

Mathematische Strömungslehre

Von

Dr. Wilhelm Müller

Privatdozent an der Technischen Hochschule
Hannover

Mit 137 Textabbildungen



Berlin
Verlag von Julius Springer
1928

ISBN-13: 978-3-642-98364-1 e-ISBN-13: 978-3-642-99176-9
DOI: 10.1007/978-3-642-99176-9

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.

Copyright 1928 by Julius Springer in Berlin.
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1928

Zum Gedächtnis meiner Lehrer

Felix Klein und **Karl Rohn**

Vorwort.

Das vorliegende Buch ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die der Verfasser an der technischen Hochschule Hannover vom Jahre 1922 an, besonders vor Studierenden der Mathematik, der techn. Physik und der Flugtechnik gehalten hat. Es strebt eine Vermittlung an zwischen den rein systematischen und den wesentlich technisch gerichteten Darstellungen der Strömungslehre und dürfte im 1. allgemeinen Teil mehr den Bedürfnissen des Mathematikers, im 2. im Hinblick auf die gegebenen Anwendungen mehr den Bedürfnissen des Ingenieurs Rechnung tragen, der an der Verbindung von Wissenschaft und Praxis interessiert ist. Vielleicht kann das Buch als Ergänzung betrachtet werden zu der im gleichen Verlage erschienenen technischen Hydrodynamik von F. Prášíl und den von M. Lagally und A. Betz bearbeiteten Abschnitten des VII. Bandes des Handbuches der Physik, von dem übrigens die gegenwärtige Bearbeitung, die bereits vor Erscheinen des Handbuches im wesentlichen fertiggestellt war, nur wenig beeinflusst ist.

Es versteht sich von selbst, daß bei dem zur Verfügung stehenden Raum und dem Umfang des durch die Forschungen der letzten Jahre reichlich angebauten Gebietes eine weitgehende Beschränkung geboten war. Trotz dieser sachlichen Beschränkung war ich bestrebt, unter Benutzung der vektoranalytischen Kurzschrift eine möglichst breite allgemeine Basis zu schaffen und auch die wichtigsten funktionentheoretischen Hilfsmittel zu entwickeln, die in den hydrodynamischen Ansätzen benötigt werden.

Was die dynamischen Grundgleichungen selbst angeht, so schien es mir nicht allein aus systematischen Gründen empfehlenswert, vom allgemeinen Bewegungs- und Spannungszustand des deformierbaren Körpers auszugehen und auch das innere Spannungsfeld der Flüssigkeit, jedenfalls zunächst als ein Tensorfeld einzuführen, d. h. in den ersten allgemeinen Ansätzen auch die inneren Reibungskräfte zu berücksichtigen. Nur dadurch wird es dem Leser ermöglicht, die Bedeutung der in der späteren Ausarbeitung und Anwendung eintretenden Vernachlässigung abzuschätzen und, was mir wesentlich scheint, die einzig sinngemäße Vorstellung des Druckes einer reibungslosen Flüssigkeit als eines Kugeltensors sich zu bilden.

Für die weitere Behandlung entschloß ich mich, um überhaupt im beschränkten Rahmen ein gewisses Ganzes bieten zu können, die idealen Ansätze in den Vordergrund zu stellen und auf die Lösung der allgemeinen Stokesschen Bewegungsgleichungen zu verzichten. Daher sind auch die Vorgänge in der „Grenzschicht“ nur insofern qualitativ zur Sprache gebracht, als es zur Erklärung der Unstimmigkeit zwischen

Theorie und Erfahrung unerläßlich war. Die strenge, auf die Grundgleichung und die rechnerischen Einzelheiten eingehende Darstellung, die übrigens einzig geeignet wäre, die Grenzsichttheorie in das angemessene Licht zu rücken, hätte den Rahmen der gegenwärtigen Einführung überschritten und müßte sinngemäß einem auf die Zähigkeitserscheinungen bezüglichen Sonderband zugeteilt werden.

Der erste spezielle Teil gibt einige Anwendungen der seit langem bekannten, aber offenbar noch immer nicht ausgeschöpften synthetischen Quellsenkmethode, die sich insbesondere zur Gewinnung der achsialen Strömung und, wie Herr v. Kármán zeigen konnte, auch der Querströmung um Rotationskörper als fruchtbar erweist. Wenn das Gebotene keinerlei Vollständigkeit anstrebt, so werden doch — wie ich meine — dem aufmerksamen Leser die nötigen Mittel an die Hand gegeben, weitere Stromfelder selbständig aufzubauen und dem in seinen Grundzügen gegebenen Zusammenhang mit den Zylinder- und Kugelfunktionen weiter nachzugehen. So gelingt es ohne viel Schwierigkeiten die Fuhrmannschen Luftschiffmodelle, von denen ein Fall behandelt ist und die entsprechenden Strombilder durch Legendresche Funktionen darzustellen, was auch der zeichnerischen Arbeit dienlich sein dürfte.

In der Wahl des weiteren Stoffes, der sich insbesondere auf die ebene Strömung bezieht, ließ ich mich von dem Gesichtspunkte leiten, möglichst diejenigen Problemstellungen und Anwendungsfälle zu berücksichtigen, die sich um die von Kutta, Joukowsky, Prandtl und seinen Schülern, v. Mises u. a. ausgebauten Tragflügeltheorie gruppieren lassen.

Während die ersten Fälle wieder nach dem Quellsenkenverfahren konstruiert werden, bildet der Fall der kreiszyllindrischen Berandung, der auch mit Rücksicht auf das Rotorproblem ziemlich ausführlich behandelt ist, gleichzeitig den natürlichen Ausgangspunkt für die Ableitung weiterer Fälle, insbesondere des Falles der zyklischen Strömung um ein Flügelprofil mit Hilfe der konformen Abbildung. Daß in der Bearbeitung der Tragflügeltheorie mehr wie vielleicht sonst üblich, die geometrischen Gesichtspunkte in den Vordergrund gestellt sind, mag mit dem Studiengang des Verfassers entschuldigt werden, der ursprünglich, wie das Widmungsblatt zum Ausdruck bringt, in der rein geometrischen Forschung beheimatet war. Ein besonderes, aus mehreren Abschnitten bestehendes Kapitel ist dem un stetigen Potentialansatz gewidmet, der, obwohl er zunächst einen vornehmlich mathematischen Charakter hat, nicht ungeeignet erscheint, einige auf die Widerstandstheorie bezügliche Fragen zu beleuchten, z. B. die Gleichberechtigung einer Diskontinuitätsfläche mit einem Wirbelsystem hinter einem umströmten Körper hervortreten zu lassen.

Die letzten beiden Kapitel beziehen sich auf den praktisch wichtigen Fall rotierender Strömungsgrenzen. Da es sich empfahl, die Theorie des Propellers, die hier nur im Auszug geboten werden konnte, besonders den Fall kleinsten Energieverlustes (oder kleinsten induzierten Widerstandes) in unmittelbarem Anschluß an die Tragflügeltheorie darzustellen, so sind die allgemeinen Sätze und Gleichungen für die Strömung in rotierenden Gefäßen in das letzte Kapitel verwiesen und in Verbindung gebracht mit den grundlegenden Formeln der Turbinentheorie. In den besonderen Ausführungen zum Problem der Strömung in Kreisrädern habe ich Gelegenheit genommen, einen Überblick über einige neuere mathematische Ansätze zu geben, die vom Prinzip der konformen Abbildung ausgiebigen Gebrauch machen.

Die Abbildungen sind mit wenigen Ausnahmen, die sich vor allem auf einige Diagramme beziehen, die geometrischen Strömungsbilder ausnahmslos nach Originalzeichnungen des Verfassers hergestellt. Nur bei einigen Zeichnungen wurde ich bei der Herstellung der endgültigen druckfertigen Form von den Herren Dipl.-Ing. Karl Mieke und cand. mach. W. Bartels unterstützt, wofür ich an dieser Stelle meinen Dank zum Ausdruck bringen möchte. Den Abb. 87, 88, 89 liegen Vorlagen von Herrn Prof. Ahlborn (Hamburg) zugrunde, die von ihm selbst nach seinen Photogrammen gezeichnet sind. Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Ahlborn für die Überlassung dieser Vorlagen und für die Anregung zu danken, die ich von der mir gütigst gestatteten Einsichtnahme in einen Teil seiner überaus reichen, bisher nur wenig in der Öffentlichkeit bekannten Sammlung von Strömungsphotographien, empfangen durfte.

Im übrigen muß ich noch meinen Dank aussprechen Herrn Geheimrat Emde, der mir vor einigen Jahren die erste Anregung zur Niederschrift einiger Kapitel der Strömungslehre gab, die ersten Abschnitte meines Manuskripts las und mir einige Ratschläge formaler Art erteilte. Herrn Prof. Prandtl für einen wertvollen Hinweis, Herrn Prof. Pröll für die auch auf das vorliegende Buch sich auswirkende Förderung, die mir während meiner langjährigen Tätigkeit im Gebiete seines Lehrstuhls zuteil geworden, Herrn Dr. Ing. K. Scholler, auf dessen Anregung der erste Teil des 20. Abschnitts zurückzuführen ist und Herrn Dr. Ing. A. Hinderks für die wirksame Unterstützung beim Lesen der Korrekturbogen.

Ein besonderer Dank gebührt schließlich der bewährten Verlagsbuchhandlung für die Sorgfalt, die sie der Ausstattung des Buches hat angedeihen lassen und für das bereitwillige Eingehen auf meine Wünsche während der Drucklegung.

Hannover, im Februar 1928.

Dr. Wilhelm Müller.

Inhaltsverzeichnis.

I. Grundgesetze der Strömungslehre.

	Seite
1. Der Bewegungs- und Spannungszustand der deformierbaren Materie . . .	1
2. Die Grundgleichungen für die inkompressible Flüssigkeit	6
3. Wirbel- und Potentialfelder	10
4. Gesetze der Potentialströmung.	14
5. Aufbau eines Strömungsfeldes aus Quellen und Wirbeln	16
6. Die allgemeinen Impulssätze.	22
7. Ähnlichkeitsgesetze	27

II. Umformungen und funktionentheoretische Hilfsmittel.

8. Umformung auf besondere Koordinatensysteme	29
9. Hydrodynamischer Charakter der Lösungen der Gleichung $\nabla^2\Phi=0$. .	35
10. Die ebene Potentialströmung	40
11. Die abbildenden Funktionen in der Ebene	43
12. Umformungen der Impulsformeln	46
13. Die Lagallyschen Formeln für die ebenen Strömungen mit diskreten Singularitäten	50

III. Strömungen um feste Körper.

14. Einfache Fälle achsensymmetrischer Strömung	54
15. Zusammengesetzte Fälle.	60
16. Physikalische Vorgänge. Resultate der Messung.	65
17. Querströmung um Rotationskörper.	69
18. Ebene Strömung um zylindrische Körper.	77
19. Zylinder im begrenzten Strom und Meßresultate	83
20. Erweiterung durch konforme Abbildung	86
21. Berechnung der Kräfte und Vergleich mit der Messung	91

IV. Stromfelder mit freien und gebundenen Wirbeln.

22. Systeme paralleler Stabwirbel	94
23. Wirbelschichten	100

V. Einfluß von Zirkulationen und Wirbeln auf den Strömungsdruck an zylindrischen Körpern.

24. Die Kräfte am bewegten Kreiszyylinder	106
25. Die Kräfte am rotierenden Zylinder (Magnus-Effekt)	113
26. Die Strömung um zwei rotierende Walzen	119
27. Strömung um einen rotierenden Zylinder mit freien Wirbeln	123

VI. Methode des un stetigen Potentials.

	Seite
28. Der klassische Ansatz.	129
29. Erweiterung des Rayleighschen Ansatzes für die Platte	134
30. Unstetiges Potential für die Strömung um den Kreiszyylinder.	138
31. Die Methode von Levi-Civita	144

VII. Theorie des Tragflügels.

32. Geometrie des Flügelprofils	148
33. Die Profilströmung mit Zirkulation.	152
34. Zirkulation und Wirbelschicht	156
35. Das Wirbelsystem am begrenzten Flügel	160
36. Die Kräfte am begrenzten Flügel	165
37. Lösung durch ein un stetiges Potential	172
38. Ergänzung zur Widerstandsberechnung	177
39. Zum Problem der instationären Tragflügelströmung	180

VIII. Aus der Theorie des Propellers.

40. Die achsensymmetrische Idealströmung in der Umgebung der Schraube	184
41. Zirkulations- und Wirbelfadentheorie des Propellers	188
42. Propeller mit geringstem Energieverlust	195
43. Kraft und Drehmoment beim günstigsten Propeller	203

IX. Strömung in Kreisel- und Turbinenrädern.

44. Allgemeine Sätze über die Strömung in rotierenden Gefäßen	207
45. Grundgleichungen der Turbinentheorie	211
46. Charakterisierung des strömungstheoretischen Hauptproblems	214
47. Ansätze für die ideale Strömung im Kreiselrad. Der Fall $n=1$	219
48. Die Strömung um einen radialen Schaufelkranz nach Spannhake	224
49. Strömung in Achsialturbinen	230
50. Der Ansatz von Sörensen für gekrümmte Schaufelspuren.	235

I. Grundgesetze der Strömungslehre.

1. Der Bewegungs- und Spannungszustand der deformierbaren Materie.

1. Um die mechanischen Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung der Körper übersehen zu können und einer genaueren Untersuchung zugänglich zu machen, ist es nötig, aus der Wirklichkeit, die zunächst nur die mannigfachsten Übergangs- und Mischformen zeigt, einzelne Typen von Körpern herauszuheben, die mit gewissen idealen, d. h. im mathematischen Bilde darstellbaren Eigenschaften des inneren materiellen Zusammenhangs ausgestattet sind. Während dem Begriff des starren Körpers, wie er in der gewöhnlichen Dynamik zunächst gebraucht wird, das abstrahierte Bild eines Aggregats von Massenpunkten zugrunde liegt, die selbst bei Anwesenheit von noch so großen Kräften unveränderliche Abstände behalten, haben wir für eine große Reihe von Erscheinungen die Möglichkeit einer gegenseitigen Verrückung der Teile oder einer Gestaltveränderung (Deformation) ins Auge zu fassen. Diese Vorstellung der Deformierbarkeit ist hier ferner dahin zu ergänzen, daß sowohl für die Massenverbreitung wie für die Bewegung im allgemeinen der kontinuierliche Charakter vorausgesetzt wird. Das würde mathematisch für die Bewegung bedeuten, daß die Geschwindigkeit der einzelnen Massenteile eine stetige, differenzierbare Funktion des Ortes wie der Zeit darstellt. Wie auf Grund dieser Voraussetzung die Unterscheidung der elastischen und der flüssigen Materie zu formulieren ist, wird die weitere Untersuchung lehren.

2. Die momentane Bewegung des starren Körpers kann als zusammengesetzt gedacht werden aus einer Schiebung (Translation) und einer Drehung. Bezeichnen wir den Vektor der Fortschreitgeschwindigkeit, die mit der Geschwindigkeit eines Punktes O der Drehachse identisch ist, mit \mathbf{v}_0 , den Vektor der Winkelgeschwindigkeit mit $\boldsymbol{\omega}$ und den Ortsvektor von O nach dem Aufpunkt P mit \mathbf{r} , so hat P die Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]. \quad (1)$$

Hier bedeutet $[\boldsymbol{\omega} \mathbf{r}]$ das Vektorprodukt der Winkelgeschwindigkeit und des Ortsvektors, wobei die Orientierung so getroffen ist, daß die

Drehung von w in die Richtung von r mit dem Produktvektor eine Rechtsschraubung ausmacht¹ (Abb. 1).

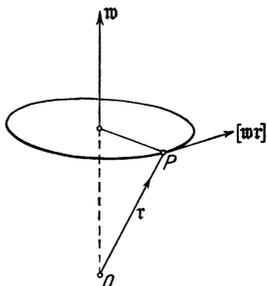


Abb. 1. Drehgeschwindigkeit.

Um die weitere Rechnung übersichtlich zu gestalten, benutzen wir das Symbol ∇ (sprich Nabla) der räumlichen Differentiation, d. h. den symbolischen Vektor, der durch die drei nach den Koordinatenrichtungen zerlegbaren Operationen $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ dargestellt ist. Steht das Zeichen ∇ vor einem Skalar, so ist der Gradient-Vektor des Skalars gemeint, während es vor einem Vektor die richtungslose Divergenz des Vektors (div.) bedeutet; wir haben also, wenn e_1, e_2, e_3

die Einheitsvektoren in den Achsenrichtungen bedeuten

$$\nabla \varphi = e_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + e_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + e_3 \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad \nabla \mathfrak{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

Die weiteren mit ∇ gebildeten Ausdrücke sind danach leicht abzuleiten. So bedeutet z. B. $\mathfrak{A} \nabla \cdot \mathfrak{B}$, die mit $|\mathfrak{A}|$ multiplizierte Ableitung des Vektors \mathfrak{B} nach der Richtung von \mathfrak{A} oder den Vektor, dessen Komponenten durch die Operation

$$A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}$$

aus den Komponenten von \mathfrak{B} abgeleitet werden².

Eine für die Folge physikalisch wichtige Größe ist nun der sog. Rotor der Geschwindigkeit, der nach der für Vektorprodukte gültigen Regel gebildet wird, wenn man statt des ersten Faktors das Symbol ∇ verwendet. Man hat dann in leicht verständlicher Schreibweise

$$\text{rot } \mathfrak{v} = [\nabla \mathfrak{v}] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

Wenn wir den Ausdruck (1) und die für den Rotor eines Vektorproduktes geltende Formel

$$\text{rot} [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] = \mathfrak{A} \cdot \nabla \mathfrak{B} - \mathfrak{B} \cdot \nabla \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \nabla \cdot \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \nabla \cdot \mathfrak{B} \quad (\text{a})$$

benutzen, so ergibt sich wegen $\nabla r = 3$, $r \nabla \cdot w = 0$ ($w = \text{konst.}$)

$$\text{rot } \mathfrak{v} = \text{rot} [w r] = w \cdot \nabla r - w \nabla \cdot r = 3 w - w = 2 w. \quad (\text{b})$$

Der Rotor der Geschwindigkeit eines Punktes des starren Körpers ist also gleich der doppelten Drehgeschwindigkeit.

¹ Vgl. Wilh. Müller, Dynamik I. Teil, Sammlg Göschen Bd. 902.

² Vgl. J. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung, 2. Aufl. Stuttgart 1926.

3. Um nach diesen Vorbereitungen den Bewegungszustand des deformierbaren Körpers zu verfolgen, nehmen wir innerhalb eines kleinen Bereichs um den Grundpunkt O einen Punkt P an und nennen \mathbf{r} den von O nach P gezogenen Radiusvektor. Unter der Voraussetzung der Stetigkeit erhalten wir dann die Geschwindigkeit in P aus derjenigen in O durch die Gleichung

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2)$$

oder ausführlich

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \mathbf{e}_1 \left(v_{0x} + x \frac{\partial v_x}{\partial x} + y \frac{\partial v_x}{\partial y} + z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_2 \left(v_{0y} + x \frac{\partial v_y}{\partial x} + y \frac{\partial v_y}{\partial y} + z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ + \mathbf{e}_3 \left(v_{0z} + x \frac{\partial v_z}{\partial x} + y \frac{\partial v_z}{\partial y} + z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (2a)$$

Wenn man folgende Bezeichnungen einführt

$$t_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad t_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad t_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (3)$$

$$t_{xy} = t_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right); \quad t_{yz} = t_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right); \quad (3a)$$

$$t_{xz} = t_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)$$

und die t_{ik} als Komponenten eines symmetrischen Tensors $\overline{\mathfrak{T}} = \text{def } \mathbf{v}$ auffaßt, so kann der Ausdruck $\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{v}$ in die Form gesetzt werden

$$\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} [\text{rot } \mathbf{v}, \mathbf{r}] + \overline{\mathfrak{T}} \mathbf{r}. \quad (4)$$

Der Ausdruck $\overline{\mathfrak{T}} \mathbf{r}$ ist das innere Produkt des Tensors $\overline{\mathfrak{T}}$ in den Vektor \mathbf{r} , also der ausführlich geschriebene Vektor

$$\mathbf{e}_1 (x t_{xx} + y t_{xy} + z t_{xz}) + \mathbf{e}_2 (x t_{xy} + y t_{yy} + z t_{yz}) + \mathbf{e}_3 (x t_{xz} + y t_{yz} + z t_{zz}).$$

Wenn wir schließlich die Hälfte des Rotors der Geschwindigkeit wieder $= \mathbf{w}$ setzen (in diesem Fall auch Wirbelvektor genannt), so gewinnen wir für den deformierbaren Körper die Grundformel

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\mathbf{w} \mathbf{r}] + \overline{\mathfrak{T}} \mathbf{r} = \mathbf{v}_0 + [\mathbf{w} \mathbf{r}] + \mathbf{v}'. \quad (5)$$

Die Gleichung zeigt durch Vergleich mit (1), daß die Bewegung des Körperelementes sich zusammensetzt aus einer Schiebung, einer Drehung und einer durch den Tensor $\overline{\mathfrak{T}}$ bestimmten Formänderung. Dieser Tensor wird auch als Deformations- oder Dilatationstensor bezeichnet. Wenn man die Geschwindigkeit \mathbf{v}' mit dem Zeitelement dt multipliziert, so erhält man den Vektor \mathfrak{d} der elastischen Verrückung, dessen Komponenten mit $\xi \eta \zeta$ bezeichnet werden mögen. Man sieht dann durch eine einfache geometrische Betrachtung, die hier übergangen werden muß, daß die ersten drei Komponenten der Dilatation $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}, \frac{\partial \zeta}{\partial z}$

einer Dehnung oder Zusammendrückung, die übrigen drei Komponenten zweiter Art einer Scherung entsprechen, welche die Winkel verändert, so daß ein parallel den zugeordneten Koordinatenebenen innerhalb des Körpers zu denkendes kleines Quadrat in ein Rhombus verwandelt wird. Für die Volumenänderung kommen daher nur die Komponenten erster Art in Frage. Ein kleines Parallelepiped mit den Seiten a, b, c , hat nach der Deformation das Volumen

$$\left. \begin{aligned} V + dV &= \left(a + \frac{\partial \xi}{\partial x} a \right) \left(b + \frac{\partial \eta}{\partial y} b \right) \left(c + \frac{\partial \zeta}{\partial z} c \right) \\ &= V \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\}.$$

Die auf die Volumeneinheit bezogene Dehnung ist also

$$\frac{dV}{V} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \operatorname{div} \delta. \quad (6)$$

4. Die Kräfte die auf einen deformierbaren Körper wirken, können von zweierlei Natur sein. Wir unterscheiden die sog. Feldkräfte oder Massenkkräfte, die gleichsam von außen dem Körper eingepägt werden und den Massenelementen verhältnismäßig gleich sind und die flächenhaft wirkenden Kräfte, die entweder innere Druck-, resp. Zug- oder Scherkräfte, resp. an der äußeren Oberfläche angreifende Reibungskräfte sein können. Ebenso wie man im ersten Falle die Kraft auf die Einheit der Masse (oder des Volumens) beziehen kann, so läßt sich auch die flächenhafte Kraftwirkung als Druck oder Zug auf die Einheitsfläche charakterisieren.

Wenn wir ein Element aus dem materiellen Verbande herausgeschnitten denken, so haben wir außer den elementaren Massenkkräften noch die inneren, in den begrenzenden (ebenen) Schnittflächen wirkenden Spannkkräfte p zu berücksichtigen, d. h. als äußere Kräfte anzubringen, damit bei Entfernung des übrigen Teiles keine Änderung des Bewegungs- oder Gleichgewichtszustandes eintritt.

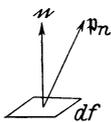


Abb. 2.
Spannungs-
vektor.

Jedem der Oberflächenelemente des Teilchens, das vektoriell durch das Produkt der Flächengröße d_f und des Einheitsvektors n in Richtung der äußeren Normalen dargestellt werden kann, ist nun ein im allgemeinen dagegen schief gerichteter Spannungsvektor $p_{(n)}$ zugeordnet (Abb. 2). Wenn wir mit ξ die auf die Einheitsmasse bezogene äußere Kraft, mit $d\tau$ das Volumenelement und mit

$\frac{\gamma}{g} d\tau = \rho d\tau$ das Massenelement bezeichnen, so lautet die erste Bewegungsgleichung für das Element $d\tau$

$$\left(\xi - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \rho d\tau + \oint p_{(n)} d_f = 0. \quad (7)$$

Bevor wir die Gleichung umformen, wenden wir sie auf ein unendlich kleines Tetraeder an, das wir erhalten, wenn wir die in dem Aufpunkt P parallel verschobene körperliche Ecke der Koordinatenebenen in unendlich kleinem Abstände von P durch eine weitere Ebene schneiden (Abb. 3). Da das Raumelement $d\tau$ von höherer Ordnung unendlich klein wird als df , so bleibt folgende Gleichung übrig

$$p_{(n)}df = p_1 df_1 + p_2 df_2 + p_3 df_3 \quad (8)$$

oder, wenn n die äußere Normale bezeichnet

$$p_{(n)} = p_1 \cos(nx) + p_2 \cos(ny) + p_3 \cos(nz). \quad (8a)$$

Hier bedeuten $p_1 p_2 p_3$ die drei Spannungsvektoren, welche den durch P gehenden Tetraederflächen zugeordnet sind. Zerlegen wir jeden dieser Vektoren nach den Richtungen xyz , so erhalten wir die drei linearen Gleichungen

$$p_{(n)x} = p_{xx} \cos(nx) + p_{yx} \cos(ny) + p_{zx} \cos(nz).$$

Die neun Größen p_{ik} sind die Komponenten des Spannungstensors, der der betrachteten Stelle des Körpers zugeordnet ist. Bezeichnet man diesen Tensor mit \mathfrak{P} , so ist $\mathfrak{P}n$, d. h. das innere Produkt des Tensors mit dem Einheitsvektor n nichts anderes wie der Vektor der zu der Fläche ndf zugehörigen Spannung, und wir haben

$$\overline{\mathfrak{P}n} = p_{(n)}.$$

Damit läßt sich die Bewegungsgleichung in die Form setzen

$$\varrho \left(\mathfrak{k} - \frac{dv}{dt} \right) d\tau + \oint \overline{\mathfrak{P}n} df = 0,$$

die etwa für die x -Richtung lautet

$$\varrho \left(k_x - \frac{dv_x}{dt} \right) d\tau + \int (p_{xx} \cos(nx) + p_{yx} \cos(ny) + p_{zx} \cos(nz)) df = 0.$$

Mit Hilfe des auf Tensoren verallgemeinerten Gaußischen Integralsatzes

$$\oint \overline{\mathfrak{P}n} df = \int \nabla \overline{\mathfrak{P}} d\tau, \quad (9)$$

der die Verwandlung eines Raumintegrals in das entsprechende Hüllintegral vermittelt¹, erhält man schließlich, wenn man die Begrenzung auf den Aufpunkt zusammenzieht,

$$\varrho \left(\mathfrak{k} - \frac{dv}{dt} \right) + \nabla \overline{\mathfrak{P}} = 0. \quad (10)$$

¹ F. Emde bezeichnet den Vektor, der entsteht, wenn man ∇ auf einen Tensor (Affinor) anwendet, auch als Traktor ($\nabla \mathfrak{P} = tr \mathfrak{P}$).

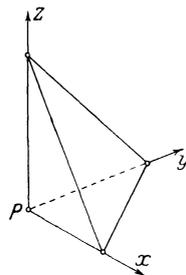


Abb. 3. Zur Zerlegung des Spannungsvektors.

Dieselben Umformungen können wir in der zweiten Bewegungsgleichung (Momentengleichung)

$$\left[\mathbf{r}, \left(\mathfrak{k} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \right] \rho d\tau + \oint [\mathbf{r} p_{(n)}] df = 0 \quad (11)$$

vornehmen und erhalten dann nach Elimination der Massenkräfte durch (10) die folgenden einfachen Beziehungen zwischen den Tensorenkomponenten zweiter Art

$$p_{xy} = p_{yx}, \quad p_{xz} = p_{zx}, \quad p_{yz} = p_{zy}. \quad (12)$$

Der Spannungstensor ist also ein symmetrischer Tensor, ebenso wie der Dilatationstensor. Eine anschauliche Vorstellung von der Zuordnung zwischen der Spannung und Richtung gewinnt man durch Konstruktion des sog. Spannungsellipsoids

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathfrak{P} \mathbf{r} = \text{konst} &= p_{xx}x^2 + p_{yy}y^2 + p_{zz}z^2 + 2p_{xy}x \cdot y \\ &+ 2p_{xz}xz + 2p_{yz}yz, \end{aligned}$$

dessen Haupteigenschaft bekanntlich darin besteht, daß die Richtung der Flächennormalen im Endpunkt eines Durchmessers von der Richtung \mathbf{n} die Richtung des Druckes angibt, welcher auf ein zu \mathbf{n} senkrechtcs Flächenelement wirkt.

Um die Vorgänge in elastischen Medien weiter verfolgen zu können, bedarf es noch gewisser empirischer Beziehungen zwischen den Komponenten des Spannungs- und Dilatationstensors, auf die in diesem Zusammenhang nicht weiter eingegangen werden kann.

2. Die Grundgleichungen für die inkompressible Flüssigkeit.

1. Um die allgemeinen elastischen Gleichungen dem Falle der Flüssigkeit anzupassen, setzen wir einschränkend voraus, daß die Flüssigkeit die Eigenschaft der Volumbeständigkeit haben, daß also die Divergenz der Geschwindigkeit in einem gewöhnlichen Punkt verschwinden möge. Wenn wir eine innere, der Formveränderung entgegenwirkende Reibung berücksichtigen, so können wir den Spannungstensor als zusammengesetzt betrachten aus dem hydrostatischen Druck p , der als Kugeltensor p senkrecht zu dem betreffenden Flächenelement steht und einem Tensor, der sich vom Deformationstensor nur durch einen Reibungskoeffizienten 2μ unterscheidet. Wir können dann setzen

$$\overline{\mathfrak{P}} + \overline{p} = 2\mu \text{def} \mathbf{v} \quad (1)$$

oder ausführlich

$$p_{xy} = 2\mu t_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \text{ usw.} \quad (1a)$$

$$p_{xx} = -p + 2\mu t_{xx} \quad \text{usw.} \quad (1b)$$

Wenn z. B. die Flüssigkeit in Schichten parallel der x -Ebene sich bewegt, so zwar, daß die Geschwindigkeit nur von der Koordinate y abhängt, so gilt die Beziehung

$$p_{xy} = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

und das einfache Gesetz, daß die Schubspannung in einer Schicht dem Geschwindigkeitsgefälle in der dazu senkrechten Richtung proportional ist.

Die zweite Gleichung (1b) dagegen ergibt, wenn keine Volumveränderung eintritt, die vom Koordinatensystem unabhängige Beziehung

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = -3p. \quad (2)$$

Die Druckgröße p ist absolut genommen der arithmetische Mittelwert der Normalspannungen für irgend drei zu einander senkrechte Schnittflächen.

Die Gleichungen (1) führen ferner zu einem einfachen Ausdruck für die Divergenz (den Traktor) des Spannungstensors. Wenn man $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ benutzt, so kommt, wie man etwa durch Ausrechnen der x -Komponente

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}$$

feststellt

$$\nabla \mathfrak{F} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (3)$$

wo ∇^2 die Operation $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ bedeutet.

Die Bewegungsgleichung 1, (10) geht also über in

$$\rho \left(\mathfrak{f} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} = 0. \quad (4)$$

Erfahrungsgemäß ist nun die Reibung innerhalb der Flüssigkeit sehr gering. Nur in unmittelbarer Nachbarschaft der Grenzen oder der Körperoberflächen, wo die Flüssigkeit haftet, ist das Geschwindigkeitsgefälle in der zur Strömung senkrechten Richtung außerordentlich groß, und daher kann hier auch das Produkt aus Reibungskoeffizient und Gefälle eine merkbare Größe erreichen. Obwohl, wie sich zeigen wird, diese Grenzschichtreibung schon ausreicht, um das Strömungsfeld wesentlich zu verändern, so wollen wir zunächst diesen Fall außer acht lassen und die innere Reibung vernachlässigen und damit auch die Scherungskomponenten $p_{xy} p_{xz} p_{yz}$ gleich Null setzen. Daraus ergibt sich dann, daß im Falle der „idealen Flüssigkeit“ jede Richtung eine Hauptachse des Spannungstensors ist, daß also das Spannungsellipsoid

in eine Kugel übergeht. In einem Punkte der Flüssigkeit herrscht die für jede Richtung gleichbleibende Druckspannung

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p. \quad (5)$$

Als Bewegungsgleichung ergibt sich dann ohne weiteres nach (4) die Eulersche Gleichung der Hydrodynamik

$$\ddagger - \frac{1}{\varrho} \nabla p = \frac{dv}{dt}, \quad (6)$$

die für die folgenden Entwicklungen die wesentliche Grundlage bleiben wird. Der hydrostatische Fall ist z. B. durch $\frac{dv}{dt} = 0$ gegeben. Wirkt etwa als einzige Kraft die Schwerkraft mit

$$k_x = k_y = 0, \quad k_z = -g,$$

so wird

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma, \quad p = -\gamma z + c.$$

Die Flächen gleichen Druckes in einem ruhenden Gefäß sind also horizontale Ebenen.

Den totalen Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach der Zeit kann man zerlegen in zwei Bestandteile, von denen der eine die Geschwindigkeitsänderung an dem festgehaltenen Ort, der andere die Änderung für einen Ortswechsel in demselben Zeitmoment angibt. In der bereits oben eingeführten Schreibweise hat man also

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \mathfrak{v} \frac{\partial v}{\partial \mathfrak{r}} = \frac{\partial v}{\partial t} + \mathfrak{v} \nabla \cdot \mathfrak{v}.$$

Die Eulersche Gleichung geht dann über in

$$\ddagger - \frac{1}{\varrho} \nabla p = \frac{\partial v}{\partial t} + \mathfrak{v} \nabla \cdot \mathfrak{v}. \quad (7)$$

2. Diese Bewegungsgleichung reicht noch nicht aus zur Bestimmung von \mathfrak{v} und p . Wir bedürfen noch der sog. Kontinuitätsbeziehung, die zum Ausdruck bringt, daß der Überschuß der (in der Zeiteinheit) aus einem Volumenelement austretenden über die in dasselbe eintretende Flüssigkeitsmenge gleich der Massenverminderung ist.

Wir haben also die Beziehung

$$\oint (\varrho \mathfrak{v}) d\ddagger = - \int \frac{\partial \varrho}{\partial t} d\tau,$$

die sich nach dem Gaußischen Lehrsatz umwandelt in

$$\int \nabla (\varrho \mathfrak{v}) d\tau = - \int \frac{\partial \varrho}{\partial t} d\tau.$$

Da diese Gleichung aber für jedes Volumen, also auch für ein Element $d\tau$ gilt, so haben wir als Ausdruck der Kontinuität

$$\nabla (\varrho \mathfrak{v}) + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0. \quad (8)$$

Ist die ideale Flüssigkeit inkompressibel, so wird die Dichte ρ konstant und die Gleichung geht über in

$$\nabla \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (9)$$

Nur an den Stellen, wo Flüssigkeit entsteht oder verschwindet, wird die Divergenz einen von Null verschiedenen Wert annehmen, der dann ein Maß für die „Ergiebigkeit“ der Quelle darstellt. Wenn wir daher für einen endlichen einfach zusammenhängenden Bereich, welcher keine „Quellen“ und „Senken“ umschließt, die Gaußsche Formel auf den Geschwindigkeitsvektor anwenden, so wird

$$\int \operatorname{div} \mathbf{v} d\tau = \oint \mathbf{v} n df = 0. \quad (10)$$

Fließt z. B. Flüssigkeit in einem Kanal und betrachten wir die Hülle, die aus den Kanalwänden und zwei Querschnitten f_1 und f_2 besteht, so verschwindet der auf die Kanalwand bezügliche Teil des Integrals, und wir erhalten

$$\int \mathbf{v}_2 d\mathbf{f}_2 - \int \mathbf{v}_1 d\mathbf{f}_1 = 0. \quad (11)$$

Wenn man diese Gleichung auf eine dünne Stromröhre anwendet, die von einem Bündel von Stromlinien, d. h. **Linien**, welche die Differentialgleichung

$$[\mathbf{v} d\mathbf{r}] = 0$$

erfüllen, gebildet wird und die Geschwindigkeitsänderung in einer Querfläche vernachlässigt, so erhält man die **Kontinuitätsgleichung** der Hydraulik in der Form

$$v_1 f_1 = v_2 f_2. \quad (12)$$

Sie drückt natürlich die einfache Tatsache aus, daß durch jeden Querschnitt in der Zeiteinheit dieselbe Flüssigkeitsmenge hindurchtritt (Abb. 4). Wenn man die gesamte Strömung durch solche aneinandergrenzende und gleichwertige, d. h. auf gleiche Sekundenmengen bezogene Stromröhren aufteilt, so sieht man, daß die Weite der Röhren umgekehrt proportional der Feldgeschwindigkeit ausfällt.

Dem Vorgehen in der Dynamik starrer Körper entsprechend, suchen wir einige Folgesätze aus den Bewegungsgleichungen zu entwickeln, und zwar erscheint es im Hinblick auf eine spätere Verwendung zweckmäßig, zunächst an die allgemeine Gleichung (4) anzuknüpfen. Zur Umformung benutzen wir zwei Vektorbeziehungen

$$\mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}]. \quad (c)$$

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \operatorname{grad} \nabla \cdot \mathbf{v} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}. \quad (d)$$

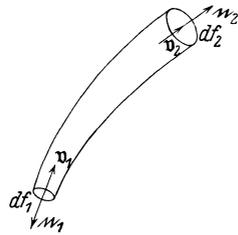


Abb. 4. Stromröhre.

Damit geht die Gleichung (4) über in

$$\mathfrak{k} - \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} - 2[\mathfrak{v} \mathfrak{w}] + \frac{\mu}{\rho} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{v}. \quad (13)$$

Bei Vernachlässigung der inneren Reibung haben wir

$$\mathfrak{k} - \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} - 2[\mathfrak{v} \mathfrak{w}]. \quad (14)$$

Wenn im Falle der idealen Flüssigkeit der Wirbelvektor verschwindet, und außerdem die Strömung stationär, d. h. $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = 0$ ist, so existiert, wie die Gleichung zeigt, immer ein Potential der äußeren Kräfte. Wenn wir ein solches Potential im allgemeinen Falle voraussetzen, also

$$\mathfrak{k} = -\nabla V,$$

ferner

$$\frac{p}{\gamma} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} + \frac{V}{g} = H,$$

substituieren, so geht unsere Gleichung (14) über in

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} - 2[\mathfrak{v} \mathfrak{w}] + g \nabla H = 0. \quad (15)$$

Im stationären Fall ist

$$[\mathfrak{v} \operatorname{rot} \mathfrak{v}] = g \nabla H, \quad (16)$$

wodurch zum Ausdruck gebracht wird, daß jede der Flächen $H = \text{konst.}$ ein System der \mathfrak{v} - und der \mathfrak{w} -Linien enthält¹.

Ist ferner die Strömung wirbelfrei und wirkt als einzige äußere Kraft die Schwerkraft, für die $V = gz$ zu setzen ist, so erhalten wir in

$$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{konst.} \quad (17)$$

die für die praktische Hydraulik fundamentale Bernoullische Beziehung, nach der die gesamte Energiehöhe, d. h. die Summe der geometrischen Höhe, der Druckhöhe und der Geschwindigkeitshöhe einen im ganzen Felde konstanten Wert hat.

3. Wirbel- und Potentialfelder.

Um die Bedeutung des Wirbelvektors näher ins Auge zu fassen, gehen wir von dem bekannten Satz von Stokes aus, der besagt, daß das Linienintegral eines Vektors über eine geschlossene Kurve gleich ist dem Integrale der Normalkomponente seines Rotors, erstreckt über eine von der Kurve umrandete Fläche (Abb. 5). Anwendung auf den Geschwindigkeitsvektor ergibt also die Gleichung

$$\oint \mathfrak{v} d\mathfrak{r} = \int \operatorname{rot} \mathfrak{v} ndf. \quad (1)$$

¹ Vgl. M. Lagally, Handb. d. Physik, Bd. VII, Berlin 1927, S. 28.

Die Ableitung der Gleichung kann dadurch geschehen, daß man sich zunächst auf einen kleinen Bereich beschränkt und von der bereits früher (Abschnitt 1) benutzten Gleichung

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\omega \mathbf{v}] + \mathbf{v}' \quad (2)$$

ausgeht, bei der Auswertung der Integrale¹ für eine geschlossene Kurve und der Verbindungsfläche in diesem Bereiche die in \mathbf{v}' auftretenden Differentialquotienten der Geschwindigkeitskomponenten nach den Koordinaten als konstant betrachtet, ferner die Beziehung

$$[\text{rot } \mathbf{v} \mathbf{r}] d\mathbf{r} = [\mathbf{r} d\mathbf{r}] \text{rot } \mathbf{v}$$

berücksichtigt. Dann ergibt sich zunächst für diesen Bereich

$$\oint \mathbf{v} d\mathbf{r} = \mathbf{n} \text{rot } \mathbf{v} df. \quad (3)$$

Die Ausdehnung auf beliebige geschlossene Kurven geschieht dann dadurch, daß man die Fläche in unendlich viele kleine Elemente zerlegt und ebenso das Randintegral als Summe der Randintegrale um die Elementarflächen darstellt (Abb. 6).

Legen wir nun zwei Flächen f_1 und f_2 durch die geschlossene Randkurve, so wird

$$\int_{f_1} \text{rot } \mathbf{v} \mathbf{n} df = \int_{f_2} \text{rot } \mathbf{v} \mathbf{n} df \quad (4)$$

f_1 und f_2 bilden zusammen eine geschlossene Fläche. Führen wir in beiden Integralen die äußere Normale dieser Fläche ein, so wird

$$\oint \text{rot } \mathbf{v} \mathbf{n} df = \int_{f_1} \text{rot } \mathbf{v} \mathbf{n} df + \int_{f_2} \text{rot } \mathbf{v} \mathbf{n} df.$$

Nach dem Gaußischen Lehrsatz wird daher

$$\int \nabla \text{rot } \mathbf{v} d\tau = 0. \quad (5)$$

Da der Raum beliebig ist, so muß überall die Divergenz des Rotors verschwinden. Allgemein folgt, daß, wenn sich ein Vektor α als Rotor eines andern darstellen läßt, die α -Linien nirgends Anfang oder Ende haben, sondern in geschlossenen Bahnen verlaufen.

Wie bereits aus den einleitenden Betrachtungen hervorgeht, ist die Wirbelbewegung dadurch charakterisiert, daß die Flüssigkeit in dem wirbelnden (unendlich kleinen) Bereich wie ein starrer Körper rotiert.

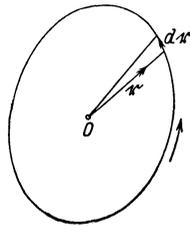


Abb. 5.
Zum Stokesschen Lehrsatz.

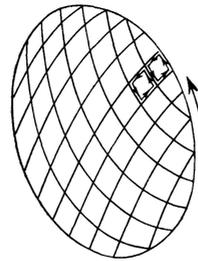


Abb. 6.

¹ Vgl. etwa H. Haas, Einführung in die theoret. Physik, I, Berlin 1923, S. 117.

Bestimmt man innerhalb der Flüssigkeit diejenigen Linien $[\omega d\tau] = 0$, deren Elemente die Rotationsachsen darstellen, so erhält man die sog. Wirbellinien. Der eben abgeleitete Satz zeigt, daß die Wirbellinien innerhalb einer idealen Flüssigkeit keine Endpunkte haben.

Wenn wir den Gaußischen Satz auf den Wirbelvektor anwenden, so ergibt sich

$$\int \nabla \omega d\tau = \oint \omega n df = 0. \quad (6)$$

Für eine von Wirbellinien begrenzte Wirbelröhre von unendlich kleinem Querschnitt wird daher

$$\omega_1 df_1 = \omega_2 df_2. \quad (7)$$

Das ist die Kontinuitätsgleichung für das Wirbelfeld. Sie besagt, daß das Produkt aus Wirbelstärke und Querschnitt eines Wirbelfadens, das sog. Wirbelmoment längs des Fadens konstant ist.

Die übrigen zuerst von H. Helmholtz aufgestellten Wirbelsätze ergeben sich leicht aus den mitgeteilten Grundformeln. Bilden wir etwa den Rotor der Energiegleichung

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - 2[\mathbf{v}\omega] + \nabla gH = 0,$$

so kommt

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - [\nabla[\mathbf{v}\omega]] = 0, \quad (8)$$

da der Rotor eines Gradienten verschwindet. Nun ist aber wegen $\nabla \mathbf{v} = \nabla \omega = 0$

$$[\nabla[\mathbf{v}\omega]] = \text{rot}[\mathbf{v}\omega] = \mathbf{v} \cdot \nabla \omega - \omega \cdot \nabla \mathbf{v} + \omega \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla \cdot \omega = \omega \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla \cdot \omega.$$

Wir erhalten also die Beziehung

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \omega \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \cdot \omega = 0,$$

die wegen

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \cdot \omega = 0$$

überegeführt werden kann in

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (9)$$

Wenn in einem Teilchen $\omega = 0$ ist, so folgt

$$\frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Das ist der Ausdruck für das Trägheitsgesetz der Wirbelbewegung in einer idealen Flüssigkeit. Diejenigen Teilchen, welche nicht

schon Rotationsbewegungen haben, werden auch im Verlaufe der Zeit keine solche Bewegungen annehmen können; umgekehrt werden die wirbelnden Teilchen ihre Wirbelbewegung nicht verlieren.

Wenn wir in der Richtung der Wirbelachse, um ein Stück $w \cdot de$ weitergehen, so ändert sich die Geschwindigkeit nach der Gleichung

$$v_1 = v + w \nabla \cdot v \cdot de = v + \frac{dw}{dt} \cdot de.$$

Nach der Zeit dt hat die Entfernung AA_1 der beiden Wasserteilchen den Wert

$$w de + (v_1 - v) dt = de \left(w + \frac{dw}{dt} dt \right),$$

d. h. $A'A_1$ fällt auf die neue Wirbellinie (Abb. 7). Die Wirbellinien werden also immer von denselben Flüssigkeitselementen gebildet. Ein Wirbelring ist als ein substantielles Ganzes anzusehen, das sich innerhalb der Flüssigkeit im Sinne des übrigen Geschwindigkeitsfeldes weiterbewegt. Wenn sich ein solcher Ring auflöst, so muß lediglich die innere Reibung dafür verantwortlich gemacht werden.

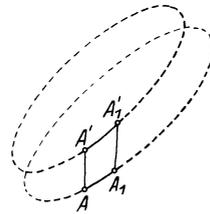


Abb. 7. Bewegung eines Wirbelringes.

Bei Berücksichtigung dieser Reibung haben wir nach Abschnitt 2 statt der Beziehung (9) die folgende Gleichung zu nehmen

$$\frac{dw}{dt} = w \nabla \cdot v + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 w, \quad (10)$$

aus der sich ergibt, daß, wenn momentan an irgendeiner Stelle keine Wirbelung vorhanden ist, die totale Ableitung des Wirbelvektors durch

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 w$$

dargestellt wird. Es ist also noch eine Wirbelbildung in der Nachbarschaft dieser Stelle möglich. Wenn die ganze Flüssigkeit augenblicklich wirbelfrei ist, so verschwindet w im Inneren, nicht aber an der Oberfläche. Die Wirbelbildung kann also auch in einer inkompressiblen reibenden Flüssigkeit unter dem Einfluß von Potentialkräften nur von der Begrenzung oder von der Oberfläche der in die Flüssigkeit eingetauchten Körper ausgehen. In der Tat nimmt man nach Prandtl an, daß die Quelle der Wirbelbildung in der den Körpern aufliegenden dünnen „Grenzschicht“ oder „Reibungsschicht“, d. h. in dem von besonderen Adhäsionskräften beherrschten Übergangsbereich zwischen Flüssigkeit und festem Körper zu suchen ist. Wir werden später auf diese Verhältnisse näher eingehen.

4. Gesetze der Potentialströmung.

Das Verschwinden von $\text{rot } \mathbf{v}$ in einem gewissen Gebiet der Strömung ist das notwendige und hinreichende Kriterium für die Existenz eines sog. Geschwindigkeitspotentials, d. h. einer Ortsfunktion Φ , deren Gradient mit dem Geschwindigkeitsvektor zusammenfällt. Führt man den Ausdruck

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi \quad (1)$$

in die Kontinuitätsgleichung $\nabla \mathbf{v} = 0$ ein, so ergibt sich die Laplacesche Differentialgleichung

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

die für alle Stellen Gültigkeit hat, die weder Wirbel noch Quellen und Senken enthalten. Wo dagegen Flüssigkeit entsteht oder verschwindet, d. h. Stromlinien beginnen oder enden, da hat $\nabla^2 \Phi$ einen von Null verschiedenen Wert, der die Ergiebigkeit der Quellen resp. die Schluckfähigkeit der Senken charakterisiert.

Die Gleichung

$$\Phi(xyz) = \Phi(\mathbf{r}) = c$$

stellt für jeden Wert von c die Gleichung einer Fläche dar, eine sog. Niveau- oder Potentialfläche. Aus

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt + \mathbf{v} d\mathbf{r}$$

folgt für $d\Phi = 0$

$$0 = \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

Die Fläche wird im allgemeinen mit der Zeit ihre Form und Lage ändern. Im stationären Fall bleibt sie bestehen. Allgemein ist in einem Augenblick

$$\mathbf{v} d\mathbf{r} = 0.$$

Die resultierende Geschwindigkeit steht in jedem Augenblick senkrecht auf der Äquipotentialfläche.

Die Potentialflächen bilden eine einfach unendliche Schar von Flächen, die sich im allgemeinen nicht durchschneiden; die zweifach unendliche Schar von orthogonalen Trajektorien des Flächenbüschels sind die Stromlinien des Feldes. Sie sind durch die Gleichung

$$dx:dy:dz = \frac{\partial \Phi}{\partial x} : \frac{\partial \Phi}{\partial y} : \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad \text{oder} \quad [d\mathbf{r} \nabla \Phi] = 0 \quad (3)$$

dargestellt.

Denkt man sich die Potentialflächenschar $\Phi = c$ so gezeichnet, daß die Konstante c um einen konstanten Wert ε zu oder abnimmt, so ergibt

sich aus dem Ausdruck

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \quad (n \text{ Normale}),$$

daß die Geschwindigkeit um so genauer den Abständen dn der Flächen proportional wird, je kleiner ε ausfällt.

Betrachten wir das Integral der Geschwindigkeit

$$\int_1^2 v dx = \int_1^2 \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx = \int_1^2 d\Phi, \quad (4)$$

so ergibt sich, Stetigkeit der Funktion vorausgesetzt, daß der Wert des Integrals nur abhängig ist von den Grenzen. Denkt man sich den Weg s_1 zwischen 1 und 2 stetig übergeführt in einen zweiten, beide Endpunkte verbindenden Weg s_2 , so ergibt sich unmittelbar aus dem Stokeschen Satz

$$\int_{s_1} v dx - \int_{s_2} v dx = 0; \quad \int_{s_1} v dx = \int_{s_2} v dx. \quad (5)$$

Diese Betrachtung gilt streng genommen nur für einen einfach zusammenhängenden Raum. Umgekehrt kann man sagen, daß die wirbellose Bewegung der Flüssigkeit in einem einfach zusammenhängenden Raum durch die Existenz eines eindeutigen Geschwindigkeitspotentials bestimmt ist. Die Stromlinien in einem solchen Raum können, wie wieder der Stokesche Satz ergibt, niemals geschlossene Kurven sein; sie müssen vielmehr einen Anfang und ein Ende haben.

Wendet man den Gaußischen Satz auf die Funktion $\Phi \cdot \nabla \Psi$ an, so erhält man den Greenschen Satz

$$\int \nabla \cdot (\Phi \nabla \Psi) d\tau = \oint \Phi \nabla \Psi n df. \quad (6)$$

Ist $\Phi = \Psi$ und Φ ein Geschwindigkeitspotential, so kommt

$$\int (\nabla \Phi)^2 d\tau = \oint (\Phi \nabla \Phi) n df. \quad (7)$$

Beide Seiten stellen, mit $\frac{\gamma}{g}$ multipliziert, die doppelte kinetische Energie (Wucht) der Flüssigkeit in dem Raumteil dar. Daraus folgt, daß, wenn Φ auf der Grenzfläche eines einfach zusammenhängenden Raumes, der von Flüssigkeit erfüllt, konstant ist oder wenn die Normal Komponente $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ der Geschwindigkeit verschwindet, Φ im ganzen Inneren konstant ausfällt. Es ergibt sich weiter, daß in einem von festen Wänden eingeschlossenen Raum keine Potentialbewegung stattfinden kann. Denn es muß überall $\nabla \Phi$, daher auch die Wucht verschwinden, was nur möglich ist, wenn $\Phi = \text{konst.}$ wird.

Die Bewegung einer begrenzten Flüssigkeitsmasse in einem einfach zusammenhängenden Raume, die ein Geschwindigkeitspotential Φ hat, ist also notwendig mit einer Bewegung der Oberfläche verbunden.

Ist diese Bewegung $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ gegeben, so ist dadurch auch die ganze Bewegung der eingeschlossenen Flüssigkeitsmasse eindeutig bestimmt, wie sich leicht durch Betrachtung der Differenz zweier angenommenen Funktionen Φ und Φ' ergibt, die beide die Bedingungen erfüllen. Ebenso ist die Strömung in einem einfach zusammenhängenden Raum bestimmt, wenn die Werte von Φ an der Begrenzung gegeben sind.

Wichtig für die Anwendungen ist die Betrachtung mehrfach zusammenhängender Räume, in denen das Geschwindigkeitspotential einen mehrdeutigen Charakter annimmt. Sei z. B. ein zweifach zusammenhängender ebener Bereich $R_{(2)}$ gegeben, der von zwei geschlossenen Kurven C und K begrenzt wird, so ist bekannt, daß man den Bereich durch einen Schnitt in einen einfach zusammenhängenden Bereich $R_{(1)}$ verwandeln kann, der von dem Kurvenzug $C, s, K, -s$ begrenzt wird. Es ergibt sich dann unmittelbar durch Anwendung des Stokesschen Satzes auf diesen Bereich, daß das Integral $\oint d\Phi$ längs K oder längs irgendeiner geschlossenen, beide Ränder s verbindenden Kurve C_1 , gleich dem längs C genommenen Randintegral ist (Abb. 8).

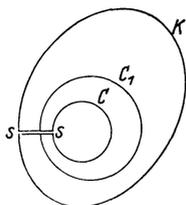


Abb. 8. Zweifach zusammenhängender Bereich.

Das Strömungsfeld kann also so ausfallen, als ob innerhalb des von C umschlossenen, nicht zu $R_{(2)}$ gehörigen Gebietes Wirbelzentren vorhanden wären, wie man umgekehrt einem Strömungsfeld durch Ausschluß des vorhandenen Wirbelzentrums ein mehrdeutiges Potential zuordnen kann. Φ ist dann eine sog. zyklische Funktion. Einen derartigen Bereich $R_{(2)}$ erfüllt z. B. das bis ins Unendliche reichende Strömungsfeld um einen unendlich langen Zylinder.

In einem n -fach zusammenhängenden Raume ist Φ bestimmt, wenn in jedem Punkt der Grenzfläche die Normalkomponente der Geschwindigkeit vorgeschrieben ist, ebenso der Wert der Zirkulation längs jeder der n unabhängigen und unreduzierbaren Kurven, die in dem Raum gezogen werden können. Denn sind Φ_1 und Φ_2 zwei Potentiale, die diesen Bedingungen genügen, so ist $\chi = \Phi_1 - \Phi_2$ eine eindeutige Funktion, welche der Gleichung $\Delta\chi = 0$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ an der Grenze genügt, also konstant sein muß.

5. Aufbau eines Strömungsfeldes aus Quellen und Wirbeln.

Aus dem oben angegebenen Greenschen Satz ergeben sich weitere Formeln, die wichtige Folgerungen zulassen.

Subtrahiert man die Gleichung 4, (6) und die daraus durch Vertauschung von Φ und Ψ hervorgehende, so kommt

$$\oint (\Phi \nabla \Psi - \Psi \nabla \Phi) ndf = \int (\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi) d\tau. \tag{1}$$

Setzt man $\Psi = 1$, so wird

$$\oint \nabla \Phi n df = \int \nabla^2 \Phi d\tau. \quad (2)$$

Setzt man $\Psi = \frac{1}{r}$, so wird $\nabla^2 \Psi = 0$ außer für $r = 0$. Man erhält dann die Beziehung

$$\oint \left(\frac{1}{r} \nabla \Phi - \Phi \nabla \frac{1}{r} \right) n df = \int \frac{1}{r} \nabla^2 \Phi d\tau - \int \left(\Phi \nabla^2 \frac{1}{r} \right) d\tau. \quad (3)$$

Das letzte Integral verschwindet, wenn die Hülle den F Punkt $r = 0$ ausschließt. Wenn sie den Punkt umfaßt, wird

$$\int \Phi \nabla^2 \frac{1}{r} d\tau = 4\pi \Phi_0,$$

wenn Φ_0 den Wert von Φ im Punkte $r = 0$ bedeutet.

Damit erhalten wir

$$4\pi \Phi_0 = \int \frac{\nabla^2 \Phi}{r} d\tau - \oint \left(\frac{1}{r} \nabla \Phi - \Phi \nabla \frac{1}{r} \right) n df. \quad (4)$$

Die Formel erlaubt also die Berechnung von Φ , wenn in dem gegebenen Raum $\nabla^2 \Phi$ und an seiner Hülle Φ und $\nabla \Phi$ gegeben sind. Wenn $\Phi = 1$ ist, so ergibt sich

$$\int \nabla^2 \frac{1}{r} d\tau - \oint \nabla \frac{1}{r} n df = 0 \quad \text{oder} \quad = 4\pi, \quad (5)$$

je nachdem die Hülle den Nullpunkt ausschließt oder einschließt.

Wenn man den Integrationsraum bis ins Unendliche sich ausdehnen läßt und annimmt, daß Φ im Unendlichen nicht langsamer als $\frac{1}{r}$ verschwindet, so geht (4) über in

$$4\pi \Phi_0 = \int \frac{\nabla^2 \Phi}{r} d\tau. \quad (6)$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir die Aufgabe behandeln, das Geschwindigkeitsfeld in einem Raume R zu berechnen, wenn die Quellen und Wirbel gegeben sind.

Die Lösung dieser Aufgabe für einen einfach zusammenhängenden Raum R wird eindeutig, wenn im ganzen Raum Quellen und Wirbel, d. h. die Divergenz und der Rotor des Geschwindigkeitsvektors und auf der Oberfläche F außerdem die Normalkomponente $v n df$ gegeben ist. Denn wenn v_1 und v_2 zwei Lösungen wären, so müßte $u = v_1 - v_2$ ein quellen- und wirbelfreier Vektor sein, dessen Normalkomponente an der Hülle von R verschwindet. Setzt man aber $u = \nabla \Phi$, so folgt aus der Beziehung

$$\oint \Phi u n df = \int \nabla (\Phi u) d\tau = \int \Phi \nabla u d\tau + \int u^2 d\tau$$

wegen ∇u und $u n df = 0$ an der Hülle

$$\int u^2 d\tau = 0.$$

Der Differenzvektor u muß also überall Null sein.

Wenn der Raum R ins Unendliche wächst, so ist v schon eindeutig bestimmt, wenn seine Quellen und Senken bekannt sind und wenn v im Unendlichen wie $\frac{1}{r^2}$ verschwindet, wie man erkennt, wenn man den Stokesschen Satz auf eine unendlich große Kugelfläche um den Punkt 0 im Endlichen anwendet. Sei z. B. ein wirbelfreies Feld durch die Quellen $\nabla v = q$ gegeben. Dann können wir die Potentialfunktion Φ und damit v ohne weiteres aus der Formel (6) bestimmen:

$$\begin{aligned} 4\pi\Phi &= -\int \frac{q d\tau}{r_Q}, \\ v &= -\nabla \frac{1}{4\pi} \int \frac{\operatorname{div} v d\tau}{r_Q}, \end{aligned} \quad (7)$$

wo r_Q den von der Quelle ausgehenden Radiusvektor bedeutet, der den in (6) benutzten entgegengesetzt zu nehmen ist.

Ebenso kann man ein quellenfreies Geschwindigkeitsfeld aus der Wirbelverteilung berechnen. Denkt man sich nämlich v zunächst als Rotor eines quellenfreien Vektors a dargestellt

$$v = \operatorname{rot} a,$$

so ergibt sich wegen $\operatorname{div} a = 0$

$$2v = \operatorname{rot} \operatorname{rot} a = \nabla \cdot \operatorname{div} a - \nabla^2 a = -\nabla^2 a.$$

Wendet man also die Gleichung (6) auf die Komponenten von a an, so erhält man die Vektorbeziehung

$$v = \operatorname{rot} \int \frac{w d\tau}{2\pi r_w}. \quad (8)$$

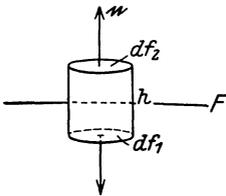


Abb. 9. Zur Unstetigkeit der Geschwindigkeit.

Wenn ferner längs einer im Endlichen gelegenen Fläche F das Strömungsfeld unstetig wird, so wird ein Teil der Flächenintegrale in der Formel (4) einen von Null verschiedenen Wert annehmen. Erfährt z. B. die Normalkomponente der Geschwindigkeit längs F einen Sprung $v_2 - v_1$, so ergibt die Anwendung des Gaußschen Satzes auf einen kleinen Kreiszyylinder um einen Flächenpunkt, dessen Grundflächen $df_2 = n df_2$, $df_1 = -n df_1$ sind und dessen Höhe $= h$ ist (Abb. 9)

$$h \cdot \operatorname{div} v = n (v_2 - v_1).$$

Diesen in der Grenze $h = 0$ als endlich vorausgesetzten Ausdruck nennen wir die Flächendivergenz.

$$\operatorname{Div} v = Q.$$

Er ist gleichbedeutend mit der auf die Flächeneinheit bezogenen Er giebigkeit der über die Fläche verteilt gedachten Quellen. Die (7) ent sprechende Formel lautet daher jetzt

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \int_F \frac{Q}{r} df; \quad v = -\frac{1}{4\pi} \nabla \int_F \frac{Q}{r} df. \quad (9)$$

Springt auch Φ an der Fläche, so definieren wir $\Phi_1 - \Phi_2$ als Moment der Doppelbelegung. Formel (4) ergibt dann

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \oint (\Phi_1 - \Phi_2) \nabla \frac{1}{r} ndf. \quad (10)$$

Die Unstetigkeit der Tangentialkomponente längs der Fläche ist gleichbedeutend mit der Existenz einer Wirbelbelegung auf der Fläche, wie die Anwendung der Stokesschen Integralformel ohne weiteres ergibt (Abb. 10). Man erhält dann mit

$$\mathfrak{B} = [n(v_1 - v_2)] = \frac{1}{2} \text{Rot } v, \quad (11)$$

$$v = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \int_F \frac{\text{Rot } v df}{r} = \frac{1}{2\pi} \text{rot} \int_F \frac{\mathfrak{B} df}{r}.$$

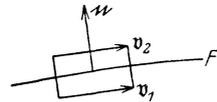


Abb. 10. Zur Unstetigkeit der Geschwindigkeit.

Wenn alle betrachteten Singularitäten gleichzeitig vorkommen, so ergibt sich das Gesamtfeld als additive Überlagerung der Einzelfelder (7) bis (11).

Für die Folge ist es nun wichtig, besonders den Fall des in der Flüssigkeit enthaltenen Wirbelringes näher ins Auge zu fassen und ein Gesetz zu besprechen, das eine vollständige Analogie mit dem Biot-Savartschen Gesetz der Elektrodynamik hat¹.

Wenn wir den Querschnitt des unendlich dünnen Ringes C_0 mit f bezeichnen, also $d\tau = f ds$ und die Stärke (oder das Moment) $wf = \frac{1}{2} \Gamma$ setzen, so ergibt die Formel (8)

$$v = \text{rot} \int_{C_0} \frac{\Gamma d\hat{s}}{4\pi r} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_{C_0} [d\hat{s} \nabla] \frac{1}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{C_0} \frac{[d\hat{s} \tau]}{r^3}. \quad (12)$$

Der Betrag von $[d\hat{s} \tau]$ ist aber nichts anderes wie $ds \cdot r \sin(d\hat{s}, r) = ds \cdot r \sin \varphi$. Jedes Element des Wirbelfadens liefert also zur Geschwindigkeit einen Beitrag $\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{ds \sin \varphi}{r^2}$, der senkrecht steht zur Ebene von $d\hat{s}$ und r (Abb. 11). Haben wir einen geradlinigen Wirbelfaden, so sieht

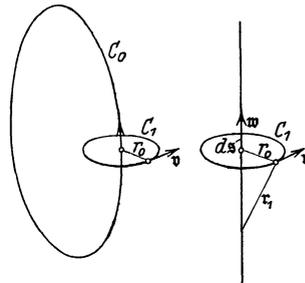


Abb. 11. Geschwindigkeitsfeld eines Wirbelringes.

¹ Vgl. R. Grammel, Die hydrodyn. Grundlagen des Fluges. Braunschweig 1917, S. 116—117.

man, daß die Geschwindigkeit an jeder Stelle des Fadens dem Kreise folgt, den man durch den Aufpunkt senkrecht zum Faden legen kann und auf eine endliche Fadenlänge bezogen, den Wert hat

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{ds \sin \varphi}{r^2} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sin \varphi d\varphi}{r_0^2}, \quad (13)$$

wenn r_0 den senkrechten Abstand des Aufpunktes vom Faden bedeutet und $r = \frac{r_0}{\sin \varphi}$, $ds = \frac{r d\varphi}{\sin \varphi}$ gesetzt wird.

Es wird also

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi r_0} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2). \quad (14)$$

Bei einem unendlich ausgedehnten geraden Faden hat man

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r_0}. \quad (14a)$$

Das Linienintegral der Geschwindigkeit längs eines geschlossenen Weges C_1 um die Wirbellinie ist leicht auf direktem Wege zu ermitteln. Wir haben zu bilden

$$\oint_{C_1} v dx_1 = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_0} \frac{dx_1 [d\bar{s} r]}{r^3}.$$

Ohne den Wert des Integrals zu beeinträchtigen, kann man C_1 in einen kleinen Kreis, dessen Ebene senkrecht steht zu dem durchschnittenen Element des Fadens, oder die Wirbellinie selbst in einen geradlinigen Wirbelfaden deformieren (Abb. 12). Dann wird nach (14) für den Weg längs des Kreises, durch dessen Mittelpunkt der Faden verläuft

$$\oint v dx_1 = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r d\psi}{r} = \Gamma. \quad (15)$$

Durch die Größe Γ wird also der Wert des Linienintegrals um die Wirbellinie oder die sog. Zirkulation des Wirbelringes bezeichnet.

Setzen wir

$$v = \nabla \Phi,$$

so wird

$$\oint \frac{\partial \Phi}{\partial r} dx = \Gamma = [\Phi] = \Phi_1 - \Phi_2, \quad (16)$$

wenn Φ_1 und Φ_2 die Potentialwerte für zwei zusammenhängende Vorder- und Rückseitenpunkte auf einer über den Ring angespannten Fläche F bedeuten. Man sieht daraus, daß die Wirbellinie durch eine

Doppelquellbelegung vom konstanten Moment Γ auf der Fläche F ersetzbar ist. Das ergibt sich auch unmittelbar dadurch, daß man das Linienintegral in Geschwindigkeitsausdruck (12) in ein Integral über die Fläche F verwandelt. Um diese Umformung durchzuführen, denken wir uns die Fläche in kleine Flächenelemente und das Randintegral in die Randintegrale um die Berandung der Elementarflächen, die wir als eben ansehen können, aufgeteilt. Multiplizieren wir dann ein Elementarintegral

$$i = \oint \left[\nabla \frac{1}{r}, d\mathfrak{s} \right]$$

mit dem konstanten Hilfsvektor c^1 so ergibt sich durch Anwendung des Stokesschen Lehrsatzes

$$c \cdot i = \oint c \left[\nabla \frac{1}{r}, d\mathfrak{s} \right] = \oint d\mathfrak{s} \left[c \nabla \frac{1}{r} \right] = \int \text{rot} \left[c \nabla \frac{1}{r} \right] n df,$$

wo n jetzt als konstant anzusehen ist. Mit Hilfe der Vektorformeln

$$\text{rot} [c \mathfrak{A}] = c \text{div} \cdot \mathfrak{A} - c \nabla \cdot \mathfrak{A} \quad (c \text{ konstant})$$

$$\text{div} \nabla \frac{1}{r} = 0$$

$$n c \nabla \cdot \mathfrak{A} = c \nabla \cdot \mathfrak{A} n,$$

ergibt sich dann

$$c \cdot i = -c \nabla \int \left(\nabla \frac{1}{r} \cdot n \right) df; \quad i = -\nabla \int \left(\nabla \frac{1}{r} \cdot n \right) df.$$

Durch Summierung über die ganze Fläche erhalten wir also schließlich für die Geschwindigkeit in der Umgebung des Wirbelringes

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi} \text{rot} \oint \frac{d\mathfrak{s}}{r} = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint \left[\nabla \frac{1}{r}, d\mathfrak{s} \right] = -\frac{\Gamma}{4\pi} \text{grad} \int \left(\nabla \frac{1}{r} \cdot n \right) df. \quad (17)$$

Daraus ergibt sich dann, daß die Strömung in der Umgebung der Wirbellinie das Geschwindigkeitspotential

$$\Phi = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int \left(\nabla \frac{1}{r} \cdot n \right) df$$

besitzt.

Die gegebenen Formeln können weiter auf den Fall einer Wirbelschicht als einer stetigen Folge von Wirbellinien durch Integration ausgedehnt werden². Wenn man die Zirkulation um einen Elementar-

¹ Vgl. A. Föppl, Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität, Leipzig 1894, S. 72f und 244f.

² Vgl. die neuere Darstellung von M. Lagally im Handbuch der Physik, Bd. VII, S. 43.

streifen von Wirbellinien mit $d\Gamma(s') = \frac{d\Gamma}{ds'} ds'$ bezeichnet, so berechnet sich der Geschwindigkeitssprung in Richtung von s' für zwei zusammenhängende Punkte der Ober- und Unterseite durch Bildung der Zirkulation um einen Streifen ds' der Schicht

$$[v'] ds' = \frac{d\Gamma(s')}{ds'} ds'; \quad [v'] = \frac{d\Gamma}{ds'}. \quad (18)$$

Wenn ferner die Zirkulation für $s' = 0$ verschwindet, so ergibt sich aus

$$\int_0^{s'} \frac{d\Gamma(s')}{ds'} ds' = \int \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial s'} ds' - \frac{\partial \Phi_2}{\partial s'} ds' \right) = [\Phi] = \Phi_1 - \Phi_2, \quad (18a)$$

daß der Wert der zu einem Streifen oder einem Elementarfaden gehörigen Zirkulation dem entsprechenden Potentialsprung zwischen den beiden Seiten der Fläche gleich ist.

6. Die allgemeinen Impulssätze.

1. Wir denken uns ein von strömender Flüssigkeit erfülltes Raumgebiet R , das einfach oder mehrfach zusammenhängend, d. h. von einer oder mehreren gedachten oder wirklichen Flächen (Wänden) begrenzt sein möge (Abb. 12) und stellen uns die Aufgabe, die Gesamtheit der wirksamen Kräfte, insbesondere die von der Flüssigkeit auf die Grenzflächen ausgeübten Druckkräfte zu bestimmen. Ein wichtiger Fall ist z. B. gegeben durch das bis ins Unendliche erstreckte Strömungsfeld, in das ein fester Körper eingetaucht ist. Dieser Fall umfaßt das technisch wichtige Problem der Tragflügelkräfte, das wir später in seinen Grundzügen behandeln werden. Dabei setzen wir zunächst voraus, daß die Strömung quell- und wirbelfrei sei. Nun erhalten

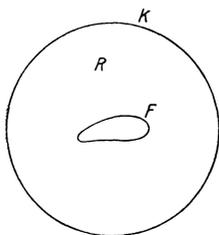


Abb. 12.

wir aus der Eulerschen Gleichung durch Multiplikation mit dem Raumelement $d\tau$ und Integration über das Gebiet R

$$\int \rho \frac{dv}{dt} d\tau = \int \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} d\tau + \frac{r}{g} \int v \nabla \cdot v d\tau = \int \rho f d\tau - \int \nabla p d\tau. \quad (1)$$

Für die Resultierende der Massenkräfte und der auf die Begrenzung ausgeübten Druckkräfte setzen wir

$$\rho \int f d\tau = \mathfrak{R}$$

$$\int \nabla p d\tau = \int p d\mathfrak{f} = \mathfrak{P}.$$

Führen wir ferner vorübergehend das „dyadische Produkt“ $\overline{v v}$ ein¹

¹ Diese mit dem Tensor auf gleicher Stufe stehende Dyade ist zerlegbar nach den drei Vektoren $\delta_1 = e_1 v_x^2 + e_2 v_x v_y + e_3 v_x v_z$, $\delta_2 = e_1 v_x v_y + e_2 v_y^2 + e_3 v_y v_z$,

und benutzen die Vektorbeziehung

$$\mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \overline{\mathbf{v} \mathbf{v}} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \overline{\mathbf{v} \mathbf{v}} \quad (\text{a})$$

und den verallgemeinerten Gaussischen Lehrsatz

$$\int \nabla \overline{\mathbf{v} \mathbf{v}} d\tau = \oint \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} n df \quad [\mathbf{n} \text{ äußere Einheitsnormale}] \quad (\text{b})$$

so ergibt sich

$$\mathfrak{K} - \mathfrak{K} = \int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{g} \mathbf{v} \right) d\tau + \frac{\rho}{g} \oint \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} n df. \quad (2)$$

Die Summe aller auf die Flüssigkeit wirkenden Kräfte ist also gleich der substantiellen Änderung der Impulsgröße der in R enthaltenen Flüssigkeit in der Zeiteinheit. Sie setzt sich zusammen aus der lokalen Änderung des Raumimpulses und der konvektiven Änderung oder dem Impulstransport durch die Grenzflächen, d. h. dem Überschuß des durch die Kontrollflächen austretenden Impulswertes über den eintretenden. In derselben Weise ergibt sich, daß das Moment der Kräfte dem Moment dieser gerichteten Impulsänderung gleich ist¹.

Wenn keine eingepprägten Kräfte vorhanden sind, so ergibt sich für die gesamte auf die festen Wände und auf die Kontrollflächen ausgeübte Druckkraft

$$\mathfrak{K}_F + \mathfrak{K}_K = - \int_R \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) d\tau - \rho \int_{\Sigma F} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} n df. \quad (3)$$

Der erstere Bestandteil, der im stationären Fall verschwindet, läßt eine bemerkenswerte Umformung zu. Wenn sich etwa ein durch die Fläche F begrenzter Körper in beliebiger Weise in der Flüssigkeit bewegt, so wird das in seiner Umgebung gültige Geschwindigkeitspotential mit der Zeit eine Änderung erfahren. Setzt man aber $\mathbf{v} = \nabla \Phi$, so kann man den ersten Ausdruck auf der rechten Seite in ein Hüllintegral verwandeln.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \mathbf{v} d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int \nabla \Phi d\tau = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{K+F} \Phi n df. \quad (4)$$

Wenn man annimmt, daß das Stromfeld sich ins Unendliche erstreckt, und dort keine Änderung erfährt, so verschwindet das Integral um die ins Unendliche ausgedehnte Kontrollfläche K und man erhält eine zusätzliche auf die Fläche F ausgeübte Druckresultierende

$$\mathfrak{K}_i = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_F \Phi n df \quad (5)$$

$\mathfrak{d}_3 = \mathbf{e}_1 v_x v_x + \mathbf{e}_2 v_y v_y + \mathbf{e}_3 v_z^2$. Für das Produkt mit einem Vektor und die Divergenz haben wir

$$\overline{\mathbf{v} \mathbf{v}} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \mathbf{a}, \quad \nabla \overline{\mathbf{v} \mathbf{v}} = \mathbf{e}_1 \nabla v_1 + \mathbf{e}_2 \nabla v_2 + \mathbf{e}_3 \nabla v_3.$$

¹ M. Lagally: Handbuch der Physik VII, S. 22.

die wir auch als Impulsdruck bezeichnen können. Die gesamte Druckkraft \mathfrak{P}_F setzt sich also zusammen aus derjenigen Teilkraft, welche dem im Augenblick übereinstimmenden stationären Zustand entspricht und dem Impulsdruck, der mit der zeitlichen Änderung des Potentials zusammenhängt

$$\mathfrak{P}_F = \mathfrak{P}_s + \mathfrak{P}_i. \quad (6)$$

Dasselbe ergibt sich auch in direkter Weise, wenn man von der instantanen Druckgleichung |

$$p = C(t) - \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} v^2 \quad (7)$$

ausgeht.

2. Um nun diesen Impulsatz auf den Fall auszudehnen, daß in der Flüssigkeit Singularitäten vorhanden sind oder die Abhängigkeit der Druckkräfte von der Wirbel- und Quellverteilung kennen zu lernen, machen wir mit Lagally¹ folgende Voraussetzung. Die Strömung soll zunächst als stationär und die Quell- und Wirbelfelder als kontinuierlich, also etwa punkt-, linien-, flächen- oder raumförmig verteilt angenommen werden. Ferner soll die Bewegung jedenfalls an den Begrenzungsflächen den Charakter einer Potentialströmung besitzen, so daß hier die Bernoullische Gleichung

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{konst}$$

benutzt werden kann. Da der Gradient dieser Gleichung verschwindet

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0$$

und da die Eulersche Gleichung mit $\mathfrak{k} = 0$ |

$$\mathfrak{v} \nabla \cdot \mathfrak{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0$$

wird, so ergibt sich auf Grund der Vektorformel

$$\nabla v^2 = 2 \mathfrak{v} \nabla \cdot \mathfrak{v} + 2 [\mathfrak{v} \text{ rot } \mathfrak{v}]. \quad (c)$$

Die Beziehung

$$[\mathfrak{v} \text{ rot } \mathfrak{v}] = 0.$$

Die Bernoullische Gleichung ist also auch dann noch gültig, wenn die Wirbellinien mit den Stromlinien zusammenfallen. Die resultierende Druckkraft \mathfrak{P} erhalten wir in direkter Weise als Oberflächenintegral, aus dem wir nach entsprechender Umformung zwei auf die Wirbel-

¹ M. Lagally: Z. ang. Math. Mech. 1922, S. 409.

und Quellenverteilung bezogene Raumintegrale heraustrennen können. Der ohne weiteres verständliche Ausdruck

$$\mathfrak{K} = \oint p n df = -\rho \oint v^2 n df + \oint c n df$$

verwandelt sich zunächst, da das letztere Integral verschwindet, mit Hilfe des Gaussischen Satzes in das Raumintegral

$$\mathfrak{K} = -\rho \int \nabla v^2 d\tau. \quad (8)$$

Zur weiteren Umformung benutzen wir die Vektorbeziehungen (a) und (c), aus denen sich die weitere Gleichung

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 = \nabla \bar{v} \bar{v} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] \quad (d)$$

ergibt, ferner die Gaussische Gleichung (b). Dann ergibt sich für den Kraftausdruck

$$\mathfrak{K} = \rho \left\{ -\oint \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} n df + \int \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} d\tau - \int [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] d\tau \right\}. \quad (9)$$

Nach derselben Rechnungsmethode erhält man für das Moment der Kraft, wenn \mathbf{r} den vom Bezugspunkt nach dem Integrationspunkt gezogenen Radiusvektor bedeutet

$$\mathfrak{M} = \rho \left\{ -\oint [\mathbf{r} \mathbf{v}] \cdot \mathbf{v} n df + \int [\mathbf{r} \mathbf{v}] \cdot \nabla \mathbf{v} d\tau - \int [\mathbf{r} [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}]] d\tau \right\}. \quad (10)$$

Wenn keine Quellen und Wirbel in der Flüssigkeit enthalten sind, so hat man wieder

$$\mathfrak{K} = -\rho \oint \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} n df, \quad \mathfrak{M} = -\rho \oint [\mathbf{r} \mathbf{v}] \cdot \mathbf{v} n df. \quad (11)$$

Die im Falle des Vorhandenseins von Quellen und Wirbeln zum Impuls hinzutretenden Ausdrücke können wir auch als Quell- resp. Wirbelimpulsgrößen bezeichnen.

a) Inneres Problem. Erfüllt die Flüssigkeit den Innenraum einer geschlossenen Fläche F , so steht die Geschwindigkeit für die ganze Berandung auf der Normalen senkrecht, also ist $\mathbf{v} n df = 0$. Mithin verschwindet auch der Vektor $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} n df$, also auch das erste Integral im Ausdruck für \mathfrak{K} . Die „innere Aufgabe“ ist also durch die Gleichung gelöst

$$\mathfrak{K} = \rho \int \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} d\tau - \rho \int [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] d\tau. \quad (12)$$

Bei Quellenfreiheit entsteht daraus die bereits von L. Prandtl unmittelbar aus der Eulerschen Gleichung abgeleitete Formel

$$\mathfrak{K} = -\rho \int [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}] d\tau. \quad (12a)$$

Ganz entsprechend ist das Moment zu bilden.

b) Äußeres Problem. Wenn die Flüssigkeit das Äußere einer geschlossenen Fläche F erfüllt, so betrachten wir zunächst das Gebiet R zwischen F und einer (Kontroll-)Kugel K mit großem Radius

(etwa um den Anfangspunkt). Damit zerfällt die Kraft \mathfrak{B} und die Hüllenintegrale in zwei Teile

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_F + \mathfrak{B}_K, \quad \oint \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v} \, n \, d f = \oint_F \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v} \, n \, d f + \oint_K \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v} \, n \, d f.$$

Da die Flüssigkeit tangential zur Begrenzung F strömt, so verschwindet das erste, über F erstreckte Integral, und wir erhalten damit für die auf die Fläche wirkende Kraft

$$\mathfrak{B}_F = -\mathfrak{B}_K + \varrho \left\{ -\oint_K \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v} \, n \, d f + \int_R \mathfrak{v} \cdot \nabla \mathfrak{v} \, d \tau - \int_R [\mathfrak{v} \operatorname{rot} \mathfrak{v}] \, d \tau \right\}. \quad (13)$$

Ebenso für das Moment

$$\mathfrak{M}_F = -\mathfrak{M}_K + \varrho \left\{ -\oint_K [\mathfrak{r} \mathfrak{v}] \, \mathfrak{v} \, n \, d f + \int_R [\mathfrak{r} \mathfrak{v}] \cdot \nabla \mathfrak{v} \, d \tau - \int_R [\mathfrak{r} [\mathfrak{v} \operatorname{rot} \mathfrak{v}]] \, d \tau \right\}. \quad (14)$$

Wegen
$$\mathfrak{B}_K = -\frac{\varrho}{2} \int v^2 \, n \, d f$$

wird

$$\mathfrak{B}_F = \varrho \left\{ -\oint_K (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v} \, n \, d f - \frac{1}{2} v^2 \, n \, d f) + \int_R \mathfrak{v} \cdot \nabla \mathfrak{v} \, d \tau - \int_R [\mathfrak{v} \operatorname{rot} \mathfrak{v}] \, d \tau \right\}. \quad (15)$$

Entsprechend ergibt sich für das Moment

$$\mathfrak{M}_F = \varrho \left\{ -\oint_K [\mathfrak{r} \mathfrak{v}] \, \mathfrak{v} \, n \, d f - \frac{1}{2} v^2 [\mathfrak{r} \mathfrak{n}] \, d f + \int_R [\mathfrak{r} \mathfrak{v}] \cdot \nabla \mathfrak{v} \, d \tau - \int_R [\mathfrak{r} [\mathfrak{v} \operatorname{rot} \mathfrak{v}]] \, d \tau \right\}. \quad (16)$$

Die weitere Umformung und Anwendung dieser fundamentalen Gleichungen bleibt späteren Kapiteln vorbehalten.

3. Das instationäre Problem. Wenn der von der Fläche F begrenzte Körper sich beliebig in der Flüssigkeit bewegt und außerdem n -Wirbelfäden vorhanden sind, die entweder geschlossen sein oder am Körper enden können, so muß man, um die Formel 5 auf diesen Fall anwenden zu können, die Wirbelfäden durch Flächen vom betrachteten Teil der Flüssigkeit ausschließen¹. Machen wir ferner den mehrfach zusammenhängenden Raum durch die Verbindungsflächen F'_n einfach zusammenhängend, so hat der Impuls der Flüssigkeitsmenge den Wert

$$\frac{1}{\varrho} J = \int \nabla \Phi \, d \tau = \int_K \Phi \, n \, d f + \int_{F + \Sigma F'_n} \Phi \, n \, d f + \int_{\Sigma F_n} \Phi \, n \, d f.$$

Bei Abwesenheit von äußeren Kräften wird daher der gesamte Impulsdruck

$$\mathfrak{B}_i = (\mathfrak{B}_i)_F + (\mathfrak{B}_i)_K + (\mathfrak{B}_i)_{\Sigma F_n}.$$

$$(\mathfrak{B}_i)_F = -\varrho \frac{\partial}{\partial t} \int_K \Phi \, n \, d f - \varrho \frac{\partial}{\partial t} \int_{F + \Sigma F'_n} \Phi \, n \, d f - \varrho \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma F_n} \Phi \, n \, d f - \int_K p \, n \, d f - \int_{\Sigma F_n} p \, n \, d f.$$

¹ Vgl. H. Wagner: Über die Entstehung des dynamischen Auftriebs von Tragflügeln, Z. ang. Math. Mech. 1925. S. 26.

Wegen (7) verschwinden die auf K und die Flächen F_n bezüglichen Integrale, und es bleibt, wenn wir die äußere Normale der Fläche einführen

$$(\mathfrak{P}_i)_F = \varrho \frac{\partial}{\partial t} \oint_{F + \Sigma F'_n} \Phi n df. \quad (17)$$

In ganz entsprechender Weise erhält man für das Moment des auf der Fläche F lastenden Impulsdruckes, wenn man die Beziehung

$$\int [\mathbf{r} \cdot \nabla \Phi] d\tau = \oint \Phi [\mathbf{r} n] df \quad (e)$$

beachtet.

$$(\mathfrak{M}_i)_F = [\mathbf{r} \mathfrak{P}_i] = \varrho \frac{\partial}{\partial t} \oint_{F + \Sigma F'_n} \Phi [\mathbf{r} n] df. \quad (18)$$

Anwendungen dieser Formel finden sich in der sehr reichhaltigen Arbeit von Wagner, auf die wir in einem andern Zusammenhang noch zurückkommen werden.

7. Ähnlichkeitsgesetze.

Um die Kraftverhältnisse an Fahrzeugen, z. B. Flugzeugen oder Schiffen, die sich in flüssigen Medien bewegen, zu prüfen, pflegt man Messungen an geometrisch ähnlichen Modellen vorzunehmen, die sich in einem entsprechenden Flüssigkeitskanal des Laboratoriums bewegen oder einem Flüssigkeitsstrom ausgesetzt werden. Beim Vergleich der Resultate der mit solchen verkleinerten Modellen vorgenommenen Versuchen mit der Wirklichkeit ist zu berücksichtigen, daß mit der geometrischen Ähnlichkeit nicht notwendig eine dynamische Ähnlichkeit verbunden ist, daß vielmehr zunächst gewisse Versuchsbedingungen erfüllt sein müssen, damit eine unmittelbare Übertragung und praktische Verwendung der Versuchswerte möglich wird. Um diese Bedingungen zu finden, gehen wir von den hydrodynamischen allgemeinen Grundgleichungen aus 2, (4), deren Glieder wir durch ihre Dimensionen ersetzen. Bezeichnen wir die Längenabmessungen durch l , so hat z. B. die Kraft pro Masseneinheit und die Beschleunigung die Dimensionen

$$\left[\frac{\text{Kraft}}{\varrho l^3} \right] \quad \left[\frac{v^2}{l} \right].$$

Ersetzen wir ferner den Koeffizienten μ der inneren Reibung durch die sog. Zähigkeitszahl

$$\nu = \frac{\mu g}{\gamma},$$

so können wir nach 2, (4) folgende Dimensionsgleichung¹ aufstellen

$$\left[\frac{\text{Kraft}}{\rho l^3} \right] = \left[\frac{v^2}{l} \right] + \left[\frac{v v}{l^2} \right].$$

Nach Kürzung mit $\frac{v^2}{l}$ kommt

$$\left[\frac{\text{Kraft}}{\rho v^2 l^2} \right] = [1] + \left[\frac{v}{v l} \right]. \quad (1)$$

Zwei Körper sind nun dynamisch vollständig ähnlich, wenn zu der geometrischen Ähnlichkeit und der Übereinstimmung in der Oberflächengestaltung, z. B. Rauigkeit noch die Eigenschaft hinzukommt, daß die an entsprechenden Punkten angreifenden Kräften in beiden Fällen sich nur durch einen Zahlenfaktor unterscheiden. Bei Flugzeugen wird also auch die Antriebskraft und das Gewicht, die durch die Flüssigkeitskräfte kompensiert werden, in gleichem Verhältnis zu einander stehen.

Wenn wir mit γ_1 das spezifische Gewicht des Körpers (Flugzeugs) bezeichnen, so können wir daher für die Kraft das Dimensionssymbol $[\gamma_1 l^3]$ einsetzen und erhalten dann

$$\left[\frac{\gamma_1 l}{\rho v^2} \right] = [1] + \left[\frac{v}{v l} \right]. \quad (2)$$

Das auf diese Voraussetzungen sich gründende Gesetz würde also dahin lauten, daß an zwei dynamisch ähnlichen Flugzeugen ähnliche Bewegungen auftreten, wenn die Zahlenwerte $\frac{v l}{v}$ und $\frac{\rho v^2}{\gamma_1 l}$ in beiden Fällen, übereinstimmen. Wegen

$$v = \text{konst} \sqrt[3]{\frac{v \gamma_1}{\rho}}, \quad l = \text{konst} \sqrt[3]{\frac{v^2 \rho}{\gamma_1}} \quad (3)$$

kann man auch sagen, daß die Bewegungen ähnlich sind, wenn die dritten Potenzen der Geschwindigkeiten sich wie die Werte von $\frac{v \gamma_1}{\rho}$, die dritten Potenzen der Längenabmessungen wie die Werte von $\frac{v^2 \rho}{\gamma_1}$ verhalten.

Im allgemeinen beschränkt man sich in der Anwendung auf eine der Ähnlichkeitsbedingungen. Wenn man z. B. mit einem im Windkanal aufgehängten Flugzeugmodell experimentiert wie in der Göttinger Versuchsanstalt, so kommt das Gewicht des Flugzeugs nicht mehr in Anrechnung, und es genügt die Gleichheit der Zahl $\frac{v}{v l}$ für Modell und Wirklichkeit zu verlangen. Die Kräfte verhalten sich dann wie die Werte von $\rho v^2 l^2$. Das damit zum Ausdruck

¹ Die folgenden Betrachtungen schließen sich der außerordentlich durchsichtigen Darstellung von R. v. Mises an (Z. ang. Math. Mech. Bd. 3, Heft 1, S. 64—67. 1923.

gebrachte Ähnlichkeitsgesetz wird auch das Reynoldsche Gesetz und die charakteristische Zahl $\frac{vl}{\nu} = R$ die Reynoldsche Zahl genannt. In dem Falle, daß die Gleichheit von ν , d. h. die Übereinstimmung des Mediums in beiden Fällen zutrifft, genügt es, an Stelle der Reynoldsschen Zahl das Produkt aus Geschwindigkeit und Länge ($v \cdot l$), den in einem bestimmten Maßstab eingeführten sog. „Kennwert“ (E) zugrunde zu legen, zumal, da die Änderungen von ν bei verschiedenem Druck und Temperatur nur geringfügig ausfallen.

