrgeschwindigkeit v und die Drehzahl ω. Der erste Schritt besteht dann in der Bestimmung des Schraubendurchmessers, für den häufig gewisse einschränkende Bedingungen vorliegen, so z. B. Platzmangel bei Flugzeugen mit Rücksicht auf Start und Landung oder Anpassung des Durchmessers an die gegebene Drehzahl, damit die Umfangsgeschwindigkeit $R\omega$ nicht zu groß wird, was zu den am Schluß von Ziffer 9 erörterten Erscheinungen Anlaß geben könnte.

Sieht man zunächst davon ab, so wäre zur Erlangung eines großen induzierten Wirkungsgrades ein möglichst großer Propellerdurchmesser zu wählen. Da nämlich nach Gl. (314a) $\eta_i = \frac{u'}{u}\,\frac{v}{v'}$ ist, so zeigt sich, daß η_i um so näher an „Eins" rückt, je weniger u' und v' von u bzw. v abweichen, d. h. je kleiner die Zusatzgeschwindigkeiten sind. Diese

[1] Föttinger, H.: Untersuchungen über Kavitation und Korrosion. Hydraulische Probleme S. 14, VDI-Verlag 1926; ferner J. Ackeret: Kavitation, im Handbuch der Experimentalphysik von Wien-Harms, IV. Hydro- und Aerodynamik Teil 1 S. 463.

werden aber um so kleiner, je größer bei vorgeschriebenem Schub die sekundlich durch die Schraube tretende Wassermenge, d. h. je größer der Schraubendurchmesser ist (vgl. S. 230). Dem steht nun aber der Profilwirkungsgrad η_p entgegen. Wie man aus Gl. (322) erkennt, hängt dieser bei gegebener Gleitzahl ε wesentlich vom Fortschrittsgrad $\lambda = \frac{v}{R\,\omega}$ ab. Wählt man nun R sehr groß, so wird λ bei vorgeschriebener Fahrgeschwindigkeit v sehr klein, was nach (322) einen kleinen Profilwirkungsgrad zur Folge hat. Abgesehen hiervon verbietet sich aber nach den obigen Darlegungen die Wahl eines zu großen R mit Rücksicht auf die Vorgänge an den Flügelspitzen (Kavitation, Schallgeschwindigkeit). Im allgemeinen wird man R zunächst auf Grund von Erfahrungswerten schätzen und nach Festlegung der übrigen Konstruktionsdaten zu prüfen haben, ob evtl. eine Verlängerung oder Verkürzung den Wirkungsgrad zu verbessern vermag[1].

Nachdem über die Größe von R verfügt ist, bleiben noch folgende Fragen offen: Verteilung des Schubs über die Schraubenkreisfläche, Anzahl der Propellerflügel, Profilgestalt und Anstellwinkel. Bezüglich der Schubverteilung und Flügelzahl sind die Betz-Prandtlschen Überlegungen für die Schraube mit geringstem Energieverlust maßgebend (vgl. S. 240 u. 241). Als günstigste Schubverteilung längs eines Schraubenflügels erhält man bei mäßig belasteten n-flügeligen Schrauben nach Gl. (326) und (327) — wenn man in (327) w_t als klein gegenüber $r\omega$ vernachlässigt —

$$d S = \frac{4\, c\, \varrho\, r}{n}\; \frac{\left(v + \frac{c}{2}\right) r^2 \omega^2}{\left(v + \frac{c}{2}\right)^2 + r^2 \omega^2} \arccos e^{\frac{-\pi (R - r)}{a}}\, d r\,, \tag{328}$$

wo c gemäß Gl. (318b) durch σ, v und λ ausgedrückt werden kann.

Mit Hilfe dieser Beziehung ist es jetzt möglich, die Flügeltiefe t eines Blattelements zu berechnen (vgl. Abb. 154 S. 197). Nach Gl. (320) gilt für den Schub

$$d S = d A \cos\beta - d W_p \sin\beta$$

oder, wegen $\frac{d W_p}{d A} = \varepsilon$,

$$d S = d A (\cos\beta - \varepsilon \sin\beta)\,.$$

Drückt man hier noch dA durch den auf ebene Strömung (unendlich langer Tragflügel) bezogenen Auftriebsbeiwert c_a aus (S. 198)[2], so wird

$$d S = \frac{\varrho}{2}\, v_0'^2\, c_a\, t (\cos\beta - \varepsilon \sin\beta)\, d r$$

oder, wegen $v_0'^2 = v'^2 + u'^2$ (Abb. 184),

$$d S = \frac{\varrho}{2} (v'^2 + u'^2)\, c_a\, t\, (\cos\beta - \varepsilon \sin\beta)\, d r\,. \tag{329}$$

[1] Ein graphisches Verfahren zur Ermittlung des günstigsten Durchmessers haben Bienen und v. Kármán angegeben. Z. VDI 1924 S. 1240.

[2] Man verwechsle den Auftriebsbeiwert c_a nicht mit der auf S. 234 eingeführten Axialkomponente c_a der Störungsgeschwindigkeit.

Durch Verbindung der Gleichungen (328) und (329) mit Gl. (316) und (318 b) läßt sich die Profiltiefe t bestimmen, sobald über den Auftriebsbeiwert c_a verfügt ist. Letzterer kann einem Polardiagramm (S. 199) für ebene Strömung entnommen werden, wobei c_a so zu wählen ist, daß die Gleitzahl $\varepsilon = \frac{c_w}{c_a}$ möglichst klein ausfällt ($\varepsilon = 0{,}05$ bis $0{,}02$). Hat man sich für ein bestimmtes c_a entschieden, so sind auch die Anstellwinkel α' bzw. $\beta + \alpha'$ (Abb. 184), sowie die „Steigung" $H_r = 2\pi r \operatorname{tg}(\alpha' + \beta)$ festgelegt (Abb. 189).

Nachdem diese Überlegung für verschiedene Flügelschnitte durchgeführt ist, kann der Gesamtwirkungsgrad berechnet und damit geprüft werden, ob die Schraube den gestellten Anforderungen für die zugrunde gelegten Betriebsbedingungen genügt oder ob noch Verbesserungen vorzunehmen sind. Häufig wird es nötig sein, derartige Rechnungen für verschiedene Betriebszustände durchzuführen (z. B. Anfahren und

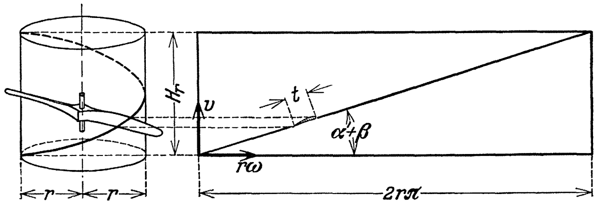


Abb. 189. Zur Definition der Steigung[1].

Höchstgeschwindigkeit). Selbstverständlich spielen auch Festigkeitsfragen bei der Profilwahl eine Rolle, so daß mitunter eine Herabminderung des Wirkungsgrades durch die notwendige Wahl zu dicker Profile nicht zu vermeiden ist.

C. Kreiselräder[2].

11. Grundsätzliches über die Strömung in Turbinen und Kreiselpumpen.

Gegenstand dieses Abschnittes ist die Strömung im Arbeitsraum der vollbeaufschlagten Kreiselräder, wie sie u. a. bei Überdruckturbinen (S. 196) und Kreiselpumpen als „Laufräder" Verwendung finden. Dabei unterscheiden sich die Laufräder der Turbinen von denjenigen der Pumpen grundsätzlich nur in der Richtung des Energieflusses. Denn während die Turbinen dem ihnen zugeführten Oberwasser Energie entziehen und zur Kraftgewinnung nutzbar machen (Kraft-

[1] Handb. der Experimentalphysik von Wien-Harms, IV, 3. Teil: Luftschrauben von O. Flachsbart S. 345.

[2] An Lehrbüchern, die sich mit diesem Gegenstand beschäftigen, seien hier besonders genannt: Zeuner: Vorlesungen über die Theorie der Turbinen. Leipzig 1899. Pfarr: Die Turbinen. Berlin 1907. Thomann: Die Wasserturbinen. Stuttgart 1921. Camerer: Vorlesungen über Wasserkraftmaschinen. Leipzig 1924. Pfleiderer: Die Kreiselpumpen. Berlin 1926. Spannhake: Kreiselräder als Pumpen und Turbinen Bd. 1. Berlin 1931.

maschinen), übertragen die durch eine Kraftquelle angetriebenen Kreiselpumpen Energie auf die Flüssigkeit und dienen damit zu deren Fortbewegung (Arbeitsmaschinen). Entsprechend der jeweiligen Richtung des Energieflusses ist die Zahl und Form der Schaufeln (Flügel) so zu wählen, daß die gewünschte Wirkung mit dem größten Nutzeffekt erreicht werden kann, was andererseits wieder nur möglich ist, wenn man die Geschwindigkeits- und Druckverhältnisse im Arbeitsraum des Kreiselrades einigermaßen sicher übersehen kann.

Wie bereits in der Einleitung bemerkt wurde, ist das Laufrad der vollbeaufschlagten Turbine (Vollturbine) von einer Leitvorrichtung (Leitrad) umgeben, welcher die geordnete Zuführung der Flüssigkeit zum Laufrad obliegt, und die somit auf die Ausbildung der Strömung im Arbeitsraum des Laufrades von entscheidender Bedeutung ist (vgl. Abb. 149 und 150). Der zwischen Leit- und Laufrad vorhandene Raum wird als Spaltraum bezeichnet. Nach dem Durchschreiten des Laufrades strömt die Flüssigkeit durch ein nach Möglichkeit senkrecht stehendes — bei größeren Turbinen gekrümmtes — konisch erweitertes „Saugrohr" nach dem Unterwassergraben ab. Bei den Kreiselpumpen ist die Richtung der Gesamtströmung gerade umgekehrt. Die Kreiselpumpe kann deshalb gewissermaßen als Umkehrung der Überdruckturbine angesehen und theoretisch in analoger Weise behandelt werden. Obgleich zwischen beiden Maschinen mancherlei grundsätzliche Unterschiede bestehen, soll in der Folge nur noch von den Turbinen die Rede sein, da es hier nur auf allgemein strömungstechnische Gesichtspunkte und nicht auf Spezialfragen ankommt.

Laufräder sind kreisförmige Flügelreihen, deren „Flügel" oder „Schaufeln" gleichmäßig verteilt auf einem Kreise angeordnet sind. Bei der Strömung durch ein derartiges Laufrad treten an jedem Flügel ähnliche Verhältnisse auf wie beim einzelnen Tragflügel (Zirkulation, Auftrieb, Widerstand). Grundsätzlich hat man dabei zu unterscheiden zwischen den eigentlichen Kreiselrädern, bei denen die Schaufelenden durch einen „Kranz" fest miteinander verbunden sind (Francisturbine, Abb. 152), und den Flügelrädern, bei denen der Laufradkranz zur Verminderung der Reibung weggelassen und die Schaufelzahl nach Möglichkeit verringert wird (Kaplanturbine, Abb. 153). Die zuletzt genannte Gruppe ist wegen ihrer freien Enden und geringen Schaufelzahl nahe verwandt den Fahrzeug-Propellern (der Unterschied besteht im Prinzip nur darin, daß die Flügelräder der Turbine in einem Gehäuse arbeiten, die Propeller aber im freien Luft- oder Wasserstrom), weshalb bei ihnen die Voraussetzungen zur Anwendung der Tragflügeltheorie am ehesten zutreffen, zumal die bei Kreiselrädern mit Laufradkranz und größerer Schaufelzahl heute noch üblichen vereinfachten Berechnungsverfahren bei Flügelrädern nicht mehr anwendbar sind.

Bevor an die Besprechung der Berechnungsgrundlagen für Kreiselräder im einzelnen herangegangen wird, sollen noch einige allgemeine Gesichtspunkte über den Strömungsvorgang im Arbeitsraum einer Turbine erörtert werden.

Zum Betrieb der Turbine stehe eine bestimmte sekundliche Wassermenge zur Verfügung, die dem Leitrad gleichmäßig von allen Seiten her (rotationssymmetrisch) zugeführt werde. Durch die Leitschaufeln (Abb. 191 S. 248) erfährt das Wasser eine der Schaufelform entsprechende Umlenkung und tritt, nachdem es das Leitrad durchströmt hat, mit bestimmter Richtung in den inneren Turbinenhohlraum ein, aus dem man sich das Laufrad zunächst entfernt denke.

Entsprechend den verschiedenen Geschwindigkeiten auf der Saug- und Druckseite einer Leitschaufel herrscht auf jedem Parallelkreis um die Turbinenachse eine periodisch wechselnde Geschwindigkeitsverteilung, wobei die Periode durch die Schaufelteilung gegeben ist. In einiger Entfernung vom Leitrad haben sich jedoch — besonders bei größerer Schaufelzahl — die Unterschiede so weit ausgeglichen, daß man praktisch davon absehen kann. Nachdem die Strömung im inneren Rotationshohlraum der Turbine voll ausgebildet ist, herrscht somit in jedem Punkte eines Parallelkreises eine (nahezu) gleich große Geschwindigkeit, woraus nach dem Energiesatz für reibungsfreie Flüssigkeiten folgt, daß längs eines Parallelkreises (d. h. in tangentialer Richtung) ein Druckgefälle nicht auftreten kann. An einem Flüssigkeitsteilchen von der Masse m wirken somit — wenn man von der Flüssigkeitsreibung zunächst absieht — nur Kräfte in radialer und axialer, nicht aber in tangentialer Richtung. Ihr Moment in bezug auf die Turbinenachse ist somit an jeder Stelle des inneren Raumes gleich Null. Für einen beliebigen Punkt im Abstand r von der Achse kann man sich den Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{c}$ zerlegt denken in eine axiale Komponente c_a, eine radiale Komponente c_r und in eine tangentiale (Umfangs-) Komponente c_u (Abb. 190).

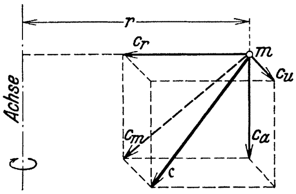


Abb. 190. Der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{c}$ wird in seine axiale, radiale und Umfangskomponente zerlegt.

Bildet man jetzt das statische Moment der Bewegungsgröße — den sogenannten Drall — für das Massenteilchen m in bezug auf die Turbinenachse, so erhält man dafür $m c_u r$, da c_a und c_r keinen Beitrag liefern können. Nach dem Flächensatz ist bekanntlich das Moment $\mathfrak{M}$ der am Massenteilchen m wirkenden Kräfte in bezug auf eine beliebige Achse gleich der zeitlichen Änderung des Dralls, bezogen auf die gleiche Achse. Wählt man nun als Bezugsachse die Turbinenachse, so wird nach den obigen Erläuterungen das Moment $\mathfrak{M}$ zu Null, weshalb auch $\frac{d}{dt}(m c_u r) = 0$ sein muß. Daraus folgt aber $m c_u r = \text{const.}$ oder auch

$$c_u r = \text{const.}, \tag{330}$$

d. h. c_u ist umgekehrt proportional dem Abstand r von der Achse. Da eine solche Überlegung für jeden Massenpunkt von der Masse $m = 1$ gilt, und da für die Bewegung eines jeden Massenpunktes aus Symmetriegründen dieselben Anfangsbedingungen bestehen, so erkennt man, daß das Feld der tangentialen Geschwindigkeitskomponenten identisch ist mit demjenigen eines geraden in die Turbinenachse fallenden Wirbelfadens (Bd. I S. 156 und 186). Die Konstante der Gl. (330) ist bekannt, sobald die tangentiale Komponente c_u der Eintrittsgeschwindigkeit in den Turbinenhohlraum gegeben ist. (Damit c_u für einen Punkt der Achse wegen $r = 0$ nicht unendlich groß wird, denke man sich den Raum unmittelbar um die Achse zunächst durch einen koaxialen Kreiszylinder von der Strömung ausgeschlossen.) Die Gesamtbewegung verläuft — wie man aus Abb. 190 leicht erkennt — in spiralartigen Kurven.

Bisher wurde von dem Vorhandensein des Laufrades vollkommen abgesehen und nur die durch den Leitapparat verursachte Strömung betrachtet. In diese (idealisierte) Strömung denke man sich nun das Laufrad wieder eingefügt. Dadurch, daß letzteres den sich bewegenden Flüssigkeitselementen einen Widerstand entgegensetzt (es soll ja die Turbinenwelle in Rotation versetzen), wird der Flüssigkeit Energie entzogen, so daß deren Energiegehalt nach dem Durchtritt durch das Laufrad kleiner ist als beim Eintritt. Da im übrigen nach dem Durchtritt durch das Laufrad im inneren Hohlraum ganz ähnliche Verhältnisse vorliegen werden wie vor dem Eintritt, so gilt auch hier mit den obigen Einschränkungen (Periodizität, Reibungsfreiheit) das Gesetz (330), nur mit dem Unterschied, daß jetzt die Konstante einen anderen Wert hat als in dem Gebiet vor dem Laufrad. Wie sich später zeigen wird (S. 250), ist die Differenz des auf die Masseneinheit bezogenen Dralls $c_u r$ vor und hinter dem Laufrad (vor und hinter im Sinne der Strömung) wesentlich für die Größe der Turbinenleistung.

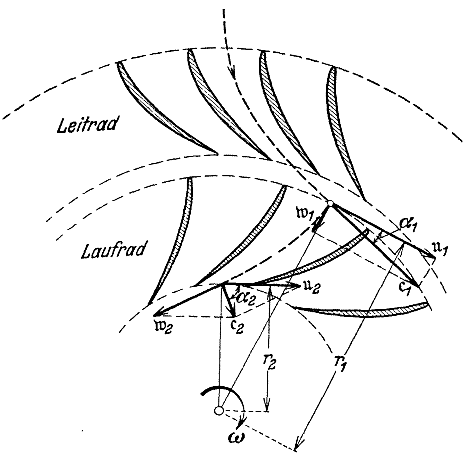


Abb. 191. Absolute, relative und Führungsgeschwindigkeit der Laufradströmung.

Für das Laufrad hat man zu unterscheiden zwischen der **absoluten** Geschwindigkeit $\mathfrak{c}$ und der **relativen** Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$. Beide sind mit der **Umfangs- oder Führungsgeschwindigkeit** $\mathfrak{u}$ — d. h. mit der Geschwindigkeit, die der betreffende Raumpunkt als Punkt des Laufrades haben würde — durch die Vektorgleichung

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{w} + \mathfrak{u}$$

verknüpft, so daß man bei gegebener Winkelgeschwindigkeit $\omega \left(\omega = \frac{u}{r}\right)$ die absolute aus der relativen Geschwindigkeit bestimmen kann und umgekehrt. In Abb. 191 sind die entsprechenden Geschwindigkeiten für je einen Punkt des äußeren und inneren Laufradrandes dargestellt.

Auf S. 247 wurde bereits darauf hingewiesen, daß auf einem Parallelkreis um die Turbinenachse entsprechend den verschiedenen Geschwindigkeiten auf der Saug- und Druckseite einer Schaufel (und zwar sowohl der Leitschaufeln als auch der Laufradschaufeln) eine periodisch wechselnde Geschwindigkeits- und Druckverteilung vorhanden ist. Da nun das Laufrad seine relative Stellung zum Leitrad ständig ändert, so ist — wie man leicht einsieht — die Strömung im Laufrad und demnach auch die Bewegung des letzteren bei konstanten äußeren Bedingungen gewissen periodischen Schwankungen unterworfen, die von der jeweiligen Stellung Leitrad—Laufrad abhängig sind. Bei den normalen Ausführungsarten und Umdrehungszahlen — besonders bei hinreichend großer Zahl von Leitschaufeln — ist der Einfluß dieser Schwankungen im allgemeinen so gering, daß bei praktischen Rechnungen gewöhnlich davon abgesehen wird. Immerhin ist es wichtig, daß man sich in besonders gelagerten Fällen dieser Tatsache erinnert[1].

