

Führer durch die Technische Mechanik

Eine neuartige Übersicht über ihre Grundlagen
Methoden und Ergebnisse für
Studium und Praxis

von

Dr.-Ing. Horst Müller

Privatdozent an der Techn. Hochschule
Hannover

Mit 166 Textabbildungen



Berlin
Verlag von Julius Springer
1935

ISBN-13:978-3-642-90132-4 e-ISBN-13:978-3-642-91989-3
DOI: 10.1007/978-3-642-91989-3

**Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.**

Copyright 1935 by Julius Springer in Berlin.

Vorwort.

Wer die Geschichte eines Landes studieren will, darf nicht nur die Ereignisse in ihrer zeitlichen Reihenfolge betrachten, sondern er muß auch die gleichzeitigen Vorgänge in den Nachbarländern, sowie die Vorgeschichte mit einbeziehen. Genau dasselbe gilt für alle anderen Lehrgebiete. Jedes Gebiet ist ein Organismus, keines seiner Glieder dient Selbstzwecken, sondern sie alle hängen innig miteinander zusammen, und nur, wer diesen inneren Zusammenhang sieht und kennt, wird es beherrschen.

Das vorliegende Buch will nicht in die Reihe der bisher üblichen Lehrbücher treten oder einen Ersatz für Vorlesungen bieten, sondern, nachdem der Lernende schrittweise in die einzelnen Probleme eingeführt wurde, und die Aufgaben nacheinander an ihn herantraten, soll er jetzt die Dinge nebeneinander sehen und so das Ineinandergreifen der einzelnen Gesetze deutlicher erkennen. Auf vollständige Ableitung der Lehrsätze konnte auf Grund der an den Leser gestellten Voraussetzungen zugunsten der Übersichtlichkeit verzichtet werden. Ihr wesentlicher Inhalt oder der Gedankengang von Konstruktionen tritt dafür in den Vordergrund. Die vielen Seitenhinweise, die die enge Verknüpfung der einzelnen Gebiete untereinander zeigen, und die Anleitungen zur Ableitung der Gesetze sollen den Leser zum Mitarbeiten in horizontaler und vertikaler Richtung veranlassen. Übungsbeispiele werden, soweit es sich nicht um Grundaufgaben handelt, nicht gebracht. Sie gehören nicht zur Aufgabe dieses Buches. Dem Lernenden sei aber gesagt, daß er nur durch eifriges Üben Sicherheit in der Beherrschung der Lehrsätze und deren Anwendung erhält. Besonderer Wert wird auf die meist sehr stiefmütterlich behandelten Zeichenmaßstäbe gelegt, die erfahrungsgemäß viele Schwierigkeiten bereiten.

Genau wie ein Wanderer nicht nur einen Weg verfolgt, sondern einen Überblick über das durchwanderte Gebiet und die mit ihm verwachsenen Leute gewinnen will, so möge der Leser, sei es bei der Vorbereitung fürs Examen, sei es beim Studium oder beim Nachschlagen im vorliegenden etwas Gleichwertiges finden!

Hannover, im Januar 1935.

Dr. Ing. Horst Müller.

Inhaltsverzeichnis.

A. Vorbemerkungen.		Seite
I. Einteilung der Mechanik		1
II. Allgemeines		1
1. Skalare, Vektoren		1
2. Koordinatensysteme		2
3. Vektordarstellung		2
4. Vektorarten		2
5. Größe eines Vektors		3
III. Rechnen mit Vektoren		4
1. Addition		4
2. Subtraktion		4
3. Multiplikation		4
a) Skalar \times Vektor		4
b) Vektor \times Vektor		4
c) Sonderfälle		5
d) Zeichnerische Bestimmung des Vektorproduktes.		6
e) Produkt von Vektorsummen		7
f) Produkt von Produkten		7
4. Differentiation nach einem Skalar		7
IV. Differentiation und Integration zeichnerisch gegebener Kurven		7
1. Differentiation		7
a) Tangentenverfahren		7
b) Sehnenverfahren		8
c) Differenzenverfahren		9
2. Integration		9
a) Ordinatenverfahren		9
b) Sehnenverfahren		10
c) Tangentenverfahren		10
d) Auszählen der Kästchen		11
e) Sofortige zweimalige Integration mit Hilfe des Seilecks		11
B. Statik.		
I. Zusammensetzen von Kräften		12
1. In der Ebene		12
a) Allgemeines		12
b) Kräfte an einem Punkt		13
c) Parallele Kräfte (Schwerpunkt)		13
d) Beliebige verteilte Kräfte		14
2. Im Raume		15
a) Allgemeines		15
b) Kräfte an einem Punkt		15
c) Parallele Kräfte		16
d) Beliebige verteilte Kräfte		16
α) Kraft und Moment in einem Punkt S. 16. — β) Kraftkreuz = zwei windschiefe Kräfte S. 17. — γ) Kraftschraube = Dyname = Zentralachse S. 18.		

Inhaltsverzeichnis.

	V Seite
II. Zerlegen einer Kraft	20
1. In der Ebene	20
a) In zwei ungleiche Richtungen	20
b) In zwei parallele Richtungen	20
c) In drei gegebene Richtungen	21
d) In eine gegebene Richtung und eine Kraft durch einen gegebenen Punkt	22
2. Im Raume	23
a) In zwei Richtungen	23
b) In drei Richtungen an einem Punkt (Dreibein)	23
α) Eine Unbekannte verschwindet S. 23. — β) Zwei Unbekannte fallen in eine Richtung S. 23. — γ) Unbestimmter Maßstab S. 24. — δ) Korrekturverfahren von Müller-Breslau S. 24. — ε) Zwischenresultierende in einer Stabebene S. 25. — ζ) Rechnung S. 25.	
c) In drei parallele Richtungen	25
d) In sechs Richtungen	26
III. Zusammensetzen und Zerlegen von Momenten	26
IV. Schwerpunkt	26
V. Gleichgewichtsbedingungen	27
VI. Gleichgewichtszustände	28
VII. Lagerungen	29
1. In der Ebene	29
2. Im Raume	29
VIII. Tragwerke	30
1. Allgemeines	30
a) Lagerkräfte	30
b) Innere Beanspruchung	30
c) Aufbau	30
d) Eigenschaften	31
2. Balkentragwerke	31
a) Aufbau	31
b) Beziehungen zwischen Belastung, Querkraft und Moment	31
α) Vorzeichen S. 31. — β) Verlauf der Kurven S. 32. — γ) Beispiel, Rechnung S. 32. — δ) Beispiel, Zeichnung S. 33.	
c) Balken mit schiefer Belastung	34
α) Horizontale und vertikale Komponenten S. 34. — β) Resultierende der äußeren Kräfte S. 34. — γ) Seileck im festen Auflager beginnen S. 35. — δ) Rechnung S. 35.	
d) Balken mit räumlicher Belastung	35
e) Dreigelenkbogen	36
α) Überlagerungsprinzip S. 36. — β) Seileckmethode S. 36.	
f) Balkentragwerk mit Zwischengelenken	37
3. Fachwerke	38
a) Aufbau	38
b) Lösungsvorbereitung	40
c) Lösungswege	40
α) Knotenpunktgleichgewicht S. 40. — β) Cremonaplan S. 41. — γ) Schnittmethode S. 42. — δ) Hennebergs Stabvertauschung S. 43. — ε) Kinematische Methode S. 44.	
d) Ergebnis = Stabkrafttabelle	45

C. Kinematik.

I. Grundbegriffe	46
1. Bewegungsarten	46
2. Zeitliche Änderungen	46
3. Vektorcharakter	47

	Seite
II. Zusammensetzen von Bewegungen	48
1. Fortschreitbewegungen	48
2. Drehbewegungen	48
a) Drehungen um zwei sich schneidende Achsen	48
b) Drehungen um parallele Achsen	48
c) Zwei gleich große aber entgegengesetzte Drehungen	49
d) Drehungen um drei sich rechtwinkelig schneidende Achsen	49
e) Drehungen um beliebig verteilte Achsen	49
α) Drehung und Fortschreiten bez. eines beliebigen Punktes S. 49. —	
β) Drehungen um zwei windschiefe Achsen S. 50. — γ) Schraubung S. 50.	
3. Fortschreit- und Drehbewegungen	50
III. Koordinatensysteme	51
1. Allgemeines	51
a) Koordinaten	51
b) Weg	51
c) Geschwindigkeit	51
d) Flächengeschwindigkeit	52
e) Beschleunigung	52
f) Flächenbeschleunigung	53
2. Sonderfälle	53
a) Bewegung auf einer Kreisbahn	53
b) Bewegung auf einer Geraden	54
c) Zentralbewegung	54
d) Gleichförmige Bewegung	54
e) Gleichförmig beschleunigte Bewegung	54
f) Beschleunigung abhängig von der Zeit	55
g) Beschleunigung abhängig vom Wege	55
α) Beliebige Abhängigkeit S. 55. — β) Lineare Abhängigkeit S. 55.	
h) Beschleunigung abhängig von der Geschwindigkeit	55
α) Beliebige Abhängigkeit S. 55. — β) Lineare Abhängigkeit S. 56. —	
γ) Quadratische Abhängigkeit S. 56.	
IV. Relativbewegung	56
V. Darstellung von Bewegungsvorgängen	58
1. Allgemeines	58
a) Bahn	58
b) Bewegungsverhältnisse	58
c) Hodograf	58
2. Verlauf der Kurven abhängig von der Zeit	59
3. Die Zeit als Parameter	59
a) Weg — Zeit-Kurve gegeben	59
b) Geschwindigkeit — Zeit-Kurve gegeben	60
c) Beschleunigung — Zeit-Kurve gegeben	61
4. Der Weg als Parameter	62
a) Geschwindigkeit — Weg-Kurve gegeben	62
b) Beschleunigung — Weg-Kurve gegeben	63
c) Geschwindigkeitshöhe — Weg-Kurve gegeben	64
5. Die Geschwindigkeit als Parameter	64
Beschleunigung — Geschwindigkeit-Kurve gegeben	64
6. Geschwindigkeitszustand eines Systems	65
a) Geschwindigkeitsplan	65
b) Momentanpol	66
7. Bestimmung des Geschwindigkeitszustandes eines Systems	66
a) Mit Hilfe des Geschwindigkeitsplanes	66
b) Mit Hilfe der Momentanpole (geklappte Geschwindigkeiten)	67

Inhaltsverzeichnis.

VII

Seite

8. Beschleunigungszustand eines Systems	67
a) Beschleunigungsplan	67
b) Beschleunigungspol.	68
9. Bestimmen des Beschleunigungszustandes eines Systems mit Hilfe des Beschleunigungsplanes	69

D. Kinetik.

I. Vorbemerkung	71
II. Grundbegriffe	71
1. Massenmomente zweiter Ordnung.	71
a) Trägheitsmoment.	71
b) Zentrifugalmoment = Deviationsmoment	72
c) Übergang auf andere Koordinatensysteme	72
α) Parallele Achsen S. 72. — β) Schiefe Achsen S. 73.	
d) Bestimmen der Massenmomente zweiter Ordnung	75
α) Rechnung S. 75. — β) Zeichnung S. 76. — γ) Versuch S. 78.	
e) Darstellung	79
α) Trägheitsradius S. 79. — β) Trägheitsellipsoid S. 79. — γ) Trägheitskreis S. 80.	
2. Der Drall	81
a) Definition	81
b) Drall in bezug auf einen raumfesten Punkt	81
c) Drehung um eine richtungsfeste Achse.	82
d) Drallellipsoid	82
3. Arbeit, Leistung, Energie	83
a) Arbeit und Leistung	83
b) Kinetische Energie	83
4. Übersicht über die verschiedenen Achsen	85
5. Übersicht über die verschiedenen Ellipsoide	85
6. Ersatzmassen.	85
a) Statische und dynamische Gleichwertigkeit	85
b) Ebene Systeme	86
α) Zwei Ersatzmassen S. 86. — β) Drei Ersatzmassen auf einer Geraden S. 86.	
7. Kraft- und Massenreduktion	87
III. Grundgesetze der Kinetik	88
1. Fortschreitende Bewegung	88
a) Impulssatz	88
α) Massenpunkt S. 89. — β) System von Massenpunkten S. 89.	
b) Dynamische Grundgleichung	90
α) Massenpunkt S. 90. — β) System von Massenpunkten S. 91.	
2. Drehende Bewegung.	91
a) Drallsatz = Flächensatz.	91
α) Massenpunkt S. 92. — β) System von Massenpunkten S. 92.	
b) Dynamische Grundgleichung	93
α) Massenpunkt S. 93. — β) System von Massenpunkten S. 93. — γ) Komponentendarstellung S. 94. — δ) Übergang zum körperfesten Koordinatensystem S. 95.	
3. Arbeitssatz = Energiesatz	96
α) Massenpunkt S. 96. — β) System von Massenpunkten S. 96.	
4. Potential.	97
Definitionen und Folgerungen	97
Konservative und dissipative Kräfte	98
5. Prinzip der virtuellen Arbeiten.	99
6. Lagrangesche Gleichung	100

	Seite
IV. Bewegungsgesetze bei verschiedenen Widerständen	101
1. Konst. Widerstand	101
2. Widerstand der Geschwindigkeit verhältig	101
3. Widerstand dem Quadrat der Geschwindigkeit verhältig	101
4. Widerstand dem Wege verhältig	101
V. Widerstände gegen die Bewegung	102
1. Reibung	102
2. Flüssigkeitswiderstand	102
3. Rollwiderstand	103
4. Seilsteifigkeit	103
VI. Der Stoß	104
1. Allgemeines	104
a) Definition des Stoßes.	104
b) Stoßvorgang.	104
c) Stoßarten	104
2. Grundgesetze	105
a) Allgemeines	105
b) Exzentrischer, schiefer Stoß mit Reibung der Stoßstelle.	105
c) Gerader Zentralstoß	105
d) Schiefer Zentralstoß	106
e) Exzentrischer Stoß.	106
3. Stoßmittelpunkt	106
4. Erweiterte Stoßtheorie	107
VII. Massenausgleich	108
1. Bedingungen	108
2. Starrer Körper	109
3. Massenausgleich einer Mehrzylindermaschine.	109
a) Ausgleich erster Ordnung	109
b) Ausgleich zweiter Ordnung	110
VIII. Der Kreisel	109
1. Grundgleichungen.	109
2. Kräftefreier Kreisel	109
a) Allgemeines	109
b) Symmetrischer Kreisel	110
3. Kreisel unter Zwang	111
a) Drehmoment aufgezwungen, Bewegung gesucht	111
α) Drehmoment parallel zur Figurenachse S. 111. — β) Drehmoment parallel zur Drallachse S. 112. — γ) Stoß senkrecht auf die Figurenachse S. 112. — δ) Konstantes Drehmoment auf die Figurenachse (schwerer Kreisel) S. 113.	
b) Reguläre Präzession aufgezwungen, Trägheitswiderstand des Kreisels gesucht	114
α) Symmetrischer Kreisel S. 114. — β) Schneller symmetrischer Kreisel S. 115. — γ) Unsymmetrischer Kreisel S. 115. — δ) Schneller unsymmetrischer Kreisel S. 116.	
Sachverzeichnis	117

A. Vorbemerkungen.

I. Einteilung der Mechanik.

Lehre von den Kräften und von der Bewegung der Körper.

Statik.	Kinematik.	Kinetik ¹ .
Gleichgewicht der Kräfte und Momente. Ruhe oder gleichförmige Bewegung. Beziehungen zwischen den Kräften und Momenten.	Bewegung der Körper ohne Beachten der wirkenden Kräfte und Momente. Beziehungen zwischen Ort und Zeit.	Kein Gleichgewicht der Kräfte und Momente. Beschleunigte Bewegung. Beziehungen zwischen Kräften, Momenten, Ort und Zeit.

Beschaffenheit der untersuchten Körper

starr	elastisch oder plastisch	flüssig oder gasförmig
Mechanik der starren Körper = Stereomechanik.	Elastizitäts- und Festigkeitslehre = Elastomechanik	Hydro- und Aeromechanik (Volumen beständig). Gasdynamik (Volumen veränderlich).

II. Allgemeines.

1. Unterscheide Skalare und Vektoren.

Skalare = richtungslose Größen	Vektoren = gerichtete Größen				
vollständig bestimmt durch Angabe eines Zahlenwertes. Beispiel: Zeit, Temperatur, spez. Gewicht, Masse, Arbeit usw. Darstellung: Lateinische und griechische Buchstaben, z. B. $t, \vartheta, \gamma, m, A \dots$	außer Angabe der Größe — des absoluten Betrages — ist noch die Orientierung im Raum — die Richtung und Lage der „Strecke“ — anzugeben. Beispiel: Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Moment, Winkelgeschwindigkeit, Drall usw. Darstellung: <table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="text-align: center; width: 50%;">Zeichnung</td> <td style="text-align: center; width: 50%;">Rechnung</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">Pfeil.</td> <td style="text-align: center;">deutsche Buchstaben oder griechische mit einem Querstrich, z. B. $\bar{v}, \bar{b}, \bar{\beta}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{\omega}, \bar{\varepsilon} \dots$</td> </tr> </table>	Zeichnung	Rechnung	Pfeil.	deutsche Buchstaben oder griechische mit einem Querstrich, z. B. $\bar{v}, \bar{b}, \bar{\beta}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{\omega}, \bar{\varepsilon} \dots$
Zeichnung	Rechnung				
Pfeil.	deutsche Buchstaben oder griechische mit einem Querstrich, z. B. $\bar{v}, \bar{b}, \bar{\beta}, \bar{M}, \bar{S}, \bar{\omega}, \bar{\varepsilon} \dots$				
Rechnen wie mit benannten Zahlen.	Besondere Rechengesetze (siehe weiter unten).				

¹ Bisweilen werden unter dem Ausdruck Dynamik die Statik und Kinetik zusammengefaßt. Aus didaktischen Gründen findet man aber auch die Kinematik und Kinetik als Dynamik behandelt.

2. Orientierung im Raum durch Koordinatensysteme.

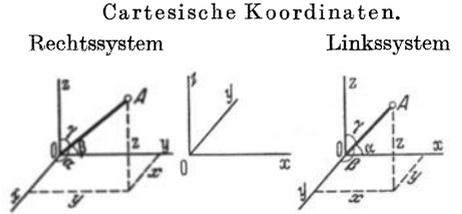


Abb. 1. Cartesische Koordinaten. a), b) Rechtssystem, c) Linkssystem.

Achsen xyz stehen aufeinander senkrecht. Fortschreiten von der

x -Achse über die y -Achse in der z -Richtung;
 y -Achse über die z -Achse in der x -Richtung;
 z -Achse über die x -Achse in der y -Richtung.

ergibt eine
 rechtsgängige Schraube¹ linksgängige

Zylinderkoordinaten.

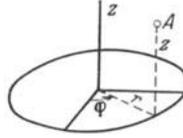


Abb. 2. Zylinderkoordinaten.
 r = Radius des Grundkreises.
 φ = Drehwinkel.
 z = Achse = Höhe über dem Grundkreis.

Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten).

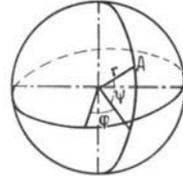


Abb. 3. Polarkoordinaten.
 r = Radiusvektor.
 φ = Seitenwinkel (Längengrad).
 ψ = Höhenwinkel (Breitengrad).

3. Darstellung eines Vektors.

Zeichnung
 durch einen Pfeil.

Größe: Pfeillänge.

Richtung: Neigung des Pfeiles.

Sinn: Pfeilspitze.
 Lage (Wirkungslinie): Lage des Pfeiles im Lageplan.

Rechnung

durch die Komponenten des Pfeiles — meist in cartesischen Koordinaten. — Die Richtung der Achsen xyz wird durch die „Einheitsvektoren“ i, j, k von der absoluten Größe 1 und der Richtung der xyz -Achse angegeben. Z. B.

$$\mathfrak{P} = i \cdot X + j \cdot Y + k \cdot Z = \mathfrak{X} + \mathfrak{Y} + \mathfrak{Z}$$

absoluter Betrag (Maßzahl)

$$|\mathfrak{P}| = P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

Neigungswinkel α, β, γ gegen die Koordinatenachsen xyz . Richtungscosinus

$$\cos \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{X, Y, Z\text{-Komponente}}{\text{ganze Länge}}.$$

Vorzeichen der Komponenten.
 Koordinaten eines Punktes der Angriffsgereaden.

4. Vektorarten.

Axiale = gebundene = linienflüchtige

dürfen nur in ihrer Richtung verschoben werden.

Z. B. Kraft, Winkelgeschwindigkeit.

Planare = freie

dürfen in ihrer Richtung und parallel dazu verschoben werden.

Z. B. Moment, Fortschreitgeschwindigkeit.

¹ Manche Autoren setzen beim Rechtssystem als positive Drehung die der obigen Definition entgegengesetzt an. Dies bedeutet, daß bei den Momentenbildungen (siehe S. 5) vor den Determinanten ein — Zeichen anzubringen ist.

² In der Ebene ist $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = 1$,
 im Raume ist $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Unter α, β, γ ist stets der spitze Winkel gegen die xyz -Richtung zu verstehen. Der Quadrant wird durch das Vorzeichen der Komponenten bestimmt.

Für den Winkel δ zwischen zwei Vektoren mit den Richtungswinkeln $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ist $\cos \delta = \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2$.

Beim Parallelverschieben um $\pm a$ entsteht ein Moment der Kraft oder der Winkelgeschwindigkeit (= Fortschrittgeschwindigkeit) (siehe Abb. 4 und 5).

$$\mathfrak{M} = [a \cdot \mathfrak{F}]; \quad M = |\mathfrak{M}| = a \cdot P \cdot \sin \alpha \widehat{\mathfrak{F}} = P \cdot l$$

$$v = [a \cdot \bar{\omega}]; \quad v = |v| = a \cdot \omega \cdot \sin \alpha \widehat{\bar{\omega}}^*$$

Damit der Gleichgewichtszustand nicht geändert wird, ist beim Parallelverschieben ein Moment

$$\mathfrak{M} = -[a \mathfrak{F}] = [\mathfrak{F} a]$$

$$v = -[a \bar{\omega}] = [\bar{\omega} a] \quad (\text{siehe S. 5})$$

anzubringen.

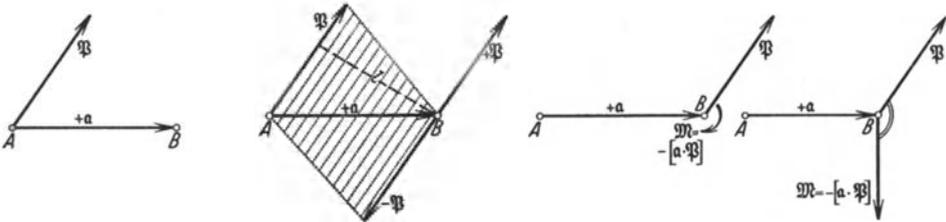


Abb. 4. Parallelverschieben eines Kraftvektors \mathfrak{F} .

a) Kraft \mathfrak{F} im Punkte A ist gleichwertig b) Kraft \mathfrak{F} in A und $\pm \mathfrak{F}$ in B , d. h. Kraft \mathfrak{F} in B und Kräftepaar $P \cdot l$. Dies ist gleichwertig c) und d) Kraft \mathfrak{F} in B und Moment $\mathfrak{M} = -[a \mathfrak{F}]$.

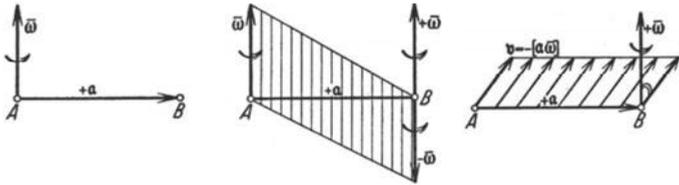


Abb. 5. Parallelverschieben des Vektors der Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$.

a) Vektor $\bar{\omega}$ in A ist gleichwertig b) $\bar{\omega}$ in A und $\pm \bar{\omega}$ in B , d. h. Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ um B und Winkelgeschwindigkeitenpaar $-[a \bar{\omega}]$. Dies ist gleichwertig c) Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ in B und Fortschrittgeschwindigkeit $v = -[a \bar{\omega}]$.

5. Absolute Größe eines Vektors.

Zeichnung:

aus Aufriß und Grundriß

aus Aufriß und Seitenriß

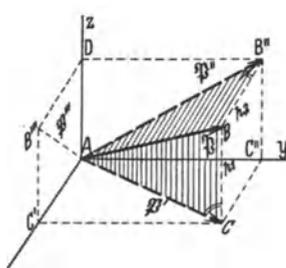
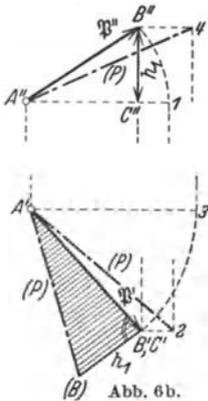


Abb. 6a.

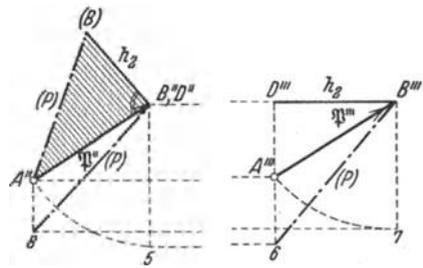


Abb. 6c.

Abb. 6a. Vektor \mathfrak{F} und Vektorprojektion im Grundriß \mathfrak{F}' (xy -Ebene), Aufriß \mathfrak{F}'' (yz -Ebene) und Seitenriß \mathfrak{F}''' (xz -Ebene).

Abb. 6b. Bestimmen der absoluten Größe des Vektors aus Aufriß- und Grundrißprojektion.

Abb. 6c. Bestimmen der absoluten Größe des Vektors aus Aufriß- und Seitenrißprojektion.

* Siehe Kinematik S. 47.

1. Konstruktion des im Raume stehenden Dreiecks ABC aus einer Projektion P' bzw. P'' der Höhe $h_{1,2}$ und dem rechten Winkel zwischen der Projektion und der Höhe. Die Hypotenuse dieses Dreiecks ist die wahre Größe von \mathfrak{B} (siehe Abb. 6a bis c).

2. Die Projektion in der einen Ebene wird unter Festhalten eines Endpunktes gedreht, bis sie parallel zur anderen Projektionsebene liegt. Der andere Endpunkt des Vektors beschreibt in der ersten Projektionsebene konstruktionsgemäß einen Kreis mit der Projektionslänge als Radius und in der zweiten Projektionsebene bewegt er sich auf einer Geraden parallel zur Schnittlinie der beiden Projektionsebenen.

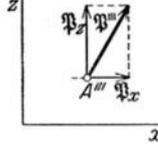
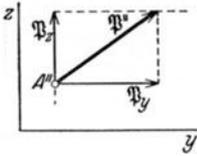


Abb. 6b. Linienzug $B''12$ und $B'2$ oder $B'34$ und $B''4$.

Abb. 6c. Linienzug $A''56$ und $A'''6$ oder $A'''78$ und $A''8$.

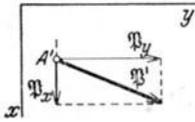


Abb. 7. Zusammenhang zwischen den Vektorprojektionen im Grund-, Auf- und Seitenriß und den Vektorkomponenten in der xyz -Richtung. (siehe Abb. 6a und 7).

Rechnung:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{P'^2 + P_z^2} = \\ \sqrt{P''^2 + P_x^2} = \\ \sqrt{P'''^2 + P_y^2} = \end{array} \right\} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{P'^2 + P''^2 + P'''^2}$$

III. Rechnen mit Vektoren.

1. Addition (s. Zusammensetzen von Kräften).

Der resultierende Vektor ist die Diagonale im Parallelogramm aus den beiden Summanden, d. h. er ist die Schlußlinie im Vektorpolygon. Die Reihenfolge der Summanden ist beliebig, aber der Umfassungssinn muß gewahrt werden.

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A} = i(A_x + B_x) + j(A_y + B_y) + k(A_z + B_z),$$

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{C} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A} + \mathfrak{C} = \mathfrak{C} + \mathfrak{A} + \mathfrak{B}.$$

2. Subtraktion

wie Addition. Das Minuszeichen dreht nur den Pfeilsinn um.

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \mathfrak{A} + (-\mathfrak{B}) = i(A_x - B_x) + j(A_y - B_y) + k(A_z - B_z).$$

3. Multiplikation.

a) Skalar m mal Vektor \mathfrak{A} .

Richtung und Sinn des Vektors bleiben ungeändert, Größe wird $m \cdot A$. Ist m negativ, so wird auch noch der Sinn des Vektors umgekehrt. (Vgl. Subtraktion $m = -1$.)

$$m\mathfrak{A} = i \cdot m A_x + j \cdot m A_y + k \cdot m A_z$$

$$m(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = m \cdot \mathfrak{A} + m \cdot \mathfrak{B}.$$

b) Vektor \mathfrak{A} mal Vektor \mathfrak{B} .

Skalares = inneres Produkt.

Schreibweise: Wie Produkt benannter Zahlen, bisweilen auch in runde Klammern (...) gefaßt oder kleiner Kreis zwischen beiden Vektoren.

Es wird der eine Vektor auf den anderen projiziert und diese beiden Größen werden wie Skalare miteinander multipliziert.

Vektoriell = äußeres Produkt in eckige Klammern gefaßt oder Malzeichen zwischen beiden Vektoren.

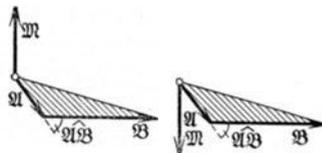


Abb. 8. Vektorprodukt $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = [\mathfrak{A} \mathfrak{B}]$ im a) rechts- und b) linkshändigen Koordinatensystem.

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} &= (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) = \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B} = A \cdot B \cdot \cos \widehat{\mathfrak{A} \mathfrak{B}} \\ &= A \cos \widehat{\mathfrak{A} \mathfrak{B}} \cdot B \\ &= A \cdot B \cos \widehat{\mathfrak{A} \mathfrak{B}} \\ &= A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y \\ &\quad + A_z \cdot B_z \end{aligned}$$

Beispiel: Arbeit = skalares Produkt aus Kraft und Weg.

$$\begin{aligned} \text{Kraft} \quad \mathfrak{P} &= \mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \mathfrak{z} \\ \text{Weg} \quad d\mathfrak{s} &= d\mathfrak{x} + d\mathfrak{y} + d\mathfrak{z} \\ \text{Arbeit} \quad dA &= \mathfrak{P} \cdot d\mathfrak{s} = P \cdot ds \cdot \cos \widehat{\mathfrak{P} d\mathfrak{s}} \\ &= X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz. \end{aligned}$$

Die Reihenfolge der Faktoren ist beliebig
 $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}$

Der Wert des äußeren Produktes ist gleich dem doppelten Inhalt des schraffierten Dreiecks (siehe Abb. 8). Der diesen Wert darstellende Vektor steht senkrecht auf der Ebene (dem Dreieck) der beiden zu multiplizierenden Vektoren, und zwar in der Richtung, daß $\mathfrak{A} \mathfrak{B} \mathfrak{M}$ ein Rechts-Links-system bilden.

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= [\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}] = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B} = A \cdot B \cdot \sin \widehat{\mathfrak{A} \mathfrak{B}} \\ &= \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= \mathfrak{i} \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \mathfrak{j} \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \mathfrak{k} \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \\ &= \mathfrak{i} \cdot (A_y \cdot B_z - A_z \cdot B_y) + \mathfrak{j} (A_z \cdot B_x - A_x \cdot B_z) \\ &\quad + \mathfrak{k} \cdot (A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x). \end{aligned}$$

Moment = Vektorprodukt aus Hebelarm und Kraft.

$$\begin{aligned} \text{Hebelarm} \quad \mathfrak{r} &= \mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \mathfrak{z} \\ \text{Kraft} \quad \mathfrak{P} &= \mathfrak{x} + \mathfrak{y} + \mathfrak{z} \\ \text{Moment} \quad \mathfrak{M} &= [\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{P}] = r \cdot P \cdot \sin \widehat{\mathfrak{r} \mathfrak{P}} \\ &= \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \\ &= \mathfrak{i} y Z + \mathfrak{j} z X + \mathfrak{k} x Y - \mathfrak{k} y X - \mathfrak{i} z Y - \mathfrak{j} x Z \\ &= + \mathfrak{i} \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} - \mathfrak{j} \begin{vmatrix} x & z \\ X & Z \end{vmatrix} + \mathfrak{k} \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} \\ &= + \mathfrak{i} (y Z - z Y) - \mathfrak{j} (x Z - z X) + \mathfrak{k} (x Y - y X) \\ &= \mathfrak{M}_x \quad + \mathfrak{M}_y \quad + \mathfrak{M}_z \end{aligned}$$

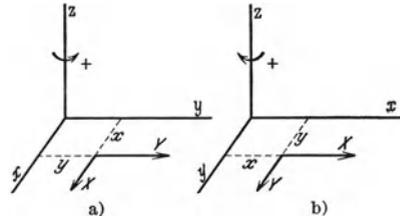


Abb. 9. Grundfigur zum Bestimmen des Vorzeichens von Kraftmomenten um eine Achse im a) rechts- und b) linkshändigen Koordinatensystem. Nach Aufstellen des Momentes um die z-Achse $M_z = x \cdot Y - y \cdot X$ folgen $M_{x,y}$ um die x- und y-Achse durch zyklische Vertauschung.

nicht beliebig
 $\mathfrak{M} = [\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}] = - \mathfrak{M}_1 = - [\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}].$

c) Sonderfälle.

$$\begin{aligned} &1. \text{ Vektoren einander parallel, } \sphericalangle \widehat{\mathfrak{A} \mathfrak{B}} = 0; \quad \cos \widehat{\mathfrak{A} \mathfrak{B}} = 1; \quad \sin \widehat{\mathfrak{A} \mathfrak{B}} = 0 \\ \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A} &= \mathfrak{A}^2 = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2, & [\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}] &= [\mathfrak{A}]^2 = 0, \\ \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i} &= \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{j} = \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{k} = \mathfrak{i}^2 = \mathfrak{j}^2 = \mathfrak{k}^2 = 1. & [\mathfrak{i}]^2 &= [\mathfrak{j}]^2 = [\mathfrak{k}]^2 = 0, \end{aligned}$$

Beispiel: Das Moment einer Kraft um eine ihr parallele Achse ist null.

2. Vektoren senkrecht aufeinander, $\sphericalangle \mathfrak{A} \mathfrak{B} = 90^\circ$; $\cos \sphericalangle \mathfrak{A} \mathfrak{B} = 0$; $\sin \sphericalangle \mathfrak{A} \mathfrak{B} = 1$
 $\mathfrak{A} \mathfrak{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = 0$, $[\mathfrak{A} \mathfrak{B}] = A \cdot B$,
 $i j = j i = k i = 0$. $[i j] = k$,

Beispiel: Eine auf ihrer Wegrichtung senkrecht stehende Kraft verrichtet keine Arbeit.

$[i k] = i$,
 $[k i] = j$.

d) Zeichnerische Bestimmung des Vektorproduktes $\mathfrak{M} = [\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{F}]$.

In der Ebene:

Pol in senkrechtem Abstände H von der Kraft wählen (siehe Abb. 10), im Kraftplan Polstrahlen 0 und 1 ziehen und im Lageplan parallel dazu die Seilstrahlen. Die Parallele zur Kraft \mathfrak{F} im Lageplan durch den Bezugspunkt 0 gibt in ihrer Länge y zwischen den

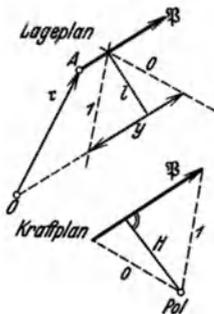


Abb. 10. Zeichnerische Bestimmung des Vektorproduktes bei ebener Darstellung.

Seilstrahlen 0 und 1 ein Maß für das Moment¹

$\mathfrak{M}_0 = [\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{F}]$,
 $|\mathfrak{M}_0| = H \cdot y$.

Maßstäbe:

Längenmaßstab im Lageplan l m/mm.
 Kraftmaßstab im Kraftplan k kg/mm.

Polabstand H stellt als Strecke im Kraftplan eine Kraft von der Größe $H = \bar{H} \cdot k$ kg dar, wobei \bar{H} die Länge des Polabstandes in mm bedeutet. Die Strecke y stellt eine Länge von \bar{y} mm mal l m/mm dar, also ist der Maßstab für das Moment

$m = \bar{H} \cdot k \cdot l$ [mm · kg/mm · m/mm] = [mkg/mm]
 und die Größe des Momentes beträgt

$|\mathfrak{M}| = m \cdot \bar{y}$ mkg/mm.

Im Raume:

Das räumliche Bild wird auf drei zueinander senkrechte Ebenen projiziert und dort als drei ebene Probleme behandelt (siehe Abb. 11). Man erhält so die Momente um die drei Achsen $x y z$, die zu einem resultierenden Moment (siehe S. 26) vereinigt werden können. Betreffs des Vorzeichens der Momente beachte S. 5. Wählt man den Polabstand H in allen Projektions-ebenen gleich groß, so ist

$|\mathfrak{M}| = |[\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{F}]| = H \cdot y_{res} = H \cdot \sqrt{y_x^2 + y_y^2 + y_z^2}$.

¹ Der Beweis folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $O I y$ und $O I P$ im Lage- und Kraftplan. Danach verhält sich $l : y = H : P$, d. h. $l \cdot P = H \cdot y$. Es ist aber $l \cdot P = \mathfrak{M}_0 = [\mathfrak{r} \cdot \mathfrak{F}] = r \cdot P \cdot \sin \sphericalangle \mathfrak{r} \mathfrak{F}$.

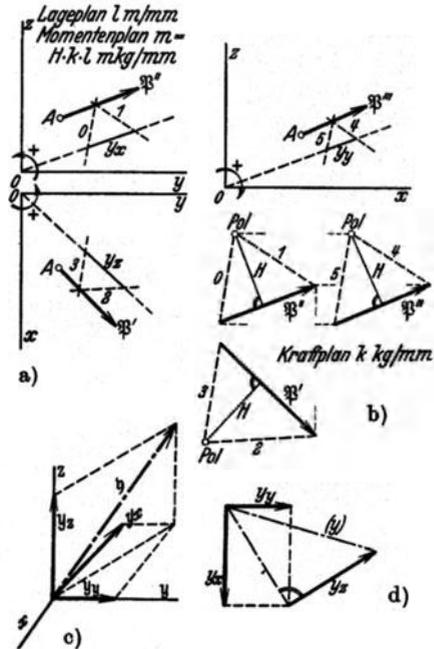


Abb. 11. Zeichnerische Bestimmung des Vektorproduktes bei räumlicher Darstellung.

- a) Lageplan: Grund-, Auf- und Seitenriß.
- b) Kraftplan für den Grund-, Auf- und Seitenriß.
- c) räumlich-anschauliche Darstellung der Momentenvektoren.
- d) Bestimmen der absoluten Größe des Momentenvektors.

e) Produkt von Vektorsummen.

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{C},$$

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cdot (\mathfrak{C} + \mathfrak{D}) = \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{D}.$$

Sonderfall: $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}; \mathfrak{B} = \mathfrak{D}$

$$(\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B})^2 = \mathfrak{A}^2 \pm 2\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{B}^2$$

$$= A^2 \pm 2AB \cos \widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} + B^2$$

(Cosinussatz).

$$[\mathfrak{A}(\mathfrak{B} + \mathfrak{C})] = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] + [\mathfrak{A}\mathfrak{C}],$$

$$[(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cdot (\mathfrak{C} + \mathfrak{D})] = [\mathfrak{A}\mathfrak{C}] + [\mathfrak{A}\mathfrak{D}] + [\mathfrak{B}\mathfrak{C}] + [\mathfrak{B}\mathfrak{D}].$$

$$[(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) \cdot (\mathfrak{A} - \mathfrak{B})] = -2[\mathfrak{A}\mathfrak{B}],$$

$$[(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) \cdot (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})] = +2[\mathfrak{A}\mathfrak{B}].$$

f) Produkt von Produkten.

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = \mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}] = \mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$$

$$= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}.$$

= Inhalt des aus den Vektoren \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} gebildeten Parallelepipeds (siehe Abb. 12).

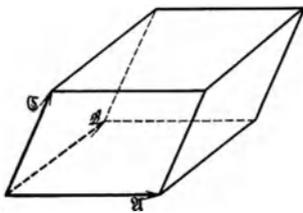


Abb. 12. Parallelepipid aus drei Vektoren \mathfrak{A} , \mathfrak{B} und \mathfrak{C} .

$$[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) - \mathfrak{C}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$$

ist ein Vektor, der $\perp \mathfrak{A}$ und $\perp [\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ steht.

$$[[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \cdot \mathfrak{C}] = -[\mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]]$$

$$= -\mathfrak{A}(\mathfrak{C}\mathfrak{B}) + \mathfrak{B}(\mathfrak{C}\mathfrak{A}).$$

4. Differentiation nach einem Skalar.

Ist α_0 der Einheitsvektor in Richtung \mathfrak{A} , so ist: $\mathfrak{A} = \alpha_0 \cdot A$ und $d\mathfrak{A} = d\alpha_0 \cdot A + \alpha_0 \cdot dA$ (siehe Abb. 13). Da aber $\alpha_0^2 = 1$ ist, folgt aus $\alpha_0 \cdot d\alpha_0 = 0$, daß $d\alpha_0 \perp \alpha_0$ also auch $\perp \mathfrak{A}$ steht. Es ist also:

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{d\alpha_0}{dt} \cdot A + \alpha_0 \cdot \frac{dA}{dt}$$

$$= \left[\frac{d\alpha}{dt} \cdot \mathfrak{A} \right] + \alpha_0 \cdot \frac{dA}{dt}$$

$$= i \frac{dA_x}{dt} + j \frac{dA_y}{dt} + k \frac{dA_z}{dt},$$

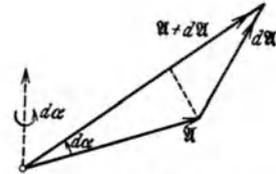


Abb. 13. Vektorveränderung.

$$\frac{d(\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{dt} = \frac{d\mathfrak{A}}{dt} \cdot \mathfrak{B} + \mathfrak{A} \cdot \frac{d\mathfrak{B}}{dt},$$

$$\left| \frac{d[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]}{dt} = \left[\frac{d\mathfrak{A}}{dt} \cdot \mathfrak{B} \right] + \left[\mathfrak{A} \cdot \frac{d\mathfrak{B}}{dt} \right]. \right.$$

IV. Differentiation und Integration zeichnerisch gegebener Kurven.

1. Differentiation.

Gegeben: $y = F(x)$.
 Gesucht: $\frac{dy}{dx} = y' = F'(x)$.

a) Tangentenverfahren.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \text{tg } \varphi = \text{Neigung der Kurve } y = F(x).$$

Pol im Abstände H [mm] wählen (siehe Abb. 14), Tangente im Aufpunkte A an die Kurve $y = F(x)$ zeichnen und Parallele dazu durch den Pol, die auf der Ordinate im Poleck die Größe von y' angibt.

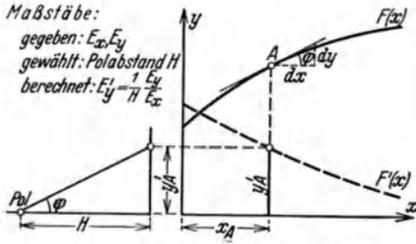


Abb. 14. Zeichnerische Differentiation einer Kurve nach dem Tangentenverfahren.

Nach Konstruktion ist $Y' = H \cdot \frac{dY}{dX} *$,

nach Definition ist $y' = \frac{dy}{dx}$

also $\frac{y'}{Y'} = \frac{dy}{dY} \cdot \frac{dX}{dx} \cdot \frac{1}{H}$

d. h. aber $E_{y'} = \frac{1}{H} \cdot \frac{E_y}{E_x}$.

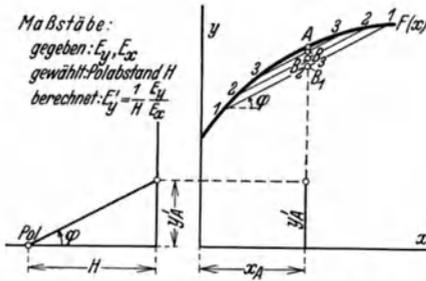


Abb. 15. Aufsuchen des Berührungspunktes einer Tangente.

Statt den Berührungspunkt A vorzugeben und dort die Tangente zu zeichnen, kann man auch umgekehrt zur gegebenen Tangentenrichtung den Berührungspunkt suchen. — Vom Pol aus wird die Tangentenrichtung durch den Polstrahl vorgegeben (siehe Abb. 15) und die parallel dazu gezogenen Sehnen ($11, 22, 33 \dots$) der Kurve $y = F(x)$ werden halbiert. Der Schnittpunkt der Halbierungskurve ($B_1 B_2 B_3 \dots$) mit der gegebenen $y = F(x)$ ist der gesuchte Berührungspunkt A der vorgegebenen Tangentenrichtung, d. h. der Ort x_A für den gegebenen Differentialquotienten y'_A .

b) Sehnenverfahren.

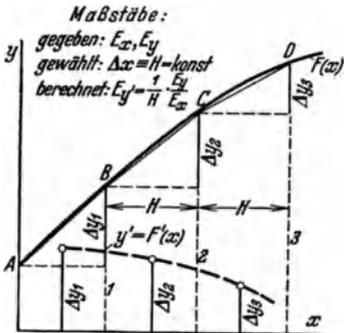


Abb. 16. Zeichnerische Differentiation einer Kurve nach dem Sehnenverfahren.

Die Kurve $y = F(x)$ wird durch ein Sehnepolygon ersetzt (siehe Abb. 16, A, B, C, D). Die Neigung der Sehnen gibt den mittleren Differentialquotienten im Bereich Δx an. Maßstäbe wie oben. Wählt man den Abstand $\Delta X = \text{const} = H$, so gibt schon die Ordinatendifferenz Δy den Wert des Differentialquotienten an.

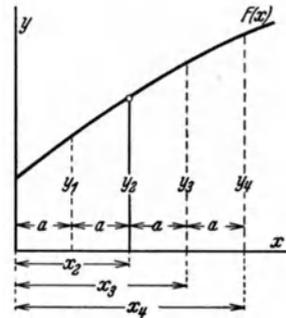


Abb. 17. Zur rechnerischen Differentiation nach dem Differenzenverfahren.

* Bei dem Bestimmen der Maßstäbe bedeuten Großbuchstaben aus der Zeichnung abzugreifende Längen in mm und die entsprechenden Kleinbuchstaben sind die Symbole für die dargestellten benannten Größen (z. B. S, s = Weg, T, t = Zeit, V, v = Geschwindigkeit, Ω, ω = Winkelgeschwindigkeit usw.). Der Maßstab wird angegeben durch E_y , d. h. Einheit der dargestellten Größe y (z. B. $E_y = 10 \text{ m/mm}$, d. h. 1 mm in der Zeichnung stellt einen Weg von 10 m dar, ebenso E_v, E_ω usw.). Bisweilen — insbesondere bei Lage- und Kraftplänen — wird der Maßstab durch Kleinbuchstaben angegeben (z. B. Längenmaßstab eines Lageplanes $l = 10 \text{ m/mm}$, Kraftmaßstab $k = 100 \text{ kg/mm}$, Momentenmaßstab $m \text{ mkg/mm}$ usw.). Diese Bezeichnung ist nicht immer empfehlenswert, da Kleinbuchstaben oft als Symbole für bestimmte Größen benützt werden, z. B. l = Längen, v, w = Geschwindigkeiten usw.

Im vorliegenden Buche ist für die Maßstabbezeichnung im Kapitel Statik die letztere Methode angewendet worden, dagegen in den Kapiteln Kinematik und Kinetik die erstere.

c) Differenzenverfahren.

Abszisse in Streifen gleicher Breite a unterteilen. Es ist (siehe Abb. 17)

$$y_3 = F(x_3) = F(x_2 + a) = y_2 + a \cdot F'_2 + \frac{a^2}{2} \cdot F''_2 + \frac{a^3}{6} \cdot F'''_2 + \frac{a^4}{24} \cdot F^{IV}_2 \dots$$

$$y_1 = F(x_1) = F(x_2 - a) = y_2 - a \cdot F'_2 + \frac{a^2}{2} \cdot F''_2 - \frac{a^3}{6} \cdot F'''_2 + \frac{a^4}{24} \cdot F^{IV}_2 \dots$$

$$y_4 = F(x_4) = F(x_2 + 2a) = y_2 + 2a \cdot F'_2 + \frac{4a^2}{2} \cdot F''_2 + \frac{8a^3}{6} \cdot F'''_2 + \frac{16a^4}{24} \cdot F^{IV}_2 \dots$$

$$y_0 = F(x_0) = F(x_2 - 2a) = y_2 - 2a \cdot F'_2 + \frac{4a^2}{2} \cdot F''_2 - \frac{8a^3}{6} \cdot F'''_2 + \frac{16a^4}{24} \cdot F^{IV}_2 \dots$$

daraus folgt für den Differentialquotienten an der Stelle 2:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = y'_2 = F'_2 = \frac{1}{12 \cdot a} \cdot [8 \cdot (y_3 - y_1) - (y_4 - y_0)].$$

Auswertung tabellarisch.

Maßstäbe: Gegeben: $E_y; E_x$.
 Gewählt: Feldbreite $\Delta X \equiv a$ [mm].
 Berechnet: $E_{F'} = \frac{E_y}{E_x}$.

Punkt	Ordinate mm	$Y_{n+1} - Y_{n-1}$ mm	$8(Y_{n+1} - Y_{n-1})$ mm	$Y_{n+2} - Y_{n-2}$ mm	[.....] mm	$F' = y' = [\dots] \frac{E_{y'}}{12 a}$
1	2	3	4	5	6 = 4 - 5	$6 \cdot \frac{E_{y'}}{12 a}$

Ist die Kurve $y = F(x)$ eine Parabel, so daß $F''' = 0^*$ ist, so genügt die erste Differenzenbildung: $y_{n+1} - y_{n-1}$ zur Bestimmung von

$$y'_n = \frac{1}{2a} \cdot [y_{n+1} - y_{n-1}].$$

Die Ordinatendifferenz kann dann sogleich aus der Zeichnung abgegriffen werden. Maßstäbe wie oben.

2. Integration.

Gegeben: $y = F(x)$.

Gesucht: $z - z_0 = \int_{x_0}^x y \cdot dx = \int_{x_0}^x F(x) \cdot dx$.

a) Ordinatenverfahren.

Gleiche Streifenbreite ΔX wählen, Ersatz von $F(x)$ durch eine Treppenkurve $ABCDEF GH$ (siehe Abb. 18) so, daß in jedem Streifen ΔX die Summe der über- und unterschießenden Beträge (in der Abbildung durch Schraffur kenntlich gemacht) gleich null ist. Die Rechteckhöhe ist dann ein Maß für den Streifeninhalt $Z = Y \cdot \Delta X$, und die gesamte Fläche unter der $y = F(x)$ -Kurve ist der Summe der Streifenordinaten verhältig. Die Summe wird entweder durch schritt-

* Z. B. ist für die ruckfreie Bewegung die zeitliche Ableitung der Beschleunigung — der Ruck — $\dot{b} = \dot{s} = 0$, also die Weg-Zeit-Kurve eine Parabel.

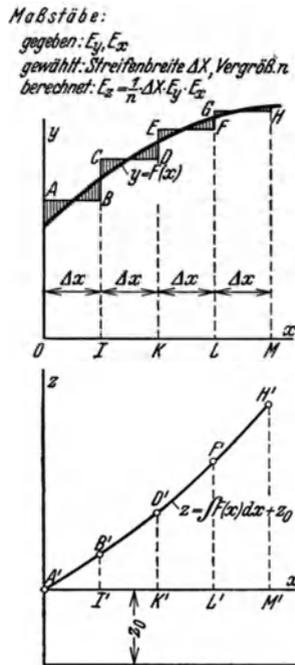


Abb. 18. Zeichnerische Integration nach dem Ordinatenverfahren.

weises Auftragen der Ordinaten (Vergrößern oder Verkleinern mit dem Multiplikationszirkel, $I'B' = n \cdot IB$, $K'D' = n \cdot KD$ usw.) oder tabellarisch bestimmt. Wird während der Rechnung die Streifenbreite von ΔX auf ΔX_1 geändert, so sind statt der Ordinaten $n \cdot Y$ die Werte $n \cdot \frac{\Delta X_1}{\Delta X} \cdot Y$ zu addieren.

Es ist: $z_1 - z_0 = \int y \cdot \Delta x = y_{mi} \cdot \Delta x$.

Es wurde aufgetragen: $Z_1 - Z_0 = n \cdot Y_{mi}$,

mithin ist $\frac{z_1 - z_0}{Z_1 - Z_0} = \frac{1}{n} \cdot \frac{y_{mi}}{Y_{mi}} \cdot \Delta x$,

d. h. also $E_z = \frac{1}{n} \cdot E_y \cdot E_x \cdot \Delta X$.

b) Sehnenverfahren.

Beliebige Streifenbreite ΔX , Ersatz der $y = F(x)$ -Kurve durch eine flächengleiche Treppenkurve (siehe Abb. 19 $ABCDEFGH$), Pol auf Abszissenachse wählen und im Ab-

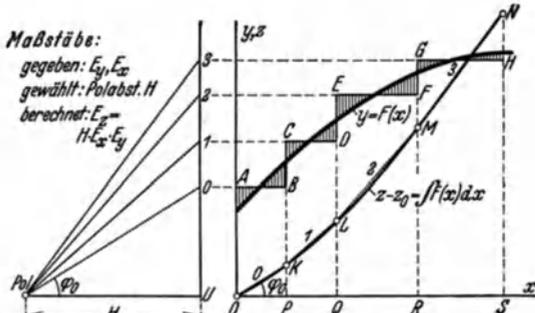


Abb. 19. Zeichnerische Integration nach dem Sehnenverfahren.

stände H die Höhen der Rechteckstreifen jedesmal von der Abszissenachse aus auftragen. ($PB = U0$, $QD = U1$, $RF = U2$, $SH = U3$). Polstrahlen ($0, 1, 2, 3$) und in den zugehörigen Streifen die Parallelen dazu ziehen. Die Schnittpunkte ($KLMN$) der Parallelen mit der jeweiligen Streifenbegrenzung sind Punkte der gesuchten Integralkurve. Die Seilstrahlen (Parallelen zu den Polstrahlen) sind Sehnen der Integralkurve.

Maßstab der Integralkurve:

Es ist: $\text{tg } \varphi_0 = \frac{Y_B}{H} = \frac{Z_B}{X_B}$, wobei $Y_B = PB$, $Z_B = PK$ und $X_B = OB$ ist.

$Z_B = \frac{1}{H} \cdot X_B \cdot Y_B$,

$z_B = x_B \cdot y_B$,

mithin $E_z = H \cdot E_y \cdot E_x$.

c) Tangentenverfahren.

Beliebige Streifenbreite ΔY wählen, Ersatz der gegebenen Kurve $y = F(x)$ durch eine flächengleiche Treppenkurve (siehe Abb. 20). Pol wählen, Polstrahlen ($0, 1, 2, 3 \dots$) zu den

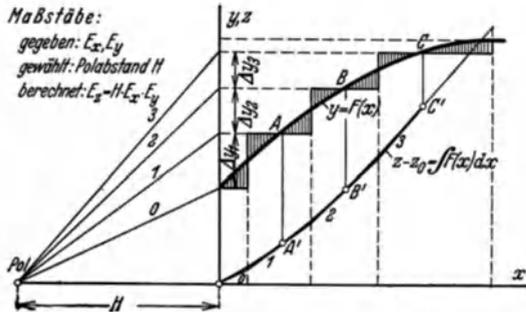


Abb. 20. Zeichnerische Integration nach dem Tangentenverfahren.

Rechteckordinaten ziehen und die Parallelen dazu in den zugehörigen Feldstreifen. Zu einem Sprung in der Treppe gehört ein Knick in der Integralkurve. Unter den Schnittpunkten ($ABC \dots$) der Ersatztreppenkurve mit der gegebenen Kurve $y = F(x)$ liegen Punkte ($A', B', C' \dots$) der Integralkurve, die sich tangential an den aus den Seilstrahlen (Parallelen zu den Polstrahlen) gebildeten Linienzug anschließt.

Maßstab der Integralkurve:

$E_z = H \cdot E_x \cdot E_y$.

d) Auszählen der Kästchen.

Kurve $y = F(x)$ auf Millimeterpapier zeichnen, beliebige Streifenbreite ΔX wählen und Streifenflächeninhalt durch Auszählen der mm^2 bestimmen. Zuerst die vollen cm^2 oder noch größere Einheiten zählen, dann die $\frac{1}{2} \text{cm}^2$ und zum Schluß die mm^2 zählen. Der n -fache Betrag des Flächeninhaltes wird am Ende jedes Streifens aufgetragen¹ und gibt einen Punkt der Integralkurve. Diese Methode führt sehr schnell zum Ziele, wenn es sich nicht so sehr um die Integralkurve als um den Endwert des Integrales handelt.

Maßstab: $E_z = \frac{1}{E_F} \cdot E_x \cdot E_y$.

e) Sofortige zweimalige Integration mit dem Seileck.

(Vgl. Statik, Bestimmen der Momentenlinien S. 33.)

Beliebige Streifenbreite ΔX wählen, Streifenschwerpunkte (siehe Abb. 21) angeben, Streifeninhalt $Z = Y \cdot \Delta X$ berechnen, und im Flächeneck (entspricht dem Kräfteck der Statik) als Längen unter Vermittlung des Maßstabes $E_F \text{ mm}^2/\text{mm}^2$ aneinanderreihen ($Z_1 = 01, Z_2 = 12, Z_3 = 23, Z_4 = 34, Z_5 = 45, Z_6 = 56$, Vorzeichen des Flächeninhaltes beachten, Fläche $\pm Y \cdot \Delta X = \pm Z$ geht im Flächeneck nach oben unten).

Pol wählen, Polstrahlen und parallel dazu die Seilstrahlen bis zum Schnitt mit der jeweiligen Streifenschwerlinie ziehen. Das so entstandene Seileck ($ABCDEF$) ist die Einhüllende der gesuchten Integralkurve. Schnittpunkte der Feldbegrenzung mit dem Seileck sind Punkte der Integralkurve ($OGHIKLM$, Beweis siehe S. 6).

Beachten der ersten Integrationskonstanten: Im Flächeneck

wird die positive Integrationskonstante $\pm Z_0$ vom Anfangspunkt des Flächenecks nach unten abgetragen und mit dem Pol verbunden (Seilstrahl O'). Die Ordinaten zwischen der Seilkurve und der Parallelen zum soeben gezogenen Seilstrahl O' sind die Integralwerte $u - u_0 = \iint F(x) \cdot dx \cdot dx + z_0 \cdot x$ (siehe Abb. 21 b u. c) oder: Pol bei positiver erster Integrationskonstante $\pm Z_0$ nach oben verschieben. Polstrahlen von diesem Pol (in der Abb. 21 d Pol 2) und parallel dazu die Seilstrahlen ziehen. Die Ordinaten zwischen der Seilkurve und der horizontalen x -Achse geben den Wert des Integrales an (siehe Abb. 21e).

Maßstäbe: erste Integration (Flächeneck) $E_z = E_F \cdot E_x \cdot E_y$,

zweite Integration (Seileck) $E_u = H \cdot E_z \cdot E_x = H \cdot E_F \cdot E_x^2 \cdot E_y$.

¹ Wobei $n \equiv E_F [\text{mm}^2/\text{mm}^2]$ der auf diese Weise gewählte Flächenmaßstab ist.