Was die Zähigkeitszahlen für die gebräuchlichsten Medien, Luft und Wasser angeht, so sind folgende Werte zu beachten

$$\begin{array}{l} \text{Luft} \left\{ \begin{array}{l} 0^0 \mu = 0,00017 \text{ g cm}^{-1}\text{s}^{-1}, \quad \nu = 0,172 \text{ cm}^2\text{s}^{-1} \\ 15^0 \mu = 0,00018 \text{ ,, ,, } \quad \nu = 0,125 \text{ ,, ,,} \end{array} \right. \\ \text{Wasser} \left\{ \begin{array}{l} 0^0 \mu = 0,0178 \text{ ,, ,, } \quad \nu = 0,178 \text{ ,, ,,} \\ 15^0 \mu = 0,0011 \text{ ,, ,, } \quad \nu = 0,11 \text{ ,, ,,} \end{array} \right. \end{array}$$

Beim Kennwert $E = v \cdot l$ pflegt man die Länge in Millimetern, die Geschwindigkeit in m/sek einzuführen; er ist bei Luft etwa der 70. Teil der Reynoldsschen Zahl.

2. Bei Schiffsmodellversuchen oder überhaupt beim Vergleich zweier gleichartiger Schwimmvorgänge mit freier Oberfläche spielt die Schwerkraft eine wesentliche Rolle, und wir können dann die Abhängigkeit von der Zähigkeit dagegen vernachlässigen. Auf diese Weise gelangt man zu der Helmholtz-Froudeschen Modellregel. An zwei dynamisch ähnlichen Schiffen oder Flugzeugen treten annähernd ähnliche Bewegungen auf, wenn in beiden Fällen der Wert $\frac{\gamma_1 l}{\rho v^2}$ derselbe ist; die Kräfte verhalten sich dann wie die Werte von $\gamma_1 l^3$ oder von $\rho v^2 l^2$. Wenn im besonderen die Vergleichskörper gleiches spezifisches Gewicht haben, so kommt die einfache Beziehung

$$\frac{v^2}{l} = \text{konst.}, \quad v_1 : v_2 = \sqrt{l_1} : \sqrt{l_2}. \quad (4)$$

Die Geschwindigkeiten müssen sich also wie die Wurzeln aus den Längenabmessungen verhalten.

II. Umformungen und funktionentheoretische Hilfsmittel.

8. Umformung auf besondere Koordinatensysteme.

1. Für die Anwendungen ist es zweckmäßig, die zunächst in Vektorform gegebenen hydrodynamischen Grundformeln auf bestimmte Koordinaten zu transformieren¹. Denken wir uns etwa den vom

¹ Vgl. bes. J. Spielrein: Lehrbuch der Vektorrechnung, Stuttgart 1916, S. 164 ff.

Anfangspunkt 0 nach dem Aufpunkt P gezogenen „Ortsvektor“ als Funktion von drei krummlinigen skalaren Koordinaten $x_1 x_2 x_3$ gegeben

$$r = r(x_1 x_2 x_3),$$

so sind dadurch die drei Flächen $x_i = c_i$, ($i = 1, 2, 3$) und ihre Schnittlinien bestimmt.

Wenn sich die Koordinaten um dx_i ändern, so verschiebt sich der Aufpunkt P um das Stück

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial r}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial r}{\partial x_3} dx_3.$$

Hier bedeutet z. B. $\frac{\partial r}{\partial x_1} dx_1$ die Verschiebung von P längs einer Koordinatenlinie, für die x_2 und x_3 konstant sind usw. Wenn, was hier vorausgesetzt werden soll, die drei Flächenscharen $x_i = c_i$ sich rechtwinklig schneiden (oder ein orthogonales System bilden), so hat das Quadrat des Linienelementes in algebraischer Schreibweise die Form

$$ds^2 = dr^2 = g_1^2 dx_1^2 + g_2^2 dx_2^2 + g_3^2 dx_3^2. \quad (1)$$

Sind $e_1 e_2 e_3$ die Einheitsvektoren in Richtung der Tangenten an die Koordinatenkurven, so kann man setzen

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = e_i g_i$$

und hat dann

$$dr = e_1 g_1 dx_1 + e_2 g_2 dx_2 + e_3 g_3 dx_3. \quad (1a)$$

Für die drei als Vektoren aufzufassenden elementaren Flächenelemente, die durch $x_i = \text{konst.}$ bestimmt sind, ferner für das Volumenelement des Quaders mit den Kanten $g_i dx_i$ entstehen die Ausdrücke

$$d\bar{f}_i = e_i g_i g_l dx_k dx_l; \quad d\tau = g_1 g_2 g_3 dx_1 dx_2 dx_3. \quad (2)$$

Mit Hilfe der gegebenen Formen ist es nun leicht, die in der Strömungslehre vorkommenden Operationen auf rechtwinklig-krümmelinige Koordinaten umzuformen. So ergibt sich unmittelbar aus dem Ausdruck (1) resp. (1a) für den Gradienten einer skalaren Funktion φ

$$\nabla \varphi = \sum_i \frac{e_i}{g_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \quad (3)$$

Weiter haben wir nach der Vektorformel

$$\text{rot } \varphi a = \varphi \text{ rot } a - [a \nabla \varphi], \quad (a)$$

$$\text{rot } \nabla x_1 = 0 = \frac{1}{g_1} \text{rot } e_1 + \frac{1}{g_1^2} [e_1 \nabla g_1]. \quad (4)$$

Daraus folgt dann

$$\text{rot } \mathbf{e}_1 = -\frac{1}{g_1} [\mathbf{e}_1 \nabla g_1] = \mathbf{e}_2 \frac{1}{g_2 g_3} \frac{\partial g_1}{\partial x_3} - \mathbf{e}_3 \frac{1}{g_1 g_2} \frac{\partial g_1}{\partial x_2}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{e}_1 &= \nabla [\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_3 \text{rot } \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \text{rot } \mathbf{e}_3 \\ &= \frac{1}{g_1 g_2} \frac{\partial g_2}{\partial x_1} + \frac{1}{g_1 g_3} \frac{\partial g_3}{\partial x_1} \text{ usw. (wegen } \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = 0, \mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = \mathbf{e}_3^2 = 1) \end{aligned} \quad (6)$$

und für die Divergenz eines Vektors \mathbf{a} wegen $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$

$$\nabla \mathbf{a} = \sum_i' (a_i \nabla \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_i \nabla a_i) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \sum_i' \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i g_k g_l) \quad (i, k, l \text{ verschieden}). \quad (7)$$

Ist $\mathbf{a} = \nabla \Phi$, so erhält man

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \sum_i' \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{g_k g_l}{g_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}. \quad (8)$$

Ebenso erhalten wir für den Rotor eines Vektors \mathbf{a}

$$\sum_i' \text{rot} (\mathbf{e}_i a_i) = \sum_i' (a_i \text{rot } \mathbf{e}_i - [\mathbf{e}_i \nabla a_i]).$$

Nach (5) ergibt sich durch Ausrechnung schließlich

$$\text{rot } \mathbf{a} = \frac{\mathbf{e}_1}{g_2 g_3} \left(\frac{\partial g_3 a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial g_2 a_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\mathbf{e}_2}{g_1 g_3} \left(\frac{\partial g_2 a_2}{\partial x_3} - \frac{\partial g_3 a_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\mathbf{e}_3}{g_1 g_2} \left(\frac{\partial g_2 a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial g_1 a_1}{\partial x_2} \right). \quad (9)$$

2. Legen wir z. B. durch den Aufpunkt P eine Kugel um den Nullpunkt O und betrachten die z -Achse als Polarachse und die xy -Ebene als Äquatorbene, so ist das System der sog. Kugelkoordinaten durch den Kugelradius r , den Polabstandswinkel ϑ und den Azimutwinkel φ auf den Äquatorkreis dargestellt (Abb. 13). Es gelten dann die Transformationsformeln für geradlinige Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, & y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \varphi, \end{aligned} \right\} (10) \quad \text{Abb. 13. Kugelkoordinaten.}$$

und wir können daher setzen, wenn ρ den Radius des Parallelkreises bedeutet,

$$r = x_1, \quad \vartheta = x_2 = \arcsin \frac{\rho}{r}, \quad x_3 = \varphi = \text{arctg } \frac{y}{x}. \quad (11)$$

Da das Quadrat des Linienelementes die Form annimmt

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 + r^2 d\vartheta^2,$$

so haben wir

$$g_1 = 1, \quad g_2 = r, \quad g_3 = r \sin \vartheta. \quad (12)$$

Für die Folge interessiert besonders die Differentialgleichung des Geschwindigkeitspotentials. Wir erhalten dafür nach der allgemeinen Formel (8)

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2}{\partial r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \sin \vartheta}{\partial \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}. \quad (13)$$

Die Geschwindigkeitskomponenten werden

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad v_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad v_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}. \quad (14)$$

An den Stellen, wo $\nabla^2 \Phi \neq 0$ ist, werden die Wirbelkomponenten

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_r v &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial v_\vartheta}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta v_\varphi) \right) \\ \text{rot}_\varphi v &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (r v_\vartheta)}{\partial r} \right) \\ \text{rot}_\vartheta v &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r v_\varphi) - \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

3. Die Zylinderkoordinaten, die für die Anwendungen wichtiger sind, entstehen aus den gewöhnlichen Koordinaten, wenn man die z -Koordinate beibehält und statt x und y die Polarkoordinaten $\varrho\varphi$ des Fußpunktes F von P einführt (Abb. 14). Wir haben also die Transformationsgleichungen

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z. \quad (16)$$

Wenn wir

$$\varrho = x_1, \quad \varphi = x_2, \quad z = x_3$$

setzen, so können wir dem Ausdruck für das Linienelement

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2 + dz^2,$$

die entsprechenden Werte von g entnehmen

$$g_1 = 1, \quad g_2 = \varrho, \quad g_3 = 1. \quad (17)$$

Um die drei nach den Grundrichtungen zerlegten Eulerschen Gleichungen zu erhalten, müssen wir noch die Beschleunigung der Strömung berechnen. Es ist

$$\mathbf{v} = e_1 \dot{\varrho} + e_2 r \dot{\varphi} + e_3 \dot{z} = e_1 v_\varrho + e_2 v_\varphi + e_3 v_z. \quad (18)$$

Daraus entsteht durch Ableitung

$$\dot{\mathbf{v}} = e_1 \ddot{\varrho} + \dot{e}_1 \dot{\varrho} + e_2 \frac{d}{dt} (\varrho \dot{\varphi}) + \dot{e}_2 \varrho \dot{\varphi} + e_3 \ddot{z}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \dot{\varphi}, & \dot{e}_2 &= -e_1 \dot{\varphi}, & \text{also} \\ \dot{\mathbf{v}} &= e_1 (\ddot{\varrho} - \varrho \dot{\varphi}^2) + e_2 \frac{1}{\varrho} \frac{d}{dt} (\varrho^2 \dot{\varphi}) + e_3 \ddot{z}, \\ &= e_1 \left(\dot{v}_\varrho - \frac{v_\varphi^2}{\varrho} \right) + e_2 \frac{1}{\varrho} \frac{d}{dt} (\varrho v_\varphi) + e_3 \dot{v}_z. \end{aligned} \quad (19)$$

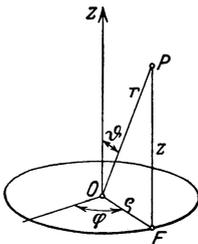


Abb. 14. Zylinderkoordinaten.

Wegen

$$\nabla_{\varrho} p = \frac{\partial p}{\partial \varrho}, \quad \nabla_{\varphi} p = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \quad \nabla_z p = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{vgl. 4}).$$

haben wir daher als Bewegungsgleichungen¹

$$\left. \begin{aligned} k_{\varrho} - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial \varrho} &= v_{\varrho} - \frac{v_{\varphi}^2}{\varrho} \\ r k_{\varphi} - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= \frac{d}{dt} (\varrho v_{\varphi}) \\ k_z - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} &= \dot{v}_z. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

und als Kontinuitätsgleichung nach (9)

$$\frac{\partial(\varrho v_{\varrho})}{\partial \varrho} + \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\varrho v_z)}{\partial z} = 0.$$

Die Wirbelkomponenten für Zylinderkoordinaten werden

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_{\varrho} \mathbf{v} &= \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(\varrho v_{\varphi})}{\partial z} \right) = 2 w_{\varrho}, \\ \text{rot}_{\varphi} \mathbf{v} &= \frac{\partial v_{\varrho}}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \varrho} = 2 w_{\varphi}, \\ \text{rot}_z \mathbf{v} &= \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial(\varrho v_{\varphi})}{\partial \varrho} - \frac{\partial v_{\varrho}}{\partial \varphi} \right) = 2 w_z. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Man bezeichnet die Komponenten auch als Radialwirbel, Ringwirbel und Achswirbel. Wenn \mathbf{v} verschwindet, so existiert ein Potential Φ , das der Differentialgleichung genügt

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (22)$$

Die Geschwindigkeitskomponenten sind dann

$$v_{\varrho} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}, \quad v_{\varphi} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (23)$$

Wir werden uns in dem nächsten Paragraphen mit dem Charakter der Lösungen der Gleichungen (13) und (22) vom strömungstheoretischen Standpunkte aus ausführlicher beschäftigen.

Die Zylinderkoordinaten können mit Vorteil dann angewendet werden, wenn es sich um eine Strömung handelt, die kreissymmetrisch um eine z -Achse ausgebreitet ist, also etwa begrenzt wird durch eine zu dieser Achse gehörige Rotationsfläche und im Unendlichen achsenparallel gerichtet ist. Der Ausdruck dafür, daß das Strömungsfeld in allen Ebenen durch die z -Achse dieselbe Beschaffenheit hat, ist durch

¹ Um eine Verwechslung mit der Koordinate ϱ zu vermeiden, haben wir für die Dichte den ausführlichen Ausdruck $\frac{\gamma}{g}$ verwendet.

das Verschwinden der Ableitungen aller Funktionen, z. B. der Geschwindigkeit v und des Druckes p nach der Koordinate φ gegeben.

Die Eulerschen Gleichungen lauten dann, ausführlich geschrieben

$$\left. \begin{aligned} k_r - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial \varrho} &= \frac{\partial v_\varrho}{dt} + v_\varrho \frac{\partial v_\varrho}{\partial \varrho} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{\varrho}, \\ k_\varphi \cdot \varrho &= \frac{\partial(\varrho v_\varphi)}{\partial t} + v_\varrho \frac{\partial(\varrho v_\varphi)}{\partial \varrho} + v_z \frac{\partial(\varrho v_\varphi)}{\partial z}, \\ k_z - \frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_\varrho \frac{\partial v_z}{\partial \varrho} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial(\varrho v_\varrho)}{\partial \varrho} + \frac{\partial(\varrho v_z)}{\partial z} = 0. \quad (25)$$

Die Wirbelkomponenten werden

$$w_\varrho = -\frac{1}{2\varrho} \frac{\partial(\varrho v_\varphi)}{\partial z}, \quad w_\varphi = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial v_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \varrho} \right), \quad w_z = \frac{1}{2\varrho} \left(\frac{\partial(\varrho v_\varphi)}{\partial \varrho} \right). \quad (26)$$

Im Fall der Existenz eines Geschwindigkeitspotentials geht die Kontinuitätsgleichung über in

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (27)$$

ferner wird

$$v_\varrho = \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}, \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (28)$$

Um die Stromlinien aufzufinden, die Meridiankurven in der linearen Rotationsflächenschar $\Psi = c$ darstellen, bestimmen wir den Fluß $2\pi d\Psi$ durch eine elementare Ringfläche, die durch Rotation eines Linienelementes ds mit den Komponenten $d\varrho$ und dz um die z -Achse entsteht und finden aus der Beziehung

$$\begin{aligned} 2\pi d\Psi &= (v_z d\varrho - v_\varrho dz) 2\pi \varrho, \\ v_z &= \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Psi}{\partial \varrho}, \quad v_\varrho = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Psi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (29)$$

Durch diesen Ansatz ist in der Tat der Kontinuitätsbeziehung Genüge geschehen.

Wenn man in der Meridianebene aufeinanderfolgende Potentiallinien und Stromlinien ($d\Phi = \text{konst}$, $d\Psi = \text{konst}$) zeichnet, so erhält man ein Maschensystem, für das sich leicht eine Gesetzmäßigkeit feststellen läßt. Wenn die Seiten eines elementaren Rechtecks ds_1 und ds_2 sind und v die Geschwindigkeit parallel ds_1 und senkrecht zu ds_2 , so ergibt sich aus

$$ds_1 = \frac{d\Phi}{v}, \quad ds_2 = \frac{d\Psi}{\varrho \cdot v}$$

die Beziehung

$$\frac{ds_1}{ds_2} = \frac{d\Phi}{d\Psi} \cdot \varrho. \quad (30)$$

Das Verhältnis der Rechtecksseiten ist also proportional mit dem Abstand von der Symmetrieachse¹.

9. Hydrodynamischer Charakter der Lösungen der Gleichung $\nabla^2 \Phi = 0$.

Wenn wir in der allgemeinen Differentialgleichung für das Geschwindigkeitspotential Φ in Kugelkoordinaten

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{dr^2}{dr} \frac{d\Phi}{dr} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial \sin \vartheta}{\partial \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (1)$$

$\Phi = R \cdot S$ setzen, wo R nur von r , S dagegen von ϑ und φ abhängt, so zerfällt die Gleichung in eine Differentialgleichung für R , die man schreiben kann

$$r^2 \ddot{R} + 2r \dot{R} - n(n+1)R = 0 \quad (2)$$

und die Differentialgleichung der allgemeinen Kugelfunktionen

$$S n(n+1) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial \sin \vartheta}{\partial \vartheta} \frac{\partial S}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 S}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (3)$$

Wenn wir zunächst Symmetrie um die z -Achse annehmen, so verschwindet der Differentialquotient nach φ , und wir erhalten die Gleichung für die einfachen oder zonalen Kugelfunktionen

$$n(n+1)S_n + \frac{d}{d(\cos \vartheta)} \left(\sin^2 \vartheta \frac{dS_n}{d(\cos \vartheta)} \right) = 0. \quad (4)$$

Ist S_n eine Lösung dieser Gleichung, so genügen die Funktionen

$$\Phi_n = cr^{-(n+1)} \cdot S_n, \quad \Phi'_n = cr^n \cdot S_n \quad (5)$$

der Gleichung $\Delta \Phi = 0$.

Die allgemeine Lösung läßt sich bekanntlich linear zusammensetzen aus den Kugelfunktionen 1. und 2. Art. Um zunächst die Kugelfunktionen 1. Art strömungstheoretisch, aus bestimmten Quell- und Senkensystemen abzuleiten, denken wir uns etwa eine Quelle von der Ergiebigkeit q im Ursprung, dann ist die Geschwindigkeit in einem Punkte im Abstände r , $v_r = \frac{\partial \Phi_0}{\partial r}$. Die in der Zeiteinheit durch die

¹ Andere Beziehungen sind untersucht von M. Lagally, Dynamische und geometrische Eigenschaften der räumlichen Potentialströmung. Z. Math. Phys. B. 63. S. 360—380. 1925.

Kugelfläche $4\pi r^2$ hindurchtretende Menge ist also $q = \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} 4\pi r^2$,
woraus

$$\Phi_0 = -\frac{q}{4\pi r}, \quad 4\pi \Phi_0 = -\frac{q}{r}$$

sich ergibt. Wenn weiter in unmittelbarer Nachbarschaft zu der Quelle im Abstände $-dz$ eine Senke von derselben Ergiebigkeit liegt, so wird das Potential

$$\Phi_1 = \frac{pdz}{4\pi} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{m}{4\pi} \frac{z}{r} \frac{1}{r^2} = -\frac{m}{4\pi} \cos \vartheta \frac{1}{r^2},$$

wenn die als endlich vorausgesetzte Größe qdz , die Ergiebigkeit der Quellsenke, $=m$ gesetzt wird.

Wenn man zur Abkürzung $\cos \vartheta = \nu$ einführt, so sieht man in der Tat, daß die beiden einfachsten Kugelfunktionen 1. Art

$$P_0(\nu) = 1, \quad P_1(\nu) = \nu$$

einer Senke (oder Quelle) im Ursprung, resp. einer Doppelquelle mit einer in die z -Richtung fallenden Achsenrichtung entsprechen.

So kann man fortfahren und feststellen, daß alle elementaren, aus den zonalen Kugelfunktionen 1. Art

$$\left. \begin{aligned} P_0(\nu) &= 1, & P_1(\nu) &= \nu, & P_2(\nu) &= \frac{1}{2}(3\nu^2 - 1), & P_3(\nu) &= \frac{1}{2}(5\nu^3 - 3\nu), \\ P_n(\nu) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{\partial^n (\nu^2 - 1)^n}{d\nu^n} = \frac{(-1)^n}{n!} r^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1}{r} \right); \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

abgeleiteten Potentiale

$$\Phi_n c r^{-(n+1)} P_n(\nu) = c \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \Phi_0$$

einem Strömungsfeld sich zuordnen lassen, das von einer dichten Folge von Quellen, Senken oder Quellsenken im Ursprung herrührt.

Die Funktionen $\Phi_n' = r^n P_n(\nu)$ entstehen, wenn Quellen resp. Senken ins Unendliche rücken. So gehört z. B. $\Phi_1' = z$ zu einer gewöhnlichen, aus dem Unendlichen kommenden und der z -Richtung folgenden Parallelströmung. Weiter ergibt sich, daß die aus einem beliebigen Punkt der z -Achse quellende Strömung auf jene elementaren Stromformen zurückführbar ist. Wenn etwa die Einheitsquelle den Abstand ζ vom Ursprung hat, so ergibt sich unmittelbar durch Entwicklung

$$-4\pi \Phi = \frac{1}{(\zeta - 2\zeta r\nu + r^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\zeta} + P_1 \frac{r}{\zeta} + P_2 \frac{r^2}{\zeta} + \dots \quad (7)$$

$$(r < \zeta)$$

$$\text{resp.} \quad = \frac{1}{r} + P_1 \frac{\zeta}{r^2} + P_2 \frac{\zeta^2}{r^3} + \dots \quad (r > \zeta). \quad (7a)$$

Das ist aber nur ein spezieller Fall eines allgemeinen Satzes der besagt, daß sich jede Funktion $f(\nu)$ durch eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe

$$f(\nu) = C_0 + C_1 P_1(\nu) + C_2 P_2(\nu) + \dots$$

entwickeln läßt, deren Koeffizienten ähnlich wie die Koeffizienten der Fourier-Reihe durch bestimmte Integrale darzustellen sind. Dann wird aber die Differentialgleichung $\nabla^2 \Phi = 0$ erfüllt durch

$$\Phi = \frac{C_0 P_0(\nu)}{r} + \frac{C_1 P_1(\nu)}{r^2} + \dots$$

resp.

$$\Phi' = C_0 P_0(\nu) + C_1 r P_1(\nu) + \dots$$

Die Kugelfunktionen 2. Art Q_n können bekanntlich aufgefaßt werden als Kugelfunktionen 1. Art mit negativen Exponenten

$$Q_n = P_{-(n+1)}. \quad (8)$$

Man erhält für die ersten Funktionen

$$Q_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\nu}{1-\nu} = \ln \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}; \quad Q_1 = -1 + \cos \vartheta \ln \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}. \quad (9)$$

Was ihre Deutung angeht, so ergibt sich z. B. durch Integration von (7) für das Potential einer längs der z -Achse von O bis ζ gleichmäßig ausgebreiteten Quellstrecke von der Ergiebigkeit q der Ausdruck

$$-\frac{q}{4\pi\zeta} \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{(\zeta^2 - 2\zeta r\nu + r^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{q}{4\pi\zeta} \ln \frac{\operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\vartheta'}{2}} = -\frac{q}{4\pi\zeta} (Q_0 - Q'_0), \quad (10)$$

wobei Q'_0 die auf den Punkt $z = \zeta$ als Anfangspunkt bezogene Kugelfunktion 2. Art und ϑ' den entsprechenden Polarwinkel bedeutet. Gleichzeitig erhält man aus den Integralen der Reihen (7) und (7a) zwei Entwicklungen von $Q_0 - Q'_0$ nach Kugelfunktionen (für $r < \zeta$ und $> \zeta$). Ebenso zeigt die Rechnung, daß die Funktion $rQ_1 - r'Q'_1$ als Bestandteil auftritt in dem Potential einer Quellstrecke auf der z -Achse (von 0 bis ζ) mit linear wachsender Ergiebigkeit.

In ähnlicher Weise lassen sich auch die Lösungen der allgemeinen Gleichungen (1) und (2) nach der Quellsenkenmethode analysieren.

Haben wir z. B. eine einfache Quelle mit den sphärischen Koordinaten $r_1 \vartheta_1 \varphi_1$, so ist der Abstand des Aufpunktes P von dieser Quelle

$$r' = \sqrt{r^2 - 2rr_1 \cos \gamma + r_1^2},$$

wobei

$$\cos \gamma = \cos \vartheta \cos \vartheta_1 + \sin \vartheta \sin \vartheta_1 \cos(\varphi - \varphi_1)$$

den \cos des Winkels zwischen den Radienvektoren beider Punkte bedeutet. Der für das Potential der Quelle wesentliche Ausdruck $\frac{1}{r'}$ hat nach Taylor die Entwicklung

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} - (r_1 \nabla) \frac{1}{r} + \frac{1}{2!} (r_1 \nabla)^2 \frac{1}{r} + \dots, \quad (10)$$

in welcher wieder die Kugelfunktionen $P_n(\cos \gamma)$ eingeführt werden können, die sich von den oben gebrauchten Funktionen nur dadurch unterscheiden, daß $\cos \gamma$ an Stelle von $\cos \vartheta$ tritt.

Zu einer Doppelquelle mit dem Moment 1 im Ursprung, deren Achse in der Richtung $e(l, m, n)$ liegt, gehört ferner das Potential

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi} \left(l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi} (eV) \cdot \frac{1}{r}. \quad (11)$$

Ausrechnung ergibt

$$\begin{aligned} 4\pi \Phi_1 &= - \left(l \frac{x}{r} \cdot \frac{1}{r^2} + m \frac{y}{r} \cdot \frac{1}{r^2} + n \frac{z}{r} \cdot \frac{1}{r^2} \right) \\ &= - \frac{1}{r^2} (l \sin \vartheta \cos \varphi + m \sin \vartheta \sin \varphi + n \cos \vartheta). \end{aligned} \quad (11a)$$

Dieses Potential ist in der Tat ein partikuläres Integral der Differentialgleichung, dessen allgemeinere Lösung lautet

$$4\pi \Phi_n = \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) \sin^m \vartheta \frac{d^m P_n(\cos \vartheta)}{d(\cos \vartheta)^m}. \quad (12)$$

Die übrigen in diesem Ausdruck enthaltenen Lösungen erhält man, wenn man die Operation (eV) an dem Ausdruck $\frac{1}{r}$ wiederholt für irgendwelche andere Richtungen, d. h. wenn man dem ursprünglichen Quellsenkenpaar weitere unendlich benachbarte Paare im Ursprung hinzufügt. So entspricht z. B. die Operation

$$(eV)^2 \frac{1}{r}$$

zwei hintereinander angeordneten Quellsenkenpaaren, die Operation

$$(e_1V)(e_2V) \cdot \frac{1}{r}$$

dagegen einem System von zwei nebengeordneten Paaren oder von vier im Parallelogramm um den Ursprung angeordneter Quellen, resp. Senken usw.

Durch Verallgemeinerung bestätigt sich also wieder in direkter Weise der früher allgemein bewiesene Satz, daß jede Lösung der Gleichung $V^2 \Phi = 0$, d. h. jede mögliche Strömung als erzeugt gedacht werden kann von einem System bestimmt angeordneter Quellen und Senken.

2. Die auf Zylinderkoordinaten transformierte achsensymmetrische Gleichung

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (13)$$

wird durch die Substitution

$$\Phi = e^{\pm kz} \chi(\rho) \quad (14)$$

zur Bestimmung von $\chi(\varrho)$ auf die Differentialgleichung der Besselschen Funktionen nullter Ordnung

$$\frac{d^2 \chi}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d\chi}{d\varrho} + k^2 \chi(\varrho) = 0 \quad (15)$$

geführt. Die Besselsche Funktion $J_0(k\varrho)$ hat mit $k\varrho = \zeta$ die Form

$$J_0(\zeta) = 1 - \frac{\zeta^2}{2^2} + \frac{\zeta^4}{2^2 \cdot 4^2} - \dots \quad (16)$$

Es ergibt sich weiter, daß, wenn F eine Funktion von der Eigenschaft der Potentialfunktion ist, zwei zusammengehörige Funktionen, Φ und Ψ , von denen letztere der Gleichung

$$\frac{d^2 \Psi}{d\varrho^2} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Psi}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0 \quad (17)$$

genügt, daraus in folgender Weise sich ableiten lassen

$$\Phi = \frac{\partial F}{\partial z}, \quad \Psi = -\varrho \frac{\partial F}{\partial \varrho}. \quad (18)$$

Daher hat die zu (14) gehörige Stromfunktion die Form

$$\Psi = \mp \varrho e^{\pm kz} J_0(\zeta). \quad (19)$$

Das Potential (14) läßt sich als Grenzform einer Kugelfunktion darstellen. Setzt man nämlich in dem Ausdruck

$$\Phi_n = \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos \vartheta)$$

vorübergehend $r = a + z$, $\varrho = 2a \sin \frac{1}{2} \vartheta$ und benutzt die Darstellung

$$P_n(\cos \vartheta) = 1 - \frac{n(n+1)}{1^2} \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta + \frac{(n-1) \dots (n+2)}{1^2 \cdot 2^2} \sin^4 \frac{1}{2} \vartheta + \dots,$$

so erhält man

$$\Phi_n = \left(1 + \frac{z}{a}\right)^n P_n(\nu) = \left(1 + \frac{z}{a}\right)^n H_n(\varrho).$$

Wenn jetzt a und n unendlich werden, während $k = \frac{n}{a}$ endlich bleibt, so wird

$$\lim_{a, n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{a}\right)^n H_n(\varrho) = e^{kz} J_0(k\varrho). \quad (20)$$

Ferner kann man eine willkürliche Funktion von ϱ durch Integrale der Besselschen Funktionen ausdrücken. So ergibt sich für das bei einer einfachen Quelle auftretende Potential $\frac{1}{r}$ die Gleichung

$$\frac{1}{r} = \int_0^\infty e^{-kz} J_0(k\varrho) dk. \quad (21)$$

Auf das zweite partikuläre Integral der Gleichung (17) (die Neumannsche Zylinderfunktion 2. Art nullter Ordnung) sowie auf die Lösungen der Gleichung $\nabla^2 \Phi = 0$, die auf die Besselschen Funktionen höherer Ordnung führen, wollen wir hier nicht eingehen¹.

10. Die ebene Potentialströmung.

Wenn in allen Ebenen normal zur z -Achse dieselben Zustände herrschen oder wenn keine Kraftwirkung oder Strömung in der z -Richtung erfolgt, so verschwinden alle Differentialquotienten nach der z -Koordinate, die daher überhaupt in den Gleichungen weggelassen werden kann. Die möglicherweise vorkommenden Wirbellinien sind senkrecht zu den Strömungsebenen beiderseits ins Unendliche verlaufende geradlinige Wirbelfäden.

Dieser Fall der ebenen Strömung ist ebenso wie derjenige der achsensymmetrischen eine Abstraktion, die sich für viele Anwendungen als sehr zweckmäßig erweist. Auch wenn gewisse von den Voraussetzungen abweichende Erscheinungen an den Grenzen der Flüssigkeit auftreten, ist es häufig geboten, schon wegen der rechnerischen

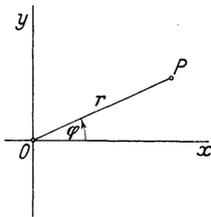


Abb. 15. Koordinaten in der Ebene.

Vereinfachung des Problems von dem Idealbilde der ebenen Strömung auszugehen und die durch die Begrenzung notwendige Korrektur erst nachträglich an den Resultaten anzubringen.

Zur Charakterisierung des Strömungsfeldes sollen entweder die rechtwinkligen Koordinaten xy oder die Polarkoordinaten $r\varphi$ in einer den Strömungsschichten parallelen Ebene verwendet werden (Abb. 15). Ein linearer Wirbelfaden erscheint dann in dieser Ebene als punktförmiger Wirbelkern, um den herum die Flüssigkeit in rotierender Bewegung begriffen ist. Der Wirbelvektor steht senkrecht auf dieser Ebene und hat den Wert

$$w_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial (r v_\varphi)}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right). \quad (1)$$

Wenn w_z verschwindet, d. h. $\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$ ist, so existiert ein Geschwindigkeitspotential Φ mit der grundlegenden Differentialgleichung

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (2)$$

Jede Funktion Φ , die dieser Gleichung genügt, beschreibt eine mögliche wirbelfreie Flüssigkeitsbewegung. Was die

¹ Vgl. H. Lamb, a. a. O., S. 156—163; ferner E. Madelung, Die mathem. Hilfsmittel des Physikers, Berlin 1922, S. 33—38.

Stromlinien Ψ angeht, so bedenke man, daß für einen Übergang von einer Ψ -Linie zur benachbarten

$$d\Psi = v_x dy - v_y dx = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy$$

zu setzen ist, woraus dann

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (3)$$

sich ergibt. Die Schar der Stromlinien genügt also derselben Differentialgleichung wie die Schar der sie orthogonal durchschneidenden Niveaulinien.

Die Gleichungen (3) sind aber gerade die Grundbedingungen, die der reelle und imaginäre Bestandteil einer analytischen Funktion der komplexen Variablen $z = x + iy$ zu erfüllen haben, deren Bereich mit der als Gaußischen Zahlenebene aufzufassenden Strömungsebene zusammenfällt. Damit ist also ein einfaches und sehr weittragendes Mittel gegeben, zusammengehörige Lösungen der Gleichung $\nabla^2 \Phi = 0$, $\nabla^2 \Psi = 0$ oder stationäre, wirbelfreie Strömungsbilder analytisch aufzufinden, und wir sehen zugleich den einfachen Zusammenhang mit der von Gauß begründeten Theorie der konformen Abbildung. Der Aufbau von Strömungssystemen kann in der Weise geschehen, daß man von gewissen einfachen Grundfunktionen ausgeht, um dann weitere, namentlich die für die praktische Anwendung gebrauchten Strömungsformen durch analytische „Verzerrung“ daraus abzuleiten, bei der die Ähnlichkeit im Unendlich-Kleinen, von gewissen Ausnahmestellen abgesehen, gewahrt bleibt.

Wenn die komplexe Funktion $W(z)$ die Zerlegung gibt

$$W(z) = \Phi(xy) + i\Psi(xy),$$

so erhält man die Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y ohne weiteres durch Differentiation nach z und Trennung des Reellen vom Imaginären. Denn die Gleichungen (3) ergeben

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = v_x - i v_y. \quad (4)$$

Diesen Vektor $v_x - i v_y$, der in bezug auf die reelle Achsenrichtung x spiegelbildlich zum Geschwindigkeitsvektor liegt, werden wir auch kurz komplexe Geschwindigkeit nennen und mit \bar{v} bezeichnen.

Gelegentlich wird auch statt \bar{v} der reziproke Wert gebraucht. Aus

$$\bar{v}^{-1} = \frac{1}{v_x - i v_y} = \frac{v_x + i v_y}{v_x^2 + v_y^2} = \frac{v e^{i\psi}}{v^2} = \frac{1}{v} e^{i\psi}$$

ergibt sich, daß \bar{v}^{-1} dieselbe Richtung hat wie die Geschwindigkeit v , aber deren reziproken Absolutwert. Die auf Polarkoordinaten umge-

recheneten Ausdrücke ergeben sich unmittelbar aus den in Abschnitt 8 für Zylinderkoordinaten angegebenen Ausdrücken, wenn man $\varrho = r$ und $z = 0$ setzt. So werden die Eulerschen Gleichungen im stationären Fall

$$\left. \begin{aligned} k_r - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\varphi^2}{r} \\ rk_\varphi - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} &= \frac{d(rv_\varphi)}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

und die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0. \quad (6)$$

Wir wollen die den Gleichungen (4) entsprechenden Beziehungen für die wirbellose Strömung direkt ableiten, indem wir setzen

$$\begin{aligned} z &= x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi} \\ v_x + iv_y &= ve^{i\psi}, \quad \bar{v} = ve^{-i\psi}. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{dW}{dz} e^{i\varphi} = ve^{-i(\psi-\varphi)} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + i \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (7)$$

Da nun, wie die Anschauung zeigt

$$v \cos(\psi - \varphi) = v_r, \quad v \sin(\psi - \varphi) = v_\varphi$$

zu setzen ist, so folgt durch Vergleich der reellen und imaginären Bestandteile beider Seiten der Gleichung (7) sofort

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = v_r, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -v_\varphi. \quad (8)$$

Ebenso folgt aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + i \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} &= \frac{dW}{dz} \frac{dz}{d\varphi} = irve^{-i(\psi-\varphi)} = r(v_\varphi + iv_r) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} &= rv_\varphi, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = rv_r. \end{aligned} \quad (8a)$$

Zusammenfassend haben wir also

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -r \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (9)$$

Beide Funktionen Φ und Ψ genügen der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (10)$$

Die für Φ geschriebene Gleichung drückt das Verschwinden von $\text{div } v$, die für Ψ geschriebene drückt das Verschwinden des Wirbels aus.

Als singuläre Strömungselemente kommen hier vor allem die zur Ebene senkrechten unendlich langen Wirbel- und Quellfäden in Betracht, die punkthartige Spuren in der Ebene bilden. Setzt man z. B. für die

Wirbelströmung $v_r = 0$ und benutzt den in Abschn. 5, (14a) gegebenen Ausdruck für die Tangentialgeschwindigkeit, so ergibt sich aus

$$\frac{\partial W}{\partial r} = -\frac{i\Gamma}{2\pi r}$$

durch Integration das komplexe, in der Umgebung des Punktwirbels gültige Potential

$$W_w = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z. \quad (11)$$

Ebenso erhält man für die Quelle, deren Ergiebigkeit

$$2\pi r \frac{\partial \Phi}{\partial r} = q$$

gesetzt wird, das Potential

$$W_q = \frac{q}{2\pi} \ln z. \quad (12)$$

Die Stromlinien eines Wirbels (resp. die Potentiallinien einer Quelle) sind Kreise, deren Radien sich vergrößern wie die e -Potenzen mit arithmetisch wachsenden Exponenten, während die Potentiallinien des Wirbels (resp. Stromlinien der Quelle) ein homogenes Strahlenbündel durch den Kern darstellen (Abb. 16).

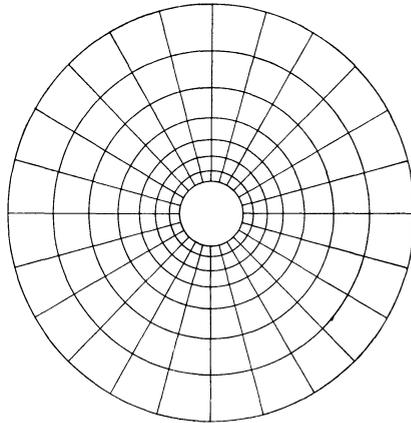


Abb. 16. Potentiallinien und Stromlinien eines Wirbels (resp. einer Quelle).

Wie man aus diesen Elementen weitere Strömungsbilder ableiten kann, wird die spätere Betrachtung lehren¹.

11. Die abbildenden Funktionen in der Ebene.

Die konforme Abbildung zweier in verschiedenen Ebenen befindlichen Strömungsbereiche aufeinander kann man im allgemeinen dadurch bewirken, daß man jeden der Bereiche auf den Normalbereich einer dritten Ebene, etwa die von der reellen Achse begrenzte Halbebene t transformiert.

Um einige wichtige Funktionen abzuleiten, wollen wir von dem klassischen, zuerst von H. Schwarz und E. Christoffel gelösten Problem der Abbildung eines geradlinig begrenzten Bereichs der Z -Ebene auf die Halbebene t ausgehen.

¹ Die allgemeinen Eigenschaften der Strömungspotentiale mit logarithmischen und polaren Unstetigkeiten sind untersucht von P. Koebe, Nachrichten der Gesellsch. d. Wiss. Göttingen, Berlin 1919, S. 1—46.

Seien a, b, c die Koordinaten einer endlichen Anzahl von Punkten auf der reellen t -Achse in der t -Ebene, die dann den Punkten A, B, C der Z -Ebene entsprechen sollen (Abb. 17), so betrachten wir den Differentialquotienten

$$\frac{dZ}{dt} = k_1 (a-t)^{-\frac{\alpha}{\pi}} (b-t)^{-\frac{\beta}{\pi}} (c-t)^{-\frac{\gamma}{\pi}} \dots \quad (1)$$

und nehmen an, daß $a < b < c$ und

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots = 2\pi$$

ist. Wir betrachten zunächst zwei unendlich kleine Wege der Variablen t auf der reellen Achse zwischen den Punkten a und b und die entsprechenden Wege dZ_1, dZ_2 der Variablen Z . Dann wird

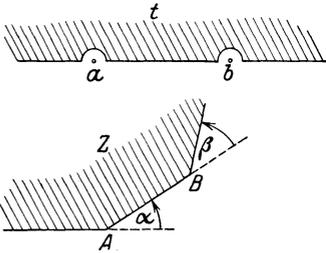


Abb. 17. Abbildung eines geradlinigen Polygons auf die Halbebene.

$$\frac{dZ_2}{dZ_1} = \left(\frac{a-t_2}{a-t_1} \right)^{-\frac{\alpha}{\pi}} \dots \frac{dt_2}{dt_1}.$$

Da nun $\frac{dt_2}{dt_1}$ reell ist, ebenso t_1 und t_2 ,

so wird auch der Quotient $\frac{dZ_2}{dZ_1}$ reell.

Der geradlinigen Wegfolge von t entspricht also in der Abbildung eine geradlinige Wegfolge von Z zwischen A und B .

Die singulären Punkte a, b müssen beim Durchlaufen der Realachse durch kleine Halbkreise umgangen werden. Wenn daher die Punkte t_1 und t_2 in den Endpunkten des Halbkreises um A fallen, so hat man, da $a-t_1$ und $a-t_2$ um den Faktor $e^{-\pi}$ sich unterscheiden,

$$\frac{dZ_2}{dZ_1} = e^{\alpha} \frac{dt_2}{dt_1}.$$

Wenn also t den Punkt a überschreitet, so hat sich der Differentialvektor dZ um den Winkel α gedreht. Man sieht daher, daß die Fläche des geschlossenen Polygons $AB\dots$ mit den Außenwinkeln α, β, \dots auf die obere Hälfte der t -Ebene konform abgebildet wird. Die Beziehung zwischen Z und t selbst ist durch das Integral

$$Z = k_1 \int (a-t)^{-\frac{\alpha}{\pi}} (b-t)^{-\frac{\beta}{\pi}} \dots + k_2 \quad (2)$$

gegeben, wobei der Integrationsweg in der t -Ebene innerhalb des Gebietes der Halbebene fällt. Die Konstanten k_i bestimmen den Maßstab und die Lage des Polygons.

Wenn man auf die Variable t eine lineare Transformation

$$t = \frac{a't' + b'}{c't' + d'} \quad (a', b', c', d' \text{ reell})$$

anwendet, die also drei unabhängige Konstanten enthält, so sind diese

Konstanten so wählbar, daß drei beliebig gegebenen reellen Werten von t drei ebenfalls beliebig gegebene Werte von t' entsprechen. Die entsprechende Transformation, auf die Variable Z angewandt, würde das geradlinige Polygon in ein Kreisbogenpolygon verwandeln.

Die unter (1) gegebene Transformation wollen wir die allgemeine Schwarz-Christoffelsche Abbildung nennen. Durch bestimmte Wahl der Punkte $a, b \dots$ und der Winkel $\alpha, \beta \dots$ erhält man nun wichtige Sonderfälle, die im folgenden eine Rolle spielen werden.

Nimmt man z. B. $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{\pi}{2}$, so erhält man als Polygon ein Rechteck und als Abbildungsfunktion ein elliptisches Integral, dessen Umkehrung eine elliptische Funktion ergibt.

Rücken zwei Punkte c und d dieses Rechtecks ins Unendliche und setzt man $a = -b$, so wird

$$\left. \begin{aligned} Z &= k_1 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - a^2}} + k_2 = k_1 \operatorname{ArCo}\int \frac{t}{a} + k_2 \\ t &= a \operatorname{Co}\int \frac{Z - k_2}{k_1}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ist $k_2 = 0$, so wird vermittelt

$$t = a \operatorname{Co}\int \frac{z}{k_1} \quad (3a)$$

der Halbstreifen, der von den positiven Hälften der Linien $Y = 0$, $Y = \pi k$, und dem zugehörigen Stück der Y -Achse begrenzt ist, auf der t -Halbebene abgebildet, wie sich auch sofort durch eine direkte Betrachtung der Funktion

$$\operatorname{Co}\int \frac{Z}{k_1} = \operatorname{Co}\int \frac{X}{k_1} \cos \frac{Y}{k_1} + i \operatorname{Si}\int \frac{X}{k_1} \sin \frac{Y}{k_1}$$

ergibt (Abb. 18).

Wenn die beiden Punkte a und b zusammenfallen, z. B. in den Anfangspunkt, so wird

$$Z = k_1 \int \frac{dt}{t} = k_1 \ln t + k_2. \quad (4)$$

Dadurch wird z. B. für $k_2 = 0$ die obere Hälfte der t -Ebene in den Streifen zwischen den Geraden $Y = 0$ und $Y = \pi k_1$ übergeführt (Abb. 19). Kombiniert man nun die Abbildungen (3) und (4), indem man setzt

$$\begin{aligned} Z &= \operatorname{ArCo}\int \frac{t}{a}; \\ Z &= \ln \frac{\zeta}{R} = \ln \left| \frac{\zeta}{R} \right| + i \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}, \end{aligned}$$

so erhält man die Abbildung des vom Halbkreis $|\xi| = R$ und den äußeren Teilen der reellen Achse $|\xi| > R$ begrenzten Gebietes auf die

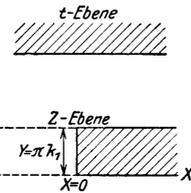


Abb. 18. Die konforme Abbildung $t = a \operatorname{Co}\int \frac{z}{k_1}$.

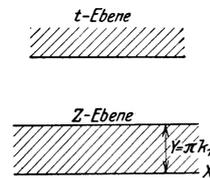


Abb. 19. Die konforme Abbildung $Z = k_1 \ln t$.

Halbebene t . Daher wird auch das ganze Äußere des Kreises $|\zeta| = R$ abgebildet auf die längs der Strecke $\pm a$ aufgeschnittene t -Ebene (Abb. 20).

$$\text{Für} \quad \ln \frac{\zeta}{R} = \Re \Im \left\{ \frac{t}{a} \right.$$

kann man auch schreiben

$$\frac{\zeta}{R} = \frac{t + \sqrt{t^2 - a^2}}{a},$$

woraus als Umkehrung die später viel zu benützende Funktion

$$t = \frac{a}{2R} \left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta} \right)$$

entsteht. Wenn man $a = 2R$ setzt, so geht die Funktion über in

$$t = \zeta + \frac{R^2}{\zeta}. \quad (5)$$

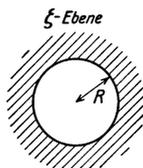
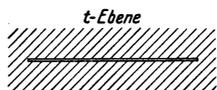


Abb. 20. Die konforme Abbildung $t = \zeta + \frac{R^2}{\zeta}$.

Damit ist erreicht, daß nicht nur die unendlich fernen Punkte sich gegenseitig entsprechen, sondern daß auch im Unendlichen der Abbildungsmodul $\left| \frac{dt}{d\zeta} \right| = 1$ ist oder die Abbildung hier in die Identität übergeht.

Wenn wir den geradlinigen Schlitz der t -Ebene sich zu einer beliebigen geschlossenen (singularitätenfreie) Kurve sich ausdehnen lassen, so ist es möglich, das Außengebiet auf das äußere Gebiet eines Kreises in der ζ -Ebene durch eine Funktion von der verallgemeinerten Form

$$t = \zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \dots \quad (6)$$

so zu transformieren, daß das Unendlichferne erhalten bleibt. Dabei kann die Reihe auf der rechten Seite endlich oder unendlich sein. Einige der von L. Bieberbach u. a. abgeleiteten Sätze bezüglich dieser Abbildung sollen erst später im Anschluß an praktisch wichtige Fälle Erörterung finden.

12. Umformungen der Impulsformeln.

Wir wollen die in Abschnitt 9 begründete Darstellbarkeit der Potentialfunktion dazu benutzen, um die Ausdrücke des Abschnittes 6 für die auf die Begrenzung einer Strömung z. B. auf einen eingetauchten Körper ausgeübte Druckkraft umzugestalten. Wenn z. B. die Strömung außerhalb der Begrenzung F im Unendlichen die in die z -Achse fallende Geschwindigkeit v_0 besitzt, so kann man für das Poten-

tial die nach allgemeinen Kugelfunktionen fortschreitende Reihe ansetzen.

$$\Phi = v_0 z + \sum_k \mathfrak{C}_k (\mathbf{e}_1 \nabla) (\mathbf{e}_2 \nabla) \dots (\mathbf{e}_k \nabla) \frac{1}{r}. \quad (1)$$

Da für das folgende nur die drei ersten Glieder gebraucht werden, so kann man schreiben

$$\Phi = v_0 z + \frac{A}{r} + (\mathfrak{C} \nabla) \frac{1}{r} + \dots, \quad (2)$$

wo A eine skalare, \mathfrak{C} eine vektorielle Konstante bedeutet. Dann ist die Geschwindigkeit bis auf Glieder zur Ordnung -3

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi = \mathbf{e}_3 v_0 + A \nabla \frac{1}{r} + (\mathfrak{C} \nabla) \nabla \frac{1}{r} + \dots, \quad (3)$$

wenn \mathbf{e}_3 den Einheitsvektor in der z -Richtung bezeichnet. Für die weitere Rechnung führen wir den Einheitsvektor \mathbf{n} in Richtung der äußeren Normalen der Kugel ein und haben dann

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \nabla \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{n}}{r^2}$$

oder bei vorübergehender Einführung von rechtwinkligen Koordinaten

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \left(\mathbf{e}_1 \frac{x}{r} + \mathbf{e}_2 \frac{y}{r} + \mathbf{e}_3 \frac{z}{r} \right).$$

Das dritte Glied wird daher

$$(\mathfrak{C} \nabla) \nabla \frac{1}{r} = \left(C_x \frac{\partial}{\partial x} + C_y \frac{\partial}{\partial y} + C_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(-\frac{\mathbf{n}}{r^2} \right).$$

Bilden wir z. B. den ersten Summanden, so kommt

$$C_x \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{r^3} (\mathbf{e}_1 x + \mathbf{e}_2 y + \mathbf{e}_3 z) \right) = -C_x \frac{\mathbf{e}_3}{x r^3} + 3 \frac{C_x}{r^3} \left[\mathbf{e}_1 \left(\frac{x}{r} \right)^2 + \mathbf{e}_2 \frac{xy}{r^2} + \mathbf{e}_3 \frac{xz}{r^2} \right]$$

Wir erhalten daher in vektorieller Schreibweise

$$(\mathfrak{C} \nabla) \nabla \frac{1}{r} = \frac{-\mathfrak{C} + 3 \mathfrak{C} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}{r^3}.$$

Daher wird, wenn wir für \mathbf{e}_3 einfach \mathbf{e} schreiben

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= v_0 z + \frac{A}{r} - \frac{\mathfrak{C} \mathbf{n}}{r^2} + \dots \\ \mathbf{v} &= \mathbf{e} v_0 - \frac{A \mathbf{n}}{r^2} + \frac{-\mathfrak{C} + 3 \mathfrak{C} \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}{r^3} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Um die in dem Kraft- und Momentenausdruck (Abschn. 6) vorkommenden, längs der Kontrollkugel K zu erstreckenden Integrale zu berechnen, haben wir zunächst die Ausdrücke

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \mathbf{n} df - \frac{1}{2} v^2 \mathbf{n} df, \quad [\mathbf{r} \mathbf{v}] \cdot \mathbf{v} \mathbf{n} df$$

umzuformen¹. Da für die Punkte der Kugel $r = rn$ ist, so erhalten wir nach einfacher Rechnung

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v} \mathbf{n} &= v_0 \mathbf{n} \mathbf{e} - \frac{A}{r^2} + \frac{2 \mathfrak{C} \mathbf{n}}{r^3} + \dots \\ v^2 &= v_0^2 - \frac{2A v_0 \mathbf{n} \mathbf{e}}{r^2} + \dots \\ [\mathbf{r} \mathbf{v}] &= r [\mathbf{n} \mathbf{e}] v_0 + \frac{[\mathfrak{C} \mathbf{n}]}{r^2} + \dots \end{aligned} \right\}$$

$$- \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \mathbf{n} + \frac{1}{2} v^2 \mathbf{n} = \frac{1}{2} v_0^2 \mathbf{n} - v_0^2 \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} \mathbf{e} + \frac{A v_0 \mathbf{e}}{r^2} + \dots$$

Wenn wir etwa Kugelfunktionen r, ϑ, φ einführen, so wird z. B.

$$- \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \mathbf{n} + \frac{1}{2} v^2 \mathbf{n} = \frac{1}{2} v_0^2 (-\mathbf{e} \cos \vartheta + \mathbf{e}_1 \sin \vartheta \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \vartheta \sin \varphi) + \frac{A \mathbf{e} v_0}{r^2} + \dots$$

Setzt man ferner das Flächenelement unter Einführung des räumlichen Zentriwinkels

$$d\tilde{f} = \mathbf{n} r^2 d\varepsilon = \mathbf{n} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad df = r^2 d\varepsilon = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

so sieht man, daß wenn r unendlich wird, in dem ersten Integral die Glieder mit v_0^2 als Faktor und alle Glieder mit negativen Potenzen von r verschwinden. Wir erhalten also

$$- \oint_K \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \mathbf{n} - \frac{1}{2} v^2 \mathbf{n} \right) df = A v_0 \oint_K \mathbf{e} d\varepsilon = 4\pi A v_0. \quad (5)$$

Für das Moment der Kraft haben wir das Integral

$$\begin{aligned} \oint_K [\mathbf{r} \mathbf{v}] \cdot \mathbf{v} \mathbf{n} df &= \oint_K \left(r [\mathbf{n} \mathbf{e}] v_0 + \frac{[\mathfrak{C} \mathbf{n}]}{r^2} \right) \cdot \left(v_0 \cos \vartheta - \frac{A}{r^2} + \frac{2 \mathfrak{C} \mathbf{n}}{r^3} + \dots \right) df \\ &= r^3 v_0^2 \oint_K [\mathbf{n} \mathbf{e}] \mathbf{e} \mathbf{n} d\varepsilon - A v_0 r \oint_K [\mathbf{n} \mathbf{e}] d\varepsilon \\ &\quad + v_0 \left(\oint_K [\mathfrak{C} \mathbf{n}] \mathbf{n} \mathbf{e} d\varepsilon + 2 \oint_K [\mathbf{n} \mathbf{e}] \mathfrak{C} \mathbf{n} d\varepsilon \right) \end{aligned}$$

auszuwerten. Das kann geschehen durch Einführung der Kugelkoordinaten oder durch Benutzung folgender auf die Einheitskugel sich beziehender Vektorintegrale

$$\left. \begin{aligned} \oint d\varepsilon &= 4\pi, & \oint \mathbf{n} df &= 0 \quad \text{oder} \quad \oint \mathbf{n} d\varepsilon = 0 \\ \oint [\mathbf{n} \mathbf{e}] \mathbf{e} \mathbf{n} d\varepsilon &= 0, & \oint [\mathbf{n} \mathbf{e}] d\varepsilon &= -[\mathbf{e} \oint \mathbf{n} d\varepsilon] = 0, \\ \oint [\mathfrak{C} \mathbf{n}] \mathbf{e} \mathbf{n} d\varepsilon &= [\mathfrak{C} \oint \mathbf{n} \cos \vartheta d\varepsilon] = [\mathfrak{C} \oint z d\tilde{f}] = [\mathfrak{C} \oint \nabla z d\tau] \\ &= [\mathfrak{C} \frac{4}{3} \pi \mathbf{e}] \oint [\mathbf{n} \mathbf{e}] \mathfrak{C} \mathbf{n} d\varepsilon = \frac{4}{3} \pi [\mathfrak{C} \mathbf{e}]. \end{aligned} \right\}$$

¹ Vgl. neben der oben zitierten Arbeit von M. Lagally: H. Liebmann, Die Lagallysche Formel für den Flüssigkeitsdruck, Sitzungsberichte der bayr. Adakemie der Wiss. 1922, S. 127—134.

Auf die beiden letzten Integrale ist der Gaußsche Umwandelungsatz angewendet worden.

Es bleibt also schließlich

$$\int [\mathbf{r} \mathbf{v}] \cdot \mathbf{v} \, n \, d f = 4 \pi [\mathfrak{C} \mathfrak{e}] v_0 = 4 \pi [\mathfrak{C} v_0]. \quad (6)$$

Damit erhalten wir für die auf die Fläche F wirkende Kraft und das Moment der Kraft die Ausdrücke

$$\mathfrak{K} = 4 \pi \varrho A v_0 + \varrho \int_R \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d \tau - \varrho \int_R [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}] \, d \tau \quad (7)$$

$$\mathfrak{M} = 4 \pi \varrho [v_0 \mathfrak{C}] + \varrho \int_R [\mathbf{r} \mathbf{v}] \cdot \nabla \mathbf{v} \, d \tau - \varrho \int_R [\mathbf{r} [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}]] \, d \tau \quad (8)$$

Kraft und Moment hängen also für den Fall, daß die Flüssigkeit das Außengebiet der Fläche F ausfüllt, außer von den bei der „inneren Aufgabe“ vorkommenden Größen, d. h. den Quellen und Wirbeln im Stromfeld noch von der Geschwindigkeit im Unendlichen und von den beiden in der Entwicklung der Potentialfunktion enthaltenen skalaren und vektoriellen Konstanten (A und \mathfrak{C}) ab.

Wenn keine Quellen und Wirbel vorkommen, so bleiben nur die beiden, mit v_0 proportionalen Ausdrücke übrig. Nun folgt aber aus der Deutung der Kugelfunktionen, daß die Konstante A für eine singularitätenfreie Strömung verschwindet. Da \mathfrak{C} im allgemeinen von Null verschieden ist, so ergibt sich der zuerst von M. Lagally¹ allgemein bewiesene Satz, daß eine reine Translationsströmung auf einen eingetauchten Körper zwar keine Kraft, wohl aber ein Moment ausübt.

Die weitere Aufgabe würde darin bestehen, auch die Konstanten A und \mathfrak{C} durch die Grundgrößen $\nabla \mathbf{v}$ und $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ auszudrücken und die Ausdrücke für \mathfrak{K} und \mathfrak{M} etwa dem Falle diskreter Quellen und Wirbel anzupassen. Die Rechnung, die an die früher (Abschnitt 5) gegebene Darstellung der Geschwindigkeit durch das Quell- und Wirbelfeld

$$\mathbf{v} = v_0 - \nabla \int \frac{\nabla \mathbf{v}}{4 \pi r_q} \, d \tau + \operatorname{rot} \int \frac{\operatorname{rot} \mathbf{v}}{4 \pi r_w} \, d \tau.$$

(Die Integrale sind über den Innen- und Außenraum zu erstrecken) und an die Entwickelbarkeit der Teilpotentiale Φ_q und Φ_w nach Kugelfunktionen anknüpft, ist von M. Lagally vollständig durchgeführt worden. Da wir für die Folge nur den speziellen ebenen Fall behandeln werden, gehen wir hier auf die allgemeinen Entwickelungen nicht weiter ein.

¹ Vgl. a. a. O. S. 415.

13. Die Lagallyschen Formeln für die ebene Strömung mit diskreten Singularitäten.

Wir haben bereits in Abschnitt 6 den auf eine geschlossene Fläche C von der äußeren Flüssigkeit ausgeübten Strömungsdruck berechnet und stellen uns nunmehr die Aufgabe, die allgemeine Form des Kraftausdrucks

$$\mathfrak{P} = - \varrho \int_K (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, n \, df - \frac{1}{2} v^2 \, n \, df) + \varrho \int_R \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\tau - \varrho \int_R [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}] \, d\tau \quad (1)$$

auf die ebenen komplexen Koordinaten zu transformieren¹. Wir haben in diesem Falle statt der ins Unendliche wachsenden Kontrollkugel einen unendlich langen, sämtliche singulären Stellen umschließenden Zylinder K resp. einen Kreis als dessen Spur in der Ebene zu nehmen. Dann wird die auf den Grundzylinder pro Längeneinheit ausgeübte Kraft

$$\mathfrak{P} = - \varrho \int_K \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, n \, ds - \frac{1}{2} v^2 \, n \, ds \right) + \varrho \int_R \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\sigma - \varrho \int_R [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}] \, d\sigma, \quad (2)$$

wo \mathbf{n} wieder den Einheitsvektor in Richtung der äußeren Normalen des Randelementes ds , ferner R das äußere zwischen C und K gelegene Flüssigkeitsgebiet und $d\sigma$ dessen Elementarfläche bedeutet.

Setzen wir jetzt

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 v_x + \mathbf{e}_2 v_y,$$

so wird

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{e} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 2 \, \mathbf{e} \, w_z \\ [\mathbf{v} \operatorname{rot} \mathbf{v}] &= 2 \, \mathbf{e}_1 (v_y w_z - v_z w_y) + 2 \, \mathbf{e}_2 (v_z w_x - v_x w_z) \\ &= (-\mathbf{e}_2 v_x + \mathbf{e}_1 v_y) \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

ferner

$$\mathbf{n} \, ds = \mathbf{e}_1 \, dy - \mathbf{e}_2 \, dx,$$

daher wird

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{2} v^2 \, \mathbf{n} \right) ds &= \mathbf{e}_1 (v_x^2 \, dy - v_x v_y \, dx) + \mathbf{e}_2 (v_x v_y \, dy - v_y^2 \, dx) \\ &\quad - \frac{1}{2} (v_x^2 + v_y^2) (\mathbf{e}_1 \, dy - \mathbf{e}_2 \, dx). \end{aligned}$$

Wenn wir nun komplexe Variable $z = x + iy$, $W = \Phi + i\Psi$ und $\bar{v} = \frac{dW}{dz} = v_x - i v_y$, ferner den an der reellen Achse gespiegelten Kraftvektor $\bar{P} = P_x - i P_y$ einführen, so tritt unter dem ersten Integral

¹ Vgl. M. Lagally, Sitzungsberichte der Bayr. Akad. des Wiss., 1921, S. 221f.

der Ausdruck auf

$$i \frac{\varrho}{2} (v_x - i v_y)^2 (dx + i dy) = - \left[\frac{1}{2} (v_x^2 - v_y^2) dy - v_x v_y dx \right] + i \left[\frac{1}{2} (v_x^2 - v_y^2) dx + v_x v_y dy \right].$$

Wir erhalten also für den Vektor \bar{P}

$$\bar{P} = \frac{1}{2} i \varrho \int_K \bar{v}^2 dz + \varrho \int_R \bar{v} \cdot \nabla v d\sigma - i \varrho \int_R \bar{v} |\text{rot } v| d\sigma. \quad (3)$$

Wenn im äußeren Flüssigkeitsgebiet keine Quellen und Senken und keine Wirbel vorkommen, verschwinden die beiden letzten Integrale und die Gleichung geht in die einfachere, bereits von Blasius¹ gefundene Formel über.

Für das Kraftmoment hat man zunächst

$$\mathfrak{M} = - \varrho \int \left\{ [r v] \cdot v n ds - \frac{1}{2} [r n] v^2 ds \right\} + \varrho \int_R [r v] \cdot \nabla v d\sigma - \varrho \int_R [r [v \text{ rot } v]] d\sigma. \quad (4)$$

Mit Einführung komplexer Größen findet man für das Moment den reellen Teil des komplexen Ausdrucks

$$M + iN = - \varrho \int_K \bar{v}^2 z dz + i \varrho \int_R z \bar{v} \nabla v d\sigma + \varrho \int_R z \bar{v} |\text{rot } v| d\sigma. \quad (5)$$

Es kommt nun noch darauf an, die Ausdrücke für \bar{P} und $M + iN$ in eine für die praktische Verwendung geeignete Gestalt zu bringen, im besonderen für den Fall, daß in der Flüssigkeit nur diskrete Singularitäten vorhanden sind. Wenn wir annehmen, daß die Geschwindigkeit \bar{v} durch die Reihe

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (6)$$

dargestellt ist, so wird nach dem Residuensatz

$$\left. \begin{aligned} \int \bar{v}^2 dz &= 4i\pi a_1 \bar{v}_0 \\ \int \bar{v}^2 z dz &= 2i\pi (2a_2 \bar{v}_0 + a_1^2) = 4i\pi a_2 \bar{v}_0 + 2i\pi a_1^2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Ist ferner die Verteilung der Quellen und Wirbel bekannt, und bezeichnen wir die Quellpunkte (oder Senkenpunkte) mit z_k , die Ergiebigkeit mit q_k , die Wirbelpunkte mit z_l und die Zirkulation mit Γ_l , so sind die zugehörigen Potential- und Geschwindigkeitsanteile

$$\left. \begin{aligned} W_k &= \frac{q}{2\pi} \ln(z - z_k), & \bar{v}_k &= \frac{q}{2\pi z - z_k} = \frac{q}{2\pi} \left(\frac{1}{z} + \frac{z_k}{z^2} + \dots \right) \\ W_l &= - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_l), & \bar{v}_l &= - \frac{i\Gamma}{2\pi z - z_l} = - \frac{i\Gamma}{2\pi} \left(\frac{1}{z} + \frac{z_l}{z^2} + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

¹ H. Blasius: Funktionentheoretische Methoden in der Hydrodynamik. Z. Math. Phys. Bd. 58, S. 90—96. 1910.

Da in den Reihenentwicklungen für \bar{v} die Glieder von der Ordnung -1 nur von den einfachen Quellen und Wirbeln herrühren, so wird der Koeffizient a_1

$$a_1 = \frac{1}{2\pi} (\sum q_k - i \sum \Gamma_l). \quad (9)$$

Um das zweite und dritte Integral im Ausdruck für \bar{P} und $M + iN$ zu berechnen, verteilt man die Ergiebigkeit der Quelle und die Wirbelstärke des Wirbels auf kleinen Kreisen J_0 mit dem Radius a um die Punkte z_k und z_l , dann wird an diesen Stellen

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{q}{\pi a^2}, \quad |\operatorname{rot} \mathbf{v}| = 2w_z = \frac{\Gamma}{\pi a^2}.$$

Zerlegt man wieder die Geschwindigkeit in zwei Teile $\bar{v}_{0k} + \bar{v}_k^*$ resp. $\bar{v}_{0l} + \bar{v}_l^*$, von denen der erste von der im Kreise selbst vorhandenen Quelle oder dem Wirbel, der zweite von den anderen Teilen herrührt, so wird z. B. für eine Quelle, da $\int_{J_0} \bar{v}_{0k} d\sigma$ wegen der symmetrischen Verteilung aus dem Mittelpunkt verschwindet

$$\int_{J_0} \bar{v} \operatorname{div} v d\sigma = \frac{q}{\pi a^2} \int_{J_0} \bar{v}^* d\sigma.$$

Entwickelt man \bar{v}^* im Mittelpunkt in eine nach Potenzen von $z - z_M$ fortschreitenden Reihe, so ergibt sich

$$\int \bar{v}^* d\sigma = \pi a^2 \bar{v}_M + a^3(\dots),$$

also, wenn a gegen Null konvergiert

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{J_0} \bar{v} \operatorname{div} v d\sigma = q \bar{v}_k^*. \quad (10)$$

Ebenso wird

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{J_0} \bar{v} |\operatorname{rot} v| d\sigma = \Gamma \bar{v}_l^*. \quad (11)$$

Es ergibt sich also

$$\bar{P} = -2\pi \varrho a_1 v_0 + \varrho \sum q_k \bar{v}_k^* - i \varrho \sum \Gamma_l \bar{v}_l^*. \quad (12)$$

Die beiden Summen im Ausdruck von a_1 sind über die ganze Ebene mit Ausschluß des unendlich fernen Punktes zu erstrecken, d. h. also auch über die Quellen und Wirbel, die bei der analytischen Fortsetzung der Strömung im Inneren der Kontur auftreten (vgl. Abschnitt 24).

Da nun die Summe der Ergiebigkeit der im Innengebiet gelegenen Quellen zu Null wird, wie die früher besprochenen Fälle zeigen, so genügt es, $\sum q_k$ für das Außengebiet alleine zu bilden. Wenn wir ferner die Zirkulation um die Kontur, d. h. die Summe der Zirkulationen der inneren Wirbel (z_c) mit Γ_c bezeichnen, so können wir

$$a_1 = \frac{1}{2\pi} (\sum q_k - i \sum \Gamma_l - i \Gamma_c) \quad (13)$$

setzen und jetzt beide Summen über das Außengebiet A erstrecken. Daher lautet der Kraftausdruck

$$\bar{P} = -\varrho (\sum q_k - i \sum \Gamma_l - i \Gamma_c) \bar{v}_0 + \varrho \sum q_k \bar{v}_k^* - i \varrho \sum \Gamma_l \bar{v}_l^* \quad (14)$$

der unmittelbar für eine gegebene Strömung ausgewertet werden kann.

Für eine Doppelquelle würde man die Potential- und Geschwindigkeitswerte

$$W = -\frac{m}{2\pi} \frac{1}{z-z_0}, \quad \bar{v} = \frac{m}{2\pi} \frac{1}{(z-z_0)^2}$$

und die daraus resultierende weitere Gleichung

$$\int \bar{v} \operatorname{div} \mathfrak{v} d\sigma = m \frac{d\bar{v}^*}{dz}$$

erhalten.

Wenn wir dieselben Umrechnungen für den Momentenausdruck vornehmen, so wird z. B.

$$\left. \begin{aligned} \int z \bar{v} \operatorname{div} \mathfrak{v} d\sigma &= \sum_k z_k q_k \bar{v}_k^*, & \int z \bar{v} |\operatorname{rot} \mathfrak{v}| d\sigma &= z \Gamma \bar{v}^* \\ a_2 &= \frac{1}{2\pi} (\sum q_k z_k - i \sum \Gamma_l z_l - i \sum \Gamma_c z_c) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

und schließlich

$$\left. \begin{aligned} M + iN &= -\varrho (\sum q_k - i \sum (\Gamma_l + \Gamma_c))^2 \\ &\quad - \varrho \bar{v}_0 (\sum q_k z_k - i \sum \Gamma_l z_l - i \sum \Gamma_c z_c) \\ &\quad + \varrho \sum z_k q_k \bar{v}_k^* + \varrho \sum z_l \Gamma_l \bar{v}_l^* \end{aligned} \right\}. \quad (16)$$

Die in den folgenden Paragraphen für mehrere Fälle durchgeführte Berechnung der Strömungsdrücke wird sich im wesentlichen auf diese grundlegenden Lagallyschen Formeln stützen.

Im allgemeinen instationären Fall ist der Impulsdruck durch das über die Kontur und evtl. Hilfsflächen zu erstreckende Integral der zeitlichen Änderung der Potentialfunktion zu bestimmen

$$\mathfrak{P}_i = \varrho \frac{\partial}{\partial t} \int \Phi \mathfrak{n} df.$$

Wenn man berücksichtigt, daß längs der Kontur

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + c$$

wird, so läßt sich das entsprechende Integral auf die Form bringen

$$(P)_c = -i \varrho \int_c \frac{\partial W}{\partial t} dz \quad (17)$$

in der die Berechnung leicht durchgeführt werden kann¹.

¹ Koning, C.: Einige Bemerkungen über nicht-stationäre Strömungen an Tragflügeln, Proceedings of the I. intern. Congress für appl. mechanics, Delft 1925, S. 415.

III. Strömungen um feste Körper.

14. Einfache Fälle achsensymmetrischer Strömung.

1. Um einige für die Anwendung wichtige Strombilder zu gewinnen, gehen wir von den einfachsten, in Abschnitt 9 eingeführten Elementen aus und suchen die aus ihren zusammengesetzten Felder den Bedürfnissen der Anwendung anzupassen. Wenn wir z. B. eine in der z -Achse gelegene Quelle und eine Senke von der Ergiebigkeit q mit einer parallel der z -Achse gerichteten Strömung verbinden, so erhalten wir als Potentialfunktion

$$\Phi = v_0 z - \frac{q}{4\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (1)$$

wo r_1 und r_2 die von dem Quellen- resp. Senkenpunkt nach dem Aufpunkt gezogenen Radienvektoren darstellen.

Um die Stromlinien in einer Ebene durch die z -Achse zu erhalten, bestimmen wir den Fluß durch die senkrecht zur Achse gelegte Kreisfläche mit dem Radius ϱ . Man erhält dann

$$2\pi \int d\Psi = \int_0^{\varrho} 2\pi \varrho d\varrho \cdot v_z = \int_0^{\varrho} 2\pi \varrho d\varrho \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Läßt man die ϱ -Achse etwa durch die Mitte zwischen Quelle und Senke gehen, die den Abstand $2a$ voneinander haben, so ergibt sich aus (2) wegen der Stromfunktion

$$\begin{aligned} v_z &= v_0 + \frac{q}{4\pi} \left(\frac{z+a}{r_1^3} - \frac{z-a}{r_2^3} \right) \\ \Psi &= \frac{1}{2} v_0 \varrho^2 - \frac{q}{4\pi} \left(\frac{z+a}{r_1} - \frac{z-a}{r_2} \right) = c \end{aligned} \quad (2)$$

oder mit Einführung der Winkel ϑ_1 und ϑ_2 zwischen Radienvektoren und z -Achse

$$\Psi = \frac{1}{2} v_0 \varrho^2 - \frac{q}{4\pi} (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2) = c. \quad (2a)$$

Das gesamte Stromfeld wird in zwei von der Parallelströmung und der Quell- resp. Senkenströmung herrührende Teile getrennt durch eine ausgezeichnete, einhüllende Stromlinie, die geometrisch eine einzige geschlossene ellipsenartige Kurve (16. Grades) darstellt mit der aus (2a) zu gewinnenden Gleichung

$$\Psi_e = \frac{1}{2} v_0 \varrho^2 - \frac{q}{4\pi} (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2) = 0. \quad (3)$$

Den allgemeinen Eindeutigkeitssätzen zufolge kann man dann die gesamte Strömung auch dadurch entstanden denken, daß die geschlos-

sene der Gleichung (3) entsprechende Rotationsfläche in das Feld einer Parallelströmung gebracht wird (Abb. 21).

Da man leicht zwei Beziehungen zwischen der Längs- und Querabmessung dieser Fläche und den Größen q und a aufstellen kann (in den Punkten der z -Achse wird $r_1 = r_2$, in den achsialen Scheiteln wird $v_z = 0$), so hat man es in der Hand, eine gewisse erste Anpassung an praktisch wichtige Formen, z. B. Luftschiffkörper vorzunehmen.

Betreffs der Konstruktion der Stromlinien ist noch folgendes beachtenswert. Die Parallelstromlinien lassen wir so aufeinanderfolgen, daß durch den ringförmigen Querschnitt, der durch Rotation der Abstandsstrecke $\Delta\rho$ zweier aufeinanderfolgender Linien um die Achse ent-

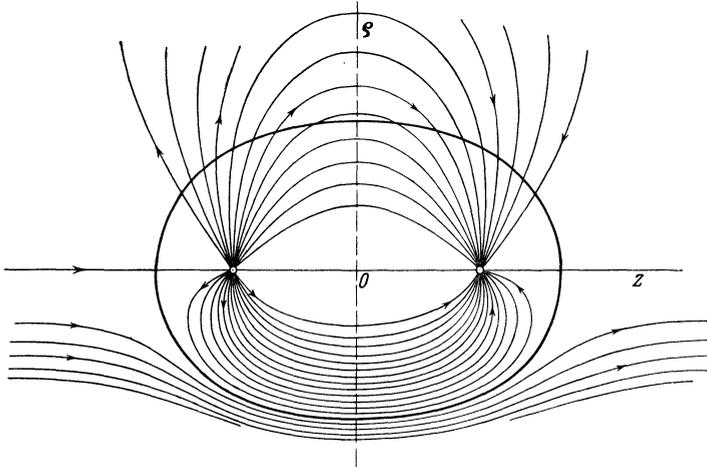


Abb. 21 Strömung um eine ovale Rotationsfläche (Quelle + Senke + Parallelströmung).

steht, dieselbe Menge fließt. Die Abstände der Stromlinien von der Achse müssen sich also wie die Wurzeln aus den ganzen Zahlen 1, 2, 3 ... erhalten.

Quelle und Senke geben für sich eine Stromlinienschar, die in der Gleichung

$$\Psi_2 = \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2 = c$$

enthalten sind. Damit ist eine sehr einfache Konstruktion angezeigt. Man zeichnet durch Quelle und Senke je eine Schar von Strahlen, deren Richtungskosinus nach arithmetischer Reihe wachsen oder abnehmen. Die Schnittpunkte beider Strahlenbüschel sind dann Punkte der aus Quelle und Senke zusammengesetzten Strömung. Ebenso hat man auch die Zusammensetzung der Achsenströmung mit der Quellsenkenströmung vorzunehmen. Die Diagonalkurven des aus beiden Stromliniensystemen gebildeten Netzes sind identisch mit den um Hüllfläche (3) sich bildenden Stromlinien einer aus dem Unendlichen

mit der Geschwindigkeit v_0 kommenden stationären Strömung. Diese Linien sind dann die Bahnen der Flüssigkeitsteilchen. Dasselbe Strombild, jedenfalls relativ zum Körper würden wir erhalten, wenn sich dieser mit der Geschwindigkeit $-v_0$ in der im Unendlichen ruhenden Flüssigkeit bewegen würde. Nur hat man zu bedenken, daß die Stromlinien nun nicht die Bahnen der Teilchen sind. Das absolute Stromlinienbild dagegen, d. h. das System der Linien, die in jedem Punkte die Richtung der Geschwindigkeit des Flüssigkeitsteilchens an der Stelle angibt — mathematisch gesprochen, das System der Integralkurven der Bahnlinien — erhält man, wenn man von der relativen Strömung die Parallelströmung wieder abzieht. Das ist aber gerade der außerhalb der Trennfläche gelegene Bereich der Quellsenkenströmung. Es ergibt sich also:

Die Quellsenkenströmung ist identisch mit dem absoluten Stromlinienbild des mit der Geschwindigkeit v_0 gegen die im Unendlichen ruhende Flüssigkeit bewegten Zylinders. Die Absolutstromlinien, die im oberen Teile der Abb. 21 dargestellt sind, können auch als Kraftlinien des durch den positiven und negativen magnetischen Pol $-a$ und $+a$ bestimmten Magnetfeldes angesehen werden. Man könnte geneigt sein, diese Bezeichnung auch im Falle der Strömung beizubehalten¹, da die Richtung dieser Linien in der Tat mit der Richtung der anfänglichen Beschleunigung übereinstimmt, welche die Flüssigkeitsteilchen annehmen, wenn der Rotationskörper durch eine Kraft bewegt wird. Wird der Körper durch eine Momentankraft aus der Ruhe in die Bewegung übergeführt, so stimmt das Kraftfeld in bezug auf die Richtungen mit dem Geschwindigkeitsfeld überein. Um daher eine Verwechslung zu vermeiden, wollen wir statt Kraftlinien auch die Bezeichnung „Feldlinien“ verwenden.

Die Konstruktion der Stromlinien vereinfacht sich in zwei Spezialfällen, die bereits seit langem bekannt sind².

2. Wenn die Senke in die unmittelbare Nachbarschaft der Quelle rückt, so geht die Potentialfunktion der Quellsenkenströmung über in

$$\Phi = -\frac{q}{4\pi} \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz} = \frac{q}{4\pi} dz \frac{z}{r^3} = \frac{m \cos \vartheta}{4\pi r^2},$$

wenn m das Moment der Doppelquelle bezeichnet. Für die kombinierte Strömung haben wir

$$\Phi = z \left(v_0 + \frac{m}{4\pi r^3} \right), \quad \Psi = \int v_z \varrho d\varrho = \varrho^2 \left(\frac{1}{2} v_0 - \frac{m}{4\pi r^3} \right).$$

¹ Vgl. z. B. Lanchester, F. W.: Aerodynamik. deutsch von Runge I S. 69ff.

² Vgl. etwa Fuhrmann, G.: Theoretische und experimentelle Untersuchung an Ballonmodellen, Göttingen, Dissertation, Berlin 1912.

Die trennende Rotationsfläche geht, wie die Formeln sofort zeigen, in eine Kugel um den Anfangspunkt mit dem Radius

$$R = \sqrt[3]{\frac{m}{2\pi v_0}}$$

über (Abb. 22).

Führt man statt m den Radius R ein, so gehen die Ausdrücke über in

$$\Phi = z v_0 \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right), \quad \Psi = \frac{1}{2} v_0 \varrho^2 \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right).$$

Für die Feldlinien

$$\frac{\sin^2 \vartheta}{r} = \text{konst} = c$$

ergibt sich folgende einfache Konstruktion. Man zeichnet zunächst eine Schar von Kreisen, welche die z -Achse im Doppelquellpunkt be-

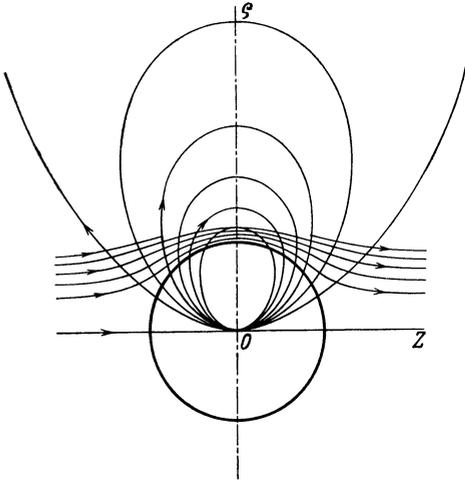


Abb. 22. Strömung um eine Kugel (Doppelquelle + Parallelströmung).

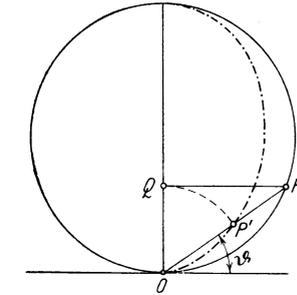


Abb. 23. Konstruktion der Feldlinien einer Kugel.

touchen und deren Durchmesser wie die reziproken Werte einer abnehmenden arithmetischen Reihe c_1, c_2, \dots zunehmen. Wenn P ein

Punkt eines solchen Kreises ist, so zieht man PQ senkrecht zum Durchmesser nach dem Berührungspunkt O mit der z -Achse und macht $OP' = OQ$. Dann ist P' ein Punkt der entsprechenden Kraftlinie (Abb. 23).

3. Rückt zunächst die Senke ins Unendliche und legen wir die Quelle in den Anfangspunkt, so lauten die Potential- und Stromfunktion der kombinierten Strömung

$$\Phi = v_0 z - \frac{q}{4\pi r}, \quad \Psi = \frac{1}{2} v_0 \varrho^2 - \frac{qz}{4\pi r} + \frac{q}{4\pi}.$$

Die Trennungsfläche mit der sofort zu gewinnenden Gleichung

$$\Psi_e = \frac{1}{2} v_0 \varrho^2 - \frac{qz}{4\pi r} - \frac{q}{4\pi} = 0$$

beginnt im Scheitelpunkt $\varrho = 0$, $z_s = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{q}{\pi v_0}}$ und nähert sich mit wachsendem z asymptotisch einem Kreiszyylinder, dessen Radius ϱ_∞ aus der Gleichung für den Fluß im Unendlichen zu

$$\varrho_\infty = \sqrt{\frac{q}{\pi v_0}}$$

sich ergibt. Mit Benutzung dieses Wertes kann die Gleichung des Meridianschnitts der Trennungsfäche in eine übersichtliche Form gebracht werden (Abb. 24).

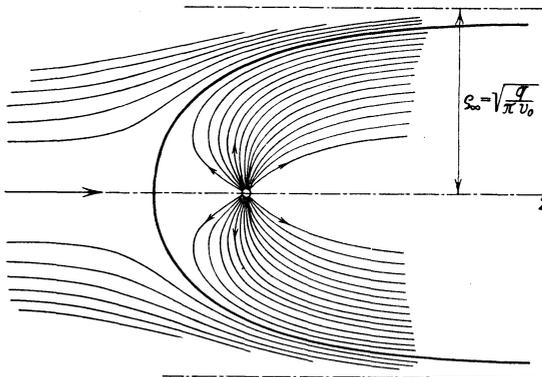


Abb. 24. Strömung um einen Halbkörper (Quelle + Parallelströmung).

4. Der Druck längs der als starr zu denkenden Rotationsfläche $\Psi_e = 0$ berechnet sich in den betrachteten Fällen aus der Geschwindigkeit v und dem Druck p_0 im Unendlichen nach der Bernoullischen Beziehung. Wenn man

$$\frac{\gamma}{2g} v_0^2 = p_s$$

setzt, so erhält man für den Drucküberschuß gegenüber der ungestörten Strömung den Ausdruck

$$c_p = \frac{p - p_0}{p_s} = 1 - \frac{v^2}{v_0^2},$$

wo das Geschwindigkeitsquadrat $v^2 = v_\varrho^2 + v_z^2$ nach den allgemeinen Formeln aus den Grundfunktionen Φ und Ψ zu entnehmen ist.

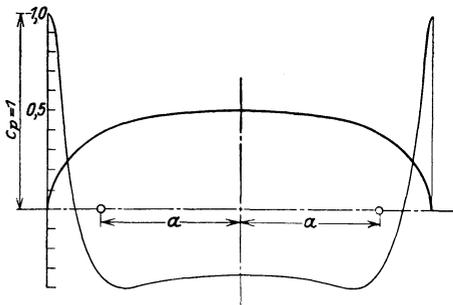


Abb. 25. Druckverlauf an einem Rotationskörper.

In den Scheitelpunkten der Kurve haben wir also

$$p - p_0 = p_s.$$

Die Punkte nennt man auch Staupunkte und den Druck p_s Staudruck. Der weitere Druckverlauf ist im Falle 1 aus der Zeichnung (Abb. 25) ersichtlich, in der c_p (für $p_0 = 0$) als Ordinate von dem zum Kurvenpunkt gehörigen Achsenpunkt aus aufgetragen ist. Die Druckkurve fällt von der Staustelle sehr rasch ab und geht zwischen Scheitel und Quellpunkt

durch Null, um nun bis zum entsprechenden Punkt auf der anderen Seite der z -Achse negativ zu bleiben. Im Gebiete des Unterdrucks sind zwei Maxima zu beiden Seiten der z -Achse, die leicht berechnet werden können.

Im Falle der Kugel ($a = 0$) fallen die drei Extremwerte des Unterdrucks in einem einzigen zusammen.

Die Druckkurve des Halbkörpers geht für $r = z_s \sqrt{\frac{3}{2}}$, $z = \frac{z_s}{\sqrt{6}}$ durch Null und hat ein Minimum an den Stellen $r = z_s \sqrt{3}$, $z = -\frac{z_s}{\sqrt{3}}$ von der Größe

$$c_p = \frac{p - p_0}{p_s} = -\frac{1}{3}.$$

Für wachsende Werte von z vermindert sich der Wert c_p , um sich im Unendlichen asymptotisch der Null zu nähern (Abb. 26). In allen den Fällen ergibt sich aus früher angestellten allgemeinen Erwägungen oder aus Symmetriebetrachtungen, daß sich alle Druckkräfte das Gleichgewicht halten, daß also keine Kraft erforderlich ist, um den von der Hüllfläche begrenzten Körper in der strömenden Flüssigkeit festzuhalten, resp. daß der in der Flüssigkeit bewegte Körper keinen Widerstand erfährt. Übrigens hat die zuletzt betrachtete Halbkörperform eine interessante Verwendung gefunden bei den Meßinstrumenten zur Ermittlung des Druckes und der Strömungsgeschwindigkeit, den sog. Pitotröhren¹.

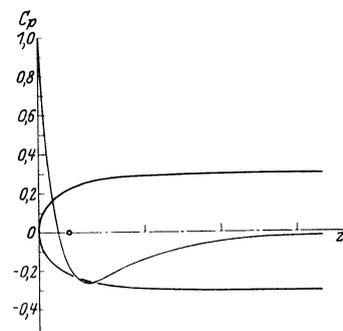


Abb. 26. Verlauf des Druckes an einem Halbkörper.

Diese Verwendung ist in dem Bedürfnis begründet, die durch Einführung des Instrumentes in das zu untersuchende Strömungsfeld verursachte Störung, namentlich die Wirbelung auf ein Minimum zu reduzieren. Die Messung selbst beruht auf der Beobachtung des Druckunterschiedes an der stauenden Spitze und an einem Punkte P der glatten Zylinderwandung des mit der Achse in die Strömungsrichtung gestellten Meßrohres. In einem Abstände gleich dem 3-fachen Durchmesser des Rohres (d. h. der Dicke des Halbkörpers im Unendlichen) beträgt der Unterdruck an der Wand nur 2% der Geschwindigkeitshöhe. Um die Beobachtung vornehmen zu können, wird das Staurohr

¹ Kumbruch, H.: Messung strömender Luft mittels Staugeräten, Forschungsarbeiten aus dem Gebiete des Ingenieurwesens. Berlin 1921.

von zwei in S und P beginnenden Kanälen durchbohrt, deren rechtwinkelig zur Achsenrichtung umgebogene Enden mit den Armen eines

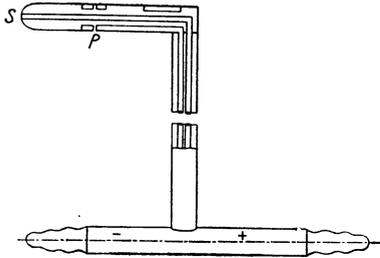


Abb. 27. Praudtliches Staurohr.

Manometers in Verbindung stehen (Abb. 27). Der gemessene Druckunterschied gibt dann bei entsprechender Lage von P mit ziemlicher Genauigkeit die Geschwindigkeitshöhe der Strömung. Die weitere Verwendung des Staurohres, sowie die Einzelheiten der Formgebung können hier nicht besprochen werden.

15. Zusammengesetzte Fälle.

1. Nach der Behandlung des Falles einer einfachen Quelle und Senke in einer Parallelströmung liegt es nahe, die Methode besonders im Hinblick auf die Gewinnung neuer Grenzformen für die Strömung dahin zu erweitern, daß man die Punktquelle zu einer streckenartig verteilten Quelle sich ausdehnen läßt. Nehmen wir an, daß die Ergiebigkeit längs der etwa im Nullpunkt beginnenden Strecke veränderlich ist, so können wir mit $f_1(\zeta) d\zeta$ die Stärke einer Elementarquelle auf der Strecke im Abstand ζ vom Anfangspunkt ansetzen und haben dann für die Gesamtergiebigkeit, wenn a die Länge der Strecke ist

$$q = \int_0^a f(\zeta) d\zeta. \quad (1)$$

Die Ausdrücke für die Potentialfunktion Φ und die Stromfunktion Ψ ergeben sich, wenn wir die früheren Formeln für das Quellelement aufstellen und dann über die ganze Strecke integrieren. So ergibt sich für das Potential im Punkte (z, ϱ)

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \int_0^a \frac{f(\zeta) d\zeta}{r}, \quad (2)$$

wo

$$r = \sqrt{(z - \zeta)^2 + \varrho^2}$$

zu setzen ist. Die entsprechende Stromfunktion wird

$$\Psi_q = \frac{1}{4\pi} \int_0^a \int_0^{\varrho} \frac{(z - \zeta) f(\zeta) d\zeta \varrho d\varrho}{r^3} = \int_0^{\varrho} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \varrho d\varrho. \quad (3)$$

2. Nehmen wir z. B. eine Quellstrecke an, deren Ergiebigkeit gleichmäßig verteilt sein möge, und nennen wir die Gesamtergiebigkeit wieder

q , so erhalten wir mit Einführung des Winkels ϑ oder der Substitution

$$\zeta = z - \varrho \operatorname{ctg} \vartheta, \quad d\zeta = \frac{\varrho d\vartheta}{\cos^2 \vartheta}.$$

das Potential

$$\Phi = -\frac{q}{4\pi a} \int \frac{d\vartheta}{\sin \vartheta} = -\frac{q}{4\pi a} \operatorname{lg} \frac{\operatorname{tg} \frac{\vartheta''}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\vartheta'}{2}} = -\frac{q}{4\pi a} (Q'_0 - Q''_0), \quad (4)$$

wenn ϑ' und ϑ'' resp. Q'_0, Q''_0 die auf die Endpunkte der Strecke bezogenen Werte des Winkels ϑ resp. der Kugelfunktion Q_0 bezeichnen. Wegen

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\vartheta''}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\vartheta'}{2}} = \frac{\sin \frac{\vartheta' + \vartheta''}{2} + \sin \frac{\vartheta'' - \vartheta'}{2}}{\sin \frac{\vartheta' + \vartheta''}{2} - \sin \frac{\vartheta'' - \vartheta'}{2}}; \quad \frac{r' + r''}{a} = \frac{\sin \frac{1}{2} (\vartheta' + \vartheta'')}{\sin \frac{1}{2} (\vartheta'' - \vartheta')}$$

kann man aber setzen

$$\Phi = -\frac{q}{4\pi a} \operatorname{lg} \frac{r' + r'' + a}{r' + r'' - a}. \quad (4a)$$

Man sieht also, daß die Potentialflächen Rotationsellipsoide mit den Endpunkten der Quellstrecke als Brennpunkten sind.