In den obigen Überlegungen wurden die Flüssigkeitsreibung und die durch sie bedingten Verluste zunächst ganz außer acht gelassen. Wie ihr Einfluß berücksichtigt wird, soll später noch gezeigt werden. Außerdem sei darauf hingewiesen, daß bei den praktisch vorliegenden Abmessungen und Geschwindigkeiten die Kreiselradströmung immer turbulent ist und daß die früher für turbulente Strömung gefundenen Gesetzmäßigkeiten auch hier sinngemäß in Erscheinung treten.

12. Eindimensionale Betrachtung.

Aus den oben gemachten Andeutungen über den Verlauf der Strömung vom Eintritt in das Leitrad bis zum Austritt aus dem Saugrohr (Turbine) bzw. umgekehrt (Pumpe) dürfte schon hervorgehen, daß man es hier mit einem ziemlich verwickelten Vorgang zu tun hat. Eine strenge theoretische Behandlung des Gesamtproblems ist zur Zeit noch nicht gelungen, wenn auch Ansätze verschiedener Art dafür vorhanden sind.

Um für die ausführende Praxis geeignete Konstruktionsunterlagen zu schaffen, sucht man die theoretischen Schwierigkeiten dadurch zu umgehen, daß man den Vorgang zunächst in möglichster Vereinfachung darstellt, indem man nur die für das Ganze charakteristische kontinuierliche Hauptbewegung zwischen Leitradeintritt und Saugrohraustritt betrachtet und diese als stationär voraussetzt. Man kann sich dann den gesamten Strömungsbereich in einzelne Stromröhren zerlegt denken und auf diese die Methoden der „Stromfadentheorie“ unter Berücksichtigung der entsprechenden „Verlusthöhen“ anwenden (vgl. hierzu S. 78 sowie Bd. I S. 44). Es ist einleuchtend, daß dieses Verfahren die wirklichen Verhältnisse um so genauer wiedergibt, je kleiner die zu wählenden Stromfadenquerschnitte im Verhältnis zu deren Länge sind, da dann die Voraussetzungen der Theorie (mittlere Geschwindigkeit, mittlerer Druck) am ehesten erfüllt sind. Das ist z. B. der Fall, wenn die Schaufelzahl im Leit- und Laufrad möglichst groß ist und der Raum zwischen je zwei Schaufeln mit hinreichender Genauigkeit als „Kanal“ angesehen werden kann. Bei kleiner Schaufelzahl des Laufrades (Flügelrad, s. oben) und demnach großen „Kanalquerschnitten“ sind diese

[1] v. Mises: Theorie der Wasserräder S. 81. Leipzig 1908.

Voraussetzungen nicht mehr erfüllt, so daß dann eine strengere Betrachtungsweise die Stromfadentheorie zu ersetzen hat (vgl. S. 259). Von diesen besonders gelagerten Fällen abgesehen, liefert die Stromfadentheorie erfahrungsgemäß ganz brauchbare Ergebnisse, die allerdings einer entsprechenden Korrektur durch Heranziehung vergleichender Untersuchungen an ausgeführten Maschinen nicht entbehren können.

13. Hauptgleichung der Kreiselräder.

Eine wichtige Beziehung zwischen dem Drehmoment an der Turbinenwelle und der Differenz der Drallwerte vor und hinter dem Laufrad findet man durch Anwendung des Impulsmomentensatzes (Flächensatzes) auf einen von zwei nebeneinander liegenden Laufradschaufeln eingeschlossenen Stromfaden. Diese Beziehung wurde bereits im 1. Bande (S. 64) als Beispiel für den Impulssatz abgeleitet und lautet mit den Bezeichnungen der Abb. 191

$$M_d = \varrho\, Q\,(c_1\, r_1 \cos\alpha_1 - c_2\, r_2 \cos\alpha_2)\,, \qquad (331)$$

wobei ϱ die Dichte und Q die sekundlich durch das Laufrad strömende Wassermenge bezeichnen. Da aber $c_1 \cos\alpha_1 = c_{u1}$ die tangentiale Komponente der Absolutgeschwindigkeit beim Eintritt in das Laufrad darstellt und $c_2 \cos\alpha_2 = c_{u2}$ die entsprechende Komponente beim Austritt, so kann (331) auch in der Form geschrieben werden:

$$M_d = \varrho\, Q\,(c_{u1}\, r_1 - c_{u2}\, r_2)\,. \qquad (331\,\text{a})$$

Diese Gleichung wurde 1754 erstmalig von Leonhard Euler aufgestellt und wird nach ihm als Eulersche Turbinengleichung bezeichnet.

Um daraus die hydraulische Leistung des Laufrades zu erhalten, hat man M_d nur mit der Winkelgeschwindigkeit ω der Welle zu multiplizieren, also

$$L_h = M_d\,\omega = \varrho\, Q\,\omega\,(c_{u1}\, r_1 - c_{u2}\, r_2)\,, \qquad (332)$$

und man erkennt, daß L_h proportional der Differenz der auf die Masseneinheit bezogenen Drallwerte $c_u\, r$ vor und hinter dem Laufrad ist (S. 247). Diese Leistung wird bei gegebenem c_{u1} am größten, wenn die tangentiale Komponente c_{u2} beim Austritt aus dem Laufrad verschwindet, d. h. wenn der ganze vor dem Laufrad verfügbare Drall vom Laufrad vernichtet wird.

Nach Bd. I S. 71 ist der Leistungsverlust eines Stromfadens zwischen zwei Querschnitten 1 und 2, durch welche sekundlich die Wassermenge $Q\left[\frac{\text{m}^3}{\text{sec}}\right]$ strömt,

$$\gamma Q\left\{\left(\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1\right) - \left(\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2\right)\right\} - \frac{\gamma}{g}\,\alpha' Q \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t}\, ds = \mathfrak{V}\,. \qquad (333)$$

Darin sind v die mittleren Geschwindigkeiten und $\alpha_1, \alpha_2, \alpha'$ Berichtigungsfaktoren, welche die ungleichmäßige Geschwindigkeitsverteilung über den Querschnitt berücksichtigen sollen; außerdem bezeichnen p

den über den Querschnitt genommenen Mittelwert des Druckes, z die Ortshöhe des Querschnittsschwerpunktes bezogen auf eine beliebige Horizontalebene und ds ein Längenelement des Stromfadens. Im Falle stationärer Strömung, die hier näherungsweise vorausgesetzt werden soll (in Wirklichkeit handelt es sich höchstens um stationäre Mittelwerte, siehe oben) entfällt der von der Zeit abhängige Integralwert. Die runden Klammern stellen die hydraulischen Höhen H_1 und H_2 der beiden Endquerschnitte dar, d. h. die auf die Einheit der Schwere bezogene Strömungsenergie an den betreffenden Stellen. Man kann also Gl. (333) einfacher schreiben

$$\gamma Q(H_1 - H_2) = \mathfrak{V}\,. \tag{334}$$

Faßt man nun summarisch als Endquerschnitte des betrachteten Stromfadens das Eintrittsgebiet (e) vor dem Leitrad und das Austrittsgebiet (a) am Saugrohr der Turbine auf und beachtet, daß das Wasser beim Durchgang durch das Laufrad einen weiteren Leistungsverlust L_h durch die an die Turbinenachse abgegebene Leistung erfährt, so erhält man aus (334) und (332)

$$\gamma Q(H_e - H_a) = \mathfrak{V} + \varrho\, Q\, \omega\, (c_{u1} r_1 - c_{u2} r_2)$$

oder, nach Division durch γQ,

$$H_e - H_a = \frac{\mathfrak{V}}{\gamma Q} + \frac{\omega}{g}(c_{u1} r_1 - c_{u2} r_2)\,. \tag{335}$$

In dem Ausdruck $\frac{\mathfrak{V}}{\gamma Q}$, der seiner Dimension nach ebenso wie H eine Höhe sein muß, können alle hydraulischen Verluste auf dem Wege durch die Turbine zusammengefaßt werden, weshalb (335) mit $\frac{\mathfrak{V}}{\gamma Q} = \sum h_v$ übergeht in

$$H_e - H_a = \frac{\omega}{g}(c_{u1} r_1 - c_{u2} r_2) + \sum h_v\,. \tag{336}$$

Dieser Ausdruck wird gewöhnlich als Hauptgleichung der Kreiselräder bezeichnet. Man kann hier noch $\omega r = u$ setzen und erhält

$$H_e - H_a - \sum h_v = \frac{1}{g}(c_{u1} u_1 - c_{u2} u_2)\,. \tag{336a}$$

14. Wirkungsgrad und spezifische Drehzahl.

Die bei einer Wasserturbine auftretenden „Verluste" sind sehr verschiedener Art und werden gewöhnlich in „hydraulische" und „mechanische" Verluste unterteilt; beide zusammen bedingen den Gesamtwirkungsgrad der Maschine. Unter den hydraulischen Verlusten $\sum h_v$ in Gl. (336) hat man die gesamten Verluste zu verstehen, die ein Stromfaden an Strömungsenergie (bezogen auf die Einheit der Schwere) vom Eintritt in das Leitrad bis zum Austritt aus dem Saugrohr erleidet. Dazu gehören der Eintrittsverlust am Leitrad, alle durch die Flüssigkeitsreibung im Leit- und Laufrad bedingten Verluste, ferner Verluste, die durch Querschnitts- und Richtungsänderungen im Leit- und Laufrad entstehen, der Übergangsverlust beim Übergang vom Leitrad zum Laufrad (siehe unten), sowie Verluste, die durch eventuelle Krümmung und konische Erweiterung des Saugrohrs bedingt sind. Jeder dieser Verluste wird in der Form $\zeta \frac{v^2}{2g}$ dargestellt, wo v die jeweils mittlere Durchflußgeschwindigkeit und ζ eine (dimensionslose) Widerstandsziffer bezeichnet, welche im allgemeinen von der Reynoldsschen Zahl und der relativen Rauhigkeit abhängig ist. Von der Wahl der Größe ζ, die im übrigen bei verschiedenen Betriebszuständen veränderlich sein kann, und für welche die Ausführungen unter Abschnitt II Ziffer 3 sinngemäß Anwendung finden, hängt die richtige Erfassung der hydraulischen Verluste ganz wesentlich ab. Man erkennt daraus schon, daß hierin eine ziemliche Schwäche der eindimensionalen Betrachtungsweise liegt, die nur durch vergleichende Untersuchungen an ausgeführten Maschinen wettgemacht werden kann.

Aus den vorstehend genannten Verlusten läßt sich zunächst der hydraulische Wirkungsgrad wie folgt anschreiben. Bezieht man die hydraulischen Höhen H_e und H_a in Gl. (336a) für eine Turbine mit freiem Zulauf (Abb. 150) auf den Ober- und Unterwasserspiegel und legt den Bezugshorizont in den letzteren, so wird wegen

$$H_e = \alpha_1 \frac{v_e^2}{2g} + \frac{p_e}{\gamma} + H, \qquad H_a = \alpha_2 \frac{v_a^2}{2g} + \frac{p_a}{\gamma}, \qquad p_e = p_a$$

und $v_e \approx 0$

$$H_e - H_a = H - \alpha_2 \frac{v_a^2}{2g}. \tag{337}$$

Die Geschwindigkeitshöhe $\frac{v_a^2}{2g}$ ist von der absoluten Geschwindigkeit am Laufradaustritt abhängig und für den mechanischen Vorgang verloren. Durch konische Erweiterung des Saugrohres und damit allmähliche Verzögerung der Strömung kann v_a in engen Grenzen ge halten werden[1]. Mit Gl. (337), in der jetzt noch $\alpha_2 \approx 1$ gesetzt werden möge, geht Gl. (336a) über in

$$H - \frac{v_a^2}{2g} - \sum h_v = \frac{1}{g}(c_{u1} u_1 - c_{u2} u_2), \tag{338}$$

weshalb man als hydraulischen Wirkungsgrad erhält

$$\eta_h = \frac{H - \frac{v_a^2}{2g} - \sum h_v}{H} = \frac{c_{u1} u_1 - c_{u2} u_2}{g H}. \tag{339}$$

Außer den oben genannten Verlusten treten nun noch weitere auf, die man gewöhnlich unter dem Namen mechanische Verluste zusammenfaßt, obwohl diese Bezeichnung nicht ganz einheitlich ist. Zu ihnen gehören alle Verluste infolge Lager- und Stopfbüchsenreibung, sowie infolge der Wandreibung an den Außenflächen des Laufrades. Schließlich wird zu ihnen gewöhnlich auch der sogenannte „Spaltverlust“ gerechnet, der dadurch entsteht, daß ein Teil der Betriebs-

[1] Der Umsetzungswirkungsgrad beträgt je nach der Güte des Saugrohrs 50 bis 85%.

flüssigkeit ungenutzt durch den Spaltraum abfließt. Bezeichnet man diesen Anteil mit Q_s*, setzt also $Q' = Q - Q_s$ als nutzbringend verarbeitete Wassermenge an, so erhält man als nutzbare Leistung an Stelle von (332) zunächst

$$L_n' = \varrho Q' (c_{u1} u_1 - c_{u2} u_2)$$

und nach Abzug der Leistungsverluste L_r aus Lager-, Stopfbüchsen- und Radreibung

$$L_n = \varrho Q' (c_{u1} u_1 - c_{u2} u_2) - L_r .$$

Der **Gesamtwirkungsgrad** ergibt sich daraus mit $L_e = Q\gamma H$ als effektiver Leistung zu

$$\eta = \frac{\varrho Q' (c_{u1} u_1 - c_{u2} u_2) - L_r}{Q\gamma H} . \tag{340}$$

Man kann hier noch η_h nach Gl. (339) einführen und erhält

$$\eta = \eta_h \frac{Q'}{Q} - \frac{L_r}{Q\gamma H} . \tag{340a}$$

An dieser Stelle sei noch eine kurze Bemerkung über die Größe des **Übergangsverlustes** beim Eintritt in das Laufrad eingeschaltet. Dieser entsteht, wenn das vom Leitrad her kommende Wasser mit einer relativen Geschwindigkeit $\mathfrak{w}_1$ in die Laufradschaufeln eintritt, welche von der durch die Schaufelform bedingten tangentialen Zuströmungsrichtung $\mathfrak{w}_1'$ etwas abweicht (Abb. 192) oder, mit anderen Worten, wenn nicht der richtige „Anstellwinkel“ der Laufradschaufel gegen die vom Leitrad kommende Flüssigkeit vorhanden ist. Durch Umbildung der Geschwindigkeit $\mathfrak{w}_1$ in die relative Laufradgeschwindigkeit $\mathfrak{w}_1'$ entsteht ein Verlust, der in der Turbinentechnik gewöhnlich als **Stoßverlust** bezeichnet wird. Man hat es hier — vom Standpunkt der Stromfadentheorie gesehen — mit einem ähnlichen Vorgang zu tun wie bei Kniestücken (S. 89, Abb. 75), bei denen die zugehörige Verlusthöhe aus

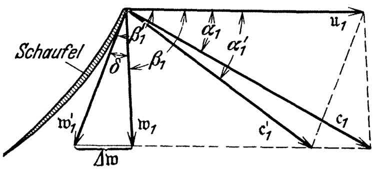


Abb. 192.

$$h_v = \eta \frac{(\Delta w)^2}{2g} = \eta \frac{w_1^2 + w_1'^2 - 2 w_1 w_1' \cos\delta}{2g}$$

berechnet werden kann, wo η ein Erfahrungskoeffizient ist. Da die Richtung von $\mathfrak{w}_1$ bei konstant gehaltener Absolutgeschwindigkeit $\mathfrak{c}_1$ (Abb. 191) sich ändern muß, wenn $\mathfrak{u}_1$ (bzw. ω) sich ändert, so erkennt man, daß derartige Verluste bei veränderlichen Betriebszuständen unvermeidlich sind[1].

* Q_s wird gewöhnlich in Hundertteilen der größten Wassermenge $Q_{\max}$ angegeben.

[1] Vgl. hierzu auch H. Föttinger: Über die physikalischen Grundlagen der Turbinen- und Propellerwirkung. Z. Flugtechn. Motorluftsch. 1912 S. 233. Schilhansl, M.: Beitr. zur Berechnung axialer Schnelläufer. Wasserkr. u. Wasserwirtsch. Bd. 24 (1929) S. 85.

Zur Beurteilung der „Schnelläufigkeit“ einer Turbine hat sich in der technischen Praxis ein Vergleichsverfahren herausgebildet, das auf gewissen Ähnlichkeitsbedingungen aufgebaut ist und zum Begriff der „spezifischen Drehzahl“ geführt hat[1].

Die geometrische Ähnlichkeit zweier Flüssigkeitsbewegungen verlangt bekanntlich, daß jeder Stromlinie der ersten Bewegung eine geometrisch ähnliche der zweiten Bewegung entspricht. Will man also in zwei verschiedenen Maschinen ähnliche Betriebszustände erzeugen, so müssen zunächst die beiden Strömungsbilder geometrisch ähnlich verlaufen. (Ähnliche Strömungsräume, ähnliche Wandbeschaffenheit.) Damit ist aber noch nicht gesagt, daß die betrachteten Strömungen nun auch mechanisch ähnlich sind. Nach dem Reynoldsschen Ähnlichkeitsgesetz wäre dazu noch Gleichheit der Reynoldsschen Zahlen erforderlich. Nur in diesem Falle würden sich für die beiden zu vergleichenden Strömungen auch die gleichen hydraulischen Wirkungsgrade ergeben. Bei praktischen Vergleichsrechnungen sieht man von der Bedingung gleicher Reynoldsschen Zahlen aus Gründen der Vereinfachung gewöhnlich ab und setzt außerdem überall glatte Wandungen voraus. Dann läßt sich leicht eine einfache Beziehung für die oben genannte spezifische Drehzahl anschreiben.

Zu diesem Zwecke seien zwei (kavitationsfreie) ähnliche Betriebszustände geometrisch ähnlicher Maschinen betrachtet. Dann gilt für die Umfangsgeschwindigkeit $u = \frac{D}{2}\omega = \frac{D n \pi}{60}$, wo D irgend einen charakteristischen Durchmesser und n die Zahl der Umdrehungen pro Minute (Drehzahl) bedeutet. Demnach ist $u \sim nD$*. Die mittlere Geschwindigkeit c_m in einem Meridianschnitte (Abb. 190 und 194) läßt sich darstellen in der Form $c_m = \frac{Q}{F_m} = \frac{4Q}{\pi D_m^2}$, wo D_m ein ideeller Durchmesser ist, weshalb im Falle ähnlicher Strömungsräume folgt $c_m \sim \frac{Q}{D^2}$ und $\frac{c_m}{u} \sim \frac{Q}{nD^3}$. Da aber bei ähnlichen Betriebszuständen das Verhältnis $\frac{c_m}{u}$ unverändert bleibt, so wird

$$Q \sim nD^3.$$

Aus Gl. (339) folgert man ferner (Abb. 190)

$$H \sim c_u u \sim c_m u \sim \frac{Qn}{D} \sim n^2 D^2,$$

weshalb auch

$$Q \sim D^2 \sqrt{H},$$

und schließlich gilt für die Leistung N [PS] wegen $N = \frac{Q\gamma\eta H}{75}$

$$N \sim QH \sim D^2 H \sqrt{H} \sim n^3 D^5.$$

Man denke sich nun eine gegebene Maschine mit den Größen N, H, D und n geometrisch ähnlich so verändert, daß sie bei ähnlichem Betriebs-

[1] Eine eingehende Darstellung dieses Gegenstandes ist zu finden in W. Spannhake: Kreiselräder als Pumpen und Turbinen Bd. 1 S. 164. Berlin 1931.

