

53

ИФЗ

пер. 60 к.

ПОД РЕДАКЦИЕЙ  
ВЕНД. А. Ф. ИОФФЕ

# КУРС ФИЗИКИ

—  
ЧАСТЬ ВТОРАЯ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

53  
К 92

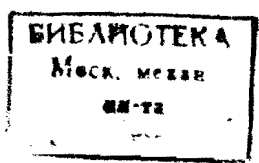
# КУРС ФИЗИКИ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.  
ЗВУК. СВЕТ.

*Составил проф. Д. А. РОЖАНСКИЙ*

*Под ред. акад. А. Ф. ИОФФЕ*



8/10/44



ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКВА ★ 1931 ★ ЛЕНИНГРАД

59  
110



151

НТ — 1. Огиз № 42306/л.  
Ленинградский Областлит № 16993.  
15 1/2 л. Тираж 20 000. Заказ № 270

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### ГЛАВА I.

#### *Колебания и волны.*

	СТР.
§ 1. Значение колебаний и волн в физике . . . . .	7
§ 2. Гармонические колебания . . . . .	9
§ 3. Основное свойство гармонического колебания . . . . .	11
§ 4. Графическое представление гармонического движения . . . . .	13
§ 5. Сложение гармонических колебаний . . . . .	14
§ 6. Биения. Фигуры Лисажу. . . . .	18
§ 7. Ряды Фурье. Гармонический анализ . . . . .	20
§ 8. Энергия колебаний . . . . .	22
§ 9. Затухание колебаний . . . . .	24
§ 10. Вынужденные колебания . . . . .	27
§ 11. Резонанс . . . . .	29
§ 12. Резонансные кривые . . . . .	30
§ 13. Примеры гармонических колебаний . . . . .	32
§ 14. Ангармонические колебания . . . . .	35
§ 15. Распространение колебаний. Волны . . . . .	—
§ 16. Поверхность волны. Принцип Гюйгенса . . . . .	39
§ 17. Интерференция волн . . . . .	42
§ 18. Энергия волн . . . . .	44

### ГЛАВА II.

#### *Звук.*

§ 19. Колебания и звук . . . . .	48
§ 20. Скорость звука . . . . .	49
§ 21. Колебания струны . . . . .	53
§ 22. Трубы открытые и закрытые . . . . .	58
§ 23. Поперечные и продольные колебания стержней . . . . .	60
§ 24. Колебания мембран и пластин . . . . .	63
§ 25. Объемные резонаторы . . . . .	65
§ 26. Анализ звуков . . . . .	67
§ 27. Излучение звуковых волн . . . . .	68
§ 28. Сила звука . . . . .	69
§ 29. Опытные данные о скорости звука . . . . .	71
§ 30. Сочетание музыкальных звуков. Комбинационные тона . . . . .	72

### ГЛАВА III.

#### *Электромагнитные колебания и волны.*

§ 31. Переменные токи . . . . .	74
§ 32. Емкость в цепи переменного тока . . . . .	78

	СТР.
§ 33. Векторные диаграммы переменного тока . . . . .	79
§ 34. Машины переменного тока . . . . .	80
§ 35. Средние и эффективные значения. Выпрямление тока . . . . .	81
§ 36. Трансформаторы . . . . .	84
§ 37. Колебательный разряд . . . . .	87
§ 38. Генераторы незатухающих колебаний . . . . .	89
§ 39. Колебания в связанных цепях . . . . .	92
§ 40. Электрические волны в проволоках . . . . .	94
§ 41. Распространение электромагнитных волн . . . . .	99
§ 42. Определение диэлектрических постоянных методом Друде . . . . .	101
§ 43. Излучение электромагнитных волн . . . . .	102
§ 44. Плоские электромагнитные волны . . . . .	106
§ 45. Техническое применение электромагнитных волн . . . . .	109

## ГЛАВА IV.

### *Свет.*

§ 46. Электромагнитная природа света . . . . .	111
§ 47. Отражение света. Формулы Френеля . . . . .	114
§ 48. Поляризация света при отражении и преломлении . . . . .	118
§ 49. Дисперсия света . . . . .	122
§ 50. Фазовая и групповая скорости волн . . . . .	127
§ 51. Аномальная дисперсия и поглощение света . . . . .	130
§ 52. Давление света . . . . .	—
§ 53. Анизотропные тела . . . . .	133
§ 54. Одноосные кристаллы . . . . .	136
§ 55. Двuosные кристаллы . . . . .	139
§ 56. Поляризационные приборы . . . . .	—
§ 57. Цветная (хроматическая) поляризация . . . . .	143
§ 58. Кристаллы в сходящемся свете . . . . .	144
§ 59. Случайное и искусственное двойное лучепреломление . . . . .	145
§ 60. Вращение плоскости поляризации. Естественное вращение . . . . .	146
§ 61. Магнитное вращение плоскости поляризации . . . . .	149
§ 62. Явление Зеемана . . . . .	152

## ГЛАВА V

### *Волновая теория света.*

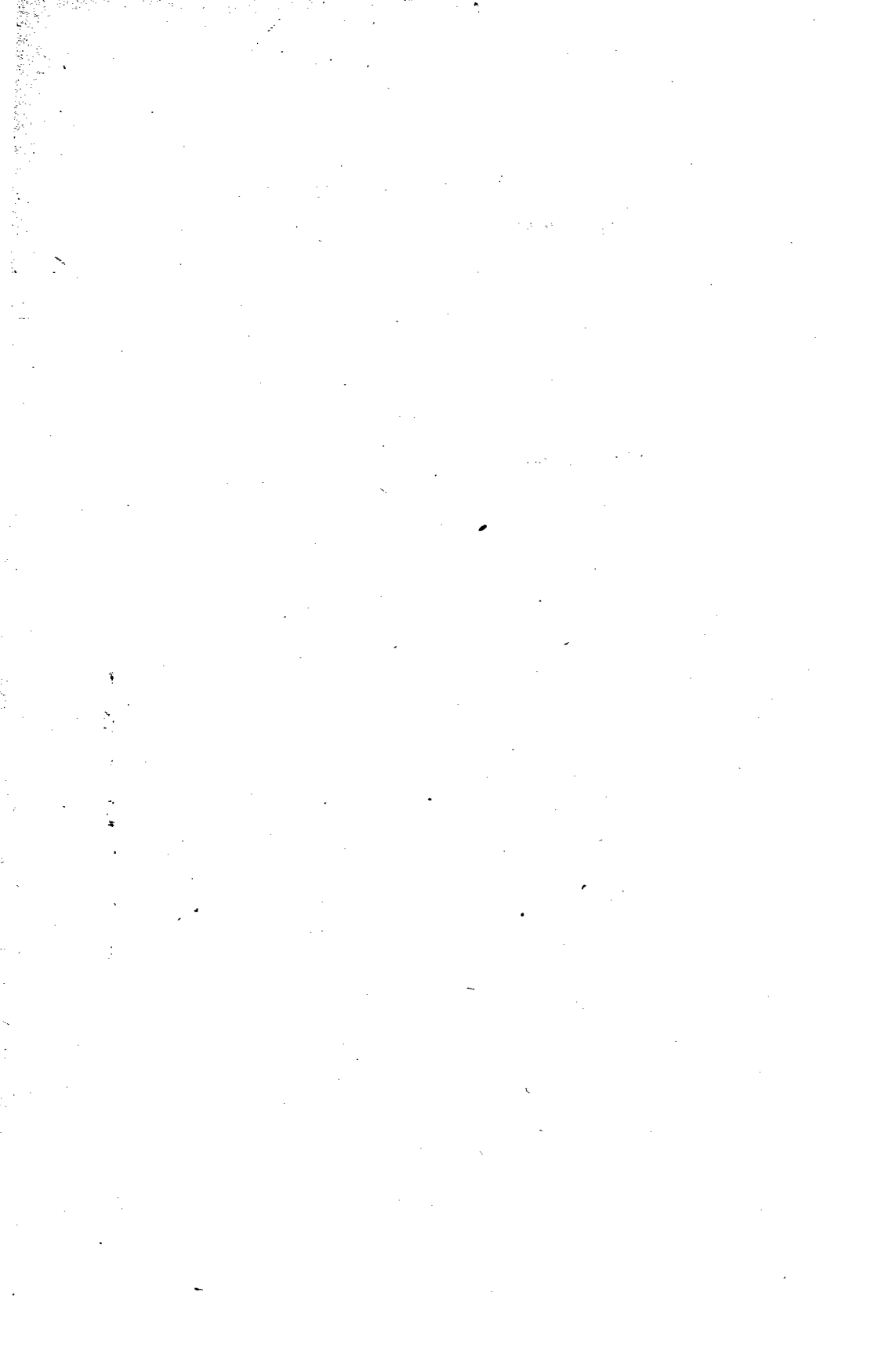
§ 63. Прямолинейное распространение света . . . . .	155
§ 64. Принцип Френеля-Гюйгенса . . . . .	156
§ 65. Принцип Ферма . . . . .	161
§ 66. Диффракция Френеля . . . . .	163
§ 67. Диффракция Фраунгофера . . . . .	164
§ 68. Диффракционные решетки и спектры . . . . .	168
§ 69. Металлические решетки . . . . .	176
§ 70. Ступенчатые решетки (эшелоны) . . . . .	179
§ 71. Когерентность лучей света . . . . .	182
§ 72. Полосы интерференции . . . . .	184
§ 73. Кривые равной толщины . . . . .	187
§ 74. Кривые равного наклона . . . . .	190

	СТР.
§ 75. Интерферометры . . . . .	192
§ 76. Применения интерферометров . . . . .	195
§ 77. Аберрация света и принцип Доплера . . . . .	197

## ГЛАВА VI.

### *Геометрическая оптика.*

§ 78. Геометрические лучи и свет . . . . .	200
§ 79. Оптические приборы . . . . .	201
§ 80. Центрированные оптические системы . . . . .	203
§ 81. Объекты и их изображения . . . . .	204
§ 82. Главные фокусы . . . . .	208
§ 83. Главные плоскости и фокусные расстояния . . . . .	211
§ 84. Преломление и отражение лучей шаровой поверхностью . . . . .	215
§ 85. Классификация оптических систем . . . . .	219
§ 86. Сложные оптические системы Линзы . . . . .	221
§ 87. Недостатки оптических систем . . . . .	225
§ 88. Сферическая аберрация . . . . .	227
§ 89. Каустика . . . . .	228
§ 90. Апланатические точки. Условие апланатизма . . . . .	229
§ 91. Астигматизм, Кома . . . . .	231
§ 92. Ахроматические системы . . . . .	233
§ 93. Диафрагмы в оптических приборах . . . . .	234
§ 94. Фотометрические величины и законы . . . . .	236
§ 95. Яркость объекта и освещенность изображения . . . . .	240
§ 96. Условие синусов. Апертура . . . . .	242
§ 97. Субъективное наблюдение изображения . . . . .	244
§ 98. Разрешающая сила оптических приборов . . . . .	245



## ГЛАВА I.

### КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.

#### § 1. Значение колебаний и волн в физике.

Колебания и волны встречаются при изучении самых различных физических явлений. Они представляют собою основу нашего представления о материи, о законах ее движения, об электричестве, свете и звуке. Как ни разнообразны проявления волновых явлений, свойства их одинаковы, и поэтому том II посвящается изложению общих закономерностей этих явлений, которые в дальнейшем найдут себе многочисленные применения.

Мы получаем очень наглядное представление о всех основных понятиях, необходимых для понимания природы этих явлений, изучая механические колебания, т. е. колебательные движения материальных тел. Медленные колебания, связанные с движениями больших материальных масс, представляют собой весьма распространенный тип движения в жидкости, особенно на ее свободной поверхности, который мы обычно и называем волнами. С представлением о волнах на поверхности связаны все важнейшие понятия, относящиеся к колебательным процессам и их волнообразному распространению. Затем особенно важное техническое значение механические колебания приобретают в связи с работой машин, совершающих периодическое вращательное движение, и колебаниями в сооружениях под действием внешних периодических сил.

Колебания более быстрые (сотни и тысячи колебаний в секунду), вызывающие в нашем ухе ощущение звука, дают также обширный материал для знакомства с основными законами и особенностями механических колебаний. Объективно, поскольку это не связано со слуховыми ощущениями, учение о звуке представляет собой учение о разных типах колебаний и о распространении их в виде волн в материальных телах и при различных условиях опыта. Все возрастающая частота колебаний, которые, в конце концов, переходят в ультразвуковые колебания (десятки и сотни тысяч колебаний в сек.), уже не воспринимаемые слухом, не вносит ничего качественно нового до тех пор, пока размеры волн велики по сравнению с отдельными частицами колеблющегося тела, т. е. пока его можно считать как бы сплошным.

Молекулярное строение материальных тел создает некоторые особенности в учении о распространении колебаний в этих телах, когда мы переходим к рассмотрению очень малых волн, представляющих интерес для молекулярной физики и для объяснения различных тепловых явлений. Частота колебаний в этом случае выражается числами порядка  $10^{11}$  —  $10^{12}$  в сек. и граничит с частотой оптических колебаний. Этих специальных применений теории колебаний и волн мы не будем касаться в настоящем томе.



Световые колебания и волны так же, как и радиоволны, по своей физической природе представляют собой явление, весьма отличное от колебаний материальных тел. Для полного понимания их необходимо усвоить себе представление о физических состояниях пространства, которое мы называем полем электрических и магнитных сил (см. часть I). Изменения поля, периодически происходящие в какой-нибудь точке пространства, представляют сущность света, как электромагнитного явления. Как испускание света, так и действие его на материальные тела поэтому тесно связаны с электрической природой строения атома, учение о которой будет излагаться в следующем томе. В настоящем же томе мы ознакомимся с теми оптическими явлениями, для изучения которых нет необходимости рассматривать истинный механизм действия света. Эти явления будут излагаться не с точки зрения их физической сущности, а как колебательные процессы вообще. Говоря о распространении света, интерференции и диффракции, можно говорить о колебаниях и волнах безотносительно к тому, будут ли это механические, например, звуковые колебания, или электромагнитные, световые. Но для понимания механизма и величины коэффициентов преломления и отражения света и скорости распространения его в материальных телах необходимо знание того, что представляют собой световые колебания с одной стороны и материальный атом с другой.

Различные виды электрических колебаний и радиоволн обладают частотами от десятков до  $10^{10}$  в секунду. Особенностью световых колебаний, ничем не отличающихся от радиоволн по физической природе, является их большая частота: число колебаний, воспринимаемых глазом, составляет почти  $10^{15}$  в секунду. Длина волн порядка  $0,5 \mu$  (где  $\mu = 10^{-3}$  мм<sup>1</sup>), т. е. большей частью очень мала по сравнению с размерами тех приборов, которые служат для изучения света (экран, диафрагмы, зеркала, преломляющие поверхности и т. п.). В этом случае явления распространения света могут излагаться еще более упрощенно — как распространение прямолинейных лучей, подчиняющихся простым геометрическим законам геометрической оптики, вполне удовлетворительно объясняющей свойства оптических приборов. Волновая природа света ставит лишь границы, в которых допустимо применение простых геометрических методов.

Хотя световые волны малы по сравнению с обычными телами, — они всегда в 1000 раз больше, чем атомы и молекулы. Более короткие, ультрафиолетовые волны уже не ощущаются глазом, но во всех остальных отношениях ничем не отличаются от света. Только когда размеры электромагнитных волн подходят к размерам атомов, появляются новые явления, свойственные рентгеновым лучам с частотами  $10^{18}$  в сек. Наиболее короткие известные нам волны приходят из мирового пространства (проникающая радиация); их размеры в 1000 раз меньше атомов, а частота до  $10^{24}$  в сек.

Учение о колебаниях и волнах не ограничено в настоящее время областью механических и электромагнитных колебаний. Представления современной физики

<sup>1</sup>)  $0,001$  мм =  $1 \mu$  называется микроном.

о природе материальных частиц связывают их движение с неясными еще по своей природе волновыми явлениями, для описания которых пользуются особым фазовым пространством. Эти фазовые волны, или волны материи, определяют основные свойства элементарных частиц материи: электронов и атомов.

Таким образом рассматриваемые в настоящем томе волновые законы охватывают следующие типы физических явлений: механические колебания и волны, звук, молекулярные колебания, переменные токи, радиоволны, свет, рентгеновы лучи, лучи радия и лучи, приходящие из мирового пространства, и наконец они же служат основой современного учения о природе материи.

Изложение всех вопросов, которые затронуты в настоящем томе, ведется методами классической физики. Хотя в настоящее время вполне выяснена недостаточность классической теории во всех вопросах атомной или молекулярной физики, тем не менее именно классическая волновая физика и модели, которые она строит, дают в руки современного физика те основные представления и методы расчета, которые являются основой новой волновой теории материи в ее применениях ко всем вопросам физики.

## § 2. Гармонические колебания.

Колебаниями мы называем периодические изменения какой-нибудь физической величины, напр., плотности, давления, перемещений точек и их скоростей, электрических зарядов на проводниках, электрических токов, электрической и магнитной силы в пространстве, окружающем материальные тела, и т. п. Одним из наиболее простых и наглядных примеров колебаний является периодическое колебательное движение материальной точки около какого-нибудь среднего положения. Движение это определяется изменением положения точки с течением времени и ее скоростью. Если движение периодическое, то оно повторяется через определенный промежуток времени  $T$  — период колебаний. Примером такого периодического движения может служить движение точки на окружности колеса, вращающегося вокруг неподвижной оси, качание маятника и т. п. Периодическое движение может быть весьма различно и представлять движение, протекающее за время периода самым сложным образом. Как мы увидим дальше, всякое такое сложное периодическое движение можно однако представить как наложение или одновременное существование многих простых периодических движений, которые мы называем простыми гармоническими. Поэтому их и нужно изучать сначала.

Ясное представление о законах простого гармонического движения мы получаем с помощью следующего построения (рис. 1.) Если материальная точка движется по кругу с постоянной скоростью, то при этом ее проекция  $M$

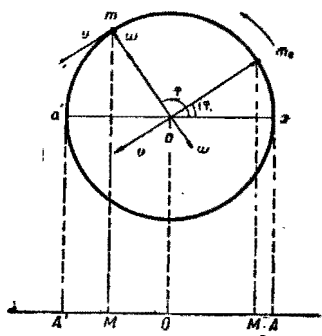


Рис. 1.

на какую-нибудь прямую  $AA'$  совершает простое гармоническое колебание около точки  $O$  — проекции центра круга на ту же прямую. Если смотреть издали на равномерно вращающийся предмет, так чтобы глаз находился в плоскости вращения, то мы увидим именно проекцию движущегося предмета, который покажется нам колеблющимся по прямой по законам простого гармонического движения. Диаметр  $aa'$ , параллельный прямой  $AA'$ , и радиус  $om$ , проведенный в точку  $m$ , где в настоящий момент находится материальная точка, составляют при этом угол  $\varphi$ , который равномерно возрастает со временем  $t$  вследствие равномерного движения точки  $m$  и может быть выражен так:

$$\varphi = \omega t. \quad (1)$$

Величина  $\omega$  есть угловая скорость радиуса  $om$ ; она показывает, на какой угол он вращается за время, равное одной секунде; мы будем называть ее также круговой частотой, так как она имеет ту же размерность, что и частота колебаний  $N$  или число колебаний в единицу времени:

$$N = \frac{1}{T}. \quad (2)$$

За время одного периода  $T$  точка  $m$  возвращается в исходное положение, и следовательно угол  $\varphi$  возрастает на  $2\pi$ :

$$\varphi + 2\pi = \omega (t + T). \quad (3)$$

Из (1) и (3) мы находим, что

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (4)$$

Таким образом круговая частота  $\omega$  отличается от обыкновенной частоты, или числа колебаний  $N$ , множителем  $2\pi$ , а именно:  $\omega = 2\pi N$ . Заметим еще, что угол  $\varphi$  называется фазой колебания в момент  $t$ . Если за начальный момент выберем тот момент, когда точка находится в положении  $m_0$ , то  $\varphi_0$  называется начальной фазой колебания. Очевидно, что начальная фаза по существу произвольная величина, так как зависит от того, какой момент будем считать начальным.

В дальнейшем мы будем через  $t$  обозначать время, протекшее от начального момента, когда  $\varphi = \varphi_0$ , так что  $\varphi = \varphi_0 + \omega t$ .

Из рис. 1 мы находим для определения положения проекции  $M$ , совершающей простое гармоническое движение, соотношение

$$OM = om \cdot \cos \varphi, \text{ или,}$$

так как отрезок  $OA$  равен радиусу круга,

$$OM = OA \cos (\varphi_0 + \omega t). \quad (5)$$

Эта формула выражает все свойства простого гармонического колебания. Отклонение точки  $M$  от среднего положения  $O$  на прямой  $A'A$  изменяется с течением

нием времени по закону, представляемому простейшими тригонометрическими функциями, напр. косинусом, как в данном примере. Максимальное отклонение  $OA$ , или амплитуда колебания, и круговая частота  $\omega$  вполне определяют простое гармоническое движение. Начальная же фаза  $\varphi_0$  может быть выбрана произвольно и, соответственно выбору, ее формула (5) принимает различный вид: напр., при  $\varphi_0 = 0$ ,  $OM = OA \cos \omega t$ , при  $\varphi_0 = 90^\circ$ ,  $OM = OA \sin \omega t$ , и т. д. В нашем построении (рис. 1) этот произвол связан с произвольным выбором начального положения точки  $m_0$  или диаметра  $aa'$ , от которого отсчитывается фаза.

Скорость точки  $M$  есть проекция скорости  $v$  точки  $m$  на  $AA'$ . Так как  $v = om \cdot \omega$ , а ее направление составляет с прямой  $OA$  угол  $\frac{\pi}{2} + \varphi$ , то проекция скорости  $v$ , или скорость точки  $M$ , равна

$$v_M = -OM \omega \sin \omega t. \quad (6)$$

В дальнейшем условимся обозначать отрезок  $OM$ , расстояние точки  $M$  от точки  $O$  в некоторый момент  $t$ , через  $x$ , длину радиуса  $om$ , или амплитуду через  $a$ , тогда

$$x = a \cos \omega t.$$

Так как скорость движения точки может быть представлена как производная по времени от перемещения точки, то мы могли бы определить скорость  $v$  другим путем, дифференцируя величину  $x$  по  $t$ ; из формулы (5')

$$v_M = \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (6')$$

что конечно совпадает с предыдущей формулой (6).

### § 3. Основное свойство гармонического колебания.

Одно из самых важных и характерных свойств гармонического движения— это связь между ускорением и отклонением точки от положения равновесия. Ускорение гармонического движения можно найти как проекцию ускорения  $w$  при равномерном движении по кругу, т. е. центростремительного ускорения, равного  $w = \frac{v^2}{a}$ . Это выражение можно представить иначе, пользуясь тем, что  $v = a\omega$ , и поэтому ускорение  $w$  равно также  $w = a\omega^2$ , т. е. равно радиусу круга, умноженному на квадрат угловой скорости.

Согласно рис. 1 проекция ускорения на прямую  $AA'$  равна —  $w \cos \varphi$ . Знак минус поставлен потому, что ускорение имеет направление, противоположное радиусу  $a$ , и может быть представлено отрезком (вектором)  $om$ . Таким образом проекция ускорения  $w$  на ось  $x$  равна

$$w = -a\omega^2 \cos \varphi = -\omega^2 x,$$

т. е. ускорение в гармоническом движении пропорционально отклонению  $x$  точки от положения равновесия  $O$  и

направлено всегда к точке  $O$ . Это же свойство можно получить, вычисляя производную скорости по времени  $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ , т. е. вторую производную от  $x$ .

Из формулы (6') находим

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x. \quad (7)$$

Это соотношение имеет не только математическое значение, как наиболее простая, аналитическая формулировка свойств гармонического движения, но оно также весьма важно для понимания физических условий, при которых такое движение возникает. Как известно, ускорение пропорционально силе, его вызывающей; поэтому в гармоническом движении не только ускорение, но и сила должна быть пропорциональна отклонению точки  $M$  от среднего положения  $O$ , которое мы обозначили буквой  $x$ , и направлена (рис. 2) всегда к точке  $O$ , где бы точка  $M$  ни находилась, она во все время движения притягивается к точке  $O$  с силой  $f$ . Сила  $f = -kx$  равна нулю, когда  $M$  находится в точке  $O$ .

$$f = -kx.$$

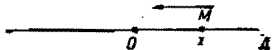


Рис. 2.

Находясь в этом положении, точка  $M$  не испытывает действия силы; если она в этом положении не имела скорости, то и не начнет двигаться. Таким образом это положение является положением равновесия. Отклонения от положения равновесия вызывают появление силы, направленной к  $O$  и пропорциональной величине отклонения.

Такая сила называется квазиупругой, так как она сходна с силами, возникающими при упругой деформации материальных тел. Так, напр., при растяжении проволоки, сгибании стержня или пластинки, закручивании проволоки и т. п. изменениях формы или объема тел возникают упругие силы, величина которых пропорциональна величине деформации, и которые стремятся вернуть тело в нормальное состояние, т. е. в состояние равновесия. Но такого же рода силы мы имеем и в совершенно иных случаях, напр., в случае маятника при небольших амплитудах качаний или же при изменении в форме поверхности жидкости, когда на ней возникают волны, или когда тела совершают устойчивые движения, всякое отклонение от которых сейчас же вызывает появление сил, стремящихся вернуть тело в прежнее состояние движения (движение планет вокруг Солнца).

При упругой деформации связь между силой  $f$ , вызывающей деформацию, и тем перемещением  $x$ , которое эта сила произвела, определяется так называемым модулем упругости  $k$ :

$$f = -kx.$$

Мы можем легко вычислить, какова будет частота колебаний, вызванных этой упругой силой. Для этого определим ускорение, вызванное упругой силой в некоторой точке на расстоянии  $x$  от положения равновесия, воспользовавшись известной связью между силой и ускорением:

$$f = m \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Уравнение (7) даст следовательно:

$$f = -m\omega^2 x.$$

Сравнивая оба выражения для силы  $f$ , мы находим

$$k = m\omega^2,$$

или

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (8)$$

Частота колебаний равна корню квадратному из отношения модуля упругости  $k$  к массе  $m$  точки. Это свойство есть простое следствие основного свойства (7) гармонического колебания.

#### § 4. Графическое представление гармонического движения.

Положим, что какая-нибудь точка, напр., груз маятника или конец ножки камертона, совершает колебательное движение. Если снабдить ее пишущим приспособлением (напр. острием, которое чертит закопченную поверхность стеклянной пластинки, или пером, которое пишет по бумаге) и двигать пластинку или бумагу равномерно и прямолинейно в направлении, перпендикулярном к направлению колебаний, то острие запишет на ней кривую, называемую синусоидой (см. рис. 3), причем ось абсцисс совпадает с направлением движения, т. е.  $Ot$ , а отклонения  $x$  перпендикулярны к ней.

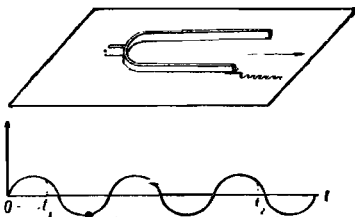


Рис. 3.

Указанное приспособление служит не только для геометрического представления гармонического движения, но благодаря строгой правильности этого движения может быть применено как хронограф, т. е. для точного измерения времени, в особенности очень коротких промежутков, измеряемых малыми долями секунды. Если на той же пластинке или бумажной ленте отмечать начало  $t_1$  и конец  $t_2$  события, продолжительность которого, равную  $t_2 - t_1$  мы желаем измерить, то сравнение этого промежутка времени с периодом колебаний сводится к простым геометрическим промерам.

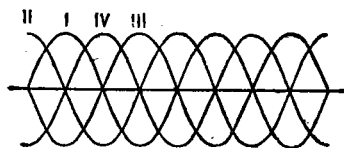


Рис. 4.

Запись колебаний часто служит для точного измерения или сравнения периодов колебаний, напр. камертона и секундного маятника. Запись двух колебаний одинакового периода дает возможность также сравнивать их амплитуды и начальные фазы. На рис. 4 представлены четыре синусоиды I, II, III и IV, представляющие колебания с начальными фазами  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  и  $270^\circ$ .

Другой способ графического представления гармонического движения сводится к изображению амплитуды и начальной фазы при помощи вектора.

Отрезок  $OA$ , длина которого  $a$ , и который составляет с осью абсцисс  $OX$  угол  $\alpha$ , может символически представлять гармоническое колебание с амплитудой  $a$  и начальной фазой  $\alpha$ . Если его вращать с угловой скоростью  $\omega$ , то проекция его конца совершает, как мы уже видели, движение  $x = a \cos(\omega t + \alpha)$ .

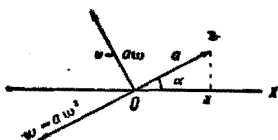


Рис. 5.

Скорость гармонического движения точки  $v$  может быть также представлена вектором, но увеличенным в  $\omega$  раз и повернутым на  $90^\circ$  (см. рис. 5).

Точно так же ускорение  $w$  представляется вектором, величина которого равна  $a\omega^2$ , а направление составляет с  $OX$  угол  $180^\circ + \alpha$ .

Этот способ изображения гармонического движения особенно важен при сложении нескольких гармонических колебаний.

### § 5. Сложение гармонических колебаний.

Нам неоднократно придется рассматривать такие случаи, когда данная материальная точка одновременно участвует в двух колебательных движениях. Весьма простой результат получается, когда оба колебания являются движением точки вдоль одной и той же прямой и происходят с одним периодом  $T$ , но разными амплитудами и фазами. Так как каждое из слагаемых колебаний представляет собой периодически повторяющееся изменение перемещения точки и ее скорости, то и сумма перемещений или скоростей, очевидно, будет повторяться с тем же периодом, так как через каждый промежуток времени  $T$  все условия для каждого из колебаний снова те же, что и за  $T$  сек. до этого, а следовательно и результат их сложения снова тот же. Мы можем также убедиться, что если каждое из колебаний было простым гармоническим, то и их сумма также имеет такой же простой гармонический характер.

Рассмотрим колебание, выражаемое формулой:

$$x = a \cos(\omega t + \varphi)$$

и положим, что точка  $O$ , вокруг которой происходит это колебание, в свою очередь участвует в другом колебании того же периода, но имеющем другую амплитуду  $a_1$  и другую начальную фазу  $\varphi_1$ :

$$x_1 = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1).$$

Данная материальная точка таким образом одновременно участвует в двух колебаниях. Рассмотрим, каково будет тогда движение материальной точки в результате суммы обоих колебаний.

Эти колебания по известным формулам разложения косинуса можно представить как

$$x = a \cos \omega t \cos \varphi - a \sin \omega t \sin \varphi$$

и

$$x_1 = a_1 \cos \omega t \cos \varphi_1 - a_1 \sin \omega t \sin \varphi_1.$$

Складывая почленно эти формулы, мы получим выражение того же вида:

$$x + x_1 = A \cos \omega t - B \sin \omega t,$$

где

$$A = a \cos \varphi + a_1 \cos \varphi_1, \quad B = a \sin \varphi + a_1 \sin \varphi_1.$$

Не трудно, однако, представить коэффициенты  $A$  и  $B$  в таком виде:

$$A = C \cos \Phi \quad \text{и} \quad B = C \sin \Phi.$$

В самом деле, если

$$C \cos \Phi = a \cos \varphi + a_1 \cos \varphi_1$$

и

$$C \sin \Phi = a \sin \varphi + a_1 \sin \varphi_1,$$

то, возведя эти равенства в квадрат и сложив, получаем:

$$C^2 = a^2 + a_1^2 + 2aa_1(\cos \varphi \cos \varphi_1 + \sin \varphi \sin \varphi_1),$$

или

$$C^2 = a^2 + a_1^2 + 2aa_1 \cos(\varphi - \varphi_1).$$

С другой стороны для определения  $\Phi$  разделим  $C \sin \Phi$  на  $C \cos \Phi$ , что даст

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{a \sin \varphi + a_1 \sin \varphi_1}{a \cos \varphi + a_1 \cos \varphi_1}.$$

Итак, всегда можно представить сумму колебаний  $x + x_1$  следующим образом

$$x + x_1 = C \cos \Phi \cos \omega t - C \sin \Phi \sin \omega t = C \cos(\omega t + \Phi).$$

Амплитуда  $C$  сложного колебания и фаза  $\Phi$  принимают различные значения в зависимости как от амплитуд слагаемых колебаний, так и от их начальных фаз. Амплитуда  $C$  может иметь всевозможные значения, заключенные, однако, между двумя пределами  $a + a_1$  и  $a - a_1$  если  $a > a_1$ . Значение амплитуды, зависит от разности фаз  $\varphi - \varphi_1$  и следовательно от значения  $\cos(\varphi - \varphi_1)$ . Крайние значения  $C = a + a_1$  и  $C = a - a_1$  получаются при разностях фаз, соответственно равных нулю и  $180^\circ$ ; в первом случае складываются колебания с одинаковыми фазами, а во втором с противоположными. Для промежуточных значений разности фаз, когда

$$0 < \varphi - \varphi_1 < 180^\circ,$$

амплитуда  $C$  принимает промежуточные значения между суммой и разностью амплитуд  $a$  и  $a_1$  слагаемых колебаний.