Die Stromfunktion Ψ wird

$$\begin{aligned} \Psi &= -\frac{q}{4\pi a} \int_0^a \frac{(z - \zeta) d\zeta}{r} = -\frac{q}{4\pi a} \int_0^a \frac{\cos \vartheta d\vartheta}{\sin^2 \vartheta} \\ &= \frac{q}{4\pi a} (r'' - r') + c = \frac{q}{4\pi a} (r'' P'_0 - r' P'_0) + c. \end{aligned}$$

Setzen wir fest, daß Ψ auf der negativen z -Achse verschwinde, so wird $c = -\frac{q}{4\pi}$ also

$$\begin{aligned} \Psi &= -\frac{q}{4\pi a} (a + r' - r'') \\ &= -\frac{q}{4\pi} \left(1 + \frac{r' - r''}{a} \right). \quad (5) \end{aligned}$$

Die Flächen $\Psi = \text{konst}$, sind also, wie vorauszusehen war, konfokale Rotationshyperboloide, welche die Flächen $\Phi = \text{konst}$ senkrecht durchschneiden.

Kombiniert man diese Quellströmung mit einer Parallelströmung, $\Psi = \frac{1}{2} v_0 \varrho^2$, so erhält die meridiane Grenzlinie der einhüllenden Fläche ein gegenüber dem ersten Fall mehr zugespitztes Ende (vgl. Abb. 28).

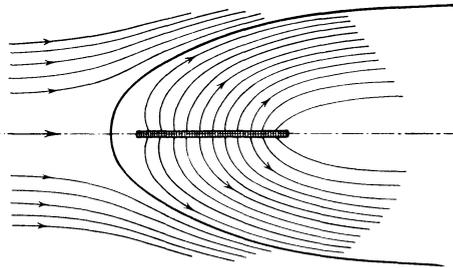


Abb. 28. Quellstrecke in einer Parallelströmung.

3. Wenn die Stärke der Quellstrecke linear zunimmt, mit dem Werte Null beginnend, so erhält man mit $f(\zeta) = \frac{2q\zeta}{a^2}$ für das Potential den Ausdruck

$$\begin{aligned}\Phi &= -\frac{q}{2\pi a^2} \int_0^a \frac{\zeta d\zeta}{r} = -\frac{q}{2\pi a^2} \left[-z \ln \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} + \frac{q}{\sin \vartheta} \right]_{\vartheta'}^{\vartheta''} \\ &= -\frac{q}{2\pi a^2} (r' Q_1' - r'' Q_1' - a Q_0')\end{aligned}\quad (6)$$

und für die entsprechende Stromfunktion.

$$\begin{aligned}\Psi &= \frac{q}{2\pi a^2} \int (z - \zeta) \frac{\zeta d\zeta}{r} = \frac{q}{2\pi a^2} \left\{ -a r'' - \frac{1}{2} a^2 \left[\frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} + \ln \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} \right]_{\vartheta'}^{\vartheta''} \right\} \\ &= \frac{q}{2\pi a^2} \left\{ -a r'' + \frac{1}{3} [r''^2 (Q_2'' - Q_0'') - r^2 (Q_2' - Q_0')] \right\} + c\end{aligned}\quad (7)$$

wo die Kugelfunktionen 2. Art $Q_0 Q_1 Q_2$ gemäß der allgemeinen Rekursionsformel

$$(n+1) Q_{n+1} = (2n+1) \cos \vartheta Q_n - n Q_{n-1}$$

voneinander abhängen. Auf die Diskussion der entsprechenden Strömungen wollen wir hier jedoch nicht weiter eingehen.

4. Wenn man nun eine beliebige längs der z -Achse angeordnete Quelle mit bestimmtem Verteilungsgesetz für die Intensität mit einer axialen Senke von insgesamt entgegengesetzt gleicher Ergiebigkeit im Felde einer Parallelströmung vereinigt, so erhält man wieder zwei Strömungsgebiete, die durch eine geschlossene Rotationsfläche voneinander getrennt sind, und es gelingt, durch passende Wahl der Quell- und Senkenanordnung diese als Grenze eines Rotationskörpers aufzufassende Fläche mit bestimmten Vorkommnissen der Praxis in Einklang zu bringen. Bei den von G. Fuhrmann in seiner Dissertation aufgebauten Formen, die Luftschiffkörpern angepaßt sind, wurden Punktquellen und Quell- resp. Senkstrecken mit gleichmäßiger und linear wachsender resp. abnehmender Intensität so kombiniert, daß der Anfangspunkt der Senke mit dem Endpunkt der Quelle zusammenfiel. Wir legen etwa den unmittelbar nach den gegebenen Formeln konstruktiv und rechnerisch leicht zu behandelnden Fall II zugrunde, bei dem die Flüssigkeit aus einer Punktquelle kommt und in eine gleichmäßige Streckensenke mündet. Das System der Feldlinien in der Meridianebene ergibt sich dann einfach entsprechend der Darstellung

$$\Psi = -\frac{q}{4\pi} \left[\frac{z}{r} + \frac{r'' - r'}{a} \right]\quad (8)$$

durch Überlagerung zweier einfacher Kurvenscharen, der Quelllinien vom Ursprung aus, die nach dem oben dargelegten \cos -Gesetz aufeinanderfolgen und der Schar der Hyperbeln, welche die Endpunkte der

Strecke zu Brennpunkten haben und auf ihr in gleichen Abständen aufeinanderfolgen (vgl. Abb. 29).

Die durch Verbindung mit einer Parallelströmung entstehende Rotationsfläche

$$\Psi_e = \frac{1}{2} v_0 \varrho^2 - \frac{q}{4\pi} \left(\frac{z}{r} + \frac{r'' - r'}{a} \right) = 0 \quad (9)$$

hat einen abgerundeten Kopf und ein allmählich sich verjüngendes Ende (vgl. Abb. 29). Die Abstände der beiden Endpunkte (Staupunkte der Strömung)

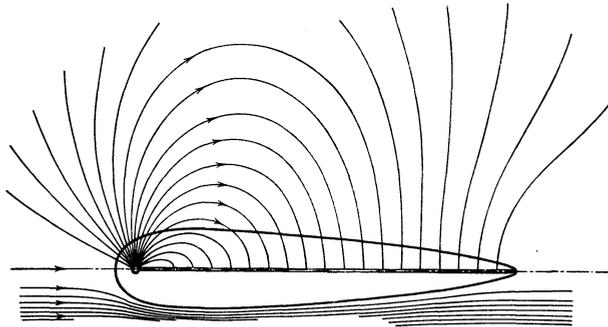


Abb. 29. Strömung um einen Luftschiffkörper (Punktquelle + Streckensenke + Parallelströmung).

vom Nullpunkt berechnen sich, wie man leicht feststellt, aus den Gleichungen

$$r^3 \pm r^2 a = \frac{q \cdot a}{4\pi v_0}. \quad (10)$$

Man sieht auch, daß der hintere Scheitelpunkt des Umdrehungskörpers (den negativen Seiten auf der linken Seite der Gleichung entsprechend) in die Nähe des Endpunktes der Senkenstrecke fällt.

Auf die Druckverteilung, die nach derselben Methode zu berechnen ist, wie wir es oben beim Oval durchgeführt haben (Abb. 30), werden wir nach Besprechung einer weiteren Verallgemeinerung zurückkommen.

5. Für die praktische Anwendung ist es wichtig, die Strömungsverhältnisse in der Umgebung eines gegebenen Rotationskörpers, also etwa eines von

Gondel, Flossen und Ruder befreit gedachten Luftschiffes mit vorgeschriebenem Meridianschnitt, aufzufinden. Nach den Existenzsätzen

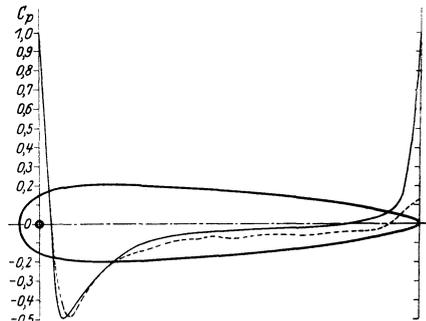


Abb. 30. Druckverlauf an einem Luftschiffkörper (nach Fuhrmann).
 ———— Rechnung ———— Messung.

der Hydrodynamik muß jeder Rotationsfläche eine auf der z -Achse gelegene Quell- und Senkenverteilung eindeutig zugeordnet sein. Man kann sich die Aufgabe dadurch erleichtern, daß man statt der im allgemeinen stetig ausfallenden Verteilung eine stufenweise konstante Quellenbelegung zugrunde legt, ferner die Berechnung für den vorderen, im wesentlichen von dem Quellsystem und dem hinteren, wesentlich nur von dem Senkensystem abhängigen Teil des Schiffes getrennt durchführt. Man erhält dann, wie v. Karman¹ gezeigt hat, für die Ergiebigkeitswerte der Quell- und Senkenstufen je eine Anzahl von Gleichungen, die in verhältnismäßig einfacher Weise gelöst werden können.

Wenn man diese Ergiebigkeitswerte und die Abstände des Aufpunktes von den Endpunkten der i -ten Quellstrecke mit q_i resp. r'_i und r''_i bezeichnet, ferner die konstante Länge dieser Strecken a nennt, so hat man nach Abschnitt 15 als Stromfunktion der Gesamtströmung

$$\Psi = \frac{v_0 \varrho^2}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi} \left(1 + \frac{r'_i - r''_i}{a} \right), \quad (11)$$

$\Psi = 0$ liefert dann die Achse in Verbindung mit der Hüllkurve. Um die Übereinstimmung dieser Hüllkurve mit dem Meridianschnitt des Luftschiffes zum Ausdruck zu bringen, denkt man sich durch die Mitte der Achsenstrecken senkrecht zur Achse Schnitte gelegt, die auf der Hüllfläche äquidistante Ringe mit den Radien ϱ_i bestimmen. Sind dann r'_{ik} und r''_{ik} die Länge der Fahrstrahlen von den Endpunkten der i -ten Quellstrecke nach einem Randpunkt am k -ten Ring, setzt man ferner

$$\frac{q_i}{2v_0\pi a^2} = Z_i, \quad 1 + \frac{r'_{ik} - r''_{ik}}{a} = c_{ik},$$

so liefert die Bedingung $\Psi = 0$ für n Quellstrecken und n Randpunkte die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} c_{11}Z_1 + c_{21}Z_2 + \cdots + c_{n1}Z_n &= \left(\frac{\varrho_1}{a}\right)^2 \\ \cdot & \cdot \\ c_{1n}Z_1 + c_{2n}Z_2 + \cdots + c_{nn}Z_n &= \left(\frac{\varrho_n}{a}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Die Koeffizienten c_{ik} nähern sich, wenn k und i stark verschieden sind, den Werten 2 oder 0, je nachdem der Ring rechts oder links von der i -ten Strecke liegt. Nur wenn k und i sich wenig voneinander unterscheiden, weicht der Koeffizient wesentlich von 2 oder 0 ab. Für $i = k$ ergibt sich

$$c_{ii} = c_{kk} = 1.$$

¹ Karman, Th. v.: Berechnung der Druckverteilung an Luftschiffkörpern, Abhandlungen aus dem aerodynamischen Institut der techn. Hochschule Aachen. Heft 7, S. 3—17. Berlin: Julius Springer 1927.

In der Abb. 31 und 38 haben wir die auf die Hüllenform des Zeppelinschen Luftschiffes ZR III bezüglichen Verhältnisse, also vor allem die Diagramme der Quell- und Senkenverteilung und den Druckverlauf nach den Berechnungen von Th. v. Karman und W. Klemperer wiedergegeben. Wenn man nur die Quellen berücksichtigen würde, so würde sich ein Halbkörper ergeben, dessen im Unendlichen erreichter Halbmesser nach Abschn. 14, wegen

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= 2a^2 \sum Z_i \\ &= \frac{1}{v_0 \pi} \sum q_i, \quad (13) \end{aligned}$$

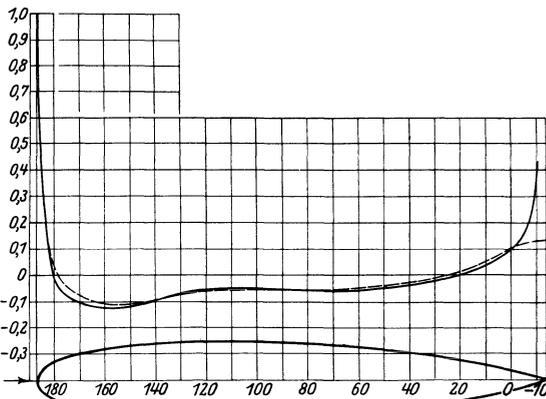


Abb. 31. Druckverlauf am Luftschiffkörper (ZR III) (nach v. Karman u. Klemperer). ———— Rechnung. - - - - - Messung.

den Wert $\varrho = 13,88$ m hat. Der größte Halbmesser des Schiffsmodells ist dagegen 13,76 m.

Für die Druckverteilung haben wir

$$\left. \begin{aligned} \frac{p-p_0}{p_s} &= 1 - \frac{v^2}{v_0^2} \\ \text{mit} \quad \frac{v^2}{v_0^2} &= \left[1 - \frac{a}{2\varrho_k} \sum_{i=1}^n Z_i (\sin \vartheta''_i - \sin \vartheta'_i)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2}{4\varrho_k^2} \left[\sum_{i=1}^n Z_i (\cos \vartheta''_i - \cos \vartheta'_i)^2 \right] \right] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die theoretische Druckkurve beginnt mit dem zum Staupunkte gehörigen Werte 1, sinkt dann steil zu negativen Werten herab, deren Maximum etwas vor dem größten Querschnitt liegt, und erhebt sich von da zunächst langsam entsprechend der allmählichen Verjüngung des Profils, um schließlich wieder auf den positiven Staudruck anzusteigen. Wie im vorhergehenden Fall ergibt sich aus allgemeinen Sätzen (Abschnitt 12), daß trotz der unsymmetrischen Verteilung die Resultierende der Druckkräfte in der achsialen Richtung verschwindet.

16. Physikalische Vorgänge. Resultate der Messung.

Man sieht aus den Abbildungen 31 u. 32, in der die Resultate der Theorie und des Versuchs vereinigt sind, daß der theoretische Druckverlauf im vorderen Teile, wo es sich um die Umsetzung von Druck in

Geschwindigkeit handelt, von dem wirklichen Verlauf nur wenig abweicht, daß dagegen im Gebiet des Hinterendes in Wirklichkeit entgegen der Theorie nur eine unvollkommene Rückverwandlung der kinetischen Energie eintritt. Um dieses Verhalten der Strömung zu erklären, muß man nach L. Prandtl¹ zwei zunächst verschiedene Eigenschaften der Flüssigkeit berücksichtigen, die innere Reibung und das Haften an festen Wänden und Körperoberflächen. Die Reibung in der freien Flüssigkeit ist, wie bereits betont, außerordentlich gering und könnte für sich keine wesentliche Abweichung des Strömungsfeldes von den Gesetzen der Potentialtheorie hervorrufen. Da aber in unmittelbarer Nähe des Körpers infolge des Haftens ein hohes Geschwindigkeitsgefälle eintritt, d. h. ein Anwachsen der Geschwindigkeit auf einer sehr kurzen Strecke (der sog. Dicke der Reibungsschicht) vom Werte Null bis auf den normalen, etwa für die Potentialströmung gültigen Wert (Abb. 32), so werden hier die Reibungskräfte in merkbarer Weise in Wirksamkeit treten. Wesentlich ist allerdings der Unterschied der Reibungswirkung

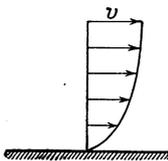


Abb. 32. Grenzschichtdiagramm der Geschwindigkeit.

bei Druckabfall und bei Druckanstieg. Während im vorderen Teil keine wesentliche Störung des stationären Charakters der Strömung sichtbar ist, wird das „Grenzschichtmaterial“ im hinteren Gebiet des Körpers, ebenso wie in einer divergenten Strömung durch einen Diffusor, durch die bremsende Wirkung der Zähigkeitskräfte soviel an seiner Wucht einbüßen, daß es nicht mehr in das Gebiet des höheren Druckes, der sich im Augenblick des Anfahrens im Sinne der Potentialtheorie ausbildet, einzudringen vermag, vielmehr durch eine Rückströmung von der Körperoberfläche abgedrängt wird und in Form von Wirbeln in die freie Flüssigkeit tritt. Diese Ablösung hat weiter eine Änderung des Strömungsverlaufes zur Folge, die vor allem in einer Verminderung des hinteren Druckes d. h. in einer überschüssigen, in der Richtung der Anströmung fallenden Kraft oder einer Widerstandskraft für den bewegten Körper sich ausprägt.

Eine genaue Verfolgung des Ablösungsvorganges, auf die in diesem Zusammenhang verzichtet werden muß, hätte anzuknüpfen an die Differentialgleichung der zähen Flüssigkeit für das Gebiet der Reibungsschicht

$$\rho \frac{dv}{dt} = - \nabla p + \mu \nabla^2 v, \quad (1)$$

in der nun das Reibungsglied gegenüber den Trägheitsgliedern nicht vernachlässigt werden darf²).

¹ L. Prandtl, Verhandlungen des III. intern. Math.-Kongresses Heidelberg 1904, Leipzig 1905, S. 484.

² Vgl. H. Blasius, Dissert. Göttingen 1907; K. Pohlhausen, Z. ang. Mat. Mech. Bd. 1, S. 361. 1921.

Man kann aber die Betrachtung noch nach einer anderen Richtung ergänzen. Wenn man den Stokeschen Lehrsatz auf ein in der Meridianebene des Rotationskörpers liegendes kleines Rechteck anwendet, dessen zwei lange Seiten etwa auf der Endfläche der Grenzschicht und auf der Berandung liegen, so erhält man einen nicht verschwindenden Wert

$$\int v d\bar{s} = v ds = d\Gamma; \quad v = \frac{d\Gamma}{ds}. \quad (2)$$

Man sieht also, daß innerhalb der Grenzschicht an jeder Stelle die Bedingung für das Vorhandensein eines elementaren Wirbels erfüllt ist, dessen Stärke der Strömungsgeschwindigkeit proportional ist, und daß man diese Schicht bereits vor der Ablösung als eine dem Körper aufliegende Wirbelschicht aufzufassen berechtigt ist, wenn man die Gültigkeit der Grundgesetze voraussetzt. In unserem achsensymmetrischen Fall würde sich die Schicht also aus einer dichten Folge von kreisförmigen Wirbelringen zusammensetzen, die sich wie Schläuche längs des Profils abwälzen mit einer Geschwindigkeit, die halb so groß ist, wie die Potentialstromgeschwindigkeit in den Grenzpunkten. Diese laminare Wälzwirbelzone in unmittelbarer Nachbarschaft des Körpers geht von einer bestimmten, von der Reynoldsen Zahl abhängigen Ablösungsstelle in die turbulente Wirbelzone über, die in die dem Körper nachfolgende Wirbelschlepppe ausläuft.

Um den Widerstand, der vor allem als Äquivalent der in diesem Gebiet auftretenden und in Wärme übergehenden Energie erscheint, zu verringern, muß man vor allem darauf bedacht sein, die Gestalt des Hindernisses so zu wählen, daß der Druckanstieg pro Längeneinheit möglichst klein wird und die mitreißende Kraft der äußeren Strömung sich günstig betätigen kann. Das wird namentlich durch die „stromlinienförmige“ Ausbildung d. h. durch eine Verlängerung und allmähliche Verjüngung des Hindernisses erreicht, wie sie etwa in unseren beiden letzten Beispielen verwirklicht erscheint. Um dies zu zeigen, können wir etwa den Widerstand des Fuhrmannschen Luftschiffsmodells II mit dem einer Kugel vergleichen.

Im allgemeinen pflegt man den Quotienten der Widerstandskraft und des Produktes aus dem größten Querschnitt (des Rotationskörpers), dem Geschwindigkeitsquadrat und der Flüssigkeitsdichte als Beiwert zu benutzen. So hat man z. B. für die Kugel mit dem Radius r

$$P_w = c \gamma \pi r^2 v_0^2.$$

Bei Luftschiffen ist es vorteilhaft, die Volumeneinheit des Modells

$$J = \pi \int \rho^2 dz$$

einzuführen und den Widerstand durch einen Beiwert c' nach der Formel

$$P_w = \frac{\gamma}{g} c' J^{\frac{2}{3}} v_0^2 \quad (3)$$

zu charakterisieren¹. Er setzt sich zusammen aus dem Formwiderstand mit dem Beiwert c_1' , der sich als Resultierende aller Oberflächendrücke darstellt und dem von der Hautreibung herrührenden Bestandteil c_2 . Bei den von Fuhrmann benutzten Modellen war $J = 0,0692 \text{ m}^3$. Es ergab sich dann für das in Abb. 30 dargestellte Modell II der Wert

$$c_1' = 0,0106.$$

Der Beiwert für den Gesamtwiderstand war

bei der Windgeschwindigkeit $v_0 = 5 \text{ m/sek}$ zu $c' = c_1' + c_2 = 0,0216$,

$$v_0 = 10 \text{ m/sek} \text{ zu } c' = 0,0201$$

gemessen.

Für eine Kugel von demselben Volumen, also einem Radius $r = 25,5 \text{ cm}$ ergeben sich nach den Göttinger Messungen bei denselben Geschwindigkeiten, die etwa den Reynoldsen Zahlen $R = \frac{2v_0 r}{\nu}$ $= 1,8 \cdot 10^5$ und $R = 3,6 \cdot 10^5$ entsprechen, die gleichbezogenen, wesentlich größeren Beiwerte

$$c' = 0,156, \quad c' = 0,082.$$

Man sieht ferner, daß der Widerstand bei einer Vergrößerung der Reynoldsen Zahl sich im allgemeinen verringert. Der Unterschied der Widerstandsschwankung bei den verschiedenen Körperformen tritt deutlich aus der Abb. 33 hervor, in der die auf den Hauptspantquerschnitt bezogenen Beiwerte c für eine Kugel, drei Ellipsoide, ein Ballonmodell und eine Scheibe in Abhängigkeit von R

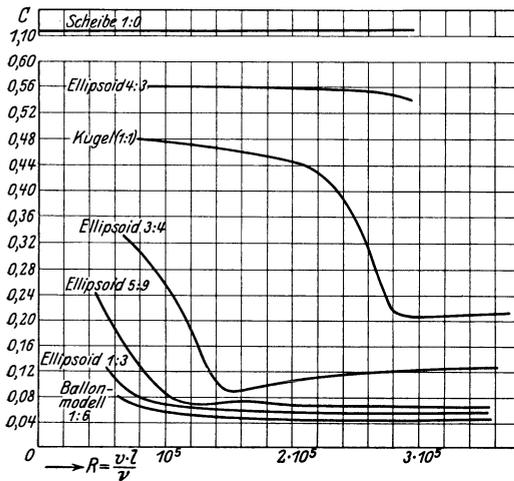


Abb. 33. Widerstandsbeiwerte in Abhängigkeit von der Reynoldsen Zahl.

dargestellt sind.

Es zeigt sich, daß der Bereich der sog. kritischen Reynoldsen Zahlen, in dem der Widerstandswert einen starken Abfall erfährt, bei verlängerten Körpern tiefer liegt als bei verkürzten und daß auch die Schwankung des Widerstandes oder der Unterschied auf beiden Seiten der kritischen Kennzahl im ersteren Falle geringer ausfällt. Allgemein ist das verschiedene Verhalten beiderseits des kritischen Wertes von R in

¹ L. Prandtl, Z. Flugtechn. 1910. S. 159.

einer physikalischen Veränderung des Strömungsverlaufes begründet, die besonders darin besteht, daß die laminare Grenzschichtströmung nach Erreichung einer bestimmten Geschwindigkeit in eine turbulente umschlägt, während die Ablösungsstelle weiter nach hinten rückt und infolgedessen auch das nunmehr typisch turbulente¹ und nicht mehr aus geordneten Wirbelgebilden bestehende Gebiet hinter dem Körper sich verkleinert. Je länger der Körper ist, desto größer wird die kritische Strecke zwischen der Stelle größter Geschwindigkeit und der Ablösung und bei desto kleineren Geschwindigkeiten wird die Turbulenz zu erwarten sein.

Wenn man die Längenabmessung in Richtung der Strömung gegenüber dem Falle der Kugel noch weiter verkleinert, so wird die Möglichkeit einer Verschiebung der Ablösungsstelle immer geringer. Das äußerste Extrem der Verkürzung zeigt die kreisförmige Scheibe, die denselben großen Widerstandswert $c \sim 1,1$ fast unverändert beibehält, wenn man Radius und Geschwindigkeit wechselt.

17. Querströmung um Rotationskörper.

1. Durch eine wohl zuerst von Th. v. Karman¹ angegebene Erweiterung der Rankineschen Quellsenkenmethode gelingt es, auch die quergerechte Anströmung eines Rotationskörpers mathematisch zu konstruieren. Allgemein kann die Querströmung um einen Rotationskörper als Überlagerung einer etwa entgegengesetzt der x -Achse gerichteten Parallelströmung mit einer aus einem System von Doppelquellen kommenden Strömung angesehen werden, die auf der z -Achse liegen und nach der x -Richtung orientiert sind. Wenn wir die sphärischen Koordinaten r, ϑ, φ einführen und den Radiusvektor in der xy -Ebene mit ϱ bezeichnen, so haben wir als Potential einer Doppelquelle im Ursprung, d. h. eines Systems einer Quelle und einer unendlich benachbarten Senke, dessen Achse in die x -Richtung fällt und dessen Stärke m ist, nach Abschn. 9

$$\Phi_1 = -\frac{m}{4\pi r^2} \sin \vartheta \cos \varphi = -\frac{m}{4\pi \varrho^2} \sin^3 \vartheta \cos \varphi. \quad (1)$$

Fügt man diesem Potential die Parallelströmung

$$\Phi_2 = -v_{0x} \varrho \cos \varphi \quad (2)$$

hinzu, so erhält man die bereits bekannte Umströmung einer Kugel, deren Mittelpunkt mit der Doppelquelle zusammenfällt. Man sieht gleichzeitig, daß die Verbindung der Parallelströmung (2) mit einer

¹ Th. v. Karman, Berechnung der Druckverteilung an Luftschiffkörpern, Abhandlungen aus dem aerodyn. Institut der techn. Hochschule Aachen, Heft 7, S. 3—17. Berlin 1927.

Strömung aus einer beliebigen diskreten oder stetigen Folge von Doppelquellen von der Art (1) einem Potential von der Form entspricht

$$\Phi = [F(r, \vartheta) - v_{0x} r \sin \vartheta] \cos \varphi, \quad (3)$$

daß also $\cos \varphi$ als Faktor erscheint. Aus den Ausdrücken für die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit (Abschnitt 8)

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \left(\frac{\partial F}{\partial r} - v_{0x} \sin \vartheta \right) \cos \varphi \\ v_\vartheta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \vartheta} - v_{0x} \cos \vartheta \right) \cos \varphi \\ v_\varphi &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = - \left(\frac{F}{r \sin \vartheta} - v_{0x} \right) \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ergibt sich, daß das Verhältnis $\frac{v_\vartheta}{v_r}$ vom Winkel φ unabhängig ist, d. h. in allen Ebenen durch die z -Achse denselben Verlauf zeigt. Wenn man also in der Ebene mit $\varphi = \theta$, in der die zur Ebene lotrechte Komponente v_φ verschwindet, eine Hüllkurve der Strömung erhält, so ist diese die Meridiankurve einer Rotationsfläche, die als Grenze der äußeren Strömung zu gelten hat. Es wird also vor allem darauf ankommen, die Verhältnisse in dieser Ebene, d. h. die entsprechenden Schnitte mit den Potentialflächen und das Feld der dazu orthogonal verlaufenden Stromlinien zu studieren. Die Gesamtschar der Potentiallinien bleibt in allen durch die z -Achse gehenden Ebenen erhalten; nur die Zuordnung ist derartig, daß die Kurve $\Phi = c$ in der zu $\varphi = 0$ gehörenden Ebene mit der Kurve $\Phi = c' = \frac{c}{\cos \varphi}$ in der Ebene $\varphi = \varphi'$ derselben Fläche angehört.

2. Um nun möglichst gangbare Umdrehungskörper und einfache Formeln zu erhalten, gehen wir von einer kontinuierlichen Verteilung von Doppelquellen oder Quellsenken auf der Achse aus. Wenn wir z. B. eine vom Punkte A' bis zum Punkte A'' reichende Strecke der z -Achse mit einer dichten Folge von Doppelquellen konstanter Stärke belegen und die Belegungsstärke pro Längeneinheit mit μ bezeichnen, so wird das entsprechende Potential

$$\Phi_1 = - \frac{\mu}{4\pi} \cos \varphi \int \frac{\sin \vartheta d\zeta}{r^2} \quad (5)$$

wenn ϑ den Winkel zwischen dem Fahrstrahl eines Punktes $z = \zeta$ der Quellstrecke nach dem Aufpunkt und der z -Achse bezeichnet. Mit

$$z - \zeta = \varrho \operatorname{ctg} \vartheta; \quad d\zeta = \frac{\varrho d\vartheta}{\sin^2 \vartheta}, \quad \varrho = r \sin \vartheta$$

ergibt sich, wenn die Polarwinkel nach den Endpunkten der Strecke ϑ' und ϑ'' heißen,

$$\Phi_1 = - \frac{\mu}{4\pi \varrho} \cos \varphi \int \sin \vartheta d\vartheta = \frac{\mu}{4\pi \varrho} \cos \varphi (\cos \vartheta'' - \cos \vartheta'). \quad (6)$$

Wenn die ganze z -Achse von $-\infty$ bis $+\infty$ mit Doppelquellen belegt ist ($\vartheta' = 0, \vartheta'' = \pi$), so wird

$$\Phi_1 = -\frac{\mu}{2\pi\varrho} \cos \varphi.$$

In Verbindung mit der Parallelströmung in der negativen x -Richtung erhält man das Potential

$$\Phi = -\left(v_{0x}\varrho + \frac{\mu}{2\pi\varrho}\right) \cos \varphi, \quad (7)$$

aus dem sich die Geschwindigkeitskomponente in der ϱ -Richtung ergibt

$$v_\varrho = \left(-v_{0x} + \frac{\mu}{2\pi\varrho^2}\right) \cos \varphi.$$

Wenn man $v_\varrho = 0$ setzt, so sieht man, daß die resultierende Strömung eine quergerichtete Anströmung des Kreiszyinders mit dem Radius

$$\varrho = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi v_{0x}}} \quad (8)$$

darstellt.

Für eine von $z = 0$ bis $z = \infty$ reichende Doppelquellstrecke ergibt sich das Potential

$$\Phi_1 = -\frac{\mu}{4\pi\varrho}(1 + \cos \vartheta) \cos \varphi \quad (9)$$

wenn ϑ sich wieder auf den vom Anfangspunkt ausgehenden Radiusvektor bezieht.

Für die Schnittkurven der Potentialflächen $\Phi_1 = c$ mit der Ebene $\varphi = 0$ haben wir die Gleichungsformen

$$\varrho = \frac{\mu}{2\pi c} \cos^2 \frac{\vartheta}{2}; \quad r = \frac{\mu}{4\pi c} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2}, \quad (10)$$

die eine einfache Konstruktion anzeigen¹. Die Parallele zur z -Achse im Abstand $\frac{\mu}{4\pi c}$ schneidet die Halbierungslinie des Winkels ϑ in einem Punkt Q , dessen Abszisse dem Radiusvektor des Kurvenpunktes P gleich ist (Abb. 34). Aus dem Ausdruck für den tg des Winkels zwischen Radiusvektor und Tangente

$$\frac{r}{dr} \frac{d\vartheta}{dr} = -\sin \vartheta \quad (11)$$

erhält man ferner eine einfache Tangentenkonstruktion für die Potentiallinien. Wie sich aus den Formeln und der Zeichnung ergibt, haben die Kurven im Anfangspunkt eine gemeinsame Singularität und Asymptoten parallel zur z -Achse im Abstand $\frac{\mu}{2\pi c}$.

¹ Die Kurven gehören zu den sog. Sektrix-Kurven, vgl. G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente Kurven, I. Teil, Leipzig 1910, S. 409.

Für die Schar der Stromlinien in $\varphi = 0$ haben wir die Differentialgleichung

$$\frac{r d\vartheta}{dr} = \frac{1}{\sin \vartheta}$$

mit der Lösung

$$r = c' e^{-\cos \vartheta}. \quad (12)$$

Die entsprechenden Kurven (von denen einige in der Abbildung strichpunktiert sind) haben einen kreisartig-geschlossenen Verlauf. Verbindet man die Strömung (9) mit der bereits oben benutzten Parallelströmung, so kommt

$$\Phi = - \left[v_{0x} \varrho + \frac{\mu}{4\pi \varrho} (1 + \cos \vartheta) \right] \cos \varphi, \quad (13)$$

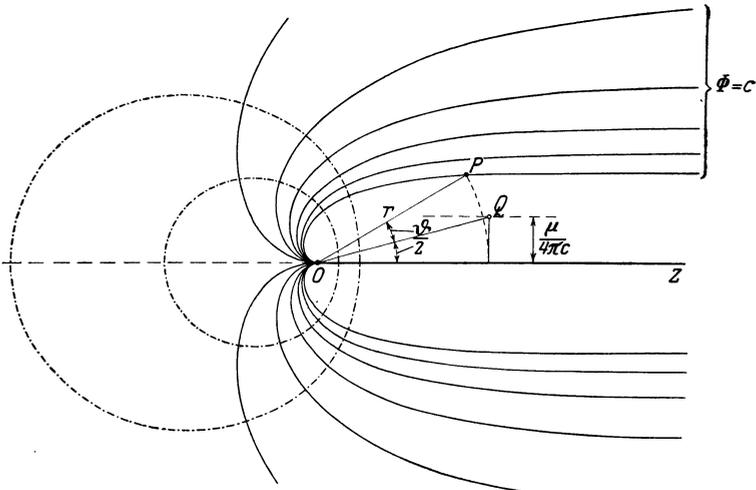


Abb. 34. Potentialschnitte einer halbumendlichen Doppelquellstrecke.

woraus sich die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit ergeben.

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \left[\frac{\mu}{4\pi r^2} \frac{(1 + \cos \vartheta)}{\sin \vartheta} - v_{0x} \sin \vartheta \right] \cos \varphi \\ v_\vartheta &= \left[\frac{\mu}{4\pi r^2} \frac{(1 + \cos \vartheta)}{\sin^2 \vartheta} - v_{0x} \cos \vartheta \right] \cos \varphi \\ v_\varphi &= \left[\frac{\mu}{4\pi r^2} \frac{(1 + \cos \vartheta)}{\sin^2 \vartheta} - v_{0x} \right] \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Die Flüssigkeitsbewegung ist mit der senkrechten Umströmung eines Umdrehungskörpers (Halbkörpers) identisch, der auf der einen Seite geschlossen ist und in der positiven z -Richtung im Unendlichen in den Kreiszyylinder mit dem Radius der Formel (8) übergeht. Für die Meridiankurven in der xz -Ebene, sowie für das System der Stromlinien in $\varphi = 0$

haben wir mit

$$\frac{\mu}{4\pi v_{0z}} = b^2$$

die Differentialgleichung

$$\frac{r d\vartheta}{dr} = \frac{v_\vartheta}{v_r} = \frac{b^2 - r^2 \cos \vartheta (1 - \cos \vartheta)}{\sin \vartheta [b^2 - r^2 (1 - \cos \vartheta)]} \quad (15)$$

die mit $\cos \vartheta = \nu$ sich in die Form

$$-\frac{r d\nu}{dr} = \frac{b^2 - r^2 \nu (1 - \nu)}{b^2 - r^2 (1 - \nu)} \quad (15a)$$

setzen läßt. In der Abb. 35 ist das System der Potentialschnitte (eine

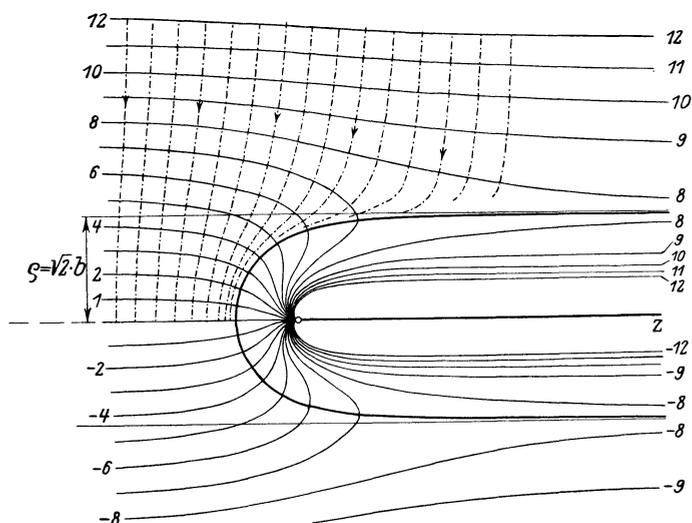


Abb. 35. Querströmung gegen einen Rotationshalbkörper (Potentialschnitte und Stromlinien in der Ebene $\varphi = 0$).

Schar von Kurven 8. Ordnung) und der orthogonalen Trajektorien zur Anschauung gebracht. Aus der Gleichung

$$\cos \vartheta = \frac{\varrho (c - \varrho)}{b^2}; \quad \varrho = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 8b^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}}{2}$$

schließt man, daß die Potentialschnitte mit $c^2 > 8b^2$ aus zwei, im Unendlichen zusammenhängenden Zweigen mit im Ganzen drei Asymptoten parallel der z -Achse bestehen. Für $c^2 = 8b^2$ rücken zwei der Asymptoten zusammen, und zwar in die Geraden $\varrho = \pm b\sqrt{2}$, die zugleich die Asymptoten der Meridianlinie des Halbkörpers sind. Die Kurven mit $c^2 < 8b^2$ behalten nur eine Asymptote mit dem Berührungspunkt $\vartheta = \pi$ übrig.

Wenn die Doppelquellstrecke beiderseits begrenzt ist, so haben wir das zusammengesetzte Potential

$$\cos \varphi \left[\frac{b^2}{\varrho} (\cos \vartheta' - \cos \vartheta'') + \varrho \right] = c, \quad \cos \vartheta' - \cos \vartheta'' = \frac{\varrho(c - \varrho)}{b^2}. \quad (16)$$

Die entsprechenden Schnittkurven in der Ebene $\varphi = 0$ sind vom 16. Grade. Für die Konstruktion ist es zweckmäßig, nach Anleitung der Gleichung (17) zunächst die für gleichbleibende ϱ -Werte ermittelte Kosinusdifferenz in Abhängigkeit von der z -Koordinate, die von der Mitte der Strecke als Anfangspunkt gezählt wird, graphisch aufzutragen. Man gewinnt so die Kurvenschar der Abb. 36, mit deren Hilfe bequem die verschiedenen, auf einen c -Wert bezogenen Koordinatenpaare z und ϱ abgelesen werden können. In den Originalzeichnungen, die den Abb. 36 u. 37 zugrunde liegen, ist die Hälfte der Strecke $a = 5 \text{ cm}$ und $b^2 = \frac{\mu}{4\pi v_{0z}} = 8 \text{ (cm}^2\text{)}$ gewählt worden. Die Diskussion der Potentiallinien soll dem Leser überlassen bleiben.

3. Nach diesen Vorbereitungen wollen wir das von Karman in

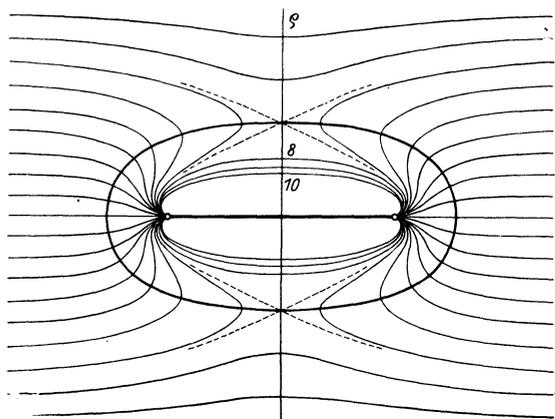


Abb. 36. Querströmung gegen einen geschlossenen Rotationskörper (Potentialschnitte).

der bereits zitierten Arbeit angegebene Verfahren besprechen, zu einem gegebenen Rotationskörper angenähert die Doppelquellverteilung und damit das Querströmungsfeld festzustellen. Denken wir uns zu dem Zwecke auf der z -Achse entsprechend dem Falle achsialer Anströmung eine Anzahl von gleichlangen

Doppelquellstrecken von verschiedener Ergiebigkeit, so gewinnen wir durch Verbindung mit der Parallelströmung das Potential

$$\Phi = - \left[\frac{1}{4\pi\varrho} \sum_{i=1}^n \mu_i (\cos \vartheta'_i - \cos \vartheta''_i) + v_{0z}\varrho \right] \cos \varphi. \quad (17)$$

Die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit v_ϱ und v_z , in der Ebene $\varphi = 0$ betrachtet, werden dann, wenn man

$$\frac{d\vartheta}{dz} = -\frac{\sin^2 \vartheta}{\varrho}; \quad \frac{d\vartheta}{d\varrho} = \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{\varrho}$$

beachtet,

$$\left. \begin{aligned} v_{\varrho} &= -v_{0x} + \frac{1}{4\pi\varrho^2} \sum_{i=1}^n \mu_i [2(\cos \vartheta'_i - \cos \vartheta''_i) - (\cos^3 \vartheta'_i - \cos^3 \vartheta''_i)] \\ v_z &= \frac{1}{4\pi\varrho^2} \sum_{i=1}^n \mu_i (\sin^3 \vartheta'_i - \sin^3 \vartheta''_i). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Damit die Strömung in der Ebene $\varphi = 0$ die vorgegebene Meridianlinie des Rotationskörpers als Hüllkurve liefert, muß die trigonometrische

Tangente $\operatorname{tg} \tau = \frac{d\varrho}{dz}$ ihres Neigungswinkels mit dem Verhältnis der Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit übereinstimmen. Das führt dann mit der Abkürzung

$$\frac{\mu_i}{4\pi a^2 v_{0x}} = X_i;$$

$$f\left(\frac{\varrho}{z}\right) = \sin^3 \vartheta,$$

$$g\left(\frac{\varrho}{z}\right) = 2 \cos \vartheta - \cos^3 \vartheta$$

auf das System der Gleichungen

$$\sum_{i=1}^n X_i [(g'_i - g''_i) + \operatorname{tg} \tau (f'_i - f''_i)] = \frac{\varrho^2}{a^2} \quad (19)$$

die auf n Punkte der Hüllkurve angewandt, zur Bestimmung der n Unbekannten X_i ausreichen.

Wenn man nun dies Verfahren etwa auf Bug und Heck des bereits früher (Abschn. 16) benutzten Luftschiffes anwendet, so erhält man eine ansteigende, resp. absteigende Treppe von X -Werten. Verbindet man ferner die früher betrachtete achsiale mit der quergerichteten Anströmung, so kann man insbesondere die Druckverhältnisse des schief angeströmten Luftschiffes theoretisch verfolgen. Für die Druckdifferenz haben wir den Ausdruck

$$p - p_0 = \frac{\gamma}{2g} (v_{0x}^2 + v_{0z}^2 - v_z^2 - v_{\varrho}^2 - v_{\varphi}^2).$$

Nennen wir die von der achsialen Bewegung herrührende Strömungsgeschwindigkeit v_1 , die von der senkrechten Bewegung herrührende und

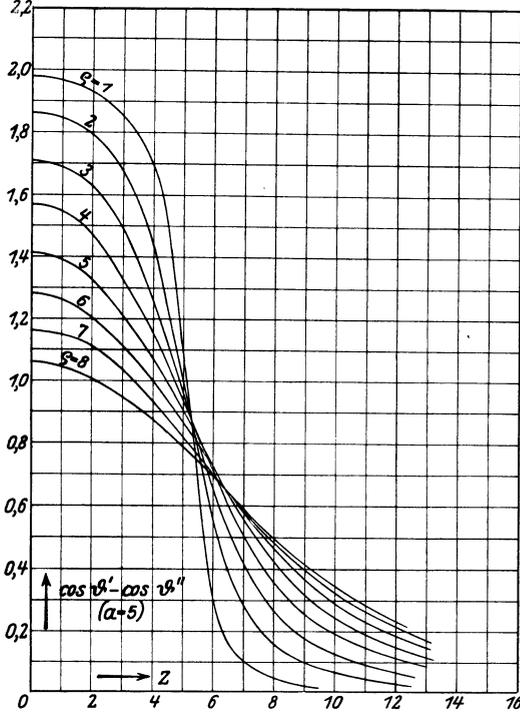


Abb. 37. Hilfskurven zur Konstruktion von Potentialflächen.

auf die Ebene $\varphi = 0$ bezogene Geschwindigkeit v_z , so wird

$$v_z = v_{1z} + v_{2z} \cos \varphi, \quad v_\varphi = v_{1\varphi} + v_{2\varphi} \cos \varphi, \quad v_\varphi = v_{2\varphi} \sin \varphi$$

und man sieht nach Einsetzung, daß der Ausdruck (17) für die Querkraft nur das Glied

$$\frac{\gamma}{g} (v_{1z} v_{2z} + v_{1\varphi} v_{2\varphi}) \cos \varphi = \frac{\gamma}{g} v_1 v_2 \cos \varphi$$

in betracht kommt, da die anderen Glieder für die Werte φ und $\pi - \varphi$ absolut gleich werden, also bei der Integration über den ganzen Querschnitt sich aufheben. Für die resultierende Querkraft, bezogen auf

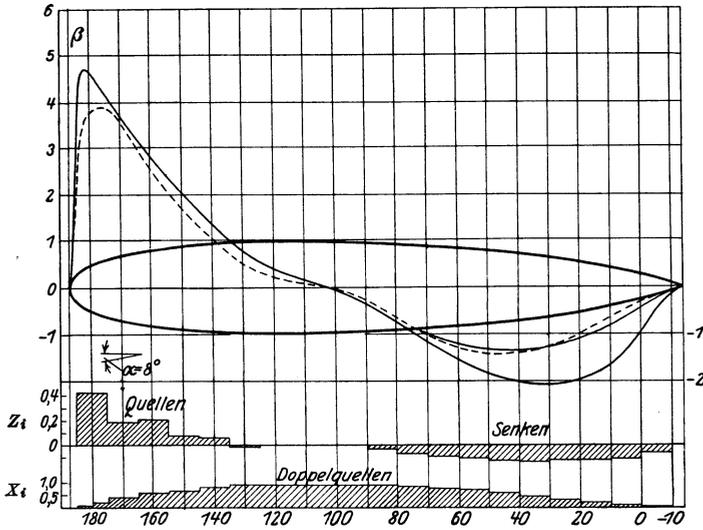


Abb. 38. Querkraftverteilung beim ZR III (nach v. Karman u. Klemperer).
 ——— Theorie (I u. II) - - - - Versuch.

ein Ringlelement von der Breite 1 und für die von Klemperer eingeführte Querkraftbreite β erhält man daher

$$\frac{dQ}{dz} = \frac{\gamma}{g} \int_0^{2\pi} v_1 v_2 \cos^2 \varphi \varrho d\varphi = \frac{\gamma}{g} \pi \varrho v_1 v_2; \quad \beta = \frac{\frac{dQ}{dz}}{\frac{\gamma}{2g} v_0^2} = 2 \pi \varrho \frac{v_1 v_2}{v_0^2} \quad (20)$$

$$\text{oder mit} \quad \lambda_1 = \frac{v_1}{v_{0z}}, \quad \lambda_2 = \frac{v_2}{v_{0x}}, \quad \frac{v_{0x}}{v_{0z}} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (21)$$

$$\beta = \pi \varrho \lambda_1 \lambda_2 \sin 2\alpha.$$

In der Abb. 38 sind die Diagramme für die Doppelquellstrecke am Bug und Heck des „ZR III“, ferner die nach der Doppelquellmethode berechnete, sowie die aus den Messungen von Klemperer sich ergebende Querkraftbreite aufgetragen. Die Übereinstimmung der Theorie mit dem Versuch ist naturgemäß für den Bug, namentlich für den

mittleren Teil des Schiffes besser als für den Heck. Ferner liefert die Theorie, da die positiven und negativen von der β -Kurve und der Achse begrenzten Flächen inhaltsgleich sind, im ganzen keine resultierende Kraft, sondern nur ein Kräftepaar, während nach der Messung der auf den Bug wirkende Auftrieb den auf dem Heck lastenden Abtrieb übertrifft. v. Karman hat deshalb im Sinne der Erfahrung angenommen, daß dem Luftschiffkörper ein Wirbelgebilde nachfolgt, das eine nach unten gerichtete Beschleunigung der Luft und dem entsprechend eine entgegengesetzte Reaktionskraft hervorruft. Durch einfache Annahmen, die während der Niederschrift dieses Abschnittes im einzelnen noch nicht bekanntgegeben sind, ist es ihm gelungen, Formeln für die Auftriebskraft aufzustellen, die mit der Erfahrung gut übereinstimmende Werte ergeben.

18. Ebene Strömung um zylindrische Körper.

1. Das für achsensymmetrische Strömungen benutzte Verfahren läßt sich auf den Fall der ebenen Strömung übertragen, wenn wir die Punktspuren von geradlinigen, gleichmäßig ergiebigen unendlich langen Quellstrecken senkrecht zur Strömungsebene und die Streckenspuren von zylindrischen Quellflächen verwenden.

Wenn wir etwa entsprechend dem in Abschn. 14 betrachteten räumlichen Fall eine Quelle und Senke in den Punkten $-a$ und $+a$ annehmen und eine Parallelströmung hinzufügen, so haben wir in der komplexen Schreibweise die Strömungsfunktion

$$W = v_0 z + \frac{q}{2\pi} \ln \frac{z+a}{z-a}, \quad (1)$$

die sich in folgender Weise zerlegen läßt in die Potential- und die Stromfunktion

$$W = \Phi + i\psi = v_0 x + \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} + i \left(v_0 y - \frac{q}{2\pi} \psi \right), \quad (2)$$

wenn r_1 und r_2 die vom Aufpunkt nach den Punkten $\pm a$ gezogenen Radien und ψ den Winkel zwischen ihnen bedeutet. Wenn $v_0 = 0$ ist, so sind, wie man sieht, die Stromlinien des Quellsenkensystems Kreise durch $\pm a$ und die Potentiallinien eine orthogonale Kreisschar, welche die Mittelsenkrechte der Strecke $+a, -a$ zur gemeinsamen Potenzlinie haben. Bei endlichem v_0 gibt es, wie auch die Abb. 39 zeigt, wieder eine Stromlinie, die aus der reellen Achse und einem, die Quelle und Senke umschließenden Oval besteht. Das Oval hat die Gleichung

$$v_0 y - \frac{q}{2\pi} \psi = 0 \quad (3)$$

und ist leicht dadurch zu zeichnen, daß man die durch $\pm a$ gehenden

und die Umfangswinkel ψ fassenden Kreise mit den im Anstande $\frac{q}{2\pi} \cdot \psi$ gezogenen Parallelen zur reellen Achse zum Schnitt bringt.

Aus dem Ausdruck für die Strömungsgeschwindigkeit und der Gleichung (3) erhält man die Hauptabmessungen d. h. die halbe Länge x_0 und die halbe Breite y_0 des Ovals mit Hilfe der Beziehungen

$$x_0^2 = a^2 + \frac{a \cdot q}{\pi v_0}; \quad \operatorname{tg} \frac{\pi v_0 y_0}{q} = \frac{a}{y_0}. \quad (4)$$

Man sieht, daß x_0 und y_0 um so größer ausfallen, je kleiner die Geschwindigkeit v_0 der Parallelströmung ist.

Die äußere Strömung verläuft wieder so, als ob ein unendlich langer Zylinder mit dem Oval als Querschnitt in das Feld einer aus dem

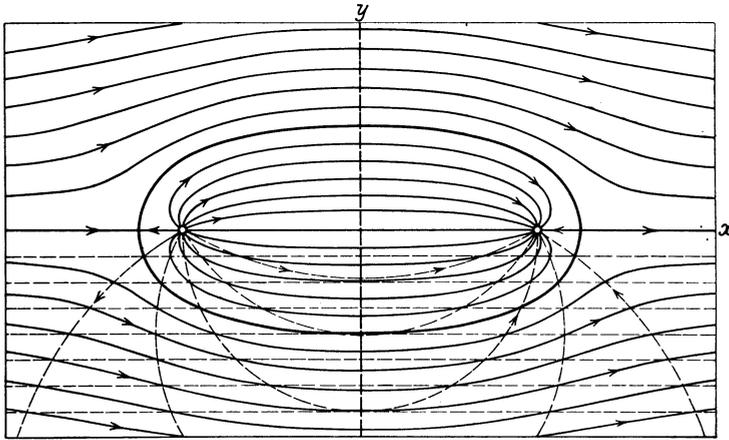


Abb. 39. Strömung um einen ovalen Zylinder (Quelle + Gesenke + Parallelströmung in der Ebene).

Unendlichen kommenden Parallelströmung gebracht werden würde. Wenn der Zylinder einen Anstoß mit der Geschwindigkeit $-v_0$ in der im Unendlichen ruhenden Flüssigkeit erhält, so folgen die Flüssigkeitsteilchen den Kraftlinien oder Feldlinien, die in diesem Falle zusammenfallen mit dem durch den Quell- und den Senkenpunkt gehenden Kreisbüschel.

2. Wenn die Quelle in den Anfangspunkt fällt und die Senke ins Unendliche rückt, so geht das Potential im Unendlichen über in

$$W = v_0 z + \frac{q}{2\pi} \ln z. \quad (5)$$

Für die Gleichung der Einhüllenden, welche die beiden Strömungsgebiete voneinander trennt (Abb. 40), erhält man wieder aus dem Fluß durch einen bis zur Realachse reichenden Querschnitt

$$y = x \operatorname{tg} \frac{2\pi v_0 y}{q}; \quad r = \frac{q(\pi - \varphi)}{2\pi v_0 \sin \varphi}. \quad (6)$$

Der Abstand von der reellen Achse nähert sich im Unendlichen dem Werte $y_1 = \frac{q}{2v_0}$. Ferner findet man für den Scheitelpunkt und den Schnitt mit der y -Achse $y = 0$, $x = -\frac{q}{2\pi v_0}$; $x = 0$, $y = \frac{1}{2} y_1$. Der Druckverlauf längs der Trennkurve, der ähnlich zu charakterisieren ist wie bei dem früher besprochenen achsensymmetrischen Fall des Halbkörpers, ist in der Gleichung

$$c_p = \frac{p-p_0}{p_s} = 1 - \frac{v^2}{v_0^2} = - \left(\frac{q}{2\pi r v_0} \right)^2 - \frac{q x}{\pi v_0 r^2} \quad (7)$$

enthalten. Wenn man $\frac{q}{2\pi v_0} = k$ setzt, so wird die Schar der Kurven gleichen Drucks oder gleicher Geschwindigkeit (Isotachen)

$$c_p^2 + 2 c_p x + k r^2 = 0. \quad (8)$$

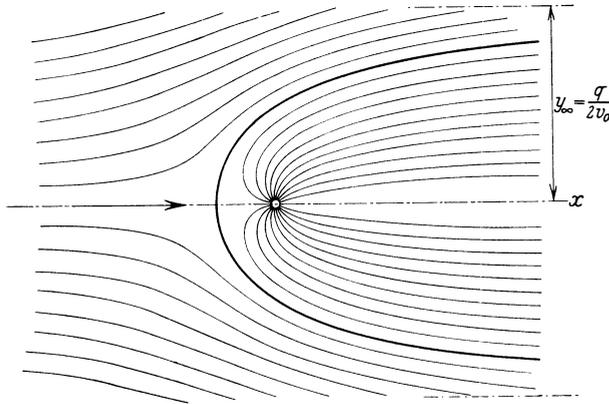


Abb. 40. Strömung gegen eine abgerundete Kante (Quelle + Parallelströmung).

Das ist ein Kreisbüschel, der die Kreise durch den Quell- und Scheitelpunkt orthogonal schneidet.

3. Rücken Quelle und Senke im Nullpunkt zusammen, so erhalten wir in

$$W = v_0 \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) \quad (9)$$

das Potential der relativen Strömung um einen mit der Geschwindigkeit $-v_0$ gegen die ruhende Flüssigkeit bewegten Kreiszyylinder. Die absolute Strömung oder das System der Kraftlinien ist dann durch

$$W_a = v_0 \frac{r_0^2}{z} \quad (10)$$

dargestellt, d. h. durch die beiden, die reelle Achse im Ursprung berührenden Kreisbüschel, deren Radien den reziproken Werten einer arithmetischen Reihe proportional sind (vgl. Abb. 46).

Aus den allgemeinen Ausdrücken des Abschnittes 10 ergibt sich, daß der Quellsenkensystem im Ursprunge dasselbe Geschwindigkeitsfeld erzeugt, wie ein in dieselbe Gerade fallender Doppelwirbelfaden, dessen Achse senkrecht steht zur Achse der Doppelquelle.

Unter den der Gleichung entsprechenden Potentiallinien sind zwei ausgezeichnete vorhanden, die innerhalb des Streifens $x = \pm 2r_0$ verlaufen, die Staupunkte $z = \pm r_0$ zu Doppelpunkten und die Streifen-

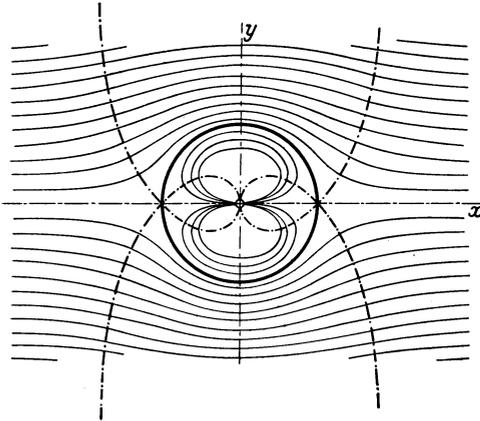


Abb. 41. Strömung um einen Kreiszyylinder.

grenzen zu Asymptoten haben und sich im Anfangspunkt berühren. Sie schneiden ferner die Stromlinien in den Wendepunkten und trennen gleichzeitig die beiden verschiedenen Typen von Potentiallinien (vgl. Abb. 41). Die Strömungsgeschwindigkeit an einer beliebigen Stelle $z = re^{i\varphi}$ wird

$$\bar{v} = v_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} e^{-2i\varphi} \right). \quad (11)$$

Längs der Kreiskontur er-

hält man
$$v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -2v_0 \sin \varphi. \quad (11a)$$

Den Staupunkten entsprechen die Werte $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$. An den Stellen mit $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ nimmt die Randgeschwindigkeit den größten Wert an, der doppelt so groß ist, als die Geschwindigkeit der ungestörten Strömung. Aus der Geschwindigkeit berechnet sich sofort der Druck in irgendeinem Feldpunkt

$$c_p = \frac{p - p_0}{\rho_s} = 2 \frac{r_0^2}{r^2} \cos 2\varphi - \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 \quad (12)$$

und längs der Zylinderkontur

$$c_p = \frac{4x^2 - 3r_0^2}{r_0^2}, \quad (12a)$$

woraus man z. B. entnimmt, daß der absolute Wert des größten Unterdruckes ($\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$) den Staudruck ($\varphi = 0, \pi$) um das dreifache übertrifft.

4. Verallgemeinerung. Statt der einfachen oder doppelten Quellfäden kann man nun ebenso wie im achsensymmetrischen Fall beliebige Quell- und Senkensysteme anordnen mit der Eigenschaft, daß die gesamte Ergiebigkeit verschwindet, und damit beliebige Formen von

umströmten zylindrischen Konturen erzeugen, auch verhältnismäßig einfach das Feld der Stromlinien und den Geschwindigkeits- und Druckverlauf ermitteln. Wir geben hier einen Fall in Abb. 42 wieder, das nach einer von Föttinger^{1, 2} zum ersten Male veröffentlichten Zeichnung angefertigt ist. Die Strömung, die aus einer Überlagerung einer Quellstrecke, oder genauer ebenen Quellschicht mit einer Parallelströmung gewonnen ist, entspricht ungefähr dem Strömungsfelde um die zugeschärften Eintrittskanten von Turbinen- und Zentrifugalpumpenschaufeln oder um den Bug von verhältnismäßig völligen Schiffen, wenn vorausgesetzt wird, daß die Höhen der entstehenden Oberflächenwellen gegenüber dem Tiefgang des Schiffes klein sind.

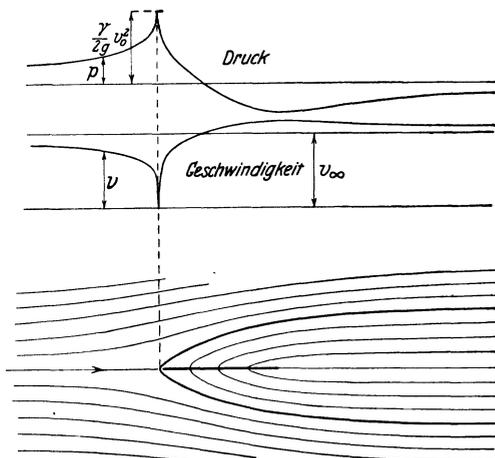


Abb. 42. Strömung um eine scharfe Schaufelkante.

Das Potential der in die reelle Achse fallenden, von $x = 0$ bis $x = a$ reichenden Quellstrecke von der Ergiebigkeit q wird

$$W_1 = \frac{q}{2\pi a} \int_0^a \ln(z - \xi) d\xi = \frac{q}{2\pi} \left[\frac{z}{a} \ln z - \frac{z-a}{a} \ln(z-a) \right].$$

Die Geschwindigkeit der Strömung wird

$$\bar{v}_1 = \frac{q}{2\pi a} \int_0^a \frac{d\xi}{z - \xi} = -\frac{q}{2\pi a} \ln \frac{z-a}{z}.$$

Das Potential der kombinierten Strömung lautet dann

$$W = W_1 + W_2 = v_0 z + \frac{q}{2\pi} \left[\frac{z}{a} \ln z - \frac{z-a}{a} \ln(z-a) \right]$$

und die Gleichung der als Kontur zu benutzenden Einhüllenden wird, wie man sofort feststellt

$$v_0 y + \frac{q}{2\pi a} \left[x(\varphi_1 - \varphi_2) + a\varphi_2 + y \lg \frac{r_1}{r_2} - \pi a \right] = 0,$$

¹ H. Föttinger, Fortschritte der Strömungslehre im Maschinenbau und Schiffbau. Jahrb. d. schiffbautechn. Gesellschaft Bd. 25, S. 306. 1924.

² H. Föttinger, Kavitation und Korrosion, in Hydraul. Probleme (Hydraulikertagung 1925), herausg. v. V. D. I., Berlin 1926, S. 56.

wenn r_1, r_2 die Radienvektoren des Aufpunktes nach den Endpunkten der Quellstrecke, φ_1, φ_2 die entsprechenden Winkel mit der Realachse bedeuten. Es ergibt sich, daß der Scheitel der Koordinate

$$x_0 = - \frac{a}{e^{\frac{2\pi a v_0}{q}} - 1}$$

hat. Im Unendlichen ist natürlich der Abstand der Kontur von der Achse wieder wie im Falle der einfachen Quelle

$$y_1 = \frac{q}{2v_0}.$$

Wenn man die Quell- oder Senkenelemente nicht mehr in der zur Parallel- oder Transportgeschwindigkeit parallelen Achse anordnet oder auch, wenn man der symmetrischen Anordnung noch Wirbelelemente hinzufügt, so erhält man unsymmetrische Randkurven. Da wir auf diesen Fall von einer anderen Seite her in der Tragflügeltheorie ausführlich zurückkommen werden, gehen wir hier nicht darauf ein.

Wesentlich für die technischen Anwendungen wäre nun die Lösung des umgekehrten Problems, zu einer gegebenen Kontur die zugehörige „Quellcharakteristik“ ausfindig zu machen. Sie kann angenähert nach dem Vorbilde des früher (Abschn. 15) gegebenen Verfahrens oder durch Probieren, d. h. dadurch geleistet werden, daß man durch systematische Variation der Quellverteilung eine bereits theoretisch gefundene Konturform der zu analysierenden Form annähert. So gelingt es, durch Hinzufügung von einfachen Quellen eine gegebene Kontur in beliebiger Weise auszubauchen oder durch Hinzufügung von Senken einzudrücken.

Neuerdings ist es Föttinger gelungen, eine neue Art von Integrationsmaschinen, die sog. „Vektor-Integratoren“ zu konstruieren, mit denen es möglich ist, viele für die Praxis wichtige Aufgaben aus dem Gebiete der Strömungslehre automatisch zu lösen¹. Die Verwendung beruht auf der später noch weiter zu verfolgenden Möglichkeit, jede Strömung um Konturen aus gewissen Quell- und Wirbelverteilungen längs des Randes herzuleiten. Der erste Vektor-Integrator sollte selbsttätig die Stromlinien $\Psi = \text{konst}$ des Feldes um einen Zylinder aufzeichnen, das durch Oberflächenquellen erregt gedacht wird. Es zeigt sich, daß der Apparat das Stromliniensystem für alle elliptischen Zylinder (und ihre Ausartungen wie Lamellen usw.) genau, für allgemeine Konturen um so genauer liefert, je mehr der betreffende Konturteil durch Ellipsen anzunähern ist (vgl. Abschnitt 20). Eine weitere Verwendung besteht in der Bestimmung der den Poten-

¹ H. Föttinger, Jahrbuch der schiffbautechn. Gesellschaft 1924, S. 309.

tiallinien $\Phi = \text{konst}$ entsprechenden Wirbelbelegungen. Ein anderer Integrator gestattet ferner, aus einer gegebenen, vollständig willkürlichen Quell-Senkenstrecke beliebige Strömungen um Rotationskörper nach der Rankineschen Methode zu ermitteln. Die Erläuterung der Apparatur findet sich in den zitierten Originalarbeiten.

19. Zylinder im begrenzten Strom und Meßresultate.

Um die (ebene) Strömung in erster Annäherung zu bestimmen, die in einem geradlinig begrenzten (Meß-)Kanal entsteht, in deren Mitte sich ein Kreiszyylinder befindet, denken wir uns nach dem Spiegelungsprinzip unendlich viele gleich starke und nach der x -Richtung orientierte Doppelquellen in gleichen Abständen h auf der y -Achse angebracht. Wenn etwa eine Doppelquelle in den Anfangspunkt ($x = y = 0$) fällt, so kann sie als Mittelpunkt eines kleinen Zylinders aufgefaßt werden, welcher in dem von den Wänden $y = \pm \frac{h}{2}$ begrenzten Kanalstrom liegt. Der Ausdruck für das komplexe Potential entsteht aus der bekannten ctg-Reihe

$$\text{ctg } z \frac{\pi}{h} = \frac{h}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda \frac{1}{z - \lambda h}$$

dadurch, daß man ih an Stelle von h setzt

$$\text{Ctg } \frac{z\pi}{h} = \frac{h}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \lambda \frac{1}{z - i\lambda h}. \quad (1)$$

In Verbindung mit der Parallelströmung hat man also

$$W = v_0 z + a \text{Ctg } \frac{z\pi}{h}.$$

Wenn der Punkt $z = -x = -r_0$ Staupunkt werden soll, so muß

$$0 = -v_0 + a \frac{\frac{\pi}{h}}{\text{Sin}^2 \frac{\pi x}{h}}; \quad a = \frac{v_0 h}{\pi} \text{Sin}^2 \frac{r_0 \pi}{h},$$

also
$$W = v_0 z + \frac{v_0 h}{\pi} \text{Sin}^2 \frac{r_0 \pi}{h} - \text{Ctg } \frac{z\pi}{h} \quad (2)$$

werden. Für den vom Staupunkt um 90° entfernt gelegenen Punkt auf dem Zylinder gilt

$$0 = v_0 i b + \frac{v_0 h}{\pi} \text{Sin}^2 \frac{r_0 \pi}{h} \text{Ctg } \frac{b i \pi}{h}$$

oder
$$\frac{b\pi}{h} \cdot \text{tg } \frac{b\pi}{h} = \text{Sin}^2 \frac{r_0 \pi}{h}. \quad (3)$$

Bei der von H. Ermisch¹ benutzten Versuchseinrichtung war

¹ H. Ermisch, Strömungsverlauf u. Druckverteilung an Widerstandskörpern, Abhandlungen Aerodyn. Institut Aachen, Heft 6, Berlin 1927, S. 31.

$h = 17$ cm, beim größten Meßzylinder $b = 1,5$ cm. Man erhält dann aus (3)

$$\text{Sin} \frac{r_0 \pi}{h} = 0,281,$$

d. h. einen Wert $r_0 = 1,504$ cm, der nur wenig von $b = 1,5$ abweicht. Bei kleinem Verhältnis $\frac{r_0}{h}$ ist man also in der Tat berechtigt, die Funktion (2) für eine Kanalströmung um einen Kreiszyylinder in Anspruch zu nehmen.

Den Ausdruck für die Strömungsgeschwindigkeit

$$\frac{dW}{dz} = v_0 - \frac{v_0 h}{\pi} \text{Sin}^2 \frac{r_0 \pi}{h} \cdot \frac{1}{\text{Sin}^2 \frac{z \pi}{h}} \cdot \frac{\pi}{h} = v_0 \left(1 - \frac{\text{Sin}^2 \frac{r_0 \pi}{h}}{\text{Sin}^2 \frac{z \pi}{h}} \right) \quad (4)$$

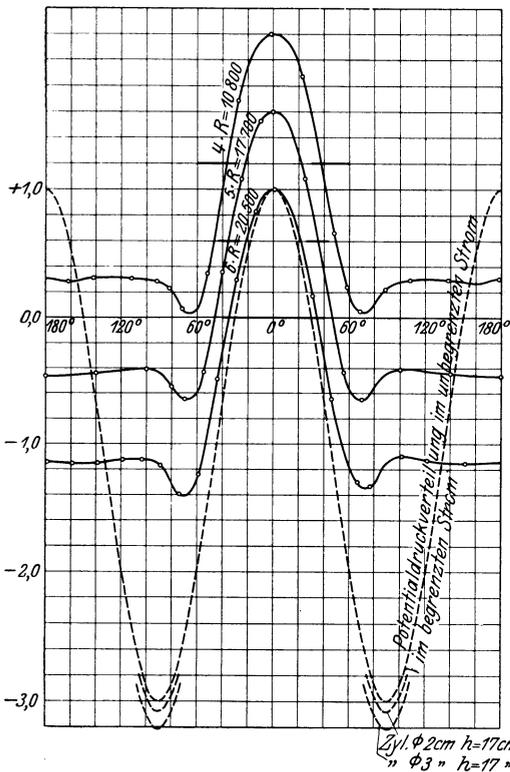


Abb. 43. Druckverteilung am Kreiszyylinder (nach Ermisch).

können wir umformen, indem wir setzen

$$\frac{1}{\text{Sin}^2 \frac{z \pi}{h}} = q e^{i\vartheta},$$

$$\frac{x \pi}{h} = \xi, \quad \frac{y \pi}{h} = \eta,$$

dann wird nach einfacher Rechnung

$$q = \frac{1}{\text{Cos}^2 \xi - \text{cos}^2 \eta};$$

$$\text{tg} \vartheta = \frac{2 \text{tg} \xi \text{tg} \eta}{\text{tg}^2 \eta - \text{tg}^2 \xi},$$

$$\bar{v} = v_0 \left(1 - \text{Sin}^2 \frac{r_0 \pi}{h} \cdot q e^{i\vartheta} \right). \quad (5)$$

Die nach diesem Ausdruck berechnete Druckverteilung an einem Kreiszyylinder ist in der beigegebenen Abb. 43 zur Darstellung gebracht; durch Vergleich mit der unbegrenzten Strömung erhält man eine Vorstellung von dem Einfluß der Wandung, die bei einem verhältnismäßig großen Zylinderradius recht erheblich ausfallen kann. Diesen Ein-

fluß kann man angenähert dadurch bestimmen, daß man die für zwei verschiedene Zylinderdurchmesser gewonnenen Ergebnisse auf einen Durch-

messer $2r_0 = 0$ extrapoliert unter Annahme quadratischer Abhängigkeit. Die Abb. 43 zeigt ferner die Abweichung der theoretischen und der gemessenen Druckverteilung. Ermisch hat die Messungen für verschiedene, aber kleinere Reynoldsche Zahlen, d. h. verschiedene Werte des Zylinderdurchmessers und der Geschwindigkeit v_0 durchgeführt. Es zeigt sich dann, daß bei allen gemessenen Kurven der Unterschied zwischen dem Druck an der Stelle des Minimums und dem Druck im Wirbelgebiet in dem untersuchten Bereich der Kennzahlen der gleiche bleibt.

Eine wesentliche Änderung im Druckverlauf tritt ein nach Überschreitung des kritischen Wertes der Reynoldschen Zahl, der etwa zwischen $1,1 \cdot 10^5$ und $1,5 \cdot 10^5$ liegt. Bis zu diesen Werten herrschen im Zylinderkielwasser diskrete Wirbelgebilde, die in regelmäßigem Rhythmus sich vom Zylinder ablösen und ein zusätzliches, bis zu einem gewissen Grade noch rechnerisch zu übersehendes Geschwindigkeitsfeld ergeben, etwa nach der Art der später zu betrachtenden Karmanschen Wirbelstraßen.

Wenn man den kritischen Wert überschreitet, so zeigt sich eine ziemlich unvermittelte Veränderung der Vorgänge in der Kielwasserzone, die einen turbulenten Charakter annehmen. Der Unterschied in den Druckverhältnissen ist besonders durch die Versuche von F. Eisner¹ geklärt worden. Wesentlich sind die sehr großen Werte der seitlichen Unterdrucke, die rasch zu einem Kielwasserunterdruck ansteigen, der absolut genommen kleiner ist als unterhalb des kritischen Wertes von R (vgl. Abb. 44). Damit nähert sich die Druckverteilung mehr der von der Potentialtheorie gelieferten, was besonders in den wesentlich geringeren Widerstandszahlen zum Ausdruck kommt. Wenn man die Druckresultierende in der Stromrichtung bildet

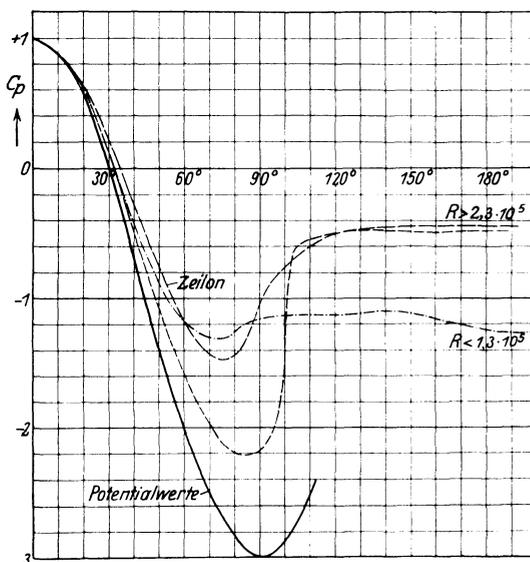


Abb. 44. Druckverteilung am Kreiszyylinder (nach Eisner).

Die Druckresultierende in der Stromrichtung bildet

$$P_{w_i} = r_0 \int p \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \rho v_0^2 \cdot 2r_0 \cdot c_{w_i}, \tag{6}$$

¹ Eisner, Z. ang. Math. Mech., 1925, S. 486—489.

so erhält man zunächst den sog. Formwiderstand oder Druckwiderstand des Zylinders, der sich wegen des verhältnismäßig kleinen Reibungswiderstandes nur unwesentlich von dem Gesamtwiderstand unterscheidet. Die Abhängigkeit des Beiwertes $c_w = c_{w1} + c_{w2}$ des Gesamtwiderstandes von der Reynold'schen Zahl ist aus dem logarithmischen Diagramm der Abb. 45 ersichtlich, das etwa bei $R = 2 \cdot 10^3$ eine Einsenkung und im kritischen Bereich einen starken Abfall von 1,2 auf den Wert 0,3 zeigt.

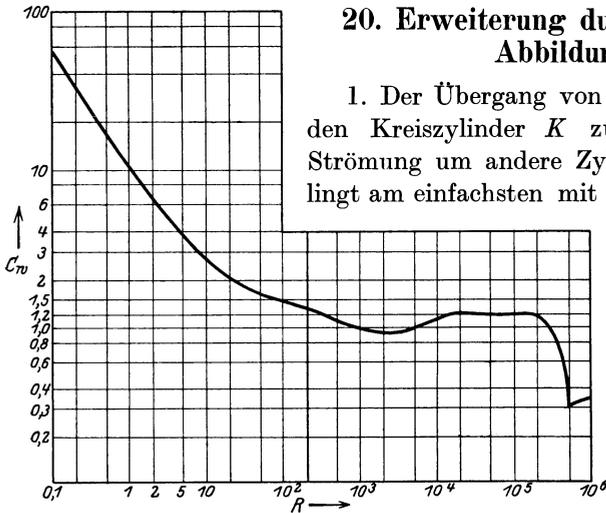


Abb. 45. Widerstandswerte für einen Kreiszyylinder.

20. Erweiterung durch konforme Abbildung.

1. Der Übergang von der Strömung um den Kreiszyylinder K zur entsprechenden Strömung um andere Zylinderformen C gelingt am einfachsten mit Hilfe der Methode der konformen Abbildung vollziehen. Wenn die komplexen Koordinaten in der Ebene des Kreises und der Ebene der Kontur C durch ζ und z unterschieden werden, so kann man die

Transformation, welche eine schlichte Abbildung des Außengebietes von K auf das Außengebiet von C vermittelt, und die unendlich fernen Punkte beider Ebenen in einander überführt, in der Form einer endlichen oder unendlichen Reihe ansetzen

$$z = \zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \dots, \quad (1)$$

in der die Koeffizienten c_i endliche komplexe oder reelle Werte sein mögen und $|c_1| < r_0^2$ angenommen wird¹. Wenn wir von der Kontur C ausgehen, die wir übrigens als eine einfache geschlossene, sich nicht überschneidende (Jordansche) Kurve voraussetzen, so gibt es, wie die Funktionentheorie lehrt, nur einen Kreis, auf dessen Äußeres das Außengebiet von C schlicht abgebildet werden kann und damit nur eine Transformation in der Form (1), wenn gleichzeitig gefordert wird, daß der Abbildungsmodul im Unendlichen = 1, also im Unend-

¹ Über die Bedingungen, welche die Koeffizienten zu erfüllen haben, vgl. man die Arbeiten von L. Bieberbach, z. B. Sitzungsber. d. Berliner Akademie 38 (1916), S. 940—955.

lichen die Zuordnung in die Identität $z \equiv \zeta$ übergeht. Wenn es sich um eine Strömung um einen gegen die Flüssigkeit bewegten Zylinder handelt, so werden beim Übergang vom Kreisquerschnitt zu irgendeiner andern geschlossenen Kontur infolge des Eindeutigkeitsatzes der Potentialtheorie die relativen Stromlinien der einen Strömung in die Stromlinien der andern Strömung übergeführt. Dagegen entsprechen sich die absoluten Stromlinien oder Kraftlinien (Feldlinien) der beiden Felder im allgemeinen nicht mehr im Sinne der Transformation. Um die Bedingung für die Übertragbarkeit der Feldlinien zu finden, nehmen wir an, daß der Kreiszyylinder sich mit der Geschwindigkeit v_0 gegen die reelle Achse senkrecht zu seiner geometrischen Achse bewegt. Dann lauten die komplexen Funktionen, die der relativen und absoluten Strömung entsprechen

$$W_r = - \left(\zeta e^{-i\beta} + \frac{r_0^2}{\zeta} e^{i\beta} \right) \quad (2) \quad W_a = - e^{i\beta} \frac{r_0^2}{\zeta}. \quad (3)$$

Wenn wir die Umkehrung der Reihe (1) in der Form

$$\zeta = z - \frac{c_1}{z} - \frac{c_2'}{z^2} - \dots \quad (4)$$

annehmen, so erhält der reziproke Wert dieser Reihe die Gestalt

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{z} + \frac{c_1}{z^3} + \frac{c_2'}{z^4} + \frac{c_1^2 + c_3'}{z^5} + \dots \quad (5)$$

und man sieht, daß die Strömung (2) übergeht in

$$W_r' = - z e^{-i\beta} + \frac{c_1 e^{-i\beta} - r_0^2 e^{i\beta}}{z} + \frac{c_2' e^{-i\beta}}{z^2} + \dots \quad (6)$$

Wenn man wieder $- z e^{-i\beta}$ abzieht, so erhält man das neue Kraftliniensystem

$$W_a' = \frac{c_1 e^{-i\beta} - r_0^2 e^{i\beta}}{z} + \frac{c_2' e^{-i\beta}}{z^2} + \frac{c_3' e^{-i\beta} - r_0^2 c_1 e^{i\beta}}{z^3} + \dots \quad (7)$$

Damit diese Reihe bis auf einen konstanten Faktor mit der Reihe (5) übereinstimmt, müssen die Koeffizienten die Werte erhalten

$$c_2' = 0, \quad c_3' = c_1^2, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = 2c_1^3, \quad c_6 = 0, \quad c_7 = 5c_1^4 \dots \quad (8)$$

Die abbildende Funktion hat dann die Form

$$\zeta = z - \frac{c_1}{z} - \frac{c_1^2}{z^2} - \frac{2c_1^3}{z^3} - \dots \quad (9)$$

und die Funktion W_a' geht über in

$$W_a' = (c_1 e^{-i\beta} - r_0^2 e^{i\beta}) \left[\frac{1}{z} + \frac{c_1}{z} + \frac{2c_1^2}{z^3} + \dots \right]. \quad (7a)$$

Wenn nun der Faktor $c_1 e^{-i\beta} - r_0^2 e^{i\beta}$ reell wird, so geht das Kraftlinienbild W_a' unmittelbar aus dem Büschel K_a der die reelle Achse be-

rührenden Kreise (Abb. 46), d. h. aus dem Kraftlinienfeld des in der ξ -Richtung sich bewegenden Kreiszyinders durch Anwendung der Transformation (9) hervor.

Die Reihe (9) ist aber, wie man sieht, die Umkehrung der Transformation

$$z = \zeta + \frac{c_1}{\zeta}, \quad (10)$$

deren geometrische Bedeutung unmittelbar einleuchtet, wenn man setzt

$$c_1 = p^2 e^{2i\gamma} (p < r_0), \\ \zeta = r_0 e^{i\varphi}.$$

Der Kreis verwandelt sich in eine konzentrische Ellipse mit den Halbachsen

$$a = r_0 + \frac{p^2}{r_0}, \\ b = r_0 - \frac{p^2}{r_0} \quad (11)$$

deren Längsrichtung mit der positiven ξ -Achse den Winkel γ einschließt. Damit ist gezeigt, daß nur beim Übergang des Kreises zur Ellipse die Kraftliniensysteme in der konformen Abbildung einander entsprechen.

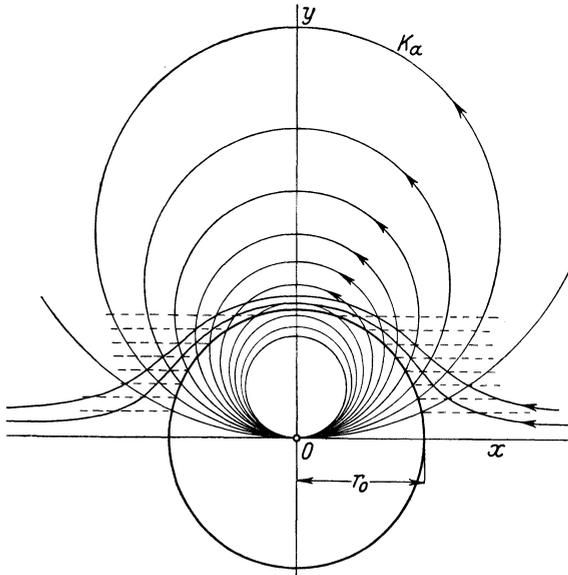


Abb. 46. Kraftlinien um einen Kreiszyinder.

Da die Schar der Kreise K_α geometrisch vom Radius des Grundkreises unabhängig ist und aus der Forderung, daß der Faktor der Reihe (7a) reell wird, die Bedingung

$$p^2 \sin(2\gamma - \beta) = r_0^2 \sin \beta; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{(a-b) \operatorname{tg} \gamma}{a + b \operatorname{tg}^2 \gamma} \quad (12)$$

resultiert, so folgt: Das aus der Schar durch die Transformation (11) hervorgehende Kraftliniensystem gehört der ganzen Schar der zur Exzentrizität $2p$ gehörigen konfokalen Ellipsen gemeinsam an, ist aber für jede Ellipse auf eine andere, aus (12) berechenbare Bewegungsrichtung zu beziehen¹. Bezeichnet man die Winkel zwischen der Bewegungsrichtung und der Ellipsenachse mit α , so genügt α der Beziehung

$$p^2 \sin(\gamma + \alpha) = r_0^2 \sin(\gamma - \alpha). \quad (12a)$$

¹ Wilh. Müller, Stromlinien und Kraftlinien in der konformen Abbildung. Z. ang. Math. Mech. Bd. 6, 1926, S. 284—291.

Eine Ausnahmestellung nimmt der Fall $p = r_0$ ein. Dann geht die Ellipse in die beide Brennpunkte verbindende (doppeltzählende) Strecke, der entsprechende Zylinder also in die unendlich lange ebene Platte über, vgl. S. 46. Da in diesem Falle $\beta = \gamma$, $\alpha = 0$ wird, so verschwindet der Faktor der Ruhe (7a).

Das Kraftliniensystem einer ebenen Platte ist also von der Bewegungsrichtung β , resp. α unabhängig.

Aus der Gleichung (13) erkennt man, daß die Verdrehung der Bewegungsrichtung des elliptischen gegenüber dem Kreiszyylinder nur dann ver-

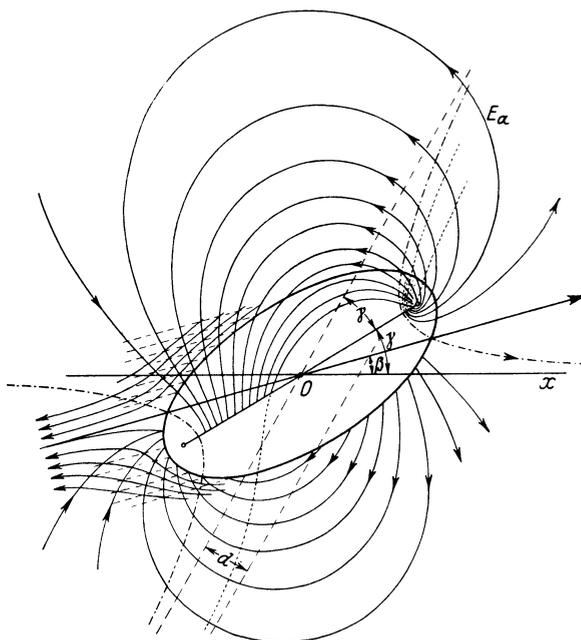


Abb. 47. Stromlinien und Feldlinien um eine schief gegen die Achse bewegte Ellipse.

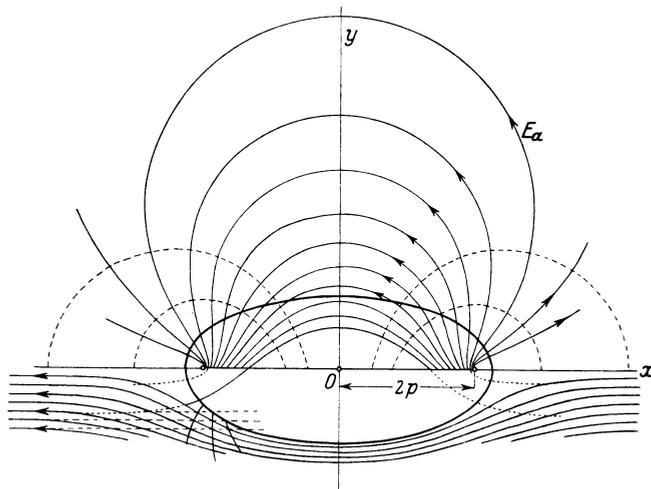


Abb. 48. Stromlinien und Feldlinien um eine in der Richtung der großen Achse bewegte Ellipse.

schwindet, wenn γ entweder $= 0$ oder $= \frac{\pi}{2}$ ist. Also nur wenn der Kreis in eine zur Bewegungs- oder Hauptströmungsrichtung

symmetrische Ellipse transformiert wird, geht auch das Kraftliniensystem des Kreises ohne Änderung der Bezugsrichtung in das entsprechende System der Ellipse über.

Die allgemeine Bewegung der Ellipse läßt sich zusammensetzen aus den Bewegungen parallel den beiden Achsen. Führt man elliptische Koordinaten ein durch

$$\zeta = p e^{i\gamma} e^\tau$$

so wird

$$z = 2 p e^{i\gamma} \mathfrak{C} \mathfrak{O} \mathfrak{I} \tau$$

und mit Benutzung von (12a)

$$W'_a = \frac{p^2 \cos(2\gamma - \beta) - r_0^2 \cos \beta}{p e^{i\gamma}} e^{-\tau} = \left(p e^{i\alpha} - \frac{r_0^2}{p} e^{i\alpha} \right) e^{-\tau}. \quad (14)$$

Wenn man die Halbachsen einführt und $\sin \alpha = -v_b$, $\cos \alpha = v_a$ setzt, so erhält man die bekannte, für jedes γ gültige Formel für die absolute Bewegung einer Ellipse, deren Geschwindigkeiten in den Achsenrichtungen v_a und v_b sind

$$W'_a = - \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} (v_a b + i v_b a) e^{-\tau}. \quad (15)$$

In den Abb. 47—49 sind die Kraftlinien und Stromlinien für eine

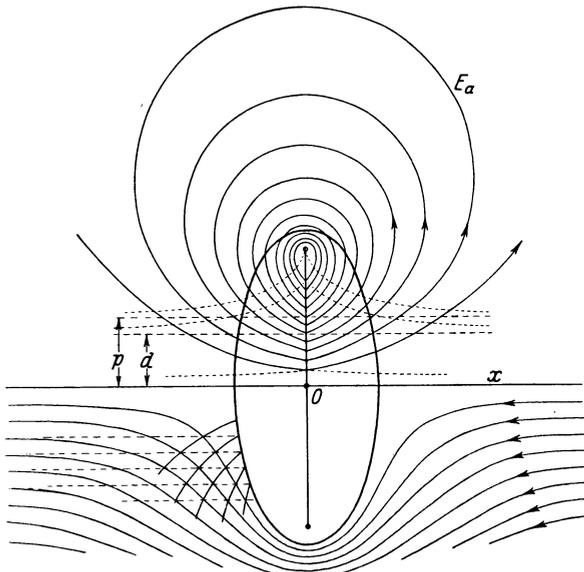


Abb. 49. Stromlinien und Feldlinien um eine in Richtung der kleinen Achse bewegte Ellipse.

schiefe und für die beiden symmetrischen Bewegungsrichtungen dargestellt. Die Konstruktion ist mit Hilfe der Geraden G_a durchgeführt, die aus einem Kreis K_a (mit dem Radius r) durch die reziproke

Transformation $\frac{p^2 e^{2i\gamma}}{\zeta}$ entstehen und die mit der ξ -Achse den Winkel 2γ bilden und vom Anfangspunkt den Abstand $\frac{p^2}{2r} = d$ haben.

Ein Punkt einer Kraftlinie ergibt sich dann durch graphische Addition der Ortsvektoren des Kreispunktes und des entsprechenden Punktes von G_a .

In der erwähnten Arbeit des Verfassers findet sich eine analytische Darstellung und eine genaue Diskussion des Systems E_a , die über den Rahmen der gegenwärtigen Darstellung hinausgeht.