* Das Zeichen $\sim$ bedeutet proportional.

zustande die entsprechenden Werte N', H', D', n' aufweist. Dann bestehen nach den obigen Ausführungen zwischen den Leistungen N und N' einerseits und den Gefällshöhen H und H' andererseits folgende Beziehungen

$$\frac{N}{N'} = \frac{D^2 H \sqrt{H}}{D'^2 H' \sqrt{H'}}; \quad \frac{H}{H'} = \frac{n^2 D^2}{n'^2 D'^2},$$

woraus durch Elimination des Quotienten $\frac{D^2}{D'^2}$ und Auflösung nach n' folgt

$$n' = n \frac{H'}{H} \sqrt{\frac{N \sqrt{H'}}{N' \sqrt{H}}}. \tag{341}$$

Wählt man nun in vorstehender Gleichung das Gefälle zwischen Ober- und Unterwasser $H' = 1$ [m] und die Leistung der Turbine $N' = 1$ [PS], so heißt die zugehörige Drehzahl $n' = n_s$ die „spezifische Drehzahl", und man erhält dafür

$$n_s = \frac{n \sqrt{N}}{H \sqrt[4]{H}}.$$

Man kann sie noch in etwas anderer Weise darstellen, indem man in Gl. (341) $N \sim QH$ und $N' \sim Q'H'$ setzt; dann wird

$$n' = n \frac{H'}{H} \sqrt{\frac{Q H \sqrt{H'}}{Q' H' \sqrt{H}}}.$$

Führt man jetzt zum Vergleich die sekundlich verarbeitete Wassermenge $Q' = 1 \left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{sec}}\right]$ (statt wie vorher $N' = 1$ [PS]) ein und behält $H' = 1$ [m] bei, so wird mit $n' = n_s$

$$n_s = n \sqrt{\frac{Q}{H \sqrt{H}}}.$$

Die spezifische Drehzahl gilt als Maß der Schnelläufigkeit einer bestimmten Turbinenart. Für Francisturbinen liegt n_s etwa zwischen 50 und 450, für Flügelradturbinen kann es bis über 1000 gesteigert werden.

15. Zur Frage der Laufradschaufelung.

Die Eulersche Turbinengleichung (331a) sagt nichts aus über die Anzahl und Form der Laufradschaufeln. Nach ihr hängt das Drehmoment an der Turbinenwelle im Falle der hier näherungsweise angenommenen stationären Bewegung (abgesehen von den unvermeidlichen Verlusten) lediglich ab von der Dralldifferenz vor und hinter dem Laufrad, d. h. von der Ein- und Austrittsgeschwindigkeit. Bestimmend für den Bewegungsvorgang wären demnach wesentlich die Winkel an den Schaufelenden, nicht aber die sonstige Form der Schaufeln. Letztere ist an und für sich willkürlich — immer vom Standpunkt der Stromfadentheorie aus — sie muß nur so gewählt werden, daß alle Verluste aus Reibung und Querschnitts- bzw. Richtungsänderung des Schaufelkanals möglichst klein ausfallen. Daneben wird man bestrebt sein müssen, die Schaufelform so auszubilden, daß auf der Saugseite wegen Kavitationsgefahr (S. 242) keine unzulässig hohen Geschwindigkeiten auftreten.

Es ist einleuchtend, daß in diesen nicht eindeutig bestimmten Angaben eine gewisse Unzulänglichkeit der Stromfadentheorie liegt, welche das Streben nach einem vollkommeneren und theoretisch besser begründeten Berechnungsverfahren — besonders für Räder mit geringer Schaufelzahl — begreiflich macht. Immerhin sind die auf der Stromfadentheorie aufbauenden Verfahren bei der ausführenden Praxis auch heute noch fast ausschließlich in Gebrauch, da sie gestatten, Drehmoment, Leistung und Wirkungsgrad eines gegebenen Kreiselrades auf einfache Weise zu berechnen.

Für die Form der Laufradschaufel sind nach den obigen Darlegungen in erster Linie die Geschwindigkeitsdreiecke

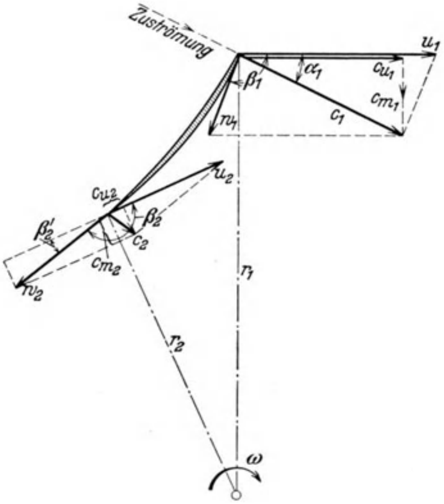


Abb. 193. Geschwindigkeitsdreiecke am Ein- und Austritt des Laufrades.

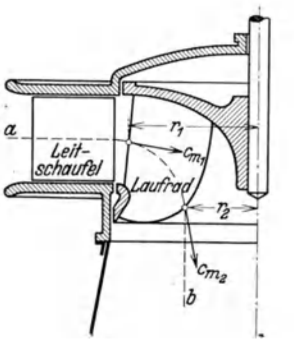


Abb. 194. Schnitt durch eine Radialturbine.

am Ein- und Austritt bestimmend (Abb. 193). Liegt die absolute Geschwindigkeit c_1 nach Größe und Richtung fest, so ergibt sich für einen bestimmten Betriebszustand (Q, ω) die Größe des Winkels β_1 aus der Bedingung „stoßfreien" Eintritts in den Schaufelkanal (vgl. dazu die Bemerkung auf S. 253). Der Winkel β_2 und die sonstige Schaufelform sind im übrigen so zu wählen, daß die durch Gl. (331a) vorgeschriebene Dralldifferenz unter tunlichster Vermeidung von Verlusten erzeugt wird.

Hat man dem Entwurf zunächst eine etwa aus der Erfahrung entnommene Schaufelform und Schaufelteilung zugrunde gelegt, so ist zu prüfen, wie groß der zugehörige Wirkungsgrad wird und, falls diese Prüfung ungünstig ausfällt, die Schaufelform entsprechend zu verbessern. Die Schaufeln werden bei dieser Rechnung als unendlich dünn angesehen und als Schaufelwinkel β diejenigen Winkel eingeführt, welche die Umfangsrichtungen an den Schaufelenden mit den Schnittkurven bilden, die durch den Schnitt einer mittleren Rotationsfläche a—b (Abb. 194) mit den Schaufelflächen entstehen.

Zur Ermittlung des Wirkungsgrades kann man etwa folgendermaßen vorgehen. Zunächst drücke man die Geschwindigkeiten c_{u1} und c_{u2}

durch Q und ω aus. Zu diesem Zwecke zerlege man die Absolutgeschwindigkeiten c in ihre tangentialen Komponenten c_u und die in die zugehörigen Meridianebenen fallenden Komponenten c_m ($c_m = \sqrt{c_a^2 + c_r^2}$, Abb. 190). Dann ist mit den Bezeichnungen der Abb. 193

$$c_{u\,1} = c_{m\,1} \operatorname{ctg} \alpha_1 = \frac{Q}{F_1} \operatorname{ctg} \alpha_1, \tag{342}$$

$$w_2 = \frac{c_{m\,2}}{\sin \beta_2} = \frac{Q}{F_2 \sin \beta_2}, \tag{343}$$

wobei unter F_1 und F_2 die den mittleren Meridiangeschwindigkeiten $c_{m\,1}$ und $c_{m\,2}$ (Abb. 194) entsprechenden ideellen Querschnitte zu verstehen sind, welche den Hohlraum als Rotationsflächen quer durchsetzen. Ferner ist gemäß Abb. 193

$$c_{u\,2} = u_2 - w_2 \cos \beta_2' = r_2\, \omega + w_2 \cos \beta_2$$

oder mit Rücksicht auf (343)

$$c_{u\,2} = r_2\, \omega + \frac{Q}{F_2} \operatorname{ctg} \beta_2 . \tag{344}$$

Führt man nun die Ausdrücke (342) und (344) in Gl. (338) ein, so erhält man mit $u = r\,\omega$

$$H = \frac{\omega}{g} \left\{ \frac{Q}{F_1}\, r_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 - r_2^2\, \omega - \frac{Q}{F_2}\, r_2 \operatorname{ctg} \beta_2 \right\} + \frac{v_a^2}{2g} + \sum h_v . \tag{345}$$

In vorstehender Gleichung lassen sich auch noch v_a und $\sum h_v$ (S. 251) durch Q und ω ausdrücken, womit

$$H = H\,(Q, \omega) \tag{345a}$$

als Funktion von Q und ω dargestellt ist. Bei gegebenem H kann somit Q für beliebige Winkelgeschwindigkeiten ω berechnet werden. Damit liegen dann auch alle Geschwindigkeiten fest, und der hydraulische Wirkungsgrad läßt sich nunmehr mit Hilfe der Gl. (339) ermitteln[1].

Das vorstehende Verfahren läuft also auf ein wiederholtes Probieren hinaus und gibt nur über die mittleren Verhältnisse Auskunft. Endgültige Klarheit können nur planmäßig in den Versuchsanstalten durchgeführte Versuche liefern.

In dem Bestreben, für die Untersuchung der Kreiselräder strengere Berechnungsgrundlagen zu schaffen, welche es ermöglichen, die Wasserbewegung im Hohlraum einer Turbine nicht nur summarisch abzuschätzen, sondern im einzelnen genauer zu verfolgen, sind von verschiedenen Autoren Verfahren entwickelt worden, die auf den hydrodynamischen Grundgleichungen der reibungsfreien Flüssigkeit aufgebaut sind.

Prášil[2] stellte in zwei grundlegenden Arbeiten zunächst die allgemeinen Bewegungsgleichungen der idealen Flüssigkeit im Innern eines mit konstanter Winkel-

[1] Spannhake, W.: Kreiselpumpen und Turbinen, im Handb. der Experimentalphysik von Wien-Harms Bd. 4 Hydro- und Aerodynamik 3. Teil S. 286, 300. Leipzig 1930.

[2] Prášil, F.: Über Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen, Schweiz. Bauztg. Bd. 41 (1903), und Die Bestimmung der Kranzprofile und Schaufelformen für Turbinen und Kreiselpumpen, Schweiz. Bauztg. Bd. 48 (1906); vgl. auch Technische Hydrodynamik 1926 S. 246ff.

geschwindigkeit rotierenden Raumes auf und benutzte diese, um an Hand einiger Sonderfälle eine Reihe von Schlußfolgerungen abzuleiten, welche für die Vorgänge in Turbinenlauf- und Leiträdern von Bedeutung sind. Insbesondere fand er, daß die von ihm entwickelten Bewegungsgleichungen durch solche Strömungsformen befriedigt werden, für deren Absolutgeschwindigkeiten ein Geschwindigkeitspotential vorhanden ist. Zur Bestimmung derartiger Strömungen und damit der Ermittlung der erforderlichen Schaufelformen kann die Potentialtheorie herangezogen werden.

Dem Vorgange Prášils folgend, geht Lorenz[1] von den auf Zylinderkoordinaten umgeformten Grundgleichungen aus und ersetzt die Wirkung der Laufradschaufeln, deren Zahl unendlich groß angenommen wird, auf die Absolutströmung durch Einführung sogenannter „Zwangsbeschleunigungen", welche auf den Schaufelflächen senkrecht stehen. Die in den Meridianflächen vor sich gehende „Hauptströmung" wird dabei als wirbelfrei angesehen. Zur Ausbildung der Schaufelflächen wird die Eulersche Turbinengleichung herangezogen und zwecks Erreichung eines möglichst guten Wirkungsgrades die Forderung eines gleichen Energieumsatzes aller das Laufrad durchfließenden Wasserteilchen aufgestellt. Die Lorenzsche Theorie — besonders der Begriff der „Zwangsbeschleunigung" — ist verschiedenen Einwendungen begegnet[2] und später von Bauersfeld[3] zur Berechnung der Laufradschaufeln von Francisturbinen ausgebaut worden.

Ein graphisch-analytisches Verfahren zur Ermittlung des Strömungsverlaufes im Schaufelraume — unter Zugrundelegung eines unveränderlichen Betriebszustandes — hat v. Mises[4] angegeben, wonach die richtige Festlegung der Laufrad-Austrittskante und die Bestimmung der Leitschaufel-Endwinkel entsprechend der Forderung eines „stoßfreien" Überganges ermöglicht wird.

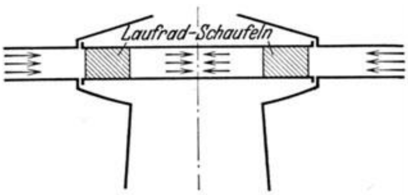


Abb. 195.

Auch die vorstehend genannten Verfahren müssen sich zur Erreichung des gesteckten Zieles weitgehender Idealisierungen des wirklichen Vorganges bedienen, wie Reibungsfreiheit, Wirbelfreiheit, stationäre Strömung oder sehr dünne Schaufelwandungen und sehr große Schaufelzahl usw. Der durch sie angestrebte Vorteil einer besseren theoretischen Begründung geht deshalb bei den von der Praxis aus wirtschaftlichen und konstruktiven Gründen (insbesondere kleine Schaufelzahl bei hoher Drehzahl) bevorzugten Schaufelformen zum Teil wieder verloren.

Schließlich sei noch bemerkt, daß Spannhake[5] eine strenge Lösung für die ebene Idealströmung durch ein radiales Schaufelrad gegeben hat, allerdings unter der Annahme eines unendlich fernen Leitrades. Zur Verwirklichung der ebenen Strömung hat man sich dabei in der Turbinenachse eine Senke vorzustellen (Bd. I S. 136), in der die Flüssigkeit nach dem Durchströmen des Laufrades verschwindet (Abb. 195). Auf die Lösung der Aufgabe, die unter Verwendung der konformen Abbildung und der Methode der Quellen, Senken und Wirbel durch-

---

[1] Lorenz, H.: Neue Theorie und Berechnung der Kreiselräder. München und Berlin 1906 und 1911.

[2] v. Mises, R.: Physik. Z. 1907 S. 314; Bauersfeld, W.: Z. VDI 1905 S. 2007 und Z. ges. Turbinenwes. 1907 S. 265.

[3] Die Konstruktion der Francis-Schaufel nach der Lorenzschen Turbinentheorie und ihre Eigenschaften, Z. VDI 1912 S. 2045.

[4] v. Mises, R.: Theorie der Wasserräder S. 102. Leipzig 1908.

[5] Spannhake, W.: Die Leistungsaufnahme einer parallelkränzigen Zentrifugalpumpe mit radialen Schaufeln, Festschrift der Technischen Hochschule Karlsruhe 1925 S. 387; Anwendung der konformen Abbildung auf die Berechnung von Strömungen in Kreiselrädern, Z. angew. Math. Mech. 1925 S. 481. Spannhake, W., u. W. Barth: Potentialströmung durch ruhende oder bewegte Schaufelgitter mit Schaufeln von beliebiger Form, Z. angew. Math. Mech. 1929 Heft 6.

geführt ist, kann hier nicht weiter eingegangen werden[1]. Dagegen soll nachstehend noch gezeigt werden, wie man die Methoden und Ergebnisse der Tragflügeltheorie, die sich bei der Untersuchung der Propeller als besonders fruchtbar erwiesen haben, mit Vorteil auch auf Turbinenlaufräder mit geringer Flügelzahl und ohne Laufradkranz (sog. Flügelräder) anwenden kann.

16. Anwendung der Tragflügeltheorie auf axial durchströmte Flügelräder.

Abb. 196 zeigt eine Axialturbine mit kranzlosem Flügelrad, dessen vier Flügel ähnlich wie diejenigen eines Propellers angeordnet sind (Propellerturbine). Die Flüssigkeit werde dem Arbeitsraum der Turbine wieder durch ein Leitrad zugeführt, welches vom Laufrad so weit entfernt sei, daß die durch das Leitrad bedingten Ungleichmäßigkeiten der Strömung beim Eintritt in das Laufrad als ausgeglichen angesehen werden dürfen. Weiter sei angenommen, daß die einzelnen Flüssigkeitsteilchen, nachdem sie in die axiale Richtung umgelenkt sind, — also bereits vor dem Laufrad — ihren Abstand von der Drehachse im wesentlichen beibehalten, daß also im Laufrad keine oder doch nur sehr geringe Radialgeschwindigkeiten vorhanden sind. Unter dieser Voraussetzung, die bei nicht zu großer Schaufelhöhe im Verhältnis zum Laufraddurchmesser mit genügender Annäherung erfüllt sein dürfte, verläuft die Strömung in lauter Zylinderflächen. Denkt man sich nun einen koaxialen Zylinderschnitt t durch das Laufrad gelegt und wickelt den Zylindermantel auf eine Ebene ab, so erhält man als Schnitt der Laufradschaufeln mit dem Zylinder t eine gerade Flügelreihe (Abb. 196 unten). Da aber nach der obigen Annahme jedes Flüssigkeitsteilchen sich auf einem Zylindermantel bewegt, so kann man nahe bei dem ersten einen zweiten Zylinderschnitt t' legen, auch diesen abwickeln und die Strömung zwischen beiden Zylindermänteln als ebene Strömung durch eine gerade Flügelreihe auffassen. Dabei wiederholt sich an jedem Flügel derselbe Strömungsvorgang, so daß die gleichen Gesetze gelten wie für die unendlich lange Reihe. Nach den Ausführungen über die ebene Potentialströmung durch eine gerade, unendlich lange Flügelreihe übt die strömende Flüssigkeit auf den einzelnen Flügel, bezogen auf die Tiefe „Eins", einen Auftrieb von der Größe

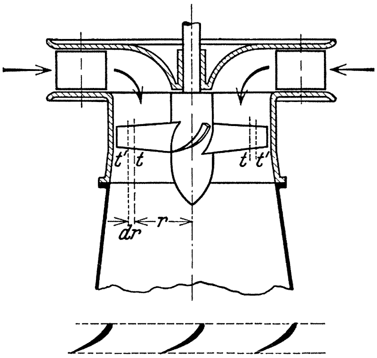


Abb. 196. Schnitt durch eine Axialturbine mit kranzlosem Flügelrad.

$$A = \varrho\, \Gamma w \tag{346}$$

aus [Gl. (270), S. 205], wo Γ die Flügelzirkulation und w diejenige Geschwindigkeit bezeichnet, welche gemäß Abb. 162 als graphisches Mittel

[1] Vgl. auch E. Sörensen: Potentialströmungen durch rotierende Kreiselräder, Z. angew. Math. Mech. 1927 S. 89.

aus den relativen Geschwindigkeiten w_1 und w_2 vor bzw. hinter dem Gitter gefunden wird. Zu dieser ideellen Anströmungsgeschwindigkeit, die mit der Profilsehne den Anstellwinkel α bilden möge, steht der Auftrieb A senkrecht (Abb. 197). Außer A tritt am Flügel noch der in die Anströmungsrichtung fallende Widerstand W auf, welcher zusammen mit A die resultierende Kraft R bildet. Die Größe Γ der Flügelzirkulation ist — wie früher gezeigt wurde (S. 212) — abhängig von der Anströmungsgeschwindigkeit w, den Profilkonstanten und dem Anstellwinkel α. Sie kann im Falle ebener Strömung und unter der Voraussetzung, daß die Flügelströmung durch die Nachbarflügel nicht beeinflußt wird, für die in Betracht kommenden Profilformen auf theoretischem Wege berechnet werden (vgl. S. 212, wo die Rechnung für das Joukowsky-Profil durchgeführt ist). Hier soll jedoch nach dem Vorgange von Bauersfeld[1] ein anderer Weg eingeschlagen werden.

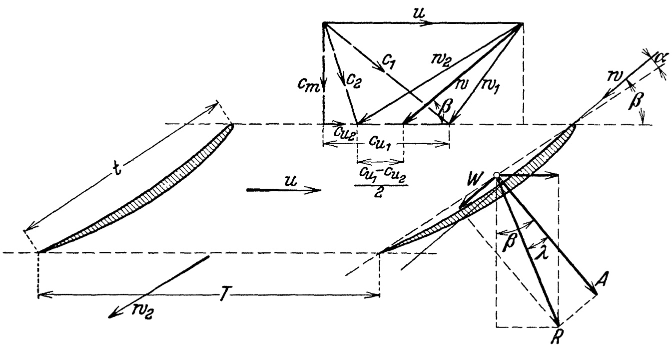


Abb. 197. Auftrieb und Widerstand am Flügelblattelement.