Формула, дающая величину квадрата амплитуды  $C$ , имеет тот же вид, что и формула для квадрата стороны треугольника, у которого две других стороны равны  $a$  и  $a_1$ , а угол между ними  $\varphi - \varphi_1$ . Поэтому можно очень просто получить тот же результат простым геометрическим сложением векторов, изображающих амплитуды и фазы колебаний.



Для этого мы строим (рис. 6) два вектора  $OA$  и  $AB$ , имеющих длины  $a$  и  $a_1$  и составляющих с осью  $OX$  углы  $\varphi$  и  $\varphi_1$ . Эти вектора должны изображать согласно правилу, указанному в конце § 4, колебания с амплитудами  $a = OA$  и  $a_1 = AB$  и начальными фазами  $\varphi$  и  $\varphi_1$ . Они или их продолжения образуют угол  $\varphi_1 - \varphi$ , и поэтому их геометрическая сумма  $OB$ , имеющая длину  $C$ , изображает амплитуду сложного колебания.

Подобно тому как произвольное число векторов может быть геометрически сложено, давая геометрическую сумму их, точно так же и гармонические колебания могут в произвольном числе складываться, образуя одно колебание, если только все слагаемые колебания имеют один период. Подобным же образом можно осуществить обратную операцию разложения колебаний на составляющие, пользуясь правилами разложения векторов.

Разберем теперь более сложный случай, когда материальная точка совершает два колебания по неодинаковым направлениям, составляющим между собой какой-нибудь угол, например, прямой. Пусть одно колебание происходит вдоль оси

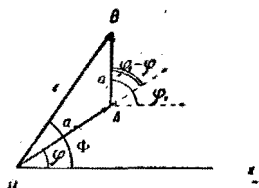


Рис. 6.

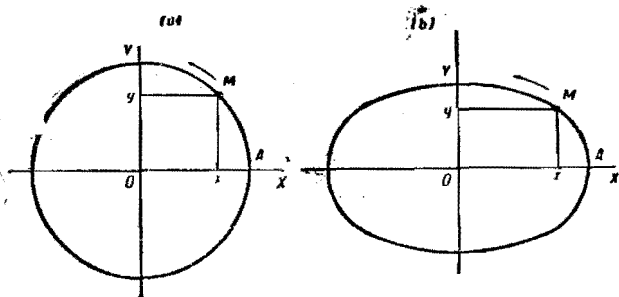


Рис. 7.

$OX$ , а другое вдоль оси  $OY$  (рис. 7). При сложении их мы получим, вообще говоря, не прямолинейное колебание, а, например, движение точки с постоянной скоростью по кругу (рис. 7, а) или движение по эллипсу (рис. 7, б). Разность фаз слагаемых колебаний также определяет форму траектории колеблющейся точки. Положим, например, что фазы эти отличаются на  $90^\circ$ , а именно колебание вдоль оси  $OX$  происходит согласно формуле  $x = a \cos \omega t$ , а колебание вдоль оси  $OY$  согласно формуле  $y = b \sin \omega t$ . Когда колебание по оси  $OX$  проходит через положение равновесия (точку  $O$ ), колебание по оси  $OY$  достигает наибольшего удаления от  $O$  и наоборот.

Для того чтобы найти вид кривой, по которой в этом случае происходит движение точки, мы отыскиваем уравнение, которое связывает координаты  $x$  и  $y$ , определяющие положение точки на плоскости.

Для этого возводим в квадрат  $\frac{x}{a}$  и  $\frac{y}{b}$  и складываем:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1.$$

Это есть уравнение эллипса, и поэтому колебание, получаемое при сложении

двух прямолинейных колебаний, в данном случае превращается в эллиптическое. Если амплитуды колебаний равны, т. е.  $a = b$ , то эллипс превращается в круг, а колебание делается круговым. Наиболее общим случаем при сложении колебаний по различным направлениям будет эллиптическое, причем направление и величина главных осей эллипса зависят как от амплитуд колебаний и их направлений, так и разности фаз колебаний.

Обратная операция разложения эллиптического или кругового колебания на составляющие прямолинейные может быть также выполнена без особого труда. Примером может служить равномерное движение по кругу (рис. 7, а). Проекция точки  $M$  на оси  $X$  и  $Y$  совершают прямолинейные гармонические колебания с разностью фаз в  $90^\circ$ .

Если начальные фазы взаимно перпендикулярных колебаний одинаковы, т. е. они в один и тот же момент проходят через положение равновесия и в один и тот же момент достигают наибольшего удаления, то сложное колебание имеет амплитуду  $C$ , равную геометрической сумме амплитуд слагаемых колебаний, и будет прямолинейно (см. рис. 8). Если фаза одного из них делается противоположной, то колебание будет иметь ту же амплитуду,  $C' = C$ , но направление его хотя и составляет с осями те же углы, но лежит в соседнем квадранте.

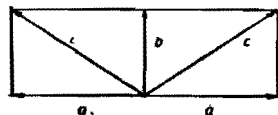


Рис. 8.

Разложение эллиптического гармонического колебания на прямолинейные представляет особый интерес и значение при исследовании поляризованного света (см. § 48). Заметим, что не всякое периодическое движение по эллипсу

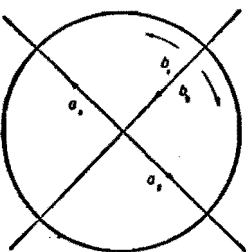


Рис. 9.

может быть разложено на два прямолинейных гармонических колебания. Так, напр., движение планет вокруг Солнца, которое находится в одном из фокусов их эллиптических орбит и притягивает их обратно пропорционально квадрату расстояния, представляет движение, хотя и происходящее по эллиптической орбите, но по своим скоростям и ускорениям в различных точках пути совершенно несходное с гармоническим движением по эллипсу. Для последнего необходимо, чтобы сила была направлена к центру эллипса и величина ее была пропорциональна радиусу, проведенному из центра в данную точку.

Результат сложения двух эллиптических или круговых движений, из которых каждое есть гармоническое с той же частотой, опять приводит к одному из рассмотренных типов колебаний. Особый интерес представляет сложение двух колебаний по кругу, имеющих ту же амплитуду и противоположное направление. Разложив каждое из них на два взаимно перпендикулярных прямолинейных колебания, мы легко убедимся, что сложение их приводит к прямолинейному колебанию, так как противоположные составляющие  $a_1$  и  $a_2$  взаимно уничтожаются (см. рис. 9), а одинаково направленные  $b_1$  и  $b_2$  складываются в одно прямолинейное.

### § 6. Биения. Фигуры Лисажу.

При сложении колебаний, имеющих одну и ту же частоту, мы получаем такое же колебание с определенной амплитудой и начальной фазой. Этот результат является следствием того, что разность фаз слагаемых колебаний остается постоянной. Однако мы видели, что в зависимости от этой разности фаз изменяются и амплитуда и фаза сложного колебания. Если однако периоды колебаний не одинаковы, то разность их фаз все время меняется: одно из колебаний, а именно то, у которого больше частота или меньше период, опережает по фазе другое; следовательно амплитуда и фаза сложного колебания непрерывно меняются. В результате сложения мы получаем, вообще говоря,

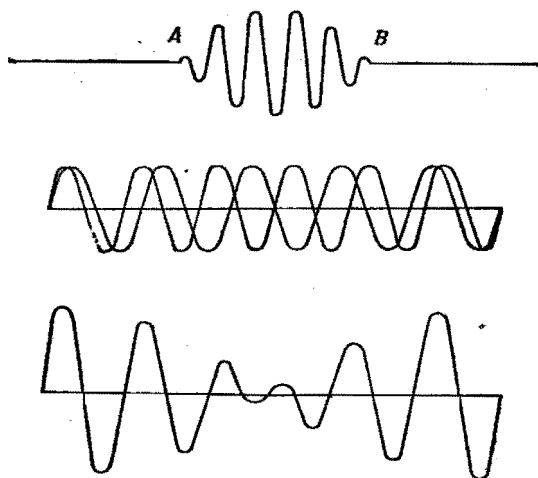


Рис. 10.

непериодическое движение. Более простой результат получается при сложении колебаний, которые очень мало отличаются по частоте, так что разность их фаз нарастает медленно, и в течение некоторого промежутка времени, который может охватывать несколько периодов колебаний, разность фаз можно считать почти неизменной. Мы можем составить себе представление о результате сложения, если заставим векторы на черт. 6 вращаться с различной угловой скоростью так, что при каждом обороте угол между ними возрастает на некоторую (положим, малую) величину. Сумма векторов, т. е. вектор  $C$  будет при этом изменяться от некоторого максимального значения, равного сумме  $a + a_1$ , до минимума, равного разности  $a - a_1$ . Результат сложения даст таким образом почти периодическое колебание с периодом, средним между периодами слагаемых колебаний, но с переменной амплитудой. Такой тип колебательного движения (рис. 10) называется биениями колебаний. По частоте биений, т. е. по тому, сколько раз в секунду повторяются группы колебаний  $AB$  между соседними минимумами амплитуды, можно судить о разности частот складываемых колебаний, так как каждый минимум соответствует тому моменту, когда фазы колебаний делаются противоположными, а это повторяется всякий раз, как одно из колебаний обгоняет другое на одно полное колебание. Таким образом, если частота одного колебания  $N$ , а другого  $N + n$  в секунду, то они будут давать  $n$  биений в секунду, так как ровно  $n$  раз в секунду фазы их будут совпадать и столько же раз делаться противоположными. Мы получаем периодическое движение с частотой  $n$  в сек., но колебания в пределах каждого периода далеки от простого гармонического движения.

Если колебания имеют не одинаковое направление, напр., если они взаимно перпендикулярны, то результат сложения зависит от разности фаз, и если периоды колебаний не равны, то форма траектории колеблющейся точки будет изменяться. Как мы уже видели, при сложении колебаний взаимно перпендикулярных может получиться движение по кругу, эллипсу или прямой в зависимости от разности фаз. Если разность фаз медленно изменяется, то точка будет описывать траектории, меняющие свою форму, как показано, напр., на рис. 11. Такое изменение формы траектории аналогично биениям колебаний и дает также указание на совпадение или же расхождение частот колебаний. Различные кривые, получаемые при сложении взаимно перпендикулярных колебаний, принято называть фигурами Лисажу.

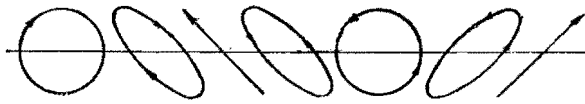


Рис. 11.

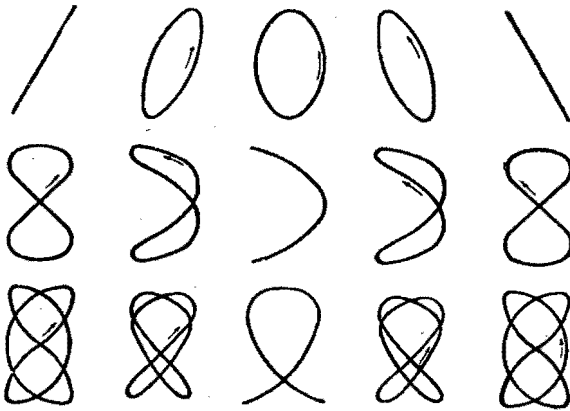


Рис. 12.

Кроме только-что указанных простейших фигур, мы можем получить более сложные, если число колебаний складываемых движений находится в более сложном, но простом рациональном отношении. В зависимости от разности фаз кривые получают различный вид, как видно на рис. 12, где дано несколько примеров фигур Лисажу (при отношении частот 1:2, 1:3 и 2:3 и разностях фаз  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $135^\circ$  и  $180^\circ$ ).

Фигуры Лисажу дают возможность в простейших случаях установить отношение между числами колебаний двух гармонических движений, напр., производимых двумя камертонами или струной и камертоном. В первом случае (рис. 13) заставляют луч света отражаться от зеркалец, закрепленных на ножках камертонов, колеблющихся

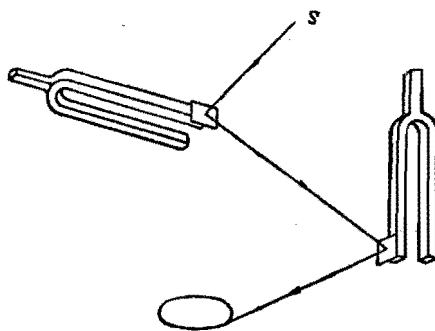


Рис. 13.

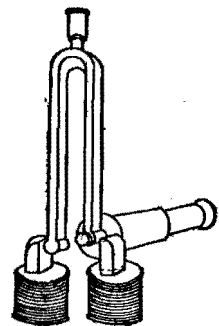


Рис. 14.

в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Зайчик, проектирующийся на экран, выписывает фигуры Лисажу, определяемые частотами колебаний камертонов. Другой способ заключается в том, что в микроскоп наблюдается какая-нибудь ярко освещенная точка колеблющейся струны, напр., крупинка мела, приставшая к ее поверхности. Объектив микроскопа укреплен на ножке камертона (рис. 14) и может совершать колебания, перпендикулярные колебаниям струны. В поле зрения микроскопа изображение освещенной точки будет совершать два колебания во взаимно перпендикулярных направлениях и давать, следовательно, фигуры Лисажу.

Приведенные выше примеры (рис. 12) относятся к сложению гармонических колебаний; фигуры Лисажу получаются иными, если колебания не простые гармонические.

### § 7. Ряды Фурье. Гармонический анализ.

Мы рассматривали до сих пор только гармонические колебания определенной частоты. Однако очень часто можно наблюдать периодические дви-

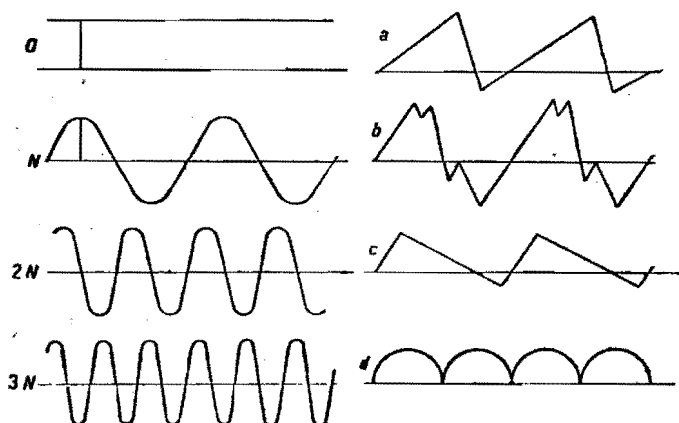


Рис. 15.

жения, имеющие тот же период, что и гармоническое колебание, но отличающиеся от него по форме кривой, которая служит для графического представления колебаний (рис. 15, кривые *a*, *b*, *c*, *d*). Основными типами периодического движения с данным периодом  $T$  мы можем считать, кроме гармонического колебания с частотой  $\tilde{N} = \frac{1}{T}$ , также постоянное отклонение (колебание нулевой частоты или бесконечного периода), затем гармонические колебания с частотой кратной  $N$ , т. е.  $2N$ ,  $3N$ ,  $4N$ ..., так как в каждом из этих случаев через промежуток времени  $T$  повторяется как отклонение точки от положения равновесия, так и скорость ее движения. Очевидно, что, комбинируя эти основные типы колебаний, взятые с различными амплитудами и фазами, мы получим всегда периодическое, с периодом  $T$ , движение, которое может иной раз иметь

сложный характер внутри каждого периода и давать очень сложную форму кривой, графически представляющей колебание. На рис. 16 представлена более жирно вычерченная кривая, получающаяся при наложении колебаний нулевой частоты, основной, двойной и тройной.

Кривая, полученная от сложения этих колебаний, сохранила основной период, но оказывается приподнятой над осью  $OO'$ , так как в нее вошла постоянная слагающая, не меняющая знака с течением времени. Остальные слагающие знакопеременны во времени и образуют кривую, симметрично расположенную относительно оси  $OO'$ , приподнятой над  $OO$  на величину постоянного отклонения. При этом составляющие четной кратности, т. е. в данном случае с частотой  $2N$ , делают кривую однобокой, подымая одну часть кривой и опуская другую, и смещают положение максимумов на кривой, а составляющие нечетной кратности, т. е. с частотой  $3N$ , не изменяют положения основных максимумов, но вносят новые. Чем больше таких высших гармонических составляющих, тем, вообще говоря, больше зубцов и вторичных максимумов и

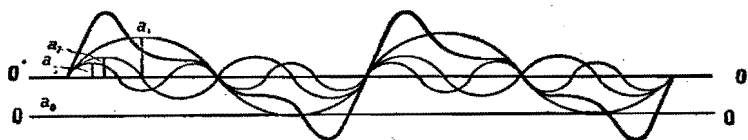


Рис. 16.

тем более отличается кривая от основной синусоиды. Подбирая амплитуды и фазы этих гармоник, можно получить самые разнообразные типы периодических движений. Фурье удалось доказать математически, что произвольного вида периодическое движение может быть представлено как результат сложения гармонических колебаний, кратных основного, считая в том числе и колебание нулевой частоты, т. е. постоянное отклонение. Мы можем этот результат выразить таким рядом Фурье:

$$f(t) = a_0 + a_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + a_2 \sin(2\omega t + \alpha_2) + \dots \\ + a_n \sin(n\omega t + \alpha_n) + \dots$$

Если нам дана какая-либо периодическая кривая в роде той, что изображена на рис. 16, то из нее мы всегда можем выделить постоянную, составляющую отклонение  $OO'$ , и провести ось так, чтобы средняя величина отклонения точки от положения  $O'$  была равна нулю (считая отклонения в одну сторону положительными, а в другую — отрицательными). Затем можно построить синусоиду с такой амплитудой, чтобы средняя величина квадратов отклонений ее от данной кривой была возможно мала. Такая синусоида будет служить приближенным выражением данного периодического движения. Отклонения данной кривой от синусоиды будут представлены кривой, которая может быть приближенно изображена синусоидой двойной частоты, так, чтобы средняя величина квадрата отклонения или „погрешность“ была

возможно мала. Таким образом, вводя колебания все более высокой частоты, мы изображаем отклонения данной кривой от синусоиды рядом гармонических колебаний, имеющих частоту, кратную основной.

Вообще говоря, с возрастанием частоты амплитуда высших гармонических составляющих убывает, но, конечно, мы можем всегда построить, а на опыте и встречаются такие кривые, в которых гармоники сколь угодно высокого порядка представлены сколь угодно большими амплитудами. В этом случае кривая имеет зубчатый или извилистый характер. Вообще же всякие отклонения от „гладкости“ кривой — зубцы, изломы, углы — указывают на наличие высших гармоник.

Нахождение амплитуд и фаз высших гармоник периодической кривой называется гармоническим анализом. Имеется много механических приборов, гармонических анализаторов, которые дают возможность находить величины амплитуд и фаз высших гармоник.

### § 8. Энергия колебаний.

Гармоническое колебание представляет собой движение точки около положения равновесия. Одновременно с изменением положения точки и ее скорости, изменяется ее энергия, причем мы должны различать два вида энергии: энергию положения, или потенциальную, и энергию движения, или кинетическую. Когда точка находится в положении равновесия, силы, действующие на нее, взаимно уравниваются, она может оставаться в покое. Но как только внешняя сила сообщит ей толчок (вследствие которого она получает скорость и, следовательно, кинетическую энергию), она выходит из положения равновесия. По мере удаления от положения равновесия квазиупругая сила возрастает и производит работу, которая поглощает сообщенную точке кинетическую энергию. С уменьшением кинетической энергии возрастает таким образом потенциальная, и если не происходит рассеяния энергии, то сумма кинетической и потенциальной энергии остается постоянной, являясь полной энергией колебания. В отдельные моменты энергия целиком принимает форму потенциальной энергии, а именно, когда точка достигает максимального удаления от положения равновесия и ее скорость становится равной нулю; в другие моменты потенциальная энергия переходит в кинетическую, когда точка проходит через положение равновесия, которому соответствует минимум потенциальной энергии. Таким образом с энергетической точки зрения колебательное движение представляет собой периодически повторяющийся переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно.

Не трудно найти величину потенциальной энергии точки при любом ее положении, если считать, что в положении равновесия ее потенциальная энергия равна нулю.<sup>1</sup> Сила, которая должна быть приложена к точке, чтобы отклонить ее от положения равновесия на расстояние  $x$ , равна

$$f = kx,$$

<sup>1</sup> Потенциальная энергия может иметь как положительные, так и отрицательные значения. Любую постоянную мы можем приписать нулевой потенциальной энергии.

где  $k$  — коэффициент квазиупругой силы. При перемещении точки на расстояние  $\Delta x$  работа силы равна  $f\Delta x = kx\Delta x$ . При возрастании перемещения от 0 до  $x$  и пропорциональном возрастании силы от 0 до  $kx$ , работа, произведенная силой, равна

$$fx = \frac{k}{2} x^2.$$

Это есть в то же время выражение для потенциальной энергии

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2. \quad (9)$$

Наибольшее значение  $x$  равно амплитуде колебаний  $a$ , и следовательно наибольшее значение потенциальной энергии равно  $\frac{1}{2} ka^2$ . Это есть вместе с тем и выражение для полной энергии колебаний, так как при максимальном отклонении вся энергия принимает форму потенциальной. С другой стороны, наибольшая величина скорости  $\frac{dx}{dt}$  согласно формуле (6') равна  $a\omega$ , и следовательно максимальная кинетическая энергия, или живая сила, равна

$$E_k = \frac{1}{2} ma^2 \omega^2. \quad (10)$$

Как максимальная потенциальная, так и максимальная кинетическая энергия должны быть равны полной энергии колебаний, так как они представляют собою полную энергию колебаний в разные моменты времени и, следовательно,

$$E = \frac{1}{2} ka^2 = \frac{1}{2} ma^2 \omega^2. \quad (11)$$

Последняя формула (11) позволяет вычислить  $\omega$  и приводит нас опять к выражению (8) для частоты колебаний. В общем случае энергия колебаний складывается из потенциальной и кинетической

$$E = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} ka^2 \cos^2 (\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2} ma^2 \omega^2 \sin^2 (\omega t + \varphi_0),$$

как это следует из (5) и (6).

Вследствие равенства (11) мы находим, что в любой момент полная энергия

$$E = \frac{1}{2} ka^2 \left[ \cos^2 (\omega t + \varphi_0) + \sin^2 (\omega t + \varphi_0) \right] = \frac{1}{2} ka^2,$$

т. е. сохраняет постоянное значение.

Таким образом энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды.



При сложении гармонических колебаний одинакового периода знание энергии каждого колебания в отдельности еще не определяет энергии сложного колебания. Как мы видели в § 5, квадрат амплитуды сложного колебания  $C^2$  выражается формулой

$$C^2 = a_1^2 + a^2 + 2a_1a \cos(\varphi_1 - \varphi).$$

Квадрат амплитуды  $C^2$ , который определяет энергию колебания, не равен, вообще говоря, сумме квадратов  $a_1^2$  и  $a^2$ , но зависит еще от разности фаз; напр., при одинаковых фазах и равных амплитудах энергия сложного колебания, очевидно, в четыре раза больше ( $E \sim (2a)^2 = 4a^2$ ) энергии каждого из слагаемых; при противоположных фазах она равна нулю, и только при разности фаз в  $90^\circ$  энергия сложного колебания равна сумме энергий слагаемых. Работа, необходимая, чтобы заставить материальную точку одновременно совершать два колебания по одной прямой, далеко не всегда равна сумме работ, затрачиваемых на создание каждого из этих колебаний в отдельности. Так, напр., два колебания с равными амплитудами и противоположными фазами в каждый момент взаимно уничтожаются. В этом случае материальная точка вовсе не движется, оставаясь в положении равновесия. Ясно, что и работы на это не требуются.

Сказанное относится к сложению колебаний, одинаково направленных. При взаимно перпендикулярном направлении колебаний их энергии складываются независимо от фаз. Вследствие этого взаимно перпендикулярные колебания естественно считать независимыми друг от друга.

### § 9. Затухание колебаний.

Если бы в процессе колебаний не происходило рассеяния энергии, то амплитуда колебания сохранялась бы неизменной неопределенное время. Однако всегда имеются налицо причины, которые приводят к постепенному превращению энергии колебаний в тепловую энергию. На первом месте стоит трение, которое обычно сопутствует в большей или меньшей степени всякому движению, затем передача колебательного движения окружающим телам, с которыми данный источник колебаний так или иначе связан (подставке, воздуху и т. п.), наконец различные тепловые эффекты, которые необходимо сопутствуют всем упругим деформациям (сжатию, растяжению и т. п.) и которые только отчасти обратимы, т. е. опять переходят в энергию колебаний. В случае электрических колебаний обычным источником затухания является сопротивление проводов, в которых энергия колебания переходит в джоулево тепло.

В большинстве случаев внешние или внутренние силы, способствующие затуханию, обладают следующим свойством: они направлены противоположно скорости колеблющейся точки и часто пропорциональны величине скорости. Так, напр., при движении какого-нибудь тела внутри жидкости тело испытывает сопротивление, пропорциональное скорости движения и направленное, конечно, в сторону, противоположную

скорости движения. Такого рода силы мы будем называть силами сопротивления или трения, независимо от их физической природы.

Положим, что нам дана сила трения

$$f = -r \frac{dx}{dt}, \quad (12)$$

и мы знаем величину коэффициента трения  $r$ . Если точка, испытывающая на себе действие этой силы, перемещается на расстояние  $dx$  за время  $dt$ , то работа, производимая силой, равна

$$dA = -r \frac{dx}{dt} dx = -r \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 dt. \quad (13)$$

Так как эта работа есть величина отрицательная, то она дает величину рассеяния энергии за время  $dt$ .

Чем больше амплитуда колебаний и, следовательно, скорости колеблющейся точки, тем быстрее происходит рассеяние энергии и убывание амплитуды. Самый закон убывания амплитуд имеет весьма важное значение и сохраняет свою форму в различных условиях. Мы можем найти его, сделав предположение, что сила сопротивления невелика и что за время одного колебания амплитуда изменяется очень мало. Пусть в начале амплитуда равна  $a$ , и следовательно энергия, согласно (11), равна  $\frac{1}{2} m \omega^2 a^2$ . Если после одного колебания амплитуда стала равной  $a_1 < a$ , то рассеяние энергии равно

$$\frac{1}{2} m \omega^2 (a^2 - a_1^2) = \frac{1}{2} m \omega^2 (a + a_1) (a - a_1).$$

Обозначая через  $\Delta a$  уменьшение амплитуды  $\Delta a = a - a_1$  и принимая, что в силу нашего предположения средняя арифметическая амплитуда мало отличается от  $a$

$$a \cong \frac{a + a_1}{2},$$

находим для величины рассеянной энергии

$$m \omega^2 a \Delta a. \quad (14)$$

С другой стороны потеря энергии может быть вычислена из (13), если проинтегрировать  $dA$  по промежутку времени, равному целому периоду  $T$ . Вследствие (6')

$$A = - \int_0^T r \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 dt = - \int_0^T r a^2 \omega^2 \sin^2 (\omega t + \varphi_0) dt = - r a^2 \omega^2 \frac{T}{2}.$$

Приравнявая  $A$  вышеполученному выражению (14), находим после простых преобразований

$$\frac{\Delta a}{a} = - \frac{r T}{m \omega^2} = - a T. \quad (15)$$

Мы заменили величину  $\frac{r}{2m}$  буквой  $\alpha$  и будем называть ее коэффициентом затухания колебаний. Мы нашли формулу (15) для промежутка времени, равного  $T$ . Если период  $T$  достаточно мал, а мы рассматриваем постепенное уменьшение амплитуды за длительный промежуток времени, то мы можем заменить  $T$  на  $dt$ , полагая, что за время одного периода амплитуда изменяется очень мало. Заменим  $\Delta a$  дифференциалом  $da$  ( $da = \Delta a$ ), тогда закон убывания амплитуд при помощи новых обозначений примет такой вид:

$$\frac{da}{a} = -\alpha dt.$$

Как правая, так и левая часть этого равенства суть дифференциалы известных функций, и, следовательно, после интегрирования,

$$\lg_n a - \lg_n a_0 = -\alpha t,$$

если в момент  $t=0$  амплитуда равна  $a_0$ .

Найденный нами закон изменения амплитуд с течением времени можно представить следующим образом:

$$\lg_n \frac{a}{a_0} = -\alpha t,$$

или же

$$a = a_0 e^{-\alpha t} \quad (16)$$

Заметим, что (16) есть точная формула; мы могли бы получить ее и не делая никаких приближенных допущений, но только более сложным математическим путем. Формула же (15) лишь приближенная, справедливая при сделанном предположении о медленном убывании амплитуды. Из (16) убывание амплитуды за одно колебание определится по следующему правилу: натуральный логарифм отношения амплитуд в начале и в конце одного колебания есть величина постоянная, равная  $\alpha T$ , или  $\lg_n \frac{a_1}{a_2} = \alpha T$ . Эта величина называется логарифмическим декрементом колебаний.

Общий вид кривой затухающих колебаний изображен на рис. 17. Вершины ее лежат на кривой, выражаемой уравнением (16). Убывание амплитуд все замедляется по мере уменьшения их, так что теоретически колебания существуют неопределенно долгое время; практически же мы можем наблюдать их только, пока амплитуда не опустилась ниже известного порога, определяемого чувствительностью измерительных приборов или органов чувств, воспринимающих колебания.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Логарифмический закон затухания справедлив только тогда, если сила сопротивления пропорциональна скорости. Если сопротивление подчиняется иному закону, то и закон убывания амплитуд изменяется.

Если затухание колебаний не очень велико, то присутствие его почти совсем не сказывается на величине периода. Но при значительном возрастании затухания не только амплитуды затухают очень быстро, но и расстояние между максимумами и минимумами возрастает заметным образом. Когда сопротивление делается критическим, колебания совершенно уничтожаются, и отклонение, достигнув максимума, возвращается к нулю аperiodически (рис. 18, *b*).

Случай колебательного движения отличается от случая аperiodического движения тем, что в первом точка, возвращаясь к положению равновесия, имеет некоторый запас кинетической энергии. Во втором случае сила трения

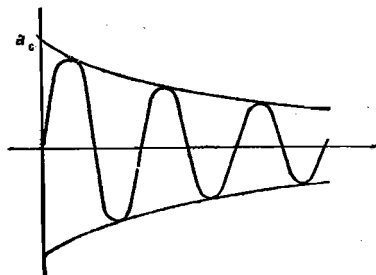


Рис. 17.