21. Berechnung der Kräfte und Vergleich mit der Messung.

1. Was nun die relative Strömung um den elliptischen Zylinder angeht, der sich mit der Geschwindigkeit v_0 in einer Richtung bewegt, die mit der großen Achse den Winkel α bildet, so ergibt sich, wenn $\gamma = 0$, $\beta = \alpha$ gesetzt wird, die Strömungsgeschwindigkeit in einem Feldpunkt in Abhängigkeit von der Koordinate ζ des Bildpunktes der Kreisebene

$$\bar{v} = \frac{dW}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} = -v_0 \left(e^{i\alpha} - \frac{r_0^2}{\zeta} e^{-i\alpha} \right) = \left(1 - \frac{p^2}{\zeta^2} \right), \quad (1)$$

Da $|\zeta|$ stets größer als p ist, so bleibt die Geschwindigkeit im ganzen äußeren Strömungsfeld endlich. Um etwa Geschwindigkeit und Druck längs der Kontur zu verfolgen, setze man $\zeta = r_0 e^{i\varphi}$, dann wird mit $\frac{p}{r_0} = \lambda$

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} &= -v_0 e^{i\alpha} \frac{1 - e^{-2i(\varphi+\alpha)}}{1 - \lambda^2 e^{-2i\varphi}} = -2i v_0 e^{-i\varphi} \sin(\varphi + \alpha) \frac{1 - \lambda^2 e^{2i\varphi}}{1 + \lambda^4 - 2\lambda^2 \cos 2\varphi} \\ v^2 &= \frac{4v_0^2 \sin^2(\varphi + \alpha)}{1 + \lambda^4 - 2\lambda^2 \cos 2\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Wenn man die Achsen a und b und $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$ einführt, so hat man zu setzen

$$\lambda = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b}, \quad \lambda^2 = \frac{a - b}{a + b}$$

und erhält für die Geschwindigkeit und den Druck

$$v^2 = \frac{v_0^2 (a + b)^2 (+b \sin \alpha + y a \cos \alpha)^2}{b^2 [a^4 - x^2 (a^2 - b^2)]} \quad (3)$$

$$\frac{p - p_0}{p_s} = 1 - \left(\frac{v}{v_0} \right)^2 = \frac{(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2) \cos 2\varphi - (a + b)^2 \sin^2(\varphi + \alpha)}{a^2 + b^2 - (a^2 - b^2) \cos 2\varphi} \quad (4)$$

Die Resultierende aller theoretischen Druckkräfte verschwindet nach den allgemeinen Formeln oder aus geometrischen Gründen. Wohl aber bleibt, wie auch die Erfahrung lehrt, ein Moment, das den Zylinder mit der Hauptachse senkrecht zur Stromrichtung zu stellen strebt (vgl. Abschnitt 12). Seine Berechnung geschieht ohne Schwierigkeit vermittelt der in Abschnitt 14 entwickelten Blasius-Lagallyschen Formeln, wenn man die in Abschnitt 21 unter (5) und (9) gegebenen Reihenentwicklungen (in ihren Anfangsgliedern) benutzt. Man erhält dann aus der Geschwindigkeitsreihe

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} &= -v_0 \left(e^{i\alpha} - \frac{r_0^2}{z^2} e^{-i\alpha} + \dots \right) \left(1 + \frac{p^2}{z^2} + \dots \right) \\ &= -v_0 e^{i\alpha} + \frac{v_0 (r_0^2 e^{-i\alpha} - p^2 e^{i\alpha})}{z^2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

das Moment als Realteil folgenden Integrals

$$\left. \begin{aligned} M &= -\frac{\gamma}{2g} \Re \int \bar{v} z dz = 2\pi \frac{\gamma}{g} v_0^2 p^2 \sin 2\alpha \\ &= \frac{1}{2} \pi \frac{\gamma}{g} (a^2 - b^2) v_0^2 \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Das Drehmoment der Druckkräfte ist also mit dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, im übrigen nur von der linearen Exzentrizität der Ellipse abhängig. Alle Ellipsen der zu p gehörigen konfokalen Schar erfahren bei derselben Bewegungs- oder Anströmrichtung dasselbe Moment. Zu den entsprechenden Zylinderflächen gehört auch die unendlich dünne und unendlich lange Platte von der Breite $4p = 4r_0$.

3. Um die aus der Potentialströmung zu bestimmende Druckverteilung mit der Messung zu vergleichen, wählen wir als Zylinderquerschnitt eine sog. Strebenform mit abgerundetem Kopf und zugespitztem Ende, die sich der wirklich stattfindenden Strömung besser anpaßt und daher einen kleineren Formwiderstand liefert als Kreis und Ellipse. Solche Konturen könnte man dadurch aus dem Kreise gewinnen, daß man die im vorigen Abschnitt verwendete konforme Abbildung beibehält, nur den Mittelpunkt des Grundkreises um eine bestimmtes Maß aus dem Anfangspunkt herausrückt. Etwas allgemeiner ist die von Karman-Trefftz¹ eingeführte Transformation

$$\frac{z - kl}{z + kl} = \left(\frac{\zeta - l}{\zeta + l} \right)^k, \quad (7)$$

die der Reihenentwicklung

$$\zeta = z - \frac{(k^2 - 1)l^2}{3k^2 z} - \dots \quad (8)$$

entspricht. Wenn der Grundkreis, dessen Mittelpunkt auf der reellen Achse liegen möge, durch den Punkt $\zeta = -l$ hindurchgeht und den Punkt $\zeta = +l$ einschließt, so transformiert er sich vermöge (7) in ein zur x -Achse symmetrisches Strebenprofil, dessen scharfe Kante in $z = -kl$ liegt und das den Punkt $z = +kl$ einschließt (Abb. 50). Der Kantenwinkel, den die Tangenten im Punkte $z = -kl$ miteinander bilden, beträgt $\delta = (2 - k)\pi$. Wann man die Fahrstrahlen eines Punktes, resp. seines Bildpunktes nach den Grundpunkten in beiden Ebenen $r_1 r_2$ resp. $\varrho_1 \varrho_2$ und die betreffenden Winkelabstände ψ und ψ' nennt, so hat man

$$\frac{r_1}{r_2} = \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} \right)^k; \quad \psi = k\psi', \quad (9)$$

¹ Vgl. v. Karman-Trefftz, Potentialströmung um gegebene Tragflächen-Querschnitte, Z. Flugtechn. 1918, S. 111 vgl. auch Wilh. Müller, Z. ang. Math. Mech. 1924, S. 213—231.

woraus eine einfache Konstruktion resultiert. Durch Logarithmieren und Differenzieren von (9) ergibt sich ferner

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{z - kl} - \frac{1}{z + kl} &= k \frac{d\zeta}{dz} \left(\frac{1}{\zeta - l} - \frac{1}{\zeta + l} \right) \\ \frac{d\zeta}{dz} &= \frac{\zeta^2 - l^2}{z^2 - k^2 l^2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\text{oder} \quad \frac{d\zeta}{dz} = \frac{\zeta^2 - l^2}{z^2 - k^2 l^2} \quad (11)$$

Daraus folgt z. B. für die absolute Strömungsgeschwindigkeit in der Ebene der Ausdruck

$$|\bar{v}| = \left| \frac{dW}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} \right| = \frac{dW}{d\zeta} \cdot \frac{\varrho_1 \varrho_2}{r_1 r_2}$$

Wenn man für die Geschwindigkeit am Kreis den Wert $v = 2 v_0 \sin \varphi$ einführt, so kommt

$$|\bar{v}| = 2 v_0 \sin \varphi \cdot \frac{\varrho_1 \varrho_2}{r_1 r_2} \quad (12)$$

Diese Formel kann dazu dienen, die Druckverteilung an der Strebe durch Abgreifen der Abstände ϱ und r entsprechender Punkte zu bestimmen.

Um den bei der Messung sich geltend machenden Einfluß der Wandung auf das Strömungsfeld in Rechnung zu ziehen, kann man nach H. Ermisch¹ die Abbildung (7) auf die früher betrachtete Strömung eines kleinen Kreiszylinders in einem Kanal anwenden. Dabei bleibt allerdings die Wandlinie des Kanals bei der Abbildung in der z -Ebene keine Gerade, sondern geht in eine schwachgekrümmte Kurve über. Für die Bestimmung der Druckverteilung kann man von dieser geringfügigen Deformation absehen.

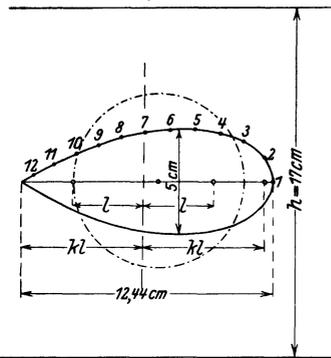


Abb. 50. Strebenprofil nach Ermisch.

Die in den Versuchen von Ermisch verwendete Strebe (Abb. 50) hatte eine größte Breite von 12,44 cm mit einem durch $k = 1,722$ bestimmten Kantenwinkel; der Wandabstand betrug $h = 17$ cm. Sie hatte 17 Meßlöcher (entsprechend den in der Abbildung bezeichneten Punkten) zur Aufnahme von Kupferröhrchen resp. von Schläuchen, die an ein Rohr mit 18 Hähnchen angeschlossen waren, um den Druck zum Meßinstrument weiterzuleiten.

¹ Abhandlungen Aerod. Inst. Aachen, Heft 6, S. 30 ff., 1927.

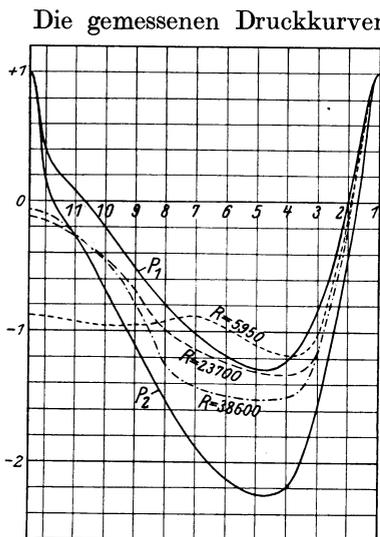


Abb. 51. Druckverteilung an einer Strebe bei verschiedenen Kennzahlen. P_1 Potentialdrücke im unbegrenzten, P_2 im begrenzten Strom.

IV. Stromfelder mit freien und gebundenen Wirbeln.

22. Systeme paralleler Stabwirbel.

1. Wenn man bei dem in dem letzten Paragraphen betrachteten Strömungsbildern die Stromlinien und Potentiallinien (Stromfunktionen und Potentialfunktionen) mit einander vertauscht, so gewinnt man eine Reihe von physikalisch neuen Stromfeldern, die von Wirbeln und Wirbelflächen durchsetzt sind. So gibt z. B. die Umkehrung der Verbindung eines Quellfadens mit einer Parallelströmung einen mit der Quelle zusammenfallenden Wirbelfaden innerhalb einer gegen die frühere um 90° gedrehten Parallelströmung (Abb. 52).

Wir wollen hier zunächst zur Vorbereitung auf die folgenden Ausführungen den allgemeinen ebenen Fall einer beliebigen (endlichen) Anzahl von parallelen Stabwirbeln ins Auge fassen, für den schon Kirchhoff¹ in seiner Mechanik eine Reihe von wichtigen Beziehungen abgeleitet hat, die später von M. Lagally² erweitert worden sind. Da ein Stabwirbel die Bedeutung eines Vektors hat, der in die Achsenrichtung fällt, also senkrecht zur Operationsebene steht, so ergibt sich ohne weiteres, daß die Sätze über parallele Kräfte, also auch die Schwerpunktssätze auf das System anwendbar sind. Der Schwerpunkt des

¹ Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik, 4. Aufl. S. 258 u. f.

² M. Lagally, Über die Bewegung einzelner Wirbel in einer strömenden Flüssigkeit, Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wiss. 1914, S. 377.

Wirbelsystems fällt mit dem Massenschwerpunkt zusammen, wenn man jedem Wirbelspurpunkt eine der Wirbelstärke oder der Zirkulation gleiche Masse zuordnet. Dann sieht man, auch durch direkte Rechnung, daß dieser Schwerpunkt des Wirbelsystems sich so bewegt, als ob die Wirbel nicht vorhanden wären. Wenn wir also z. B. das Wirbelsystem mit einer wirbelfreien, etwa einer Parallelströmung zusammensetzen, so folgt die Bewegung des Schwerpunktes nur der Richtung der Parallelströmung. Ist das Wirbelsystem allein vorhanden, so bleibt der Schwerpunkt in Ruhe. Zwei entgegengesetzt gleiche Wirbel bewegen sich z. B. translatorisch senkrecht zu ihrer Verbindungslinie (Abb. 52).

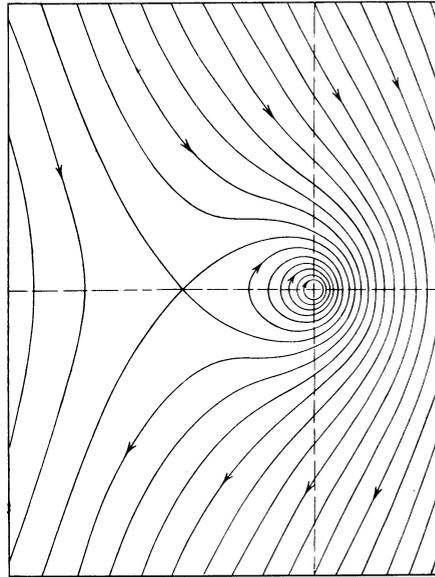


Abb. 52. Wirbel in einer Parallelströmung.

Wenn der Potentialströmung die komplexe Funktion $W_0(z)$ entspricht und z_k die Spurpunkte der Wirbelfäden sind, so wird das Gesamtpotential

$$W = W_0 + i \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma_k}{2\pi} \cdot \ln(z - z_k). \quad (1)$$

Sei z. B. $W_0 = v_0 z$, so ist die Geschwindigkeit des einzelnen Wirbels z_i

$$\bar{v} = v_0 + \frac{1}{2\pi} i \sum \frac{\Gamma_k}{z_i - z_k}. \quad (2)$$

Die Relativbewegung des ganzen Wirbelsystems wird also durch die Strömung nicht geändert: Das System schreitet als Ganzes mit der Geschwindigkeit der Strömung gleichmäßig fort.

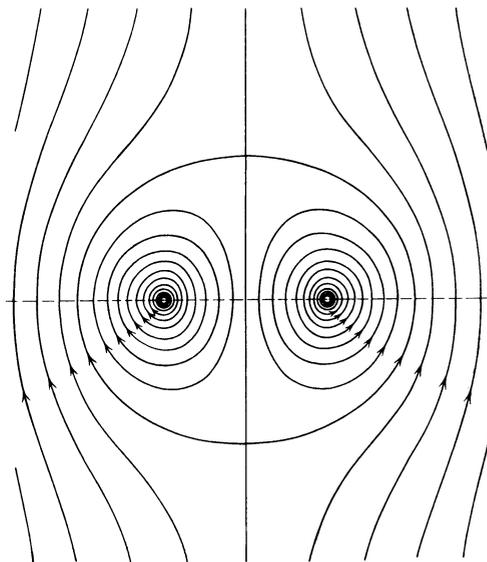


Abb. 53. Relativströmung um zwei freischwimmende Gegenwirbel.

2. Wir fragen, wie die Strömung allgemein beschaffen sein muß, in der der Schwerpunkt z_0 eines Wirbelsystems auf eine Stromlinie mit der durch das Potential W_0 bestimmten Geschwindigkeit fortschreitet.

Da

$$\bar{v}_0 \sum_{i=1}^n \Gamma_i = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \left(\frac{dW_0}{dz} \right)_{z=z_i} = \left(\frac{dW_0}{dz} \right)_{z=z_0} \cdot \sum_{i=1}^n \Gamma_i \quad (3)$$

wird, so muß $\frac{dW_0}{dz}$ eine lineare Funktion in z , W_0 also vom 2. Grade sein

$$W_0 = c_2 z^2 + c_1 z.$$

Durch eine Transformation kann W_0 auf die Form

$$W_0 = c_2 z^2 = c_2 (x^2 - y^2) + 2i c_2 + y$$

gebracht werden, und man sieht, daß, c_2 als reell vorausgesetzt, die Flüssigkeit auf gleichseitigen Hyperbeln sich bewegt, deren Asymptoten mit den Achsen des neuen Bezugssystem zusammenfallen. Die Strömung kann auch als Flüssigkeitsbewegung im Raum eines rechten Winkels aufgefaßt werden.

3. Von den Differentialgleichungen der Wirbelbahnen

$$\bar{v}_i = \left(\frac{dW_0}{dz} \right)_{z=z_i} + \frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^n \Gamma_k \frac{1}{z_i - z_k} \quad (4)$$

läßt sich stets ein Integral finden, das mit einem der von Kirchhoff angegebenen Integrale verwandt ist, wenn die überlagerte Potentialströmung stationär ist.

Kirchhoff führt die Funktion ein

$$P = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \Gamma_i \Gamma_k \ln \varrho_{ik},$$

wo ϱ_{ik} den Abstand des i -ten und k -ten Wirbels bedeutet und i und k als verschieden vorausgesetzt sind. Setzt man ferner

$$Q = \sum_1^n \Gamma_i (\Psi_0)_{x=x_i, y=y_i},$$

so lassen sich die Differentialgleichungen der Wirbelbahn schreiben

$$\Gamma_i \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial(P+Q)}{\partial y_i}; \quad \Gamma_i \frac{dy_i}{dt} = - \frac{\partial(P+Q)}{\partial x_i}.$$

Daraus folgt dann

$$\frac{\partial(P+Q)}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial(P+Q)}{\partial y_i} dy_i = 0.$$

Wenn man summiert über alle Wirbel, so folgt das Integral der Differentialgleichungen

$$P + Q = \text{konst.} \quad (5)$$

4. Wir betrachten z. B. die Bewegung eines Wirbelspaares, das sich in einer zur x -Achse symmetrischen Strömung befindet. Es sei $x_1 = x_2$,

$$y_1 = -y_2,$$

ferner

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_1 \\ y=-y_1}} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}}; \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} = -\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_1 \\ y=-y_1}}.$$

Dann wird

$$(\Psi)_{\substack{x=x_1 \\ y=y_1}} = -(\Psi)_{\substack{x=x_1 \\ y=-y_1}}$$

oder

$$\Psi(x_1, y_1) = -\Psi(x_1, -y_1).$$

Daher erhalten wir aus der Gleichung

$$2\pi \Gamma_1 (\Psi(x_1, y_1) - \Psi(x_1, -y_1)) + \Gamma_1^2 \ln 2y_1 = \text{konst}$$

oder

$$2\pi \Psi(x_1, y_1) + \Gamma_1 \ln y_1 = \text{konst} \quad (6)$$

als Gleichung der Wirbelbahn in der positiven Halbebene.

Der andere Wirbel bewegt sich auf einer zur x -Achse symmetrisch gelegenen Bahn. Die Gleichung stellt gleichzeitig die Bahn eines einzelnen Wirbels vor, der sich in einer beliebigen, durch eine feste Wand begrenzten stationären Strömung bewegt. Das hierher gehörige Beispiel eines Wirbelspaares hinter einem Kreiszyylinder wird uns noch ausführlich beschäftigen.

5. Einen weiteren, für spätere Verwendung wichtigen Fall erhalten wir, wenn wir eine Anzahl n von gleichen und gleichsinnigen Wirbeln äquidistant auf einem Kreise vom Radius R verteilen. Wenn man dann die reelle Achse vom Mittelpunkt des Kreises durch einen der Wirbel legt, so lautet die komplexe Funktion der Wirbelströmung¹

$$W = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z^n - R^n) \quad (7)$$

und die komplexe Geschwindigkeitsfunktion

$$\frac{dW}{dz} = \bar{v} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{n z^{n-1}}{z^n - R^n}. \quad (8)$$

Man sieht, daß der Anfangspunkt als Schwerpunkt des Systems und der unendlich ferne Punkt Ruhepunkte der Strömung sind. Das Stromfeld läßt sich am besten übersehen, wenn man die ausgezeichnete Stromlinie (Rosenkurve)

$$r^n = 2R^n \cos n\varphi$$

heraushebt, die im Mittelpunkt einen n -fachen Punkt hat und die bei-

¹ Wilh. Müller, Wirbelschicht und Zirkulation. Z. techn. Phys. 1924, S. 450.
Müller, Math. Strömungslehre.

den Typen von Stromlinien voneinander trennt, diejenigen, welche die einzelnen Wirbel in geschlossenen Bahnen und diejenigen, welche das ganze System einschließen (Abb. 54). Um die Bewegung eines Wirbels durch die übrigen, also etwa des in $z = R$ gelegenen Wirbels zu erhalten, muß man

$$W' = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z^n - R^n}{z - R}$$

differenzieren. Man erhält dann nach Auswertung des zunächst für $z = R$ unbestimmt erscheinenden Ausdrucks

$$\bar{v}' = \left(\frac{dW'}{dz} \right)_{z=R} = \frac{i\Gamma(n-1)}{2\pi R}. \quad (9)$$

Jeder Wirbel bewegt sich also tangential zum Grundkreis oder das ganze Wirbelsystem dreht sich um den Mittelpunkt mit einer Geschwindigkeit $\frac{\Gamma(n-1)}{2\pi R}$, die als erzeugt gedacht werden kann von einem mit den Umfangswirbeln gleichsinnigen Zentralwirbel von der Stärke $\frac{\Gamma(n-1)}{2}$.

Je größer n wird, desto mehr nähert sich der Wert dieser Wirbelstärke der Hälfte der Gesamtzirkulation des Systems.

6. Wenn sich ein zylindrischer Körper durch eine Flüssigkeit bewegt, so bildet sich hinter ihm eine sog. Wirbelschleppe, die sich aus vielen nebeneinander geordneten Wirbelgebilden zusammensetzt.

Wir wollen zunächst von dem erzeugenden Körper ganz absehen und den Fall einer unendlich langen geraden Reihe von gleichsinnigen und gleichstarken Wirbeln betrachten. Wenn der Abstand der Wirbel l ist und die Reihe der reellen Achse parallel geht, ferner ein Wirbelpunkt die Koordinate z_0 hat, so haben wir die komplexe Stromfunktion

$$W = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \prod_{-\infty}^{+\infty} (z - z_0 - \lambda l) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln (z - z_0) \prod_{\lambda=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(z - z_0)^2}{\lambda^2 l^2} \right) (-\lambda^2 l^2) \quad (10)$$

wo Π das Zeichen für die Produktenbildung bedeutet.

Beachtet man die allgemeine Darstellung der sin-Funktion als unendliches Produkt

$$\sin x = x \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 \lambda^2} \right)$$

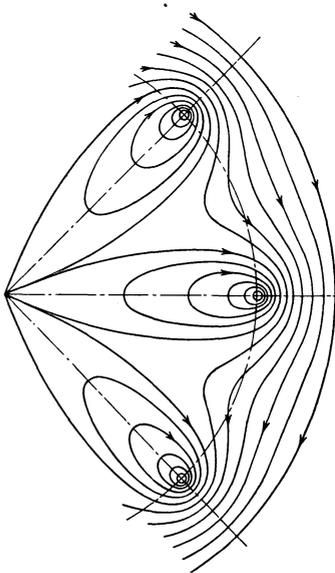


Abb. 54. System äquidistanter Wirbel auf einem Kreise.

so erhält man aus (1), von einem konstanten Faktor abgesehen

$$W = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \sin \frac{(z - z_0)\pi}{l} \tag{11}$$

und für die Geschwindigkeit der Strömung in einem Feldpunkt

$$\bar{v} = \frac{dW}{dz} = \frac{i\Gamma}{2l} \operatorname{ctg} \frac{(z - z_0)\pi}{l}, \tag{12}$$

Ausdrücke, die durch Trennung des reellen vom imaginären Teil und Einführung der hyperbolischen Funktionen leicht umgeformt werden können.

Für das System der Stromlinien das angenähert in der Abb. 55 dargestellt ist, erhält man, wie der Leser leicht bestätigen wird, die Gleichung

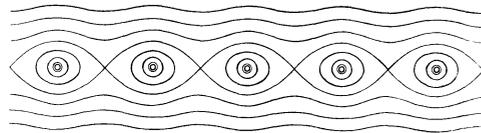


Abb. 55. Unendliche Reihe gleichsinniger Wirbel.

$$\operatorname{Co} \left\{ \frac{2\pi y}{l} - \cos \frac{2\pi x}{l} = e^c, \tag{13}$$

wobei c die nach einer arithmetischen Reihe zu- oder abnehmende Konstante bedeutet.

Da jeder Wirbel, wie die Gleichung (12) zeigt, durch das Feld der übrigen die Geschwindigkeit Null erhält, so befindet sich die Reihe im Gleichgewicht. Eine andere Frage ist jedoch die nach der Art dieses Gleichgewichts d. h. ob nach einer kleinen Störung oder Verschiebung die Entfernung aus dem Gleichgewicht sich vergrößert oder ob das Gleichgewicht sich von selbst wiederherstellt. Die nähere Untersuchung, die hier nicht reproduziert werden soll, hat ergeben, daß der Fall einer Wirbelreihe instabil ist.

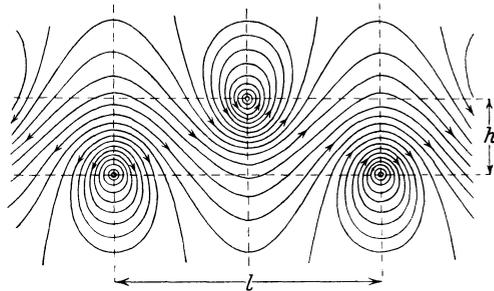


Abb. 56. System der Kármánschen Wirbelstraßen.

7. Unter den möglichen Doppelwirbelstraßen ist besonders der Fall zweier auf Lücke stehenden parallelen und gegensinnigen Wirbelreihen von Bedeutung (Abb. 56). Wenn der Abstand der Wirbel einer Reihe wieder $= l$ und der Abstand beider Reihen $= h$ gesetzt wird, wenn ferner der Anfangspunkt auf der Mittellinie zwischen beiden Reihen auf einer Senkrechten liegt, die von den nächsten Wirbelzentren

die Abstände $\pm \frac{l}{4}$ hat, dann haben die Wirbel der beiden Reihen die Koordinaten

$$\pm \left(\frac{l}{4} + i \frac{h}{2} \right) + \lambda l = \pm z_0 + \lambda l$$

wo λ alle Werte der Zahlenreihe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, und wir erhalten als komplexe Stromfunktion des Wirbelsystems

$$W = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\sin(z - z_0) \frac{\pi}{l}}{\sin(z_0 + z) \frac{\pi}{l}} \quad (14)$$

mit der Feldgeschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{i\Gamma}{2l} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi}{l} (z - z_0) - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l} (z + z_0) \right]. \quad (15)$$

Die Geschwindigkeit eines Wirbels, hervorgerufen durch die beiden Reihen, ist gleich der von der fremden Reihe hervorgerufenen Geschwindigkeit, da einem Wirbelpunkt durch die eigene Reihe keine Bewegung erteilt wird. Es ergibt sich also, daß das ganze System in der x -Richtung mit der Geschwindigkeit

$$u = \frac{i\Gamma}{2l} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l} \left(\frac{l}{2} + i h \right) = \frac{\Gamma}{2l} \Im \frac{\pi h}{l} \quad (16)$$

fortschreitet. Von Karman¹ stammt der Nachweis, der hier nicht wiederholt werden soll², daß eine und nur eine Verhältniszahl $\frac{h}{l} = 0,2806$ existiert, bei der das System der beiden Wirbelstraßen nicht labil ist, obwohl natürlich auch hier von einer absolut stabilen Lage nicht die Rede sein kann. In der Tat zeigen auch die von Karman und Rubach veröffentlichten Photographien des Strömungsbildes hinter einem durch ruhendes Wasser geschleppten Körper eine Anordnung von Wirbelreihen, welche ungefähr diesem Verhältnis entspricht. Es soll später gezeigt werden, wie man aus dem Impuls dieses quasi-stabilen Wirbelsystems den Widerstand eines zylindrischen Körpers berechnen kann.

23. Wirbelschichten.

1. Zylindrische Schichten. Wenn die reihenweise angeordneten Wirbelfäden unendlich dicht zusammenrücken, so daß das Produkt aus Wirbelstärke und Abstand einem endlichen Werte zustrebt, so entsteht eine längs einer (zylindrischen) Fläche ausgebreitete Wirbel-

¹ Th. v. Karman, Über den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes. Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen 1911—12. — v. Karman u. Rubach, Phys. Z. 13 (1912), S. 49—59.

² Vgl. auch Fuchs u. Hopf, Aerodynamik, S. 160ff.

schicht (Abb. 57). Faßt man die Wirbelbelegung einer solchen Fläche resp. der entsprechenden Kurve in der Ebene nach Analogie der Massenbelegung auf, so ergibt sich ohne weiteres die Berechtigung der übertragenen Begriffe wie Dichte der Wirbelbelegung oder Schwerpunkt einer kurvenförmigen Wirbelschicht als Spur einer mit elementaren geradlinigen Wirbel-fäden belegten zylindrischen Schicht.

Lassen wir z. B. die Zahl n der äquidistant auf einem Kreise angeordneten Wirbel so zunehmen und die Zirkulation eines Wirbels so abnehmen, daß $n\Gamma$ endlich bleibt, so wird die Dichte γ der Belegung längs des Umfanges konstant, und zwar

$$\gamma = \frac{n\Gamma}{2\pi R}.$$

Die auf ein Element $Rd\varphi$ entfallende Zirkulation wird dann

$$\gamma R d\varphi.$$

Wenn man den Grenzübergang ($n \rightarrow \infty$) an den früher gegebenen Formeln vornimmt, so erhält man aber für einen außerhalb des Kreises gelegenen Punkt

$$\bar{v} = \left(\frac{in\Gamma}{2\pi} \frac{z^{n-1}}{(z^n - R^n)} \right)_{n=\infty} = \frac{i\gamma R}{z}.$$

Für einen inneren Punkt $|z| < R$ dagegen wird

$$\bar{v} = 0,$$

d. h. im Äußeren des Kreises ist die Strömung identisch mit der Strömung eines im Mittelpunkt konzentrierten Wirbels von der Stärke der Gesamtschicht; im Inneren dagegen ist Ruhe. Für einen Punkt $z = Re^{i\varphi}$ der Wirbelschicht ergibt sich die Geschwindigkeit zu

$$\bar{v} = \frac{i\gamma}{2} e^{-i\varphi}.$$

Die Wirbelschicht bewegt sich also in sich selbst mit einer Geschwindigkeit, die derjenigen gleich ist, die ein im Mittelpunkt gelegener Wirbel hervorrufen würde, dessen Stärke halb so groß ist wie die Gesamtstärke der Schicht.

Dieselben Resultate lassen sich, wie ich in der zitierten Arbeit¹ gezeigt habe, auch direkt mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes

¹ Wilh. Müller, Wirbelschicht u. Zirkulation, a. a. O. S. 451.

ableiten, wenn man das komplexe Potential

$$W = \frac{iR\gamma}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(z - Re^{i\varphi}) d\varphi \quad (1)$$

durch die Substitution $\zeta = Re^{i\varphi}$, $d\varphi = \frac{d\zeta}{i\zeta}$ transformiert. Es zeigt sich dann z. B., daß W für einen inneren Punkt konstant wird. Da also das Innere des Kreises ein absolut toter Raum ist, so kann man den Kreis als Schnittgrenze eines zylindrischen Hindernisses und den Ausdruck für W als Potential der Zirkulationsströmung um einen Kreiszyylinder auffassen, die als durch eine längs des Randes ausgebreitete Wirbelschicht verursacht gedacht werden kann¹. Die wirbelnden Flüssigkeitselemente verhalten sich, wie Lagally bemerkt, wie kleine Räder, die auf dem Kreise rollen und auf denen die wirbelfreie Flüssigkeit mitgeführt wird. Die kreisförmige Wirbelschicht kann zum Aufbau weiterer Strömungen benutzt werden. Wenn man z. B. zwei konzentrische Kreise mit gleichen und entgegengesetzten Schichten belegt, so resultiert die Strömung in einer Ringfläche. Zum Studium weiterer Einzelheiten muß auf die Arbeit von M. Lagally verwiesen werden.

2. Ebene Wirbelschichten. Die Formeln für die ebene Wirbelschicht ergeben sich durch einen leichten Grenzübergang aus den entsprechenden, in Abschnitt 22 gegebenen Formeln für die unendlich geradlinige Reihe von äquidistanten Stabwirbeln. Einfacher erhält man auf direktem Wege, wenn ξ die Abszisse eines Punktes der in die x -Achse fallenden Spur einer im positiven Sinne drehenden Wirbelschicht bedeutet,

$$W = \frac{i\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(z - \xi) d\xi; \quad \bar{v} = \frac{i\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{z - \xi} = \pm \frac{\gamma}{2}. \quad (2)$$

Die Flüssigkeit strömt also beiderseits der Schicht mit konstanter Geschwindigkeit $\frac{\gamma}{2}$ in entgegengesetzten Richtungen. Wenn man die Schichtströmungen mit einer gleichmäßigen der x -Richtung folgenden Parallelströmung $W = v_0 z$ überlagert, so kann man die Wirbeldichte γ und die Geschwindigkeit v_0 so bestimmen, daß auf beiden Seiten der Schicht vorgeschriebene Geschwindigkeiten herrschen, daß z. B. die Bewegung in der einen Halbebene verschwindet. Läßt man ebenso die beiden oben betrachteten gegenläufigen Wirbelstraßen in zwei entsprechende Schichten übergehen, so erhält man die Bewegung eines geradlinigen Strahles in einer unbegrenzten Flüssigkeit, und die am Rand auftretenden Wirbel können wieder als Ursache der Bewegung

¹ Vgl. M. Lagally, Zur Theorie der Wirbelschichten, Sitzungsberichte der bayr. Akad. d. Wiss., 1915, S. 85.

gelten. Ein solcher Strahl entsteht etwa dadurch, daß man einen sehr langen, von parallelen Wänden begrenzten Körper in der Flüssigkeit bewegt (Idealform des Kielwassers). Durch Hinzufügung einer Parallelströmung kann man z. B. die Geschwindigkeit des Strahles zum Verschwinden bringen (Idealform des toten Wassers hinter einem Hindernis).

3. Instabilität der ebenen Wirbelschicht. Wir wissen bereits, daß eine ebene gleichmäßige Wirbelschicht als Grenzfall einer unendlichen Reihe äquidistanter Stabwirbel nicht stabil sein kann, daß vielmehr die geringste Störung des Gleichgewichts sich mit der Zeit vergrößert. Es soll im folgenden im besonderen der Einfluß einer periodischen Störung im Anschluß an die Untersuchung von Lagally genauer verfolgt werden¹.

Wenn die ebene Spur der Schicht mit der x -Achse zusammenfällt, und wenn an der Stelle $x = \xi$ ein Ausschlag $\delta\eta = \varepsilon f(\xi)$ entsteht, wo ε eine kleine Größe sein möge, wo ferner die Wirbeldichte γ eine Änderung $\varepsilon g(\xi)$ erfährt, so ist das Potential der geänderten Strömung

$$W = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\gamma + \varepsilon g(\xi)) \ln(z - \xi - i\varepsilon f(\xi)) d\xi \quad (3)$$

und die Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\gamma + \varepsilon g(\xi)) \frac{d\xi}{z - \xi - i\varepsilon f(\xi)}. \quad (4)$$

Da in einem Punkte der Wirbelschicht selbst $y = \varepsilon f(x)$ ist, so wird die komplexe Geschwindigkeit, mit der sich die Schicht ändert

$$\bar{v}_0 = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\gamma + \varepsilon g(\xi)) \frac{d\xi}{x - \xi + i\varepsilon(f(x) - f(\xi))}. \quad (4a)$$

Die Funktion $f(x)$ soll im Endlichen überall endlich und stetig sein. An der Stelle $x = \xi$ haben dagegen die Ausdrücke unter dem Integralzeichen Pole 1. Ordnung. Diese Stellen sind von der Integration auszuschließen. Bei hinreichend kleinem ε läßt sich nun \bar{v}_0 folgendermaßen umformen.

$$\begin{aligned} \bar{v}_0 &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\gamma + \varepsilon g(\xi)) \left[\frac{1}{x - \xi} - \frac{i\varepsilon(f(x) - f(\xi))}{(x - \xi)^2} \right] d\xi \\ &= \frac{i\gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{x - \xi} + \frac{i\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\xi) d\xi}{x - \xi} + \frac{\gamma\xi}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) - f(\xi)}{(x - \xi)^2} d\xi. \end{aligned}$$

¹ M. Lagally, a. a. O. S. 95.

Das erste Integral verschwindet, und man erhält daher

$$\bar{v}_0 = \frac{\gamma \varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x) - f(\xi)}{(x - \xi)^2} d\xi + \frac{i \varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\xi) d\xi}{x - \xi}. \quad (5)$$

Die Komponente v_{0x} verschwindet, wenn $f(x) = f(\xi)$ ist an jeder Stelle $x = \xi$; dagegen wird $v_{0y} = 0$, wenn $g(\xi)$ an jeder Stelle Null ist. Daraus folgt, daß eine transversale Verschiebung der Wirbelteilchen eine longitudinale Bewegung und umgekehrt eine longitudinale Verschiebung der Teilchen einen transversalen Ausschlag zur Folge hat.

Wenn nun die Störungsfunktion periodischer Natur, also etwa von der Form

$$f(x) = \sin kx$$

ist, so wird

$$\bar{v}_0 = \frac{\gamma \varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin kx - \sin k\xi}{(x - \xi)^2} d\xi.$$

Mit der Substitution

$$kx = \tau, \quad k\xi = \alpha$$

erhält man

$$\bar{v}_0 = \frac{\gamma \varepsilon k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \tau - \sin \alpha}{(\tau - \alpha)^2} d\alpha. \quad (6)$$

Zerlegt man das Intervall von $-\infty$ bis $+\infty$ in Abschnitte von der Länge 2π , so ergibt sich

$$\bar{v}_0 = v_{0x} = \frac{\varepsilon \gamma k}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{\tau + 2n\pi}^{\tau + 2(n+1)\pi} \frac{\sin \tau - \sin \alpha}{(\tau - \alpha)^2} d\alpha.$$

Setzt man $\beta = \alpha - \tau - 2n\pi$ so wird

$$\begin{aligned} v_{0x} &= \frac{\gamma \varepsilon k}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \tau - \sin(\tau + \beta)}{(\beta + 2n\pi)^2} d\beta \\ &= \frac{\varepsilon \gamma k}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin \tau - \sin(\tau + \beta)) \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\beta + 2n\pi)^2} d\beta. \end{aligned}$$

Die weitere Auswertung des Integrals ergibt, da die Summe den Wert $\frac{1}{4} \sin^{-2} \frac{\beta}{2}$ hat

$$v_{0x} = \frac{\varepsilon \gamma k}{2} \sin kx. \quad (7)$$

Es tritt also eine longitudinale, dem transversalen Ausschlag proportionale Geschwindigkeit auf. Zur Zeit δt wird die Gleichung der Wirbelschicht

$$y = \varepsilon \sin k \left(x + \frac{1}{2} \gamma k y \delta t \right). \quad (8)$$

Entwickelt man nach Potenzen von δt

$$y = \varepsilon \left[\sin kx + \frac{1}{2} \gamma k^2 y \delta t \cos kx + \dots \right]$$

und löst, in dem man nur die 1. Potenzen von δt berücksichtigt nach y auf, so kommt

$$y = \varepsilon \sin kx + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \gamma k^2 \delta t \sin kx \cos kx. \quad (8a)$$

Um weiter die Änderung der Wirbeldichte infolge longitudinaler Verschiebung zu untersuchen, so bedenke man, daß die auf die Längeneinheit bezogene Wirbelstärke γ unveränderlich sein muß, woraus folgt

$$\gamma(x) dx = \text{konst} \quad \text{oder} \quad \frac{\delta \gamma(x)}{\gamma(x) \delta t} + \frac{\delta dx}{dx \delta t} = 0 = \frac{\delta \gamma(x)}{\gamma(x) \delta t} + \frac{d \delta x}{dx \delta t}.$$

Wegen

$$\frac{\delta x}{\delta t} = v_{0x} \quad \text{und} \quad \frac{d v_{0x}}{dx} = \frac{\varepsilon \gamma k^2}{2} \cos kx$$

ergibt sich also

$$\delta \gamma(x) = -\frac{1}{2} \varepsilon \gamma^2 k^2 \cos kx \delta t. \quad (9)$$

Die größte Dichtigkeit tritt also an den Stellen $kx = \pi, 3\pi \dots (2n+1)\pi$ auf, die kleinste an den Stellen $kx = 0, 2\pi \dots 2n\pi$. Hier ändert die Geschwindigkeit das Vorzeichen, und zwar strömt die Flüssigkeit auf die ersteren Stellen von beiden Seiten zu, von den letzteren nach beiden Seiten weg. Die veränderte Dichte wird aber wieder die Strömungsgeschwindigkeit abändern. Die y -Komponente, die bisher Null war, erhält dabei nach (5) mit $g = -\frac{1}{2} \gamma^2 k^2 \cos kx \delta t$ und Benutzung der Gleichung

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} (\beta + 2n\pi)^{-1} = \frac{1}{2} \text{ctg} \frac{\beta}{2}$$

den Wert

$$v_{0y} = \frac{1}{4} \varepsilon \gamma^2 k^2 \sin kx \delta t. \quad (10)$$

Wir können also die gesamte Bewegung der Flüssigkeit dahin charakterisieren, daß eine transversale periodische Störung der Wirbelschicht eine longitudinale Verschiebung der Wirbelemente zur Folge

hat, die weiter eine periodische Störung der Wirbelbelegung und damit eine Verstärkung des ursprünglichen transversalen Ausschlags nach sich zieht. Die weiteren Konsequenzen dieser Anfangsbewegungen, die rechnerisch schwer zu bestimmen sind, werden jedenfalls die sein, daß die auftretenden Maximalstellen der Wirbeldichte immer mehr verstärkt werden, während die Wirbelung in den dazwischen liegenden Minimalstellen schließlich verschwindet. Die ganze Wirbelschicht löst sich daher schließlich in eine Reihe äquidistanter, gleichstarker Wirbel auf, wie sie bereits oben untersucht wurde.

V. Einfluß von Zirkulationen und Wirbeln auf den Strömungsdruck an zylindrischen Körpern.

24. Die Kräfte am bewegten Kreiszyylinder.

1. Die früher (Abschn. 18) betrachtete ideale Strömung um einen Kreiszyylinder, die vollständige Symmetrie in bezug auf eine zur Parallelstromrichtung durch den Mittelpunkt gezogene Senkrechte zeigte, stimmt mit der Wirklichkeit nur wenig überein. Die Beobachtung lehrt, daß zwar zu Beginn der Bewegung ein dem Idealzustand sehr nahekommendes Strömungsfeld entsteht, daß aber sehr bald die Umsetzung der Geschwindigkeitsenergie in Druckenergie auf der Hinterseite stark nachläßt, während zunächst zwei Wirbel von entgegengesetztem Drehsinn in unmittelbarer Nähe der Strömungsachse aus der Grenzschicht heraustreten und unter allmählicher Vergrößerung sowohl voneinander, wie vom Kreiszyylinder sich entfernen. In einem gewissen Abstand vom Zylinder wird das Wirbelpaar die symmetrische Lage zur Achse aufgeben, während gleichzeitig neue Wirbelspiralen nunmehr abwechselnd auf beiden Seiten sich ablösen. In einiger Entfernung hinter dem Zylinder schließen sich die abwandernden Wirbel zu einer Wirbelschleppe zusammen, die aus zwei etwa auf Lücke stehenden Reihen von Wirbeln mit entgegengesetztem Drehsinn bestehen, wie sie früher (Abschnitt 22) betrachtet wurden.

Zur Erklärung dieser Erscheinungen kann man in Ergänzung der bereits früher eingeführten Prandtlschen Überlegung die Theorie der Wirbelschichten heranziehen. Betrachtungen, wie sie F. Klein¹ und M. Lagally² anstellen, machen es wahrscheinlich, daß die senkrecht auf den Kreiszyylinder treffende Stromlinie dort in zwei gleiche, dem Sinne nach entgegengesetzte wirbelnde Schichten zerfällt, die auf der Hinterseite zusammentreffen. Die Annahme wird einerseits durch die Betrachtung des

¹ F. Klein, Über die Bildung v. Wirbeln in reibungslosen Flüssigkeiten. Z. Math. Phys. Bd. 58, S. 259—262 (1910).

² M. Lagally, Zur Theorie der Wirbelschichten, a. a. O. S. 89.

Systems der Kraftlinien (der absoluten Stromlinien) des Zylinders, andererseits durch die physikalische Verfolgung des Vorganges nahegelegt. Das Kraftliniensystem kann in der Tat, wie wir sahen, als erzeugt gedacht werden durch ein Doppelwirbelpaar im Mittelpunkt, dessen Achse senkrecht steht zur Bewegungsrichtung. Dieses Wirbelpaar ist wieder äquivalent mit zwei entgegengesetzten Wirbelschichten auf dem Kreiszyylinder, deren Stärke vom vorderen und hinteren Punkt bis zu den Endpunkten des Querdurchmessers zunimmt, in Verbindung mit einer Quellbelegung¹. Da sich die beiden Schichten selbst über die Oberfläche hinschieben, so treffen die jeweiligen Endwirbel hinten zusammen, vergrößern sich durch die nachdrängenden Elemente der Schicht und entfernen sich in der angegebenen und noch näher zu berechnenden Weise vom Zylinder. Dabei verschieben sich allmählich die Ablösungsstromlinien, welche die Wirbel umfassen, nach beiden Seiten von der Achse.

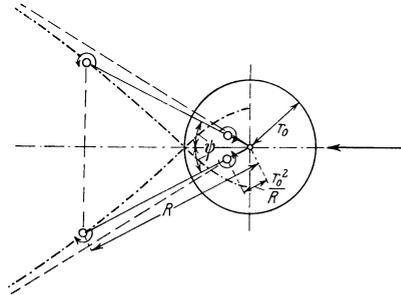


Abb. 58. Lage und Bahn des Wirbelpaares hinter einem Kreiszyylinder.

2. Wir sehen zunächst von der instationären Beschaffenheit des Bewegungsvorgangs hinter dem Zylinder ab und betrachten den Einfluß eines mittleren (allgemeinen) Wirbelpaares auf die Strömung und die Resultierende der auf den Zylinder ausgeübten Druckkräfte.

Sind die Koordinaten der Wirbelzentren $- R e^{i\psi}$ und $- R e^{-i\psi}$ so muß man nach dem bekannten Thomsonschen Prinzip die an dem Kreisumfang gespiegelten inneren Wirbel an den Stellen $-\frac{r_0^2}{R} e^{\pm i\psi}$ hinzufügen (Abb. 58), damit der Kreis in der Gesamtströmung Stromlinie bleibt. Die komplexe Stromfunktion, die die Parallelströmung und Wirbelströmung umfaßt, ist daher

$$W(z) = -v_0 \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{(z + R e^{i\psi}) \left(z + \frac{r_0^2}{R} e^{-i\psi} \right)}{\left(z + \frac{r_0^2}{R} e^{i\psi} \right) (z + R e^{-i\psi})}. \quad (1)$$

Die gespiegelte Geschwindigkeit \bar{v} in irgendeinem Punkte wird

$$\left. \begin{aligned} v_x - i v_y = & -v_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2} \right) \\ & + \frac{i\Gamma}{2\pi} \left[\frac{1}{z + R e^{i\psi}} - \frac{1}{z + R e^{-i\psi}} + \frac{1}{z + \frac{r_0^2}{R} e^{-i\psi}} - \frac{1}{z + \frac{r_0^2}{R} e^{i\psi}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

¹ Vgl. Wilh. Müller, Wirbelschichten und Zirkulation a. a. O. S. 455.

Die Strömungsgeschwindigkeit längs des Kreises ergibt sich nach früherem am einfachsten durch Einführung von Polarkoordinaten als negativer imaginärer Bestandteil der für $r = r_0$ gebildeten Ableitung

$$\frac{\partial W}{\partial r} = v_r - i v_\varphi.$$

Wenn wir die Abstände des Kreispunktes von den äußeren und inneren Wirbelpunkten einführen, also setzen

$$r_{1,2}^2 = r_0^2 + R^2 + 2 r_0 R \cos(\psi \pm \varphi),$$

$$r'_{1,2}^2 = r_0^2 + \frac{r_0^2}{R} + 2 r_0 \frac{r_0^2}{R} \cos(\psi \pm \varphi),$$

ferner die Beziehungen

$$\frac{r_1}{r'_1} = \frac{r_2}{r'_2} = \frac{R}{r_0}; \quad r_2^2 - r_1^2 = 4 r_0 R \sin \psi \sin \varphi$$

berücksichtigen, so erhalten wir nach einfacher Umformung

$$v_k = 2 \sin \varphi \left[v_0 - \frac{\Gamma \cdot R \sin \psi (R^2 - r_0^2)}{\pi r_1^2 r_2^2} \right]. \tag{3}$$

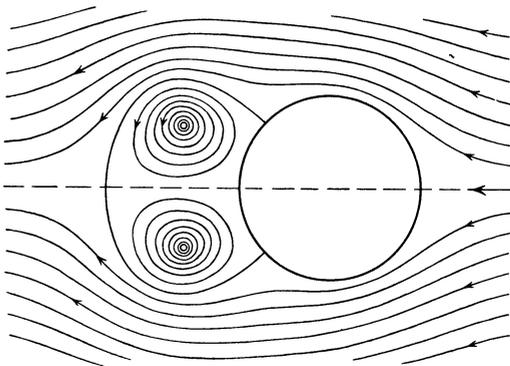


Abb. 59. Strömung um einen Kreiszyylinder und Wirbelpaar.

Man sieht also, daß die Geschwindigkeit gegenüber dem wirbelfreien Fall, absolut genommen, verringert wird und in vier Punkten des Kreises verschwindet. Die beiden außerhalb der x -Achse gelegenen Staupunkte, die der Gleichung

$$r_1^2 r_2^2 = \frac{\Gamma \cdot R \sin \psi (R^2 - r_0^2)}{\pi v_0}$$

genügen, liegen auf der hinteren Seite des Kreisumfanges nicht weit vom höchsten und tiefsten Punkt entfernt. Die von ihnen ausgehende Stromlinie umschließt das Wirbelgebiet und erscheint als Bestandteil der zerfallenden Kurve

$$\Psi = -v_0 y \left(\frac{r^2 - r_0^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \lg \frac{r_2 r'_1}{r_1 r'_2} = 0 \tag{4}$$

zu der auch die Achse $y = 0$ und der Kreis $r = r_0$ gehören (Abb. 59).

3. Um den auf den Kreiszyylinder wirkenden Strömungsdruck zu ermitteln, brauchen wir die Ausdrücke für die Geschwindigkeiten \bar{v}_1^* und \bar{v}_2^* der beiden äußeren Wirbelkerne

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_1^* &= -v_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2} e^{2i\psi} \right) + \frac{\Gamma}{4\pi R \sin \psi} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{R e^{i\psi}}{(R^2 - r_0^2)} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{R}{R^2 e^{-i\psi} - r_0^2 e^{i\psi}} \\ \bar{v}_2^* &= -v_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2} e^{-2i\psi} \right) + \frac{\Gamma}{4\pi R \sin \psi} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{R e^{-i\psi}}{(R^2 - r_0^2)} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{R}{R^2 e^{i\psi} - r_0^2 e^{-i\psi}} \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

Dann wird nach der Lagallyschen Formel (Abschnitt 13, (14))

$$\bar{P} = i \varrho \Gamma (\bar{v}_2^* - \bar{v}_1^*). \quad (6)$$

Der (ideale) Widerstand des Zylinders ist also der Stärke und der relativen Geschwindigkeit der beiden Wirbel direkt proportional.

Mit den Werten (5) ergibt sich aber hieraus

$$P_x = 2 \varrho v_0 \Gamma \frac{r_0^2}{R^2} \sin 2\psi - \frac{\varrho \Gamma^2 R \cos \psi}{\pi (R_2 - r_0^2)} + \frac{\varrho \Gamma^2 R \cos \psi (R^2 - r_0^2)}{\pi (R^4 + r_0^4 - 2 r_0^2 R^2 \cos 2\psi)}. \quad (7)$$

Dieser Ausdruck verschwindet, wenn \bar{v}_1^* und also auch \bar{v}_2^* zu Null werden. Setzt man nun den reellen und imaginären Ausdruck (7) für \bar{v}_1^* gleich Null, so ergeben sich, wie bereits L. Föppl¹ gezeigt hat, die beiden Gleichungen

$$2 R^2 \sin \psi = R^2 - r_0^2, \quad (8) \quad \frac{\Gamma}{2\pi} = 2 v_0 R \sin \psi \left(1 - \frac{r_0^4}{R^4}\right). \quad (9)$$

Die erste dieser Gleichungen stellt eine Kurve 4. Ordnung dar, auf der die Wirbel liegen müssen, damit der Strömungsdruck verschwindet, und die zweite Gleichung gibt den Wert der zugehörigen Zirkulation.

Die Beobachtung zeigt nun, daß die Zentren der beiden sich zunächst hinter dem Zylinder ausbildenden Wirbel bei ihrer Bewegung fast genau der Kurve (8) folgen, während ihre Stärke zunimmt. Wenn man bedenkt, daß im Gesamtwiderstand noch andere, hier nicht

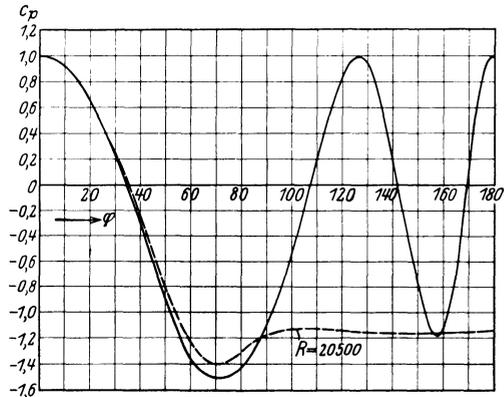


Abb. 60. Theoretischer Druckverlauf an einem Zylinder mit Wirbelpaar und Versuchskurve nach Ermisch.
 ——— Theorie — — — Versuch.

unmittelbar erfaßte Bestandteile enthalten sind, z. B. der Reibungswiderstand, so kann man das Verhalten des Wirbelsystems als Folge eines Gesetzes des kleinsten Widerstandes beurteilen.

Wenn man (8) und (9) berücksichtigt, so erhält man für die Geschwindigkeitsverteilung längs des Zylinders

$$\frac{v_k}{v_0} = 2 \sin \varphi \left[1 - \frac{(R^2 + r_0^2)(R^2 - r_0^2)^4}{R^6 \cdot r_1^2 r_2^2} \right]. \quad (10)$$

Die entsprechende Druckverteilung ist in der Abb. 60 mit der Messung von H. Ermisch zusammengestellt. Man sieht, daß nur im vorderen

¹ L. Föppl, Wirbelbewegung hinter einem Kreiszyylinder, Sitzungsber. d. bayr. Akademie d. Wiss. 1913, S. 1—17.

Teil des Zylinders bis etwa $\varphi = 90^\circ$ eine Verbesserung gegenüber dem wirbellosen Fall erzielt ist und daß das Verhältnis der größten Unterdrücke im vorderen und hinteren Teil mit der Messung einigermaßen zusammenstimmt. Nur von dem starken Druckwechsel, den die Theorie im Wirbelgebiet liefert, d. h. von der zweimaligen Rückverwandlung der Geschwindigkeit in positiven Druck läßt die Wirklichkeit nichts erkennen. Unter der Voraussetzung, daß die Zirkulation, was in der Berechnung der Kraft nicht berücksichtigt wurde, nach (11) veränderlich ist, ergibt sich der Widerstand nach Abschnitt 6 als zeitliche Änderung des relativ zum Kreiszyylinder gebildeten Impulswertes

$$P_x = -\varrho \frac{d}{dt} \int v_x d\sigma = -\varrho \frac{d}{dt} \iint \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx dy.$$

Das Integral ist dabei über das ganze, mit Flüssigkeit erfüllte Gebiet zu erstrecken. Die von L. Föppl durchgeführte Rechnung, die von dem Gaußeschen Integralsatz Gebrauch macht, ergibt für die x -Komponente des Impulses den Wert

$$J_x = \varrho \left[r_0^2 v_0 \pi + 3 \Gamma \sin \varphi \left(R - \frac{r_0^2}{R} \right) \right]. \quad (11)$$

Bei konstanter Geschwindigkeit ergibt sich daher

$$P_x = 3 \varrho \frac{d}{dt} \left(\sin \psi \left(R - \frac{r_0^2}{R} \right) \cdot \Gamma \right). \quad (12)$$

Der Auswertung der Differentiation müßte die Beobachtung der Bewegung der Wirbel zugrunde gelegt werden, worüber in der Originalarbeit v. Rubach¹ das Nähere nachzulesen ist. Von L. Föppl² stammt ferner der Nachweis, daß das Wirbelpaar wohl stabil ist für spiegelbildlich symmetrische, nicht aber für antisymmetrische Verschiebungen. Aus dieser Labilität erklärt sich die oben erwähnte Veränderung des Strömungsbildes, die eintritt, sobald die Wirbel einen gewissen Abstand vom Zylinder und voneinander erhalten haben. Auch der periodische Charakter des Vorganges leuchtet ohne weiteres ein, wenn man bedenkt, daß bei der geringsten Störung der Symmetrie die Ablösung der Endwirbel beider den Zylinder bedeckenden Schichten nicht mehr gleichzeitig erfolgen kann. Es entsteht schließlich eine Art schwingender Bewegung, deren Periode mit der Zeit zwischen zwei Ablösungen gleichsinniger Wirbel vom Zylinder zusammenfällt.

4. Man kann nun, um zu einem weiteren Ausdruck für den Widerstand zu gelangen, die in einiger Entfernung hinter dem Zylinder sich ausbildende quasistationäre Wirbelschlepe allein berücksichtigen, deren

¹ L. Rubach, Über die Entstehung u. Fortbewegung des Wirbelpaares hinter zylindr. Körpern. Forschungsarb. a. d. Geb. d. Ingenieurwesens, Heft 185, Berlin 1916.

² L. Föppl, a. a. O. S. 6.

Fortschreitgeschwindigkeit den Wert

$$u = \frac{\Gamma}{2l} \Im g \frac{h\pi}{l}$$

hat, wenn Γ die Zirkulation eines Wirbels und l den Abstand zweier Nachbarwirbel einer Reihe, h den Abstand der beiden Reihen bedeutet.

Wenn wir ein Koordinatensystem zugrunde legen, das die Bewegung der Wirbelstraßen mitmacht, so wird das Potential der Strömung vor dem Körper $-uz$, in großer Entfernung hinter dem Körper dagegen

$$W = -uz + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\sin -z(z_0) \frac{\pi}{l}}{\sin (z_0+z) \frac{\pi}{l}} = -uz + W_1. \quad (13)$$

Zur Bestimmung des Widerstandes wendet man den Impulssatz an auf einen Quader $ABCD$ von der Breite 1, dessen Spur in der xy -Ebene durch die Geraden $x = \xi_1$, $x = -\xi_2$, $y = \pm \eta$ begrenzt wird, die hinreichend weit zudenken sind und nicht durch einen Wirbelfaden hindurchgehen (Abb. 61).

Der gesamte Widerstand setzt sich dann aus zwei Teilen zusammen, die wir oben als stationären und instationären Widerstand unterschieden haben. Der erste Anteil, der der Voraussetzung entspricht, daß mit der Zeit keine neuen Wirbel sich vom Zylinder ablösen, berechnet sich als reeller Bestandteil des Blasius-Lagallyschen Integrals

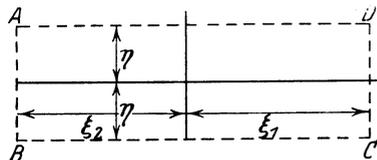


Abb. 61. Bezugssystem zur Impulsberechnung.

$$|P_x|_1 = \Re \frac{\varrho}{2} i \int \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz,$$

das längs der Seiten des Rechtecks $ABCD$ zu erstrecken ist. Wenn man voraussetzt, daß im Innern der Kontrollfläche gleichviel positive und negative Wirbel vorkommen, daß also die Gesamtzirkulation verschwindet, so ergibt sich, daß in dem Integral W durch W_1 ersetzt werden kann. In hinreichend großem Abstand hinter dem Körper ist aber

$$\frac{dW_1}{dz} = \frac{i\Gamma}{2l} \frac{\sin 2z_0 \frac{\pi}{l}}{\cos 2z_0 \frac{\pi}{l} - \cos 2z \frac{\pi}{l}}.$$

Wenn η unendlich groß wird, verschwinden nun die auf die Grenzen AD und BC sich beziehenden Integrale, und es bleibt

$$|P_x|_1 = \Re \frac{\varrho}{2} i \int_{-i\eta}^{+i\eta} \left(\frac{dW_1}{dz} \right)^2 dz. \quad (\eta \rightarrow \infty)$$

Wenn man das Integral auswertet¹, so ergibt sich für den stationären Widerstand der einfache Ausdruck

$$|P_x|_1 = \frac{\rho \Gamma}{l} \left(\frac{\Gamma}{2\pi} - u h \right). \quad (14)$$

Um den zweiten Bestandteil $|P_x|_2$ zu bestimmen, können wir annehmen, daß in der Zeit t_0 , in welcher der Zylinder um die Strecke l fortschreitet, ein neues Wirbelpaar entstanden ist, das einen Zuwachs zum Impuls bedingt. Man erhält dann als Komponente des Impulses für die Zeit t_0 (vgl. S. 53)

$$J_x = \Re \varrho \iint \frac{dW_1}{dz} dx dy = -i \Re \varrho \int_0^i dx [W_1]_{x-i\eta}^{x+i\eta}.$$

Wenn η wieder ∞ wird, so ergibt sich

$$J_x = \varrho \Gamma h.$$

Da der Körper die Strecke l mit der Geschwindigkeit $v_0 - u$ zurückgelegt hat, so wird die auf die Zeiteinheit bezogene mittlere Impulszunahme

$$|P_x|_2 = \varrho \Gamma (v_0 - u) \frac{h}{l}. \quad (15)$$

Damit ergibt sich der gesamte Widerstand zu

$$|P_x| = |P_x|_1 + |P_x|_2 = \varrho \Gamma (v_0 - 2u) \frac{h}{l} + \varrho \frac{\Gamma^2}{2\pi l}. \quad (16)$$

Wenn wir nun die stabile Anordnung mit $\frac{h}{l} = 0,2806$, $\text{Ctg} \frac{h\pi}{l} = \sqrt{2}$ zugrunde legen, so wird

$$P_x = \varrho l v_0^2 \left[0,7963 \frac{u}{v_0} - 0,3141 \left(\frac{u}{v_0} \right)^2 \right] \quad (17)$$

und der Beiwert für den Kreiszyylinder

$$c_w = \frac{l}{r_0} \left[0,7936 \frac{u}{v_0} - 0,314 \left(\frac{u}{v_0} \right)^2 \right]. \quad (18)$$

In den Originalversuchen von Karman und Rubach wurde beim Kreiszyylinder

$$\frac{u}{v_0} = 0,14, \quad l = 6,4 \text{ cm}, \quad h = 1,8 \text{ cm}, \quad 2r_0 = 1,5 \text{ cm}$$

gemessen. Damit erhält der Koeffizient c_w den Wert

$$c_w = 0,91$$

der mit dem Resultat der Messung sehr gute Übereinstimmung zeigt (vgl. Abb. 45).

¹ Vgl. Fuchs-Hopf, Aerodynamik. S. 167—169.

25. Die Kräfte am rotierenden Zylinder (Magnus-Effekt).

Ein Kreiszyylinder möge mit der Geschwindigkeit v_0 in der im Unendlichen ruhenden Flüssigkeit sich bewegen, während er um seine geometrische Achse eine gleichförmige Umdrehung ausführt. Man kann dann wieder den Zylinder als ruhend und eine seiner Bewegung entgegengesetzte Strömung in der Umgebung voraussetzen, die in großer Entfernung einen homogenen Charakter hat. Die Strömung, die schließlich entsteht, ist nicht mehr symmetrisch um die parallel zur Anströmrichtung durch den Mittelpunkt gezogene Achse, und es interessiert vor allem die Frage, welchen Einfluß die kinematische Asymmetrie auf den Strömungsdruck am Zylinder ausübt. Um die Kraftwirkung in einfachster Weise rechnerisch ermitteln zu können, müssen wir eine Betrachtung über die Vorgänge in der Grenzschicht, resp. über das Verhalten der dem Zylinder aufliegenden Wirbelschichten vorausschieken.

Es liegt zunächst nahe anzunehmen, daß die am Zylinder haftende Flüssigkeit durch Vermittlung der Reibungskräfte die weiter abliegenden Schichten so mitreißt, daß schließlich die ganze den Zylinder umgebende Flüssigkeit in eine kreisende Bewegung versetzt wird, die so beschaffen ist, als ob sie von einem im Mittelpunkt gelegenen Wirbel herrühren würde. Nach der von Prandtl begründeten Auffassung ist aber die innere Reibung zu klein, um als unmittelbare Ursache für das Zustandekommen dieser Zirkulation in Betracht kommen zu können. Sie wird vielmehr die Bedeutung eines nur auslösenden Faktors haben, indem die von der Reibungsschicht ausgehende Störung der gleichsam ursprünglich angestrebten Strömungsform eine sekundäre Wirbelbewegung hervorruft, als deren Reaktion die kreisende Strömung erscheint¹.

Die Grundbedingung für die Bildung und Anhäufung der Grenzschicht ist vor allem auf der gegenlaufenden Seite des Zylinders gegeben, auf der die Umfangsgeschwindigkeit der Anströmung entgegengesetzt gerichtet ist, während auf der andern mitlaufenden Seite die Grenzschicht mit dem Zylinder mitgerissen wird. Daher wird auch in diesem Falle zunächst die Wirbelablösung einseitig erfolgen.

Man sieht aber unmittelbar, daß die Grenzschicht auf jener Seite mit einer Wirbelschicht gleichbedeutend ist, deren Elemente eine der Umfangsgeschwindigkeit entgegengesetzte Drehung besitzen. Indem diese Schicht in Form einer Spirale in die freie Flüssigkeit übertritt und sich schließlich vom Zylinder ablöst, um einen größeren selbstständigen Wirbelkomplex zu bilden, wird eine Gegenbewegung erzeugt, die wir als Zirkulation bezeichnen.

¹ Vgl. für das folgende L. Prandtl, Magnuseffekt und Windkraftschiff. Die Naturwissenschaften 1925, S. 93—108. — A. Betz, Der Magnuseffekt, die Grundlage der Flettner-Walze. Zeitschr. d. V. d. I. 1925, S. 9—14.

Das kann man sich mathematisch dadurch verständlich machen, daß man, die Gültigkeit der Grundgesetze der Idealströmung vorausgesetzt, das Linienintegral der Geschwindigkeit für einen den Zylinder und den Grenzschichtwirbel umschließenden Weg $abcd$ gleich Null setzt (Abb. 62). Wenn man dann den Weg durch den zweimal entgegengesetzt zu durchlaufenden Schnitt bd in zwei Wege aufteilt, von denen der eine den Wirbel umgibt, so sieht man, daß wegen der Beziehung

$$\oint_{abda} v d\vec{s} + \oint_{cdbc} v d\vec{s} = 0,$$

die Zirkulation in der Tat der Stärke des abwandernden Wirbels entgegengesetzt gleich ist. Während sich immer neue Wirbel vom Zylinder ablösen und in das äußere Strömungsfeld übertreten, vergrößert sich die Zirkulation bis zu einem bestimmten Grenzwert, der von der

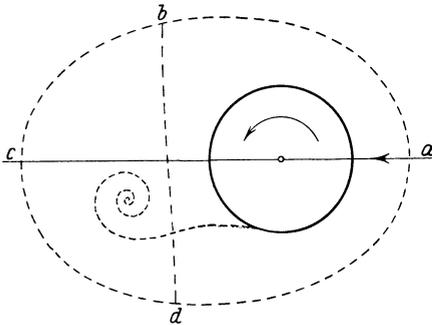


Abb. 62. Zur Entstehung der Zirkulation.

Drehgeschwindigkeit des Zylinders vorgeschrieben ist. Bei kleinerer Drehung werden zwar auch von der mitlaufenden Seite Wirbel abgehen; aber sie sind jedenfalls anfänglich bedeutend kleiner als die von der Gegenseite stammenden. Erst nach dem sich die volle Zirkulation ausgebildet hat, d. h. ein neuer Gleichgewichtszustand hergestellt ist, werden sich von beiden

Seiten des Zylinders abwechselnd entgegengesetzte Wirbelelemente ablösen, natürlich in unsymmetrischer Weise, die sich schließlich hinter dem Zylinder zu jener doppelten Reihe aneinanderfügen, die wir bereits beim rotationslosen Fall betrachtet haben.

Die Beziehung zwischen der Umfangsgeschwindigkeit des Zylinders und der Größe Γ der Zirkulation ist bisher theoretisch nicht geklärt worden. Erst auf Grund der mit dieser Zirkulation unmittelbar zusammenhängenden Kraftwirkung lassen sich nachträgliche experimentelle Feststellungen machen. Wenn man die Umfangsgeschwindigkeit des Zylinders u_0 nennt und

$$\Gamma = 2\pi r_0 u_0 \kappa = \kappa \Gamma_0 \tag{1}$$

setzt, so ist κ jedenfalls eine mit dem Verhältnis $\frac{u_0}{v_0}$ veränderliche, übrigens von der Reynoldsen Kennziffer unabhängige Zahl < 1 . Bei einem nicht rotierenden Zylinder ist bekanntlich die größte Strömungsgeschwindigkeit $2 v_0$. Wird nun $u_0 > 2 v_0$, so erleidet die Grenzschicht an der mitlaufenden Seite keine Bremsung, sie wird überall vorwärts gerissen, und daher ist nach Erreichung der zugehörigen Zirkulation

lation keine schädliche Ablösung mehr zu erwarten. Ferner darf auch auf der gegenlaufenden Seite die resultierende Geschwindigkeit nicht rückläufig sein, damit hier eine im Sinne der Zirkulationsbildung günstige Wirbelablösung zustande kommen kann. Die Grenze würde erreicht, sein, wenn gerade im Punkte $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ die Geschwindigkeit der Strömung = 0 wird. Dann würde aber im gegenüberliegenden Punkt eine Geschwindigkeit $4 v_0$ herrschen. Daraus ergibt sich, was auch durch die Versuche, z. B. von Acker et (vgl. Abb. 66) bestätigt wird, daß die größte Zirkulation etwa für das Verhältnis $\frac{u_0}{v_0} = 4$ erreicht wird.

Wir wollen zunächst die Zirkulation Γ um den Zylinder als eine gegebene Größe ansehen und das Strömungsfeld genauer untersuchen, das entsteht, wenn wir die reine Zirkulationsströmung mit der Parallelströmung überlagern. Die gesamte Strömung wird dann charakterisiert durch das Potential

$$W = -v_0 \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) - \frac{i \Gamma}{2\pi} \ln z, \tag{2}$$

aus dem die Geschwindigkeit in einem Feldpunkt z zu

$$\bar{v} = \frac{dW}{dz} = -v_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2} \right) - \frac{i \Gamma}{2\pi z} \tag{3}$$

sich ergibt. Für die Staupunkte der Strömung erhält man mit $z = r e^{i\varphi}$

$$-v_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} e^{-2i\varphi} \right) - \frac{i \Gamma}{2\pi r} e^{-i\varphi} = 0.$$

Wenn man diese Gleichung in den reellen und imaginären Teil zerlegt, so ergibt sich

$$r = r_0,$$

$$\Gamma = -4\pi r_0 v_0 \sin \varphi$$

oder, wenn wir $\varphi = -\varphi_0$
resp. $\pi + \varphi_0$ setzen

$$\Gamma = 4\pi r_0 v_0 \sin \varphi_0. \tag{4}$$

Man sieht also, daß die beiden auf dem Kreise liegenden Staupunkte gegenüber der Lage im Falle $\Gamma = 0$ um den Winkel nach der gegen-

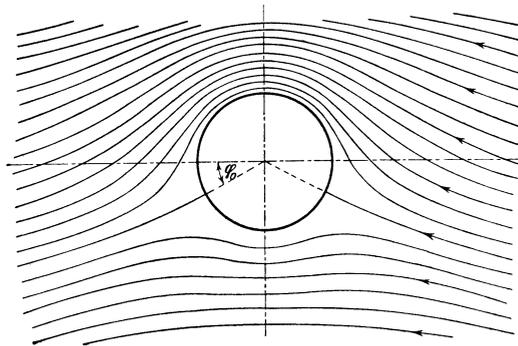


Abb. 63. Relative Stromlinien um einen bewegten Kreiszyylinder mit Zirkulation.

laufenden Seite hin verschoben erscheinen (Abb. 63). Reelle Staupunkte auf dem Zylinder erhält man allerdings nur, solange die Zirkulation $\Gamma < 4\pi r_0 v_0$ ist. Wenn $\Gamma = 4\pi r_0 v_0$ wird, fallen beide Punkte des Kreises im tiefsten Punkt zusammen (das ist dann der bereits oben

erwähnte Grenzfall); wenn dagegen $\Gamma > 4\pi r_0 v_0$ wird, verschwinden die Staupunkte auf dem Zylinder ganz; dafür tritt unterhalb des Punktes ein singulärer Ruhepunkt in der Strömung auf, in dem eine ausgezeichnete Stromlinie einen Doppelpunkt hat. Wenn der Winkel φ_0 , resp. die Lage der Staupunkte gegeben ist, etwa durch Beobachtung, so bestimmt sich die Größe der Zirkulation aus der Gleichung (4). Um die Absolutströmung des bewegten Zylinders zu bestimmen, muß man in dem Ausdruck für das Potential $v_0 z$ addieren. Es ergibt sich

$$W_a = -\frac{v_0 r_0^2}{z} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z. \tag{5}$$

Die zugehörigen Stromlinien findet man geometrisch nach der Maxwellschen Diagonalmethode aus dem System der absoluten Stromlinien des rotationsfreien Zylinders (Abschnitt 18) und der Schar von Kreisen um den Quellpunkt, deren Radien als e -Potenzen einer arithmetischen Reihe zu ermitteln sind (vgl. Abb. 64).

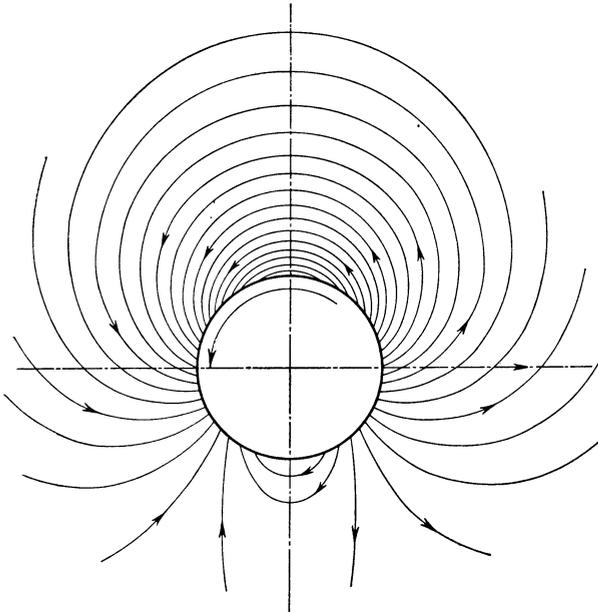


Abb. 64. Absolute Stromlinien (Feldlinien) um einen bewegten Kreiszyylinder mit Zirkulation.

linien des rotationsfreien Zylinders (Abschnitt 18) und der Schar von Kreisen um den Quellpunkt, deren Radien als e -Potenzen einer arithmetischen Reihe zu ermitteln sind (vgl. Abb. 64). Wenn man das Bild mit dem entsprechenden des Falles $\Gamma = 0$ vergleicht, so sieht man, daß die mit der Drehung gleichsinnige obere Umkreisung die untere Umkreisung stark verdrängt hat.

Wenn die Staupunkte in den unteren Punkt $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ zusammenfallen, so ist dieser zugleich Berührungspunkt der äußersten den Kreis treffenden Stromlinie und die untere Gegenzirkulation ist überhaupt verschwunden. Die weiter unterhalb verlaufenden Linien schließen den Kreis vollständig in sich ein. Natürlich gibt es auch in dem Falle, wo keine Staupunkte auf dem Kreise liegen, nur eine Umkreisungsrichtung für die Feldlinien, ebenso eine Schar von Stromlinien, welche den Kreis nicht treffen. Von der zeichnerischen Darstellung dieser beiden Fälle mußte abgesehen werden. Um die Druckver-

teilung zu finden, bedürfen wir der relativen Geschwindigkeit längs des Zylinders, für die der Ausdruck gilt

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} &= -2i v_0 e^{-i\varphi} (\sin \varphi + \sin \varphi_0) \\ \text{woraus} \quad |v| &= 2v_0 (\sin \varphi + \sin \varphi_0). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Aus der in dieser Gleichung zum Ausdruck kommenden seitlichen Unsymmetrie in der Geschwindigkeitsverteilung geht bereits hervor, daß oberhalb des Zylinders in der Umgebung des Punktes $z = ir_0$ Unterdruck, unterhalb um den Punkt $z = -ir_0$ dagegen Überdruck gegenüber der ungestörten Strömung herrscht, daß also auf dem Zylinder selbst eine senkrecht zur Anströmrichtung stehende Seitenkraft wirkt. Um die Größe dieser Kraft pro Längeneinheit des Zylinders zu ermitteln, benutzen wir die früher abgeleitete Blasius'sche Gleichung und erhalten sofort

$$P_x - iP_y = \frac{i\rho}{2} \int \bar{v}^2 dz = -i\rho \Gamma v_0; \quad P_y = \rho \Gamma v_0. \quad (7)$$

Die Kraft fällt also in der Tat in die Richtung der y -Achse und ist absolut genommen gleich dem Produkt aus der Dichte des Mediums, der Bewegungsgeschwindigkeit des Zylinders und der Zirkulation. Wenn man den Wert für die Zirkulation aus (4) einsetzt, so ergibt sich

$$P_y = P_a = 4\pi\rho r_0 v_0^2 \sin \varphi_0. \quad (7a)$$

Wenn man ferner die Rotationsgeschwindigkeit u_0 des Zylinders einführt, so kann man nach (1) setzen

$$P_a = 2\pi\rho \kappa r_0 u_0 v_0, \quad (8)$$

woraus für die „Auftriebszahl“ c_a der Wert sich ergibt

$$c_a = \frac{P_a}{\rho r_0 v_0^2} = 2\pi \kappa \frac{u_0}{v_0}. \quad (8a)$$

Diese in Verbindung mit der Rotation des Zylinders auftretende Kraftwirkung wird auch als Magnuseffekt bezeichnet nach dem Physiker Magnus, der zuerst im Jahre 1853 in Berlin, ausgehend von der damals schon bekannten Erscheinung der Abweichung rotierender Kugelgeschosse Messungen über die Seitenkräfte rotierender Zylinder veröffentlicht hat¹. Lord Rayleigh betrachtete zum ersten Male die ideale Strömung in der Umgebung eines rotierenden Zylinders und gab auch den Ausdruck für den resultierenden Strömungsdruck².

¹ G. Magnus, Über die Abweichung der Geschosse. Abh. d. Kgl. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1852 = Poggendorff Ann. Physik 88 I, 1853.

² L. Rayleigh, On the irregular flight of a Tennis-Ball. Scientific papers, Cambridge 1899, S. 344.

Die ersten genaueren quantitativen Messungen sind von M. Lafay im Jahre 1912 durchgeführt worden. Die ersten Göttinger Versuche scheiterten an technischen Schwierigkeiten, die erst im Jahre 1923 behoben wurden, besonders durch die Einführung kleiner schnellaufender Motoren von verhältnismäßig hoher Leistung (Durchmesser 42 mm, Länge 180 mm, Tourenzahl $n = 30000/\text{Min.}$, Leistung $N = 1 \text{ PS}$), die zunächst zum Antrieb der Schrauben von Flugzeugmodellen gebraucht wurden, aber auch für die Versuchswalzen sich ausgezeichnet bewährten. Um die in der Theorie angenommenen Verhältnisse der ebenen Strömung angenähert zu verwirklichen, wurde der drehbar aufgehängte Zylinder zwischen zwei parallele Wände gestellt. Schließlich wurde die Wirkung noch bedeutend verstärkt und das schädliche Einströmen von Nebenluft in das Unterdruckgebiet vermieden dadurch, daß man auf den Vorschlag von Prandtl an den Zylinderenden Scheiben anbrachte, die mit dem Zylinder umliefen (Abb. 65).

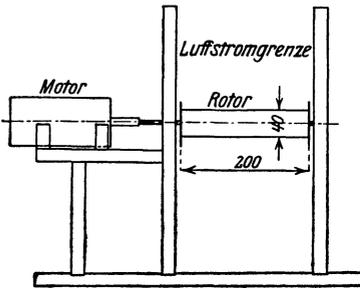


Abb. 65. Versuchseinrichtung.

Die ersten genaueren quantitativen Messungen sind von M. Lafay im Jahre 1912 durchgeführt worden. Die ersten Göttinger Versuche scheiterten an technischen Schwierigkeiten, die erst im Jahre 1923 behoben wurden, besonders durch die Einführung kleiner schnellaufender Motoren von verhältnismäßig hoher Leistung (Durchmesser 42 mm, Länge 180 mm, Tourenzahl $n = 30000/\text{Min.}$, Leistung $N = 1 \text{ PS}$), die zunächst zum Antrieb der Schrauben von Flugzeugmodellen gebraucht wurden, aber auch für die Versuchswalzen sich ausgezeichnet bewährten. Um die in der Theorie angenommenen Verhältnisse der ebenen Strömung angenähert zu verwirklichen, wurde der drehbar aufgehängte Zylinder zwischen zwei parallele Wände gestellt. Schließlich wurde die Wirkung noch bedeutend verstärkt und das schädliche Einströmen von Nebenluft in das Unterdruckgebiet vermieden dadurch, daß man auf den Vorschlag von Prandtl an den Zylinderenden Scheiben anbrachte, die mit dem Zylinder umliefen (Abb. 65).

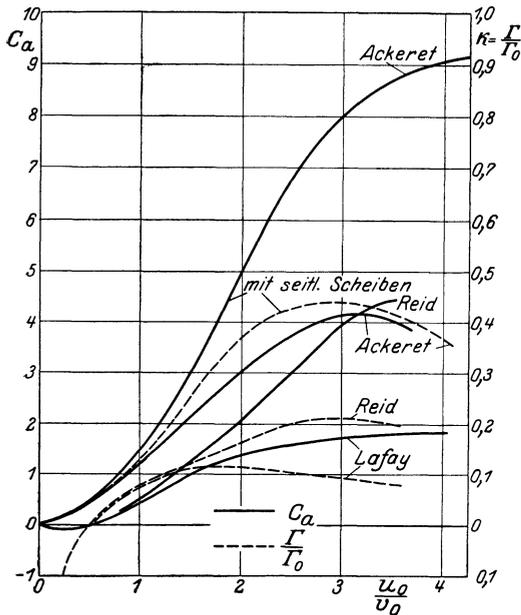


Abb. 66. Kraftzahl und Zirkulation beim rotierenden Zylinder.

für c_a etwa den Wert 10. Mit Rücksicht auf die nicht zu eliminierende Reibung kann die Annäherung an die theoretischen Bedingungen als nicht ungünstig bezeichnet werden.

Wir geben in der Abb. 66 einige von S. Ackeret, E. G. Reid und M. Lafay stammende Versuchskurven wieder, aus denen man die

Wirkung noch bedeutend verstärkt und das schädliche Einströmen von Nebenluft in das Unterdruckgebiet vermieden dadurch, daß man auf den Vorschlag von Prandtl an den Zylinderenden Scheiben anbrachte, die mit dem Zylinder umliefen (Abb. 65).

Das theoretische Maximum der Querkraftzahl ist bei einer zirkulatorischen Geschwindigkeit $2 v_0$ am Zylinderumfang

$$c_a = 4\pi = 12,57,$$

wobei also die Zahl $\kappa = 0,5$ zu setzen ist. Die zunächst von Ackeret angestellten Versuche an dem mit Scheiben versehenen Zylinder ergaben

Abhängigkeit der Werte c_a und $\kappa = \frac{I}{I_0}$ in Abhängigkeit von dem Geschwindigkeitsverhältnis $\frac{u_0}{v_0}$ ersehen kann. Man bemerkt, daß die Anbringung von Scheiben eine bedeutende Steigerung der Kraftwirkung zur Folge hat und daß der Zylinder mit Scheiben in der Gegend $\frac{u_0}{v_0} = 4$ tatsächlich den etwa bei 10 liegenden Höchstwert der Querkraftzahl erreicht.

Durch die Göttinger Versuche angeregt, hat es Flettner vor einigen Jahren unternommen, zunächst mit gutem Erfolg, die Segel eines Schiffes durch zwei Zylinder zu ersetzen, die durch eine Antriebsvorrichtung in Drehung versetzt werden können. Wenn man die Stärke und den Sinn der Drehung wechselt, so läßt sich zu jeder Windrichtung eine bewegende Kraft von vorgeschriebener Richtung erzielen. Bei einem Schiff liegen die Verhältnisse insofern günstig, als die Windgeschwindigkeiten verhältnismäßig niedrig sind (etwa zwischen 5 bis 10 m/s) und daher auch die Drehkraft der Rotoren, die einige Meter Durchmesser haben, nicht eine Größe erreichen, bei der unangenehme Resonanzerscheinungen zu befürchten wären. Da ferner die größte Magnuskraft etwa 30 mal so groß ist als der Widerstand, den die ruhenden Zylinder bei derselben Windstärke erfahren, so vermag auch der stärkste Sturm auf die ruhenden Walzen keine größeren Kräfte auszuüben als ein mäßiger Wind bei günstiger Drehung. Die auf ein Segel ausgeübte Kraft ist ferner proportional mit dem Quadrat der Geschwindigkeit. Da aber bei Zunahme des Windes und unveränderter Drehzahl der Rotoren ein dem Verhältnis der Umfangsgeschwindigkeit zur Windgeschwindigkeit auch die Seitenkraft sich verkleinert, so ergibt sich, daß die Gesamtkraft jedenfalls einem günstigeren Gesetz folgt, als die Widerstandskraft des Segels. Ein weiterer Vorteil könnte darin gesucht werden, daß die Anpassung an die Windrichtung in einfacherer Weise als beim Segelschiff, nämlich durch bloße Änderung der Drehzahl mittels Handvorrichtung bewerkstelligt werden kann. Daß diese Eigenschaften des Rotorschiffes ausreichend sind, auf die Dauer das Segelschiff zu verdrängen, ist natürlich damit in keiner Weise entschieden.

26. Die Strömung um zwei rotierende Walzen.

Die strömungstheoretische Untersuchung des Systems zweier rotierender Zylinder, wie es bei dem Flettnerschiff Verwendung findet, begegnet einigen Schwierigkeiten. Es handelt sich zunächst darum, das Potential der ebenen Strömung im Außengebiet zweier gleicher Kreise aufzustellen, die sich zusammensetzt aus einer Parallelströmung und zwei die Kreise umgebenden Zirkulationsströmungen. Da beide Kreise Stromlinien sein sollen, so muß man außer den beiden im Mittel-

punkt anzubringenden Doppelquellen und Wirbeln noch diejenigen Singularitäten hinzufügen, die durch fortgesetzte wechselseitige Spiegelungen jener Quellen und Wirbeln an den beiden Kreisen gewonnen werden. Daher ist das ganze Potential nur durch eine unendliche Reihe darzustellen.

Wenn die Durchmesser der als gleich vorausgesetzten Zylinder klein sind gegenüber ihrem Abstand, begeht man keinen großen Fehler, wenn man das Strömungsfeld in der Umgebung jedes der rotierenden Zylinder unter der Annahme aufstellt, daß der andere Zylinder durch einen in seine Achse fallenden tragenden Wirbelfaden (Punktwirbel) ersetzbar ist. Man hat dann in der z -Ebene noch den in bezug auf den ersten Kreis gespiegelten und einen entgegengesetzt gleichen Wirbel im Zentrum hinzuzufügen, damit die Grenze der zyklischen Strömung um diesen Zylinder nicht gestört wird.

So erhält man angenähert in der Umgebung des Zylinders 1, wenn die Zylindermitten die Koordinaten $\pm a$ haben, die Umdrehungen den Zirkulationswerten Γ_1 und Γ_2 entsprechen und die Parallelströmung unter den Winkel α gegen die negative x -Achse gerichtet ist,

$$W_1 = -v_0 \left[(z-a)e^{i\alpha} + \frac{r_0^2}{z-a} e^{-i\alpha} \right] - \frac{i\Gamma_1}{2\pi} \ln(z-a) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ - \frac{i\Gamma_2}{2\pi} \ln \frac{(z+a)(z-a)}{z-a + \frac{r_0^2}{2a}} \end{array} \right\} \quad (1)$$

Aus dem Ausdruck für die Geschwindigkeit des Wirbelkerns $z = -a$

$$\bar{v}_2^* = -v_0 \left(e^{i\alpha} - \frac{r_0^2}{4a^2} e^{-i\alpha} \right) + \frac{i(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{4\pi a} - \frac{i\Gamma_2}{2\pi} \cdot \frac{2a}{(4a^2 - r_0^2)}. \quad (2)$$

erhält man aber durch Anwendung der Lagallyschen Formel mit $\Gamma_l = \Gamma_2$, $\Gamma_c = \Gamma_1$, $q_k = 0$ für den auf den Zylinder 1 wirkenden Strömungsdruck

$$\bar{P}_1 = i\rho(\Gamma_1 + \Gamma_2)\bar{v}_\infty - i\rho\Gamma_2\bar{v}_2^* = i\rho v_0 \left[\Gamma_1 e^{i\alpha} + \frac{r_0^2}{4a^2} \Gamma_2 e^{-i\alpha} \right] \left. \begin{array}{l} \\ \\ + \rho \frac{\Gamma_2(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{4\pi a} - \rho \frac{\Gamma_2^2 \cdot 2a}{2\pi(4a^2 - r_0^2)} \end{array} \right\} \quad (3)$$

Die entsprechende Kraft für den Zylinder 2 ergibt sich, wenn man in (3) a durch $-a$ ersetzt und die Zeiger 1 und 2 miteinander vertauscht. Der an der x -Achse gespiegelte Vektor der Gesamtkraft schreibt sich dann in der Form

$$\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 = -i\rho v_0(\Gamma_1 + \Gamma_2) \left[e^{i\alpha} + \frac{r_0^2}{4a^2} e^{-i\alpha} \right] \left. \begin{array}{l} \\ \\ + \rho \frac{r_0^2(\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2)}{4a\pi(4a^2 - r_0^2)} \end{array} \right\} \quad (4)$$

Multipliziert man mit $e^{-i\alpha}$ und trennt dann das Reelle vom Imaginären, so erhält man die in senkrecht zur Bewegungsrichtung fallende Quertriebskomponente und die in diese Richtung fallende Komponente

$$\left. \begin{aligned} P_y &= \varrho v_0 (\Gamma_1 + \Gamma_2) \left[1 + \frac{r_0^2}{4a^2} \cos 2\alpha \right] + \varrho \frac{r_0^2}{(4a^2 - r_0^2)} \frac{\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2}{4\pi a} \sin \alpha \\ P_x &= -\varrho v_0 (\Gamma_1 + \Gamma_2) \frac{r_0^2}{4a^2} \sin 2\alpha + \varrho \frac{r_0^2 (\Gamma_1^2 - \Gamma_2^2)}{4a(4a^2 - r_0^2)} \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Die letztere macht sich als Vortrieb oder Rücktrieb (Widerstandskraft) geltend, je nachdem

$$\Gamma_1 - \Gamma_2 \geq 2v_0 \left(4a - \frac{r_0^2}{a} \right) \sin \alpha$$

ist. Ebenso berechnet man durch unmittelbare Anwendung der zweiten Lagallyschen Formel S. 53 die auf den Anfangspunkt bezogenen Drehmomente M_1 und M_2 sowie das Gesamtmoment M

$$M_1 = \varrho v_0 \cos \alpha \left[\Gamma_1 a + \Gamma_2 \frac{r_0^2}{4a} \right]; \quad M_2 = -\varrho v_0 \cos \alpha \left[\Gamma_2 a + \Gamma_1 \frac{r_0^2}{4a} \right] \quad (6)$$

$$M = M_1 + M_2 = \varrho v_0 \cos \alpha \left(a - \frac{r_0^2}{4a} \right) (\Gamma_1 - \Gamma_2).$$

Man sieht aus der Formel, daß, wenn die Drehgeschwindigkeiten resp. die Zirkulationswerte Γ_1 und Γ_2 gleich werden, die auf die einzelnen Rotoren entfallenden Teilkräfte nur in der Komponente senkrecht zur Achse übereinstimmen, dagegen in der achsialen Komponente sich unterscheiden, während das resultierende Drehmoment verschwindet. Wenn $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ ist, so verschwindet die resultierende Kraft; dafür tritt das Gesamtsystem unter die Wirkung eines Drehmomentes, das mit der Geschwindigkeit v_0 , dem \cos des Anstellwinkels und der Summe der Absolutwerte der Zirkulationen verhältnismäßig ist.