Man kann Auftrieb und Widerstand bekanntlich in der Form

$$A = c_a \frac{\varrho}{2} w^2 F\,; \qquad W = c_w \frac{\varrho}{2} w^2 F \tag{347}$$

darstellen, wo c_a und c_w die Auftriebs- bzw. Widerstandsziffer und F die Flügelfläche bezeichnen (S. 198). c_a und c_w sind für eine große Anzahl praktisch wichtiger Profilformen durch Modellversuche an Flügeln von endlicher Spannweite bestimmt worden[2]. Um diese Beiwerte für die hier vorausgesetzte ebene Strömung (die einem Tragflügel von unendlicher Spannweite entspricht) verwenden zu können, hat man noch eine Umrechnung mit Hilfe der Gl. (297) (S. 223) vorzunehmen. Man erhält dann

$$c_{w\,\infty} = c_w - \frac{c_a^2}{\pi}\frac{F}{s^2}, \tag{348}$$

wo c_a und c_w die für den Flügel von endlicher Spannweite aber gleichem

[1] Bauersfeld: Die Grundlagen zur Berechnung schnellaufender Kreiselräder. Z. VDI 1922 S. 461.

[2] Angaben hierüber finden sich bei L. Prandtl und A. Betz: Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, 1. bis 4. Lieferung; vgl. auch Hütte Bd. 1 26. Aufl. S. 408.

Profil gefundenen Werte bezeichnen. Für den rechteckigen Flügel ist ferner $F = s\,t$ (s = Spannweite, t = Flügeltiefe, Abb. 154), womit Gl. (348) auch wie folgt geschrieben werden kann

$$c_{w\,\infty} = c_w - \frac{c_a^2}{\pi}\,\frac{t}{s}. \tag{348a}$$

Entsprechend erhält man für den Anstellwinkel nach Gl. (297a)

$$\alpha_\infty = \alpha - \frac{c_a}{\pi}\,\frac{t}{s}. \tag{349}$$

Weiter ist zu beachten, daß die an Einzelflügeln gewonnenen Ergebnisse nicht ohne weiteres auf Flügelgitter übertragen werden können, da sich hier eine Beeinflussung der einzelnen Flügel durch die Nachbarflügel bemerkbar macht, die je nach der Größe der Gitterteilung eine Änderung des Auftriebsbeiwertes zur Folge hat. Es wäre also notwendig, das Verhältnis

$$L = \frac{c_{a\,g}}{c_{a\,e}}$$

der Auftriebsziffer eines Flügels von bestimmter Form als Teil eines Gitters zu derjenigen des Einzelflügels von derselben Form zu bestimmen. Leider sind diese Verhältniszahlen z. Z. nur für einige Sonderfälle bekannt und beschränken sich in der Hauptsache auf ebene oder gewölbte Platten als Gitterelemente. Strenge Lösungen dieser Art sind u. a. von Kutta[1], Blasius[2], Grammel[3] und König[4] gegeben, auf die hier verwiesen werden muß.

Einen Anhalt an die bei den praktisch verwendeten Profilen und Anströmungsrichtungen β (Abb. 197) gegen die Gitterachse auftretenden Verhältnisse kann man sich nach einem neuerdings von Schilhansl[5] entwickelten Näherungsverfahren verschaffen, wonach für den Fall der ebenen Platte die aus Abb. 198 für den Fall des Kreisbogenprofils beim Anstellwinkel 0^0 die aus Abb. 199 ersichtlichen Verhältniswerte L_a bzw. L_b in Abhängigkeit von der Gitterteilung T gelten. Man erkennt, daß diese Werte mit größer werdender Teilung sämtlich der Zahl „Eins" zustreben (Einzelflügel).

Um mit Hilfe dieser Zahlen die Auftriebsbeiwerte $c_{a\,g}$ für den Gitterflügel aus denjenigen für den Einzelflügel ($c_{a\,e}$) bei beliebigem Anstellwinkel α zu bekommen, kann man nach Schilhansl folgende Überlegung anstellen. Für die kreisförmig gekrümmte Platte als Einzelflügel beträgt die Zirkulation nach Bd. I S. 160 und 165

$$\Gamma = 4\,\pi\,v_\infty\,R\sin(\alpha + \delta),$$

[1] Kutta: Über ebene Zirkulationsströmungen nebst flugtechnischen Anwendungen, S.-B. Bayer. Akad. Wiss., Math.-physik. Kl. S. 108. München 1911.

[2] Blasius: Stromfunktionen für die Strömung durch Turbinenschaufeln, Z. Math. Phys. 1912 S. 354.

[3] Grammel: Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. Braunschweig 1917.

[4] König: Potentialströmung durch Gitter, Z. angew. Math. Mech. 1922 S. 422. vgl. auch W. Engel: Strömung durch axiale Schaufelgitter, Ing.-Arch. Bd. 3 (1932).

[5] Schilhansl, M.: Näherungsweise Berechnung von Auftrieb und Druckverteilung in Flügelgittern, Jb. wiss. Ges. Luftf. 1927 S. 151.

wo v_∞ die Anströmungsgeschwindigkeit im Unendlichen und α den Anstellwinkel bezeichnen, während R und δ die aus Abb. 200 ersichtliche Bedeutung haben. Da nun pro laufenden Meter Länge

$$A = \varrho\,\Gamma\,v_\infty = c_a\,\frac{\varrho}{2}\,v_\infty^2\,t$$

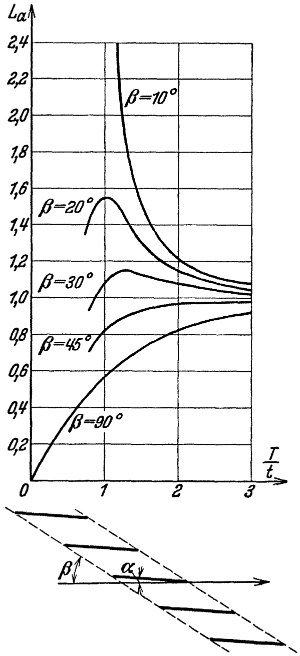


Abb. 198. Verhältniswerte der Gitterauftriebsziffer zu derjenigen des Einzelflügels bei ebenen Platten.

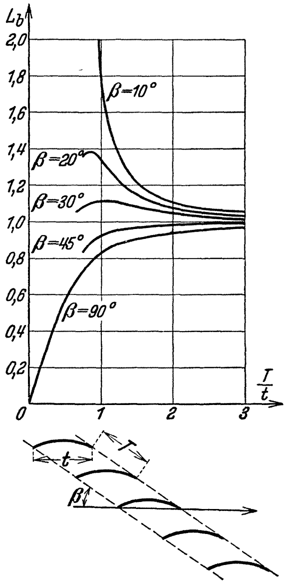


Abb. 199. Verhältniswerte der Gitterauftriebsziffer zu derjenigen des Einzelflügels bei einem Kreisbogenprofil.

ist, so folgt

$$c_a = \frac{2\,\Gamma}{v_\infty\,t} = \frac{8\,\pi}{t}\,R\sin(\alpha+\delta) = 2\,\pi\,\frac{\sin(\alpha+\delta)}{\cos\delta}$$

oder

$$c_a = 2\,\pi\,(\sin\alpha + \cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta)\,.$$

Für kleine Anstellwinkel kann näherungsweise $\cos\alpha \approx 1$ gesetzt werden, weshalb man mit $\mathrm{tg}\,\delta = 2\,\frac{f}{t}$ für den Einzelflügel erhält

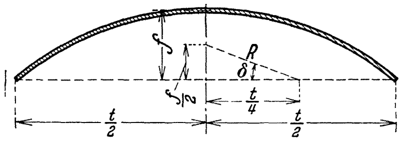


Abb. 200.

$$c_{a\,e} = 2\,\pi\left(\sin\alpha + 2\,\frac{f}{t}\right).$$

Der erste Summand stellt die Auftriebsziffer einer ebenen Platte ($f = 0$) beim Anstellwinkel α dar, der zweite die Auftriebsziffer eines Kreisbogenprofils beim Anstellwinkel $\alpha = 0$. Die **Gitterauftriebszahl** ergibt sich daraus, indem man den ersten Beitrag mit L_a, den zweiten mit L_b multipliziert, also

$$c_{a\,g} = 2\,\pi\left(L_a\sin\alpha + L_b\,\frac{2\,f}{t}\right).$$

Mit Hilfe dieser Angaben ist es möglich, den Einfluß der Gitterwirkung mit einiger Sicherheit abzuschätzen[1].

Bezeichnet u die Umfangsgeschwindigkeit des Elementarflügels im Abstande r von der Achse, dessen radiale Ausdehnung die Länge dr habe (Abb. 196), so ist die Leistung der auf die z Schraubenflügel entfallenden Kräfte R mit den Bezeichnungen der Abb. 197

$$dL = z R u \sin(\beta - \lambda) .$$

Mit

$$A = c_a \frac{\varrho}{2} w^2 t \, dr = R \cos\lambda$$

folgt daraus

$$dL = z c_a \frac{\varrho}{2} w^2 t u \, dr \frac{\sin(\beta - \lambda)}{\cos\lambda} . \tag{350}$$

Andererseits ist nach der Eulerschen Turbinengleichung (332) die gesamte hydraulische Leistung wegen $r_1 = r_2 = r$ und mit $\omega r = u$

$$L = \varrho Q u (c_{u1} - c_{u2}) . \tag{351}$$

Auf die Schraubenkreisfläche, die dem Zylinderschnitt $t\,t'$ in Abb. 196 entspricht, entfällt die sekundliche Durchflußmenge $dQ = 2\pi r \cdot dr \cdot c_m$, wennn c_m die wegen $c_r = 0$ axial gerichtete Meridiangeschwindigkeit bezeichnet (vgl. Abb. 190). Mit diesem Werte dQ liefert (351)

$$dL = 2\pi r \varrho c_m u (c_{u1} - c_{u2}) \, dr , \tag{352}$$

und aus dem Vergleich mit (350) folgt

$$c_a = \frac{4\pi r c_m (c_{u1} - c_{u2})}{z w^2 t} \cdot \frac{\cos\lambda}{\sin(\beta - \lambda)} .$$

Setzt man noch $\frac{2\pi r}{z} = T$ (Schaufelteilung im Abstand r von der Achse, Abb. 197) und beachtet, daß

$$w \sin\beta = c_m ,$$

so folgt schließlich für den Auftriebsbeiwert

$$c_a = 2 \frac{c_{u1} - c_{u2}}{w} \frac{T}{t} \frac{\sin\beta \cos\lambda}{\sin(\beta - \lambda)} . \tag{353}$$

Diese Gleichung kann zur Festlegung der Schaufelform benutzt werden.

Nachdem die Hauptabmessungen der Turbine bestimmt und für den Betriebszustand mit dem besten Wirkungsgrad das nutzbare Gefälle $H' = \eta_h H$, die sekundliche Wassermenge Q und die Drehzahl n festgelegt sind, erhält man zunächst aus (339) mit $u_1 = u_2 = u$

$$g H' = (c_{u1} - c_{u2}) u \tag{354}$$

oder, wenn $c_{u2} = 0$ gewählt wird, was einem drallfreien Austritt aus dem Laufrad entsprechen würde (vgl. S. 250)

$$c_{u1} = \frac{g H'}{u} ,$$

---

[1] Vgl. hierzu auch F. Weinig: Strömung durch Profilgitter und einige Anwendungen auf die Strömung in Propellern. Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebes. Hamburg 1932.

wobei $u = r\omega = \frac{2\pi r n}{60}$. Weiter ist mit Rücksicht auf Abb. 197 wegen $c_{u2} = 0$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{c_m}{u - \frac{c_{u1}}{2}} .$$

Da somit β wegen $c_m = \frac{Q}{F}$ festliegt, läßt sich auch

$$w = \frac{c_m}{\sin\beta}$$

berechnen. Für den Winkel λ in Gl. (353) gilt (Abb. 197)

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{W}{A} = \varepsilon ,$$

wobei ε die vom Anstellwinkel α abhängige Gleitzahl bezeichnet. Zur Erlangung eines hohen Wirkungsgrades wird man ε zweckmäßig nach den an guten Flügelformen gewonnenen Erfahrungswerten annehmen (etwa 1/20). Bei der Wahl der Auftriebsziffer c_a hat man zu überlegen, ob an der Saugseite des Flügels gegebenenfalls Kavitation auftreten kann. Die Geschwindigkeit auf der Saugseite entsteht bekanntlich durch Überlagerung der Anströmungsgeschwindigkeit w und der durch die Flügelzirkulation bedingten zusätzlichen Geschwindigkeit. Großer Auftrieb setzt große Zirkulation voraus, d. h. einem großen c_a entspricht eine große Zusatzgeschwindigkeit auf der Saugseite. Ist also die oben berechnete Geschwindigkeit w für den hier betrachteten Flügelschnitt bereits sehr groß, so wird man c_a entsprechend klein wählen müssen, um die unerwünschten Kavitationserscheinungen zu vermeiden. Nachdem über ε und c_a verfügt ist, kann das Verhältnis $\frac{T}{t}$ aus (353) berechnet werden. Die Anzahl der Flügel wird im allgemeinen nach praktischen Gesichtspunkten bestimmt; damit ist auch die Teilung T für den betrachteten Zylinderschnitt und mit ihr die Profiltiefe t festgelegt. Für die Wahl der Profilform selbst sind die Größen c_a und $\varepsilon = \frac{c_w}{c_a}$ maßgebend. Durch sie ist auch der Anstellwinkel α bestimmt (vgl. hierzu die Abb. 155 und 156).

Will man sich bei der Wahl der Profilform der aus Versuchen an Einzelflügeln gewonnenen Erfahrungswerte bedienen, so muß der Wert c_a nachträglich mit Rücksicht auf die von dem Verhältnis $\frac{T}{t}$ abhängige Gitterwirkung noch umgerechnet werden, was nach den auf S. 262 gemachten Angaben näherungsweise geschehen kann. Entsprechendes gilt, wenn es sich um Versuche an Flügeln mit endlicher Spannweite handelt (S. 260). Die vorstehend beschriebene Rechnung ist für verschiedene Zylinderschnitte zu wiederholen und liefert schließlich die gesamte Flügelform.

Für den Wirkungsgrad der ganzen Anlage kommen außer dem Spaltverlust (vgl. S. 252) — der hier in ähnlicher Weise wie bei den Radialrädern dadurch bedingt ist, daß ein Teil des Wassers ungenützt durch den Spalt hindurchgeht — sowie den sonstigen mechanischen Verlusten in der Hauptsache noch die Verluste in den Zu- und Ableitungen (Leitrad, Saugrohr) in Betracht. Die Drehzahlen der Flügelradturbinen können wesentlich höher gewählt werden als diejenigen der Francisturbinen, was für viele praktische Anwendungen äußerst erwünscht ist, dagegen ist man hinsichtlich des „Gefälles“ mit Rücksicht auf die Kavitationsgefahr an den Stellen des größten Unterdrucks der Laufradflügel auf geringere Höhen beschränkt, was wieder einen Nachteil gegenüber anderen Ausführungen bedeutet.

Im Falle reibungsfreier Strömung durch das Laufrad kann aus den Gleichungen (346), (347) und (353) eine einfache Beziehung für die Schaufelzirkulation Γ abgeleitet werden. Zunächst folgt mit Rücksicht auf (346) und die erste Gleichung von (347), wenn der Auftrieb auf die Länge „Eins“ bezogen wird und t wieder die Profiltiefe bezeichnet

$$\Gamma = \frac{1}{2} c_a w t .$$

Führt man hier c_a aus (353) ein und beachtet, daß bei reibungsfreier, ebener Bewegung wegen $W = 0$ auch $\lambda = 0$ ist, so erhält man mit $T = \frac{2\pi r}{z}$

$$\Gamma = (c_{u1} - c_{u2}) \frac{2\pi r}{z} .$$

Durch Vergleich mit (331a), worin für den vorliegenden Fall $r_1 = r_2 = r$ zu setzen ist, folgt daraus

$$\Gamma = \frac{2\pi}{z} \frac{M_d}{\varrho Q} .$$

Man kann hier nun die Leistung $L_h = M_d \omega = \eta_h Q \gamma H$ einführen und erhält

$$\Gamma = \frac{2\pi \eta_h g H}{z w} .$$

Vorstehende Gleichung zeigt, daß die Zirkulation $\Gamma = \Gamma(r)$ längs des Flügels konstant ist, sobald für die einzelnen Stromschichten der gleiche Wirkungsgrad vorhanden ist[1].

VIII. Schiffswiderstand.

Bekanntlich tritt bei der Vorwärtsbewegung eines vollkommen in eine natürliche (zähe) Flüssigkeit eingetauchten Körpers ein Widerstand auf, den man als Flüssigkeitswiderstand bezeichnet (Bd. I S. 218). Seine Entstehung verdankt dieser Widerstand einerseits den tangential zur Körperoberfläche gerichteten Reibungskräften, welche einen Reibungswiderstand bedingen, und andererseits dem Umstand, daß die normal zur Körperoberfläche wirkenden Druckspannungen wegen der auf der Vorder- und Rückseite bestehenden Druckunterschiede in der Bewegungsrichtung eine Resultante bilden, den

[1] Thoma, D.: Neuere Anschauungen über die Hydrodynamik der Wasserturbinen. Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922). Berlin: Julius Springer 1924.

sog. Druckwiderstand. Beide Widerstandsanteile sind eine Folge der Zähigkeit und demnach dem Reynoldsschen Gesetz unterworfen, denn in einer reibungs- und wirbelfreien Flüssigkeit kann bekanntlich ein Flüssigkeitswiderstand nicht auftreten (d'Alembertsches Paradoxon).

Die Größe des Reibungswiderstandes hängt außer von dem flüssigen Medium von der Größe, Form und Beschaffenheit der Körperoberfläche sowie von der Größe der Geschwindigkeit ab. Der Druckwiderstand dagegen ist eine Folge des hinter dem Körper bei der Bewegung entstehenden Wirbelgebietes (Kielwasser). Seine Größe hängt wesentlich von der Körperform ab und wird um so kleiner, je kleiner das Kielwasser ist. Bei hydrodynamisch guten Körperformen kann der Druckwiderstand in geringen Grenzen gehalten werden (Bd. I S. 219).

Für einen vollkommen in Flüssigkeit eingetauchten Körper, wie z. B. ein Luftschiff oder ein in hinreichender Tiefe fahrendes Unterseeboot, setzt sich der Flüssigkeitswiderstand somit aus zwei Teilen zusammen: dem Reibungswiderstand und dem Druckwiderstand. Bewegt sich dagegen der zu untersuchende Körper — im vorliegenden Falle ein Schiff — in der Nähe der Oberfläche einer Flüssigkeit (als welche in Zukunft stets Wasser betrachtet werden soll), so tritt zu diesen beiden Anteilen noch ein dritter, nämlich der durch die Entstehung von Oberflächenwellen bedingte Wellenwiderstand. Er ist dem Froudeschen Ähnlichkeitsgesetz unterworfen, da die Wellenbewegung wesentlich von der Schwere und nur im geringen Maße von der Reibung beherrscht wird (vgl. S. 150).

Wie oben bereits bemerkt wurde, kann der Druckwiderstand durch entsprechende Formgebung des Schiffskörpers verhältnismäßig niedrig gehalten werden. Der Reibungswiderstand dagegen beträgt bei nicht zu großen Geschwindigkeiten oft 60 bis 70% des gesamten Widerstandes. Der Rest entfällt auf den Wellenwiderstand. Letzterer vergrößert sich mit wachsender Schiffsgeschwindigkeit und kann unter Umständen bis zu 60% des Gesamtwiderstandes ausmachen[1]. Außer den drei genannten Anteilen kommt noch der Luftwiderstand auf die sich über den Wasserspiegel erhebenden Teile des Schiffes in Betracht, über welchen im nächsten Abschnitt etwas eingehender berichtet wird.

Eine strenge theoretische Lösung ohne Zuhilfenahme empirischer Daten ist zur Zeit weder für den Gesamtvorgang noch für einen der drei Widerstandsanteile möglich[2]. Erschwerend kommt noch hinzu, daß letztere nicht voneinander unabhängig sind. Die Körperform ist zunächst verantwortlich für die Größe des Druckwiderstandes, welcher im wesentlichen eine Folge des Kielwassers ist. Da dieses eine andere Druck- und somit auch Geschwindigkeitsverteilung an der Körperoberfläche bewirkt als bei reiner Potentialströmung, wird auch der Reibungswiderstand durch die Körperform beeinflußt. Schließlich sind auch die

---

[1] Horn, F.: Theorie des Schiffes. Handb. phys. techn. Mech. Bd. 5 (1931) S. 622.