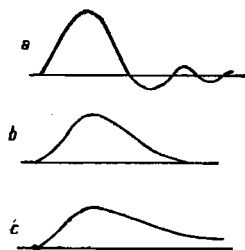


Рис. 18.

успекает затормозить движение к моменту, когда точка подходит к положению равновесия. При очень большом трении движение будет происходить очень медленно (рис. 18, *c*).

### § 10. Вынужденные колебания.

Как мы видели, материальная точка, находящаяся под действиями квазиупругой силы, будучи выведена из положения равновесия и предоставлена самой себе, приходит в колебания, имеющие определенную частоту; амплитуда колебаний определяется энергией, которая сообщена материальной точке.

Рассмотрим теперь, какое действие производит на такую точку внешняя сила. Положим, что колебания этой внешней силы происходят также периодически, так что мы можем говорить об амплитуде и начальной фазе силы. Такая сила действует довольно сложным образом: с одной стороны она должна раскатать покоящуюся точку, т. е. сообщить ей некоторую энергию, с другой — она должна поддерживать колебания, пополняя рассеиваемую энергию, и производить работу во время колебаний, причем работа эта может быть как положительной, так и отрицательной. Последнее необходимо имеет место, если период силы не равен периоду колебаний, которые совершает точка, предоставленная сама себе. В самом деле, если  $\omega$ , частота колебаний под действием внешней силы, не равна  $\sqrt{\frac{k}{m}}$ , то максимальная потенциальная энергия, в момент достижения крайнего отклонения  $a$ ,  $\frac{1}{2}ka^2$  (см. стр. 23) не равна максимальной кинетической  $\frac{1}{2}m\omega^2a^2$ , и, смотря по тому, будет ли  $\omega$  больше или

меньше частоты свободных колебаний, мы будем иметь преобладание или кинетической энергии, или потенциальной. Таким образом внешняя периодическая сила в течение некоторой части колебания совершает положительную работу и увеличивает энергию колебаний, а в остальное время совершает работу отрицательную и поглощает энергию.

После продолжительного действия внешней силы на колеблющуюся точку амплитуда колебаний устанавливается пропорционально амплитуде внешней

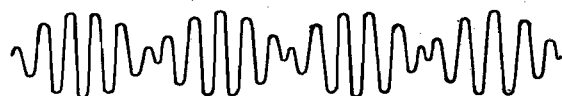


Рис. 19.

силы, а период колебаний совпадает с периодом внешней силы. Но такие установившиеся вынужденные колебания наступают не сразу.

В начале амплитуда постепенно нарастает от нуля до некоторого максимума, затем падает, потом опять нарастает и таким образом совершает несколько биений (рис. 19), после чего окончательно устанавливаются колебания с постоянной амплитудой. Эти биения являются результатом наложения двух колебаний: вынужденного (кривая *b* рис. 20), с постоянной амплитудой и частотой внешней силы, и свободного (кривая *a*) с убывающей амплитудой и частотой свободных колеба-

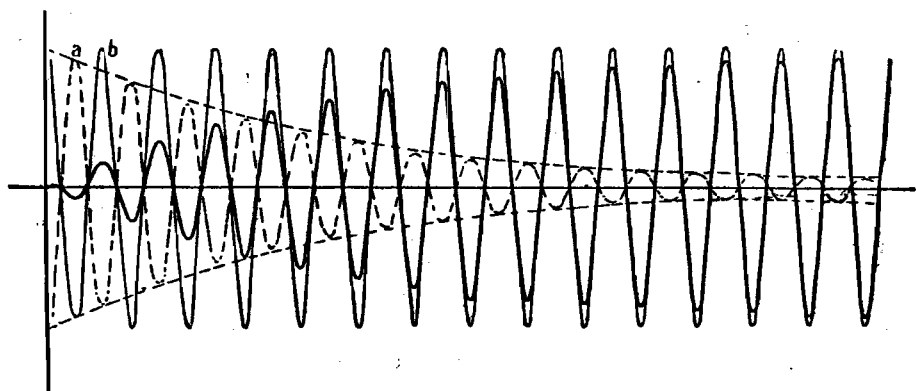


Рис. 20.

ний. Оба эти колебания имеют вначале равные амплитуды и противоположные фазы, поэтому результирующая амплитуда в этот момент равна нулю; затем вследствие разности частот обоих колебаний эта разность фаз изменяется, и более быстрые колебания догоняют и затем опережают более медленные. Когда фазы их совпадают, наблюдается максимальная амплитуда. Когда фазы противоположны, амплитуда — наименьшая. Такие биения происходят однако только вначале, пока свободные колебания еще не затухли. По мере же затухания максимумы и минимумы амплитуд сглаживаются, и наконец остаются только вынужденные, установившиеся колебания. Чем меньше разница частот внешней силы и свобод-

ных колебаний, тем реже происходят биения и при полном совпадении частот мы наблюдаем только постепенное нарастание колебаний, как показано на рис. 20. Когда прекращается действие внешней силы, опять возникают свободные колебания, причем их начальная энергия определяется тем, какова была колебательная энергия в момент устранения внешней силы; затем эти колебания постепенно затухают вследствие трения.

### § 11. Резонанс.

Амплитуда установившихся вынужденных колебаний определяется не только амплитудой силы; она зависит также от разности между частотами колебаний вынужденных и свободных.

Рассмотрим этот случай, пренебрегая сначала силой сопротивления, которая вызывает затухание свободных колебаний. Пусть  $f$  — внешняя сила, которая изменяется гармонически с некоторой частотой  $\omega$  по закону:  $f = B \sin \omega t$ ,  $x$  — перемещение точки, которое изменяется также гармонически с той же частотой; величина квазиупругой силы при удалении точки на расстояние  $x$  от положения равновесия равна  $kx$  и направлена в сторону, противоположную  $x$ . Тогда мы должны иметь

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f - kx \quad (17)$$

(произведение массы  $m$  на ускорение равно сумме всех сил, к ней приложенных). Так как движение должно быть гармоническим, то вследствие (7)

$$-m\omega^2 x = f - kx$$

или

$$x = \frac{f}{k - m\omega^2}. \quad (18)$$

Множитель пропорциональности между отклонением и силой зависит, следовательно, от частоты внешней силы. Если  $f = B \sin \omega t$ , то из (18) найдем

$$x = \frac{B}{k - m\omega^2} \sin \omega t. \quad (19)$$

Коэффициент квазиупругой силы  $k$  определяет собою частоту  $\omega_0$  тех свободных колебаний, которые точка производила бы без непрерывно действующей вынуждающей силы. А именно  $k = m\omega_0^2$ .

Таким образом амплитуда колебаний возрастает по мере того, как частота  $\omega$  внешней силы приближается к частоте свободных колебаний  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Когда они совпадают, знаменатель (19) обращается в нуль, и амплитуда делается бесконечно большой, если  $B$  амплитуда внешней силы не равна нулю, т. е. если вынуждающая сила продолжает действовать. Это случай резонанса: внешняя сила, раскачивая колеблющуюся точку, заставляет ее амплитуду расти безгранично. Такой результат также показывает, что колебания с любой ампли-

тудой могут продолжаться без всякой внешней силы, как свободные колебания, если  $\omega = \omega_0$ .

Работа, производимая внешней силой за элементарный промежуток времени, равна

$$fdx = \frac{B^2 \omega}{m\omega_0^2 - m\omega^2} \sin \omega t \cos \omega t dt. \quad (20)$$

Она положительна за первую и третью четверть периода, когда синус и косинус имеют одинаковые знаки, и отрицательна во второй и четвертой четверти, если знаменатель  $\omega_0^2 - \omega^2 > 0$ . Таким образом за первую четверть периода, когда происходит превращение кинетической энергии в потенциальную, энергия колебаний возрастает, так как при малых частотах ( $\omega^2 < \omega_0^2$ ) потенциальная энергия  $E_p = \frac{1}{2} ka^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 a^2$  больше кинетической  $E_k = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2$ . При больших частотах, наоборот, кинетическая энергия преобладает и поэтому в первую четверть работа внешней силы отрицательна.

При резонансе ( $\omega = \omega_0$ ), как мы видели, выражение (19) теряет смысл, так как не может быть установившихся колебаний, если точка непрерывно находится под действием силы. Но нарастание колебаний с течением времени может быть представлено такой формулой:

$$x = -\frac{Bt}{2\omega} \cos \omega t. \quad (21)$$

Мы можем в самом деле показать, что уравнение (21) приводит к основному уравнению (17). Определим из (21) ускорение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{Bt\omega}{2} \cos \omega t + B \sin \omega t = -\omega^2 x + B \sin \omega t.$$

Второй член здесь представляет значение внешней силы  $f$ , а  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , следовательно первый член равен  $-kx$ . Итак решение (21) действительно удовлетворяет уравнению (17).

Амплитуда колебаний должна нарастать с постоянной скоростью, пропорциональной амплитуде внешней силы, неопределенное время. Этот результат является, конечно, следствием нашего полного пренебрежения силой сопротивления, которая все возрастает по мере возрастания амплитуды колебания и, наконец, прекращает дальнейший рост. Во всяком случае при резонансе амплитуда колебаний может сильно вырасти после возникновения колебаний сравнительно с амплитудой вынужденных колебаний при неполном резонансе.

## § 12. Резонансные кривые.

Если мы будем откладывать по оси абсцисс частоту  $\omega$  внешней силы, а по оси ординат соответствующую величину амплитуды установившихся вынужденных колебаний, то получим кривые, которые представляют нарастание

амплитуды при приближении к резонансу. Эти кривые, называемые резонансными кривыми, изображены на рис. 21 как для случая исчезающего затухания, так и для затухания, не равного нулю. При наличии сил сопротивления нарастание амплитуды не может происходить беспрестанно, так как рассеяние энергии возрастает [см. (13)] пропорционально квадрату скорости и достигает при установившихся колебаниях такой величины, которая как раз равняется работе (положительной) внешней силы.

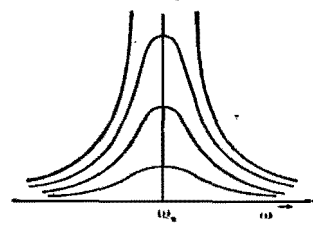


Рис. 21.

Не трудно доказать (см. ниже), что если величина силы сопротивления пропорциональна скорости и коэффициент пропорциональности равен  $r$ , то квадрат установившейся амплитуды колебаний выразится следующей формулой:

$$b^2 = \frac{B^2}{m^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + r^2 \omega^2}. \quad (22)$$

Таким образом при резонансе ( $\omega = \omega_0$ ) амплитуда равна

$$b = \frac{B}{r\omega} \quad (23)$$

т. е. обратно пропорциональна коэффициенту силы сопротивления. Можно подобрать такую расстройку ( $\omega \neq \omega_0$ ), при которой квадрат амплитуды уменьшается ровно вдвое; это имеет место, если  $m^2 (\omega^2 - \omega_0^2)^2 = r^2 \omega^2$ . Удвоенная разность между частотой  $\omega$ , соответствующей этому случаю, и частотой  $\omega_0$  свободных колебаний называется шириной резонансной кривой. Последняя формула дает возможность по ширине резонансной кривой  $2(\omega - \omega_0)$  судить о величине коэффициента затухания. В самом деле мы

определили этот коэффициент  $\alpha = \frac{r}{2m}$ , согласно (15),

$$\text{и следовательно } \frac{r^2}{m^2} = 4\alpha^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2}.$$

Таким образом, если мы имеем резонансную кривую (рис. 22), то, проведя хорду  $AB$  на высоте  $OC = \frac{1}{2}$

$OM$ , мы находим по ширине резонансной кривой  $AB = 2(\omega - \omega_0)$ , величину  $4\alpha^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega^2}$ .

Доказательство формулы (22). Если принять во внимание силу сопротивления, то уравнение (17) придется дополнить в правой части

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = f - kx - r \frac{dx}{dt}. \quad (24)$$

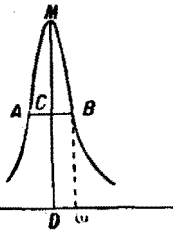


Рис. 22.



Если  $f = B \sin \omega t$ , то  $x = b \sin(\omega t + \varphi)$ . Подставляя это выражение в уравнение (24) в таком виде:

$$x = b \cos \varphi \sin \omega t + b \sin \varphi \cos \omega t,$$

мы должны для удовлетворения его приравнять нулю коэффициенты при  $\sin \omega t$  и  $\cos \omega t$  и получаем два уравнения

$$\begin{aligned} b(k - m\omega^2) \cos \varphi - b r \omega \sin \varphi &= B, \\ b(k - m\omega^2) \sin \varphi + b r \omega \cos \varphi &= 0. \end{aligned}$$

Возводя их в квадрат и складывая, мы исключаем функции от угла  $\varphi$  и находим формулу (22).

### § 13. Примеры гармонических колебаний.

Примером гармонических колебательных движений могут служить качания маятника, крутильные колебания в различных измерительных приборах, в которых подвижные части подвешены на нитях, колебания груза, висящего на упругой, растяжимой нити или пружине, или укрепленного на натянутой струне. Во всех этих случаях сила, действующая на груз, пропорциональна отклонению его от положения равновесия. Коэффициент этой квазиупругой силы в случае маятника определяется длиной маятника и ускорением силы тяжести в данном месте; в случае крутильных колебаний и колебаний груза на упругой нити — упругими свойствами нити, так называемым модулем упругости закручивания в одном случае или растяжения — в другом; наконец, в случае струны — тем натяжением, которому она подвергнута. Во всех этих случаях частота колебаний определяется согласно формуле (8) не только квазиупругой силой, но и массой груза.

Часто встречаются и такие случаи гармонических колебаний, которые нельзя рассматривать как одну материальную точку, колеблющуюся под действием квазиупругой силы; напр., колебания струны нужно рассматривать как одновременное движение совокупности всех точек струны, связанных между собой упругими силами. Каждая точка испытывает на себе действие соседних точек, зависящее от их взаимного расположения, и поэтому, для того чтобы движение было гармоническим, и сила, действующая на каждую точку, была квазиупругой, необходимо, чтобы струна принимала при колебаниях вполне определенную форму, а именно форму синусоиды (см. § 21, стр. 54). В струне, закрепленной по концам, различные точки колеблются с разной амплитудой. Если она совершает простое гармоническое колебание, то все ее точки одновременно достигают наибольшего отклонения, причем точки, где амплитуда имеет наибольшую величину, называются пучностями, а те, которые остаются в покое, — узлами. Очевидно, что закрепленные точки струны будут узловыми точками. Но, как показано на рис. 23, возможны такие типы колебания, когда на струне образуются кроме того узлы по середине или в нескольких точках, делящих струну на равные отрезки. Основным колебанием с самым большим периодом является колебание с одной пучностью, при котором все

точки движутся синхронно, или с одинаковыми фазами. Отклонения различных точек находятся в определенном отношении, которое все время сохраняется и равняется отношению их амплитуд, т. е. максимальных отклонений. Таким образом в любой момент струна имеет форму отрезка синусоиды.

Если струна имеет узел по середине, то обе половины, на которые она разделяется этим узлом, совершают такие же гармонические колебания, но в противоположных фазах. Это свойство имеет место для любых отрезков струны, отделяемых друг от друга узловой точкой. Колебания, при которых на струне образуются один или несколько узлов, имеют высшие гармонические частоты; так называются частоты, представляющие собою целые кратные частоты основного колебания. Примеры их указаны на рис. 23. Если при ударе или под действием смычка струна приходит в колеба-

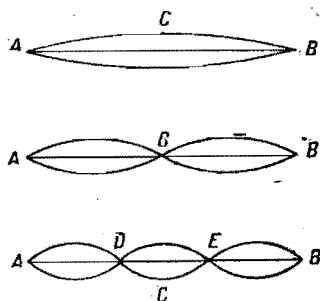


Рис. 23.

ние, то эти колебания обычно не являются простыми гармоническими, и струна не имеет форму синусоиды. Однако, применяя теорему Фурье (§ 7), можно представить любое колебание струны как наложение простых гармонических колебаний с различными амплитудами и начальными фазами. Каждое из отдельных гармонических составляющих сложного колебания струны соответствует одному из возможных простых типов колебаний, о которых мы уже говорили, в которых колеблющийся отрезок струны в любой момент сохраняет форму

правильной синусоиды. Еще более сложными примерами являются колебания мембран, т. е. тонких натянутых перепонок, напр. в барабане, или колебания упругих пластин. В прямоугольной мембране каждый ряд точек (прямая), параллельных одной из сторон прямоугольника, колеблется, как струна, но параллельные ряды имеют различные амплитуды. Таким образом распределение амплитуды нужно рассматривать в двух измерениях, и амплитуда каждой точки мембраны, совершающей простое гармоническое колебание, зависит от положения точки на плоскости, т. е. от двух координат. Вместо узловых точек мы имеем в мембране узловые линии. Каждому из возможных колебаний соответствует определенное распределение амплитуд, кото-

Рис. 24.

рое определяется формой узловых линий, вдоль которых мембрана находится в покое (амплитуда = 0). На рис. 24 представлены примеры узловых линий квадратной и круглой мембран. Каждая линия отделяет два участка, на которых точки колеблются в противоположных фазах (противоположные фазы обозначены знаками + и -).

Для обнаруживания или демонстрации узловых линий пластинки обычно

применяется способ Хладни. Пластинка (квадратная или круглая) зажимается обычно в центре и приводится в колебания при помощи смычка (рис. 25). Последним проводят по краю пластинки, вблизи пучности колебаний  $b$ , а узловые линии образуются в том месте (напр.  $a$ ), где прикосновение пальца мешает возникновению колебаний. Пластинка посыпается мелким песком, который при возбуждении колебаний собирается вдоль узловых линий. Примеры таких хладниевых фигур приведены на рис. 25, а.

Наконец, наиболее сложным случаем возникновения колебаний является случай тел трех измерений, в которых могут образовываться уже узловые поверхности. Напр., колебания воздуха в комнате, которые вызывают своеобразную гулкость пустых помещений (резонанс), можно рассматривать как результат сложения простых гармонических колебаний, из которых каждому соответствует определенное распределение узловых поверхностей, которые отделяют области

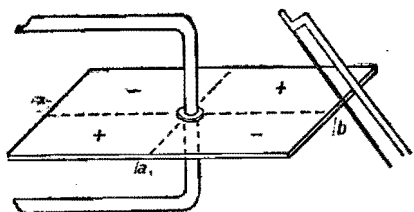


Рис. 25.



Рис. 25 а.

с колебаниями в противоположных фазах. Число возможных гармонических колебаний в этом случае еще больше, чем в случае мембран.

Колебания в любом теле могут происходить по гармоническому закону, но распределение узловых поверхностей может быть весьма сложным, в особенности при неправильной форме тела. Тем не менее всякое колебание в нем можно представить как сумму собственных колебаний с различными амплитудами и фазами и со свойственными им частотами колебаний. Такое представление может быть распространено на беспорядочные тепловые колебания в твердых и жидких телах и поэтому оно играет весьма важную роль при объяснении таких тепловых свойств, как теплоемкость, теплопроводность и т. п.

Таким же образом беспорядочное распределение световых колебаний в данном объеме можно заменить наложением разнообразных собственных колебаний данного объема, зависящих от его величины и формы.

Во всех указанных здесь примерах мы имеем возможность, говоря о колебаниях, принять во внимание движение отдельных точек. Но мы должны иметь в виду также обобщенное понятие о колебаниях так, как мы говорим о колебаниях температуры или о периодическом изменении плотности воздуха, которые могут происходить по закону гармонического колебания; точно так же мы можем рассматривать гармонические колебания упругих напряжений, возникающих внутри упругих тел при их колебаниях. Случаи гармонических колебаний зарядов, токов, электрических и магнитных сил мы будем рассматривать в гл. III.

### § 14. Ангармонические колебания.

Теория гармонических колебаний, изложенная в этой главе, предполагает существование квазиупругой силы и сопротивления, пропорционального скорости. Именно то обстоятельство, что силы эти пропорциональны первой степени отклонения или скорости точки, чрезвычайно важно и приводит к тем замечательным и простым результатам, с которыми мы познакомились выше. Однако, не всегда имеют место условия, при которых силы являются линейными функциями перемещения или скорости; обычно это имеет место только тогда, когда амплитуда колебаний достаточно мала.

Наиболее известный пример мы имеем в колебаниях маятника (рис. 26). Составляющая силы тяжести  $mg \sin \alpha$ , действующая по касательной к траектории точки  $m$ , создает

линейное ускорение  $l \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$ , направленное к положению

равновесия  $O$  груза. Но эта сила будет квазиупругой лишь при столь малых колебаниях, когда еще  $\sin \alpha$  можно заменить его аргументом  $\alpha$ . При колебаниях с большой амплитудой мы имеем ангармонические колебания, которые не могут быть выражены простыми тригонометрическими функциями, и в которых период зависит от величины амплитуды. Точно так же и при очень больших

упругих деформациях колеблющихся тел зависимость между величиной деформации и упругими силами теряет, строго говоря, простой линейный характер

Силы сопротивления при больших скоростях также изменяются, причем изменяется или коэффициент  $r$ , или же зависимость от их скорости.

В случае малых колебаний действие различных периодических сил налагается друг на друга аддитивно, т. е. действие каждой из них независимо от других сил. При одновременном действии двух сил, частота которых равна  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , колеблющаяся точка совершает только два вынужденных колебания с теми же частотами; амплитуды же определяются по формуле (18). Но в случае колебаний с большой амплитудой такая независимость действия сил уже не имеет места. Рядом с указанными колебаниями мы можем наблюдать присутствие колебаний с частотой  $2\omega_1$ ,  $2\omega_2$ ,  $\omega_1 + \omega_2$ ,  $\omega_1 - \omega_2$  и т. д. Эти комбинационные колебания (двойные, суммовые, разностные) указывают на отклонение закона, которому подчиняются силы, от линейности (см. § 30).

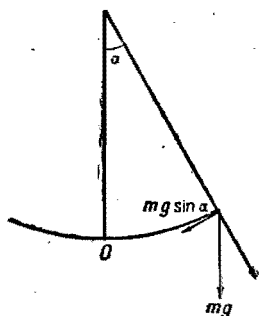


Рис. 26.

### § 15. Распространение колебаний. Волны.

Если колеблющаяся точка связана с соседними такими же материальными точками, образующими вместе некоторую материальную среду, то колебания передаются этим точкам и распространяются в этой среде волнообразно.

Под понятием волны мы представляем себе ряд материальных частиц, ко-

которые совершают одинаковые колебания, но с различной начальной фазой, непрерывно изменяющейся вдоль ряда, как показано на рис. 27. Точка 1 проходит через положение равновесия и начинает колебание, двигаясь вверх; точка 2 отстала на  $\frac{1}{6}$  полного колебания и приближается к положению равновесия; точка 3 в это время остановилась и должна начать движение к положению

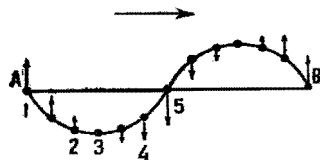


Рис. 27.

равновесия. Еще больше отстали точки 4 и 5, из которых последняя проходит через положение равновесия в обратном направлении. Разность фаз между колебаниями точек возрастает и в точках 1 и 5 достигает  $180^\circ$ . Эти фазы мы называем противоположными. Таким образом точки, первоначально в положении равновесия лежавшие на прямой  $AB$ , совершая колебания с разными фазами, образуют волну с вершинами и впадинами, которые перемещаются с течением времени вдоль этого ряда точек. Мы имеем в этом случае распространение волн.

Это распространение есть результат запаздывания фазы колебаний вследствие того, что колебания передаются соседним точкам не мгновенно. Скорость передачи колебательного движения от точки к точке обуславливает величину скорости распространения волн. Распространение волн есть не что иное, как распространение фазы колебания от одной точки к другой вдоль всего ряда точек. Поэтому мы можем также говорить о скорости распространения фазы, или о фазовой скорости. Говоря просто о скорости распространения волн, мы будем иметь в виду всегда именно фазовую скорость. При исследовании распространения волн нам приходится иметь дело с силами, зависящими от взаимного расположения соседних точек. При расположении всех точек на прямой силы, действующие на любую точку со стороны соседних точек, взаимно уравновешиваются, но если взаимное расположение их изменяется, то возникают силы, стремящиеся привести точку в движение.

Рассмотрим в качестве примера случай, когда силы, действующие между точками, подобны натяжению упругой нити, связывающей соседние точки (рис. 27). В состоянии покоя точки располагаются вдоль прямой  $AB$ . Оттянем такую цепочку, образованную материальными точками, так, чтобы она приняла форму одной из ломаных линий, изображенных на рис. 28. Силу, действующую между соседними точками, или, как принято говорить, натяжение, обозначим через  $p$ , расстояние между ними через  $a$ , а отклонение точек от положения равновесия буквой  $b$  с соответствующим номером. Очевидно, что в первом случае (1) точка  $m_0$  находится под действием двух сил  $p$ , ко-

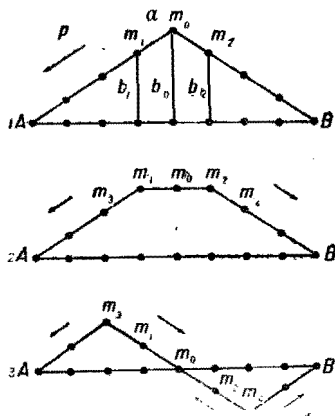


Рис. 28.

торые дают составляющие, направленные вниз и равные  $p \frac{b_0 - b_1}{a}$  и  $p \frac{b_0 - b_2}{a}$ .

Силы же, действующие на точки  $m_1$  и  $m_2$ , дают вертикальные составляющие, взаимно уничтожающиеся, и поэтому они должны оставаться в покое или двигаться с равномерной скоростью. Если точка  $m_0$  придет в положение (2), силы, действующие на нее, уравниваются, но зато точки  $m_1$  и  $m_2$  испытывают вертикальную силу вследствие действия на них точек  $m_3$  и  $m_4$ . Таким образом в этом положении точка  $m_0$  должна двигаться по инерции, а точки  $m_1$  и  $m_2$  получают ускорение вниз. При расположении (3) силы, действующие на точку  $m_0$  так же, как и на точки  $m_1$  и  $m_2$ , опять в сумме дают вертикальную составляющую, равную нулю; но точки  $m_3$  и  $m_4$  испытывают ускоряющее действие со стороны соседних с ними точек.

Общее выражение для силы, действующей на точку  $m_0$ , мы получим согласно сказанному, если сложим обе составляющие с соответственными ми знаками. В случае (1) они направлены в одну сторону и поэтому дают результирующую силу

$$f = p \frac{2b_0 - b_1 - b_2}{a} = p \left( \frac{b_0 - b_1}{a} + \frac{b_0 - b_2}{a} \right).$$

Каждое из слагаемых суммы представляет разность перемещений в вертикальном направлении соседних точек, отнесенное к единице расстояния между ними. Мы будем называть его относительным перемещением соседних точек. Таким образом сила, действующая на точку  $m_0$ , равна разности относительных перемещений соседних точек, умноженной на натяжение  $p$ , т. е. силу, взаимодействия между точками. В тех случаях, когда относительные перемещения равны по величине и знаку, сила, очевидно, равна нулю, как в положениях (2) и (3).

Так как относительное перемещение, как легко видеть, есть не что иное, как синус угла, составляемого отрезком  $m_1 m_0$  или  $m_2 m_0$  с горизонтальной прямой, т. е. определяется наклоном соответственного отрезка с горизонталью, то, следовательно, сила, приводящая в движение точки, определяется изменением этого наклона, т. е. искривлением линии, соединяющей точки.

Таким образом ускорения, получаемые точками  $m$  вследствие действия на них соседних точек, зависят от сил, действующих между ними (напр., натяжения), от формы волны и, наконец, от массы точек. Как мы увидим впоследствии (§ 20) при малых колебаниях, приведенные здесь рассуждения позволяют вычислить величину скорости распространения волн.

Для определения фазовой скорости волн мы можем следить за перемещением вершины или впадины волны или точки, находящейся в промежутке между ними, т. е. на скате волны. Если мы имеем простые гармонические колебания, то от выбора точки на волне, за которой мы следим, результат определения скорости волн не зависит, так как вся волна без изменения формы перемещается как целое. Таким образом фазовая скорость волн,

или просто скорость волн, измеряется расстоянием, на которое перемещается любая фаза колебания за единицу времени. Так как через каждый полный период колебание повторяется, и мы можем считать фазы, отличающиеся на  $360^\circ$ , или на  $2\pi$ , одинаковыми, то можно определить длину волны или расстояние между точками, находящимися в одинаковых фазах, как расстояние, на которое распространяется волна за полный период  $T$ . Мы выразим это определение формулой

$$\lambda = vT, \quad (25)$$

в которой  $\lambda$  — обозначает длину,  $v$  — скорость и  $T$  — период волны.

Если колебания, совершаемые точками волны, суть простые гармонические, и скорость распространения волн постоянна, то ряд точек, лежащий на прямой в состоянии покоя, будет располагаться на синусоиде в том и только в том случае, если перемещения точек перпендикулярны направлению распространения волны. В этом случае мы получаем наиболее наглядное представление о распространении волны и имеем дело с поперечными волнами. Продольные волны получаются, если колебания происходят вдоль того же направления, в каком распространяется волна.

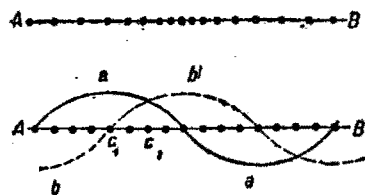


Рис. 29.

Относительное перемещение точек в этом случае не изменяет форму линии материальных точек, но изменяет расположение точек вдоль этой линии, вызывая сгущения и разрежения, как показано на рис. 29. Наибольшему сгущению и наибольшему разрежению соответствуют фазы наименьшего отклонения от положения равновесия. Для того чтобы показать это, будем откладывать эти отклонения в направлении, перпендикулярном к первоначальному положению частиц. Тогда мы получим волновую линию  $a$  (синусоиду), подобную той, которая выражает расположение точек в определенный момент при поперечных волнах.

Для того чтобы найти, например, положение точки  $c_1$ , испытывающей максимальное отклонение, изображаемое расстоянием  $c_1a$ , откладываем вправо отрезок  $c_1c_2$ , равный перемещению, т. е. максимуму синусоиды. Все точки, лежащие вблизи этого максимума, испытывают почти одинаковые перемещения, и поэтому их взаимное расстояние изменяется очень мало. Около тех мест, где самые перемещения равны нулю, разность перемещений соседних точек достигает наибольшей величины и поэтому их взаимные положения именно здесь создают наибольшие сгущения или разрежения, как видно на рис. 29.

Нужно представить себе, что фазы перемещения распространяются с постоянной скоростью  $v$  вдоль ряда точек, т. е., что кривая  $a$  продвигается с этой скоростью вправо. Для этого необходимо, чтобы все точки, находящиеся между  $c_1$  и  $c_2$ , имели положительную скорость, т. е. двигались вправо и притом наибольшую скорость имели там, где наиболее сильно различаются

перемещения соседних точек. Так как наибольшая разность соответствует тем местам, где самые перемещения равны нулю, то можно утверждать, что нулевым перемещениям соответствуют максимальные скорости точек, и наоборот: скорости равны нулю, когда перемещение достигает максимума. Это распределение скорости изображается пунктирной кривой *b* рис. 29. Для точки  $c_1$ , напр., мы видим, что в то время как она испытывает наибольшее смещение на величину  $c_1 c_2$ , ее скорость равна нулю и, наоборот, в момент прохождения через положение равновесия скорость смещения наибольшая.