Wenn man den Radius der Walzen gegen den Abstand $2a$ vernachlässigt, so kann man die Gesamtströmung durch das Potential

$$W = -v_0 e^{i\alpha} - \frac{i\Gamma_1}{2\pi} \ln(z-a) - \frac{i\Gamma_2}{2\pi} \ln(z+a) \quad (7)$$

charakterisieren. Die Ausdrücke für die Kräfte und Momente, die man in diesem Falle auch sehr leicht direkt berechnet, werden dann

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_1 &= \varrho \left[\frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{4\pi a} - i\Gamma_1 v_0 e^{i\alpha} \right]; & \bar{P}_2 &= \varrho \left[-\frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{4\pi a} - i\Gamma_2 v_0 e^{i\alpha} \right] \\ \bar{P} &= -i\varrho v_0 e^{i\alpha} v_0 (\Gamma_1 + \Gamma_2) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$M = \varrho v_0 a \cos \alpha (\Gamma_1 - \Gamma_2). \quad (9)$$

Wie man sich überzeugt, steht die Kraft in diesem Falle senkrecht auf der Richtung der Parallelstromgeschwindigkeit, resp. der Be-

wegung des Systems. Um Aussagen über die Lage der Kräfte zu machen, berechnen wir den sog. Schwerpunkt der Zirkulation, dessen Koordinate durch die Gleichung

$$z_0 = \frac{\oint \bar{v} z dz}{\oint \bar{v} dz}$$

definiert ist, wo die Integrale längs einer das System der Zylinder-
spuren umschließenden Kurve zu erstrecken sind. Wegen

$$\bar{v} = -v_0 e^{i\alpha} - \frac{i(\Gamma_1 + \Gamma_2)}{2\pi z} - \frac{ia(\Gamma_1 - \Gamma_2)}{2\pi z^2}$$

ergibt sich nach dem Residuensatz von Cauchy

$$z_0 = \frac{a(\Gamma_1 - \Gamma_2)}{\Gamma_1 + \Gamma_2}. \tag{10}$$

Wenn man diesen Wert mit (9) vergleicht, so sieht man, daß alle Wirkungslinien der Kräfte P , die zu den verschiedenen Richtungen α gehören, durch den auf der Achse $\pm a$ liegenden Schwerpunkt z_0 hindurchgehen (Abb. 67). Die Richtungswinkel β_1 und β_2 der beiden Teilkräfte P_1 und P_2 bestimmen sich aus

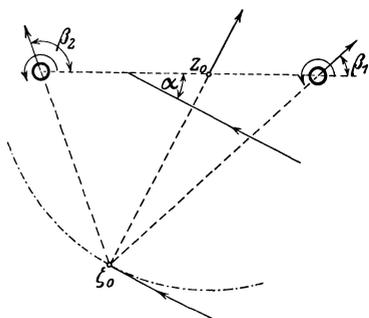


Abb. 67. Kräfte an einem System zweier rotierender Zylinder.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_1 &= \frac{v_0 \cos \alpha}{v_0 \sin \alpha + \frac{\Gamma_2}{4\pi a}}; \\ \operatorname{tg} \beta_2 &= \frac{v_0 \cos \alpha}{v_0 \sin \alpha - \frac{\Gamma_1}{4\pi a}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Für den Schnittpunkt beider Kräfte erhält man

$$\zeta_0 = z_0 - \frac{8\pi a^2 v_0 i e^{-i\alpha}}{\Gamma_1 + \Gamma_2}. \tag{12}$$

Daraus folgt aber, wenn man $\zeta_0 = z_0 + \zeta'$ setzt

$$\xi'^2 + \eta'^2 = \left(\frac{8\pi a^2 v_0}{\Gamma_1 + \Gamma_2}\right)^2. \tag{13}$$

Wenn also v_0 , Γ_1 und Γ_2 konstant bleiben, und der Anstellwinkel α geändert wird, so beschreibt der Schnittpunkt der beiden, an dem Zylinder angreifenden Kräfte einen Kreis um den Schwerpunkt der Zirkulation, dessen Radius der Geschwindigkeit v_0 direkt und der Gesamtzirkulation umgekehrt proportional ist.

27. Strömung um einen rotierenden Zylinder mit freiem Wirbel.

Wir haben oben gesehen, daß die Zirkulation eines rotierenden Zylinders im wesentlichen darin ihren Erklärungsgrund findet, daß sich hinten, besonders von der „gegenlaufenden“ Seite des Zylinders aus der Reihenschicht ein spiralförmiger Wirbel herausbildet, der nach Erreichung einer bestimmten Größe in die freie Flüssigkeit tritt, um nun die zirkulatorische Gegenströmung zurückzulassen.

Wir wollen zunächst die feineren Vorgänge im Strömungsgebiet hinter dem zylindrischen Hindernis außer acht lassen und der früher betrachteten zyklischen Strömung (Parallelströmung und Zirkulation) um den Kreiszyylinder das Feld eines in der Flüssigkeit schwimmenden Idealwirbels hinzufügen, dessen Stärke der Zirkulation entgegengesetzt gleich ist. Wenn wir dem äußeren Wirbel die Koordinate $- R e^{i\varphi}$ geben und die Parallelströmung in Richtung der negativen x -Achse annehmen, so ergibt sich das komplexe Potential der Gesamtströmung unmittelbar aus der Formel (3) des vorigen Abschnitts, wenn wir $(z - a) e^{i\alpha}$ durch z , $2a$ durch R , Γ_2 durch $-\Gamma_1 = -\Gamma$ ersetzen, in der Form

$$W = -v_0 \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z + R e^{i\psi}}{z + \frac{r_0^2}{R} e^{i\psi}} \tag{1}$$

und die Geschwindigkeit in einem Feldpunkt

$$\bar{v} = -v_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{e^{i\psi} (R^2 - r_0^2)}{(z + R e^{i\psi})(R z + r_0^2 e^{i\psi})}. \tag{2}$$

Zeichnerisch erhält man das gesamte Strömungsbild, wenn man das früher konstruierte einfache translatorische Stromliniensystem um den Kreiszyylinder mit dem Kreisbüschel

$$\left| \frac{z + R}{z + \frac{r_0^2}{R}} \right| = e^{\rho}$$

nach der bekannten Diagonalmanier überlagert.

Um sich von den Druckverhältnissen ein Bild zu machen, interessiert zunächst der Verlauf der Geschwindigkeit v_k längs des Kreisumfanges. Mit $z = r_0 e^{i\varphi}$ erhält man

$$\bar{v}_k = -2i v_0 \sin \varphi e^{-i\varphi} - \frac{i\Gamma}{2\pi r_0} \frac{(R^2 - r_0^2) e^{-i\varphi}}{\varrho^2}, \tag{3}$$

also den Absolutwert

$$|v_k| = 2v_0 \sin \varphi + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \frac{(R^2 - r_0^2)}{\varrho^2}, \tag{3a}$$

wenn ϱ den Abstand des Kreispunktes vom äußeren Wirbelzentrum

bezeichnet. Als Gleichung für die Argumente der Staupunkte A_1 und A_2 , die sog. „Stauwinkel“, resp. als Beziehung zwischen Zirkulation und Stauwinkel ergibt sich daraus

$$\Gamma = -4\pi v_0 r_0 \sin \varphi \frac{\varrho^2}{R^2 - r_0^2}. \tag{4}$$

Das führt z. B. für $\sin \varphi$ bei gegebenem Γ zu einer Gleichung 4. Ordnung, die innerhalb eines gewissen Bereiches der Zirkulationswerte zwei reelle Wurzeln hat. Man sieht übrigens aus Gleichung (4), daß die Staupunkte, wie zu erwarten ist, auf dem unteren Teile des Kreisumfanges liegen. Setzt man an Stelle von φ das eine Mal $-\varphi_1$ das andere Mal $\varphi_2 + \pi$, so wird

$$\sin \varphi_1 \cdot \varrho_1^2 = \sin \varphi_2 \cdot \varrho_2^2, \tag{5}$$

der vordere, zu φ_1 gehörige Staupunkt A_1 liegt also der x -Achse resp. der Strömungsachse durch den Kreismittelpunkt näher als der hintere (Abb. 68), und zwar verhalten sich die Sinus der Stauwinkel

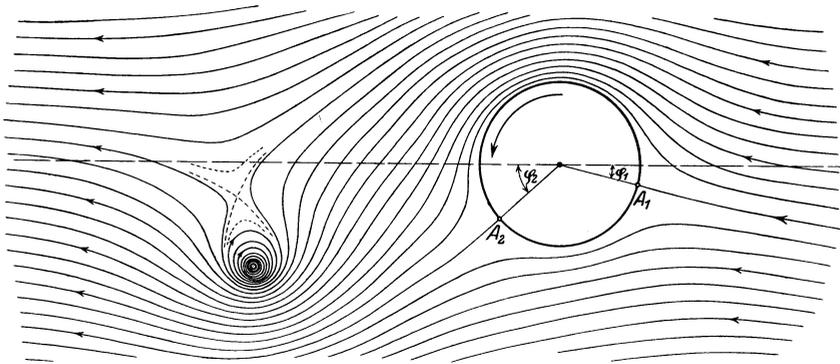


Abb. 68. Strömung um einen Kreiszyylinder mit Zirkulation und äußerem Gegenwirbel.

umgekehrt wie die Quadrate der Abstände vom Zentrum des äußeren Wirbels.

Allgemein verliert das Geschwindigkeits- und Druckfeld seine Symmetrie zur y -Achse, so daß z. B. auch die Stellen größter und kleinster Strömungsgeschwindigkeit am Zylinder aus jener Achse herausrücken und schließlich die Richtung der Druckresultierenden gegenüber der Lage im wirbelfreien Fall um einen positiven, spitzen Winkel verdreht erscheint.

Bevor wir den Vektor dieser in einem bestimmten Augenblick der Strömung herrschenden Kraft bestimmen, müssen wir kurz auf die Bewegung des äußeren Wirbelkerns in dem umgebenden Geschwindigkeitsfeld eingehen. Als Geschwindigkeit des Wirbels erhalten wir aus (1)

$$\vec{v}^* = -v_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2} e^{-2i\psi} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{R e^{-i\psi}}{R^2 - r_0^2}. \tag{6}$$

Für die Komponenten in der Richtung des Radiusvektor und senkrecht dazu haben wir

$$\left. \begin{aligned} v_R &= -v_x \cos \psi - v_y \sin \psi = v_0 \cos \psi \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right) \\ v_\psi &= v_x \sin \psi - v_y \cos \psi = -v_0 \sin \psi \left(1 + \frac{r_0^2}{R^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{R}{R^2 - r_0^2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die daraus sich ergebende Differentialgleichung der Wirbelbahn

$$\frac{R d\psi}{dR} = \frac{v_\psi}{v_R}$$

hat, wie man leicht feststellt, die Lösung (vgl. Abschnitt 22)

$$\sin \psi \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right) - \frac{\Gamma}{4\pi r_0 v_0} \frac{r_0}{R} \lg(R^2 - r_0^2) = c. \quad (8)$$

Die entsprechenden Bahnkurven sind in den Abb. 69 und 70 für die

Fälle $k = \frac{\Gamma}{2\pi r_0 v_0} = \frac{1}{2}$
und $= 2$ dargestellt.

Während der Wirbel hinter dem Zylinder abschwimmt, entfernt er sich gleichzeitig von der x -Achse oder von der Mittelpunktsbahn des sich bewegenden Zylinders

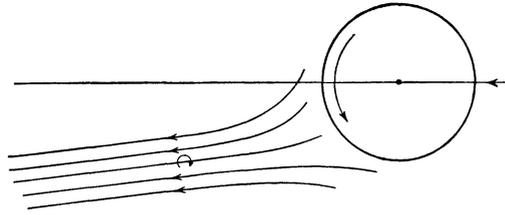


Abb. 69. Bahnen der Wirbel hinter einem rotierenden Zylinder ($k = \frac{1}{2}$).

und folgt im Unendlichen der Richtung der Parallelströmung.

Um den auf den Zylinder wirkenden Flüssigkeitsdruck zu bestimmen, müßte man auf den instationären Charakter des hinter dem Zylinder ausgebreiteten Strömungsfeldes, also z. B. auf die Tatsache Rücksicht nehmen, daß in bestimmten Zeitabständen immer neue Wirbel sich ablösen und mit den bereits abgelösten in einem dauernd sich ändernden Felde ab-

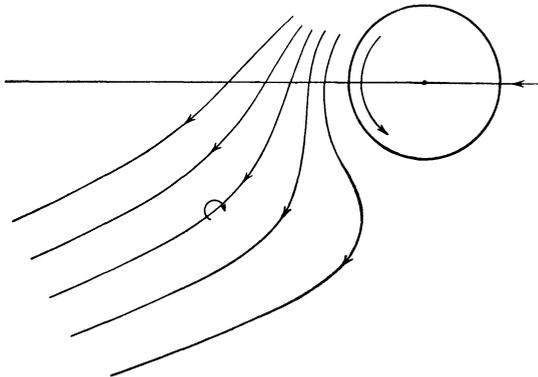


Abb. 70. Bahnen der Wirbel hinter einem rotierenden Zylinder ($k = 2$).

wandern. Bezeichnet man wie früher die Stärken der einzelnen Wirbel mit Γ , ebenso die entsprechenden komplexen Geschwindigkeiten mit v_l^* , so hat die Resultierende der auf den Kreiszyylinder ausgeübten

Strömungsdrücke in dem als stationär zu betrachtenden Felde den Wert

$$\bar{P} = i \varrho (\Gamma - \sum \Gamma_i) \bar{v}_\infty + i \varrho \sum \Gamma_i \bar{v}_i^*. \quad (9)$$

Bei der Abwanderung der Wirbel wird ihre Energie allmählich durch Reibung aufgezehrt. Wenn wir annehmen, daß die aufgezehrte Energie immer wieder ersetzt wird oder daß die Summe der Wirbelstärken aller äußeren Wirbel der mittleren Zirkulation entgegengesetzt gleich gesetzt werden kann, die sich bei gleichmäßiger Drehung des Zylinders ausbildet, so bleibt

$$\bar{P} = i \varrho \sum \Gamma_i \bar{v}_i^*. \quad (9a)$$

Nun stellt sich aber erfahrungsgemäß bei gleichmäßiger Bewegung oder konstantem v_0 eine mittlere Kraftwirkung ein, die der Messung zugänglich ist. Ersetzt man also das sich kontinuierlich aus der Reibungsschicht erneuernde Wirbelsystem durch einen einzigen fiktiven Wirbel, so können wir diesen Wirbel gleichzeitig als einen tragenden Wirbelfaden von unveränderlicher Lage und Stärke betrachten. Dann ergibt sich die Kraftwirkung auf den Zylinder unmittelbar aus der bereits früher berechneten Formel (3) des vorigen Abschnitts, wenn wir mit $e^{-i\alpha}$ multiplizieren und α durch ψ und $2a$ durch R ersetzen, resp. durch Einsetzung von (6) in den Ausdruck (9a)

$$\bar{P} = -i \varrho \Gamma v_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2} e^{-2i\psi}\right) - \varrho \frac{\Gamma^2 R e^{-i\psi}}{2\pi R^2 - r_0^2}, \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} P_y = P_a = \varrho v_0 \Gamma \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2} \cos 2\psi\right) - \frac{\varrho \Gamma^2 R \sin \psi}{2\pi \varrho (R^2 - r_0^2)}, \\ - P_x = P_w = \varrho \frac{R \cos \psi}{(R^2 - r_0^2)} - \varrho v_0 \Gamma \frac{r_0^2}{R^2} \sin 2\psi. \end{aligned} \right\} \quad (10a)$$

Setzt man $P_a = c_a \varrho r_0 v_0^2$, $P_w = c_w \varrho r_0 v_0^2$ und führt die beiden Verhältniszahlen $\frac{\Gamma}{2\pi r_0 v_0} = k$, $\frac{r_0}{R} = \lambda$ ein, so findet man für die Beiwerte der Kraftkomponenten

$$\left. \begin{aligned} c_a &= 2\pi k \left[1 - \lambda^2 \cos 2\psi - k \frac{\lambda}{1 - \lambda^2} \sin \psi\right], \\ c_w &= 2\pi k \left[k \frac{\lambda \cos \psi}{1 - \lambda^2} - \lambda^2 \sin 2\psi\right]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Man sieht daraus, daß in Übereinstimmung mit der Erfahrung die Querkraft kleiner ausfällt als ohne Wirbel und daß die tangentielle oder Widerstandskomponente wesentlich durch das Vorhandensein des Wirbels bedingt ist.

Die Formeln lassen sich übrigens verhältnismäßig übersichtlich fassen, wenn man den Abstand h des Wirbels von seinem Spiegelbild

am Kreis und die vom äußeren Wirbel herrührende Abwärtsgeschwindigkeit u_0 an der Stelle des inneren Wirbels einführt. Vernachlässigt man $\lambda^2 \sin \psi$, so wird angenähert

$$\left. \begin{aligned} P_a &= \rho \left(v_0 \Gamma \frac{h}{R} - \Gamma u_0 \sin \psi \right); & c_a &= 2 \pi k \left(\frac{h}{R} - \frac{u_0}{v_0} \sin \psi \right), \\ P_w &= \rho \Gamma u_0 \cos \psi; & c_w &= 2 \pi k \frac{u_0}{v_0} \cos \psi. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Nach Elimination von k ergibt sich aus (13) als Gleichung für die ideale „Kraftpolare“ beim rotierenden Zylinder

$$2 \pi \cos \psi [c_w (1 - \lambda^2 \cos 2\psi) + c_a \lambda^2 \sin 2\psi] = \lambda (c_a \cos \psi + c_w \sin \psi)^2. \quad (13)$$

Das ist eine Parabel, die im Anfangspunkt $c_a = c_w = 0$ die Gerade

$$c_w (1 - \lambda^2 \cos 2\psi) + c_a \lambda^2 \sin 2\psi = 0$$

berührt und deren Achsenrichtung durch die Gerade

$$c_a \cos \psi + c_w \sin \psi = 0$$

bestimmt ist. Die Beziehung (13) kann natürlich nicht ohne weiteres quantitativ mit den Messungsergebnissen verglichen werden, zumal da die Lage des fiktiven Wirbels auch als abhängig von dem Geschwindigkeitsverhältnis k betrachtet werden muß. Solange ferner keine zwingenden Aussagen über die Werte λ und ψ gemacht werden, läßt sich nur feststellen, daß die durch die Beziehung (13) ausgedrückte Gesetzmäßigkeit die versuchsmäßig gefundene Polare jedenfalls qualitativ richtig wiedergibt. Die in der Tat nicht ungünstige Übereinstimmung — wir haben zur Veranschaulichung zwei mögliche Wertepaare ($\lambda = \frac{1}{5}$, $\psi = 15^\circ$; $\lambda = \frac{1}{4}$, $\psi = 30^\circ$) gewählt — bezieht sich insbesondere auf folgende Punkte (vgl. Abb. 71).

Wenn wir noch den früher betrachteten translatorischen Widerstand c_{w_0} (entsprechend $c_a = 0$) hinzugefügt denken, so sieht man, daß der Widerstand $c_w + c_{w_0}$ nicht für $c_a = 0$ sondern für ein kleines positives c_a sein Minimum erreicht. Die

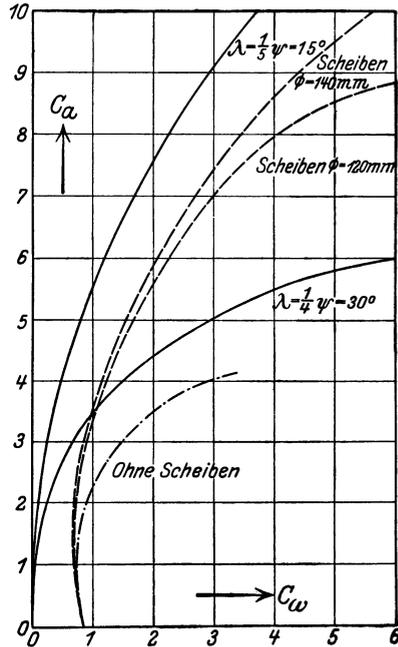


Abb. 71. Polarkurven für einen Rotor.

positiven c_a -Werte sind jedenfalls im praktischen Bereich absolut größer als die negativen c_a -Werte. Diese Abweichung von der zur c_a -Achse symmetrischen Parabel ist dadurch bedingt, daß ψ ein spitzer Winkel, daß also das Wirbelsystem bei unserer Orientierung unterhalb der Strömungsachse gelegen ist. Für diese Lage des mittleren fiktiven Wirbels stimmt auch die Größenordnung der c_a - und c_w -Werte mit der Messung überein.

Nun bezieht sich aber die Messung auf den beiderseits begrenzten Zylinder. Um die Theorie auf diesen Fall auszudehnen, bedarf es einer ergänzenden Betrachtung, die davon auszugehen hat, daß die beiden Wirbelfäden, der freie äußere und der innere nicht mehr ins Unendliche

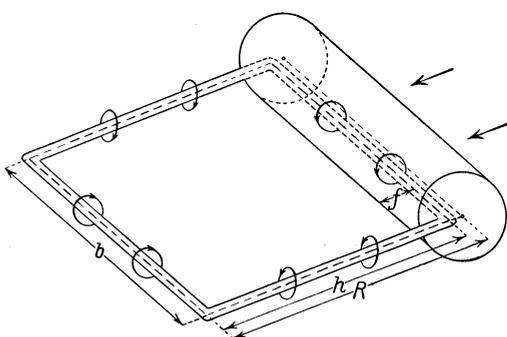


Abb. 72. Wirbelring am begrenzten Zylinder.

gehen, vielmehr infolge der Ablösung des gebundenen Wirbels an den Zylinderenden sich zu einem Wirbelring zusammenschließen. Für die Achse dieses Wirbelrings kann man nach dem Vorgehänge von C. Witoszynski¹ eine rechteckige Form annehmen (Abb. 72). Es wird dann nach den Formeln (12) darauf an-

kommen, die mittlere, auf den inneren Wirbel, resp. den Kreiszyylinder von dem äußeren Teil des Wirbelrings ausgeübte Geschwindigkeit, also das Integral

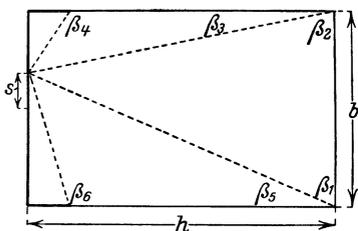


Abb. 73. Zur Berechnung des induzierten Widerstandes eines Wirbelrings.

$$u'_0 = \frac{1}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} u(s) ds$$

zu bestimmen, wobei b die Länge des Zylinders und s die von der Mitte aus gezählte Koordinate eines Punktes der inneren Wirbelachse bedeutet.

Wenn man die Winkel β_1 bis β_6 zwischen den Verbindungslinien des Punktes nach den Anfangs- und Endpunkten des Ringes mit der Wirbelachse einführt (vgl. Abb. 73), so gibt die Anwendung des Biot-Savartschen Gesetzes ohne weiteres

¹ C. Witoszynski, Modification du principe de circulation, Proceedings of the first international congress for applied mechanics, Delft 1924, ed. C. B. Biezeno and J. M. Burgers, Delft 1925, S. 424.

$$u = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \beta_1 + \cos \beta_2) + \frac{\Gamma}{4\pi \left(\frac{b}{2} + s\right)} (\cos \beta_5 + \cos \beta_6) \\ + \frac{\Gamma}{4\pi \left(\frac{b}{2} - s\right)} (\cos \beta_3 + \cos \beta_4).$$

Drückt man die cos-Werte durch h , b , s und $f = r_0 - \frac{r_0^2}{R}$ aus und integriert, so ergibt sich

$$u'_0 = \frac{\Gamma}{2\pi h b} \left[\sqrt{h^2 + b^2} - h \left(1 - \ln \frac{h}{f} \cdot \frac{\sqrt{b^2 + h^2} - h}{\sqrt{b^2 + f^2} - f} \right) \right]. \quad (15)$$

Für den Quotienten $\varkappa = \frac{u'_0}{u_0}$ der Seitengeschwindigkeit für den endlichen und den unendlich langen Zylinder ergibt sich

$$\varkappa = \sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}} - \frac{h}{b} + \frac{h}{b} \cdot \ln \left(\frac{h}{f} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}} - \frac{h}{b}}{\sqrt{1 + \frac{f^2}{b^2}} - \frac{f}{b}} \right). \quad (16)$$

Das ist gleichzeitig der Faktor, mit dem wir (angenähert) den Widerstandswert für den unendlich langen Zylinder multiplizieren müssen, um den auf die endliche Länge b reduzierten Wert zu erhalten.

VI. Methode des unstetigen Potentials.

28. Der klassische Ansatz.

Die Wichtigkeit des Widerstandproblems läßt es wünschenswert erscheinen, noch kurz einige andere Lösungsmethoden mathematischer Natur zu besprechen.

Wie der innere Doppelwirbel bei einem Kreiszyylinder durch zwei entgegengesetzte Wirbelschichten auf dem Rande ersetzt werden kann, so kann man auch dem hinter dem Körper herziehenden Wirbelsystem durch die Annahme Rechnung tragen, daß jene Wirbelschichten auf der Hinterseite sich vom Zylinder ablösen und in die freie Flüssigkeit übertreten. Diese in das Außengebiet erstreckten gegensinnigen Schichten sind aber im wesentlichen gleichbedeutend mit zwei Diskontinuitätsflächen. Wenn man ferner die weitere Annahme hinzufügt, daß der Raum II zwischen dem Zylinder und den unveränderlich gedachten und ins Unendliche gehenden Unstetigkeitsflächen den Charakter eines Totraumes hat, in dem die Flüssigkeit in Ruhe ist, so hat man die Voraussetzungen für die klassischen Ansätze von Helmholtz, Kirchhoff und Lord Rayleigh.

Die mittlere auf den Körper treffende Stromlinie der Ebene zerlege sich in A in die beiden dem Rande folgenden Teile AB_1 und

AB_2 , um dann von B_1 und B_2 als sog. „freie Strahlen“ ins Unendliche zu gehen (Abb. 74). Wenn wir von der instabilen Beschaffenheit

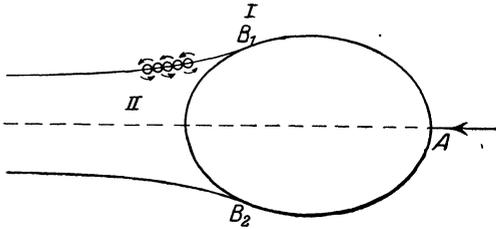


Abb. 74. Unstetige Strömung um einen Zylinder.

der Flächen resp. Strahlen B_1C und B_2C ganz absehen, so wird sich ein notwendigerweise mehrwertig ausfallendes Potential auffinden lassen, das sich in der Operationsebene (als dem einen Riemannschen Blatt) den

erweiterten Grenzbedingungen anpaßt. Diese Grenzbedingungen sind leicht zu ermitteln. Weil die Geschwindigkeit im Gebiet II verschwindet, so muß der Druck, den die Flüssigkeit auf den Strahl BC ausübt, überall von gleicher Größe und daher auch der Wert der tangentialen Grenzgeschwindigkeit längs dieser Linie unveränderlich sein. Wenn nun $W = \Phi + i\Psi$ das für das Gebiet I geltende Potential der Strömung ist, so sieht man, daß

$$\bar{v} = \frac{dW}{dz} = v_x - i v_y, \quad \bar{v}^{-1} = \frac{dz}{dW} = \frac{v_x + i v_y}{v^2}$$

längs der freien Grenzen einen konstanten Modul haben, daß also den freien Grenzen der Strömung in der \bar{v} und \bar{v}^{-1} -Ebene Kreisbögen um den Anfangspunkt entsprechen.

Am einfachsten ist nun die Abbildung herzustellen für den Fall, daß die feste Begrenzung der Flüssigkeit in der Ebene aus geraden Linien besteht. Da für diese Begrenzungslinien, soweit sie Stromlinien sind, $\Psi = \text{konst}$ ist, so ergibt sich

$$v_y dx - v_x dy = 0.$$

Ist nun $y = \alpha + x\beta$ die Gleichung einer Wandung, so haben wir in der \bar{v} -Ebene

$$v_x - \alpha v_x = 0.$$

Das ist aber eine Gerade durch den Nullpunkt.

Sind also die festen Wände gerade Linien, so besteht das Bild der Strömungsgrenze in der \bar{v} -Ebene aus konzentrischen Kreisstücken und radialen Geraden.

Durch eine weitere Transformation kann man, wie früher gezeigt, die Kreisbögen auf Teile der reellen Achse abbilden. Benutzt man z. B. als vermittelnde Funktion

$$Z_1 = \ln \frac{1}{\bar{v}},$$

die sich, wenn γ die Richtung der Geschwindigkeit ist, in

$$Z_1 = -\ln |\bar{v}| + i\gamma$$

zerlegen läßt, so sieht man, daß in der Z_1 -Ebene den festen Grenzen der Flüssigkeit Parallele zur reellen Achse, den freien Grenzen Parallele zur anderen Achse entsprechen. Die Aufgabe ist daher auf jeden Fall darauf zurückgeführt, eine Funktion zu finden, welche die von geraden Linien begrenzten Bereiche zweier Ebenen aufeinander abbildet.

Um das Wesen der Kirchhoffschen Methode zu zeigen, betrachten wir den Fall einer im Unendlichen parallelen Strömung, die unter einem gegebenen Winkel α gegen eine ebene, unendlich lange Platte $B_1 B_2$ trifft. Die Gerade $B_1 B_2$ falle in die imaginäre Achse und der Staupunkt A möge mit dem Anfangspunkt des Bezugssystems zusammenfallen, B_1 habe den Abstand h_1 , B_2 den Abstand h_2 von A (vgl. Abb. 75).

Wenn wir annehmen, daß die Geschwindigkeit im Unendlichen, also auch längs der in B_1 und B_2 beginnenden und ins Unendliche gehenden freien Grenzen den Wert v_0 hat, so ergibt sich für das Bild in der \bar{v} -Ebene folgende Zuordnung.

Der Punkt B_1 entspricht dem Punkt iv_0 , der Punkt B_2 dem Punkt $-iv_0$, der Punkt C im Unendlichen, aus dem die Strömung kommt und zu dem sie wieder zurückführt, entspricht dem Punkt $\bar{v} = v_0 i e^{i\alpha}$ und der Staupunkt A dem Nullpunkt A der \bar{v} -Ebene. Die in A sich spaltende Stromlinie, deren Teile längs der Platte bis B_1 und B_2 und von da längs der freien Grenze führen, wird also abgebildet auf die Linienzüge AB_1C und AB_2C in der \bar{v} -Ebene, die aus den Radien AB_1 und AB_2 und den Bogen B_1C und B_2C des Halbkreises $B_1 A B_2 C B_1$ mit dem Radius r_0 besteht. Das gesamte Strömungsfeld bildet sich daher auf das Innere des Halbkreises ab.

Wenn wir
$$\bar{v} = i u v_0 \tag{1}$$
 setzen, so wird dieser Halbkreis in einen um -90° gedrehten Halbkreis mit dem Radius 1 in der u -Ebene übergeführt. Nach Abschnitt 11 können wir das Gebiet dieses Halbkreises durch eine Funktion

$$t = \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right) \tag{2}$$

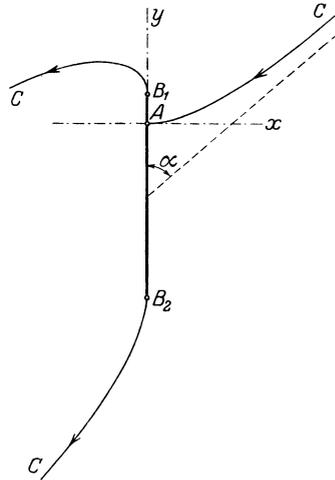


Abb. 75. Unstetige Strömung gegen eine Platte.

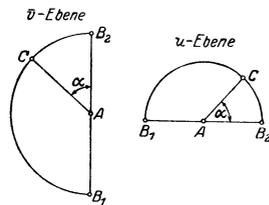


Abb. 76a. Konforme Abbildung zur Berechnung der Plattenströmung.

auf die Halbebene t abbilden, wobei die Punkte $A_1 B_1 B_2 C$ den vier Punkten $\infty, \mp 1, \cos \alpha$ der reellen Achse entsprechen.

Um nun noch t mit W zu verknüpfen, nehmen wir an, daß für die Stromlinien $C A B_1 C$ und $C A B_2 C$, $\Psi = 0$ wird und daß die Potentiallinie $\Phi = 0$ durch den Punkt A hindurchgeht. Dann geht Φ längs der mittleren auf die Platte treffenden Stromlinie CA vom negativen Unendlichen bis Null und längs der Platte und der freien Strahlen von Null bis zu positiv unendlichen Werten. Das Bild der Grenze in der W -Ebene besteht also aus zwei längs der positiven Φ -Achse von θ bis ∞ nebeneinander laufenden Geraden. Da also jedem Werte von W

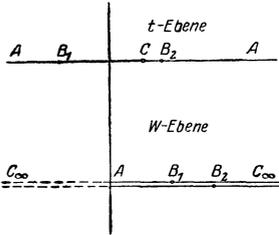


Abb. 76 b. Konforme Abbildung zur Berechnung der Plattenströmung.

zwei t -Werte entsprechen, so können wir setzen

$$W = \frac{c^2}{(t - \cos \alpha)^2}. \quad (3)$$

Aus den Beziehungen (1), (2), (3) folgt dann aber

$$\bar{v} = v_x - i v_y = i v_0 \left(\cos \alpha + \frac{c}{\sqrt{W}} - \sqrt{\left(\cos \alpha + \frac{c}{\sqrt{W}} \right)^2 - 1} \right), \quad (4)$$

$$(\bar{v})^{-1} = \frac{dz}{dW} = -\frac{i}{v_0} \left(\cos \alpha + \frac{c}{\sqrt{W}} + \sqrt{\left(\cos \alpha + \frac{c}{\sqrt{W}} \right)^2 - 1} \right), \quad (4a)$$

wobei zu beachten ist, daß die Wurzel beim Durchgang durch die Punkte $B_1 B_2$ ($t = \pm 1$) ihr Vorzeichen wechselt.

Durch Integration ergibt sich aus (4a)

$$z = -\frac{i}{v_0} \int_0^W \left(\cos \alpha + \frac{c}{\sqrt{W}} + \sqrt{\left(\cos \alpha + \frac{c}{\sqrt{W}} \right)^2 - 1} \right) dW$$

oder

$$z = -\frac{i c^2}{v_0} \left[\frac{W}{c^2} \cos \alpha + \frac{2}{c} \sqrt{W} + \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{\sin^3 \alpha} + \frac{\frac{1}{c} \sin^2 \alpha \sqrt{W} - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right] \\ \cdot \sqrt{\left(\frac{\cos \alpha \sqrt{W}}{c} + 1 \right)^2 - \frac{W}{c^2}} + \frac{1}{\sin^3 \alpha} \arcsin \left[\frac{\sin^2 \alpha}{c} \sqrt{W} - \cos \alpha \right]. \quad (5)$$

Setzen wir in (5), um die Koordinaten der Punkte $B_1 B_2$ resp. deren Abstände von A zu erhalten

$$\sqrt{\Phi} = \frac{c}{1 + \cos \alpha} \quad \text{resp.} \quad = \frac{c}{1 - \cos \alpha}, \quad \Psi = 0,$$

so kommt

$$h_1 = \frac{c^2}{v_0} \left[\frac{2(\cos \alpha - \sin^2 \alpha)}{(1 + \cos \alpha) \sin^2 \alpha} - \frac{\alpha}{\sin^3 \alpha} \right]; \\ h_2 = \frac{c^2}{v_0} \left[\frac{2(\cos \alpha + \sin^2 \alpha)}{(1 - \cos \alpha) \sin^2 \alpha} + \frac{\pi - \alpha}{\sin^3 \alpha} \right]. \quad (6)$$

Daher ist die Tiefe der Platte

$$h = h_1 + h_2 = \frac{(4 + \pi \sin \alpha) c^2}{v_0 \sin^4 \alpha}, \quad \text{also } c^2 = \frac{v_0 \sin^4 \alpha \cdot h}{4 + \pi \sin \alpha}. \quad (7)$$

Den Widerstand berechnet man am einfachsten auf direktem Wege durch Summierung der Drucke längs der Platte. Nach Bernoulli ergibt sich

$$dP = \frac{\rho}{2} (v_0^2 - v^2) = \frac{\rho}{2} \left[\frac{v_0^2}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] dy.$$

Wenn man $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -u v_0$ setzt und vermitteltst (2) und (3) t einführt, erhält man für die Gesamtkraft

$$P = 2 \rho c^2 v_0 \int_{-1}^{+1} \sqrt{t^2 - 1} \frac{dt}{(t - \cos \alpha)^3}.$$

Zur Ausführung der Integration setzt man etwa $t = \frac{1 - \cos \alpha \cos \vartheta}{\cos \alpha - \cos \vartheta}$ und erhält dann

$$P = \frac{2 c^2 \rho v_0}{\sin^3 \alpha} \int_0^\pi \sin^2 \vartheta d\vartheta = \frac{c^2 \rho v_0 \pi}{\sin^3 \alpha}.$$

Benutzt man den in (7) berechneten Wert von c^2 , so wird

$$P = \frac{\rho \pi \sin^4 \alpha \cdot h}{4 + \pi \sin \alpha} \cdot v_0^2. \quad (8)$$

Schließlich läßt sich noch die Lage des Druckmittelpunktes berechnen nach der Gleichung

$$y_0 = \frac{\int y dP}{P}.$$

Für den Abstand vom Zentrum der Platte erhält man z. B. den einfachen Ausdruck

$$y'_0 = \frac{3}{4} \frac{\cos \alpha \cdot h}{4 + \pi \sin \alpha}. \quad (9)$$

Die aus (8) berechneten Werte für den Widerstand der Platte fallen erheblich kleiner aus als die Versuchswerte, was natürlich vor allem darin begründet liegt, daß die Strömungsvorgänge hinter der Platte nur unvollkommen erfaßt und namentlich die Druckverminderung oder Saugwirkung nicht berücksichtigt wurde¹.

¹ Wertvolle neue Anwendungen der Kirchhoff-Helmholtzchen Methode auf das Ausflußproblem gibt v. Mises, Z. V. d. I. Bd. 61, S. 447—452, 469—474, 493—498. 1917,

29. Erweiterung des Rayleighschen Ansatzes für die Platte.

Um den Geschwindigkeits- und Druckverlauf hinter der Platte den wirklichen Verhältnissen besser anzupassen, kann man etwa den unter (4a) des vorigen Abschnittes aufgestellten Ausdruck verallgemeinern durch Aufnahme neuer Konstanten, die auf Grund gewisser Annahmen über den Geschwindigkeitswert an den Ablösungsstellen B_1 und B_2 bestimmt werden können. Wir setzen

$$\frac{dz}{dW} = -\frac{i}{v_0} \left(\cos \alpha + \frac{m_0}{\sqrt{W}} \right) \pm \frac{\sin \alpha}{v_0} \sqrt{1 + \frac{m_1}{\sqrt{W}} + \frac{m_2}{\sqrt{W}}} \quad (1)$$

und ordnen die Werte des Potentials wieder in der Weise der Strömungsebene zu, daß die Potentiallinie $\Phi = 0$ durch den Staupunkt verläuft und die Plattenspur mit den freien, von ihren Enden ausgehenden Stromlinien dem Werte $\Psi = 0$ zugehören¹. Für große Werte von W geht die Beziehung über in

$$\frac{dz}{dW} v_0 = -(\sin \alpha + \cos i \alpha),$$

woraus die Werte

$$v_x = -v_0 \sin \alpha, \quad v_y = -v_0 \cos \alpha$$

sich ergeben. Wir haben also für das Gebiet der Stromlinien B_1C resp. B_2C das negative Vorzeichen der Wurzel zu nehmen.

Für die beiden im Staupunkte entstehenden Zweige der Stromlinien $\Psi = 0$ haben wir mit $\Phi = c$, entsprechend dem ersten Ansatz, für den Ausdruck unter der Wurzel die Werte zu nehmen

$$c + m_1 \sqrt{c} + m_2, \quad c - m_1 \sqrt{c} + m_2.$$

Diese Ausdrücke verschwinden für die Werte $\Phi = c_1$ und $\Phi = c_2$ so daß

$$c_1 + m_1 \sqrt{c_1} + m_2 = 0, \quad c_2 - m_1 \sqrt{c_2} + m_2 = 0,$$

woraus

$$m_1 = -(\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2}), \quad m_2 = -\sqrt{c_1 c_2}.$$

Daraus ergibt sich dann die Geschwindigkeit längs CA

$$(\Psi = 0, \Phi = -c),$$

$$\frac{v_0}{v} = -i \cos \alpha + \frac{m_0}{\sqrt{c}} - \frac{\sin \alpha}{\sqrt{c}} \sqrt{c + \sqrt{c_1 c_2} + i \sqrt{c}(\sqrt{c_1} - \sqrt{c_2})} \quad (2)$$

und längs der Zweige AB_1C , AB_2C ($\Psi = 0$, $\Phi = +c$)

$$\frac{v_0}{v} = i \left[\left(-\cos \alpha \pm \frac{m_0}{\sqrt{c}} \right) \pm \sin \alpha \frac{\sqrt{(\sqrt{c} + \sqrt{c_2})(\sqrt{c_1} - \sqrt{c})}}{\sqrt{c}} \right]. \quad (3)$$

¹ Vgl. L. Jacob, La résistance de l'Air et l'Expérience, tome II, Bibliothèque de Mécanique appliquée et Génie (Encycl. scientif. dir. Toulouse), Paris, 1921, S. 144ff.

Man beweist ohne Schwierigkeit aus (2), daß der erste Teil der Stromlinie $\Psi = 0$ die Platte senkrecht trifft. Da die Wurzeln in (3) reell sind, so lange $\sqrt{c} < \sqrt{c_1}$ und $< \sqrt{c_2}$ ist, so fallen die entsprechenden Teile der Stromlinie in die Strecke $B_1 B_2$. Wenn $\alpha = 90^\circ$ ist, so werden die Geschwindigkeiten spiegelbildlich gleich in bezug auf die reelle Achse.

In den Punkten B_1 und B_2 , also beim Verlassen der ebenen Platte herrschen die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 , die den Gleichungen genügen

$$\frac{v_0}{v_1} = -\cos \alpha + \frac{m_0}{\sqrt{c_1}}, \quad \frac{v_0}{v_2} = \cos \alpha + \frac{m_0}{\sqrt{c_2}}. \quad (4)$$

Daraus folgt dann

$$m_0 = \left(\frac{v_0}{v_1} + \cos \alpha \right) \sqrt{c_1} = \left(\frac{v_0}{v_2} - \cos \alpha \right) \sqrt{c_2}$$

oder

$$c_1 = \lambda \left[\frac{v_0}{v_2} - \cos \alpha \right]^2, \quad c_2 = \lambda \left[\frac{v_0}{v_1} + \cos \alpha \right]^2. \quad (5)$$

Da nun erfahrungsgemäß der Druck hinter der Platte konstant ist, so können wir auch $v_1 = v_2$ setzen, und haben dann

$$c_1 = \lambda \left[\frac{v_0}{v_1} - \cos \alpha \right]^2, \quad c_2 = \lambda \left[\frac{v_0}{v_1} + \cos \alpha \right]^2. \quad (6)$$

Wir setzen voraus, daß der Anstromwinkel größer ausfällt als der kritische, durch die Gleichung

$$\frac{v_0}{v_1} = \cos \alpha$$

bestimmte Wert. Für kleinere Winkel sind andere Grenzbedingungen und andere Gleichungen aufzustellen.

Um die Koordinate y längs der Platte zu berechnen, setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{v_0}{v_1} + \cos \alpha = a, \quad \frac{v_0}{v_1} - \cos \alpha = b,$$

dann gibt (6)

$$m = a \sqrt{c_1} = b \sqrt{c_2}, \quad a^2 c_1 = b^2 c_2.$$

Mit

$$\frac{c_1}{b^2} = \frac{c_2}{a^2} = \lambda, \quad \frac{c}{c_1} = \xi^2, \quad \frac{c}{c_2} = \eta^2$$

erhalten wir für die absoluten Geschwindigkeiten längs der Platte

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_0}{v'} &= \frac{a - \xi \cos \alpha + \sin \alpha \sqrt{(1 - \xi) \left(\frac{a}{b} + \xi \right)}}{\xi} \\ \frac{v_0}{v''} &= \frac{b + \eta \cos \alpha + \sin \alpha \sqrt{(1 - \eta) \left(\frac{b}{a} + \eta \right)}}{\eta} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Andrerseits hat man für die linken Seiten dieser Gleichungen

$$\frac{dy'}{dc} = \frac{dy_1}{2\lambda b^2 \xi d\eta}, \quad \frac{dy''}{dc} = \frac{dy_2}{2\lambda a^2 \eta d\eta},$$

wenn man die von A aus nach beiden Seiten längs der Platte gezählten Koordinaten mit y' und y'' bezeichnet. Daher kommt

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy'}{\lambda} &= 2b^2 \left[a - \xi \cos \alpha + \sin \alpha \sqrt{(1 - \xi) \left(\frac{a}{b} + \xi \right)} \right] d\xi \\ \frac{dy''}{\lambda} &= 2a^2 \left[b + \eta \cos \alpha + \sin \alpha \sqrt{(1 - \eta) \left(\frac{b}{a} + \eta \right)} \right] d\eta. \end{aligned} \right\}$$

Integration ergibt

$$\left. \begin{aligned} \frac{y'}{\lambda} + C_1 &= 2ab^2 \xi - b^2 \xi^2 \cos \alpha + \sin \alpha (a + b)^2 J_1 \\ \frac{y''}{\lambda} + C_2 &= 2a^2 b \eta + a^2 \eta^2 \cos \alpha + \sin \alpha (a + b)^2 J_2, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

wo J' und J'' aus dem Integral

$$J = \int_0^v \sqrt{(1 - v)(\beta + v)} dv$$

dadurch hervorgehen, daß das eine Mal $v = \xi$, $\beta = \frac{a}{b}$ das andre Mal $v = \eta$, $\beta = \frac{b}{a}$ gesetzt wird.

Für das Integral selbst ergibt sich, wenn man $\frac{v + \beta}{1 - v} = t^2$ setzt

$$J = 2(1 + \beta)^2 \left[\frac{t}{8(1 + t^2)} - \frac{t}{4(1 + t^2)^2} + \frac{1}{8} \arctg t \right].$$

Wenn A Anfangspunkt ist ($\xi = 0$, $y' = 0$; $\eta = 0$, $y'' = 0$), so folgt

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \sin \alpha (a + b)^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\sqrt{ab}}{(a + b)} - \frac{b\sqrt{ab}}{(a + b)^2} + \frac{1}{2} \arctg \frac{a}{b} \right] \\ C_2 &= \sin \alpha (a + b)^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\sqrt{ab}}{a + b} - \frac{a\sqrt{ab}}{(a + b)^2} + \frac{1}{2} \arctg \frac{b}{a} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

Sind h_1 und h_2 die Werte von y' und y'' für $\xi = 1$ und $\eta = 1$, d. h. die Abstände der Endkanten der Platten vom Staupunkt, so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \frac{h_1}{\lambda} &= 2ab^2 - b^2 \cos \alpha + \frac{\pi}{4} (a + b)^2 \sin \alpha - C_1 = K_1 \\ \frac{h_2}{\lambda} &= 2a^2 b + a^2 \cos \alpha + \frac{\pi}{4} (a + b)^2 \cos \alpha - C_2 = K_2, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{K_1}{K_2}, \quad \frac{h_1}{h} = \frac{h_1}{h_1 + h_2} = \frac{K_1}{K_1 + K_2}, \quad \frac{h_2}{h} = \frac{K_2}{K_1 + K_2}. \quad (10)$$

Man kann also $\frac{y'}{h}$ und $\frac{y''}{h}$ bestimmen aus der Konstanten, wenn α

und das Geschwindigkeitsverhältnis $\frac{v_0}{v_1}$ gegeben sind. Statt $\frac{y'}{h_1}$ und $\frac{y''}{h_2}$ kann man auch die Verhältnisse $\frac{y_1}{h}$ und $\frac{y_2}{h}$ benutzen, wobei unter y_1 und y_2 die Abstände der Plattenpunkte von den Punkten B zu verstehen sind.

L. Jakob hat genaue Tabellen aufgestellt für die Größe des Druckes in Abhängigkeit von dem Verhältnis $\frac{y_1}{h}$ für verschiedene Anstellwinkel α im Bereiche von 90° bis 36° , der für den gegebenen Ansatz in Frage

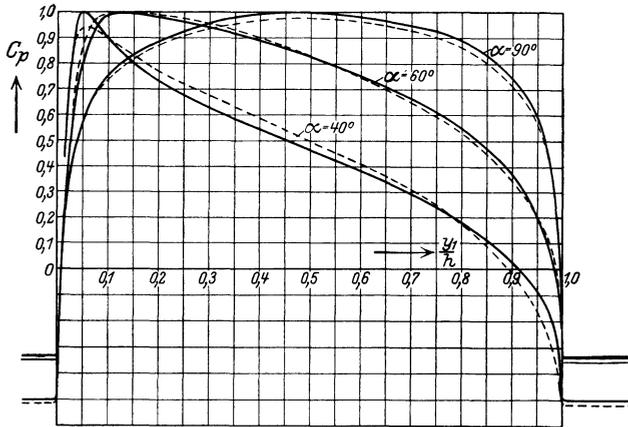


Abb. 77. Druckverlauf längs einer unter dem Winkel α angeströmten Platte. — — — Rechnung — — — Versuch (v. Lafay).

kommt. Wir haben in der Abb. 77 nach diesen Tabellen die Werte des Druckkoeffizienten

$$c_p = \frac{p - p_0}{p_s} = 1 - \frac{v^2}{v_0^2}.$$

nach der Rechnung und nach den französischen Versuchsergebnissen graphisch aufgetragen, um die gute Übereinstimmung beider Wertreihen anschaulich hervortreten zu lassen. Dabei sind folgende, dem Versuch entnommene Werte der Konstanten zugrunde gelegt.

Werte der Konstanten:

α	90°	80°	70°	60°	50°	40°	36°
$\cos \alpha$	0,000	0,174	0,342	0,500	0,643	0,760	0,809
$\frac{v_0}{v_1}$	0,864	0,864	0,863	0,859	0,840	0,816	0,809
$a = \frac{v_0}{v_1} + \cos \alpha$	0,864	1,038	1,205	1,359	1,483	1,582	1,618
$b = \frac{v_0}{v_1} - \cos \alpha$	0,864	0,690	0,521	0,359	0,197	0,050	0,000

Die Übereinstimmung erstreckt sich in diesem Falle auch auf den hinteren Teil der Platten, wo die gemessenen Druckgrößen nur wenig um den Mittelwert

$$c_{x_1} = c_{x_2} = - \left(\left(\frac{v_1}{v_0} \right)^2 - 1 \right)$$

schwanken. In der beigegebenen Tabelle sind ferner die Beiwerte der resultierenden Druckkraft vor der Platte

$$(c_r)_v = \frac{1}{h} \int_0^h c_p dy_1$$

und der um den Saugdruck vermehrten Gesamtkraft

$$c_r = (c_r)_v - (c_r)_h,$$

ferner die Lage des Druckpunktes für sieben Anstellwinkel nach Versuch und Rechnung zusammengestellt.

Resultierende Druckwerte

α	90°	80°	70°	60°	50°	40°	36°
$(c_r)_v$							
Rechnung	0,833	0,832	0,80	0,72	0,61	0,42	0,32
Versuch	0,867	0,832	0,80	0,77	0,63	0,78	0,42
c_r							
Rechnung $((c_r)_h = c_{x_1})$	1,18	1,18	1,14	1,08	1,02	0,93	0,85
Versuch	1,2	1,18	1,12	0,96	1,01	1,01	0,82

Druckpunkt (y_0 Abstand um Endpunkt B_1)

α	90°	80°	70°	60°	50°	40°	36°
$\frac{y_0}{h}$ Rechnung	0,50	0,484	0,468	0,449	0,435	0,422	0,400
Versuch	0,50	0,480	0,459	0,440	0,427	0,417	0,414

Wenn man die Kraft wieder in eine Komponente senkrecht und parallel zur Anströmrichtung verlegt, so hat man

$$c_a = c_r \cos \alpha, \quad c_w = c_r \sin \alpha.$$

Zusammenfassend kann als erwiesen betrachtet werden, daß man tatsächlich durch eine stationäre Potentialströmung ohne Berücksichtigung der Zähigkeit der Flüssigkeit die Kraftverhältnisse an der Platte richtig zu erfassen vermag, wenn man nur auf gewisse durch den Versuch gelieferte Grenzbedingungen Rücksicht nimmt.

30. Unstetiges Potential für die Strömung um den Kreiszyylinder

Die Potentialfunktion. Um ein Potential zu erhalten, das auch für den unendlich langen Kreiszyylinder einen Widerstand zu berechnen gestattet, gehen wir zunächst aus von der idealen symmetri-

schen Strömung

$$W = -v_0 \left(z + \frac{r_0^2}{r} \right) \\ = -v_0 r \left[\cos \varphi \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) + i \sin \varphi \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \right].$$

Fügen wir eine Konstante C_1 hinzu und bestimmen C_1 , so, daß $\Phi = 0$ wird für $\varphi = 0$, $r = r_0$, so kommt

$$C_1 = 2r_0 v_0,$$

dann wird

$$W = 2r_0 v_0 - v_0 \left(r e^{i\varphi} + \frac{r_0^2}{r} e^{-i\varphi} \right).$$

Setzen wir vorläufig $r_0 = 1$ und $v_0 = 1$, so erhalten wir

$$W = 2 - z - \frac{1}{z}$$

und daraus

$$z = 1 - \frac{W}{2} \pm \sqrt{\frac{W^2}{4} - W}; \quad \frac{1}{z} \frac{dz}{dW} = \frac{1}{\sqrt{W(W-4)}}.$$

Diese Form der Darstellung gibt Anlaß zu einer Verallgemeinerung¹. Wir setzen

$$\frac{d \ln z}{dW} = \frac{v_x + i v_y}{z \cdot v^2} = \frac{v_r + i v_\varphi}{r v^2} = \frac{1}{\sqrt{W} [\sqrt{W - c_0} + i f(W)]}, \quad (1)$$

wo wir unter $f(W)$ eine Funktion $m_1 + m_2 W^n + m_3 W^{2n}$ verstehen wollen, und versuchen, diese Beziehung zwischen z und W den Bedingungen unserer Aufgabe und gewissen Versuchsergebnissen anzupassen. Wenn für große $|z|$, $W = -v_0 z$ ist, also die linke Seite den Wert $-\frac{1}{z v_0}$ hat, d. h. unendlich klein von der ersten Ordnung wird, so darf $i \sqrt{W} \cdot f(W)$ nicht von höherer Ordnung unendlich groß werden. Da $2n + \frac{1}{2}$ die höchste Potenz von z wird, so muß $2n < \frac{1}{2}$, $n < \frac{1}{4}$ sein.

Die Stromlinie $\Psi = 0$. Sei zunächst $\Phi = -c$, so ergibt sich aus (1)

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{dc} = \frac{1}{\sqrt{c} [m_1 + m_2 c^n + m_3 c^{2n} + \sqrt{c + c_0}]} \quad (2)$$

die Geschwindigkeit längs der reellen Achse, gleichzeitig die Abhängigkeit des Radiusvektor von den Werten c . Im Staupunkt A wird mit c auch $v = 0$.

Wird Φ positiv $= +c$ und kleiner als c_0 , so geht der Ausdruck (1) über in

$$\frac{1}{r} \frac{v_r + i v_\varphi}{v^2} = \frac{1}{i \sqrt{c} [m_1 + m_2 c^n + m_3 c^{2n} + \sqrt{c_0 - c}]} \quad (2a)$$

¹ Vgl. L. Jacob, a. a. O. II, S. 211.

Da die rechte Seite rein imaginär ist, so verschwindet v_r und die Geschwindigkeit v_φ längs des Zylinders wird

$$\frac{dc}{d\varphi} = r_0 v_\varphi = \sqrt{c} [m_1 + m_2 c^n + m_3 c^{2n} + \sqrt{c_0 - c}]. \quad (3)$$

Wenn $c > c_0$ wird, wird der erste Ausdruck im Nenner von (2) rein imaginär, während der zweite reell bleibt. Die Geschwindigkeit hat also zwei Komponenten v_r und v_φ , d. h. die Stromlinie verläßt im Punkte $\Phi = c = c_0$ den Kreiszyylinder tangential, um nun allmählich wieder der Parallelstromrichtung $v_y = 0$, $v_x = -v_0$ sich anzunähern (Abb. 78).

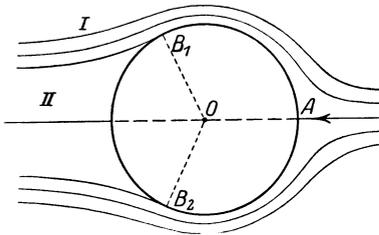


Abb. 78. Unstetige Strömung um einen Kreiszyylinder.

Wenn wir die Variable

$$\frac{c}{c_0} = \xi$$

eingeführen, so erhalten wir aus (1) für das Verhältnis $\frac{v_0}{v}$ der Geschwindigkeit im Unendlichen und längs des Kreisumfanges den Ausdruck

$$\frac{v_0}{v} = \frac{r_0 v_0}{c_0 \sqrt{\xi} [m_1 c_0^{-\frac{1}{2}} + m_2 c_0^{n-\frac{1}{2}} \xi^n + m_3 c_0^{2n-\frac{1}{2}} \xi^{2n} + \sqrt{1-\xi}]} = \frac{r_0 v_0}{c_0} \frac{d\varphi}{d\xi}. \quad (4)$$

Mit den Abkürzungen

$$\frac{r_0 v_0}{c_0} = h, \quad \frac{m_1}{c_0^{\frac{1}{2}}} = a_1, \quad \frac{m_2}{c_0^{\frac{1}{2}-n}} = -a_2, \quad \frac{m_3}{c_0^{\frac{1}{2}-2n}} = a_3$$

haben wir

$$\frac{v_0}{v} = h \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{h}{\sqrt{\xi} [a_1 - a_2 \xi^n + a_3 \xi^{2n} + \sqrt{1-\xi}]}. \quad (4a)$$

Für den Punkt $\xi = 1$, in dem die Stromlinie $\Psi = 0$ den Zylinder verläßt, erhalten wir

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{h}{a_1 - a_2 + a_3}. \quad (5)$$

Sei ferner φ_1 das entsprechende Winkelargument, so wird

$$\varphi_1 = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\xi} [a_1 - a_2 \xi^n + a_3 \xi^{2n} + \sqrt{1-\xi}]}. \quad (6)$$

Was nun die Wahl der Konstanten angeht, so scheint zunächst die Anpassung des Wertes von n an die numerische Auswertung Schwierigkeiten zu begegnen. Um aber überhaupt die Brauchbarkeit der Formeln zu erweisen, ist es zunächst angezeigt, auf die vollständige Erfüllung der Grenzbedingungen im Unendlichen zu verzichten und sich mit der Annäherung $n = \frac{1}{4}$ zu begnügen. Im übrigen wird man die Größen

$h_1 a_1 a_2 a_3$ so festsetzen, daß die durch die Formeln (5) und (6) ausgedrückten Werte $\frac{v_0}{v_1}$ und φ_1 , ungefähr den Verhältnissen bei der wirklichen Strömung entsprechen. Nach Versuchen von Lafay u. a. kann man etwa $\frac{v_0}{v_1} = 1,2$ und für die Konstante h angenähert den Wert $h = \frac{2}{3}$ setzen. Für die übrigen Größen, die natürlich ebenso wie $\frac{v_1}{v_0}$ und h je nach den Versuchsbedingungen innerhalb gewisser Grenzen variieren können, legt L. Jakob seinen Berechnungen die beiden Wertegruppen

1. $a_1 = 0,2, \quad a_2 = 0,2, \quad a_3 = 0,8$
2. $a_1 = 0,2, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0,6$

zugrunde. Für den Ablösungswinkel

$$\varphi_1 = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\xi} [1 - a_2 \xi^{\frac{1}{2}} + a_3 \xi^{\frac{1}{2}} + \sqrt{1 - \xi}]}$$

erhält man im ersten Fall 94° , im zweiten Fall 90° . Bevor wir die Resultate der Rechnung angeben, beschäftigen wir uns noch kurz mit dem zweiten Fall, in dem die Größen z. B. der Winkel φ_1 in endlicher Form darstellbar sind. Wir nehmen hier gleichzeitig Gelegenheit, die Darstellung von L. Jakob etwas zu ergänzen.

Um das Integral

$$\varphi = \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi} (a_1 + a_3 \xi^{\frac{1}{2}} + \sqrt{1 - \xi})}$$

auszuwerten, setzt man

$$\xi = \sin^2 \beta, \quad d\xi = 2 \sin \beta \cos \beta d\beta.$$

Dann wird

$$\varphi = 2 \int \frac{\cos \beta d\beta}{a_1 + a_3 \sin \beta + \cos \beta}.$$

Setzt man weiter

$$a_3 = p \sin \alpha, \quad 1 = p \cos \alpha, \quad \beta - \alpha = \gamma,$$

so geht das Integral über in

$$\varphi = 2 \int \frac{\cos \beta d\beta}{a_1 + p \cos (\beta - \alpha)} = 2 \cos \alpha \int \frac{\cos \gamma d\gamma}{a_1 + p \cos \gamma} - 2 \sin \alpha \int \frac{\sin \gamma d\gamma}{a_1 + p \cos \gamma}.$$

Nun ist

$$\int \frac{\sin \gamma d\beta}{a_1 + p \cos \gamma} = -\frac{1}{p} \ln (a_1 + p \cos \gamma);$$

$$\int \frac{\cos p d\gamma}{a_1 + p \cos \gamma} = \frac{1}{\sqrt{p^2 - a_1^2}} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{p+a_1}{p-a_1}}}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{p+a_1}{p-a_1}}}.$$

Daher wird

$$\varphi = \left[2 \cos \alpha \frac{\gamma}{p} - \frac{2a_1 \cos \alpha}{p \sqrt{p^2 - a_1^2}} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{p+a_1}{p-a_1}}}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{p+a_1}{p-a_1}}} + \frac{2 \sin \alpha}{p} \ln(a_1 + p \cos \gamma) \right]_{-\alpha}^{\beta - \alpha}$$

Setzt man $\beta = \frac{\pi}{2}$, so wird der Ablösungswinkel

$$\varphi_1 = \left. \begin{aligned} & \frac{\pi}{p^2} + \frac{2a_3}{p^2} \ln \frac{a_1 + a_3}{a_1 + 1} \\ & - \frac{2a_1}{p \sqrt{p^2 - a_1^2}} \ln \frac{\left(\frac{1}{p+a_3} + \sqrt{\frac{p+a_1}{p-a_1}} \right) \cdot \left(\frac{a_3}{p+1} + \sqrt{\frac{p+a_1}{p-a_1}} \right)}{\left(\frac{1}{p+a_3} - \sqrt{\frac{p+a_1}{p-a_1}} \right) \cdot \left(\frac{a_3}{p+1} - \sqrt{\frac{p+a_1}{p-a_1}} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Um den Verlauf der Stromlinie $\Psi = 0$ nach der Ablösung festzustellen hat man, da hier $\Phi > c_0$ ist, $\frac{c}{c_0} = \xi = \mathfrak{Cof}^2 \beta$ zu setzen und erhält dann nach (1) und (4a) das Integral

$$\operatorname{lg} z = 2 \int_0^{\beta} \frac{\mathfrak{S}in \beta}{(a_1 + a_3 \mathfrak{Cof} \beta) i + \mathfrak{S}in \beta} d\beta, \quad (8)$$

das in derselben Weise ausgewertet wird wie das vorige. Der Widerstand berechnet sich wieder am einfachsten auf direktem Wege unter gleichzeitiger Benutzung graphischer Hilfsmittel. Wenn $c_p = \frac{p-p_0}{p_s}$ = $1 - \frac{v^2}{v_0^2}$ die charakteristische Zahl für den Druck bezeichnet, der in dem zum Argument φ gehörigen Punkt des Zylinders wirkt, so haben wir für den Widerstand

$$P_w = r_0 p_s \int_0^{2\pi} c_p \cos \varphi d\varphi. \quad (9)$$

Er läßt sich als Differenz der Druckresultanten des vorderen und hinteren Teiles des Zylinders darstellen. Da der Unterdruck auf der Hinterseite als konstant angesehen und gleich dem an der Ablösungsstelle $\varphi = \varphi_1$ herrschenden Druck c_{p_1} gesetzt werden kann, so haben wir

$$P_w = 2r_0 p_s \left\{ \int_0^{\varphi_1} c_{p_1} \cos \varphi d\varphi + c_{p_2} \sin \varphi_1 \right\}. \quad (9a)$$

Der Beiwert des Widerstandes wird also

$$c_w = \int_0^{\varphi_1} c_p \cos \varphi d\varphi + c_{p_1} \sin \varphi_1. \quad (10)$$

In den Abb. 79 u. 80 haben wir den theoretischen Verlauf der Geschwindigkeit und des Druckes längs des Kreiszyinders, sowie die

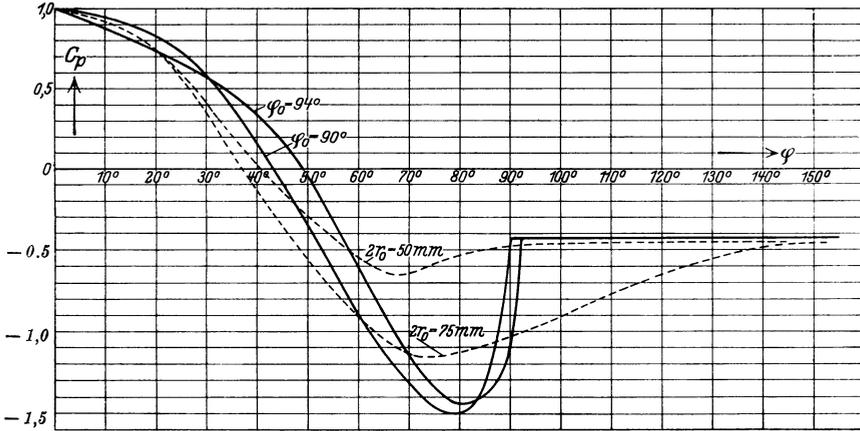


Abb. 79. Druckverlauf an einem Kreiszyylinder in einer unstetigen Strömung. ——— Rechnung — — — Versuch.

Funktion $c_p \cos \varphi$ für die oben angegebenen Fälle graphisch dargestellt; ferner zum Vergleich die entsprechenden Größen nach den Versuchen von Lafay. Man erkennt, daß z. B. im Gebiete der großen Geschwindigkeiten und kleinen Drucke (also um 80°) die theoretischen und Versuchswerte ziemlich stark voneinanderabweichen. Diese Abweichung fällt aber, da die Komponenten in der axialen Richtung nur klein sind, für den Wert des gesamten Widerstandes wenig ins Gewicht.

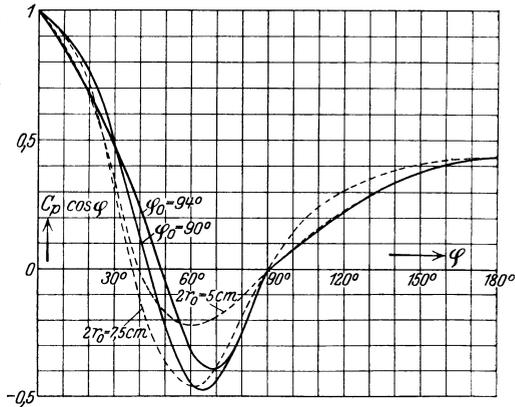


Abb. 80. Verlauf der Komponente des Druckes an einem Kreiszyylinder in der Bewegungsrichtung. ——— Rechnung — — — Versuch (v. Lafay).

Die graphische Auswertung ergibt für die beiden Fälle

$\varphi_1 = 94^\circ$	$\varphi_1 = 90^\circ$
c_w (vorn) + 0,305	+ 0,240
c_w (hinten) - 0,434	- 0,434
c_w (gesamt) = 0,739	+ 0,674

Der berechnete Gesamtwiderstand stimmt mit den französischen Messungen, die an einem Zylinder mit dem Druckmesser $2r_0 = 50\text{ mm}$ in einer Strömung mit der Geschwindigkeit $v_0 = 18$ bis 25 m/sek. angenommen wurden, gut überein¹.

¹ Vgl. L. Jakob, a. a. O. II. S. 254.

31. Die Methode von Levi-Civita.

Ein im wesentlichen mathematisches Interesse bietet die von Levi-Civita angegebene Methode zur Berechnung der Druckwirkung der Flüssigkeit auf ein Hindernis C , das zunächst keiner Beschränkung hinsichtlich der Form unterworfen sein soll¹. Wir nehmen an, daß die

Richtung der ungestörten Strömung in die positive x -Achse fällt

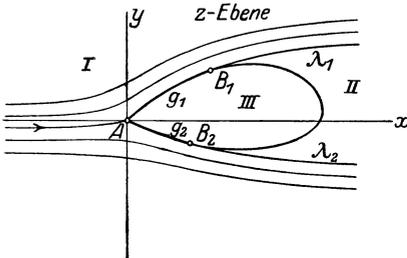


Abb. 81. Unstetige Strömung gegen ein Hindernis.

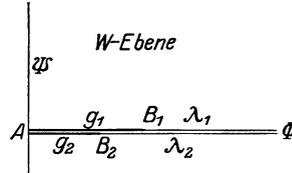


Abb. 82a. Zur konformen Abbildung von Levi-Civita.

und daß die auf den Staupunkt A (der zugleich Eckpunkt sein kann und als Anfang der Koordinatenzählung gelten möge) treffende Stromlinie

sich in zwei Zweige spaltet, die bis zu den Ablösungspunkten B_1 und B_2 mit den Konturstücken g_1 und g_2 zusammenfallen, um dann als freie Strahlen λ_1 λ_2 in das äußere Strömungsgebiet überzutreten, längs deren die Geschwindigkeit wie im Helmholtz-Kirchhoffschen Fall den konstanten Wert $v_\infty = (v_x)_\infty = 1$ hat. Die Linien g_1 λ_1 , g_2 λ_2 trennen das Stromfeld I vom Totraum II ab, der mit C zusammen die x -Achse einschließen möge. Wenn im Staupunkt A die Funktionen Φ und Ψ beide verschwinden, so ist das Stromgebiet in der z -Ebene in ein-eindeutiger Weise der ganzen längs der positiven Halbebene aufgeschnittenen W -Ebene zugeordnet, wie es die

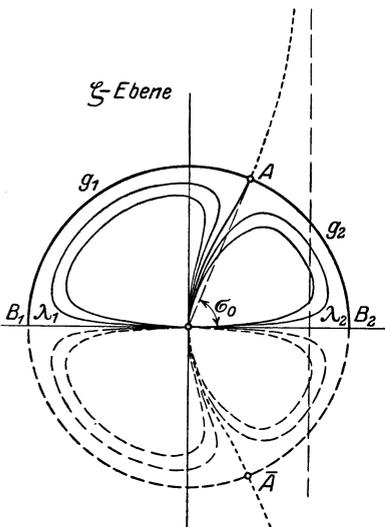


Abb. 82b. Zur konformen Abbildung von Levi-Civita.

Abb. 82a zum Ausdruck bringt. Statt der Geschwindigkeitsfunktion

$$\bar{v} = \frac{dW}{dz} \text{ führt L.-C. die Veränderliche } \omega \text{ ein durch die Beziehung} \tag{1}$$

$$\bar{v} = e^{-i\omega},$$

die in der ganzen W -Ebene eindeutig und stetig ist mit Ausnahme der

¹ T. Levi-Civita, Scie e leggi di resistenza, Rend. Circolo mat. Palermo Bd. 23, S. 1—37. 1907.

Stelle $W = 0$, wo $i\omega$ gegen Unendlich konvergiert. Für $W = \infty$ wird $\omega = 0$.

Um die Übertragung der zerschnittenen W -Ebene auf das Innere eines Halbkreises durchzuführen, kann man zunächst die Funktion F durch die Gleichung

$$W = F^2, \quad F = \pm \sqrt{W}$$

einführen. Der Realachse von F entsprechen die beiden Ränder der W -Ebene. Setzt man den Punkten B_1 und B_2 entsprechend

$$F_1 = \sqrt{W_1}; \quad -F_2 = -\sqrt{W_2}$$

und

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{1}{2}(F_1 + F_2)Z + \frac{1}{2}(F_1 - F_2) = a(Z + \cos \sigma_0) \\ \left(\cos \sigma_0 &= \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2}; \quad \frac{1}{2}(F_1 + F_2) = a \right), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ferner

$$Z = -\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) \quad (3)$$

so sieht man, daß in der Tat die beiden Randstücke g_1 und g_2 den beiden vom Punkt $\zeta_0 = e^{i\sigma_0}$ ausgehenden Halbkreisbögen und die freien Linien λ_1 und λ_2 den beiden Grenzradien des Halbkreises $|\zeta| = 1$ entsprechen, daß ferner das äußere Stromfeld I auf das Innere $|\zeta| < 1$ des Halbkreises sich abbildet.

Jede in der zerschnittenen Ebene reguläre Funktion von W , z. B. ω , läßt sich demnach als Funktion von ζ betrachten, die innerhalb des Halbkreises $|\zeta| = 1$

F	Z	ζ
0	$-\cos \sigma_0$	$e^{i\sigma_0}$
F_1	+ 1	- 1
$-F_2$	- 1	+ 1
$\pm \infty$	∞	0

regulär ist. Da ferner ω reell ist längs der Radien λ_1 und λ_2 , so kann die Funktion $\omega(\zeta)$ in den unteren Halbkreis spiegelbildlich fortgesetzt werden; dem singulären Punkt $\zeta_0 = e^{i\sigma_0}$ entspricht dabei der Punkt $-\zeta_0 = e^{-i\sigma_0}$.

Wesentlich ist nun, daß sich die charakteristischen Bestimmungsgrößen der Strömung in verhältnismäßig übersichtlicher Weise durch ζ und $\omega(\zeta)$ ausdrücken lassen.

Die Stromlinien. Um etwa das Bild der Stromlinienschar in der ζ -Ebene zu finden, haben wir

$$\psi = \frac{W - \bar{W}}{2i} = c$$

zu transformieren. Nun ist

$$W = F^2 = a^2(Z + \cos \sigma_0)^2; \quad \bar{W} = a^2(Z - \cos \sigma_0)^2.$$

Wir erhalten daher, wenn wir $c = \frac{a^2 b}{2}$ setzen

$$(Z + \bar{Z} + 2 \cos \sigma_0)(Z - \bar{Z}) = i b.$$

Wenn wir ζ einführen, so geht die Gleichung über in

$$[\xi(\xi^2 + \eta^2 + 1) - 2 \cos \sigma_0(\xi^2 + \eta^2)](\xi^2 + \eta^2 - 1)\eta = b(\xi^2 + \eta^2). \quad (4)$$

Die Bilder der Stromlinien in der ζ -Ebene sind also innerhalb des Halbkreises verlaufende Kurven 6. Ordnung. Entsprechend der Stromlinie, die auf den Staupunkt $z = 0$ trifft und sich hier verzweigt, zerfällt die Sextik für $b = 0$ in die ξ -Achse $\eta = 0$, den Kreis $\xi^2 + \eta^2 = 1$ und die Kubik k

$$\xi(\xi^2 + \eta^2 + 1) - 2 \cos \sigma_0(\xi^2 + \eta^2) = 0. \quad (5)$$

Diese letztere, innerhalb des Halbkreises, das Abbild der von $z = -\infty$ bis $z = 0$ reichenden Stromlinie, berührt im Nullpunkt die η -Achse und durchschneidet den Kreis im singulären Punkt ζ_0 rechtwinklig; ihr Verlauf außerhalb des Halbkreises ist durch die im Unendlichen gelegene Berührung mit der Geraden $\xi = 2 \cos \sigma_0 = 2 \zeta_{0x}$ charakterisiert. Die übrigen Stromlinienbilder verlaufen innerhalb der von den Linien $kg_1\lambda_1$ resp. $kg_2\lambda_2$ gebildeten Bereiche und haben im Nullpunkt einen gemeinsamen Doppelpunkt, dessen Tangenten in die Achsen fallen (vgl. Abb. 82b).

Die Geschwindigkeitsfunktion. Wenn wir die Variable $\omega = \vartheta + i\tau$ setzen, so wird die komplexe Geschwindigkeit

$$\bar{v} = e^\tau \cdot e^{-i\vartheta}.$$

Der Realteil ϑ von ω gibt also die Richtung des Geschwindigkeitsvektors, der Imaginärteil ist der Logarithmus des Absolutwertes. Weiter ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} dW &= 2F dF; & dF &= a dZ = -\frac{1}{2} a \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ dW &= \frac{1}{2} a^2 \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2 \cos \sigma_0 \right) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{d\zeta}{\zeta}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Da $z = 0$, $W = 0$, $\zeta = \zeta_0 = e^{i\sigma_0}$ einander entsprechen, so wird

$$z = \int_{\zeta_0}^{\zeta} e^{i\omega} dW. \quad (7)$$

Wenn also ω als Funktion von ζ gegeben ist, so lassen sich nachträglich die Form des Hindernisses und die freien Grenzen der Strömung bestimmen. Um z. B. die Linien g_1 und g_2 darzustellen, setzt man $\zeta = e^{i\sigma}$ und findet durch einfache Rechnung

$$\left. \begin{aligned} x &= 2a^2 \int_0^{\sigma_0} e^{-\tau} \cos \vartheta (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \sin \sigma d\sigma \\ y &= 2a^2 \int_0^{\sigma_0} e^{-\tau} \sin \vartheta (\cos \sigma - \cos \sigma_0) \sin \sigma d\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

In ähnlicher Weise kann man λ_1 und λ_2 durch Integrale darstellen.

Die Kraftwirkung. Die von Levi-Civita benutzte Formel für die Resultierende, auf das Hindernis ausgeübte Druckkraft P kann auch direkt aus der Blasiuschen Formel abgeleitet werden. In der Tat ergibt sich aus

$$\bar{P} = P_x - iP_y = \frac{i\varrho}{2} \int \bar{v}^2 dz,$$

wenn man $\bar{v} = e^{-i\omega}$, $dz = e^{i\omega} dW$ setzt,

$$\bar{P} = \frac{i\varrho}{2} \int e^{-i\omega} dW. \quad (9)$$

Verwandelt man i in $-i$, so hat man für den Kraftvektor unmittelbar

$$P_x + iP_y = -\frac{i\varrho}{2} \oint e^{i\omega} dW = \frac{\varrho}{2i} \oint e^{i\omega} dW. \quad (9a)$$

Hier ist für dW der Ausdruck (6) und für ω eine noch zu ermittelnde Funktion von ζ zu substituieren und das Integral über den ganzen Halbkreis der ζ -Ebene zu erstrecken. Für die Auswertung kommt nur das Residuum des Integranden für den einzigen in $\zeta = 0$ gelegenen Pol in Betracht. Ebenso erhält man das Moment aus der Blasiuschen Formel als reellen Bestandteil folgenden Integrals

$$M + iN = -\frac{\varrho}{2} \oint e^{-i\omega} \left(\int_{\zeta_0}^{\zeta} e^{-i\omega} dW \right) dW. \quad (10)$$

Die Funktion $\omega(\zeta)$ bestimmt im wesentlichen den Charakter des besonderen Strömungsfeldes, d. h. die Form des Hindernisses. Sie besitzt als einzige Singularitäten den Spaltungspunkt A und sein Spiegelbild \bar{A} auf dem Einheitskreis der ζ -Ebene.

Nun läßt sich aber eine elementare transzendente Funktion $\omega_0(\zeta)$ angeben, welche die vorgeschriebene Singularität, d. h. eine Diskontinuität des Realteils ϑ_0 besitzt und einer aus zwei geraden Strecken bestehenden Kontur entspricht. Wenn wir annehmen, daß die von A ausgehenden Tangenten der Kontur die Winkel $\delta + \alpha$ und $-(\delta - \alpha)$ mit der reellen Achse bilden, so können wir $\omega_0(\zeta)$ in der Form

$$\omega_0 = \delta + \frac{2i\alpha}{\pi} \lg i \frac{\zeta - e^{i\sigma_0}}{1 - \zeta e^{i\sigma_0}} \quad (11)$$

annehmen. In der Tat ergibt sich für den Logarithmus, wenn wir $\zeta = e^{i\sigma}$ setzen

$$\lg i \frac{\zeta - e^{i\sigma_0}}{1 - \zeta e^{i\sigma_0}} = \lg \frac{\sin \frac{\sigma_0 - \sigma}{2}}{\sin \frac{\sigma_0 + \sigma}{2}} \pm i \frac{\pi}{2},$$

je nachdem $\sigma \leq \sigma_0$ ist.

Die allgemeine Funktion $\omega(\zeta)$ läßt sich dann darstellen als Summe der partikulären Funktion ω_0 und einer als Reihe mit reellen Koeffizienten entwickelbaren Funktion

$$\Omega(\zeta) = \sum_0^{\infty} C_n \zeta^n, \quad (12)$$

die im ganzen Einheitskreis regulär, auf der Realachse reell und auf dem Einheitskreis endlich und stetig ist.

Statt der von Levi-Civita eingeführten Reihe sind von Villat, Cisotti u. a. andere Funktionen herangezogen worden, die einen unmittelbaren Zusammenhang mit der Kontur besitzen. Ferner gelingt es, durch geringe Abänderung der Voraussetzungen nach der Methode von Levi-Civita andere Strömungsfälle, z. B. den Ausfluß eines freien Strahles aus einem beliebig geformten Gefäß (Cisotti), die Strömung in einem Kanal bei beliebiger Bodenform (Colonetti), die Ausströmung eines Strahls aus einer Düse auf eine Platte (Valcovici) u. a. zu behandeln. Ein zusammenhängender Bericht über die Literatur der un stetigen und mehrdeutigen Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen, auch für den räumlichen Fall, ist von Jaffe¹ gegeben worden.

VII. Theorie des Tragflügels.

32. Geometrie des Flügelprofils.

1. Die abbildende Funktion. Nachdem wir die zweidimensionale Strömung um einen Kreiszyylinder K eingehend analysiert haben, bedarf es nach früherem nur einer abbildenden Funktion, um die gleichwertige Strömung um andere Zylinder zu konstruieren. Indem wir voraussetzen, daß diese Kontur C einen einfachen geschlossenen Charakter hat und keine Selbstüberschneidungen aufweist, so wird die abbildende Funktion, welche die Randpunkte und die Punkte der Außengebiete von C und K in eindeutiger Weise ineinander überführt, so daß die unendlich fernen Punkte beider Ebenen, der ζ - und z -Ebene einander entsprechen, durch die folgende Reihe darstellbar sein

$$z = c_0 + \frac{1}{n} \left(\zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \dots \right), \quad (1)$$

wo $c_i = a_i + ib_i$ gesetzt und n als reell vorausgesetzt sein möge. Durch eine Parallelverschiebung und Ähnlichkeitstransformation des Profils kann man (1) in die Normalform

$$z = \zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \dots \quad (2)$$

¹ Z. ang. Math. Mech. 1921, Heft 5, S. 389—410.

überführen und damit eine natürliche Zuordnung zustande bringen, wenn man beide Ebenen mit den Bezugsachsen aufeinanderlegt¹.

Umgekehrt gibt es nach einem bekannten Satz der Funktionentheorie eine und nur eine Transformation von der Form (2) resp. eine inverse Funktion

$$\zeta = z - \frac{c_1}{z} + \frac{c'_2}{z^2} + \dots \quad (3)$$

welche das Außengebiet einer bestimmt gegebenen geschlossenen Kontur schlicht auf das Äußere eines Kreises der ζ -Ebene abbildet. Den Kreis, der nach Größe und bei der erwähnten geometrischen Zuordnung auch nach Lage eindeutig bestimmt ist, werde ich den Grundkreis K_0 des Profils C nennen.

Wir werden nun im folgenden als Konturen C vor allem sog. Flügelprofilformen zugrunde legen, wie sie als Querschnitte von Tragflügelorganen bei Flugzeugen oder Propellern vorkommen. Diese Profile sind durch längliche Gestalt und dadurch gekennzeichnet, daß das vordere Ende, das sich gegen die Luft bewegt, abgerundet und das hintere Ende zur Verminderung des Widerstandes zugespitzt erscheint. Da in dem Punkte, der der hinteren scharfen Kante des Profils entspricht, zwei Tangenten möglich sind, die einen kleinen spitzen Winkel mit einander bilden, oder auch zusammenfallen können, so wird hier die Ableitung $\frac{dz}{d\zeta}$ verschwinden, also die Konformität der Abbildung eine Unterbrechung erleiden. Wenn wir also aus dem Kreise Flügelprofile und die entsprechenden Strömungsfelder gewinnen wollen, so haben wir eine bestimmte Nullstelle $\zeta_0 = \frac{dz}{d\zeta}$, die der Flügelspitze entsprechen soll, auf der Kreisperipherie, die übrigen n Nullstellen $\zeta_1 \dots \zeta_n$ aber im Innern des Kreises anzunehmen, damit im Gebiet der Strömung die Konformität gewahrt bleibt².

Wenn die Nullstellen die Ordnung 1 haben, so muß die Ordnung des Unendlichwerdens im Kreise $= n + 1$ sein, damit der unendlich ferne Punkt ein regulärer Punkt wird. Wir können also für die Ableitung bei Annahme nur eines Poles etwa die Form ansetzen.

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{(\zeta + r_0 e^{i\varphi_0})(\zeta - \zeta_1) \dots (\zeta - \zeta_n)}{(\zeta - \zeta_0)^{n+1}} \quad (4)$$

Als notwendige Bedingung dafür, daß die Abbildung außerhalb K_0 eindeutig ist, d. h. bei der Integration kein logarithmisches Glied auf-

¹ R. v. Mises, Zur Theorie des Tragflächenantriebs. Z. Flugtechn. 1917, S. 157; ebenda 1920, S. 68 u. 87.

Wilh. Müller, Über ebene Profilströmung und Zirkulation. Z. ang. Math. Mech. Bd. 3, S. 117—128. 1923.

² Vgl. Wilh. Müller, Zur Konstruktion von Tragflächenprofilen. Z. ang. Math. Mech., Bd. 4, S. 213—231. 1924.

tritt, ergibt sich ferner

$$\zeta_0 + \zeta_1 + \cdots + \zeta_n = (n+1)\zeta_s. \quad (5)$$

Der Schwerpunkt der mit gleicher Masse (etwa = 1) belegt gedachten Nullstellen muß also in den Pol fallen.

Wenn etwa $\zeta_s = 0$ ist, so ergeben sich aus (4) die Koeffizienten der Entwicklung (2) zu

$$c_1 = - \sum \zeta_i \zeta_k, \quad c_2 = \frac{1}{2} \sum \zeta_i \zeta_k \zeta_l, \quad c_3 = - \frac{1}{3} \sum \zeta_i \zeta_k \zeta_l \zeta_m. \quad (6)$$

(i, k, l, m verschieden)

Unter den sonstigen, übrigens in ihrer Vollständigkeit nicht bekannten Einschränkungen, die erfüllt sein müssen, damit eine doppelpunktfreie Profilkurve entsteht, heben wir noch heraus, daß der absolute Betrag des für die Folge wichtigsten Koeffizienten c_1 kleiner als das Quadrat des Radius r_0 des Grundkreises werden muß. Wenn nun, wie durch empirische Konstruktion festgestellt sein mag, eine Jordansche Kontur entsteht, so wird nach einem Satz von Bieberbach die Abbildung für die angegebene Lage der Nullstellen, im ganzen Außenraum des Kreises schlicht ausfallen (vgl. S. 86).

Als einfachstes Beispiel wählen wir etwa zwei Nullstellen und einen Pol

$$\zeta_s = -r_0 e^{i\varphi_0} + p, \quad \zeta_1 = -r_0 e^{i\varphi_0} + 2p = \zeta_s + p \quad (p < r_0 \cos \varphi_0).$$

Dann erhalten wir

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{(\zeta - \zeta_s)^2 - p^2}{(\zeta - \zeta_s)^2} = 1 - \frac{p^2}{(\zeta - \zeta_s)^2}$$

$$z = \zeta + \frac{p^2}{\zeta - \zeta_s} + c.$$

Wenn wir den Koordinatenanfangspunkt in den Pol verlegen und die Zuordnung der Ebenen in der Normalform annehmen, so wird

$$z = \zeta + \frac{p^2}{\zeta}. \quad (7)$$

Die Transformation ist schon von früher her bekannt. Unter den jetzigen allgemeinen Voraussetzungen erhalten wir aus dem Kreise das sog. Joukowskische Profil. Wenn wir die Spitze des Profils in den Anfangspunkt der ζ -Ebene legen und den Pol im Nullpunkt der ζ -Ebene lassen, so lautet die Transformation

$$z = \frac{(\zeta + p)^2}{\zeta}.$$

Die Normalform (7) gibt die bekannte Konstruktion des Profils aus dem Grundkreis K_0 . Jeder Punkt ergibt sich als Endpunkt der geo-

metrischen Summe zweier Ortsvektoren $\zeta = r_0 e^{i\varphi}$ und $\frac{p^2}{\zeta} = \frac{p^2}{r_0} e^{-i\varphi}$.

Die Gesamtheit der Punkte $\frac{p^2}{\zeta}$ ist ein Kreis K_1 , der den Grundkreis im Punkte $-p^2$ berührt und dessen Mittelpunkt auf einem Strahl durch 0 geht, der in bezug auf die imaginäre Achse spiegelbildlich liegt zum Strahl OM_0 (Abb. 83). Ähnlich verfährt man, wenn man drei und mehr Nullstellen zugrunde legt. Während das Joukowskysche Profil außer vom Grundkreisradius noch von zwei weiteren Größen abhängt, die bzw. Dicke und Wölbung bestimmen, wächst natürlich die Mannigfaltigkeit der Formen mit der Zahl der Nullstellen. Eine ausführliche Diskussion der wichtigsten Formengruppen ($n = 2, 3, 4$) ist in der ausgeführten Arbeit des Verfassers durchgeführt. Hier ist auch der Fall der Eckenprofile behandelt, bei denen die Tangenten im Spurpunkt der Hinterkante einen Winkel $\vartheta = \pi(2 - k)$ miteinander bilden, entsprechend dem Auftreten einer $k - 1$ -fachen Nullstelle $\zeta = \zeta_0$ in der

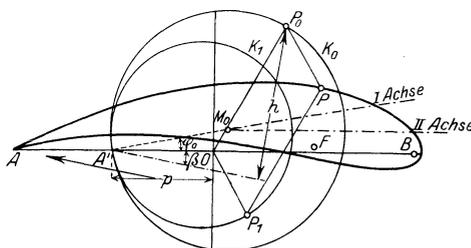


Abb. 83. Zur Konstruktion des Joukowskyschen Profils.

Ableitung $\frac{dz}{d\zeta}$ (vgl. die früher benutzte Trefftz-Karmansche Abbildung).

2. Die geometrischen Invarianten des Profils. In der bereits erwähnten Arbeit von v. Mises sind einige Betrachtungen über die Invarianten des Profils angestellt, die hier kurz zusammengefaßt und ergänzt werden sollen. Die oben eingeführte natürliche Zuordnung von Kreis und Profil, die der Abb. (2) resp. (3) entspricht, gestattet uns, den Mittelpunkt M_0 des Grundkreises als einen seiner Lage nach dem Profil eigentümlichen Punkt anzusprechen, und „als Mittelpunkt des Profils“ zu bezeichnen. Die Verbindungslinie des Mittelpunktes mit demjenigen Punkt A' des Kreises, der sich in den Hinterkantenpunkt A des Profils C transformiert, nennen wir mit v. Mises die „erste Achse“ des Profils. Wenn nun der Koeffizient in der auf ein bestimmtes Achsensystem bezogenen Transformationsgleichung (2) die Form $c_1 = p^2 e^{2i\gamma}$ hat, so muß man offenbar die reelle Achse beider Ebenen im positiven Sinne um den Winkel γ drehen, also $z' = z e^{-i\gamma}$, $\zeta' = \zeta e^{-i\gamma}$ setzen, damit in der neuen Gleichung

$$z' = \zeta + \frac{p^2}{\zeta^2} + \dots$$

der Koeffizient der ersten negativen Potenz von ζ' reell wird. Diese neue Richtung der reellen Achse ist eine für das Profil invariante Richtung. Wir können etwa die durch M_0 gezogene Parallele als „zweite Achse“

des Profils einführen. Während diese Richtung für die hier benutzten Profilformen etwa die Rolle der natürlichen Längsachse spielt, kann der Winkel φ_0 zwischen der ersten und zweiten Achse als Maß für die Hauptkrümmung oder die „Wölbung“ des Flügels benutzt werden (Abb. 83).