[2] Eine übersichtliche Zusammenstellung unserer heutigen Kenntnis ist enthalten in Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebs S. 1ff. Hamburg 1932.

Oberflächenwellen wegen der früher besprochenen Eigenbewegung der Flüssigkeitsteilchen (S. 153) und der durch die Wellung der Oberfläche bedingten Änderung der Benetzung des Schiffskörpers von Einfluß auf die Geschwindigkeitsverteilung und somit auf den Reibungswiderstand. Man hat es also mit einem äußerst verwickelten Strömungsvorgang zu tun, zu dessen Beschreibung und zahlenmäßiger Erfassung heute noch in weitgehendem Maße Modellversuche herangezogen werden müssen.

Aber auch hier entsteht sofort eine erhebliche Schwierigkeit dadurch, daß Reibungs- und Druckwiderstand dem Reynoldsschen Ähnlichkeitsgesetz gehorchen, der Wellenwiderstand dagegen dem Froudeschen Gesetz. Es ist also — ähnlich wie bei Wellenerscheinungen in offenen Gerinnen — eine strenge mechanische Ähnlichkeit bei der Übertragung von Modellversuchen auf die Großausführung gar nicht möglich, da beide Modellgesetze nicht gleichzeitig befriedigt werden können (S. 152).

Zur Erfüllung des Reynoldsschen Gesetzes muß unter der Voraussetzung, daß als Modellflüssigkeit dieselbe Flüssigkeit verwendet wird wie für die Großausführung (im vorliegenden Fall also Wasser), die Modellgeschwindigkeit gleich der λ-fachen Geschwindigkeit des wirklichen Schiffes sein $\left(\lambda = \frac{L}{l}, \text{ vgl. S. 151}\right)$, was sich — abgesehen von sehr kleinen $\mathfrak{R}$-Werten — praktisch nicht verwirklichen läßt. Wesentlich günstiger liegen in dieser Hinsicht die Verhältnisse bei dem Froudeschen Gesetz, da bei ihm die Geschwindigkeiten von Modell und Hauptausführung sich wie $1 : \sqrt{\lambda}$ verhalten (S. 152), was sich meßtechnisch ohne große Schwierigkeiten erreichen läßt. Man kann dann allerdings streng genommen nur den Wellenwiderstand mit Hilfe des Modellgesetzes umrechnen, während die übrigen Widerstände entweder erfahrungsgemäß oder durch besondere Rechnungen berücksichtigt werden müßten.

Zur Ermittlung des Reibungswiderstandes stehen verschiedene Formeln zur Verfügung, welche in der Hauptsache daraus abgeleitet wurden, daß man die aus der Rohrströmung gewonnenen Erkenntnisse sinngemäß auf die Strömung längs einer dünnen, ebenen Platte übertrug (vgl. Bd. I S. 222ff.) und auf diese Weise die mittlere Widerstandszahl der Oberflächenreibung

$$c_f = \frac{W_r}{2\,b\,l\,\frac{\varrho}{2}\,v^2}$$

bestimmte. Darin bezeichnen W_r den gesamten Reibungswiderstand, b die Breite, l die Länge und v die Geschwindigkeit der Platte (in ruhendem Wasser). Einige Angaben über die Größe von c_f sind im Bd. I S. 224ff. zu finden. v. Kármán[1] und Prandtl[2] haben in-

[1] Hydromechanische Probleme des Schiffsantriebes S. 50. Hamburg 1932.

[2] Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen, 4. Lief. 1932 S. 18.

zwischen die verbesserten Gesetze über den Rohrströmungswiderstand (vgl. S. 57ff.) auch auf die Plattenreibung übertragen und die obige Widerstandszahl c_f entsprechend verfeinert, so daß jetzt eine gute Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen vorliegt. Auf die Wiedergabe der ziemlich umständlichen Rechnung muß hier verzichtet werden. Als brauchbarer Näherungswert kann die von H. Schlichting[1] angegebene Formel

$$c_f = \frac{0{,}455}{\log\left(\frac{v\,l}{\nu}\right)^{2{,}58}}$$

benutzt werden, welche für Reynoldssche Zahlen $\mathfrak{R}_l = \frac{v\,l}{\nu} = 10^6$ bis 10^9 die wirklichen Verhältnisse gut wiedergibt[2].

Indessen besteht für die Übertragung der auf diese Weise an Platten gefundenen Reibungskräfte auf die benetzte Schiffshaut von gleicher Oberfläche noch die oben bereits erwähnte Schwierigkeit, daß der Reibungswiderstand bis zu einem gewissen Grade von der Schiffsform abhängt, und zwar derart, daß dadurch eine gewisse Vergrößerung des Reibungswiderstandes im Verhältnis zu demjenigen einer mit derselben Geschwindigkeit bewegten Platte entsteht[3].

Zur praktischen Ermittlung des Gesamtwiderstandes geht man zur Zeit folgendermaßen vor: Zunächst bestimmt man mittels Dynamometer in einer Versuchsrinne durch einen Schleppversuch den Gesamtwiderstand w des (im allgemeinen aus Paraffin hergestellten) Schiffsmodelles, und zwar bei einer Modellgeschwindigkeit $v = \frac{V}{\sqrt{\lambda}}$, wenn V die entsprechende Schiffsgeschwindigkeit darstellt (S. 152). Darauf berechnet man in der oben geschilderten Weise den Reibungswiderstand w_r des Modelles und subtrahiert diesen von w, so daß der Rest

$$w' = w - w_r$$

die Summe aus Druck- und Wellenwiderstand darstellt. Der Druckwiderstand ist bei guten Schiffsformen im allgemeinen nicht sehr erheblich. Da man ihn nicht gesondert bestimmen kann, faßt man ihn mit dem Wellenwiderstand zusammen und unterwirft beide jetzt dem Froudeschen Modellgesetz, wonach entsprechende Kräfte im Modell und in der Großausführung sich wie $1 : \lambda^3$ verhalten müssen (S. 152). Demnach wird der entsprechende Widerstand für letztere

$$W' = w'\,\lambda^3 = (w - w_r)\,\lambda^3,$$

und der Gesamtwiderstand

$$W = W' + W_r = (w - w_r)\,\lambda^3 + W_r\,,$$

wo W_r den ebenfalls durch Rechnung festzustellenden Reibungswiderstand des naturgroßen Schiffes darstellt. Auf diese Weise ist es möglich,

[1] Fußnote 2 S. 267.

[2] Vgl. auch L. Prandtl u. H. Schlichting: Das Widerstandsgesetz rauher Platten. Werft Reed. Hafen 1934, S. 1.

[3] Horn: a. a. O. S. 629.

den Gesamtwiderstand für verschiedene Schiffsgeschwindigkeiten V durch den Modellversuch zu bestimmen.

In Kanälen, bei denen für das Schiff nur eine beschränkte Fahrrinne zur Verfügung steht, erfährt der Gesamtwiderstand durch Änderung des Wellenbildes sowie durch den Einfluß der Reibung an den Kanalwänden mitunter eine beträchtliche Erhöhung gegenüber der Bewegung in einer unbegrenzten Flüssigkeit. Das ist bei beschränkter Fahrtiefe besonders dann der Fall, wenn die Schiffsgeschwindigkeit sich der Geschwindigkeit $V = \sqrt{gh}$ der Grundwelle nähert, während bei weiter wachsender Geschwindigkeit der Widerstand wieder abfällt. Auf die starke Veränderung des Wellenbildes in der Nähe dieses kritischen Wertes von V, auf welche das schnelle Ansteigen des Schiffswiderstandes in der Hauptsache zurückzuführen ist, wurde bereits auf S. 165 hingewiesen.

IX. Die Belastung von Bauwerken durch Windkräfte.

Bearbeitet von Prof. Dr.-Ing. **O. Flachsbart**, Hannover.

1. Allgemeines.

Die Berechnung der Querschnittsabmessungen und der Standsicherheit eines Bauwerkes, das durch Windkräfte belastet wird, setzt die Kenntnis der äußerstenfalls zu erwartenden Windbelastung voraus. In manchen Fällen (Schornsteine, Kühltürme) sind Windkräfte überhaupt die einzigen äußeren Lasten. In anderen Fällen, in denen das nicht zutrifft, beherrschen sie den Entwurf des Bauwerks häufig noch in starkem Maße (so bei Funktürmen, weitgespannten Eisenbrücken, Kran- und Fördergerüsten). Grundsätzlich müssen alle Bauwerke oder Bauwerksteile, die vom Winde merklich erfaßt werden können, „auf Winddruck" berechnet werden.

Ein vom Winde getroffenes Bauwerk ist physikalisch ein von einem Gas umströmter fester Körper. Da die größten Windgeschwindigkeiten 50 [m/sec] kaum überschreiten, werden die von der Bewegung herrührenden Dichteänderungen der Luft im allgemeinen kleiner als 1% sein[1]. Das erlaubt uns, die Luft als raumbeständige, zähe Flüssigkeit zu betrachten. Das Verhalten eines festen Körpers in einer solchen Flüssigkeit ist in Bd. I ausführlich behandelt worden[2]. Wegen der allgemeinen physikalischen Zusammenhänge darf daher auf die früheren Ausführungen verwiesen werden.

Erinnert sei daran, daß die Strömungsmechanik noch nicht zu einer abgeschlossenen Theorie der hydro- (bzw. der aero-) dynamischen Kräfte vorgedrungen ist. Nur gewisse Sonderfälle lassen sich theoretisch bereits beherrschen (u. a. dynamischer Auftrieb, Widerstand bei sehr

[1] Vgl. Bd. I S. 3. [2] Vgl. Bd. I S. 217ff.

kleinen Reynoldsschen Zahlen); zu ihnen gehört **nicht** das Windkraftproblem, bei dem es sich um die Ermittlung der aerodynamischen Kräfte auf umströmte Körper beliebiger Gestalt bei hohen Reynoldsschen Zahlen handelt. Die Frage nach der Windbelastung von Bauwerken muß daher vorläufig durch das Experiment beantwortet werden. Was die Theorie beizusteuern vermag, ist das Reynoldssche Ähnlichkeitsgesetz als ordnendes Prinzip und (notwendiges, aber nicht ausreichendes) Modellgesetz.

2. Windkraftzahl und Winddruckzahl. Definitionen.

Trifft ein Windstrom von der örtlich und zeitlich gleichförmigen Geschwindigkeit v [m/sec] auf einen ruhenden Baukörper, so wird auf den Körper eine Windkraft W [kg] ausgeübt (Abb. 201), für die man mit einem dimensionslosen Faktor c die allgemeingültige Beziehung anschreiben kann[1]:

$$W = c\,\frac{\varrho\,v^2}{2}\,F\ \text{[kg]} \qquad (355)$$

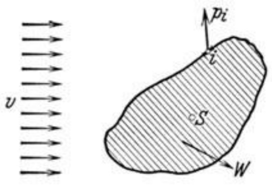


Abb. 201. Zur Definition der Windkraftzahl und der Winddruckzahl. v mittlere Windgeschwindigkeit im Unendlichen, praktisch gleichbedeutend mit der ungestörten Windgeschwindigkeit weit vor dem Bauwerk. W resultierende Windkraft (fällt im allgemeinen nicht in die Windrichtung und greift meist auch nicht im Körperschwerpunkt S an). p_i Druck an einer Stelle i der Körperoberfläche (seine Richtung fällt nicht zusammen mit der Normalen des Flächenelements im Punkte i).

(ϱ = Luftdichte = rd. 1/8 [kgsec^2/m^4] für normale Verhältnisse, F [m^2] eine in jedem Fall genau zu definierende, im übrigen beliebige „Bezugsfläche" des Körpers, etwa seine größte Querschnittsfläche). An irgendeiner Stelle i der Körperoberfläche wirkt dabei eine Kraft pro Flächeneinheit, ein Druck p_i, der je nach der Lage der betrachteten Stelle ein Unter- oder Überdruck sein kann und für den sich unter Benutzung eines dimensionslosen Beiwertes ζ_i analog schreiben läßt:

$$p_i = \zeta_i\,\frac{\varrho\,v^2}{2}\ \text{[kg/m}^2\text{]}\,. \qquad (356)$$

Die Gl. (355) und (356) sprechen nicht etwa ein physikalisches Gesetz aus; sie sind Definitionsgleichungen für die dimensionslosen Größen c und ζ, nicht mehr. Erst die experimentell zu ermittelnde Abhängigkeit der Größen c und ζ von den maßgebenden Zustandsgrößen (Körperform, Körperabmessung, Oberflächenrauhigkeit des Körpers, Geschwindigkeit und Richtung des Windes, physikalische Eigenschaften der Luft) bringt die physikalischen Zusammenhänge zum Ausdruck. Man bezeichnet c als Windkraftzahl, ζ als Winddruckzahl. Für den Staudruck $\frac{\varrho\,v^2}{2}$ der Windgeschwindigkeit v (S. 198) wird häufig die Abkürzung q gebraucht:

$$q \equiv \frac{\varrho\,v^2}{2}\,. \qquad (357)$$

Die Luftdichte ϱ in Abhängigkeit vom Luftdruck und von der Luft-

[1] Bd. I S. 219.

temperatur ist bekannt[1]. Die Bezugsfläche F ist durch die Gestalt des Bauwerks gegeben. Also lassen sich Windkraft W und Winddruck p berechnen, wenn die Windgeschwindigkeit v und die dimensionslosen Größen c und ζ bekannt sind.

3. Eigenschaften des Windes.

Den Definitionsgleichungen (355) und (356) liegt die Voraussetzung örtlicher und zeitlicher Gleichförmigkeit des Windstroms zugrunde. Die Luftbewegungen in der Atmosphäre erfüllen diese Bedingung nicht.

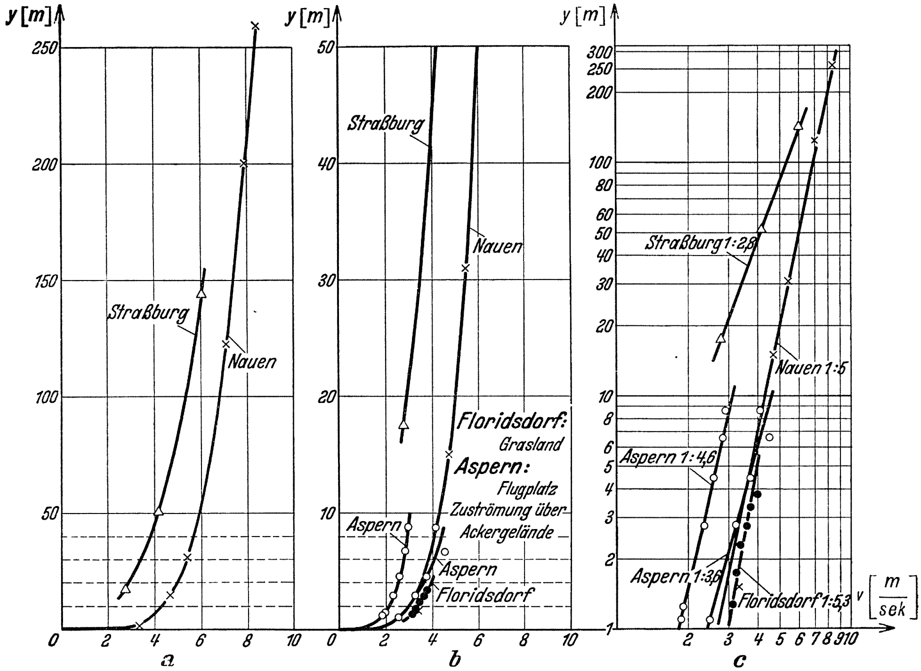


Abb. 202. a) und b) Verteilung der Windgeschwindigkeit über dem Erdboden (nach W. Schmidt u. a.). Aus der doppeltlogarithmischen Auftragung c) ist zu entnehmen, daß sich die Verteilung der Windgeschwindigkeit durch v prop. $y^{1/n}$ darstellen läßt; den Wert n entnimmt man unmittelbar aus der Neigung $1:n$ der durch die Meßpunkte gelegten Geraden.

Infolge der Reibung bildet sich über dem Erdboden eine mit verzögert strömender Luft erfüllte Reibungsschicht, deren Dicke mehrere Kilometer betragen kann. Unmittelbar am Boden ist die Windgeschwindigkeit Null. Die Ergebnisse einiger Messungen sind in Abb. 202 (a und b) zusammengestellt. Eine doppeltlogarithmische Auftragung (Abb. 202c) zeigt, daß sich die Abhängigkeit der Windgeschwindigkeit v von der

---

[1] Vgl. etwa Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, 1. Lief. S. 135. München und Berlin 1921 (1923). Zahlenangaben über die Abhängigkeit der Luftdichte von der Temperatur bei 760 mm Hg findet man auch im Bd. I dieses Lehrbuches auf S. 4. Der Wert $\varrho = 1/8$ [kgsec^2/m^4] gilt für 15° C und 760 mm Hg.

Höhe y über dem Erdboden mit genügender Genauigkeit durch den Ansatz v prop. $y^{1/n}$ zum Ausdruck bringen läßt, wobei n im wesentlichen von der Bodenbeschaffenheit abhängt. Mit Rücksicht auf die Abhängigkeit der Windgeschwindigkeit von der Höhe über dem Erdboden muß die Größe v in den Gl. (355) und (356) bei gegebener Verteilung $v = v(y)$ als Windgeschwindigkeit in einer genau definierten Höhe y über dem Boden betrachtet werden oder aber als „wirksame Geschwindigkeit", die — örtlich gleichförmig verteilt — am Bauwerk angenähert dieselben aerodynamischen Wirkungen hervorrufen würde wie der Windstrom mit der Geschwindigkeitsverteilung $v = v(y)$.

Daß die Luft zeitlich nicht gleichförmig strömt, ist jedem bekannt. Der Wind ist „böig". Man beobachtet das besonders deutlich bei Sturm, also bei Windstärken, die für Bauwerke Gefahr bedeuten. Ein eingehendes Studium des Böenmechanismus ist erst in letzter Zeit (u. a. mit Rücksicht auf die Bedürfnisse der Flugtechnik) in Angriff genommen worden. Statistisches Material über Böenstärken liegt bereits in größerem Umfange vor, ohne ausreichend zu sein[1]. Zuverlässige Unterlagen über den zeitlichen Verlauf und die räumliche Ausdehnung von Böen fehlen noch fast vollständig[2]. Mit Sicherheit läßt sich folgendes aussagen: In Mitteleuropa kommen in Höhen von 15 bis 20 m über dem Erdboden Windgeschwindigkeiten bis zu mindestens 45 [m/sec] vor. Böen von 30 bis 35 [m/sec] sind sogar relativ häufig, sie können minutenlang mit geringen Schwankungen andauern.

Ob die Windverteilung nach Abb. 202, die bei mittleren Windgeschwindigkeiten gemessen wurde, bei Sturm noch zutrifft, ist zweifelhaft. Exakte Messungen liegen nicht vor. Gewisse Beobachtungen deuten aber darauf hin, daß die Beziehung v prop. $y^{1/n}$, die sich für kleinere und mittlere Windgeschwindigkeiten bis zu sehr großen Höhen als gültig erwiesen hat[3], bei Sturmböen nur für eine dünne Schicht am Boden in einer Dicke von etwa 10 bis 20 [m] zutrifft. Weiter oberhalb scheint im allgemeinen eine örtlich und zeitlich unregelmäßig verteilte Strömung zu herrschen; es liegen aber auch Beobachtungen vor, aus denen geschlossen werden muß, daß eine ziemlich gleichmäßige Verteilung zum mindesten vorkommen kann[4].

Die strenge Berücksichtigung der zeitlichen Windstärkeschwankungen würde zum Verzicht auf die Formeln (355) und (356) zwingen, da beiden Definitionsgleichungen die Voraussetzung einer von der Zeit unabhängigen Strömung zugrunde liegt. Man kann sich aber anders helfen, wenn es nicht auf große Genauigkeit ankommt, und muß es bei dem gegenwärtigen Stande der Forschung sogar. Für den Standsicherheits-

[1] Seitz, H.: Zu den Baupolizeivorschriften über Winddruck. Bautechn. Bd. 10 (1932) S. 647 u. 664.