В тех случаях, когда колебания поперечны, прямолинейны и происходят в определенной плоскости (в данном случае в плоскости бумаги), мы говорим, что волна прямолинейно поляризована. Плоскость, определенным способом (условно) связанная с направлением колебаний, напр. перпендикулярная к ним, называется плоскостью поляризации. Конечно, за плоскость поляризации можно было бы условиться считать и ту плоскость, в которой происходят колебания — и это было бы, пожалуй, проще. Однако выбор этот сделан был в оптике, когда направление и даже физическая природа световых колебаний не были известны. Для определения плоскости поляризации воспользовались явлением отражения света. Здесь плоскость отражения оказалась перпендикулярной к направлению колебаний электрического поля. Если поперечные колебания точек не прямолинейны, а происходят по круговым или эллиптическим траекториям, перпендикулярным к направлению распространения волны, мы говорим, что волна поляризована эллиптически или по кругу. Понятие о поляризации волн имеет простой и определенный смысл только в случае поперечных колебаний.

В учении о звуке мы имеем дело как с поперечными, так и (преимущественно) с продольными колебаниями; в явлениях света мы встречаемся только с поперечными волнами; наконец, при распространении волн вблизи поверхности жидкости наблюдается промежуточный тип колебаний, имеющих составляющие и вдоль направления распространения и в поперечном направлении.

## § 16. Поверхность волны. Принцип Гюйгенса.

При распространении волны вдоль ряда точек каждая точка имеет фазу, отличную от фазы соседних точек. При распространении волн на поверхности жидкости мы можем найти такие линии, все точки которых имеют одну и ту же фазу. В пространстве трех измерений точки, колеблющиеся в одинаковых фазах, расположены на поверхностях, называемых волновыми поверхностями. Форма волновых поверхностей тесным образом связана с условиями распространения волн, направлением и скоростью распространения.

Если волновая поверхность в пространстве представляет собой неограниченную плоскость, то при распространении в однородной среде она сохраняет плоскую форму, а направление ее распространения нормально к плоскости. Такое представление о плоской волне является в известном смысле идеализи-



рованным упрощением, так как в реальных случаях, или только ограниченные участки поверхности волны имеют плоскую форму, или же вся поверхность волны плоская, но ограничена, и за пределами ее границ нельзя вообще говорить о поверхности волны.

В учении о распространении волн очень часто приходится встречаться со сферическими волнами. Такие волны имеют замкнутую форму, и направления распространения их различны в разных точках сферы, а именно совпадают с направлением радиусов, выходящих из центра сферы. Если скорость волны не зависит от направления распространения, то волна сохраняет форму сферы, и радиус волновой поверхности увеличивается со временем при удалении ее от центра и уменьшается в обратном случае. Центр сферы называется фокусом волны, так как из этой точки волны расходятся или, наоборот, стягиваются к ней. Плоскую волну мы можем рассматривать как сферическую с бесконечно большим радиусом, и фокус ее находится на бесконечности.

Сферические волны возникают, если источником волн является колеблющаяся точка. В действительности источник волн имеет конечные размеры, и поэтому сферическая волна есть тоже абстракция. Каждая точка источника волн может, однако, рассматриваться как центр сферической волны, а наложение таких волн дает действительную волну. При сложении волн, выходящих из различных центров, необходимо однако принимать во внимание как их амплитуды, так и фазы.

Испускание волн обозначается также термином *лучеиспускание*. Линии, перпендикулярные к волновым поверхностям и определяющие направление распространения волн, называются *лучами*.

Волновая поверхность перемещается со скоростью волны и в то же время в общем случае изменяет свою форму. Для того чтобы найти форму и положение волновой поверхности в любой момент времени, если она дана нам в какой-нибудь начальный момент, можно воспользоваться построением, в основе которого лежит принцип Гюйгенса. Согласно этому принципу каждая точка волновой поверхности рассматривается как точечный источник второй волны, имеющей сферическую форму, если скорость распространения волн во всех направлениях одинакова. Если же среда, в которой происходит распространение волн, обладает такими свойствами, что скорость волн в разных направлениях различна (среда анизотропна), то вторичные волны имеют не сферическую форму (форму эллипсоида).

Принцип Гюйгенса рассматривает вторичные волны не как реально существующее явление, а как вспомогательное представление и требует, чтобы по истечении некоторого промежутка времени новая реальная волновая поверхность являлась огибающей всех вторичных волновых поверхностей, т. е. поверхностью касательной к ним. Таким образом для построения волновой поверхности используются только те элементы поверхности вторичных волн, которые совпадают с огибающей, как показано на рис. 30. Очевидно далее, что, исходя из определенной волны, всегда можно построить в определенный более поздний момент времени две волновые поверхности, напр.  $bb'$  и  $cc'$  рис. 30,

в зависимости от направления распространения волны. А так как волны в действительности распространяются в одном определенном направлении, то только одна из возможных огибающих поверхностей является реальной волновой поверхностью. Для построения волны необходимо стало быть знать направление ее распространения.

Рассмотрим применение принципа Гюйгенса к явлениям отражения волн. Положим, что волны, имеющие плоскую форму, встречаются неподвижную плоскую преграду  $AB$ , которая останавливает движение точек (рис. 31.) Таким образом все точки, прилегающие к плоскости  $AB$ , неподвижны и в то же время они участвуют в колебательном движении приходящих волн. Это возможно лишь в том случае, если одновременно они участвуют в колебаниях другого рода волн, отраженных, и притом так,

что эти колебания равны по величине и противоположны по фазе колебаниям приходящих волн. Таким образом мы можем считать, что вдоль отражающей преграды  $AB$  распределены центры колебаний вторичных волн, фазы которых распределены вдоль  $AB$  так, что они уменьшаются от  $A$  к  $B$  в зависимости от наклона плоскости волны  $AA'$  или от угла падения  $u$ . Волна  $AA'$  достигает преграды  $AB$  в разных точках  $AC_1, C_2, \dots, B$  в различные моменты времени, и поэтому вторичные волны имеют различные радиусы. В тот момент, когда край  $A'$  волны достиг поверхности зеркала  $AB$ , радиусы вторичных волн имеют различные значения от  $AB' = A'B$  до нуля, и построение Гюйгенса дает плоскую отраженную волну  $BB'$ , составляющую с плоскостью  $AB$  тот же угол  $u$  что и волна  $AA'$ . В оптике мы называем углом падения или отражения луча угол между ним и нормалью к отражающей плоскости.

Направление луча перпендикулярно к плоскости волны  $AA'$  или  $BB'$ , а углы между плоскостями равны углам между нормальными. Приведенное на рис. 31 доказательство равенства углов  $A'AB$  и  $B'BA$  доказывает поэтому, что в рассматриваемом случае распространения сферических волн угол падения равен углу отражения. Такое же построение возможно при любой форме волновой поверхности и отражающей преграды.

Подобное отражение мы называем зеркальным и отражающую поверхность зеркалом, по аналогии с отражением света от зеркала, находящим применение в оптических приборах.

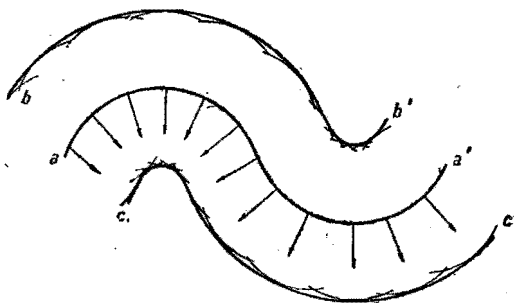
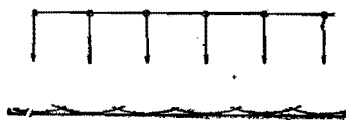


Рис. 30.

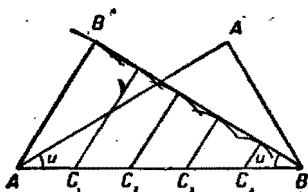


Рис. 31.

Рассмотрим еще случай преломления плоской волны у плоской поверхности, разделяющей две среды, в которых скорости волн имеют различные значения  $v_1$  и  $v_2$ . В этом случае мы можем считать, что точки, расположенные у самой границы  $AB$  как по одну, так и по другую сторону от нее, колеблются в одинаковых фазах, но эти фазы в разных точках  $AC_1, C_2 \dots B$  различны, и поэтому

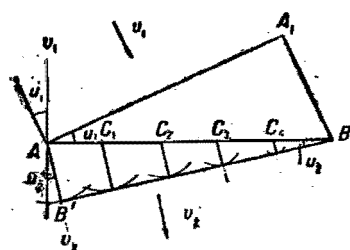


Рис. 32.

построение вторичных волн внутри второй среды дает, как показано на рис. 32, наклонную плоскую волну  $BB'$ . Если скорость распространения волн во второй среде  $v_2$  меньше, чем соответственная скорость в первой, то угол наклона волны  $BB'$  или угол преломления  $u_2$  меньше угла падения  $u_1$ . Очевидно, что  $A'B = AB \sin u_1$  и  $AB' = AB \sin u_2$  и следовательно  $A'B : AB' = \sin u_1 : \sin u_2$ . Отношение синуса угла падения к синусу угла преломления называется, как известно, показателем

преломления. Так как расстояние  $A'B$  проходит волнами в первой среде за то же время, какое требуется для прохождения расстояния  $AB'$  во второй среде, то отношение этих расстояний равно отношению скоростей волн в первой и второй среде. Таким образом показатель преломления волн равен

$$n = \sin u_1 : \sin u_2 = v_1 : v_2,$$

т. е. отношению скоростей волн, и преломление волн тесно связано с изменением их скорости при переходе через границу, разделяющую две различные среды.

### § 17. Интерференция волн.

Если через какую-нибудь точку среды проходят два различных ряда волн, исходящих, напр., из разных источников, то перемещение точки есть алгебраическая сумма перемещений, которые производит каждая из волн в отдельности. Этот принцип независимого сложения (аддитивности) рассеянных волн служит для объяснения тех явлений, которые обозначаются термином интерференция волн. Наглядное представление об интерференции мы получаем, наблюдая распространение волн на поверхности жидкости (для этой цели очень удобна поверхность ртути), если источниками волн являются два центра. Прикрепив к ножке камертона согнутую проволоку так, что концы ее касаются поверхности жидкости в точках  $O_1$  и  $O_2$ , мы получим две системы капиллярных волн,<sup>1</sup> центрами которых являются точки  $O_1$  и  $O_2$  (рис. 33).

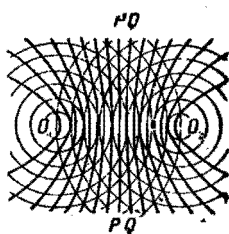


Рис. 33.

Так как колебания точек  $O_1$  и  $O_2$  происходят с одинаковой фазой, то и в точки на поверхности жидкости, равноотстоящие от центров волн ( $O_2P = O_1P$ ),

<sup>1</sup> Эти волны образуются вследствие капиллярных свойств поверхностного слоя жидкости.

обе системы волн приходят с одинаковыми фазами, и амплитуда колебаний этих точек равняется сумме амплитуд приходящих волн. В тех же точках, расстояние которых от центров волн  $OQ$  и  $O_1Q$  отличается на половину длины волны  $\frac{\lambda}{2} = OQ - O_1Q$ , волны имеют фазы противоположные, и поэтому амплитуда колебаний равняется разности амплитуд и может быть равной нулю.

На поверхности жидкости имеется бесконечное число точек, удовлетворяющих тому условию, что разность их расстояний от точек  $O_1$  и  $O_2$  имеет определенное значение, напр., ноль или  $\frac{\lambda}{2}$  и т. п. Все они лежат на особых кривых, называемых гиперболами, причем точки  $O_1$  и  $O_2$  суть фокусы гипербол. В самом деле основное свойство гиперболы заключается именно в том, что разность расстояний любой ее точки от фокусов  $O_1$  и  $O_2$  есть величина постоянная. В частности, если эта разность равняется нулю, то гиперболы превращаются в прямую, перпендикулярную к  $O_1O_2$  и делящую этот отрезок пополам. Таким образом на поверхности жидкости мы видим систему интерференционных полос, имеющих форму гипербол с фокусами в точках  $O_1$  и  $O_2$ . Каждая гипербола представляет геометрическое место точек, в которых волны от  $O_1$  и  $O_2$  имеют постоянную разность хода. Если разность хода равна нулю или целому числу волн, т. е. четному числу полуволн  $2N \cdot \frac{\lambda}{2}$ , то амплитуда имеет наибольшую величину. Если разность хода равна нечетному числу полуволн  $(2N + 1) \frac{\lambda}{2}$ , то амплитуда имеет наименьшую величину или равна нулю.

Интерференция волн происходит и в том случае, если одна система волн испускается одним источником, а другая образуется вследствие отражения от плоской стенки сосуда. Система отраженных волн будет как бы исходить из центра  $O_1$ , находящегося по другую сторону стенки и являющегося зеркальным изображением источника волн  $O$  (рис. 34). Интерференционные полосы имеют в этом случае также форму гипербол, фокусом которых служит точка  $O$ .

Линии, вдоль которых амплитуда имеет максимальную величину, мы называем также пучностями, а линии с нулевой амплитудой узловыми линиями. Колебания образующих систему линий узловых и пучностей принято называть стоячими волнами.

Мы рассмотрели случай интерференции двух волн на поверхности. Интерференция двух волн в пространстве приводит, как легко понять, к узловым поверхностям и к поверхностям пучностей.

В образовании стоячих волн или в случае появления неподвижных интерференционных полос мы имеем пример сложения колебаний, которые приводят к особому распределению энергии волнового колебательного движения в про-

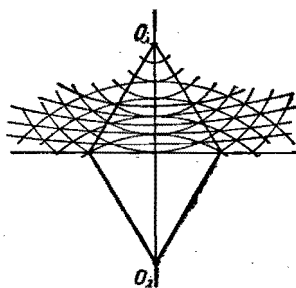


Рис. 34.

странстве. Энергия концентрируется около некоторых линий или поверхностей, в промежутке между которыми имеются линии или поверхности, где энергия почти равна нулю. Если бы энергия колебания не расходовалась, то после образования интерференционных полос колебания в них должны были бы сохраняться сколь угодно долгое время, так как через область, где амплитуда колебаний равна нулю, энергия проходить не может, но в виду того, что всегда происходит поглощение энергии с выделением тепла, то на самом деле будет происходить и непрерывный поток энергии от источника через узловыe поверхности, в которых амплитуда уже не будет в точности равна нулю.

Образование неподвижной системы интерференционных полос возможно только в том случае, если периоды колебаний источников интерферирующих волн одинаковы и если разность фаз колеблющихся точек остается неизменной. Колебания и волны, удовлетворяющие этим условиям, называются когерентными.

Во всех подобных явлениях интерференции в некоторых точках пространства амплитуда колебаний, а следовательно и энергия равны нулю. Это не значит, что энергия вследствие интерференции исчезает вовсе. Следует помнить, что энергия всей системы интерференционных полос равна сумме энергий интерферирующих волн, но только распределение ее в пространстве иное.

Понятие когерентности, к которому мы вернемся еще, разбирая интерференцию световых волн, играет чрезвычайно важную роль в вопросах такого рода. Некогерентными волнами мы будем считать, конечно, волны с различными периодами, испускаемые двумя различными источниками света. Такие волны, складываясь в какой-либо точке пространства, не дают колебаний с определенной амплитудой и образуют биения, и следовательно амплитуда все время колеблется. Совершенно то же будет, если амплитуды или фазы складывающихся колебаний изменяются не одинаковым образом, например, испытывая случайное изменение. Тогда результатом сложения колебаний будет непрерывно меняющаяся картина интерференционных полос. Слово „когерентный“ (cohaerens) означает в переводе на русский язык то же, что „связанный между собой“. Связь должна быть между источниками колебаний как в случае камертона, или же между приходящими волнами, как в случае отражения их от неподвижной поверхности. (Если отражающая поверхность будет двигаться, то когерентности между падающими и отраженными волнами не будет, так как разность фаз между ними в каждой точке пространства будет изменяться.)

## § 18. Энергия волн.

В случае колебаний отдельной точки мы могли рассматривать энергию колебаний как постоянную величину и самый процесс колебаний как периодический переход энергии из потенциальной формы в кинетическую и обратно. Когда точка участвует в волновом движении, она связана с соседними точками силами взаимодействия, получая от них энергию и отдавая им свою. При распространении волн энергия все время проходит через данную точку в направлении

распространения волн. Распространение энергии представляет характерную особенность большинства волновых явлений.

Как мы говорили в § 15, силы, действующие на точки при распространении волн, зависят не от абсолютной величины перемещения соседних точек, а от разности их перемещений по отношению к данной точке. Поэтому потенциальная энергия точек также зависит от взаимного расположения соседних материальных частиц, между которыми действуют силы упругих напряжений. Положим, что точки, вдоль которых распространяется волна, образуют сплошную упругую, гибкую нить или струну, растянутую таким образом, что каждый ее отрезок находится под действием противоположных натяжений  $p$ , приложенных к его концам. Вычислим величину работы, производимой этими противоположными и равными силами и равной работе их вертикальных составляющих при вертикальном перемещении концов отрезка.

Если, как в § 15, мы обозначим через  $b_1$  и  $b_2$  перемещения точек 1 и 2 в вертикальном направлении (см. рис. 35), то вертикальная составляющая натя-

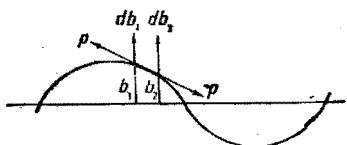


Рис. 35.

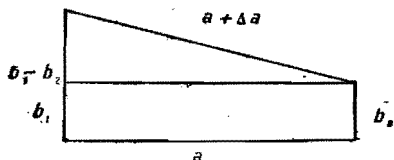


Рис. 36.

жения равна  $p \frac{b_1 - b_2}{a}$ , где  $a$  — расстояние между точками 1 и 2. Работа при вертикальном перемещении одного конца отрезка на величину  $db_1$  равна  $+p \frac{b_1 - b_2}{a} db_1$ , а при перемещении другого на  $db_2$  составляет  $-p \frac{b_1 - b_2}{a} db_2$ , так как в первом случае направление перемещения и силы одинаковы, а во втором противоположны. Поэтому полная работа равна  $p \frac{b_1 - b_2}{a} d(b_1 - b_2)$ , т. е. аналогична элементарной работе квазиупругой силы  $kx dx$ , если заменить перемещение  $x$  относительным смещением  $\frac{b_1 - b_2}{a}$ , а коэффициент квазиупругой силы  $k$  через  $pa$ . Таким образом мы находим, что искомая работа равна

$$\frac{1}{2} pa \left( \frac{b_1 - b_2}{a} \right)^2. \quad (26)$$

Тот же результат мы получим, если вычислим работу растяжения отрезка (12), когда концы его испытывают перемещения  $b_1$  и  $b_2$ , а длина увеличивается на  $\Delta a$ . Так как натяжение  $p$  постоянно,<sup>1</sup> то эта работа равна  $p \Delta a$ . На рис. 36

<sup>1</sup> Относительное перемещение, т. е. разность  $\frac{b_1 - b_2}{a}$ , должно быть настолько мало, чтобы растяжение  $\Delta a$  вызывало изменение натяжения  $p$ , малое по сравнению с самим  $p$ .

мы видим, что  $a + \Delta a = \sqrt{a^2 + (b_1 - b_2)^2}$  и поэтому при достаточно малых величинах  $\frac{b_1 - b_2}{a}$  мы имеем приближенно

$$\Delta a = a \sqrt{1 + \left(\frac{b_1 - b_2}{a}\right)^2} - a \cong \frac{1}{2} a \left(\frac{b_1 - b_2}{a}\right)^2, \quad (27)$$

что дает для работы  $\rho \Delta a$  ту же формулу (26).

Таким образом наибольшей потенциальной энергией обладают те отрезки, которые имеют наибольшую величину относительного перемещения  $(b_1 - b_2)$  или, что то же, сильнее наклонены к горизонтальной линии (см. рис. 35). Эта энергия равна нулю для отрезка, расположенного на вершине волны, и имеет наибольшую величину для того участка, который пересекает линию покоящейся струны. Так как в этих положениях точка струны имеет также соответственно нулевую и наибольшую скорости движения, то отсюда следует, что кинетическая и потенциальная энергии одновременно обращаются в нуль и достигают максимума в одних и тех же точках волны.

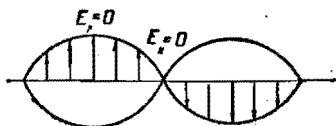


Рис. 37.

Подобный же результат мы имели и в случае продольных колебаний. Относительное смещение точек приводит к их сгущению или разрежению, как видно на черт. 29, и наибольшее сгущение или разрежение происходит в тех местах, где точки проходят через положение равновесия. Потенциальная энергия обуславливается в этом случае теми упругими силами, которые возникают при сжатии или растяжении ряда точек.

Все сказанное относится к бегущим волнам, т. е. волнам, распространяющимся в определенном направлении. Как уже говорилось ранее (§ 17), при интерференции волн, распространяющихся в противоположных направлениях, напр. волн, падающих на какую-нибудь преграду и отраженных от нее, образуются стоячие волны с неподвижными узлами и пучностями. Такие стоячие волны образуются и в струне, концы которой закреплены неподвижно, вследствие того, что бегущие вдоль нее волны отражаются от ее концов и, встречаясь, интерферируют.

В системе интерферирующих волн распределение энергии совершенно отлично от распределения ее в бегущей волне. В стоячей волне все точки между соседними узлами колеблются в одинаковой фазе (рис. 37), т. е. одновременно проходят через положение равновесия и одновременно достигают крайних положений. В тот момент, когда точки струны проходят через равновесное положение, их энергия полностью принимает кинетическую форму  $E_k$ , причем в пучности кинетическая энергия наибольшая, а в узлах равна нулю. Потенциальная энергия  $E_p$  достигает максимума, когда кинетическая  $E_k$  равна нулю для всех точек струны, т. е. в крайних положениях, но распределение ее иное: в пучностях потенциальная энергия исчезает и имеет наибольшую величину

в узлах. Таким образом максимумам перемещений точек не отвечают максимумы потенциальной энергии, так как последняя зависит не от абсолютных, а от относительных перемещений по отношению к соседним справа и слева.

• Расстояния между соседними узлами стоячих волн, так же как и расстояния между соседними пучностями, равны половине длины бегущей волны.

---



## ГЛАВА II.

### ЗВУК.

#### § 19. Колебания и звук.

Известно, что звучание тел связано с их колебаниями. Ощущение звука самым тесным образом обусловлено характером тех колебаний, которые действуют на орган слуха. В виде примера укажем на одно из самых замечательных свойств нашего слуха, которое заключается в способности отличать простые тона от сложных. Как простые тона мы воспринимаем ощущения, вызываемые простыми гармоническими колебаниями. В сложном звуке слух иногда может выделить составляющие тона, соответствующие различным простым гармоническим колебаниям, или же судить об их присутствии по тембру звука, характерному звуковому оттенку, позволяющему узнавать различные гласные звуки, различать голоса людей, звуки инструментов и т. п. Таким образом по субъективному ощущению простые гармонические колебания соответствуют простым музыкальным тонам.

Простые звуки отличаются высотой тона. Сложные звуки характеризуются обычно высотой основного, т. е. наиболее сильно представленного в них простого тона; часто (но не всегда) он бывает в то же время наиболее низким. Более высокие тона, входящие в состав звука, называются обертонами, причем обертоны могут быть гармоническими или негармоническими, смотря по тому, находятся ли их частоты в целом кратном отношении к основному тону, или же нет. Наконец, звуки, в которых нельзя выделить основного тона, мы воспринимаем как шумы.

Кратным отношениям чисел колебаний соответствуют определенные соотношения в сфере звуковых ощущений. Колебания, частоты которых относятся между собой, как  $1:2$ , соответствуют музыкальным тонам, которые образуют основной интервал — октаву (восьмая). Два тона, отличающиеся на октаву (или, как говорят, основной тон и его октава) дают наиболее совершенное созвучие, которое невооруженное ухо не может разделить на более простые звуковые элементы. Колебания, частоты которых относятся как  $1:3$ , дают интервал, называемый дуодецима (двенадцатая). Если взять октаву и дуодециму, то отношение их колебаний  $2:3$  соответствует интервалу — квинте; отношение  $3:4$  дают интервал кварту и т. д. Как общее свойство звуковых соотношений мы можем установить правило: равным звуковым интервалам соответствуют равные отношения чисел колебаний. Располагая звуки через равные интервалы, мы получим ряд чисел колебаний, образующий геометрическую прогрессию. В виду этого удобно составить логарифмическую шкалу звуков.

рифмическую шкалу частот, откладывая отрезки, пропорциональные логарифмам частот. В этой шкале равные отрезки соответствуют равным интервалам.

На рис. 38 каждому делению соответствует интервал — октава. Первые четыре октавы не воспринимаются ухом как звук, и самые низкие звуки, которые дают ощущение чистого тона, соответствуют примерно 16 колебаниям в секунду. Около семи октав охватывают все звуки, находящие применение в музыке, и еще около 3 октав могут восприниматься слухом; дальше мы переходим в область ультразвуковых колебаний, которые можно проследить еще на протяжении примерно 9 октав вплоть до  $10^7$  колебаний в секунду. Область ультразвуковых колебаний еще мало изучена, и поэтому мы будем в дальнейшем иметь в виду преимущественно колебания звуковые.

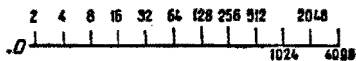


Рис. 38.

Сила звука представляет свойство звука (тоже субъективно воспринимаемое), связанное с энергией звуковых колебаний. Так как мерой последней является квадрат амплитуды, то следовательно и сила звука зависит от второй степени амплитуды. Чем меньше амплитуда колебаний, попадающих в ухо, тем слабее ощущение звука, и можно установить тот порог звуковой энергии, ниже которого ухо не улавливает звука

## § 20. Скорость звука.

Звуковые волны в воздухе представляют собой продольные колебания, вызывающие сгущения и разрежения воздуха и распространяющиеся со скоростью звука. Представим себе цилиндрический столб воздуха, вдоль которого распространяются звуковые волны. В каждом сечении, перпендикулярном к оси цилиндра, все точки имеют одну и ту же фазу и амплитуду. В направлении распространения начальная фаза колебаний уменьшается вследствие запаздывания, которое на расстоянии  $x$  равняется  $\tau = \frac{x}{u}$ , где  $u$  скорость распространения

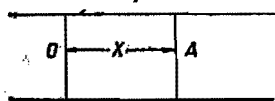


Рис. 39.

фазы волны. Если в каком-либо сечении  $O$  (рис. 39), от которого мы отсчитываем расстояние  $x$ , колебание частиц выражается формулой

$$\xi_0 = a \sin \omega t,$$

то в сечении  $A$  колебания будут происходить согласно формуле

$$\xi = a \sin \omega (t - \tau) = a \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right), \quad (28)$$

в которой  $x$  представляет расстояние  $OA$  (в отсутствии колебаний). Эта формула справедлива для любого сечения и в любой момент  $t$ . Если в сечении  $B$  на расстоянии  $x_1$  от  $O$  в момент  $t_1$  фаза колебания имеет ту же величину,

что в сечении  $A$  в момент  $t$ , то скорость распространения фазы, очевидно, равна

$$\frac{x_1 - x}{t_1 - t} = u,$$

результат, который мы получаем, приравнявая фазы:

$$\omega \left( t_1 - \frac{x_1}{u} \right) = \omega \left( t - \frac{x}{u} \right).$$

Если в некоторый момент времени  $t$  в двух соседних сечениях  $x$  и  $x + dx$  перемещения точек равны  $\xi$  и  $\xi + d\xi$ , то объем воздуха, заключенный между ними, испытывает изменение  $d\xi$ <sup>1</sup>. Изменение объема, первоначально равного  $dx$ , вызывает изменение давления в этом слое, которое также распространяется со скоростью звука.

Для того чтобы найти изменение давления  $dp$  в точке  $x$ , если первоначальное давление равно  $p_0$ , мы должны знать, как изменяется давление газа при сжатиях и расширениях. Как известно, при сжатии газа температура его повышается, и для сохранения постоянной температуры необходимо отводить тепло. Поэтому только при медленном сжатии и расширении можно применять закон Бойля-Мариотта, справедливый при условии постоянства температуры (изотермическое расширение). При быстрых звуковых колебаниях температура в соседних слоях, испытывающих неодинаковое сжатие, не успевает выровняться вследствие малой теплопроводности газа, и можем считать, что сжатие каждого слоя происходит адиабатически, т. е. без потери или притока извне тепла. В этом случае давление  $p$  и объем  $v$  газа связаны формулой

$$pv^k = p_0 v_0^k = \text{постоянной}, \quad (29)$$

в которой показатель  $k = \frac{C_p}{C_v}$ , т. е. равен отношению теплоемкости газа при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме.<sup>2</sup>

Показатель  $k$  различен для разных газов и имеет наибольшую величину, равную  $\frac{5}{3}$ , или 1,67; для газов с одноатомными молекулами (напр., гелий, аргон, пары металлов). Для воздуха, состоящего преимущественно из двуатомных газов: азота  $N_2$  и кислорода  $O_2$ , он равен  $\frac{7}{5}$ , или 1,4, а для газов с более сложными молекулами он тем ближе к единице, чем сложнее строение молекулы.

Дифференцируя формулу (29), мы найдем

$$\frac{\Delta p}{p_0} = - \frac{k \Delta v}{v_0} = - k \frac{d\xi}{dx}, \quad (30)$$

<sup>1</sup> Площадь сечения предполагается равной единице.

<sup>2</sup> При постоянном объеме нагревание лишь увеличивает кинетическую энергию молекул, а при постоянном давлении производится, сверх того, работа вследствие расширения газа.

так как изменение объема слоя, равное  $d\xi$ , можно считать достаточно малым по сравнению с начальной величиной объема  $dx$ . Таким образом избыток давления в данном слое сравнительно с нормальным давлением  $p$  равен

$$\Delta p = -kp_0 \frac{d\xi}{dx}. \quad (30')$$

Пользуясь выражением (28) для  $\xi$ , мы найдем, что распределение давления может быть представлено такой формулой:

$$\Delta p = \frac{p_0 k a \omega}{u} \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right)$$

Мы видим таким образом, что можно представить распределение перемещений  $\xi$  и давления  $\Delta p$  вдоль оси  $x$  в какой-нибудь момент  $t$  подобными кривыми (синусоидами), но сдвинутыми на четверть периода, как показано на рис. 40, где масштаб для  $\xi$  и  $x$  взят, конечно, совершенно различный. Схематическое изображение распределения частиц при распространении волн также не может дать представления об относительных величинах амплитуд перемещения частиц и сжатий газа.

Для определения скорости звука  $u$  мы должны составить уравнение движения слоя газа, толщина которого  $dx$ , и точки которого получают ускорение вследствие разности давлений на границах слоя. Если обозначим через  $\rho$  плотность газа, то масса слоя  $dx$ , приходящаяся на единицу сечения столба газа, равна  $\rho dx$  и, следовательно, произведение массы на ускорение  $\frac{d^2\xi}{dt^2}$  равно разности давлений в точках  $x$  и  $x + dx$ , т. е.  $-\frac{d(\Delta p)}{dx} dx$ . Таким образом, вследствие равенства (30'), имеем уравнение:

$$\rho dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = p_0 k \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx. \quad (31)$$

Производные второго порядка в этом уравнении суть частные производные от  $\xi$ , которое само, согласно формуле (28), есть функция двух независимых переменных  $x$  и  $t$ . Подставляя выражение (28) в уравнение (31), мы находим после дифференцирования:

$$-\rho \omega^2 \xi = -\frac{p_0 k \omega^2}{u^2} \xi;$$

откуда находим

$$u = \sqrt{\frac{p_0 k}{\rho}}. \quad (32)$$

Эта формула Лапласа дает возможность вычислить скорость звука в любом газе, для которого известны плотность  $\rho$  и показатель адиабатического сжатия  $k$ . Заметим еще, что плотность  $\rho = \frac{M}{U}$ , где  $M$  молекулярный вес, а  $U$  молекуляр-

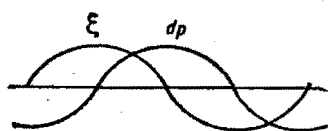


Рис. 40.