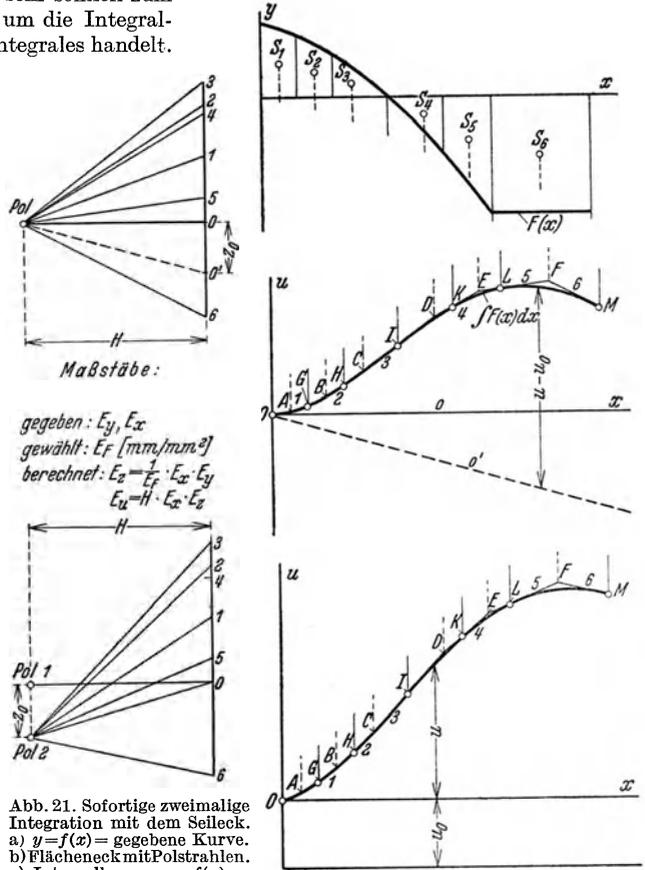


Abb. 21. Sofortige zweimalige Integration mit dem Seileck. a) $y=f(x)$ = gegebene Kurve. b) Flächeneck mit Polstrahlen. c) Integralkurve $u = f(x)$. Die erste Integrationskonstante liefert eine schräge Nulllinie. d) und e) Flächeneck und Integralkurve mit horizontaler Nulllinie.

B. Statik.

Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte und Momente. Der Körper, an dem die Kräfte wirken, befindet sich in Ruhe oder gleichförmiger Bewegung. Es werden Beziehungen zwischen den Kräften und Momenten aufgestellt.

I. Zusammensetzen von Kräften (resultierende Kraft).

Vektorielle (geometrische) Addition.

Kräfte in der Ebene:

- an einem Punkt;
- parallele Kräfte (Schwerpunkt);
- beliebig verteilte Kräfte.

Kräfte im Raume:

- an einem Punkte;
- parallele Kräfte;
- beliebig verteilte Kräfte.

1. Kräfte in der Ebene.

a) Allgemeines.

Zeichnung.

Kräfte im Krafteck in beliebiger Reihenfolge, aber mit konst. Umfassungssinn aneinander reihen.

Größe: Länge der Resultierenden im Krafteck.

Richtung: Schräglage der Resultierenden im Krafteck.

Sinn: Vom Anfangspunkt zum Endpunkt des Kraftecks.

Lage: Schnittpunkt der äußersten (erster und letzter) Seilstrahlen.

Rechnung.

Koordinatenkreuz wählen, Kräfte in X - und Y -Komponente zerlegen.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2},$$

$$R_x = \sum_1^n (P_i \cdot \cos \alpha_i) = \sum_1^n X_i,$$

$$R_y = \sum_1^n (P_i \cdot \cos \beta_i)$$

$$= \sum_1^n (P_i \cdot \sin \alpha_i) = \sum_1^n Y_i,$$

$$\cos \alpha_r = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \beta_r = \sin \alpha_r = \frac{R_y}{R}.$$

Vorzeichen der Komponenten.

Entfernung vom Koordinatenursprung O in Richtung des Lotes auf die resultierende Kraft R

$$r = \frac{M_0}{R} = \frac{\sum_1^n (x Y - y X)}{R},$$

in Richtung der x -Achse

$$x_r = + \frac{M_0}{R_y},$$

in Richtung der y -Achse

$$y_r = - \frac{M_0}{R_x}.$$

b) Kräfte an einem Punkt.

Zeichnung.

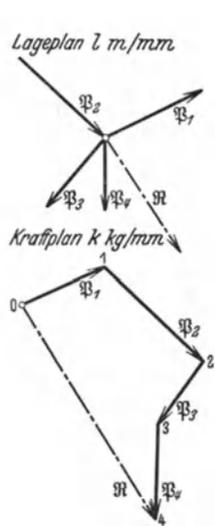


Abb. 22. Resultierende aus Einzelkräften an einem Punkt.

Kräfte $P_1 \dots P_n$ nach Größe und Richtung in beliebiger Reihenfolge aber mit stetigem Umfahrungssinn aneinander reihen (siehe Abb. 22). Verbindungslinie vom Anfang O zum Endpunkt n des Kräftecks gibt die Resultierende $R = \sum_1^n P_i$ nach Größe ¹ und Richtung.

Rechnung.

Koordinatenkreuz wählen (siehe Abb. 23).

Ursprung O = Schnittpunkt der Kräfte, x =Achse in einer Krafrichtung, y =Achse \perp dazu.

Kraftgleichungen in Tabellenform aufstellen.

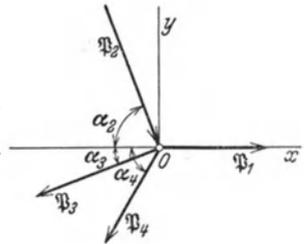


Abb. 23. Kräfte an einem Punkt. Lageplan für die rechnerische Behandlung.

$X = P \cdot \cos \alpha$	$Y = P \cdot \cos \beta^*$ $= P \cdot \sin \alpha$
kg	kg
$+ P_1$	0
$+ P_2 \cos \alpha_2$	$- P_2 \sin \alpha_2$
$- P_3 \cos \alpha_3$	$- P_3 \sin \alpha_3$
$- P_4 \cos \alpha_4$	$- P_4 \sin \alpha_4$
$\Sigma X = R_x$	$\Sigma Y = R_y$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2},$$

$$\cos \alpha_r = \frac{R_x}{R}.$$

c) Parallele Kräfte (Schwerpunkt).

Zeichnung.

Kräfteck $P_1 \dots P_n$ zeichnen (siehe Abb. 24), Pol O wählen (etwa so, daß die äußersten

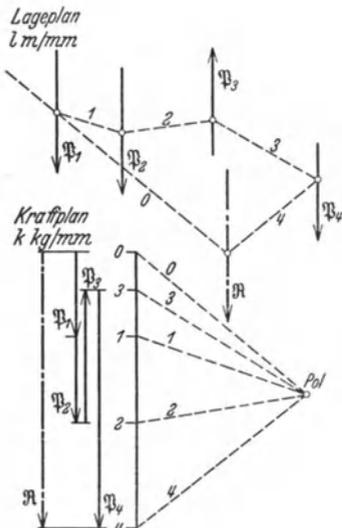


Abb. 24. Resultierende aus parallelen Kräften.

Rechnung.

Koordinatenkreuz:

Ursprung O auf einer der äußersten Kräfte wählen. (Die Hebelarme haben dann alle das gleiche Vorzeichen, Fehlerverhütung!)

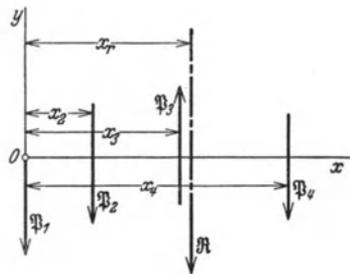


Abb. 25. Parallele Kräfte. Lageplan für die rechnerische Behandlung.

Eine Achse parallel, die andere senkrecht zur Krafrichtung legen (siehe Abb. 25). Kraft- und Momentengleichungen in Tabellenform aufstellen.

* Es ist stets der spitze Winkel gegen die Achse zu nehmen. Der Quadrant wird durch das Vorzeichen der Komponenten beachtet.

Polstrahlen einen Winkel von 90° einschließen, dies ergibt keine schleifenden Schnitte im Lageplan), Polstrahlen 0, 1, 2 usw. ziehen und parallel dazu von beliebigem Anfangspunkt aus die Seilstrahlen 0, 1, 2 usw. im Lageplan. Polstrahlen, die im Krafteck eine Kraft begrenzen, schneiden sich auf der Kraftlinie im Lageplan, oder mit anderen Worten: einem Feld im Kraftplan entspricht ein Knotenpunkt im Lageplan (die Pol- und Seilstrahlen stellen Kräfte dar). Durch den Schnittpunkt des ersten und letzten Seilstrahles geht die Resultierende.

P	x	xP
kg	m	mkg
$-P_1$	0	0
$-P_2$	x_2	$-x_2 P_2$
$+P_3$	x_3	$+x_3 P_3$
$-P_4$	x_4	$-x_4 P_4$
$\Sigma P = R$	-	$\Sigma x \cdot P = x_r \cdot R$

$$x_r = \frac{\Sigma(x \cdot P)}{R}$$

d) Beliebige verteilte Kräfte.

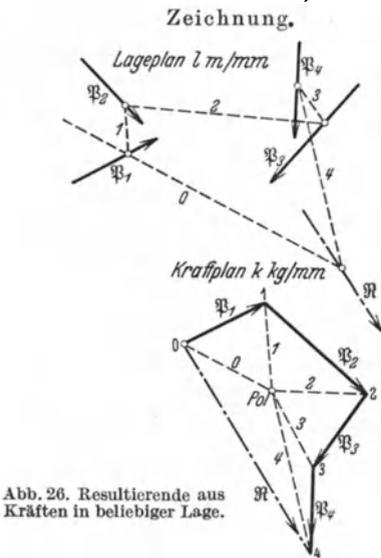


Abb. 26. Resultierende aus Kräften in beliebiger Lage.

Kraftplan: $R = \sum_1^n P_i$, Pol, Polstrahlen (siehe Abb. 26).

Lageplan: Seilstrahlen, der Schnittpunkt des ersten und letzten Seilstrahles ist ein Punkt der Angriffsgeraden der Resultierenden.

Sind nur 2 oder 3 Kräfte zu einer Resultierenden zu vereinen und geben

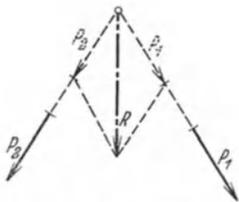


Abb. 28. Resultierende aus zwei Kräften.

Rechnung.



Abb. 27. Beliebige verteilte Kräfte. Lageplan für die rechnerische Behandlung.

Koordinatenkreuz:

Ursprung auf einer Kräfte- richtung, gegebenenfalls im Schnittpunkt zweier Kräfte wählen (siehe Abb. 27).

Kraft- und Momentengleichung in Tabellenform aufstellen.

$X = P \cos \alpha$	y	$y X$	$Y = P \sin \alpha$	x	$x Y$
kg	m	kg m	kg	m	kg m
$+P_1 \cos \alpha_1$	0	-	$+P_1 \sin \alpha_1$	0	0
$+P_2 \cos \alpha_2$	$+y_2$	$+y_2 P_2 \cos \alpha_2$	$-P_2 \sin \alpha_2$	$+x_2$	$-x_2 P_2 \sin \alpha_2$
$-P_3 \cos \alpha_3$	$-y_3$	$+y_3 P_3 \cos \alpha_3$	$-P_3 \sin \alpha_3$	$+x_3$	$-x_3 P_3 \sin \alpha_3$
$+P_4 \cos \alpha_4$	$+y_4$	$+y_4 P_4 \cos \alpha_4$	$-P_4 \sin \alpha_4$	$+x_4$	$-x_4 P_4 \sin \alpha_4$
$\Sigma X = R_x$	-	$\Sigma y X$	$\Sigma Y = R_y$	-	$\Sigma x Y$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2},$$

$$\cos \alpha_r = \frac{R_x}{R},$$

die Kräfte gute Schnittpunkte, so führt die Zusammensetzung im Lageplan nach dem Parallelogrammgesetz schneller zum Ziel (siehe Abb. 28).

$$r = \frac{\sum x Y - \sum y X}{R},$$

oder

$$x_r = + \frac{\sum x Y - \sum y X}{R_y},$$

oder

$$y_r = - \frac{\sum x Y - \sum y X}{R_x}.$$

2. Kräfte im Raum.

a) Allgemeines.

Zeichnung.

Räumliches Bild auf zwei zueinander senkrechte Ebenen projizieren und dann wie ebenes Problem behandeln. Aus den Kräfteecken in den Projektionsebenen erhält man die Projektionen der Resultierenden und bestimmt daraus deren wahre Größe (siehe S. 3/4).

Rechnung.

Koordinatenkreuz wählen, Kräfte in x, y, z -Richtung zerlegen.

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

$$R_{\frac{x}{y}} = \sum_1^n P_i \cdot \cos \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix} = \sum_1^n \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix}$$

$$\cos \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \beta_r \\ \gamma_r \end{pmatrix} = \frac{R_{x,y,z}}{R}.$$

Nur in Ausnahmefällen erhält man eine resultierende Kraft allein. Meistens führt die Zusammenstellung auf:

- α) eine Kraft und ein Moment in einem beliebigen Punkte, oder
- β) zwei windschiefe (sich nicht schneidende) Kräfte = Kraftkreuz, oder
- γ) einen Kraft- und einen Momentenvektor in der gleichen Geraden = Kraftschraube = Dyname = Zentralachse.

b) Kräfte an einem Punkt.

Zeichnung.

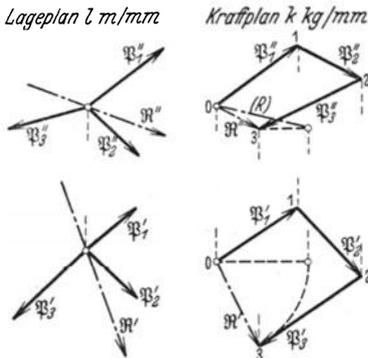


Abb. 29. Resultierende an einem Punkt aus räumlich verteilten Kräften. Aufriß und Grundriß.

Krafteck im Grundriß und Aufriß zeichnen (siehe Abb. 29), einander zugeordnete Punkte liegen senkrecht übereinander. Ergebnis: Projektion der Resultierenden im Grundriß und Aufriß. Bestimmen der wahren Größe der Resultierenden siehe S. 3/4.

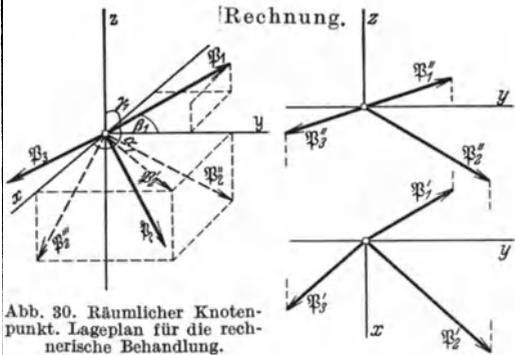


Abb. 30. Räumlicher Knotenpunkt. Lageplan für die rechnerische Behandlung.

3-achsiges Koordinatenkreuz. Rechtssystem (beim Linkssystem sind die x - und y -Achse vertauscht) (siehe Abb. 30), Kraftgleichungen in Tabellenform aufstellen.

$X = P \cdot \cos \alpha$	$Y = P \cdot \cos \beta$	$Z = P \cdot \cos \gamma$
kg	kg	kg
P_{1x}	P_{1y}	P_{1z}
P_{2x}	P_{2y}	P_{2z}
P_{3x}	P_{3y}	P_{3z}
$\sum X = R_x$	$\sum Y = R_y$	$\sum Z = R_z$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2},$$

$$\cos \alpha_r = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta_r = \frac{R_y}{R}; \quad \cos \gamma_r = \frac{R_z}{R}.$$

c) Parallele Kräfte.

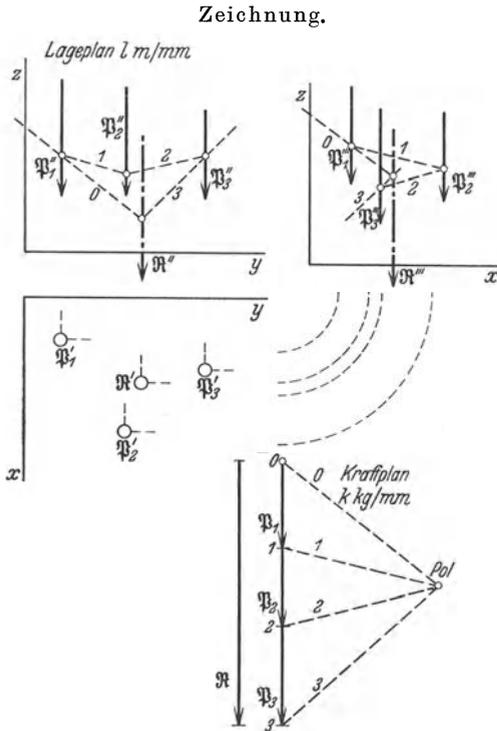


Abb. 31. Resultierende aus räumlich verteilten parallelen Kräften.

Projektion in 2 Ebenen (siehe Abb. 31) und darn wie ebenes Problem behandeln (siehe S. 13/14).

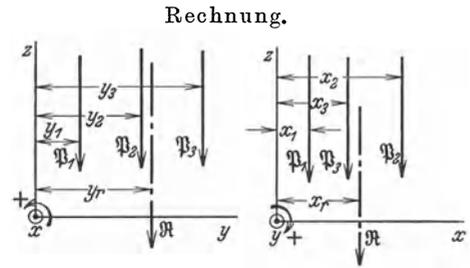


Abb. 32. Räumlich verteilte parallele Kräfte. Lageplan für die rechnerische Behandlung.

Koordinatenkreuz wählen (siehe Abb. 32), Kraft- und Momentengleichungen in Tabellenform aufstellen.

Z	x	y	$M_y = -xZ$	$M_x = +yZ$
kg	m	m	kgm	kgm
$-P_1$	x_1	y_1	$+x_1 \cdot P_1$	$-y_1 \cdot P_1$
$-P_2$	x_2	y_2	$+x_2 \cdot P_2$	$-y_2 \cdot P_2$
$-P_3$	x_3	y_3	$+x_3 \cdot P_3$	$-y_3 \cdot P_3$
ΣZ $= R_z$	-	-	$\Sigma (-xZ)$ $= M_{y_r}$	$\Sigma (+yZ)$ $= M_{x_r}$

$$x_r = -\frac{M_{y_r}}{R_z}$$

$$y_r = +\frac{M_{x_r}}{R_z}$$

d) Beliebige verteilte Kräfte.

Kraft und Moment an einem Punkt.

Kraftkreuz = zwei windschiefe Kräfte.

Kraftschraube = Dyname = Zentralachse = Kraft und Moment in derselben Geraden.

α) Kraft und Moment an einem Punkt.

Grundgedanke: Kräfte durch Parallelverschieben (Moment $\mathfrak{M} = [\alpha \cdot \beta]$ entsteht, s. S. 3) auf gegebenen Punkt 0 reduzieren. Kräfte und Momente in diesem Punkte nach S. 5 u. 15 zusammensetzen.

Zeichnung:

Größe der Projektionen der resultierenden Kraft mit Hilfe der Kräftecke in den einzelnen Projektionsebenen bestimmen, daraus die wahre Größe der resultierenden Kraft (siehe Abb. 33 und auch S. 3). Das Moment der einzelnen Kräfte um 0 in den einzelnen Projektionen ist gleich der Summe der Momente um die 3 Achsen xyz und wird wie auf S. 4/6 angegeben, ermittelt. Absolute Größe des Momentes $M = H \cdot y_{res}$, wobei $y_{res} = \sqrt{y_x^2 + y_y^2 + y_z^2}$ die absolute Größe von $\eta_x + \eta_y + \eta_z$ ist. Polabstand H in allen Projektionen = const.

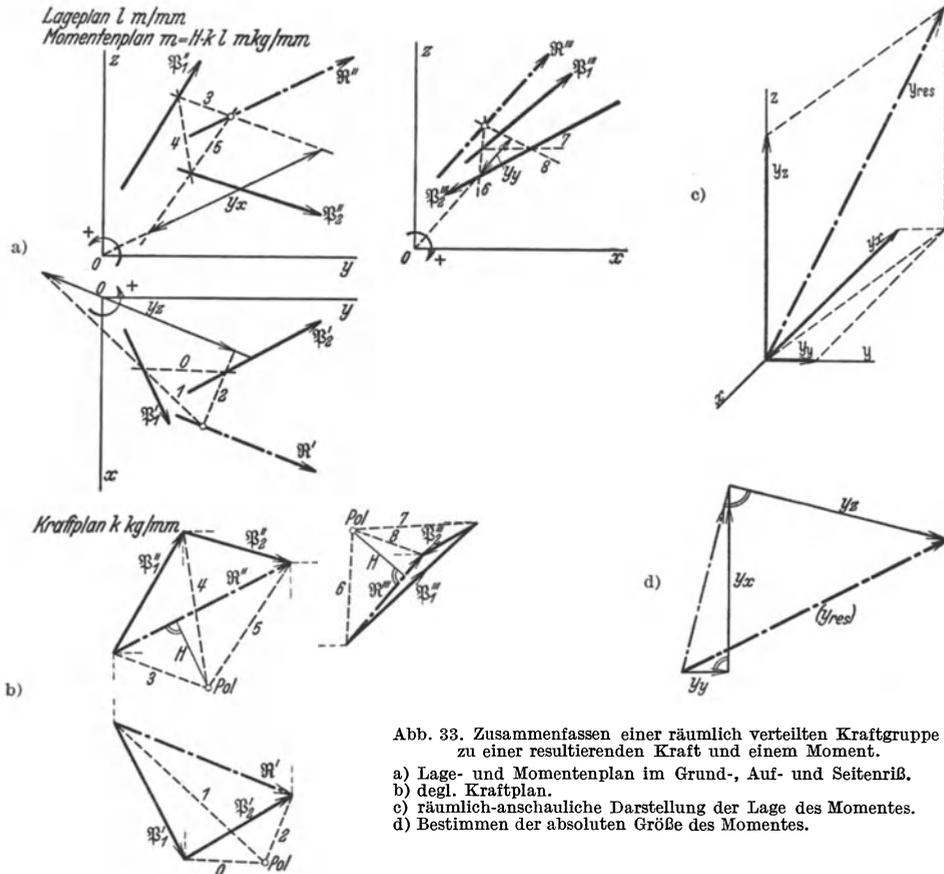


Abb. 33. Zusammenfassen einer räumlich verteilten Kraftgruppe zu einer resultierenden Kraft und einem Moment.

- a) Lage- und Momentenplan im Grund-, Auf- und Seitenriß.
 b) degl. Kraftplan.
 c) räumlich-anschauliche Darstellung der Lage des Momentes.
 d) Bestimmen der absoluten Größe des Momentes.

Rechnung: Größe, Richtung und Sinn der resultierenden Kraft in O (siehe S. 15)

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}, \quad \cos \begin{pmatrix} \alpha_r \\ \beta_r \\ \gamma_r \end{pmatrix} = \frac{R_{x, y, z}}{R}.$$

Größe, Richtung und Sinn des resultierenden Momentes um O (siehe S. 4/6):

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}, \quad \cos \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \\ \psi \end{pmatrix} = \frac{M_{x, y, z}}{M}.$$

δ = Winkel zwischen \mathfrak{R} und \mathfrak{M} aus:

$$\begin{aligned} \cos \delta &= \cos \alpha \cdot \cos \varphi + \cos \beta \cdot \cos \chi + \cos \gamma \cdot \cos \psi * \\ &= \frac{R_x \cdot M_x + R_y \cdot M_y + R_z \cdot M_z}{R \cdot M}. \end{aligned}$$

β) Zwei windschiefe Kräfte = Kraftkreuz.

Grundgedanke: Das für den Ursprung O nach dem vorigen Abschnitt bestimmte Moment \mathfrak{M}_0 wird in drei Kräftepaare, die in zwei Ebenen liegen, aufgeteilt. Alsdann werden die Kräfte im Ursprung O mit der nach vorigem Abschnitt ermittelten Resultierenden \mathfrak{R} in O zu einer neuen Resultierenden und die übrigen Kräfte zu einer zweiten Resultierenden zusammengefaßt.

* Siehe S. 2, Anm. 2.

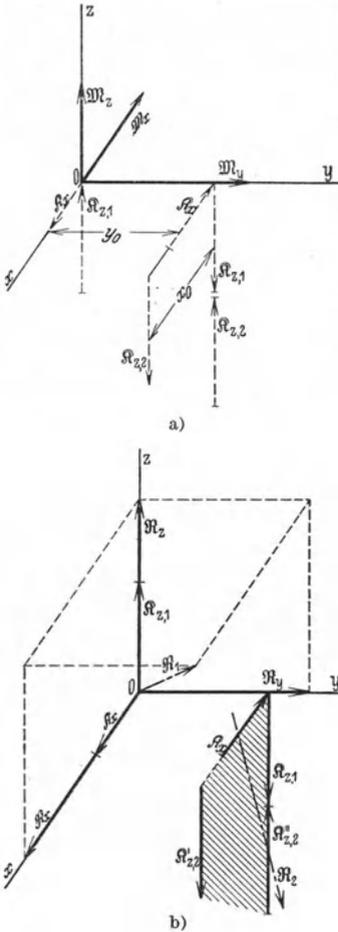


Abb. 34. Zusammenfassen einer räumlichen Kräftegruppe zu einem Kraftkreuz $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$.

- a) Ersatz der Momentenkomponenten durch Kräftepaare parallel zu den drei Ebenen.
- b) Zusammenfassen der Kräfte zu zwei windschiefen Kräften \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 .

Zeichnung:

Die bekannten Momente M_{xyz} (siehe vorigen Abschnitt) werden durch die Kräftepaare (siehe Abb. 34a)

$$M_x = y_0 \cdot K_{z1},$$

$$M_y = x_0 \cdot K_{z2},$$

$$M_z = y_0 \cdot K_x.$$

ersetzt, wobei x_0 und y_0 beliebig gewählt werden (selbstverständlich kann der Ersatz auch durch Kräftepaare mit Abständen $x_0 z_0$ oder $y_0 z_0$ ausgeführt werden). Die Kräfte \mathfrak{R}_x und \mathfrak{R}_{z1} in O (siehe Abb. 34b) werden mit $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_x + \mathfrak{R}_y + \mathfrak{R}_z$ (siehe vorigen Abschnitt) zur neuen Resultierenden $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R} + \mathfrak{R}_x + \mathfrak{R}_{z1}$ und die Kräfte \mathfrak{R}_x , \mathfrak{R}_{z1} , \mathfrak{R}'_2 , \mathfrak{R}''_2 , die in einer zur xz -Ebene im Abstände y_0 parallelen Ebene liegen, werden dort zur Resultierenden $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}'_2 + \mathfrak{R}_x + \mathfrak{R}_{z1} + \mathfrak{R}''_2$ zusammengefaßt. Ergebnis: 2 windschiefe (sich nicht schneidende) Kräfte \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 .

Rechnung: Das bekannte Moment \mathfrak{M}_0 wird ersetzt durch ein Kräftepaar $\mathfrak{M} = [\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{R}]$, wobei die eine Kraft \mathfrak{R} durch O hindurchgeht. Die Vektoren \mathfrak{f} , \mathfrak{R} und \mathfrak{M} stehen aufeinander senkrecht, mithin gelten die 3 Gleichungen (siehe S. 5)

$$\cos \widehat{\mathfrak{f} \mathfrak{M}} = 0 = K_x \cdot M_x + K_y \cdot M_y + K_z \cdot M_z, \quad (1)$$

$$\cos \widehat{\mathfrak{f} \mathfrak{R}} = 0 = x \cdot M_x + y \cdot M_y + z \cdot M_z, \quad (2)$$

$$\cos \widehat{\mathfrak{R}} = 0 = x \cdot K_x + y \cdot K_y + z \cdot K_z. \quad (3)$$

Ferner bestehen noch die Gleichungen:

$$K^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2, \quad (4)$$

$$k^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (5)$$

$$M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2. \quad (6)$$

Bekannt sind: $M_x \ M_y \ M_z \ M$,

unbekannt sind: $K_x \ K_y \ K_z \ K$

und $x \ y \ z \ k$,

davon sind 2 Unbekannte willkürlich wählbar (vgl. z. B. oben x_0 und y_0), so daß schließlich 6 Gleichungen für 6 Unbekannte bleiben.

Ergebnis: $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R} + \mathfrak{R}$ in O und $\mathfrak{R} \equiv \mathfrak{R}_2$ im Abstände $\mathfrak{f} = \mathfrak{r} + \mathfrak{y} + \mathfrak{z}$ von O .

γ) Kraft- und Momentenvektor in der gleichen Geraden.

Kraftschraube = Dyname = Zentralachse.

Grundgedanke: Momentenvektor \mathfrak{M} (siehe S. 16) in zwei Komponenten zerlegen, und zwar in Richtung der resultierenden Kraft \mathfrak{R} und senkrecht dazu. Der letztere Vektor verschiebt die Kraft \mathfrak{R} parallel zu sich.

Zeichnung:

Aus dem Aufriß ($\mathfrak{M}' = O'A'$; $\mathfrak{R}' = O'B'$ siehe Abb. 35) und dem Grundriß ($\mathfrak{M}'' = O''A''$; $\mathfrak{R}'' = O''B''$) wird die wahre Größe des resultierenden Momentes $|\mathfrak{M}| = OA$ und der resultierenden Kraft $|\mathfrak{R}| = OB$ bestimmt, ebenso die wahre Größe der Strecke AB . Das Dreieck ABO wird dann aus den bekannten Strecken OA , OB und AB in wahrer Größe gezeichnet. Das Lot von A auf OB gibt die Größe der in der Kraftrichtung liegenden Momentenkomponente

$\mathfrak{M}_1 = OC$ und in $CA = \mathfrak{M}_2$ die dazu senkrechte Komponente an. Punkt C wird in die Projektionen übertragen. Die Punkte C' und C'' teilen $O'B'$ und $O''B''$ in demselben Verhältnis wie C die Strecke OB teilt. $A'C' = \mathfrak{M}'_2 = \mathfrak{M}'_{2z} + \mathfrak{M}'_{2y}$ und $A''C'' = \mathfrak{M}''_2 = \mathfrak{M}''_{2x} + \mathfrak{M}''_{2y}$. \mathfrak{M}'_{2z} verschiebt \mathfrak{R}' im Grundriß um $r'' = \mathfrak{M}'_{2z} : R''$ und \mathfrak{M}'_{2y} verschiebt \mathfrak{R}' im Aufriß um $r' = \mathfrak{M}'_{2y} : R'$. Ergebnis: \mathfrak{R}'_1 und \mathfrak{M}'_1 bzw. \mathfrak{R}''_1 und \mathfrak{M}''_1 liegen in derselben Geraden und sind die Projektionen der Kraftschraube¹. (Kontrolle im Seitenriß: \mathfrak{M}'_{2y} verschiebt \mathfrak{R}' um $r''' = \mathfrak{M}'_{2y} : R'''$. Einander zugeordnete Punkte $D'D''D'''$, $E'E''E'''$ müssen auf den Projektionslinien liegen.)

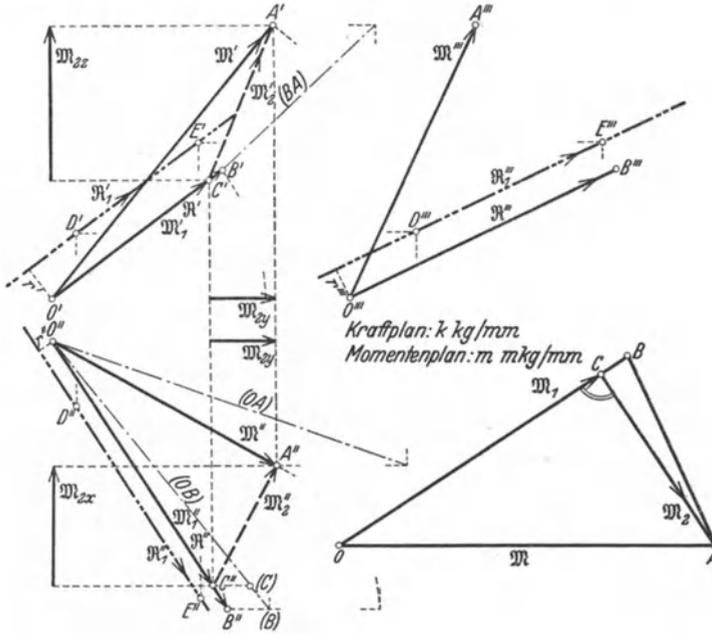


Abb. 35. Zusammenfassen einer räumlichen Kräftegruppe zu einer Kraftschraube.

- a) Kraft- und Momentenplan im Grund-, Auf- und Seitenriß.
- b) Zerlegung des Momentes in zwei aufeinander senkrecht stehende Komponenten, von denen die eine in der Krafrichtung OB liegt.

Rechnung: Es werden die Momentengleichungen um einen — noch gesuchten — Punkt $A(x_0 y_0 z_0)$ aufgestellt.

$$M_x = \sum \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ Y & Z \end{vmatrix} = \sum \begin{vmatrix} y - y_0 & z - z_0 \\ Y & Z \end{vmatrix} = \sum (y - y_0) \cdot Z - \sum (z - z_0) \cdot Y,$$

$$M_y = \sum \begin{vmatrix} \zeta & \xi \\ Z & X \end{vmatrix} = \sum \begin{vmatrix} z - z_0 & x - x_0 \\ Z & X \end{vmatrix} = \sum (z - z_0) \cdot X - \sum (x - x_0) \cdot Z,$$

$$M_z = \sum \begin{vmatrix} \xi & \eta \\ X & Y \end{vmatrix} = \sum \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ X & Y \end{vmatrix} = \sum (x - x_0) \cdot Y - \sum (y - y_0) \cdot X,$$

wobei xyz die Entfernungen vom Koordinatenursprung O und $\xi\eta\zeta$ die Entfernungen der Kräfte vom noch gesuchten Punkte A sind.

Der Momentenvektor soll die gleiche Richtung wie die resultierende Kraft haben. Es ist also

$$\cos \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \cos \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \\ \psi \end{pmatrix} = \frac{R_{xyz}}{R} = \frac{M_{xyz}}{M},$$

daraus folgt:

$$R_x : R_y = M_x : M_y; \quad R_x : R_z = M_x : M_z.$$

¹ Der Momentenvektor \mathfrak{M}_1 darf parallel verschoben werden (siehe S. 2).

Eine Koordinate der Zentralachse ist wählbar. Wählt man z. B. $z_0 = 0$, so erhält man den Durchstoßungspunkt der Zentralachse mit der xy -Ebene. Die beiden gesuchten Koordinaten x_0, y_0 des Durchstoßungspunktes werden aus den letzten beiden Gleichungen (x_0, y_0 sind im \bar{M}_{xyz} enthalten) berechnet.

II. Zerlegen einer Kraft.

Kräfte in der Ebene:

- in zwei ungleiche Richtungen;
- in zwei parallele Richtungen;
- in drei gegebene Richtungen;
- in eine gegebene Richtung und eine Kraft durch einen gegebenen Punkt.

Kräfte im Raume:

- in zwei Richtungen;
- in drei Richtungen an einem Punkt (Dreibein);
- in drei parallele Richtungen;
- in sechs Richtungen.

1. Kräfte in der Ebene.

a) Zwei ungleiche Richtungen.

Grundbedingung: Die Kraft muß sich mit den beiden Richtungen in einem Punkte schneiden (siehe S. 28).

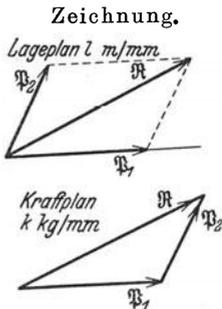


Abb. 36. Zeichnerisches Zerlegen einer Kraft R in zwei Komponenten ungleicher Richtung.

Im Lageplan (siehe Abb. 36): R in wahrer Größe im Schnittpunkt mit den gegebenen Richtungen antragen. Parallelen durch den Endpunkt von R zu den beiden Richtungen schneiden auf diesen die Größe der gesuchten Komponenten P_1 und P_2 ab.

Oder im Kraftplan (siehe Abb. 36): Durch die beiden Endpunkte von R werden Parallelen zu den gegebenen Kraftrichtungen gezogen, deren Schnittpunkt die Länge der Komponenten $P_1 + P_2 = R$ angibt.

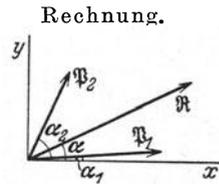


Abb. 37. Lageplan für die rechnerische Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten.

Kraftgleichungen für die x - und y -Richtung aufstellen (siehe Abb. 37).

$$P_1 \cdot \cos \alpha_1 + P_2 \cdot \cos \alpha_2 = R \cdot \cos \alpha, \quad (1)$$

$$P_1 \cdot \sin \alpha_1 + P_2 \cdot \sin \alpha_2 = R \cdot \sin \alpha, \quad (2)$$

$$\text{daraus } P_1 = R \cdot \frac{\begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \alpha_2 \\ \sin \alpha & \sin \alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 \\ \sin \alpha_1 & \sin \alpha_2 \end{vmatrix}}.$$

$$\text{und } P_2 = R \cdot \frac{\begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha \\ \sin \alpha_1 & \sin \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 \\ \sin \alpha_1 & \sin \alpha_2 \end{vmatrix}}.$$

b) Zwei parallele Richtungen.

Zeichnung.

Kraftplan (siehe Abb. 38): R, P_1, P_2 parallel zu den Strahlen $0, I$.

Lageplan: Seilstrahlen $0, I$ parallel zu den

Rechnung.

Aus dem Momentengleichgewicht um einen Punkt auf der einen Krafttrichtung folgt jeweils (siehe Abb. 39):

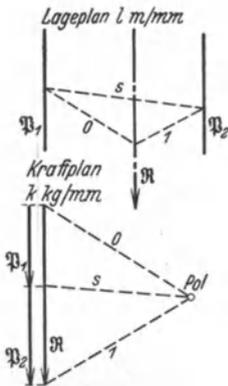


Abb. 38. Zeichnerisches Zerlegen einer Kraft R in zwei parallele Komponenten.

Summe beider Kräfte gleich der Richtung der gegebenen Kraft R .

gleichnamigen Polstrahlen durch einen beliebigen Punkt auf R . Schlußlinie s des Seilecks = Verbindungslinie der Schnittpunkte der Seilstrahlen mit den Komponentenrichtungen.

Parallele dazu im Kräfteck durch den Pol ziehen. Zwischen 0 und s liegt P_1
 1 „ „ „ P_2

Kraftsinn aus $P_1 + P_2 = R$, d. h. Umfassungssinn der

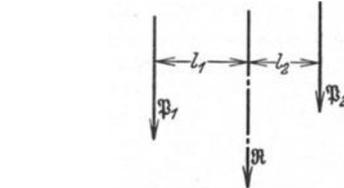


Abb. 39. Lageplan für die rechnerische Zerlegung einer Kraft in zwei parallele Komponenten.

$$P_1 = \frac{R \cdot l_2}{l_1 + l_2},$$

$$P_2 = \frac{R \cdot l_1}{l_1 + l_2}.$$

Kontrolle: $P_1 + P_2 = R$.

c) Drei gegebene Richtungen.

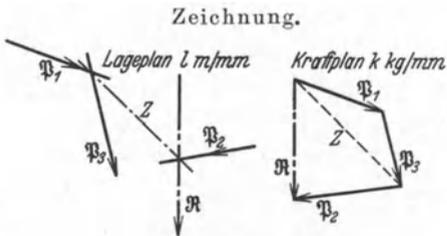


Abb. 40. Zeichnerisches Zerlegen einer Kraft R in drei Komponenten mit Hilfe der Zwischenresultierenden.

Lösung mit Hilfe der Zwischenresultierenden: Je zwei beliebige Krafrichtungen zum Schnitt bringen, z. B. P_1 und P_3 und R und P_2 (siehe Abb. 40). Verbindungslinie der Schnittpunkte ist die Zwischenresultierende Z . Im Kräfteck (nach S. 20) zerlegen R in P_2 und Z , und Z in P_1 und P_3 . Umfassungssinn entgegen dem von R entsprechend $R = P_1 + P_2 + P_3$.

Lösung mit Hilfe des Seilecks: Zu den Polstrahlen $0, 1$ im Kräfteck werden parallel im Lageplan die Seilstrahlen $0, 1$ gezogen

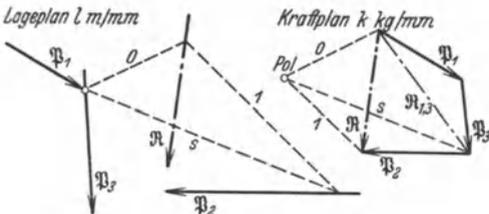


Abb. 42. Zeichnerisches zerlegen einer Kraft R in drei Komponenten mit Hilfe des Seilecks.

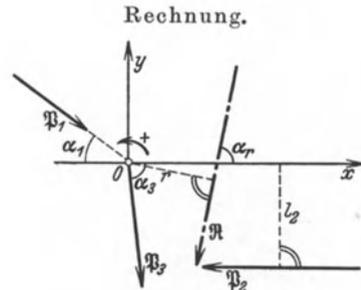


Abb. 41. Lageplan für die rechnerische Zerlegung einer Kraft R in drei Komponenten.

Rechtwinkliges Achsenkreuz Oxy wählen (siehe Abb. 41); gegebenenfalls Koordinatenursprung in den Schnittpunkt zweier Kräfte und eine Achse in Richtung einer Kraft legen.

Allgemein:

$$R \cdot \cos \alpha_r = \sum (P \cdot \cos \alpha),$$

$$R \cdot \sin \alpha_r = \sum (P \cdot \sin \alpha),$$

$$r \cdot R = \sum (l \cdot P).$$

Beispiel der Abb. 50.

$$-R \cdot \cos \alpha_r = P_1 \cdot \cos \alpha_1 - P_2 + P_3 \cdot \cos \alpha_3,$$

$$-R \cdot \sin \alpha_r = -P_1 \cdot \sin \alpha_1 - P_3 \cdot \sin \alpha_3,$$

$$-r \cdot R = -l_2 \cdot P_2.$$

Aus diesen 3 Gleichungen lassen sich die 3 Unbekannten $P_1 P_2 P_3$ ermitteln. Erhält man für eine Kraft einen negativen Wert, so

(siehe Abb. 42), und zwar mit dem Seilstrahl 0 im Schnittpunkt zweier Krafrichtungen (z. B. \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_3) beginnend. Schlußlinie des Seilecks ist die Verbindungslinie des Schnittpunktes der beiden Kräfte (im Beispiel \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_3) mit dem Schnitt des Seilstrahles 1 und der Kraft \mathfrak{P}_2 . Die Parallele zur Schlußlinie s schneidet im Krafteck auf der bekannten Krafrichtung \mathfrak{P}_2 deren Größe ab. \mathfrak{P}_2 liegt im Krafteck zwischen den Polstrahlen 1 und s (die Seilstrahlen 1 und s schneiden sich im Lageplan auf \mathfrak{P}_2). Zwischen 0 und s liegt die Resultierende $\mathfrak{R}_{13} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_3$, die in diese beiden Krafrichtungen zerlegt wird.

besagt dies, daß der Richtungssinn dieser Kraft dem angenommenen entgegengesetzt ist.

d) in eine gegebene Richtung und eine Kraft durch einen gegebenen Punkt.

Zeichnung: α) Alle 3 Kräfte müssen durch einen Punkt O gehen (siehe S. 28) = Schnittpunkt von \mathfrak{P} und \mathfrak{R} . Damit ist die Richtung der durch A hindurchgehenden Kraft \mathfrak{A} gegeben (siehe Abb. 43a).

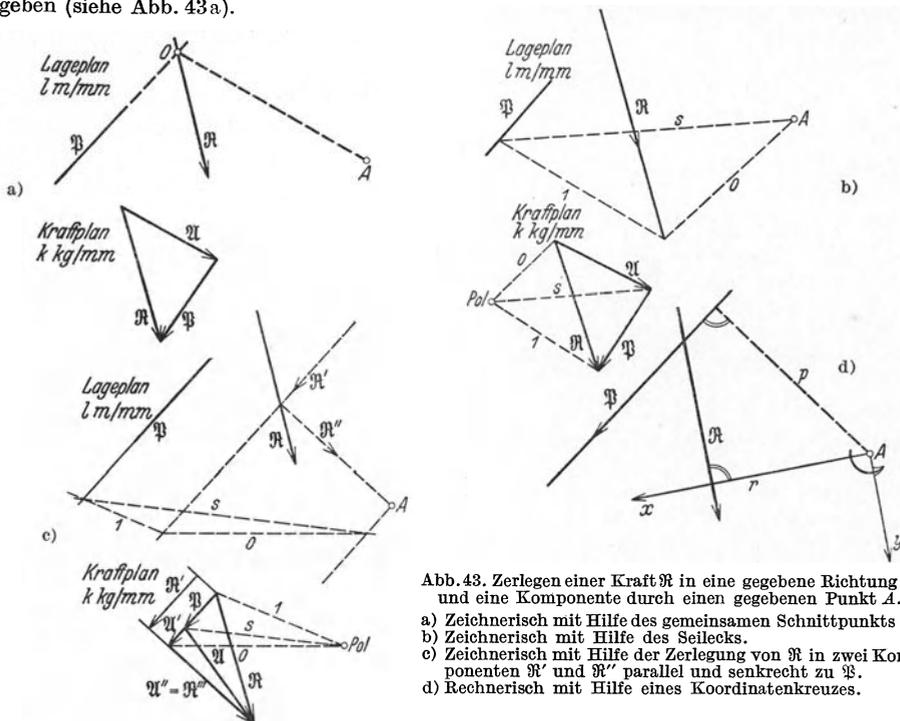


Abb. 43. Zerlegen einer Kraft \mathfrak{R} in eine gegebene Richtung \mathfrak{P} und eine Komponente durch einen gegebenen Punkt A .
 a) Zeichnerisch mit Hilfe des gemeinsamen Schnittpunktes O .
 b) Zeichnerisch mit Hilfe des Seilecks.
 c) Zeichnerisch mit Hilfe der Zerlegung von \mathfrak{R} in zwei Komponenten \mathfrak{R}' und \mathfrak{R}'' parallel und senkrecht zu \mathfrak{P} .
 d) Rechnerisch mit Hilfe eines Koordinatenkreuzes.

β) Seileck im Punkte A beginnen (siehe Abb. 43 b). (Diese Konstruktion ist erforderlich, wenn der Schnittpunkt von P und R , siehe vorigen Abschnitt und Abb. 51 a, nicht mehr auf die Zeichenfläche fällt.)

Krafteck: \mathfrak{R} , Pol, Polstrahlen 0 und 1 .

Seileck: Seilstrahl 0 durch A bis zum Schnitt mit \mathfrak{R} , hierdurch den Seilstrahl 1 bis zum Schnitt mit \mathfrak{P} , die Verbindungslinie dieses Schnittpunktes mit A ist die Schlußlinie des Seilecks (siehe S. 27).

Krafteck: Schlußlinie übertragen. \mathfrak{P} liegt zwischen 1 und s in der gegebenen Richtung. \mathfrak{A} ist die Schlußlinie des Kraftecks (siehe S. 27).

γ) \mathfrak{R} in eine Komponente \mathfrak{R}' in Richtung von \mathfrak{P} und eine \mathfrak{R}'' senkrecht zu \mathfrak{P} zerlegen

(siehe Kraftplan der Abb. 43c), \mathfrak{R}' mit Hilfe des Seilecks $01s$ auf \mathfrak{P} und \mathfrak{U}' verteilen, wobei $\mathfrak{U}' \parallel \mathfrak{P}$ ist (siehe S. 20). \mathfrak{U}' und $\mathfrak{U}'' = \mathfrak{R}''$ zu \mathfrak{U} zusammenfassen.

δ) Rechnung: Koordinatenkreuz xy mit Ursprung in A , der einen Achse parallel und der anderen senkrecht zu \mathfrak{R} wählen (siehe Abb. 43d).

$$\begin{aligned} R_x &= P_x + A_x = 0 \quad (\text{weil } \mathfrak{R} \perp x\text{-Achse}), \\ R_y &= P_y + A_y, \\ r \cdot R &= p \cdot P, \quad \text{wobei } P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \text{ ist.} \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen werden A_x , A_y und P berechnet.

2. Zerlegen einer Kraft im Raume.

a) Zwei Richtungen.

Dies ist nur möglich, wenn die Kraft und die beiden gegebenen Richtungen in einer Ebene liegen. Dann liegt aber kein räumliches, sondern ein ebenes Problem vor (siehe S. 20).

b) Drei Richtungen an einem Punkt (Dreibein).

Die drei Krafrichtungen dürfen nicht in einer Ebene liegen, da in der Ebene eine Kraft an einem Punkt nur in zwei Richtungen zerlegt werden kann (siehe S. 28).

Lösungsmöglichkeiten:

- α) Projektion so, daß eine Unbekannte verschwindet;
- β) Projektion so, daß zwei Unbekannte in eine Linie fallen;
- γ) Projektion so, daß die bekannte Kraft verschwindet oder mit einer Unbekannten in eine Linie fällt (Methode des unbestimmten Maßstabes);
- δ) Korrekturverfahren nach Müller-Breslau;
- ε) Kraft zerlegen in eine Stabrichtung und Zwischenresultierende in der Ebene der beiden anderen Stäbe;
- φ) Rechnung, je eine Gleichung für die xyz -Richtung.

α) Eine Unbekannte verschwindet.

Im Riß, in dem die eine Unbekannte verschwindet (im Beispiel der Abb. 44 ist dies der Grundriß), wird \mathfrak{R} in die beiden anderen Richtungen zerlegt ($\mathfrak{R} = \mathfrak{C}'_1 + \mathfrak{C}'_3$). Krafteck auf zweite Projektionsebene (im Beispiel: Aufriß) übertragen, Richtung der Kräfte aus dem Lageplan, Größe = Länge zwischen den Loten ($00, 11, 22, 33$) des ersten Risses. Schlußlinie des Kraftecks = gesuchte dritte Kraft $23 = \mathfrak{C}''_2$.

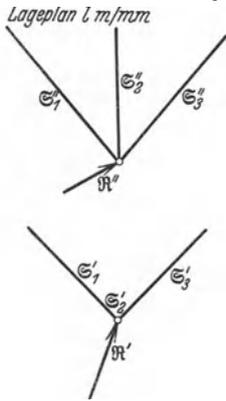


Abb. 44. Dreibein, eine Kraft erscheint in einer Projektion nur als ein Punkt.

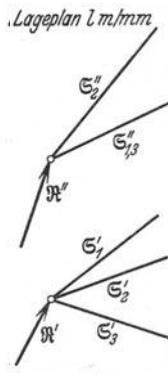
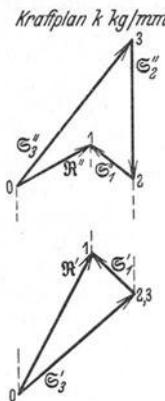
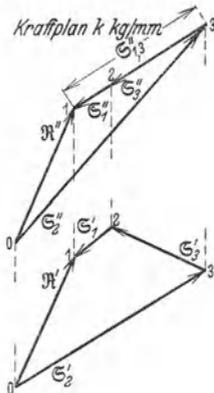


Abb. 45. Dreibein, zwei Krafrichtungen fallen in einer Projektion in eine Richtung.



β) Zwei Unbekannte fallen in eine Linie.

Im Riß mit den beiden zusammenfallenden Unbekannten beginnen (siehe Abb. 45) [Aufriß: $\mathfrak{R}'' = \mathfrak{C}''_{1,3} + \mathfrak{C}''_2$]. Krafteck in den Grundriß übertragen. Krafrichtung aus dem Lageplan, Größe = Länge zwischen den Loten aus dem Aufriß ($00, 11, 33$). An 1 und 3 die Richtungen der noch gesuchten Kräfte \mathfrak{C}'_1 und \mathfrak{C}'_3 antragen und ihren Schnittpunkt 2 in den Aufriß hinaufloten. Damit ist $\mathfrak{C}''_{1,3}$ in \mathfrak{C}'_1 und \mathfrak{C}'_3 aufgeteilt.

γ) Unbestimmter Maßstab.

Bekannte Kraft verschwindet
(im Grundriß).

Bekannte Kraft fällt in die Richtung
einer Unbekannten (siehe Abb. 55 im
Aufriß \mathcal{R}'' und \mathcal{S}_2').

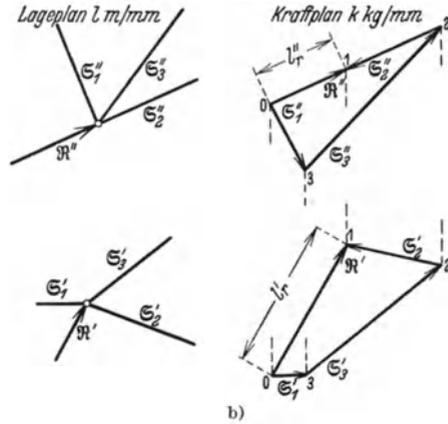
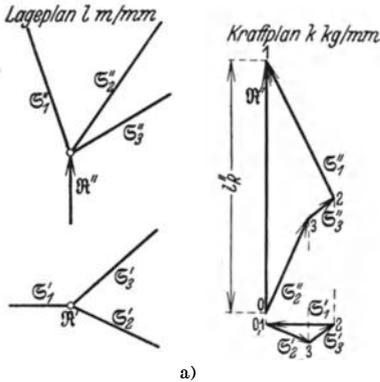


Abb. 46. Dreibein, Methode des unbestimmten Maßstabes.
a) Die bekannte Kraft erscheint in einer Projektion als Punkt.
b) Die bekannte Kraft fällt in einer Projektion mit einer Unbekannten in dieselbe Richtung.

Grundriß (siehe Abb. 46a): Dreieck von beliebiger Größe mit den Richtungen der Kräfte zeichnen (0123). Längen in den Aufriß auf die entsprechenden Kraftrichtungen hinaufloten (Linienzug 1230), Schlußlinie des Kraftecks (01) in Richtung der gegebenen Kraft. Aus deren Länge im Krafteck und ihrer gegebenen Größe wird der Maßstab bestimmt:

Im Aufriß beliebiges Dreieck 023 mit den 3 Richtungen \mathcal{S}_1' , \mathcal{S}_3' und ($\mathcal{R}'' \mathcal{S}_2'$) zeichnen (siehe Abb. 46b) und in den Grundriß hinabloten. Hierdurch werden \mathcal{R}'' und \mathcal{S}_2' gefunden. Hinaufloten des Schnittpunktes 1 von \mathcal{R}'' und \mathcal{S}_2' in den Aufriß teilt ($\mathcal{R}'' \mathcal{S}_2'$) in \mathcal{R}'' und \mathcal{S}_2' . Maßstab aus

$$k = \frac{R''}{l_{R''}} \text{ kg/mm.}$$

$$k = \frac{R''}{l_{R''}} \quad \text{oder} \quad k = \frac{R'}{l_R} \text{ kg/mm.}$$

δ) Korrekturverfahren von Müller-Breslau.

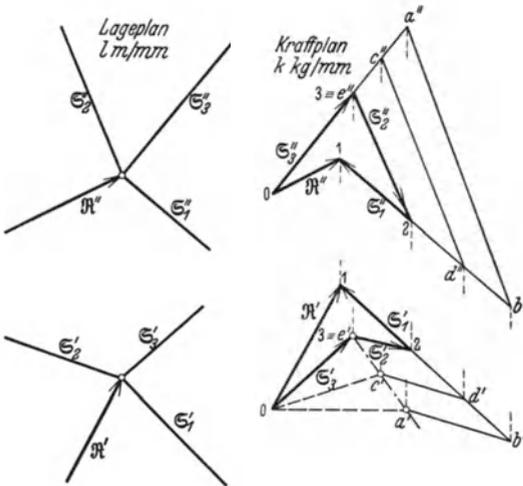


Abb. 47. Dreibein, Korrekturverfahren von Müller-Breslau.

Beginn im Aufriß (siehe Abb. 47): \mathcal{R}'' zerlegen in \mathcal{S}_1' und \mathcal{S}_3' , und an beliebiger Stelle $a''b''$ eine Parallele zu \mathcal{S}_2' einfügen. Krafteck in den Grundriß heruntergelotet ergibt eine falsche Richtung $0'a'$ für die Kraft \mathcal{S}_3' . Dasselbe wird mit einer anderen Größe von $\mathcal{S}_2' = c''d''$ noch einmal durchgeführt und so die ebenfalls falsche Richtung $0'c'$ im Grundriß gefunden. Die Verbindungslinie der Grundriß-Falschpunkte $a'c'$ schneidet die durch den Lageplan gegebene Richtung von \mathcal{S}_3' im Punkte e' , der in den Aufriß hinaufgelotet wird. 0123 sind die gesuchten Krafteckprojektionen, denn entsprechende Punkte liegen übereinander.

ε) Zwischenresultierende in einer Stabebene.

Die Spuren der Ebenen, in denen $\mathfrak{R} \mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_3$ liegen (siehe Abb. 48), werden im Grundriß bestimmt, indem die Projektionen der Durchstoßungspunkte von

$\mathfrak{R} \mathfrak{E}_2 \mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_3 (a'', b'', c'', d'')$ aus dem Aufriß in den Grundriß hinabgelotet werden (a', b', c', d'). Der Schnittpunkt B der beiden Spuren und der Ausgangspunkt A gehören beiden Ebenen $\mathfrak{R} \mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_3$ an, also ist $AB \equiv Z$ die Schnittlinie der beiden Ebenen. Jetzt wird im Kraftplan \mathfrak{R} in \mathfrak{E}_2 und Z als Zwischenresultierende, ferner Z in \mathfrak{E}_1 und \mathfrak{E}_3 zerlegt.

Zeichnungskontrolle (in der Abbildung nicht eingetragen): In der entsprechenden Weise werden aus den Durchstoßungspunkten der Grundrißprojektion die Spuren der Ebenen $\mathfrak{R} \mathfrak{E}_2$ und $\mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_3$ im Aufriß bestimmt. Grundriß und Aufrißspuren müssen sich auf der Linie xx schneiden (1. und 2. Kontrolle), der Schnittpunkt der Aufrißspuren muß auf der Zwischenresultierenden $Z = AB$ liegen (3. und 4. Kontrolle).

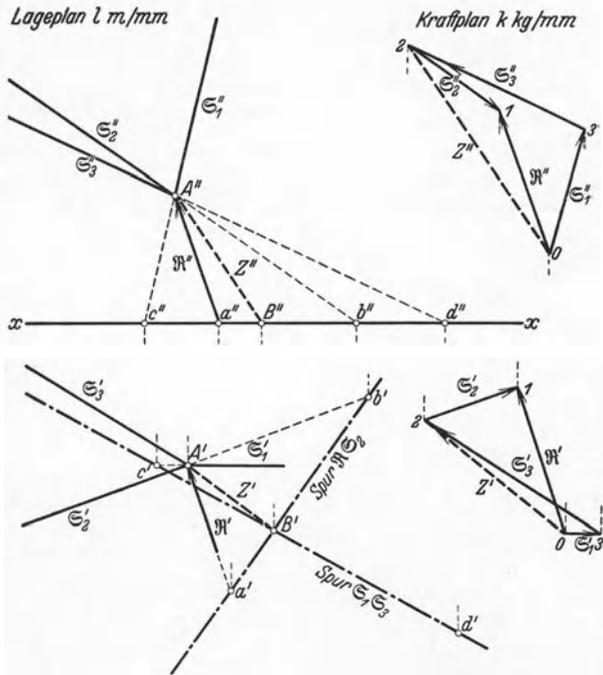


Abb. 48. Dreibein, Kraftzerlegung mit Hilfe der Zwischenresultierenden.

φ) Rechnung.

Koordinatenkreuz xyz mit seinem Ursprung im gegebenen Punkt A wählen. Aus den Stablängen werden berechnet

$$\cos \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{x, y, z = \text{Komponente der Stablänge}}{\text{ganze Stablänge}}$$

und aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} S_1 \cdot \cos \alpha_1 + S_2 \cdot \cos \alpha_2 + S_3 \cdot \cos \alpha_3 &= R \cdot \cos \alpha_r, \\ S_1 \cdot \cos \beta_1 + S_2 \cdot \cos \beta_2 + S_3 \cdot \cos \beta_3 &= R \cdot \cos \beta_r, \\ S_1 \cdot \cos \gamma_1 + S_2 \cdot \cos \gamma_2 + S_3 \cdot \cos \gamma_3 &= R \cdot \cos \gamma_r \end{aligned}$$

erhält man die Kräfte S_1, S_2, S_3 . Erhält man für eine Kraft einen negativen Wert, so besagt dies, daß der Richtungssinn dieser Kraft dem angenommenen entgegengesetzt ist.

c) Drei parallele Richtungen.

Zeichnung und Rechnung: Zweimal auf ebenes Problem zurückführen, indem die Kraft \mathfrak{R} zerlegt wird in die eine Richtung \mathfrak{E}_1 und eine Zwischenresultierende in der durch die beiden anderen Kräfte \mathfrak{E}_2 und \mathfrak{E}_3 gelegten Ebene. Diese Zwischenresultierende wird dann in \mathfrak{E}_2 und \mathfrak{E}_3 zerlegt.