[2] Hingewiesen sei auf die noch nicht abgeschlossenen Böenmessungen an der Severnbrücke (England). Letzte Mitteilung darüber im Rep. Nat. Physic. Laboratory. London 1932.

[3] Strasser hat noch in 2 bis 3 km Höhe v-Verteilungen gemessen, die sich durch $v \sim y^{1/5}$ ziemlich gut wiedergeben lassen. (Änderung der Windgeschwindigkeit mit der Höhe über Wien. Meteorol. Z. 1928 S. 214).

[4] Nach einer brieflichen Mitteilung der Flugwetterwarte Berlin.

nachweis von Bauwerken wird es genügen, in die Gl. (355) und (356) Mittelwerte, gegebenenfalls auch beobachtete Maximalwerte der Windgeschwindigkeit einzusetzen. Schwieriger liegen die Verhältnisse für die Festigkeitsberechnung der Bauteile. Das Bauwerk führt infolge der Windstöße Schwingungen aus, es unterliegt infolgedessen zusätzlichen dynamischen Beanspruchungen. Man kann dem Rechnung tragen, indem man in die Gl. (355) und (356) mit einem „stationären Gleichwert der Geschwindigkeit" $v_s = \xi v$ eingeht ($\xi \geqq 1$), wobei v die während eines Sturmes häufiger auftretende Spitzengeschwindigkeit ist. Durch diesen Kunstgriff erreicht man, daß die in Wahrheit instationäre Strömung näherungsweise als stationär betrachtet, die Windlast also als ruhend angesetzt werden kann. Man ist dabei allerdings gezwungen, c- und ζ-Werte für stationäre Strömungen zu benutzen (meist Ergebnisse von Modellversuchen), da entsprechende Werte für instationäre Strömungen noch nicht bekannt sind. Wahrscheinlich sind die Fehler, die man dadurch macht, nicht erheblich.

Man überlegt sich leicht, daß ξ von der Böencharakteristik, von der Eigenschwingungsdauer und den Materialeigenschaften des Bauwerks abhängen muß. Theoretische Untersuchungen von Rausch[1], die allerdings wegen des Mangels an aerologischen Daten z. T. auf plausible Annahmen gestützt werden mußten, haben ergeben, daß für Gebäude mit hoher Eigenfrequenz (normale Wohn- und Industriegebäude, Eigenschwingungsdauer $\leqq \frac{1}{2}$ [sec]) $\xi \approx 1$ zu setzen ist, für schlanke biegsame Bauwerke (Hochhäuser, Industrieschornsteine, Funktürme — Eigenschwingungsdauer 1 bis 5 [sec]) dagegen $\xi = 1{,}05$ bis $1{,}25$ und mehr.

Welche Zahlenwerte für v zu wählen sind, muß bei der Unabgeschlossenheit des Beobachtungsmaterials dem Ermessen des Einzelnen überlassen bleiben. Hier mag ein unverbindlicher Vorschlag gemacht sein, der einerseits zwischen der Anpassung an die Wirklichkeit und der anzustrebenden Einfachheit des Rechnungsganges zu vermitteln sucht, andererseits zwischen den erforderlichen Rücksichtnahmen auf Bausicherheit und Bauwirtschaftlichkeit. Man rechne für den Festigkeitsnachweis etwa

bis zu einer Höhe von 20 m über dem angrenzenden Gelände	mit $v = 35$ m/sec (40 m/sec),
für Höhen > 20 m	mit $v = 40$ m/sec (45 m/sec),

gegebenenfalls Übergang von 35 m/sec auf 40 m/sec in mehreren Stufen und Berücksichtigung weiterer Geschwindigkeitszunahme oberhalb von 20 m. Die eingeklammerten Zahlenwerte beziehen sich auf besonders windreiche Gegenden[2].

[1] Einwirkung von Windstößen auf hohe Bauwerke, Z. VDI Bd. 77 (1933) S. 433ff.

[2] Mit $\varrho = 1/8$ [kg sec²/m⁴] entspricht einer Geschwindigkeit $v = 35$ [m/sec] ein Staudruck $q = \frac{\varrho v^2}{2} = 76{,}5$ [kg/m²] und einer Geschwindigkeit $v = 40$ [m/sec] ein Staudruck $q = 100$ [kg/m²]. Die im Nov. 1933 erschienenen holländischen Vor-

Die Richtungsunruhe des Windes pflegt man zu vernachlässigen. Die Windrichtung wird meist horizontal angenommen. In gewissen Fällen (z. B. bei der Berechnung von Dächern) ist es aber gut, daran zu denken, daß gelegentlich auch Luftmassen schräg von oben einfallen können.

4. Die experimentelle Ermittlung der Windkraft- und Winddruckzahlen.

a) Das Modellgesetz.

Daß die Ermittlung von c und ζ bei dem gegenwärtigen Stande der Theorie experimentell erfolgen muß, wurde bereits erwähnt. Es ist naheliegend, in erster Linie an Versuche an ausgeführten Bauwerken zu denken. Aber abgesehen davon, daß derartige Versuche kostspielig und zeitraubend sind, stehen ihrer Durchführung grundsätzliche Schwierigkeiten im Wege, auf die einzugehen, hier zu weit führen würde.

Das wesentliche Mittel zur Bestimmung von c und ζ ist der Modellversuch im Windkanal. Die Aufgabe des Großversuchs beschränkt sich auf die Kontrolle und Ergänzung des Modellversuchs.

Die Ergebnisse von Modellversuchen sind praktisch nur brauchbar, wenn die Gesetze für ihre Übertragung auf Großausführungen bekannt sind. Für die Mehrzahl aller Bauwerkstypen und zwar für Baukörper mit quer überströmten scharfen Kanten (normale Wohn- und Industriegebäude) sind diese Gesetze in ziemlich befriedigender Weise bekannt. Sind Bauwerksform, Windrichtung und Bodenbeschaffenheit gegeben, so gilt unter der Voraussetzung stationärer Strömung für jeden derartigen Baukörper (abgesehen von dem Gebiet kleiner Reynoldsscher Zahlen, das wir hier unbedenklich ausschließen können) mit ausreichender Annäherung

$$c = \text{const.}, \qquad \zeta_i = \text{const.} \tag{358}$$

oder, was dasselbe besagt,

$$W \text{ prop. } v^2, \qquad p_i \text{ prop. } v^2. \tag{358a}$$

Für die ganze Klasse von Bauwerken mit quer überströmten scharfen Kanten ist daher praktisch

c und ζ:
- abhängig allein von Bauwerksform, Windrichtung und Bodenbeschaffenheit;
- unabhängig von der Größe des Bauwerks, der Rauhigkeit seiner Oberfläche, der Geschwindigkeit und der Turbulenz des Windes und von der Zähigkeit und der Dichte der Luft, insbesondere also von der Reynoldsschen Zahl.

Die Übertragung des Modellversuchs auf die Großausführung wird hiernach sehr einfach (abgesehen von den früher erörterten Schwierigkeiten infolge der instationären Strömung des Windes).

---

schriften für die Winddruckberechnung von Bauwerken (holländ. Normblatt N 790) schreiben für Höhen $\lesseqgtr 20$ [m] je nach der geographischen Lage $q = 70$ bis 100 [kg/m^2] vor. Ähnlich die russischen Bestimmungen, die neben den holländischen bislang als einzige Vorschriften ihrer Art den Ergebnissen der neueren Strömungsforschung Rechnung tragen.

Beispiel: Es handle sich um die Windkraft auf einen quer zu seiner Ebene angeströmten Brückenträger. Die Daten für Modell und Original seien unterschieden durch die Zeiger m bzw. o. Linearer Modellmaßstab $1/\lambda$, woraus für die Bezugsfläche folgt $F_0 = \lambda^2 F_m$.

Im Modellversuch bei v_m [m/sec] am geometrisch ähnlichen Modell gemessene

Windkraft W_m [kg];

daraus Windkraftzahl

$$c_m = \frac{W_m}{\frac{\varrho v_m^2}{2} F_m} = \frac{\lambda^2 W_m}{\frac{\varrho v_m^2}{2} F_0}.$$

Aus $c = \text{const.}$ folgt

$$c_m = c_0$$

und hiermit für die Windkraft W_0 auf den wirklichen Brückenträger

$$W_0 = c_m \frac{\varrho v_0^2}{2} F_0 \text{ [kg]},$$

wenn v_0 die für die Großausführung einzusetzende Windgeschwindigkeit ist.

Das einfache Gesetz $c = \text{const.}$ verliert seine Gültigkeit für Bauwerke, die keine quer überströmten scharfen Kanten haben (kreiszylindrische Schornsteine, Gas- und Flüssigkeitsbehälter, aber auch scharfkantige Körper, deren scharfe Kanten in Windrichtung liegen). Für sie ist

c und ζ_i abhängig { von der Bauwerksform, der Bauwerksgröße, der Rauhigkeit der Bauwerksoberfläche, der Windrichtung, der Windstärke, der Windturbulenz, der Bodenbeschaffenheit, der Dichte und der Zähigkeit der Luft, unter anderem also von der Reynoldsschen Zahl.

Aus der Abhängigkeit der Windzahlen von so vielen Parametern erwachsen der Übertragung der Modellmessung erhebliche Schwierigkeiten, die heute noch nicht ganz überwunden sind. Das Übertragungsgesetz läßt sich hier allgemein nur so aussprechen: Für Bauwerke, die keine quer überströmten scharfen Kanten haben, darf das Ergebnis einer Messung nur dann unmittelbar vom Modell auf eine Großausführung übertragen werden (und umgekehrt), wenn — geometrische Ähnlichkeit und im übrigen gleiche Bedingungen vorausgesetzt — in beiden Fällen die Reynoldsschen Zahlen die gleichen ($\mathfrak{R} = \text{const.}$) und Oberflächenrauhigkeit und Windturbulenz dynamisch ähnlich sind.

Abgesehen davon, daß es noch gar nicht gelungen ist, die Bedingungen anzugeben, unter denen zwei Rauhigkeiten oder zwei Turbulenzgrade dynamisch ähnlich sind, stößt die Erfüllung der Bedingung $\mathfrak{R} = \text{const.}$ beim Modellversuch auf Schwierigkeiten, weil die hohen Reynoldsschen Zahlen der Großausführung (bedingt durch die großen Windgeschwindigkeiten und die großen Bauwerksabmessungen) sich im Modellversuch im allgemeinen nicht erreichen lassen. Man ist daher meist gezwungen, über einen mehr oder weniger großen Bereich Reynoldsscher Zahlen hinweg vom Modell auf die Großausführung zu extrapolieren — ein Verfahren, das nur dann nicht mit erheblichen Unsicherheiten behaftet ist, wenn c und ζ unabhängig von $\mathfrak{R}$ sind. Durch die Unabhängigkeit von $\mathfrak{R}$ sind aber nur die Windzahlen der

Baukörper mit scharfen, quer überströmten Kanten ausgezeichnet. Für gewölbte Bauwerksformen bleibt daher der Schluß vom Modell auf die Großausführung auf jeden Fall unsicher, solange nicht beide dieselbe Reynoldssche Zahl haben.

b) Einige Bemerkungen über die Technik des Modellversuchs.

Die Methoden, deren man sich bei der Durchführung von Modellversuchen im Windkanal bedient, können hier nur kurz angedeutet werden. Genauere Einzelheiten, auch über Windkanäle, findet man z. B. in Wien-Harms: Handbuch der Experimentalphysik Bd. IV, 2. Teil.

Sollen Windkräfte an einem Modell gemessen werden, so geschieht das am zweckmäßigsten durch Wägung, indem man das Modell mit Drähten oder dünnen Streben an Waagen (am besten Hebelwaagen, da sie die größte Meßgenauigkeit verbürgen) befestigt. Der Wägungsvorgang selbst zeigt keine Besonderheiten, nur muß man daran denken, daß die Windkraft auf die Aufhängungsorgane für sich gemessen und von der Windkraft der Gesamtanordnung in Abzug gebracht werden muß (vgl. S. 200).

Soll die Winddruckverteilung an allseitig geschlossenen Modellen gemessen werden, so kann man das Modell vollständig hohl ausführen. An einer windgeschützten Stelle, etwa auf der dem Wind abgekehrten Seite oder bei Modellen, die auf einer Bodenfläche stehen, an der dem Boden zugewandten Fläche, wird eine Schlauchtülle angesetzt, von der aus das Innere des Modells durch einen Gummischlauch mit einem außerhalb des Windstroms stehenden Manometer verbunden werden kann. Die Oberfläche des Modells wird mit geeignet verteilten, feinen Anbohrungen $\left(\lesseqqgtr \frac{1}{2}\ \mathrm{mm}\ \varnothing\right)$ versehen. Bei der Messung müssen von diesen Anbohrungen stets alle bis auf eine geschlossen sein. Man mißt dann den Druck, der sich durch das geöffnete Meßloch im Innern des Modells einstellt; es ist nahezu der Druck, der an der Stelle des Meßlochs herrscht, wenn die Meßöffnung nicht da wäre. Er wird es um so genauer sein, je kleiner die örtliche Störung durch das Meßloch, je kleiner also sein Durchmesser ist. Um die Störung durch das Meßloch zu eliminieren, kann man gegebenenfalls die Messung mit Meßlöchern von verschiedenen Durchmessern wiederholen und aus den gemessenen Drücken auf den Druck beim Meßloch vom Durchmesser 0 extrapolieren. Der Nachteil der beschriebenen Methode ist der, daß man jedesmal nur den Druck an einem einzigen Punkt der Oberfläche messen kann. Man vermeidet diesen Nachteil, wenn man auf der Innenseite des Modells eine Anzahl feiner Röhrchen (zweckmäßig Messingröhrchen) mit absolut dichtem Anschluß an den Wänden befestigt und sie durch die Modellwände hindurch mit feinen Anbohrungen versieht. Jedes der Röhrchen muß aus dem Innern des Modells an geschützter Stelle nach außen geführt und von dort mit Manometern verbunden werden. Das Verfahren wird besonders einfach, wenn man Mehrfachmanometer mit einer gefärbten Sperrflüssigkeit benutzt und das sich beim Versuch einstellende Bild der Flüssigkeitssäulen photographiert. Das Verfahren erlaubt, jedesmal so viel Drücke zu messen, wie Röhrchen angebracht sind. Es ist im übrigen das einzig mögliche Verfahren für Modelle, die nicht vollkommen geschlossen sind; will man an solchen Modellen die Druckverteilung innen und außen messen, so müssen die Wände doppelwandig ausgeführt werden. Vor Beginn einer Versuchsreihe überzeuge man sich davon, daß die Meßleitungen (zwischen Meßloch und Manometer) weder undicht noch verstopft sind.

Die Messung der Druckverteilung durch Anbohrungen liefert nur die Verteilung der Normalkomponenten des Druckes. Die Tangentialkomponenten lassen sich nicht ohne weiteres messen. Meist interessieren sie auch gar nicht, da sie klein sind. Man kann aber das Oberflächenintegral der Tangentialkomponenten, die Reibungskraft, berechnen, indem man von der durch Wägung gefundenen Windkraft das Oberflächenintegral der mit Hilfe von Anbohrungen gemessenen Normaldrücke vektoriell in Abzug bringt. Da es sich bei diesem Verfahren um die Ermittlung einer (kleinen) Differenz zweier großer Werte handelt, müssen die Messungen sehr sorgfältig sein, wenn das Ergebnis einigermaßen zuverlässig sein soll.

Die Modelle können entweder aus Holz oder aber aus Eisen- oder Messingblech hergestellt werden. Holz hat den Nachteil, daß es sich leicht verzieht. Bei Modellen aus Eisen- oder Messingblech muß man beim Auflöten der Messingröhrchen darauf achten, daß sich das Blech nicht wirft. Meßöffnungen in Holzmodellen stellt man am besten her, indem man in der Wand des Modells normal zur Wandfläche feine Messingröhrchen einläßt, deren nach außen weisende Öffnungen bündig in der äußeren Wandfläche des Modells liegen müssen. Stets ist darauf zu achten, daß die Meßöffnung frei von Grat, ihre Umgebung frei von örtlichen Störungen ist. (Das Verfahren, die Druckverteilung mit Hilfe von Anbohrungen zu messen, darf daher nur bei Modellen mit glatter Oberfläche angewandt werden!) Das Schließen von Meßlöchern erfolgt zweckmäßig mit Wachs oder mit einer Mischung aus Wachs und Paraffin; um eine Verstopfung der Röhrchen zu vermeiden, wohl auch mit dünnen Papierblättchen (dabei allerdings Gefahr, daß die Oberfläche und damit die Strömung gestört wird).

Die Nachahmung des Erdbodens kann durch eine ebene, genügend große, windseitig abgerundete oder zugeschärfte Bodenplatte (Holz) geschehen. Will man über der Bodenplatte eine Windgeschwindigkeitsverteilung erzwingen, wie sie etwa den in der Natur beobachteten Verteilungen der Abb. 202 entsprechen, so muß man die Oberfläche sehr rauh machen (z. B. durch Bespannung mit grober Sackleinwand). Meist genügt aber auch das nicht; dann sind besondere Kunstgriffe erforderlich[1]. Die Messung der Windgeschwindigkeitsverteilung über der Bodenplatte erfolgt mit kleinen Staurohren.

[1] Vgl. O. Flachsbart: Winddruck auf geschlossene und offene Gebäude. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen, 4. Lief. S. 128. München und Berlin 1932.

c) Ergebnisse von Messungen in Windkanälen[1].

α) **Baukörper mit quer überströmten, scharfen Kanten (Ähnlichkeitsgesetz $c = \text{const.}$, $\zeta_i = \text{const.}$).** Ebene, vollkommen frei stehende Wände, Wandebene normal zur Windrichtung. Die von Wieselsberger gemessenen Windkraftzahlen für quer angeströmte rechteckige ebene Platten (Wände) wurden bereits im 1. Band mitgeteilt[2]; sie sind hier in Abb. 203 noch einmal aufgenommen, vermehrt um neuere Versuchsergebnisse. Bezugsfläche für c ist die Ansichtsfläche $F = b\,h$ der Platten ($c = \dfrac{W}{\frac{\varrho\, v^2}{2}\, b\, h}$, W fällt aus Symmetriegründen in die Windrichtung). Man entnimmt der Abb. 203 die Bestäti-

[1] Literatur (die Abkürzung AVA bedeutet: Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen): Betz u. Langer: Messungen von Brückenträgern. AVA 3. Lief. 1927 S. 146. Bounkin u. Tcheremoukhin: Wind pressure on roofs and walls of buildings. Transactions of the Central Aero-Hydrodynamical Institute Nr. 35. Moskau 1928. Dryden and Hill: Wind-pressures on structures. Sci. Pap. Bur. Stand. Nr. 523. Washington 1926; Wind pressure on circular cylinders and chimneys. Bur. Stand. J. Res., Res. Pap. Nr. 221 (1930) S. 653; Wind pressure on cylindrical stacks. Physic. Rev. Vol. 35 (1930) S. 1416; Wind pressure on a model of a mill building. Bur. Stand. J. Res., Res. Pap. Nr. 301 (1931); Wind pressure on a model of the Empire State Building. Bur. Stand. J. Res., Res. Pap. Nr. 545 (1933); F. Eisner: Widerstandsmessungen an umströmten Zylindern. Berlin 1929. Fage and Johansen: On the flow of air behind an inclined flat plate of infinite span. Proc. Roy. Soc. (A) Vol. 116. London 1927. Fage and Warsap: The effects of turbulence and surface roughness on the drag of a circular cylinder. Rep. Mem. Aeron. Res. Committee Nr. 1283. London 1930. O. Flachsbart: Neue Untersuchungen über den Luftwiderstand von Kugeln. Physik. Z. 1927 S. 461; Winddruck auf Bauwerke. Naturwiss. 1930 S. 475; Winddruck auf Schornsteine. Naturwiss. 1931 S. 759; Winddruck auf vollwandige Bauwerke und Gitterfachwerke. Abhandl. d. Int. Vereinigung f. Brückenbau und Hochbau Bd. 1 S. 153. Zürich 1932; Grundsätzliches zur Frage des Winddrucks auf Bauwerke. Bauwelt 1932 S. 660; Messungen an ebenen und gewölbten Platten. AVA 4. Lief. 1932 S. 96; Der Widerstand von Kugeln in der Umgebung der kritischen Reynoldsschen Zahl. Ebenda S. 106; Winddruck auf geschlossene und offene Gebäude. Ebenda S. 128; Winddruck auf Gasbehälter. Ebenda S. 134. Flachsbart u. Winter: Modellversuche über die Belastung von Gitterfachwerken durch Windkräfte. Bautechn. 1934. Irminger u. Nøkkentved: Wind-pressure on buildings. Kopenhagen 1930. Nagel u. Langer: Messungen von Profilträgern. AVA 3. Lief. 1927 S. 151. Chr. Nøkkentved: Wind pressure on buildings. Abhandl. d. Int. Vereinigung f. Brückenbau und Hochbau Bd. 1 S. 365. Zürich 1932. Seiferth u. Langer: Winddruckmessungen an einem Gasbehälter. AVA 3. Lief. 1927 S. 144. Vgl. ferner: Beiträge zur Frage der Berücksichtigung des Windes im Bauwesen 1. Teil (Jb. dtsch. Ges. Bauing.-Wes. 1927 S. 87. Berlin 1928) und 2. Teil (ebenda Jb. 1928 S. 160. Berlin 1929). — Soweit im folgenden bei der Mitteilung von Meßergebnissen nichts anderes angegeben ist, handelt es sich um Messungen des Verfassers, ausgeführt in der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen.