ный объем, т. е. объем граммoleкулы газа. Поэтому, если обозначим через  $R$  молекулярную газовую постоянную, то вследствие соотношения  $p_0 U = RT$  формуле (32) можно придать следующий вид:

$$u = \sqrt{\frac{RTk}{M}}. \quad (33)$$

Из последней формулы ясно видно, что скорость звука не зависит от давления газа, но пропорциональна корню квадратному из абсолютной температуры и обратно пропорциональна молекулярному весу газа. Независимость от давления при постоянной температуре вызвана тем, что плотность газа пропорциональна давлению.

Мы предполагали при выводе этой формулы, что все точки сечения столба газа совершают одинаковые колебания, и не принимали во внимание трения. В случае распространения в узких трубках это предположение не соответствует действительным условиям. Если вблизи стенок амплитуда колебаний меньше, чем вдоль оси, то мы будем иметь разность давлений и, следовательно, появятся колебания еще в поперечном направлении. Эти влияния уменьшают скорость звука в трубках. При распространении звука в жидкости или в твердых телах мы можем применить предыдущие рассуждения, лишь заменяя формулу (30) формулой, выражающей сжатие жидкости или твердого тела под действием давления

$$\Delta p = -\gamma \frac{\Delta v}{v}$$

и, следовательно, лишь заменяя в выражении для скорости звука  $p_0 k$  через  $\gamma$  — модуль сжатия жидкости или твердого тела.

В твердых телах звуковые колебания могут распространяться не только как продольные волны, но и как поперечные. В этих случаях для вычисления скорости звука мы должны в формуле (30) вводить модули упругости для тех деформаций, которые сопутствуют поперечным колебаниям, напр., изгиба или сдвига.

Заметим еще, что в жидких и твердых телах коэффициенты для изотермических и адиабатических деформаций отличаются очень мало, так как тепловые эффекты, вызываемые деформациями, очень малы. Что же касается газов, то выделение тепла при звуковых колебаниях может оказывать влияние не только на скорость, но и на поглощение звука. Если некоторая часть тепла в течение полупериода успевает переходить по теплопроводности из данного слоя к соседним слоям или стенкам сосуда, то соответственно уменьшается энергия его и, следовательно, энергия звуковых колебаний будет рассеиваться, превращаясь в тепло. При очень быстрых ультразвуковых колебаниях уменьшение расстояния между слоями, где происходят сжатия и растяжения (в виду малой длины волны), может вызвать заметный обмен тепла между ними и, следовательно, заметное поглощение волн при их распространении.

При распространении колебаний вдоль струны скорость волн определяется

натяжением  $p$  струны, которое при малых колебаниях предполагается неизменным (как и давление воздуха  $p_0$  в предыдущих рассуждениях), а также массой струны на единицу ее длины, т. е. ее линейной плотностью.

### § 21. Колебания струны.

Колебания струны, дающей один простой музыкальный тон, мы называем простыми. Все точки струны в этом случае совершают синхронные гармонические колебания определенной частоты. Такие колебания возможны лишь в том случае, если каждая точка струны испытывает квазиупругую силу, коэффициент которой определяется натяжением струны и взаимным расположением соседних точек. Для того чтобы все точки струны могли колебаться с одной и той же частотой (хотя и с различной амплитудой), необходимо, чтобы коэффициент был одинаков для всех точек струны. Распределение амплитуд вдоль струны определяет тогда форму струны.

Колебаний струны можно рассматривать так же, как стоячие волны, образующиеся вследствие интерференции волн, бегущих в противоположных направлениях вдоль струны и отражающихся от концов. Поэтому колебание каждой точки струны должно удовлетворять уравнению, подобному (31), а именно

$$p \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = p \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (34)$$

в которой  $p$  обозначает массу на единицу длины струны, т. е. ее линейную плотность,  $p$  натяжение, а  $\xi$  перемещение точки струны, определяемой расстоянием  $x$  от начала струны в момент времени  $t$ . Это уравнение справедливо для волн, бегущих и в том и в другом направлении, так как скорость распространения их, равная  $u = \sqrt{\frac{p}{\rho}}$ , входит в уравнение (34) во второй степени и, следовательно, может иметь любой знак. Поэтому при стоячих волнах колебания любой точки струны, представляющие собою сумму колебаний точки под влиянием обеих волн одновременно, также удовлетворяют этому же уравнению.

Для того чтобы каждая точка струны совершала колебания одной и той же частоты  $\omega$ , необходимо, чтобы имело место то же самое уравнение гармонических колебаний во всех точках:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\omega^2 \xi.$$

Это уравнение не противоречит уравнению (34), если в любой момент времени справедливо уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -\frac{p\omega^2}{p} \xi = -\frac{\omega^2}{u^2} \xi \quad (35)$$

Уравнение это, которому должны удовлетворять колебания всех точек струны,

показывает, что в любой момент колебания, струна имеет форму синусоиды, так как уравнение (35) удовлетворяется, если мы положим

$$\xi = \xi_0 \sin \frac{\omega}{u} x. \quad (36)$$

Эта формула в частности справедлива и в момент наибольшего отклонения струны от положения равновесия, когда  $\xi$  представляет амплитуду колебания данной точки струны, а  $\xi_0$  есть наибольшая из амплитуд. На концах струны, длина которой  $l$ , точки ее закреплены неподвижно, вследствие чего  $\xi = 0$  в точках  $x = 0$  и  $x = l$ . Поэтому формула (36) будет изображать распределение амплитуд длиной  $l$  только в том случае, если

$$\sin \frac{\omega l}{u} = 0, \text{ или } \frac{\omega l}{u} = k\pi,$$

где  $k$  — положительное целое число. Это условие дает возможность определить возможные частоты колебаний струны, число которых, определяемое рядом целых чисел  $k$ , очевидно, бесконечно велико. Основное колебание ( $k = 1$ ) имеет частоту

$$\omega_1 = \frac{\pi u}{l}. \quad (37)$$

Другие возможные частоты, соответствующие обертонам струны, будут целыми кратными ее. Так как  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , а длина волны, соответствующая этой частоте,  $\lambda_1 = uT$ , то из (37) найдем, что  $\lambda = 2l$ , или что длина струны равна половине длины волны. В этом случае мы имеем только два узла на концах струны, что следует из (36), если поставить в нее значение  $\omega_1$  из (37):

$$\xi_1 = \xi_0 \sin \frac{\pi}{l} x.$$

Распределение амплитуд вдоль струны получает наглядное объяснение, если рассматривать ее колебания как стоячие волны. Бегущие волны, из которых образуется стоячая волна, имеют в точке  $x$  фазы, меняющиеся с течением времени, но образующие определенную разность фаз. Волна, бегущая в положительном направлении, имеет фазу  $\omega \left( t - \frac{x}{u} \right)$  (см. § 20), а волна обратная имеет фазу  $\omega \left( t + \frac{x}{u} \right) + \varphi$ , где  $\varphi$  та разность фаз, которая имеет место в начале координат ( $x = 0$ ). Таким образом в любой точке  $x$  разность фаз равняется

$$\frac{2x\omega}{u} + \varphi = \frac{4\pi x}{\lambda} + \varphi.$$

В тех точках струны, где разность фаз равна  $\pi$ ,  $3\pi$  или вообще нечетному числу  $\pi$ , фазы бегущих навстречу волн противоположны и образуются узлы. В тех точках, где фазы одинаковы, т. е. разность фаз равна  $0, 2\pi, \dots$  или вообще

четному числу  $\pi$ , образуются пучности. Если в начальной точке струны ( $x=0$ ) мы имеем узел, и, следовательно, фазы волн должны быть противоположны, то мы можем положить  $\varphi$  равным  $\pi$  или какому-нибудь нечетному кратному  $\pi$ .

Положим  $\varphi = \pi$ ; тогда в любой точке  $x$  разность фаз равна  $\frac{4\pi x}{\lambda} + \pi$ . На расстоянии  $l$  от начала струны мы будем иметь второй узел, если  $\frac{4\pi l}{\lambda} + \pi = 3\pi$ ;

отсюда  $l = \frac{\lambda}{2}$ , т. е. расстояние между соседними узлами равно половине бегущей волны. В пучности, лежащей между узлами, разность фаз равняется  $2\pi$ ; следовательно расстояние  $x$  пучности от начала струны мы найдем из уравнения

$$\frac{4\pi x}{\lambda} + \pi = 2\pi,$$

или

$$x_1 = \frac{\lambda}{4}.$$

Таким образом расстояние между узлом и соседней пучностью равно четверти длины волны.

Для того чтобы представить перемещения точек струны во времени, мы должны рассматривать  $\xi_0$  как величину, совершающую гармонические колебания  $\xi_0 = a_1 \sin(\omega t + \varphi)$ , начальная фаза которых может быть совершенно произвольной, но должна быть одной и той же для всех точек струны. Таким образом основное колебание струны мы можем представить формулой:

$$\xi_1 = a_1 \sin \frac{\pi}{l} x \sin(\omega_1 t + \varphi_1).$$

В случае  $k$ -го обертона мы можем написать подобное же выражение:

$$\xi_k = a_k \sin \frac{k\pi}{l} x \sin(k\omega_1 t + \varphi_k). \quad (38)$$

Каждое из возможных гармонических колебаний может иметь какую угодно максимальную амплитуду  $a_k$  и фазу  $\varphi_k$ , и в этом отношении все они совершенно независимы. Если они существуют одновременно, то каждая точка струны совершает сложное колебание, которое остается периодическим, но может протекать по времени сколь угодно сложным образом, так как и амплитуды и фазы различных обертонов могут быть какие угодно. Роль различных обертонов в определении формы струны зависит от распределения узлов и пучностей вдоль струны и для разных точек струны различна.

Форма струны и изменение этой формы во время колебаний зависит таким образом от обертонов, которые сопровождают основной тон, от их амплитуды и начальных фаз, одним словом, от того, как сложное колебание составлено из простых. Этот состав колебания определяется тем, как оно возбуждено:



щипком, ударом или смычком. Каждому способу возбуждения соответствует особый вид колебаний и особый тембр звука.

Если струна оттягивается и затем отпускается, то начальная форма ее представляет собой ломаную линию, и все точки в этот момент находятся в покое. Последнее условие относительно скоростей точек определяет фазы всех простых колебаний: они все одинаковы, и общий вид зависимости от времени  $k$ -го обертона выражается через  $\cos k\omega t$  и, следовательно формула для  $k$ -го обертона

$$\xi_k = a_k \sin \frac{k\pi}{l} x \cos k\omega t. \quad (39)$$

Для того, чтобы найти аналитическое выражение коэффициентов  $a_k$ , нужно представить ломаную линию рядом Фурье

$$\xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x.$$

В виду симметрии формы струны (рис. 41) относительно середины ее все четные обертоны отсутствуют, а амплитуды нечетные выражаются так:

$$a_{2k+1} = \frac{4\xi_0}{(2k+1)\pi}.$$

Движение отдельных точек струны не гармоническое. Средняя точка движется с равномерной скоростью, которую она получает вначале и которая не изменяется (так как натяжение струны не дает составляющей, направленной вниз) до тех пор, пока она не достигает крайнего положения. После этого скорость ее меняет направление, и она совершает обратное движение с постоянной скоростью. Другие точки струны в течение некоторого времени сохраняют свое положение (скорость = 0), затем приходят в равномерное движение, опять останавливаются на некоторое время и возвращаются обратно с той же скоростью. Форма струны в разные моменты и скорости ее точек показаны на рис. 41.

Несколько более сложное движение обнаруживается в том случае, когда струна оттянута не на середине, как показывает рис. 42. Состав этого сложного колебания зависит от того, в каком месте струна оттягивается и, вообще говоря, содержит как нечетные, так и четные обертоны.

При возбуждении струны ударом (фортепиано) некоторые точки струны получают в момент удара скорости в то время, как они занимают еще положение равновесия, и все лежат на прямой. Так как перемещение всех точек

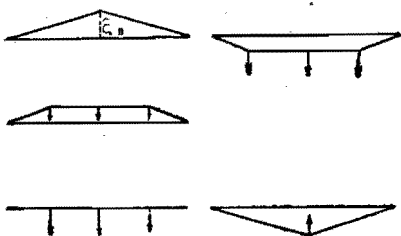


Рис. 41.

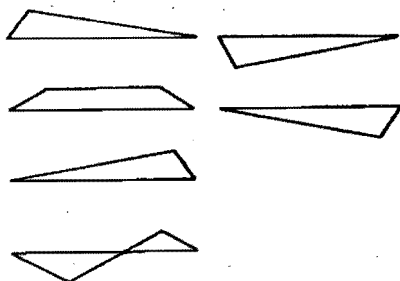


Рис. 42.

в начальный момент равно нулю, то фаза всех обертонов одна и та же, а именно:

$$\xi_k = a_k \sin \frac{k\pi}{l} x \sin k\omega t. \quad (40)$$

В зависимости от места удара и от того, какие скорости сообщены различным точкам струны, можно получить преобладание тех или других обертонов.

Остановимся еще на способе возбуждения струны смычком. Проводя смычок с равномерной скоростью, мы действуем на струну силой трения между двумя твердыми поверхностями. Как известно, в этом случае сила трения может возрасти до известного предела при относительном покое трущихся поверхностей, после чего начинается скольжение, во время которого сила трения остается постоянной. Смычок также увлекает вначале струну, сообщая ей свое равномерное движение, но когда струна оттянута настолько, что натяжение ее уравновешивает предельную величину силы трения, струна отрывается от смычка и приходит в колебательное движение, после чего опять подхватывается смычком, причем этот процесс периодически повторяется. Однако, если бы сила трения не зависела от скорости и оставалась постоянной, возбужденное смычком колебание должно было бы затухнуть, а струна под действием равномерно движущегося смычка оставалась бы настолько оттянутой, чтобы натяжение уравновешивало силу трения. Под-

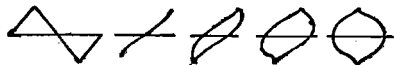


Рис. 43.

держивать незатухающие колебания смычок может только в том случае, если при возрастании относительной скорости движения струны и смычка сила трения уменьшается, так как в этом случае положительная работа при движении струны в ту же сторону, что и смычок, больше, чем отрицательная работа силы трения, замедляющая струну при ее возвращении назад. За каждый период смычок сообщает струне некоторую энергию, поддерживающую ее колебательную энергию и компенсирующую испытываемое струной затухание.

Этот случай является одним из возможных случаев превращения равномерного движения в движение колебательное. Звучание натянутой проволоки (телеграфных проводов) под действием ветра представляет довольно известный пример возбуждения незатухающих колебаний, в котором также сила, действующая на проволоку (перпендикулярно к направлению воздушного потока), зависит сложным образом от относительного движения проволоки и воздуха и от обратного действия колебаний проволоки на воздушный поток.

Движение струны можно изучать, как это делал Гельмгольц, при помощи вибрационного микроскопа (см. стр. 20). Кривые Лисажу имеют довольно сложный вид, так как движение точек не простое гармоническое. На рис. 43 представлены кривые и произведен анализ движения, пользуясь тем, что объектив микроскопа, укрепленный на ножке камертона, совершает известное гармоническое колебание.

Возможность возбуждения тех или иных обертонов зависит от того, каким точкам струны сообщается перемещение приложенными к ним силами. Если

сила приложена в том месте, где должен образоваться узел стоячей волны какого-нибудь обертона, то этот обертон не возбуждается. Возбуждая струну, как показано на рис. 41, т. е. прилагая силу к средней ее точке, где находится узел всех четных обертонов, мы не можем возбудить этих последних. Фортепианные струны возбуждаются обычно ударом в расстоянии  $1/7$  их длины от конца, вследствие чего устраняются обертоны, нежелательные в интересах музыкальной гармонии. Можно высказать такое общее правило: данная сила не возбуждает тех обертонов, при существовании которых (и отсутствии всех других) работа силы равна нулю. Это, очевидно, имеет место, если точка приложения силы совпадает с узлом обертонов.

## § 22. Трубы открытые и закрытые.

В отличие от колебаний струны, колебания частиц воздуха в трубе происходят в направлении распространения волн. Продольные волны, вызывающие разрежение и сжатие воздуха в трубе, распространяются в направлении оси трубы и испытывают отражение у ее концов. Стоячие волны, которые образуются в трубе, представляют чередование узлов и пучностей, причем узлам перемещений соответствуют наибольшие сжатия и разрежения, как видно из рис. 44, так как к узлам воздух притекает с двух сторон при сжатии и от них же

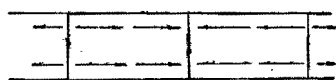


Рис. 44.

оттекает при разрежении. Поэтому, если труба с одного конца закрыта, то здесь образуется узел перемещений и здесь же оказывается пучность изменений давления.

При открытом конце можно считать постоянным давление, и поэтому мы должны здесь иметь пучность перемещений. Обычно по условиям возбуждения колебаний трубы один из концов всегда остается открытым, и поэтому под открытыми трубами мы можем разуметь трубы, открытые с двух концов, а под закрытыми — закрытые с одного конца.

Основным колебанием открытой трубы является то, при котором на концах трубы наблюдаются пучности, а в середине — узел перемещений. Поэтому основное колебание имеет длину волны  $\lambda$ , равную двойной длине трубы  $\lambda = 2l$ . В закрытой трубе при основном колебании (один узел и одна пучность) укладываются  $1/4$  длины волны. Каждый следующий обертон увеличивает на один число узлов в трубе и поэтому в открытой трубе укладывается целое число полуволн, и длина волны  $k$ -того обертона в  $k$  раз меньше основной волны  $\lambda_1$ , в то время как в закрытой трубе  $k$ -тый обертон имеет длину волны

$$\lambda_k = \frac{\lambda_1}{2k-1}.$$

Наблюдение узлов и пучностей с целью определения длины стоячей волны производится по методу Кундта по распределению легкого порошка (ликоподия, мелкого песка и т. д.) в трубе. Порошок собирается в кучки в узлах, и

поэтому легко сосчитать число полуволн, образующихся в трубе определенной длины. Конец может быть закрыт поршнем, положение которого подбирается таким образом, чтобы столб воздуха в трубе находился в резонансе с возбуждаемыми колебаниями. Этот метод особенно пригоден для сравнения скоростей распространения в различных газах или при различных условиях, так как при одинаковой частоте длина волны пропорциональна ее скорости.

Возбуждение колебаний может быть произведено при помощи продольных колебаний стержня  $L$ , конец которого приводит в движение поршень (рис. 45,  $a$ ).

Закрытая труба может служить резонатором, как показано на рис. 45,  $b$ , при возбуждении ее колебаний посторонним источником звука, напр. камертоном  $K$ . Можно, подымая в трубе уровень воды, довольно точно подобрать такую длину столба воздуха, чтобы амплитуда колебания достигла максимума. Вследствие слабого затухания резонанс получается достаточно острый и может быть определен по силе звучания резонатора.

Возбуждение колебаний органной трубы или духовых инструментов производится часто вдуванием струи воздуха в узкое отверстие, вследствие чего образуется тонкая струя, периодически меняющая свое направление и образующая вихри под влиянием колебаний столба воздуха, заключенного в трубе. В язычковых трубах (рис. 46,  $a$ ) колебание поддерживается периодическим движением упругой пластинки (клапана), открывающей отверстие трубы. В некоторых духовых инструментах эту роль исполняют губы музыканта, вибрирующие, как упругая перепонка, и т. п.

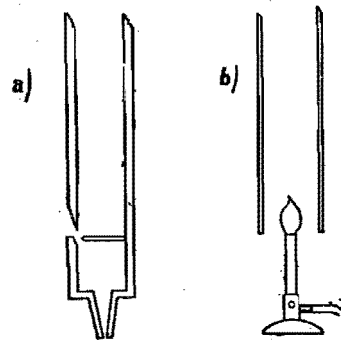


Рис. 46.

Интересный опыт представляет возбуждение колебаний в стеклянной трубе, поставленной над пламенем (рис. 46,  $b$ ). Под влиянием колебаний воздуха в трубе пламя испытывает колебания, превращающие энергию восходящего нагретого потока воздуха в периодическое движение, соответствующее собственным колебаниям столба воздуха в трубе.

Образование пучности на конце открытой трубы представляет некоторые особенности, на которые следует обратить внимание. Постоянное давление мы имеем, строго говоря, только на достаточно большом расстоянии от отверстия трубы, поэтому колебания частиц воздуха в отверстии не вполне соответствуют пучности стоячей волны. Поправка, которую необходимо ввести при определении истинной длины стоячей волны в открытой трубе, зависит от поперечных размеров и формы отверстия; в широкой трубе вышеуказанную зависимость длины волны от длины трубы нужно считать лишь приближенной.

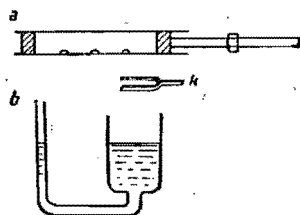


Рис. 45.

### § 23. Поперечные и продольные колебания стержней.

Продольные колебания длинных и относительно тонких стержней можно рассматривать как стоячие волны, причем в зависимости от закрепления их концов на них образуются узлы или пучности. Обычно при возбуждении колебаний стержень закрепляется посередине и подвергается продольному натиранию, вследствие чего, как и в струне под действием смычка, возникают колебания, но так как концы здесь свободны, то на них имеются пучности, посередине же узел перемещений. Скорость распространения волн в стержне определяется отношением модуля упругости (модуля Юнга)  $E$  к плотности  $\rho$ ,  $u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  (см. § 20), и поэтому определение длины волны и частоты колебаний (или периода  $T$ ) дает возможность определять упругие свойства различных тел.

Уменьшая длину стержней, мы очень легко можем получить ультразвуковые, т. е. не вызывающие звуковых ощущений колебания. Мощные ультразвуковые колебания получили в последнее время применение в подводной сигнализации. Для этой цели применяются кварцевые пластинки, колебания которых легко возбуждаются при помощи электрических колебаний вследствие свойства кварца испытывать сжатие или растяжение под действием электрической силы в определенном направлении (вдоль электрической оси) и, наоборот, создавать электрическое поле одного и другого направления при сжатии и растяжении. Эти пьезоэлектрические свойства кварца дают возможность не только возбуждать в нем упругие колебания, но и пользоваться ими для получения электрических колебаний.

Поперечные колебания стержней представляют гораздо более сложное явление. Стержень испытывает при этом изгиб, и в различных точках его сечения деформация не одинакова. При прямоугольном сечении, напр., можно провести вдоль стержня такое сечение  $MN$ , в котором деформация равняется нулю; слои, лежащие над ним (рис. 47), испытывают растяжение, а ниже его сжатие, и следовательно каждое поперечное сечение испытывает не только перемещение в направлении, поперечном длине стержня, но также вращение вокруг оси, перпендикулярной к плоскости чертежа. Вследствие этого исследование распространения колебаний вдоль стержня представляет гораздо более сложную задачу, чем в случае струны.

Колебания стержня гармонические, но распределение амплитуд вдоль стержня выражается не такими простыми функциями, как в струне; и форма стержня не соответствует синусоиде, и обертоны стержня не находятся в простом рациональном отношении к основному колебанию. Колебания стержней имеют большое значение для физики, главным образом благодаря к а м е р т о н у, которым часто пользуются для получения тона определенной высоты; еще

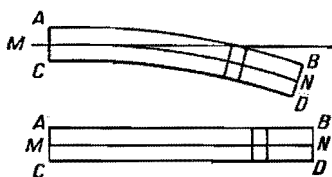


Рис. 47.

большее значение они имеют в прикладной механике и технике разного рода сооружений.

Как период колебаний, так и форма, которую принимает стержень во время колебаний, зависят от того, как он закреплен, причем закрепление это может быть или опорой, которая хотя и мешает стержню в месте закрепления перемещаться в поперечном направлении, но допускает вращение вокруг закрепленной оси, или же он закрепляется наглухо (зажат), так что невозможно и вращение. Рассмотрим сначала колебания стержней со свободным концом.

В первом основном колебании мы имеем узел на месте закрепления и пучность у свободного конца, в третьем два узла и три пучности (рис. 48). Но расстояние между узлами и пучностями неодинаково в разных местах стержня (чем ближе к концу стержня, тем меньше) и не пропорционально периоду колебаний. Число колебаний основного тона относится к числу колебаний первых обертонов, как  $1 : 2,76 : 5,40$ .

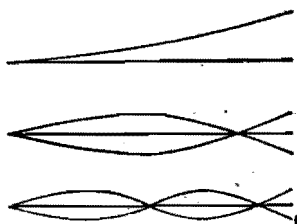


Рис. 48.

Камертон представляет собой такой же стержень, но только изогнутый (что имеет относительно мало значения) и снабженный по середине металлической ножкой, что влияет очень заметно на период, если в середине имеется пучность колебаний (рис. 49а). Если же колебания происходят так, что ножка приходится в узле, то никакого влияния на колебания она не оказывает. Частоты основного тона и первых обертонов камертона относятся как  $1 : 2,76 : 5,40$ ; таким образом первый обертон примерно на 2,5 октавы выше основного тона, второй почти на 4 октавы, и, кроме того, они очень быстро заглушаются.

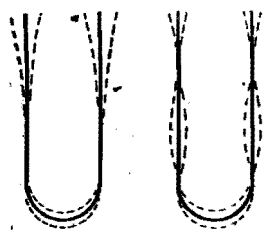


Рис. 49.

Обертоны легко возбуждаются при ударе камертоном по столу, но они очень скоро исчезают и остается только основной тон. Можно возбудить обертоны, не возбуждая основной тон, если провести смычком в том месте, где должен находиться узел основного колебания.

Уже из сказанного ясно, что если рассматривать колебания стержней как стоячие волны, то на различных расстояниях от концов и в зависимости от их

закрепления скорость поперечных волн (изгиба) различна. Это особенно проявляется при колебаниях стержня, наглухо закрепленного на одном конце (рис. 48). Свободный конец колеблется так же, как и в стержне с свободными концами, и распределение узлов и пучностей у этого конца не отличается от того, какое изображено на рис. 49; у закрепленного же конца расстояние узлов от места закрепления совершенно различно, и форма стержня совершенно своеобразна. Основному колебанию зажатого стержня поэтому не соответствует какое-нибудь сходное колебание в случае свободных стержней. Поэтому основной тон по числу колебаний еще больше отличается от обертонов в этом случае, а именно относится как  $1 : 6,25 : 17,5 : 14,3$ . В зажатом

стержне обертоны могут быть возбуждены, если создать, подпирая его в соответственном месте, узел колебаний нужного обертона.

Стержни, и в частности камертоны, представляют собой очень устойчивый источник колебаний, мало зависящий от внешних условий. Наибольшее влияние оказывает на период его колебаний температура, а именно изменяет его около 0,01% на каждый градус изменения температуры. Под влиянием температуры изменяются одновременно и размеры его (длина) и упругость; оба эти фактора влияют одинаковым образом, так как число колебаний пропорционально  $\sqrt{El}$ , где  $E$  — модуль Юнга, а  $l$  — линейные размеры стержня. Температурные коэффициенты этих величин, однако, различны по знаку, так как упругость уменьшается с температурой, а длина увеличивается, но по величине первый из этих коэффициентов в 20 раз больше второго и следовательно преобладающим фактором является изменение упругости (для стали). Таким образом число колебаний камертона с повышением температуры медленно уменьшается.

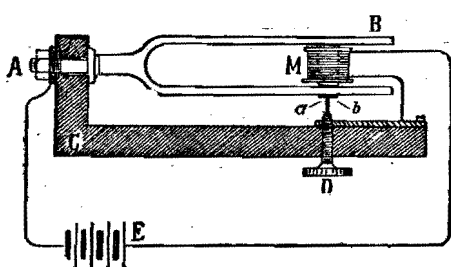


Рис. 50.

Для получения незатухающих колебаний камертона можно применять возбуждение его переменным током при помощи электромагнитов, причем сам камертон может создавать переменный ток нужной частоты особым прерывателем, периодически замыкающим и разрывающим цепь постоянного тока (рис. 50).

В виду постоянства частоты камертона, он может служить образцом, эталоном, при измерении частоты колебаний любого источника звуковых колебаний. При этих измерениях весьма важно уметь сравнивать числа колебаний, столь близкие по величине, что их уже трудно различить по высоте тона. Для этой цели применяется обычно метод звуковых биений. Два близких по тону источника звука дают колебания, которые вследствие интерференции производят впечатление одного звукового тона, но звучащего с периодически меняющейся силой. Считая число биений за определенное время и определяя число биений в одну секунду, мы находим разность чисел колебаний, совершаемых в одну секунду нашими источниками. Конечно, такой же результат можно получить, наблюдая периодическое изменение фигур Лисажу, создаваемых, напр., двумя камертонами с несколько различными периодами.

Этим же способом может быть определена и абсолютная величина числа колебаний данного камертона. Сравнивая между собой камертоны, дающие все возрастающую частоту колебаний, можно дойти до такого тона, который составляет с основным интервал, равный октаве, что можно установить на слух. Складывая разности чисел колебаний промежуточных камертонов, мы находим разность между числом колебаний исходного тона и его октавы, т. е. частоту колебаний основного тона.

### § 24. Колебания мембран и пластин.

Тонкая, упругая пленка, равномерно растянутая во все стороны и закрепленная по краям, представляет много общего со струной. В положении равновесия она имеет плоскую поверхность, и ее состояние характеризуется натяжением  $p$  (как и в случае струны), т. е. силой, с которой она действует на единицу длины рамки. Кроме того, свойства мембраны определяются поверхностной плотностью  $\rho$ , т. е. массой ее, приходящейся на единицу поверхности. Положим, что поверхность пленки имеет форму прямоугольника, стороны которого параллельны осям  $X$  и  $Y$ , а перемещения точек пленки, перпендикулярные к ее поверхности, происходят параллельно оси  $Z$ . Если бы все точки, лежащие на прямой, параллельной оси  $Y$ , совершали одинаковые перемещения, то мембрану можно было бы рассматривать как ряд параллельно натянутых струн, и распространение волн вдоль ее поверхности и ее колебания удовлетворяли бы уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{p}{\rho} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Подобное же уравнение только с заменой переменной  $x$  на  $y$  получим, рассматривая перемещения, одинаковые вдоль прямой параллельной оси  $X$ , т. е. независимые от координаты  $Y$ . В действительности уравнение мембраны имеет вид:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{p}{\rho} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right). \quad (41)$$

Мембрана таким образом представляет собой как бы струну двух измерений, и мы можем ожидать, что когда она совершает простые гармонические колебания, движения различных точек ее отличаются только амплитудами. Распределение же амплитуд в зависимости от положения точек в каждом измерении мы можем предположить синусоидальным, как и в струне. Поэтому естественно предположить, что колебание какой-либо точки мембраны с координатами  $x$  и  $y$  можно представить формулой:

$$z = A \sin \omega t \sin \frac{k_1 \pi}{l_1} x \sin \frac{k_2 \pi}{l_2} y, \quad (42)$$

в которой  $l_1$  и  $l_2$  суть длины сторон прямоугольной мембраны,  $k_1$  и  $k_2$  — целые числа. Такая формула для распределения амплитуд, очевидно, обусловлена тем, что вдоль каждой стороны, закрепленной по краям прямоугольной мембраны, перемещения точек равны нулю. Она удовлетворяет уравнению (41), как можно убедиться, подставляя (42) и произведя необходимые преобразования, если:

$$\omega^2 = \frac{p\pi^2}{\rho} \left( \frac{k_1^2}{l_1^2} + \frac{k_2^2}{l_2^2} \right). \quad (43)$$



Эта формула позволяет определить все возможные частоты простых колебаний мембраны. Любое сложное колебание мембраны может быть представлено как результат наложения простых колебаний, подобных (42), с различными амплитудами и начальными фазами. И это показывает, что все возможные колебания исчерпываются формулами (42) и (43).