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{R}_{23}, \\ \mathfrak{R}_{23} &= \mathfrak{E}_2 + \mathfrak{E}_3. \end{aligned}$$

d) Sechs Richtungen (allgemeinster Fall).

Es dürfen höchstens
 drei Richtungen in einer Ebene liegen;
 drei Richtungen durch einen Punkt gehen;
 drei Richtungen einander parallel sein (Schnittpunkt liegt im Unendlichen);
 fünf Richtungen von einer Geraden (Drehachse) geschnitten werden.

Durch Projektion in den Grund-, Auf- und Seitenriß wird die Aufgabe auf drei ebene Probleme zurückgeführt. Zur Berechnung der sechs Unbekannten stehen drei Kraft- und drei Momentengleichungen zur Verfügung.

$$\sum X = \sum_1^6 (P_i \cos \alpha_i) = R_x = R \cdot \cos \alpha_r, \quad (1)$$

$$\sum Y = \sum_1^6 (P_i \cos \beta_i) = R_y = R \cdot \cos \beta_r, \quad (2)$$

$$\sum Z = \sum_1^6 (P_i \cos \gamma_i) = R_z = R \cdot \cos \gamma_r, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_1^6 \begin{vmatrix} y_i & z_i \\ Y_i & Z_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_r & z_r \\ R_y & R_z \end{vmatrix} \\ &= \sum_1^6 (y_i Z_i) - \sum_1^6 (z_i Y_i) = y_r \cdot R_z - z_r \cdot R_y, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} M_y &= \sum_1^6 \begin{vmatrix} z_i & x_i \\ Z_i & X_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_r & x_r \\ R_z & R_x \end{vmatrix} \\ &= \sum_1^6 (z_i X_i) - \sum_1^6 (x_i Z_i) = z_r \cdot R_x - x_r \cdot R_z, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} M_z &= \sum_1^6 \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ X_i & Y_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_r & y_r \\ R_x & R_y \end{vmatrix} \\ &= \sum_1^6 (x_i Y_i) - \sum_1^6 (y_i X_i) = x_r \cdot R_y - y_r \cdot R_x. \end{aligned} \quad (6)$$

III. Zusammensetzen und Zerlegen von Momenten.

Momente werden in der Ebene und im Raume wie Kräfte an einem Punkt zusammengesetzt und zerlegt, da der Momentenvektor als planarer Vektor parallel verschoben werden darf (siehe S. 2).

IV. Schwerpunkt. (Massenmittelpunkt.)

Definition: Angriffspunkt der Resultierenden aller Elementargewichte.

Bestimmen: Körper in Einzelteile zerlegen, Teilgewichte in den Teilschwerpunkten anbringen und deren Resultierende nach Größe (Gesamtgewicht) und Lage (Schwerpunkt) bestimmen (siehe Resultierende paralleler Kräfte S. 13 u. 16).

Zeichnung.	Rechnung.	Versuch.
Krafteck	$x_s = \frac{\sum_1^n (x_i \cdot G_i)}{G},$ $y_s = \frac{\sum_1^n (y_i \cdot G_i)}{G},$ $z_s = \frac{\sum_1^n (z_i \cdot G_i)}{G}.$	1. Körper beim ebenen Problem nach räumlichen Punkten aufhängen. Lote vom Aufhängepunkt aus sind Schwerlinien, ihr Schnittpunkt ist der Schwerpunkt.
Seileck		Oder 2. Lage der Resultierenden durch Abwiegen in 2 Stellungen bestimmen. Für das ebene Problem sind 2 Auflagerstellen
		räumliche Problem sind 3 Auflagerstellen (Wagen) erforderlich.

Eigenschaften:

1. Der Schwerpunkt ist gegen Drehungen des Körpers invariant.
2. Symmetrie-
ebenen sind Schwere-
linien sind Schwere-
ebenen
3. Gesamtschwerpunkt zweier Körper liegt auf der Verbindungslinie der Teilschwerpunkte.
4. Guldinsche Regel für Rotationskörper (siehe Abb. 49)

$$O = 2\pi \cdot x_s \cdot s.$$

Oberfläche = Schwerpunktsweg des rotierenden Bogens \times Bogenlänge.

$$V = 2\pi \cdot x_s \cdot F.$$

Volumen = Schwerpunktsweg der rotierenden Fläche \times Fläche.



Abb. 49. Erläuterung zur Guldinschen Regel für a) Rotationsflächen und b) Rotationskörper.

V. Gleichgewichtsbedingungen.

Keine resultierende Kraft, d. h. $\mathfrak{R} = \sum_1^n \mathfrak{P}_i = 0$.

Kein resultierendes Moment, d. h. $\mathfrak{M} = \sum_1^n [\mathfrak{r}_i \cdot \mathfrak{P}_i] = 0$.

In der Ebene.

Zeichnung: Krafteck geschlossen, $\mathfrak{R} = 0$,
Seileck geschlossen, $\mathfrak{M} = 0$.

Im Raume.

Kraftecke in den 3 Ebenen geschlossen, $\mathfrak{R} = 0$,
Seilecke in den 3 Ebenen geschlossen, $\mathfrak{M} = 0$.

Rechnung: 1. Summe der Kräfte und Momente in bezug auf einen beliebigen Punkt muß null sein.

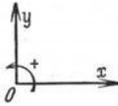


Abb. 50. Kartesisches Koordinatensystem in der Ebene.

$$\mathfrak{R} = 0 \left\{ \begin{array}{l} R_x = \sum_1^n X_i = 0, \\ R_y = \sum_1^n Y_i = 0, \end{array} \right.$$

$$\mathfrak{M} = 0; \quad M_o = \sum_1^n \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ X_i & Y_i \end{vmatrix} = \sum_1^n (x_i Y_i) - \sum_1^n (y_i X_i) = 0,$$

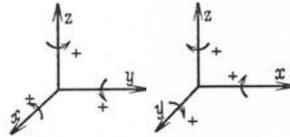


Abb. 51. Rechts- und linkshändiges kartesisches Koordinatensystem im Raume.

$$\mathfrak{R} = 0 \left\{ \begin{array}{l} R_x = \sum_1^n X_i = 0, \\ R_y = \sum_1^n Y_i = 0, \\ R_z = \sum_1^n Z_i = 0, \end{array} \right.$$

$$\mathfrak{M} = \sum_1^n \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_i & y_i & z_i \\ X_i & Y_i & Z_i \end{vmatrix} = 0 \left\{ \begin{array}{l} M_x = \sum_1^n \begin{vmatrix} y_i & z_i \\ Y_i & Z_i \end{vmatrix} = \sum_1^n (y_i Z_i) - \sum_1^n (z_i Y_i) = 0, \\ M_y = \sum_1^n \begin{vmatrix} z_i & x_i \\ Z_i & X_i \end{vmatrix} = \sum_1^n (z_i X_i) - \sum_1^n (x_i Z_i) = 0, \\ M_z = \sum_1^n \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ X_i & Y_i \end{vmatrix} = \sum_1^n (x_i Y_i) - \sum_1^n (y_i X_i) = 0, \end{array} \right.$$

oder 2. Summe der Momente um

3 allgemeine Punkte (nicht auf einer Geraden)

6 allgemeine Achsen (siehe S. 26)

muß null sein

oder 3. Die Arbeiten der am Körper angreifenden Kräfte und Momente bei einer virtuellen Verrückung (Parallelverschiebung um $\delta\vec{s} = \delta x + \delta y + \delta z$ und Drehung $\delta\varphi_x, \delta\varphi_y, \delta\varphi_z$ um die Achsen xyz) müssen null sein (siehe S. 99).

$$dA = \sum_1^n (\mathfrak{F}_i \cdot \delta\vec{s}_i) + \sum_1^m (\mathfrak{M}_i \cdot \delta\varphi_i) = 0,$$

$\sum_1^n X_i \cdot \delta x_i = 0,$	$\sum_1^n X_i \cdot \delta x_i = 0,$	$\sum_1^m M_{x_i} \cdot \delta\varphi_{x_i} = 0,$
$\sum_1^n Y_i \cdot \delta y_i = 0,$	$\sum_1^n Y_i \cdot \delta y_i = 0,$	$\sum_1^m M_{y_i} \cdot \delta\varphi_{y_i} = 0,$
$\sum_1^m M_i \cdot \delta\varphi_i = 0,$	$\sum_1^m Z_i \cdot \delta z_i = 0,$	$\sum_1^m M_{z_i} \cdot \delta\varphi_{z_i} = 0.$
3 Gleichungen.		6 Gleichungen.

Es läßt sich also im allgemeinsten Falle eine Kraft
in 3 Komponenten

6 Komponenten

zerlegen (siehe S. 21/22 u. 26).

Sonderfall: Kräfte an einem Punkt (Fachwerkknoten). Hier ist bei Reibungsfreiheit von vornherein $\sum \mathfrak{M} = 0$. Es bleibt also nur noch die Bedingung $\mathfrak{R} = 0$ zu erfüllen, d. h. es läßt sich an einem Punkt eine Kraft nur

in 2 Komponenten

in 3 Komponenten

zerlegen (siehe S. 20 u. 23/25).

Gleichgewicht in der Ebene

- | | | |
|----------------------------|---|--|
| für 2 Kräfte verlangt..... | gleiche Größe
entgegengesetzte Richtung
gleiche Angriffsgerade ¹ | } $\mathfrak{R} = 0,$
$\mathfrak{M} = 0;$ |
| 3 Kräfte | Krafteck geschlossen
alle Kräfte durch einen
Punkt | } $\mathfrak{R} = 0,$
$\mathfrak{M} = 0,$ |
| 4 Kräfte | je 2 geben die gleiche Zwischenresultierende (d. h. zurückgeführt auf Fall 1). | |

VI. Gleichgewichtszustände

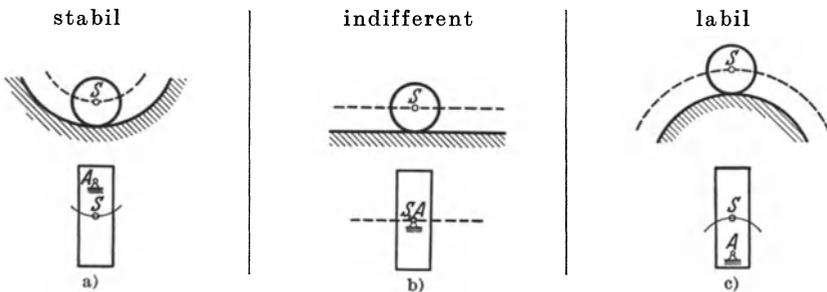


Abb. 52. Verschiedene Arten des Gleichgewichtes. a) stabil, b) indifferent, c) labil.

nach einer Auslenkung aus der Ruhelage treten

Kräfte oder Momente auf, die den Körper in die Ausgangslage zurückführen.	weder rückführende noch antreibende Kräfte oder Momente auf. Der Körper ist auch in der neuen Lage im Gleichgewicht.	Kräfte oder Momente auf, die den Körper von der Ausgangslage weiter entfernen.
---	--	--

¹ Ist l = senkrechter Abstand der beiden Richtungen, so herrscht kein Gleichgewicht; die Kräfte bilden ein Kräftepaar $M = P \cdot l$ (siehe S. 3).

d. h. die potentielle Energie ist ein Minimum	const	ein Maximum
d. h. die Arbeit für eine endliche Auslenkung ist < 0	= 0	> 0
d. h., es ist Arbeit in das System hineinzustecken.	es wird dem System weder Arbeit zugeführt noch aus ihm gewonnen.	es wird Arbeit aus dem System gewonnen.

Sonderfall: nur Gewichtskräfte.
Der Schwerpunkt (siehe S. 26) liegt

unter	im	über
-------	----	------

dem Krümmungsmittelpunkt der Schwerpunktsbahn bzw. Unterstützungspunkt.

VII. Lagerungen.

1. In der Ebene.

1 Unbekannte (einwertige Lagerung) = 1 Fesselung = 1 beseitigter Freiheitsgrad (Bewegungsmöglichkeit).

Die Kraft steht senkrecht auf der Berührungsebene. Falls Reibung vorhanden ist, tritt auch noch eine Kraft in Richtung der Berührungsebene auf; d. h. es sind dann 2 Unbekannte vorhanden.

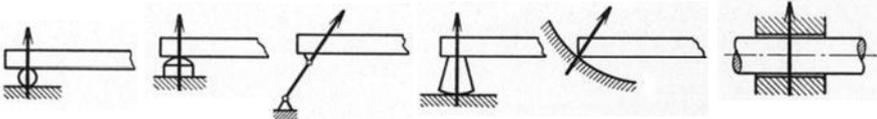


Abb. 53. Einwertige Lagerung von Balken und Wellen.

2 Unbekannte (zweiwertige Lagerung) = 2 Fesselungen = 2 beseitigte Freiheitsgrade.

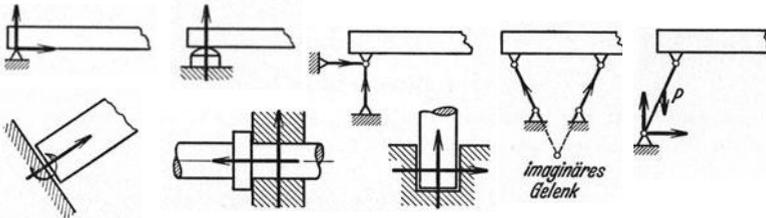


Abb. 54. Zweiwertige Lagerung von Balken und Wellen (falls Reibung vorhanden ist, ist die Wellenlagerung dreiwertig mit dem Reibungsmoment als dritter Unbekannter, vgl. Abb. 55).

3 Unbekannte (dreiwertige Lagerung) = 3 Fesselungen = 3 beseitigte Freiheitsgrade (allgemeinster Fall).

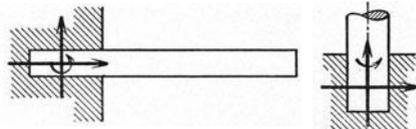


Abb. 55. Dreiwertige Lagerung von Balken und Wellen.

2. Im Raume.

1 Unbekannte (einwertige Lagerung) = 1 Fesselung = 1 beseitigter Freiheitsgrad.

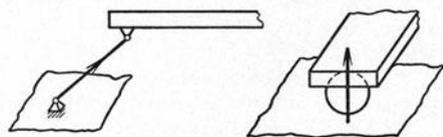


Abb. 56. Einwertige Lagerung von Balken.

2 Unbekannte (zweiwertige Lagerung) = 2 Fesselungen = 2 beseitigte Freiheitsgrade.

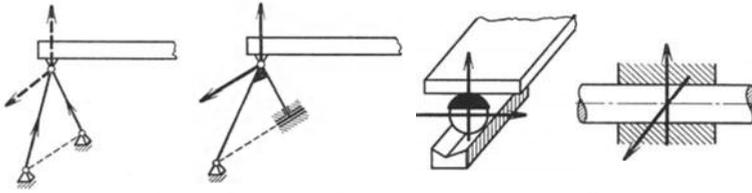


Abb. 57. Zweiwertige Lagerung von Balken und Wellen.

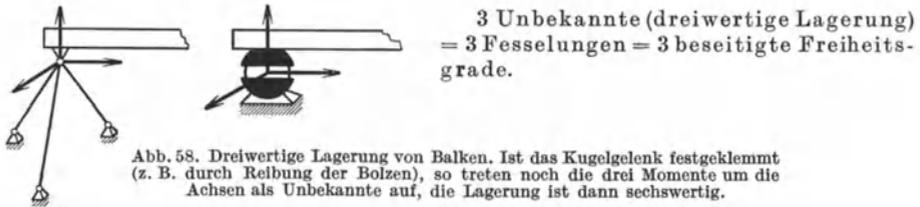
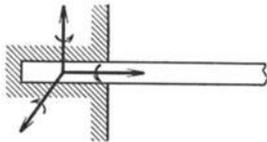


Abb. 58. Dreiwertige Lagerung von Balken. Ist das Kugelgelenk festgeklemmt (z. B. durch Reibung der Bolzen), so treten noch die drei Momente um die Achsen als Unbekannte auf, die Lagerung ist dann sechswertig.



6 Unbekannte (sechswertige Lagerung)
= 6 Fesselungen = 6 beseitigte Freiheitsgrade
(allgemeinster Fall).

Abb. 59. Sechswertige Lagerung eines Balkens (feste Einspannung).

VIII. Tragwerke.

(Balkentragwerke und Fachwerke.)

1. Allgemeines.

a) Lagerkräfte.

Tragwerk von der Unterlage abheben (isolieren), Lagerreaktionen anbringen (siehe S. 29), Gleichgewichtsbedingungen ansetzen (siehe S. 27).

b) Innere Beanspruchung.

Tragwerk durchschneiden, abgeschnittenes Stück mit allen daran wirkenden äußeren Kräften (Lasten und Auflagerkräfte) und den an den Schnittstellen auftretenden Kräften für sich herauszeichnen und Gleichgewichtsbedingungen ansetzen.

c) Aufbau.

Tragwerke entstehen durch Zusammenfügen von (räumlichen) Körpern, (ebenen) Scheiben, Stäben oder Balken.

Stäbe werden nur in ihrer Achse belastet, d. h. sie nehmen nur Längskräfte auf (Zug- oder Druckbeanspruchung).

Balken werden in ihrer Achse und quer dazu belastet, d. h. sie nehmen Längs- und Querkkräfte, Biege- und Drillmomente auf (Zug- oder Druck-, Scher-, Biegungs-, Drillungsbeanspruchung).

Balkentragwerke werden aus Balken aufgebaut, die in reibungslosen Gelenken zusammenstoßen. Belastung durch Kräfte und Momente an beliebigen Stellen.

Fachwerke werden aus Stäben aufgebaut, die in reibungslosen Gelenken (Knotenpunkten) zusammenstoßen. Belastung nur durch Kräfte in den Knotenpunkten.

d) Eigenschaften.

Statische Bestimmtheit: Lassen sich die Auflager-, Gelenk- und Stabkräfte mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen bestimmen, so ist das System statisch bestimmt, andernfalls n -fach unbestimmt. Hierbei ist n die Anzahl der zum Bestimmen der Unbekannten noch fehlenden Gleichungen, die mit Hilfe der Elastizitätslehre gefunden werden.

Starrheit (siehe auch S. 39, 99): Die einzelnen Systemglieder können — abgesehen von elastischen Formänderungen — keine auch noch so kleine (virtuelle) Verschiebung gegeneinander ausführen.

2. Balkentragwerke.

- Aufbau;
- Beziehungen zwischen Belastung, Querkraft und Moment;
- Balken mit schiefer Belastung;
- Balken mit räumlicher Belastung;
- Dreigelenkbogen;
- Balken mit Zwischengelenken.

a) Aufbau.

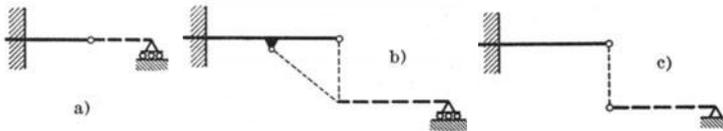


Abb. 60. Aufbau von Balkentragwerken. Anschluß eines weiteren Balkens a) durch ein Gelenk, b) durch zwei Stäbe, c) durch einen Stab.

Einfachstes Gebilde: Balken auf 2 Stützen oder fest eingespannter Balken.

Anschluß eines weiteren Balkens (siehe Abb. 60) durch ein Gelenk (2 innere Fesselungen) — das auch durch 2 Stäbe ersetzt werden kann — und Auflagerung des neu angeschlossenen Teiles. Wird der neue Teil nur durch eine Fesselung (Pendelstütze) angeschlossen, so ist die Zahl der Auflagerbedingungen um eine zu erhöhen.

Statische Bestimmtheit, Starrheit (siehe auch 1d):

$$\left. \begin{aligned}
 a + i &= 3 \cdot p \\
 \text{äußere und innere} & \\
 \text{Fesselungen} &= 3 \times \text{Scheibenzahl} \\
 &< 3 \cdot p \\
 &> 3 \cdot p
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 &\text{statisch bestimmt,} \\
 &\text{bewegliches System, kinematische Kette,} \\
 &\text{statisch überbestimmt.}
 \end{aligned}$$

Gelenke können durch Auflagerbedingungen ersetzt werden und umgekehrt. Es müssen jedoch für das gesamte Tragwerk mindestens $a = 3$ und es dürfen für jede einzelne Scheibe höchstens $a = 3$ äußere Fesselungen vorhanden sein (siehe Abb. 60). Zwischen 2 Auflagern dürfen höchstens 2 Gelenke liegen.

b) Beziehungen zwischen Belastung, Querkraft und Moment.

α) Vorzeichen.

Koordinatenkreuz } $x =$ Achse nach rechts (siehe Abb. 61),
 in die Schnittstelle legen } $y =$ Achse nach unten,
 $N =$ Längskraft positiv, wenn der Balken gezogen wird,

$Q =$ Querkraft positiv, wenn die Gleichgewichtskraft an der Schnittstelle am linken rechten

Balkenteil nach unten oben geht.

M = Biegemoment positiv, wenn der Balken durch die äußeren Kräfte nach unten durchgebogen wird, d. h. wenn das Gleichgewichtsmoment an der Schnittstelle am ^{linken} rechten Balkenteil ^{links} rechts herum dreht.

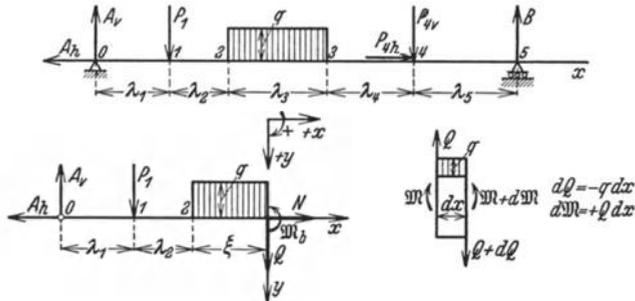


Abb. 61. Balken mit ebener Belastung; Lagepläne und Festlegen des Koordinatensystems zur rechnerischen Bestimmung der Auflager-, Quer- und Längskräfte sowie der Biegemomente.

$$\begin{aligned} \sum X &= 0 = -A_h + N, \\ \sum Y &= 0 = -A_v + P_1 + q \cdot \xi + Q, \\ \sum M_b &= 0 = A_v (\lambda_1 + \lambda_2 + \xi) - P_1 (\lambda_2 + \xi) - \frac{1}{2} q \cdot \xi^2 - M_b, \\ N &= A_h, \\ Q &= A_v - P_1 - q \cdot \xi, \\ M &= A_v \cdot (\dots) - P_1 (\dots) - \frac{1}{2} q \cdot \xi^2. \end{aligned}$$

Belastungsordinate q = 1. negativer Differentialquotient der Querkraft Q
 = 2. negativer Differentialquotient des Momentes M $q = -\frac{dQ}{dx} = -\frac{d^2M}{dx^2}$,

Querkraft = 1. Differentialquotient des Momentes M ,
 = 1. Integral der Belastung q

$$Q = \frac{dM}{dx} = A - \sum P - \int q dx,$$

$$Q_n = Q_{n-1} - P_n - \int_{n-1}^n q \cdot dx.$$

Moment = 1. Integral der Querkraft,
 = 2. Integral der Belastung

$$M = \int Q \cdot dx = A \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots) - P \cdot (\lambda_2 + \dots) - \int \int q dx \cdot dx,$$

$$M_n = M_{n-1} + Q_{n-1} \lambda_n - \int_{n-1}^n \int q dx \cdot dx.$$

β) Verlauf der Kurven.

Belastung	Querkraft	Moment
Null	horizontale Gerade	geneigte Gerade
Einzellast	Sprung	Knick
gleichmäßig verteilte Last	geneigte Gerade	Parabel 2. Ordnung
Dreieckslast (geneigte Gerade)	Parabel 2. Ordnung	Parabel 3. Ordnung
beliebige Kurve	Belastung in Felder mit $q \approx \text{const}$ unterteilen. Die nach Obigem gezeichnete einhüllende Ersatzkurve stimmt mit der wirklichen Kurve beim Feldwechsel überein.	

γ) Beispiel: Rechnung (siehe Abb. 61).

Bestimmen der Lagerkräfte:

Koordinatenursprung im linken Auflager wählen, x -Achse nach rechts, y -Achse nach unten, Gleichgewichtsbedingungen (siehe S. 27) ansetzen:

$$\sum X = 0 = -A_h + P_{4h},$$

$$\sum Y = 0 = -A_v + P_1 + \int_{x=\lambda_1+\lambda_2}^{x=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} q \cdot dx + P_{4v} - B,$$

$$\sum M_0 = 0 = P_1 \cdot \lambda_1 + \int_{\xi=0}^{\xi=\lambda_3} q \cdot (l + \xi) \cdot d\xi + P_{4v} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) - B \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5).$$

Aus diesen 3 Gleichungen lassen sich die 3 Unbekannten A_v, A_h, B berechnen.

Bestimmen der Querkraft und des Momentes in den verschiedenen Feldern:

Punkt n	Feldlänge λ	Belastung P	Querkraft $Q_n = Q_{n-1} - \text{Belastg.}_{n-1}$	Moment $M_n = M_{n-1} + Q_{n-1} \cdot \lambda_n - \int_{n-1}^n \int_{n-1}^n q dx dx$
—	m	kg	kg	kg m
0	0	$-A_v$	$Q_0 = A_v$	$M_0 = 0$
1	λ_1	P_1	$Q_1 = Q_0 - P_1$	$M_1 = 0 + Q_0 \cdot \lambda_1$
2	λ_2	0	$Q_2 = Q_1 - 0$	$M_2 = M_1 + Q_1 \cdot \lambda_2$
3	λ_3	$\int_{\xi}^{\xi+\lambda_3} q dx = q \cdot \lambda_3$	$Q_3 = Q_2 - q \cdot \lambda_3$	$M_3 = M_2 + Q_2 \cdot \lambda_3 - \frac{1}{2} \cdot q \cdot \lambda_3^2$
4	λ_4	P_{4v}	$Q_4 = Q_3 - P_{4v}$	$M_4 = M_3 + Q_3 \cdot \lambda_4$
5	λ_5	$-B$	$Q_5 = Q_4 + B$	$M_5 = M_4 + Q_4 \cdot \lambda_5$

δ) Beispiel: Zeichnung.

Bestimmen der Lagerkräfte (siehe Abb. 62):

Verteilte Lasten als Einzellasten P_{1234} im jeweiligen Schwerpunkt des Feldes (ab, bc, cd, de) anbringen, Kräfteck der äußeren Kräfte zeichnen, Pol wählen, Polstrahlen und parallel dazu im Lageplan die Seilstrahlen bis zum Schnitt mit der zugehörigen Kraft ziehen. Richtung der Auflagerkräfte herunterloten und mit dem ersten und letzten Seilstrahl (im Beispiel 0 und 5) zum Schnitt bringen. Verbindungslinie dieser Schnittpunkte ist die Schlußlinie s des Seilecks, die in den Kraftplan übertragen die Auflagerkräfte A und B ergibt.

Bestimmen der Momentenlinie:

Das Seileck ist die Momentenfigur für den durch Einzellasten beanspruchten Balken. Bei verteilten Lasten verläuft die Momentenlinie entsprechend dem auf S. 32 Gesagten derart, daß beim Feldwechsel (also bei a, b, c, d, e) der Seil-

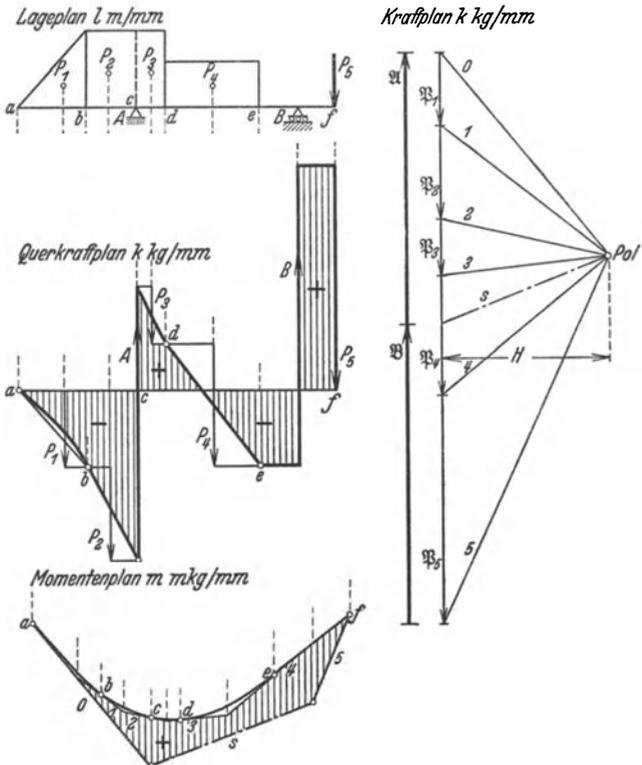


Abb. 62. Balken mit senkrechter Belastung, zeichnerische Bestimmung der Auflager- und Querkräfte-, sowie der Biegemomente mit Hilfe des Kraft- und Seilecks.

strahl immer die Tangente an die Momentenkurve bildet. Maßstab: $m = H \cdot k \cdot l$ mkg/mm, wobei H in mm, k in kg/mm und l in m/mm ist (siehe S. 6).

Bestimmen der Querkraftlinie:

Auch die Querkraftlinie wird zunächst für die zu Einzelkräften zusammengefaßten Belastungen gezeichnet, indem bei der ersten Kraft links auf der Nulllinie begonnen wird. Die Größe der einzelnen Kräfte wird dem Krafteck entnommen. So entsteht die Treppenkurve $P_1 P_2 A P_4 B P_5$. Der Verlauf der Querkraft in den einzelnen Feldern ist entsprechend dem auf S. 32 Gesagten. Es werden also jetzt auf die Treppenkurve die Feldgrenzen $abcdef$ heruntergelotet und in die Felder der jeweilige Querkraftverlauf eingetragen. Maßstab: k kg/mm.

c) Balken mit schiefer Belastung.

α) Lasten am Angriffspunkt in senkrechte und horizontale Komponenten zerlegen.

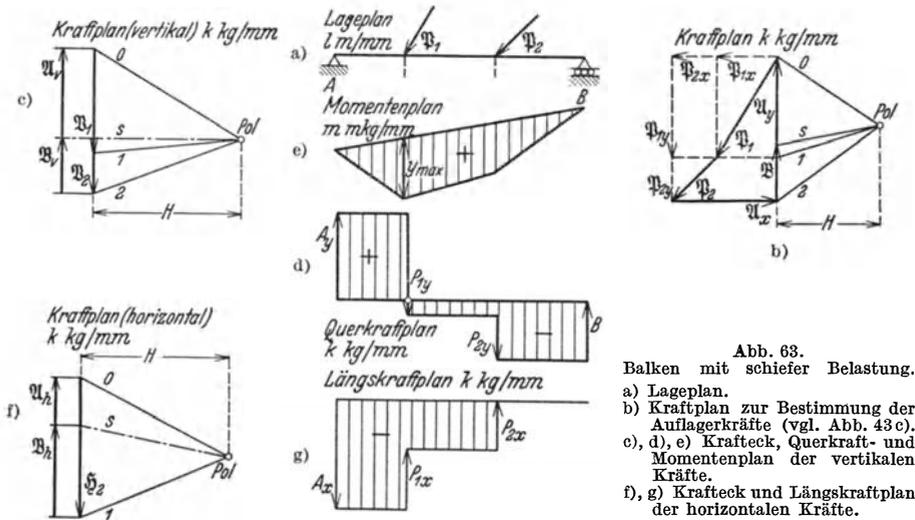


Abb. 63. Balken mit schiefer Belastung. a) Lageplan. b) Kraftplan zur Bestimmung der Auflagerkräfte (vgl. Abb. 43 c). c), d), e) Krafteck, Querkraft- und Momentenplan der vertikalen Kräfte. f), g) Krafteck und Längskraftplan der horizontalen Kräfte.

Die horizontalen Lasten werden vom festen Lager (A im Beispiel der Abb. 60) aufgenommen, die senkrechten Komponenten werden, wie in Abb. 63 gezeigt, behandelt.

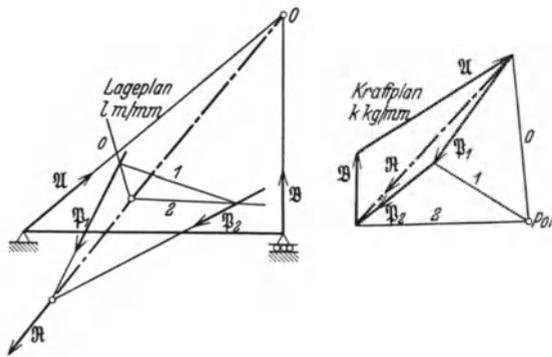


Abb. 64. Balken mit schiefer Belastung. Lage- und Kraftplan zur Bestimmung der Auflagerkräfte.

β) Äußere Kräfte zu einer Resultierenden vereinigen.

Die bekannte Richtung der Auflagerkraft B (siehe Abb. 64, Rollenlager) wird mit der Resultierenden der Belastung ($R = P_1 + P_2$) (Bestimmen nach S. 13) zum Schnitt gebracht (Punkt O). Durch diesen Schnittpunkt O muß die Auflagerkraft A hindurchgehen, da für das Gleichgewicht von 3 Kräften erforderlich ist, daß sie durch einen Punkt hindurchgehen (siehe S. 28). Die Kraftrichtungen werden in den Kraftplan übertragen, woraus sich die Größe von A und B ergeben.

γ) Seileck im festen Auflager beginnen.

Lösung nach der Grundaufgabe: Eine Kraft (Resultierende der Belastung) ist in eine gegebene Richtung (\mathfrak{B}) und eine Kraft, die durch einen gegebenen Punkt (A) hindurchgeht, zu zerlegen (siehe S. 22 u. Abb. 65). Das Seileck gibt auch die Größe der Momente an. Es sind aber nicht die senkrechten Ordinaten des Seilecks zu nehmen, sondern die Längen (y_a, y_b) der Parallelen in den jeweiligen Schnittstellen zu den jeweiligen Resultierenden (siehe S. 6).

Infolge der Änderung des Polabstandes = Lot vom Pol auf die jeweilige Resultierende erhält man für die einzelnen Felder verschiedene Momentenmaßstäbe. Z. B. an Schnittstelle $a: m_a = H_a \cdot k \cdot l$ und an Schnittstelle $b: m_b = H_b \cdot k \cdot l$ mkg/mm. Die Größe der Momente beträgt dann $M_a = y_a \cdot m_a$ bzw. $M_b = y_b \cdot m_b$.

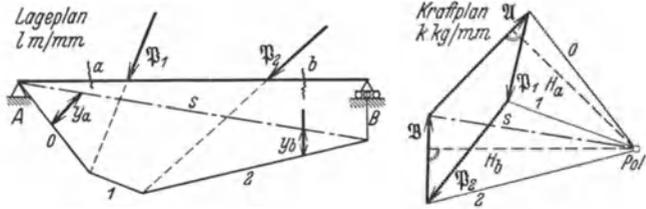


Abb. 65. Balken mit schiefer Belastung. Bestimmen der Auflagerkräfte mit Hilfe des Seilecks.

δ) Rechnerische Lösung.

Ansatz der Gleichgewichtsbedingungen 1. für den ganzen Balken zum Bestimmen der Auflagerdrücke A_v, A_h, B , und 2. für den durchschnittenen Balken zum Bestimmen der Kräfte N, Q und des Momentes \mathfrak{M} an der Schnittstelle.

d) Balken mit räumlicher Belastung.

Kräfte in waagerechte und senkrechte Ebene projizieren und die Projektionen als ebene Probleme behandeln, also Kraftplan, Momenten- und Querkraftverlauf zeichnen wie auf S. 33 beschrieben wurde (siehe Abb. 66). Alsdann werden die Querkraft- und Momenten-

Lageplan l m/mm

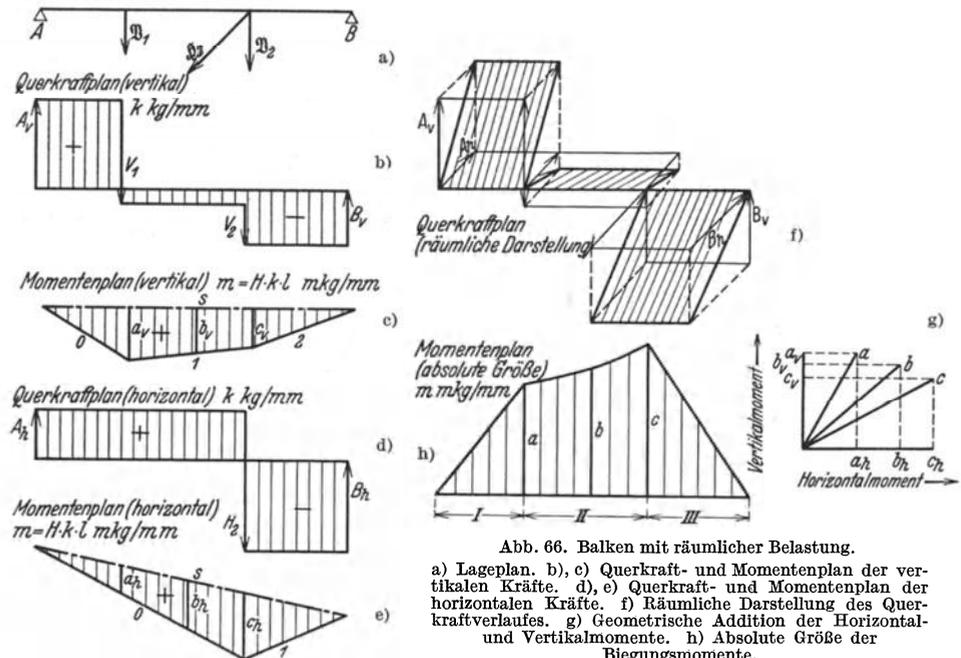


Abb. 66. Balken mit räumlicher Belastung.

a) Lageplan. b), c) Querkraft- und Momentenplan der vertikalen Kräfte. d), e) Querkraft- und Momentenplan der horizontalen Kräfte. f) Räumliche Darstellung des Querkraftverlaufes. g) Geometrische Addition der Horizontal- und Vertikalmomente. h) Absolute Größe der Biegemomente.

komponenten an jeder Schnittstelle zur Resultierenden zusammengesetzt. Der Verlauf der absoluten Größe des Momentes gibt, wie leicht nachzuweisen ist, nur in Ausnahmefällen (Feld I und III) eine Gerade.

e) Dreigelenkbogen.

α) Überlagerungsprinzip.

Nacheinander den linken und rechten Teil belasten und die so gefundenen Auflagerkomponenten addieren (siehe Abb. 67).

1. Linker Teil belastet (R_l), rechter unbelastet, $BC =$ Pendelstütze, $A =$ festes Lager, d.h. $AB =$ Balken auf 2 Stützen mit schiefer Last (siehe S. 34). Auflagerkräfte \mathfrak{A}_l und $\mathfrak{B}_l \equiv \mathfrak{C}_l$.

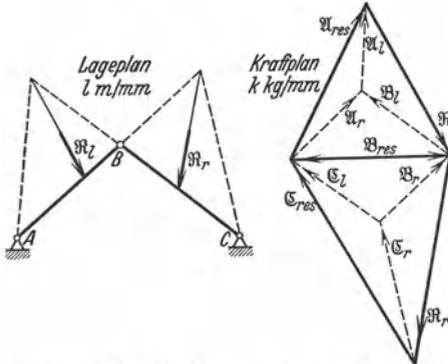


Abb. 67. Dreigelenkbogen. Lösung nach dem Überlagerungsprinzip.

2. Rechter Teil belastet (R_r), linker unbelastet, Auflagerkräfte $\mathfrak{A}_r \equiv \mathfrak{B}_r$ und \mathfrak{C}_r .

3. Überlagerung: linker und rechter Teil belastet, Auflagerkräfte: $\mathfrak{A}_{res} = \mathfrak{A}_l + \mathfrak{A}_r$ und $\mathfrak{C}_{res} = \mathfrak{C}_l + \mathfrak{C}_r$. Beachte das Parallelogramm $\mathfrak{A}_r \mathfrak{B}_l \mathfrak{B}_r \mathfrak{C}_l$ im Kräfteck. Seine Diagonale ist der Gelenkdruck \mathfrak{B}_{res} . Welche Diagonale \mathfrak{B} darstellt, entscheidet das Gleichgewicht sämtlicher Kräfte am linken oder rechten Teil. Es müssen ein geschlossenes Kräfteck ergeben: $\mathfrak{A}_{res} + \mathfrak{R}_l + \mathfrak{B}_{res} = 0$ bzw. $\mathfrak{B}_{res} + \mathfrak{R}_r + \mathfrak{C}_{res} = 0$; ebenso ergibt sich für das Gesamtsystem $\mathfrak{A}_{res} + \mathfrak{R}_l + \mathfrak{R}_r + \mathfrak{C}_{res} = 0$ ein geschlossenes Kräfteck. Der Gelenkdruck \mathfrak{B}_{res} tritt jetzt — als innere Kraft — nicht in Erscheinung.

β) Seileck durch 3 gegebene Punkte ABC .

Die Gelenke A, B, C können keine Momente übertragen, sie müssen also Nullstellen der Momentenfigur sein.

Im Lageplan (siehe Abb. 68) werden die Seilstrahlen 1 und 2 von A und B zum gemeinsamen beliebigen Schnittpunkt auf \mathfrak{R}_l und die Schlußlinie $s_l = AB$ gezogen. Die in das Kräfteck übertragenen Seilstrahlen ergeben den Pol O_l für den linken Teil¹.

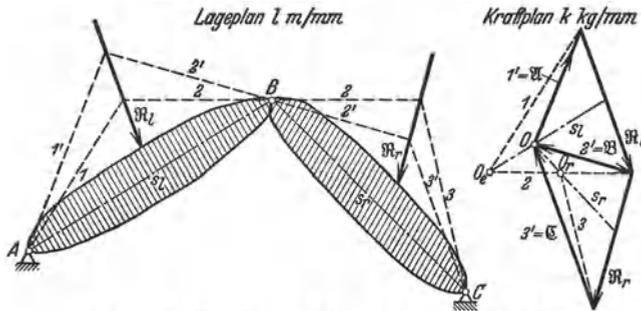


Abb. 68. Dreigelenkbogen. Lösung mit Hilfe des Seilecks.

Ebenso Seilstrahlen 2 und 3 von B und C aus zum gemeinsamen Schnittpunkt mit \mathfrak{R}_r , sowie die Schlußlinie $s_r = BC$ ziehen und ins Kräfteck übertragen. Pol O_r für den rechten Teil.

Der Schnittpunkt der beiden Schlußlinien s_l und s_r im Kräfteck ist der gemeinsame Pol O für den linken und rechten Teil. Die zugehörigen Seilstrahlen $1', 2', 3'$ sind die Auflager-

¹ Seileck durch zwei gegebene Punkte: Alle Kräfte \mathfrak{B} werden mit Hilfe des Kräftecks und Seilecks zur Resultierenden $\mathfrak{R} = \sum \mathfrak{B}$ zusammengefaßt, siehe Abb. 69. (Beliebigen Pol O_l wählen, Polstrahlen $0, 1, 2$, Seileck im Punkte A des Lageplanes beginnen.) Der letzte Seilstrahl

bzw. Gelenkkräfte \mathfrak{R} , \mathfrak{S} , \mathfrak{C}^* . Sind der linke oder rechte Teil des Dreigelenkbogens durch mehrere Lasten beansprucht, so sind diese auf der linken und rechten Seite zu den beiden Teilresultierenden \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_r zusammenzufassen. Weitere Behandlung wie oben angegeben.

f) Balkentragwerk mit Zwischengelenken (Gerberträger).

- $p = 3$ Scheiben AE, EF, FD (siehe Abb. 70);
 - $i = 4$ innere Fesselungen (bei den Gelenken E und F je 2);
 - $a = 5$ äußere Fesseln (beim festen Lager B zwei Fesselungen und bei den beweglichen Lagern A, C, D je eine);
 - $a + i = 3 \cdot p$ (siehe S. 31)
 - $5 + 4 = 3 \cdot 3$
- } d. h. statisch bestimmt gelagert.

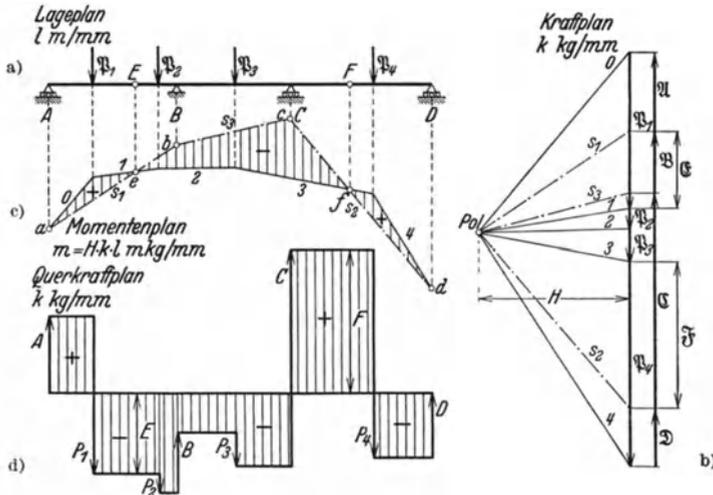


Abb. 70. Balkentragwerk mit Zwischengelenken (Gerberträger).

a) Lageplan. b) Kraftplan der Lasten, Auflager- und Gelenkkräfte. c) Momentenplan. d) Querkraftplan.

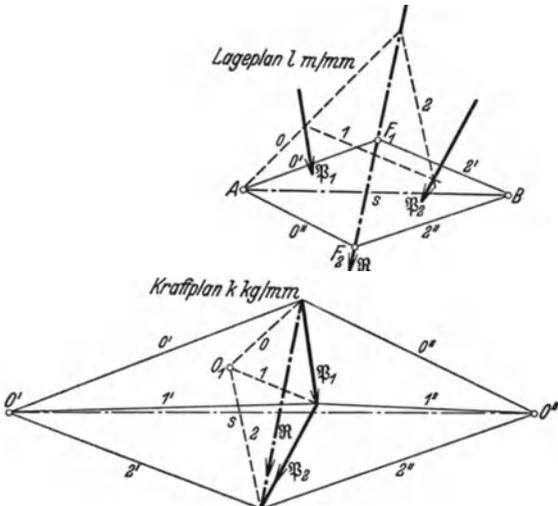


Abb. 69. Konstruktion eines Seilecks durch zwei gegebene Punkte (Polwanderung).

(hier 2) geht noch nicht durch B hindurch. Die Schlußlinie des gesuchten Seilecks ist $s = AB$ und die Verbindungslinien ($0', 2'$ bzw. $0'', 2''$) jedes beliebigen Punktes F auf \mathfrak{R} im Lageplan mit A und B liefern im Kraftplan einen Pol O' bzw. O'' , der der gewünschten Bedingung genügt. Alle Pole $O'O''$ usw. liegen auf der Parallelen zur Schlußlinie $s = AB$. (Ähnliche Dreiecke.)

Weitere Entwicklung durch Einbeziehen der Kräfte $\mathfrak{R}_{1,2} \dots \mathfrak{R}_n$ liefert den Satz von der Polwanderung: Wandert der Pol O' auf einer Geraden (s), so schneiden sich im Lageplan entsprechende Seilstrahlen in festen Punkten ($0' \times 0''$ in A ; $2' \times 2''$ in B , $1' \times 1''$ in C).

* Der Pol O_t wandert (vgl. Anm. 1) auf der Teilschlußlinie s_t , wobei das Seileck stets durch die Punkte A und B hindurchgeht, und O_r wandert auf s_r , wobei das Seileck des rechten Teiles stets durch die Punkte B und C hindurchgeht.

Seileck des rechten Teiles stets durch die Punkte B und C hindurchgeht.

Stat. best. System, da für jeden Teil AE, EF, FD die Zahl der äußeren Fesselungen < 3 und > 0 ist (siehe S. 31).

Krafteck $\mathfrak{F}_1 \dots \mathfrak{F}_4$ zeichnen, Pol wählen, Polstrahlen und Seilstrahlen $0, 1, 2, 3, 4$ ziehen, erst jetzt Auflager- und Gelenkkräfte $ABCDEF$ auf die Seilstrahlen hinunterloten. Schlußlinie $s_1 = ae$ für den Balken AE (in A und E ist das Moment $= 0$) ziehen und s_1 mit Kraft- richtung von B zum Schnitt bringen ($\mathfrak{M}_B \neq 0$), Balken DF wie AE behandeln ($\mathfrak{M}_D = 0; \mathfrak{M}_F = 0$), $s_2 = df$ mit Kraft- richtung von C zum Schnitt bringen ($\mathfrak{M}_C \neq 0$), Schlußlinie $s_3 = bc$.

Schlußlinien s_1, s_2 und s_3 ins Krafteck übertragen.

Zwischen 0 und s_1 liegt \mathfrak{A}	}	Kraftsinn durch die äußeren Kräfte gegeben (Umfahrungssinn $\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \mathfrak{F}_3 \mathfrak{F}_4 \mathfrak{D} \mathfrak{C} \mathfrak{B} \mathfrak{A}$,
„ s_1 „ s_3 „ „ \mathfrak{B}		
„ s_3 „ s_2 „ „ \mathfrak{C}		
„ s_2 „ 4 „ „ \mathfrak{D}	}	Kraftsinn der Gelenkdrücke wechselweise, je nachdem welche Scheibe AE, EF oder FD betrachtet wird.
„ s_1 „ 1 „ „ \mathfrak{E}		
„ s_2 „ 3 „ „ \mathfrak{F}		

Enthält die Belastung schräge Kräfte, so werden diese in senkrechte und waagerechte Komponenten zerlegt. Die waagerechten Kräfte werden vom festen Lager aufgenommen, die senkrechten werden wie oben behandelt.

3. Fachwerke (ebene und räumliche Fachwerke).

Aufbau.

Lösungsvorbereitung.

Lösungswege.

Stabkrafttabelle.

a) Aufbau.

In der Ebene.

Einfachstes Gebilde: Dreieck

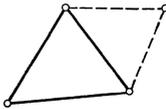


Abb. 71. Aufbau eines ebenen Fachwerkes, vom Dreieck ausgehend.

Anschluß eines weiteren Punktes durch
2 Stäbe,

die nicht in einer Geraden liegen (siehe Abb. 71).

Anschluß einer Scheibe durch
3 Stäbe,

die nicht durch einen Punkt gehen.

2 Stäbe

können durch ein Gelenk ersetzt werden.

Statische Bestimmtheit, Starrheit:

$$\begin{aligned}
 a + s = 2k & \text{ statisch bestimmt} & a + s = 3 \cdot k; \\
 & < & \text{bewegliches System} & < \\
 & > & \text{statisch überbestimmt} & >
 \end{aligned}$$

a = Zahl der äußeren Fesselungen;

s = „ „ Stäbe;

k = „ „ Knotenpunkte.

Im Raume.

Tetraeder

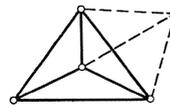


Abb. 72. Aufbau eines räumlichen Fachwerkes, vom Tetraeder ausgehend.

3 Stäbe,

die nicht in einer Ebene liegen (siehe Abb. 72),

eines Körpers durch

6 Stäbe,

von denen höchstens

3 durch einen Punkt gehen,

3 in einer Ebene liegen,

5 von einer Geraden (Achse) geschnitten werden (siehe S. 26 u. 27).

3 Stäbe

Auflagerbedingungen und Stäbe können gegeneinander vertauscht werden. Es müssen jedoch für das ganze System mindestens

$$a = 3$$

$$a = 6$$

Auflager (äußere Fesselungen) vorhanden sein.

Ausnahmefall: Er liegt vor, wenn trotz statischer Bestimmtheit eine unendlich kleine Bewegungsmöglichkeit vorhanden ist, ohne daß die Stäbe ihre Länge zu ändern brauchen.

Kennzeichen: 1. Es gibt einen Momentanpol (siehe S. 44 z. B. Schnitt von 3 Auflagerstäben), um den sich das gesamte System oder einzelne Teile gegenüber der Erde oder dem Restsystem drehen können.

2. Durch endliche äußere Lasten entstehen unendlich große Stab- oder Auflagerkräfte.

3. Auch ohne äußere Lasten können Spannungen in den Stäben auftreten (Temperatur-, Montagespannungen).

4. Die Diskriminante (Nennerdeterminante) der für die Knotenpunkte angesetzten Kraftgleichgewichtsbedingungen verschwindet¹.

Kuppeln (räumliche Fachwerke ohne Innenverspannung):

1. Netzwerk-Kuppel (siehe Abb. 73 a):

Stockwerkringe gegeneinander versetzt,

ungerade Ecken (Seiten-)zahl —starr,

gerade „ „ „ symmetrischer Aufbau — verschieblich,

„ „ „ „ unsymmetrischer Aufbau, es können hohe Spannungen auftreten (Ausnahmefall).

2. Schwedler-Kuppel (siehe Abb. 73 b):

Wie Netzwerk-Kuppel, nur sind die Stockwerkringe nicht gegeneinander versetzt, d. h. entsprechende Ringstäbe liegen in den einzelnen Stockwerken einander parallel.

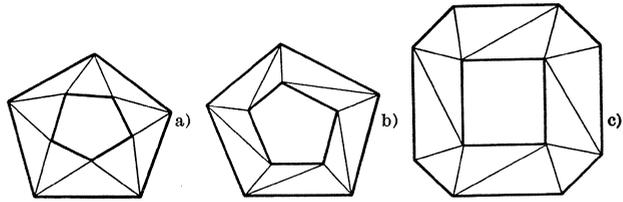


Abb. 73. Aufbau von Kuppeln. a) Netzwerk, b) Schwedler, c) Zimmermann.

$$\begin{array}{l}
 \text{Knoten 1} \quad S_1 \cdot \cos \alpha_{11} + S_2 \cdot \cos \alpha_{12} + \dots + S_n \cdot \cos \alpha_{1n} + \sum X_1 = 0, \\
 \quad \quad \quad S_1 \cdot \cos \beta_{11} + S_2 \cdot \cos \beta_{12} + \dots + S_n \cdot \cos \beta_{1n} + \sum Y_1 = 0, \\
 \quad \quad \quad S_1 \cdot \cos \gamma_{11} + S_2 \cdot \cos \gamma_{12} + \dots + S_n \cdot \cos \gamma_{1n} + \sum Z_1 = 0, \\
 \text{Knoten 2} \quad S_1 \cdot \cos \alpha_{21} + \dots + \sum X_2 = 0, \\
 \quad \quad \quad S_1 \cdot \cos \beta_{21} + \dots + \sum Y_2 = 0, \\
 \quad \quad \quad S_1 \cdot \cos \gamma_{21} + \dots + \sum Z_2 = 0, \\
 \text{Knoten 3} \quad \dots, \\
 \quad \quad \quad \dots, \\
 \quad \quad \quad \dots, \\
 \quad \quad \quad \vdots \\
 \quad \quad \quad \vdots \\
 \quad \quad \quad \vdots
 \end{array}$$

In der Ebene.
 $\cos \gamma \equiv 0$, d. h. 2 k Gleichungen
 für $a + s = 2k$ Unbekannte

Im Raume.
 3 k Gleichungen
 für $a + s = 3k$ Unbekannte.

$\sum X, Y, Z$ enthält die am jeweiligen Knoten angreifenden äußeren Lasten und Auflagerkräfte. Der erste Index bezeichnet die Zugehörigkeit zum Knoten, der zweite die zum Stab

$$\text{Diskriminante: } D = \begin{vmatrix}
 \cos \alpha_{11} & \cos \alpha_{12} & \dots & \cos \alpha_{1n} \\
 \cos \beta_{11} & \cos \beta_{12} & \dots & \cos \beta_{1n} \\
 \cos \gamma_{11} & \cos \gamma_{12} & \dots & \cos \gamma_{1n} \\
 \cos \alpha_{21} & \cos \alpha_{21} & \dots & \cos \alpha_{2n} \\
 \cos \beta_{21} & \cos \beta_{21} & \dots & \cos \beta_{2n} \\
 \cos \gamma_{21} & \cos \gamma_{21} & \dots & \cos \gamma_{2n} \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots
 \end{vmatrix}$$

3. Zimmermannsche-Kuppel (siehe Abb. 73c):

Unterer Ring besitzt doppelt soviel Ecken wie der darüber liegende.

Lagerung der Kuppeln: Ist der unterste Ring ein regelmäßiges n -Eck, so dürfen die Ecken nicht auf einem Kreis um den Mittelpunkt des n -Ecks geführt werden. Besitzt das n -Eck gerade Seitenzahl, so dürfen die Ecken auch nicht auf Radien aus dem Mittelpunkt geführt werden. Bei ungerader Seitenzahl ist letzteres zulässig.

b) Lösungsvorbereitung.

Auflagerkräfte: Aufbau des Fachwerkes unbeachtet lassen, Gleichgewichtsbedingungen für die äußeren (gegebenen und Lager-) Kräfte ansetzen. Zeichnerische oder rechnerische Lösung (vgl. Balkentragwerke S. 32/33 und Abb. 75).

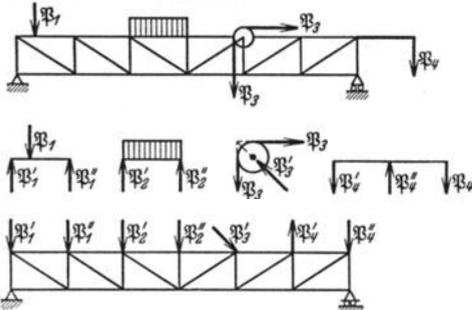


Abb. 74. Lastverteilung auf die Knotenpunkte eines Fachwerkes.

- a) Lageplan. b) (1—4) Gleichgewicht der einzelnen Lasten.
- c) Fachwerk mit Knotenlasten.

Lastreduktion: Die Lasten werden auf die nächstgelegenen Knotenpunkte reduziert. Der belastete Stab wird isoliert und die für ihn erforderlichen Auflagerkräfte werden bestimmt. Diesen gleich groß aber entgegengesetzt gerichtet sind die gesuchten Knotenlasten (siehe Abb. 74).

Stab- und Feldbezeichnung: Jeder Stab erhält eine Nummer, jedes Feld einen Buchstaben (siehe Abb. 75). Innenfelder werden durch die Fachwerkstäbe gebildet, Außenfelder durch Kräfte begrenzt (zur Bezeichnung von Stäben und Feldern tunlichst 2 Farben benutzen).

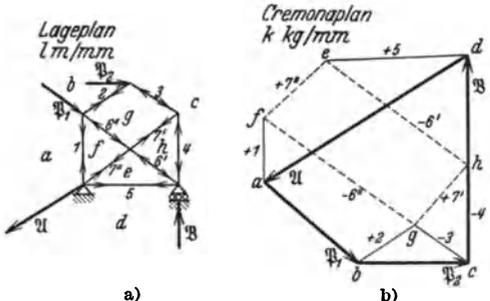


Abb. 75. Kräfte an und in einem Fachwerk. a) Lageplan mit Feld- und Stabbezeichnung. b) Cremonaplan.

Bei zwei sich kreuzenden Stäben (z. B. 6 und 7 in Abb. 69) wird der Schnittpunkt als scheinbares Gelenk betrachtet und jeder der beiden Stäbe 6 und 7 in 6' und 6'' bzw. 7' und 7'' aufgelöst. Im Kräfteck entspricht dem scheinbaren Gelenk ein Parallelogramm 6'7'6''7'' = ehgf. Die Stabkraft im geteilt gedachten Stabe ist selbstverständlich nur der einfachen Länge 6' = 6'' bzw. 7' = 7'' verhältig und nicht etwa der Summe 6' + 6'' oder 7' + 7''.

c) Lösungswege.

- Knotenpunktgleichgewicht.
- Cremonaplan.
- Schnittmethode.
- Hennebergs Stabvertauschung.
- Kinematische Methode.

α) Knotenpunktgleichgewicht.

Jeder Knotenpunkt wird für sich herausgezeichnet, und für ihn werden die Gleichgewichtsbedingungen (zeichnerische oder rechnerische) angesetzt. Die zeichnerische Lösung (geschlossenes Kräfteck, siehe S. 27) ist umständlich, da jede Kraft an den beiden Knotenpunkten, die die Endpunkte des jeweiligen Stabes sind — also zweimal — vorkommt. Die rechnerische Lösung ($\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum Z = 0$ siehe S. 27) ist für räumliche Fachwerke empfehlenswert. Zur Aufstellung der Knotenpunktgleichungen stelle man sich vorher die X-, Y- und Z-Komponenten der einzelnen Kräfte (ähnlich wie auf S. 41 angegeben) in einer Tabelle zusammen.