Den Mittelpunkt M_0 und die Längsachse des Profils kann man auch massengeometrisch deuten. Denken wir uns die Berandung des Grundkreises gleichmäßig mit der Masse etwa von der Dichte 1 belegt und übertragen wir diese Belegung so auf den Profilrand, daß die Masse der vermöge (2) einander entsprechenden Bogenelemente einander gleich sind, so fällt der Schwerpunkt der Profilberandung in den Punkt M_0 der daher auch „konformer Schwerpunkt“ genannt wird¹. Unter derselben Voraussetzung hat dann die zweite Achse und ihre durch M_0 gezogene Senkrechte, wie der Verfasser zeigen konnte, die Bedeutung von Hauptträgheitsachsen in bezug auf den „konform belegten“ Profilrand². Wenn man die Werte der Hauptträgheitsmomente selbst aufstellt, so ergibt sich eine anschauliche Deutung verschiedener aus den Koeffizienten c_i gebildeten Reihen, ferner eine Reihe von geometrischen Sätzen, die funktionentheoretisch von Wert sein dürften.

33. Die Profilströmung mit Zirkulation.

Entstehung der Zirkulation. Wenn sich eine Tragfläche mit der Geschwindigkeit v_0 in der im Unendlichen ruhenden Luft bewegt oder wenn eine im Unendlichen homogene Strömung eine ruhende Tragfläche trifft, so würde, wenn keine Reibung vorhanden wäre, die Flüssigkeit in zwei Punkten A und B des Profils sich stauen, an der Hinterkante aber unendlich große Geschwindigkeit erhalten (Abb. 84).

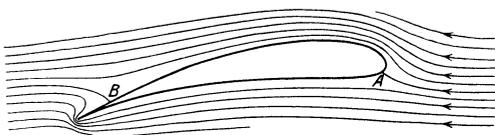


Abb. 84. Ideale Relativströmung um einen Flügel (ohne Zirkulation).

Wenn nun auch die „ideale“ Lage des hinteren Staupunktes (auf der Oberseite) am Anfang der Bewegung verwirklicht erscheint und auch unter besonderen Ver-

suchsbedingungen am Modell erreicht werden kann, so erweist sich doch das Auftreten der unendlich großen Geschwindigkeiten, die einen unendlich großen Unterdruck bedingen würden, praktisch als unmöglich. Mathematisch wird man der Forderung endlicher Ge-

¹ Th. Frank u. K. Löwner, Die Anwendung des Koebeschen Verzerrungssatzes auf ein Problem der Hydrodynamik. Z. ang. Math. Meeh. Bd. 3 S. 83ff. (1919).

² Wilh. Müller, Zur Theorie der Misesschen Profilachsen. Z. ang. Math. Mech. Bd. 4 S. 186—187. (1924).

schwindigkeit, wie Wagner¹ im einzelnen gezeigt hat, nur dadurch gerecht, daß man die Stetigkeit der Strömung aufgibt und die hintere Kante zum Ursprung einer Diskontinuitätsfläche macht, die sich in die Flüssigkeit hinein erstreckt und als eine Wirbelschicht mit einer nach unserer Orientierung dem Uhrzeigersinne folgende Wirbelung aufgefaßt werden kann (Abb. 85). Im Wesen befindet sich diese Annahme in Übereinstimmung mit der Wirklichkeit, die nur ungleich kompliziertere und mathematisch im einzelnen nicht mehr erfaßbare Vorgänge zeigt. Wenn man zunächst von der Reibung absieht, die zweifellos im Gebiet der Grenzschicht der wichtigste auslösende Faktor für die Wirbelbildung ist, aber in der freien Flüssigkeit eine kaum meßbare Rolle spielt, so kann man hier die Gültigkeit der Idealgesetze zugrunde legen und auf die Entstehung einer der Gesamtstärke der Unstetigkeit entgegengesetzten Zirkulation um den Trag-

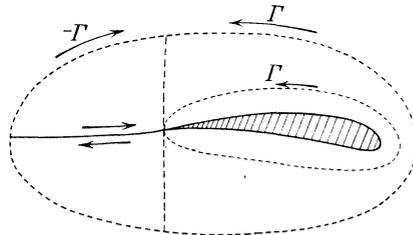


Abb. 85. Zur Entstehung der Zirkulation.

flügel schließen. Der mathematische Ausdruck dafür ergibt sich aus dem Thomsonschen Spiegelungsgesetz. Wenn man die Strömung um das Profil auf das Äußere des Grundkreises überträgt, so muß man die entsprechende Diskontinuitätslinie außerhalb des Kreises an der Kreis-kontur spiegeln, damit der Kreis Stromlinie bleibt. Dieses spiegelbildliche Wirbelsystem, das sich entsprechend auf das Innere des Profils überträgt, bedingt aber eine Umkreisung der Kontur in einem der äußeren Wirbelung entgegengesetzten Sinne.

Die von H. Wagner durchgeführte Rechnung zeigt nun, daß während der Anfahrt des Flügels immer neue Teile der Unstetigkeitsfläche sich bilden, während die bereits gebildeten bestehen bleiben, daß daher auch die Zirkulation um den Flügel, die die äußere Zirkulation zu Null ergänzt, fortwährend wächst, bis der Geschwindigkeitssprung an den neu entstehenden Teilen der Unstetigkeitsfläche allmählich verschwindet (vgl. auch Abschnitt 39). Dann hat der Tragflügel einen gewissen stationären Zustand entsprechende Grenz-zirkulation erhalten, die rechnerisch jetzt unter der Voraussetzung gleichmäßiger Bewegung so zu bestimmen ist, daß an der Hinterkante des Profils ein glattes, d. h. tangenciales Abströmen der Flüssigkeit stattfindet, also endliche Werte der Geschwindigkeit auftreten.

¹ H. Wagner, Die Entstehung der Tragflügelkräfte. Z. V. d. I. 1924, Bd. 68, S. 926 (6. Tagung f. Luftfahrt in Hannover). — Von demselben, Über die Entstehung des dynam. Auftriebs von Tragflügeln. Z. ang. Math. Mech. 1925, S. 17—35.

2. Um nun den idealen Grenzwert der Zirkulation Γ um einen Tragflügel zu berechnen, gehen wir auf den Zusammenhang mit dem Kreiszyylinder und der entsprechenden Strömung zurück und nehmen zugleich vorläufig an, daß das äußere freie Wirbelsystem ins Unendliche verschwunden wäre.

Wenn wir den Anfangspunkt der Koordinaten in den Mittelpunkt M_0 des Kreises (zugleich Mittelpunkt des Profils) legen, so lautet bekanntlich das allgemeine komplexe Potential für eine Strömung um den Kreiszyylinder, die sich zusammensetzt aus einer Parallelströmung mit einer Geschwindigkeit im Unendlichen

$$\bar{v}_\infty = -v_0 e^{i\beta}$$

und einer Zirkulationsströmung

$$W = -v_0 \left(e^{i\beta} \zeta + e^{-i\beta} \frac{r_0^2}{\zeta} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \zeta. \quad (1)$$

Wie früher gezeigt wurde, drückt sich die Zirkulation durch den Stauwinkel φ_0 folgendermaßen aus

$$\Gamma = 4\pi r_0 v_0 \sin(\varphi_0 + \beta). \quad (2)$$

Wenn wir nun diese Verhältnisse auf die entsprechende Profilströmung übertragen durch eine Transformation

$$z = \zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \dots, \quad \zeta = z + \frac{c'_1}{z} + \frac{c'_2}{z^2} + \dots (c'_1 = -c_1), \quad (3)$$

bei der der hintere Staupunkt $-r_0 e^{i\varphi_0}$ des Kreises in den Hinterkantenpunkt des Profils übergeführt wird, so hat der Winkel φ_0 für das Profil die Bedeutung des Wölbungswinkels unter der Voraussetzung, daß die x -Achse zweite Profalachse, also der Koeffizient c_1 reell ist. Der Winkel β dagegen kann als der natürliche Anstellwinkel für die Bewegung des Flügels angesprochen werden.

Die Geschwindigkeit in einem Punkte z der Profilströmung wird

$$\bar{v} = \frac{dW}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \left[-v_0 \left(e^{i\beta} - \frac{r_0^2}{\zeta^2} e^{-i\beta} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\zeta} \right] \cdot \left[1 - \frac{c'_1}{z^2} - \frac{2c'_2}{z^3} - \dots \right], \quad (4)$$

oder wenn wir die Reihenentwickelungen

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{1}{z} - \frac{c'_1}{z^3} + \dots, \quad \frac{1}{\zeta^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{2c'_1}{z^4} + \dots$$

$$\text{benutzen} \quad \bar{v} = -v_0 e^{i\beta} - \frac{i\Gamma}{2\pi z} + \frac{v_0 \left(r_0^2 e^{-i\beta} + c'_1 e^{i\beta} \right)}{z^3} + \dots \quad (5)$$

Man sieht daraus zunächst, daß die Zirkulation Γ durch die Transformation keine Veränderung erleidet. Da ferner für die Profilspitze $\frac{d\zeta}{dz}$ unendlich wird, so erscheint die Tatsache, daß diese Spitze dem Staupunkt $-r_0 e^{i\varphi_0}$ des Kreises entspricht, gerade als notwendige Bedingung dafür, daß die Geschwindigkeit in diesem Profilverpunkt endlich wird, also ein glattes Abfließen der Flüssigkeit entstehen kann.

Durch die Formel (2) ist also in der Tat für den unendlich langen Flügel der wahrscheinlicher Weise eintretende mittlere Grenzwert der Zirkulation durch Invarianten des Profils dargestellt. Man sieht, daß der Wert von Γ im allgemeinen, für $\beta > -\varphi_0$ mit der Wölbung des Profils und dem Anstellwinkel wächst und nur dann verschwindet, wenn $\beta = -\varphi_0$ wird. Der Ansatz wird sich weiterhin durch den Vergleich der daraus resultierenden Werte für die Flügelkräfte mit den Versuchsergebnissen bestätigen. Daß die wirkliche Zirkulation kleiner ausfällt, ergibt sich schon von vornherein daraus, daß wir die äußeren Wirbel und die Oberflächenreibung vernachlässigt haben.

Die Zirkulation tritt in dem der Gleichung (5) entsprechenden Bild der Relativströmung für die Anschauung nicht unmittelbar hervor; um sie im Versuch sichtbar zu machen, muß man erst die Par-

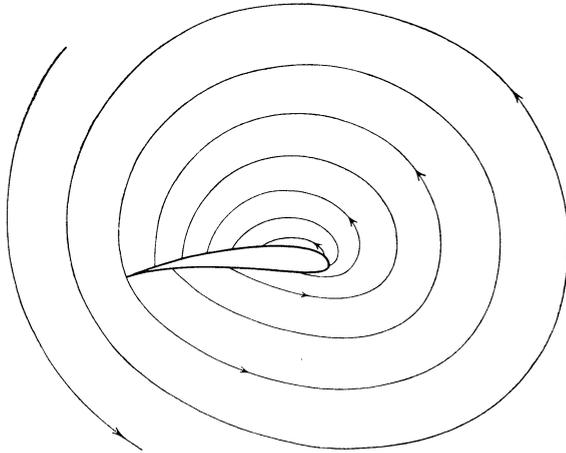


Abb. 86. Absolutströmung um einen bewegten Flügel.

allelströmung ausschalten, d. h. das Strömungsbild des bewegten Flügelmodells von einem absoluten Standorte aus aufnehmen. Die Durchführung dieses Gedankens ist vor allem Ahlborn zu danken, der wiederholt und mit Recht auf die Bedeutung solcher Kraftlinienbilder hingewiesen hat¹. Um das theoretische absolute Strömungsfeld zu erhalten, muß man dem zunächst betrachteten System, d. h. dem ruhenden Flügel in der bewegten Flüssigkeit eine der Anblasegeschwindigkeit $-v_0 e^{i\beta}$ entgegengesetzte Translation erteilt denken. Führt man noch an Stelle der Koordinate ζ nach (3) die Koordinate z ein, so erhält man als Potential der Absolutströmung

$$W_a = \left. \begin{aligned} & - \frac{v_0 (e^{-i\beta} r_0^2 - e^{i\beta} c_1)}{z} - \frac{v_0 e^{i\beta} c_2'}{z^2} - \frac{v_0 (e^{i\beta} c_3' + e^{-i\beta} r_0 c_1)}{z^3} \\ & - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \left(z - \frac{c_1}{z} + \dots \right). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Man sieht aus der Form der Gleichung, daß sich die Strömung im Unendlichen wie eine reine Zirkulationsströmung verhält, daß also die Stromlinien im Unendlichen in Kreise um den Mittelpunkt des Profils übergehen (Abb. 86).

¹ Vgl. F. Ahlborn, Z. Flugt. u. Mot. 1925. 1. Heft, S. 3.

Es verdient übrigens hervorgehoben zu werden, daß beim bewegten Flügel weder die relativen noch die absoluten Stromlinien mit den wirklichen Bahnen der Flüssigkeitsteilchen verwechselt werden dürfen. Nur bei der stationären Strömung um einen ruhenden Flügel werden beide Begriffe gleichbedeutend. Beim bewegten Flügel setzen sich die Stromlinien als Integralkurven aus den Bahndifferentialen von unendlich vielen verschiedenen Teilchen zusammen.

34. Zirkulation und Wirbelschicht.

1. Wir haben bereits früher bei der Betrachtung der Strömung um einen Kreiszyylinder gesehen, daß die Zirkulation gleichbedeutend ist mit einer gleichmäßig auf den Umfang verteilten Wirbelbelegung. Wie wir nun aber die gedachte konforme Massenbelegung eines Tragflügelprofils aus dem zugehörigen Grundkreis gewonnen haben, so läßt sich auch die Zirkulation um den Tragflügel durch konforme Abbildung aus der Wirbelbelegung des Kreiszyinders ableiten. Die Verteilung der Wirbelichte γ ist abhängig von der Profilform; man sieht, daß γ an den Stellen größter Krümmung Maximalwerte hat, und zwar in der hinteren Spitze ein absolutes Maximum $\gamma = \infty$. Der Schwerpunkt dieser konformen Wirbelbelegung fällt, wie aus den früheren Entwicklungen (Abschnitt 32) folgt, mit dem Mittelpunkt des Profils, d. h. mit dem Mittelpunkt M_0 des Grundkreises zusammen¹.

Diese Betrachtung ist zunächst mathematischer Natur. Sie gewinnt aber physikalische Bedeutung im Hinblick darauf, daß die Zirkulation in der Tat den Strömungsvorgängen an der Körperoberfläche, insbesondere den Wirbelablösungen ihre Entstehung verdankt. Es erscheint daher folgerichtig, die fiktiven Kerne innerhalb des Profils überhaupt auszuschalten und auch den übrigen Teil der Strömung auf singuläre Vorkommnisse an der Oberfläche zu beziehen.

Bei der Behandlung der Zylinderströmung haben wir Erwägungen von F. Klein und M. Lagally herangezogen, die es wahrscheinlich machen, daß die Stromlinie, die senkrecht gegen das Hindernis stößt, dort, d. h. im theoretischen Staupunkt, in zwei wirbelnde Teile von gleichen, dem Sinne nach entgegengesetzten Wirbelstärken sich aufteilt. Ist die Stromlinie Symmetrielinie der Kontur, so ist die Gesamtzirkulation Null. Wenn der Anstrom dagegen unter einem Anstellwinkel einen unsymmetrischen gewölbten Flügel trifft, so werden die verschiedenen Krümmungsverhältnisse auf der Ober- und Unterseite das Strömungsbild dahin verändern, daß die der oberen Schicht entsprechende Zirkulation begünstigt, und die Gegenzirkulation für die Krafterzeugung unwirksam gemacht wird.

¹ Wilh. Müller, Wirbelschichten u. Zirkulation. Z. techn. Phys. 1924, S. 450—458.

Um diese innere Natur der Strömung auch theoretisch verfolgen zu können, ist es vorteilhaft, das den Flügel begleitende Kraftliniensystem oder, was dasselbe ist, die Absolutströmung, deren mathematischer Ausdruck bereits bekannt ist, an der Hand einiger von Ahlborn aufgenommenen Bilder zu diskutieren. In der zitierten Arbeit des Verfassers ist diese Absolutströmung aus einer Wirbel- und Quell- resp. Senkenverteilung auf der Berandung abgeleitet. Die Dichte der zirkulatorischen Belegung möge mit $(\gamma_w)_I$, die der übrigen Strömung entsprechende Quell- und Wirbeldichte möge mit $(\gamma_q)_II$ ($\gamma_w)_II$ bezeichnet werden. Das zunächst ohne die Kuttasche Zirkulation, also mit $(\gamma_w)_I = 0$ gezeichnete Bild der Absolutströmung, das am Anfang der Bewegung angenähert zur Ausbildung kommt (Abb. 87), hat eine gewisse Ähnlichkeit mit dem früher abgeleiteten, vom Anstellwinkel unabhängigen Absolutbild in der Umgebung einer bewegten Platte (Abb. 49). Man sieht deutlich, wie die Flüssigkeitsteilchen in der Umgebung der Quellen vom Profil abgedrängt werden und in der Umgebung der Senken dem Profil zustreben. Da jede Kraftlinie, die von einem hinteren Quellpunkt ausgeht, in einem Senken-

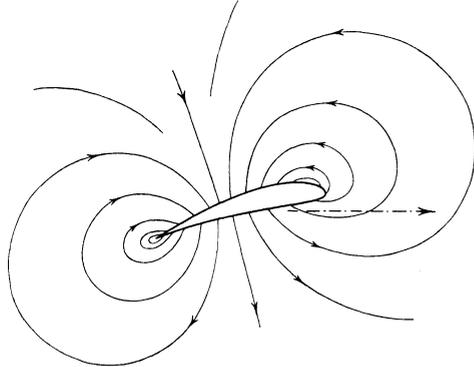


Abb. 87. Absolutströmung um ein Flügelprofil nach Ahlborn (1. Stadium).

punkt endet, so wird die Gesamtstärke der Quelle der Gesamtstärke der Senken entgegengesetzt gleich sein. Das Bild zeigt ferner das Vorhandensein zweier entgegengesetzter Umkreisungen auf der Vorder- und Hinterseite des Flügels, die als hervorgerufen gedacht werden können durch eine gewisse Verteilung von Randwirbeln mit der Gesamtstärke Null. Der Schwerpunkt der Zirkulation liegt in diesem Falle im Unendlichen.

Ein weiteres Stadium der wirklichen Strömung ist durch die Abb. 88 dargestellt, der wieder eine Photographie von Ahlborn zugrunde liegt. Man sieht, wie sich das System der Stromlinien dadurch verschoben hat, daß die untere Wirbelreihe, die in der Profilspitze einen theoretischen, aber nicht realisierbaren Häufungspunkt hat $(\gamma_w)_II = \infty$ von der Berandung sich loslöst und in die freie Flüssigkeit tritt. Die Änderung des Bildes ist also so, als ob das Profil über die Spitze hinaus verlängert wäre. Der Anfahrwirbel Prandtls stellt sich dar als die spiralförmig in die Flüssigkeit sich aufrollende Wirbelkette der Flügelunterseite. Ferner hat die Zirkulation nach dieser Anschauung eine selbst-

ständige Entstehungsursache und wird nur begünstigt durch den sich ablösenden Gegenwirbel. Man erkennt, daß nur die eine wirksame Zirkulation dem Profil anhaftet, während die andere „freie“ Zirkulation für die Auftriebswirkung nicht mehr wesentlich in Frage kommt und nur für den Widerstand von Bedeutung ist. Im Laufe der weiteren Entwicklung der Strömung werden zwar abwechselnd von beiden Seiten entgegengesetzte Wirbelelemente vom Profil abgedrängt werden; aber die Zirkulation wird dadurch nur eine periodische Schwankung um einen Mittelwert erfahren, der durch die Krümmung des Profils und durch die Bewegungsrichtung bestimmt ist.

Wenn wir den Kuttaschen Wert der Zirkulation annehmen und die Randbelegung aufsuchen, die der zusammengesetzten theoretischen

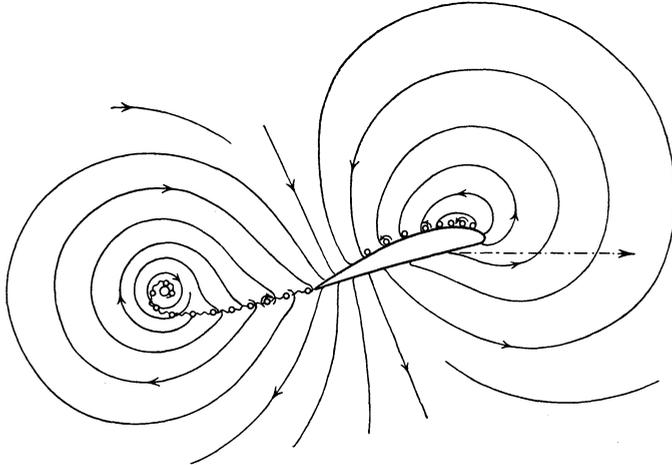


Abb. 88. Absolutströmung um ein Flügelprofil nach Ahlborn (2. Stadium).

Strömung (I und II) entspricht, so finden wir, wie hier nur ohne Beweis mitgeteilt werden soll, daß die Summe der beiden entgegengesetzt unendlichen Wirbel- und Queldichten am Hinterende endliche Werte ergeben, wie ja auch schon daraus hervorgeht, daß die Stromlinien an dieser Stelle kein singuläres Verhalten mehr zeigen. Der wirkliche Verlauf der absoluten Stromlinien im endgültigen und gleichmäßigen Bewegungsstadium des Flügels (Abb. 89) stimmt im oberen und vorderen unteren Gebiet des Flügels mit dem theoretischen Bild gut überein. Man sieht auch in der Nähe des theoretischen Schwerpunktes der Zirkulation am oberen Rande des Flügels eine stärkere Ausbildung von Wirbeln, unterhalb des Flügels ein wirbelschwaches Gebiet. Die Wirbelzone entspricht aber etwa der Stelle maximaler reiner Wirbelbelegung mit $\gamma_a = 0$, welche die Quell- und Senkenbelegung voneinander trennt. Die hinterwärts auf beiden Seiten der Längsachse liegenden Stromlinien laufen nicht mehr zusammen wie in der Theorie, sondern setzen

sich spiralförmig in der Kielwasserzone fort, die Elemente der doppelten (Karmanschen) Wirbelreihe bildend, die hinter dem bewegten Flügel zurückbleibt. Diese Ablösung erfolgt übrigens auch im symmetrischen Fall ($\varphi = \beta = 0$), also unabhängig von der Zirkulation, was als eine Bestätigung der anfänglichen Annahme einer Zerlegung der vorderen mittleren Stromlinie in zwei entgegengesetzt wirbelnde Schichtlinien angesehen werden kann.

2. In neuerer Zeit haben W. Ackermann und W. Birnbaum einen bemerkenswerten Weg eingeschlagen, um unter Verzicht auf die Methode der konformen Abbildung einen Zusammenhang zwischen der Form des Profils resp. dessen Mittellinie und einer längs derselben ausgebreiteten reinen Wirbelbelegung herzustellen. Ersetzt man den Flügel durch eine unendlich dünne, also

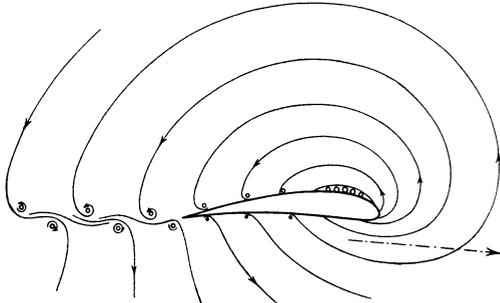


Abb. 89. Absolute Stromlinien um ein Flügelprofil nach Ahlborn (3. Stadium).

flächenhafte Verteilung von tragenden Wirbellinien, setzt die Krümmung der Flügelspur in der z -Ebene und den Anstellwinkel als klein voraus, und läßt die Geschwindigkeit v_0 in die Richtung der negativen x -Achse fallen, so kann man die Koordinaten y der Profillinie für die Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes aus der Wirbelbelegung gleich Null setzen. Wohl aber erhält man aus der Bedingung, daß die resultierende, aus der Parallelstromgeschwindigkeit und der Geschwindigkeit des Wirbelfeldes zusammengesetzte Strömungsrichtung in jedem Punkt des Profils tangential gerichtet ist, eine angenäherte Gleichung für das Rückgrat des Flügels.

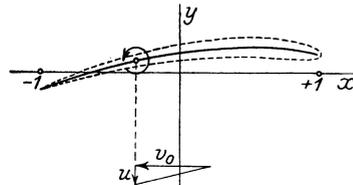


Abb. 90. Flügel als tragende Wirbelfläche.

In dem wir der Darstellung Birnbaums¹ folgen, nehmen wir an, daß das Profil sich von $x = -1$ bis $x = +1$ erstrecken (Abb. 90). Sei $\gamma(x)$ die Wirbelbelegung pro Längeneinheit, so ist

$$\Gamma = \int_{-1}^{+1} \gamma(x) dx \tag{1}$$

die Gesamtzirkulation des Flügels. Ein Wirbelement $\gamma(x)$ induziert

¹ W. Birnbaum, Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie. Z. ang. Meth. Mech. Bd. 3, S. 290. 1922,

dann an der Stelle x eine angenähert vertikal abwärts gerichtete Geschwindigkeit von der Größe

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\gamma(\xi) d\xi}{x-\xi}.$$

Durch Zusammenwirken aller Wirbelfäden von -1 bis $+1$ entsteht also die Vertikalgeschwindigkeit

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\gamma(\xi) d\xi}{x-\xi}. \quad (2)$$

Damit keine Flüssigkeit durch den Flügel strömt, muß

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u}{v_0}$$

sein, woraus dann

$$y = \frac{1}{v_0} \int u(x) dx = \frac{1}{v_0} \int_{-1}^{+1} \int \frac{\gamma(\xi) dx d\xi}{x-\xi} \quad (3)$$

sich ergibt. Damit ist also y oder die Gleichung des Profilrückgrates bis auf eine additive Konstante bestimmt. Wenn man etwa die von Birnbaum benutzten „Grundfunktionen“ für die Wirbelverteilung

$$\gamma_a = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad \gamma_b = \sqrt{1-x^2}, \quad \gamma_c = x\sqrt{1-x^2} \quad (4)$$

zugrunde legt, so erhält man für die Gesamtzirkulation Γ und die Funktionen $u(x)$ und $y(x)$ folgende Ausdrücke

$$\left. \begin{array}{lll} \Gamma_a = \pi, & \Gamma_b = \frac{\pi}{2}, & \Gamma_c = 0, \\ u_a = \frac{1}{2}, & u_b = \frac{x}{2}, & u_c = \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{2} \right), \\ y_a = \frac{1}{2v_0} x, & y_b = \frac{1}{4v_0} x^2, & y_c = \frac{1}{2v_0} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x}{2} \right). \end{array} \right\} \quad (5)$$

Es läßt sich zeigen, daß man in erster Annäherung jede Profillinie durch eine lineare Kombination dieser drei Funktionen darstellen kann. Durch Hinzufügung einer Quellverteilung könnte man noch, wie Birnbaum hervorhebt, die Kontur zum Profil aufblasen. Wir wollen aber auf Einzelheiten, sowie auch auf die leicht durchführbare Berechnung der Flügelkräfte nach diesem Verfahren nicht eingehen.

35. Das Wirbelsystem am begrenzten Flügel.

Wir haben bereits bei der Betrachtung der Strömung um den Kreiszyylinder den Einfluß der beiderseitigen Begrenzung kennengelernt. Während wir uns dort mit der einfachen Vorstellung eines elementaren tragenden Wirbelfadens begnügten, der sich mit seiner Fortsetzung

außerhalb des Zylinders zu einem (rechteckigen) Wirbelringe zusammenschließt, sind wir hier mit Rücksicht auf die Wichtigkeit des Tragflügelproblems genötigt, die Untersuchung etwas strenger durchzuführen. Es zeigt sich nämlich, daß die Zirkulation nicht mehr über die ganze Spannweite des Flügels konstant ist, sondern von der Mitte, wo das Maximum herrscht, nach beiden Seiten bis zu den Enden allmählich auf Null abnimmt. Nach Maßgabe dieser Abnahme von Γ wird sich dann an jeder Stelle des Flügels ein Wirbelfaden ablösen und im Sinne der nach hinten gehenden Strömung einstellen, so daß insgesamt eine Wirbelfläche hinter dem bewegten Flügel zurückbleibt. Wenn man die allmähliche Erniedrigung der Zirkulation durch eine Folge von kleinen sprunghaften Änderungen ersetzt, so ergibt sich, daß die Wirbelfläche als aus unendlich vielen, zur Mittellinie des Flügels symmetrisch gelegenen und ins Unendliche sich erstreckenden hufeisenförmigen Wirbelringen zusammengesetzt gedacht werden kann. In Stärke jedes solchen zum Abstand $\pm x$ von der Mittelachse des Flügels gehörigen Ringes ist dann durch den unendlich kleinen Zirkulationsprung $-d\Gamma = -\frac{d\Gamma}{dx} dx$ bezeichnet (Abb. 91).

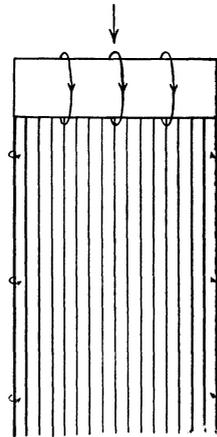


Abb. 91. Wirbelfläche hinter einem Flügel.

Durch die Wirbelfläche erfährt nun jeder Punkt der Tragfläche, der vorübergehend als tragender Wirbelfaden angesehen werden kann, eine nach abwärts gerichtete Geschwindigkeit, die mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetzes (vgl. Abschnitt 5) sofort berechenbar ist, sobald die Verteilung des Auftriebs über den Flügel bekannt ist. Für eine Stelle des Fadens, die durch die Koordinate ξ bezeichnet wird, ist das Geschwindigkeitselement, das von dem zu x gehörigen Faden herrührt

$$du(\xi) = \frac{1}{4\pi} \frac{d\Gamma(x)}{dx} \frac{dx}{(\xi - x)},$$

da jeder Faden die Hälfte eines beiderseits ins Unendliche gehenden Fadens ist. Wenn b die Flügelspannweite ist, so ergibt sich als Gesamtwert der von der Wirbelfläche herrührenden Geschwindigkeit

$$u(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dx} \frac{dx}{(\xi - x)}. \tag{1}$$

Die Verteilung der Geschwindigkeit u hängt also wesentlich von der Verteilung der Zirkulation ab. Jeder Zirkulations- oder Geschwin-

digkeitsverteilung entspricht aber ein bestimmter Wert des sog. induzierten Widerstandes des Tragflügels. Um eine bestimmte Annahme über die Funktion $\Gamma(x)$ einzuführen, fragen wir nach den Bedingungen für den kleinsten Widerstand, der bei gegebener Tragfähigkeit oder Auftriebsgröße und bei gegebener Spannweite des Flügels eintreten kann.

Wir folgen der übersichtlichen Darstellung von E. Trefftz¹, der die Flüssigkeit in sehr großer Entfernung vor und hinter der tragenden Fläche durch zwei Ebenen E_1 und E_2 senkrecht zur Bewegungsrichtung begrenzt denkt und den sekundlichen Gesamtgewinn an Impuls und Energie ermittelt (Abb. 92).

Wenn nach einer Sekunde die Ebenen E_1 und E_2 bei der Relativbewegung der Luft gegen den Flügel in die Lagen E'_1 und E'_2 gelangt sind, so sieht man, daß jener Gewinn durch den Impuls und die Energie der von der Wirbelfläche zwischen E_2 und E'_2 hervorgerufenen Strömung dargestellt wird, da die wirbellose Grundströmung vorn und hinten denselben Beitrag liefert. Legen

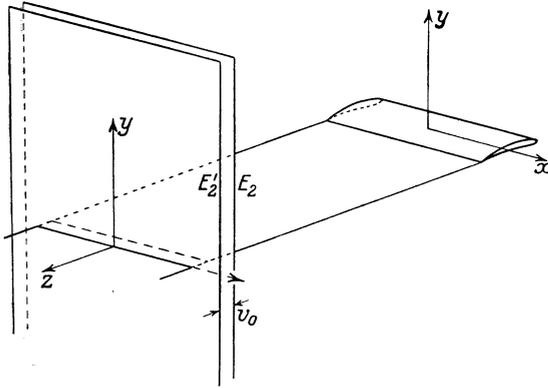


Abb. 92. Zur Berechnung des Impulses und der Energie des Wirbelbandes einer Tragfläche.

wir die y -Achse durch die Mitte des Flügels nach oben und die z -Achse nach hinten in Richtung der Anströmung und ist Φ das Potential der Wirbelströmung in den Ebenen E_2 so haben wir für die negative vertikale Impulskomponente (den Auftrieb) und die Energie (vgl. Abschnitt 4)

$$\left. \begin{aligned} P_a &= -\rho \iint \frac{\partial \Phi}{\partial y} v_0 dx dy, \\ P_w \cdot v_0 &= \frac{\rho}{2} \iint (\nabla \Phi)^2 v_0 dx dy; \quad P_w = \frac{\rho}{2} \iint (\nabla \Phi)^2 dx dy, \end{aligned} \right\} (2)$$

wo die Integrale über die längs der Spur der Wirbelfläche aufgeschnittene xy -Ebene zu erstrecken sind.

Wenn wir im ersten Ausdruck die Integration nach y ausführen, die Potentialwerte am oberen und unteren Rande des Wirbelbandes

¹ E. Trefftz, Prandtl'sche Tragflächen- und Propellerttheorie. Z. ang. Math. Mech. I, S. 206 1921; Vorträge aus d. Geb. d. Hydro. u. Aerodynamik (Innsbruck 1922), Berlin 1924, S. 41.

Φ_0 und Φ_u nennen und berücksichtigen, daß der Potentialsprung gleich der Zirkulation an der betreffenden Stelle ist (vgl. Abschn. 5), so wird

$$P_a = \varrho v_0 \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} (\Phi_0 - \Phi_u) dx = \varrho v_0 \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \Gamma dx, \quad (3)$$

wie man auch unmittelbar aus der Kuttaschen Formel hätte ableiten können. Den Ausdruck für den Widerstand können wir nach Abschnitt 4, 6a umformen in

$$P_w = \frac{\varrho}{2} \int (\Phi \nabla \Phi)_n ds, \quad (4)$$

wobei n die äußere Normale an das vom Schnitt der Wirbelfläche begrenzte Gebiet und ds ein Linienelement des Schnittes bedeutet. Wenn die Wirbelfläche eben ist und ihr Schnitt in die x -Achse fällt, so ergibt sich

$$P_w = -\frac{\varrho}{2} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} (\Phi_0 - \Phi_u) \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx = -\frac{\varrho}{2} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx. \quad (5)$$

Für den kleinsten Widerstand bei gegebenem Auftrieb muß

$$\delta P_w - \lambda \delta P_a = 0 \quad (6)$$

sein für irgendeine Variation von $\Gamma(x)$. Wir haben also

$$\varrho \iint \nabla \Phi \nabla \delta \Phi dx dy = -\varrho \int \delta \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} dx = -\lambda \varrho \int \delta \Gamma dx.$$

Das gibt die von Munk¹ zuerst angegebene Bedingung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\text{konst} = -2u_0, \quad (7)$$

die für die zugehörige Stromfunktion die Form

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 2u_0, \quad \Psi = 2u_0 x$$

annimmt. Die analytische Funktion, die dieser Bedingung genügt, ist

$$W = 2iu_0 \left[x + iy - \sqrt{(x + iy)^2 - \frac{b^2}{4}} \right]. \quad (8)$$

An der Wirbelfläche haben wir dann

$$\Phi = \pm 2u_0 \sqrt{\frac{b^2}{4} - x^2}. \quad (9)$$

¹ M. Munk, Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges. Dissertation Göttingen 1919.

wo die beiden Zeichen sich auf den oberen und unteren Rand beziehen. Wenn Γ_0 die Zirkulation in der Mitte $x = 0$ bedeutet, so wird

$$\Gamma = 4u_0 \sqrt{\frac{b^2}{4} - x^2} = \frac{2\Gamma_0}{b} \sqrt{\frac{b^2}{4} - x^2}. \quad (9a)$$

Der kleinste Widerstand tritt also dann ein, wenn die Zirkulationsverteilung über die Spannweite einer halben Ellipse entspricht. In der Tat ergibt sich jetzt, wenn man (9a) in (1) einsetzt und das Integral

$$u(\xi) = \frac{\Gamma_0}{2\pi b} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{\frac{b^2}{4} - x^2} (\xi - x)} \quad (10)$$

auswertet, für die Abwärtsgeschwindigkeit an jeder Stelle des Flügels der konstante Wert

$$u(\xi) = u_0 = \frac{\Gamma_0}{2b}, \quad (11)$$

der mit Einführung der mittleren Zirkulation $\Gamma_m = \frac{\pi}{2}\Gamma_0$ auch durch den Ausdruck $u_0 = \frac{2\Gamma_m}{\pi b}$ dargestellt werden kann. Daß diese Geschwindigkeit halb so groß ist wie die Störungsgeschwindigkeit in großer Entfernung, wird ohne weiteres verständlich, wenn man bedenkt, daß hier die Wirbelfläche nach beiden Seiten, am Tragwerk selbst aber nur nach hinten sich erstreckt.

Die Wirkung im Falle des Minimalwiderstandes ist also so, als wenn der von der Tragfläche durchmessene Raum oder die hinter dem Flügel entstehende Unstetigkeitsfläche zu einem festen Körper (Brett) erstarrt wäre und sich mit einer konstanten Geschwindigkeit abwärts bewegen würde. Die bei dieser Bewegung entstehende Potentialströmung ist bereits früher (Abschnitt 21) diskutiert und veranschaulicht worden.

Um den Fall des geringsten Widerstandes wirklich zu erreichen, braucht man nur dem Flügelumriß eine solche Gestalt zu geben, daß der vordere und hintere Teil je einer Ellipse entsprechen, welche die Längsachse gemeinsam haben, ferner die Profile geometrisch ähnlich zu machen und parallel anzuordnen¹.

¹ Nähere Einzelheiten vgl. Fuchs-Hopf, Aerodynamik, Berlin 1922. — A. Betz, Handb. d. Physik, Bd. VII, Berlin 1927, S. 247.

36. Die Kräfte am begrenzten Flügel.

Um die Strömung um den endlichen Tragflügel als ebene Strömung behandeln zu können, legen wir den mittleren Flügelquerschnitt, dem also nach der Annahme des vorigen Paragraphen die mittlere Zirkulation entspricht, zugrunde (oder substituieren einen rechteckigen Ersatzflügel) und fügen der früher (Abschnitt 33) betrachteten Strömung um den unendlich langen Flügel einen senkrecht zur Anblaserichtung gehenden Abstrom hinzu, der im Unendlichen die Geschwindigkeit u_0 hat. Durch Vermittlung der Abbildung auf die Ebene der Kreiskontur erhalten wir dann das komplexe Potential

$$W = -v_0 \left[e^{i\beta} \zeta + e^{-i\beta} \frac{r_0^2}{\zeta} \right] + i u_0 \left[e^{i\beta} \zeta - e^{-i\beta} \frac{r_0^2}{\zeta} \right] - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \zeta \quad (1)$$

und die Geschwindigkeit der Strömung im Punkte z

$$\left. \begin{aligned} \bar{v} &= \frac{dW}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} \\ &= \left[-v_0 \left(e^{i\beta} - e^{-i\beta} \frac{r_0^2}{z} \right) + i u_0 \left(e^{i\beta} + e^{-i\beta} \frac{r_0^2}{z} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi z} \right] \cdot \left(1 + \frac{c_1}{z^2} + \dots \right) \\ &= -e^{i\beta} (v_0 - i u_0) - \frac{i\Gamma}{2\pi z} + \frac{e^{-i\beta} r_0^2 (v_0 + i u_0) - e^{i\beta} c_1 (v_0 - i u_0)}{z^3} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Wenn man $u = \frac{2\Gamma}{\pi b}$ setzt und wieder zum Ausdruck bringt, daß $\frac{dW}{d\zeta}$ für den der Hinterkante entsprechenden Kreispunkt verschwindet, so ergibt sich in diesem Fall der für ein bestimmtes „Seitenverhältnis“ $\lambda = \frac{t}{b}$ des Flügels korrigierte Wert der Zirkulation

$$\Gamma = \frac{4\pi r_0 v_0 \sin(\varphi_0 + \beta)}{1 + \frac{8r_0}{b} \cos(\varphi_0 + \beta)} \quad (3)$$

Die mittlere Zirkulation Γ wird also gegenüber der beim unendlich langen Flügel ($\lambda = \frac{t}{b} = 0$) auftretenden um so mehr verkleinert, je größer das Seitenverhältnis wird. Da man bei dünnen Profilen angenähert $4r_0$ gleich der Profiltiefe t setzen kann, so begeht man keinen großen Fehler, wenn man schreibt

$$\Gamma = \frac{\pi t v_0 \sin(\varphi_0 + \beta)}{1 + 2\lambda \cos(\varphi_0 + \beta)} \quad (3a)$$

Das Verhältnis der Geschwindigkeiten u_0 und v_0 wird

$$\frac{u_0}{v_0} = \frac{8 \frac{r_0}{b} \sin(\varphi_0 + \beta)}{1 + 8 \frac{r_0}{b} \cos(\varphi_0 + \beta)} \sim \frac{2\lambda \sin(\varphi_0 + \beta)}{1 + 2\lambda \cos(\varphi_0 + \beta)}$$

Für die Kräfte, die auf der Längeneinheit des Flügels wirken, erhält man aus der Blasius'schen Formel

$$\bar{P} = \frac{i \varrho}{2} \int \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz = -i \varrho \Gamma e^{i\beta} (v_0 - i u_0). \quad (4)$$

Wir haben also eine Komponente, den sog. Auftrieb senkrecht auf der Anströmrichtung resp. Bewegungsrichtung, mit dem absoluten Wert

$$P_a = \varrho \Gamma v_0 \quad (5)$$

und den induzierten Widerstand entgegen der Bewegungsrichtung, resp. in Richtung der relativen Geschwindigkeit der Luft

$$P_w = \varrho \Gamma u_0. \quad (6)$$

Mit den Werten für Γ und u_0 erhält man

$$P_a = \frac{4\pi \varrho r_0 v_0^3 \sin(\varphi_0 + \beta)}{1 + 8 \frac{r_0}{b} \cos(\varphi_0 + \beta)}; \quad P_w = \frac{2\varrho \Gamma^2}{\pi b} = \frac{32\varrho \pi r_0 \frac{r_0}{b} v_0^3 \sin(\varphi_0 + \beta)}{\left(1 + 8 \frac{r_0}{b} \cos(\varphi_0 + \beta)\right)^2}. \quad (7)$$

Setzt man

$$P_a b = \frac{1}{2} c_a \varrho t b v_0^3, \quad P_w b = \frac{1}{2} c_w \varrho t b v_0^3,$$

so werden die Koeffizienten c_a und c_w des Auftriebs und des Widerstandes

$$c_a = \frac{2\pi \sin(\varphi_0 + \beta)}{1 + 2\lambda \cos(\varphi_0 + \beta)}; \quad c_w = \frac{4\pi \lambda \sin^2(\varphi_0 + \beta)}{(1 + 2\lambda \cos(\varphi_0 + \beta))^2}. \quad (7a)$$

Als Beziehung zwischen c_a und c_w kommt

$$c_w = \frac{c_a^2 \lambda}{\pi}. \quad (8)$$

Trägt man c_a als Koordinate und c_w als Abszisse auf, so erhält man die sog. Randwiderstandsparabel.

Inwieweit die Werte mit den Versuchsergebnissen übereinstimmen, soll später gezeigt werden.

Um nun das auf den Mittelpunkt des Profils bezogene Moment der Kräfte zu ermitteln, hat man nach der Blasius'schen Formel das Residuum der Reihe $\bar{v}^2 z$ zu bilden.

Man erhält

$$\begin{aligned} \bar{v}^2 z = & e^{2i\beta} (v_0 - i u_0)^2 z + \frac{i \Gamma e^{i\beta} (v_0 - i u_0)}{\pi} \\ & + \frac{-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} - 2r_0^3 (v_0^2 + u_0^2) + 2e^{2i\beta} c_1 (v_0 - i u_0)^2}{z} \end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned} M + iN &= -\frac{\rho}{2} \int \bar{v}^2 z dz \\ &= \rho i \pi \left[\frac{l^2}{4\pi^2} + 2r_0^2 (v_0^2 + u_0^2) - 2c_1 e^{2i\beta} (v_0 - iu_0)^2 \right], \end{aligned}$$

also das Moment in bezug auf den Mittelpunkt M_0 des Profils

$$M = 2\pi \rho c_1 \sin 2\beta (v_0^2 - u_0^2) - 4\pi \rho c_1 u_0 v_0 \cos 2\beta. \quad (9)$$

Mit den Werten (4) erhält man, wenn man $\frac{c_1}{r_0} = f$ einführt

$$M = 2\pi \rho r_0 f v_0^2 \frac{\sin 2\beta - 4\lambda^2 \sin 2\varphi_0 + 4\lambda \sin(\beta - \varphi_0)}{(1 + 2\lambda \cos(\varphi_0 + \beta))^2} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{M}{\frac{1}{2} \rho v_0^2 l^2} = \frac{4\pi r_0 f \sin 2\beta - 4\lambda^2 \sin 2\varphi_0 + 4\lambda \sin(\beta - \varphi_0)}{l^2} \frac{r_0 v_0^2}{\frac{1}{2} \rho v_0^2 l^2} \\ &= \frac{8\pi r_0 f (\sin \beta - 2\lambda \sin \varphi_0) (\cos \beta + 2\lambda \cos \varphi_0)}{l^2 (1 + 2\lambda \cos(\varphi_0 + \beta))^2}. \quad (10a) \end{aligned}$$

Nennt man die aus v_0 und u_0 zusammengesetzte Geschwindigkeit v'_0 und den Winkel zwischen v'_0 und v , um den der Anstellwinkel verkleinert wird, ε , so ist $v_0 = v'_0 \cos \varepsilon$, $u_0 = v'_0 \sin \varepsilon$ und das Moment erhält die Form

$$M = 2\pi \rho r_0 f v_0'^2 \sin 2(\beta - \varepsilon) = 2\pi \rho r_0 f v_0'^2 \frac{\sin 2(\beta - \varepsilon)}{\cos^2 \varepsilon},$$

wofür wieder angenähert

$$M = 2\pi \rho r_0 f v_0'^2 \sin 2(\beta - \varepsilon) \quad (11)$$

gesetzt werden kann. Daraus ergibt sich dann als Hebelarm des Auftriebs

$$h = \frac{M}{P_a} = \frac{f \sin 2(\beta - \varepsilon) (1 + 2\lambda \cos(\varphi_0 + \beta))}{2 \cos \varepsilon \sin(\varphi_0 + \beta)},$$

und als Abstand des Druckpunktes (Schnitt der Auftriebslinie mit der 2. Achse) vom Mittelpunkt

$$e_0 = \frac{f \sin(\beta - \varepsilon) [1 + 2\lambda \cos(\varphi_0 + \beta)]}{\sin(\varphi_0 + \beta)}$$

Um den Momentenbeiwert

$$c_m = \frac{4\pi r_0 f}{l^2} \sin 2(\beta - \varepsilon)$$

in Funktion von c_a auszudrücken, formen wir den Sinus in folgender Weise um und nehmen gleichzeitig Rücksicht auf die Kleinheit der vorkommenden Winkel

$$\begin{aligned} \sin 2(\beta - \varepsilon) &\sim 2 \sin \beta - 2 \sin \varepsilon \\ &= 2 \left[\sin(\varphi_0 + \beta) \cos \varphi_0 - \cos(\varphi_0 + \beta) \sin \varphi_0 - \frac{2\lambda \sin(\varphi_0 + \beta)}{1 + 2\lambda \cos(\varphi_0 + \beta)} \right] \\ &\sim \frac{c_a}{\pi} (1 + 2\lambda) - 2 \sin \varphi_0 - \frac{2c_a \lambda}{\pi} = \frac{c_a}{\pi} - 2 \sin \varphi_0. \end{aligned}$$

Wir erhalten daher folgende Näherungsgleichung

$$c_m = \frac{4r_0 f}{f^2} c_a - \frac{8\pi r_0 f}{f^2} \sin \varphi$$

oder auch

$$c_m = \frac{f}{t} c_a - \frac{2\pi f}{t} \sin \varphi_0. \quad (12)$$

Die Momentenzahl drückt sich also durch die Auftriebszahl angenähert in linearer Weise aus.

Geometrische Beziehungen. Aus dem Werte von h ergibt sich ohne weiteres die Gleichung der Wirkungslinie der Kraft

$$x \cos(\beta - \varepsilon) - y \sin(\beta - \varepsilon) = \frac{f \sin 2(\beta - \varepsilon)(1 + 2\lambda \cos(\varphi_0 + \beta))}{2 \cos \varepsilon \sin(\varphi_0 + \beta)}.$$

Wenn man den Wert für $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{u_0}{v_0}$ benutzt, geht die Gleichung über in

$$\frac{x}{\sin \beta - 2\lambda \cos \varphi_0} - \frac{y}{\cos \beta + 2\lambda \sin \varphi_0} = \frac{f}{\sin(\varphi_0 + \beta)}. \quad (13)$$

Die Schar der Geraden, die man erhält, wenn man β alle möglichen Werte durchlaufen läßt, umhüllen eine Parabel, deren Gleichung lautet

$$(\gamma \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0)^2 + f^2 - 2f(x \cos \varphi_0 - y \sin \varphi_0) = 0. \quad (14)$$

Wir werden diese für das Profil charakteristische, von v. Mises zuerst eingeführte Parabel als Auftriebsparabel bezeichnen (Abb. 93). Die Eigenschaften lassen sich ohne weiteres aus der Gleichung ablesen, resp. durch eine einfache Transformation ableiten. Setzt man nämlich

$$x = x' + f \cos^3 \varphi_0, \quad y = y' - f \sin^3 \varphi_0,$$

so geht die Gleichung über in

$$(x' \cos \varphi_0 + y' \sin \varphi_0)^2 = 2f \sin 2\varphi_0 (x' \sin \varphi_0 - y' \cos \varphi_0).$$

Man sieht daraus ohne weiteres, daß die Parabel den Parameter $f \sin 2\varphi_0$, die erste Profilachse als Leitlinie und denjenigen Punkt F als Brennpunkt hat, den man erhält, wenn man die Strecke f auf dem zur ersten Achse in bezug auf die zweite Achse spiegelbildlich gelegenen Strahl vom Mittelpunkt M_0 des Grundkreises abträgt. Den Punkt F , der immer innerhalb des Grundkreises gelegen ist, werden wir mit v. Mises auch als Brennpunkt des Profils und den Abstand $f = M_0 F$ als Brennweite bezeichnen. Man erkennt weiter aus der Gleichung, daß die Auftriebsparabel sowohl die zweite Achse wie auch die zu ihr durch den Punkt M_0 gezogene Senkrechte berührt.

Entsprechend dem Massenschwerpunkt definieren wir den Schwerpunkt S der Zirkulation durch die Gleichung

$$\Gamma z_0 = \oint z \bar{v} dz,$$

wo das Integral längs einer geschlossenen, die Unstetigkeitsstellen einschließenden Kurve zu führen ist. Wenn man die oben aufgestellte Geschwindigkeitsreihe benutzt, so kommt

$$\Gamma z_0 = 2 i \pi [r_0^2 e^{-i\beta} (v_0 + i u_0) - e^{i\beta} r_0 f (v_0 - i u_0)],$$

woraus

$$z_0 = \frac{2 i \pi r_0 v_0}{\Gamma} (e^{-i\beta} r_0 - e^{i\beta} f)$$

oder nach Einsetzen des Wertes für Γ

$$z_0 = \frac{i (1 + 2 \lambda \cos \varphi_0 + \beta)}{2 \sin (\varphi_0 + \beta)} (r_0 e^{-i\beta} - f e^{i\beta})$$

und schließlich die Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{(r_0 + f) (\sin \beta - 2 \lambda \sin \varphi_0)}{\sin (\varphi_0 + \beta)} \\ y_0 &= \frac{(r_0 - f) (\cos \beta + 2 \lambda \cos \varphi_0)}{2 \sin (\varphi_0 + \beta)} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

sich ergeben. Vergleich mit der Gleichung (13) zeigt ohne weiteres, daß die Auftriebslinie durch den entsprechenden Schwerpunkt S der Zirkulation hindurchgeht. Eliminiert man den Winkel β oder setzt $\sin \beta - 2 \lambda \sin \varphi_0 = k \sin \beta'$, $\cos \beta + 2 \lambda \cos \varphi_0 = k \cos \beta'$ also $\sin (\varphi_0 + \beta) = k \sin (\varphi_0 + \beta')$ und eliminiert β' , so ergibt sich

$$2 x_0 \cos \varphi_0 (r_0 - f) + 2 y_0 \sin \varphi_0 (r_0 + f) = r_0^2 - f^2. \quad (16)$$

Das ist, wie man sich leicht überzeugt, eine Tangente der Auftriebsparabel. Während also die Auftriebslinie bei veränderlichem Anstellwinkel die Parabel beschreibt, bewegt sich der Schwerpunkt S der Zirkulation, der als Angriffspunkt der Kraft gelten kann, auf einer ausgezeichneten Tangente der Parabel.

Ich habe diese Linie, deren Lage die Strömungseigenschaften des Profils wesentlich bestimmt, als „dritte Achse“ eingeführt¹. Sie ist geometrisch nichts anderes wie die Mittelsenkrechte zur Verbindung des Brennpunktes F mit dem Schnitt der ersten Achse mit dem Grundkreise und hat ange-

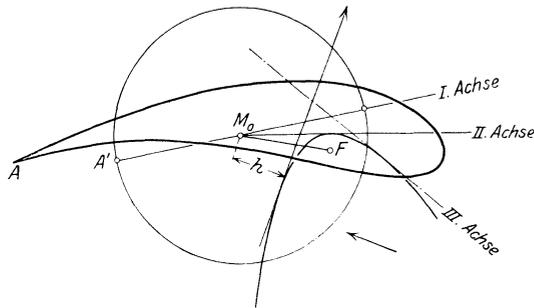


Abb. 93. Grundkreis, Achsen und Auftriebsparabel eines Flügelprofils.

¹ Vgl. Wilh. Müller, Z. ang. Math. Mech., 1923, S. 125.

nähert die Richtung der Verbindungslinie der Stellen größter Umfangsgeschwindigkeit der Flüssigkeitsströmung im Falle eines verschwindenden Auftriebs.

Wenn der Winkel φ_0 positiv ist, d. h. wenn die erste Achse im vorderen Teil des Profils oberhalb der 2. Achse liegt, so öffnet sich die Auftriebsparabel im Gebiete unterhalb des Profils und die nach oben gerichtete dritte Achse ist gegen die nach hinten gehende Richtung der 2. Achse unter einem spitzen Winkel geneigt. Wenn dagegen der Winkel φ_0 negativ ist, wie z. B. bei stark S-förmig gekrümmten Profilen, so öffnet sich die Auftriebsparabel im Gebiet oberhalb des Profils, und die dritte Achse bildet mit jener Richtung einen stumpfen Winkel (Abb. 94). Ist $\varphi_0 = 0$, verschwindet also die Gesamtkrümmung des Profils, so steht die dritte Achse auf den beiden ersten zusammenfallenden Achsen senkrecht. Die Auftriebsparabel geht in einen Strahlenbündel durch F über.

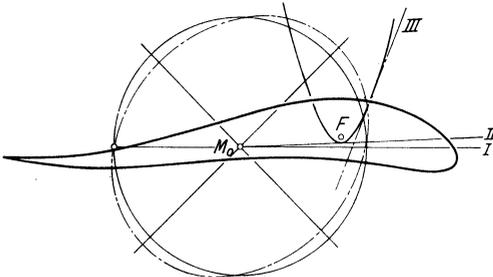


Abb. 94. Aus der Ellipse abgeleitetes Profil mit $\varphi_0 < 0$.

Diese Unterscheidungen spielen für die Beurteilung der Druckpunktswanderung und der Stabilität eine Rolle¹.

Wenn man das Seitenverhältnis konstant hält oder etwa $= 0$ setzt, so ergibt sich aus dem vorhergehenden, daß es eine

große Mannigfaltigkeit in Profilformen gibt, die bei gegebener Anblasegeschwindigkeit denselben Auftriebsverlauf zeigen, d. h. für jeden Anstellwinkel in Größe und Lage der Auftriebskraft übereinstimmen. Dieser Verlauf ist bestimmt, wenn der Radius r_0 des Grundkreises, die Brennweite f und der Wölbungswinkel φ_0 bekannt sind. Man kann aber diese Grundinvarianten unmittelbar geometrisch finden, wenn das System der drei Profilachsen in bezug auf eine angenommene Lage des Mittelpunktes gegeben ist. Alle Profilformen mit derselben Lage der drei Achsen stimmen also bei gegebener Geschwindigkeit v_0 der Strömung im Unendlichen der reibungslos gedachten Flüssigkeit in der Größe des Auftriebs und der Art der Druckpunktswanderung überein. Zur Lösung der Aufgabe, die Mannigfaltigkeit der Profile zu bestimmen, welche durch die geometrische Konfiguration der drei Achsen gegeben sind, hat der Verfasser in den zitierten Arbeiten einige Beiträge geliefert².

¹ Vgl. Wilh. Müller, Über die Form- und Auftriebsinvarianten für eine besondere Klasse von Flügelprofilen. Z. ang. Math. Mech. Bd. 4, S. 389—404. 1924.

² Vgl. besonders Z. ang. Math. Mech. Bd. 4, S. 213. (1924).

Da die in Göttingen benutzten Profile nicht nach theoretischen Gesichtspunkten gewählt sind, ist es zum Zweck der Vergleichung der Messungen mit den theoretischen Resultaten für die Flügelkräfte erforderlich, für eine gegebene Profilkurve die Auftriebsinvarianten zu ermitteln. Wir wollen uns mit den von Trefftz-Karman, Geckeler u. a. bearbeiteten Methoden zur Lösung dieser Aufgaben hier nicht beschäftigen und nur mitteilen, daß es jedenfalls gelingt, mittelst eines teils graphischen, teils rechnerischen Verfahrens, mit beliebiger Annäherung die Lage des Grundkreises und der Achsen eines Profils zu finden¹. Wir haben hier für das der Göttinger Sammlung entstammende Profil 311 (Abb. 95) folgende Werte für die Invarianten festgestellt. Um die theoretischen Werte den Versuchswerten anzupassen, ist es ferner nötig, die Anstellwinkel von der Berührungssehne auf der Druckseite des Profils aus zu zählen und das Moment auf den Bezugspunkt umzurechnen, in dem diese Sehne die dazu senkrechte Stirntangente schneidet. Wenn man den Abstand des Mittelpunktes M_0 von E mit d bezeichnet und die Kleinheit des Winkels δ zwischen der Richtung M_0E und der Sehne berücksichtigt, so ergibt sich

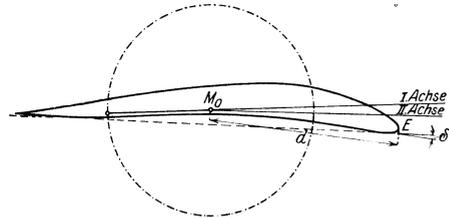


Abb. 95. Profil 311 der Göttinger Sammlung.

für den auf den Punkt E bezogene Momentenbeiwert

$$c_{mE} = \frac{d-f}{t} c_a + \frac{2 \pi f}{t} \sin \varphi_0. \tag{17}$$

Profil Nr. 311

$$r_0 = 5,42, f = 4,58, t = 20,2, \psi_0 = 5,2^\circ, \chi = 2,2^\circ, \lambda = \frac{1}{6}$$

β	C_a	C_{a1} Rechnung	Quotient	C_m	e Versuch	e_I	e_{II}
- 9	- 22,1	- 33	0,67	- 5,4	4,88	1,8	0,84
- 6	- 9,4	- 7	0,56	6,4	- 32,8	- 11,6	- 16,15
- 3	23,3	- 19	1,22	15,3	13,3	11,6	13,22
0	44,4	45	0,98	20,0	9,15	7,96	8,65
3	66,7	71,5	0,93	25,3	7,7	7,05	7,5
6	88,3	97	0,91	29,6	6,82	6,6	6,9
9	110,2	122,5	0,9	35,0	6,42	6,38	6,63
12	126	148	0,85	38,6	6,2	6,2	6,5
15	127,2	172	0,74	38,1	6,1	6,12	6,3

In der beigegebenen Zahlentafel sind die mit 100 multiplizierten Beiwerte ($100 c_a = C_a, 100 c_m = C_m$) nach Versuch und Theorie, sowie die für die Druckpunktlage charakteristischen Abstände e ($\sim d - h$) des

¹ Vgl. Wilh. Müller, Z. ang. Math. Mech. Bd. 5, 1925, S. 397.

Schnittpunktes der Kraft mit der Sehne vom Punkte E und zwar für den Fall $\lambda = 0$ (e_I) und für $\lambda = \frac{1}{6}$ (e_{II}) angegeben. Man erkennt, daß

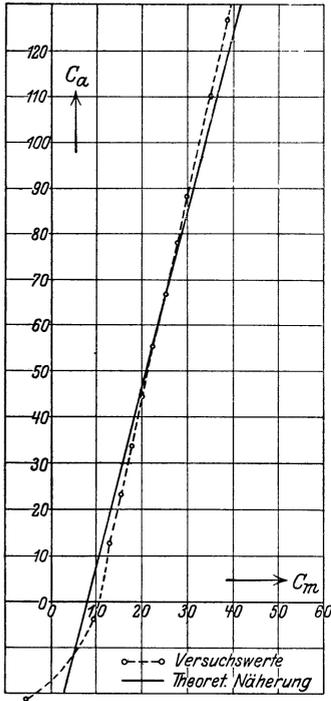


Abb. 96. Abhängigkeit der Auftriebszahl von der Momentenzahl beim Profil 311.

das Verhältnis der Auftriebswerte im mittleren Gebiet der β nicht sehr erheblich um einen Mittelwert < 1 schwankt. Die graphische Darstellung (Abb. 96) zeigt die Abhängigkeit der C_m - und C_a -Werte, sowie die Druckpunktswanderung. Die gerade Linie, die etwa die Neigung 4 : 1 hat und bei Veränderung des Seitenverhältnisses sich um sehr wenig verschiebt, befindet sich in guter Übereinstimmung mit den Messungsergebnissen. Auch die Druckpunktswanderung gibt die Theorie für $\beta > -\varphi_0$ in befriedigender Weise wieder (Abb. 97). Nur in der Nähe des kritischen Wertes $\beta = -\varphi_0$ treten gelegentlich erhebliche Abweichungen auf, wie angesichts der großen Empfindlichkeit der Auftriebswerte in diesem Bereich der Anstellwinkel von vornherein zu erwarten ist. Als eine Regel kann man anmerken, daß die für den un-

endlich langen Flügel berechneten Werte fast allgemein zu klein werden, daß also diese ersten theoretischen Druckpunktlagen zu weit nach vorn fallen.

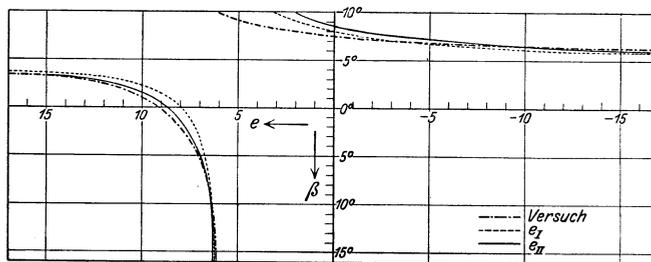


Abb. 97. Druckpunktwanderung beim Profil 311.

37. Lösung durch ein unstetiges Potential.

Wenn wir die Voraussetzung der Eindeutigkeit fallen lassen, aber an der stationären Beschaffenheit der Strömung festhalten, so können wir fragen nach der Existenz eines mehrdeutigen Potentials für die Flügelströmung, dessen Unstetigkeit im Gebiet der einblättrigen als

Strömungsgebiet zu betrachtenden Riemannschen Ebene der an der Hinterkante sich ausbildenden Wirbelschlepe angepaßt ist. Ein Potential dieser Art wird, wie C. Witoszynski¹ gezeigt hat, nicht nur einen Ersatz für die Zirkulation, sondern auch die Möglichkeit einer angenäherten Erfassung des Widerstandes bieten, der aus dem Lanchester-Kuttaschen Ansatz nicht direkt ermittelt werden kann.

Wir gehen wieder von der Betrachtung in der ζ -Ebene des Grundkreises aus und fügen dem bekannten Potential W_1 der Parallelströmung den Ausdruck

$$W_2(\zeta) = ikv_0 r_0 \frac{\zeta^{\frac{1}{2}} - r_0^{\frac{3}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}}}{\zeta^{\frac{1}{2}} + r_0^{\frac{3}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}}}$$

hinzu, dann bleibt für das entsprechende Strömungsbild

$$W = W_1 + W_2$$

der Kreis Stromlinie, da W_2 reell ausfällt für die Punkte seines Umfangs. Wenn wir ferner verlangen, daß die Geschwindigkeit für den Punkt $r_0 e^{i(\alpha \pm 2\pi)}$ verschwindet, erhalten wir für die zunächst noch unbestimmte Konstante k den Wert $k = -4 \sin \alpha$. Das gibt dann

$$W(\zeta) = -v_0 \left(\zeta + \frac{r_0^2}{\zeta} \right) - 4i v_0 r_0 \sin \alpha \frac{\zeta^{\frac{1}{2}} - r_0^{\frac{3}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}}}{\zeta^{\frac{1}{2}} + r_0^{\frac{3}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}}}, \quad (1)$$

$$\bar{v} = \frac{dW}{d\zeta} = -v_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{\zeta^2} \right) - \frac{4i v_0 r_0^{\frac{3}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}} \sin \alpha}{\zeta^{\frac{1}{2}} \left(\zeta^{\frac{1}{2}} + r_0^{\frac{3}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}} \right)}. \quad (2)$$

Die Geschwindigkeitsfunktion besitzt einen doppelten Pol in $\zeta = 0$, d. h. im Inneren der Kontur und außerdem den Pol $\zeta = r_0 e^{i(\alpha \pm 2\pi)}$, der im zweiten Riemannschen Blatt liegt, wenn man übereinkommt, die Argumente für die Punkte des Kreises innerhalb der Grenzen $-\pi + \alpha < \varphi < \pi + \alpha$ zu wählen.

Wenn man den Ausdruck

$$\Psi = -v_0 \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right) \sin \varphi - 4v_0 r_0 \sin \alpha \frac{r - r_0}{r + r_0 + 2(r r_0)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\varphi - \alpha}{2}} \quad (3)$$

der auf die Polarkoordinaten transformierten Stromfunktion Null setzt, ergibt sich die Kreislinie $r = r_0$ und das System der Diskontinuitätslinien

$$\frac{r + r_0}{r} \sin \varphi + \frac{4 r_0 \sin \alpha}{r + r_0 + 2 (r r_0)^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\varphi - \alpha}{2}} = 0. \quad (4)$$

¹ C. Witoszynski, La mécanique des profils d'aviation. Paris 1924, S. 43; von demselben Verf., Modification du principe de circulation, Proceedings of the first intern. congress for appl. mechanics (Biezeno, Burgers), Delft 1925, S. 418.

Setzt man hierin $r = r_0$, um die Schnittpunkte mit dem Kreise zu bestimmen, so kommt

$$\sin \varphi \left(1 + \cos \frac{\varphi - \alpha}{2} \right) + \sin \alpha = 0. \tag{5}$$

In dem auf der hinteren Seite gelegenen Punkt mit dem Argument $\varphi = \alpha \pm \pi$ teilt sich die Stromlinie $\Psi = 0$ in zwei Zweige, die etwa als Grenzen eines Totraums oder besser einer dem Zylinder nachziehenden Wirbelschlepe aufgefaßt werden können, und es ergibt sich, daß dieses streifenförmige Gebiet für $r = (7 + \sqrt{44}) r_0 = 16,6 r_0$ die größte auf demzugehörigen Radius gemessene Breite besitzt, daß ferner für $r = \infty$, $\varphi = 0$, resp. $= \pi$ wird d. h. also die Stromlinie der reellen Achse, d. h. der Anblaserichtung im Unendlichen parallel wird (Abb. 98).

Wenn nun dieses spitz vom Zylinder abgehende Unstetigkeitsgebiet den wirklichen Strömungsverhältnissen bei der Kreiskontur wenig entspricht,

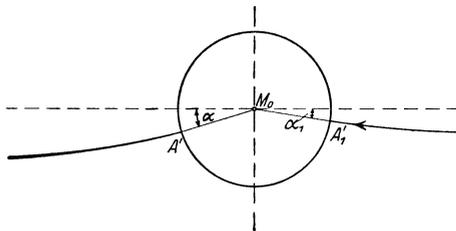


Abb. 98. Zur Geometrie der un stetigen Strömung um einen Kreis zylinder.

so wird die Übereinstimmung von Theorie und Beobachtung auffallend günstiger, wenn wir das oben eingeführte zweiwertige und in der Operationsebene un stetige Potential durch Vermittlung einer konformen Abbildung so auf das Äußere eines Flügelprofils in der z -Ebene übertragen,

daß der Verzweigungspunkt resp. hintere Staupunkt auf dem Kreise in die Profilspitze übergeführt wird, und es steht zu erwarten, daß die Berechnung der auftretenden Kräfte diese Übereinstimmung bestätigen wird. Daß das tatsächlich der Fall ist, soll im folgenden dargetan werden. Die Kräfte berechnen sich wieder am einfachsten aus der Blasiuschen Formel

$$P_y + i P_x = - \frac{1}{2} \rho \int \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 \frac{d\zeta}{dz} d\zeta,$$

wenn wir das Integral erstrecken über einen geschlossenen Weg längs des (Grund-)Kreises, der in dem Spaltungspunkt A' beginnt. Durch Benutzung des Wertes für die komplexe Geschwindigkeit in der Dreiebene und der Substitution

$$\zeta = \zeta'^2 r_0 e^{i\alpha}$$

verwandelt sich das Integral in

$$P_y + i P_x = - \rho v_0^2 r_0^2 e^{i\alpha} \int_{-i}^{+i} \left[1 - \frac{e^{-2i\alpha}}{\zeta'^4} + \frac{4i e^{-i\alpha} \sin \alpha}{\zeta' (\zeta' + 1)^2} \right]^2 \frac{d\zeta}{dz} \zeta' d\zeta' \tag{6}$$

und der Weg in den von $-i$ bis $+i$ verlaufenden Halbkreis ABC (vgl. Abb. 99). Statt dieses Integrationsweges kann man auch den Weg $ADEFC$ wählen, weil der dazwischen liegende Bereich keine Pole enthält. Bei einer unbegrenzten Ausdehnung des Halbkreises DEF sieht man, daß die entsprechenden Anteile des Integrals sich aufheben und daß es genügt, das Integral nur längs der in die Imaginärachsen fallenden Strecken AD und FC zu führen. Setzt man für den Weg AD , $\zeta' = -i\tau$, für den Weg FC $\zeta' = i\tau$ so lassen sich beide Integrale in das folgende zusammenfassen

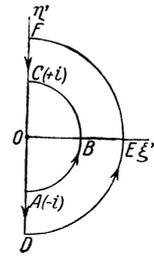


Abb. 99. Zur Berechnung des Blasius-Integrals.

$$P_y + iP_x = 16 \varrho v_0^2 r_0 \sin \alpha \int_1^\infty \left[\frac{(\tau^2 - 1)^2}{\tau^4 (\tau^2 + 1)} - \frac{2i e^{-i\alpha} \sin \alpha (\tau^2 - 1) (3\tau^2 + 1)}{\tau^4 (\tau^2 + 1)^4} \right] \frac{d\zeta}{dz} d\tau. \quad (7)$$

Wir wollen nun der Betrachtung, ohne übrigens damit die Allgemeinheit wesentlich zu beschränken, ein Joukowskysches Profil zugrunde legen, das aus dem Kreise durch die Substitution

$$z = \zeta + \frac{p^2 e^{2i\beta}}{\zeta + \zeta_0}$$

hervorgeht¹. Damit die Profilspitze A dem Kreispunkt A' mit $\zeta = -r_0 e^{i\alpha}$ entspricht, müssen wir

$$\zeta_0 = r_0 e^{i\alpha} - p e^{i\beta}$$

setzen. Der Winkel β zwischen der in die negative x -Achse fallenden Zustromrichtung und der zweiten oder Längsachse des Profils kann wieder als natürlicher Anstellwinkel gelten, während der Winkel $\alpha - \beta = \varphi_0$ zwischen den beiden ersten Profilachsen die Wölbung oder

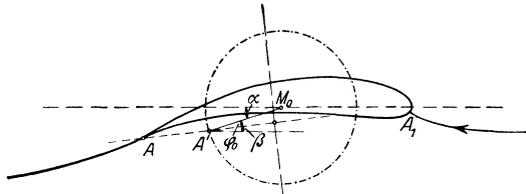


Abb. 100. Zur Geometrie der unstetigen Potentialströmung um ein Profil.

Gesamtkrümmung des Profils charakterisiert (Abb. 100). Wenn wir in $\frac{d\zeta}{dz}$ wieder $\zeta = -r_0 \tau^2 e^{i\alpha}$ einführen, ferner die im allgemeinen (bei den der Praxis angepaßten Formen) kleine Größe

$$\frac{\zeta_0}{r_0} e^{-i\alpha} = 1 - \frac{p}{r_0} e^{-i\varphi_0} = \varepsilon$$

¹ Vgl. Wilh. Müller, Zylinder in einer unstetigen Potentialströmung, Z. ang. Math. Mech., Bd. 7, S. 15f. 1927.

setzen, so formt sich das Integral um in

$$P_y + iP_x = 16 \varrho v_0^2 r_0 \sin \alpha \int_1^\infty \left[\frac{(\tau^2 - 1)^2}{\tau^4 (\tau^2 + 1)} - \frac{2i e^{-i\alpha} \sin \alpha (\tau^2 - 1)^2 (3\tau^2 + 1)}{\tau^4 (\tau^2 + 1)^4} \right] \frac{(\tau^2 - \varepsilon)^2 d\tau}{(\tau^2 - 1)(\tau^2 - 2\varepsilon + 1)}. \quad (8)$$

Wenn wir auf die Kleinheit von ε Rücksicht nehmen, so können wir in erster Annäherung setzen

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\tau^4}{\tau^4 - 1} - \frac{2\varepsilon\tau^2}{(\tau^4 - 1)(\tau^2 + 1)}$$

durch einfache Partialbruchzerlegung und Anwendung der Rekursionsformel

$$\int \frac{d\tau}{(\tau^2 + 1)^n} = \frac{1}{2n - 2} \cdot \frac{\tau}{(\tau^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n - 3}{2n - 2} \int \frac{d\tau}{(\tau^2 + 1)^{n-1}}$$

ergibt sich weiter

$$\int_1^\infty \frac{(\tau^2 - 1) d\tau}{(\tau^2 + 1)^2} = \frac{1}{2}, \quad 2 \int_1^\infty \frac{(\tau^2 - 1) d\tau}{\tau^2 (\tau^2 + 1)^3} = \frac{9}{8} \pi - \frac{7}{2} = 0,032,$$

$$\int_1^\infty \frac{(\tau^2 - 1) (3\tau^2 + 1) d\tau}{(\tau^2 + 1)^5} = \frac{1}{4} - \frac{9}{128} \pi = 0,03,$$

$$2 \int_1^\infty \frac{(\tau^2 - 1) (3\tau^2 + 1) d\tau}{\tau^2 (\tau^2 + 1)^6} = \frac{147}{128} \pi - \frac{18}{5} = 0,006.$$

und daher

$$\left. \begin{aligned} P_y + iP_x = 16 \varrho v_0^2 r_0 \sin \alpha \left\{ \frac{1}{2} - \left(\frac{9}{8} \pi - \frac{7}{2} \right) \varepsilon \right. \\ \left. - i e^{-i\alpha} \sin \alpha \left[\frac{1}{2} - \frac{9}{64} \pi - \left(\frac{147}{128} \pi - \frac{18}{5} \right) \varepsilon \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Wenn man auch auf die Kleinheit des Winkels $\alpha = \varphi_0 + \beta$ Rücksicht nimmt, so erhalten wir für die Komponenten der Kraft

$$\begin{aligned} P_y = P_a = 8 \varrho r_0 v_0^2 \sin(\varphi_0 + \beta), \\ -P_x = P_w = 8 \varrho r_0 v_0^2 \sin(\varphi_0 + \beta) \left[0,064 \frac{P}{r_0} \sin \varphi_0 + 0,096 \sin(\varphi_0 + \beta) \right. \\ \left. + 0,012 \frac{P}{r_0} \cos \varphi_0 \sin 2(\varphi_0 + \beta) \right]. \end{aligned}$$

Die Beiwerte für den Auftrieb und Widerstand lauten daher bei der Tiefe t des Flügels

$$c_a = 16 \frac{r_0}{t} \sin(\varphi_0 + \beta), \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} c_w = 16 \frac{r_0}{t} \sin(\varphi_0 + \beta) \left[0,064 \frac{P}{r_0} \sin \varphi_0 + 0,096 \sin(\varphi_0 + \beta) \right. \\ \left. + 0,012 \frac{P}{r_0} \sin 2(\varphi_0 + \beta) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Eliminiert man $\varphi_0 + \beta = \alpha$, so ergibt sich die Beziehung

$$c_w = 0,064 \frac{p}{r_0} \sin \varphi_0 \cdot c_a + \left(0,006 \frac{t}{r_0} + 0,0015 \frac{p t}{r_0^2} \right) c_a^2. \quad (11a)$$

Aus diesen Ausdrücken läßt sich zunächst eine qualitative Gesetzmäßigkeit von den Formelementen (Invarianten) des Profils ablesen, wie sie durch die Versuche bestätigt wird. Man sieht z. B., was vom Auftrieb bereits aus der älteren Theorie bekannt ist, daß beide Komponenten in dem praktischen Bereich der Anstellwinkel β mit der Wölbung φ_0 des Profils wachsen. Setzt man ferner $p = \frac{t}{4}$ und $r_0 = \frac{t}{4 \cos \varphi_0} + \delta$, wo δ ein Maß für die Dicke des Profils bezeichnet, so zeigt die Formel (11) ,daß z. B. der Widerstand von dicken Profilen im allgemeinen größer ausfällt als von dünnen.

38. Ergänzung zur Widerstandsberechnung.

Wir können die Betrachtungen des vorigen Abschnitts dadurch ergänzen, daß wir die diskontinuierliche Strömung um einen Flügel durch eine gewöhnliche Potentialströmung ersetzen, die außer der Zirkulation um das Profil noch einen äußeren Gegenwirbel enthält. Die Vergleichbarkeit dieser beiden Strömungen wird schon dadurch nahegelegt, daß die Diskontinuitätsschlepe hinter dem Flügel tatsächlich einem Wirbelsystem gleichwertig ist, das einen der Zirkulation entgegengesetzten Drehsinn besitzt. Wir haben früher bei Betrachtung des Kreiszyinders gesehen, daß der äußere Wirbel wesentlich die Widerstandskraft bestimmt. Es kommt für unsere jetzige Betrachtung nur darauf an, die entsprechenden Verhältnisse bei einem Tragflügel durch konforme Übertragung zu erhalten. Was die Strömung um den Kreiszyinder betrifft, so wollen wir den Punkt $-r_0 e^{i\alpha}$ als hinteren Staupunkt, d. h. gleichzeitig als Ausgangspunkt des Diskontinuitätsgebietes, ferner den auf dem Strahl $\varphi = \alpha' + \pi$ gelegenen Punkt $-R e^{i\alpha'}$ als äußeren Wirbelkern für die Kreisströmung auffassen. Dann lautet nach früherem das komplexe Potential der Strömung

$$W = -v_0 \left(\zeta + \frac{r_0^2}{\zeta} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\zeta + R e^{i\alpha'}}{\zeta + \frac{r_0^2}{R} e^{i\alpha'}}. \quad (1)$$

Legen wir weiter wie im vorigen Abschnitt ein Joukowskysches Profil zugrunde, dessen Längsachse in die ζ -Achse fällt, so lautet die abbildende Funktion mit $\beta = 0$

$$z = \zeta + \frac{p^2}{\zeta + r_0 e^{i\alpha} - p}. \quad (2)$$

Setzt man in der Bestimmungsgleichung für den Staupunkt

$$2 v_0 \sin \varphi + \frac{\Gamma}{2 \pi v_0 r_0} \frac{R^2 - r_0^2}{R^2 + r_0^2 + 2 R r_0 \cos(\varphi - \alpha')},$$

$\varphi = \pi + \alpha$, so erhält man

$$\frac{\Gamma}{2 \pi v_0 r_0} = 2 \sin \alpha \frac{R^2 + r_0^2 - 2 R r_0 \cos(\alpha - \alpha')}{R^2 - r_0^2}.$$

Da sich die Winkel α und α' nur wenig unterscheiden, so kann man angenähert setzen

$$k = \frac{\Gamma}{2 \pi r_0 v_0} = 2 \sin \alpha \frac{R - r_0}{R + r_0}. \quad (3)$$

Ersetzt man auch in dem allgemeinen Ausdruck für die Geschwindigkeit den Winkel α' durch α , so erhält man für die auf das Profil wirkende Kraft nach der Blasius'schen Formel

$$P_y + i P_x = -\frac{\rho v_0^2}{2} \oint \left(-1 + \frac{r_0^2}{\zeta^2} + \frac{k i r_0}{\zeta + R e^{i\alpha}} - \frac{k i r_0}{\zeta + \frac{r_0^2}{R e^{i\alpha}}} \right)^2 \frac{d\zeta}{dz} d\zeta. \quad (4)$$

Nach den Entwicklungen des Abschnitts 4 kann man das Integral auch im negativen Sinne längs eines kleinen, den äußeren Wirbel $\zeta = -R e^{i\alpha}$ umschließenden Kreises erstrecken. Benutzt man die Cauchyschen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} 2 i \pi F(\zeta_0) &= \oint \frac{F(\zeta) d\zeta}{\zeta - \zeta_0} \\ 2 i \pi \left(\frac{dF}{d\zeta} \right)_{\zeta = \zeta_0} &= \oint \frac{F(\zeta) d\zeta}{(\zeta - \zeta_0)^2}, \end{aligned} \right\}$$

indem man unter $F(\zeta)$ eine in der Umgebung des Punktes $\zeta = \zeta_0 = -R e^{i\alpha}$ reguläre Funktion bezeichnet, so erhält man mit $\frac{d\zeta}{dz} = f(\zeta)$ folgende Gleichung

$$\left. \begin{aligned} P_y + i P_x &= 2 \pi k \rho r_0 v_0^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{R^2} e^{-2i\alpha} - \frac{k i R r_0 e^{-i\alpha}}{R^2 - r_0^2} \right) f(-R e^{i\alpha}) \\ &\quad - k^2 i \pi \rho r_0^2 v_0^2 f'(-R e^{i\alpha}). \end{aligned} \right\}$$

Führt man den aus (2) resultierenden Ausdruck

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\zeta}{dz} = f(\zeta) &= \frac{(\zeta + r_0 \varepsilon e^{i\alpha})^2}{(\zeta + r_0 e^{i\alpha})(\zeta - r_0 e^{i\alpha}(1 - 2\varepsilon))} \\ \frac{dz}{d\zeta} &\sim \frac{2(\zeta + \varepsilon r_0 e^{i\alpha}) r_0^2 e^{2i\alpha} (1 - \varepsilon)^2}{(\zeta + r_0 e^{i\alpha})^2 (\zeta - r_0 e^{i\alpha} + 2\varepsilon r_0 e^{i\alpha})^2} \end{aligned} \right\}$$

ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} f(-R e^{i\alpha}) &= \frac{(R - r_0 \varepsilon)^2}{(R - r_0)(R + r_0(1 - 2\varepsilon))}, \\ f'(-R e^{i\alpha}) &= -\frac{2 r_0^2 e^{-i\alpha} (1 - \varepsilon)^2 (R - r_0 \varepsilon)}{(R - r_0)^2 (R + r_0(1 + 2\varepsilon))^2} \end{aligned}$$

und daher

$$P_y + iP_x = 2\pi k \varrho r_0 v_0^2 \left[1 - \left(\frac{r_0}{R}\right)^2 e^{-2i\alpha} - \frac{k i R r_0 e^{-i\alpha}}{R^2 - r_0^2} \right] \frac{(R - \varepsilon r_0)^2}{(R - r_0)(R + r_0(1 - 2\varepsilon))} \\ + 2 i k^2 \pi \varrho v_0^2 \frac{e^{-i\alpha} r_0^4 (1 - \varepsilon)^2}{(R - r_0)^2 (R + r_0(1 - 2\varepsilon))}.$$

Berücksichtigt man nur die ersten Potenzen von α und ε , so hat man angenähert bei Benutzung des Wertes für k

$$P_y = 4\pi \varrho r_0^2 v_0^2 \alpha \frac{R - r_0}{R + r_0} \left(1 - \frac{2\varepsilon r_0^2}{R(R + r_0)} \right). \quad (5)$$

Wenn man diesen Auftriebswert dem im vorigen Abschnitt gewonnenen gleichsetzt, so erhält man

$$R \sim 4,5 r_0.$$

Damit ist dann auch der Widerstandswert zahlenmäßig festgelegt.

Nachdem aber die diskontinuierliche Strömung des vorigen Paragraphen durch eine Strömung mit Potentialwirbel ersetzt ist, kann man nun auch die Anpassung an ein endliches Seitenverhältnis angenähert dadurch vollziehen, daß man den für den Widerstand des Kreiszyinders bestimmten Korrekturfaktor, der durch die Vereinigung des inneren und äußeren Wirbelfadens zu einem (rechteckigen) Wirbelring bedingt ist, auch für unser Profil verwenden. Aus der in Abschnitt 28 S. 129 gegebenen Formel entnimmt man für den Faktor \varkappa einen Wert $\sim 1,3$. Um die im vorigen Paragraphen berechneten Werte für c_w und c_a zu prüfen, legen wir das in Göttingen untersuchte Joukowskysche Profil 430 zugrunde, für das etwa folgende Abmessungen zutreffen

$$r_0 = 3,25, \quad t = 11,8, \quad p = 2,93, \quad \frac{p}{r_0} \sim 0,9, \quad \varphi_0 = 7^\circ.$$

In der beigegebenen Tabelle sind die nach den letzten beiden Abschnitten berechneten, mit 100 multiplizierten Auftriebs- und Widerstandswerte mit den Göttinger Versuchsergebnissen zusammengestellt.

β	C_a Versuch	C_a Rechnung	Quotient der C_a -Werte	C_w (Versuch)	C_w (Rechnung)
— 4,1	14	22	0,64	1,32	0,36
— 2,6	24,3	34	0,71	1,52	0,72
— 1,1	35,6	45	0,79	1,94	1,14
0,3	45,5	56	0,81	2,39	1,61
1,8	56	67	0,84	3,14	2,20
3,3	66	77	0,86	4,00	2,85
4,7	76,8	90	0,86	5,04	3,70
6,2	87	100	0,87	6,33	4,46
7,6	96,9	111	0,87	7,44	5,31
10,6	113,9	133	0,86	10,4	7,40
13,5	128	154	0,83	13,6	9,70
16,5	137	176	0,78	17,2	12,5

Dabei sind die in den Formeln vorkommenden Winkel β um etwa 2° größer einzuführen als die von der Profilschne aus gezählten Anstellwinkel. Beim Vergleich muß man im Auge behalten, daß der Einfluß der Kennziffer und die besonderen Reibungsverhältnisse in der Rechnung unberücksichtigt geblieben sind. Im Hinblick darauf kann die Annäherung der Theorie an die Wirklichkeit als nicht ungünstig bezeichnet werden.

Für den Beiwert der Oberflächenreibung kann man nach Versuchen der Göttinger Anstalt für einen stoffbespannten, gut zellonierten Flügel die empirische Formel

$$c_f = 2 \varrho \, 0,0375 \left(\frac{1}{R} \right)^{0,15} v_0^2 \cdot 0 \quad (6)$$

verwenden, wo $R = \frac{v_0 t}{\nu}$ die Reynoldsche Zahl und O die gesamte, von der Luft bestrichene Oberfläche des Flügels bedeutet.

39. Zum Problem der instationären Tragflügelströmung.

1. Wir haben bisher bei der Betrachtung der Tragflügeltheorie die stationäre Beschaffenheit der Strömung vorausgesetzt oder jedenfalls unter Zugrundelegung des Erstarrungsprinzips in den meisten Fällen angenommen, daß die Kräfte in jeder Strömungsphase dieselben sind wie im stationären Fall (Abschnitt 6). Diese Voraussetzungen waren bis zu einem gewissen Grade berechtigt, da es sich fast überall um die gleichmäßige und geradlinige Bewegung eines Flügels in der unendlich ausgedehnten Flüssigkeit handelte. Aber schon das Vorhandensein von Wirbeln, die in der Flüssigkeit wie feste Körper sich bewegen, bedingt eine Änderung des Geschwindigkeitsfeldes in der Umgebung der Tragflächen und ruft daher nach dem allgemeinen Impulssatz zusätzliche Kräfte hervor. Eine Strömung von ausgeprägtem instationären Charakter ist dann gegeben, wenn zusätzliche, beschleunigte oder periodische Bewegungen, etwa Schwingungen des Grundkörpers oder des flüssigen oder luftförmigen Mediums auftreten, wie beim Schwingenflug der Vögel oder beim dynamischen Segelflug. Die Kraft setzt sich in allen diesen Fällen, wie bereits oben betont ist, zusammen aus demjenigen Bestandteil, welcher der mit dem augenblicklichen Zustand übereinstimmenden stationären Strömung entspricht und dem lokalen oder instationären Bestandteil, der mit der zeitlichen Änderung des Potentials zusammenhängt.

2. Die mathematische Verfolgung des allgemeinen instationären Vorgangs, der sich auf die gleichzeitige Änderung der vier „Komponenten“ der Strömung, der Transportgeschwindigkeit v , der Rotation $\bar{\omega}$ der Kontur und der Zirkulation Γ bezieht, ist allerdings besonders erschwert durch die Forderung, einen Zusammenhang herzustellen zwischen der

Beschleunigung des Grundkörpers und der Wirbel- und Zirkulationsbildung. Eine gewisse erste Lösung dieses Problems ist von H. Wagner gegeben worden, der den Anfahrvorgang, d. h. sowohl die gleichförmig beschleunigte Bewegung und den relativ plötzlichen Übergang von der Ruhe in die gleichmäßige Bewegung eines lamellenartigen Tragflügels bei kleinen Anstellwinkeln genauer untersucht und dabei zum ersten Male den Nachweis für die Entstehung eines Potentialwirbels in einer reibungsfreien Flüssigkeit erbracht hat. Die Untersuchungen gründen sich auf die allgemeinen, früher gegebenen Impulsätze. Tragen wir den Weg s des Profils als Abszisse und den Wert der Zirkulation Γ und den entsprechenden Geschwindigkeitssprung $[v]$ der von der Hinterkante ausgehenden Diskontinuitätslinie als Ordinate auf, so ergibt sich etwa das neben-

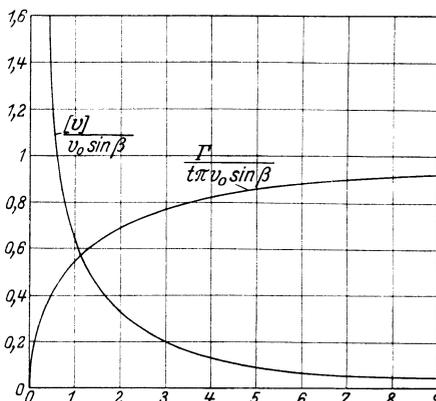


Abb. 101. Zirkulation und Geschwindigkeitssprung beim Anfahren eines Tragflügels (nach Wagner).

gezeichnete Bild. Während die Zirkulation sehr schnell vom Werte 0 bis in die Nähe des asymptotischen Grenzwertes wächst — nach Zurücklegung eines Weges gleich der Profiltiefe ist bereits 56 % des Endwertes erreicht — nimmt $[v]$ vom Unendlichen bis auf Null asymptotisch ab.