Сравнивая формулу (43) с подобной же формулой для струны  $\omega^2 = \frac{\rho}{l^2} \frac{\pi^2 k^2}{\rho}$ , которая получается из уравнения (35), мы видим, что разнообразие возможных колебаний в мембране гораздо больше, чем в струне, так как различные частоты мы получаем, полагая  $k_1$  и  $k_2$  равным всем возможным целым числам. Но вместе с тем и частоты простых колебаний не находятся между собой в простых рациональных отношениях, и обертоны не образуют, как в струне, гармонического ряда. Частота колебаний мембраны равна

$$\omega = \pi u \sqrt{\frac{k_1^2}{l_1^2} + \frac{k_2^2}{l_2^2}} \quad (43')$$

где  $u = \sqrt{\frac{\rho}{\rho}}$  обозначает, как и в струне, скорость волн в мембране. Для того чтобы наглядно представить все возможные частоты, мы поступим следующим образом (рис. 51). Отметим на прямоугольных координатных осях точки, отстоящие друг от друга на расстоянии  $a = \frac{\pi u}{l_1}$  вдоль одной оси и

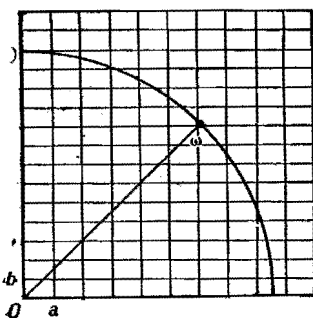


Рис. 51.

на расстоянии  $b = \frac{\pi u}{l_2}$  вдоль другой. Проведя через эти точки прямые, параллельные координатным осям, получим сетку, узлы которой, т. е. точки пересечения прямых, соответствуют всевозможным комбинациям целых чисел  $k_1$  и  $k_2$ .

Согласно (43') любая частота колебаний может быть представлена длиной отрезка, проведенного из начала координат в соответственный узел сетки (с координатами  $k_1 a$  и  $k_2 b$ ).

Не трудно подсчитать число  $n_0$  возможных простых колебаний, имеющих частоту, меньшую известного предела  $\omega_0$ . Для этого нужно только описать радиусом  $\omega_0$  окружность и подсчитать число узлов, которое помещается внутри квадранта этой окружности. Так как каждому узлу соответствует предельный элементарный прямоугольник, ячейка сетки, то число возможных колебаний  $n_0$  мы с известным приближением можем представить как отношение площади квадранта к площади элементарной ячейки  $ab$ :

$$n_0 \cong \frac{\pi \omega_0^2}{4} : ab = \frac{\pi \omega_0^2}{4} : \frac{\pi^2 u^2}{l_1 l_2}.$$

Эта формула будет тем точнее, чем больше радиус  $\omega_0$ , сравнительно с длинами  $a$  и  $b$ . Принимая во внимание, что  $\frac{\omega_0}{u} = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ , где  $\lambda_0$  — длина волны,

соответствующая предельной частоте  $\omega_0$ , мы найдем следующую простую формулу:

$$n_0 \approx \frac{\pi l_1 l_2}{\lambda_0^2} = \frac{\pi S}{\lambda_0^2}, \quad (44)$$

где  $S$  площадь мембраны.

Колебания мембраны можно рассматривать также как стоячие волны, которые образуются при интерференции прямых и отраженных волн, бегущих в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Каждому колебанию соответствует ряд узловых линий, которые делят струну на  $k_1, k_2$  прямоугольных участков. В прямоугольниках, имеющих общую сторону, фазы колебания противоположны.

Подобным же образом можно рассмотреть поперечные колебания упругих пластинок с той только разницей, что, как и в случае колебаний стержней, уравнения колебаний пластин имеют гораздо более сложный вид, и частоты колебаний выражаются более сложными формулами. И здесь каждому колебанию соответствует определенное распределение узловых линий, отделяющих друг от друга участки с противоположными фазами колебаний.

### § 25. Объемные резонаторы.

Колебания, происходящие в некотором объеме воздуха, огражденном стенками, отражающими волны, представляют пример для дальнейшего развития и обобщения предыдущих рассуждений. В струне мы имеем одну переменную  $x$ , расстояние от начала струны; в мембране две независимых координаты  $x$  и  $y$ ; в объеме прямоугольного параллелепипеда мы имеем еще большее разнообразие колебаний, соответствующее трем координатам  $x, y, z$ . Мы предоставим читателю проделать в этом случае те же выкладки, но имея в виду, что колебания воздуха продольны и поэтому стоячие волны имеют у стенок сосуда узлы, если перемещения точек перпендикулярны к стенкам. Частота колебаний определяется формулой

$$\omega = \pi u \sqrt{\frac{k_1^2}{l_1^2} + \frac{k_2^2}{l_2^2} + \frac{k_3^2}{l_3^2}}, \quad (45)$$

где  $k_1, k_2, k_3$  всевозможные целые числа, а  $l_1, l_2, l_3$  длина ребер параллелепипеда. Число возможных собственных колебаний, частоты которых меньше определенного предела  $\omega_0$ , выражается формулой, подобной (44):

$$n_0 = \frac{4\pi}{3} \frac{V}{\lambda_0^3}, \quad (46)$$

где  $V$  — объем параллелепипеда, а  $\lambda_0$  — длина волны, соответствующая предельной частоте  $\omega_0$ . Такие замкнутые объемы воздуха, имеющие собственные периоды колебаний, мы называем объемными резонаторами.

Результат сложения трех систем стоячих волн в таком прямоугольном объеме гораздо сложнее, чем в случае мембраны, еще и потому, что каждой

системе соответствует другое направление колебаний. Поэтому узлы образуются лишь в тех точках, где три взаимно перпендикулярные колебания дают результирующую, равную нулю.

Примером объемных резонаторов может служить прямоугольная комната, которая может резонировать на некоторые колебания особенно сильно.

Особое значение для теоретического рассмотрения многих явлений, связанных с колебательными и волновыми движениями или колебаниями не механическими, напр., световыми, имеет случай прямоугольного помещения „ящика“, как его сокращенно обозначают, с идеально отражающими стенками. В таком ящике мы представляем себе плоские бегущие волны, распространяющиеся в (рис. 52) каком-либо направлении  $OA$  с определенной скоростью  $v$ . Если взять какое-нибудь произвольное направление  $OX$ , то вдоль этого направления скорость распространения фазы тех же волн иная, а именно равна  $v' = v \cos \varphi$ , т. е. равна проекции скорости  $v$  на направление  $OX$ . Расстояние между точками на оси  $OX$ , имеющими одинаковые фазы,

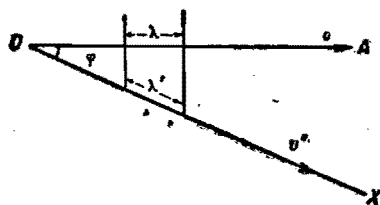


Рис. 52.

равно  $\lambda' = \frac{\lambda}{\cos \varphi}$ . Таким образом мы можем рассматривать распространение волн в любом направлении, только изменяя соответственным образом длину волны.

Если, кроме того, волны должны иметь колебания продольные или поперечные, то колебания нужно разложить на такие, которые соответствуют новому направлению распространения волн  $OX$ , и на колебания, соответствующие направлению, перпендикулярному к  $OX$ . Так как всякое колебание можно разложить вполне определенным образом на три взаимно перпендикулярные направления, то и данную волну можно разложить на три волны с различными длинами и различными скоростями распространения в направлениях  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$ . Итак, любую систему плоских волн в ящике можно представить как три системы волн, распространяющихся вдоль трех направлений, параллельных его ребрам. Каждая система образует свои узлы и пучности, т. е. стоячие волны или колебания ящика, если длина волн отвечает размерам соответствующего ребра, и мы можем рассматривать их отдельно как независимые друг от друга. Положение их узлов и пучностей определяется только положением стенок ящика, отражающих волны, и длиной волны. В каждой такой системе мы имеем узловые плоскости, в которых соответствующие этим волнам колебания равны нулю. При наложении же всех трех систем друг на друга, т. е. в действительной системе колебаний узловых точек может не быть вовсе.

Каждая из систем стоячих волн определенной длины определяет одно из основных колебаний ящика, т. е. объемного резонатора прямоугольной формы. В случае более сложной формы резонатора и форма стоячих (основных) волн усложняется, поэтому обычно рассматриваются именно прямоугольные резонаторы.

## § 26. Анализ звуков.

Сложные звуки, если они являются все же музыкальными звуками, а не шумами, т. е. имеют определенную высоту тона, в зависимости от своего состава обладают различным тембром. Не говоря уже о различном тембре различных музыкальных инструментов, и в человеческом голосе тембр, т. е. особая окраска звука, меняется, когда мы произносим, напр., различные гласные звуки. Состав звуков может быть определен при помощи тех приемов, которые позволяют выделить из них простые составляющие, т. е. тона. Это можно сделать двояким образом: при помощи резонаторов и при помощи записи звуков.

Гельмгольц впервые применил метод резонаторов для анализа. Его резонаторы имели вид шаровидного тела с двумя отверстиями (рис. 53), из которых одно, сделанное в виде конической трубки, которая может вставляться в ухо, служит для сообщения внутреннего объема резонатора с ухом, а другое позволяет воздуху выходить из резонатора и входить в него при колебаниях.

Колебания такого резонатора зависят от двух причин: 1) от объема воздуха и 2) от отверстия резонатора.

При возникновении их воздух периодически входит внутрь резонатора, где он сжимается, и затем выходит, причем происходит его расширение. Такой резонатор имеет одну определенную частоту, и если вблизи от его отверстия происходит звучание на этой или близкой частоте, то воздух, находящийся внутри резонатора, приходит в сильные колебания. При помощи системы резонаторов можно выделить этим способом главные составляющие сложного звука.



Рис. 53.

Другой способ заключается в том, что колебания сложных звуков записывают в виде кривых, которые затем разлагаются при помощи гармонического анализа (см. стр. 20) на простые составляющие. Примером таких записей могут служить приведенные на рис. 54 записи гласного звука „А“ при различной высоте основного тона, т. е. при пении его различными голосами.

Еще Гельмгольц, пользуясь своими резонаторами, показал, что каждому гласному звуку соответствует определенный характерный для него тон. Те обертоны звука голоса, которые близки к этому тону, особенно интенсивны при произнесении гласного звука. Так, при произнесении буквы „У“ сильные обертоны, имеющие частоту колебаний, близкую к 176 колебаниям в секунду, при произнесении „О“ наибольшей силой обладают звуки с частотой 466 колебаний в секунду, при произнесении „А“ — звуки с частотой 932. Для гласных „Е“ и „И“ не одна, а две области: для „Е“ имеем частоты 352 и 1864 колебаний в секунду, для „И“ — 176 и 2376.

Человеческий голос очень богат обертонами и усиление тех или иных обертонов достигается тем, что рот человека представляет собой резонатор, подобный резонатору Гельмгольца. Такой резонатор резко усиливает звуки, близкие к его собственному тону, и тем изменяет состав звука. Изменяя форму отверстия рта (напр. вытягивая губы при произнесении звука „У“), а также

объем полости рта, мы можем получить резонатор, отвечающий на различные тона. При произнесении звуков „Е“ и „И“ язык принимает такую форму, что полость рта делится на два объема, вследствие чего характерными для этих звуков являются два различных тона.

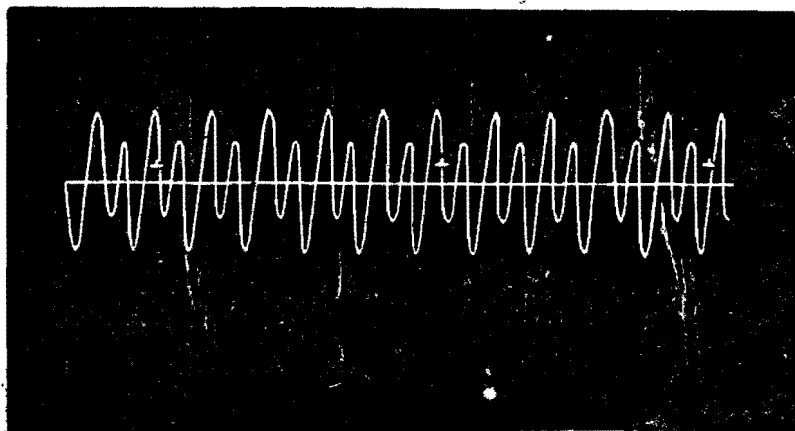
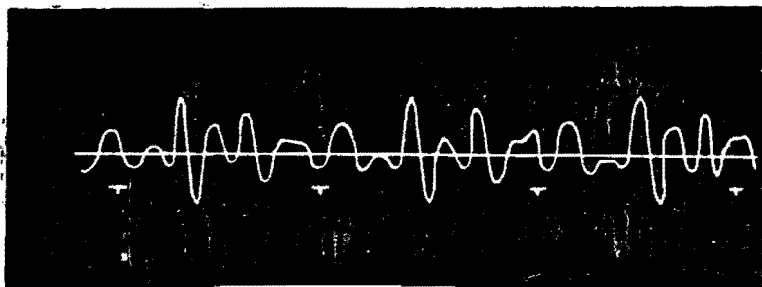


Рис. 54.

### § 27. Излучение звуковых волн.

Различные источники, как камертон, струна, трубы, резонаторы, отличаются между собой различной способностью создавать звуковые колебания воздуха. Эта способность зависит от двух главных обстоятельств: от запаса энергии в источнике звука и от отдачи энергии окружающему воздуху. Камертон, обладая значительной массой, может совершать колебания очень продолжительное время, но амплитуда его частиц невелика, и, что особенно важно, поверхность, через которую происходит передача колебаний окружающему воздуху, мала. Поэтому сила звука, создаваемая камертоном, очень невелика.

Она значительно увеличивается, если камертон касается ножкой поверхности стола. Хотя колебания, передаваемые доске и невелики, но вследствие бол-

шой поверхности доски происходит сильное увеличение энергии звуковых волн. Также усиливается звучание камертона, если он укреплен на крышке деревянного ящика (рис. 54 а), который играет роль резонатора. Сильное увеличение звучания сопровождается усиленным расходом энергии камертона, что ведет к более быстрому затуханию его колебаний.

Для той же цели в струнных инструментах струны натянуты на доску (деку), которая усиливает отдачу колебаний струны воздуху.

При излучении волн обычно наблюдается односторонний, направленный в определенную сторону поток звуковой энергии. Так, напр., мембрана испускает звук преимущественно в направлении, перпендикулярном к ее поверхности. Резонатор испускает звуковые волны преимущественно в том направлении, куда обращено его отверстие.

При таком направленном испускании звука можно обнаружить, что звуковые волны оказывают обратное действие на источник звука, производя на него давление; напр., легкий резонатор, возбуждаемый посторонним источником звука, начинает звучать и в то же время приходит в движение в сторону, противоположную той, куда он испускает звук. Это давление пропорционально энергии получаемых колебаний. Со всяким потоком звуковых волн связаны подобные явления, которые показывают, что звуковые волны производят давление, когда они встречают преграды, отражающие или же поглощающие их. Это явление имеет очень общий характер в учении о колебательных явлениях и наблюдается при действии каких угодно волн на поверхность тел. (См. § 52.)

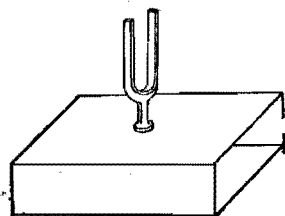


Рис. 54 а.

### § 28. Сила звука.

Сила звука есть собственно субъективное качество его, но оно тесно связано с объективным свойством, величиной потока энергии через единицу поверхности, перпендикулярной к направлению распространения волн. Энергия волн, как мы видели (стр. 23), пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, и поэтому объективной мерой силы звука может служить всякое действие звука, пропорциональное квадрату амплитуды.

Для измерения абсолютной силы звука можно применить различные методы, позволяющие создавать звук определенной силы, напр. помощью телефона, пропуская через него определенный ток звуковой частоты, или посредством особого прибора термофона, который состоит из проволоки, нагреваемой током звуковой частоты, что вызывает периодическое расширение воздуха, амплитуда которого может быть вычислена по силе тока. Такие приборы позволяют определить чувствительность нашего уха к звукам различной высоты тона.

При изменении последней чувствительность уха изменяется очень сильно. Так, при изменении числа колебаний от 50 до 2000 чувствительность увели-

чивается в миллион раз. Наибольшей чувствительностью ухо обладает при частоте в 2500 колебаний в секунду, когда самый слабый звук, еще воспринимаемый ухом, соответствует потоку звуковой энергии  $10^{-9}$  эрг/см<sup>2</sup>сек. Последнее число означает, что в одну секунду на 1 квадратный сантиметр попадает количество энергии, равное  $10^{-9}$  эрга. Эта энергия соответствует амплитуде колебаний в  $10^{-9}$  см, что составляет всего несколько сотых размера самих молекул воздуха. Такие ничтожные колебания уже достаточны для возбуждения слухового ощущения.  $10^{-9}$  эрг/см<sup>2</sup> сек. является порогом возбуждения.

Чувствительность уха принято обозначать обратной величиной этого порога возбуждения или слышимости; таким образом в области наибольшей чувствительности она измеряется числом  $10^9$ .

Как очень низкие звуки, так равно и высокие с числом колебаний выше 10 тысяч в секунду, воспринимаются только при значительно большей их силе.

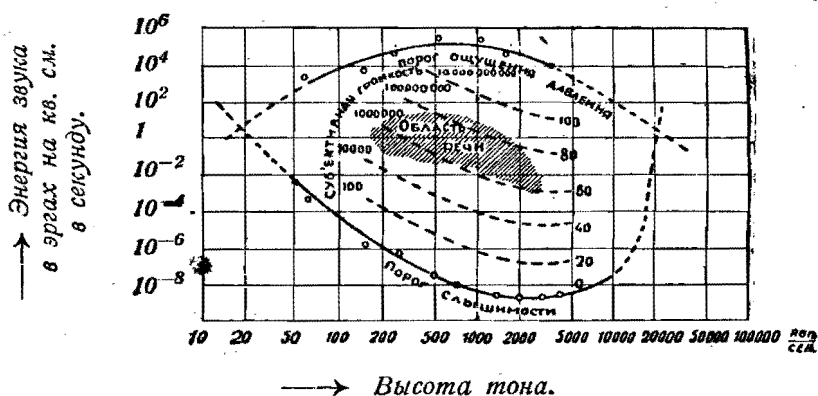


Рис. 55.

Порог слышимости возрастает, как показано на рис. 55, в обе стороны от области наибольшей чувствительности уха. Те силы звука, которые соответствуют обычной речи, изображены заштрихованной областью. При значительном возрастании силы звука ощущение звука переходит в ощущение давления, вызывающего боль. Эти предельные силы звука представлены на рис. 55 верхней кривой. Пересечение нижней и верхней кривых, очевидно, определяет ту область звуков, которые могут восприниматься ухом, не вызывая болевого ощущения.

Звуки, лежащие за пределом в 20 000 колебаний в секунду, уже не воспринимаются нормальным ухом (в зависимости от возраста и физиологических особенностей этот предел может передвигаться в ту или другую сторону). Эти звуки, имеющие большое значение в практических применениях, называются ультра-акустическими, или ультра-звуками. Для обнаруживания и измерения их мы можем пользоваться только их механическими действиями, напр. давлением, производимым ими на пластинку, поставленную на пути их распространения. Французский физик Ланжевен впервые выяснил их

значение для подводной сигнализации, причем для их возбуждения и улавливания он использовал особые свойства кристаллов кварца, благодаря которым кристалл, подвергнутый сжатию или растяжению, электризуется, а будучи подвергнут действию электрического поля, сжимается или расширяется. Эти явления называются пьезоэлектрическими.

Если на пути звуковых волн поместить пластинку, то движение частиц воздуха около нее, вызванное звуковыми волнами, стремится повернуть пластинку так, чтобы ее поверхность была перпендикулярна к направлению распространения звука. Продольные колебания частиц воздуха у поверхности пластинки изменяют свое направление, как показано на рис. 56. Но у верхней части пластинки направление движения частиц изменяется сильнее, чем в нижней, и поэтому давление в верхней части пластинки справа налево будет преобладать. При обратном направлении движения частиц воздуха будет преобладать давление на нижнюю часть пластинки, но слева направо. Во всех случаях пластинка будет испытывать вращающее действие звуковых волн. При этих изменениях направления движения частиц вдоль поверхности пластинки создаются разности давлений, пропорциональные кинетической энергии частиц воздуха.

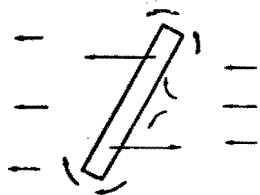


Рис. 56.

Легкий диск, подвешенный на тонкой нити, может поэтому служить для измерения силы звука. Под действием звуковых волн он поворачивается и закручивает нить. При небольших углах вращения величина последних пропорциональна энергии звуковых волн. Этот способ измерения силы звука, предложенный английским физиком Рэлеем, получил широкое распространение. Самый прибор носит название диска, или шайбы, Рэлея.

## § 29. Опытные данные о скорости звука.

Первые опыты для измерения скорости звука в воздухе были произведены на открытом воздухе, причем измерялось время между моментом подачи сигнала и моментом приема звука наблюдателем, находящимся на большом расстоянии от источника звука. Эти измерения производились многими наблюдателями в разных условиях. Они показали, что скорость звука не зависит от давления воздуха, но зависит от его температуры, от примеси к нему водяного пара (влажности), изменяющего его плотность, от направления ветра и также от силы звука. Очень тщательные опыты выполнены были Реньо, изучавшим распространение волн в трубах разного диаметра и разной длины (до 4900 м.). Они показали, что скорость звука уменьшается при уменьшении его силы и для слабых звуков стремится к некоторому пределу. В особенности сильно влияние силы звука от таких источников, как огнестрельные орудия; в этом случае скорость звука позади орудия оказывается значительно меньше, чем впереди. Кроме того, Реньо показал, что скорость звука зависит от диаметра трубы, возрастая в более широких трубах. В этом сказывается



влияние внутреннего трения в воздухе на скорость волн. Как окончательный результат этих опытов, была получена величина скорости звука в воздухе при температуре 0°:

$$u = 330,6 \text{ м/сек.}$$

Сравнение скоростей звука в разных газах производится обычно по способу Кундта посредством стоячих волн в трубах, наполненных соответствующими газами. Скорость звука зависит от отношения теплоемкости при постоянном давлении  $C_p$  к теплоемкости  $C_v$  при постоянном объеме. В одноатомных газах (напр., парах ртути, металлов или благородных газов) отношение теплоемкостей  $k = \frac{C_p}{C_v}$  равно 1,66, а для двухатомных молекул воздуха 1,4. Поэтому измерение скорости звука часто позволяет определить состав молекулы газа.

Определение скорости распространения волн в воде производилось по времени, которое требуется для передачи звукового сигнала через воду. Применение же способа Кундта для определения длины стоячих волн в наполненных жидкостью трубах показало, что стенки трубок своей податливостью искажают результаты измерений. Чем более прочны трубки, тем больше получаемая скорость.

Скорость продольных волн в твердых телах обычно определяется по длине стержня, в котором возбуждается продольная стоячая волна. Если продольные размеры стержня ( $a$ , следовательно, и длина волны) значительно больше, чем поперечные, то можно считать, что продольные колебания сопровождаются поперечными деформациями. Наоборот, при больших поперечных размерах, напр., при продольных колебаниях пластинки в направлении ее толщины, колебания происходят так, как если бы поперечное расширение и сжатие было невозможно. В этом случае упругость должна быть больше и соответственно увеличивается и скорость продольных волн.

### § 30. Сочетание музыкальных звуков. Комбинационные тона.

При одновременном восприятии двух звуков, отличающихся высотой тона, мы имеем созвучие, которое в зависимости от интервала между тонами вызывает различные ощущения. Если интервал мал, то мы слышим биения, т. е. периодические изменения силы звука. При возрастании интервала, а следовательно и числа биений в секунду, получается неприятное ощущение дребезжания и шереховатости звука, которое особенно сильно чувствуется, когда число биений достигает 30 в сек. Мы имеем в этом случае диссонанс. Неприятные ощущения, связанные с диссонансом, конечно, представляют субъективное явление, и допустимость диссонансов в музыке понятие условное, но оно связано с объективными условиями возбуждения колебаний в нашем ухе и воздействия его на тот аппарат, который позволяет различать звуки по высоте тона.

Если звуки содержат кроме основного тона еще и обертоны, то диссонанс созвучия может быть обусловлен неподходящей величиной интервала между какими-нибудь обертонами или между основным тоном одного источника и обертоном другого.

При звучании двух различных тонов, если они достаточно сильны, можно слышать наряду с основными тонами более низкий тон, число колебаний которого равно разности чисел колебаний основных тонов. Этот разностный комбинационный тон однако имеет объективное существование только в нашем ухе, вне его он не существует, и в этом смысле он называется также субъективным комбинационным тоном. Комбинационные тона могут давать не только основные тона, но и их обертоны.

Как было показано впервые Гельмгольцем, комбинационные тона возникают под действием двух простых тонов, если в теле, совершающем колебания, возникают упругие силы, пропорциональные не первой степени перемещения, а, напр. квадрату его, т. е. если к ним не применим закон Гука. Таким свойством обладает как раз барабанная перепонка нашего уха. В виду особенности ее строения она представляет большее сопротивление вдавливанию ее внутрь, чем в обратном направлении. Эта несимметрия становится заметной при сильных звуках и ведет к появлению новых колебаний, которые не содержатся в волнах, приходящих извне. Если, напр. звук строго определенного тона действует на такую мембрану, то одновременно с основным колебанием мембрана начинает совершать колебания, соответствующие гармоническим обертонам, которых не было в возбуждающем звуке. Амплитуда обертонов обычно растет пропорционально квадрату амплитуды возбуждающего колебания и при усилении последнего может достигать большой интенсивности.

Вследствие той же причины одновременное действие двух колебаний с числом колебаний  $n_1$  и  $n_2$  помимо обертонов каждого из них создает еще такие колебания, которые соответствуют основным комбинационным тонам: разностному и суммовому, т. е. имеют числа колебания  $n_1 - n_2$  и  $n_1 + n_2$ .

Комбинационные тона, особенно разностные, играют заметную роль в ощущениях консонанса и диссонанса. Кроме того, они могут вносить значительные искажения в звуки, воспринимаемые ухом.

## ГЛАВА III.

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ.

#### § 31. Переменные токи.

Переменные токи мы получаем в замкнутой цепи под действием переменной электродвижущей силы (эдс). Последняя создается или с помощью переменного магнитного поля, или движением проводников в постоянном магнитном поле. Нас интересуют здесь главным образом периодически меняющиеся токи и в частности такие, сила которых испытывает простые гармонические колебания.

Осуществить такие колебания можно следующим простым способом. Положим, что мы имеем один замкнутый виток проволоки  $S$ , находящийся в постоянном и однородном (т. е. имеющем повсюду одинаковую силу и направление) магнитном поле  $H$  (рис. 57).

Площадь  $S$ , ограниченная витком, пронизывается пучком магнитных силовых линий, и число их  $N$  определяет величину магнитного потока

через площадь контура. Если направление магнитного поля  $H$  перпендикулярно к площади  $S$ , то поток

$$N = HS. \quad (48)$$

Если повернуть виток  $S$  вокруг оси  $AB$ , лежащей в его плоскости, на угол  $\varphi$ , то величина потока изменяется пропорционально  $\cos\varphi$ , а именно

$$N = HS \cos\varphi. \quad (49)$$

Положим, что проводник  $S$  вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , так что его плоскость поворачивается за время  $t$  на угол  $\varphi = \omega t$ , тогда магнитный поток  $N$  будет изменяться согласно формуле

$$N = HS \cos\omega t \quad (50)$$

или совершать гармонические колебания с частотой  $\omega$ .

По закону электромагнитной индукции в таком проводнике индуцируется эдс  $e$ , равная

$$e = - \frac{dN}{dt} \quad (51)$$

или вследствие (50)

$$e = HS\omega \sin\omega t. \quad (52)$$

Таким образом переменная эдс  $e$ , совершающая простые гармонические колебания, может быть осуществлена, например, равномерным вращением любого замкнутого проводника в земном магнитном поле или в искусственно созданном поле электромагнита и т. п. Но можно также получить такую эдс, заставляя вращаться магнитное поле, напр. вращая электромагнит.

Эдс вызывает появление тока  $i$ , который, в свою очередь, создает магнитный поток, пронизывающий площадь  $S$ . Величина этого потока  $N'$  пропорциональна силе тока  $i$ , т. е. равна

$$N' = Li, \quad (53)$$

где  $L$  — коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом самоиндукции проводника. Если ток переменный, а следовательно создаваемый им магнитный поток тока переменный, то в проводнике индуктируется переменная эдс  $e'$ , равная

$$e' = - \frac{dN'}{dt} = -L \frac{di}{dt}. \quad (54)$$

Эта „внутренняя“ эдс самоиндукции  $e'$  вместе с „внешней“ эдс  $e$  обуславливают силу тока  $i$  по закону Ома в соответствии с сопротивлением  $r$  проводника

$$e + e' = ri.$$

„Падение напряжения“  $ri$  при прохождении тока  $i$  через сопротивление  $r$ , в случае постоянного тока, равняется обычно внешней или „приложенной извне“ эдс. При переменном токе  $ri$  может быть значительно меньше  $e$  и иногда в проводниках малого сопротивления можно вовсе пренебречь падением напряжения. В этом случае внешняя эдс  $e$  почти уравнивается внутренней  $e'$  и сумму их можно считать приближенно равной нулю:

$$e + e' = 0.$$

В этом случае (случай преобладающей самоиндукции) мы имеем согласно (54):

$$e = -e' = L \frac{di}{dt},$$

а вследствие равенства (51):

$$-N = Li.$$

Таким образом переменный ток  $i$  в этом случае пропорционален величине переменного магнитного потока  $N$ , т. е. равен:

$$i = - \frac{HS}{L} \cos \omega t. \quad (55)$$

Знак минус указывает направление тока согласно правилу, которое связывает положительное направление магнитного потока  $N$  с положительным направлением тока в контуре  $S$ .

Сравнивая формулы (52) и (55), мы видим, что фазы колебаний эдс  $e$  и силы тока  $i$  отличаются на  $90^\circ$ , а амплитуды, которые обозначим буквами

$e_0 = HS\omega$  и  $i_0 = \frac{HS}{L}$ , находятся в отношении  $e_0 : i_0 = L\omega$ . Это отношение по аналогии с законом Ома мы называем индуктивным сопротивлением проводника.

Другой крайний случай, который мы рассмотрим, это — случай преобладающего сопротивления, когда падение напряжения  $ri$  настолько больше эдс самоиндукции  $e'$ , что последней можно пренебречь. В этом случае  $e = ri$ , и следовательно:

$$i = \frac{HS\omega}{r} \sin \omega t = \frac{e_0}{r} \sin \omega t, \quad (56)$$

и следовательно фазы эдс и силы тока одинаковы.

В общем случае, когда

$$e = -e' + ri = L \frac{di}{dt} + ri, \quad (57)$$

мы можем силу тока выразить следующим образом:

$$i = i_0 \sin (\omega t + \varphi).$$

В самом деле, понятно, что эдс, периодически изменяющаяся с частотой  $\omega$ , создает и периодический ток той же частоты. Амплитуду  $i_0$  и фазу  $\varphi$  мы пока оставляем неизвестными и попытаемся их определить так, чтобы они удовлетворяли уравнению (57). Если нам это удастся, то тем самым будет показано, что предложенный нами, как решение уравнения (57), гармонический переменный ток  $i$  в любой момент удовлетворяет этому уравнению, а так как решение может быть только одно, то наше решение и окажется правильным. Для определения величин  $i_0$  и  $\varphi$  подставим наше значение  $i$  в уравнение (57). Мы получим:

$$e_0 \sin \omega t = Li_0 \omega \cos (\omega t + \varphi) + ri_0 \sin (\omega t + \varphi)$$

или

$$e_0 \sin \omega t = Li_0 \omega \cos \omega t \cos \varphi - Li_0 \omega \sin \omega t \sin \varphi + ri_0 \sin \omega t \cos \varphi + ri_0 \cos \omega t \sin \varphi.$$

Все члены этого уравнения являются периодическими функциями времени. Уравнение должно быть справедливо в любой момент. В моменты времени, когда  $\omega t = 0, \pi, 2\pi, \dots$  все члены, содержащие  $\sin \omega t$ , равны нулю, а  $\cos \omega t = 1$  и уравнение превращается в:

$$0 = Li_0 \omega \cos \varphi + ri_0 \sin \varphi,$$

откуда получаем

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{L\omega}{r}.$$

Этот результат определяет фазу  $\varphi$ .