Stab	Stablänge in der			gesamte Stablänge
	x-Richtung	y-Richtung	z-Richtung	
1	x_1	y_1	z_1	$l_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$
2
3

Richtungscosinus			Stabkraftkomponenten ¹			Stabkraft
$\cos \alpha_1 = \frac{x_1}{l_1}$	$\cos \beta_1 = \frac{y_1}{l_1}$	$\cos \gamma_1 = \frac{z_1}{l_1}$	$S_{1x} = S_1 \cdot \frac{x_1}{l_1}$	$S_{1y} = S_1 \cdot \frac{y_1}{l_1}$	$S_{1z} = S_1 \cdot \frac{z_1}{l_1}$	$S_1 = \sqrt{S_{1x}^2 + S_{1y}^2 + S_{1z}^2}$
...
...

β) Cremona plan.

Hier werden die einzelnen Knotenpunktpläne des vorigen Abschnittes zu einem Plan zusammengefaßt (siehe Abb. 75).

Vorgang: 1. Krafteck der äußeren Kräfte zeichnen und an die jeweiligen Kraftenden die zugehörigen Feldbuchstaben des Lageplanes schreiben. Z. B. $\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \mathfrak{B} + \mathfrak{A}$ bilden den Linienzug $abcd$. [Größe und Richtung von \mathfrak{A} wird nach einem der auf S. 22 angegebenen Verfahren bestimmt].

2. Cremonaplan an einem Punkt beginnen, bei dem nur zwei unbekannte Stab-(Knoten-) Kräfte auftreten. Die Stabkraft oder äußere Last, die im Lageplan zwei Felder (z. B. 2 — bg oder $\mathfrak{F}_1 - ab$) trennt, liegt im Kraftplan zwischen den Feldbuchstaben (bg bzw. ab). Beginn an der Spitze mit dem Zerlegen von \mathfrak{F}_2 in die Richtungen 2 und 3.

Durch b Parallele zu 2 ziehen	2 ziehen	}	Schnittpunkt ist g
" c " " 3	" "		
" a " " 1	" "		
" g " " 6''	" "		
" g " " 7'	" "		
" c " " 4	" "		
" f " " 7''	" "		
" h " " 6'	" "		
			" " f
			" " h
			" " e

Kontrolle: ed muß parallel zu Stab 5 sein.

3. Jedem Knotenpunkt im Lageplan entspricht im Kraftplan ein Feld (Krafteck) aus den im Knotenpunkt zusammenstoßenden Kräften und umgekehrt (siehe I 1 c auf S. 14).

4. Nur bei den äußeren Kräften sind die Richtungspfeile anzutragen, da für die Stäbe der Pfeil mal hin, mal her geht, je nachdem welcher Knotenpunkt betrachtet wird.

5. Während des Zeichnens ergeben sich an Knotenpunkten mit keiner oder höchstens einer neuen — noch unbekanntem — Stabkraft Zeichnungskontrollen. In jedem Plan gibt es mindestens eine solche Kontrolle, nämlich am letzten Knotenpunkt (vgl. Absatz 2).

6. Beanspruchung der Stäbe: An einem Knotenpunkt mit bekanntem Umfahrungssinn des zugehörigen Kraftecks (durch eine äußere Kraft oder eine schon bestimmte Stabkraft gegeben) ergeben auf den Knotenpunkt hin- zeigende Pfeile Druck- Beanspruchung von dem Knotenpunkt weg- zeigende Pfeile Zug- Beanspruchung des zugehörigen Stabes (\mp Zeichen).

Z. B. siehe Abb. 69. Krafteck $dafed$ der Lagerkraft \mathfrak{A} und der Stabkräfte $\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_7 \mathfrak{S}_5$. Umfahrungssinn ist durch $\mathfrak{A} \equiv da$ gegeben.

Mithin ist:

$$\begin{aligned}
 af &= \mathfrak{S}_1 = \text{Zug } (+), \\
 fe &= \mathfrak{S}_7'' = \text{Zug } (+), \\
 ed &= \mathfrak{S}_5 = \text{Zug } (+).
 \end{aligned}$$

¹ Vorzeichen beachten.

Krafteck $cdehc$ aus den Kräften $\mathfrak{B} \mathfrak{C}_5 \mathfrak{C}_6 \mathfrak{C}_4$. Umfahrungssinn durch $\mathfrak{B} \equiv cd$ und $\mathfrak{C}_5 \equiv de$ gegeben.

Mithin ist: $eh = \mathfrak{C}_6 = \text{Druck } (-)$,
 $hc = \mathfrak{C}_4 = \text{Druck } (-)$.

Krafteck $bcgb$ aus \mathfrak{B}_2 und $\mathfrak{C}_3 \mathfrak{C}_2$. Umfahrungssinn durch $\mathfrak{B}_2 \equiv bc$ gegeben.

Mithin ist: $cg = \mathfrak{C}_3 = \text{Druck } (-)$
 $gb = \mathfrak{C}_2 = \text{Zug } (+)$

Kontrollen erhält man aus den Kraftecken $gchg$, $abgfa$ sowie $hefgh$.

γ) Schnittmethode.

Schnitt so führen, daß nur 3 unbekannte Schnittkräfte auftreten, abgeschnittenes Stück mit allen daran angreifenden Kräften (äußere Lasten und Schnittkräfte, letztere zunächst als Zugkräfte annehmen) für sich herauszeichnen und die Gleichgewichtsbedingungen ansetzen.

Zeichnung (Culmann): Äußere Kräfte zu einer Resultierenden zusammenfassen und diese mit Hilfe der Zwischenresultierenden Z (siehe S. 21) in die 3 Stabkräfte zerlegen, im Beispiel (siehe Abb. 76a) P in \mathfrak{C}_3 und Z ; Z in \mathfrak{C}_1 und \mathfrak{C}_2 zerlegen.

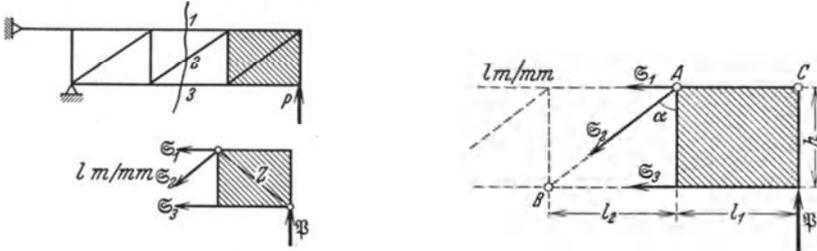


Abb. 76. Schnitt durch ein Fachwerk. Bestimmen der Schnittkräfte a) mit Hilfe der Zwischenresultierenden, b) mit Hilfe der Momentenmethode.

Rechnung (Ritter): Schnittpunkt zweier unbekannter Kräfte als Momentenpunkt wählen (siehe Abb. 76b) und mit Hilfe der Momentengleichung die 3. Unbekannte bestimmen, d. h. Anwendung der Gleichgewichtsbedingung 2 (siehe S. 27).

$$\sum \mathfrak{M}_A = 0 = P \cdot l_1 - S_3 \cdot h, \quad S_3 = P \cdot \frac{l_1}{h} \quad \text{Zug,}$$

$$\sum \mathfrak{M}_B = 0 = P \cdot (l_1 + l_2) + S_1 \cdot h, \quad S_1 = -P \cdot \frac{l_1 + l_2}{h} \quad \text{Druck,}$$

$$\sum \mathfrak{M}_C = 0 = S_2 \cdot \cos \alpha \cdot l_1 - S_3 \cdot h, \quad S_2 = S_3 \cdot \frac{h}{l_1 \cdot \cos \alpha} \quad \text{Zug,}$$

oder statt der 3. Gleichung

$$\sum Y = 0 = -S_2 \cdot \cos \alpha + P, \quad S_2 = \frac{P}{\cos \alpha} \quad \text{Zug.}$$

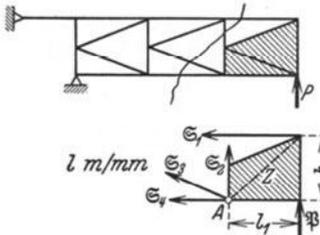


Abb. 77. Schnitt durch vier unbekannte Fachwerkstäbe.

- a) Lageplan des Fachwerkes.
- b) Kräfte am abgeschnittenen Fachwerkteil.

Gibt es einen ungenau zu bestimmenden flachen Schnitt, so ist es ratsam, die Gleichgewichtsbedingungen in der Form $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$, $\sum \mathfrak{M} = 0$ (siehe S. 27) anzusetzen.

4 Stäbe dürfen geschnitten werden, wenn 3 von ihnen durch einen Punkt gehen (siehe Abb. 77). Die eine Stabkraft kann dann mit Hilfe der Momentengleichung um den Schnittpunkt der 3 anderen Kräfte

$$\left[\sum \mathfrak{M}_A = 0 = P \cdot l_1 + S_1 \cdot h; \quad S_1 = -P \cdot \frac{l_1}{h} \quad \text{Druck} \right]$$

oder mit Hilfe der Zwischenresultierenden [$\mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}_1$] bestimmt werden. Ist nunmehr die Stabkraft \mathfrak{C}_1 be-

kannt, so kann mit dem Cremonaplan an der rechten oberen Ecke des Fachwerkes begonnen werden.

Liegt der Schnittpunkt der 3 Stäbe im Unendlichen, d. h. sind sie einander parallel, so erhält man die Kraft im 4. geschnittenen Stabe aus dem Gleichgewicht der Kräfte in der senkrechten Richtung; siehe Abb. 78.

$$\sum Y = 0 = +P - S_4 \cdot \cos \alpha;$$

$$S_4 = + \frac{P}{\cos \alpha} \text{ Zug.}$$

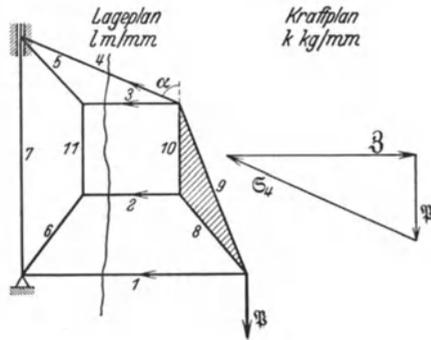


Abb. 78. Schnitt durch ein Fachwerk mit parallelen Stäben. Bei zeichnerischer Lösung ist zu beachten, daß die Zwischenresultierende Z aus P und S_4 bzw. aus den 3 parallelen Stabkräften S_1, S_2 und S_3 diesen 3 Stabkräften parallel ist.

δ) Hennebergs Stabvertauschung.

Kann man den Cremonaplan von einer Stelle an nicht mehr weiter zeichnen, weil an jedem Knotenpunkt 3 oder mehr unbekannte Stabkräfte auftreten und läßt sich nach der Schnittmethode nicht eine Stabkraft bestimmen, so ist ein Stab zu entfernen und an beliebiger Stelle ein Ersatzstab E einzuführen.

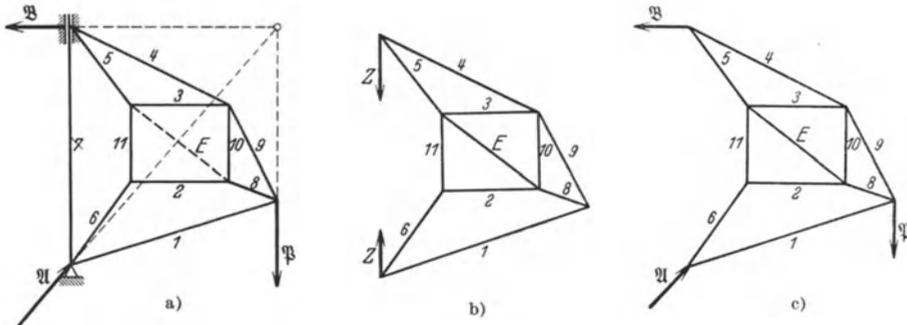


Abb. 79. Bestimmen der Stabkräfte mit Hilfe der Hennebergschen Stabvertauschung. a) Einführen des Ersatzstabes E . b) Ersatzfachwerk mit den inneren Kräften. c) Ersatzfachwerk mit den äußeren Kräften.

1. U -Plan (siehe Abb. 79):

Alle äußeren Lasten, auch die Auflagerkräfte, werden entfernt. Statt des weggenommenen Stabes (in Abb. 79 ist es Stab 7) wird eine Zugkraft Z an beiden Knotenpunkten angebracht, und die durch Z im Ersatzstabe E auftretende Kraft U_e bestimmt.

2. T -Plan (siehe Abb. 79):

Es wird die im Ersatzstab durch die äußeren Lasten und die Auflagerkräfte entstehende Spannung T_e bestimmt. An Stelle des entfernten Stabes wird jetzt keine Kraft eingeführt.

3. Überlagerung des U - und T -Planes:

Z kg im weggenommenen Stabe x ($x = 7$ in Abb. 79) rufen im Ersatzstabe U_e kg hervor,
 S_x kg „ „ „ „ „ „ $\frac{S_x}{Z} \cdot U_e$ kg „
 die äußeren Lasten rufen im Ersatzstabe T_e kg hervor

mithin ist die Gesamtkraft im Ersatzstabe $\frac{S_x}{Z} \cdot U_e + T_e = 0$,
 da ja der Ersatzstab in Wirklichkeit nicht vorhanden ist, also keine Kräfte aufnehmen kann.
 Somit erhält man für die gesuchte Kraft im Stabe x : $S_x = - T_e \cdot \frac{Z}{U_e}$. Weitere Stabkräfte

erhält man durch Überlagern des U - und T -Planes, z. B. $S_i = T_i + \frac{S_x}{Z} U_i$ oder mit Hilfe des Cremonaplanes für das gegebene Fachwerk, der jetzt an dem Knotenpunkt des erst weggenommenen Stabes x begonnen werden kann.

Konstruktionsgang der Kraftpläne:

U -Plan:		T -Plan:
äußere Kräfte PAB weglassen, statt Stab 7 die Kraft Z anbringen:		äußere Kräfte PAB Stab 7 und Z entfernen
Z 1 6		\mathfrak{A} 6 1
6 2 11		6 2 11
Z 5 4		\mathfrak{B} 5 4
5 11 3 U_x		5 11 3 T_x

ε) Kinematische Methode.

Ein Stab oder eine Auflagerfessel wird entfernt und so das erst starre Fachwerk einfach beweglich gemacht. An Stelle des Stabes oder Auflagers wird die (gesuchte) Kraft angebracht. Die Gesamtarbeit aller Kräfte bei einer kleinen Verschiebung ist 0 (siehe S. 28 u. 99).

$$\sum P \cdot ds \cdot \cos \hat{P} ds = \sum P \cdot v \cdot dt \cdot \cos \hat{P} v = \sum P \cdot \delta = 0.$$

Die virtuellen Verschiebungen ds oder Geschwindigkeiten v werden nach den Gesetzen der Kinematik (siehe S. 66) bestimmt. Ergibt sich für die gesuchte Stab- oder Auflagerkraft der Wert ∞ , so ist das gegebene Fachwerk trotz des (nur für die Rechnung entfernten) Stabes oder Auflagers nicht starr; es liegt ein Ausnahmefall vor (siehe S. 39).

Beispiel: siehe Abb. 80.

Gesucht ist die Stabkraft \mathfrak{S}_0 . Stab 0 entfernen, Zugkräfte \mathfrak{S}_0 in den Knotenpunkten anbringen, Geschwindigkeit eines Kraftpunktes annehmen und die Geschwindigkeiten der anderen Kraftangriffspunkte bestimmen, z. B. nach der Methode der gedrehten Geschwindigkeiten (siehe S. 67). $M_1 \equiv A$ ist der Momentanpol der starren Scheibe I. Aus der Annahme der Geschwindigkeit v_1 des Kraftangriffspunktes \mathfrak{P}_1 folgen die von \mathfrak{S}_0 und \mathfrak{P}_2 . Für die starre Scheibe II ist \mathfrak{M}_2 der Momentanpol. Daraus folgen die Geschwindigkeiten von \mathfrak{P}_3, S_0 und B^* . Die Lote von den Endpunkten der gedrehten Geschwindigkeiten auf die Krafrichtungen sind den in

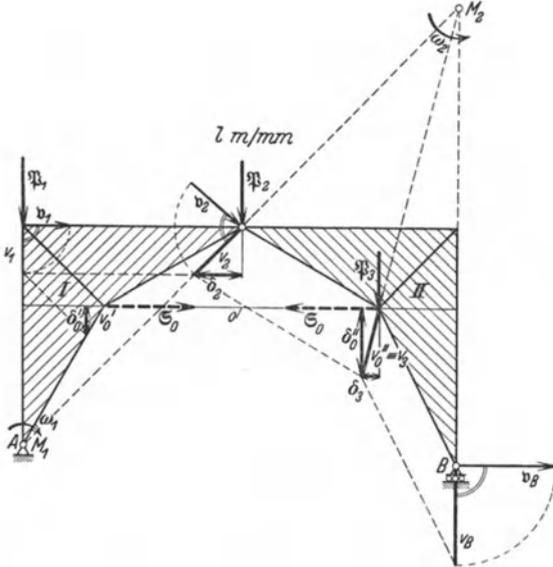


Abb. 80. Bestimmen der Stabkraft \mathfrak{S}_0 mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen.

die Arbeitsgleichung einzusetzenden Verschiebungen δ verhältig¹.

$$\begin{aligned} \sum A = \sum P \cdot \delta = 0 &= P_1 \cdot 0 + S_0 \cdot \delta'_0 + P_2 \cdot \delta_2 - S_0 \cdot \delta''_0 + P_3 \cdot \delta_3 + B \cdot 0, \\ S_0 &= \frac{P_2 \cdot \delta_2 + P_3 \cdot \delta_3}{\delta''_0 - \delta'_0}. \end{aligned}$$

* Im Schrifttum der Bauingenieure ist es üblich, die Verbindungslinien der Endpunkte der gedrehten Geschwindigkeiten als F' -Figur zu bezeichnen. Die F' -Figur ist der zugehörigen Scheibe ähnlich.

¹ Bestimmen der in der Krafrichtung liegenden Verschiebung δ (siehe Abb. 81). Ge-

d) Ergebnis = Stabkrafttabelle.

Maßstab des Kraftecks k kg/mm.

Stab —	Länge der Kraft im Krafteck mm	Kraftgröße kg	Kraftart Zug + Druck —
1	l_1	$k \cdot l_1$.
2	l_2	$k \cdot l_2$.
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮

Vom Knotenpunkt weggehende Kraft bedeutet Zug; zum Knotenpunkt hingehende Kraft bedeutet Druck. Oft ist es praktisch, auch im Lageplan die Beanspruchungsart durch Pfeile an den Knotenpunkten (siehe Abb. 69), oder Doppellinien bei gedrückten Stäben anzugeben.

geben: Momentanpol M , A , v_A , \mathfrak{P} ; v_a auf den Radius klappen = v_{90} , Linienzug ab , Lot bc auf \mathfrak{P} fallen. Die Arbeit der Kraft P ist:

$$A = P \cdot v \cdot dt \cdot \cos \varphi,$$

es ist aber

$$v \cdot \cos \varphi = bc = \frac{\delta}{dt},$$

mithin

$$A = P \cdot \delta.$$

Die Richtung der Geschwindigkeiten ist aus den Winkelgeschwindigkeiten um die jeweiligen Momentanpole leicht erkennbar (siehe S. 67). Haben Kraft und Geschwindigkeitskomponente in der Krafttrichtung denselben Pfeilsinn, so ist die Arbeit positiv, im entgegengesetzten Falle negativ.

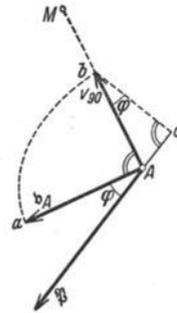


Abb. 81. Bestimmen der virtuellen Verschiebungskomponente in der Krafttrichtung.

C. Kinematik.

Lehre von der Bewegung ohne Beachten der wirkenden Kräfte.
Es werden Beziehungen zwischen Ort und Zeit aufgestellt.

I. Grundbegriffe.

1. Bewegungsarten.

Drehbewegung = Rotation.

Zum Bestimmen der neuen Lage sind zwei Angaben erforderlich: Drehachse und Drehwinkel.

Punkte auf einer ausgezeichneten Geraden — der Drehachse — sind in Ruhe. Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen aller anderen Punkte sind ihrer Entfernung von der Drehachse verhältig.

Die Bahnen der Punkte sind Kreise mit dem Abstand von der Drehachse als Radius.

Ein Massenteilchen ändert ständig seine Richtung (siehe Abb. 82).

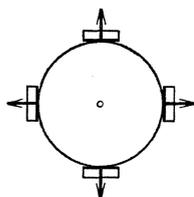


Abb. 82. Drehbewegung.

Fortschreitende Bewegung = Translation.

Zum Bestimmen der neuen Lage genügt eine Angabe: Strecke von der Anfangslage eines Punktes zu einer Endlage.

Alle Punkte haben die gleiche Geschwindigkeit und Beschleunigung; kein Punkt ist in Ruhe.

Alle Punkte beschreiben kongruente Bahnen. Die Bahnen können auch Kreise sein; z. B. Kuppelstange einer Lokomotive.

Ein Massenteilchen behält stets die gleiche Richtung bei (siehe Abb. 83).

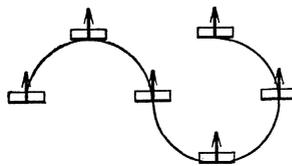


Abb. 83. Fortschreitbewegung.

Schraubung = Allgemeinste Bewegung.

Drehung um eine Achse und Fortschreiten in dieser Achsrichtung.

Entsteht durch Überlagerung von Rotation und Translation oder auch von Rotationen um beliebig verteilte Achsen.

2. Zeitliche Änderungen.

Drehende Bewegung.

Weg: φ ; $d\varphi$ Dimension [1].

Geschwindigkeit: = zeitliche Änderung des Weges

$$\bar{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad \left[\frac{1}{s} \right],$$

Beschleunigung: = zeitliche Änderung der Geschwindigkeit

$$\bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \dot{\bar{\omega}} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} \quad \left[\frac{1}{s^2} \right],$$

Fortschreitende Bewegung

s , ds Dimension [m]¹.

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \quad \left[\frac{m}{s} \right].$$

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s} \quad \left[\frac{m}{s^2} \right].$$

¹ Siehe Fußnote 1 auf S. 47.

3. Vektorcharakter.

Weg¹, Geschwindigkeit und Beschleunigung sind gerichtete Größen = Vektoren, und zwar sind die Vektoren der

Drehbewegung (Rotation):

gebundene — axiale — Vektoren wie die Kräfte (siehe S. 2).

Sie dürfen nur in ihrer Richtung verschoben werden. Bei Parallelverschieben tritt noch eine fortschreitende Bewegung auf = Moment der Drehbewegung (vgl. S. 3, Parallelverschieben einer Kraft). Der Drehsinn ist entsprechend dem gewählten Koordinatensystem (rechts- oder linkshändig, siehe S. 2).

Fortschreitende Bewegung (Translation):

freie — planare — Vektoren, wie Kraftmomente (siehe S. 2).

Sie dürfen in ihrer Richtung und parallel dazu verschoben werden. Sie sind das Moment (äußeres — Vektor — Produkt) $\mathbf{v} = [\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}]$ aus dem jeweiligen Radius \mathbf{r} vom Aufpunkt zum $\boldsymbol{\omega}$ -Vektor und dem Drehvektor $\boldsymbol{\omega}$ (siehe S. 4). Bei geradliniger Fortschreitbewegung ist der Radius $|\mathbf{r}| = \infty$.

Die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ ruft für jeden Punkt des Feldes (Aufpunkt) eine Fortschreitgeschwindigkeit $\mathbf{v} = [\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}]$ = Moment der Winkelgeschwindigkeit in bezug auf den betrachteten Aufpunkt hervor. Liegt der Aufpunkt A im Koordinatenursprung O und besitzt ein Punkt des $\boldsymbol{\omega}$ -Vektors die Koordinaten $\mathbf{r} = ix + jy + kz$, so ist:

$$\mathbf{v}_A \equiv \mathbf{v}_O = [\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix},$$

$$v_{Ax} \equiv v_{Ox} = + \begin{vmatrix} y & z \\ \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} = y \cdot \omega_z - z \cdot \omega_y,$$

$$v_{Ay} \equiv v_{Oy} = - \begin{vmatrix} x & z \\ \omega_x & \omega_z \end{vmatrix} = -x \cdot \omega_z + z \cdot \omega_x,$$

$$v_{Az} \equiv v_{Oz} = + \begin{vmatrix} x & y \\ \omega_x & \omega_y \end{vmatrix} = +x \cdot \omega_y - y \cdot \omega_x.$$

Besitzt der Aufpunkt A die Koordinaten $\mathbf{r}_A = ix_A + jy_A + kz_A$ und ein Punkt des $\boldsymbol{\omega}$ -Vektors die Koordinaten $\mathbf{r}_\omega = ix + jy + kz$, so ist die Entfernung vom Aufpunkt zum $\boldsymbol{\omega}$ -Vektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\omega - \mathbf{r}_A$, also

$$\mathbf{v}_A = [(\mathbf{r}_\omega - \mathbf{r}_A) \cdot \boldsymbol{\omega}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}.$$

Sind $x, y, z = 0$, d. h. geht der $\boldsymbol{\omega}$ -Vektor durch den Koordinatenursprung hindurch und besitzt der Aufpunkt die Koordinaten $x_A y_A z_A$, so ist seine Geschwindigkeit (siehe Abb. 84)

$$\mathbf{v}_A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -x_A & -y_A & -z_A \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_A & y_A & z_A \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} = [\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}],$$

$$v_{Ax} = \omega_y \cdot z_A - \omega_z \cdot y_A,$$

$$v_{Ay} = \omega_z \cdot x_A - \omega_x \cdot z_A,$$

$$v_{Az} = \omega_x \cdot y_A - \omega_y \cdot x_A.$$

Soll der Aufpunkt der (resultierenden) Drehachse angehören, so ist

$$v_{Ax} = v_{Ay} = v_{Az} = 0,$$

mithin verhält sich:

$$\omega_x : \omega_y : \omega_z = x_A : y_A : z_A.$$

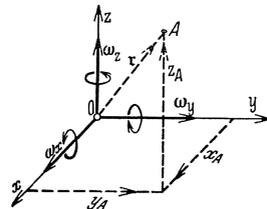


Abb. 84. Geschwindigkeit des Aufpunktes A infolge der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ in O ist $\mathbf{v}_A = [\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}]$.

¹ Der Weg ist nur dann ein Vektor, wenn es sich um ein kleines Stück, ein Wegelement $d\vec{\varphi}$, $d\vec{s}$ handelt. Größere Wege können nur dann als Vektoren dargestellt werden, wenn die Drehung um eine konstante Achse oder die Bewegung auf einer Geraden stattfindet.

II. Zusammensetzen von Bewegungen¹.

1. Fortschreitbewegungen.

Addition der Vektoren wie bei den Momenten (siehe S. 26), d. h. beliebig verteilte Vektoren nach einem Punkt parallel verschieben und dort addieren.

2. Drehbewegungen.

a) Drehungen um zwei sich schneidende Achsen.

(Vgl. Kräfte an einem Punkt, siehe S. 13.)

Zeichnung.

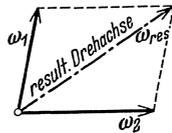


Abb. 85.
Addition zweier Winkelgeschwindigkeiten.

Vektoren nach dem Parallelogrammgesetz addieren (siehe Abb. 85).

Rechnung.

Achsenkreuz wählen, Richtungswinkel $\alpha_{1,2}; \beta_{1,2}$ gegen x - bzw. y -Achse.

Komponenten in der x -Achse

$$\begin{aligned} \omega_x &= \omega_{1x} + \omega_{2x}, \\ &= \omega_1 \cdot \cos \alpha_1 + \omega_2 \cdot \cos \alpha_2. \end{aligned}$$

Komponenten in der y -Achse

$$\begin{aligned} \omega_y &= \omega_{1y} + \omega_{2y}, \\ &= \omega_1 \cdot \cos \beta_1 + \omega_2 \cdot \cos \beta_2, \\ &= \omega_1 \cdot \sin \alpha_1 + \omega_2 \cdot \sin \alpha_2, \end{aligned}$$

resultierende Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_{res} = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}.$$

Richtung der resultierenden Winkelgeschwindigkeit (Drehachse)

$$\cos \alpha_r = \frac{\omega_x}{\omega_{res}}; \quad \cos \beta_r = \frac{\omega_y}{\omega_{res}} = \sin \alpha_r.$$

b) Drehungen um parallele Achsen.

(Vgl. S. 13 parallele Kräfte; Schwerpunkt.)

Zeichnung (siehe Abb. 86).

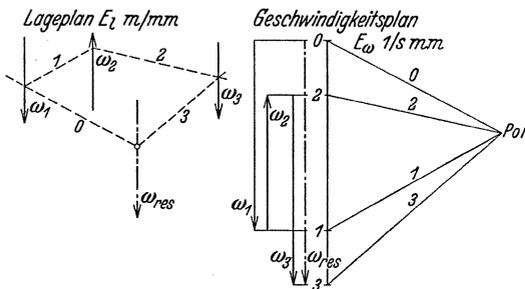


Abb. 86. Addition paralleler Winkelgeschwindigkeiten.

Größe: Resultierende im Geschwindigkeitseck.

Lage: Die Resultierende geht durch den Schnittpunkt des ersten und letzten Seilstrahles im Lageplan.

Rechnung

$$\omega_{res} = \sum \bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3.$$

Abstand vom Koordinatenursprung

$$l = \frac{\sum_1^n l_i \omega_i}{\omega_{res}}.$$

l_i = senkrechter Abstand vom gewählten Bezugspunkt.

¹ Als Beispiel wird das Zusammensetzen von Geschwindigkeiten gezeigt. In gleicher Weise werden auch Elementarwege $d\vec{\varphi}$, $d\vec{s}$ und Beschleunigungen $\vec{\varepsilon}$, b zusammengesetzt.

c) Zwei gleich große aber entgegengesetzte Drehungen.

(Vgl.: zwei gleich große, aber entgegengesetzte Kräfte = Kräftepaar = Moment.)

Sie ergeben für jeden Punkt des Feldes eine reine fortschreitende Bewegung $v = [a \cdot \bar{\omega}]^*$ (siehe Abb. 87)

$v \perp a$ und $\perp \bar{\omega}$ so, daß $a, \bar{\omega}, v$ ein rechtshändiges Koordinatensystem bilden (siehe S. 2).

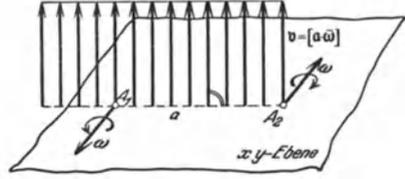


Abb. 87. Fortschrittgeschwindigkeit als Folge von zwei gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Winkelgeschwindigkeiten.

d) Drehungen um drei sich rechtwinklig schneidende Achsen.

(Vgl. S. 15, räumlich verteilte Kräfte an einem Punkt.)

Zeichnung (siehe Abb. 88).

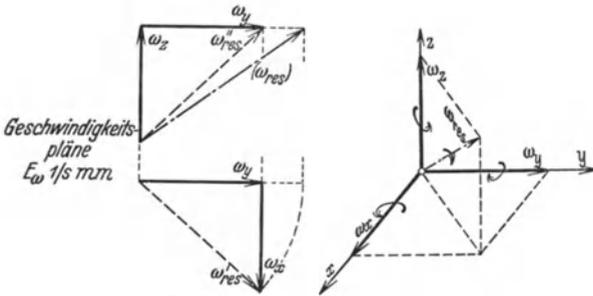


Abb. 88. Resultierende aus drei zueinander senkrechten Winkelgeschwindigkeiten.

Zusammensetzen der Vektoren im Aufriß und Grundriß zu ω''_{res} bzw. ω'_{res} und Bestimmen der wahren Größe von $|\bar{\omega}_{res}|$ (siehe S. 3).

Rechnung.

$$|\bar{\omega}_{res}| = \omega_{res} = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$$

$$\cos \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{\omega_{xyz}}{\omega_{res}}$$

e) Drehungen um beliebig verteilte Achsen.

(Vgl. S. 16ff., Kräfte beliebig im Raume verteilt.)

α) Resultierende Drehung um eine durch einen beliebig gewählten Punkt A gehende Achse und Fortschreiten des Bezugspunktes A . (Vgl. S. 16, Resultierende Kraft und Moment bez. A .)

* Für den Punkt A_1 ist:

$$v_1 = [r_2 \cdot \bar{\omega}_2] \quad (\text{s. Abb. 89}).$$

Für den Punkt A_2 ist:

$$v_2 = [r_1 \cdot \bar{\omega}_1],$$

$$= [-r_2 \cdot -\bar{\omega}_2],$$

$$= [r_2 \cdot \bar{\omega}_2] = v_1.$$

Für den Punkt A_3 ist:

$$v'_3 = [r'_3 \cdot \bar{\omega}_1] = [r'_3 \cdot -\bar{\omega}_2],$$

$$v''_3 = [r''_3 \cdot \bar{\omega}_2],$$

$$v_3 = v'_3 + v''_3$$

$$= [(-r'_3 + r''_3) \cdot \bar{\omega}_2],$$

$$= [r_2 \cdot \bar{\omega}_2] = v_1,$$

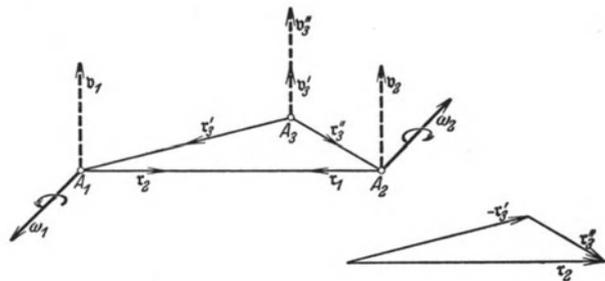


Abb. 89. Fortschrittgeschwindigkeit als Folge von zwei gleich großen aber entgegengesetzt gerichteten Winkelgeschwindigkeiten.

d. h. die Geschwindigkeiten in den beliebig gewählten Punkten $A_{1,2,3}$ sind einander gleich.

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_A &= \Sigma(\bar{\omega}), & \omega_{Ax} &= \Sigma \omega_x, \\ \omega_A &= \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}, & \omega_{Ay} &= \Sigma \omega_y, & \cos \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \\ \psi \end{pmatrix} &= \frac{\omega_{Ax} \psi z}{\omega_A}, \\ v_A &= \Sigma[(r - r_A) \cdot \bar{\omega}], & v_{Ax} &= \Sigma \begin{vmatrix} y - y_A & z - z_A \\ \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}, \\ v_A &= \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2 + v_{Az}^2}, & v_{Ay} &= \Sigma \begin{vmatrix} z - z_A & x - x_A \\ \omega_z & \omega_x \end{vmatrix}, & \cos \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} &= \frac{v_{Ax} \psi z}{v_A}, \\ & & v_{Az} &= \Sigma \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A \\ \omega_x & \omega_y \end{vmatrix}, \\ \cos \delta &= \cos(\widehat{\bar{\omega}_A v_A}) = \frac{\omega_{Ax} \cdot v_{Ax} + \omega_{Ay} \cdot v_{Ay} + \omega_{Az} \cdot v_{Az}}{\omega_A \cdot v_A}. \end{aligned}$$

β) Drehungen um 2 windschiefe Achsen (vgl. S. 17, Kraftkreuz). Nach Reduktion auf den Punkt A ($\bar{\omega}_A$ und v_A siehe oben) wird die Geschwindigkeit $v_A = v_{Ax} + v_{Ay} + v_{Az}$ aufgelöst in 3 Drehungspaare, z. B. in

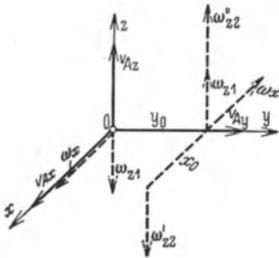


Abb. 90. Auflösen einer Fortschrittgeschwindigkeit in Winkelgeschwindigkeiten-Paare.

$$\begin{aligned} v_{Ax} &= [v_0 \cdot \bar{\omega}_{z1}], \\ v_{Ay} &= [x_0 \cdot \bar{\omega}_{z2}], \\ v_{Az} &= [v_0 \cdot \bar{\omega}_x], \end{aligned}$$

wobei x_0 und y_0 beliebig gewählt werden (siehe Abb. 90). Die Drehungen im Punkte A werden zusammengefaßt zu $\bar{\omega}'_A = \bar{\omega}_A + \bar{\omega}_{z1} + \bar{\omega}_x$. Ebenfalls werden die Drehungen in der zur xz -Ebene im Abstände y_0 parallelen Ebene zu einer Resultierenden $\bar{\omega}'_2 = \bar{\omega}'_z + \bar{\omega}_{z1} + \bar{\omega}'_2 + \bar{\omega}_x$ vereinigt, die zu ω'_A im Punkte A windschief liegt.

γ) Drehungs- und Fortschrittsvektor in der gleichen Geraden = Schraubung (vgl. S. 18, Dynamik = Kraftschraube). Das Moment der Drehgeschwindigkeiten in bezug auf den — noch gesuchten Punkt $A_{x_0 y_0 z_0}$ der Schraubennachse ist $v_A = \Sigma[(r - r_A) \cdot \bar{\omega}]$ (siehe oben unter α). Ist A z. B. der Durchstoßungspunkt der Schraubungsnachse mit der x, y -Ebene, also $z_0 = 0$, so lassen sich $x_0 y_0$ aus der Bedingung (siehe S. 19)

$$\frac{\omega_{Ax}}{v_{Ax}} = \frac{\omega_{Ay}}{v_{Ay}} = \frac{\omega_{Az}}{v_{Az}}$$

bestimmen.

3. Fortschritt- und Drehbewegungen.

Es wird jede Bewegungsart für sich zu einer resultierenden Fortschrittgeschwindigkeit v_{A0} und einer resultierenden Drehbewegung $\bar{\omega}_A$ und zugehöriges v'_A vereinigt (siehe S. 48/49). Die Fortschrittgeschwindigkeit v_{A0} und v'_A aus der Zusammenfassung der Winkelgeschwindigkeiten werden nochmals zusammengefaßt. Das Ergebnis ist dann die Fortschrittgeschwindigkeit $v_A = v_{A0} + v'_A$ des Punktes A und die Winkelgeschwindigkeit ω_A im Punkte A, die nach dem vorigen Abschnitt noch weiter behandelt werden können. In Komponentendarstellung erhält man:

$$\begin{aligned} \omega_{Ax} &= \Sigma \omega_x, & v_{Ax} &= \Sigma v_{x0} + \Sigma \begin{vmatrix} y - y_A & z - z_A \\ \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}, \\ \omega_{Ay} &= \Sigma \omega_y, & v_{Ay} &= \Sigma v_{y0} + \Sigma \begin{vmatrix} z - z_A & x - x_A \\ \omega_z & \omega_x \end{vmatrix}, \\ \omega_{Az} &= \Sigma \omega_z, & v_{Az} &= \Sigma v_{z0} + \Sigma \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A \\ \omega_x & \omega_y \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

hierbei bedeutet

- Zeiger $_0$ die fortschreitenden Geschwindigkeiten;
- xyz die Entfernung des jeweiligen ω -Vektors vom Koordinatenursprung;
- $x_A y_A z_A$ die Entfernung des gewählten Aufpunktes vom Koordinatenursprung.

III. Koordinatensysteme.

1. Allgemeines.

a) Koordinaten.

Kartesische Koordinaten

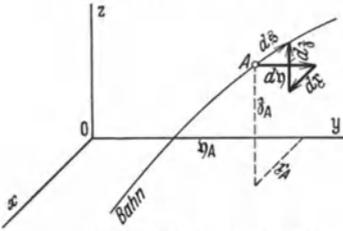


Abb. 91. Weg in kartesischen Koordinaten.

raumfestes oder körperfestes rechtwinkeliges rechts- (siehe Abb. 91) oder linkshändiges Achsenkreuz $Oxyz$.

Polarkoordinaten

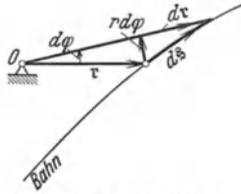


Abb. 92. Weg in Polarkoordinaten.

raumfester oder körperfester Punkt O (siehe Abb. 92). Fahrstrahl r , Fahrstrahlwinkel φ .

Natürliche Koordinaten

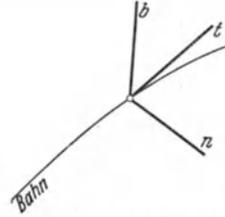


Abb. 93. Natürliche Koordinaten.

auf Bahn des Körpers mitfahrend (siehe Abb. 93). t = Bahntangente, n = Bahnnormale (in Schmiegungsebene gelegen, Krümmungsradius), b = Binormale $\perp n$ und $\perp t$.

b) Weg: \hat{s} .

Kartesische Koordinaten (siehe Abb. 91).

$$d\hat{s} = dx + dy + dz,$$

$$|d\hat{s}| = ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} \cdot dx + \text{Const.},$$

$$= \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \cdot dy + \text{Const.},$$

$$= \int \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 1} \cdot dz + \text{Const.},$$

Polarkoordinaten (siehe Abb. 92).

$$d\hat{s} = dr + r \cdot d\varphi,$$

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 \cdot d\varphi^2},$$

$$s = \int \sqrt{1 + r^2 \cdot \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} \cdot dr + \text{Const.},$$

$$= \int \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2} \cdot d\varphi + \text{Const.}$$

c) Geschwindigkeit: $\mathbf{v} = \frac{d\hat{s}}{dt} = \dot{\hat{s}}$.

Richtung von $d\hat{s}$ = Richtung der Bahntangente.

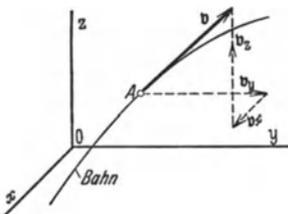


Abb. 94. Geschwindigkeit in kartesischen Koordinaten.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_x + v_y + v_z, \\ v_x &= v \cdot \cos \alpha^* = \dot{x}, \\ v_y &= v \cdot \cos \beta = \dot{y}, \\ v_z &= v \cdot \cos \gamma = \dot{z}. \end{aligned}$$

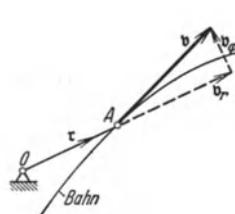


Abb. 95. Geschwindigkeit in Polarkoordinaten.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_r + v_\varphi, \\ v_r &= \dot{r}, \\ v_\varphi &= r \cdot \dot{\varphi} = r \cdot \omega. \end{aligned}$$

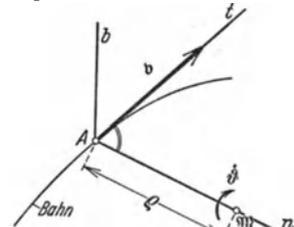


Abb. 96. Geschwindigkeit in natürlichen Koordinaten.

$$\begin{aligned} v &= \rho \cdot \dot{\varphi}, \\ \rho &= \text{Krümmungsradius.} \end{aligned}$$

* $\alpha\beta\gamma$ = Richtungswinkel gegen die xyz -Achse.

d) Flächengeschwindigkeit:

$\frac{d\mathcal{F}}{dt}$ = vom Fahrstrahl r in der Zeiteinheit bestrichene Fläche,

= $\frac{1}{2}$ · Moment der Geschwindigkeit.

Kartesische Koordinaten.

$$\left(\frac{d\mathcal{F}}{dt}\right)_x = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} y & z \\ \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (y \dot{z} - z \dot{y})^*,$$

$$\left(\frac{d\mathcal{F}}{dt}\right)_y = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} z & x \\ \dot{z} & \dot{x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (z \dot{x} - x \dot{z}),$$

$$\left(\frac{d\mathcal{F}}{dt}\right)_z = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ \dot{x} & \dot{y} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x \dot{y} - y \dot{x}).$$

Polarkoordinaten.

$$d\mathcal{F} = \frac{1}{2} [r [d\varphi r]],$$

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{1}{2} [r \cdot \dot{\varphi}]^{**},$$

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \frac{1}{2} \cdot [r \cdot v_\varphi],$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{d\varphi}{dt},$$

$$= \frac{1}{2} r \cdot \omega.$$

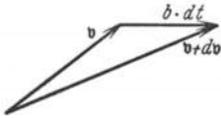


Abb. 97. Beschleunigung = zeitliche Änderung der Geschwindigkeit nach Größe und Richtung.

e) Beschleunigung: $b = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2\mathfrak{s}}{dt^2} = \mathfrak{s}''.$

In Richtung der Geschwindigkeitsänderung dv (Größen- und Richtungsänderung von v , siehe Abb. 97) = Richtung der wirkenden Kraft (siehe S. 90), daher stets nach der hohlen Bahnseite gerichtet, = Geschwindigkeit, mit der der Hodograf durchlaufen wird (siehe S. 58).

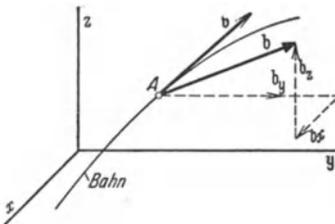


Abb. 98. Beschleunigung in kartesischen Koordinaten.

$$b = b_x + b_y + b_z,$$

$$b_x = b \cdot \cos \alpha = \dot{v}_x = \ddot{x},$$

$$b_y = b \cdot \cos \beta = \dot{v}_y = \ddot{y},$$

$$b_z = b \cdot \cos \gamma = \dot{v}_z = \ddot{z}.$$

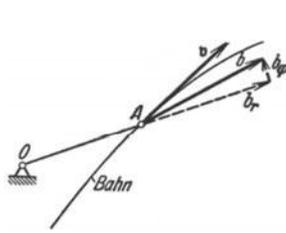


Abb. 99. Beschleunigung in Polarkoordinaten.

$$b = b_r + b_\varphi,$$

$$b_r = \ddot{r} - v_\varphi \cdot \dot{\varphi}^{***},$$

$$= \ddot{r} - r \cdot \omega^2,$$

$$b_\varphi = \dot{\varphi} r + 2 \omega \cdot v_r^{***},$$

$$= \varepsilon \cdot r + b_{\text{Coriolis}},$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt} (\omega r^2).$$

b_r = Radialbeschleunigung,
 b_φ = Umfangsbeschleunigung

Coriolisbeschleunigung:
 Größe: Doppeltes Produkt aus Winkelgeschwindigkeit

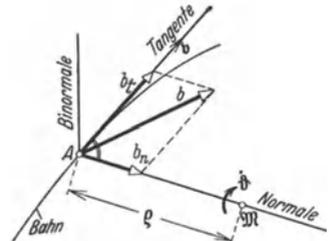


Abb. 100. Beschleunigung in natürlichen Koordinaten.

$$b = b_n + b_t,$$

$$b_n = -v \cdot \dot{\vartheta},$$

$$= -\rho \cdot \dot{\vartheta}^2,$$

$$= -v^2/\rho,$$

$$b_t = \dot{v},$$

$$= \rho \cdot \ddot{\vartheta}.$$

Normalbeschleunigung b_n
 bewirkt Richtungsänderung von v .

* Der Zeiger $_{xyz}$ gibt die Achsrichtung an, in der der Vektor liegt, also die Achse, die auf der Projektion der überstrichenen Fläche senkrecht steht (vgl. S. 5).

** Es ist $v = v_r + v_\varphi$ also $[rv] = [rv_r] + [rv_\varphi]$; $[rv_r] = 0$, da beide Vektoren in derselben Richtung liegen (siehe S. 5).

*** Bequeme Merkregel siehe Relativbewegung auf S. 58.

und auf dieser senkrecht stehender Komponente der Radialgeschwindigkeit.

Richtung: Obige Komponente der Radialgeschwindigkeit um 90° im Sinne von ω drehen, d. h. $b_{cor} = 2[\bar{\omega} \cdot \dot{r}]$.

Tangentialbeschleunigung b_t bewirkt Größenänderung von v .

f) Flächenbeschleunigung:

$$\frac{d^2 \mathfrak{F}}{dt^2} = \frac{1}{2} \cdot \text{Moment der Beschleunigung.}$$

$$\frac{d^2 \mathfrak{F}}{dt^2} = \frac{1}{2} \cdot [r \cdot b],$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F}{dt^2} &= \frac{1}{2} r \cdot b_\varphi = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (\varepsilon \cdot r + b_{cor}), \\ &= \frac{1}{2} \cdot r \cdot (\ddot{\varphi} \cdot r + 2 \omega \cdot v_r), \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} (\omega \cdot r^2). \end{aligned}$$

2. Sonderfälle.

a) Bewegung auf einer Kreisbahn.

Kartesische Koordinaten. | Polarkoordinaten. | Natürliche Koordinaten.
 Kreismittelpunkt = Koordinatenursprung = Krümmungsmittelpunkt.

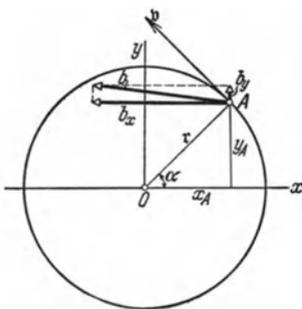


Abb. 101.

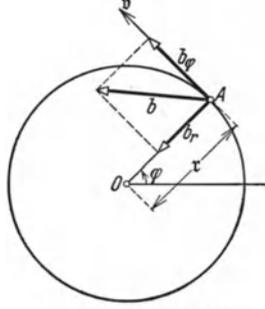


Abb. 102.

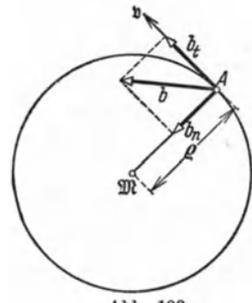


Abb. 103.

Geschwindigkeit b und Beschleunigung b bei einer Kreisbewegung
 in kartesischen Koordinaten | in Polarkoordinaten | in natürlichen Koordinaten.

Aufpunktkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi, \\ y &= r \cdot \sin \varphi, \\ s - s_0 &= r \cdot \varphi. \end{aligned}$$

Geschwindigkeit:

Weg: $v_x = -r \cdot \omega \cdot \sin \varphi,$
 $v_y = +r \cdot \omega \cdot \cos \varphi,$
 $v = r \cdot \omega.$

Beschleunigung:

$$\begin{aligned} b_x &= -r \omega^2 \cdot \cos \varphi - \underline{r \cdot \varepsilon \cdot \sin \varphi}, \\ b_y &= -r \omega^2 \cdot \sin \varphi + \underline{r \cdot \varepsilon \cdot \cos \varphi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \text{const}, \\ \dot{r} &= 0, \\ s - s_0 &= r \cdot \varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_r &= 0, \\ v_\varphi &= r \cdot \omega, \\ v &= v_\varphi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_r &= -v_\varphi \cdot \omega = -r \omega^2, \\ b_\varphi &= \underline{r \cdot \varepsilon} = r \cdot \dot{\omega}, \end{aligned}$$

$$r \equiv \rho.$$

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{v^2}{\rho} = -v \cdot \omega = -r \omega^2, \\ b_t &= \underline{r \cdot \varepsilon}. \end{aligned}$$

$$b = +r \cdot \omega^2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right)^2}.$$

Bei gleichförmiger Kreisbewegung ist $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ const., $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$, d. h. die unterstrichenen Glieder fallen weg.

b) Bewegung auf einer Geraden.

Kartesische Koordinaten	Polarkoordinaten	Natürliche Koordinaten
Bahn = x -Achse.	= Radiusvektor.	Krümmungsradius $\rho = \infty$.
Weg: $s - s_0 = x$,	$s - s_0 = r$,	
$y = 0$.	$\varphi = \text{const.}$	
Geschwindigkeit: $v_x = v$,	$v_r = v$,	
$v_y = 0$.	$v_\varphi = 0$.	
Beschleunigung: $b_x = b$,	$b_r = \dot{v}_r = b$,	$b_t = \dot{v} = b$,
$b_y = 0$.	$b_\varphi = 0$.	$b_n = 0$.

c) Zentralbewegung: (Planetenbewegung).

Polarkoordinaten; Beschleunigung stets nach dem Zentrum O gerichtet.

$$\ddot{s}_{\text{ges}} = \ddot{r}; \quad \ddot{\varphi} = 0.$$

Flächenbeschleunigung:

$$\frac{d^2 F}{dt^2} = 0.$$

Flächengeschwindigkeit:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{1}{2} \cdot r \cdot v_\varphi = \text{const.}, \\ F &= \text{const.} \cdot t. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{2. Keplersches Gesetz.} \\ \text{In gleichen Zeiten werden vom Fahr-} \\ \text{strahl gleiche Flächen überstrichen.} \end{array}$$

Geschwindigkeit:

$$v_r = \dot{r},$$

$$v_\varphi = r \cdot \omega = \frac{2}{r} \cdot \frac{dF}{dt},$$

$$\begin{aligned} v^2 &= \omega^2 \cdot \left[\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + r^2 \right], \\ &= \frac{4}{r^4} \cdot \left(\frac{dF}{dt} \right)^2 \cdot \left[\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + r^2 \right]. \end{aligned}$$

Beschleunigung:

$$\begin{aligned} b &= \ddot{r} = \ddot{r} - r \omega^2, \\ &= -r \cdot \omega^2 \left[\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} \right], \\ &= -\frac{4}{r^2} \cdot \left(\frac{dF}{dt} \right)^2 \cdot \left[\frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} \right]. \end{aligned}$$

d) Gleichförmige Bewegung; $b = 0$.

Geschwindigkeit:

$$v = v_0 = \text{const.}$$

Weg:

$$s - s_0 = v_0 \cdot t.$$

e) Gleichförmig beschleunigte Bewegung; $b = b_0 = \text{const.}$

Geschwindigkeit:

$$v - v_0 = b_0 \cdot t, \quad t = \frac{v - v_0}{b_0}.$$

Weg:

$$s - s_0 = \frac{1}{2} \cdot b_0 \cdot t^2 + v_0 \cdot t = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot b_0} = \frac{v + v_0}{2} \cdot t.$$

f) Beschleunigung abhängig von der Zeit; $b = f(t)$.

Geschwindigkeit: $v - v_0 = \int_0^t b \cdot dt,$

Weg: $s - s_0 = \int_0^t v \cdot dt = \int_0^t \int_0^t b \cdot dt \cdot dt + v_0 \cdot t.$

g) Beschleunigung abhängig vom Wege; $b = f(s)$.

α) Beliebige Abhängigkeit; $b = f(s)$.

$$b = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{dv}{ds} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(v^2)}{ds}.$$

Geschwindigkeit: $\frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) = \int_{s_0}^s b \cdot ds.$

Zeit: $t = \int_{s_0}^s \frac{ds}{v}.$

β) Lineare Abhängigkeit.

$$b = \ddot{s} = b_0 - a \cdot s,$$

$$b = \ddot{s} = b_0 + a \cdot s.$$

(ungedämpfte, harmonische Schwingung)

$$\ddot{s} + a \left(s - \frac{b_0}{a} \right) = 0,$$

$$\ddot{s} - a \left(s + \frac{b_0}{a} \right) = 0.$$

Ansatz zur Vereinfachung:

$$y = s - \frac{b_0}{a},$$

$$y = s + \frac{b_0}{a}.$$

Differentialgleichung der Bewegung:

$$\ddot{y} + a \cdot y = 0,$$

$$\ddot{y} - a \cdot y = 0.$$

d'Alembertscher Exponentialansatz: $y = A \cdot e^{\lambda t}$; $\ddot{y} = A \cdot \lambda^2 \cdot e^{\lambda t}$,
eingesetzt in die Differentialgleichung liefert die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + a = 0,$$

$$\lambda^2 - a = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{a}, \text{ wobei } i = \sqrt{-1} \text{ ist.}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{a}.$$

Mithin lautet die allgemeine Lösung:

$$y = A_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 t} *,$$

$$y = A_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + A_2 \cdot e^{\lambda_2 t} *,$$

oder $y = B_1 \cdot \sin \sqrt{a} \cdot t + B_2 \cdot \cos \sqrt{a} \cdot t,$

$y = B_1 \cdot \mathfrak{S}in \sqrt{a} t + B_2 \cdot \mathfrak{C}os \sqrt{a} t.$

Die Integrationskonstanten A_1 und A_2 bzw. B_1 und B_2 sind aus den Anfangsbedingungen $t = 0$; $s = s_0$; $v = v_0$ zu bestimmen.

h) Beschleunigung abhängig von der Geschwindigkeit.

(Flüssigkeitswiderstände.)

α) Allgemein $b = f(v)$.

Zeit: $t = \int_{v_0}^v \frac{dv}{b}.$

Umkehren der gefundenen Funktion $t = t(v)$ ergibt $v = v(t)$ und daraus folgt für den Weg:

$$s = \int_0^t v \cdot dt.$$

* $\sin \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}, \cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2i}, \mathfrak{S}in \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}, \mathfrak{C}os \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}.$

β) Lineare Abhängigkeit (laminare Strömung).

Beschleunigung: $b = b_0 - a \cdot v$, wobei $b_0 \geq 0$ sein kann.

Zeit:
$$t = \int_{v_0}^v \frac{dv}{b_0 - a v} = \frac{1}{a} \cdot \ln \frac{b_0 - a \cdot v_0}{b_0 - a v}.$$

Geschwindigkeit (durch Umkehren der Funktion): $v = \frac{b_0}{a} \cdot (1 - e^{-at}) + v_0 \cdot e^{-at}$,
für $t = \infty$ erhält man die

Grenzgeschwindigkeit:
$$v_\infty = v_g = \frac{b_0}{a},$$

mithin ist
$$v = v_g - (v_g - v_0) \cdot e^{-at}.$$

Weg:
$$s - s_0 = \int_{v_0}^v v dt = v_g \cdot t - \frac{v_g - v_0}{a} (1 - e^{-at}).$$

 γ) Quadratische Abhängigkeit (turbulente Strömung).

Beschleunigung: $b = b_0 - a v^2$.

Zeit:
$$t = \int_{v_0}^v \frac{dv}{b_0 - a v^2},$$

$$= \frac{1}{2a \cdot v_g} \cdot \ln \frac{v_g + v}{v_g - v} \cdot \frac{v_g - v_0}{v_g + v_0}.$$

Grenzgeschwindigkeit für $t = \infty$:

$$v = v_g = \sqrt{\frac{b_0}{a}}.$$

Verzögerung: $b = -(b_0 + a v^2)$,

Zeit:
$$t = - \int_{v_0}^v \frac{dv}{b_0 + a v^2} = + \int_{v_0}^v \frac{dv}{b_0 + a v^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a \cdot b_0}} \cdot \left[\operatorname{arctg} \frac{v_0}{\sqrt{\frac{b_0}{a}}} - \operatorname{arctg} \frac{v}{\sqrt{\frac{b_0}{a}}} \right].$$

Stillstand bzw. Bewegungsumkehr ($v_1 = 0$)
zur Zeit

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{a \cdot b_0}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{v_0}{\sqrt{\frac{b_0}{a}}}.$$

Statt Umkehr der Beziehung $t - v$ in $v - t$ und Integration zu $s - t$ berechnet man
bequemer aus $b = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{dv}{ds}$ den Weg $s - s_0 = \int \frac{v dv}{b}$ und erhält:

$$s - s_0 = \frac{1}{2a} \cdot \ln \frac{v_g^2 - v_0^2}{v_g^2 - v^2},$$

$$s - s_0 = \frac{1}{2a} \cdot \ln \frac{\frac{b_0}{a} + v_0^2}{\frac{b_0}{a} + v^2}.$$

IV. Relativbewegung.

Übergang von einem ruhenden Koordinatensystem (absoluten) zu einem bewegten (Fahrzeug). In der Technik wird ein erdgebundenes Koordinatensystem als ruhendes (absolutes) betrachtet.

Absolutbewegung	=	Fahrzeugbewegung	$\hat{+}$	Relativbewegung
(im ruhenden Ko- ordinaten- system).		(in bezug auf das ruhende System).		(des Körpers in bezug auf das Fahrzeug).

Bei der Beschleunigung tritt noch die Coriolisbeschleunigung hinzu. Sie bewirkt

$$\begin{aligned}
 & \text{1. Richtungsänderung der Relativgeschwindigkeit auf dem Relativwege } A_1 A_2 \text{ (siehe Abb. 104c)} \left\{ \begin{aligned} & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[v'_{rel} \cdot \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \right] = \omega \cdot v'_{rel}, \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{v'_{f2} - v'_{f1}}{\Delta t} \right), \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{r_2 \omega - r_1 \omega}{\Delta t} \right), \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \omega \right) = \omega \cdot v'_{rel}, \end{aligned} \right. \\
 & \text{2. Größenänderung der Fahrzeuggeschwindigkeit infolge der Radienänderung auf den Relativwege } A_1 A_2 \text{ (siehe Abb. 104b)} \left\{ \begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

mithin beträgt ihre Größe $b_{cor} = 2 \cdot \omega \cdot v'_{rel}$.