3. Die Frage des Bewegungsbeginns oder des Übergangs zur Zirkulationsströmung ist durch Prandtl noch nach einer anderen Richtung hin verfolgt worden. Der Versuch zeigt, daß der sich spaltende Anfahrwirbel aus einer Trennungsfäche hervorgeht, die sich von der Hinterkante spiralig in die Flüssigkeit aufrollt (Abb. 102). Nun zeigt auch die theoretische Betrachtung, daß sich

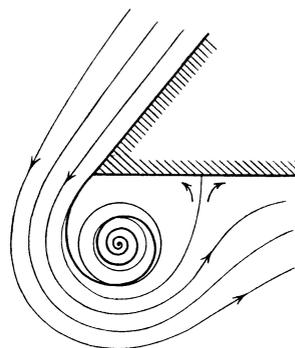


Abb. 102. Strömung um eine Ecke (nach Prandtl).

Beschleunigungsgesetze ausfindig machen lassen, bei denen die Trennungsfäche die Gestalt einer logarithmischen Spirale hat. Prandtl hat die beiden Fälle einer „kongruent veränderlichen Strömung“ und einer „ähnlich veränderlichen Strömung“ untersucht. Im ersteren Falle bleibt die Trennungsfäche sich dauernd kongruent, während nur die Größe der Geschwindigkeit mit der Zeit anwächst; im zweiten Falle dagegen vergrößert sich die Trennungsfäche, ohne ihre Gestalt zu verändern.

Wenn man die Geschwindigkeit des Körpers $v = \frac{c}{t_1 - t}$ ($t < t_1$) setzt, so wird das Potential der Relativströmung $\Phi = \frac{c \Phi_1}{t_1 - t}$, wo Φ_1 der stationäre, von der Zeit unabhängige Faktor ist. Da der Druck

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 = \frac{c}{(t_1 - t)^2} \left(\Phi_1 + \frac{c}{2} (\nabla \Phi_1)^2 \right) \quad (1)$$

wird, so genügt es, Φ_1 so zu bestimmen, daß zu beiden Seiten der Trennungsfläche der Ausdruck $\Phi_1 + \frac{c}{2} (\nabla \Phi_1)^2$ denselben Wert annimmt. Diese Forderung läßt sich durch das komplexe Potential

$$\Phi_1 + i \Psi_1 = C \left(\frac{z}{a} \right)^{\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})} \quad (2)$$

erfüllen, dem eine Trennungsfläche von der Gestalt einer logarithmischen Spirale mit 30° Steigung entspricht, die zugleich Stromlinie wird.

Im zweiten Fall, bei dem die Trennungsfläche nicht stationär ist, müssen neben den dynamischen Bedingungen noch zwei kinematische Bedingungen erfüllt sein. Die normalen Geschwindigkeitskomponenten müssen beiderseits gleich sein und die Verschiebungsgeschwindigkeit in der normalen Richtung muß mit der normalen Geschwindigkeitskomponente der Flüssigkeit übereinstimmen. Die von Prandtl¹ angegebene Lösung hat die Form

$$W = \Phi + i \Psi = C \left(\frac{t}{T} \right)^{2m-1} \left[\frac{z}{a} \left(\frac{t}{T} \right)^{-m} \right]^{\alpha + i\beta}, \quad (3)$$

wo die vorkommenden Größen den Bedingungen anzupassen sind.

4. Auch für die allgemeine ungleichförmige, z. B. periodische Bewegung eines Tragflügels sind von Prandtl und seinen Schülern wertvolle Ansätze gegeben worden.

Wir nehmen mit Prandtl und Birnbaum² ein flaches, etwa von -1 bis $+1$ reichendes Flügelprofil an, das aus den früher betrachteten Normalfunktionen für den „tragenden“ Geschwindigkeitssprung oder die tragende Wirbeldichte γ aufgebaut sein möge. Wenn dieses Profil außer der geradlinigen Grundbewegung v_0 noch eine irgendwie geartete zusätzliche Bewegung mit dem gegen v_0 kleinen Geschwindigkeitsvektor u ausführt, so wird die Eulersche Gleichung für ein mit der Geschwindigkeit v_0 fortschreitendes Bezugssystem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (v_0 + u) \nabla \cdot u + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad (4)$$

¹ L. Prandtl, Über die Entstehung von Wirbeln in einer idealen Flüssigkeit. Vorträge zur Hydro- u. Aerodynamik, Berlin 1924, S. 25.

² W. Birnbaum, Z. ang. Math. Mech. 1923, S. 290—297 und 1924, S. 278—292.

oder bei Beschränkung auf Glieder 1. Ordnung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_0 \nabla \cdot u + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0. \quad (4a)$$

Der Auftrieb für den Streifen ds ist durch die Differenz der Drücke unten und oben und durch das Zirkulationselement γ gegeben

$$dA = (p_u - p_0) dx = \rho v_0 \gamma dx,$$

woraus

$$\gamma = \frac{1}{\rho v_0} (p_u - p_0). \quad (5)$$

Durch die zeitliche Änderung der Zirkulationsdichte γ entstehen freie Wirbel, die einem zusätzlichen Geschwindigkeitssprung σ entsprechen, so daß der gesamte Sprung am Flügel

$$\gamma + \sigma = u_0 - u_u$$

wird.

Aus (4a) folgt daher für die x -Richtung (die mit der Richtung von v_0 zusammenfallen möge)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\gamma + \sigma) + v_0 \frac{\partial (\gamma + \sigma)}{\partial x} - v_0 \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0$$

oder

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Wenn man über $\gamma(xt)$ passende Annahmen macht, so läßt sich σ aus (6) bestimmen. Daraus berechnet sich dann die reduzierte Vertikalgeschwindigkeit w , die andererseits mit der vertikalen Flügelbewegung $\frac{\partial y}{\partial t}$ und der Kontur durch die kinematische Beziehung

$$\frac{\partial y}{\partial t} + v_0 \frac{\partial y}{\partial x} = w(xt). \quad (7)$$

verknüpft ist. Damit sind aber die Ausdrücke für Auftriebskraft, Moment und induzierten Widerstand leicht aufzustellen. Auf Grund dieser allgemeinen Ansätze entwickelt nun Birnbaum in seiner zweiten Arbeit die Theorie eines periodisch auf und ab schlagenden Flügels und gelangt dabei zu Aussagen über die Abhängigkeit der Kräfte von der Schlagbewegung und über die Vortriebsarbeit und den Wirkungsgrad der Vorrichtung. Bei der Untersuchung der Bewegungsvorhänge eines elastisch gelagerten Flügels wird ein schon früher durch praktische Erfahrung und in Göttingen versuchsmäßig festgestellter Fall von instabiler Schwingung durch die Rechnung bestätigt. Wegen der Umständlichkeit der Rechnung müssen wir auf eine Wiedergabe der Einzelheiten verzichten.

VII. Aus der Theorie des Propellers¹.

40. Die achsensymmetrische Idealströmung in der Umgebung der Schraube.

Nachdem die Geschwindigkeits- und Kraftverhältnisse am ebenen Flügel genügend geklärt sind, haben wir zugleich die Grundlage geschaffen zum Verständnis jener Organe, welche die früher vorausgesetzte Bewegung bei Luftfahrzeugen wie bei Wasserfahrzeugen vermitteln. Da nämlich der Motor zunächst nur Drehwucht erzeugt, so muß eine Vorrichtung geschaffen werden, analog zu den Rädern eines durch Reibung bewegten Wagens, die geeignet ist, das Drehmoment in eine axiale Zugkraft umzusetzen. Das geschieht nun durch eine oder mehrere, tragflügelartig gekrümmte, aber gleichzeitig aus unten zu erörternden Gründen schraubenartig verdrehte Flächen, die bei der Rotation um die durch den Punkt O bezeichnete Achse, ähnliche Druckverhältnisse in der umgebenden Flüssigkeit (z. B. Luft) hervorrufen, wie ein bewegter Tragflügel, also auch Seitenkräfte zu erzeugen imstande sind, die sich im wesentlichen zu einer Resultierenden in der Richtung der Drehachse zusammensetzen (Abb. 103).

Die Hauptfunktion des rotierenden Luftschraubensystems besteht jedenfalls darin, der Luft eine nach hinten gerichtete Beschleunigung

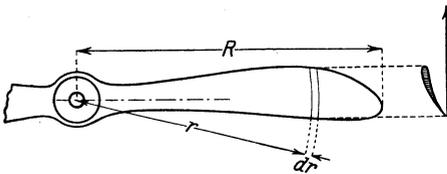


Abb. 103. Propellerflügel.

zu erteilen, als deren Gegenwirkung die achsiale Kraft entsteht, die um so größer ist, je größer der auf die Zeiteinheit bezogene Impuls der Luftmenge ist. Indem wir diese achsiale Luftbewegung zunächst allein ins Auge fassen und von der

Drehung der Luft absehen, ferner auch die besondere Beschaffenheit der Schraubenflügel außer acht lassen, oder unendlich viele Flügel voraussetzen, können wir uns die Aufgabe stellen, ein ideales und achsensymmetrisches Strömungsfeld zu ermitteln, das der wirklichen Strömung in der Umgebung der Schraube in großen Zügen nahekommt. Es ist dabei zweckmäßig, zunächst die bewegungslose oder ortsfeste sog. Hubschraube zugrunde zu legen, durch deren Rotation die Luft von allen Seiten angesaugt und durch den von den äußersten Punkten der Schraube beschriebenen Schraubenkreis hindurch getrieben wird.

Wir dürfen annehmen, daß der Strahl erst in großer Entfernung hinter dem Schraubenkreis sich in Wirbel auflöst und daß die Strom-

¹ Eine kritische Übersicht über die wichtigsten Propellertheorien gibt A. Pröll, Kritische Betrachtungen zur Theorie des Schraubenpropellers. Jahrb. d. schiffbautechn. Gesellsch. 1923, S. 269—346. Berlin: Julius Springer.

linien hinter der Schraube sich asymptotisch achsenparallelen Linien annähern. Um die Aufgabe mathematisch zu formulieren, denken wir uns die Schraubenkreisfläche auf der Oberseite mit unendlich vielen gleichmäßig verteilten Senkstellen besetzt, d. h. als Senkenschicht mit konstanter Dichte ausgebildet. Fügt man noch die weiteren Bedingungen hinzu, daß die zur Schraubenfläche normale Komponente der Geschwindigkeit für alle Punkte der Fläche einen konstanten Wert v_k hat und daß die Flüssigkeit im Unendlichen ruht, so ist das zugehörige achsensymmetrische Potential als Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt¹.

Die Aufstellung des Potentials ist verhältnismäßig umständlich und kann hier nur in ihren Grundgedanken im Anschluß an die ausführliche Darstellung von H. Kimmel charakterisiert werden. Man geht dabei von dem in Abschnitt 4 besprochenen Greenschen Satz aus. Wenn Ψ und Φ zwei eindeutige, die Laplacesche Gleichung erfüllende und mit Ausnahme des Punktes P_0 überall endliche und stetige Funktionen sind, so ist der Wert Φ_0 des Potentials Φ im Punkte P_0 des von der geschlossenen Fläche F umgrenzten Gebietes durch das Integral

$$\Phi_0 = \frac{1}{4\pi} \int \left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) df$$

dargestellt.

Wenn man die Greensche Funktion so bestimmen kann, daß auf der ganzen Begrenzung

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0,$$

so ist

$$\Phi_0 = -\frac{1}{4\pi} \int \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n} df$$

die gesuchte Potentialfunktion. Diese Aufgabe ist allgemein von A. Sommerfeld² für endlichwertige Potentiale gelöst worden.

Unserm Falle entspricht eine im schlichten Raume außerhalb der als Doppelschicht zu betrachtenden Schraubenkreisfläche zweideutige Potentialfunktion. Wenn die Greensche Funktion Ψ gefunden ist, ist das Potential Φ für den diesen Raum erfüllenden Zustrom bestimmt; damit entspricht der zweite Wert der Funktion Φ in einem zweiten, über dem ersten zu denkenden Riemannschen Raum der nach hinten

¹ H. Kimmel, Theorie der Luftschrauben auf aerodynamischer Grundlage. Dissertation, München 1912.

² A. Sommerfeld, Proceedings of the London Mathem. Society, Vol. 28, S. 395. 1897.

abströmenden Luft. Die Aufstellung von Ψ , die wir hier übergehen müssen, geschieht durch Vermittlung einer Raumtransformation durch reziproke Radien, bei der die Fläche des Schraubenkreises in eine doppelt zu zählende Halbebene, die Peripherie in die die Halbebene begrenzende Gerade übergeht. Es muß für uns genügen, wenn wir die Form der endgültigen Lösung der Randwertaufgabe angeben.

Wenn wir den Radius des Schraubenkreises mit R und den Radiusvektor eines Punktes mit r bezeichnen, so ergeben sich folgende partikuläre, nach den zonalen Kugelfunktionen $P_n(\cos \vartheta)$ entwickelbare Lösungen, für die je zwei Reihen gültig sind, die sich auf die Fälle $r < R$ und $r > R$ beziehen

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{R v_k}{2} \left[P_0 - \left(\frac{r}{R}\right) P_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 P_2 - \frac{1}{2 \cdot 4} \left(\frac{r}{R}\right)^4 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{r}{R}\right)^6 P_6 - \dots \right] \\ \Phi_2 &= \frac{R v_k}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \left[P_0 - \frac{\pi}{2} \left(\frac{r}{R}\right) P_1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 P_2 - \frac{1}{3} \left(\frac{r}{R}\right)^4 P_4 + \frac{1}{5} \left(\frac{r}{R}\right)^6 P_6 - \dots \right] \\ \Phi_1 &= \frac{R v_k}{2} \cdot \frac{R}{r} \left[\frac{1}{2} P_0 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \left(\frac{R}{r}\right)^2 P_2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{R}{r}\right)^4 P_4 - \dots \right] \\ \Phi_2 &= \frac{R v_k}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left[\frac{1}{3} P_1 - \frac{1}{5} \left(\frac{R}{r}\right)^2 P_3 + \frac{1}{7} \left(\frac{R}{r}\right)^4 P_5 - \dots \right] \end{aligned} \right\} (2)$$

Die Potentialverteilung Φ_1 kann aufgefaßt werden als herrührend von einer gleichmäßig mit Senkstellen von der Ergiebigkeit $\frac{v_k}{4\pi}$ pro Flächen-

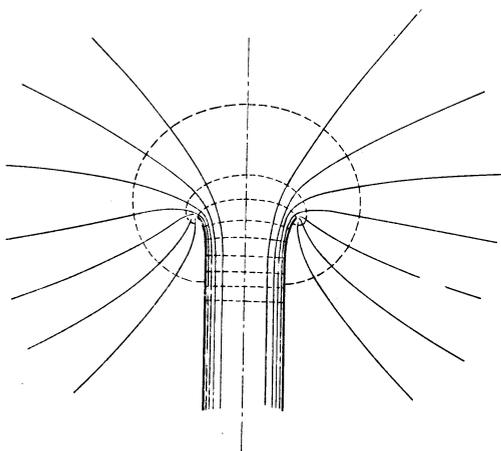


Abb. 104. Achsensymmetrische Idealströmung um eine Hubschraube.

einheit belegten Kreisscheibe, die mit dem Schraubenkreis zusammenfällt. Die Strömung ist symmetrisch zur Fläche und hat in ihr die konstante axiale Geschwindigkeit $-\frac{v_k}{2}$. Überlagert man dieser Strömung die ebenfalls zur Kreisfläche symmetrische Strömung Φ_2 , die mit konstanter axialer Geschwindigkeit $+\frac{v_k}{2}$ aus der Unterseite heraustritt und mit der Geschwindigkeit

$-\frac{v_k}{2}$ in die Oberseite hineingesaugt wird, so erhält man die Idealströmung der Hubschraube. Während sich auf der Unterseite die gleichen, aber entgegengesetzten Axialgeschwindigkeiten aufheben,

verstärken sie sich auf der Oberseite zum Werte $-v_k$. Für den Vorstrom gewinnen wir dann das Potential $\Phi_I = \Phi_1 \pm \Phi_2$, entsprechend den beiden Seiten der Schraube, für den Abstrom dagegen

$$\Phi_{II} = \Phi_I + 2 v_k z.$$

Die Geschwindigkeitsreihen werden allgemein:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= -\frac{v_k}{2} + \frac{v_k}{2} \left[P_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{R}\right)^2 P_3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{r}{R}\right)^4 P_5 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{r}{R}\right)^6 P_7 + \dots \right] \\ v_2 &= -\frac{v_k}{2} + \frac{v_k}{2} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{r}{R} \left[P_1 - \frac{2}{3} \left(\frac{r}{R}\right)^2 P_3 + \frac{3}{5} \left(\frac{r}{R}\right)^4 P_5 - \frac{4}{7} \left(\frac{r}{R}\right)^6 P_7 + \dots \right] \\ v_1 &= \frac{v_k}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \left[-\frac{1}{2} P_1 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{R}{r}\right)^2 P_3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left(\frac{R}{r}\right)^4 P_5 + \dots \right] \\ v_2 &= \frac{v_k}{2} \cdot \frac{4}{\pi} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \left[-\frac{1}{3} P_3 + \frac{2}{5} \left(\frac{R}{r}\right)^2 P_4 - \frac{3}{7} \left(\frac{R}{r}\right)^4 P_6 + \dots \right] \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (r < R) \\ \\ \\ (r > R) \end{array} \quad (3)$$

In den Punkten der Peripherie des Schraubenkreises wird die Absolutgeschwindigkeit unendlich groß von der Ordnung wie $\frac{1}{\sqrt{r}}$ für

$r = 0$; in unendlicher Entfernung hinter der Schraube wird $v = 2 v_k$, also doppelt so groß wie die axiale Komponente der Einströmungsgeschwindigkeit. Das System der Stromlinien in einem Meridianschnitt hat etwa den Charakter der Abb. 104. Man sieht, wie die angesaugte Flüssigkeit nach hinten in einen zylindrischen Strahl ausläuft, der sich allmählich verjüngt. Die Potentiallinien, von denen einige skizziert sind, nähern sich mit wachsendem r konzentrischen Kreisen¹.

Wenn man nun weiter der Strömung für die Hubschraube noch eine konstante Geschwindigkeit v_0 hinzufügt, so ergibt sich das Bild der Strömung in der Umgebung einer Trieb-schraube, wie es in der Abb. 105 veranschaulicht ist. Graphisch hat man das gefundene System der Potential- und Stromlinien bei der Hubschraube mit dem geradlinigen System der dem Potential $c + v_0 z$ entsprechenden Linien zu kombinieren, wobei zu beachten ist, daß die zur Achse senkrechten Potentiallinien in arithmetischer Reihe mit derselben konstanten Differenz aufeinander folgen wie die Potentiallinien bei der Hub-

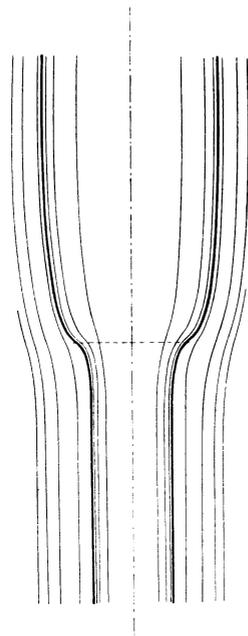


Abb. 105. Achsymmetrische Idealströmung um eine Trieb-schraube.

¹ Näheres über die Konstruktion findet sich in der erwähnten Arbeit von Kim-mel (a. a. O. S. 24).

schraube, während die geradlinigen Stromlinien so fortschreiten, daß der Fluß durch die von zwei Stromzylindern begrenzte Röhre denselben Wert wie bei der ortsfesten Schraube hat.

41. Zirkulations- und Wirbelfadentheorie des Propellers.

1. Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen, die nur ein summarisches Bild von der einen Schraubenflügel umgebenden Flüssigkeitsströmung liefern, bedürfen nun einer ergänzenden Untersuchung, die geeignet ist, die Bedeutung der besonderen Formgebung des Flügels und die Abweichungen von dem idealen achsensymmetrischen Strömungsbild besonders in der unmittelbaren Nachbarschaft der Flügel hervortreten zu lassen. Um den Zusammenhang mit den Verhältnissen am einfachen Tragflügel zu zeigen, denken wir uns durch zwei zur Achse 0 gehörende Zylinderflächen mit den Radien r und $r + dr$ aus einem Propellerblatt ein Element herausgeschnitten, das in der Abb. 103 so in die Zeichenebene umgeklappt ist, daß die Achsenrichtung horizontal und die momentane Drehrichtung vertikal liegt.

Die gesamte Geschwindigkeit v dieses Elementes, dessen Querschnitt die Gestalt eines Tragflügelprofils hat, setzt sich zusammen aus der Fortschreitgeschwindigkeit v_0 des Fahrzeugs und der mit dem Abstand r von der Achse proportionalen Drehgeschwindigkeit $r\omega_0$ und bildet den Winkel β mit der Umlaufgeschwindigkeit (vgl. Abb. 115). Die relative Geschwindigkeit der Luft gegen das Element hat dann natürlich den entgegengesetzt gleichen Wert. Als Anstellwinkel $\alpha = \gamma - \beta$ kann man den Winkel zwischen v und der Steigungsrichtung γ oder der Sehnenrichtung des Elementes bezeichnen. Wenn man diesen Anstellwinkel über dem ganzen Schraubenflügel konstant halten will, so müssen die Steigungswinkel nach außen hin in demselben Maße abnehmen wie der Winkel β . Das ist zwar keine absolut erforderliche konstruktive Maßregel; die wirkliche Propellerfläche läßt aber immerhin eine gewisse Annäherung an das Gesetz einer umgekehrt mit dem Radius proportionalen Steigung erkennen.

Wichtig ist es für uns festzustellen, daß das Propellerelement dem umgebenden Medium gegenüber ganz analogen Bedingungen unterworfen ist wie der Tragflügel. Wenn wir uns die aus der Tragflügeltheorie gewonnene Erkenntnis zunutze machen, daß es für die Kraftwirkung wesentlich auf die Zirkulation ankommt, die sich am Flügel aus Anlaß der besonderen Formgebung ausbildet, so können wir nachträglich wieder von dieser Gestalt ganz absehen und den Flügel durch einen linearen tragenden Wirbelfaden ersetzen, dessen Achse mit der Mittellinie des Propellerblattes zusammenfällt¹.

¹ Vgl. etwa Föttinger, Neue Grundlagen für die Behandlung des Propellersproblems. Jahrb. d. schiffbautechn. Gesellsch. Bd. 19, S. 414. 1918. Berlin: Julius Springer.

Da das Blatt an beiden Seiten begrenzt ist, so wird sich der Wirbelfaden dem Gesetz der idealen Flüssigkeit zufolge über die starren Grenzen hinaus beiderseits ins Unendliche fortsetzen, als Nabenwirbel II und als Endwirbel III. Für das innere, durch die Nabe bezeichnete Ende kann die Drehgeschwindigkeit vernachlässigt werden, so daß der freie Wirbel II annähernd die Richtung der Achse annimmt; der äußere Grenzpunkt des Propellers dagegen beschreibt, da er eine Fortschrittgeschwindigkeit v_0 und eine Drehgeschwindigkeit $R\omega_0$ besitzt, eine Schraubenlinie und man kann annehmen, daß der freie Endwirbel III dieser Linie folgen wird (Abb. 106).

Bei großer Steigung entsprechen in einem Achsenschnitt die freien Wirbel in erster Annäherung parallelen Stabwirbeln, wovon der mittlere Wirbel die Nabenwirbel aller Flügel vereinigt. Die beiden Abb. 107, 108 zeigen

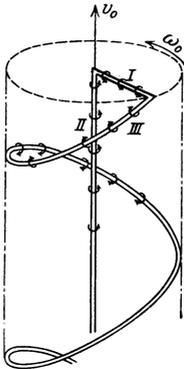


Abb. 106.
Hauptwirbelfäden
hinter einem
Schraubenflügel.

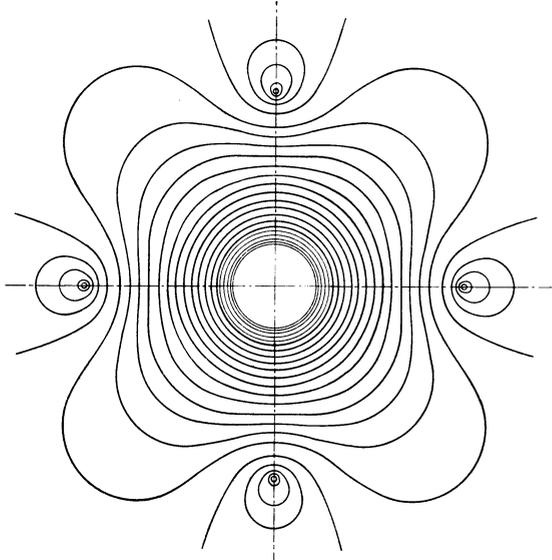


Abb. 107. Absolutströmung im Querschnitt des Strahls einer vierflügeligen Schraube.

die Absolut- resp. Relativströmung im senkrecht zur Achse geführten Schnitt durch einen 4-flügeligen Strahl. Das komplexe Potential und die Geschwindigkeitsfunktion dieser Schnittströmung sind nach S. 97 dargestellt durch

$$W = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z^4 - R^4}{z^4}; \quad \bar{v} = \frac{2i\Gamma R^4}{\pi z (z^4 - R^4)}. \quad (1)$$

Die Stromlinien dieser Absolutströmung sind mit der Kurvenschar

$$\Psi_a = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left| \frac{z^4 - R^4}{z^4} \right| = c \quad (2)$$

identisch. Um die Relativströmung zu erhalten, hat man die wirkliche Rotationsgeschwindigkeit in Abzug zu bringen, d. h. die Funktion

$\frac{1}{2} \omega r^2$ hinzuzufügen (vgl. Abschnitt 44). Die Stromlinienschar der Relativströmung ist daher durch

$$\Psi_r = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left| 1 - \frac{R^4}{r^4} e^{-4i\varphi} \right| + \frac{1}{2} \omega r^2 = c \quad (3)$$

dargestellt. Wie man leicht feststellt oder direkt der Formel 3 des Abschnitt 23 entnimmt, erhält jeder Wirbel durch die andern Wirbel eine tangentielle Geschwindigkeit $\frac{2\Gamma}{\pi R} - \frac{3\Gamma}{4\pi R} = \frac{5\Gamma}{4\pi R}$.

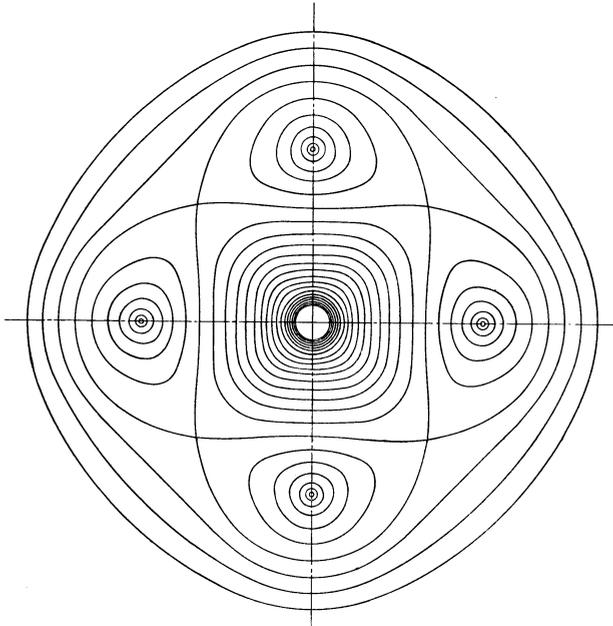


Abb. 108. Relativströmung im Querschnitt des Strahles einer vierflügeligen Schraube.

Führt man daher in (4) $\omega = \frac{5\Gamma}{4\pi R^2}$ ein, so wird

$$\Psi_r = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \left| 1 - \left(\frac{R}{r}\right)^4 e^{-4i\varphi} \right| + \frac{5\Gamma r^2}{8\pi R^2} = c. \quad (3a)$$

In diesem Stromliniensystem ist eine Kurve mit 4 Doppelpunkten enthalten, die Staupunkte oder Ruhepunkte der Strömung sind. Setzt man die komplexe Relativgeschwindigkeit

$$\bar{v}_r = \frac{i\Gamma}{\pi} \cdot \frac{8R^6 + 5r^2(r^4 e^{4i\varphi} - R^4)}{4R^2 r e^{i\varphi} (r^4 e^{4i\varphi} - R^4)}$$

gleich Null, so findet man die Gleichungen

$$\sin 4\varphi = 0, \quad 8R^6 + 5r^6 \cos 4\varphi - 5r^2 R^4 = 0.$$

Als Lösungen kommen hier nur in Betracht

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{4}, \quad \frac{7\pi}{4}$$

und die reelle Wurzel der Gleichung

$$\left(\frac{r}{R}\right)^6 + \left(\frac{r}{R}\right)^3 = \frac{8}{5},$$

die etwa den Wert $r_0 = 0,94 R$ hat.

Die vier entsprechenden Staupunkte liegen also auf den Halbierungslinien der Achsenwinkel. Wenn man den Wert r_0 benutzt, so geht die Gleichung der singulären Stromlinie über in

$$\ln \frac{1 - \left(\frac{R}{r}\right)^4}{1 + \left(\frac{R}{r_0}\right)^4} = \frac{5}{4} \frac{r_0^2 - r^2}{R^2}.$$

Sie bildet den Schnitt eines mitrotierenden Flüssigkeitsschlauches mit 4 Wulsten. Man kann sich nach Föttinger in dem „Schlauch“ die Axialbewegung des Propellerstrahles vor sich gehend denken, so daß der Impuls jener Masse dem Axialschub entspricht, während das Drehmoment an dem Impulsmoment der vom Schlauch mit seinen Wülsten abgeschlossenen Menge seinen „Widerhalt“ findet.

Wenn man auf die Steigung, d. h. die schraubenförmige Gestalt der freien Wirbelachsen Rücksicht nimmt, so würden wir eine Schnittströmung erhalten, die namentlich in den Gebieten der Wülste Abweichungen zeigt gegenüber dem ideal ebenen Bild.

2. Bei der Berechnung der Kräfte, die auf den Flügel wirken, kann man eine Annäherung dadurch erhalten, daß man den gewundenen Endwirbel, durch einen geradlinigen, ins Unendliche gehenden Wirbelfaden ersetzt, der den Anfangspunkt und die Anfangstangente mit ihm gemeinsam hat¹. Die Richtung dieser Tangente oder die Steigung der Wirbelschraube ist durch den sog. Fortschrittgrad des Propellers bestimmt

$$\lambda = \operatorname{tg} \beta = \frac{v_0}{R \omega_0}.$$

Unter diesen vereinfachenden Annahmen gestaltet sich die Rechnung recht einfach. Die von dem gebundenen Wirbel oder der gebundenen Zirkulation herrührende Kraft entspricht dem Auftrieb, die von den freien Wirbeln herrührenden Kräfte dem induzierten Widerstand beim Tragflügel. Die axiale Komponente der Kräfte d. h. die Schubkraft S setzt sich dabei aus drei Teilen zusammen. Ein Element des Flügels liefert entsprechend der Auftriebskraft

$$dS_1 = \varrho \Gamma \omega_0 r dr.$$

¹ Vgl. W. Kucharski, Wirkungsweise und Theorie des Propellerleitapparates. Werft, Reederei, Hafen, Heft 17, S. 498. 1925. Berlin: Julius Springer.

Da der Wirbel II an der Stelle des Elementes eine Geschwindigkeit $\frac{\Gamma}{4\pi r}$ zur Folge hat, die eine dem Schub entgegenwirkende Magnuskraft hervorruft, haben wir

$$dS_2 = -\varrho \frac{\Gamma^2}{4\pi r} dr.$$

Vom geradlinigen Endwirbel, der den Wirbel III zu ersetzen hat, rührt ferner her

$$dS_3 = -\varrho \Gamma \frac{\Gamma \sin \beta}{4\pi(R-r)} dr.$$

Der totale Schub wird also, wenn man eine gewisse untere Grenze r_i für die Integration einführt

$$S = \sum_{r_i}^R dS_i = \frac{1}{2} \varrho \Gamma R^2 \omega_0 \left[1 - \frac{\Gamma}{2\pi R^2 \omega_0} (1 + \sin \beta) \ln \frac{R}{r_i} \right]. \quad (4)$$

Mit den dimensionslosen Größen

$$\xi = \frac{\Gamma}{2\pi R(B\omega_0)} = \frac{\Gamma}{2F\omega_0}; \quad A = (1 + \sin \beta) \ln \frac{R}{r_i}$$

hat man

$$S = \varrho F R^2 \omega_0^2 \xi \left[1 - \xi (1 + \sin \beta) \ln \frac{R}{r_i} \right] = \varrho F R^2 \omega_0^2 \xi (1 - A\xi). \quad (4a)$$

Wenn man den Schub auf die Einheit der Schraubenkreisfläche und der zur Fortschritt- resp. Umfangsgeschwindigkeit gehörigen Geschwindigkeitshöhe reduziert, erhält man zwei dimensionslose Zahlen, den sog. „Belastungsgrad“ d_s und die Schubziffer c_s , entsprechend der Gleichung

$$c_s = \lambda^2 d_s = 2\xi(1 - A\xi). \quad (5)$$

In ähnlicher Weise ergibt sich nun ein Ausdruck für das Drehmoment M , wenn wir die von den Wirbelfäden herrührenden tangentialen Komponenten der Magnuskräfte bestimmen, die auf den gebundenen Wirbel I oder den Flügel wirken. Da der zentrale Faden II nur Anblasegeschwindigkeiten in der Umfangsrichtung auf I überträgt, die eine verschwindende Tangentialkomponente erzeugen, so setzt sich M nur aus zwei Teilen zusammen.

Der erste Teil rührt von der Relativgeschwindigkeit v_0 gegen I her. Wegen

$$dM_1 = \varrho \Gamma v_0 r dr$$

wird

$$M_1 = \frac{1}{2} \varrho \Gamma v_0 R^2.$$

Da der Wirbel III im Abstände r von der Achse die Anblasegeschwindigkeit $\frac{\Gamma}{4\pi(R-r)} \cos \beta$ hervorruft, erhält man

$$M_3 = \varrho \Gamma \int_0^{R-r_i} \frac{\Gamma \cos \beta}{4\pi(R-r)} r dr = \varrho \frac{\Gamma^2}{4\pi} \cos \beta \int_0^{R-r_i} \frac{r}{R-r} dr,$$

oder bei Vernachlässigung von $\frac{r_i}{R}$ gegen 1

$$M_3 = \varrho \frac{\Gamma^2}{4\pi} \cos \beta R \left(\ln \frac{R}{r_i} - 1 \right).$$

Im ganzen wird daher das Moment

$$\left. \begin{aligned} M = M_1 + M_3 &= \frac{1}{2} \varrho \Gamma v_0 R^2 \left[1 + \frac{\Gamma}{2\pi v_0 R} \cos \beta \left(\ln \frac{R}{r_i} - 1 \right) \right] \\ &= \varrho F R^3 \omega_0^2 \lambda \xi \left[1 + \frac{\xi}{\lambda} \cos \beta \left(\ln \frac{R}{r_i} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Mit der Bezeichnung

$$B = \frac{1}{\lambda} \cos \beta \ln \left(\frac{R}{r_i} - 1 \right)$$

erhält man ferner für den sog. Drehwert oder die Momentenzahl

$$c_m = \frac{M \omega_0}{\frac{1}{2} \varrho F (R \omega_0)^3} = 2 \xi \lambda (1 + \xi B). \quad (7)$$

Der Wirkungsgrad, der den Quotienten der nutzbaren und der zugeführten Leistung angibt, hat dann die Form

$$\eta = \frac{S v_0}{M \omega_0} = \frac{1 - \xi A}{1 + \xi B}. \quad (8)$$

Die Beziehungen lassen jedenfalls erkennen, daß die induzierende Wirkung der Endwirbel auf das aufzuwendende Drehmoment vergrößernd und auf die nutzbaren Werte von Schub und Leistung verkleinernd einwirken. Der Wirkungsgrad ist ferner lediglich abhängig von der reduzierten Zirkulationsgröße ξ , dem Fortschrittsgrad λ und dem Verhältnis des äußeren Radius zum Radius der Endwinkel.

Die Betrachtungen können weiter auf den Fall übertragen werden, daß der Propeller aus n Flügeln, das ganze System also aus n gebundenen und den entsprechenden Endwirbeln besteht.

Die inneren Endwirbel schließen sich zu einem einzigen axialen Wirbel von der Stärke $n\Gamma$ zusammen; man kann ferner für den „Radius“ dieses Wirbelfadens nr_i statt r_i einführen, wodurch jene Verstärkung wieder etwas ausgeglichen wird. Es tritt aber die weitere Komplikation hinzu, daß die von dem äußeren Ende eines Flügels ausgehenden Wirbel auch auf die anderen Flügel induzierende Wirkungen

ausüben. Die wechselseitigen Induktionen der gebundenen Wirbel dagegen heben sich gegenseitig auf, wenn die Flügel, was hier vorausgesetzt werden soll, in gleichen Winkelabständen aufeinander folgen. Wenn wir nur wenige Flügel voraussetzen, so können wir auch die erstere Wechselwirkung vernachlässigen und haben dann in erster Annäherung

$$S = n_{\rho} F R^2 \omega_0^2 \xi (1 - A \xi) \quad (9)$$

$$A = n \ln \frac{R}{n r_i} + \sin \beta \ln \frac{R}{r_i}$$

$$M = n_{\rho} F R^3 \omega_0^2 \xi \lambda (1 + \xi B) \quad (10)$$

$$B = \frac{1}{\lambda} \cos \beta \left(\ln \frac{R}{r_i} - 1 \right).$$

Für die weitere Berechnung einer Schraube schlägt nun Kucharsky folgenden Weg vor. Er nimmt die Gleichung für M als maßgebend an, weil das Drehmoment in allen Fällen leicht zu bestimmen ist und korrigiert den Schub mit Hilfe des bekannten Wirkungsgrades. Es wird dann noch eine weitere, aus der Druckgleichung (vgl. Abschnitt 44) gewonnene Beziehung herangezogen, welche zum Ausdruck bringt, daß der zum Radius $n r_i$ gehörigen Stelle des Flügels eine nicht zu überschreitende Grenzgeschwindigkeit oder der Druck Null entspricht. Wir wollen hier nur die Resultate eines von Kucharsky durchgerechneten Zahlenbeispiels bringen, um die Größenordnung der in den Formeln vorkommenden Ausdrücke zu zeigen.

Von einem 4-flügeligen Schiffspropeller sei gegeben

$$R = 3,15 \text{ m}, \quad v_0 = 9,26 \text{ m/sek} \quad (20 \text{ Knoten mit } 10\% \text{ Nachstrom})$$

$$\omega_0 = 8,9 \text{ sek}^{-1} \quad (\text{Tourenzahl pro Minute } 85).$$

Daraus ergibt sich dann

$$\lambda = 0,207, \quad \beta \sim 18^{\circ} 20'.$$

Ist die Leistung mit 15000 Wellenpferdestärken gegeben, so ergibt sich das Moment zu

$$M = 716,2 \frac{15000}{85} = 126300 \text{ mkg}.$$

Die weiteren Größen erhalten dann die Werte

$$\frac{R}{r_i} \sim 60, \quad \xi = 0,0113, \quad \Gamma = \xi \cdot 2\pi R^2 \omega_0 = 6,26 \text{ m}^2/\text{sek}$$

$$A = 10,97, \quad B = 8,89, \quad \eta = 0,794.$$

Es muß hervorgehoben werden, daß die vorstehende Betrachtung nur die Grundlage bildet für die eigentliche Kucharskysche Untersuchung, die ein weitergehendes Ziel verfolgt, nämlich die Theorie der mit der Schraube verbundenen Leitapparate, wie sie im Schiffsbau Verwendung finden.

42. Propeller mit geringstem Energieverlust.

1. Die vorstehenden Betrachtungen werden den tatsächlichen Strömungsvorgängen vom Propeller insofern nur unvollkommen gerecht, als auf die ungleichmäßige Verteilung der Zirkulation längs der Flügel und die damit in Zusammenhang stehende kontinuierliche Ablösung von Wirbelzöpfen keine Rücksicht genommen wurde. Wenn wir im Anschluß an die Erörterung einer möglichen Verbesserung der Theorie die Frage nach den Bedingungen für den geringsten Energieverlust durch Wirbelbildung aufwerfen, so müssen wir auf den in Abschnitt 33 besprochenen Munk'schen Satz zurückgreifen. Bei der einfachen Tragfläche muß der Luft eine nach abwärts gerichtete Geschwindigkeit erteilt werden, deren kinetische Energie durch Arbeitsleistung, d. h. durch Überwindung eines Widerstandes aufgebracht werden muß. Dieser Widerstand ist ein Minimum, wenn die der Luft erteilte Geschwindigkeit konstant ist, was bekanntlich einer elliptischen Auftriebsverteilung entspricht. Die Strömung hinter der Fläche ist in diesem günstigsten Falle also so, wie wenn der durchmessene Raum zu einem festen Körper erstarrt wäre, der sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit nach abwärts bewegt.

Ein ähnlicher Satz gilt nun für den Schraubenflügel, dessen Leistung darin besteht, ein Drehmoment in die nutzbare, axiale Schubkraft umzusetzen, was nur möglich ist, wenn der Flüssigkeit, z. B. der Luft im Schraubenstrahl von der Antriebsmaschine eine doppelte Wucht (Fortschreitwucht und Drehwucht) erteilt wird. Wenn man von der Reibung absieht, so kann diese letztere Verlustarbeit wieder durch die Störungsgeschwindigkeiten ausgedrückt werden, die von dem Felde der freien von dem Flügel abgehenden Wirbel herrühren. Die Gesamtheit dieser Wirbel, deren Stärke der Zirkulationsänderung $\frac{d\Gamma}{dr}$ längs des Flügels entspricht, beschreibt eine Schraubenfläche¹, etwa dieselbe Bahn die auch die Flügelachse durchläuft (Abb. 109). Betrachten wir wieder wie früher die Luft zwischen zwei Kontrollebenen E_1 und E_2

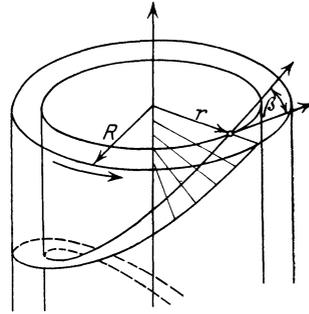


Abb. 109. Zur Theorie des kleinsten Widerstandes.

in großer Entfernung vor und hinter dem Propeller, so werden sich die Ebenen bei der Relativbewegung der Luft nach einer Sekunde um die Strecken v_0 in die Lagen E'_1 und E'_2 verschoben haben und man sieht wieder, daß der Energieverlust durch die Energiemenge derjenigen

¹ Vgl. H. Reißner, Stationärer Bewegungszustand einer schraubenförmigen Wirbelfläche. Z. ang. Math. Mech. Bd. 2, S. 106—109. 1922.

Strömung dargestellt wird, die zwischen den hinteren Ebenen E_2 und E'_2 von der schraubenförmigen Wirbelfläche herrührt. Man erhält dann wie früher¹, wenn Φ das Potential der von Wirbelsystem erzeugten Bewegung ist, als Ausdruck für diesen Verlust

$$H = \frac{\rho}{2} \iint (\nabla \Phi)^2 d\tau = \frac{\rho}{2} \int (\Phi \nabla \Phi) n df,$$

wo die erste Integration über den von E_2 und E'_2 begrenzten Raum, die zweite Integration über den zwischen den Kontrollebenen gelegenen Teil der Wirbelfläche zu erstrecken ist. Wenn man die von vorn nach hinten gehende Normale n_1 der Fläche einführt und den Potentialsprung wieder der Zirkulation gleichsetzt, so würde die Bedingung für den geringsten Verlust bei n Flügeln besagen, daß die Variation

$$\delta H = \sum_1^n \rho \int \delta \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} df,$$

verschwinden soll, während gleichzeitig der Schub

$$S = \sum_1^n \int_0^R \rho \Gamma r \omega dr$$

konstant gehalten wird. Setzen wir für das Flächenelement nach der Abb. 109

$$df = \frac{v_0 dr}{\sin \beta_r}$$

und betrachten Γ konstant längs einer erzeugenden Schraubenlinie, so wird

$$\delta H = \rho v_0 \sum_1^n \int_0^R \delta \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} \frac{dr}{\sin \beta_r}.$$

Es wird dann wie früher

$$\delta S - \lambda \delta H = 0$$

oder nach Einsetzung

$$\lambda v_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} = \omega_0 r \sin \beta_r. \quad (1)$$

Bezeichnen wir mit $2u'$ die Störungsgeschwindigkeit senkrecht zur Wirbelfläche in einem weit nach hinten verschobenen Punkt und benutzen

$$\omega_0 r = \frac{v_0}{\operatorname{tg} \beta_r},$$

so läßt sich die von A. Betz zum ersten Male gefundene Bedingung in die einfache Form bringen

$$\frac{u'}{\cos \beta_r} = \text{konst} = u_0. \quad (1a)$$

¹ Vgl. die dort zitierten Arbeiten von E. Trefftz.

Bezüglich der strengen Ableitung dieses Resultates, die hier zu weit führen würde, verweisen wir auf die ausführliche Arbeit von A. Betz¹, in der nicht nur der Fall eines radial gestellten geradlinigen Flügels, sondern auch der allgemeine Fall eines beliebig geformten Flügels als einer dichten Folge von geradlinigen, fadenförmigen Elementarflügeln berücksichtigt wird.

Die Bedingung (1) wird aber offenbar durch Verschieben der starr gedachten Schraubenfläche nach hinten mit der Geschwindigkeit $2u_0$ oder durch Drehen mit der gleichbedeutenden Winkelgeschwindigkeit $2\nu = 2 \frac{u_0}{v_0} \omega_0$ erzeugt. Denn bei der Drehung dieser Fläche mit der Drehgeschwindigkeit 2ν wird ein im Abstand r von der Achse befindliches Flüssigkeitsteilchen normal zur Schraubenfläche mit der Geschwindigkeit

$$2u' = 2r\nu \sin \beta = 2u_0 \frac{r\omega}{v_0} \sin \beta = 2u_0 \cos \beta$$

verschoben. Wir können daher die Optimalbedingung dahin formulieren, daß die Strömung hinter der Schraube mit geringstem Energieverlust so ist, wie wenn die von jedem Schraubenflügel durchlaufene Bahn (Schraubenfläche) erstarrt wäre und sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit nach hinten verschiebt oder sich mit einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit um die Schraubenachse dreht.

2. Die zusätzlichen Geschwindigkeiten am Flügel. Um auf der Grundlage dieses Satzes Näherungsformeln für die Verteilung der Zirkulation und damit für die Luftkräfte bei einer mehrflügeligen Schraube aufzustellen, bedarf es noch einer ergänzenden Betrachtung der Geschwindigkeitsverhältnisse an den Flügeln. Die bisher allein berücksichtigten Relativ- oder Anblasegeschwindigkeiten v_0 und $r\omega_0$ werden zusätzliche Beträge erhalten, die mit dem hinter dem Propeller herrschenden Werte in einfacher Beziehung stehen. Denken wir uns im Sinn der „Strahltheorie“ einen Idealpropeller mit unendlich vielen Flügeln, so haben wir längs des zur Achse senkrechten Kreises (r) eine gleichmäßige Verteilung der Geschwindigkeiten und können damit auf die durch den Ringquerschnitt mit den Radien r und $r + dr$ sekundlich hindurchströmende Flüssigkeitsmasse dm die dynamischen Grundsätze anwenden. Berücksichtigen wir zunächst nur die achsiale Bewegung (einfache Strahltheorie) und nennen $2u_a$ die Zusatzgeschwindigkeit weit hinter dem Propeller, so ergibt sich als elementare Schubkraft nach dem Impulssatz

$$dS = 2dm u_a.$$

¹ A. Betz, Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust. Göttinger Nachrichten 1919, S. 193.

Wenn v_s die Durchschreitgeschwindigkeit der Luft durch das Ringelement der Schraubenfläche bedeutet, so entspricht dieser Kraft die Leistung

$$dL = dS v_s = 2dm u_a v_s.$$

Da sich diese Leistung andererseits durch die Zunahme der Wucht ausdrückt, so ergibt sich

$$dL = 2dm u_a \cdot v_s = \frac{dm}{2} [(v_0 + 2u_a)^2 - v_0^2] = 2dm u_a (v_0 + u_0)$$

und daher

$$v_s = v_0 + u_a. \quad (2)$$

Für die Axialgeschwindigkeit am Flügel haben wir also den Mittelwert aus der Geschwindigkeit vor und hinter dem Propeller zu setzen.

Diese Betrachtung kann auch auf die Drehung der Flüssigkeitsmasse angewandt werden.

Wir haben, wenn $2u_t$ die tangentielle Geschwindigkeit der Luft weit hinter der Schraube und dJ das Trägheitsmoment der Masse dm bedeutet, die Momentengleichung

$$dM = 2 \frac{u_t}{r} dJ.$$

Ohne Rücksicht auf die Strahlkontraktion ist der Energieverlust infolge der Drehung

$$2 \left(\frac{u_t}{r} \right)^2 dJ = \frac{u_t}{r} dM,$$

woraus als absoluter Wert der zusätzlichen Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeit am Flügel $\frac{u_t}{r}$, also als gesamte Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_s = \omega_0 - \frac{u_t}{r} \quad (3)$$

sich ergibt. In der Tat zeigt die Energiebilanzgleichung

$$dM \omega = dS \omega_0 + dM \frac{u_t}{r},$$

daß das Verhältnis der achsialen zu der tangentialen Komponente der am Flügелеlement angreifenden Kraft den Wert hat

$$\frac{dU}{dS} = \frac{v_0 + u_a}{\omega_0 r - u_t} = \operatorname{tg} \beta' = \lambda', \quad (4)$$

daß also die resultierende Kraft senkrecht steht auf der wahren Geschwindigkeitsrichtung der Luft. Dieses Verhältnis λ' wird auch der „induzierte Wirkungsgrad“ des Propellers genannt.

3. Nach diesen Vorbereitungen kehren wir zu der Betz'schen Optimalbedingung zurück und suchen einen analytischen Ausdruck zu gewinnen für das Gesetz der Verteilung der Zusatzgeschwindigkeiten über den Flügelradius. Indem wir dabei dem von Prandtl in einem Zusatz zur Betz'schen Arbeit angegebenen Wege folgen, stellen wir uns vor,

daß der starr gedachten Schraubenfläche (als Bahnspur des Flügels) durch einen Stoß eine Geschwindigkeit $2u_0$ in der Achsrichtung erteilt wird. Zerlegen wir die dadurch entstehende normal zur Schraubenfläche gerichtete Flüssigkeitsbewegung in eine tangentiale und achsiale Komponente, so haben wir nach (2) und (3) für das Gebiet des Flügels

$$\left. \begin{aligned} u_t &= u_0 \cos \beta' \sin \beta' = u_0 \frac{(v_0 + u_a)(r \omega_0 - u_t)}{(v_0 + u_a)^2 + (r \omega_0 - u_t)^2} \\ u_a &= u_0 \cos^2 \beta' = u_0 \frac{(r \omega_0 - u_t)^2}{(v_0 + u_a)^2 + (r \omega_0 - u_t)^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Führen wir nun zur Abkürzung folgende Bezeichnungen ein

$$\frac{r \omega_0}{v_0} = x, \quad \frac{u_a}{v_0} = y, \quad \frac{u_t}{v_0} = z, \quad \frac{u_0}{v_0} = k,$$

so ergibt sich aus diesen Gleichungen durch eine einfache Eliminations-Rechnung

$$\begin{aligned} 2z &= x - \sqrt{x^2 - 4y(y+1)} \\ x^2 &= \frac{y(k+1)^2}{(k-y)^2} \quad \text{resp.} \quad y = \frac{x^2 k}{x^2 + (k+1)^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Setzt man den Wert für y in den Ausdruck für z ein, so kommt

$$z = \frac{k(k+1)x}{x^2 + (k+1)^2}, \quad (7)$$

ferner wird

$$\frac{u_t}{r \omega_0} = \frac{z}{x} = \frac{k(k+1)}{x^2 + (k+1)^2}. \quad (8)$$

Diese Beziehungen lassen nun eine recht übersichtliche Diskussion zu. Die für verschiedene Werte von k gezeichneten xy -Kurven, welche die Verteilung der axialen Strahlgeschwindigkeit über den Schraubenradius darstellen, beginnen im Nullpunkt mit einer horizontalen (d. h. mit der x -Achse zusammenfallenden)

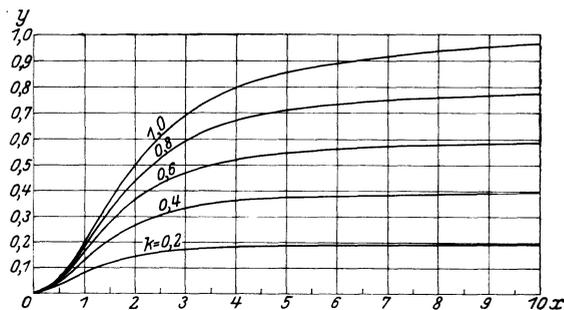


Abb. 110. Günstigste Verteilung der axialen Strahlgeschwindigkeit über den Schraubenradius.

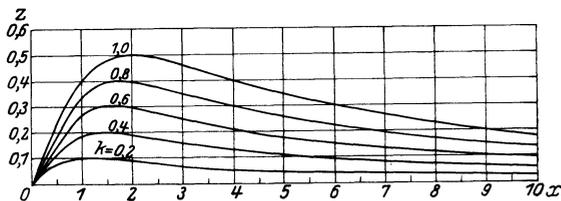


Abb. 111. Günstigste Verteilung der tangentialen Strahlgeschwindigkeit über den Schraubenradius.

Tangente, steigen ziemlich rasch an, um sich dann asymptotisch der Geraden $y = k$ anzunähern (vgl. Abb. 110).

Die im allgemeinen kleiner ausfallende tangentielle Strahlgeschwindigkeit, deren Verlauf aus der Abb. 111 ersichtlich ist, hat bei $x = k + 1$ ein Maximum $x = \frac{k}{2}$ und nimmt mit weiter wachsendem x mehr und mehr ab.

Berücksichtigt man die berechneten Zusatzgeschwindigkeiten, so geht der Steigungswinkel in den induzierten Steigungswinkel, resp. der Fortschrittsgrad in den induzierten Fortschrittsgrad über. Einsetzung der Werte ergibt dann

$$\operatorname{tg} \beta'_r = \lambda'_r = \frac{v_0 + u_a}{r \omega_0 - u_t} = \lambda_r (1 + k) = \frac{v_0 + u_0}{r \omega_0}. \quad (9)$$

Wenn man den Quotienten $\eta_i = \frac{\lambda_r}{\lambda'_r}$ den induzierten Wirkungsgrad für das Flügелеlement im Abstand r nennt, so ergibt sich, daß unter den angegebenen Voraussetzungen der örtliche Wirkungsgrad längs des Flügelradius konstant ist¹. Den induzierten Fortschrittsgrad erhält man ferner auch dadurch, daß man die achsiale Geschwindigkeit um u_0 vermehrt und die tangentielle Komponente ungeändert läßt. Dieser Satz enthält gleichzeitig eine sehr einfache Konstruktion des Steigungswinkels (Abb. 112), auf die zuerst in der Arbeit v. Karman und Bienen hingewiesen wird². Wenn man die Strecke $OP = \lambda'_r$

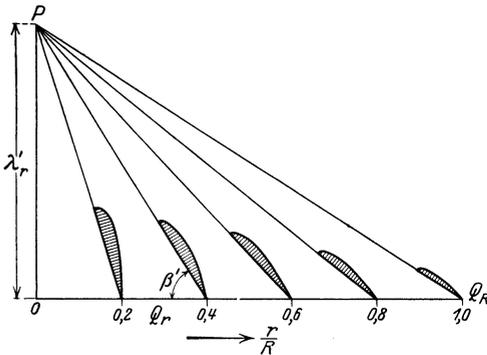


Abb. 112. Konstruktion des Steigungswinkels eines Propellerflügels.

macht und auf der Senkrechten OQ_R das Verhältnis $\frac{r}{R} = OQ_r$ abträgt, dann gibt die Verbindung PQ_r die Steigung an der Stelle r des Flügels.

4. Verteilung der Zirkulation. Aus der Tangentialgeschwindigkeit u_t erhalten wir den Wert der für die Kraftwirkung maßgeblichen Zirkulationen Γ an den dem Radius r , resp. dem Werte x entsprechenden Stellen eines Systems von Schraubenflügeln, die gleichmäßig auf den Umfang verteilt sein mögen.

$$\Gamma = \frac{4 \pi r u_t}{n} = \frac{4 \pi r v_0 k(k+1)x}{n(x^2 + (k+1)^2)}.$$

¹ Vgl. auch A. Betz, Eine Erweiterung der Schraubenstrahltheorie. Z. Flugtechn. 1920, S. 105.

² Th. Bienen und v. Karman, Zur Theorie der Luftschrauben. Z. V. d. I., Bd. 68, 1924; vgl. auch H. B. Helmbold, Z. Flugtechn., Bd. 15, 1924, S. 150.

Zum Zwecke der Integration ist es vorteilhaft

$$\tau = \frac{r}{R} = x \lambda = \frac{\lambda' x}{k + 1}$$

zu setzen. Dann geht die Zirkulation über in

$$\Gamma = \frac{4 \pi R k v_0}{n} \frac{\tau^2 \lambda'}{\tau^2 + \lambda'^2}. \tag{10}$$

Bei dieser Betrachtung sind zunächst die besonderen in der Randzone auftretenden Verhältnisse nicht berücksichtigt.

Wenn a der Abstand von zwei benachbarten Randkurven der Schraubenflächen sind, so ist

$$a = \frac{2 \pi v_0 r}{n \sqrt{v_0^2 + r^2 \omega_0^2}}.$$

Die Strömung um die Ränder der Fläche kann man nun nach Prandtl ersetzen durch die Umströmung eines Systems von Ebenen, die im Abstand a aufeinanderfolgen¹ (Abb. 113). Das entsprechende, auf die Ebene übertragene Problem würde dann darin bestehen, die Beeinflussung einer Parallelströmung durch äquidistante geradlinige, von $x = -\infty$ bis $x = 0$ verlaufende Geraden zu ermitteln. Das kann aber mit Hilfe der in Abschnitt 11 gegebenen Abbildungsformeln sofort gelöst werden. Wenn man

$$\frac{z \pi}{a} = z' = \ln Z$$

setzt, so ist das Bereich der z -Ebene auf das Bereich der längs der Strecke ± 1 aufgeschnittenen Z -Ebene abgebildet. Durch

$$Z = \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right)$$

wird aber dies Gebiet auf das Äußere des Einheitskreises der ζ -Ebene transformiert. Die Strömung in der z -Ebene verwandelt sich dabei in ein zirkulatorisches Umströmen dieses Einheitskreises. Setzen wir daher

$$\Phi + i \Psi = W = \frac{i \gamma}{2 \pi} \ln \zeta,$$

so wird

$$z = \frac{a}{\pi} \ln \cos \frac{2 \pi W}{\gamma}.$$

Für die Stromlinien $\Psi = 0$ wird also

$$x = \frac{a}{\pi} \ln \cos \frac{2 \pi \Phi}{\gamma}; \quad \Phi = \pm \frac{\gamma}{2 \pi} \arccos e^{\frac{\pi x}{a}} \quad (x \gtrless 0).$$

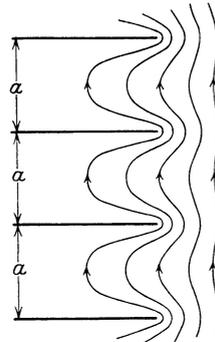


Abb. 113. Strömung um ein Ebenensystem.

¹ Vgl. auch A. Betz, Über die Vorgänge an den Schaufelenden von Kaplan-Turbinen. Hydraulische Probleme, Berlin 1926, S. 161.

Der Potentialsprung wird also, wenn wir für $-x$ die Größe $R-r$ setzen

$$[\Phi] = \frac{\gamma}{\pi} \arccos e^{-\frac{\pi(R-r)}{a}}. \quad (11)$$

Diesen Potentialsprung darf man nun in erster Annäherung proportional dem Abfall der Zirkulation an den Flügelspitzen der Schraube setzen. Die Formel (11) würde für die Zirkulation einen asymptotischen Grenzwert ergeben, also dem tatsächlich vorhandenen allmählichen Abfall nicht gerecht werden. Um einen Verlauf zu erhalten, der der Wirklichkeit näher kommt, kann man den Ausdruck (10) mit (11) multiplizieren und gleichzeitig $\gamma = 2$ setzen. Dann erhält man

$$\Gamma = \frac{8 R k v_0}{n} \frac{\tau^2 \lambda'}{\lambda'^2 + \tau^2} \arccos e^{-\frac{\pi R}{a}(1-\tau)}. \quad (12)$$

Die Gleichung gilt um so genauer, je mehr Schraubenflügel vorhanden sind. Wenn man $a = 0$ setzt, was dem Fall $n = \infty$ entsprechen würde, so geht der Ausdruck wieder in den Ausdruck der Formel (10) über. In der Abb. 114 ist die Funktion (11) [Kurve (d)], ferner der Auftriebsverlauf nach der Formel (10) [Kurve (c)] und nach der genaueren Formel (12) in Abhängigkeit von $\frac{r \omega_0}{v_0 + u_0}$ unter Zugrundelegung des Fortschrittsgrades $\lambda' = \frac{1}{5}$ für die Fälle $n = 4$ und $n = 2$ zur Darstellung gebracht. Man sieht, daß bei einer endlichen Flügelzahl ein

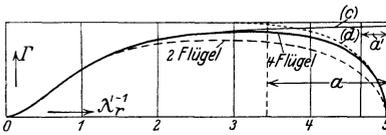


Abb. 114. Günstigste Zirkulationsverteilung über den Schraubenradius.

Verlust an der mittleren Auftriebsgröße eintritt gegenüber einer unendlichen Flügelzahl. Um die einfachere, $n = \infty$ entsprechende Auftriebsverteilung benutzen zu können, kann man daher bei einem n -blättrigen Propeller den Radius

R so reduzieren, daß die mittleren Γ -Werte wieder gleich werden. Die Verkürzung ergibt sich aus der Gleichung

$$\int_0^{\frac{\gamma}{4}} x d\Phi = \frac{\gamma}{4} \Delta R$$

zu

$$\Delta R = a' = 0,2207 a. \quad (13)$$

Für unendlich viele Flügel ergibt sich dann eine äquivalente Schraubenkreisfläche, die um 13 % kleiner ist als die gegebene Fläche der vierflügeligen Schraube.

43. Kraft und Drehmoment beim günstigsten Propeller.

1. Nachdem die günstigste Zirkulationsverteilung ermittelt ist, kann die Berechnung des auf ein Element des Schraubenflügels und daher auch der auf das gesamte Flügelsystem wirkenden Flüssigkeitskräfte nach den Grundsätzen der Tragflügeltheorie durchgeführt werden¹. Wenn wir von der Reibung oder dem Profilwiderstand absehen, so steht die auf das Element wirkende resultierende Kraft dA normal zur induzierten Relativ- oder Anblasegeschwindigkeit

$$= - (v_s + [\omega_s r]);$$

ihre Projektion auf die ungestörte Geschwindigkeit

$$- (v_0 + [\bar{\omega}_0 r])$$

ergibt den induzierten Widerstand des Profilelements. dA können wir dann wieder zerlegen in die achsiale Komponente und die Umfangskraft, die ein Element zum Drehmoment liefert

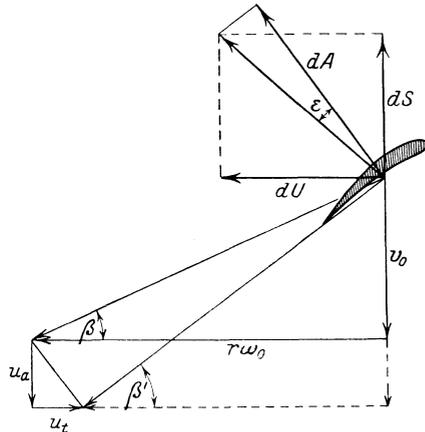


Abb. 115. Strömungsgeschwindigkeiten und Kräfte an einem Propellerelement.

(Abb. 115). Wenn wir ferner den Profilwiderstand insofern berücksichtigen, als wir die den Versuchen zu entnehmende Gleitzahl ϵ , d. h. das Verhältnis des kleinen Widerstandes zum Profilauftrieb oder den Neigungswinkel der Resultierenden gegen die Auftriebsrichtung einführen, so können wir den auf die Achsenrichtung entfallenden Anteil der Elementar-Kräfte, d. h. das Element der Schubkraft durch die Formel darstellen

$$dS = n \rho \Gamma r dr \omega_s - dA \epsilon \sin \beta'.$$

Nun gilt für die elementare Auftriebskraft dA

$$dA \sin \beta' = \rho \Gamma dr v_s,$$

daher mit Benutzung von Abschn. 42 (10)

$$\begin{aligned} dS &= n \rho \Gamma R [R \tau \omega_s - \epsilon v_s] d\tau \\ &= 4 \pi \rho R^2 u_0 v_s \frac{\tau^3 - \epsilon \lambda' \tau^2}{\lambda'^2 + \tau^2}, \end{aligned}$$

wenn wir wieder $R \lambda' a_s = \omega_s$ setzen.

Ebenso ergibt sich das elementare Drehmoment

$$dM = 4 \pi \rho R^3 u_0 v_s \frac{\lambda' \tau^3 + \epsilon \tau^4}{\lambda'^2 + \tau^2} d\tau.$$

¹ E. Möller, Im offenen Flüssigkeitsstrom arbeitende Flügelräder, Z d. V. d. I., Bd. 68, S. 675. 1924,

Den elementaren Wirkungsgrad erhalten wir, wenn wir die Nutzleistung dSv_0 durch die von der Arbeitsmaschine aufgewandte Leistung $dM\omega_0$ dividieren. Es wird

$$\eta = \frac{dS v_0}{dM \omega_0} = \frac{v_0 \omega_s}{\omega_0 v_s} \cdot \frac{1 - \varepsilon \frac{\lambda'}{\tau}}{1 + \varepsilon \frac{\tau}{\lambda'}} = \eta_i \cdot \varrho_r.$$

Den ersten Faktor, den induzierten Wirkungsgrad haben wir bereits oben als von x unabhängig erkannt. Er setzt sich übrigens multiplikativ zusammen aus dem axialen und dem durch die Verluste bei der Drehung bedingten Wirkungsgrad, nach der Gleichung

$$\eta_i = \frac{v_0}{v_0 + u_0} \cdot \frac{r \omega_0 - u_i}{r \omega_0} = \eta_a \cdot \eta_d.$$

Setzt man ferner in die Ausdrücke für dS und dM

$$v_s = v_0 + u_a = v_0 (1 + y) = v_0 \left(1 + \frac{x^2 k}{x^2 + (k+1)^2} \right) = v_0 \left(1 + \frac{k \tau^2}{(\tau^2 + \lambda'^2)} \right),$$

so erhält man die ausführlichen Werte

$$dS = 4 \pi \varrho R^2 k v_0^2 \left[\frac{\tau^3 - \varepsilon \lambda' \tau^2}{\tau^2 + \lambda'^2} + k \frac{\tau^5 - \varepsilon \lambda' \tau^4}{(\tau^2 + \lambda'^2)^2} \right] d\tau,$$

$$dM = 4 \pi \varrho R^3 k v_0^2 \left[\frac{\lambda' \tau^3 + \varepsilon \tau^4}{\tau^2 + \lambda'^2} + k \frac{\lambda' \tau^5 + \varepsilon \tau^6}{\tau^2 + \lambda'^2} \right] d\tau,$$

$$dU = 4 \pi \varrho R^2 k v_0^2 \left[\frac{\lambda' \tau^2 + \varepsilon \tau^3}{\tau^2 + \lambda'^2} + k \frac{\lambda' \tau^4 + \varepsilon \tau^5}{\tau^2 + \lambda'^2} \right] d\tau.$$

Bei der Summierung der Elementarkräfte benutzt man folgende Integrale, die in der Abb. 116 graphisch veranschaulicht sind.

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= 2 \int_0^1 \frac{\tau^2}{\tau^2 + \lambda'^2} d\tau = 2 - \lambda'^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda'} = 2 - 2 \lambda'^2 \left(\frac{\pi}{2} - \beta' \right) \\ J_2 &= 2 \int_0^1 \frac{\tau^3}{\tau^2 + \lambda'^2} d\tau = 1 - \lambda'^2 \ln \frac{1 + \lambda'^2}{\lambda'^2} \\ J_3 &= 2 \int_0^1 \frac{\tau^4}{\tau^2 + \lambda'^2} d\tau = \frac{2}{3} - 2 \lambda'^2 + 2 \lambda'^3 \left(\frac{\pi}{2} - \beta' \right) \\ J_4 &= 2 \int_0^1 \frac{\tau^4}{(\tau^2 + \lambda'^2)^2} d\tau = 2 + \frac{\lambda'^2}{1 + \lambda'^2} - 3 \lambda' \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda'} \\ &= 2 + \frac{\lambda'^2}{1 + \lambda'^2} - 3 \lambda' \left(\frac{\pi}{2} - \beta' \right) \\ J_5 &= 2 \int_0^1 \frac{\tau^5}{(\tau^2 + \lambda'^2)^2} d\tau = 1 - \lambda'^2 \left(2 \ln \frac{1 + \lambda'^2}{\lambda'^2} - \frac{1}{1 + \lambda'^2} \right) \\ J_6 &= 2 \int_0^1 \frac{\tau^6}{(\tau^2 + \lambda'^2)^2} d\tau = \frac{2}{3} - \lambda'^2 \left[4 + \frac{\lambda'^2}{1 + \lambda'^2} - 5 \lambda' \operatorname{arctg} \frac{1}{\lambda'} \right]. \end{aligned} \right\} \text{(a)}$$

Damit ergeben sich die Ausdrücke für Schub, Umfangskraft und Drehmoment

$$S = 2 \pi \rho R^2 k v_0^2 [J_2 - \varepsilon \lambda' J_1 + k (J_5 - \varepsilon \lambda' J_4)], \quad (1)$$

$$U = 2 \pi \rho R^2 k v_0^2 [\lambda' J_2 + \varepsilon J_3 + k (\lambda' J_4 + \varepsilon J_5)], \quad (2)$$

$$M = 2 \pi \rho R^3 k v_0^2 [\lambda' J_2 + \varepsilon J_3 + k (\lambda' J_5 + \varepsilon J_6)]. \quad (3)$$

in denen noch λ' durch $\lambda(k+1)$ ersetzt werden kann.

Der Wirkungsgrad wird

$$\eta = \frac{S v_0}{M \omega_0} = \lambda \frac{J_2 - \varepsilon \lambda' J_1 + k (J_5 - \varepsilon \lambda' J_4)}{\lambda' J_2 + \varepsilon J_3 + k (\lambda' J_5 + \varepsilon J_6)}$$

$$= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{1 - \varepsilon \lambda' \frac{J_1 + k J_4}{J_2 + k J_5}}{1 + \frac{\varepsilon}{\lambda'} \frac{J_3 + k J_6}{J_2 + k J_5}}. \quad (4)$$

Zur mechanischen Ähnlichkeit der Vorgänge an verschiedenen Schrauben gehören gleiche k und λ' und daher die gleichen, mit diesen Werten gebildeten dimensionslosen Größen, unter denen in der technischen Praxis namentlich die Schubziffer c_s , der Belastungsgrad d_s , der Drehwert c_m und der Leistungsgrad d_m benutzt werden, für die folgende Beziehungen gelten:

$$c_s = \lambda^2 d_s = \frac{S}{\frac{1}{2} \rho \pi R^2 (R \omega_0)^2} = 4 k [J_2 - \varepsilon \lambda' J_1 + k (J_5 - \varepsilon \lambda' J_4)]. \quad (5)$$

$$c_m = \lambda^3 d_m \frac{M \omega_0}{\frac{1}{2} \rho \pi R^2 (R \omega_0)^3} = 4 k \lambda^2 [\lambda' J_2 + \varepsilon J_3 + k (\lambda' J_5 + \varepsilon J_6)]. \quad (6)$$

Um in einem praktisch gegebenen Falle, in dem vor allem die Werte von n , ω_0 , v_0 und R_a vorliegen, die günstigste Schubverteilung festzustellen, kommt es zunächst darauf an, die vermittelnde Konstante k zu finden. Dazu gehört noch die Angabe einer der dimensionslosen Zahlen, etwa d_s , c_m oder d_m , welche die Wirkungsweise der Schraube charakterisieren. Da z. B. der Belastungsgrad d_s nur von k und dem Fortschrittsgrad λ , resp. λ' abhängt, kann man zum Zwecke der praktischen Durchführung ein für allemal die Schar der den verschiedenen Werten von λ entsprechenden $k d_s$ -Kurven aufzeichnen, um dann durch einfaches Abgreifen der Koordinaten den gewünschten Wert von k zu erhalten. Da diese Methoden nur für den Praktiker unmittelbares Interesse haben, so sollen sie hier nicht weiter verfolgt werden.

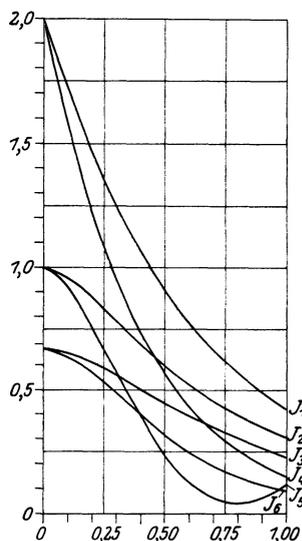


Abb. 116. Hilfswerte J in Abhängigkeit vom wirksamen Fortschrittsgrad λ' .

Nur kurz möge noch die Möglichkeit einer angenäherten Ermittlung der Breite des Propellerblattes ins Auge gefaßt werden. Wenn wir für ein Flügелеlement mit Einführung des Auftriebsbeiwertes c_a die Grundgleichung

$$\frac{1}{2} c_a \rho t dr v^2 = \rho \Gamma v dr$$

ansetzen, so ergibt sich

$$t = \frac{2 \Gamma}{v \cdot c_a}$$

oder, wenn wir den Wert für die Zirkulation einsetzen und durch die Fortschreitgeschwindigkeit v_0 ausdrücken

$$t = \frac{8 \pi k v_0}{n \omega_0 c_a} \frac{\lambda' \tau^2}{\sqrt{\tau^2 + \lambda'^2} \left(\frac{\lambda'^2}{1+k} + \tau^2 \right)} \sim \frac{8 \pi k v_0}{n \omega_0 c_a} \frac{\lambda' \tau^2}{(\lambda'^2 + \tau^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (7)$$

Es wäre unzweckmäßig den Beiwert c_a über die Flügellänge konstant zu halten, weil die erhaltenen Flügelformen nur für die der Berechnung zugrunde gelegten Geschwindigkeitsverhältnisse passen würden. Nehmen wir aber etwa an, daß c_a der Winkeländerung

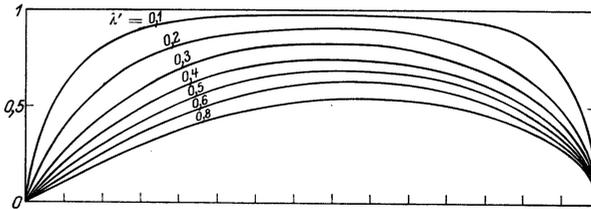


Abb. 117. Breitenverlauf der Flügel einer zweiflügeligen Schraube (nach Möller).

$$\frac{d\beta'}{d\lambda'} = \frac{\tau}{\tau^2 + \lambda'^2}$$

proportional, also von r resp. τ und dem Maximalwert $(c_a)_m$ nach der Formel

$$c_a = (c_a)_m \frac{2 \lambda' \tau}{\lambda'^2 + \tau^2}$$

abhängt, so erhalten wir aus (7) für den angenäherten Wert der Blattbreite

$$t = \frac{4 \pi k v_0}{n \omega_0 (c_a)_m} \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \lambda'^2}} \quad (8)$$

Um diesen Verlauf auf den wirklichen Radius R_n zu übertragen, muß man nach früherem noch mit dem Prandtl'schen Faktor multiplizieren, und statt R wieder R_n einführen, so daß die Breite mit dem Ausdruck

$$f = \frac{1}{\pi} \arccos e^{-\frac{\pi R_n}{a} (1-\tau)} \cdot \frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 + \lambda'^2}}$$

verhältnismäßig wird. Man erhält dann etwa für eine zweiflügelige (nabenlose) Schraube den in Abb. 117 dargestellten Breitenverlauf für verschiedene Werte von λ' , der in der Tat den in der Praxis üblichen und bewährten Formen entspricht.

IX. Strömung in Kreisel- und Turbinenrädern.

44. Allgemeine Sätze über die Strömung in rotierenden Gefäßen.

1. Die in den Abschnitten 14—39 niedergelegte Untersuchung bezog sich im wesentlichen auf die Fälle, daß die Grenzen oder Wände der strömenden Flüssigkeit entweder in Ruhe oder in gleichmäßiger, translatorischer Bewegung begriffen sind. Wir sahen, daß es im zweiten Falle für die Bestimmung der auf die Wandung ausgeübten Kraftwirkung genügt, die Begrenzung als fest anzunehmen, also dem ganzen System eine der Translation entgegengesetzte Geschwindigkeit zu erteilen. Der Fall, daß die Grenzen oder Wände eine Rotation um eine feste Achse ausführen, bietet insofern besondere Verhältnisse dar, als das absolute und relative Strömungsfeld sich nicht nur um einen konstanten Vektor, sondern um ein, nicht durch ein Potential darstellbares Zusatzfeld unterscheiden und die hydrodynamischen Grundformeln nicht ohne weiteres, sondern erst nach geeigneter Umformung auf die Relativströmung anwendbar sind. Die Bedeutung dieser Drehströmung für alle diejenigen Maschinengruppen (Propeller, Kreiselpumpen, Turbinen), die unmittelbar die Kräfte der strömenden Flüssigkeit durch Vermittlung der Drehung zu übertragen haben, mag es rechtfertigen, wenn wir im folgenden im Anschluß an klassische und neuere Arbeiten von F. Prasil¹, R. v. Mises², W. Kucharsky³ u. a. die grundlegenden allgemeinen Sätze im Zusammenhang entwickeln und schließlich einige auf besondere Bewegungsformen sich beziehende Ansätze geben⁴.

Indem wir zunächst an die Gesetze der sog. Relativbewegung der allgemeinen Dynamik anknüpfen, haben wir festzustellen, daß die Eulerschen Grundgleichungen erst dann auf die Relativbewegung der Flüssigkeit anwendbar sind, wenn man die Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ durch zwei Zusatzglieder ergänzt hat, die als Zentripetalbeschleunigung und Coriolisbeschleunigung bekannt sind. Wenn wir die konstante Winkelgeschwindigkeit, mit der sich das System dreht, mit ω , als Vektor mit $\bar{\omega}$, ferner den Radiusvektor von einem Punkt 0 der Drehachse nach

¹ F. Prasil, Flüssigkeitsbewegung in Rotations Hohlräumen, Schweiz. Bauzg. Bd. 41, S. 207, 233, 249, 282, 293, 1903; Bestimmung der Kranzprofile u. der Schaufelformen f. Turbinen u. Kreiselpumpen, Schweiz. Bauzg. Bd. 48, S. 277, 1906; Technische Hydrodynamik 1926, S. 151f.

² R. v. Mises, Theorie der Wasserräder. Leipzig 1908.

³ W. Kucharsky, Strömungen einer reibungsfreien Flüssigkeit bei Rotation fester Körper, München u. Berlin 1908.

⁴ Der allgemeine Teil der nachfolgenden Darstellung ist bereits in der Z. ang. Math. Mech. Bd. 1927, S. 347f., veröffentlicht.

dem Aufpunkt mit \mathfrak{s} bezeichnen, so können wir die Zusatzbeschleunigung in der Form darstellen¹

$$\mathfrak{b}_1 = [\bar{\omega} [\bar{\omega} \mathfrak{s}]], \quad \mathfrak{b}_2 = 2 [\bar{\omega} \mathfrak{v}].$$

Damit erhält die Eulersche Gleichung für die Relativbewegung die folgende Gestalt

$$\mathfrak{f} - \frac{g}{\gamma} \nabla p = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \mathfrak{v} \nabla \cdot \mathfrak{v} + [\bar{\omega} [\bar{\omega} \mathfrak{s}]] + 2 [\bar{\omega} \mathfrak{v}]. \quad (1)$$

Diese Gleichung können wir umformen auf Grund der bereits früher gebrauchten Vektorbeziehung

$$\mathfrak{v} \nabla \cdot \mathfrak{v} = \frac{1}{2} \nabla v^2 - 2 [\mathfrak{v} \mathfrak{w}]$$

und erhalten dann

$$\mathfrak{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - 2 [\mathfrak{v}, \mathfrak{w} + \bar{\omega}] + [\bar{\omega} [\bar{\omega} \mathfrak{s}]]. \quad (2)$$

Bilden wir den Rotor dieser Gleichung, so ergibt sich wegen

$$\text{rot} [\mathfrak{A} \mathfrak{B}] = \mathfrak{A} \cdot \nabla \mathfrak{B} - \mathfrak{B} \cdot \nabla \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \nabla \cdot \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \nabla \cdot \mathfrak{B} \quad (a)$$

und

$$\text{rot} (\nabla \varphi) = 0 \quad (\mathfrak{A} \text{ und } \mathfrak{B} \text{ Vektoren, } \varphi \text{ Skalar}) \quad (b)$$

die einfache und grundlegende Gleichung

$$\mathfrak{v} \nabla \cdot \mathfrak{w} - (\mathfrak{w} + \bar{\omega}) \nabla \cdot \mathfrak{v} = 0 \quad (3)$$

von der folgende Lösungen bemerkenswert und für die Folge wichtig sind.

a) Bei einer wirbellosen Strömung ($\mathfrak{w} = 0$) kommt

$$\bar{\omega} \nabla \cdot \mathfrak{v} = 0.$$

Wenn die Drehachse in die z -Richtung fällt, so wird

$$\omega_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0, \quad \omega_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \quad \omega_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

In einem rotierenden System kann also für die Relativbewegung ein Geschwindigkeitspotential existieren, wenn die Strömung zwischen parallelen, zur Drehachse senkrecht stehenden Ebenen erfolgt (in Kanälen wie in Radialturbinen und Pumpen).

b) Die Gleichung (3) ist ferner, wie man sieht, in jedem Falle erfüllt, wenn

$$\mathfrak{w} = \text{konst} = -\bar{\omega},$$

¹ Wilh. Müller, Dynamik I. Teil (Sammlung Göschen), S. 96.

da $\mathfrak{v} \nabla \cdot \mathfrak{w}$ verschwindet. Bezeichnen wir mit \mathfrak{c} die Absolutgeschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens, so hat man

$$\begin{aligned} \mathfrak{c} &= \mathfrak{v} + [\bar{\omega} \mathfrak{s}], \\ \text{rot } \mathfrak{c} &= \text{rot } \mathfrak{v} + \text{rot } [\bar{\omega} \mathfrak{s}] \\ &= 2 \mathfrak{w} + \bar{\omega} \cdot \nabla \mathfrak{s} - \mathfrak{s} \cdot \nabla \bar{\omega} + \mathfrak{s} \nabla \cdot \bar{\omega} - \bar{\omega} \nabla \cdot \mathfrak{s} \end{aligned}$$

oder wegen

$$\begin{aligned} \nabla \mathfrak{s} &= 3, & \nabla \bar{\omega} &= 0 = \mathfrak{s} \nabla \cdot \bar{\omega}, & \bar{\omega} \nabla \cdot \mathfrak{s} &= \bar{\omega}, \\ \text{rot } \mathfrak{c} &= 2 (\mathfrak{w} + \bar{\omega}) = 2 \mathfrak{w}_a, \\ \mathfrak{w}_a &= \mathfrak{w} + \bar{\omega}. \end{aligned}$$

Einer Relativbewegung mit konstantem Wirbelvektor entspricht bei konstanter Drehgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ des Systems eine Absolutbewegung, deren Wirbelvektor ebenfalls konstant ist und sich vom Relativwirbelvektor um den Drehvektor unterscheidet. Ist nun insbesondere $\mathfrak{w} = -\bar{\omega}$, so ist $\mathfrak{w}_a = 0$.

Einer Relativbewegung, deren Wirbelvektor \mathfrak{w} entgegengesetzt gleich dem Drehvektor $\bar{\omega}$ des Systems ist, entspricht einer Absolutbewegung, für die ein Geschwindigkeitspotential existiert. Umgekehrt gehört zu einer absoluten Potentialströmung eine Relativbewegung, deren Wirbelvektor der Drehung entgegengesetzt gleich ist. In einem geschlossenen Schaufelkanal wird also das reibungslose Wasser relativ zum Rad dauernd eine kreisende Bewegung um einen in Ruhe befindlichen Kern ausführen. Wenn man die von innen nach außen gehende Durchflußströmung einer Kreiselpumpe mit dieser Strömung zusammensetzt, so sieht man, daß die Relativgeschwindigkeit auf der Schaufelrückseite größer ist als auf der Schaufelvorderseite¹.

2. Im Falle der stationären Strömung wird aus der umgeformten Eulerschen Gleichung

$$\mathfrak{f} = \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \right) + [\bar{\omega} [\bar{\omega} \mathfrak{s}]]. \quad (4)$$

Für den letzten Ausdruck kann man aber schreiben

$$[\bar{\omega} [\bar{\omega} \mathfrak{s}]] = \bar{\omega} \cdot \mathfrak{s} \bar{\omega} - \mathfrak{s} \omega^2 = -\frac{1}{2} \nabla r^2 \omega^2,$$

wo r den Abstand des Aufpunktes von der Drehachse bedeutet. Daher nimmt die Energiegleichung (Bernoullische Gleichung) für die stationäre Relativbewegung, deren Absolutbewegung wirbelfrei ist, bei

¹ C. Pfleiderer, Die Kreiselpumpen, Berlin: Julius Springer 1924, S. 71.

Müller, Math. Strömungslehre.

Kräftefreiheit, die Form an

$$H' = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} - \frac{r^2 \omega^2}{2g} = \text{konst} = \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2 - u^2}{2g}, \quad (5)$$

wobei der Wert der Konstanten im allgemeinen für die einzelnen Stromfäden verschieden ist. H' heißt auch die „relative Strömungsenergie“¹. Da nun für die Relativbewegung die Beziehung gilt

$$\mathbf{v} = \mathbf{c} - \mathbf{u}$$

so folgt

$$v^2 = c^2 + u^2 - 2 c_\varphi \cdot u,$$

wenn c_φ die Umfangskomponente der Absolutgeschwindigkeit bedeutet. Es ergibt sich also

$$H' = \frac{p}{\gamma} + \frac{c^2}{2g} - \frac{c_\varphi u}{g} = \text{konst} \quad (6)$$

Die Absolutströmungsenergie wird daher

$$H = \frac{p}{\gamma} + \frac{c^2}{2g} = \text{konst} + \frac{c_\varphi \cdot u}{g}. \quad (7)$$

Legen wir die Drehachse in die z -Richtung und führen Zylinderkoordinaten ein, so erhalten wir nach S. 33 für die relativen Wirbelkomponenten

$$\left. \begin{aligned} w_r &= \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r v_\varphi)}{\partial z} \right), \\ w_\varphi &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \\ w_z &= \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial (r v_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \right\}$$

Die Beziehung $\omega = -\bar{\omega}$ führt dann auf die Gleichungen

$$\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial (r v_\varphi)}{\partial z}; \quad \frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial r}; \quad \frac{\partial (r v_\varphi)}{\partial r} = -2 r \omega + \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}.$$

In dem besonderen Fall, daß die Geschwindigkeiten längs eines Parallelkreises gleich sind ($\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \varphi} = 0$) ergibt sich

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial (r v_\varphi)}{\partial r} = -2 r \omega.$$

Eine Relativbewegung mit gleichen Geschwindigkeitskomponenten längs eines Parallelkreises $r = \text{konst}$ kann nur bestehen, wenn das Moment $v_\varphi \cdot r$ der Komponente v_φ in bezug auf die Drehachse lediglich von r abhängt².

¹ R. v. Mises, a. a. O. S. 75.

² Die weiteren Folgerungen dieses Satzes für die Bestimmung von Schaufelformen finden sich bei F. Prasil, Schweiz. Bauzg. 48, 1906, S. 278ff.

Ist die Strömung gleichartig in Ebenen senkrecht zur Drehachse, so fallen die ersten beiden Gleichungen fort, und wir erhalten aus dem letzten Ausdruck für den Wirbelvektor mit

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -v_{\varphi}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = r v_r,$$

die Differentialgleichung für die Stromfunktion der Relativströmung

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = 2\omega. \quad (8)$$

Spezielle Lösungen dieser Gleichung sind u. a. von W. Kucharsky zusammengestellt. Sie umfaßt natürlich auch den Fall, daß die Absolutbewegung nur konstante sog. Potentialwirbel enthält deren Kerne nicht dem eigentlichen Strömungsfeld angehören, die aber die Zirkulationen um die Schaufelkonturen liefern.

45. Grundgleichungen der Turbinentheorie.

1. Um nun einige allgemeine Aussagen über die Kräfte zu machen, die auf die rotierende Begrenzung einer Strömung übertragen werden, stellen wir uns ein Turbinenlaufrad vor, das durch Schaufeln in gleiche, für den Durchtritt der Flüssigkeit bestimmte Kanäle geteilt ist. Wir werden später bestimmtere Voraussetzungen über die Anordnung der Schaufeln treffen, vorläufig aber eine dreidimensionale Bewegung der Flüssigkeit im Rade zulassen, um die grundlegenden Prandtl- und Lagallyschen Formeln anwenden zu können.

Die im vorigen Paragraphen eingeführte Unterscheidung der absoluten und relativen Strömung muß zunächst etwas schärfer gefaßt werden. Während die ideale Relativströmung einen stationären Charakter hat, ist das von einem festen Raumpunkt aus betrachtete Strömungsbild bei kreissymmetrischer Ausbildung des Laufrades einem periodischen Wechsel unterworfen. Wie in der Tragflügeltheorie werden wir aber das Absolutbild auf das bewegte System, d. h. auf dieselbe Lage der rotierenden Schaufeln beziehen. Auf dieses das Laufrad begleitende Kraftliniensystem sind dann die Gesetze der stationären Strömung anwendbar.