Применяя то же уравнение к моменту времени, когда  $\omega t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$ , мы уничтожим в нем все члены, содержащие  $\cos \omega t$ , а  $\sin \omega t = 1$ .

$$e_0 = -Li_0 \omega \sin \varphi + ri_0 \cos \varphi.$$

Возводя в квадрат оба уравнения, полученные нами для моментов  $\omega t = 0$  и  $\omega t = \frac{\pi}{2}$ , и складывая их, мы получаем

$$e_0^2 = L^2 i_0^2 \omega^2 + r^2 i_0^2$$

или, наконец,

$$\frac{e_0}{i_0} = \sqrt{L^2 \omega^2 + r^2}.$$

Это уравнение заменяет собою закон Ома для цепи переменного тока, обладающей как сопротивлением  $r$ , так и самоиндукцией  $L$ . Стоящий в правой части корень мы можем назвать сопротивлением цепи переменному току, причем оно складывается из индуктивного сопротивления  $L\omega$  и омического  $r$  по тому же правилу, как гипотенуза из двух катетов.

Между электрическими колебаниями и колебаниями механическими можно провести следующую аналогию: электродвижущая сила соответствует механической силе, сила тока — скорости перемещения материальной точки, коэффициент самоиндукции — массе точки, сопротивление — коэффициенту трения. Уравнение (57) аналогично уравнению движения под действием внешней силы  $f = e$  точки, обладающей массой  $m = L$  и испытывающей силу трения, пропорциональную скорости движения. Наконец, перемещению точки должен соответствовать интегральный ток, или количество электричества  $q$ , которое переносится в определенном направлении через сечение проводника, так как

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (58)$$

В дальнейшем нам придется неоднократно иметь дело с величиной производных по времени от переменных величин, совершающих гармонические колебания. В таких случаях мы можем пользоваться следующим общим правилом: амплитуда производной в  $\omega$  раз больше исходной функции, а начальная фаза ее на  $90^\circ$  опережает фазу последней. Так напр., если сила тока изменяется по формуле

$$i = i_0 \cos \omega t,$$

то заряд  $q$ , связанный с силой тока соотношением (58) (иначе, интегральный ток), выражается следующим образом:

$$q = q_0 \sin \omega t,$$

причем  $i_0 = q_0 \omega$ .

Все сказанное справедливо и в случае сложных цепей, напр. катушки, состоящей из многих витков. Формула (54) сохраняет свою силу, но коэффициент самоиндукции сложным образом зависит от размеров витков, их числа и взаимного расположения, а также от материала, заполняющего пространство внутри катушки. Если катушка намотана на железные сердечники, то в виду большой магнитной проницаемости железа магнитный поток сильно возрастает по сравнению с катушкой без железного сердечника, и поэтому коэффициент самоиндукции такой катушки и ее индуктивное сопротивление также становятся значительно большими.

### § 32. Емкость в цепи переменного тока.

В случае незамкнутой цепи условия существования в ней переменного тока несколько усложняются: мы должны принимать во внимание еще емкость цепи. Рассмотрим сначала случай конденсатора, включенного в места разрыва проводочного контура. На обкладках конденсатора может образоваться разность потенциалов  $V$ . Если заряд его  $q$ , то

$$q = CV,$$

где  $C$  емкость конденсатора. При существовании переменного тока в проводнике, соединяющем обкладки конденсатора, заряд конденсатора равен интегральному току

$$q = \int i dt,$$

или

$$i = C \frac{dV}{dt}. \quad (59)$$

При гармонических колебаниях  $V$  и  $i$  амплитуды их связаны соотношением:  $i_0 = C\omega V_0$ , а фазы отличаются на  $90^\circ$ . Заряды в конденсаторе вызывают в диэлектрике между его обкладками электрическое смещение  $\epsilon \frac{E}{4\pi}$ , где  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная, а  $E$  электрическая сила в диэлектрике. Изменение заряда  $q$  вызывает ток смещения

$$\frac{\epsilon}{4\pi} \frac{dE}{dt} = \frac{dq}{dt} = i.$$

Таким образом ток  $i$ , идущий в проводнике, замыкается в конденсаторе равным ему током смещения.

Разберем теперь, какое влияние оказывает на силу тока  $i$  включение в цепь конденсатора  $C$ . Если внешняя эдс  $e = e_0 \sin \omega t$ , то сумма эдс  $e$  и  $e' = -L \frac{di}{dt}$  равняется разности потенциалов на обкладках конденсатора  $V$  (при этом мы пренебрегаем омическим падением потенциала  $ri$  на проводнике):

$$e - L \frac{di}{dt} = V = \frac{q}{C}. \quad (60)$$

Этому уравнению можно удовлетворить, положив  $i = i_0 \sin \omega t$ , так как в этом случае все члены его пропорциональны  $\sin \omega t$ . Приравнявая коэффициенты синуса в правой и левой части уравнения (60), мы получим:

$$e_0 - L\omega i_0 = -\frac{1}{C\omega} i_0. \quad (61)$$

Амплитуда эдс пропорциональна амплитуде силы тока, и отношение между ними может быть рассматриваемо как сопротивление цепи переменному току

$$\frac{e_0}{i_0} = L\omega - \frac{1}{C\omega} = R. \quad (62)$$

Если сравнить этот результат с тем определением сопротивления, которое

вытекает из закона Ома, то станет ясно, что величина  $R$  существенно отличается от обычного сопротивления. При обычном омическом сопротивлении не только амплитуды переменных эдс и силы тока должны быть между собой пропорциональны, но и фазы их равны. Самоиндукция и емкость, сохраняя первое условие, создают однако сдвиг фазы между эдс и силой тока на  $90^\circ$ . При максимальном значении эдс сила тока равна нулю и наоборот. Мы должны в виду этого различать обычное сопротивление от реакции цепи или ее реактивного сопротивления, частным случаем которого является индуктивное сопротивление предыдущего параграфа.

Величина реактивного сопротивления зависит от частоты колебаний, с одной стороны, а с другой — от величин емкости и самоиндукции. Мы можем, согласно (62), представить его как сумму положительного сопротивления самоиндукции и отрицательного сопротивления емкости. При таком соотношении  $L$  и  $C$ , когда  $LC\omega^2 = 1$ , оба сопротивления взаимно уравниваются, и реактивное сопротивление цепи равно нулю. В этом случае, как и при резонансе механических колебаний (стр. 29), конечная эдс (поскольку мы пренебрегаем омическим сопротивлением) будет создавать непрерывно растущую амплитуду силы тока, или же для поддержания конечной амплитуды силы тока не нужно иметь приложенной извне эдс. Условие равенства есть условие электрического резонанса и в то же время нулевого значения реактивного сопротивления цепи.

Таким образом введение конденсатора в цепь переменного тока уменьшает реактивное сопротивление цепи и может его сделать равным нулю или отрицательным. В последнем случае амплитуда тока  $i_0$  остается конечной и пропорциональной амплитуде внешней эдс, но фазы их отличаются не на  $90^\circ$ , а на  $270^\circ$ .

### § 33. Векторные диаграммы переменного тока.

Как мы видели (стр. 13) гармоническое колебание может быть представлено вектором, длина которого пропорциональна амплитуде, а направление изображает фазу колебания. Пусть вектор  $\overline{OJ}$  (рис. 58) представляет силу переменного тока. Если  $r$  сопротивление проводника, подчиняющегося закону Ома, то эдс при прохождении тока  $i$  может быть представлена тоже вектором  $\overline{OE}$ , пропорциональным и параллельным вектору  $\overline{OJ}$ . Эдс при прохождении тока по проводнику с коэффициентом самоиндукции  $L$  имеет амплитуду  $\omega Li_0$ , а по направлению изображается вектором  $\overline{OE_1}$ , повернутым на  $90^\circ$  в направлении положительного вращения (против часовой стрелки). Наконец, разность потенциалов  $V$  на обкладках конденсатора с емкостью  $C$  может быть представлена вектором  $\overline{OE_2}$  длина которого  $\frac{i_0}{C\omega}$ , а направление противоположно вектору  $\overline{OE_1}$ .

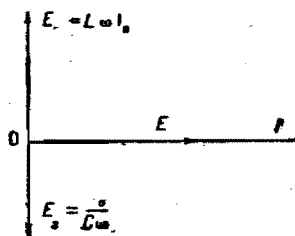


Рис. 58.



Геометрическая сумма всех этих векторов  $OE$  дает ту эдс, которая должна быть приложена к данной цепи для того, чтобы в ней установился переменный ток.

Так как все эти векторы по величине пропорциональны амплитуде тока  $i_0$ , то мы можем относить (условно) понятие векториальности к сопротивлениям, изображая сопротивление обычное и реактивное, взаимно перпендикулярными векторами  $\vec{R}_1$  и  $\vec{R}_2$ . Величина вектора, представляющего их сумму, имеет амплитуду, равную

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} = \sqrt{R_1^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad (63)$$

и направление вектора  $\vec{OE}$ . Таким образом амплитуда эдс, создающая ток с амплитудой  $i_0$ , равна

$$e_0 = i_0 \sqrt{R_1^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}. \quad (64)$$

Корень в правой части представляет полное (обычное и реактивное) сопротивление цепи, а в случае резонанса, когда выражение в скобках равно нулю, полное сопротивление цепи равно обычному сопротивлению  $R$ . По фазе электродвижущая сила опережает ток на угол  $\varphi$ , тангенс которого равен

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}. \quad (65)$$

Формулы (64) и (65) относятся к цепи переменного тока, заключающей в себе как обычное сопротивление, так и самоиндукцию и емкость.

### § 34. Машины переменного тока.

Машины переменного тока, называемые также альтернаторами, состоят из электромагнита  $M$  и якоря  $A$  (рис. 59). Каждый из них состоит из

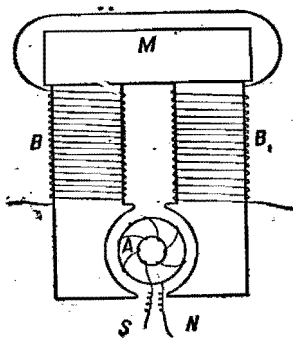


Рис. 59.

железного сердечника и обмотки. Обмотки возбуждения  $B$  и  $B'$ , по которым идет постоянный намагничивающий ток, создают магнитный поток между полюсами электромагнита  $NS$  (рис. 59). В промежутке между наконечниками электромагнита и вращающимся сердечником якоря этот поток пересекается движущимися витками обмотки якоря, как показано на рис. 60 а), и индуцирует в них переменную эдс. Концы обмотки якоря присоединены к двум медным коль-

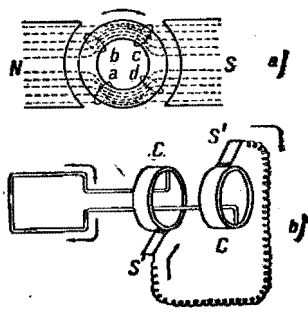


Рис. 60.

цах переменную эдс. Концы обмотки якоря присоединены к двум медным коль-

цам коллектора  $CC$  (рис. 60 в), по которым скользят угольные или металлические щетки  $S$  и  $S'$ . От щеток ток идет во внешнюю цепь, содержащую проводники, обладающие самоиндукцией  $L$  и сопротивлением  $r$ , и конденсаторы с емкостью  $C$ .

Машины индукторного типа (рис. 61) не имеют вращающейся обмотки якоря. Как обмотка возбуждения, так и обмотки, дающие переменный ток, расположены неподвижно на полюсах статора  $S$ , которые создают магнитное поле, но не постоянное, а периодически меняющееся. Изменение вызывается тем, что железный диск, ротор  $R$ , снабженный зубцами  $M$ , вращаясь, изменяет магнитное сопротивление промежутка между соседними полюсами. Наибольший магнитный поток имеем, когда зубцы ротора расположены против полюсов статора, а наименьший, когда они находятся в промежутке.

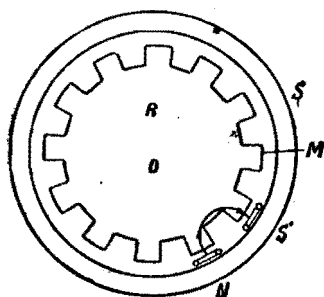


Рис. 61.

Индукторные машины особенное значение приобретают, когда необходимо получить от машины возможно большую частоту. Скорость вращения ротора, который вовсе не несет обмотки, может быть доведена до предельных значений, допускаемых прочностью материала. Число полюсов статора и зубцов ротора, конечно, может быть увеличено, причем пропорционально увеличивается и частота переменного тока. Таким образом частота может быть доведена до 20 000 в секунду и даже более.

### § 35. Средние и эффективные значения. Выпрямление тока.

При измерениях силы переменного тока или величины переменного напряжения только в исключительных случаях приходится измерять непосредственно их амплитуды и фазы. Обычно измерительные приборы дают лишь средние значения за определенный промежуток времени. Если ток или напряжение изменяются гармонически, то их среднее значение равно нулю, когда это среднее значение определяется за один период или за несколько периодов, или за очень долгий промежуток времени. При более сложном периодическом изменении, которое может быть представлено рядом Фурье (§ 7, стр. 20), среднее значение величины равняется постоянному члену, постоянной составляющей данной величины. Каждый из остальных членов принимает как положительные, так и отрицательные значения, и их среднее значение равно нулю. Только при выпрямлении тока, т. е. пропуская ток одного направления и не пропуская ток обратный, или меняя его направление в те моменты, когда он должен переходить к отрицательным значениям, мы получаем возможность найти среднее значение его абсолютных величин  $\bar{i}$ , связанное с его амплитудой  $i_0$  соотношением:

$$\bar{i} = \frac{2i_0}{\pi} \approx 0,64 i_0.$$

Выпрямление тока производится при помощи механических приспособлений для переключения тока, коммутаторов, к которым относится и коллектор в динамомашине постоянного тока. Коллектор представляет собой цилиндр  $C$  (рис. 62), состоящий из ряда изолированных медных пластин  $m$ , сегментов, которые соединены с различными точками обмотки якоря. Щетки  $b$ , угольные или медные, скользят по поверхности цилиндра при его вращении и таким образом присоединяют внешнюю цепь к тем точкам обмотки, на которых напряжение имеет всегда один и тот же знак.

Другой способ выпрямления заключается в том, что ток пропускается через проводник с односторонней проводимостью. В таких проводниках сопротивление прохождению тока в одном направлении во много раз больше сопротив-

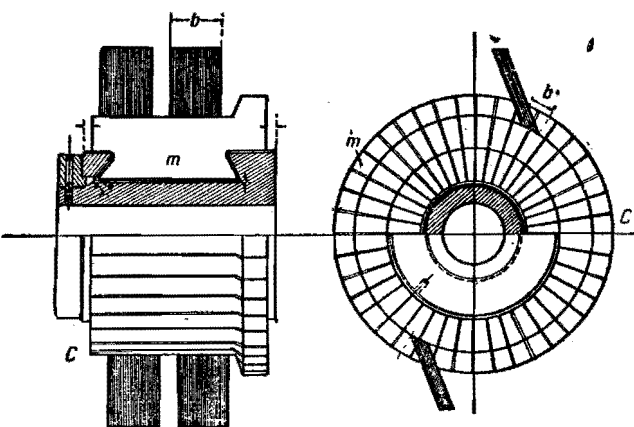


Рис. 62.

ления току противоположного направления. Это свойство называется униполярностью и самые проводники униполярны и. Униполярностью обладают обычно газообразные проводники, если условия образования носителей электричества, ионов и электронов изменяются при перемене направления тока. Например, если источником электронов является накаленный электрод в пустотном вы-

прямителе, то перенос зарядов возможен только в одном направлении, так как он производится только электронами, образующимися у накаленного электрода и имеющими отрицательный заряд. Ток будет переноситься только в течение того времени, когда накаленный электрод обладает отрицательным потенциалом по отношению к другому холодному электроду.

Точно так же для выпрямления тока применяются: ртутная дуга, разряд в разреженных газах, жидкие проводники (электролиты) с электродами из разных металлов (напр., свинца и алюминия в растворе соды), твердых неметаллических проводников (окись меди) и пр. Особенный интерес представляет униполярность некоторых плохопроводящих кристаллических тел, которые служат для приготовления кристаллических детекторов (карборунд, цинкит и т. п.). Они замечательны тем, что и при очень высоких частотах переменного напряжения так же хорошо выпрямляют ток, как при низких.

Весьма важный и наиболее распространенный способ измерения переменного тока основан на определении теплового эффекта, производимого током, проходящим по проволоке. Так как нагревание проводников, пропорциональное выделяемому током джоулеву теплу, зависит от квадрата его силы, то при

перемене направления тока тепловое действие его не изменяется. При гармонических колебаниях тепловой эффект пропорционален среднему значению квадрата силы тока за один период, это среднее значение равно половине квадрата амплитуды тока

$$\frac{1}{T} \int_0^T i_0^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{i_0^2}{2}.$$

Корень квадратный из этой величины называется эффективной величиной силы тока

$$i_{eff} = \frac{i_0}{\sqrt{2}} = 0,7 i_0.$$

Эффективные значения силы тока могут быть получены и при измерении механических взаимодействий между проводниками, по которым проходит один и тот же ток. Так, напр., две катушки ( $A$  и  $A_1$ , рис. 63), по которым идет тот же ток, стремятся установиться так, чтобы их оси были параллельны и направления токов в них имели одно и то же направление. Если оси катушек составляют угол  $\alpha$ , то они испытывают вращательный момент, пропорциональный квадрату тока  $i$  и синусу угла  $\alpha$ . При взаимной перпендикулярности осей средний вращающий момент достигает наибольшей величины. Прибор, основанный на измерении этого вращательного момента, называется электродинамометром.

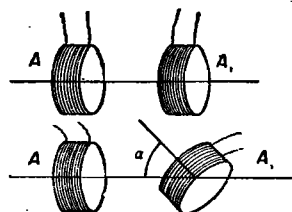


Рис. 63.

Особое применение имеет электродинамометр при пропускании через его катушки различных токов, имеющих различные амплитуды и фазы. Механический вращательный момент в этом случае зависит не только от произведения амплитуд токов, но и от их разности фаз  $\varphi$ . Если фазы совпадают, то сила вращения достигает максимума; если они отличаются на  $90^\circ$ , то сила в среднем равна нулю (так как среднее значение произведения  $i_1 \sin \omega t, i_2 \cos \omega t = \frac{i_1 i_2}{2} \sin 2\omega t$  равно нулю), и если  $\varphi$  имеет промежуточное значение, то среднее значение момента вращения пропорционально  $\cos \varphi$ . Это дает возможность измерять при помощи электродинамометра не только эффективные значения сил токов, но и их разности фаз.

Разность фаз между эдс и силой тока имеет особое значение при определении средней величины работы, которая производится источниками переменного тока в единицу времени, или мощности его. При постоянном токе мощность  $P$  источника (машины, батареи) измеряется просто произведением эдс на силу тока  $i$ .

$$P = ei.$$

При переменном токе величина работы за элемент времени  $dt$  также равняется  $eidt$ , но средняя величина работы равна

$$\frac{1}{T} \int_0^T eidt = \frac{e_0 i_0}{2} \cos \varphi = e_{eff} \cdot i_{eff} \cdot \cos \varphi.$$

т. е. равна произведению эффективных величин эдс и силы тока и косинуса разности фаз  $\varphi$ .

Таким образом при конечных значениях  $e_0$  и  $i_0$  работа может быть в среднем равна нулю, если в течение одного полупериода она положительна, а в течение другого — отрицательна.

### § 36. Трансформаторы.

Трансформаторы переменного тока служат для преобразования амплитуд как эдс, так и сил тока, даваемых каким-нибудь источником переменного тока, напр. машинами. Они состоят обычно из двух обмоток, первичной и вторичной, имеющих различное число витков; эти обмотки надеваются на общий железный сердечник, образующий или замкнутое кольцо, или незамкнутый стержень (рис. 64) причем для избежания паразитных токов в самом сердечнике он делается из тонкого листового железа с изолирующими, напр. бумажными, прокладками между отдельными листами.

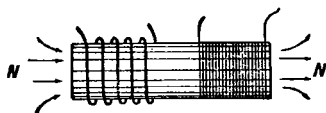


Рис. 64.

Обычное омическое сопротивление обмоток  $r_1$  и  $r_2$  делается возможно малым, но сопротивление переменному току может быть очень велико, так как индуктивное сопротивление зависит от внутренней эдс, индуцируемой переменным магнитным потоком  $N$  в обмотке, а магнитный поток в сердечнике вследствие большой магнитной проницаемости железа может достигать больших значений даже при малых токах в обмотке. Поэтому часто можно игнорировать обычное сопротивление обмоток и падение в них напряжения при прохождении токов первичного  $i_1$  и вторичного  $i_2$ . В таком случае внешняя эдс  $e_1$ , питающая первичную обмотку, может быть приравнена внутренней эдс первичной обмотки, так как обе они пронизываются одним и тем же периодически меняющимся потоком магнитной индукции, а внутреннюю эдс вторичной обмотки можно считать равной падению напряжения во внешнем сопротивлении  $R$ , на которое замкнута вторичная обмотка, поскольку мы пренебрегаем омическим падением потенциала на этой обмотке.

Магнитный поток, пронизывающий площадь различных витков, один и тот же, если он весь идет внутри железного сердечника. Тогда в каждом витке индуцируется одна и та же эдс равная  $-\frac{dN}{dt}$ , и, следовательно, отношение первич-

ной и вторичной эдс равняется отношению числа витков обмоток:  $e_1 : e_2 = = n_1 : n_2$ . Это отношение называется коэффициентом трансформации.

Таким образом амплитуда вторичной эдс  $e_2$  может быть сделана как больше, так и меньше амплитуды первичной  $e_1$ , и соответственно мы будем иметь трансформатор, повышающий или понижающий напряжение.

Если внешнее сопротивление  $R$  вторичной цепи трансформатора очень велико, вторичный ток  $i_2$  очень мал, и магнитный поток определяется величиной первичного тока  $i_1$ . В этом случае мы называем работу трансформатора холостой и трансформатор считаем ненагруженным. Величину магнитного потока можно найти, зная величину магнитодвижущей силы и величину магнитного сопротивления сердечника. Под магнитодвижущей силой мы понимаем величину работы, которую совершает магнитная сила, действующая на магнитный полюс  $+1$ , когда он описывает замкнутый путь. Если этот путь охватывает проводник, по которому идет ток  $i$ , то магнитодвижущая сила равна  $4\pi i$ . В трансформаторе мы можем представить движение магнитного полюса вдоль какой-нибудь замкнутой силовой линии в сердечнике. Если длина ее  $l$ , а сила магнитного поля  $H$  вдоль нее одна и та же (что справедливо лишь при условии, чтобы все силовые линии шли параллельно), то эта работа равна  $Hl$  и в то же время она равна  $4\pi(n_1 i_1 + n_2 i_2)$ , так как каждая силовая линия охватывает  $n_1$  оборотов первичной обмотки, по которой идет ток  $i_1$ , и  $n_2$  оборотов вторичной с током  $i_2$ .

$$Hl = 4\pi(n_1 i_1 + n_2 i_2). \quad (65)$$

Таким образом магнитодвижущая сила, создаваемая обеими обмотками, пропорциональна числу ампервитков, т. е. произведению числа витков на силу тока в них, причем последняя обычно выражается в амперах. В формуле (65) сила тока предполагается выраженной в абсолютных электромагнитных единицах, которые в 10 раз больше ампера.

Чтобы найти величину магнитного потока в железном сердечнике, нам необходимо умножить найденную величину магнитной силы на магнитную проницаемость  $\mu$  и на сечение  $S$ , которое равномерно плотно заполняют силовые линии (линии магнитной индукции):

$$N = \mu HS = \frac{4\pi \mu S}{l} (n_1 i_1 + n_2 i_2). \quad (66)$$

Магнитный поток зависит как от первичного, так и от вторичного тока, но в то время как фазы магнитного потока  $N$  и первичного тока  $i$  одинаковы (при холостой работе поток  $N$  создается исключительно током  $i_1$ ), фаза вторичного тока (по правилу Ленца) противоположна фазе магнитного потока. Поэтому при возрастании амплитуды вторичного тока  $i_2$  амплитуда первичного должна тоже возрастать для того, чтобы магнитный поток сохранял свою величину. Чем меньше внешнее сопротивление  $R$  вторичной цепи, тем больше как вторичный, так и первичный ток, тем сильнее нагружен трансформатор.

Реакция вторичной цепи трансформатора, которая представлена вторым

слагаемым в скобках формулы (66), стремится уменьшить магнитный поток, но отчасти по крайней мере компенсируется возрастанием первичного тока  $i_1$ . Эта компенсация является практически полной до тех пор, пока падение напряжения  $r_1 i_1$  в первичной цепи трансформатора не делается настолько большим, что внутренняя эдс, равная

$$n_1 \frac{dN}{dt} = e_1 - r_1 i_1. \quad (67)$$

уже не уравнивает внешней эдс  $e_1$ . При дальнейшем возрастании токов в трансформаторе амплитуда магнитного потока уменьшается.

Предельный случай, когда внешнее сопротивление  $R$  очень мало, дает наибольший ток в трансформаторе. Каждое из слагаемых в формуле (66)  $an_1 i_1$  и  $an_2 i_2$  при этом делаются во много раз больше их суммы (по абсолютному значению), поэтому в этом случае, который мы можем назвать случаем трансформации тока, можно с достаточным приближением считать, что  $n_1 i_1 = -n_2 i_2$  или что силы токов находятся в отношении, обратном коэффициенту трансформации:

$$i_1 : i_2 = -n_2 : n_1. \quad (68)$$

Для того чтобы определить величину первичного тока  $i_1$ , мы исключим из уравнения (67) величину  $N$ , пользуясь тем, что во вторичной обмотке

$$e_2 = -n_2 \frac{dN}{dt} = Ri_2. \quad (69)$$

Из (67) и (69) получаем:

$$e_1 = r_1 i_1 - \frac{n_1}{n_2} Ri_2, \quad (70)$$

или же вследствие (68):

$$e_1 = i_1 \left( r_1 + \frac{n_1^2}{n_2^2} R \right). \quad (70')$$

Таким образом первичный ток зависит как от сопротивления первичной обмотки, так и от нагрузки вторичной цепи, причем внешнее сопротивление  $R$  входит в формулу (70') с коэффициентом, равным квадрату коэффициента трансформации.

В предыдущем мы рассмотрели наиболее простой случай, когда трансформатор нагружен обычным сопротивлением. В этом случае фазы внешней эдс  $e_1$  и первичного тока одинаковы. Если во внешней цепи включены проводники, имеющие самоиндукцию, или емкости, то разность фаз между током и эдс может принимать различные значения. Как мы видели выше (стр. 84), работа, совершаемая источником переменного тока, в этом случае пропорциональна  $\cos \phi$ .

Трансформация переменных токов имеет большое значение для техники передачи электрической энергии на большие расстояния. Для уменьшения потерь в проводах переменный ток преобразуется при помощи повышающего трансформатора в ток высокого напряжения, который и передается по про-

водам линии высокого напряжения. Так как сила тока согласно (68) при этом уменьшается, то уменьшаются и потери в проводах и притом в отношении квадрата коэффициента трансформации, так как потери пропорциональны квадрату силы тока.

Трансформация напряжения дает возможность получать высокое напряжение для питания различного рода пустотных приборов, как рентгеновы трубки и т. п. В этих случаях трансформаторы могут питаться не переменным, а прерывистым током, и обычно делались с незамкнутым сердечником, что позволяет увеличивать число прерываний. Катушка Румкорфа является наиболее известным образцом такого типа трансформаторов.

### § 37. Колебательный разряд.

Как мы уже видели в § 32, в цепи, состоящей из проводников с коэффициентом самоиндукции  $L$  и конденсатора с емкостью  $C$ , при возбуждении в ней электрических колебаний под действием внешней эдс, имеющей частоту  $\omega$ , обнаруживаются явления резонанса. Для этого частота  $\omega$  должна быть определена следующим образом:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}. \quad (71)$$

Эта частота в то же время есть частота свободных колебаний цепи, так как вследствие резонанса при полном отсутствии затухания для поддержания электрических колебаний не нужно прилагать внешней эдс. Достаточно сообщить конденсатору некоторый заряд или создать в проводах ток, чтобы возникли гармонические колебания с этой частотой.

Формула (71) или эквивалентная ей формула для вычисления периода колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

носит название формулы В. Томсона, который теоретически вычислил условия образования колебаний в конденсаторной цепи, экспериментально изученные Фелдерсеном.

Заряд конденсатора (соответственно уравнению (56) § 32 при  $e = 0$ ) выражается формулой

$$q = q_0 \cos \omega t, \quad (72)$$

если в начальный момент  $t = 0$  заряд имел величину  $q_0$ , а ток в цепи был равен нулю, или же

$$q = q_0 \sin \omega t, \quad (72')$$

если, наоборот, начальный заряд равен нулю.

Условия, определяющие начальные значения заряда и силы тока, называются начальными условиями задачи; они вполне определяют величину амплитуды и начальной фазы колебаний.



Как и в гармоническом колебательном движении, мы наблюдаем здесь превращение одной формы энергии, электростатической, в другую — магнитную. При максимальном заряде  $q_0$  конденсатора энергия, заключенная в нем, равна

$$\frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C}$$

и соответствует потенциальной энергии механических колебаний. При максимальном токе  $i_0$  энергия сосредоточена в виде магнитной энергии тока, идущего по проводам, и равна  $\frac{1}{2} L i_0^2$ ; она соответствует кинетической энергии.

В общем случае колебательная энергия  $W$  равна сумме обоих видов энергий и остается постоянной, если не происходит рассеяния энергии

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L i^2. \quad (73)$$

Проводя аналогию дальше, можно сопоставить заряд  $q$  со смещением точки из положения равновесия, разность потенциалов  $V = \frac{q}{C}$  с квазиупругой силой,  $L$  с массой и  $i = \frac{dq}{dt}$  со скоростью движения.

Колебания, выраженные формулой (72), суть незатухающие колебания. Однако вследствие неизбежного рассеяния энергии амплитуда колебаний убывает. Если затухание вызывается сопротивлением проводов и рассеянная в единицу времени энергия (превращенная в джоулево тепло) равна

$$R i^2,$$

то затухание колебаний, как и в § 9, выражается формулой

$$q = q_0 e^{-\alpha t}.$$

Возбуждение колебаний наиболее просто производится при помощи искрового разряда. Для этого в цепь (рис. 65), содержащую емкость  $C$ , самоиндукцию  $L$  и сопротивление  $R$ , включается еще искровой разрядник  $F$ , состоящий из двух электродов, разделенных воздушным промежутком, длина которого может изменяться. Источник высокого напряжения: индукционная катушка (трансформатор) или электростатическая машина заряжают конденсатор  $C$  до некоторой разности потенциалов  $V_0$ , которая является искровым разрядным потенциалом. При этой разности потенциалов в искровом разряднике воздух делается проводящим (ионизируется) и сопротивление прохождению тока

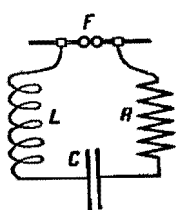


Рис. 65.