Ihre Richtung erhält man durch Drehen von v'_{rel} um 90° im Sinne von ω . In Vektorform ist also $b_{cor} = 2 [\omega \cdot v'_{rel}]$.

Weg: $d\vec{s}_{abs} = d\vec{s}_{fahrzeug} + d\vec{s}_{rel}$,
 Geschwindigkeit: $v_{abs} = v_{fahrzeug} + v_{rel}$,
 Beschleunigung: $b_{abs} = b_{fahrzeug} + b_{rel} + b_{cor}$.

Führt das bewegte Koordinatenkreuz gegenüber dem ruhenden eine reine Drehung aus, so ist die „Fahrzeuggeschwindigkeit“ $v_f = [\omega \cdot r]$ (siehe S. 47) und somit die Absolutgeschwindigkeit

$$\begin{aligned}
 v_{abs} &= v_{rel} + [\omega \cdot r], \\
 \frac{dr}{dt} &= \left(\frac{dr}{dt} \right)_{rel} + [\omega \cdot r],
 \end{aligned}$$

wobei also $\left(\frac{dr}{dt} \right)_{rel}$ die Änderung von r in bezug auf das bewegte (körperfeste) Koordinatensystem ist.

Der Übergang vom raumfesten Koordinatensystem xyz zum verdrehten körperfesten $\xi\eta\zeta$ erfolgt mit Hilfe der Eulerschen Winkel ψ, ϑ, φ (siehe Abb. 105).

1. Drehung um die raumfeste z -Achse um den Winkel ψ .

2. Herauskippen der ζ -Achse aus der z -Achse um den Winkel ϑ , d. h. Drehung um die Knotenlinie, das ist die Schnittgerade der xy - mit der $\xi\eta$ -Ebene, um den Winkel ϑ . Senkrecht auf der Knotenlinie und in der $\xi\eta$ -Ebene liegt die Querachse. Sie steht also auch auf der ζ -Achse senkrecht. Die Richtung dieser Achsen ist so zu wählen, daß Knotenlinie, Querachse und ζ -Achse wie xyz und $\xi\eta\zeta$ ein rechts- links- händiges Koordinatensystem bilden.

3. Drehung um die körperfeste Achse ζ — auch Figurenachse genannt — um den Winkel φ .

Sind die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}$ und $\dot{\varphi}$ gegeben, so sind die Komponenten in Richtung der körperfesten Achsen $\xi\eta\zeta$:

$$\begin{aligned}
 \omega_\xi &= -\dot{\psi} \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi + \dot{\vartheta} \sin \varphi, \\
 \omega_\eta &= +\dot{\psi} \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cdot \cos \varphi, \\
 \omega_\zeta &= +\dot{\psi} \cdot \cos \vartheta + \dot{\varphi}
 \end{aligned}$$

und der resultierende Vektor der Winkelgeschwindigkeit ist:

$$\omega^2 = \omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2 = \dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cdot \cos \vartheta.$$

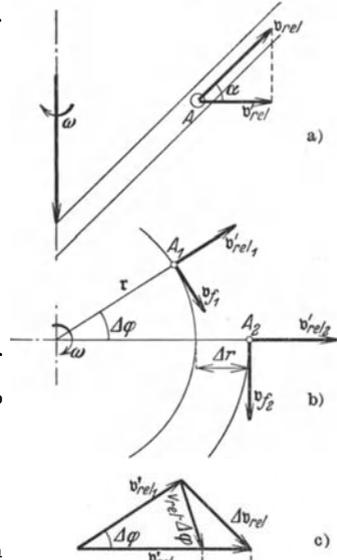


Abb. 104. Relativbewegung einer Kugel in einem sich drehenden Rohr.

- a) Aufriß.
- b) Grundriß.
- c) Drehung des Vektors der Relativgeschwindigkeit durch die halbe Coriolisbeschleunigung.

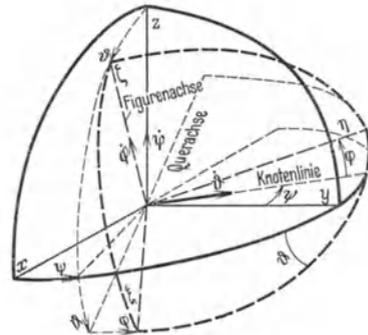


Abb. 105. Die Eulerschen Winkel ψ, ϑ, φ beim Übergang vom raumfesten Koordinatensystem xyz zum körperfesten $\xi\eta\zeta$.

Merkregel für die Beschleunigung in Polarkoordinaten (siehe S. 52): Man fasse die Bewegung des Aufpunktes als Zusammensetzung aus einer Fahrzeug- und einer Relativbewegung auf (siehe Abb. 106); z. B. Laufkatze auf Drehkran. Fahrzeug = Drehkran führt Kreisbewegung, Laufkatze führt Relativbewegung in Radialrichtung aus.

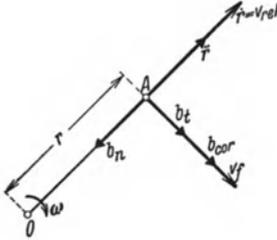


Abb. 106. Beziehungen zwischen den Beschleunigungskomponenten in Polarkoordinaten und der Relativbewegung.

Umfangsbeschleunigung:
Radialbeschleunigung:

Fahrzeugbewegung:

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_f &= \mathfrak{b}_n + \mathfrak{b}_t. \\ \mathfrak{b}_n &= -v_{f/r}^2 = -r \cdot \omega^2, \\ \mathfrak{b}_t &= \frac{dv_f}{dt} = r \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Relativbewegung:

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_{rel} &= \ddot{i}, \\ \mathfrak{b}_{cor} &= 2 \cdot \dot{r} \cdot \omega = 2 \cdot v_r \cdot \omega. \end{aligned}$$

Absolutbewegung:

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_{abs} &= \mathfrak{b}_f + \mathfrak{b}_{rel} + \mathfrak{b}_{cor}, \\ \mathfrak{b}_{abs} &= \mathfrak{b}_\varphi + \mathfrak{b}_r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_\varphi &= \mathfrak{b}_t + \mathfrak{b}_{cor} = r \cdot \varepsilon + 2 \cdot \omega \cdot v_r, \\ \mathfrak{b}_r &= \ddot{r} - r \cdot \omega^2. \end{aligned}$$

V. Darstellung von Bewegungsvorgängen.

1. Allgemeines.

a) Bahn.

Sie ist eine rein geometrische Darstellung (ohne Beachten der Zeit) des von einem Punkte in der Ebene oder allgemein im Raum zurückgelegten Weges.

Kartesische Koordinaten: Wegkomponenten x, y, z

Polarkoordinaten: Fahrstrahl, Seiten- und Höhenwinkel r, φ, ψ

Zylinderkoordinaten: Grundkreisradius, Höhe, Seitenwinkel r, h, φ

(siehe S. 2).

b) Bewegungsverhältnisse.

Beziehungen zwischen Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung unter Vermittlung der Zeit, des Weges oder der Geschwindigkeit.

Schaubilder: Weg — Zeit-Diagramm,
Geschwindigkeit — Zeit- „
Beschleunigung — Zeit- „

Geschwindigkeit — Weg-Diagramm
Beschleunigung — Weg- „
Beschleunig. — Geschwindigk.-Diagramm.

c) Hodograf.

Verbindungsline der von einem Pol o aus aufgetragenen Geschwindigkeiten eines Massenpunktes an verschiedenen Bahnpunkten.

[Z. B. $v_A = \overline{oa}$; $v_B = \overline{ob}$; $v_C = \overline{oc}$; $v_D = \overline{od}$; $v_E = \overline{oe} = 0$.]

Die Tangente an den Hodografen gibt die Richtung der Geschwindigkeitsänderung dv , also die Richtung der Beschleunigung an (siehe Abb. 107).

I. Tangiert der Geschwindigkeitsvektor den Hodografen, so liegen Geschwindigkeit und Beschleunigung in der gleichen Richtung, d. h.

$$\begin{aligned} b_{\varphi os} &= b_t = \frac{dv}{dt}, \\ b_n &= 0; \varrho = \infty; \end{aligned}$$

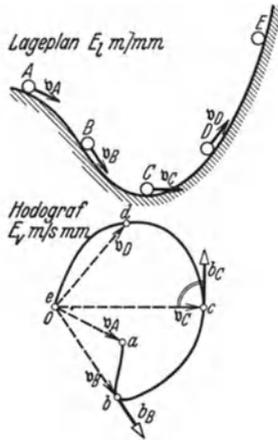


Abb. 107. Hodograf einer Bewegung.

Wendepunkt in der Bahn (z. B. bei B).

2. Steht der Geschwindigkeitsvektor senkrecht auf dem Hodografen, so ist die Größenänderung der Geschwindigkeit 0 und nur eine Richtungsänderung vorhanden. $v = v_{\max}$ oder v_{\min} .

$$\left(\text{z. B. bei } C; v_c = \overline{oc} \perp b_c; b_{ic} = 0; b_{ges\ c} \equiv b_{nc} = \frac{v_c^2}{\rho} \right)$$

3. Geht der Hodograf durch den Pol o , so ist die Geschwindigkeit null, d. h. in der Bahn liegt ein Umkehrpunkt (z. B. bei $E; v_E = \overline{oe} = 0$).

2. Verlauf der Kurven abhängig von der Zeit.

Beachte die Beziehungen und vergleiche sie mit der Statik (S. 32):

<p>Weg s,</p> <p>Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$,</p> <p>Beschleunigung $b = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$,</p> <p>oder in der Reihenfolge:</p> <p>Beschleunigung b</p> <p>Geschwindigkeit $v = \int b \cdot dt + C_1$,</p> <p>Weg $s = \int v \cdot dt + C_2$</p> $= \iint b \cdot dt \cdot dt$ $+ C_1 \cdot t + C_2.$		<p>Moment \mathfrak{M}</p> <p>Querkraft $Q = \frac{d\mathfrak{M}}{dx}$,</p> <p>Belastung $q = -\frac{dQ}{dx} = -\frac{d^2\mathfrak{M}}{dx^2}$,</p> <p>Belastung q</p> <p>Querkraft $Q = -\int q \cdot dx + C_1$,</p> <p>Moment $\mathfrak{M} = +\int Q \cdot dx + C_2$</p> $= -\iint q \cdot dx \cdot dx$ $+ C_1 \cdot x + C_2.$
--	--	---

Weg — Zeit s — t	Geschwindigkeit — Zeit v — t	Beschleunigung — Zeit b — t
horizontale Gerade	0	0
geneigte Gerade	horizontale Gerade (gleichförmige Bewegung)	0
Parabel 2. Ordnung	geneigte Gerade	horizontale Gerade (gleichförmig beschleunigte Bewegung)
Größt- oder Kleinstwert	$v = 0$	—
Wendepunkt	Größt- oder Kleinstwert	$b = 0$
—	Wendepunkt	Größt- oder Kleinstwert
Knick	Sprung	kurzzeitige Beschleunigung (Stoß auf den Körper vgl. Statik — Einzellast)
tangentialer Übergang zwischen 2 Kurven	Knick	Sprung
Übergang höherer Ordnung	tangentialer Übergang	Knick

3. Die Zeit als Parameter¹.

a) Weg — Zeit = $s - t$ -Kurve gegeben (siehe Abb. 108).

Sie ist nicht mit der Bahnkurve $s = f(x, y, z)$ zu verwechseln (siehe S. 58).
Geschwindigkeit:

Differentiation von $s - t$ ergibt $v = \frac{ds}{dt}$ Steigung der $s - t$ -Kurve.

Beschleunigung:

Differentiation „ $v - t$ „ $b_i = \frac{dv}{dt}$ „ „ $v - t$ „

¹ Differentiations- und Integrationsmethoden siehe S. 7 ff.

Die Gesamtbeschleunigung ist $b_{ges} = b_n + b_t$, wobei nur die Tangentialbeschleunigung $b_t = \frac{dv}{dt}$ aus dem $s - t$ - bzw. $v - t$ -Diagramm bestimmt werden kann. Die Normalbeschleunigung ist, wenn ρ den Krümmungsradius der Bahn bezeichnet: $b_n = \frac{v^2}{\rho}$, d. h. v ist die Höhe

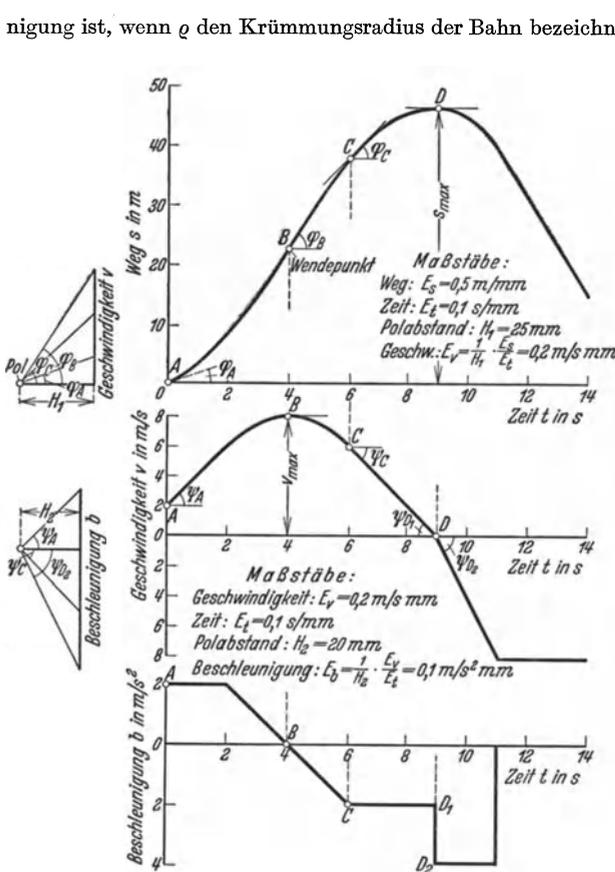


Abb. 108. Bestimmen der Geschwindigkeit und Beschleunigung aus der Weg - Zeit - Kurve durch Differentiation.

dem Ausgangsorte wieder zu, die Geschwindigkeit kehrt ihr Vorzeichen um. Die Beschleunigung ändert sprunghaft ihren Wert, infolgedessen findet man in der Geschwindigkeit - Zeit - Kurve (Integralkurve oder Beschleunigungskurve) einen Knick. Den weiteren Verlauf der Kurven verfolgt man unter Beachten des auf S. 59 Gesagten.

b) Geschwindigkeit - Zeit = $v - t$ -Kurve gegeben.

Beschleunigung:

Differentiation von $v - t$ ergibt $b_t = \frac{dv}{dt}$

Steigung der $v - t$ -Kurve.

Weg:

Integration „ $v - t$ „ $s - s_0 = \int v \cdot dt$

Fläche unter $v - t$ -Kurve.

Maßstäbe: gegeben: $E_v \text{ m s}^{-1} \text{ mm}$, $E_t \text{ s/mm}$,
gewählt: Polabstände H_1 , $H_2 \text{ mm}$,

berechnet: $E_b = \frac{1}{H_1} \cdot \frac{E_v}{E_t} \text{ m s}^{-2} \text{ mm}$,
 $E_s = H_2 \cdot E_v \cdot E_t \text{ m/mm}$.

im rechtwinkligen Dreieck mit den Hypotenusenstücken b_n und ρ (siehe Abb. 109). Für die Maßstäbe erhält man aus $V^2 = B_n \cdot R$ und $v^2 = b_n \cdot \rho$

$\frac{v^2}{V^2} = \frac{b_n}{B_n} \cdot \frac{\rho}{R}$ den Wert $E_b = \sqrt{E_b \cdot E_\rho}$. (Betreffs der Maßstabberechnung siehe S. 8.)

Im Punkte A, d. h. zur Zeit $t = 0$ (siehe Abb. 108) ist der Weg $s = 0$, aber Geschwindigkeit und Beschleunigung sind ungleich null. Im Punkte B ist die Beschleunigung $b = 0$, d. h. die Geschwindigkeit hat einen Extremwert erreicht

$\left(b = \frac{dv_{\max}}{dt} = 0 \right)$.

Im Punkte D, d. h. zur Zeit $t = 9 \text{ sec}$ ist der größte Weg zurückgelegt, der Körper bewegt sich auf seiner Bahn

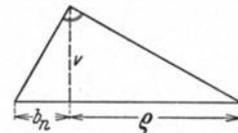


Abb. 109. Bestimmen der Normalbeschleunigung aus Geschwindigkeit und Krümmungsradius.

Abb. 110. Bestimmen der Geschwindigkeit und des Weges aus der Beschleunigungs – Zeit-Kurve durch Integration.

c) Beschleunigung – Zeit = $b - t$ -Kurve gegeben.

(Siehe Abb. 110 u. 111.)

Geschwindigkeit:

Integration von $b - t$ ergibt

$$v - v_0 = \int b \cdot dt.$$

Weg:

Integration von $v - t$ ergibt

$$s - s_0 = \int v \cdot dt$$

oder doppelte Integration von $b - t$ ergibt

$$s - s_0 = \iint b \cdot dt + v_0 \cdot t.$$

In Abb. 110 ist die Geschwindigkeit – Zeit-Kurve durch Integration der Beschleunigung – Zeit-Kurve nach dem Ordinatenverfahren (siehe S. 9) bestimmt worden. Dabei wurde der Schritt (die Streifenbreite) zu $\Delta t = 2$ sec bzw. $\Delta T = 20$ mm gewählt und im Streifen G_1H in $\Delta t_1 = 1$ sec bzw. $\Delta T_1 = \frac{1}{2} \Delta T = 10$ mm geändert. Dementsprechend wechselt die Vergrößerung der Ordinaten von $n = 1$ auf $n_1 = n \cdot \frac{\Delta T_1}{\Delta T} = \frac{1}{2}$.

Die Weg – Zeit-Kurve wurde aus der eben gefundenen Geschwindigkeit – Zeit-Kurve durch abermalige Integration, diesmal nach dem Sehnungsverfahren (siehe S. 10) bestimmt.

In Abb. 111 ist die Weg – Zeit-Kurve durch doppelte Integration mit Hilfe des Seilecks (siehe S. 11) bestimmt worden.

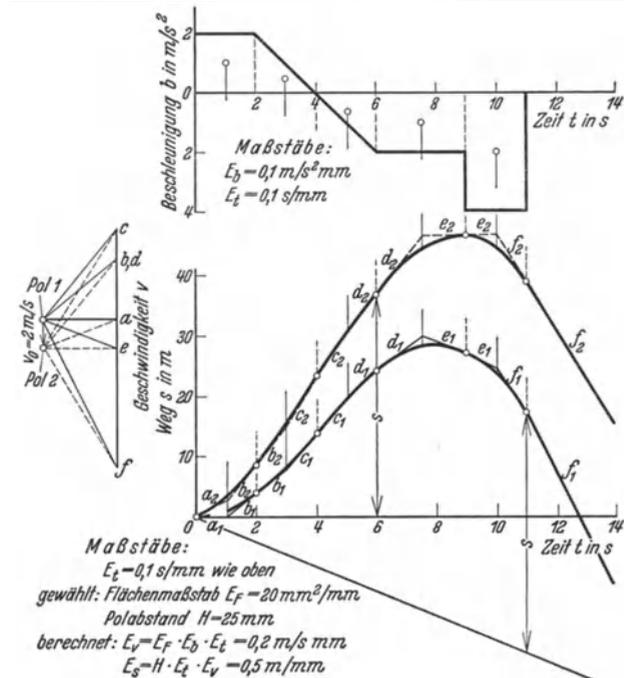
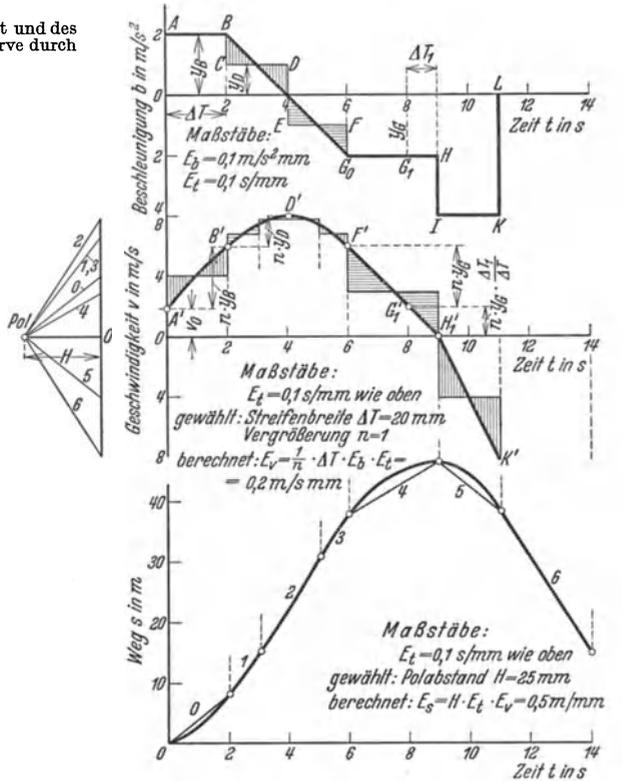


Abb. 111. Bestimmen des Weges aus der Beschleunigungs – Zeit-Kurve durch sofortige zweimalige Integration mit Hilfe des Seilecks.

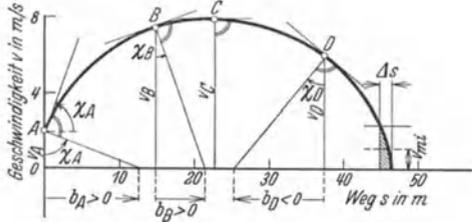
4. Der Weg als Parameter.

a) Geschwindigkeit – Weg = $v - s$ -Kurve gegeben.

Beschleunigung:

$$b = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot \frac{dv}{ds} = v \cdot \operatorname{tg} \chi,$$

d. h. b ist die Subnormale der $v - s$ -Kurve (siehe Abb. 112). Liegt die Beschleunigung links von der v -Ordinate, so ist $b \leq 0$.



Maßstabberechnung:

Aus der Konstruktion folgt:

$$B = V \cdot \frac{dV}{dS},$$

ferner ist

$$b = v \cdot \frac{dv}{ds},$$

mithin verhält sich

$$\frac{b}{B} = \frac{v}{V} \cdot \frac{dv}{dV} \cdot \frac{dS}{ds},$$

d. h.

$$E_b = E_v^2 \cdot \frac{1}{E_s} \text{ m/s}^2 \text{ mm}.$$

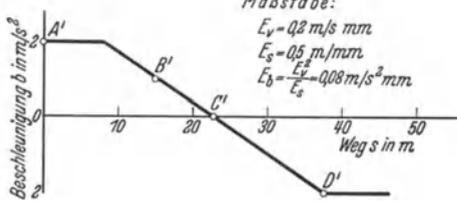


Abb. 112. Bestimmen der Beschleunigung als Subnormale der Geschwindigkeit – Weg-Kurve.

Die Normale in den einzelnen Kurvenpunkten läßt sich mit Hilfe eines Spiegellineals gut und schnell zeichnen.

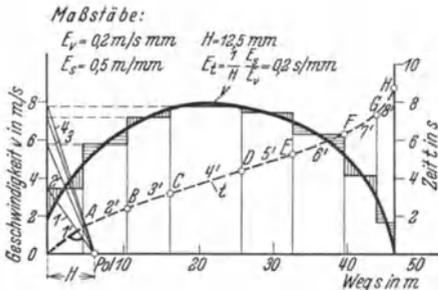


Abb. 113. Bestimmen der Zeit aus der Geschwindigkeit – Weg-Kurve.

Zeit:

$v - s$ -Kurve durch flächengleiche Treppenkurve ersetzen, Schritt ΔS beliebig. Pol wählen, Polstrahlen (1, 2, 3, 4 ... siehe Abb. 113) und im Gebiet des dazu gehörigen Streifens der Treppenkurve die Senkrechten (1', 2', 3', 4', 5' ...) zu den Polstrahlen ziehen. Die Schnittpunkte (O A B C D E F G H) sind Punkte der gesuchten $t - s$ -Kurve (vgl. Sehnenverfahren S. 10, entsprechend läßt sich auch das Tangentenverfahren durch Wahl der Schritte ΔV anwenden, siehe S. 10).

Aus ähnlichen Dreiecken folgt
$$\frac{V}{H} = \frac{\Delta S}{\Delta T},$$

ferner ist
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

also ist
$$E_v = \frac{E_s}{E_t} \cdot \frac{1}{H}; \quad \text{d. h.} \quad E_t = \frac{E_s}{E_v} \cdot \frac{1}{H}.$$

Oder: Aus $v = \frac{ds}{dt}$ folgt $t = \int \frac{1}{v} ds.$

In Abb. 114 ist die Integration von $\frac{1}{v} - s$ nach dem Tangentenverfahren durchgeführt (siehe S. 10).

Ist an einer Stelle $v = 0$, also $\frac{1}{v} = \infty$, so wird das dem Wegelement Δs entsprechende Zeitelement rechnerisch bestimmt zu $\Delta t = \frac{\Delta s}{v_{\text{mittel}}}.$

Beschleunigung und Geschwindigkeit abhängig von der Zeit.

Die $b - t$ und $v - t$ -Kurven folgen aus der gegebenen bzw. den nach Obigem bestimmten Kurven $v - s$, $b - s$ und $t - s$, indem zu gleichen Wegen s die Beschleunigungs-, Geschwin-

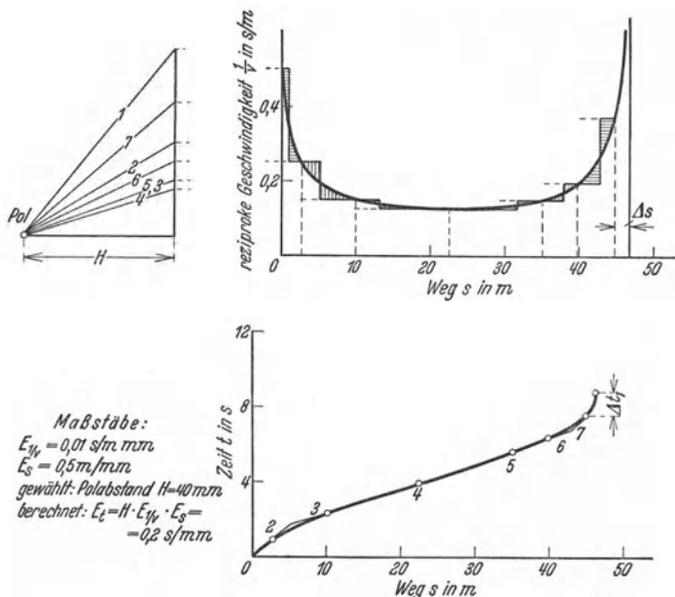


Abb. 114. Bestimmen der Zeit aus der reziproken Geschwindigkeit - Weg-Kurve.

digkeits- und Zeitwerte abgegriffen und in neuen Diagrammen abhängig von der Zeit aufgetragen werden.

b) Beschleunigung - Weg = $b - s$ -Kurve gegeben.

Geschwindigkeit:

Aus $b = \frac{dv}{dt}$ folgt nach Multiplikation mit ds durch Integration

$$\int b \cdot ds = \int \frac{dv}{dt} \cdot ds = \int v dv = \frac{1}{2} (v^2 - v_0^2) = \text{kinetische Energie der Masseneinheit (vgl. Arbeitssatz S. 96)}.$$

Durch Integration der $b - s$ -Kurve findet man also die Kurve $\frac{v^2}{2} - s$ (siehe Abb. 115). Bringt man statt der Regelteilung für $v^2/2$ eine Wurzelteilung für v an, so kann man die Geschwindigkeit der Kurve entnehmen. Die weiteren Kurven folgen unter Benutzen dieser $v - s$ -Beziehung (vgl. S. 62). Allerdings muß die Geschwindigkeitskurve erst in eine solche mit regelmäßiger Teilung umgezeichnet werden. Von der Teilung $v^2/2$ kann man auch noch bequem mittels Division durch die Erdbeschleunigung $g = 9,81 \approx 10 \text{ m/s}^2$ zu einer Teilung in Geschwindigkeitshöhen $v^2/2g$ [m] übergehen.

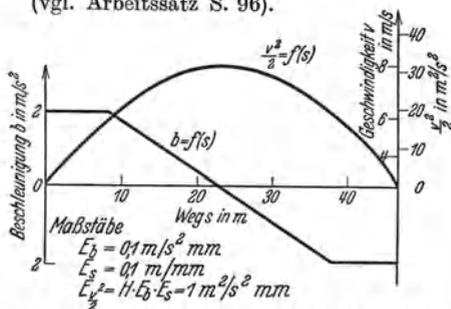


Abb. 115. Bestimmen der Geschwindigkeit aus der Beschleunigung - Zeit-Kurve durch Integration.

c) Geschwindigkeitshöhe – Weg $= \frac{v^2}{2g}$ – s-Kurve gegeben.

Beschleunigung:

Durch Differentiation folgt:

$$\frac{d\left(\frac{v^2}{2g}\right)}{ds} = \frac{v}{g} \cdot \frac{dv}{ds} = \frac{1}{g} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dv}{ds} = \frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{1}{g} \cdot b,$$

d. h. also durch Differentiation (siehe S. 7ff.) erhält man die $b - s$ -Kurve, die nach Abschnitt 4b weiter zu behandeln ist.

5. Die Geschwindigkeit als Parameter.

Beschleunigung – Geschwindigkeit = $b - v$ -Kurve gegeben.

Zeit:

$b - v$ -Kurve durch flächengleiche Treppenkurve (siehe Abb. 116, $ABCDEF GH'$)

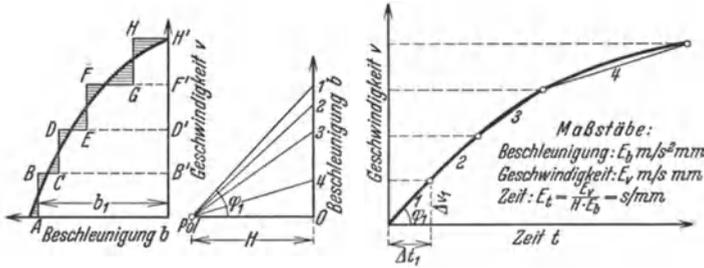


Abb. 116. Bestimmen der Geschwindigkeit – Zeit-Kurve aus der Beschleunigung – Geschwindigkeit-Kurve.

ersetzen, Pol wählen, mittlere Beschleunigungen (Rechteckhöhen $B'B \equiv 01$, $D'D \equiv 02$ usw.) abtragen, Polstrahlen und Parallelen dazu im jeweiligen Geschwindigkeitsbereich ziehen. Es ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{H} = \frac{\Delta V}{\Delta T},$$

$$b = \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

also

$$\frac{b}{B} = \frac{1}{H} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta V} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t}, \quad \text{d. h.} \quad E_b = \frac{1}{H} \cdot E_v \cdot \frac{1}{E_t}$$

oder

$$E_t = \frac{1}{H} \cdot \frac{E_v}{E_b}.$$

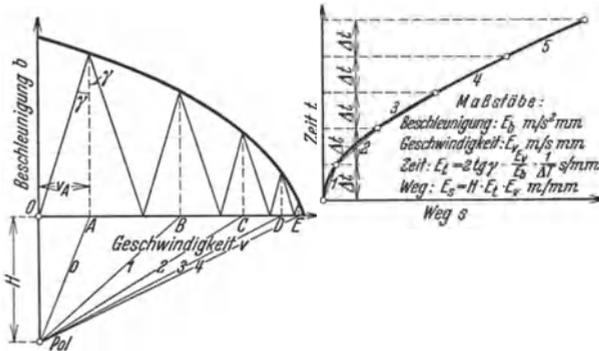


Abb. 117. Bestimmen der Weg – Zeit-Kurve aus der Beschleunigung – Geschwindigkeit-Kurve.

Oder:

Zickzacklinie mit konst. Spitzenwinkel 2γ zeichnen und Anzahl der Dreiecke zählen (siehe Abb. 117). Es ist nämlich

$$\begin{aligned} 2 \cdot \operatorname{tg} \gamma &= \frac{\Delta V}{B_{\text{mittel}}} = \frac{\Delta v \cdot \frac{1}{E_v}}{b \cdot \frac{1}{E_b}} \\ &= \frac{\Delta v \cdot E_b}{\Delta v \cdot E_v} = \Delta t \cdot \frac{E_b}{E_v}; \end{aligned}$$

d. h. die Anzahl der Dreiecke

gibt mit $2 \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot \frac{E_v}{E_b}$ multipliziert die Zeit zum Erreichen der durch den jeweils letzten Dreiecksfußpunkt dargestellten Geschwindigkeit an.

Weg:

Pol auf negativer b -Achse im Abstände H vom Ursprung O wählen, Polstrahlen ($0, 1, 2, 3, 4 \dots$, siehe Abb. 117) zu den mittleren Geschwindigkeiten (Fußpunkte $A B C D E$ der Dreieckshöhen) und Parallelen dazu für das jeweilige Zeitintervall $\Delta t = 2 \cdot \operatorname{tg} \gamma \cdot \frac{E_v}{E_b}$ im $t-s$ -Diagramm ziehen. Es ist dann:

$$\frac{\Delta S}{\Delta T} = \frac{V_{\text{mittel}}}{H} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = v_{\text{mittel}},$$

d. h.

$$\frac{\Delta s}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{v_{mi}}{V_{mi}} \cdot H, \quad \text{mithin} \quad E_s = E_t \cdot E_v \cdot H.$$

Oder:

$$\text{Aus } ds = v \cdot dt = v \cdot \frac{dv}{dv} \cdot dt = v \cdot \frac{1}{b} \cdot dv \text{ folgt}$$

$$\text{durch Integration der } \frac{v}{b} \text{-Kurve: } s - s_0 = \int \frac{v}{b} \cdot dv.$$

Konstruktion der $\frac{v}{b}$ -Kurve: Strahlen aus dem Ursprung (OA, OB, OC , siehe Abb. 118) schneiden auf einer Parallelen zur v -Achse im Abstände H die zum jeweiligen Schnittpunkt des Strahles mit der $b-v$ -Kurve gehörenden Werte $\frac{v}{b}$ ab.

$$\left(PD \sim \frac{v_A}{b_A}, PE \sim \frac{v_B}{b_B}, PC \sim \frac{v_C}{b_C} \text{ usw.} \right),$$

die in den jeweiligen Geschwindigkeitspunkten ($G, H, J \dots$) aufgetragen ($GD' = PD, HE' = PE, JF' = PC \dots$) die $\frac{v}{b}$ -Kurve ergeben. Es ist:

$$\frac{PD}{OP} = \frac{OG}{GA} = \frac{(V/B)}{H} = \frac{V}{B} \quad \text{und} \quad \frac{v}{b} = \frac{v}{b},$$

mithin wird:

$$\frac{(v/b)}{(V/B)} = \frac{1}{H} \cdot \frac{v}{b} \cdot \frac{B}{V}, \quad \text{d. h. aber} \quad E_{v/b} = \frac{1}{H} E_v \cdot \frac{1}{E_b}.$$

Wählt man H so, daß $H \cdot E_b = 1; 10; 100$ oder allgemein 10^n Einheiten der Beschleunigung wird, so wird $E_{v/b} = 10^{-n} \cdot E_v$, also der Wert von v/b im 10^{-n} -fachen Geschwindigkeitsmaßstab abgelesen.

6. Geschwindigkeitszustand eines Systems.

a) Geschwindigkeitsplan.

Er gibt den Geschwindigkeitszustand eines Körpers oder Systems in einem bestimmten Augenblick an.

Die absoluten Geschwindigkeiten der einzelnen Systempunkte sind Vektoren vom Pol O aus (siehe Abb. 119 a, b). Die relativen Geschwindigkeiten der einzelnen Systempunkte zu einander sind Vektoren, die die Endpunkte der Absolutgeschwindigkeiten miteinander verbinden. Die Endpunkte der Geschwindigkeitsvektoren bilden eine dem Lageplan ähnliche und um 90° gegen diesen gedrehte Figur $abcd \sim ABCD$.

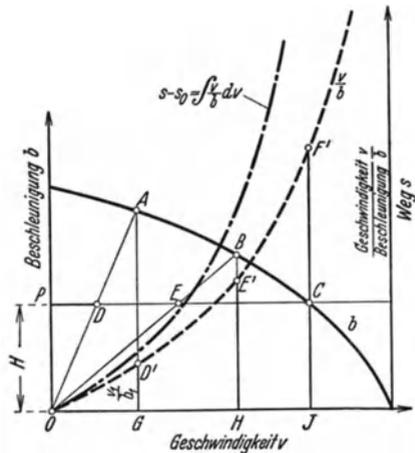


Abb. 118. Bestimmen des Weges aus der Beschleunigung—Geschwindigkeit-Kurve.

1. Geschwindigkeit des Punktes D ; $v_D = ?$

$D =$ Punkt der Schwinge BE in der Hülse C .

Es ist
$$v_C = v_D + v_{CD}$$
 Absolut- = Fahrzeug- + Relativ-Geschwindigkeit.

$v_D \perp BD$, da Drehung um B ; d. h. $od \perp BD$
 v_{CD} in Richtung von BDE , d. h. $cd \parallel BD$ } Schnittpunkt = d .

$v_D = \overline{od} \cdot E_v$; $v_{CD} = \overline{dc} \cdot E_v$.

2. Geschwindigkeit des Punktes E ; $v_E = ?$

BDE führt eine Kreisbewegung um B aus, mithin ist:

$$v_E = v_D \cdot \frac{BE}{BD}, \text{ d. h. } \overline{oe} = \overline{od} \cdot \frac{BE}{BD}.$$

3. Geschwindigkeit des Punktes F ; $v_F = ?$

$$v_F = v_E + v_{FE}$$
 Absolut- = Fahrzeug- + Relativ-Geschwindigkeit.

v_F in Richtung der Geradföhrung; d. h. $of \parallel$ Geradföhrung, $v_{FE} \perp EF$, da sich F relativ zu E auf einem Kreis mit EF als Radius bewegt, d. h. $ef \perp EF$. Schnitt von of mit ef ist f .

$v_F = \overline{of} \cdot E_v$; $v_{FE} = \overline{ef} \cdot E_v$.

b) Mit Hilfe der Momentanpole (geklappte Geschwindigkeiten).

Momentanpol von AC ist A ; mithin ist $v_C = [\overline{CA} \cdot \omega]$, und zwar steht $v_C \perp AC$ (siehe Abb. 121).

Momentanpol von BDE ist B ; mithin steht $v_D \perp BD$ und ist der Größe nach gleich der Projektion von v_C auf die v_D -Richtung.

Infolge der Kreisbewegung von BDE um B ist $v_E = v_D \cdot \frac{BE}{BD}$.

Momentanpol \mathfrak{M} von EF liegt 1. auf der Senkrechten zu v_E und 2. auf der Senkrechten zu v_F . Die Richtung von v_F ist durch die Geradföhrung gegeben, die Größe folgt aus $v_F = v_E \cdot \frac{\mathfrak{M}F}{\mathfrak{M}E}$. Zur Konstruktion der Größe von v_F wird v_E auf $\mathfrak{M}E$ geklappt, durch den Endpunkt die Parallele zu EF gezogen, die auf $\mathfrak{M}F$ die Größe von v_F abschneidet. Diese wird auf die Richtung von v_F (Richtung der Geradföhrung) geklappt. Der Sinn des Pfeiles von v_F folgt aus dem Sinne der Winkelgeschwindigkeit um \mathfrak{M} , der durch v_E bekannt ist.

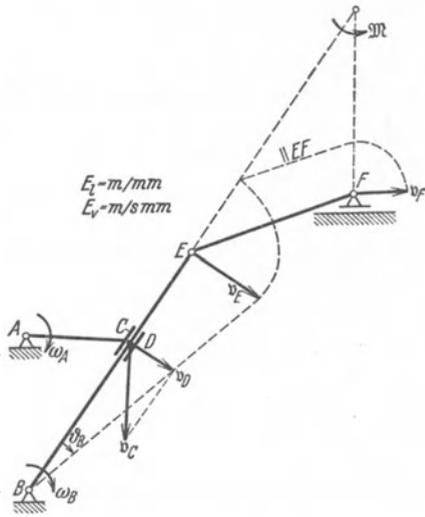


Abb. 121. Momentanpole und Geschwindigkeiten einer schwingenden Kurbelschleife.

8. Beschleunigungszustand eines Systems.

a) Beschleunigungsplan.

Er gibt den Beschleunigungszustand eines Körpers oder Systems in einem bestimmten Augenblick an.

Die absoluten Beschleunigungen der einzelnen Systempunkte sind Vektoren vom Pol π aus (siehe Abb. 122 a, b).

Die relativen Beschleunigungen der einzelnen Systempunkte zueinander sind Vektoren, die die Endpunkte der Absolutbeschleunigungen miteinander verbinden. Tritt eine Radienänderung bei der Bahn des betrachteten Punktes ein, so gibt die Verbindungslinie die Resultierende aus $b_{rel} + b_{cor}$ an (siehe S. 57).

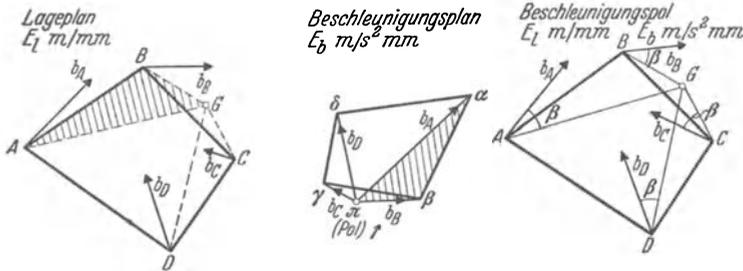


Abb. 122. Bestimmen des Beschleunigungszustandes eines Systems (a) mit Hilfe des Beschleunigungsplanes (b) oder des Beschleunigungspoles (c).

Die Endpunkte des Beschleunigungsplanes bilden eine dem Lageplan ähnliche und um den $\sphericalangle \beta = \arctan \frac{b_t}{b_n} = \arctan \frac{\varepsilon}{\omega^2}$ gedrehte Figur. $\alpha \beta \gamma \delta \sim A B C D$.

Absolutbeschleunigungen	Relativbeschleunigungen
$b_A = \pi \alpha \cdot E_b$ in Richtung von $\pi \alpha$,	$b_{BA} = \alpha \beta \cdot E_b$ in Richtung von $\alpha \beta$ gegen AB um $\sphericalangle \beta$ geneigt,
$b_B = \pi \beta \cdot E_b$ in Richtung von $\pi \beta$,	$b_{DB} = \beta \delta \cdot E_b$ in Richtung von $\beta \delta$ gegen BD um $\sphericalangle \beta$ geneigt,
$b_C = \pi \gamma \cdot E_b$ in Richtung von $\pi \gamma$,
$b_D = \pi \delta \cdot E_b$ in Richtung von $\pi \delta$,	usw.

b) Beschleunigungspol G.

Er entspricht im Lageplan dem Pol π des Beschleunigungsplanes. Die Beschleunigungen sind den Abständen der betrachteten Punkte vom Beschleunigungspol verhältig und stehen zu diesen Radien unter dem Beschleunigungswinkel $\beta = \arctan \frac{b_t}{b_n} = \arctan \frac{\varepsilon}{\omega^2}$. (Z. B. $b_A \sim GA$; $b_B \sim GB$ usw.; siehe Abb. 122c.)

9. Bestimmen des Beschleunigungszustandes eines Systems (schwingende Kurbelschleife) mit Hilfe des Beschleunigungsplanes.

- Gegeben: 1. Winkelgeschwindigkeit ω_A der Kurbel AC .
 2. Winkelbeschleunigung ε_A der Kurbel AC ;
 d. h. bekannt sind damit auch die Geschwindigkeiten aller Systempunkte (siehe S. 66) und die Beschleunigung $b_C = b_C^n + b_C^t$ der Hülse C .
 (Normalbeschleunigung $b_C^n = \frac{v_C^2}{AC}$ nach Krümmungsmittelpunkt A der Hülsenbahn gerichtet; Bestimmung siehe S. 60, Abb. 109. — Tangentialbeschleunigung $b_C^t = [\overline{CA} \cdot \varepsilon]$ steht senkrecht auf AC .)
 Gesucht: Schlittenbeschleunigung b_P .

1. Beschleunigung des Punktes D der Schwinge BDE ; $b_D = ?$

Es ist

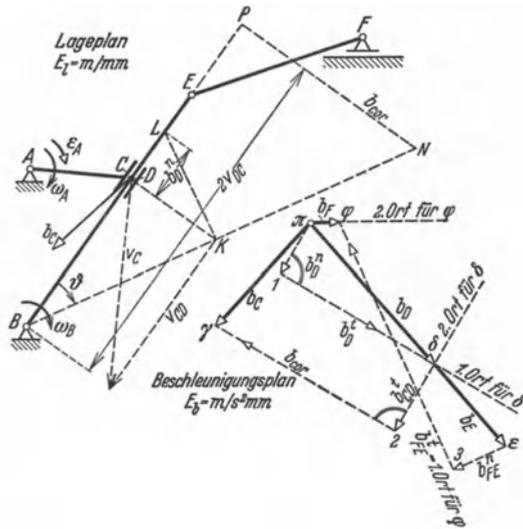
$$b_o = b_D + b_{oD} + b_{cor}$$

Absolut- = Fahrzeug- + Relativ- + Coriolis-
Beschleunigung.

$$b_D = b_D^n + b_D^t,$$

$$b_{oD} = b_{oD}^n + b_{oD}^t.$$

Beschleunigung	Größe	Richtung
b_o	gegeben	gegeben
b_D^n	$\frac{v_D^2}{BD}$	$\parallel BD$
b_D^t	$\frac{dv_D}{dt} = \text{unbekannt}$	$\perp BD$
b_{oD}^n	0; Krümmung der Relativbahn = ∞ , weil Geradführung	—
b_{oD}^t	$\frac{dv_{oD}}{dt} = \text{unbekannt}$	$\parallel BD$
b_{cor}	$2 \cdot \omega_B \cdot v_{oD} = 2 \cdot \frac{v_D}{DB} \cdot v_{oD}$	$\perp v_{oD}$



fe.

Konstruktion des Beschleunigungsplanes (siehe Abb. 123).

$\overline{\pi\gamma} = b_c \cdot \frac{1}{E_b}$; $\overline{\pi I} = b_D^n \cdot \frac{1}{E_b}$ parallel DB ziehen; b_D entweder rechnerisch bestimmen (siehe Tabelle) oder zeichnerisch aus dem rechtwinkligen Dreieck BKL mit $CK = \frac{v_D}{E_v}$ als Höhe und BD und $CL = b_D^n \cdot \frac{1}{E_b}$ als Hypotenusenstücken (Maßstäbe E_1 m/mm, E_2 m/smm, E_3 m/s²mm; siehe S. 60); in I die Senkrechte auf $\overline{\pi I}$ errichten = 1. geom. Ort für den Endpunkt δ des Beschleunigungsvektors $\overline{\pi\delta} = b_D \cdot \frac{1}{E_b}$. $\overline{\gamma\delta} = b_{cor} \cdot \frac{1}{E_b}$; b_{cor} entweder rechnerisch (siehe Tabelle) oder zeichnerisch (siehe Abb. 123) bestimmen. In D

wird $DK = \frac{v_D}{E_v}$ auf BE wird $BP = 2 \cdot v_{e,D} \cdot \frac{1}{E_v}$ aufgetragen, dann erhält man b_{cor} mit Hilfe des Strahlensatzes. Maßstäbe: Gegeben E_i m/mm, gewählt E_v ms⁻¹/mm, berechnet $E_b = \frac{E_v^2}{E_i}$ ms⁻²/mm. In 2 eine Senkrechte auf $\gamma \bar{2}$ errichten, d. h. eine Linie parallel BD , der Richtung der Tangentialbeschleunigung $b_{\sigma D}^t$, ziehen = zweiter geometrischer Ort für δ . Es ist dann $b_D = \pi \delta \cdot E_b$. Der Pfeilsinn ist bestimmt durch

$$\begin{aligned} b_D^n + b_D^t + b_{\sigma D}^t + b_{cor} &= b_{\sigma}, \\ \pi 1 + 1 \delta + \delta \bar{2} + \bar{2} \gamma &= \pi \bar{\gamma}. \end{aligned}$$

2. Beschleunigung des Punktes E ; $b_E = ?$

BDE dreht sich um den Festpunkt B , also ist $b_E = b_D \cdot \frac{BE}{BD}$.

Konstruktion:

$$\pi \delta = b_D \cdot \frac{1}{E_b} \text{ verlängern, so daß } \pi \varepsilon = b_E \cdot \frac{1}{E_b} = \pi \delta \cdot \frac{BE}{BD} \text{ wird.}$$

3. Beschleunigung des Punktes F ; $b_F = ?$

$$\begin{aligned} b_F &= b_E + b_{FE} + b_{cor} \\ \text{Absolut-} &= \text{Fahrzeug-} + \text{Relativ-} + \text{Coriolis-} \\ &\quad \text{Beschleunigung.} \end{aligned}$$

b_E ist nach Größe und Richtung bekannt (siehe vorigen Abschnitt 2),

$$b_{FE} = b_{FE}^n + b_{FE}^t,$$

$b_{cor} = 0$, da der Radius $EF = \text{const}$ bleibt.

Beschleunigung	Größe	Richtung
b_E	$= \pi \varepsilon \cdot E_b$ bekannt	
b_{FE}^n	$\frac{v_{FE}^2}{EF}$	$\parallel FE$
b_{FE}^t	$\frac{dv_{FE}}{dt} = \text{unbekannt}$	$\perp FE$
b_F	$\frac{dv_F}{dt} = \text{unbekannt}$	\parallel Geradföhrung

Konstruktion:

$\varepsilon \bar{3} = b_{FE}^n \cdot \frac{1}{E_b}$ in Richtung von FE zeichnen, in 3 die Senkrechte auf $\varepsilon \bar{3}$ errichten = Richtung von b_{FE}^t = erster geometrischer Ort für φ . In π Parallele zur Geradföhrung ziehen = Richtung von b_F = zweiter geometrischer Ort für φ . Es ist dann $b_F = \pi \varphi \cdot E_b$.

D. Kinetik.

Lehre von der beschleunigten Bewegung. Die äußeren Kräfte und Momente sind nicht im Gleichgewicht, sondern sie ergeben eine resultierende Kraft und ein resultierendes Moment, deren Folge eine beschleunigte Bewegung des Körpers ist. Es werden Beziehungen zwischen den Kräften und Momenten, sowie Ort und Zeit aufgestellt.

I. Vorbemerkung.

Genau wie beim Berechnen der Auflagerkräfte in der Statik (siehe S. 30) ist auch beim Bestimmen der Bewegung eines Massenpunktes oder Systems von Massenpunkten dieses „frei“ zu machen, d. h. bei geführten Punkten oder Systemen sind die von der Führung ausgeübten „Führungskräfte“¹ als äußere Kräfte anzusetzen. Zwischen den einzelnen Massenpunkten innerhalb des Systems treten auch noch innere Kräfte auf [z. B. Anziehungskräfte zwischen den einzelnen Massenpunkten (vgl. Planetensystem) oder Oberflächenkräfte (Spannungen, Gas- und Flüssigkeitsdrücke in Hohlräumen des Systems)].

Werden die Massenpunkte oder Systemglieder, zwischen denen innere Kräfte auftreten, voneinander getrennt, so werden für die Teilsysteme die vorhin als innere bezeichneten Kräfte zu äußeren.

Für das ganze System bilden die inneren Kräfte wegen ihres paarweisen Auftretens (Wechselwirkungsgesetz) für sich ein Gleichgewichtssystem ($\sum_1^n \mathfrak{P}_i = 0$; $\sum_1^m \mathfrak{M}_i = \sum_1^m [\mathbf{r}_i \cdot \mathfrak{P}_i] = 0$).

Die Bewegung des Körpers kann zerlegt werden in ein Fortschreiten des Schwerpunktes (Translation) und eine Drehung um den Schwerpunkt (Rotation) (siehe Schwerpunktsätze S. 89/93 und Kinematik Abschn. I 1).

II. Grundbegriffe.

1. Massenmomente zweiter Ordnung².

Skalare Größe; Dimension: Masse \times Länge² [kg m s²].

a) Trägheitsmoment (stets > 0).

Definition:

Trägheitsmoment = Summe aller Massenelemente mal Abstand² von (siehe Abb. 124)

einem Bezugspunkt (polares Trägheitsmoment);

einer Bezugsachse (axiales Trägheitsmoment);

einer Bezugsebene (planares Trägheitsmoment).

Grundfigur: rechtwinkeliges Achsenkreuz xyz .

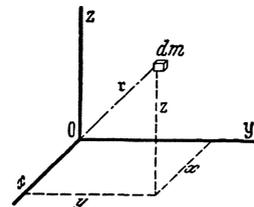


Abb. 124. Grundfigur zur Ableitung der Formeln für die verschiedenen Trägheitsmomente.

¹ Senkrecht auf der Führung steht die Normalkraft, in Richtung der Führung liegt die Tangentialkraft. Die Normal- Tangential- kraft ändert die Richtung der Geschwindigkeit.

² Momente erster Ordnung = statische Momente (vgl. Drehmoment = Länge \times Kraft oder Drall = Länge \times Bewegungsgröße, vektorielle Größen).

In der Festigkeitslehre werden auch Flächenträgheitsmomente (Fläche \times Abstand² benutzt. Massen- und Flächenträgheitsmomente sind keine physikalischen Begriffe, sondern nur Zusammenfassungen zur Abkürzung von Formeln.

Grundgleichungen:

<p style="text-align: center;">im Raume</p> $J_0 = \int dm r^2 = \int dm (x^2 + y^2 + z^2),$ $J_x = \int dm (y^2 + z^2),$ $J_y = \int dm (z^2 + x^2),$ $J_z = \int dm (x^2 + y^2),$ $J_{xy} = \int dm x y,$ $J_{yz} = \int dm y z,$ $J_{zx} = \int dm z x,$ <p style="text-align: center;">Folgerungen:¹</p>		<p style="text-align: center;">polares Trägheitsmoment</p> <p style="text-align: center;">in der Ebene ($z = 0$)</p> $J_0 = \int dm (x^2 + y^2),$ <p style="text-align: center;">axiales Trägheitsmoment</p> $J_x = \int dm y^2,$ $J_y = \int dm x^2,$ $J_z = \int dm (x^2 + y^2) \equiv J_0,$ <p style="text-align: center;">planares Trägheitsmoment</p>
--	--	---

$\text{Polar} = \text{Axial} + \text{Planar} = \sum_1^3 \text{Planar} = \frac{1}{2} \cdot \sum_1^3 \text{Axial}$ $J_0 = J_x + J_y + J_z = J_{xy} + J_{yz} + J_{zx} = \frac{1}{2} (J_x + J_y + J_z),$ $= J_y + J_{zx},$ $= J_x + J_{zy}.$		$\text{Polar} = \sum_1^3 \text{Axial}$ $J_0 = J_x + J_y,$
$\text{Axial} = \sum_1^3 \text{Planar} = \sum_1^3 \text{Axial} - 2 \cdot \text{Planar}$ $J_x = J_{xy} + J_{zx} = J_y + J_z - 2 \cdot J_{yz},$ $J_y = J_{yz} + J_{zx} = J_z + J_x - 2 \cdot J_{zx},$ $J_z = J_{zx} + J_{zy} = J_x + J_y - 2 \cdot J_{xy}.$		

b) Zentrifugalmoment = Deviationsmoment (≥ 0).

= Summe aller Massenelemente mal Abstand von zwei aufeinander senkrecht stehenden Ebenen (siehe Abb. 125).

<p style="text-align: center;">Im Raume</p> $C_{xy} = \int dm \cdot x \cdot y,$ $C_{yz} = \int dm \cdot y \cdot z,$ $C_{zx} = \int dm \cdot z \cdot x.$		<p style="text-align: center;">In der Ebene ($z = 0$)</p> $C_{xy} = \int dm \cdot x \cdot y.$
---	--	--

Sind $C_{xy} = C_{yz} = C_{zx} = 0$, so heißen die Achsen xyz Hauptachsen.

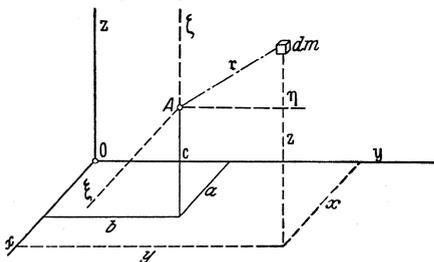


Abb. 125. Übergang auf parallele Achsen.

c) Übergang auf andere Koordinatensysteme.

α) Parallele Achsen.

Durch Einsetzen der Werte (siehe Abb. 125)

$$\xi = x - a,$$

$$\eta = y - b,$$

$$\zeta = z - c^*$$

in die Grundformeln folgt:

¹ \sum_1^3 bzw. \sum_1^3 , d. h. \sum von 2 bzw. 3 Trägheitsmomenten der angegebenen Art.

* Bei ebenen Problemen ist $\zeta \equiv z = 0$ mit $c = 0$ zu setzen.

$$\begin{array}{l}
 J_A = J_0 + M \cdot (a^2 + b^2 + c^2) \\
 J_\xi = J_x + M \cdot (b^2 + c^2) \\
 J_\eta = J_y + M \cdot (c^2 + a^2) \\
 J_\zeta = J_z + M \cdot (a^2 + b^2) \\
 J_{\xi\eta} = J_{xy} + M \cdot c^2 \\
 J_{\eta\zeta} = J_{yz} + M \cdot a^2 \\
 J_{\zeta\xi} = J_{zx} + M \cdot b^2
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 - 2a \cdot \int dm \cdot x - 2b \cdot \int dm \cdot y - 2c \cdot \int dm \cdot z, \\
 - 2b \cdot \int dm \cdot y - 2c \cdot \int dm \cdot z, \\
 - 2c \cdot \int dm \cdot z - 2a \cdot \int dm \cdot x, \\
 - 2a \cdot \int dm \cdot x - 2b \cdot \int dm \cdot y, \\
 - 2c \cdot \int dm \cdot z, \\
 - 2a \cdot \int dm \cdot x, \\
 - 2b \cdot \int dm \cdot y, \\
 = 0, \text{ falls } xyz \text{ durch den Schwerpunkt gehen} \\
 \text{(s. Definition des Schwerpunktes S. 26).}
 \end{array}$$

Steinerscher Satz: Das Trägheitsmoment, bezogen auf einen anderen Punkt (parallele Achse, parallele Ebene), ist gleich dem Trägheitsmoment, bezogen auf den Schwerpunkt (Schwerachse, Schwerebene) + Gesamtmasse \times Abstand² der beiden Bezugsgrößen voneinander.

$$\begin{array}{l}
 C_{\xi\eta} = C_{xy} + M \cdot a b \\
 C_{\eta\zeta} = C_{yz} + M \cdot b c \\
 C_{\zeta\xi} = C_{zx} + M \cdot c a
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 - b \int dm \cdot x - a \int dm \cdot y, \\
 - c \int dm \cdot y - b \int dm \cdot z, \\
 - a \int dm \cdot x - c \int dm \cdot x, \\
 = 0, \text{ falls } xyz \text{ durch den Schwerpunkt gehen (siehe S. 26).}
 \end{array}$$

Das Zentrifugalmoment, bezogen auf eine parallele Ebene, ist gleich dem auf die Schwerebene bezogenen + Gesamtmasse \times Produkt aus den Abständen der neuen Ebenen von den ursprünglichen.

In bezug auf den Schwerpunkt (Schwerachse, Schwerebene) werden die Trägheits- und Zentrifugalmomente am kleinsten.

Die Auswertung der Integrale rechts von der punktierten Linie kann man sich beim Übergang von Punkten (Achsen, Ebenen), denen der Schwerpunkt nicht angehört, zu ebensolchen durch den Weg über den Schwerpunkt ersparen; z. B. (siehe Abb. 126) gegeben J_x ; gesucht $J_\xi = ?$

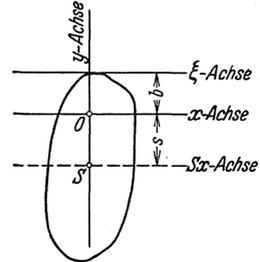


Abb. 126. Schwerpunktsachse und parallele Achsen (Steinerscher Satz).