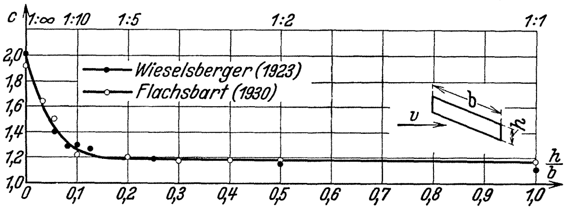


Abb. 203. Windkräfte auf quer angeströmte ebene Rechteckplatten.

[2] Vgl. Bd. 1 S. 220.

gung dafür, daß die Windkraft nicht nur von der Windgeschwindigkeit und der Bauwerksgröße abhängt, sondern außerdem von der Bauwerksgestalt (sie drückt sich für rechteckige Platten im Seitenverhältnis h/b aus). Es ist zweckmäßig, sich die Windkraftzahl für die unendlich lange Platte (ebene Strömung) $c =$ rd. 2,0 zu merken. Sie ist der größte aller c-Werte frei umströmter ebener Flächen: von allen ebenen Flächen erfährt daher unter im übrigen gleichen Bedingungen die Rechteckfläche in ebener Strömung die größte Windkraft. Daß rd. 70% dieser Windkraft auf den Unterdruck (Sog) der dem Wind abgewendeten Seite entfallen, läßt die in Abb. 204 aufgetragene Druckverteilung erkennen.

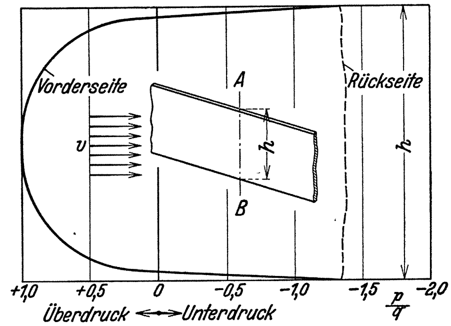


Abb. 204. Winddruckverteilung im Schnitt A—B einer quer zu ihrer Ebene angeströmten unendlich langen ebenen Platte (nach Fage und Johansen); aufgetragen sind die Winddruckzahlen $\zeta = \frac{p}{q} = \frac{p}{\frac{\varrho v^2}{2}}$.

Geneigte, frei stehende ebene Wände. Abb. 205 enthält die Ergebnisse von Messungen an zwei geneigten, ebenen Platten von verschiedenem Seitenverhältnis: einer quadratischen Platte (Kurve I) und einer rechteckigen Fläche vom Seitenverhältnis $h:b = 1:5$ (Kurve II). Aufgetragen ist über dem Neigungswinkel α der Platte (0^0 bis 90^0) das Verhältnis der Windkraftzahl c_α bei beliebigem Neigungswinkel α zur Windkraftzahl c bei $\alpha = 90^0$. Die Größe der Windkraftzahl c kann man der Abb. 203 entnehmen. Zum Vergleich ist das sin- und das sin²-Gesetz eingetragen, das in vielen behördlichen Vorschriften für die Berechnung von Bauwerken auf Winddruck vorgeschrieben ist; außerdem die aus Druckverteilungsmessungen abgeleitete Kurve III für die dem Wind zugewandte Seite von Satteldächern vollkommen geschlossener Gebäude (innerer Druck des Gebäudes gleich Druck der ruhenden Luft).

Geschlossene Gebäude. Abb. 206 zeigt die Winddruckverteilung an zwei Gebäudemodellen, die als schematisierte Typen normaler Wohn- und Industriegebäude betrachtet werden können. Die Mo-

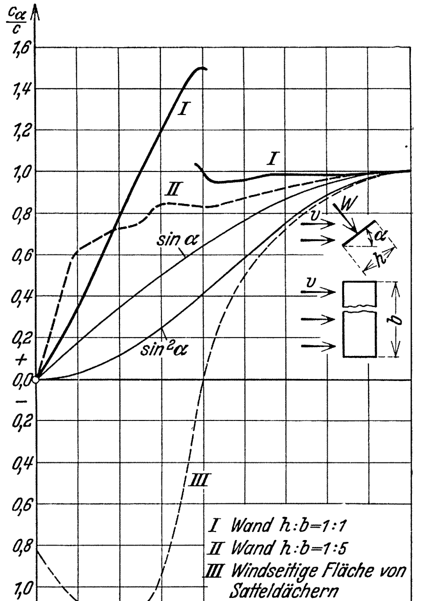


Abb. 205. Windkräfte an geneigten ebenen Wänden. Kurve I, II und III nach Messungen. Kurve III (nur angenähert gültig) ermittelt aus Druckverteilungsmessungen an Dachflächen vom Seitenverhältnis $h:b = 1:1$ bis $1:6$.

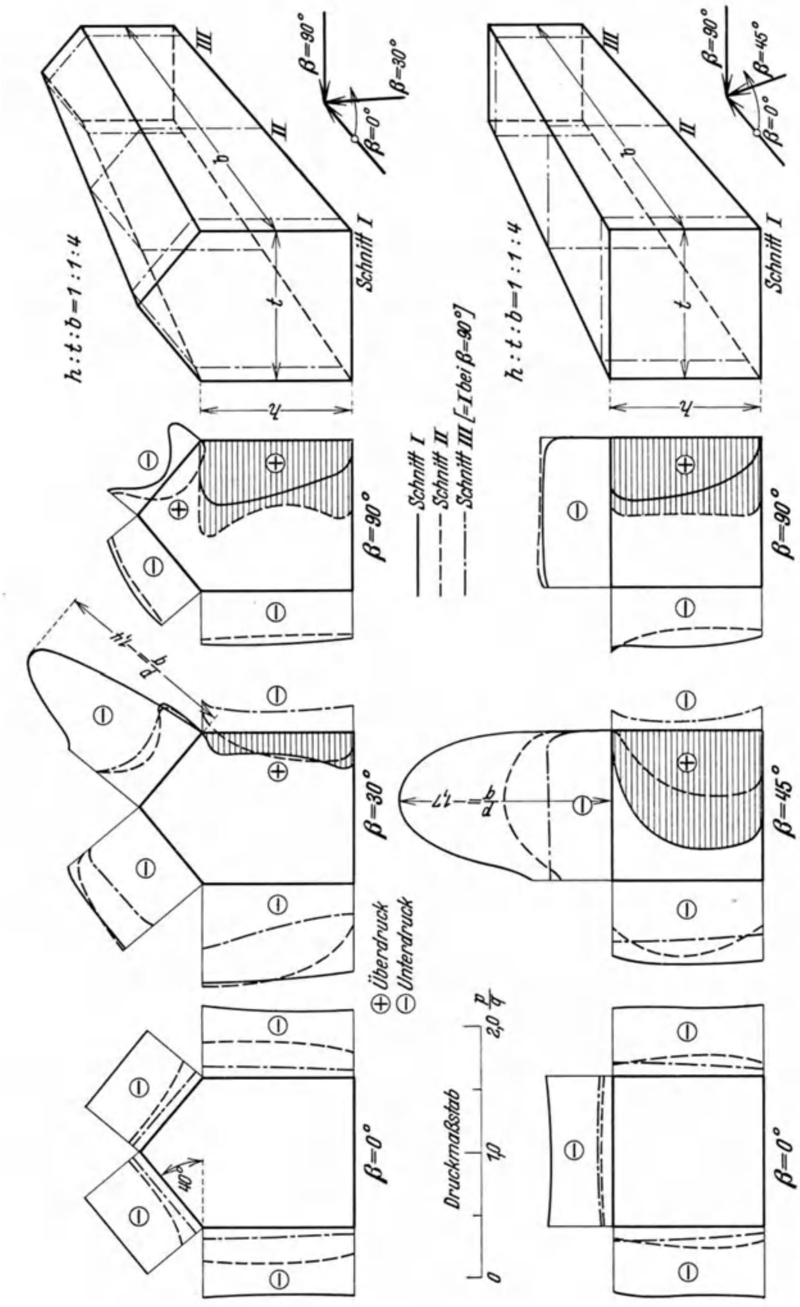


Abb. 206. Verteilung des Winddruckes an geschlossenen, vollkommen dichten Gebäudemodellen.

delle standen beim Experiment auf einer glatten ebenen Bodenplatte, die Dicke der Reibungsschicht betrug etwa $^1/_5$ der Traufenhöhe. Die

Windrichtung wurde in einer Ebene parallel zur Bodenplatte so gedreht, daß der Wind nacheinander gegen eine Schmalwand ($\beta = 0^0$), gegen eine Längswand ($\beta = 90^0$) und gegen eine senkrechte Kante des Hauses ($\beta = 30^0$ bzw. 45^0) blies. Der leichten Übersicht halber ist in Abb. 206 eine Schnittdarstellung gewählt derart, daß für je einen Anblaswinkel β die drei in der Abbildung gezeichneten Querschnitte I bis III mit den gemessenen Druckkurven jedesmal in einer Figur vereint sind. Alle Schnitte sind in Richtung des Windes beim Anblaswinkel $\beta = 0^0$ gesehen.

Das allgemeine Bild der Druckverteilung zeigt deutliches Überwiegen der Saugkräfte. Überdruck tritt nur an den windseitigen Flächen auf (bei $\beta = 0^0$ auch auf der windseitigen Querwand, deren Druckverteilung ebenso wie die Druckverteilung für die gegenüberliegende Querwand in der Abbildung nicht mitgezeichnet ist). Auf der dem Wind abgekehrten Seite nur Unterdrücke; auf den Dächern gleichfalls Unterdrücke mit einer kleinen Ausnahme beim Satteldach für $\beta = 90^0$. Größte Überdrücke nahezu $1\,q$ (der größtmögliche Überdruck ist $1\,q$). Die größten Unterdrücke treten auf den Dachflächen auf und zwar bei Schräganströmung (für die in Abb. 206 dargestellten Gebäudemodelle bei $\beta = 30^0$ bzw. bei $\beta = 45^0$) in denjenigen Teilen des Daches, die unmittelbar an die windseitige Querwand grenzen. Beim Satteldach wurde als größter Unterdruck $-1{,}4\,q$ gemessen, beim Flachdach $-1{,}7\,q$. In Schnitten, die noch näher an der windseitigen Schmalwand liegen als der Schnitt I, mißt man sogar Unterdrücke vom nahezu 3fachen Betrag des Staudrucks.

Die in Abb. 206 aufgetragenen Druckverteilungen sind Ergebnisse von Messungen an einzelnen, isoliert aufgestellten Gebäudemodellen. Der Fall des vollkommen frei stehenden Bauwerks wird in Wirklichkeit selten vorkommen. Liegen Nachbargebäude in der Nähe, so wirken sie im allgemeinen als Windschutz. Die Durchführung der Winddruckberechnung so, als ob das zu berechnende Gebäude allein vorhanden wäre, ist dann eine Maßnahme, die in der Regel im Sinne erhöhter Sicherheit wirkt. Daß das nicht immer der Fall zu sein braucht, zeigt eine Druckverteilungsmessung an 5 parallel nebeneinander stehenden kongruenten Gebäudemodellen, deren Ergebnis aus Abb. 207 zu ersehen ist. Der Abstand der Gebäude voneinander betrug das 0,4fache der Gebäudetiefe. Für diese Anordnung wurden bei Anblasung quer gegen die Giebelwände ganz erhebliche Unterdrücke auf den Längswänden gemessen, ihr Betrag erreichte maximal das 1,4fache des Staudrucks. Auf die Störung der Winddruckverteilung durch Unebenheiten des Geländes kann hier nur hingewiesen werden.

Die Messungen, deren Ergebnisse in Abb. 206 und 207 aufgetragen sind, wurden an geschlossenen Gebäudemodellen mit vollkommen dichten (undurchlässigen) Wänden und Dachflächen vorgenommen. In Wahrheit sind die Außenflächen eines Gebäudes, auch wenn alle Fenster und Türen geschlossen sind, durchlässig. Infolgedessen stellt sich im Innern des Gebäudes ein Druck ein, der verschieden ist vom Ruhedruck. Nøkkentved hat gezeigt, daß im Innern von Gebäudemodellen, deren Wände überall gleichmäßig durchlässig sind, ein Unterdruck von durchschnittlich $-0{,}3\,q$ herrscht. Die Durchlässigkeit von Bauwerkswänden dürfte aber selten so groß sein wie die der von Nøkkentved untersuchten Modelle. Die Annahme, daß im Innern eines geschlossenen Gebäudes höchstens ein Unterdruck vom Betrage des 0,2fachen des Staudrucks der ungestörten Windgeschwindigkeit herrscht, wird für bautechnische Berechnungen meist vollauf genügen.

Offene Gebäude. Befinden sich größere Öffnungen in einer Wand (offene Türen, geöffnete große Fenster), so pflanzt sich der Druck auf den betreffenden Wandteil in das Innere fort. Für Öffnungen von der Größenordnung einer Wandfläche ändern sich die Verhältnisse grundlegend. Die Abb. 208 liefert dafür ein Beispiel.

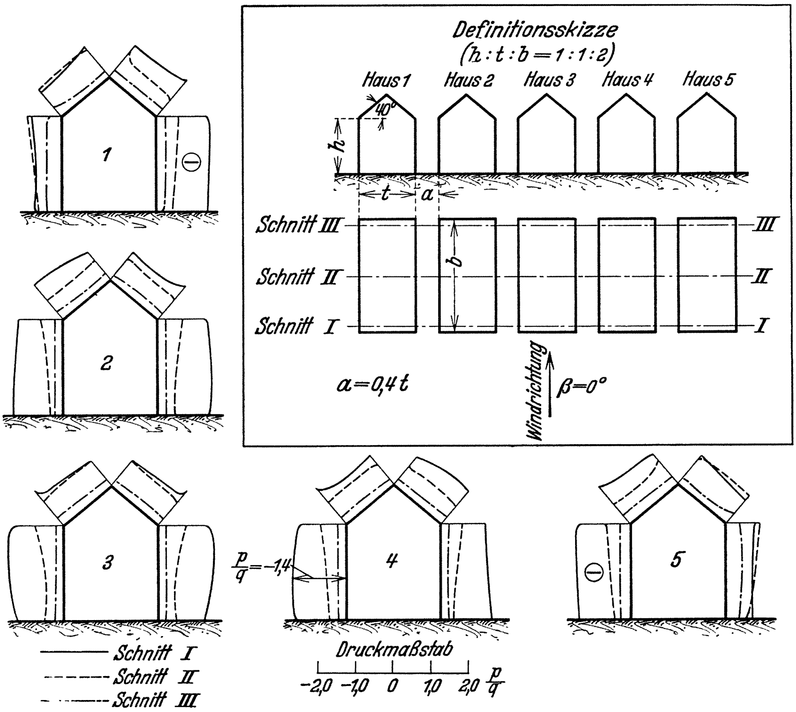


Abb. 207. Winddruckverteilung an 5 parallel nebeneinanderstehenden kongruenten Gebäudemodellen. Windrichtung quer zu den Giebelwänden. Glatte Bodenplatte.

Einzelne ebene Gitterfachwerke, Windrichtung quer zur Gitterebene. Führt man außer der Summe F [m²] der Ansichtsflächen aller Stäbe und Knotenbleche eines Gitterfachwerks seine Umrißfläche F_u ein, so läßt sich durch

$$\varphi = \frac{F}{F_u}$$

ein bequemes Maß für die Dichte oder die Durchlässigkeit des Fachwerks definieren. Man bezeichnet φ als Völligkeitsgrad des Fachwerks. Eiserne Brückenträger haben im allgemeinen Völligkeitsgrade $\varphi = 0{,}30$ bis $0{,}50$, Seitenwände von Funktürmen $\varphi = 0{,}10$ bis $0{,}25$. Für einen Vollwandträger ist $\varphi = 1{,}0$.

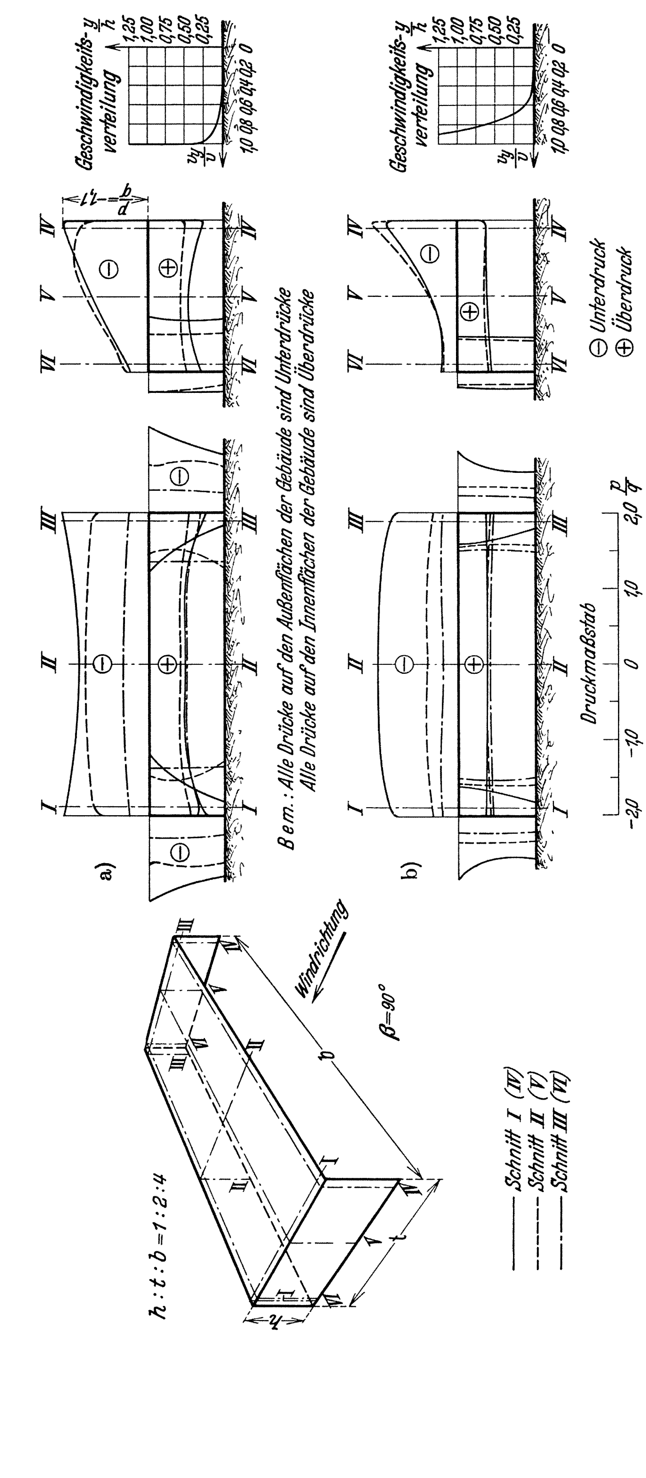


Abb. 208. Winddruckverteilung an einem einseitig offenen Hallenmodell bei zwei verschiedenen Geschwindigkeitsverteilungen über dem Boden: a) glatte Bodenfläche, dünne Reibungsschicht, b) rauher Boden, dicke Reibungsschicht.