Auch die Wirbelfreiheit der absoluten Strömung gilt nur für den mehrfach zusammenhängenden Raum außerhalb der Schaufeln. Ebenso wie eine Tragfläche gleichbedeutend ist mit der Existenz eines Zwanges oder einer Unstetigkeit des Geschwindigkeitsfeldes, d. h. mit einer Wirbelverteilung längs ihrer Begrenzung, so kann man sich auch die Radschaufeln als Träger einer Wirbelschicht denken. Wir müssen also das absolute Geschwindigkeitsfeld als eine Überlagerung zweier Teilfelder uns vorstellen

$$c = c_0 + c',$$

von denen c_0 das Feld der Geschwindigkeit bedeutet, welche die Flüssigkeit besitzen würde, wenn sie den Raum zwischen den äußeren Grenzen des Rades ohne Zwang durchfließen würde, während c' durch das Vorhandensein der Schaufeln bedingt ist¹. Da das Feld c_0 wirbelfrei ist, so gilt die Beziehung

$$\operatorname{rot} c = \operatorname{rot} c'.$$

Nach den Ergebnissen der Tragflügeltheorie ist dieser Rotor wesentlich für das Zustandekommen einer resultierenden Kraft. Man erhält nun unmittelbar nach der Prandtl-Lagallyschen Formel die auf die Flüssigkeit ausgeübte Elementarkraft

$$f = \rho [\operatorname{rot} c, v], \quad (1)$$

wo v wieder die auf den Schaufelkranz bezogene relative Geschwindigkeit bedeutet. Aus der Gleichung folgt, daß

$$f \cdot v = 0$$

ist, die in einem Feldpunkt wirkende Kraft also auf der relativen Geschwindigkeitsrichtung senkrecht steht. Setzen wir nun wie oben

$$v = c - u = c_0 + c' - u,$$

so ergibt sich

$$f \cdot u = f c_0 + f c'.$$

Wenn man den Wert für f aus (1) einsetzt und den Wert von v benutzt, so kommt

$$f \cdot u = \rho [\operatorname{rot} v_a, -u] (c_0 + c') \quad (2)$$

und für die Leistung L , die auf die Flüssigkeit ausgeübt wird

$$L = \int f u d\tau = \rho \cdot \int [\operatorname{rot} c, -u] c d\tau. \quad (3)$$

Wir können jetzt die durch den Ausdruck $\operatorname{rot} c = 2w_a$ bezeichneten Wirbel in die von den Schaufeln getragenen Wirbel, die für jede Schaufel eine Zirkulation ergeben und die freien Wirbel zerlegen, also setzen

$$w = w_g + w_f.$$

Da die freien Wirbel gleich Null gesetzt werden oder ihre Achsen sich in die Geschwindigkeitsrichtung einstellen ($[w_f v] = 0$), die Kraft also nur von den gebundenen Wirbeln abhängt, so gewinnen wir für L den Ausdruck

$$L = 2\rho [w_g - u] c d\tau. \quad (4)$$

Wenn man als Raumelement $d\tau$ einen Elementarzylinder, mit dem Querschnitt df und der Höhe ds nimmt, dessen Achse mit der Achse

¹ Vgl. E. Hahn, Note sur l'application aux turbomachines des Théories modernes de l'hydrodynamique, Proceedings of the first internat. Congress for appl. Mechanics (Biezeno, Burgers), Delft 1925, S. 428.

einer Wirbellinie w_g zusammenfällt, so kann man im Integral w_g , $d\hat{s}$ miteinander vertauschen, also schreiben

$$L = 2 \varrho [d\hat{s}, -u] c w_g df. \quad (5)$$

Nachdem Stokesschen Satz kann man ferner $w_g df$ durch die elementare Zirkulation $d\Gamma$ ersetzen. Wenn man z. B. jede Schaufel in erster Annäherung durch einen Wirbelfaden ersetzt, so hat man

$$L = \varrho \int [d\hat{s} - u] c d\Gamma. \quad (6)$$

2. Um die Formel für L in die grundlegende Turbinenformel umzugestalten, nehmen wir im besonderen achsial stehende und zylindrisch begrenzte Schaufeln mit sonst beliebiger Profilierung an, wie sie angenähert bei Radialturbinen und Kreiselpumpen realisiert sind (vgl. Abb. 119). Dann sind alle Wirbelachsen der Rotationsachse des Rades parallel und die Strömung kann in erster Annäherung als ebene Strömung aufgefaßt werden. Wenn wir dem Rad die Erstreckung 1 in der Achsenrichtung beilegen und bedenken, daß der Vektor $[d\hat{s}, -u]$ radial (zentrifugal) gerichtet ist, so hat man

$$L = 2 \varrho \omega_0 \int r c w_g df = \varrho \omega_0 \int r c_r d\Gamma.$$

Nehmen wir etwa eine von innen nach außen gerichtete Beaufschlagung an (wie sie bei Kreiselpumpen vorkommt) und unterscheiden die Ein- und Austrittsradien des Rades, sowie die entsprechenden Geschwindigkeiten durch die Indices 1 und 2, so ergibt sich mit $c_\varphi = c_u$

$$d\Gamma = d(r d\varphi c_u) = (r_2 c_{u_2} - r_1 c_{u_1}) d\varphi.$$

Bei einer Fördermenge q hat man ferner

$$dq = r d\varphi c_r,$$

also

$$L = \varrho \int (u_2 c_{u_2} - u_1 c_{u_1}) dq = \varrho \frac{q}{2\pi} \int (u_2 c_{u_2} - u_1 c_{u_1}) d\varphi. \quad (7)$$

Das ist der allgemeine Ausdruck für die von der Turbine resp. der Pumpe übertragene Leistung. Bei einer unendlichen Schaufelzahl, ist die Geschwindigkeit gleichmäßig über dem Umfang eines innerhalb des Rades gezogenen konzentrischen Kreises, also auch längs des Eintritts- und Austrittskreises verteilt, und die Formel geht in die klassische, bereits von Euler angegebene Turbinenformel über

$$L = \varrho q (u_2 c_{u_2} - u_1 c_{u_1}). \quad (8)$$

Bei rein radialem Eintritt der Flüssigkeit ist $c_1 = 0$ und wir haben

$$L = \varrho q u_2 c_{u_2}.$$

Diese Formeln bringen ohne weiteres den wichtigen Zusammenhang

mit der Tragflügeltheorie zum Ausdruck¹. Wir erhalten nämlich für das Drehmoment

$$M = \rho \int (r_2 c_{u_2} - r_1 c_{u_1}) dq.$$

Wenn wir die absoluten Zirkulationen längs des Außenkreises mit Γ_2 , längs des Innenkreises mit Γ_1 bezeichnen

$$r_2 \int_0^{2\pi} c_{u_2} d\varphi = \Gamma_2, \quad r_1 \int_0^{2\pi} c_{u_1} d\varphi = \Gamma_1,$$

so haben wir

$$M = \rho \frac{q}{2\pi} (\Gamma_2 - \Gamma_1) = \rho \frac{q}{2\pi} \Gamma.$$

Wenn ferner c_r die mittlere Radialkomponente der Geschwindigkeit in einem mittleren Abstand r von der Achse bedeutet, so wird

$$q = 2\pi r c_r$$

und der Ausdruck für das Moment geht über in

$$M = \rho c_r \Gamma \cdot r.$$

Man sieht also, daß die mittlere, auf einen Punkt im Abstand r reduzierte Drehkraft die Joukowskysche Form ist. Die Zirkulation Γ ist nach den Sätzen absolut genommen, gleich der Summe der Zirkulationen um die einzelnen Schaufelprofile, die im allgemeinen den Charakter von Tragflächenquerschnitten haben. Da für die Schaufeln Kongruenz angenommen wurde, so ist bei n Schaufeln

$$\Gamma = n \Gamma_s,$$

wenn Γ_s die Zirkulation einer Schaufel bedeutet.

46. Charakterisierung des strömungstheoretischen Hauptproblems.

1. Um die letzten Formeln des vorigen Abschnittes auf direktem Wege abzuleiten, können wir von dem Strömungsfeld im Kreisrad selbst ausgehen, das wir uns, ohne die Allgemeingültigkeit der Ausdrücke zu gefährden, insofern wesentlich vereinfachen werden, daß wir die Schaufeln durch lineare axial gerichtete Wirbelfäden ersetzen, die in gleichen Achsen auf einem Kreiszyylinder vom Radius r verteilt sein mögen (Abb. 118). Die so definierte ebene Punktwirbelströmung ist bereits im Abschnitt 22 behandelt worden, und es ist nur nötig diese Strömung mit der sog. Durchflußströmung zur Gewinnung der Relativbewegung mit einer Drehströmung zu überlagern. In Wirklichkeit wird,

¹ Vgl. H. Föttinger, Über die physikal. Grundlagen der Turbinen- und Propellerwirkung. Verhandl. d. Versamml. v. Vertretern d. Flugwissenschaften, Göttingen, München 1911; Z. Flugtechn. 1912, S. 233 u. 246.

wie in der Abb. 119 angedeutet ist, die Flüssigkeit durch ein Saugrohr dem als Pumpe wirkenden Kreisrad zugeführt. Wir wollen diesen Zufluß aus einer einfachen, linearen Quelle herleiten, die in der Achse des Rades über die durch den Abstand der Schaufelkränze gegebene Breite = 1 angeordnet ist und deren Spur in der Ebene punktförmig erscheint.

Schließlich kann man auch noch der Wirkung eines vor dem Rade angeordneten festen Leitrades, das das Wasser in bestimmter Richtung dem Laufrad zuführen soll, dadurch Rechnung tragen, daß man die Quelle mit einer drall-

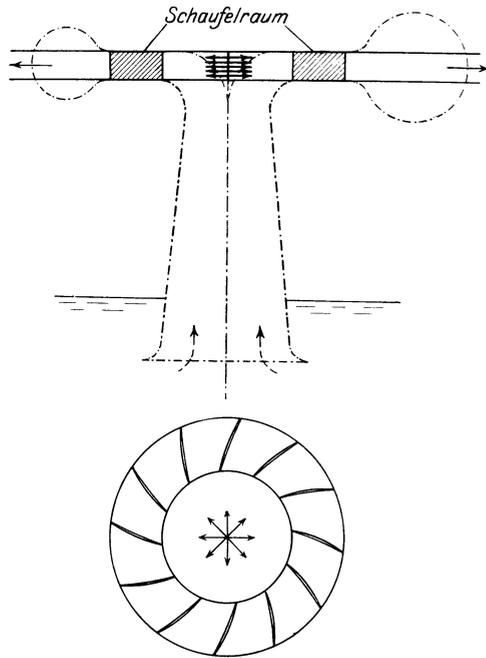


Abb. 119. Schema einer Kreiselpumpe.

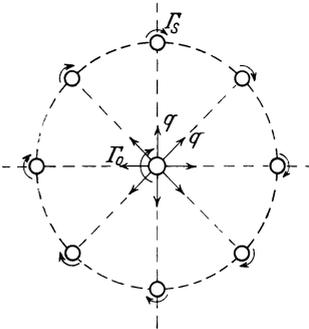


Abb. 118. Schema eines Laufrades mit Punktschaufeln.

gebenden Zirkulation Γ_0 verbindet, wodurch der ungestörte Durchfluß in logarithmischen Spiralen verläuft.

Für die Zusammensetzung aus Zirkulations- und Durchflußströmung haben wir nach früherem das komplexe Potential

$$W = \frac{i \Gamma_s}{2\pi} \ln(z^n - r^n) + \frac{q + i \Gamma_0}{2\pi} \ln z, \quad (1)$$

dem die Feldgeschwindigkeit entspricht

$$\frac{dW}{dz} = \frac{i \Gamma_s}{2\pi} \frac{n z^{n-1}}{z^n - r^n} + \frac{q + i \Gamma_0}{2\pi z} = \frac{q + i(\Gamma_0 + n \Gamma_s)}{2\pi z} + \frac{i \Gamma_s n r^n}{2\pi z^{n+1}} + \dots \quad (2)$$

Im allgemeinen Fall der bestimmten vorgegebenen Schaufelkontur tritt noch eine von der Drehung herrührende sog. Verdrängungsströmung auf, deren Stromlinien nicht der Schaufelberandung folgen. In unserem besonderen Falle der punktförmigen Schaufeln verschwindet dieser Anteil.

Wenn wir nun nach der Lagallyschen Formel das auf das Kieselrad ausgeübte Drehmoment berechnen wollen, müssen wir die Wirbelquelle im Ursprung als äußere Singularität behandeln, also bei der Integration umgehen, die etwa über die Berandung eines mit dem Rade konzentrischen Ringgebiets erstreckt wird, dessen äußerer Radius $> r_2$ und dessen innerer Radius $< r_1$ ist. Dann ergibt sich

$$M + iN = -\frac{\rho}{2} \int \bar{v}^2 z dz; \quad M = \rho \frac{q n \Gamma_s}{2\pi}, \quad (3)$$

also derselbe Ausdruck, der oben angegeben wurde.

2. Die Stromfunktion der absoluten Strömung wird

$$\Psi = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln |z| + \frac{\Gamma_s}{2\pi} \ln |z^n - r^n| + \frac{q\varphi}{2\pi}. \quad (4)$$

Die entsprechende Funktion der relativen Strömung erhält man, wenn man die entgegengesetzte Drehströmung, d. h. den Ausdruck $\frac{1}{2} \omega |z|^2 = \frac{1}{2} \omega r^2$ hinzufügt. Es wird dann

$$\Psi = \frac{\Gamma_0}{2\pi} \ln z + \frac{\Gamma_s}{2\pi} \ln |z^n - r^n| + \frac{q\varphi}{2\pi} + \frac{1}{2} \omega r^2. \quad (5)$$

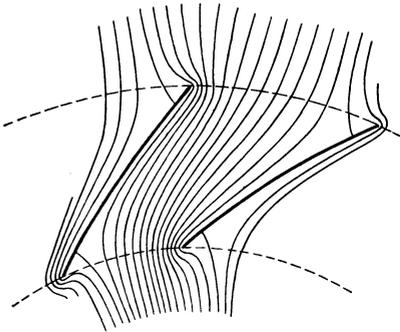


Abb. 120. Relative Durchflußströmung im Kieselrad.

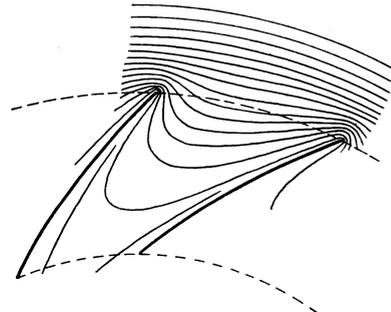


Abb. 121. Zirkulationsströmung im Kieselrad.

Diese Funktion genügt in der Tat der im vorigen Abschnitte aufgestellten Differentialgleichung.

Der gegebene Ansatz für die Strömung im Kieselrade umfaßt zwar alle theoretisch möglichen Fälle; er ist aber zunächst rein formaler Natur und gewinnt erst dann konkrete Bedeutung, wenn es gelingt, ihn einem vorgegebenen Kieselrad mit bestimmt profilierten Schaufeln anzupassen.

2. Die allgemeine Strömung läßt sich in zwei Bestandteile zerlegen. Die sog. zirkulatorische Durchflußströmung entspricht der Annahme eines ruhenden Schaufelkranzes, dessen Berandung mit zum System der Stromlinien gehört. Für den Fall eines drallfreien Zuflusses ($\Gamma_0=0$), der in den Abb. 120, 121 angenommen ist, setzt sie sich zusammen aus

der Zirkulation um die Schaufeln und der einfachen Durchflußströmung, die sich mit abnehmender Geschwindigkeit ins Unendliche entfernt¹. Die Rotation des Schaufel systems hat ferner eine sog. Verdrängungsströmung der Flüssigkeit in der Umgebung zur Folge, die wieder absolut und relativ zum Schaufelkranz betrachtet werden kann (Abb. 122, 123). In dem besonderen Falle der Punktschaukeln wird dieser Strömungsanteil gegenstandslos. Allgemein lauten die Grenzbedingungen der absoluten Verdrängungsströmung dahin, daß die Komponente der Absolutgeschwindigkeit normal zum Schaufelelement mit der Normalkomponente der Drehgeschwindigkeit des Elementes übereinstimmt. Zieht man das reine Drehfeld ab, so erhält man eine Strömung, die wieder den Schaufelkonturen folgt. Wir werden weiter unten Methoden zur Bestimmung dieser Strömungselemente entwickeln.

Wichtig ist nun, daß man die Grenzbedingungen in einer der Wirklichkeit angepaßten Form erweitern kann, um aus der Schaufelform die Größe der wirksamen Zirkulation abzuleiten. Indem man

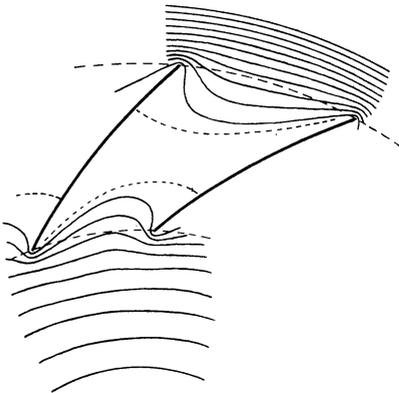


Abb. 122. Relative Verdrängungsströmung im Kreisrad.

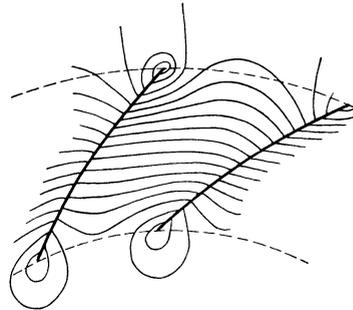


Abb. 123. Absolute Verdrängungsströmung im Kreisrad.

dabei ähnlich verfährt wie in der gewöhnlichen Tragflügeltheorie, d. h. verlangt, daß sowohl an den Eintritts- wie an den Austrittsstellen der Schaufeln, die etwa wie der hintere Teil der Tragfläche beiderseits als scharfkantig vorausgesetzt werden sollen, die Geschwindigkeiten endlich bleiben, erhält man für die Zirkulationen Γ_0 und Γ_s Ausdrücke, in denen außer den Abmessungen, resp. Formelementen des Schaufelrades sowohl die Fördermenge q als auch die Drehgeschwindigkeiten ω enthalten sind. Bei drallfreiem Eintritt ($\Gamma_0 = 0$) oder bei vorn abgerundeter Form des Schaufelprofils kann man jedenfalls aus der Forde-

¹ H. Oertli, Untersuchung der Wasserströmung durch ein rotierendes Zellen-Kreisrad. Dissertation Zürich 1923. — D. Pavel, Ebene Potential-Strömungen durch Gitter- und Kreisräder. Zürich 1925.

zung der glatten Abströmung nach außen die Zirkulation um die Schaufeln ermitteln. Eine solche, zwangläufige, in der Eigenart der Schaufelung begründete Ermittlung von Γ_s kann geradezu als das eigentliche strömungstheoretische Turbinenproblem bezeichnet werden.

3. Beschränken wir uns zunächst auf diese wesentlich wirksame Zirkulation Γ_s , so können wir uns ein Urteil über die Funktion

$$\Gamma_s = \Gamma_s(\omega q)$$

bilden, wenn wir das Schaufelrad mit dem Idealfall eines aus unendlich vielen und unendlich kleinen, im übrigen gleichgestellten Schaufeln bestehenden Rades vergleichen. In diesem Fall rücken die auf dem Kreiszyylinder angeordneten Wirbelfäden zu einer Wirbelschicht zusammen, die überall die gleiche Belegungs-

dichte aufweist. Wenn Γ' die Gesamtstärke der Wirbelschicht oder die „tragende“ Zirkulation bedeutet, so erfährt die von ihr herrührende Geschwindigkeit längs der Schicht einen Sprung von 0 (im Innern) auf $\frac{\Gamma'}{2\pi r}$ (außerhalb), und die (relative) Stromlinien erfahren eine plötzliche Richtungsänderung im Sinne von Γ' . Wenn man sich nun vorstellt, daß die unendlich kleinen geradlinigen rück-

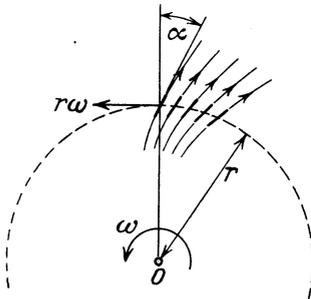


Abb. 124. Übergang zu unendlich vielen Schaufeln.

wärts gestellten Schaufelspuren mit den Radien von 0 aus einen Winkel α bilden, der übrigens dem mittleren Schaufelwinkel des wirklichen Rades entsprechen soll, so kann man für die absolute Zirkulation setzen (Abb. 124)

$$\Gamma = 2\pi r(r\omega) - \Gamma' = 2\pi r(r\omega) - q \operatorname{tg} \alpha,$$

daher wird z. B. die Druckerhöhung

$$H = \frac{M\omega}{\gamma q} = \frac{(r\omega)^2}{g} - \frac{q \operatorname{tg} \alpha \cdot \omega}{2\pi g}. \quad (6)$$

Bei vorwärts gestellten Schaufeln tritt an Stelle des negativen Zeichens das positive, so daß wir beide Fälle zusammenfassen können

$$\Gamma = 2\pi r(r\omega) \mp q \operatorname{tg} \alpha; \quad H = \frac{r^2 \omega^2}{g} \mp \frac{q \operatorname{tg} \alpha \cdot \omega}{2\pi g}. \quad (7)$$

Die Zirkulation und die Druckerhöhung hängen also in linearer Weise von der Fördermenge q ab. Die qH -Kurve (Abb. 125) ist eine gerade Linie, welche die q resp. H -Achse an den Punkten

$$H = 0, \quad q_0 = \frac{2\pi r^2 \omega}{\operatorname{tg} \alpha}; \quad q = 0, \quad H_0 = \frac{(r\omega)^2}{g}$$

schneiden.

Bei einer endlichen Anzahl von Schaufeln hat nun H , wie noch für besondere Fälle abzuleiten ist, die Form

$$(H)_n = \varepsilon \left[2\pi r (r\omega) - \frac{q \operatorname{tg} \alpha \cdot \omega}{2\pi g} \right] = \varepsilon (H)_\infty; \quad (\Gamma) = \varepsilon (\Gamma)_\infty; \quad (8)$$

wenn wir radiale Eintrittsrichtung und sonst dieselbe Schaufelstellung wie im Idealfalle ferner $r = r_2$ voraussetzen. Dabei ist ε eine Zahl < 1 , die als Maß für die Leistung der Turbine, resp. der Zentrifugalpumpe im Verhältnis zu dem Fall unendlich vieler Schaufeln betrachtet und als theoretischer Gütegrad bezeichnet werden kann.

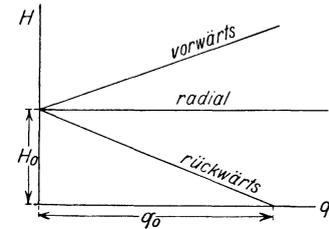


Abb. 125. Theoretische Druckerhöhung in Abhängigkeit von der Wassermenge.

In der Tat ergibt sich, wenn man $H = 0$ setzt

$$0 = \frac{\rho}{2\pi} \int r \omega c_t d\varphi = \frac{\rho}{2\pi} \int r \omega (r\omega - v_r \operatorname{tg} \alpha) d\varphi$$

$$\frac{2\pi r^2 \omega}{\operatorname{tg} \alpha} = (q_0)_\infty = \int v_r r d\varphi = (q_0)_n,$$

in beiden Vergleichsfällen derselbe Wert von q , wenn im Falle der endlichen Schaufelzahl der Winkel α den Austrittswinkel der Relativströmung aus den Schaufelkanälen bedeutet.

47. Ansätze für die ideale Strömung im Kreisrad. Der Fall $n = 1$.

1. Der strenge Ansatz für die vollständige Idealströmung durch ein rotierendes Kreisrad ist bisher nur für einige Spezialfälle durchgeführt worden, deren Wahl vor allem dem Bedürfnis nach Vereinfachung der Rechnung diene. Neben der Beschränkung auf den ebenen Fall war die Voraussetzung einer linienhaften Beschaffenheit der Schaufelspuren maßgebend. Kucharsky¹ setzt z. B. voraus, daß die Schaufeln eben sind und radial vom Mittelpunkt ausstrahlen, daß also der Innenradius verschwindet, und stellt sich die Aufgabe, die Stromfunktion der relativen Drehströmung, die allgemein die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = 2 \omega \quad (1)$$

zu erfüllen hat, den vereinfachten Randbedingungen anzupassen. Eine Erweiterung dieser Lösung ist neuerdings von W. Spannhake²

¹ W. Kucharsky, Strömungen einer reibungsfreien Flüssigkeit bei Rotation fester Körper. München u. Berlin 1908.

² W. Spannhake, Die Leistungsaufnahme einer parallelkränzigen Zentrifugalpumpe mit radialen Schaufeln, Festschrift zur Hundertjahrfeier der techn. Hochschule Karlsruhe 1925, S. 387–400; vgl. auch Z. ang. Math. Mech. 1925, S. 481; ferner; Hydraulische Probleme. Vorträge zur Hydraulikertagung 1925, Berlin 1926, S. 180ff.

gegeben worden, der die absolute Potentialströmung für den Fall untersucht hat, daß die Schaufelspuren von einem Innenkreis mit dem Radius r_1 und einem Außenkreis mit dem Radius r_2 begrenzt werden.

Zur Vorbereitung des allgemeinen Ansatzes, wollen wir zunächst voraussetzen, daß nur eine Schaufel gegeben ist, die wohl eine geradlinige Spur in der Ebene hat, aber nicht mehr radial, sondern schief gestellt ist.

In der komplexen ζ -Ebene möge ein Kreis mit dem Radius r_0 gegeben sein, dessen Mittelpunkt die Koordinate

$$\zeta_0 = \lambda r_0 e^{i\beta}$$

hat (Abb. 126). Durch die Abbildung

$$Z = \frac{1}{2} \left[\mu r_0 + e^{-i\alpha} \left(\zeta - \zeta_0 + \frac{r_0^2}{\zeta - \zeta_0} \right) \right] \quad (2)$$

wird das Äußere des Kreises $|\zeta - \zeta_0| = r_0$ übergeführt in die längs einer Strecke (Schaufel) aufgeschnittene Z -Ebene. Wie man sich

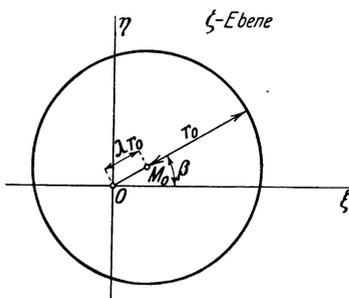


Abb. 126. Zur konformen Abbildung der Strömung durch ein Schaufelrad.

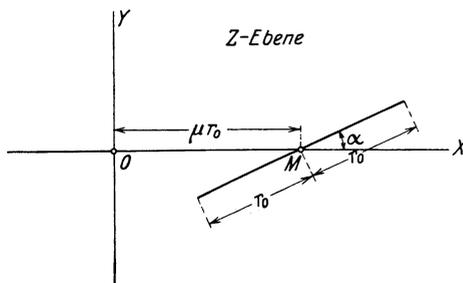


Abb. 127. Zur ebenen Einschaufelströmung.

durch Anwendung der Substitution $\zeta - \zeta_0 = r_0 e^{i\varphi}$ überzeugt, bildet die gerade Strecke, deren Mittelpunkt die Koordinate μr_0 hat, und deren Länge dem Kreisdurchmesser gleich ist, mit der reellen Achse den Winkel α . Wenn man festsetzt, daß die Punkte $\zeta = 0$ und $Z = 0$ einander entsprechen sollen, so wird etwa bei reellem μ

$$\mu = \frac{1}{2} \left(\lambda \cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{\lambda} \cos(\beta - \alpha) \right); \quad \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \frac{1 + \lambda^2}{1 - \lambda^2}. \quad (3)$$

Für die abbildende Funktion kann man auch schreiben

$$Z = \frac{1}{2} e^{i\alpha} \left[\frac{r_0}{\lambda} e^{-i\beta} + \zeta + \frac{r_0^2}{\zeta - \lambda r_0 e^{i\beta}} \right]. \quad (4)$$

Was nun die Bewegung der Flüssigkeit angeht, so läßt sich die Durchflußströmung in Verbindung mit der Zirkulation als eine erste Randwertaufgabe unmittelbar durch Vermittlung der konformen Abbildung konstruieren. Wenn wir dabei zunächst von dem Wirbel im

Drehpunkt 0 absehen und nur eine Quelle hierselbst und eine Zirkulation um die Schaufel voraussetzen, so erhält man für die Bildströmung um den Kreiszyylinder nach Abschnitt 24

$$W_1 = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\zeta \left[\zeta - e^{i\beta} \left(\lambda r_0 - \frac{r_0}{\lambda} \right) \right]}{\zeta - \lambda r_0 e^{i\beta}} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(\zeta - \lambda r_0 e^{i\beta}). \quad (5)$$

Um die Verdrängungsströmung aufzustellen, bedarf es einiger Vorbereitungen. Die Drehung der Schaufel um den Punkt 0 mit der Winkelgeschwindigkeit ω kann man zusammengesetzt denken aus einer Translation des Mittelpunkts M mit der Geschwindigkeit $\mu r_0 \omega$ und einer Rotation um den Punkt M . Die Absolutströmung infolge der Translation ist bereits in Abschnitt 20 aufgestellt. Denken wir uns die Schaufelspur als Ausartung einer Ellipse mit den Halbachsen a, b und führen wir die elliptischen Koordinaten τ durch die Gleichung

$$Z = c e^{i\alpha} \mathfrak{C}o\tau + \mu r_0 \quad (c = \sqrt{a^2 - b^2}) \quad (6)$$

ein, so haben wir das Potential

$$W_2 = - \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} (v_{0x} b + i v_{0y} a) e^{-\tau}, \quad (7)$$

wo

$$v_{0x} = r_0 \mu \omega \sin \alpha, \quad v_{0y} = r_0 \mu \omega \cos \alpha$$

zu setzen ist. Wenn $a = r_0, b = 0$ wird, so kommt

$$W_2 = - i \mu \omega \cos \alpha r_0^2 e^{-\tau}. \quad (8)$$

2. Die Bestimmung der Absolutströmung einer um ihren Mittelpunkt rotierenden Ellipse ist eine zweite Randwertaufgabe, der die Grenzbedingung entspricht, daß die Komponente der Randgeschwindigkeit der Flüssigkeit normal zur Ellipse übereinstimmt mit der betreffenden Komponente der Drehgeschwindigkeit des Randelementes.

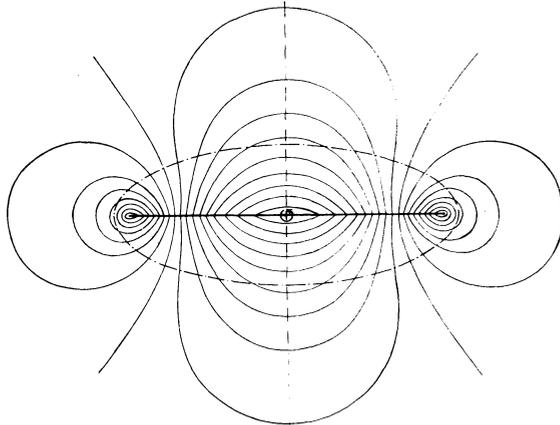


Abb. 128. Absolute Stromlinien um eine rotierende Platte. (Schaufel).

Gehen wir zunächst auf die Stromfunktion Ψ_3 der relativen Strömung zurück, so verschwindet diese Normalkomponente, und man kann die Bedingung des

Problems dahin formulieren, daß in der Schar der durch die relative Stromfunktion Ψ_3 dargestellten Kurven die Ellipse enthalten sein muß. Wenn wir die Achsen der Ellipse als Bezugsachsen einführen, so wird

$$\Psi_3 = \frac{1}{2} \omega r^2 + \Im(W_3),$$

wo $\Im(W_3)$ den imaginären Ausdruck im absoluten Potential bedeutet. Setzen wir nun

$$W_3 = i K e^{-2\tau} = i K e^{-2(\tau_1 + i\tau_2)} = K e^{-2\tau_1} (\sin 2\tau_2 + i \cos 2\tau_2)$$

und beachten, daß wegen

$$\begin{aligned} z &= c \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}(\tau_1 + i\tau_2) = c (\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} \tau_1 \cos \tau_2 + i \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n} \tau_1 \sin \tau_2) \\ r^2 &= x^2 + y^2 = c^2 [\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}^2 \tau_1 \cos^2 \tau_2 + \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}^2 \tau_1 \sin^2 \tau_2] \\ &= \frac{c^2}{2} (\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} 2\tau_1 + \cos 2\tau_2) \end{aligned}$$

ist, so ergibt sich

$$\Psi_3 = \cos 2\tau_2 \left[K e^{-2\tau_1} + \frac{1}{4} \omega c^2 \right] + \frac{1}{4} \omega c^2 \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} 2\tau_1.$$

Soll in der Schar dieser Kurven die Ellipse enthalten sein, die durch einen konstanten Wert $\tau_1 = (\tau_1)_0$ charakterisiert ist, so muß der Ausdruck in der Klammer verschwinden, woraus dann wegen

$$\begin{aligned} e^{-2(\tau_1)_0} &= (\mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f}(\tau_1)_0 - \mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}(\tau_1)_0)^2 = \frac{a-b}{a+b}, \\ K &= -\frac{1}{4} \omega (a+b)^2 \end{aligned}$$

sich ergibt. Die relative Strömung um die rotierende Ellipse wird also durch die Funktion

$$\Psi_3 = \frac{1}{2} \omega r^2 - \frac{1}{4} \omega (a+b)^2 e^{-2\tau_1} \cos 2\tau_2 \quad (9)$$

charakterisiert, die im Falle der Platte übergeht in

$$\Psi_3 = \frac{1}{2} \omega r^2 - \frac{1}{4} \omega a^2 e^{-2\tau_1} \cos 2\tau_2. \quad (10)$$

Setzen wir $a = r_0$, so lautet das Potential der Absolutströmung um unsere Schaufel (vgl. Abb. 128)

$$W_3 = -\frac{1}{4} i \omega r_0^2 e^{-2\tau}, \quad (11)$$

wobei nach Einführung des ursprünglichen Bezugssystems

$$Z = r_0 e^{i\alpha} \mathfrak{C}\mathfrak{O}\mathfrak{f} \tau + \mu r_0$$

zu setzen ist¹. Die gesamte Strömung² wird daher

$$\left. \begin{aligned} W &= W_1 + W_2 + W_3 = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(\zeta - \lambda r_0 e^{i\beta}) \\ &+ \frac{q}{2\pi} \ln \frac{\zeta \left(\zeta - e^{i\beta} \left(\lambda r_0 - \frac{r_0}{\lambda} \right) \right)}{\zeta - \lambda r_0 e^{i\beta}} - i r_0^2 \omega \left(\mu \cos \alpha e^{-\tau} + \frac{1}{4} e^{-2\tau} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

3. Die Zirkulation Γ bestimmen wir wieder aus der Forderung, daß an der Außenkante der Schaufel, also für

$$Z = r_0 (\mu + e^{i\alpha})$$

eine endliche Strömungsgeschwindigkeit auftreten, resp. daß der entsprechende Bildpunkt in der ζ -Ebene

$$\zeta = r_0 (\lambda e^{i\beta} + 1)$$

Staupunkt für die Bildströmung werden soll. Das führt zu der Gleichung

$$\frac{dW}{d\zeta} = \frac{dW_1}{d\zeta} + \frac{d(W_2 + W_3)}{d\tau} \frac{d\tau}{d\zeta} = 0.$$

Nun ergibt sich durch eine einfache Rechnung aus (2) und (6) durch Vermittlung der Beziehung

$$\Im \sin \tau + \mathfrak{C} \circ \{ \tau = e^\tau$$

die Gleichung

$$\zeta = r_0 e^\tau + r_0 \lambda e^{-i\beta}.$$

Bedenkt man ferner, daß die Außenkante der Schaufel dem Werte $\tau = 0$ entspricht, so wird

$$\left(\frac{d\tau}{d\zeta} \right)_{\tau=0} = \frac{1}{r_0}.$$

Damit erhalten wir für die Zirkulation Γ folgende Bestimmungsgleichung

$$-\frac{i\Gamma}{2\pi} + \frac{q}{2\pi} \left[\frac{1}{r_0 (\lambda e^{i\beta} + 1)} + \frac{\lambda}{r_0 (\lambda + e^{i\beta})} - \frac{1}{r_0} \right] + i \omega r_0^2 \left(\frac{1}{2} + \mu \cos \alpha \right) = 0.$$

In dem Faktor von q verschwindet der reelle Teil; der übrigbleibende Ausdruck wird

$$-\frac{2i\lambda \sin \beta}{\lambda^2 + 1 + 2\lambda \cos \beta}.$$

Man erhält also

$$\frac{\Gamma}{2\pi} = \omega r_0^2 \left(\frac{1}{2} + \mu \cos \alpha \right) + \frac{q}{2\pi} \frac{2\lambda \sin \beta}{\lambda^2 + 1 + 2\lambda \cos \beta}. \quad (13)$$

¹ Die rotatorische Verdrängungsströmung hat auch B. Caldonazzo auf anderem Wege ermittelt (Über die gleichförmige Rotation eines festen Körpers in einer unbegrenzten Flüssigkeit, Vorträge aus dem Gebiet der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922), Berlin 1924, S. 175—185.

² Vgl auch Br. Eck, Beitrag zur Turbinentheorie, Werft, Reederei, Hafen, 1925, S. 199—207.

Für die beiden Endpunkte der Schaufel hat man ferner

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= r_0 (\mu - e^{i\alpha}), & Z_2 &= r_0 (\mu + e^{i\alpha}), \\ r_1^2 &= r_0^2 (1 + \mu^2 - 2\mu \cos \alpha), & r_2^2 &= r_0^2 (1 + \mu^2 + 2\mu \cos \alpha). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Führt man den äußeren Radius ein, so geht der Ausdruck für die Zirkulation über in

$$\frac{\Gamma}{2\pi} = \omega r_2^2 \frac{\frac{1}{2} + \mu \cos \alpha}{1 + \mu^2 + 2\mu \cos \alpha} + \frac{q}{2\pi} \frac{2\lambda \sin \beta}{1 + \lambda^2 + 2\lambda \cos \beta}. \quad (15)$$

Damit ist die früher allgemein für die absolute Zirkulation angegebene Ausdrucksform nachgewiesen, und wir gewinnen z. B. für den Gütegrad

$$\varepsilon = \frac{\frac{1}{2} + \mu \cos \alpha}{1 + \mu^2 + 2\mu \cos \alpha}; \quad (16)$$

das Radienverhältnis $p = \frac{r_1}{r_2}$ drückt sich durch μ aus nach

$$p^2 = \frac{1 + \mu^2 - 2\mu \cos \alpha}{1 + \mu^2 + 2\mu \cos \alpha} \quad (17)$$

und β und λ sind nach den Formeln (3) durch μ und α ausdrückbar. Ferner ist β positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem das äußere Ende der Schaufel gegenüber dem mittleren Radius in der Richtung der Drehbewegung oder entgegengesetzt dieser Richtung liegt.

48. Die Strömung um einen radialen Schaufelkranz nach Spannhake.

Um nun die Strömung um ein System von mehreren Schaufeln zu behandeln, müssen wir das Strömungsgebiet der Z -Ebene, das im vorigen Paragraphen gewonnen wurde, durch eine Transformation

$$\frac{Z}{\mu r_0} = \left(\frac{z}{\mu r_0} \right)^n; \quad z = \mu r_0 \sqrt[n]{\frac{Z}{\mu r_0}} \quad (1)$$

in das Gebiet der z -Ebene überführen, das entsteht, wenn wir die unendliche Ebene längs den n Schaufelspuren aufschneiden, die der geraden Schaufelspur entsprechen. Die entstehenden Schaufeln, die übrigens wie die Punkte der komplexen Einheitswurzel auf einem Kreise kongruent angeordnet sind, haben aber, wie man sich überzeugt, nicht mehr eine geradlinige Kontur.

Wir wollen hier für die Folge den einfachen Fall $\alpha = \beta = 0$ betrachten, der auf ein System von geradlinigen, radial stehenden Schaufeln führt (Abb. 129).

Die konforme Abbildung ist dann durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} Z &= \frac{1}{2} \left(\zeta + \frac{r_0}{\lambda} + \frac{r_0^2}{\zeta - \lambda r_0} \right), \\ \frac{Z}{\mu r_0} &= \left(\frac{z}{\mu r_0} \right)^n \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

bestimmt. Die Nullpunkte an den drei Ebenen, ebenso die unendlich fernen Punkte entsprechen sich. Singularitäten treten auf durch die $Z\zeta$ -Abbildung in den Endpunkten der Schaufeln, die den zwei Kreispunkten $\zeta = r_0(\lambda \pm 1)$ entsprechen und durch die Zz -Abbildung im Nullpunkt.

2. Die Ermittlung der Quellwirbelströmung aus dem Ursprung des Rades und der Zirkulation um die Schaufeln kann unmittelbar als eine Randwertaufgabe 1. Art durch die konforme Abbildung geleistet werden.

Für die Bildströmung um den Kreiszyylinder erhält man unmittelbar

$$W_1 = \frac{q}{2\pi} \ln \zeta + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\zeta(\zeta - \lambda r_0)}{\zeta - \lambda r_0 + \frac{r_0}{\lambda}} + \frac{i\Gamma_s}{2\pi} \ln(\zeta - \lambda r_0) \quad (3)$$

und daraus durch Benutzung der Abbildungsfunktionen die komplexe Strömungsgeschwindigkeit in der Schaufelebene z

$$\bar{v}_1 = \frac{dW_1}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dZ} \frac{dZ}{dz}.$$

Die absolute Rotations- oder Verdrängungsströmung kann nicht unmittelbar, nur auf einem gewissen Umweg mit Hilfe der konformen Abbildung gewonnen werden, da die Schaufelkonturen nicht mehr Stromlinien sind. Wir nehmen mit Spannhake für diesen Strömungsanteil die Reihenentwicklung

$$W_2 = i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{(\zeta - \lambda r_0)^m} \quad (4)$$

an und suchen die Koeffizienten A_m den Bedingungen der Aufgabe (Randwertaufgabe 2. Art) anzupassen. Diese Bedingungen würden dahin lauten, daß die Komponente der Absolutgeschwindigkeit normal zum Schaufelelement mit der Normalkomponente der Drehgeschwindigkeit des Elementes übereinstimmt. Führen wir in dem Ausdruck für die Geschwindigkeit

$$\bar{v}_2 = \frac{dW_2}{dz} = \frac{dW_2}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dZ} \frac{dZ}{dz}$$

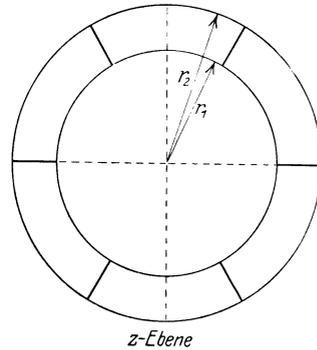


Abb. 129. Radialer Schaufelkranz.

die Koordinaten des Kreises in der ζ -Ebene ein

$$\zeta = r_0 (\lambda + e^{i\varphi}),$$

so erhalten wir für die diesen Kreispunkten entsprechenden Punkte auf der in der positiven reellen Achse liegenden ersten Schaufel der z -Ebene mit den Absolutwerten

$$|z| = \mu r_0 \sqrt[n]{\frac{Z}{\mu r_0}} = \mu r_0 \left(1 + \frac{1}{\mu} \cos \varphi\right)^{\frac{1}{n}} \quad (5)$$

die Geschwindigkeit

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_2 &= n \frac{\left(1 + \frac{1}{\mu} \cos \varphi\right)^{1 - \frac{1}{n}}}{1 - \cos 2\varphi} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m A_m}{r_0^{m+1}} \cdot \\ &[i(\cos(m+1)\varphi - \cos(m-1)\varphi) + \sin(m+1)\varphi - \sin(m-1)\varphi]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$(v_2)_x$ ist zur Schaufel parallel, $(v_2)_y$ die normale Geschwindigkeitskomponente. Da für jede der n Schaufeln dieselben Verhältnisse wiederkehren, so hat man damit natürlich auch die tangential und normal zu jeder Schaufel gerichteten Komponenten v_r und v_u der Absolutgeschwindigkeit.

Durch eine geringe Umformung wird also

$$v_u = n \frac{\left(1 + \frac{1}{\mu} \cos \varphi\right)^{1 - \frac{1}{n}}}{\sin \varphi} \cdot \sum_1^{\infty} \frac{m A_m}{r_0^{m+1}} \sin m \varphi. \quad (7)$$

Wenn man den Absolutwert dieses Ausdruckes

$$= r\omega = \omega \mu r_0 \left(1 + \frac{1}{\mu} \cos \varphi\right)^{\frac{1}{n}}$$

setzt, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \mu \sin \varphi \left(1 + \frac{1}{\mu} \cos \varphi\right)^{-\left(1 - \frac{2}{n}\right)} &= \sum_1^{\infty} \frac{n m A_m}{\omega r_0^{m+2}} \sin m \varphi, \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin m \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Die Koeffizienten B_m sind also als Koeffizienten einer Fourierschen sinus-Entwicklung der linksstehenden Funktion zu berechnen¹.

Es ergibt sich

$$B_m = \frac{n m \mu^2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{1}{\mu} \cos \varphi\right)^{\frac{2}{n}} \cos m \varphi d\varphi, \quad (9)$$

¹ Vgl. W. Spannhake, a. a. O. S. 9.

damit sind auch die Koeffizienten

$$A_m = \frac{r_0^{m+2}}{n m} \omega \cdot B_m \quad (10)$$

als bekannt anzusehen.

3. Das komplexe Potential der gesamten Absolutströmung lautet

$$W = W_1 + W_2 = \frac{i}{2\pi} \left\{ \Gamma_0 \ln \frac{\zeta}{\zeta - \lambda r_0 + \frac{r_0}{\lambda}} + (\Gamma_0 + \Gamma_s) \ln (\zeta - \lambda r_0) \right\} + \frac{q}{2\pi} \ln \zeta + i \sum_1^{\infty} \frac{A_m}{(z - \lambda r_0)^m}. \quad (11)$$

Damit nun in den Endpunkten der Schaufeln sowohl beim Eintritt wie beim Austritt keine unendlichen Geschwindigkeiten auftreten, muß der Differentialquotient $\frac{dW}{d\zeta}$ für die Eintrittsstelle und für die Austrittsstelle, d. h. für $\zeta = r_0 (\lambda \pm 1)$ verschwinden. Da die rein radiale Quellströmung in unserm Falle schon ohnehin tangential zu den Schaufeln verläuft, so kommt sie für die beiden Bedingungen nicht in Betracht. Man erhält daher für die innere und äußere Zirkulation Γ_0 und Γ_s folgende beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Gamma_0}{r_0 (\lambda + 1)} - \frac{\Gamma_0 \lambda}{r_0 (\lambda + 1)} + \frac{\Gamma_0 + \Gamma_s}{r_0} &= 2\pi \sum_1^{\infty} \frac{m A_m}{r_0^{m+1}}, \\ \frac{\Gamma_0}{r_0 (\lambda - 1)} + \frac{\Gamma_0 \lambda}{r_0 (\lambda - 1)} - \frac{\Gamma_0 + \Gamma_s}{r_0} &= 2\pi \sum_1^{\infty} \frac{m A_m}{(-r_0)^{m+1}}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Auflösung ergibt

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Gamma_0}{2\pi} &= \frac{\lambda^2 - 1}{4\lambda} \left[\sum_1^{\infty} \frac{m A_m}{r_0^m} - \sum_1^{\infty} \frac{m A_m}{(-r_0)^m} \right], \\ \frac{\Gamma_s}{2\pi} &= \frac{1}{2\lambda} \left[(\lambda + 1) \sum_1^{\infty} \frac{m A_m}{r_0^m} + (\lambda - 1) \sum_1^{\infty} \frac{m A_m}{(-r_0)^m} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Da einer vollständigen Umkreisung in der ζ -Ebene der *n*te-Teil einer Umkreisung in der z -Ebene entspricht, so gelten in dieser Ebene die *n*-fachen Werte für die Gesamtzirkulation. Führt man die Koeffizienten B_m ein und berücksichtigt, daß die Glieder mit $m = 2i$ in beiden Reihen jedes Ausdrucks gleich werden, so ergibt sich für die z -Ebene

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Gamma_0}{2\pi \omega r_0^2} &= \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} B_{2i+1}, \\ \frac{n \Gamma_s}{2\pi \omega r_0^2} &= \sum_1^{\infty} B_{2i} + \frac{1}{\lambda} \sum_0^{\infty} B_{2i+1}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

oder nach (9) und einer von Wellstein angegebenen Umformung

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Gamma_0}{2\pi\omega r_0^3} &= \frac{(\lambda^2 - 1)\mu}{2\lambda\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\left(1 + \frac{1}{\mu} \cos \varphi\right)^{1 - \frac{2}{n}}} \\ \frac{n\Gamma_s}{2\pi\omega r_0^3} &= \frac{\mu}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{\left(1 + \frac{1}{\mu} \cos \varphi\right)^{1 - \frac{2}{n}}} + \frac{\mu}{\lambda\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\left(1 + \frac{1}{\mu} \cos \varphi\right)^{1 - \frac{2}{n}}} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Für μ und r_0 kann man ferner den Eintritts- und Austrittsradius r_1 und r_2 einführen auf Grund der Beziehung

$$r_1 = \mu r_0 \left(\frac{\mu - 1}{\mu}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad r_2 = \mu r_0 \left(\frac{\mu + 1}{\mu}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Wenn man wieder $\frac{r_1}{r_2} = p$ einführt, so ergibt sich

$$\mu = \frac{1 + p^n}{1 - p^n}; \quad r_0 = r_2 \frac{1 - p^n}{2^{\frac{1}{n}} (1 + p^n)^{1 - \frac{1}{n}}}. \quad (16)$$

Wenn Γ_0 von vornherein verschwindet, d. h. wenn die Flüssigkeit drallfrei in das Rad eintritt, so bleibt nur die auf den Abfluß sich beziehende Gleichung (13) bestehen, woraus sich dann

$$\frac{\Gamma_s}{2\pi} = r_0 \sum_1^\infty \frac{m A_m}{r_0^{m+1}} = \frac{r_0^2}{n} \sum_0^\infty B_m = \frac{r_0^2 \mu}{n\pi} \int_0^\pi \frac{(1 + \cos \varphi) d\varphi}{\left(1 + \frac{1}{\mu} \cos \varphi\right)^{1 - \frac{2}{n}}} \quad (17)$$

ergibt.

4. Besondere Fälle. Wenn eine Schaufel vorhanden ist, so erhält man wegen

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\pi \left(1 + \frac{1}{\mu} \cos \varphi\right) d\varphi &= \pi; \quad \int_0^\pi \left(1 + \frac{1}{\mu} \cos \varphi\right) \cos \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2\mu} \\ \frac{\Gamma_0}{2\pi\omega r_0^3} &= \frac{(\lambda^2 - 1)\mu}{2\lambda}; \quad \frac{\Gamma_s}{2\pi\omega r_0^3} = \frac{\mu}{\lambda} + \frac{1}{2} \\ \mu &= \frac{1 + p}{1 - p}, \quad r_0 = \frac{r_2}{2} \frac{1 - p}{1 - p}; \quad \lambda = \mu + \sqrt{\mu^2 - 1} = \frac{1 + p + 2\sqrt{p}}{1 - p} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Für das Potential der Verdrängungsströmung hat man, da $B_1 = \mu$, $B_2 = \frac{1}{2}$ wird

$$W_2 = \omega i \left[\frac{\mu r_0^3}{\zeta - \lambda r_0} + \frac{r_0^4}{4(\zeta - \lambda r_0)^2} \right] = i \omega r_0^3 \left[\frac{\mu}{\zeta - \lambda r_0} + \frac{r_0}{4(\zeta - \lambda r_0)^2} \right]. \quad (19)$$

Ist $\Gamma_0 = 0$, so erhält man aus (19) einen Wert von Γ_s , der mit dem im vorigen Abschnitt ermittelten übereinstimmt, wenn man dort $\alpha = \beta = 0$ setzt.

Um nun den Vergleich mit dem Fall unendlich vieler radial gestellter Schaufeln durchzuführen, d. h. die Verhältnisse

$$\frac{\Gamma_0}{(\Gamma_0)_{n=\infty}} = \delta, \quad \frac{n\Gamma_s}{(n\Gamma_s)_{n=\infty}} = \varepsilon$$

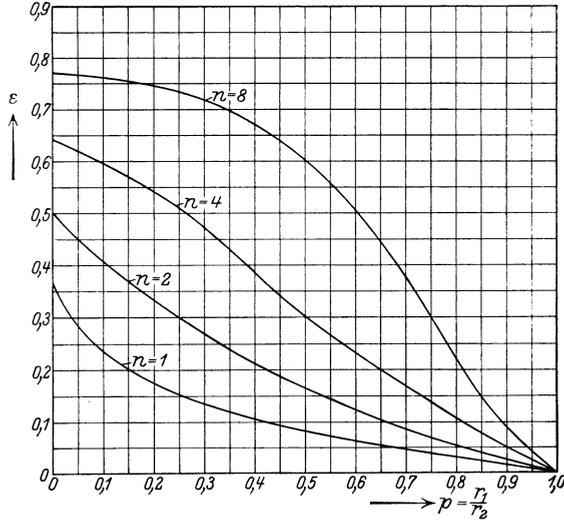


Abb. 130. Gütegrad eines Kreisrades mit radialen Schaufeln in Abhängigkeit von der Schaufelzahl und dem Radienverhältnis (nach Spannhake).

zu berechnen, bedenke man, daß

$$\frac{1}{2\pi} (\Gamma_0)_{n=\infty} = (r_1 \omega) r_1 = \omega r_0^2 \mu^2 \sqrt{\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^2},$$

$$\frac{1}{2\pi} (\Gamma_0 + n\Gamma_s)_{n=\infty} = (r_2 \omega) r_2 = \omega r_0^2 \mu^2 \sqrt{\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right)^2}.$$

Daraus ergibt sich dann

$$\left(\frac{\Gamma_0}{2\pi\omega r_0^2}\right)_{n=\infty} = \mu^2 \sqrt{\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^2},$$

$$\left(\frac{n\Gamma_s}{2\pi\omega r_0^2}\right)_{n=\infty} = \mu^2 \left[\sqrt{\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^2} \right],$$
(20)

also z. B. für den Gütegrad oder die relative Leistungsaufnahme

$$\varepsilon = \frac{\int_0^\pi \frac{\cos \varphi d\varphi}{\left(1 + \frac{1}{\mu} \cos \varphi\right)^{1-\frac{2}{n}} + \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\left(1 + \frac{1}{\mu} \cos \varphi\right)^{1-\frac{2}{n}}} }{\pi \mu \left[\left(\frac{\mu+1}{\mu}\right)^{\frac{2}{n}} - \left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^{\frac{2}{n}} \right]}$$
(21)

Wenn man ε und δ in Abhängigkeit von der Schaufelzahl und dem Radienverhältnis aufträgt, so hält man die Kurven der Abb. 130 und 131.

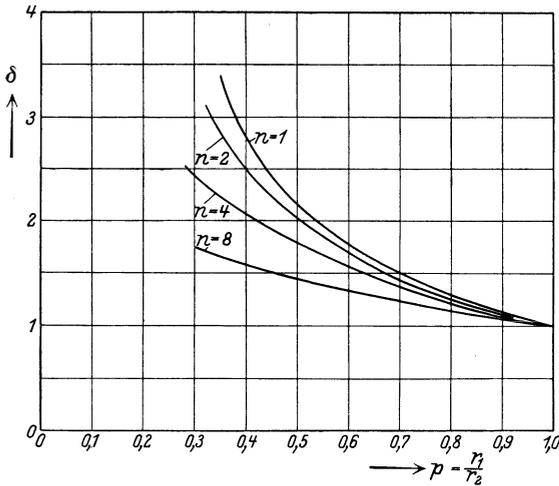


Abb. 131. Die Leitzahl δ in Abhängigkeit von der Schaufelzahl und dem Radienverhältnis (nach Spannhake).

Der Gütegrad ist eine Zahl kleiner als (1), die sich mit wachsender Schaufelzahl der 1 annähert. Für $p=0$, d. h. für radiale, bis zum Mittelpunkt reichende Schaufeln stimmen die Werte von ε mit den von Kucharski ebenfalls durch Reihen bestimmten Werten überein. Die „Leitzahl“ δ ist größer als 1. Um denselben Wert von Γ_0 zu erzeugen, müßten also der Leitapparat mit flacheren Winkeln gegen

die Umgangsrichtung ausgeführt werden, als im Falle unendlich vieler Schaufeln.

49. Strömung in Achsialturbinen.

Bei einer gewissen Klasse von Turbinen, den sog. Achsialturbinen resp. Achsialpumpen kann man annehmen, daß das Wasser beim Durchgang durch die Schaufelkanäle im wesentlichen seinen Abstand von der Drehachse beibehält. Jedenfalls sind etwa im Falle, daß die Schaufelhöhe klein ist gegen den Durchmesser, die auftretenden Radialgeschwindigkeiten und ihre Ableitungen so gering gegenüber den Achsialkomponenten, daß die Strömung mit großer Annäherung in Zylinderflächen verlaufend angenommen werden kann. Wenn man einen Zylinderschnitt im Abstände r führt, wobei Zylinderachse und Radachse zusammenfallen, und den Zylindermantel ohne Unterbrechung in eine Ebene abrollt, so reihen sich die Schaufelschnitte in endlicher Folge aneinander, und die auf den Schnitt bezogene Relativströmung gegen die Schaufeln ist damit als eine ebene Parallelströmung gegen das Profilgitter oder eine Jalousie abgebildet. Wenn der Abstand der Flügel groß ist, d. h. nur wenige Flügel vorhanden sind wie bei Propellern oder dem Laufrad der Kaplan turbine, so kann man die gegenseitige Beeinflussung der Flügel unberücksichtigt lassen und unmittelbar die Resultate der Tragflügeltheorie verwenden¹. Es werden z. B.

¹ Bauersfeld, Die Grundlagen zur Berechnung schnelllaufender Schaufelräder. Z. V. d. I. d. Jahr. 1922, S. 461, 616.

um die Schaufeln wieder zusätzliche Zirkulationen erzeugt, die eine Druckverschiedenheit auf beiden Seiten und daher eine Kraft hervorruft, die bei Reibungslosigkeit senkrecht zur relativen Parallelströmung v_0 orientiert ist und durch vorhandene Wirbelablösung um einen gewissen Gleitwinkel gedreht wird.

Die Aufstellung der vollständigen Potentialströmung gelingt im Falle eines ebenen Gitters mittelst der Methoden der konformen Abbildung. Kutta hat zunächst die Lösung für ein Gitter mit geraden, zur Gitterachse senkrecht stehenden Schaufeln angegeben¹ und gefunden, daß die Schaufelzone eine Änderung der Stromrichtung bewirkt und auf jede Schaufel eine Auftriebskraft wirkt, für deren Größe die halbe graphische Summe

$$v_x = \frac{1}{2} \cdot (v_1 + v_2) \tag{1}$$

der Geschwindigkeiten vor und hinter der Schaufelzone maßgebend ist. Es ergibt sich ferner, daß die durch die Einzelschaukel hervorgerufene Beeinflussung der Strömung der Nachbarschaukel stets im Sinne einer Verkleinerung der Auftriebskraft zu charakterisieren ist.

Neuerdings ist es König² gelungen, auch den Fall des schief orientierten Gitters mit den Methoden der konformen Abbildung durchzurechnen, um das Verhältnis der Tangentialkraft für eine gegebene Gitteranordnung zur entsprechenden Kraft bei dem unendlichteiligen Gitter zu ermitteln. Wir wollen kurz den Gedankengang der Königschen Arbeit besprechen. König nimmt an, daß eine der parallelen Schaufeln in die x -Achse und daß die Gitterachse mit der positiven Richtung der x -Achse den Winkel $\frac{\pi}{2} + \alpha$, also mit der y -Achse den Winkel α

bildet (Abb. 132). Der Abstand der Schaufeln längs der Gitterachse sei t . Wenn man dann z um $ite^{i\alpha}$ vermehrt, so gelangt man zu einem entsprechenden (kongruenten) Punkt in dem benachbarten Streifen. Wenn man durch die Funktion

$$\zeta^* = e^{2\pi e^{-i\alpha} \frac{z}{t}} \tag{2}$$

einen Gitterstreifen auf eine ζ^* -Ebene konform abbildet, so überdeckt die Abbildung die übrigen Streifen der ζ^* -Ebene so, daß kongruente

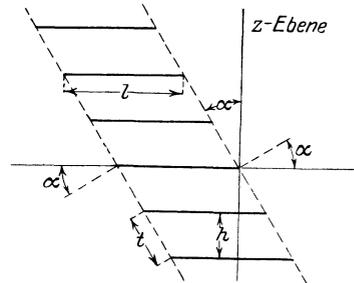


Abb. 132. Geradliniges Gitter mit geneigter Achse nach König.

¹ W. M. Kutta, Über ebene Zirkulationsströmungen nebst flugtechn. Anwendungen Sitzungsber. d. Bayr. Akad., München 1911, S. 108ff.

² E. König, Potentialströmung durch Gitter, Z. ang. Math. Mech. Bd. 2, S. 422—429. (1922).

Punkte z denselben ζ^* -Punkt liefern. Die ζ^* -Ebene ist unendlich vielblättrig. $\zeta^* = 0$ entspricht dem Punkt $z = -\infty$, $\zeta^* = \infty$ dem Punkt $z = \infty$. Führt man noch

$$\ln \zeta^* = 2\pi \frac{z}{l} e^{-i\alpha} \tag{3}$$

ein, so sieht man, daß den Geraden

$$\Re(\ln \zeta^*) = \text{konst} \quad \Im(\ln \zeta^*) = \text{konst} \tag{4}$$

(\Re und \Im bedeuten Real- resp. Imaginärteil der Klammerfunktion) in der ζ^* -Ebene das System konzentrischer Kreise um $\zeta^* = 0$ und das orthogonale Strahlenbüschel, in der z -Ebene dagegen die Scharen der Geraden parallel und senkrecht zur Gitterachse entsprechen.

Da die Schaufelspuren jede dieser Scharen unter gleichen Winkeln schneiden, so bilden sie sich auf Stücke von logarithmischen Spiralen in der ζ^* -Ebene ab. Diese Abbildung können wir aber nach früherem als Strömung aus einer Wirbelquelle in eine unendlich ferne Wirbelsenke auffassen. Dieses Gebiet um das Schaufelbild bilden wir jetzt weiter auf die obere ζ -Halbebene ab, so daß die Wirbelquelle in den Punkt $\zeta = \zeta_a$, die Wirbelsenke in den Punkt $\zeta = \zeta_b$ rückt (Abb. 133). Damit die Schaufel in die ξ -Achse übergeht, müssen wir die gespiegelten Singularitäten zur Strömung hinzufügen. Dann lautet die Abbildung

$$z = C \left(e^{i\alpha} \ln \frac{\zeta - \zeta_a}{\zeta - \zeta_b} + e^{-i\alpha} \ln \frac{\zeta - \bar{\zeta}_a}{\zeta - \bar{\zeta}_b} \right), \tag{5}$$

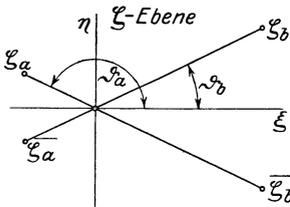


Abb. 133. Konforme Abbildung zur Berechnung der Gitterströmung.

z	ζ^*	ζ
$-\infty$	0	ζ_a
$+\infty$	∞	ζ_b
$-l$	0	0
0	$-\infty$	∞

Die Punkte entsprechen sich dann, wie die Tabelle angibt. Die Ableitung $\frac{dz}{d\zeta}$ verschwindet für die beiden der Vorder- und Hinterkante der Schaufel entsprechenden Punkte der ζ -Ebene. Wenn wir verlangen, daß der eine in den Nullpunkt, der andere ins Unendlichferne fällt, so sind dadurch ζ_a und ζ_b bestimmt. Setzt man $\zeta_a = r_a e^{i\vartheta_a}$, $\zeta_b = r_b e^{i\vartheta_b}$, $\zeta_a - \zeta_b = d e^{i\delta}$ so wird $\vartheta_a + \vartheta_b = \pi$, $\alpha + \delta = \frac{\pi}{2}$. Das gibt eine einfache geometrische Beziehung. Die Ableitung wird

$$\frac{dz}{d\zeta} = -C d^2 \frac{2\zeta \cos \alpha}{(\zeta - \zeta_a)(\zeta - \zeta_b)(\zeta - \bar{\zeta}_a)(\zeta - \bar{\zeta}_b)}. \tag{6}$$

Wenn der Punkt $\zeta = 0$ der Vorderkante entspricht und die Hinterkante in den Ursprung $z = 0$ fällt, so erhalten wir für die Breite l der Schaufel

$$-l = 2C \left\{ \cos \alpha \ln \frac{r_a}{r_b} - (\vartheta_a - \vartheta_b) \sin \alpha \right\}. \tag{7}$$

Das auf einem geschlossenen Weg um den Punkt ζ_a geführte Integral

$$\oint \frac{dz}{d\zeta} d\zeta = C e^{i\alpha} \cdot 2i\pi$$

gibt ferner im Imaginär- und Realteil den Abstand h und die Staffe-
lung p der Schaufel

$$h = 2\pi C \cos \alpha, \quad p = -2\pi C \sin \alpha. \quad (8)$$

Für eine gegebene Schaufelanordnung ergibt sich aus den letzten
Gleichungen mit $\vartheta_a + \vartheta_b = \pi$ und $\frac{r_a}{r_b} = \frac{\sin(\vartheta_b - \delta)}{\sin(\vartheta_b + \delta)}$ zur Bestimmung
von ϑ_b

$$\operatorname{tg} \vartheta_b = \frac{1 + \frac{r_a}{r_b}}{1 - \frac{r_a}{r_b}} \operatorname{ctg} \alpha \quad (9)$$

$$\frac{\pi l}{h} = \ln \frac{\sin(\vartheta_b - \delta)}{\sin(\vartheta_b + \delta)} - (\pi - 2\vartheta_b) \operatorname{tg} \alpha, \quad (10)$$

wobei der Fall $\vartheta_b < \delta$ auszuschließen ist, da hierbei ζ_a oder ζ_b , in die
untere Halbebene fällt. Für die praktische Rechnung gibt König fol-
gende Werte an

$$\left. \begin{aligned} 1 - \frac{r_a}{r_b} &= \frac{b}{t} \left[1 - \frac{b}{2t} + \left(\frac{b}{2t} \right)^2 \left(1 + \frac{2 \cos^2 \alpha}{3 \cos^2 \alpha'} \right) \right] & \left(\frac{l}{h} \text{ klein} \right) \\ \frac{r_a}{r_b} &= e^{2\alpha \operatorname{tg} \alpha} - \pi \frac{l}{h} & \left(\frac{l}{h} \text{ groß} \right) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

in denen $b = \frac{l}{\cos \alpha}$ die Gittertiefe, $t = \frac{h}{\cos \alpha}$ die Teilung bedeutet.

Das Potential für die Gitterströmung, die im Unendlichen eine ge-
wisse Neigung gegen die x -Achse besitzt, hat die Form

$$W(z) = W'(\zeta) = C u_a [e^{-i\sigma} \ln(\zeta - \zeta_a) + e^{i\sigma} \ln(\zeta - \xi_a)] \left. \begin{aligned} &+ C u_b [e^{-i\tau} \ln(\zeta - \zeta_b) + e^{i\tau} \ln(\zeta - \xi_b)], \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

wo u_a der Ergiebigkeit der Quelle in ζ_a , u_b der Stärke der Senke in ζ_b
proportional sind. Bildet man die Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \frac{dW'}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz}$$

für $\zeta = \zeta_a$ und $\zeta = \zeta_b$, die den unendlich fernen Punkten vor und
hinter dem Gitter entsprechen, so kommt

$$\bar{v}_1 = u_a e^{-(\sigma + \alpha)}, \quad \bar{v}_2 = u_b e^{-(\alpha + \tau)}, \quad |v_1| = u_a, \quad |v_2| = u_b, \quad (13)$$

woraus man erkennt, daß σ und τ die Winkel zwischen der Zu- und
Abstromrichtung und der Normalen zur Gitterachse bedeuten.

Wie in allen früheren Fällen, bestimmen wir wieder die Zirkulation
um eine Schaufel aus der Forderung, daß an der Hinterkante ($\zeta = \infty$)

die Geschwindigkeit einen endlichen Wert erhalten soll. Da $\frac{dz}{d\zeta}$ für $\zeta = \infty$ von der dritten Ordnung unendlich wird, so muß $\frac{dW}{dz}$ von der dritten Ordnung verschwinden. Das gibt nach einfacher Rechnung

$$u_a \cos \sigma = -u_b \cos \tau \quad (14)$$

$$u_a r_a \cos(\vartheta_a - \sigma) = -u_b r_b \cos(\vartheta_b - \tau). \quad (15)$$

Wenn die Größen u_0 und σ durch die Anströmgeschwindigkeit und -richtung gegeben sind, so kann man aus diesen Gleichungen die Abströmungsgeschwindigkeit und die Ablenkung der Stromrichtung berechnen. Es ergibt sich dafür die weitere Gleichung

$$\operatorname{tg} \sigma - \operatorname{tg} \tau = \left(1 - \frac{r_a}{r_b}\right) \frac{\sin(\alpha + \sigma)}{\cos \alpha \cdot \cos \sigma}, \quad (16)$$

Wie man ohne weiteres aus (13) und der Bedeutung der Winkel σ und τ schließt, drückt die Gleichung (14) die Tatsache aus, daß

die senkrechte Komponente der Geschwindigkeit unverändert bleibt. Bezeichnen wir sie mit v_m , so werden die Tangentialgeschwindigkeiten auf beiden Seiten in großem Abstand

$$\left. \begin{aligned} (v_t)_1 &= v_m \operatorname{tg} \sigma, \\ (v_t)_2 &= v_m \operatorname{tg} \tau. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Wenn man mit $q \frac{\gamma}{g} = q \cdot \rho$ die in der Zeiteinheit durch einen Schaufelkanal hindurchtretende Flüssigkeitsmasse bezeichnet, so hat nach der allgemeinen Turbinenformel die auf diesen Teil entfallende Tangentialkraft

$$\left. \begin{aligned} T &= q\rho(v_{t_1} - v_{t_2}) \\ &= q\rho v_m (\operatorname{tg} \sigma - \operatorname{tg} \tau). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

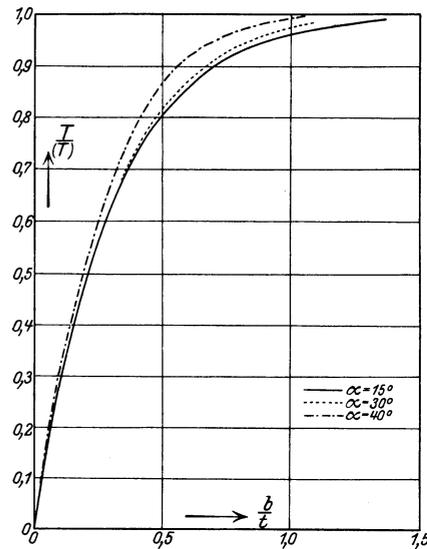


Abb. 134. Güteverhältnis einer Gitterströmung.

Nennen wir (T) die für den Grenzfall $\frac{l}{h} = \infty$ gültige Kraft, so wird

$$\frac{T}{(T)} = 1 - \frac{r_a}{r_b}. \quad (19)$$

Wir haben in der Abb. 134 nach König für den Fall den Wert dieses Güteverhältnisses in Abhängigkeit von $\frac{b}{t}$ aufgetragen für die Schaufelwinkel $\alpha = 15^\circ, 30^\circ$ und 45° . Weiter können wir die Tangentialkraft mit der Auftriebskraft A vergleichen, die eine einzige Schaufel bei

derselben Anströmung und glattem Abfluß hervorrufen würde. Nach der allgemeinen Tragflügeltheorie ist

$$A = \pi \rho \frac{b}{\cos \alpha} \left(\frac{v_m}{\cos \sigma} \right)^2 \sin(\alpha + \sigma). \tag{20}$$

Wegen $q = t v_m$ ergibt sich also

$$T = q t v_m^2 \left(1 - \frac{r_a}{r_b} \right) \frac{\sin(\alpha + \sigma)}{\cos \alpha \cos \sigma} \tag{18a}$$

$$\frac{T}{A} = \frac{\left(1 - \frac{r_a}{r_b} \right) t}{\pi \cos \sigma} \tag{21}$$

Für den Fall $\sigma = 0$ erhalten wir z. B. bei Benutzung von (11) bei kleinem $\frac{b}{t}$

$$\frac{T}{A} = 1 - \frac{\pi b}{2t} + \left(\frac{\pi b}{2t} \right)^2 \left(1 + \frac{2 \cos 2\alpha}{3 \cos^2 \alpha} \right). \tag{22}$$

Mit größer werdendem Schaufelabstand t nähert sich das Verhältnis, wie vorauszusehen war, der Einheit.

Wenn man die vorhergehenden Betrachtungen auf krummlinige Schaufeln mit endlicher Dicke ausdehnen will, hat man als Bild der Schaufeln in der ζ -Ebene eine Gerade zu wählen, die an dem Nullpunkt vorbeigeht. Bei der Aufstellung der Stromfunktion hat man die Spiegelung der singulären Punkte ζ_a und ζ_b , an dessen Geraden vorzunehmen.

Die für glatten Abfluß an der Hinterkante und stoßfreiem Eintritt sich ergebenden Werte für die Winkel σ und τ sind in der Königschen Arbeit angegeben.

50. Der Ansatz von Sörensen für gekrümmte Schaufelspuren.

1. Mit Hilfe der Königschen Abbildung gelingt es nun auch, wie E. Sörensen¹ gezeigt hat, die Durchflußströmung durch ein Kreisrad zu bestimmen, dessen Schaufelprofile durch Stücke von logarithmischen Spiralen dargestellt sind. Die Funktion

$$z' = e^{i\alpha} \ln \frac{\zeta - \zeta_a}{\zeta - \zeta_b} + e^{-i\alpha} \ln \frac{\zeta - \bar{\zeta}_a}{\zeta - \bar{\zeta}_b} \tag{1}$$

bildet zunächst die reelle Achse der ζ -Ebene auf ein Königsches Gitter ab, dessen Abmessungen durch die Gleichungen (9) und (10) des Abschnittes 49 bestimmt sind. Durch die Transformation

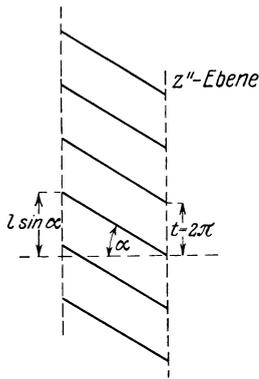
$$z'' = z' e^{-i\alpha} \tag{2}$$

wird ferner das Gitter um den Winkel α im Uhrzeigersinne um den Nullpunkt gedreht und durch die weitere Transformation

$$z^* = e^{z''} \tag{3}$$

¹ E. Sörensen, Potentialströmungen durch rotierende Kreisräder. Z. ang. Math. Mech. Bd. 7, S. 89—106. April 1927.

wird ein Streifen parallel der x'' -Achse von der Breite 2π auf ein Blatt der z -Ebene abgebildet. Da die Parallelen zur reellen x'' -Achse, welche



die Gittergeraden unter dem Winkel α schneiden, in die Strahlen durch den Nullpunkt der z^* -Ebene übergehen, so erhalten wir als Bildkurve des

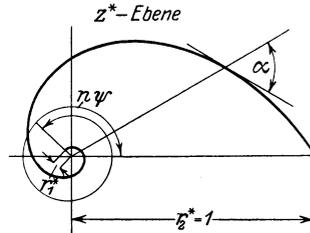


Abb. 135a und 135b. Konforme Abbildung zur Berechnung der Strömung durch ein Kreisrad.

Gitters eine logarithmische Spirale, und zwar entspricht der rechte Endpunkt der Gitterstäbe dem Punkt $z_a = 1$, der linke Endpunkt dem Punkt $z_1 = e^{-l} e^{-i\alpha}$.

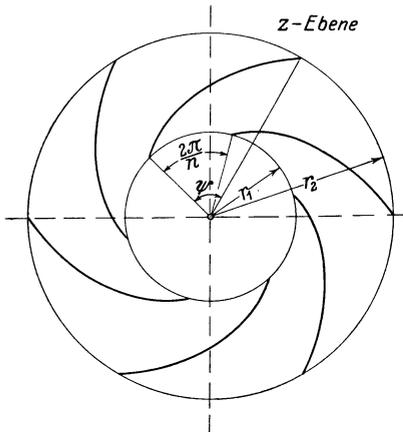


Abb. 136. Kreisrad mit logarithmisch gekrümmten Schaufelspuren (nach Sörensen).

Entsprechend dem Spannhakeschen Ansatz kann man jetzt wieder durch die Transformation

$$z = (z^*)^{\frac{1}{n}} \tag{4}$$

das eine Spiralstück der z^* -Ebene in n -Spiralstücke der z -Ebene aufspalten, die wie die Schaufeln eines Kreisrads angeordnet sind. Die Spurpunkte der äußeren und inneren Schaufelkanten haben die Koordinaten

$$z_2 = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, (n-1));$$

$$z_1 = e^{-\frac{l \cos \alpha}{n}} \cdot e^{-\frac{i(l \sin \alpha + 2k\pi)}{n}}.$$

Wenn man die Abbildungen

(1) bis (4) zusammenfaßt, so ergibt sich die Funktion

$$z = \left[\left(\frac{\zeta - \zeta_a}{\zeta - \zeta_b} \right) e^{i\alpha} \cdot \left(\frac{\zeta - \bar{\zeta}_a}{\zeta - \bar{\zeta}_b} \right) e^{-i\alpha} \right]^{\frac{1}{n}} \cdot e^{-i\alpha} \tag{5}$$

durch welche die reelle Achse der ζ -Ebene auf einen n -teiligen Schaufelstern in der z -Ebene abgebildet wird. Damit kann man aber das Potential W_1 der Durchflußströmung, die aus einer Wirbelquelle im Punkte $z = 0$ herrührt und in eine Wirbelsenke im Unendlichen mündet,

ohne weiteres anschreiben. Da die Punkte $\zeta = \zeta_a$ und $\zeta = \zeta_b$ den Punkten $z = 0$ und $z = \infty$ entsprechen, so haben wir

$$W_1(\zeta) = \left. \begin{aligned} & \frac{q + i\Gamma_0}{2\pi n} \ln(\zeta - \zeta_a) + \frac{q - i\Gamma_0}{2\pi n} \ln(\zeta - \bar{\zeta}_a) \\ & - \frac{q + i\Gamma_0}{2\pi n} \ln(\zeta - \bar{\zeta}_b) + \frac{-q + i\Gamma_a}{2\pi n} \ln(\zeta - \bar{\zeta}_a) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

wenn q die Ergiebigkeit der Quelle im Ursprung der Ebene des Rades, Γ_0 die innere und $\Gamma_a = \Gamma_0 + n\Gamma_s$ die äußere Zirkulation des vom Laufrad abfließenden Wassers bedeutet.

2. Das Potential für die Verdrängungsströmung wird dadurch ermittelt, daß man auf der Schaufelkurve, resp. deren Bildgeraden in der ζ Ebene eine Quell- resp. Senkenverteilung aufsucht, welche an jeder Stelle eine den Randbedingungen genügende Normalkomponente der Geschwindigkeit liefert. Jede Quelle oder Senke auf der reellen ζ -Achse, die als Bild der Schaufel erscheint, macht die Achse selbst zur Stromlinie, ruft also nur an dem Ort, wo sie sich befindet, eine Normalkomponente der Geschwindigkeit hervor. Die Größe dieser Geschwindigkeit ist, wie sich leicht zeigen läßt, proportional der Quellstärke in jedem Punkt der Achse.

In der Tat ergibt sich durch eine Grenzbetrachtung, die hier nicht durchgeführt werden soll, aus dem Potential

$$W = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(l) \ln(\zeta - l) dl$$

dem die Geschwindigkeitsfunktion

$$\bar{c} = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(l) dl}{\zeta - l}$$

entspricht¹

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} [\lim_{\xi \rightarrow l} c_\eta] = f(l).$$

Die auf die ζ -Ebene übertragene Randbedingung lautet daher

$$c_n = v_n \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\zeta=l} = \omega |z| \cos \alpha \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\zeta=l}.$$

Wenn man die Beziehung (5) benutzt, erhält man durch eine etwas umständliche Rechnung, die wir hier nicht reproduzieren wollen

$$c_n(l) = \frac{1}{n} \omega \cos \alpha \cdot \mu(l)^{\frac{2}{n}(1 + \cos 2\alpha)} e^{\frac{2}{n} \nu \sin 2\alpha} \cdot \frac{kl}{[(l - \xi_a)^2 + \eta_a^2][(l - \xi_b)^2 + \eta_b^2]} \quad (7)$$

¹ Haben wir z. B. eine gleichmäßig starke Quellstrecke, so wird

$$W = \frac{m}{\pi} \int_0^a \ln(\zeta - l) dl, \quad c_\xi - i c_\eta = \frac{m}{\pi} \ln \frac{\zeta}{\zeta - a}, \quad \text{also} \quad c_\eta = c_n = \pm m.$$

$$\text{wo} \quad \frac{l - \xi_a}{l - \xi_b} = \mu \cdot e^{i\nu}, \quad \frac{l - \bar{\xi}_a}{l - \bar{\xi}_b} = \mu \cdot e^{-i\nu}$$

$$k = [\cos \alpha (\xi_b^2 - \xi_a^2 + \eta_b^2 - \eta_a^2) - 2 \sin \alpha (\xi_a \eta_b - \xi_b \eta_a)]$$

gesetzt ist. Mit der damit in Abhängigkeit von l als bekannt anzusehenden Funktion c_n lautet das Potential der Verdrängungströmung

$$W_2(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} c_n(l) \ln(\zeta - l) dl. \quad (8)$$

Die in dem Gesamtpotential

$$W(\zeta) = W_1(\zeta) + W_2(\zeta) \quad (9)$$

enthaltenen Größen, die Drehgeschwindigkeit, die Wassermenge q und die Zirkulationswerte kann man wieder den beiden Bedingungen des tangentialen oder stoßfreien Eintritts und des tangentialen Abströmens von den Schaufeln anpassen. Da $\left| \frac{d\zeta}{dz} \right|_{\zeta=0}$ unendlich von der ersten Ordnung wird, so muß $\frac{dW}{d\zeta}$ von der 1. Ordnung verschwinden. Durch Zerlegung nach fallenden Potenzen von ζ erhält man als Eintrittsbedingung

$$q\xi_a - \Gamma_0 \eta_a - \frac{q\xi_b + \Gamma_a \eta_b}{r_b^2} + N_2 = 0, \quad (10)$$

wo

$$N_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_n(l) dl}{l}$$

gesetzt ist. Ebenso führt die Austrittsbedingung, nach der $\frac{dW_1}{d\zeta}$ und $\frac{dW_2}{d\zeta}$ von der 3. Ordnung zu Null werden müssen, mit der Abkürzung

$$N_1 = \int_{+\infty}^{+\infty} c_n(l) l dl$$

auf die Gleichung

$$q\xi_a - \Gamma_0 \eta_a - q\xi_b - \Gamma_a \eta_b + N_1 = 0. \quad (11)$$

Um die Winkelgeschwindigkeit ω hervortreten zu lassen, bezeichnen wir mit c'_n , N'_1 , N'_2 die auf $\omega = 1$ sich beziehenden Größen. Bei drallfreier Zuströmung des Wassers ($\Gamma_0 = 0$, $n\Gamma_s = \Gamma_a = \Gamma$) wird dann

$$q(\xi_a r_b^2 - \xi_b) - \Gamma \eta_b + \omega r_b^2 N'_2 = 0, \quad (12)$$

$$q(\xi_a - \xi_b) - \Gamma \eta_b + \omega N'_1 = 0, \quad (13)$$

woraus mit

$$\xi_a^2 + \eta_a^2 = r_a^2 = 1, \quad \vartheta_a = \pi - \vartheta_b, \quad \xi_a r_a = -\xi_b, \quad \eta_a : r_b = \eta_b$$

$$\omega = \frac{\xi_b r_b + \xi_a}{-N'_1 + r_b N'_2}; \quad \Gamma = q \frac{(\xi_b - \xi_a)(N'_1 - r_b N'_2)}{(-N'_1 + r_b^2 N'_2) \eta_a} \quad (14)$$

sich ergibt. Das Verhältnis des von der Pumpe aufgenommenen Dreh-

moments bei einem n -teiligen Kreisrade zum Drehmoment bei unendlicher Schaufelzahl wird also in diesem Falle

$$\varepsilon = \frac{M}{(M)} = \frac{n \Gamma_s}{2 \pi \omega - q \operatorname{tg} \alpha} = \frac{(\xi_b - \xi_a)(N'_1 - r_b N'_2)}{\eta_a [(\xi_b r_b + \xi_a) 2 \pi - n \operatorname{tg} \alpha (N'_1 + r_b^2 N'_2)]}. \quad (15)$$

Durch die Wahl der Größen α , ζ_a und ζ_b erhält man Schaufeln mit einem bestimmten Überdeckungsver-

hältnis $m = \frac{n \psi}{2 \pi}$. Wenn der äußere Radius des Schaufelkranzes $r_a = r_2 = 1$ gesetzt wird, so ändert sich r_1 mit n . Im Grenzfalle $n = \infty$ wird $r_1 = r_2$. Für die recht mühsame Zahlenberechnung legt Sørensen die Werte $\alpha = 60^\circ$, $m = 1,31$ zugrunde und erhält damit verschiedene Fälle von Laufrädern, von denen zwei ($n = 6, 12$) hier abgebildet sind (Abb. 136, 137). Die sonst noch in der Abbildung vorkommenden Größen erhalten die Werte

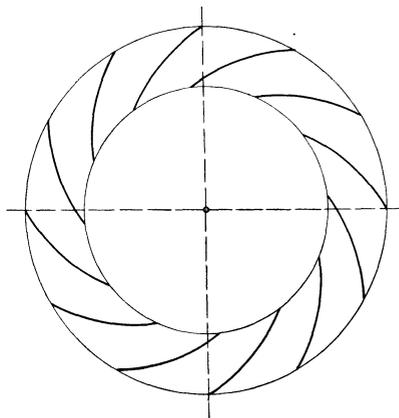


Abb. 137. Kreisrad mit 12 Schaufeln (nach Sørensen).

$$\begin{aligned} \frac{l}{h} &= \frac{2m}{\sin 2\alpha} = 3,03, & \vartheta_b &= 30^\circ 8', & r_b &= 372,6, & r_a &= 1, \\ \zeta_a &= e^{i(\pi - \vartheta_b)}, & \zeta_b &= 372,6 \cdot e^{i\vartheta_b}, \\ \xi_a &= -0,865, & \eta_a &= 0,502, & \xi_b &= 322,3, & \eta_b &= 187,1. \end{aligned}$$

Die für die Pumpe wichtigen Größen N'_1 , N'_2 , r_1 und ε , von denen die beiden ersten durch Planimetrieren berechnet werden müssen, sind in der beifolgenden Tabelle enthalten:

n	N'_1	N'_2	r_1	ε
1	445	0,01445	0,0085	0,377
2	310	0,0569	0,0923	0,514
3	242	0,1025	0,2042	0,579
6	150,7	0,152	0,4545	0,679
12	83,8	0,1447	0,672	0,685
24	44,9	0,0957	0,8198	0,704

Den Grenzwert des Quotienten ε für $n = \infty$, der zunächst in unbestimmter Form erscheint, bestimmt man durch verhältnismäßig schwierige Umformung der vorkommenden Integralausdrücke zu

$$\varepsilon = \frac{M}{(M)} = 0,775.$$

Man erkennt also, daß die Leistungsaufnahme einer Pumpe mit der Anzahl der Schaufeln zunimmt, aber immer kleiner bleibt als der Eulersche Grenzwert.

Lehrbuch der Hydraulik für Ingenieure und Physiker.
Zum Gebrauche bei Vorlesungen und zum Selbststudium. Von Prof. Dr.-Ing.
Theodor Pöschl, Prag. Mit 148 Abbildungen. VI, 192 Seiten. 1924.
RM 8.40; gebunden RM 9.90

Technische Hydrodynamik. Von Prof. Dr. **Franz Prášil**, Zürich.
Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 109 Abbildungen im
Text. IX, 303 Seiten. 1926. Gebunden RM 24.—

Strömungsenergie und mechanische Arbeit. Beiträge zur
abstrakten Dynamik und ihre Anwendung auf Schiffspropeller, schnelllaufende
Pumpen und Turbinen, Schiffswiderstand, Schiffssegel, Windturbinen, Trag-
und Schlagflügel und Luftwiderstand von Geschossen. Von **Paul Wagner**,
Oberingenieur in Berlin. Mit 151 Textfiguren. XI, 252 Seiten. 1914.
Gebunden RM 10.—

Von der Bewegung des Wassers und den dabei auftretenden
Kräften. Grundlagen zu einer praktischen Hydrodynamik für Bau-
ingenieure. Nach Arbeiten von Staatsrat Prof. Dr.-Ing. e. h. **Alexander
Koch** herausgegeben von Dr.-Ing. e. h. **Max Carstanjen**. Nebst einer Aus-
wahl von Versuchen Kochs im Wasserbau-Laboratorium der Darmstädter
Technischen Hochschule zusammengestellt unter Mitwirkung von Studien-
rat Dipl.-Ing. L. Hainz. Mit 331 Abbildungen im Text und auf 2 Tafeln
sowie einem Bildnis. XII, 228 Seiten. 1926. Gebunden RM 28.50

**Die Gesetze des Wasser- und Luftwiderstandes und
ihre Anwendung in der Flugtechnik.** Von Dr. **Oscar
Martienssen**, Kiel. Mit 75 Textfiguren. VI, 131 Seiten. 1913. RM 5.50

Beiträge zur Theorie des Segelns auf Grund der neueren durch
Versuche und Erfahrungen der Luftfahrt gewonnenen aerodynamischen Er-
kenntnisse über die Strömungsvorgänge an Flächen. Von Dipl.-Ing. **H. Croseck**.
Mit 58 Abbildungen. V, 70 Seiten. 1925. RM 4.80

Fluglehre. Vorträge über Theorie und Berechnung der Flugzeuge in ele-
mentarer Darstellung von Prof. Dr. **Richard von Mises**, Berlin. Dritte,
stark erweiterte Auflage. Mit 192 Textabbildungen. VI, 321 Seiten. 1926.
RM 12.60; gebunden RM 13.50

Flugzeugbaukunde. Eine Einführung in die Flugtechnik. Von Dr.-Ing.
H. G. Bader. Mit 94 Bildern im Text. IV, 121 Seiten. 1924. RM 4.80

Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule Aachen

Herausgegeben von

Professor Dr. **Th. v. Kármán**

- Heft 4: **Strömungserscheinungen in Ventilen.** Von Dr.-Ing. **Bruno Eck.** — **Gas theoretische Deutung der Reynoldsschen Kennzahl.** Von Professor Dr. **Th. v. Kármán.** — **Über die Stabilität der Laminarströmung und die Theorie der Turbulenz.** Von Professor Dr. **Th. v. Kármán.** — **Über einige Anwendungen nomographischer Methoden in der Thermodynamik.** Von Dr.-Ing. **Bruno Eck** und Dipl.-Ing. **Erich Kayser.** Mit 46 Abbildungen im Text. 48 Seiten. 1925. RM 5.10
- Heft 5: **Theorie des Segelfluges.** Von Dr.-Ing. **W. Klemperer.** Mit 17 Abbildungen im Text. 78 Seiten. 1926. RM 6.90
- Heft 6: **Berechnung der Druckverteilung an Luftschiffkörpern.** Von Professor Dr. **Th. v. Kármán.** **Strömungsverlauf und Druckverteilung an Widerstandskörpern in Abhängigkeit von der Kennzahl.** Von Regierungsbaumeister Dr.-Ing. **Hans Ermisch.** Mit 58 Abbildungen im Text. 50 Seiten. 1927. RM 7.50
-

Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922). Gehalten von zahlreichen Fachleuten. Herausgegeben von **Th. v. Kármán**, Professor am Aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule Aachen, und **T. Levi-Civita**, Professor an der Universität Rom. Mit 98 Abbildungen im Text. IV, 251 Seiten. 1924. RM 13.—

Mechanik der flüssigen und gasförmigen Körper. Redigiert von **R. Grammel.** Mit 290 Abbildungen. XI, 413 Seiten. 1927. RM 34.50; gebunden RM 36.60
(Bildet Band VII des Handbuches der Physik, herausgegeben von H. Geiger und Karl Scheel.)

Inhaltsübersicht:

Ideale Flüssigkeiten. Von Prof. Dr. M. Lagally, Dresden. — **Zähe Flüssigkeiten.** Von Prof. Dr. L. Hopf, Aachen. — **Wasserströmungen.** Von Prof. Dr. Ph. Forchheimer, Wien-Döbling. — **Tragflügel und hydraulische Maschinen.** Von Prof. Dr. A. Betz, Göttingen. — **Gasdynamik.** Von Dr. J. Ackeret, Göttingen. — **Kapillarität.** Von Dr. A. Gyemant, Charlottenburg.

Die Differentialgleichungen des Ingenieurs. Darstellung der für Ingenieure und Physiker wichtigsten gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen einschließlich der Näherungsverfahren und mechanischen Hilfsmittel. Mit besonderen Abschnitten über Variationsrechnung und Integralgleichungen. Von Prof. Dr. **Wilhelm Hort**, Oberingenieur der AEG Turbinenfabrik, Berlin. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage unter Mitwirkung von Dr. phil. **W. Birnbaum** und Dr.-Ing. **K. Lachmann.** Mit 308 Abbildungen im Text und auf 2 Tafeln. XII, 700 Seiten. 1925. Gebunden RM 25.50