Nach dem Steinerschen Satz ist:

$$\begin{array}{l}
 J_x = J_{Sx} + M \cdot s^2 \\
 J_\xi = J_{Sx} + M (b + s)^2, \\
 \hline
 \text{mithin } J_\xi = J_x + M b^2 + 2 M \cdot b \cdot s.
 \end{array}$$

β) Schiefe Achsen.

Für den Raum gilt: Mit den Winkeln zwischen den einzelnen Achsen (siehe Abb. 127)

	x	y	z
ξ	α_1	β_1	γ_1
η	α_2	β_2	γ_2
ζ	α_3	β_3	γ_3

gelten die Transformationsformeln

$$\begin{array}{l}
 \xi = x \cdot \cos \alpha_1 + y \cdot \cos \beta_1 + z \cdot \cos \gamma_1, \\
 \eta = x \cdot \cos \alpha_2 + y \cdot \cos \beta_2 + z \cdot \cos \gamma_2, \\
 \zeta = x \cdot \cos \alpha_3 + y \cdot \cos \beta_3 + z \cdot \cos \gamma_3
 \end{array}$$

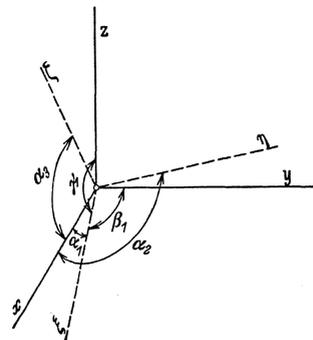


Abb. 127. Übergang zu schiefen Achsen.

und damit gehen die Grundgleichungen über in

$$\left. \begin{array}{l} J_{\xi} = J_x \cdot \cos^2 \alpha_1 + J_y \cdot \cos^2 \beta_1 + J_z \cdot \cos^2 \gamma_1 \\ J_{\eta} \\ J_{\zeta} \end{array} \right\} \text{ durch zyklische Vertauschung.} \quad \left| \begin{array}{l} -2C_{xy} \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \beta_1 - 2C_{yz} \cdot \cos \beta_1 \cdot \cos \gamma_1 \\ -2C_{zx} \cdot \cos \gamma_1 \cdot \cos \alpha_1 \\ = 0, \text{ falls } xyz \text{ Hauptachsen sind (s. S. 72)}^1. \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} C_{\xi\eta} = -J_x \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 - J_y \cdot \cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2 - J_z \cdot \cos \gamma_1 \cdot \cos \gamma_2 \\ + C_{xy} \cdot (\cos \alpha_1 \cdot \cos \beta_2 + \cos \beta_1 \cdot \cos \alpha_2) \\ + C_{yz} \cdot (\cos \beta_1 \cdot \cos \gamma_2 + \cos \gamma_1 \cdot \cos \beta_2) \\ + C_{zx} \cdot (\cos \gamma_1 \cdot \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \cdot \cos \gamma_2) \end{array} \right\} = 0, \text{ falls } xyz \text{ Hauptachsen sind (s. S. 72)}^2,$$

$$\left. \begin{array}{l} C_{\eta\zeta} \\ C_{\zeta\xi} \end{array} \right\} \text{ durch zyklische Vertauschung.}$$

In der Ebene ist (siehe Abb. 128):

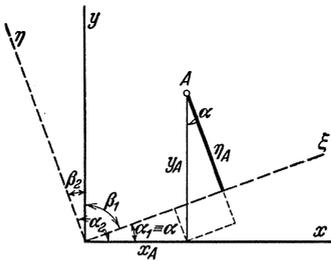


Abb. 128. Schiefe Achsen in der Ebene.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\equiv \alpha, \\ \beta_1 &= 90 - \alpha, \\ \alpha_2 &= 90 + \alpha, \\ \beta_2 &= 90 - \beta_1 = \alpha, \\ \xi &= x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha, \\ \eta &= -x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

$$J_{\xi} = \int dm \eta^2 = J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \sin^2 \alpha - C_{xy} \cdot \sin 2\alpha,$$

$$J_{\eta} = \int dm \xi^2 = J_x \cdot \sin^2 \alpha + J_y \cdot \cos^2 \alpha + C_{xy} \cdot \sin 2\alpha,$$

$$C_{\xi\eta} = \int dm \xi \eta = (J_x - J_y) \cdot \frac{1}{2} \sin 2\alpha + C_{xy} \cdot \cos 2\alpha.$$

¹ Für das planare Trägheitsmoment $J_{\eta\zeta}$ erhält man durch Einsetzen des obigen Wertes für ξ in die Grundgleichung (siehe S. 72)

$$J_{\eta\zeta} = J_{yz} \cdot \cos^2 \alpha_1 + J_{zx} \cdot \cos^2 \beta_1 + J_{xy} \cdot \cos^2 \gamma_1 + 2 \cdot C_{xy} \cdot \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + 2 \cdot C_{yz} \cdot \cos \beta_1 \cdot \cos \gamma_1 + 2 \cdot C_{zx} \cdot \cos \gamma_1 \cdot \cos \alpha_1.$$

Es ist ferner:

$$1 = \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1, \quad (\text{siehe S. 2})$$

$$J_0 = J_0 \cdot \cos^2 \alpha_1 + J_0 \cdot \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1,$$

$$J_0 = J_x + J_{yz} = J_y + J_{zx} = J_z + J_{xy}, \quad (\text{siehe S. 72}); \text{ dies eingesetzt ergibt:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J_0 = (J_x + \underline{J_{yz}}) \cdot \cos^2 \alpha_1 + (J_y + \underline{J_{zx}}) \cdot \cos^2 \beta_1 + (J_z + \underline{J_{xy}}) \cdot \cos^2 \gamma_1, \\ J_0 = J_{\xi} + J_{\eta\zeta}, \\ J_0 = J_{\xi} + \underline{J_{yz} \cdot \cos^2 \alpha_1} + \underline{J_{zx} \cdot \cos^2 \beta_1} + \underline{J_{xy} \cdot \cos^2 \gamma_1} \\ + 2 \cdot \underline{C_{xy} \cdot \cos \alpha_1 \cos \beta_1} + 2 \cdot \underline{C_{yz} \cdot \cos \beta_1 \cos \gamma_1} + 2 \cdot \underline{C_{zx} \cdot \cos \gamma_1 \cos \alpha_1}. \end{array} \right.$$

$$\underline{J_{\xi} = J_x \cdot \cos^2 \alpha_1 + J_y \cdot \cos^2 \beta_1 + J_z \cdot \cos^2 \gamma_1 - 2C_{xy} \cdot \cos \alpha_1 \cdot \cos \beta_1 - 2C_{yz} \cdot \cos \beta_1 \cos \gamma_1 - 2C_{zx} \cdot \cos \gamma_1 \cdot \cos \alpha_1} \quad \text{w. z. b. w.}$$

² Durch Einsetzen der Werte für ξ und η in die Definitionsgleichung $C_{\xi\eta} = \int dm \xi \eta$ erhält man zunächst:

$$C_{\xi\eta} = J_{yz} \cdot \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + J_{zx} \cdot \cos \beta_1 \cos \beta_2 + J_{xy} \cdot \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 + C_{xy} (\cos \alpha_1 \cos \beta_2 + \cos \alpha_2 \cos \beta_1) + C_{yz} (\dots) + C_{zx} (\dots),$$

die mit den Beziehungen (siehe S. 72)

$$J_{yz} = \frac{1}{2} \left(-\underset{xy}{J_{zz}} + \underset{z}{J_y} + \underset{x}{J_z} \right)$$

und den für die Koordinatendrehung geltenden Gleichungen

$$\cos \frac{\alpha_1}{2} \cos \frac{\alpha_2}{3} + \cos \frac{\beta_1}{3} \cos \frac{\beta_2}{3} + \cos \frac{\gamma_1}{3} \cos \frac{\gamma_2}{3} = 0$$

den obigen Wert annimmt.

Zu den beliebigen Achsen xy liegen die Hauptachsen 1, 2 (mit $C_{12} = 0$) unter den Winkeln α_0 und $\alpha_0 + \frac{\pi}{2}$, wobei aus der letzten Gleichung folgt:

$$\operatorname{tg} 2 \alpha_0 = \frac{2 \cdot C_{xy}}{J_y - J_x}.$$

d) Bestimmen der Massenmomente zweiter Ordnung.

Rechnung.	Zeichnung.	Versuch.
Rein analytisch.	Verfahren von Culmann, Mohr, Nehls.	Schwingungen.
Tabellarisch.		Anlaufen.

α) Rechnung.

Rein analytisch nur durchführbar (siehe die angegebenen Definitionsformeln S. 72), wenn die Gestalt des Körpers analytisch erfaßbar ist. Z. B. Quader, Zylinder, Kugel, Kegel, Rechteck, Kreis, Dreieck usw.

Tabellarisch, wenn die Querschnittsform des Körpers graphisch gegeben ist. Querschnittfläche

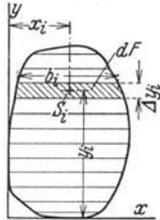


Abb. 129. Zur tabellarischen Bestimmung des Trägheits- und Zentrifugalmomentes.

in rechteckige Streifen parallel zur Bezugsachse zerlegen (siehe Abb. 129). Grenzlinie des Querschnittes als Bezugslinie (Bezugsebene des Körpers) wählen, damit alle Ordinaten dasselbe Vorzeichen haben (zur Vermeidung von Rechenfehlern). Umrechnen der Trägheits- und Zentrifugalmomente auf parallele Achsen (Ebenen) usw., siehe S. 72/73.

Die Summen der nebenstehenden Spalten ergeben

$$\begin{aligned} \Sigma_4 &= F = \text{Querschnittsfläche,} \\ \Sigma_7 + \Sigma_8 &= J_x = \text{Trägheitsmoment,} \\ \Sigma_9 + \Sigma_{10} &= C_{xy} = \text{Zentrifugalmoment,} \\ \left. \begin{aligned} \frac{\Sigma_{11}}{\Sigma_4} &= x_s \\ \frac{\Sigma_{12}}{\Sigma_4} &= y_s \end{aligned} \right\} \text{Schwerpunktskoordinaten.} \end{aligned}$$

¹ Ist die Höhe h der Flächenstreifen klein gewählt, so können die Spalten 7 und 9 gegenüber 8 und 10 vernachlässigt werden. (Trägheits- und Zentrifugalmomente in bezug auf Achsen durch den Schwerpunkt des Flächenstreifens.)

Num- mer	Breite	Höhe	Fläche	Schwerpunktsabstände von den Bezugslinien x-Richtung y-Richtung	Teil- trägheits- moment ¹	Fläche mal Abstand	Teizentrifugal- moment ¹	Fläche mal Abstand mal Abstand	Fläche mal Abstand						
										1	2	3	4	5	6
1.	b_1	Δy_1	$\Delta F_1 = b_1 \cdot \Delta y_1$	x_1	$\Delta J_x = \frac{\Delta F_1 \cdot \Delta y_1^3}{12}$	$\Delta J_x'' = \Delta F_1 \cdot x_1^2$	$\Delta C_{xy}'' = \Delta F_1 \cdot x_1 \cdot y_1$	$\Delta C_{xy}'' = \Delta F_1 \cdot x_1 \cdot y_1$	$\Delta F_1 \cdot y_1$	$\Delta F_1 \cdot x_1$	$\Delta F_1 \cdot x_1^2$	$\Delta F_1 \cdot x_1 \cdot y_1$	$\Delta F_1 \cdot y_1^2$	$\Delta F_1 \cdot x_1 \cdot y_1$	$\Delta F_1 \cdot y_1^3$
...
...
—	—	—	Σ_4	—	Σ_7	Σ_8	Σ_9	Σ_{10}	Σ_{11}	Σ_{12}	—	—	—	—	—

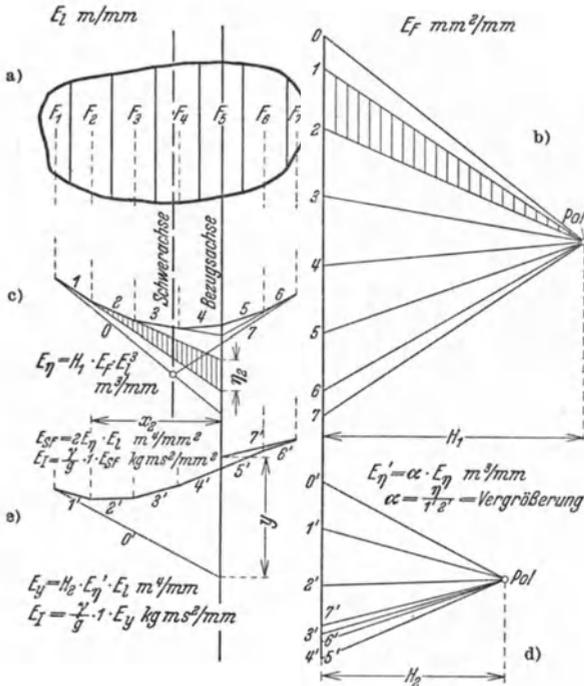


Abb. 130. Zeichnerische Bestimmung des Trägheitsmomentes nach Culmann und Mohr.

a) Lageplan. b) erstes Flächeneck mit Polstrahlen. c) erstes Seileck (Mohr). d) zweites Flächeneck mit Polstrahlen. e) zweites Seileck (Culmann).

Die Tabelle ergibt die Flächenmomente $[m^4]$. Die Massenmomente für 1 m Längenausdehnung senkrecht zur Zeichenebene folgen daraus durch Multiplikation mit der Dichte γ/g $[kg\ m^{-4}\ s^2]$.

β) Zeichnung.

Trägheitsmoment nach Culmann. Querschnittsfläche in schmale Streifen parallel zur Bezugsachse unterteilen (siehe Abb. 130). Flächenstreifeninhalt wie Kräfte in einem Krafteck auftragen, Pol wählen, Polstrahlen und Seileck zeichnen (0, 1, 2, 3 ...), auf Bezugsachse Moment des jeweiligen Flächenstreifens $F_i \cdot x_i$ als Länge η auf der Bezugsachse zwischen den entsprechenden Seilstrahlen abgreifen (siehe S. 61, Vorzeichen beachten) und damit zweites Krafteck und zweites Seileck (0', 1', 2', 3' ...) zeichnen. Die Länge y zwischen den letzten Seilstrahlen auf der Bezugsachse ist ein Maß für das Trägheitsmoment in bezug auf diese Achse.

Maßstäbe:	gegeben:	Länge	$E_1\ m/mm$,
	gewählt:	Fläche (im Flächeneck)	$E_f\ mm^2/mm^*$,
	gewählt:	1. Polabstand	$H_1\ mm$,
	berechnet:	1. Moment	$E_\eta = H_1 \cdot E_f \cdot E_1^3\ m^3/mm$,
	gewählt:	2. Belastung	$E'_\eta = \alpha \cdot E_\eta\ m^3/mm$
	gewählt:	2. Polabstand	$H_2\ mm$,
	berechnet:	2. Moment	$E_y = H_2 \cdot \alpha \cdot E_\eta \cdot E_1$ $= H_2 \cdot H_1 \cdot E_f \cdot E_1^4 \cdot \alpha\ m^4/mm$,
	berechnet:	Trägheitsmoment für 1 m Erstreckung senkrecht zur Zeichenebene	$E_J = \frac{\gamma}{g} \cdot 1 \cdot E_y\ kg\ m\ s^2/mm$.

Trägheitsmoment nach Mohr. Erstes Seileck wie bei Culmann zeichnen. Die schraffierte Fläche ($\frac{1}{2} x_2 \cdot \eta_2$ siehe Abb. 130) stellt dar: Teilmoment \times Abstand = Trägheitsmoment des Flächenstreifens. Das Gesamtträgheitsmoment ist also gleich der Summe aller Teilträgheitsmomente, d. h. die Seileckfläche ist ein Maß dafür.

¹ Der Schnittpunkt des ersten und letzten Seilstrahles gibt eine Schwerachse (siehe S. 13 u. 26).

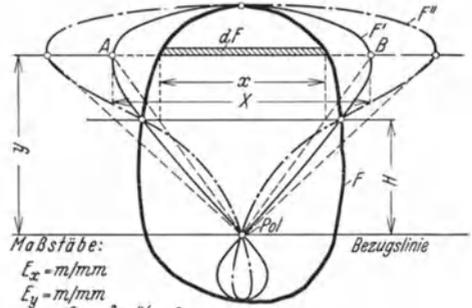
* Der Maßstab gibt das Verhältnis $E_f = \frac{F_1}{0\ 1} = \frac{F_2}{1\ 2}$, wobei mit F_1 die Größe der Fläche in der Zeichnung einzusetzen ist (nicht die durch die Zeichnungsgröße F_1 dargestellte Fläche mit den Ausmaßen $F \cdot E_f^2$).

Maßstäbe: für das erste Seileck wie bei Culmann.

Seileckfläche $E_{SF} = 2 \cdot E_{\eta} \cdot E_i \text{ m}^4/\text{mm}^2,$

Trägheitsmoment $E_J = E_{SF} \cdot 1 \cdot \frac{\gamma}{g} \text{ kg m s}^2/\text{mm}^2.$

Trägheitsmoment nach Nehls. Breite x der Querschnittsfigur auf eine im Abstände H zur Bezugsachse gezogene Parallele projizieren (siehe Abb. 131), von beliebig auf der Bezugsachse gewähltem Pole O Polstrahlen nach den Projektionspunkten ziehen und mit der ursprünglichen Breitenordinate x zum Schnitt bringen (Punkte A, B), dann ist wegen $y \cdot x \cdot dy = H \cdot X \cdot dy = dM$ die F' -Fläche ein Maß für das statische Moment in bezug auf die Bezugsachse. Dieselbe Konstruktion mit der F'' -Fläche durchgeführt, gibt in der F'' -Fläche ein Maß für das Trägheitsmoment.



Maßstäbe:
 $E_x = \text{m/mm}$
 $E_y = \text{m/mm}$
 $E_F = H^2 \cdot E_x \cdot E_y^3 \text{ m}^4/\text{mm}^2$
 $E_I = \frac{\gamma}{g} \cdot 1 \cdot E_{F''} \text{ kg m s}^2/\text{mm}^2$
 Abb. 131. Bestimmen des Trägheitsmomentes nach Nehls.

- Maßstäbe: gegeben: Breite $E_x \text{ m/mm},$
 Höhe $E_y \text{ m/mm},$
 gewählt: Polabstand $H \text{ mm},$
 berechnet: 2. Moment $E_{F''} = H^2 \cdot E_x \cdot E_y^3 \text{ m}^4/\text{mm}^2,$
 berechnet: Trägheitsmoment $E_J = \frac{\gamma}{g} \cdot 1 \cdot E_{F''} \text{ kg m s}^2/\text{mm}^2.$

Zentrifugalmoment. Querschnittsfläche in schmale Streifen parallel einer Bezugsachse unterteilen (siehe Abb. 132). Erstes Seileck gibt in der Länge ξ auf der ersten Bezugsachse x das jeweilige sta-

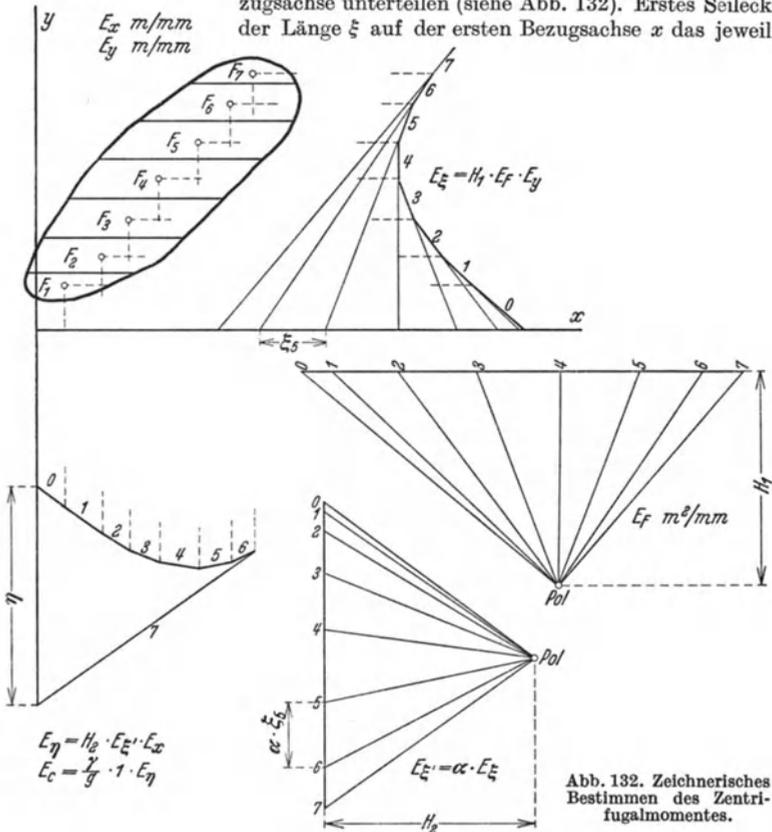


Abb. 132. Zeichnerisches Bestimmen des Zentrifugalmomentes.

tische Moment bezüglich dieser Achse. Diese Momente werden als Belastungen in den Schwerpunkten der Flächenstreifen in Richtung der zweiten Achse y aufgefaßt und damit ein zweites Seileck gezeichnet. Die Ordinate η zwischen den letzten Seilstrahlen ist ein Maß für das Zentrifugalmoment.

Maßstäbe: gegeben:	Breite	E_x m/mm ,
	Höhe	E_y m/mm ,
gewählt:	Fläche (im Krafteck)	E_f m ² /mm* ,
gewählt:	Polabstand	H_1 mm ,
berechnet:	1. Moment	$E_\xi = H_1 \cdot E_f \cdot E_y$ m ³ /mm ,
gewählt:	zweite Belastung	$E_{\xi'} = \alpha \cdot E_\xi$ m ³ /mm ,
gewählt:	Polabstand	H_2 mm ,
berechnet:	2. Moment	$E_\eta = H_2 \cdot E_{\xi'} \cdot E_x$ $= H_1 \cdot H_2 \cdot \alpha \cdot E_f \cdot E_y \cdot E_x$ m ⁴ /mm ,
	Zentrifugalmoment	$E_c = \frac{\gamma}{g} \cdot 1 \cdot E_\eta$ kg m s ² /mm .

γ) Versuch.

Torsionsschwingungen: Körper um die Bezugsachse Torsionsschwingungen ausführen lassen. An Stelle der in Abb. 133 dargestellten Aufhängung kann auch eine Torsionsfeder, bifilare oder Aufhängung an 3 Seilen in Art eines Dreibeines treten. Wesentlich ist nur, daß der Körper Torsionsschwingungen ausführt.

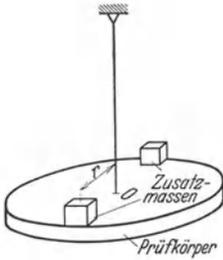


Abb. 133. Bestimmen des Trägheitsmomentes durch Torsionsschwingungen.

1. Schwingungszeit T_1 des Körpers beobachten.
2. Zusatzmassen (weit von der Drehachse (damit das Zusatzträgheitsmoment $\Delta J = 2 \Delta J_s + 2 M r^2 \approx 2 M r^2$ wird) anbringen und neue Schwingungszeit T_2 beobachten.

Aus

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{J}{J + \Delta J}} \quad \text{folgt} \quad J = \frac{\Delta J}{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 - 1}$$

Pendelschwingungen: Bestimmen: Abstand s des Schwerpunktes S vom Drehpunkt O (siehe S. 26), Gewicht G des Prüfkörpers, Schwingungszeit T (siehe Abb. 134).

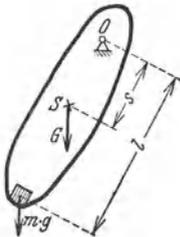


Abb. 134. Bestimmen des Trägheitsmomentes durch Pendelschwingungen.

Berechnen:

$$J_0 = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot s \cdot G,$$

Kontrollen durch Zusatzgewichte mg .

Aus den Schwingungszeiten ohne und mit Zusatzgewicht:

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_0}{G \cdot s}} \quad \text{und} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + m l^2}{G \cdot s + m g l}}$$

folgt:

$$J_0 = \frac{m g l \left(\frac{l}{g} - \frac{T_2^2}{4\pi^2} \right)}{\frac{T_2^2}{T_1^2} - 1}$$

Anlaufen: Läßt sich am Prüfkörper keine Achse anbringen, so ist er auf eine Drehscheibe (Trägheitsmoment J_0) so aufzusetzen, daß die Bezugsachse mit der Scheibenachse zusammenfällt. Antreiben der Anordnung durch ein Fallgewicht (siehe Abb. 135). Zu messen ist:

* Siehe Anm. 1 auf S. 76.

	Drehscheibe u. Prüfkörper	Drehscheibe allein
Gewicht zum Überwinden der Reibung ¹	R	R_0
antreibendes Gewicht	G	G_0
Fallhöhe	h	h_0
Fallzeit.	t	t_0

Aus dem Arbeitssatz (siehe S. 96) und der Beziehung $v = \frac{2h}{t}$ für konstante Beschleunigung (siehe S. 54) folgt:

$$J = r^2 \left[\frac{G \cdot t^2}{2h} - \frac{G + R}{g} - \frac{J_0}{r^2} \right],$$

wobei

$$\frac{J_0}{r^2} = \frac{G_0 \cdot t_0^2}{2 \cdot h} - \frac{G_0 + R_0}{g}$$

und r = Radius der Schnurscheibe ist.

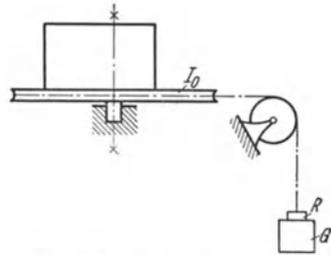


Abb. 135. Bestimmen des Trägheitsmomentes durch einen Anlaufversuch.

e) Darstellung.

- Trägheitsradius;
- Trägheitsellipsoid;
- Trägheitskreis.

α) Trägheitsradius.

Mit dem Trägheitsradius i bezeichnet man die Entfernung vom Pol (Achse, Ebene) in der die Gesamtmasse angebracht dasselbe Trägheitsmoment besitzt wie der gegebene Körper.

Polar: $J_0 = \int dm \cdot r^2 = M \cdot i_0^2$

Axial: $J_x = \int dm (y^2 + z^2) = M \cdot i_x^2$

y $z^2 + x^2$ y

z $x^2 + y^2$ z

Planar: $J_{xy} = \int dm \cdot z^2 = M \cdot i_{xy}^2$

z x^2 yz

z y^2 zx

Definition: Bisweilen wird statt des Trägheitsmomentes das Schwungmoment = Gewicht \times Trägheitsdurchmesser

$$S = G \cdot D^2 = M g \cdot 4 \cdot i^2 = 4 g J$$

angegeben.

β) Trägheitsellipsoid (Poinsot-Ellipsoid).

Auf der Achse, für die das Trägheitsmoment berechnet wurde, wird als Radiusvektor

$$R = \frac{\text{const}^2}{\sqrt{J_{\text{achs}}}} = \frac{\text{Const}^2}{i_{\text{achs}}}$$

aufgetragen, die Koordinaten des Endpunktes von R sind

$$X = R \cdot \cos \alpha = \frac{\text{const}^2}{\sqrt{J_{\text{achs}}}} \cdot \cos \alpha,$$

$$Y \quad \beta,$$

$$Z \quad \gamma.$$

¹ Die Reibung kann auch durch Wiederholen des Versuches mit verschiedenen Treibgewichten eliminiert werden.

Sie bilden das Poinso'sche Trägheitse ellipsoid

$$\text{const}^4 = J_x \cdot X^2 + J_y \cdot Y^2 + J_z \cdot Z^2^*,$$

$$1 = \left(\frac{X}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{Y}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{Z}{R_3}\right)^2,$$

wobei die Achsen des Ellipsoides $R_1 R_2 R_3$ mit den Hauptachsen xyz des Körpers zusammenfallen. Das Trägheitse ellipsoid ähnelt in seinen Hauptabmessungen der gegebenen Körperform.

Bei Drehung um die Achse r ist die Drehenergie (siehe S. 84)

$$E_{rot} = \frac{1}{2} J_r \cdot \omega^2 = \text{Const}^2 \cdot \frac{\omega^2}{R^2},$$

$$= \frac{1}{2} (J_1 \cdot \omega_x^2 + J_2 \cdot \omega_y^2 + J_3 \cdot \omega_z^2),$$

d. h. bei konstantem Energieinhalt E_{rot} ist die Drehgeschwindigkeit ω dem Radiusvektor R des Trägheitse ellipsoides direkt verhältig, d. h. man erhält für die Winkelgeschwindigkeiten ein ähnliches Ellipsoid

$$1 = \left(\frac{\omega_x}{\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{\omega_y}{\omega_2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_z}{\omega_3}\right)^2,$$

wobei $\omega_{1,2,3}$ die Winkelgeschwindigkeiten bei Drehungen um die Hauptachsen xyz und $\omega_{x,y,z}$ die Komponenten des jeweiligen ω sind.

Fällt der Koordinatenursprung O mit dem Schwerpunkte S zusammen, so wird das Ellipsoid zum Zentrallipsoid, seine Achsen sind dann Schwerpunkthauptachsen = freie Achsen (siehe S. 85).

Für die Ebene geht mit $Z = 0; \gamma = 0$ das Trägheitse ellipsoid in die Trägheitse ellipse

$$(\text{const}^2)^2 = J_x \cdot X^2 + J_y \cdot Y^2$$

über.

γ) Trägheitskreis (Ebene) von Mohr und Land.

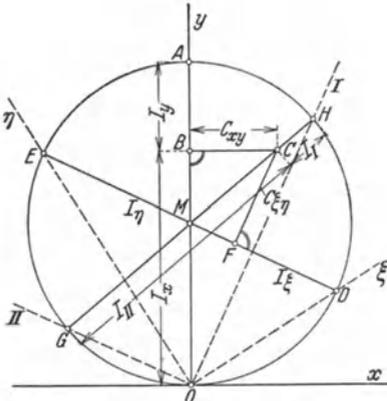


Abb. 136. Beziehungen zwischen den Trägheits- und Zentrifugalmomenten für verschiedene Achsen.

Über $\overline{OB} + \overline{BA} = J_x + J_y =$ der Summe aus den Trägheitsmomenten zweier senkrechter Achsen als Durchmesser wird ein Kreis geschlagen (siehe Abb. 136) und senkrecht auf OA in B wird das Zentrifugalmoment $C_{xy} = \overline{BC}$ abgetragen. Für beliebige Achsen $\xi\eta$ (OD, OE) sind dann die Trägheitsmomente $J_\xi = \overline{DF}$ bzw. $J_\eta = \overline{FE}$; und das Zentrifugalmoment ist $C_{\xi\eta} = \overline{CF}$, wobei $\overline{CF} \perp \overline{DE}$ steht.

Für die Hauptachsen ist $C_{III} = 0$, d. h. der Fußpunkt des Lotes von C auf den jeweiligen Durchmesser muß mit C zusammenfallen, d. h. der gesuchte Durchmesser geht durch \overline{CM} hindurch. Die Hauptträgheitsmomente sind dann $J_I = \overline{CH}$ und $J_{II} = \overline{CG}$, und die Hauptachsen sind $I = \overline{OH}$, $II = \overline{OG}$.

Beweis aus den aus der Figur für die einzelnen Strecken abzuleitenden geometrischen Beziehungen und Vergleich mit den Formeln auf S. 72.

* Es ist nach Definition $\text{const}^4 = R^2 \cdot J_{achs}$, woraus mit der Umformungsgleichung (siehe S. 74) $J_{achs} = J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \cos^2 \beta + J_z \cdot \cos^2 \gamma$ und $R^2 \cdot \cos^2 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}^2$ obige

Ellipsoidgleichung folgt.

2. Drall.

a) Definition.

Drall \mathfrak{B} = statisches Moment der Bewegungsgröße (des Impulses),
 = Vektorprodukt aus Entfernung vom Bezugspunkt und Impuls.
 Bewegungsgröße, Impuls = Produkt aus Masse und ihrer Geschwindigkeit = $\sum m \mathbf{v}$ *.

$$\mathfrak{B} = \sum [\mathbf{r} \cdot m \cdot \mathbf{v}] = \sum \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ m v_x & m v_y & m v_z \end{vmatrix}^*,$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \mathbf{i} \cdot B_x + \mathbf{j} \cdot B_y + \mathbf{k} \cdot B_z, \\ B_x &= \sum m (y \cdot v_z - z \cdot v_y), \\ B_y &= \sum m (z \cdot v_x - x \cdot v_z), \\ B_z &= \sum m (x \cdot v_y - y \cdot v_x). \end{aligned}$$

Sind xyz die Hauptachsen des Körpers, so ist ferner

$$B_x = \frac{\partial T}{\partial \omega_{xyz}} **.$$

b) Drall in bezug auf einen raumfesten Punkt O

= Drall in bezug auf den Schwerpunkt + Drall der Schwerpunktmasse in bezug auf O .

$$\mathfrak{B}_0 = \sum m \cdot [\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}] = \mathfrak{B}' + M \cdot [\mathbf{r}_S \cdot \mathbf{v}_S] ***.$$

Ist der Schwerpunkt in Ruhe [$\mathbf{v}_S = 0$], so ist der Drall unabhängig von der Wahl des Bezugspunktes; $\mathfrak{B}_0 \equiv \mathfrak{B}'$.

Drall in bezug auf einen raumfesten Punkt O oder den fortschreitenden Schwerpunkt S (\mathbf{r} = Entfernung von O bzw. S).

$$\mathfrak{B} = \sum m r^2 \cdot \bar{\omega} - \sum m \cdot \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \bar{\omega}) \dagger.$$

Das vektorielle Glied $\sum m \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \bar{\omega})$ bewirkt, daß der Drallvektor \mathfrak{B} und der Drehvektor $\bar{\omega}$ im allgemeinen nicht in dieselbe Richtung fallen.

* Die \sum ist über alle Massenpunkte zu nehmen.

** Dies folgt aus der partiellen Ableitung der Energiegleichung (siehe S. 84) $T = \frac{1}{2}(B_x \omega_x + B_y \omega_y + B_z \omega_z)$ nach den Winkelgeschwindigkeiten ω_{xyz} in Richtung der Hauptachsen xyz .

$$\frac{\partial T_x}{\partial \omega_x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial B_x}{\partial \omega_x} \cdot \omega_x + B_x \right) = B_x.$$

*** Index s gibt die Werte des Schwerpunktes in bezug auf den raumfesten Punkt O an, der Strich ' gibt die Werte eines beliebigen Massenpunktes A in bezug auf den Schwerpunkt S an (siehe Abb. 137). Nach den Gesetzen der Relativbewegung (siehe S. 56ff) ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_S + \mathbf{r}', \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_S + \mathbf{v}', \end{aligned}$$

mithin erhält man

$$\begin{aligned} \sum m [\mathbf{r} \mathbf{v}] &= \sum m [\mathbf{r}_S \mathbf{v}_S] + \sum m [\mathbf{r}_S \mathbf{v}'] + \sum m [\mathbf{r}' \mathbf{v}_S] + \sum m [\mathbf{r}' \mathbf{v}'], \\ \left. \begin{aligned} \sum m [\mathbf{r}_S \mathbf{v}'] &= [\mathbf{r}_S \cdot \sum m \mathbf{v}'] = \mathbf{r}_S \cdot 0 \\ \sum m [\mathbf{r}' \mathbf{v}_S] &= [(\sum m \mathbf{r}') \cdot \mathbf{v}_S] = 0 \cdot \mathbf{v}_S \end{aligned} \right\} \text{Definition des Schwerpunktes s. S. 26,} \\ \sum m [\mathbf{r}' \mathbf{v}'] &= \mathfrak{B}' = \text{Drall in bezug auf den Schwerpunkt.} \end{aligned}$$

† Es ist $\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_\varphi$ (siehe Komponentendarstellung S. 51) $[\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_r] = 0$, weil \mathbf{r} und \mathbf{v}_r in derselben Richtung liegen (siehe S. 5)

$$[\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_\varphi] = [\mathbf{r} \cdot [\bar{\omega} \mathbf{r}]] = \bar{\omega} \cdot r^2 - \mathbf{r} (\mathbf{r} \bar{\omega}) \quad (\text{siehe S. 7}).$$

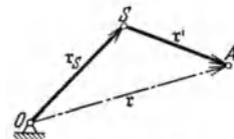


Abb. 137. Beziehung zwischen Aufpunkt A , Schwerpunkt S und Festpunkt O .

$$\begin{aligned} B_x &= \sum m (y^2 + z^2) \cdot \omega_x - \sum m x y \cdot \omega_y - \sum m x z \cdot \omega_z^* , \\ B_y &= \sum m (z^2 + x^2) \cdot \omega_y - \sum m y z \cdot \omega_x - \sum m y x \cdot \omega_z , \\ B_z &= \sum m (x^2 + y^2) \cdot \omega_z - \sum m z x \cdot \omega_x - \sum m z y \cdot \omega_y . \end{aligned}$$

Falls $\bar{\omega} = i\omega_x + j\omega_y + k\omega_z = \text{const}$ für alle m ist, d. h. für einen starren Körper, wird:

$$\mathfrak{B} = J_0 \cdot \bar{\omega} - \sum m r \cdot (\bar{\omega} r) ,$$

$$B_x = J_x \cdot \omega_x - \begin{matrix} -C_{xy} \cdot \omega_y - C_{xz} \cdot \omega_z \\ \begin{matrix} y & z \\ z & x \\ x & y \end{matrix} \end{matrix} \cdot \omega_x$$

← = 0, falls →

xyz Hauptachsen des Körpers sind (s. S. 72).

Sind J_{123} die Trägheitsmomente in bezug auf die Hauptachsen xyz , so ist wegen $C = 0$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(J_1 \omega_x)^2 + (J_2 \omega_y)^2 + (J_3 \omega_z)^2} ,$$

und $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} .$

Für die Winkel zwischen \mathfrak{B} , $\bar{\omega}$ und den Hauptachsen xyz gilt (siehe auch S. 2 Anm. 2):

$$\cos \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{B_{xyz}}{B} = \frac{J_1 \cdot \omega_x}{B} , \quad \cos \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = \frac{\omega_{xyz}}{\omega} ,$$

$$\cos \widehat{\mathfrak{B} \bar{\omega}} = \frac{B_x \omega_x + B_y \omega_y + B_z \omega_z}{B \cdot \omega} = \frac{J_1 \omega_x^2 + J_2 \omega_y^2 + J_3 \omega_z^2}{\omega \cdot \sqrt{(J_1 \omega_x)^2 + (J_2 \omega_y)^2 + (J_3 \omega_z)^2}} ,$$

$\alpha = \alpha'$ d. h. \mathfrak{B} und $\bar{\omega}$ fallen nur dann in dieselbe Richtung, wenn:
 $\beta = \beta'$ 1. $J_1 = J_2 = J_3$, d. h. die Hauptträgheitsmomente einander gleich sind,
 $\gamma = \gamma'$ das Trägheitsellipsoid also eine Kugel ist (siehe S. 79);
 oder 2. zwei Komponenten der Winkelgeschwindigkeit gleich null sind, d. h. die Drehung um eine Hauptachse stattfindet (siehe Abschnitt c).

c) Drehung um eine im Raume richtungsfeste Achse z durch O oder S

$$(\omega_x = \omega_y = 0) .$$

$B_x = -\sum m x z \cdot \omega_z$ und falls $B_x = -C_{xz} \cdot \omega_z = 0$, falls xyz Hauptachsen
 $B_y = -\sum m y z \cdot \omega_z$ $\omega_z = \omega \text{ const}$ $B_y = -C_{yz} \cdot \omega_z$ } des Körpers sind (s. S. 72),
 $B_z = +\sum m (x^2 + y^2) \cdot \omega_z$ für alle m ist: $B_z = +J_z \cdot \omega_z$.

d) Drallellipsoid.

Bei konstanter kinetischer Energie eines Körpers liegen die Endpunkte der Drallvektoren auf einem Ellipsoid¹, dessen Gleichung lautet:

$$1 = \left(\frac{B_x}{B_1}\right)^2 + \left(\frac{B_y}{B_2}\right)^2 + \left(\frac{B_z}{B_3}\right)^2 .$$

* Dies folgt am schnellsten aus den oben gegebenen Definitionsgleichungen durch Einsetzen der Geschwindigkeitswerte (siehe S. 47).

¹ Es ist nämlich

$$T = \frac{1}{2} J_0 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} B_0 \cdot \omega = \frac{1}{2} (B_x \omega_x + B_y \omega_y + B_z \omega_z)$$

und ferner $T = \frac{1}{2} B_1 \omega_1 = \frac{1}{2} B_2 \omega_2 = \frac{1}{2} B_3 \omega_3$
 daraus folgt

$$1 = \frac{B_x \omega_x}{B_1 \omega_1} + \frac{B_y \omega_y}{B_2 \omega_2} + \frac{B_z \omega_z}{B_3 \omega_3}$$

und mit der Definitionsgleichung

$$B_x = J_x \cdot \omega_x \quad \text{und} \quad B_1 = J_x \cdot \omega_1 ,$$

$$\begin{matrix} y & z \\ z & x \\ x & y \end{matrix}$$

also

$$\frac{\omega_{xyz}}{\omega_{123}} = \frac{B_{xyz}}{B_{123}} ,$$

erhält man obige Ellipsoidgleichung.

B_{xyz} sind die Komponenten des jeweiligen Drallvektors in Richtung der Hauptachsen xyz und $B_1 = J_x \cdot \omega_1$ ist die Größe des Dralles bei Drehung um eine Hauptachse x, y oder z mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1, ω_2 oder ω_3 .

Da $B_1 = J_1 \omega_1 \sim \frac{1}{R_{123}^2} \cdot R_{123} \sim \frac{1}{R_{123}}$ ist (siehe S. 79/80), ist das Drallellipsoid dem Trägheitsellipsoid umgekehrt verhältig.

3. Arbeit, Leistung. Energie.

a) Arbeit und Leistung.

Arbeit einer äußeren Kraft = skalares Produkt aus Kraft und Weg¹,
 = Kraft mal Weg in Krafttrichtung,
 = Weg mal Kraft in Wegrichtung,

$$dA_{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P} \cdot d\mathfrak{s} = P \cdot ds \cdot \cos \widehat{\mathfrak{P} d\mathfrak{s}},$$

$$= P_x \cdot dx + P_y \cdot dy + P_z \cdot dz.$$

Arbeit eines Drehmomentes = skalares Produkt aus Drehmoment und Winkelweg²,

$$dA_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} \cdot d\overline{\varphi},$$

$$= M_x \cdot d\alpha + M_y \cdot d\beta + M_z \cdot d\gamma.$$

Arbeit einer inneren Kraft = skalares Produkt aus Kraft und relativer Verschiebung (bei einem formveränderlichen Körper) der zwei zugehörigen Massenpunkte¹,

$$dA_i = \mathfrak{P}_i \cdot dl,$$

gesamte Elementararbeit: $dA = \mathfrak{P} d\mathfrak{s} + \mathfrak{M} d\overline{\varphi} + \mathfrak{P}_i dl,$

gesamte Arbeit auf dem Wege 1...2: $A_{1-2} = \int_1^2 \mathfrak{P} d\mathfrak{s} + \int_1^2 \mathfrak{M} d\overline{\varphi} + \int_1^2 \mathfrak{P}_i dl.$

Leistung = $\frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}} = \text{Kraft} \times \text{Geschwindigkeit} + \text{Drehmoment} \cdot \text{Winkelgeschwindigkeit}$

$$L = \frac{dA}{dt} = \mathfrak{P} \cdot \mathfrak{v} + \mathfrak{P}_i \cdot \mathfrak{v}_i + \mathfrak{M} \cdot \overline{\omega}.$$

b) Kinetische Energie = Energie der Bewegung

eines Massenpunktes = $\frac{1}{2}$ Masse \times Geschwindigkeit² = $\frac{1}{2} m v^2,$

eines Massensystemes = algebraische Summe der kinetischen Energien aller Massenpunkte = $\Sigma (\frac{1}{2} m v^2),$

¹ Das heißt, für jede Kraft senkrecht zur Bewegungsrichtung (z. B. Normalkräfte bei Führungen) ist die Arbeit = 0.

² Drehmoment durch Kräftepaar (siehe S. 28) darstellbar, dessen eine Kraft durch den Drehpunkt geht (Weg = 0) und dessen andere den Weg $d\mathfrak{s} = [d\overline{\varphi} \cdot \mathfrak{r}]$ zurücklegt.

$$d\mathfrak{s} = [d\overline{\varphi} \cdot \mathfrak{r}] = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= \mathfrak{i} (d\beta \cdot z - d\gamma \cdot y) - \mathfrak{j} (d\alpha \cdot z - d\gamma \cdot x) + \mathfrak{k} (d\alpha \cdot y - d\beta \cdot x),$$

$$\mathfrak{P} d\mathfrak{s} = (\mathfrak{P} \cdot [d\overline{\varphi} \cdot \mathfrak{r}]) = (y \cdot P_z - z \cdot P_y) \cdot d\alpha + (z \cdot P_x - x \cdot P_z) \cdot d\beta + (x \cdot P_y - y \cdot P_x) \cdot d\gamma,$$

$$= M_x \cdot d\alpha \quad + M_y \cdot d\beta \quad + M_z \cdot d\gamma,$$

$$= \mathfrak{M} \cdot d\overline{\varphi}.$$

eines formveränderlichen Körpers = Fortschreitenergie der Schwerpunktmasse + Energie aller Massenteilchen in bezug auf den Schwerpunkt,

$$T = \frac{1}{2} M \cdot v_s^2 + \frac{1}{2} \sum m v'^2 \quad *,$$

$$T = \frac{1}{2} M \cdot v_s^2 + \frac{1}{2} \sum m v_r'^2 + \frac{1}{2} \sum m v_\varphi'^2,$$

eines starren Körper $v_r' = 0$ = Fortschreitenergie der Schwerpunktmasse + Drehenergie in bezug auf den Schwerpunkt,

$$T = \frac{1}{2} M \cdot v_s^2 + \frac{1}{2} J_{S\omega'} \cdot \omega'^2 \quad **,$$

wobei $J_{S\omega'}$ = das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die durch den Schwerpunkt gehende Drehachse ist,

= Drehenergie um die Momentanachse,

$$= \frac{1}{2} \cdot J_\omega \cdot \omega^2 \quad ***,$$

= halbes skalares Produkt aus Drall- und Winkelgeschwindigkeitsvektor um die Momentanachse,

$$= \frac{1}{2} \cdot (\mathfrak{B} \cdot \bar{\omega}) = \frac{1}{2} \cdot B \cdot \omega \cdot \cos \widehat{\mathfrak{B}\omega} = \frac{1}{2} B_\omega \cdot \omega \quad \dagger,$$

= Energie der Lage, siehe S. 97 unter Potential.

potentielle Energie

* Dies folgt aus $T = \frac{1}{2} \sum m v^2$ mit $v = v_s + v'$, also $v^2 = v_s^2 + v'^2 + 2(v_s \cdot v')$. Bei der Summenbildung über alle Massenpunkte fällt wegen $\sum m v' = 0$ (siehe S. 26) das doppelte Produkt weg. Der Index s gilt für Werte des Schwerpunktes, der Strich ' für Werte eines Massenpunktes in bezug auf den Schwerpunkt (siehe Abb. 137).

** Es ist nämlich

$$v_\varphi'^2 = ([\bar{\omega}' \cdot r'] \cdot [\bar{\omega}' \cdot r']), \quad (\text{siehe S. 51})$$

$$[\bar{\omega}' \cdot r'] \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= i(\omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y) - j(\omega_x z - \omega_z \cdot x) + k(\omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x),$$

$$[\bar{\omega}' \cdot r']^2 = (z^2 + y^2) \cdot \omega_x^2 + (x^2 + z^2) \omega_y^2 + (y^2 + x^2) \cdot \omega_z^2$$

$$- 2xy\omega_x\omega_y - 2yz\omega_y\omega_z - 2zx\omega_z\omega_x,$$

$$\sum m [\bar{\omega}' \cdot r']^2 = J_x \cdot \omega_x^2 + J_y \cdot \omega_y^2 + J_z \cdot \omega_z^2 - 2C_{xy} \cdot \omega_x \omega_y - 2C_{yz} \cdot \omega_y \omega_z - 2C_{zx} \cdot \omega_z \omega_x,$$

wobei

$$\omega' = i\omega'_x + j\omega'_y + k\omega'_z = \text{const für alle } m \text{ ist.}$$

Mit

$$\omega'_x = \omega' \cos \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

erhält man für

$$\begin{aligned} \sum m [\bar{\omega}' \cdot r']^2 &= \omega'^2 \cdot (J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \cos^2 \beta + J_z \cdot \cos^2 \gamma - 2C_{xy} \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ &\quad - 2C_{yz} \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma - 2C_{zx} \cdot \cos \gamma \cdot \cos \alpha), \\ &= \omega'^2 J_{S\omega}, \quad (\text{siehe S. 74}) \end{aligned}$$

d. h. $J_{S\omega}$ ist das Trägheitsmoment für eine durch den Schwerpunkt S gehende und in Richtung der Winkelgeschwindigkeit ω' liegende Achse.

*** Es ist für den starren Körper in bezug auf die Momentanachse $v \equiv v_\varphi = [\omega \cdot r]$. Weitere Entwicklung entsprechend Anmerkung **.

† Es ist $T = \frac{1}{2} J_\omega \cdot \omega^2$; sind ferner xyz die Hauptachsen und $\alpha\beta\gamma$ die Winkel zwischen $\bar{\omega}$ und diesen Hauptachsen, so ist auch

$$T = \frac{1}{2} (J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \cos^2 \beta + J_z \cdot \cos^2 \gamma) \omega^2, \quad (\text{siehe S. 74})$$

$$= \frac{1}{2} (J_x \cdot \omega_x^2 + J_y \cdot \omega_y^2 + J_z \cdot \omega_z^2),$$

$$= \frac{1}{2} (B_x \omega_x + B_y \omega_y + B_z \omega_z), \quad (\text{siehe S. 82})$$

$$= \frac{1}{2} (\mathfrak{B} \cdot \bar{\omega}). \quad (\text{siehe S. 5})$$

4. Übersicht über die verschiedenen Achsen.

Schwerpunktsachsen, Schwerachsen sind alle durch den Schwerpunkt gehenden Achsen, auf sie bezogen sind die statischen Momente der Massen (siehe S. 26) gleich null.

$$\sum dm \cdot x = \sum dm \cdot y = \sum dm \cdot z = 0.$$

Hauptachsen: für sie sind die Zentrifugalmomente (siehe S. 72) gleich null.

$$C_{xy} = C_{xz} = C_{yz} = 0.$$

Die Trägheitsmomente für diese Achsen heißen Hauptträgheitsmomente. Unter ihnen sind J_{max} und J_{min} .

Schwerpunktshauptachsen sind Hauptachsen, die durch den Schwerpunkt hindurchgehen. Für sie sind die statischen und die Zentrifugalmomente gleich null.

$$\sum dm \cdot x = \sum dm \cdot y = \sum dm \cdot z = 0,$$

$$C_{xy} = C_{xz} = C_{yz} = 0.$$

Sie sind freie Achsen (siehe S. 94), d. h. bei Drehungen um diese Achsen treten keine dynamischen Lagerreaktionen auf.

Symmetrieebenen enthalten 2 Hauptachsen, während die dritte darauf senkrecht steht. In ihnen liegt der Schwerpunkt.

Symmetrieachsen sind Schwerpunktshauptachsen (freie Achsen).

5. Übersicht über die verschiedenen Ellipsoide.

Die Achsen der Ellipsoide, gekennzeichnet durch die Zeiger 123, fallen mit den Koordinatenachsen xyz , die in Richtung der Hauptachsen des Körpers liegen, zusammen.

Ellipsoid	Gleichung des Ellipsoides	Achsen des Ellipsoides
Trägheit (siehe S. 79)	$1 = \left(\frac{X}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{Y}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{Z}{R_3}\right)^2,$	$R_{\frac{1}{3}} \sim \frac{1}{\sqrt{J_{\frac{1}{3}}}} = \frac{1}{i_{\frac{1}{3}}},$
Winkelgeschwindigkeit (siehe S. 80)	$1 = \left(\frac{\omega_x}{\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{\omega_y}{\omega_2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_z}{\omega_3}\right)^2,$	$\omega_{123} = \sqrt{\frac{2E}{J_{123}}} \sim R_{123},$
Drall (siehe S. 82)	$1 = \left(\frac{B_x}{B_1}\right)^2 + \left(\frac{B_y}{B_2}\right)^2 + \left(\frac{B_z}{B_3}\right)^2,$	$B_{123} = J_{\frac{1}{3}} \omega_{\frac{1}{3}} \sim \frac{1}{R_{123}},$

d. h. das

{ Winkelgeschwindigkeitsellipsoid } ist dem Trägheitsellipsoid { umgekehrt } verhältig.
 { Drallellipsoid } „ „ „ { direkt }

6. Ersatzmassen.

a) Statische und dynamische Gleichwertigkeit.

Statische Gleichwertigkeit

zwischen dem ursprünglichen und dem Ersatzsystem (mit ' bezeichnet) verlangt:

Gesamtmasse	= const	$M = \int dm = \sum m',$	①
Schwerpunkt,	= const	$\int dm r = \sum m' r' \left\{ \begin{array}{l} \int dm x = \sum m' x', \\ \int dm y = \sum m' y', \\ \int dm z = \sum m' z'. \end{array} \right.$	②
d. h. Momente ersten Grades in	= const		③
bezug auf einen beliebigen			④
Punkt (Achse, Ebene)	= const		

Dynamische Gleichwertigkeit

zwischen dem ursprünglichen und dem Ersatzsystem verlangt, daß auch noch die

$$\text{Trägheitsmomente} = \text{const} \quad J_{xy} = \int dm z^2 = \sum m' z'^2, \quad (5)$$

$$J_{yz} = \int dm x^2 = \sum m' x'^2, \quad (6)$$

$$J_{zx} = \int dm y^2 = \sum m' y'^2, \quad (7)$$

$$\text{und die Hauptachsen} = \text{const}, \quad C_{xy} = \int dm xy = \sum m' x' y' = 0, \quad (8)$$

$$\text{d. h. die Zentrifugalmomente} \quad C_{yz} = \int dm yz = \sum m' y' z' = 0, \quad (9)$$

$$= 0 \text{ sind.} \quad C_{zx} = \int dm zx = \sum m' z' x' = 0. \quad (10)$$

Die kleinste Anzahl der Ersatzmassen für statische und dynamische Gleichwertigkeit ist bei einem Körper = 4*. Bei 4 Ersatzmassen treten 16 Unbekannte auf (4 Massen und 4×3 Koordinaten), 10 Gleichungen stehen zur Verfügung, es sind also 6 Stücke frei wählbar.

Bei ebenen Systemen vereinfachen sich die Bedingungen wegen Fortfalles der Gleichungen 4, 5, 9 und 10 ($z \equiv 0$) und 8 auf 5 Gleichungen.

b) Ebene Systeme.

α) Zwei Ersatzmassen.

Schwerpunkt = Koordinatenursprung, beide Punkte auf der x -Achse ($y_1 = 0$). 4 Unbekannte, 3 Gleichungen, 1 Stück frei wählbar.

a) Koordinate x'_1 eines Punktes gewählt. Aus den Gleichungen 1, 2, 6 (siehe Abschn. a) folgt:

$$x'_2 = -\frac{i^2}{x'_1},$$

d. h. die Punkte mit den Massen m'_1 und m'_2 liegen zueinander wie Aufhängepunkt und Schwingungsmittelpunkt eines Pendels, d. h. wie Stoßpunkt und Stoßmittelpunkt eines gestoßenen Körpers (siehe S. 106).

$$m'_1 = M \cdot \frac{i^2}{x_1'^2 + i^2} = M \cdot \frac{x'_2}{x'_2 - x'_1},$$

$$m'_2 = M \cdot \frac{i^2}{x_2'^2 + i^2} = M \cdot \frac{x'_1}{x'_1 - x'_2}.$$

b) Massengleichheit $m'_1 = m'_2$ gewählt.

Ergebnis:

$$m'_1 = m'_2 = \frac{1}{2} M,$$

$$x'_1 = -x'_2 = i.$$

β) Drei Ersatzmassen auf einer Geraden.

Schwerpunkt = Koordinatenursprung, alle 3 Punkte auf der x -Achse ($y_1 = 0$). 6 Unbekannte, 3 Gleichungen, 3 Stücke frei wählbar. Koordinaten x_1 der 3 Punkte gewählt (z. B. Schwerpunkt und 2 Gelenke des Getriebegliedes).

Ergebnis:

$$m'_1 = \frac{M}{D} \cdot (x'_3 x'_2 + i^2) \cdot (x'_3 - x'_2),$$

$$m'_2 = \frac{M}{D} \cdot (x'_1 x'_3 + i^2) \cdot (x'_1 - x'_3),$$

$$m'_3 = \frac{M}{D} \cdot (x'_2 x'_1 + i^2) \cdot (x'_2 - x'_1),$$

* Man kann nämlich durch 3 Punkte immer eine Ebene legen. Es wäre dann die Ordinate senkrecht zu dieser (z. B. z) dauernd gleich null, also 2 Bedingungen (Gl. 4 und 5) blieben unerfüllt.

wobei

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x'^2_1 & x'^2_2 & x'^2_3 \end{vmatrix} \\ = x'_3 x'_2 (x'_3 - x'_2) + x'_1 x'_3 (x'_1 - x'_2) + x'_2 x'_1 (x'_2 - x'_1)$$

ist.

7. Kraft- und Massenreduktion.

Bei Behandlung von zwangläufigen Getrieben reduziert man häufig die treibenden und widerstehenden Kräfte und die getriebenen Massen auf einen Punkt¹.

Grundgedanke:

1. Arbeit der Kräfte \mathfrak{P} am ursprünglichen System = Arbeit der Ersatzkraft \mathfrak{P}_{red} im reduzierten System

$$\Sigma (\mathfrak{P} d\mathfrak{s}) = (\mathfrak{P}_{red} \cdot d\mathfrak{s}_{red}),$$

Differentiation nach der Zeit ergibt

$$\mathfrak{P}_{red} = \Sigma \mathfrak{P} \cdot \left(\frac{v}{v_{red}} \right).$$

2. Kinetische Energie des ursprünglichen Systems = kinetische Energie der Ersatzmasse.

$$\Sigma J_S \cdot \omega_S^2 + \Sigma m v_S^2 = m_{red} \cdot v_{red}^2, \\ m_{red} = \Sigma m \left(\frac{v_S}{v_{red}} \right)^2 + \Sigma J_S \cdot \frac{\omega_S^2}{v_{red}^2} \\ = M \cdot \left(\frac{v_S}{v_{red}} \right)^2 + \Sigma J_S \cdot \left(\frac{\omega_S}{v_{red}} \right)^2.$$

Sind die Massen m der einzelnen Getriebeglieder zuvor auf Ersatzpunkte (Ersatzmassen m') reduziert worden (siehe S. 85), so ist:

$$m_{red} = \Sigma m' \cdot \left(\frac{v'}{v_{red}} \right)^2.$$

Die Geschwindigkeitsverhältnisse werden nach der Methode der lotrechten Geschwindigkeiten (siehe S. 67) oder mittels Wittenbauers Geschwindigkeitsplan (siehe S. 66) bestimmt. Im allgemeinen ist $m_{red} \neq const$, d. h. es gelten für die Bewegung die Gesetze für veränderliche Massen (siehe S. 89). Meist erhält man \mathfrak{P}_{red} und m_{red} abhängig vom Wege s_{red} des Reduktionspunktes nicht in analytischer, sondern in Form von Kurven (siehe Abb. 138). Man bilde dann:

$$A = \int_0^s \mathfrak{P}_{red} \cdot d\mathfrak{s}_{red} = m_{red} \cdot g \cdot \frac{v_{red}^2}{2g} - m_{0red} \cdot g \cdot \frac{v_{0red}^2}{2g}$$

und berechne daraus $\frac{v_{red}^2}{2g} = f(s_{red})$ (siehe S. 64) zu:

$$\frac{v_{red}^2}{2g} = \frac{A + G_{0red} \frac{v_{0red}^2}{2g}}{G_{red}}$$

G = veränderliches Massengewicht.

Zeiger $_0$ = Anfangszustand mit $s_{red} = 0$.

Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der einzelnen Systempunkte folgen aus denen des Reduktionspunktes nach Wittenbauers Geschwindigkeits- und Beschleunigungsplan.