Modellversuche haben gezeigt, daß die Windkraftzahl für ein Gitterfachwerk von gegebenem Umriß nahezu unabhängig vom Fachwerktyp, d. h. von der Anordnung der Füllstäbe zwischen den Gurten ist. Die Windkraftzahl ist mit praktisch ausreichender Annäherung allein eine Funktion des Völligkeitsgrades. Darüber hinaus hat sich gezeigt, daß für die praktisch gebräuchlichen schlanken Formen von Gitterträgern auch der Umriß des Fachwerks eine verschwindende Rolle spielt. Schließt man ungewöhnlich gedrungene Fachwerksträger aus, so kann man ganz allgemein mit folgenden Windkraftzahlen rechnen:

$\varphi = \frac{F}{F_u}$	$c = \frac{W}{\frac{\varrho v^2}{2} F}$
0 bis etwa 0,20	2,0
0,20 bis etwa 0,30	1,8
0,30 bis etwa 0,90	1,6
0,90 bis 1,0	2,0 *

In dem weiten Bereich $\varphi = 0{,}30$ bis $0{,}90$ ergibt sich demnach folgender, sehr einfacher Ausdruck für die Windkraft schlanker, quer zu ihrer Ebene angeströmter Gitterträger:

$$W = c\,\frac{\varrho v^2}{2}\,F = 1{,}6 \cdot \frac{1}{16} \cdot v^2 F\,,$$

$$\boxed{W = 0{,}1\,v^2 F}\ [\mathrm{kg}]^{**}\,, \tag{359}$$

wenn $\varrho = 1/8$ [kg sec²/m⁴], v in m/sec und F in m² eingesetzt werden.

Die resultierende Windkraft auf einen quer angeströmten ebenen Gitterträger liegt im allgemeinen nicht in Windrichtung. Die Tangentialkomponente der Windkraft ist aber so klein, daß sie — von besonderen Fällen abgesehen — vernachlässigt werden kann. Auch die bei Schräganblasung beobachteten Tangentialkräfte sind klein gegenüber den Normalkräften. Die Normalkomponente der Windkraft wird im übrigen bei Schräganblasung kleiner, die Anströmung normal zur Gitterebene ergibt daher die größte Windkraftkomponente normal zur Ebene des Trägers.

Zwei gleichartige ebene Gitterträger parallel hintereinander. Bei zwei Gitterträgern, die parallel hintereinander angeordnet sind (Beispiel: Brückenträger), liegt der dem Wind zugewandte Träger (I) im Staugebiet des dem Wind abgewandten (II) und der dem Wind

* Wenn die Träger nicht schlanker sind als etwa $h : b = 1 : 20$, kann auch im Bereich $\varphi = 0{,}90$ bis $1{,}0$ mit $c = 1{,}6$ gerechnet werden (vgl. die für $\varphi = 1{,}0$ gültige Abb. 203).

** Diese einfache Gebrauchsformel ist bereits von Rein (Versuchsarbeiten d. Deutsch. Eisenbauverbds. Vortrag München 1921, Bericht darüber im Bauing. 1921 S. 587) und von Buchegger (Windgeschwindigkeit und Winddruck. Bauing. 1922 S. 491) angegeben worden.

abgewandte Träger im Totluft-(Wirbel-)Gebiet des dem Wind zugewandten. Die Windkraftzahlen der beiden Träger können daher im allgemeinen nicht mehr die des isolierten einzelnen Trägers sein. Die Versuche zeigen aber, daß die Störungswirkung des rückwärtigen (II) auf den vorderen Träger (I) schon nahezu abgeklungen ist, wenn die Entfernung der beiden Träger voneinander etwa gleich der Trägerhöhe geworden ist (bei Trägern mit nichtparallelen Gurten gleich der mittleren Trägerhöhe). Läßt man kleinere Abstände außer acht, so kann man für die Windkraft W_I auf den vorderen Träger mit meist genügender Genauigkeit schreiben

$$W_I = c\,\frac{\varrho\, v^2}{2}\,F\ [\mathrm{kg}] \tag{360}$$

(c = Windkraftzahl des isolierten Trägers). Der Einfluß des vorderen auf den rückwärtigen Träger macht sich dagegen bis zu sehr großen Trägerabständen bemerkbar. Für den Sonderfall

Trägerabstand $\approx$ Trägerhöhe

ist die Windkraft auf den rückwärtigen Träger näherungsweise

$$W_{II} = W_I\,\varkappa\,(1-\varphi)^2\ [\mathrm{kg}] \tag{361}$$

mit

$\varkappa = 1{,}0$, wenn normal zur Trägerebene gesehen beide Träger auf Deckung liegen,

$\varkappa = 1{,}2$, wenn normal zur Trägerebene gesehen die Fachwerke beider Träger um eine halbe Feldweite gegeneinander versetzt sind.

Gittermaste, Funktürme. An Hand der in den Gl. (360) und (361) ausgesprochenen, durchaus vorläufigen empirischen Beziehungen läßt sich die Windkraft W_{ges} auf einen prismatischen oder angenähert prismatischen Gittermast mit quadratischem Grundriß sofort für den Fall der Anblasung quer zu einer Seitenfläche anschreiben. Unter Vernachlässigung der Reibung an den in Windrichtung liegenden Seitenflächen — was zulässig ist — findet man

$$W_{ges} = W_I + W_{II}\ [\mathrm{kg}]\,. \tag{362}$$

Dreht der Wind aus der Richtung quer zu einer Seitenwand um den Winkel β in einer Ebene normal zur Mastachse heraus, so wird die resultierende Windkraft größer. Die größte in die Windrichtung fallende Komponente der Windkraft tritt meist bei Anströmung in Richtung der Grundrißdiagonalen auf ($\beta = 45^0$). In einigen Fällen, so z. B. für den beim Zeesener Funkturm verwandten Fachwerktyp, wurde sie allerdings für eine Windrichtung $\beta \approx 25^0$ beobachtet. Messungen an Gittermasten, deren Seitenwände Völligkeitsgrade $\varphi = 0{,}18$ bis $0{,}30$ hatten, lassen erkennen, daß die überhaupt größte in die Windrichtung fallende Windkraftkomponente eines Gittermastes um 10 bis 20% größer ist als die entsprechende Komponente bei Anströmung normal zu einer Seitenfläche.

Die Kräfte quer zur Windrichtung sind bei Anströmung normal zu einer Seitenfläche ($\beta = 0^0$) so klein, daß sie vernachlässigt werden können. Bei Schräganströmung wurden quer zur Windrichtung Kräfte gemessen, die maximal — und zwar bei $\beta = 15^0$ bis 25^0 — etwa 15% der größten Windkraftkomponente in Windrichtung betragen. Bei $\beta = 45^0$ sind wieder wie bei $\beta = 0^0$ die Kräfte quer zur Windrichtung vernachlässigbar klein.

Aus den Gl. (361) und (362) kann auf die Windbelastung des ganzen Mastes nur dann unmittelbar geschlossen werden, wenn entweder der Mast konstanten Völligkeitsgrad über die ganze Höhe hat oder aber die Annahme eines mittleren Völligkeitsgrades erlaubt ist. Für Abspannmaste z. B. wird das letztere meist der Fall sein. Für Funktürme muß die Veränderlichkeit des Völligkeitsgrades mit der Höhe berücksichtigt werden. Man zerlegt zu diesem Zweck den Turm in einzelne Höhenabschnitte mit stückweise konstantem mittlerem φ, bestimmt für die einzelnen Abschnitte die Teilwindkräfte und ermittelt aus ihnen die gesamte Windkraft. In analoger Weise könnte eine Zunahme der Windgeschwindigkeit nach oben berücksichtigt werden.

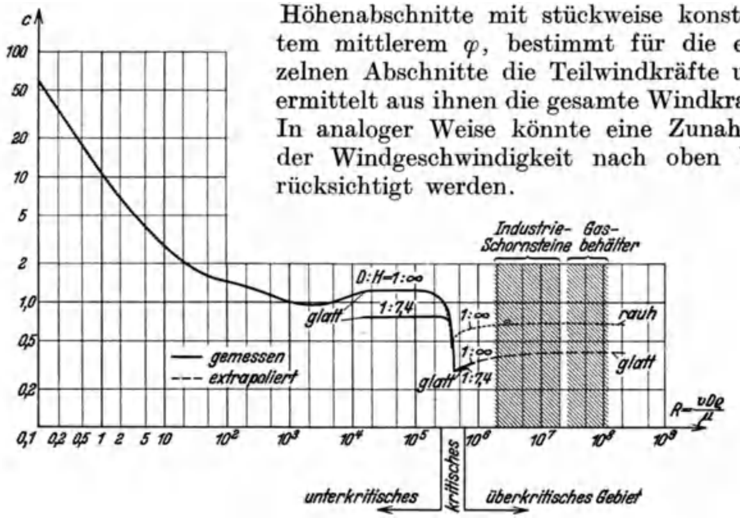


Abb. 209. Windkraftzahlen für Kreiszylinder vom Seitenverhältnis $D:H = 1:\infty$ und $1:7{,}4$ in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl. Windrichtung normal zur Zylinderachse. Die punktierte Kurve für den rauhen Zylinder ist interpoliert aus Messungen von Fage und Warsap, sie gilt für eine relative Oberflächenrauhigkeit, die ungefähr der eines Industrieschornsteines aus Ziegelmauerwerk entspricht. Der im überkritischen Gebiet eingezeichnete Meßpunkt ist das Ergebnis einer Druckverteilungsmessung, die Dryden und Hill an einem Schornstein aus Ziegelmauerwerk (mittlerer äußerer Durchmesser 3,5 m) ausführten.

β) **Körper ohne quer überströmte scharfe Kanten** (Windkraft- und Winddruckzahl abhängig von der Reynoldsschen Zahl, der Oberflächenrauhigkeit des Körpers und der Windturbulenz. Die für die Definition der Windkraftzahl c erforderliche Bezugsfläche F ist im folgenden stets die größte Querschnittsfläche des Körpers normal zur Windrichtung, die sog. Hauptspantfläche). Kreiszylinder, Windrichtung quer zur Zylinderachse. Die Windkraftzahl für einen Kreiszylinder mit technisch glatter Oberfläche und unendlichem Seitenverhältnis (Durchmesser:Höhe $= D:H = 1:\infty$) ist in Abb. 209 in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl $\mathfrak{R} = \frac{v\,D\,\varrho}{\mu}$ aufgetragen. Die Abhängigkeit von $\mathfrak{R}$ ist, wie man sieht und wie bereits im 1. Band gezeigt wurde[1], außerordentlich stark. Charakteristisch ist das kritische

[1] Vgl. Bd. 1 S. 220.

Gebiet in der Gegend von $\mathfrak{R} = 3 \cdot 10^5$, in dem die Windkraftzahl mit wachsender Reynoldsscher Zahl auf etwa ⅓ abfällt. Ändert man die Versuchsbedingungen, um den Einfluß des Seitenverhältnisses, der Windturbulenz und der Oberflächenrauhigkeit zu studieren, so ergibt sich folgendes:

Das Seitenverhältnis spielt bei glatten Zylindern nur im unterkritischen Gebiet eine merkliche Rolle (vgl. in Abb. 209 die c-Kurve für $D:H = 1:7{,}4$). Da die Reynoldsschen Zahlen der kreiszylindrischen Bauwerke (Industrieschornsteine, Gas- und Flüssigkeitsbehälter) im überkritischen Gebiet liegen, interessiert vornehmlich die Tatsache, daß das Seitenverhältnis überkritisch von geringem Einfluß ist. Es muß allerdings betont werden, daß die (auch bei glatten Zylindern nur annähernd gültige) Unabhängigkeit der Windkraftzahl vom Seitenverhältnis nur beobachtet wird, solange die Oberflächenrauhigkeit klein bleibt.

Erhöhte Turbulenz des Luftstroms verlagert das kritische Gebiet des Zylinders zu kleineren Reynoldsschen Zahlen. Da die Luftturbulenz im Freien sicher kräftiger ist als im Windkanal, wird man annehmen müssen, daß die kritische Zone im Freien bei kleineren Reynoldsschen Zahlen liegt, als in Abb. 209 gezeichnet. Für bautechnische Anwendungen interessiert so gut wie ausschließlich das überkritische Gebiet; der Verlagerung der kritischen Reynoldsschen Zahl durch die Windturbulenz braucht daher kaum Beachtung geschenkt zu werden.

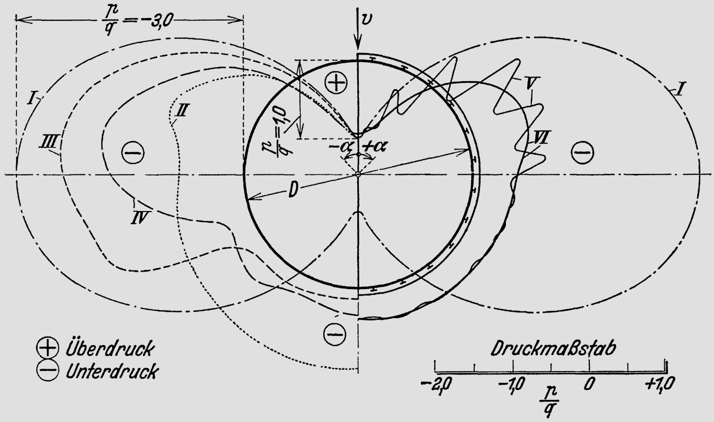
Je rauher die Oberfläche des Bauwerks bei gleichen Bauwerksabmessungen, allgemeiner gesprochen: je größer die relative Rauhigkeit des Bauwerks, desto größer die Windkraft. Vergrößerung der Oberflächenrauhigkeit bedingt vor allem im überkritischen Gebiet eine erhebliche Zunahme der Windkraftzahl. In Abb. 209 ist eine überkritische c-Kurve für einen unendlich langen Zylinder eingetragen, dessen relative Oberflächenrauhigkeit angenähert der relativen Rauhigkeit eines Industrieschornsteines aus Ziegelmauerwerk entspricht[1].

Die letztgenannten Meßwerte für einen rauhen Zylinder wird man etwa der Windkraftberechnung für Schornsteine zugrunde legen können. Nur darf dabei eins nicht übersehen werden: Die Reynoldsschen Zahlen von Industrieschornsteinen und erst recht diejenigen von kreiszylindrischen Gas- und Flüssigkeitsbehältern sind größer als die bislang im Modellversuch erreichten größten Reynoldsschen Zahlen. Ohne eine Extrapolation kommt man hier vorläufig nicht aus. Man wird einem Wert $c = 0{,}65$ bis $0{,}70$, im Mittel $c = 0{,}67$ zustimmen können. Der gleiche Wert wurde von Dryden und Hill bei Versuchen an einem ausgeführten Schornstein gefunden (ermittelt aus Druckverteilungsmessungen). Weitere Versuche an ausgeführten Bauwerken sind zur Klärung der hier vorliegenden Fragen aber dringend erforderlich.

---

[1] Relative Rauhigkeit = Verhältnis der mittleren Höhe eines Rauhigkeitshöckers zum Zylinderdurchmesser. Zum Begriff der relativen Rauhigkeit vgl. auch Bd. 1 S. 96.

Für dünnwandige kreiszylindrische Bauwerke (Gas- und Flüssigkeitsbehälter, Kamine großer Kühltürme) interessiert außer der resultierenden Windkraft die Verteilung des Winddrucks über die Bauwerksoberfläche. In Abb. 210 sind im Modellversuch gemessene Druckverteilungen für Kreiszylinder verschiedener Seitenverhältnisse und verschiedener Beschaffenheit der Oberfläche zusammengestellt. Soweit es sich dabei um Zylinder mit endlichem Seitenverhältnis handelt (auf dem Erdboden stehende kreiszylindrische Bauwerke), bezieht sich die dargestellte Druckverteilung auf einen Querschnitt in ungefähr halber Höhe; die Abhängigkeit der Druckverteilung von der Höhe über dem



Nr.	Zeichen	Modell		reziprokes Seitenverhältnis $\frac{H}{D}$	$\mathfrak{R} = \frac{v \cdot D \cdot \varrho}{\mu}$	Bemerkungen		Nr.
I	—·—·—	glatter Kreiszylinder		∞	∞	theoretisch (Potentialtheorie)		*I*
II	·······	,,		∞	$1{,}86 \cdot 10^5$	unterkritisch	gemessen	*II*
III	- - - - -	,,		∞	$6{,}70 \cdot 10^5$	überkritisch		*III*
IV	— — —	Gasbehältermodell auf Bodenplatte	Modell glatt	2,10	$6{,}00 \cdot 10^5$	überkritisch nach Seiferth u. Langer		*IV*
V	———		mit Versteifungsrippen	1,93	$7{,}40 \cdot 10^5$	überkritisch		*V*
VI	▬▬▬		desgl.	1,93	$7{,}40 \cdot 10^5$	desgl. Verbindungslinie der in den Feldmitten gemess. $\frac{p}{q}$-Werte		*VI*

Abb. 210. Winddruckverteilung an Kreiszylindern. Verteilung über den Umfang eines Querschnitts unter verschiedenen Bedingungen. $\frac{p}{q}$-Werte auf den Radien aufgetragen, Überdruck nach innen, Unterdruck nach außen.

Erdboden ist aber nicht erheblich. Wie dem unterkritischen und dem überkritischen Gebiet merklich verschiedene c-Werte entsprechen, so entsprechen ihnen hier merklich verschiedene Druckverteilungen. Nicht weniger deutlich macht sich die Oberflächenbeschaffenheit in der Druckverteilung bemerkbar. Kreiszylindrische Behälter mit glatter Außenhaut erfahren in der Gegend von $\alpha = \pm 80^0$ (Definition von α in Abb. 210) Unterdrücke vom Betrage des doppelten Staudruckes. Macht man die Oberfläche rauh, indem man sie, wie es z. B. bei wasserlosen Gasbehältern geschieht, außer mit horizontalen auch mit vertikalen Versteifungsrippen besetzt, so sinken die Unterdruckmaxima ungefähr auf die Hälfte. Für die Abschätzung der resultierenden Windkraft muß man allerdings beachten, daß die Versteifungsrippen gegenüber dem außen glatten Behälter eine zusätzliche Windkraft liefern. Im übrigen sei daran erinnert, daß die mit Hilfe von Anbohrungen gemessenen und in Abb. 210 aufgetragenen Druckverteilungen nur Auskunft über die Verteilung der Normalkomponenten des Druckes geben. Die Reibungskraft beträgt aber nur wenige Prozent der gesamten Windkraft[1].

Kugelförmige Baukörper. Die für Zylinder gemachten Feststellungen gelten sinngemäß für Kugeln. Gemessene Druckverteilungen findet man in der Literatur[2], allerdings für Kugeln mit glatter Oberfläche. Da aus den Zylindermessungen hervorgeht, daß sich der überkritische c-Wert und die überkritische Druckverteilung den unterkritisch gemessenen um so mehr annähern, je rauher die Oberfläche wird, ist es für die Winddruckberechnung kugelförmiger Baukörper mit rauher Oberfläche geraten, von den am glatten Modell gemessenen unterkritischen Werten auszugehen.

---

[1] Messungen des Verfassers haben ergeben, daß die Reibungskraft des Zylinders im unterkritischen Gebiet ($\mathfrak{R} = 10^4$ bis 10^5) 2 bis 5% der gesamten Windkraft beträgt (1929, unveröffentlicht). Neuere Messungen von Linke haben dieses Ergebnis bestätigt (W. Linke: Neue Messungen zur Aerodynamik des Zylinders, insbesondere seines reinen Reibungswiderstandes. Physik. Z. 1931 S. 900).

[2] Vgl. Literaturverzeichnis S. 278 Fußnote 1: Flachsbart: Neue Untersuchungen über den Luftwiderstand von Kugeln, Der Widerstand von Kugeln in der Umgebung der kritischen Reynoldsschen Zahl.

Sachverzeichnis.