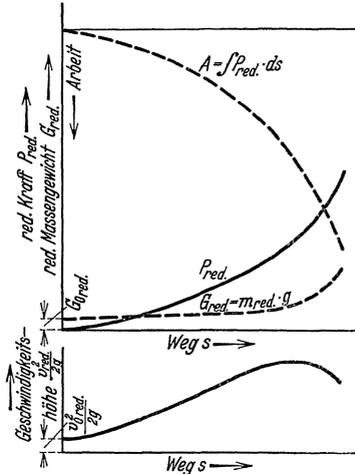


Abb. 138. Bestimmen der Geschwindigkeit des Reduktionspunktes aus reduzierter Kraft und Masse.

¹ Man vermeide es nach Möglichkeit, Punkte mit schwingender Bewegung (z. B. Kreuzkopf oder Punkte einer Schwinge) als Reduktionspunkte zu wählen, da im Augenblick der Bewegungsumkehr $v_{red} = 0$ wird, mithin $m_{red} \rightarrow \infty$ geht.

III. Grundgesetze der Kinetik.

1. Fortschreitende Bewegung (Translation).

a) Impulssatz.

Antrieb der Kraft = Änderung der Bewegungsgröße¹,
= Änderung des Impulses.

¹ Zur Anwendung des Impulssatzes zeichne man eine Hüllfläche um den zu untersuchenden Bereich. Die geometrische Differenz zwischen der aus- und eintretenden Bewegungsgröße (= Impuls = Masse \times Geschwindigkeit) ist gleich dem innerhalb der Hüllfläche ausgeübten Antriebe (Kraft \times Zeit). Alle Vorgänge innerhalb der Hülle, wie z. B. Umlenkungen, Stöße, chemische Umsetzungen, also Energieverluste usw., bleiben unbeachtet.

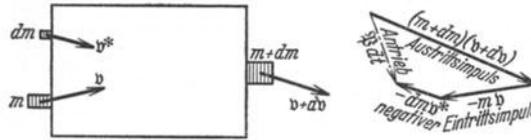


Abb. 139. Anwendung des Impulssatzes bei unveränderlicher Masse.
a) Hüllfläche. b) Impulsvektoren.

Beispiel: Fall 2 (siehe Abb. 139)

$$\left. \begin{aligned} \text{austrtende Bewegungsgröße} &= (m + dm)(v + dv) \\ \text{eintretende „} &= m \cdot v + dm v^* \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Differenz} = \text{Impulsänderung} &= m \cdot dv - dm(v^* - v) \\ &= m \cdot dv - dm v_{rel} \\ &= \text{Antrieb der Kraft} = \mathfrak{F} \cdot dt. \end{aligned}$$

Die Gleichungen für Fall 3 (reduzierte Masse) folgen aus dem Energiesatz (siehe S. 96) durch Multiplikation mit $\frac{dt}{d\mathfrak{s}} = \frac{1}{v}$ oder aus der Lagrangeschen Gleichung (siehe S. 100). Fall 3 entspricht dem Falle 2, wenn die hinzukommende Masse dm die Geschwindigkeit $v^* = \frac{1}{2} v$ besitzt.

$$\begin{aligned} \text{Energiesatz: } \mathfrak{F} d\mathfrak{s} &= d\left(\frac{m v^2}{2}\right) = m v dv + \frac{1}{2} v^2 dm \cdot \frac{dt}{d\mathfrak{s}}, \\ \mathfrak{F} dt &= m \cdot dv + \frac{1}{2} v dm. \end{aligned}$$

$$\text{Lagrangesche Gleichung: } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial T}{\partial u} = - \frac{\partial U}{\partial u}.$$

$$\text{Systemkoordinate: } u \equiv s; \quad \dot{u} \equiv \dot{s} = v.$$

$$\text{Kinetische Energie: } T = \frac{1}{2} m v^2,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial v} &= m \cdot v; & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial v} \right) &= \frac{dm}{dt} \cdot v + m \cdot \frac{dv}{dt}, \\ \frac{\partial T}{\partial u} &= \frac{\partial T}{\partial s} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dm}{ds} \cdot v^2; & - \frac{\partial U}{\partial u} &= - \frac{\partial U}{\partial s} = \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt die angegebene Formel.

Fall 2 läßt sich nicht nach Lagrange ableiten, weil infolge des Stoßes ein Energieverlust auftritt, also die Voraussetzung Energie = $T + U = \text{const}$ nicht zutrifft.

α) Massenpunkt.

<p>Masse = const¹ $m = \text{const.}$ $dm = 0.$</p>	<p>Masse veränderlich¹</p>	
	<p>wirkliche Änderung einer wirklich vorhandenen Masse</p>	<p>gedachte Änderung einer auf einen Punkt reduzierten Masse (siehe S. 87).</p>
	<p>Zugang von Masse $dm \geq 0.$ Abgang</p>	
<p>$\mathfrak{R} dt = d(mv) \dagger$</p> <p>$\mathfrak{R} dt = m \cdot dv$</p> <p>$P_x \cdot dt = m \cdot dv_x \dagger\dagger$</p>	<p>$\mathfrak{R} dt + dm v^* = d(mv)$ $= dm v + m dv$</p> <p>$\mathfrak{R} dt = m dv - dm v_{rel}$, wobei $v_{rel} = v^* - v$ die Relativgeschwindigkeit der Masse dm gegenüber der Masse m ist</p> <p>$P_x \cdot dt = m dv_x - dm v_{rel\ x}$</p>	<p>$\mathfrak{R} dt + \frac{1}{2} dm v = d(mv)$</p> <p>$\mathfrak{R} dt = m dv + \frac{1}{2} dm v$</p> <p>$P_x dt = m dv_x + \frac{1}{2} dm v_x$</p>

β) System von Massenpunkten².

Masse = konstant, starrer und formveränderlicher Körper.

$$\mathfrak{R} \cdot dt = \sum d(mv) = \sum (m \cdot dv) \dagger\dagger\dagger.$$

Erster Schwerpunktsatz betrifft fortschreitende Bewegung des Schwerpunktes:

$$\mathfrak{R} \cdot dt = M \cdot dv_s.$$

Der Schwerpunkt eines Systems bewegt sich so, als ob alle Kräfte parallel verschoben an ihm angriffen und die gesamte Masse in ihm vereinigt wäre (siehe oben; Gesetze für den Massenpunkt). Durch innere Kräfte und Kräftepaare kann der Schwerpunkt nicht bewegt werden.

Trägheitsgesetz: Beim Fehlen äußerer Kräfte und auch bei statischem Gleichgewicht ($\mathfrak{R} = \sum \mathfrak{R} = 0$) verharrt der Schwerpunkt in Ruhe oder gerader gleichförmiger Bewegung ($dv_s = 0$; $v_s = \text{const.}$).

¹ Nach der Relativitätstheorie ist $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, wobei v die Geschwindigkeit der bewegten Masse und c die konstante Lichtgeschwindigkeit ist. Bei technischen Problemen ist v^2/c^2 so klein, daß in der technischen Mechanik von dieser Art der Massenänderung abgesehen werden kann.

† \mathfrak{R} ist die Resultierende aller auf den betrachteten Massenpunkt wirkenden Kräfte.

†† Weitere Zerlegungen siehe beim dynamischen Grundgesetz (siehe S. 90).

² Die Gleichungen für ein System von Massenpunkten erhält man durch Addition der für jeden Punkt angesetzten.

††† $\mathfrak{R} = \sum \mathfrak{R} =$ Resultierende aller an allen Massenpunkten angreifenden Kräfte.

= Resultierende aller äußeren Kräfte, da ja die zwischen den einzelnen

Massenpunkten vorhandenen inneren Kräfte wegen ihres paarweisen Auftretens herausfallen.

$\sum d(mv)$ ist die Summe der Impulsänderungen aller Massenpunkte.

v = Absolutgeschwindigkeit eines Massenpunktes m .

v_s = Absolutgeschwindigkeit des Schwerpunktes.

v' = Relativgeschwindigkeit eines Massenpunktes gegenüber dem Schwerpunkt $v = v_s + v'$ (siehe S. 56 u. Abb. 137).

$\sum (mv) = M \cdot v_s + \sum mv'$. Nach der Definition des Schwerpunktes ist $\sum (mv') = 0$ und auch $\sum mv' = 0$ für alle Zeiten, d. h. es ist $\sum (mdv) = M \cdot dv_s$.

Masse veränderlich.

$$\begin{aligned} \mathfrak{K} \cdot dt + \sum dm v^* &= \sum d(m v) , \\ \text{Kraftantrieb} + \text{zugeführter Impuls} &= \text{Impulsänderung}, \\ &= \sum m dv + \sum v dm, \\ &= M \cdot dv_s + \sum v dm, \\ \mathfrak{K} \cdot dt &= M \cdot dv_s - \sum dm v_{rel}, \quad \text{wobei } v_{rel} = v^* - v \text{ ist.} \end{aligned}$$

b) Dynamische Grundgleichung

folgt aus dem Impulssatz durch Differentiation nach der Zeit.

Kraft = zeitliche Änderung der Bewegungsgröße (des Impulses),
= Änderungsgeschwindigkeit des Impulses.

α) Massenpunkt.

Masse = const ¹ m = const dm = 0	Masse veränderlich ¹	
	wirkliche Änderung einer wirklich vorhandenen Masse Zugang Abgang	gedachte Änderung einer auf einen Punkt reduzierten Masse (siehe S.87) von Masse dm ≥ 0
$\mathfrak{K} = \frac{d}{dt} (m v)$	$\mathfrak{K} + \frac{dm}{dt} \cdot v^* = \frac{d}{dt} (m v)$	$\mathfrak{K} + \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} \cdot v = \frac{d}{dt} (m v)$
$\mathfrak{K} = m \cdot \frac{dv}{dt} = m \mathfrak{b}$	$\mathfrak{K} = m \cdot \mathfrak{b} - \frac{dm}{dt} \cdot v_{rel}$	$\mathfrak{K} = m \mathfrak{b} + \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} v$
Kraft = Masse × Beschleunigung	$= m \mathfrak{b} - \frac{dm}{ds} \cdot v \cdot v_{rel}$	$= m \mathfrak{b} + \frac{1}{2} \frac{dm}{ds} v \cdot v$
	wobei $v_{rel} = v^* - v$ ist	

Zerlegung in kartesische Koordinaten²:

$$P_x = m \cdot b_x.$$

Zerlegung nach Euler in der Schmiegungebene der Bahn:

$$P_n = m \cdot b_n = m \cdot \frac{v^2}{\rho} \quad \text{Richtungsänderung von } v ,$$

$$P_t = m \cdot b_t = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad \text{Größenänderung von } v .$$

Zerlegung in Polarkoordinaten:

$$P_r = m \cdot b_r = m \cdot \ddot{r} - m \cdot r \cdot \omega^2,$$

$$P_\varphi = m b_\varphi = m r \varepsilon + 2 m \dot{r} \omega = \frac{2 m}{r} \cdot \frac{d^2 F}{dt^2} .$$

¹ Siehe Anm. I auf S. 89.

² Siehe Kinematik, S. 51.

β) System von Massenpunkten.

Masse = konstant, starrer und formveränderlicher Körper.

$$\mathfrak{R} = \frac{d}{dt} (\Sigma m v) = \Sigma m \cdot \dot{v} \dagger.$$

Erster Schwerpunktsatz (siehe auch S. 89) betrifft fortschreitende Bewegung des Schwerpunktes:

$$\mathfrak{R} = M \cdot \dot{v}_s$$

Resultierende Kraft = Gesamtmasse \times Schwerpunktsbeschleunigung, d. h. für die Bewegung des Schwerpunktes gelten die gleichen Gesetze wie für die Bewegung eines Massenpunktes (siehe S. 90).

Trägheitsgesetz: $\mathfrak{R} = 0$; $\dot{v}_s = 0$; $v_s = \text{const}$ (siehe S. 89).

Prinzip von d'Alembert:
führt durch Anbringen der Ergänzungskräfte $-m\dot{v}$ das kinetische Problem auf ein statisches zurück.

$$\mathfrak{R} + \Sigma (-m \dot{v}) = 0.$$

Die äußeren Kräfte ($\mathfrak{R} = \Sigma \mathfrak{P}$) und die Ergänzungskräfte ($-m\dot{v}$) bilden ein Gleichgewichtssystem. Die inneren Kräfte zwischen den Massenpunkten bilden infolge ihres paarweisen Auftretens für sich ein Gleichgewichtssystem. Sie üben also auf die Bewegung des Schwerpunktes keinen Einfluß aus¹.

Masse veränderlich.

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} + \Sigma \frac{dm}{dt} \cdot v^* &= \frac{d}{dt} \Sigma m v, \\ &= \Sigma m \dot{v} + \Sigma \frac{dm}{dt} v, \\ &= M \cdot \dot{v}_s + \Sigma \frac{dm}{dt} \cdot v, \\ \mathfrak{R} &= M \cdot \dot{v}_s - \Sigma \frac{dm}{dt} \cdot v_{rel}, \\ &= M \cdot \dot{v}_s - \Sigma \frac{dm}{ds} \cdot v \cdot v_{rel}, \end{aligned}$$

wobei $v_{rel} = v^* - v$ ist.

2. Drehende Bewegung (Rotation).

a) Satz vom Drehimpuls = Drallsatz = Flächensatz².

Er folgt aus dem Impulssatz für die fortschreitende Bewegung durch vektorielle Multiplikation mit r , der jeweiligen Entfernung von einem beliebig gewählten raumfesten Punkt O .
Antrieb der Kraftmomente = Änderung des statischen Momentes der Bewegungsgröße,

$$\begin{aligned} &= \text{,, ,, ,, ,, des Impulses,} \\ &= \text{,, ,, doppelten Produktes aus Masse und Flächengeschwindigkeit}^3, \\ &= \text{,, ,, Drehimpulses,} \\ &= \text{,, ,, Dralles.} \end{aligned}$$

[†] Siehe Anm. ^{†††} auf S. 89.

¹ Die inneren Kräfte heißen deshalb auch „verlorene“ Kräfte. Beim unstarren Körper verrichten sie aber Arbeit (siehe S. 83).

² Siehe Bemerkungen über die Hüllfläche auf S. 88.

³ Es ist $v = v_r + v_\varphi$ (siehe S. 51),

$[r \cdot v_r] = 0$, weil beide Vektoren die gleiche Richtung haben,

$[r \cdot v_\varphi] = 2 \cdot \frac{d\mathfrak{F}}{dt}$ (siehe S. 52).

α) Massenpunkt.

Masse = const ¹ m = const dm = 0	Masse veränderlich ¹	
	wirkliche Änderung einer wirklich vorhandenen Masse	gedachte Änderung einer auf einen Punkt reduzierten Masse (siehe S. 87)
	Zugang Abgang von Masse dm ≥ 0	
$\mathfrak{M} \cdot dt = [r \mathfrak{P}] \cdot dt = d[r m v]$ $= m d[r v] \quad \dagger$ $= m [r \cdot d v]$ $= 2 \cdot m \cdot d\left(\frac{d\mathfrak{F}}{dt}\right) \dagger\dagger$	$\mathfrak{M} \cdot dt + dm [r^* v^*] = d[m r v]$ $\mathfrak{M} \cdot dt = m \cdot d[r v]$ $+ dm ([r v] - [r^* v^*]) \dagger$	$\mathfrak{M} \cdot dt = m \cdot d[r v] + \frac{1}{2} dm [r v] \dagger$
$M_x \cdot dt = (y Z - z Y) \cdot dt$ $= m (y \cdot d v_z - z \cdot d v_y)$	$M_x \cdot dt = m (y d v_z - z d v_y)$ $+ dm \{(y v_z - z v_y)$ $- (y^* v_z^* - z^* v_y^*)\}$	$M_x \cdot dt = m (y d v_z - z d v_y)$ $+ \frac{1}{2} dm (y v_z - z v_y)$

$\mathfrak{M}_y dt$ und $\mathfrak{M}_z dt$ durch zyklische Vertauschung.

β) System von Massenpunkten.

Masse = konstant; starrer und formveränderlicher Körper.

$$\mathfrak{M}_0 \cdot dt = [r \mathfrak{R}] \cdot dt = \sum d[r \cdot m v] = d \sum m [r v] = d \mathfrak{B}_0,$$

$$= d \mathfrak{B}' + M \cdot [r_s d v_s].$$

Antrieb der Momente in bezug auf raumfesten Punkt O = Dralländerung in bezug auf den Schwerpunkt + Dralländerung der Schwerpunktsmasse in bezug auf O .
Zweiter Schwerpunktssatz (betrifft Drehbewegung um den Schwerpunkt)

$$\mathfrak{M}' \cdot dt = [r' \mathfrak{R}] dt = d \mathfrak{B}' = d \sum m [r' v'] \dagger\dagger\dagger$$

Antrieb der Momente in bezug auf den Schwerpunkt = Änderung des Dralles in bezug auf den Schwerpunkt.

Keplersches Gesetz (entspricht dem Trägheitsgesetz): Beim Fehlen äußerer Momente und auch bei statischem Gleichgewicht (\mathfrak{M}_0 bzw. $\mathfrak{M}' = 0$) bleibt der Drall des Systemes konstant.

$$\left(d \mathfrak{B} = 0; \quad \mathfrak{B} = \sum [m r v] = 2 \sum m \frac{d\mathfrak{F}}{dt} = \text{const.} \right)$$

Es ist also die Flächengeschwindigkeit konstant oder mit anderen Worten: In gleichen Zeiten werden von den Fahrstrahlen gleiche Flächen überstrichen.

Masse veränderlich.

$$\mathfrak{M} \cdot dt + \sum dm [r^* v^*] = d \sum m [r v],$$

Antrieb der Momente + Zusatzdrall = Dralländerung.

¹ Siehe Anm. I auf S. 89.

† $d[r v] = [d r v] + [r d v],$

$[d r \cdot v] = [v d t \cdot v] = 0,$

weil beide Vektoren die gleiche Richtung haben (siehe S 5).

†† Siehe Anm. ³ auf Seite 91.

††† Es ist $\mathfrak{M} = [r \mathfrak{R}] = [r_s \cdot \mathfrak{R}] + [r' \cdot \mathfrak{R}] = [r_s \cdot \mathfrak{R}] + \mathfrak{M}'$, ferner $\mathfrak{R} = M \cdot \mathfrak{h}_s = M \cdot \frac{d v_s}{dt}$, also läßt sich $[r_s \cdot \mathfrak{R}] dt$ gegen $M [r_s \cdot d v_s]$ kürzen, so daß obige Gleichung übrig bleibt.

b) Dynamische Grundgleichung.

Sie folgt aus dem Drallsatz durch Differentiation nach der Zeit oder aus der dynamischen Grundgleichung der fortschreitenden Bewegung durch vektorielle Multiplikation mit r , der Entfernung von einem beliebig gewählten raumfesten Punkte.

Drehmoment = zeitliche Änderung des statischen Momentes der Bewegungsgröße,
 = „ „ „ „ „ „ des Impulses,
 = „ „ „ „ Drehimpulses,
 = „ „ „ „ Dralles,
 = Drallgeschwindigkeit.

α) Massenpunkt.

Masse = const ¹ $m = \text{const}$ $dm = 0$	Masse veränderlich ¹	
	wirkliche Änderung einer wirklich vorhandenen Masse	gedachte Änderung einer auf einen Punkt reduzierten Masse (siehe S. 87)
	Zugang Abgang von Masse $dm \geq 0$	
$\mathfrak{M} = [r \mathfrak{P}] = \frac{d}{dt} [m r v]$ $= m [r \mathfrak{b}]$ $= 2m \cdot \frac{d^2 \mathfrak{S}}{dt^2}$	$\mathfrak{M} + \frac{dm}{dt} [r^* v^*] = \frac{d}{dt} [m r v]$ $\mathfrak{M} = m [r \mathfrak{b}]$ $+ \frac{dm}{dt} \{[r v] - [r^* v^*]\}$	$\mathfrak{M} = m [r \mathfrak{b}] + \frac{1}{2} \frac{dm}{dt} [r v]$

Zerlegung in kartesische Koordinaten:

$$M_x = m \cdot (y \cdot \ddot{z} - z \cdot \ddot{y}),$$

$$M_y = m \cdot (z \cdot \ddot{x} - x \cdot \ddot{z}),$$

$$M_z = m \cdot (x \cdot \ddot{y} - y \cdot \ddot{x}).$$

β) System von Massenpunkten.

Masse = konstant; starrer und formveränderlicher Körper.

$$\mathfrak{M}_0 = [r \mathfrak{R}] = \frac{d}{dt} \sum m [r v] = \frac{d \mathfrak{S}_0}{dt}$$

$$= \sum m [r \mathfrak{b}]$$

$$= \frac{d \mathfrak{S}'}{dt} + M \cdot [r_s \mathfrak{b}_s].$$

Drehmoment der Kräfte in bezug auf den raumfesten Punkt O
 = zeitliche Änderung des Dralles in bezug auf O ,
 = zeitliche Änderung des Dralles in bezug auf den Schwerpunkt + zeitliche Änderung des Dralles der Schwerpunktmasse in bezug auf O .

Zweiter Schwerpunktsatz (betrifft die Drehbewegung um den Schwerpunkt):

$$\mathfrak{M}' = \frac{d \mathfrak{S}'}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m [r' v'] = \sum m [r' \mathfrak{b}'].$$

Drehmoment um den Schwerpunkt = zeitliche Änderung des auf den Schwerpunkt bezogenen Dralles (vgl. S. 92).

Keplersches Gesetz (entspricht dem Trägheitsgesetz): Ist das Drehmoment $\mathfrak{M} = 0$, so ist der Drall $\mathfrak{P} = \text{const}$ (siehe auch S. 92).

¹ Siehe Anm. 1 auf S. 89.

Drehung eines starren Körpers um eine im Raume richtungsfeste Achse durch einen beliebigen Punkt O' (z. B. Momentanpol) mit der Absolutbeschleunigung \mathfrak{b}'_0 .

$$\mathfrak{M}_{O'} = \frac{d\mathfrak{B}'_{O'}}{dt} + M \cdot [\mathfrak{r}'_S \cdot \mathfrak{b}'_0] \dagger.$$

Drehmoment in bezug auf beliebigen Punkt O'
 = zeitliche Änderung des Dralles in bezug auf O'
 + Gesamtmasse \times Vektorprodukt aus Schwerpunktsabstand $\overline{O'S} = \mathfrak{r}'_S$ und Absolutbeschleunigung \mathfrak{b}'_0 von O' (siehe Abb. 140).

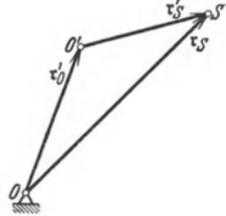


Abb. 140. Beziehung zwischen Schwerpunkt S , beschleunigt bewegtem Punkt O' und Festpunkt O .

δ) Übergang zum körperfesten Koordinatensystem¹. Eulersche Gleichungen.

$$\mathfrak{M} = \left(\frac{d\mathfrak{B}}{dt} \right)_{rel} + [\omega \cdot \mathfrak{B}] \dagger\dagger.$$

Drehmoment in bezug auf den Koordinatenursprung,
 = Änderung des Dralles in bezug auf das körperfeste (bewegte) System,
 + Vektorprodukt aus der Winkelgeschwindigkeit des Körpers gegen das raumfeste Koordinatensystem und dem Drall.
 Komponentendarstellung:

$$\left. \begin{aligned} M_\xi &= \frac{d}{dt} (J_1 \cdot \omega_\xi) - (J_2 - J_3) \cdot \omega_\eta \cdot \omega_\zeta, \\ M_\eta &= \frac{d}{dt} (J_2 \cdot \omega_\eta) - (J_3 - J_1) \cdot \omega_\xi \cdot \omega_\zeta, \\ M_\zeta &= \frac{d}{dt} (J_3 \cdot \omega_\zeta) - (J_1 - J_2) \cdot \omega_\xi \cdot \omega_\eta. \end{aligned} \right\} \text{Eulersche Form } \dagger\dagger\dagger.$$

† Aus der Grundformel (siehe S. 93) $\mathfrak{M}_O = \mathfrak{M}_{O'} + [\mathfrak{r}'_O \mathfrak{B}] = \frac{d\mathfrak{B}'}{dt} + M [\mathfrak{r}_S \mathfrak{b}_S]$ folgt mit den Beziehungen $\mathfrak{B} = M \cdot \mathfrak{b}_S$; $\mathfrak{r}_{O'} = \mathfrak{r}_S - \mathfrak{r}'_S$ und $\mathfrak{b}_S = \mathfrak{b}_{O'} + \mathfrak{b}_{S O'}$ (siehe Abb. 140).

$$\mathfrak{M}_{O'} + [\mathfrak{r}_S \cdot M \cdot \mathfrak{b}_S] - [\mathfrak{r}'_S \cdot M \cdot \mathfrak{b}_S] = \frac{d\mathfrak{B}'}{dt} + M \cdot [\mathfrak{r}_S \cdot \mathfrak{b}_S],$$

$$\mathfrak{M}'_O = \frac{d\mathfrak{B}'}{dt} + [\mathfrak{r}'_S \cdot M \cdot \mathfrak{b}_{S O'}] + [\mathfrak{r}'_S \cdot M \cdot \mathfrak{b}_{O'}] = \frac{d\mathfrak{B}'_{O'}}{dt} + M [\mathfrak{r}'_S \mathfrak{b}_{O'}].$$

¹ Das körperfeste System $\xi \eta \zeta$ führt eine reine Drehung gegenüber dem raumfesten xyz aus. Die Ursprungspunkte beider Koordinatensysteme fallen zusammen. Sie sind entweder ein raumfester Punkt oder der Schwerpunkt des Körpers. Im letzteren Falle bedeutet „raumfestes“ System: die Achsen xyz behalten ihre Richtung im Raume bei und der Ursprungspunkt gleitet auf der Schwerpunktsbahn entlang. (Vgl. S. 71, Zerlegen der Bewegung eines Körpers in eine Fortschreitbewegung des Schwerpunktes und eine Drehung um den Schwerpunkt.)

†† Das Moment ist gleich der absoluten Änderung des Drallvektors $= \frac{d\mathfrak{B}}{dt}$. Für diese gilt dieselbe Umformung wie für die absolute Geschwindigkeit (vgl. S. 57); es ist in der dortigen Formel nur statt des Ortsvektors \mathfrak{r} der Drallvektor \mathfrak{B} einzusetzen.

††† Es ist

$$\left(\frac{d\mathfrak{B}}{dt} \right)_{rel} = \frac{d}{dt} \{ i J_1 \cdot \omega_\xi + j J_2 \cdot \omega_\eta + k J_3 \cdot \omega_\zeta \}$$

und

$$\begin{aligned} [\omega \mathfrak{B}] &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ J_1 \cdot \omega_\xi & J_2 \cdot \omega_\eta & J_3 \cdot \omega_\zeta \end{vmatrix} \\ &= i (J_3 - J_2) \cdot \omega_\eta \cdot \omega_\zeta - j (J_3 - J_1) \cdot \omega_\xi \cdot \omega_\zeta + k (J_2 - J_1) \cdot \omega_\xi \cdot \omega_\eta, \end{aligned}$$

wobei $\xi \eta \zeta$ die Hauptachsen des Körpers; J_{123} die zugehörigen Trägheitsmomente; $\omega_{\xi \eta \zeta}$ die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit ω des körperfesten Systems gegenüber dem raumfesten projiziert in die körperfesten Hauptachsen sind.

$$M_{\xi} = \frac{dB_{\xi}}{dt} - (B_{\eta} \cdot \omega_{\xi} - B_{\xi} \cdot \omega_{\eta}) \dagger,$$

$$M_{\eta} = \frac{dB_{\eta}}{dt} - (B_{\xi} \cdot \omega_{\xi} - B_{\xi} \cdot \omega_{\xi}),$$

$$M_{\zeta} = \frac{dB_{\zeta}}{dt} - (B_{\xi} \cdot \omega_{\eta} - B_{\eta} \cdot \omega_{\xi}).$$

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}_{\xi} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_{\xi}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_{\eta}} \cdot \omega_{\xi} - \frac{\partial T}{\partial \omega_{\zeta}} \cdot \omega_{\eta} \right), \\ \mathfrak{M}_{\eta} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_{\eta}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_{\xi}} \cdot \omega_{\xi} - \frac{\partial T}{\partial \omega_{\zeta}} \cdot \omega_{\zeta} \right), \\ \mathfrak{M}_{\zeta} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_{\zeta}} \right) - \left(\frac{\partial T}{\partial \omega_{\xi}} \cdot \omega_{\eta} - \frac{\partial T}{\partial \omega_{\eta}} \cdot \omega_{\xi} \right). \end{aligned} \right\} \text{Lagrangesche Form } ^1.$$

3. Arbeitssatz = Energiesatz².

Er folgt aus dem Impulssatz durch skalare Multiplikation mit $v = \frac{d\mathfrak{s}}{dt}$ oder aus der dynamischen Grundgleichung durch skalare Multiplikation mit $d\mathfrak{s}$ und lautet:

Arbeit der äußeren und inneren Kräfte und Momente = Änderung der Bewegungsenergie + Summe aller Verluste an mechanischer Energie.

α) Massenpunkt.

Masse = const ³ $m = \text{const}$ $dm = 0$	Masse veränderlich ³	
	wirkliche Änderung einer wirklich vorhandenen Masse	gedachte Änderung einer auf einen Punkt reduzierten Masse (siehe S. 87)
	Zugang Abgang von Masse $dm \geq 0$	
$dA = \frac{1}{2} m d(v^2)$ $= \frac{1}{2} m d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$	$dA + \frac{dm}{2} v^{*2} = d\left(\frac{m}{2} v^2\right)$ $+ \frac{1}{2} dm (v_{rel}^2)$ Stoßverlust $dA = \frac{1}{2} m d(v^2)$ $+ dm(v^2 - (v^* \cdot v))$ $= \frac{1}{2} m d(v^2) - dm \cdot (v \cdot v_{rel})$ wobei $v_{rel} = v^* - v$ ist	$dA = d\left(\frac{m}{2} v^2\right)$ $= \frac{1}{2} m d(v^2) + \frac{1}{2} dm v^2$ $= d(G \cdot h)$ $G = m g =$ veränderliches reduziertes Massengewicht $h = \frac{v^2}{2g} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Geschwindig-} \\ \text{keitshöhe} \end{array} \right.$

β) System von Massenpunkten.

Masse = const

formveränderlicher Körper:

$$dA = \mathfrak{R}_a d\mathfrak{s} + \mathfrak{M}_{res} \cdot d\bar{\varphi} + \sum \mathfrak{P}_i \cdot dl = \frac{1}{2} \sum m \cdot d(v^2)$$

$$= \frac{1}{2} M \cdot d(v_S^2) + \frac{1}{2} \sum_m m d(v'^2) \dagger\dagger,$$

$$A = \int_1^2 \mathfrak{R}_a d\mathfrak{s} + \int_1^2 \mathfrak{M}_{res} \cdot d\bar{\varphi} + \int_1^2 \sum_m \mathfrak{P}_i \cdot dl = \frac{1}{2} M (v_{S2}^2 - v_{S1}^2) + \frac{1}{2} \sum_m m (v_{m2}^2 - v_{m1}^2),$$

† Über den Drall in bezug auf die Hauptachsen siehe S. 84.

¹ Über die Beziehungen zwischen Drall und kinetischer Energie siehe S. 83/84.

² Siehe die Definitionen und Beziehungen auf S. 83.

³ Siehe Anm. 1. auf S. 89.

†† v_S = Geschwindigkeit des Schwerpunktes; v' = Geschwindigkeit eines Massenpunktes relativ zum Schwerpunkt.

starrer Körper:

$$dA = \mathfrak{R}_a \cdot d\mathfrak{s} + \mathfrak{M}_{res} \cdot d\bar{\varphi} = \frac{1}{2} M \cdot d(v_S^2) + \frac{1}{2} J_S \cdot d(\omega'^2),$$

$$A = \int_1^2 \mathfrak{R}_a \cdot d\mathfrak{s} + \mathfrak{M}_{res} \cdot d\bar{\varphi} = \frac{1}{2} M \cdot (v_{S2}^2 - v_{S1}^2) + \frac{1}{2} J_S \cdot (\omega_2'^2 - \omega_1'^2).$$

Drehung um die Momentanachse O .

$$A = \int_1^2 \mathfrak{M}_{res} \cdot d\bar{\varphi} = \frac{1}{2} \cdot J_O \cdot (\omega_{O2}^2 - \omega_{O1}^2).$$

Veränderliche Masse.

$$A + \frac{1}{2} \sum m^* v^{*2} = \frac{1}{2} (M_2 \cdot v_{S2}^2 - M_1 \cdot v_{S1}^2) + \frac{1}{2} \sum_m m \cdot (v_2^2 - v_1^2) + \sum \text{Stoßverluste}.$$

4. Potential.

Definitionen und Folgerungen.

Feld = Zustand im Raume, durch eindeutige Funktion angegeben.

Kräftepotential = Ortsfunktion $V(xyz)$ derart, daß ihre negative Ableitung in irgend-einer Richtung die Kraftkomponente in dieser Richtung angibt¹.

Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten des Feldes = negative Arbeit, die auf dem Wege vom Anfangs- zum Endpunkte (Aufpunkt) verrichtet wird*.

Feldstärke = Kraft auf die Masseneinheit im jeweiligen Aufpunkte = Beschleunigung.

<p style="text-align: center;">Potential.</p> <p style="text-align: center;">Skalar</p> <p>Arbeitsvermögen, potentielle Energie</p> $V_1 = V_0 - \int_0^1 \mathfrak{P} d\mathfrak{s},$ $\int_0^1 \mathfrak{P} d\mathfrak{s} = V_0 - V_1 \quad *,$ $dV = -dA = -\mathfrak{P} d\mathfrak{s},$ $dV = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot dz,$ $-\mathfrak{P} d\mathfrak{s} = P_x \cdot dx + P_y \cdot dy + P_z \cdot dz,$ <p>Äquipotentialflächen } Potential Niveaulflächen } $(V_{(xyz)}) = \text{const.}$</p>	<p style="text-align: center;">Kraft.</p> <p style="text-align: center;">Vektor</p> <p>negative Ableitung des Potentials, negatives Potentialgefälle (Änderung des Feldzustandes), negativer Gradient des Potentials</p> $\mathfrak{P} = -\frac{dV}{d\mathfrak{s}} = -\text{grad } V_{(xyz)},$ $\mathfrak{P} = i P_x + j P_y + k P_z,$ $\mathfrak{P} = -\left(i \frac{\partial V}{\partial x} + j \frac{\partial V}{\partial y} + k \frac{\partial V}{\partial z} \right),$ $ \mathfrak{P} = P = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2},$ <p>Kraftlinien (Verbindungslinien von Orten mit gleicher Kraftgröße $\mathfrak{P} = P$) stehen auf den Niveaulflächen senkrecht².</p>
--	---

¹ Der negative Wert der Ortsfunktion V , also $F = -V$, heißt Kräftefunktion. Die positive Ableitung der Kräftefunktion ergibt die Kraft in der jeweiligen Richtung.

* Potentialdifferenz ≥ 0 , d. h. $V_0 \geq V_1$, d. h. Arbeit $\mathfrak{P} d\mathfrak{s} \geq 0$, d. h. Kraft und Weg in gleicher entgegengesetzter Richtung, d. h. Energieabgabe auf dem Wege $0 \rightarrow 1$.

² Für $dV = 0$, d. h. Fortschreiten um $d\mathfrak{s}$ in der Niveaulfläche ist auch $\mathfrak{P} d\mathfrak{s} = 0$, d. h. aber, daß $\mathfrak{P} \perp d\mathfrak{s}$ (siehe S. 6).

Notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines Potentials:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_x}{\partial y} &= \frac{\partial P_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial y}, \\ \frac{\partial P_x}{\partial z} &= \frac{\partial P_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \cdot \partial z}, \\ \frac{\partial P_y}{\partial z} &= \frac{\partial P_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \cdot \partial z}, \end{aligned}$$

oder in Vektorform:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathfrak{P} &= \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = 0, \\ &= \mathfrak{i} \left(\frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z} \right) + \mathfrak{j} \left(\frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x} \right) + \mathfrak{k} \left(\frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned}$$

Konservative Kräfte

haben ein Potential

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathfrak{P} &= 0, \\ V &= \text{reine Ortsfunktion,} \end{aligned}$$

d. h. $V(xyz)$,

z. B. Zentralkräfte,
elastische Kräfte (Federkräfte),
elektrostatische Kräfte,
magnetische Kräfte.

Arbeit auf geschlossener Bahn = 0, d. h. mechanische Energie (potentielle + kinetische) = const¹.

$$\left. \begin{aligned} \oint \mathfrak{P} d\mathfrak{s} &= 0, \\ \int_0^1 \mathfrak{P} d\mathfrak{s} &= V_0 - V_1, \\ \int_0^1 \mathfrak{P} d\mathfrak{s} &= \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2)^*, \\ &= T_1 - T_0, \end{aligned} \right\}$$

$$V_0 + T_0 = V_1 + T_1 = \text{const.}$$

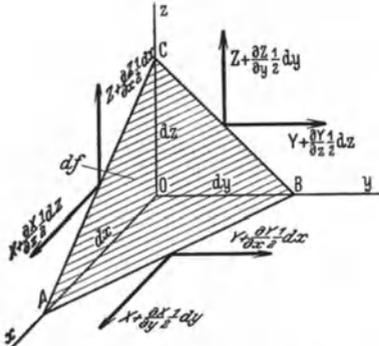


Abb. 141. Zum Bestimmen der Arbeit nicht konservativer Kräfte.

Dissipative Kräfte

haben kein Potential, sondern es besteht ein Wirbelfeld

$$\text{rot } \mathfrak{P} \neq 0,$$

V vom Ort und von der Zeit abhängig,

d. h. $V(xyzt)$,

oder $V(xyzv)$,

z. B. Reibung,
Flüssigkeitswiderstände,
elektrodynamische Kräfte.

Arbeit auf geschlossener Bahn $\neq 0^{**}$, d. h. mechanische Energie $\neq \text{const}$, d. h. Energiezufuhr oder -abgabe.

$$\begin{aligned} \oint \mathfrak{P} d\mathfrak{s} &= \oint (\text{rot } \mathfrak{P} \cdot d\mathfrak{f}) \neq 0, \\ &= \frac{1}{2} \iint \left(\frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z} \right) \cdot dy \cdot dz, \\ &+ \frac{1}{2} \iint \left(\frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x} \right) \cdot dz \cdot dx, \\ &+ \frac{1}{2} \iint \left(\frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy. \end{aligned}$$

(Satz von Stokes).

¹ Daher der Name „konservative“ Kräfte.

* Siehe Arbeitsatz S. 96.

** In Abb. 141 ist die Größe der längs der xyz-Achsen veränderlichen Kräfte XYZ eingetragen, wenn der Schritt $\frac{1}{2} dx$, $\frac{1}{2} dy$, $\frac{1}{2} dz$ beträgt. Durch Bilden der Produkte Kraft \times Weg in der Krafrichtung erhält man die Arbeit beim Umfahren des Dreiecks ABC

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dy dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dx dz, \end{aligned}$$

5. Prinzip der virtuellen Arbeiten.

Virtuelle Verrückung: Es ist dies eine kleine, von der Zeit unabhängige — also rein geometrische — Verschiebung, die mit den Systembedingungen vereinbar ist. Die Unabhängigkeit von der Zeit wird dadurch ausgedrückt, daß statt des Differential d ein δ geschrieben wird. Klein muß die Verschiebung sein, damit die Kräfte ihre Richtung nicht ändern. So viele Freiheitsgrade das System besitzt, soviel virtuelle Verrückungen sind möglich und notwendig, um die Verschiebungen aller Systempunkte auszudrücken.

Auftretende Kräfte: An jedem Massenpunkt können äußere (\mathfrak{P}_a) und innere Kräfte (\mathfrak{P}_i) auftreten. Ist δr die virtuelle Verschiebung eines Massenpunktes, so besagt das Prinzip der virtuellen Arbeiten:

$$\begin{aligned} \Sigma (\mathfrak{P}_a + \mathfrak{P}_i) \cdot \delta r &= 0^*, \\ \delta A_a + \delta A_i &= 0. \end{aligned}$$

Im Gleichgewichtsfalle ist die Arbeit der äußeren und inneren Kräfte gleich Null. Da die Arbeit gleich der Änderung der kinetischen Energie ist, so heißt

$$\delta A_{ges} = \delta T = 0,$$

die kinetische Energie und damit auch die potentielle ist ein Maximum oder Minimum (siehe S. 29).

Anwendungsgebiet: Das Prinzip enthält die 6 Gleichgewichtsbedingungen der Statik in einer Gleichung¹. Es wird daher benutzt zum Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen, zum Bestimmen der Gleichgewichtsstellung und zum Bestimmen der Auflager- oder Stabkräfte (siehe (S. 44).

Mit

$$\text{rot } \mathfrak{P} = i \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right)$$

und

$$df = \frac{1}{2} (i dy dz + j \cdot dz \cdot dx + k dx dy),$$

kann die Arbeitsgleichung auch in Vektorform (siehe S. 4) $dA = (\text{rot } \mathfrak{P} \cdot df)$ geschrieben werden.

* Die Σ ist über alle Kräfte zu erstrecken.

¹ Die allgemeinste Verschiebung eines Massenpunktes ist ein Fortschreiten $\delta r = i \cdot \delta x_0 + j \cdot \delta y_0 + k \cdot \delta z_0$ und eine Drehung

$$[\delta \varphi \cdot r] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \delta \alpha & \delta \beta & \delta \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

um den Koordinatenursprung. Sind XYZ die Kraftkomponenten, so bestehen die Gleichungen (siehe Abb. 142):

virtuelle Verrückungen

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta x_0 + \delta \beta \cdot z - \delta \gamma \cdot y, \\ \delta y &= \delta y_0 + \delta \gamma \cdot x - \delta \alpha \cdot z, \\ \delta z &= \delta z_0 + \delta \alpha \cdot y - \delta \beta \cdot x, \end{aligned}$$

$$\delta A = \Sigma \{ X \cdot \delta x + Y \cdot \delta y + Z \cdot \delta z \},$$

$$\delta A = \Sigma \left\{ \begin{aligned} &X \cdot \delta x_0 + X \cdot \delta \beta \cdot z - X \cdot \delta \gamma \cdot y + \\ &Y \cdot \delta y_0 + Y \cdot \delta \gamma \cdot x - Y \cdot \delta \alpha \cdot z + \\ &Z \cdot \delta z_0 + Z \cdot \delta \alpha \cdot y - Z \cdot \delta \beta \cdot x \end{aligned} \right\}$$

und wegen der Unabhängigkeit der Verschiebungen von einander, zerfällt die Arbeitsgleichung in die 6 Einzelgleichungen, die 6 Gleichgewichtsbedingungen der Statik (siehe S. 27).

$$\begin{aligned} \Sigma X &= 0, & \Sigma (y \cdot Z - z \cdot Y) &= \Sigma M_x = 0, \\ \Sigma Y &= 0, & \Sigma (z \cdot X - x \cdot Z) &= \Sigma M_y = 0, \\ \Sigma Z &= 0, & \Sigma (x \cdot Y - y \cdot X) &= \Sigma M_z = 0. \end{aligned}$$

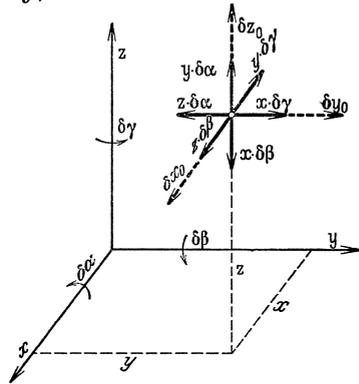


Abb. 142. Virtuelle Verrückung aus Fortschritt- und Drehbewegung.

virtuelle Arbeiten

Anwendung: 1. Die Kräfte eintragen, die eine virtuelle Arbeit verrichten. Keine virtuelle Arbeit verrichten Normalkräfte (weil sie senkrecht auf der Bewegungsrichtung stehen), Kräfte, die durch feste Gelenke hindurchgehen und innere Kräfte beim starren Körper (weil ihre Verschiebung Null ist).

2. Verschiebung der einzelnen Kraftangriffspunkte durch die der Anzahl der Freiheitsgrade entsprechenden virtuellen Verrückungen in einem raumfesten Koordinatensystem ausdrücken.

3. Arbeitsgleichung anschreiben.

4. Da alle virtuellen Verrückungen unabhängig von einander sind, kann jede jeden beliebigen Wert annehmen, also auch gleich Null gesetzt werden, d. h. aber aus der Arbeitsgleichung folgen so viele Einzelgleichungen wie Freiheitsgrade vorhanden sind.

Einführen der d'Alembertschen Ergänzungskräfte (siehe S. 91) faßt in einer Gleichung

$$\delta A = \Sigma (\mathfrak{P}_a + \mathfrak{P}_i + (-m b)) \cdot \delta r = 0$$

die 6 Bewegungsgleichungen der Kinetik zusammen¹. Für einen starren Körper, ein reibungsfrei bewegliches System sowie beim Fehlen von elastischen Formänderungen ist $\Sigma (\mathfrak{P}_i \cdot \delta r) = 0$.

6. Lagrangesche Gleichung.

Anwendungsgebiet: Aufstellen der Differentialgleichung für die Bewegung eines Systems von Massenpunkten (z. B. eines Getriebes²).

Voraussetzung: Die auftretenden Kräfte sind konservative Kräfte (siehe S. 98), haben also ein Potential, und die mechanische Energie des Systems ist $T + V = \text{const.}$

Dann ist:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial T}{\partial u} = - \frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\delta A}{\delta u} = Q.$$

u = Systemkoordinate = Koordinate des Freiheitsgrades, z. B. Entfernung eines Punktes vom Koordinatenursprung, oder Ausschlagwinkel eines Pendels, Stellung eines Getriebes (z. B. Kurbelwinkel oder Entfernung des Kreuzkopfes von der Totlage beim Kurbeltrieb).

Besitzt das System n Freiheitsgrade, d. h. sind n von einander unabhängige Systemkoordinaten u zur Festlegung der augenblicklichen Lage erforderlich, so ist die Lagrangesche Gleichung für jede Systemkoordinate, also n mal anzusetzen, so daß man n Gleichungen für die n Unbekannten u_1, u_2, \dots, u_n erhält.

T = kinetische Energie des Systems.

V = potentielle Energie.

Q = allgemeine Lagrangesche Kraftkomponente. Um sie zu bestimmen, führe man eine virtuelle Verrückung (siehe S. 99) derart aus, daß nur eine Koordinate u geändert wird, während alle anderen konstant bleiben. Aus der virtuellen Arbeit des Systems

folgt dann die Kraftkomponente zu $\frac{\delta A}{\delta u}$.

Ist u eine Längenänderung, so ist Q eine Kraft.

Ist u eine Winkeländerung, so ist Q ein Moment.

Ist u eine Volumenänderung, so ist Q ein Druck.

¹ Sind die Kräfte in der Komponentenzerlegung X, Y, Z und die Ergänzungskräfte $-mb_x, -mb_y, -mb_z$, so erhält man nach Multiplikation mit den virtuellen Verrückungen (siehe Anm. 1, S. 99) und Trennung die 6 Bewegungsgleichungen (vgl. S. 90 und S. 93)

$$\Sigma X = \Sigma m \cdot b_x, \quad \Sigma M_x = \Sigma m (y \cdot \ddot{z} - z \cdot \ddot{y}),$$

$$\Sigma Y = \Sigma m \cdot b_y, \quad \Sigma M_y = \Sigma m (z \cdot \ddot{x} - x \cdot \ddot{z}),$$

$$\Sigma Z = \Sigma m \cdot b_z, \quad \Sigma M_z = \Sigma m (x \cdot \ddot{y} - y \cdot \ddot{x}).$$

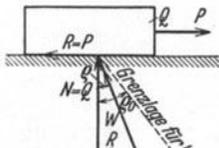
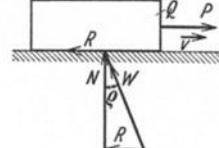
² Zum gleichen Ziele (der Differentialgleichung der Bewegung) kommt man auch auf dem umständlicheren Wege des Isolierens jeder Einzelmasse und Eliminierens der (paarweise) auftretenden Schnittkräfte aus den für jede Masse einzeln angesetzten Bewegungsgleichungen.

IV. Bewegungsgesetze bei verschiedenen Widerständen.

Fortschreitbewegung unter Einwirken einer resultierenden eingepägten Kraft P und einem Widerstande W (siehe S. 102/103), d. h. einer Gesamtsresultierenden $R = \pm P - W$. Dieselben Gleichungen erhält man sinntensprechend für die Drehbewegung. Es treten dann an Stelle von Kraft — Moment, Geschwindigkeit — Winkelgeschwindigkeit, Beschleunigung — Winkelbeschleunigung, Weg — Winkelweg

1. $W = \text{const}$	2. $W = k \cdot v$	3. $W = k \cdot v^2$	4. $W = k \cdot s$
<p>Impulssatz liefert Beziehung zwischen Kraft, Masse, Zeit und Geschwindigkeit (siehe S. 88/89).</p> $(\pm P - W) \cdot dt = m \cdot dv$ $t = \int_{v_0}^v \frac{m \, dv}{\pm P - W}$ $t = \frac{m}{\pm P - W} \cdot (v - v_0)$	<p>Impulssatz liefert Beziehung zwischen Kraft, Masse, Zeit und Geschwindigkeit (siehe S. 88/89).</p> $(\pm P - kv) \, dt = m \, dv$ $t = \int_{v_0}^v \frac{m \, dv}{\pm P - kv}$ $t = m \cdot \frac{1}{k} \cdot \ln \frac{\pm P - kv_0}{\pm P - kv}$	<p>Impulssatz liefert Beziehung zwischen Kraft, Masse, Zeit und Geschwindigkeit (siehe S. 88/89).</p> $(\pm P - kv^2) \, dt = m \, dv$ $t = \int_{v_0}^v \frac{m \, dv}{\pm P - kv^2}$ <p>für $+P$:</p> $t = \frac{1}{2} m \cdot \sqrt{\frac{1}{P \cdot k}} \cdot \ln \frac{\sqrt{P} + \sqrt{k} \cdot v}{\sqrt{P} - \sqrt{k} \cdot v} \Big _{v_0}^v$ <p>für $-P$:</p> $t = m \cdot \sqrt{\frac{1}{P \cdot k}} \cdot \text{arc tg} \sqrt{\frac{k}{P}} \cdot v \Big _{v_0}^v$	<p>Impulssatz liefert Beziehung zwischen Kraft, Masse, Zeit und Geschwindigkeit (siehe S. 88/89).</p> $(\pm P - ks) \, ds = m \cdot \frac{ds}{dt} \cdot dv = m \, v \, dv$ <p>weitere Behandlung siehe unten beim Arbeitssatz</p>
<p>dynamische Grundgleichung liefert Beziehung zwischen Kraft, Masse und Beschleunigung (siehe S. 90/91).</p> $\pm P - W = m \cdot b$ $b = \frac{\pm P - W}{m} = b_0 - av$ $b = \text{const}$	<p>dynamische Grundgleichung liefert Beziehung zwischen Kraft, Masse und Beschleunigung (siehe S. 90/91).</p> $\pm P - kv = m \cdot b$ $b = \frac{\pm P - kv}{m} = \pm b_0 - av$ $b = f(v)$	<p>dynamische Grundgleichung liefert Beziehung zwischen Kraft, Masse und Beschleunigung (siehe S. 90/91).</p> $\pm P - kv^2 = m \cdot b$ $b = \frac{\pm P - kv^2}{m} = \pm b_0 - av^2$ $b = f(v^2)$	<p>dynamische Grundgleichung liefert Beziehung zwischen Kraft, Masse und Beschleunigung (siehe S. 90/91).</p> $\pm P - ks = m \cdot b$ $b = \frac{\pm P - ks}{m} = \pm b_0 - as$ $b = f(s)$
<p>Arbeitssatz liefert Beziehung zwischen Kraft, Masse, Weg und Geschwindigkeit (siehe S. 54/56)</p> $(\pm P - W) \, ds = m \, v \, dv$ $s = \frac{m}{\pm P - W} \int_{v_0}^v v \, dv$ $s = \frac{m}{\pm P - W} \cdot \frac{1}{2} (v^2 - v_0^2)$	<p>Arbeitssatz liefert Beziehung zwischen Kraft, Masse, Weg und Geschwindigkeit (siehe S. 54/56)</p> $(\pm P - kv) \, ds = m \, v \, dv$ $s = \int_{v_0}^v \frac{m \, v \, dv}{\pm P - kv}$ <p>Lösungsansatz $\pm P - kv = z$</p> $s = \frac{m}{k} (v_0 - v) \pm \frac{mP}{k^2} \cdot \ln \frac{\pm P - kv_0}{\pm P - kv}$ $= \frac{m}{k} \left(v_0 - v + v_0 \cdot \ln \frac{v_0 - v_0}{v_0 - v} \right)$ <p>wobei die Grenzgeschwindigkeit $v_\sigma = + \frac{P}{k}$ ist (siehe S. 56)</p>	<p>Arbeitssatz liefert Beziehung zwischen Kraft, Masse, Weg und Geschwindigkeit (siehe S. 54/56)</p> $(\pm P - kv^2) \, ds = m \, v \, dv$ $s = - \frac{m}{2k} \int_{v_0}^v \frac{2 \cdot k \cdot v \, dv}{\pm P - kv^2}$ $s = \frac{m}{2k} \cdot \ln \frac{\pm P - kv_0}{\pm P - kv^2}$ $= \frac{m}{2k} \cdot \ln \frac{v_0^2 - v_0^2}{v_0^2 - v^2}$ <p>wobei die Grenzgeschwindigkeit $v_\sigma = \sqrt{\frac{P}{k}}$ ist (siehe S. 56)</p>	<p>Arbeitssatz liefert Beziehung zwischen Kraft, Masse, Weg und Geschwindigkeit (siehe S. 96).</p> $(\pm P - ks) \, ds = m \, v \, dv$ $\pm Ps - \frac{1}{2} ks^2 = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$

V. Widerstände gegen

1. Reibung der Ruhe = Haftreibung	der Bewegung = Gleitreibung	2. Flüssigkeits- laminaire Strömung
<p>unbestimmt nach Größe und Richtung bis zur Grenze des Haftens (μ_0) (siehe S. 29 Lagerkräfte).</p>	<p>stets der Gleitgeschwindigkeit entgegengesetzt. Bei Bewegungsumkehr ist also das Vorzeichen des Reibungsgliedes umzukehren.</p>	<p>innere Reibung in der zähen Flüssigkeit (Schmiermittel). Automatischer Zeichenwechsel bei Bewegungsumkehr.</p>
		
<p>Abb. 143. Haftreibung.</p>	<p>Abb. 144. Gleitreibung.</p>	<p>Abb. 145. Laminare Strömung.</p>
<p>$R \leq \mu_0 \cdot N$ [kg]</p>	<p>$R = \mu \cdot N$ [kg]</p>	<p>$W = k \cdot v$ [kg]</p>
<p>$\mu_0 = f$ (Oberfläche)</p>	<p>$\mu = f$ (Oberfläche Gleitgeschwindigkeit Normaldruck Schmierstoff und seiner Temperatur).</p>	<p>$k = f$ (Größe und Rauigkeit der benetzten Oberfläche, Zähigkeit der Flüssigkeit).</p>
<p>Leistungsverlust:</p>		
	<p>$L = R \cdot v$ [mkg/s]</p>	<p>$L = k \cdot v^2$ [mkg/s]</p>
<p>Größe der resultierenden Auflagerkraft:</p>		
<p>$W = \sqrt{N^2 + R^2}$</p>	<p>$W = \sqrt{N^2 + R^2} = N \cdot \sqrt{1 + \mu^2}$</p>	
<p>Richtung der resultierenden Auflagerkraft gegen die Normalkraft N</p>		
<p>$\frac{R}{N} \leq \text{tg } \varrho_0 = \mu_0$</p>	<p>$\frac{R}{N} = \text{tg } \varrho = \mu$</p>	

Seiltrieb

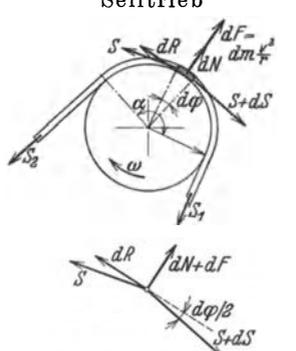


Abb. 149. Kräfte im Seiltrieb.

Gleichgewicht in tangentialer und normaler Richtung ergibt

$R = S_1 - S_2$

$S_1 - q \cdot \frac{v^2}{g} = e^{\mu_0 \cdot \alpha} \left(S_2 - q \cdot \frac{v^2}{g} \right) *$

$L = (S_1 - S_2) \cdot v \approx S_2 \cdot (e^{\mu_0 \alpha} - 1) \cdot v$

Gleitlager

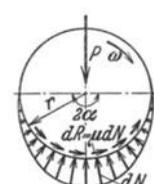


Abb. 150. Lager mit Gleitreibung.

$M = f \cdot r \cdot P **$

Spurlager

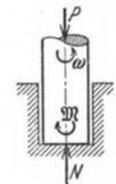
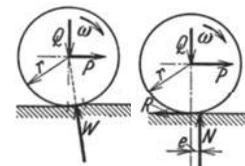
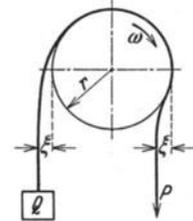


Abb. 151. Spurlager mit Gleitreibung.

$M = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot P \cdot r ***$

Für f gelten dieselben Abhängigkeiten wie für μ .

die Bewegung.

widerstand turbulente Strömung	3. Rollwiderstand	4. Seilsteifigkeit
<p>Energieverlust durch Wirbelbildung. Bei Bewegungsumkehr ist das Vorzeichen des Widerstandsgliedes umzukehren.</p>  <p>Abb. 146. Turbulente Strömung.</p> $W = k \cdot v^2 \text{ [kg]}$ <p>$k = f$ (Form und Größe des Körpers, Dichte der Flüssigkeit).</p> $L = k \cdot v^3 \text{ [mkg/s]}$	<p>infolge Abplattung zwischen Körper und Unterlage und nur teilweiser Rückgewinnung der Verformungsarbeit.</p>  <p>Abb. 147. Rollwiderstand.</p> $M = e \cdot N = P \cdot r \text{ [mkg]}$ $P = R = \frac{M}{r} = \frac{e}{r} \cdot N \text{ [kg]}$ <p>$e = f$ (Oberflächenrauigkeit und -härte).</p> $L = M \cdot \omega = P \cdot v \text{ [mkg/s]}$	<p>Seil setzt der Biegung beim Auf- und Abrollen einen Widerstand entgegen (innere Reibung).</p>  <p>Abb. 148. Seilsteifigkeit.</p> $P = Q \cdot \left(1 + \frac{2\xi}{r}\right) \text{ [kg]}$ <p>$\xi = f$ (Seildicke, Flechtart, Rollenradius).</p> $L = \frac{P \cdot v}{= P \cdot r \cdot \omega} \text{ [mkg/s]}$

- * $q =$ Seilgewicht je Längeneinheit,
- $v =$ Seilgeschwindigkeit,
- $g =$ Erdbeschleunigung,
- $e =$ Grundzahl der natürlichen Logarithmen,
- $\alpha =$ Umschlingungswinkel im Bogenmaß,

$$\alpha = \alpha^0 \frac{2\pi}{360} = \frac{\alpha^0}{57,3},$$

falls $q \cdot \frac{v^2}{g}$ klein ist, ist $S_1 \approx S_2 \cdot e^{\mu_0 \alpha}$.

** $M = \int_0^{2\alpha} r \cdot dR = \mu \cdot r \int_0^{2\alpha} dN$; $\int dN > P$, also $f > \mu$.

*** $M = \int_0^r r \cdot dR = \int_0^r \mu r dN = \int_0^r \mu \cdot \frac{P}{F} \cdot 2\pi r dr \cdot r$.

VI. Der Stoß.

1. Allgemeines.

a) Definition des Stoßes.

Einwirken zweier Körper aufeinander durch Berühren in so kurzer Zeit, daß während dieser die Lagenänderung der Körper = 0 ist. Die Ableitungen des Weges, also Geschwindigkeit und Beschleunigung, sind aber $\neq 0$.

b) Stoßvorgang.

1. Zusammendrücken:

An Berührungsstelle Formänderungen, Kräfte \pm nach Wechselwirkungsgesetz; Verzögerung bzw. Beschleunigung der Körper bis relativer Stillstand gegeneinander.

2. Ausdehnen:

Formänderung mehr oder weniger rückgängig, elastische Kräfte \pm vom Höchstwerte abnehmend bis auf null.

c) Stoßarten.

Stoßlinie = Senkrechte auf Berührungsebene der beiden Körper.

Stoßlinie = Richtung der Stoßkraft, falls Reibung an Stoßstelle = 0 ist.

Stoßpunkt B = Projektion des Schwerpunktes auf die Stoßlinie.

Stoßnormale = Senkrechte auf der Stoßlinie, d. h. in Berührungsebene.

1. Lage der Schwerpunkte in bezug zur Stoßlinie.

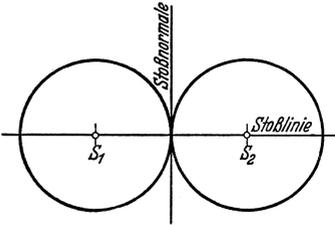


Abb. 152. Zentraler Stoß.
Schwerpunkte liegen auf der Stoßlinie.

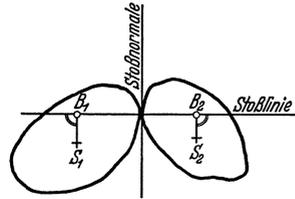


Abb. 153. Exzentrischer Stoß.
Schwerpunkte liegen nicht auf der Stoßlinie.

2. Geschwindigkeiten c der Stoßpunkte vor dem Stoße in bezug zur Stoßlinie.

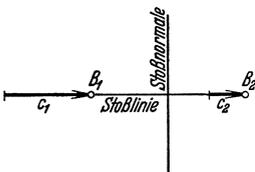


Abb. 154. Gerader Stoß.
Geschwindigkeiten liegen in der Stoßlinie.

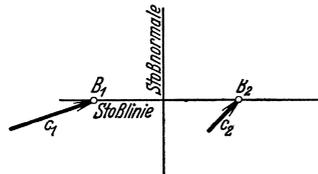


Abb. 155. Schiefer Stoß.
Geschwindigkeiten liegen nicht in der Stoßlinie.

3. Verlauf des zweiten Stoßabschnittes (Ausdehnen).

Formänderungen	Stoßbezeichnung	Energieverlust	Stoßzahl ¹
vollständig rückgängig	vollkommen elastisch	$E_v = 0$	$\epsilon = 1$
nur teilweise rückgängig	unvollkommen elastisch	E_v	$0 < \epsilon < 1$
gar nicht rückgängig	vollkommen unelastisch (plastisch)	$E_v = E_{vmax}$	$\epsilon = 0$

¹ Siehe S. 105.

2. Grundgesetze.

a) Allgemeines.

Bezeichnungen:

Geschwindigkeiten der Stoßpunkte vor dem Stoß c_1, c_2 ; Zeit $t = 0$,
 Geschwindigkeiten der Stoßpunkte bei größter Zusammendrückung w ; Zeit t' ,
 Geschwindigkeiten der Stoßpunkte nach dem Stoß v_1, v_2 ; Zeit t'' .

Stoßzahl ϵ^1 :

$$\begin{aligned}
 &= \text{Verhältnis der Antriebe im zweiten und ersten Stoßabschnitt} \left\{ \begin{aligned} \epsilon &= \frac{\int_0^{t''} P \cdot dt}{\int_0^{t'} P \cdot dt} \end{aligned} \right. \\
 &= \text{Verhältnis der Geschwindigkeitsänderung des Stoßpunktes eines} \\
 &\quad \text{Körpers in der Stoßlinie im zweiten und ersten Stoßabschnitt} \left\{ \begin{aligned} \epsilon &= \frac{v - w}{w - c} \end{aligned} \right. \\
 &= \text{Verhältnis der Relativgeschwindigkeiten der Stoßpunkte in} \\
 &\quad \text{Richtung der Stoßlinie zwischen beiden Körpern nach und} \\
 &\quad \text{vor dem Stoß (also unabhängig von den sich stoßenden Massen)} \left\{ \begin{aligned} \epsilon &= \frac{v_2 - v_1}{c_1 - c_2} = \frac{\Delta v}{\Delta c} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

b) Exzentrischer schiefer Stoß mit Reibung an der Stoßstelle.

(Allgemeinster Fall).

Die Impulssätze für die fortschreitende und drehende Bewegung (siehe S. 88 u. S. 91) der beiden Körper ergeben $4 + 2 = 6$ Gleichungen für die 7 Unbekannten:

$$v_{S1x}; v_{S2x}; \omega'_1; \omega'_2; \int_0^{t''} P dt.$$

Eine 7. Gleichung liefert die Angabe über die Art des Stoßes (ϵ) (siehe Abb. 156):

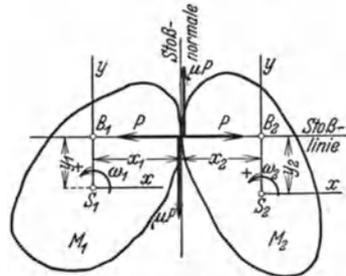


Abb. 156. Exzentrischer, schiefer Stoß mit Reibung an der Stoßstelle.

$$- \int_0^{t''} P \cdot dt = m_1 \cdot (v_{S1x} - c_{S1x}), \quad (1)$$

$$+ \int_0^{t''} P \cdot dt = m_2 \cdot (v_{S2x} - c_{S2x}), \quad (2)$$

$$- \int_0^{t''} \mu P \cdot dt = m_1 \cdot (v_{S1y} - c_{S1y}), \quad (3)$$

$$+ \int_0^{t''} \mu P \cdot dt = m_2 \cdot (v_{S2y} - c_{S2y}), \quad (4)$$

$$+ \int_0^{t''} P \cdot dt \cdot y_1 - \int_0^{t''} \mu \cdot P \cdot dt \cdot x_1 = J_{S1} \cdot (\omega'_1 - \omega_1), \quad (5)$$

$$- \int_0^{t''} P \cdot dt \cdot y_2 - \int_0^{t''} \mu \cdot P \cdot dt \cdot x_2 = J_{S2} \cdot (\omega'_2 - \omega_2), \quad (6)$$

$$\epsilon = \frac{v_{B2x} - v_{B1x}}{c_{B1x} - c_{B2x}} = \frac{v_{S2x} - y_2 \cdot \omega'_2 - (v_{S1x} - y_1 \cdot \omega'_1)}{c_{S1x} - y_1 \cdot \omega_1 - (c_{S2x} - y_2 \cdot \omega_2)}. \quad (7)$$

c) Gerader Zentralstoß,

d. h.: $c_{1y} = c_{2y} = 0; \quad \mu = 0; \quad y_1 = y_2 = 0;$

$$c_{1x} = c_1; \quad v_{1x} = v_1; \quad v_{1Bx} = v_1$$

$$c_{2x} = c_2; \quad v_{2x} = v_2; \quad v_{2Bx} = v_2$$

¹ Die erste Beziehung ist die Definition der Stoßzahl; die zweite und dritte folgen aus den Impulssätzen.

Aus den Gleichungen:
$$-\int_0^{t''} P dt = m_1 \cdot (v_1 - c_1), \tag{1}$$

$$+\int_0^{t''} P dt = m_2 \cdot (v_2 - c_2), \tag{2}$$

$$\varepsilon = \frac{v_2 - v_1}{c_1 - c_2} = \frac{v_1 - w}{w - c_1} = \frac{v_2 - w}{w - c_2} \tag{3}$$

folgt:

$$v_1 = \frac{\left(\frac{m_1 - \varepsilon \cdot m_2}{2}\right) \cdot c_1 + (1 + \varepsilon) \cdot m_2 \cdot c_2}{m_1 + m_2},$$

$$w = \frac{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2},$$

$$E_v = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (1 - \varepsilon^2) \cdot (c_1 - c_2)^2 = \frac{1}{2} \cdot M \cdot (1 - \varepsilon^2) \cdot \Delta c^2,$$

wobei

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

und

$$\Delta c = c_1 - c_2 \text{ ist.}$$

d) Schiefer Zentralstoß.

Falls keine Reibung an Stoßstelle auftritt, werden durch den Stoß nur die in die Stoßrichtung fallenden Geschwindigkeitskomponenten c_{S1x} , c_{S2x} geändert. Es gelten für diese Komponenten dieselben Formeln wie beim geraden Stoß.

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 = 0, & & y_1 = y_2 = 0, & & \mu = 0, \\ c_{S1y} = v_{S1y}; & & v_B = v_S; & & c_{\bar{B}} = c_S. \\ c_{S2y} = v_{S2y}; & & & & \end{aligned}$$

e) Exzentrischer Stoß.

Die exzentrisch getroffenen Körper ändern nach den Schwerpunktsätzen (siehe S. 89 und 92) die fortschreitende Bewegung des Schwerpunktes und die Drehung um den Schwerpunkt, siehe allgemeinsten Fall Gl. (1), (2), (5), (6), (7), falls $\mu = 0$ ist.

Der exzentrische Stoß wird auf den geraden Zentralstoß zurückgeführt durch Reduktion der Massen m_1, m_2 auf die zugehörigen Stoßpunkte B_1 und B_2 , deren Geschwindigkeiten dann nach den Formeln des geraden Zentralstoßes zu berechnen sind. Massenreduktion nach S. 87. Die Beziehung: Energie = const = $\frac{1}{2} m_B \cdot v_B^2 = \frac{1}{2} J_S \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} m \cdot v_S^2$ ergibt:

$$m_B = m \cdot \frac{i^2 + e^2}{(e + s)^2} = \frac{J_0}{h^2} *, \text{ siehe Abb. 157.}$$

3. Stoßmittelpunkt.

Der Stoßmittelpunkt ist der Punkt des gestoßenen Körpers, der seine Geschwindigkeit durch den Stoß nicht ändert. War der Körper anfangs in Ruhe ($c_S = 0, \omega = 0$), so ist der Stoßmittelpunkt der Momentanpol. Besaß der Körper vorher die Geschwindigkeiten c_S und ω , so gilt für den Stoßmittelpunkt $O: c_O = c_S - e \cdot \omega = v_O = v_S - e \cdot \omega'$.

Aus den Impulssätzen für die fortschreitende und drehende Bewegung in bezug auf den Schwerpunkt folgt für die Entfernung des Stoßmittelpunktes vom Schwerpunkt (siehe Abb. 157):

$$SO = e = \frac{J_S}{m \cdot s} = \frac{i_S^2}{s},$$

$$BO = h = e + s = \frac{i_S^2 + s^2}{s} = \frac{J_S + m s^2}{m s},$$

$$= \text{reduzierte Pendellänge,}$$

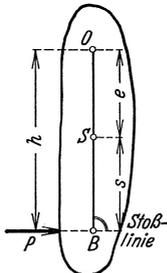


Abb. 157. Lage vom Stoßpunkt B und Stoßmittelpunkt O im Verhältnis zum Schwerpunkt.

¹ Zeiger S = Schwerpunkt, Zeiger O = Momentanpol = Stoßmittelpunkt = Drehpunkt bei gelagerten Körpern.

d. h. Stoßpunkt B und Stoßmittelpunkt O stehen in derselben Beziehung zueinander wie Schwingungspunkt und Schwingungsmittelpunkt¹.

4. Erweiterte Stoßtheorie.

Die elementare Theorie gibt nur $\int P dt$ an, aber nicht P_{\max} . Mit dem Ansatz $P = k \cdot \xi^n$ * erhält man aus den Impulssätzen durch Differentiation und Differenzenbildung für beide Massen (siehe Abb. 158)

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\ddot{\xi} = \frac{P}{m_1} + \frac{P}{m_2} = \frac{1}{M} \cdot k \cdot \xi^n **.$$

Integration liefert

$$\frac{1}{2} [\dot{\xi}^2 - \Delta c^2] = -\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{M} \cdot k \cdot \xi^{n+1},$$

abermahlige Integration liefert die Zeit für den ersten Stoßabschnitt

$$T = \frac{1}{\Delta c} \int_0^{\xi_{\max}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \frac{1}{M \cdot \frac{n+1}{k} \cdot \Delta c^2} \xi^{n+1}}}.$$

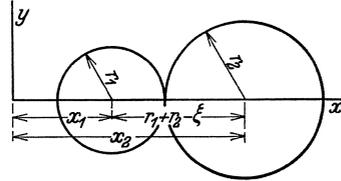


Abb. 158. Zusammendrückung an der Stoßstelle.

	allgemein	Hooke ($n = 1$)	Hertz ($n = \frac{3}{2}$)
größte Zusammendrückung $\dot{\xi} = 0$	$\xi_{\max}^{n+1} = \frac{M}{k} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \Delta c^2$	$\xi_{\max} = \Delta c \cdot \sqrt{\frac{M}{k}}$	$\xi_{\max} = \sqrt[5]{\Delta c^4 \cdot \left(\frac{5 \cdot M}{4 k}\right)^2}$
größte Kraft	$P_{\max} = k \cdot \xi_{\max}^n$	$P_{\max} = \Delta c \cdot \sqrt{k \cdot M}$	$P_{\max} = \sqrt[5]{\Delta c^6 \cdot k^2 \cdot \left(\frac{5}{4} M\right)^3}$
Zeit des ersten Stoßabschnittes	$T = 2 \cdot \frac{\xi_{\max}}{\Delta c} \int_0^1 \frac{d(\xi/\xi_{\max})}{\sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{\xi_{\max}}\right)^{n+1}}}$	$T = \pi \cdot \frac{\xi_{\max}}{\Delta c} = \pi \cdot \sqrt{\frac{M}{k}}$	$T = 2,94 \cdot \frac{\xi_{\max}}{\Delta c}$ $= 2,94 \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{\Delta c} \cdot \left(\frac{5 M}{4 k}\right)^2}$

¹ Schwingungszeit beim Schwingen um O gleich der beim Schwingen um B .

* ξ ist die Annäherung beider Körper, siehe Abb. 158. Mit $n = 1$ erhält man das Hooke'sche Gesetz, Kraft \sim Zusammendrückung $P = k_1 \cdot \xi$.

Nach der Hertz'schen Theorie des Druckes gewölbter Flächen aufeinander ist $n = \frac{3}{2}$, also $P = k_2 \cdot \xi^{3/2}$. Hierbei ist

$$k_2 = \frac{16}{3 \cdot (\vartheta_1 + \vartheta_2)} \cdot \sqrt{\frac{1}{\varrho_1 + \varrho_2}}; \quad \vartheta = \frac{2(m-1)}{m \cdot G}; \quad m = \frac{10}{3} = \text{Poissonsche Zahl};$$

$$G = \frac{m}{2(m+1)} \cdot E = \text{Schubmodul}; \quad E = \text{Elastizitätsmodul.}$$

$$\varrho = \frac{1}{r} = \text{Krümmung der Berührungsfläche.}$$

Bei gleichen Materialien ($\vartheta_1 = \vartheta_2$) ist $k_2 = 0,733 \cdot E \cdot \sqrt{\frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 \pm r_2}}$. + beides konvexe Kugeln;
- falls Kugel 2 konkav ist (auf der Innenseite gestoßen wird).

$$** \quad x_2 - x_1 = r_1 + r_2 - \xi; \quad \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\ddot{\xi}; \quad \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{M}.$$

VII. Massenausgleich.

1. Bedingungen.

Er ist dann vorhanden, wenn durch die Bewegung des Systems keine zusätzlichen Lagerkräfte entstehen.

Statischer Ausgleich: Schwerpunkt in Ruhe oder geradlinig gleichförmig fortschreitend.

$$\mathfrak{R} = M \cdot \frac{d\mathfrak{v}_s}{dt} = \sum \frac{d}{dt}(m \mathfrak{v}) = 0.$$

$$\mathfrak{v}_s = \text{const.}$$

Dynamischer Ausgleich: Drall für jede beliebige Achse = const.

$$\mathfrak{M} = \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = 0,$$

$$\mathfrak{B} = \sum m[\mathfrak{r} \mathfrak{v}] = \text{const.}$$

2. Starrer Körper, Drehung um die z -Achse.

Statischer Ausgleich: Schwerpunkt liegt auf der Drehachse.

Dynamischer Ausgleich: Drehachse = freie Achse = Trägheitshauptachse (siehe S. 94)

$$M_x = 0; \quad M_y = 0 \quad \text{für} \quad C_{xz} = C_{yz} = 0.$$

3. Schlickscher Massenausgleich von Mehrzylindermaschinen.

Bezeichnungen:

φ_i = Kurbelwinkel des i -ten Zylinders.

α_i = Schränkung der jeweiligen Kurbel gegen die erste, im Drehsinn gemessen.

s_i = Entfernung der jeweiligen Zylinderachse von der ersten.

m_i = hin- und hergehende Masse des jeweiligen Zylinders.

Zeiger i = bezeichnet den jeweiligen Zylinder.

a) **Massenausgleich erster Ordnung** (unendliche lange Schubstange) $\lambda = \frac{r}{l} = 0$.

Geschwindigkeit der hin- und hergehenden Massen:

$$\begin{aligned} v_i &= r_i \cdot \omega_i \cdot \sin \varphi_i = r_i \cdot \omega \cdot \sin(\varphi_1 + \alpha_i), \\ &= r_i \cdot \omega \cdot [\sin \varphi_1 \cdot \cos \alpha_i + \cos \varphi_1 \cdot \sin \alpha_i]. \end{aligned}$$

Statischer Ausgleich: Schwerpunkt in Ruhe = $\sum m \cdot \mathfrak{v} = 0$

$$\sum_i m_i \cdot r_i \cdot \sin \alpha_i = 0^*, \quad (1)$$

$$\sum_i m_i \cdot r_i \cdot \cos \alpha_i = 0. \quad (2)$$

Dynamischer Ausgleich: Drall um beliebige Achse senkrecht zur Zylinderebene = 0 **

$$\sum_i m_i \cdot r_i \cdot s_i \cdot \sin \alpha_i = 0, \quad (3)$$

$$\sum_i m \cdot r \cdot s_i \cdot \cos \alpha_i = 0. \quad (4)$$

4 Gleichungen, zwei Stücke (z. B. eine Schränkung α_2 , eine Zylinderentfernung s_2) wählbar, d. h. Massenausgleich erster Ordnung erst von 4-Zylindermaschine an möglich. (Unbekannte $\alpha_3, \alpha_4, s_3, s_4$).

* \sum_i heißt, die Summe ist über alle Zylinder zu nehmen.

** D. h. auf den Ausgleich um eine Achse senkrecht zur Drehachse und parallel zur Zylinderebene wird wegen der Kleinheit der zusätzlichen Momente verzichtet.

b) **Massenausgleich zweiter Ordnung** (endliche Schubstangenlänge, $\lambda = \frac{r}{l}$).

Geschwindigkeit: $v_i = r_i \omega_i (\sin \varphi_i + \frac{1}{2} \lambda \cdot \sin 2 \varphi_i)$.

Statischer Ausgleich:

$$\sum_i m_i r_i \sin \alpha_i = 0, \quad (1)$$

$$\sum_i m_i r_i \cos \alpha_i = 0, \quad (2)$$

$$\sum_i m_i r_i \sin 2 \alpha_i = 0, \quad (3)$$

$$\sum_i m_i r_i \cos 2 \alpha_i = 0, \quad (4)$$

Dynamischer Ausgleich:

$$\sum_i m_i r_i s_i \sin \alpha_i = 0, \quad (5)$$

$$\sum_i m_i r_i s_i \cos \alpha_i = 0, \quad (6)$$

$$\sum_i m_i r_i s_i \sin 2 \alpha_i = 0, \quad (7)$$

$$\sum_i m_i r_i s_i \cos 2 \alpha_i = 0. \quad (8)$$

8 Gleichungen, zwei Stücke wählbar, d. h. Massenausgleich zweiter Ordnung erst von 6-Zylindermaschine an möglich (Unbekannte: 4 Schränkungen, 4 Zylinderabstände).

VIII. Der Kreisel.

1. Grundgleichungen.

Dynamische Grundgleichung in bezug auf ein raum-
körper- festes Koordinatensystem $\begin{matrix} x & y & z \\ \xi & \eta & \zeta \end{matrix}$
(siehe S. 93 u. 95/96)

$$\mathfrak{M} = \frac{d\mathfrak{B}}{dt},$$

$$\mathfrak{M} = \left(\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right)_{rel} + [\bar{\omega} \mathfrak{B}],$$

$$\left. \begin{aligned} M_{\xi} &= J_1 \cdot \varepsilon_{\xi} - (J_2 - J_3) \cdot \omega_{\eta} \cdot \omega_{\zeta} \\ \eta & \quad \quad \quad \zeta \\ \zeta & \quad \quad \quad \eta \end{aligned} \right\} \text{Eulersche Gleichungen}$$

$$= \frac{dB_{\xi\eta\zeta}}{dt} - (B_{\eta\zeta} \cdot \omega_{\xi} - B_{\xi\zeta} \cdot \omega_{\eta} - B_{\xi\eta} \cdot \omega_{\zeta}).$$

Kinetische Energie und Drall (siehe S. 84 u. 82)

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} (\mathfrak{B} \cdot \bar{\omega}) = \frac{1}{2} B \cdot \omega \cdot \cos \mathfrak{B} \omega \\ &= \frac{1}{2} J_{\omega} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} (J_1 \cdot \omega_{\xi}^2 + J_2 \cdot \omega_{\eta}^2 + J_3 \cdot \omega_{\zeta}^2) \\ &= \frac{1}{2} (B_{\xi} \cdot \omega_{\xi} + B_{\eta} \cdot \omega_{\eta} + B_{\zeta} \cdot \omega_{\zeta}) \\ B &= \sqrt{(J_1 \cdot \omega_{\xi})^2 + (J_2 \cdot \omega_{\eta})^2 + (J_3 \cdot \omega_{\zeta})^2}. \end{aligned}$$

2. Kräftefreier Kreisel.

a) Allgemeines.

Schwerpunkt = Stützpunkt, keine äußeren Kräfte außer Eigengewicht und Stützkraft, keine Momente.

$$\sum \mathfrak{P} = M \cdot \mathfrak{b}_S = 0; \quad \mathfrak{b}_S = 0; \quad \mathfrak{b}_S = \text{const},$$

$$\sum \mathfrak{M} = \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = 0; \quad \mathfrak{B} = \text{const},$$

$$\left(\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right)_{rel} = -[\bar{\omega} \cdot \mathfrak{B}],$$

$$\frac{d\omega_{\xi\eta\zeta}}{dt} = \frac{J_{231} - J_{312}}{J_{123}} \cdot \omega_{\eta} \cdot \omega_{\zeta} \quad (\text{Eulersche Gleichungen, siehe S. 95}).$$

Der Drall eines kräftefreien Kreisels ist nach Größe und Richtung unveränderlich.

Der um eine Hauptachse rotierende kräftefreie Kreisel behält seine Drehgeschwindigkeit nach Größe und Richtung bei¹.

Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$ und Drallvektor \mathfrak{B} fallen hierbei in dieselbe Richtung (siehe S. 81/82).

Die Hauptachsen mit dem größten und kleinsten Trägheitsmoment sind stabile Achsen; die Hauptachse mit dem mittleren Trägheitsmoment ist eine labile Drehachse².

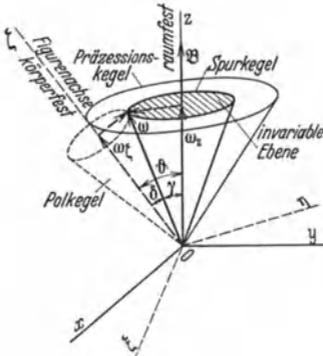
b) Symmetrischer Kreisel $J_1 = J_2 \equiv J$.

Die Eulerschen Gleichungen nehmen die Form an:

$$\frac{d\omega_\xi}{dt} = \frac{J - J_3}{J} \cdot \omega_\eta \cdot \omega_\zeta,$$

$$\frac{d\omega_\eta}{dt} = \frac{J_3 - J}{J} \cdot \omega_\zeta \cdot \omega_\xi,$$

$$\frac{d\omega_\zeta}{dt} = 0; \text{ d. h. } \omega_\zeta = \omega_{\zeta_0} = \text{const.}$$



Der Vektor $\bar{\omega}$ beschreibt um die körperfeste Figuren-achse den Polkegel (Polodie) mit konstantem Öffnungswinkel³ (siehe Abb. 159)

$$\delta = \text{arc tg} \frac{\sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2}}{\omega_\zeta} = \text{const.}$$

Abb. 159. Bewegung des symmetrischen Kreisels.

Der Vektor $\bar{\omega}$ beschreibt um den raumfesten Drallvektor \mathfrak{B} (raumfeste Achse z) den Spurkegel (Herpolodie) mit konstantem Öffnungswinkel (siehe Abb. 159)⁴

$$\gamma = \text{arc cos} \frac{2 \cdot T}{B \cdot \omega}.$$

¹ Ist ζ die Hauptachse, um die die Drehung mit ω_ζ erfolgt, so daß also $\omega_\xi = \omega_\eta = 0$, so folgt aus den Eulerschen Gleichungen, daß $\omega_\xi = \omega_\eta \equiv 0$ und $\omega_\zeta = \omega_{\zeta_0} = \text{const}$ bleiben.

² Aus den Eulerschen Momentengleichungen folgt mit $M_\xi = M_\eta = M_\zeta = 0$ (d. h. kräftefreier Kreisel) und $\omega_\xi \ll \omega_\zeta$ (d. h. Drehung nur wenig von der Hauptachse ζ abweichend), also $\omega_\xi \cdot \omega_\eta \approx 0$ (d. h. $\varepsilon_\zeta = 0$; $\omega_\zeta = \text{const}$) durch einmalige Differentiation und Zusammenfassen der Gleichungen für das Abweichen von der Drehung um die Hauptachse ζ die Differentialgleichung:

$$\ddot{\omega}_\xi + \frac{J_2 - J_3}{J_1} \cdot \frac{J_1 - J_3}{J_2} \cdot \omega_\zeta^2 \cdot \omega_\xi = 0$$

in der Form einer Schwingungsgleichung

$$\ddot{\omega}_\xi + \alpha^2 \cdot \omega_\xi = 0.$$

Eine Schwingung mit constanter Amplitude ergibt sich für ω , falls

$$\alpha = \omega_\zeta \cdot \sqrt{\frac{J_2 - J_3}{J_1} \cdot \frac{J_1 - J_3}{J_2}} > 0, \text{ d. h. } J_3 = J_{\text{max}}^{\text{min}}$$

ist ($\zeta = \text{stabile Achse}$).

Ein Anwachsen der ω -Werte nach einer e -Funktion erhält man, falls $\alpha < 0$, d. h. $J_1 \leq J_3 \leq J_2$, d. h. J_3 das mittlere Trägheitsmoment ist ($\zeta = \text{labile Achse}$).

³ Aus den Eulerschen Gleichungen folgt in gleicher Weise wie unter Anm. 2 die Differentialgleichung $\ddot{\omega}_\xi + \alpha^2 \cdot \omega_\xi = 0$, wobei $\alpha^2 = \left(1 - \frac{J_3}{J}\right)^2 \cdot \omega_\zeta^2$ ist. Die Lösungen dieser Schwingungsgleichungen lauten $\omega_\xi = a \cdot \sin \alpha t$ und $\omega_\eta = a \cdot \cos \alpha t$, wobei $a = \sqrt{\omega_{\xi_0}^2 + \omega_{\eta_0}^2}$ ist.

Es ist also $\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 = \text{const}$ und da auch $\omega_\zeta = \text{const}$ ist, ist $\text{tg } \delta = \frac{\sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2}}{\omega_\zeta} = \text{const}$.

⁴ Aus $T = \frac{1}{2} (\mathfrak{B} \cdot \bar{\omega}) = \frac{1}{2} B \cdot \omega \cdot \cos \widehat{\mathfrak{B} \bar{\omega}} = \frac{1}{2} B \cdot \omega \cdot \cos \gamma$ (siehe S. 84) folgt, da $T = \text{const}$; $B = \text{const}$; $\omega = \text{const}$, daß auch $\cos \gamma = \text{const}$ ist.

Die Endpunkte des $\bar{\omega}$ -Vektors liegen in der auf dem Drallvektor senkrecht stehenden raumfesten (invariablen) Ebene, die vom Koordinatenpunkt die Entfernung (siehe Abb. 159)

$$\omega_z = \omega \cdot \cos \gamma$$

besitzt.

Die Figurenachse (körperfeste ζ -Achse) beschreibt um den raumfesten Drallvektor \mathfrak{B} (raumfeste z -Achse) den Präzessionskegel mit dem konstanten Öffnungswinkel (siehe Abb. 159).

$$\vartheta = \gamma + \delta.$$

Die Endpunkte des ω -Vektors liegen aber auch auf dem Poincot-Ellipsoid (siehe S. 79), d. h. die Bewegung des Kreisels ist darstellbar als das Abrollen des Poincot-Ellipsoids auf der invariablen Ebene.

Für die Präzessionsgeschwindigkeit μ und die Eigenschnelle ν bestehen die Gleichungen (siehe Abb. 160)¹

$$\bar{\omega} = \bar{\mu} + \bar{\nu},$$

$$\mathfrak{B} = J \cdot \bar{\mu},$$

Drall = Durchmesserträgheitsmoment \times Präzessionsgeschwindigkeit (nicht J_3 !!).

$$\left. \begin{aligned} J \cdot \nu &= (J - J_3) \cdot \omega_\zeta \\ J_3 \cdot \nu + (J_3 - J) \cdot \mu \cos \vartheta &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Bedingung für reguläre Präzession der Figurenachse.}$$

Oder in anderer Form

$$\mu = \frac{B}{J} = \sqrt{(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) + \frac{J_3}{J} \cdot \omega_\zeta^2},$$

$$\nu = \frac{J - J_3}{J} \cdot \omega_\zeta,$$

$$\text{tg } \vartheta = \frac{J}{J_3} \cdot \frac{\sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2}}{\omega_\zeta},$$

$$T_\mu = \frac{2\pi}{\mu} = \frac{2\pi \cdot J}{B} \text{ Dauer einer vollen Präzession der Figurenachse um die raumfeste Drallachse.}$$

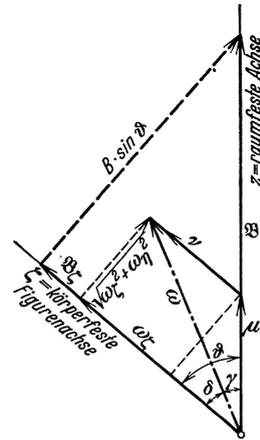


Abb. 160. Beziehung zwischen Winkelgeschwindigkeit $\bar{\omega}$, Präzessionsgeschwindigkeit $\bar{\mu}$ und Eigenschnelle $\bar{\nu}$.

3. Kreisel unter Zwang.

a) Drehmoment aufgezwungen, Bewegung gesucht.

α) Drehmoment parallel zur Figurenachse ($\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{M}_\zeta$).

Der Drall ändert seine Größe und Richtung um den Betrag $\Delta \mathfrak{B} = \int \mathfrak{M} dt \equiv \Delta \mathfrak{B}_\zeta$, damit ändert sich also der Winkel ϑ (siehe Abb. 161). Die Winkelgeschwindigkeit um die

ζ -Achse ändert sich in demselben Verhältnis wie der Drall bezüglich dieser Achse $\frac{\omega_\zeta}{\omega_{\zeta_0}} = \frac{B_\zeta}{B_{\zeta_0}}$,

¹ Die Winkelgeschwindigkeiten um die Figuren- und eine dazu senkrechte Achse sind: $\omega_\zeta = \mu \cdot \cos \vartheta + \nu$ und $\mu \cdot \sin \vartheta = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2}$. Die Drallkomponente senkrecht zur Figurenachse ist $B \cdot \sin \vartheta = J \cdot \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2} = \mu \cdot J \cdot \sin \vartheta$, also $B = J \cdot \mu$. Dies in die Gleichung für ω_ζ eingeführt, gibt mit $B \cdot \cos \vartheta = J_3 \cdot \omega_\zeta$ die Beziehung $J \omega_\zeta = J_3 \omega_\zeta + J \cdot \nu$. Führt man hier wieder $\omega_\zeta = \mu \cdot \cos \vartheta + \nu$ ein, so erhält man $J_3 \cdot \nu + (J_3 - J) \cdot \mu \cdot \cos \vartheta = 0$. Die Winkelbeziehung $\text{tg } \vartheta = \frac{J}{J_3} \cdot \frac{\sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2}}{\omega_\zeta}$ folgt aus $\sin \vartheta = \frac{\sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2}}{\mu}$ und $\cos \vartheta = \frac{B_\zeta}{B} = \frac{J_3 \cdot \omega_\zeta}{J \cdot \mu}$ durch Division.

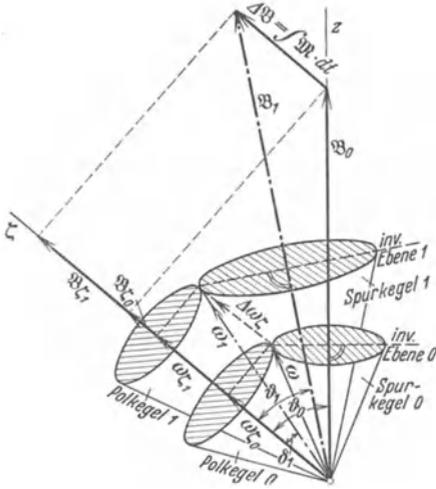


Abb. 161. Zwangsmoment parallel zur Figurenachse des Kreisels.

während die Resultierende aus den beiden anderen Komponenten $\sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2} = \text{const}$ bleibt¹. Infolgedessen ändert sich auch der Winkel δ . Nach Aufhören des Momentes bleiben die neuen Werte für den Drall, die Winkelgeschwindigkeit usw. konstant und es gelten wieder die in Abb. 159 dargestellten Beziehungen.

β) Drehmoment parallel zur Drallachse ($\mathfrak{M} \parallel \mathfrak{B}$).

Es tritt keine Änderung in der Richtung des Dralles, sondern nur von seiner Größe um $\Delta \mathfrak{B} = \int \mathfrak{M} dt$ ein. Der Anfangsdrall \mathfrak{B}_0 ist entstanden durch ein Moment in Richtung von \mathfrak{B}_0 und rief die Winkelgeschwindigkeit ω_0 hervor. Mithin wird durch $\mathfrak{M} \parallel \mathfrak{B}_0$ auch nur die Größe von ω_0 geändert und nicht seine Richtung. Es bleiben also alle Winkel erhalten, und beim Abrollen des Poinsoit-Ellipsoides ändert sich nur dessen Größe und der Abstand der invariablen Ebene vom Koordinatenursprung. Für die Größenänderung der Präzessionsgeschwindigkeit und Eigenschnelle des symmetrischen Kreisels erhält man

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{dB}{dt \cdot J} = \frac{M}{J},$$

$$\frac{d\nu}{d'} = \frac{J - J_3}{J} \cdot \frac{d\omega_\xi}{dt} = \frac{J - J_3}{J} \cdot \frac{d\mu}{dt} \cdot \cos \vartheta = \frac{J - J_3}{J} \cdot \frac{M}{J} \cdot \cos \vartheta.$$

γ) Stoß senkrecht auf die Figurenachse; schneller Kreisel.

Beim schnellen Kreisel überwiegt die Winkelgeschwindigkeit ω_ξ , in Richtung der Figurenachse die beiden anderen Komponenten ω_ξ, η bedeutend, so daß

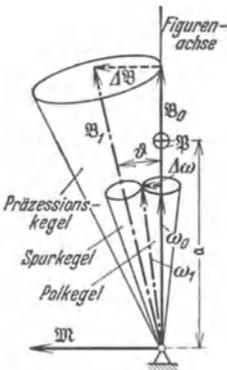


Abb. 162. Stoßmoment senkrecht zur Figurenachse des schnellen Kreisels.

Figurenachse
Winkelgeschwindigkeitsachse } so dicht beieinander liegen, daß man sie in einer Geraden liegend auffassen kann.

Durch einen Stoß $\int \mathfrak{B} dt$ senkrecht auf die Figurenachse entsteht in Verbindung mit der Auflagerkraft ein Kräftepaar, d. h. ein auf Figurenachse und Stoßkraft senkrecht stehender Drehstoß (siehe Abb. 162) $\int \mathfrak{M} dt = \int [\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{B}] dt = \Delta \mathfrak{B}$, der ebenfalls auf der Drallachse senkrecht stehend nur dessen Richtung ändert. Nach dem Stoß führt die Figurenachse, die während der kurzen Stoßdauer ihre Richtung nicht geändert hat, den Gesetzen des kräftefreien Kreisels entsprechend, eine Präzessionsbewegung um die raumfeste Drallachse $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_0 + \Delta \mathfrak{B}$ mit dem Öffnungswinkel

$$\vartheta = \arctg \frac{\Delta B}{B_0} = \arctg \frac{\int M dt}{B_0} \quad \text{aus.}$$

¹ Die dritte Eulersche Gleichung geht wegen $J_1 = J_2 \equiv J$ in die dynamische Grundgleichung über: $\mathfrak{M}_\xi = J_3 \cdot \varepsilon_\xi$, d. h. $\Delta \omega_\xi = \int M_\xi \cdot dt = \frac{\Delta B_\xi}{J_3}$. Aus den ersten beiden Eulerschen Gleichungen

$$J \cdot \varepsilon_\xi = (J - J_3) \cdot \omega_\eta \cdot \omega_\xi$$

$$J \cdot \varepsilon_\eta = (J_3 - J) \cdot \omega_\xi \cdot \omega_\xi$$

und

erhält man durch Division

$$\omega_\xi \cdot d\omega_\xi = -\omega_\eta \cdot d\omega_\eta, \quad \text{d. h. aber} \quad \omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 = \text{const.}$$

Je größer der Anfangsdrall B_0 war, je schneller also der Kreisel rotierte, um so enger ist der Präzessionskegel, d. h. um so unempfindlicher ist der Kreisel gegenüber Stößen (nur schwache Erzitterungen der Figurenachse).

Infolge des Drehstoßes erhält der Kreisel eine Zusatz-Drehgeschwindigkeit in Richtung des Stoßmomentes, d. h. die Figurenachse weicht senkrecht zur Stoßkraft aus¹. Dies ist der Satz vom gleichsinnigen Parallelismus:

Wird auf einen schnellen Kreisel ein Störungsmoment ausgeübt, so ist die Drehachse bestrebt, sich mit der Störung in gleichsinnigen Parallelismus (d. h. gleiche Richtung und gleicher Pfeilsinn) zu stellen.

δ) Konstantes Drehmoment auf die Figurenachse ausgeübt (schwerer Kreisel).

Das beliebige Drehmoment (z. B. Moment des Gewichtes, wenn Schwerpunkt und Unterstützungspunkt nicht zusammenfallen = schwerer Kreisel) kann in die beiden Komponenten in Richtung der Figurenachse und senkrecht dazu zerlegt werden. Die erste Komponente ändert bei einem schnellen Kreisel (Figuren-, Drall- und Winkelgeschwindigkeitsachse liegen praktisch in einer Geraden) nur die Größe der Winkelgeschwindigkeit um die Figurenachse (siehe S. 111). Die Komponente senkrecht auf der Figurenachse ändert aber beständig die Richtung des Dralles durch den Zusatzdrall (siehe Abb. 163).

$$d\mathfrak{B} = \mathfrak{M} \cdot dt = [a \cdot \mathfrak{P}] \cdot dt.$$

Nach der Figur ist aber auch $d\mathfrak{B} = B \cdot \sin \alpha \cdot d\varphi$, mithin beschreibt der Drallvektor \mathfrak{B} um die raumfeste z-Achse einen Kreiskegel mit dem ursprünglichen Öffnungswinkel α . Die Winkelgeschwindigkeit dieser (pseudoregulären) Präzession ist:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \mu = \frac{M}{B \cdot \sin \alpha}$$

oder in Vektorform

$$\mathfrak{M} = [\bar{\mu} \cdot \mathfrak{B}].$$

Die Präzession der Drallachse (und der nahebeiliegenden Figurenachse, $\alpha \approx \vartheta$) um die raumfeste z-Achse ist dem Störungsmoment direkt und der Winkelgeschwindigkeit des Kreises ($B \sim \omega$) umgekehrt verhältig.

Die Figurenachse beschreibt, da sie mit der Drallachse nicht genau in einer Linie liegt, um diese einen Kegel, allerdings mit sehr geringem Öffnungswinkel, so daß sie um die raumfeste z-Achse keinen exakten Kegelmantel beschreibt. Aber auch die Drallachse führt keine reine Präzession aus, da wegen des Tanzens der Figurenachse um die Drallachse auch das an der Figurenachse angreifende Moment $\mathfrak{M} = [a \cdot \mathfrak{P}]$ kleine Erzitterungen ausführt. (Daher der Name pseudoreguläre Präzession.) Die Schwankungen der Figurenachse um die Drallachse, Nutationen genannt, sind (siehe S. 111)

$$\mu' = \frac{B}{J}.$$

Die Nutationsgeschwindigkeit wächst mit dem Drall und ist unabhängig von dem Störungsmoment.

¹ Der Nachweis kann auch durch Betrachten der Geschwindigkeit des Stoßpunktes erbracht werden. Nach dem Arbeitssatz ist $(\mathfrak{M} \cdot \bar{\omega}) = \frac{dT}{dt}$. Da aber $\mathfrak{M} \perp \bar{\omega}$ steht, ist die Änderung der kinetischen Energie $\frac{dT}{dt} = 0 = (\mathfrak{P} \cdot v)$, d. h. die Geschwindigkeit des Stoßpunktes steht senkrecht auf der Stoßkraft.

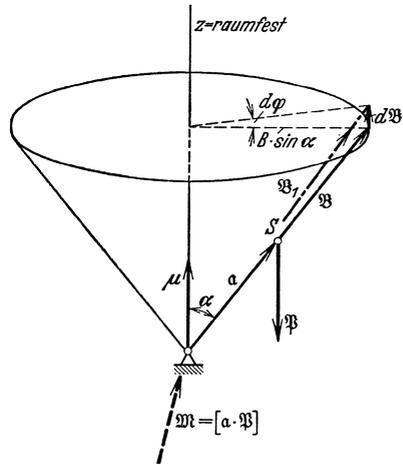


Abb. 163. Dauerndes Drehmoment senkrecht zur Figurenachse.

Umlaufzeit für Präzession des Dralles $T_\mu = \frac{2\pi}{\mu}$,

Umlaufzeit für Nutation der Figurenachs $T_{\mu'} = \frac{2\pi}{\mu'}$,

Anzahl Nutationen bei einem Präzessionsumlauf $n = \frac{T_\mu}{T_{\mu'}} = \frac{\mu'}{\mu} = \frac{B^2 \cdot \sin \alpha}{M \cdot J}$.

Für einen schnellen Kreisel ist dieses Verhältnis ($n \sim B^2$) groß.

b) Reguläre Präzession aufgezwungen, Trägheitswiderstand des Kreisels (Kreiselmoment) gesucht.

α) Symmetrischer Kreisel.

Wird dem Kreisel von der Eigenschnelle v eine reguläre Präzession μ aufgezwungen, so ist das dafür erforderliche Drehmoment \mathfrak{M} bzw. das widerstehende Trägheitsmoment des Kreisels (das Kreiselmoment) \mathfrak{M}_K (siehe Abb. 164)¹

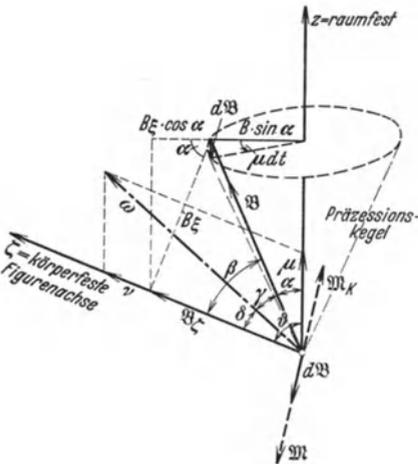


Abb. 164. Entstehung des Kreiselmomentes \mathfrak{M}_K bei aufgezwungener Präzessionsbewegung μ .

$$\mathfrak{M}_K = -\mathfrak{M} = [\bar{v} \cdot \bar{\mu}] \cdot \left\{ J_3 + (J_3 - J) \cdot \frac{\mu}{v} \cdot \cos \beta \right\},$$

$$|\mathfrak{M}_K| = v \cdot \mu \cdot \sin \vartheta \cdot \left\{ J_3 + (J_3 - J) \cdot \frac{\mu}{v} \cdot \cos \beta \right\} = M_{K1} + M_{K2}.$$

Kreiselmoment im engeren Sinne:

$$M_{K1} = J_3 \cdot v \cdot \mu \sin \vartheta.$$

$\bar{v} \bar{\mu} \mathfrak{M}_{K1} \equiv$ rechtshändiges Koordinatensystem, d. h. $\mathfrak{M}_{K1} =$ Richtung der negativen Knotenlinie (siehe Abb. 166).

Höchstwert für $\sphericalangle \vartheta = \sphericalangle \widehat{v \bar{\mu}} = 90^\circ$, d. h. Präzession μ steht senkrecht auf der Figurenachs v .

Schleudermoment:

$$M_{K2} = \mu^2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \cdot (J_3 - J).$$

Es ist unabhängig von der Kreiselbewegung

(Eigenschnelle v) und tritt bei jedem Körper als Wirkung der Fliehkräfte auf².

Höchstwert:

$$M_{K2} = M_{K2 \max} \text{ für } \sphericalangle \vartheta = \sphericalangle \widehat{v \bar{\mu}} = 45^\circ.$$

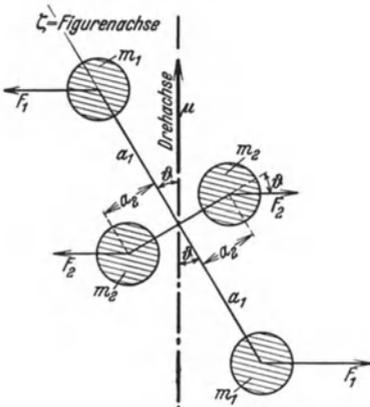


Abb. 165. Entstehung des Schleudermomentes aus den Fliehkräften.

¹ Es ist $M \cdot dt = B \cdot \sin \alpha \cdot \mu \cdot dt$ und $B \sin \alpha = B_\xi \cdot \sin \vartheta - B_\zeta \cdot \cos \vartheta$. Mit $B_\xi = J_3 \cdot \omega_\xi = J_3 \cdot (\mu \cos \vartheta + v)$ und $B_\zeta = B \cdot \sin \beta = J \cdot \omega_\zeta = J \cdot \mu \cdot \sin \vartheta$ (beim kräftefreien Kreisel ist $\alpha = 0$, d. h. $\beta \equiv \vartheta$, mithin gilt dort $B_\xi = B \cdot \sin \vartheta$ und $B = J \cdot \mu$, siehe S. 111) erhält man $M = \mu \cdot \sin \vartheta \{ J_3 \cdot v + (J_3 - J) \cdot \mu \cdot \cos \vartheta \}$ wie oben angeben.

² Die Fliehkräfte sind $F_{\frac{1}{2}} = m_{\frac{1}{2}} \cdot b_{n_{\frac{1}{2}}} = m_{\frac{1}{2}} \cdot a_{\frac{1}{2}} \sin \vartheta \cdot \mu^2$ und ihre Momente (siehe Abb. 165)

$$M_{\frac{1}{2}} = \mp 2 \cdot F_{\frac{1}{2}} \cdot a_{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta}.$$

Mithin ist das resultierende Moment

$$M_{K2} = -2 \cdot m_1 \cdot a_1^2 \cdot \mu^2 \cdot \sin \vartheta \cos \vartheta + 2 \cdot m_2 \cdot a_2^2 \cdot \mu^2 \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \vartheta$$

oder $M_{K2} = (J_3 - J) \mu^2 \cdot \sin \vartheta \cos \vartheta$. (Forts. S. 115)

Kleinstwert: $M_{K2} = 0$, wenn 1. $\sphericalangle \vartheta = 0$, d. h. Figurenachse ζ mit der Präzessionsachse μ zusammenfällt.

2. wenn $\sphericalangle \vartheta = 90^\circ$, d. h. Figurenachse senkrecht auf der Präzessionsachse steht.

In beiden Fällen ist die Präzessionsachse eine Hauptachse des Kreisels.

3. $J_3 = J \equiv J_1 = J_2$, d. h. der Kreisel ist ein Kugelkreisel.

Richtung: Das Schleudermoment versucht immer, die Achse mit dem größten Trägheitsmoment zur Drehachse (μ) zu machen.

Gesamtkreiselmoment $M_K = M_{K1} + M_{K2} = 0$, d. h.

$$\{ \} = 0 = J_3 \cdot \nu + (J_3 - J) \cdot \mu \cdot \cos \vartheta$$

die Bedingung für die reguläre Präzession eines kräftefreien Kreisels ist erfüllt (vgl. S. 111).

β) Schneller symmetrischer Kreisel.

Die Eigenschnelle ν ist bedeutend größer als die Präzessionsgeschwindigkeit μ , also auch $\nu \cdot \mu \gg \mu^2$, d. h. das Schleudermoment verschwindet gegenüber dem eigentlichen Kreiselmoment

$$M_K \approx M_{K1} = \nu \cdot \mu \cdot J_3 \cdot \sin \vartheta$$

oder in Vektorform

$$\mathfrak{M}_K \approx [\bar{\nu} \cdot \bar{\mu}] \cdot J_3.$$

in Richtung der negativen Knotenlinie (siehe Abb. 166).

γ) Unsymmetrischer Kreisel.

Aus den Eulerschen Momentengleichungen (siehe S. 109) und den kinematischen Eulerschen Gleichungen (siehe S. 57) folgt für die Komponenten des Kreiselmomentes in der Projektion auf die Knotenlinie, Querachse und Figurenachse (siehe Abb. 166¹).

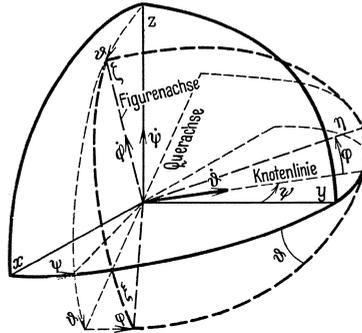


Abb. 166. Lage von Knoten-, Quer- und Figurenachsen zum raumfesten Koordinatensystem xyz .

Der Drehsinn des Momentes ist für $J_3 \geq J$ (abgeplatteter Kreisel) rechts- herum, das Schleudermoment ist also bestrebt, die Achse mit dem größten Trägheitsmoment zur Drehachse zu machen.

¹ Für die Eulerschen Winkelgeschwindigkeiten erhält man mit $\mu \equiv \dot{\psi}$, $\nu \equiv \dot{\varphi}$ und $\dot{\vartheta} = 0$ ($\bar{\mu}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\omega}$ liegen in einer Ebene)

$$\omega_\xi = -\mu \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi,$$

$$\omega_\eta = +\mu \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi,$$

$$\omega_\zeta = \mu \cdot \cos \vartheta + \nu$$

und da μ , ϑ , $\nu = \text{const}$ und $\dot{\varphi} \equiv \nu$ ist, sind die Winkelbeschleunigungen

$$\varepsilon_\xi = +\mu \cdot \nu \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi,$$

$$\varepsilon_\eta = +\mu \cdot \nu \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi,$$

$$\varepsilon_\zeta = 0.$$

Diese Beziehungen werden in die Eulerschen Momentengleichungen eingesetzt und geben mit der Umformung

$$M_{Knoten} = M_\xi \cdot \sin \varphi + M_\eta \cdot \cos \varphi \quad \text{und} \quad M_{Quer} = -M_\xi \cdot \cos \varphi + M_\eta \cdot \sin \varphi$$

die auf S. 116 angegebenen Gleichungen.

$$M_{Knoten} = +K_2 \cdot \cos 2\varphi - K_1,$$

$$M_{Quer} = +K_2 \cdot \sin 2\varphi,$$

$$M_{Figur} = \mathfrak{M}_3 = -K_3 \cdot \sin 2\varphi,$$

hierbei bedeuten:

$$K_1 = \nu \mu \cdot \sin \vartheta \cdot \left\{ J_3 + \left(J_3 - \frac{J_1 + J_2}{2} \right) \cdot \frac{\mu}{\nu} \cdot \cos \vartheta \right\},$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \nu \mu \cdot \sin \vartheta \cdot (J_1 - J_2) \cdot \left(2 + \frac{\mu}{\nu} \cdot \cos \vartheta \right),$$

$$K_3 = \frac{1}{2} \mu^2 \cdot \sin^2 \vartheta \cdot (J_1 - J_2).$$

δ) Schneller, unsymmetrischer Kreisel ($\nu \gg \mu$).

$$K_1 = \mu \cdot \nu \cdot \sin \vartheta \cdot J_3,$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \mu \cdot \nu \cdot \sin \vartheta \cdot (J_1 - J_2),$$

$$K_3 = 0,$$

d. h.

$$M_{Knoten} = \mu \cdot \nu \cdot \sin \vartheta \cdot \left\{ -J_3 + \frac{J_1 - J_2}{2} \cdot \cos 2\varphi \right\},$$

$$M_{Quer} = \mu \cdot \nu \cdot \sin \vartheta \cdot \frac{J_1 - J_2}{2} \cdot \sin 2\varphi,$$

$$M_{Figur} = M_{\zeta} = 0.$$

Für $J_1 = J_2$ erhält man die Gleichungen für den schnellen, symmetrischen Kreisel (vgl. Abschnitt b β).

Sachverzeichnis.

- Achsen**, verschiedene 85.
 —, freie 94, 85, 108.
 —, labile 110.
 —, stabile 110.
Aeromechanik 1.
d'Alembertsches Prinzip 91, 94.
Antrieb 88.
Arbeit 29, 83.
 —, virtuelle 99.
Arbeitsatz 96.
- Bahn** 58.
Balken 30.
 — mit räumlicher Last 35.
 — mit schiefer Last 34.
 — mit Zwischengelenken 37.
Balkentragwerk 31ff.
Beanspruchung, innere 30, 31, 32.
Beschleunigung 46, 52.
Beschleunigungsplan 67.
Beschleunigungspol 68.
Bewegungsarten 46.
Bewegung, gleichförmige 54.
 —, gleichförmig beschleunigte 54.
 —, ungleichförmig beschleunigte 54ff.
Bewegungsgesetze 101.
Bewegungsgröße 81.
Bewegungswiderstände 102.
Bewegungsvorgänge, Darstellung 59.
- Coriolisbeschleunigung** 52.
Culmann, Trägheitsmoment nach 76.
Culmannsche Methode, Fachwerk 42.
Cremonaplan 41.
- Deviationsmoment** 72.
Differentiation 7ff.
Differenzenverfahren 9.
Drall 81ff.
- Drallellipsoid** 82.
Drallsatz 91.
Drehbewegung 46, 48ff.
Drehimpuls 91.
Dreibein 23ff.
Dreigelenkbogen 36.
Dyname 18.
Dynamik 1.
- Ebene**, invariable 111.
Einheitsvektor 2.
Elastomechanik 1.
Ellipsoide, verschiedene 85.
Energie, kinetische 83.
 —, potentielle 29, 97.
Energiesatz 96.
Ersatzmassen 85ff.
Eulersche Gleichungen 95, 109.
 — Winkel 57.
- Fachwerk** 38ff.
Feldstärke 97.
Fesselung 29.
Flächenbeschleunigung 53.
Flächengeschwindigkeit 52.
Flächensatz 91.
Flüssigkeitswiderstände 55, 102, 103.
Fortschreitbewegung 46, 48, 49, 50.
Freiheitsgrad 29.
Führungskräfte 71.
- Gasdynamik** 1.
Gerberträger 37.
Geschwindigkeit 46, 51.
 —, absolute 56.
 —, geklappte 67.
 —, relative 56.
Geschwindigkeitshöhe 64.
Geschwindigkeitsplan 65.
Geschwindigkeitspol 66.
Gleichgewichtsbedingungen 27.
Gleichgewichtszustände 28.
Gleitlager 102.
- Gleitreibung** 102.
Grundgleichung, dynamische 90, 93.
Guldinsche Regel 27.
- Haftreibung** 102.
Hauptachsen 72, 82, 85, 94.
Hennebergs Stabvertauschung 43.
Hydrograf 52, 58.
Hydromechanik 1.
- Impuls** 81.
Impulssatz 88.
Integration 9ff.
- Keplersches Gesetz** 92, 93.
Kinematik 1, 46ff.
Kinetik 1, 71ff.
Knotenpunktmethode 40.
Koordinatensysteme 2.
 —, verschiedene 2, 51, 57, 95.
Kräfte, dissipative 98.
 —, konservative 98.
 —, verlorene 91.
 —, windschiefe 17.
Kräftepaar 3, 28, 83.
Kraftkreuz 17.
Kraftlinien 97.
Kraftreduktion 87.
Kraftschraube 18.
Kreisbahn 53.
Kreisel, kräftefreier 109f.
 —, schneller 112, 114, 115.
 —, schwerer 113.
 —, unter Zwang 111f.
Kreiselmoment 114.
Kuppeln 39.
- Lagerkräfte**, Bestimmen der 30, 33, 40.
 —, dynamische 94, 85, 108.
Lagerungen 29f.
Lagrangesche Gleichungen 96, 100.
Land, Trägheitskreis von 80.
Lastreduktion 40.
Leistung 83.

- Massenausgleich 108.
 Massenmittelpunkt 26.
 Massenmoment 71.
 Massenreduktion 87.
 Maßstab, unbestimmter 24.
 Maßstabberechnung 8.
 Methode, kinematische 44.
 Mohr, Trägheitsmoment nach 76.
 —, Trägheitskreis von 80.
 Moment, einer Kraft 3, 6.
 —, einer Winkelgeschwindigkeit 3.
 Momentenplan 33ff.
 Momentanpol 39, 44, 67.
 Müller-Breslau, Korrekturverfahren 24.

 Nehls, Trägheitsmoment nach 77.
 Niveaulächen 97.
 Nutation 113.

 Ordinatenverfahren der Integration 9.

 Parallelismus, Satz von gleichsinnigen 113.
 Planetenbewegung 54.
 Poinsetellipsoid 79.
 Polkegel 110.
 Polwanderung 37.
 Potential 97f.
 Präzession 111, 112.
 —, pseudoreguläre 113.
 Prinzip von d'Alembert 91, 94.
 Produkt, äußeres 4.
 —, inneres 4.

 Querkraft 31, 33.
 Querkraftplan 34.
- Reduktion von Lasten 40.
 — von Massen 87.
 — von Kräften 87.
 Reibung 102.
 Relativbewegung 56ff.
 Ritter, Schnittverfahren von 42.
 Rollwiderstand 103.
 Rotation 46.
 Ruck 9.

 Schleudermoment 114.
 Schlickscher Massenausgleich 108f.
 Schnittmethode 42.
 Schraubung 46, 50.
 Schwerpunkt 13, 26.
 Schwerpunktshauptachsen 85.
 Schwerpunktssatz, erster 89, 91.
 —, zweiter 92, 93.
 Schwungmoment 79.
 Sehnenverfahren, der Differentiation 8.
 —, der Integration 10.
 Seileck durch 2 und 3 Punkte 36.
 Seiltrieb 102.
 Seilsteifigkeit 103.
 Skalar 1.
 Spurkegel 110.
 Spurlager 102.
 Stab 30.
 Stabkrafttabelle 45.
 Stabvertauschung 43.
 Starrheitsbedingung 31, 38, 39.
 Statik 1, 12ff.
 Steinerscher Satz 73.
 Stereomechanik 1.
 Stockesscher Satz 98.
 Stoß 104ff.
- Stoßarten 104.
 Stoßlinie 104.
 Stoßmittelpunkt 86, 106.
 Stoßpunkt 86, 104.
 Stoßzahl 105.
 Strömung, laminare 56, 102.
 —, turbulente 57, 103.

 Tangentenverfahren der Differentiation 8.
 — der Integration 10.
 Tragwerke 30ff.
 Trägheitsellipsoid 79.
 Trägheitsgesetz 89.
 Trägheitskreis 80.
 Trägheitsmoment 71ff.
 Trägheitsradius 79.
 Translation 46.

 Vektor 1, 2, 3.
 —, Parallelverschiebung 2, 3.
 Vektorarten 2, 47.
 Vektorrechnen 4ff.
 Verrückung, virtuelle 28, 99.

 Wechselwirkung 71.
 Weg 46, 51.
 Widerstände 102f.
 Winkelgeschwindigkeitsellipsoid 80, 85.
 Wirbelfeld 98.

 Zentralachse 18.
 Zentralbewegung 54.
 Zentralellipsoid 80.
 Zentrifugalmoment 72, 73, 77.
 Zerlegen von Kräften 20ff.
 — von Momenten 26.
 Zusammensetzen von Kräften 12ff.
 — von Momenten 26.
 — von Bewegungen 48ff.
 Zwischenresultierende 21, 25.