через воздушный промежуток  $F$  падает до очень малой величины. Этому способствует сильное нагревание поверхности электродов, при котором металл испаряется и образует атмосферу накаливаемого и проводящего металлического пара. Спектр свечения, испускаемого искрой при таком разряде, обнаруживает

присутствие паров того металла, из которого состоят электроды. Поэтому в эти моменты искра представляет собой вольтовую дугу.

Вследствие падения сопротивления искры при разряде, конденсаторная цепь как бы замыкается малым сопротивлением, и в ней происходят слабо затухающие колебания. Затухание зависит, конечно, от сопротивления проводов, потерь в конденсаторе, а также и от сопротивления искры. Искровой разряд однако не подчиняется закону Ома, т. е. не представляет собой постоянного сопротивления.

### § 38. Генераторы незатухающих колебаний.

Для получения незатухающих колебаний необходимо иметь источник энергии, непрерывно пополняющий энергию, рассеиваемую в цепи. Альтернаторы; в которых механическая работа превращается в энергию переменного тока, дают относительно малую частоту колебаний. Поэтому для получения высокочастот-

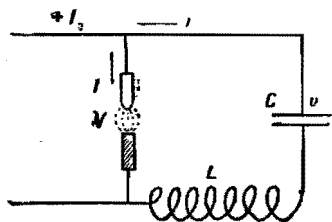


Рис. 66.

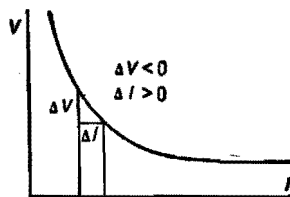


Рис. 67.

ных колебаний необходимо решить задачу о превращении энергии источников постоянного тока в энергию колебательную.

Впервые эту задачу удалось решить английскому инженеру Дудделю, который получил незатухающие колебания, присоединяя конденсаторную цепь к электродам вольтовой дуги (рис. 66). Этим способом Дудделю удалось получить от дуги музыкальный тон, указывающий на периодические колебания ее тока с звуковой частотой. Такая схема называется по ю щ е й, или м у з ы к а л ь н о й, д у г о й, но она может быть использована и для получения колебаний с частотой, лежащей далеко за пределами слышимости.

Причиной образования незатухающих колебаний является особое свойство дуги: при возрастании тока  $I$ , идущего через дугу, разность потенциалов  $V$  на ее электродах уменьшается (рис. 67). Кривая, изображающая зависимость  $V$  от  $I$ , называется характеристикой проводника. В данном случае мы имеем падающую характеристику. Обычно это свойство обозначается термином дифференциальное отрицательное сопротивление, так как отношение приращений разности потенциалов на электродах дуги и силы тока есть в этом случае величина отрицательная. В случае же обычного омического сопротивления отношение таких приращений дает величину сопротивления.

Дифференциальное сопротивление дуги различно при разных силах тока; по абсолютной величине оно может быть очень велико при малой силе тока

через дугу и очень мало при больших силах тока. В некоторых случаях можно считать его обратно пропорциональным некоторой степени силы тока.

Постоянный ток  $I_0$ , питающий дугу, может быть сделан мало зависящим от сопротивления дуги, если включить в его цепь большое добавочное сопротивление или самоиндукцию. Тогда небольшие изменения тока  $I_0$  вызывают очень большие изменения напряжения в цепи, и разность потенциалов на электродах дуги может изменяться в очень широких пределах.

При отсутствии колебаний разность потенциалов на обкладках конденсатора  $\varphi$  равна напряжению  $V$  на электродах дуги, соответствующему току  $I_0$ . Однако такое состояние является неустойчивым. Стоит только конденсатору начать разряжаться, как ток его, складываясь с постоянным током  $I_0$ , вызывает увеличение тока  $I$  в дуге и уменьшение напряжения  $V$ . Это влечет за собой дальнейший разряд конденсатора. При возникновении колебаний в конденсаторной цепи каждый раз, когда ток  $i$ , идущий от конденсатора, складывается с током  $I_0$ , напряжение  $V$  на электродах дуги уменьшается; и, наоборот, оно возрастает, когда направление тока в конденсаторной цепи меняется так, что  $i$  вычитается из постоянного тока  $I_0$ . Иногда ток в дуге при этом настолько уменьшается, что дуга гухнет, и ток  $I_0$  просто заряжает конденсатор, пока напряжение на его обкладках не достигнет величины, достаточной для зажигания дуги. Такое периодическое изменение сопротивления дуги, вызываемое колебательным разрядом конденсаторной цепи, благоприятствует восстановлению энергии, рассеиваемой во время колебаний.

Возникающие при этом незатухающие колебания поддерживаются благодаря тому, что при разряде конденсатора сопротивление дуги падает, а при восстановлении заряда конденсатора, наоборот, возрастает. Мы можем также рассматривать дугу как источник переменной эдс, периодические колебания которой поддерживаются вследствие обратного действия или реакции колебательного тока на дугу.

Подобное же действие более удобным и совершенным образом получается в настоящее время при помощи трех электродных ламп (рис. 68). Последние состоят из вольфрамовой нити  $F$ , или катода, накаливаемого электрическим током до температуры около  $3000^\circ$ , сетки  $G$ , представляющей собой прозрачный электрод, окружающий нить в виде сетки или спирали, и анода  $A$ , обычно цилиндрического, сплошного электрода, окружающего и сетку и нить. Все эти электроды впаяны в стеклянный баллон, из которого тщательно выкачан воздух. Нить является источником электронов, которые переносят ток (отрицательный заряд), если между нитью и анодом имеется такое электрическое поле, при котором анод имеет положительный потенциал, а нить отрицательный. Однако ток, идущий между этими электродами, зависит сверх того и от потенциала сетки. Отрицательный потенциал сетки по отношению к нити может изменить направление поля у нити в обратное, и тогда перенос элект-

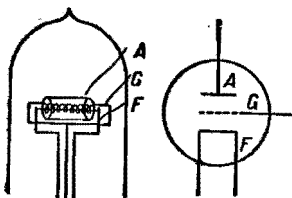


Рис. 68.

ронов к аноду прекратится. С другой стороны ток возрастает, если потенциал сетки делается положительным, хотя бы потенциал анода при этом уменьшался. Вообще анодный ток гораздо сильнее зависит от потенциала сетки, чем от потенциала анода.

На рис. 69 представлена схема соединений лампы с колебательной цепью, применяемая для получения незатухающих колебаний в этой последней. Анодный ток идет от батареи  $E$  через лампу и конденсаторную цепь. Между сеткой  $G$  и нитью  $F$  включена катушка  $M$ , в которой индуктируются эдс при возникновении колебаний в конденсаторной цепи. В зависимости от того, как присоединена катушка, эдс, заряжающая сетку, может иметь знак одинаковый и противоположный знаку тока в колебательной цепи. Этим достигается обратное действие колебательной цепи на анодный ток.

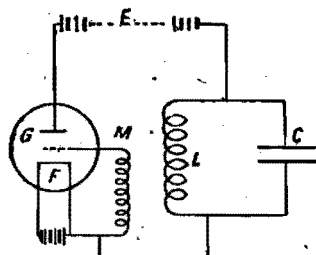


Рис. 69.

Если возникают колебания, то возникают и периодические изменения тока через лампу, проходящего также через катушку  $L$  и создающего в цепи эдс, необходимую для поддержания колебаний. Но для того, чтобы рассеянная в цепи колебательная энергия непрерывно пополнялась, необходимо, чтобы лампа обладала (как и в случае поющей дуги) отрицательным дифференциальным сопротивлением. Так как, при возрастании напряжения  $\varphi$  на конденсаторе  $C$ , напряжение  $V$  на лампе падает (сумма их постоянна и равна эдс батареи  $E$ ), то необходимо, чтобы потенциал  $V_g$  на сетке был положительным, когда  $\varphi$  растет, т. е. ток в колебательной цепи заряжает конденсатор и, наоборот, отрицательным при убывании  $\varphi$ . Тогда возрастание тока через лампу происходит при уменьшении разности потенциалов между анодом и нитью и, наоборот, т. е. анодный ток и напряжение имеют противоположные фазы.

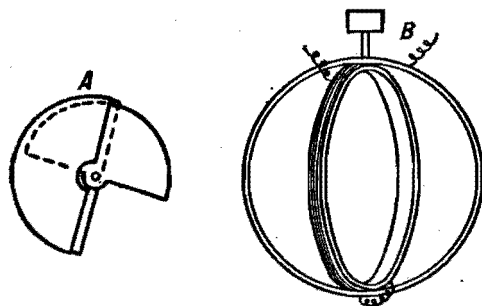


Рис. 70.

Период колебаний и в поющей дуге (при непрременном условии однако, чтобы дуга не потухала во время колебаний) и в ламповом генераторе зависит в первую очередь только от емкости и самоиндукции колебательной цепи. Это позволяет очень просто изменять частоту колебаний, если мы имеем конденсатор переменной емкости (рис. 70, А) или вариометр (рис. 70, В), т. е. катушку с переменным коэффициентом  $L$ . Первый осуществляется обычно помощью двух систем пластин, подвижной и неподвижной. Подвижные вдвигаются в промежутки между неподвижными, и таким образом изменяется емкость конденсатора. Вариометр состоит обычно из двух катушек, последовательно соединяемых, причем одна из них вращается внутри другой. При

одинаковом направлении токов коэффициент  $L$  наибольший, при противоположном — наименьший.

Уменьшая емкость и самоиндукцию, можно достигнуть очень больших частот колебаний. Преимущество электронных ламп перед дуговыми генераторами заключается в том, что в последних изменение сопротивления дуги связано с изменением температуры и электродов и газового промежутка, вследствие чего наблюдается запаздывание изменений тока в дуге при колебаниях напряжения, в то время как движение электронов, обладающих ничтожно малой инерцией, следует за управляющим напряжением вплоть до частот в  $10^8$  в секунду и более.

### § 39. Колебания в связанных цепях.

Свободные колебания цепей обычно усложняются тем, что они находятся во взаимодействии или связаны с другими. Связь между цепями может быть или магнитная (трансформаторная), или электрическая, или гальваническая. В первом случае колебания одной цепи индуктируют в другой колебания определенной амплитуды и фазы; во втором — связь достигается тем, что часть емкости конденсаторов является общей обеим цепям; наконец, гальваническую связь имеем, если обе цепи имеют общее сопротивление.

Можно различать случаи сильной и слабой связи. Мы говорим о слабой связи двух колебательных цепей, если колебания одной из них (первичные) можно рассматривать как независимые от присутствия другой, в то время как колебания этой последней (вторичные) возбуждаются колебаниями в первой цепи. При слабой связи вторичные колебания значительно слабее первичных и поэтому обратное действие их на первую цепь или вибратор можно оставлять без внимания. В этом случае во вторичной цепи или в резонаторе (см. § 11, гл. I) возбуждаются два колебания, имеющие различную частоту, амплитуду и затухание. Одно из них есть собственное колебание резонатора, а другое — вынужденное с частотой первичных колебаний. Если в первой цепи колебания поддерживаются незатухающими, то собственные колебания в резонаторе затухнут и останутся установленными вынужденные колебания (см. стр. 28), амплитуда которых зависит от разности частот собственных и вынужденных и от затухания собственных колебаний резонатора (стр. 29). Максимальная амплитуда наблюдается вблизи резонанса а затухание, как показано в § 12, может быть определено из резонансных кривых.

При сильной связи обратное действие вторичных колебаний достаточно сильно, чтобы вызвать в первой цепи также два вида колебаний: собственных и вынужденных, но частота колебаний собственных как в первой, так и второй цепи отличается от частот свободных колебаний, которые наблюдаются при отсутствии связи. Чем сильнее связь, тем сильнее изменяются собственные колебания данной цепи под действием колебаний другой цепи. В каждой цепи мы находим тогда два колебания, колебания связи. Связанные цепи при этом можно рассматривать как одну сложную систему,

в которой возможны два различных колебания и которая имеет поэтому, как принято говорить, две степени свободы.

Каждое из возможных колебаний представлено в обеих цепях различно — в одной сильнее, в другой слабее, но амплитуды одного и того же колебания в разных цепях находятся между собой в определенном отношении. Это отношение изменяется при изменении степени связи. Например, при слабой связи каждое колебание представлено во много раз сильнее в той цепи, где оно является собственным. При возрастании же связи отношение амплитуд приближается к единице, т. е. каждое колебание при сильной связи представлено в обеих цепях одинаково сильно.

Различные колебания связи, имеющие разную частоту, могут находиться в произвольных отношениях. Какова амплитуда и фаза каждого из них, это зависит от условий их возбуждения. При получении незатухающих колебаний с помощью электронной лампы обычно возбуждается только одно из возможных колебаний, но отношение его амплитуд в обеих цепях вполне определяется связью и электрическими свойствами цепей.

Две несвязанных между собой цепи мы могли бы рассматривать как одну систему с двумя степенями свободы, так как колебания зарядов и токов в каждой из них происходят независимо от колебаний в другой. В связанных системах также два независимых колебания с различной частотой, но они не относятся, как мы видели, к какой-либо одной цепи.

Теоретический интерес представляют слабо связанные цепи, но с очень близкими частотами собственных колебаний. Вблизи резонанса даже и в слабо связанных цепях каждое колебание связи может быть представлено одинаково сильно в обеих цепях. При точной настройке в резонанс вибратора и резонатора колебания связи различны; одно имеет частоту большую, а другое — меньшую, чем частота свободных колебаний каждой из цепей. Можно считать, что оба колебания в одинаковой мере принадлежат той и другой цепи, и в каждой цепи мы имеем сложение двух таких колебаний, и в результате сложения наблюдаются биения. Когда амплитуда в одной цепи (1) достигает максимума, в другой (2) она падает до нуля (рис. 71) и обратно. Явление это представляет собой своеобразный процесс перехода энергии из одной цепи в другую и обратно. Чем меньше связь, тем медленнее происходит этот обмен и тем больше промежутки между максимумами амплитуд. Это и указывает вместе с тем на уменьшение разности частот связи. Когда связь обращается в нуль.

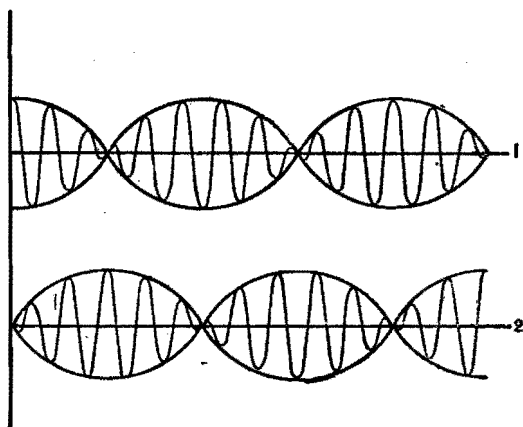


Рис. 71.

то оба колебания связи сливаются, и наступает случай вырождения системы связанных цепей, которые не имеет уже смысла рассматривать как одну сложную систему.

Практическое применение описанного здесь явления для получения мощных слабо-затухающих колебаний открыто М. Вином и называется ударным возбуждением колебаний. Заключается оно в том, что из двух связанных между собой цепей в одной имеется искровой промежуток, который и служит для возбуждения колебаний. В тот момент, когда амплитуда колебаний падает до минимума, искра гаснет, и колебания прекращаются вовсе, так как сопротивление искрового промежутка при этом становится бесконечно большим. Энергия, перешедшая в другую цепь, не содержащую искры, одной из главных причин рассеяния энергии, создает слабозатухающие колебания. Условиями, благоприятствующими потуханию искры, является малая длина искрового промежутка и вещество электродов: медные и серебряные электроды дают наилучший результат.

#### § 40. Электрические волны в проволоках.

Рассматривая колебания в цепях, содержащих конденсатор, мы принимали до сих пор, что соединительные провода и катушки обладают только самоиндукцией, а вся емкость сосредоточена в конденсаторе. В виду этого ток во всех точках цепи имеет одну и ту же силу. Такие колебания мы называем квазистационарными. В отличие от этого мы имеем нестационарное распределение тока, если провода обладают заметной емкостью, и ток в различных участках провода имеет не одинаковую силу, так как часть тока идет на пополнение заряда проводников при изменении их потенциала. Квазистационарность тока, строго говоря, никогда не имеет места, так как провода всегда имеют некоторую емкость, но часто их емкость мала по сравнению с емкостью конденсатора. Большие катушки, в особенности состоящие из многих слоев проволоки, обладают довольно заметной емкостью, измеряемой десятками и сотнями см, и поэтому каждая из них, даже без присоединенного конденсатора, является цепью, в которой могут существовать колебания.

Особенное значение имеют цепи, состоящие просто из двух параллельных проводов. Если зарядить их до некоторой разности потенциалов, то на каждую единицу их длины приходится определенный заряд; мы имеем равномерно распределенную емкость, величина которой, отнесенная к единице длины провода, равна приближенно

$$C_1 = \frac{1}{\lg r}, \quad (74)$$

где  $d$  — расстояние между проводами, а  $r$  — радиус проводов.

Точно так же при пропускании тока  $i$  на каждую единицу длины проводов приходится определенный магнитный поток  $N_1$ , и мы находим таким образом

равномерно распределенную самоиндукцию, величина которой

$$L_1 = \frac{N_1}{i} = \lg \frac{d}{r}. \quad (75)$$

Электрические и магнитные силы между проводами определяются линейной плотностью заряда  $\rho_1$  с одной стороны и силой тока  $i$  с другой. Электрические и магнитные силовые линии лежат в плоскостях, перпендикулярных к направлению проводов, и образуют две системы кривых (рис. 72), взаимно перпендикулярных. Электрические силовые линии начинаются на том проводе, который обладает положительным зарядом, и оканчиваются на противоположном. Магнитные силовые линии суть эксцентрично расположенные окружности, охватывающие провода.

Если в таких проводах происходят колебания, то на каждом элементе  $dx$  провода изменяется периодически заряд  $\rho_1 dx$ , а вместе с тем и разность потенциалов  $V$  между проводами. Так как емкость того же элемента провода равна  $C_1 dx$ , то изменение заряда в единицу времени равно

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} dx = C_1 \frac{\partial V}{\partial t} dx. \quad (76)$$

Этот заряд приносится током  $i$ , проходящим через сечение провода, расположенное на расстоянии  $x$  от начала провода. Принимая во внимание, что через другое сечение, ограничивающее элемент провода  $dx$ , проходит ток

$i + \frac{\partial i}{\partial x} dx$ , мы находим, что разность

токов, равная  $-\frac{\partial i}{\partial x} dx$ , очевидно, должна равняться изменению заряда на элементе  $dx$ . Таким образом вследствие (76) находим

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = C_1 \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x}. \quad (77)$$

Это уравнение есть условие сплошности тока, или неумножаемости зарядов, которые могут изменяться лишь в том случае, если ток, проходящий через одно сечение, отличается от тока, уходящего через другое сечение. Мы видим, что заряд и сила тока изменяются и во времени, и по длине проводов. Мы должны поэтому рассматривать их как функции двух независимых переменных, и производные в уравнении (77) являются частными производными по соответствующим переменным. В уравнении (77) мы имеем две, пока неизвестные, функции  $\rho$  и  $i$  или  $V$  и  $i$ , поэтому для определения их мы должны иметь еще другое уравнение. Мы получим его следующим образом. При изменении силы тока в элементе  $dx$  в нем индуцируется эдс

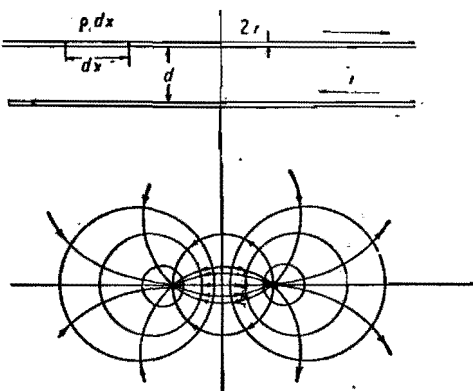


Рис. 72.



—  $L_1 dx \frac{\partial i}{\partial t}$ , которая должна равняться разности потенциалов на концах элемента  $dx$ , т. е.  $\frac{\partial V}{\partial x} dx = \left( V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \right) - V$ .

Следовательно новое уравнение будет иметь такой вид, если  $L_1$  выражено в электромагнитной системе единиц  $i$  и  $V$  в электростатической и  $c$  — скорость света.

$$-\frac{L_1}{c^2} \frac{\partial i}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x}. \quad (78)$$

Если уравнение (77) умножить на  $\frac{L_1}{c^2}$  и продифференцировать по  $t$ , а уравнение (78) продифференцировать по  $x$  и затем их сложить, то получаем уравнение, содержащее только  $V$ , а именно

$$\frac{C_1 L_1}{c_2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \quad (79)$$

Точно такое же уравнение мы можем получить для силы тока и для заряда.

Уравнение (79) сходно с уравнением колебаний струны, которые мы рассматривали в § 21. Оно показывает, что, подобно колебаниям в струне, колебания разности потенциалов распространяются вдоль проводов, как волны с некоторой скоростью  $u$ , равной

$$u = \frac{c}{\sqrt{L_1 C_1}}. \quad (80)$$

Но из формул (74) и (75) мы находим, что произведение  $L_1 C_1 = 1$  (если провода находятся в воздухе или, точнее, в пустоте). В этом случае скорость распространения электрических волн в проволоках равна просто скорости света

$$u = c.$$

Если провода находятся в среде с диэлектрической постоянной  $\epsilon$ , то емкость их возрастает в  $\epsilon$  раз; с другой стороны мы имеем возрастание их самоиндукции, если среда имеет магнитную проницаемость  $\mu$ , большую единицы. Таким образом общая формула для распространения волн в проволоках имеет такой вид:

$$u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (80')$$

Волнообразное распространение электрических колебаний определенной частоты  $\omega$  может быть представлено формулой такого же вида, как и распространение волнообразного движения (стр. 49):

$$V = V_0 \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right) \quad (81)$$

для разности потенциалов; для силы тока мы напишем подобную же формулу

$$i = i_0 \cos \omega \left( t - \frac{x}{u} \right). \quad (82)$$

Подставив оба эти выражения в уравнения (77) и (78), найдем, что они удовлетворяются, если будут соблюдены равенства:

$$C_1 V_0 = \frac{i_0}{u} \quad \text{и} \quad \frac{L_1}{c^2} i_0 = \frac{V_0}{u},$$

или, что то же:

$$\frac{V_0}{i_0} = \frac{1}{C_1 u} = \frac{L_1 u}{c^2}.$$

В виду (80) мы получаем еще соотношение

$$\frac{V_0}{i_0} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}, \quad (83)$$

которое устанавливает связь между амплитудами напряжения и тока.

Таким образом фазы разности потенциалов (или пропорционального ей заряда) и сила тока в каждой точке провода одинаковы; в тех точках провода, где имеется наибольшая разность потенциалов, имеем и наибольшую силу тока. Это соотношение соответствует такому же соотношению между относительным смещением точек струны и их скоростью при распространении бегущей волны.

Распространение волн вдоль проволок может происходить в двух направлениях. Разница между этими случаями выражается в том, что при данной разности потенциалов  $V$  направления тока  $i$  различны, или же в том, что при данном направлении электрических сил между проводами направления магнитной силы прямо противоположны.

Распространение происходит с неизменной амплитудой, если не происходит рассеяния энергии, т. е. если провода обладают ничтожно малым сопротивлением. В противном случае волны испытывают поглощение тем большее, чем больше амплитуда колебаний. Амплитуда изменяется тогда по закону, подобному закону затухания во времени, а именно пропорционально

$$l - xx$$

Если имеем одновременно две волны, распространяющиеся в противоположных направлениях, то при сложении их образуются стоячие волны с узлами и пучностями. Осуществление проволочных стоячих волн легко достигается следующим образом. Возбуждая электрические колебания в параллельных проводах с свободными концами (рис. 73, а) или же с соединенными коротким толстым проводником, мостиком  $b$  (рис. 73, б), мы получаем распределение амплитуды напряжения  $V_0$ , показанное на рис. 73. В первом случае (а) на концах проволок будут пучности напряжения и узлы тока; во втором (б) — наоборот, пучности тока и узлы напряжения. Причиной

этому являются условия на концах проволок, или конечные условия, которые требуют, чтобы в первом случае ток у концов был равен нулю, а во втором, чтобы исчезала разность потенциалов на концах мостика (вследствие малости его сопротивления).

Рассмотренный нами случай образования стоячих волн в проволоках (называемых обычно системой Лехера) может служить для определения длины волны, так как расстояние между ближайшими узлами или пучностями равняется половине длины волны. Поэтому, зная период колебаний, можно определить (как это сделал впервые Г. Герц) скорость распространения волн из опыта, или же, зная скорость, определить период колебаний. Как мы видели, из теоретического расчета следует, что скорость волн в случае, если проволоки окружены воздухом, равняется скорости света.

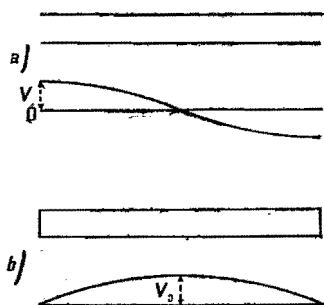


Рис. 73.

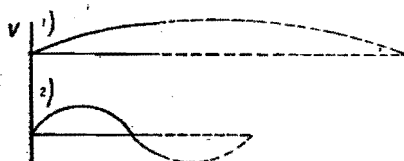
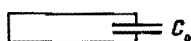


Рис. 74.

Это в высшей степени важное соотношение, устанавливающее связь между явлением электрических волн и светом, было предсказано теоретически Максвеллом и на опыте доказано Г. Герцом.<sup>1</sup>

Распределение узлов и пучностей, изображенное на рис. 73, представляет только одно из возможных, а именно характеризует основное колебание лехеровой системы. Обертоны, или высшие гармонические колебания, получаются, если имеется не два, а большее число узлов и пучностей, причем все они находятся между собой на равных расстояниях, как и в случае колебания струны или трубы.

Образование стоячих волн можно рассматривать как результат отражения волн у концов лехеровой системы: при образовании узла отраженная волна имеет фазу, противоположную фазе входящей или прямой волны, при образовании пучности — ту же фазу. Если концы лехеровой системы соединены между собой через конденсатор небольшой емкости  $C_0$  (того же порядка, что и  $C_1$ ) или проводником с заметным коэффициентом самоиндукции, то у концов мы не имеем ни узлов, ни пучностей, и длина волны не находится в простом рациональном отношении с длиной проволок; также и обертоны в этом случае не находятся между собой в гармоническом отношении. Так, напр. (рис. 74) лехерова система с емкостью  $C_0$  на конце (укороченная система) может иметь

<sup>1</sup> Его опыты описаны в сборнике статей под общим заглавием: „Исследование о распространении электрической силы“ (1891 г.) (на немецком языке).

основную длину волны сколь угодно большую, в зависимости от присоединенной емкости; первый же обертона имеет длину волны, заключенную между двойной и тройной длиной проволоки.

### § 41. Распространение электромагнитных волн.

Распространение электрических волн связано с распространением энергии. В диэлектрике, отделяющем проволоки, как мы видели, имеется и электрическое и магнитное поле, а, следовательно, электрическая и магнитная энергия. Электрическая энергия во многих отношениях может быть уподоблена потенциальной энергии, а магнитная — кинетической, хотя с этими видами электромагнитной энергии мы не связываем каких-либо механических представлений (перемещений, деформаций, скорости движения и т. п.). Этим исчерпываются те виды энергии, которые играют роль при распространении электромагнитных волн. Поэтому механизм распространения нужно искать в тех соотношениях, которые существуют между электрическими и магнитными силами в диэлектрике.

В этом отношении весьма убедительно отсутствие влияния формы и вещества проволок на распространение волн и определенная зависимость скорости распространения от диэлектрических и магнитных свойств среды, которая окружает проволоки. Можно поэтому сказать, что волны распространяются вдоль проволок, а не в проволоках. Последние определяют только направление распространения и направление силовых линий электрического и магнитного поля.

Как было показано в I т., между электрическими и магнитными силами существует два вида соотношений, которые аналогичны уравнениям (77) и (78). Одно из них связывает ток смещения в диэлектрике с распределением магнитных сил, а другое определяет распределение электрических сил, индуцируемых при изменении магнитного поля. Пользуясь этими соотношениями, как показал Максвелл, для электрической и магнитной силы можно получить волновое уравнение (79). Этот результат является наиболее характерным для максвелловой теории электромагнитных явлений, которая лежит в основе всей современной физики. Всякое изменение электромагнитного поля в пустоте распространяется волнообразно со скоростью света.

Как мы видим (форм. 80'), скорость распространения волн в диэлектрике меньше скорости света в пустоте в отношении  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ . Это отношение будем называть показателем преломления электромагнитных волн в данной среде.

Распространение волн происходит вдоль проволок, т. е. в направлении, перпендикулярном к тем плоскостям, в которых располагаются электрические и магнитные силовые линии. Так как вся система силовых линий и связанная с ними энергия переносится вдоль проволок без изменения, то удобно для описания этого процесса ввести особую величину, характеризующую этот поток

энергии. Эта величина, называемая вектором Пойнтинга, пропорциональна произведению электрической и магнитной силы, а также синусу угла между ними. Она зависит таким образом от угла между направлениями этих сил и достигает наибольшей величины при их взаимной перпендикулярности, которая и имеет место в электромагнитных волнах.

Вектор Пойнтинга перпендикулярен к векторам электрической и магнитной силы. Эти последние лежат, как мы видели, в плоскости волн, каковой является плоскость, перпендикулярная к проводам. Следовательно, вектор Пойнтинга  $S$  и электрическая сила  $E$  и магнитная сила  $H$  волны образуют систему трех взаимно перпендикулярных направлений в пространстве, как показано на рис. 75. Изменению направления одной из сил при неизменном направлении другой соответствует изменение направления вектора Пойнтинга, т. е. направление распространения волн.

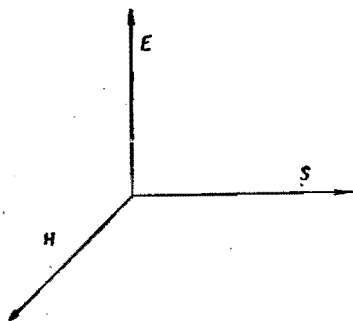


Рис. 75.

Для определения направления вектора Пойнтинга можно пользоваться правилом штопора. При вращении от вектора  $H$  к вектору  $E$  направление движения штопора совпадает с направлением вектора  $S$ . Или же можно сказать: переходя от вектора  $H$  к вектору  $E$  и от него к вектору  $S$ , мы будем двигаться либо всегда по часовой стрелке, либо всегда против, если на каждую плоскость  $HE$ ,  $ES$  и  $SH$  смотреть со стороны третьего вектора.

Величина вектора Пойнтинга волны равна  $\frac{c}{4\pi} EH$ . С другой стороны электрическая и магнитная энергия в единице объема равны  $\frac{1}{8\pi} E^2$  и  $\frac{1}{8\pi} H^2$ . В бегущих электромагнитных волнах, как и в звуковых, в каждой точке энергия потенциальная, или электрическая, и кинетическая, или магнитная, равны, и, следовательно, электрическая и магнитная сила волны имеет одну и ту же величину:  $E = H$ .<sup>1</sup> Вследствие этого вектор Пойнтинга действительно представляет поток энергии через единицу поверхности, так как он равен плотности полной энергии волны, умноженной на скорость распространения волн, равную скорости света  $c$ :

$$S = \frac{c}{4\pi} EH = c \left( \frac{1}{8\pi} E^2 + \frac{1}{8\pi} H^2 \right).$$

От того, что волны распространяются в диэлектрической и магнитной среде, выражение вектора Пойнтинга не изменяется, но зато изменяется скорость волн  $u$  и плотность электрической и магнитной энергии. Так как  $u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ ,

<sup>1</sup> Это будет доказано в § 44 для случая распространения плоских волн.

а плотности энергий  $\frac{\epsilon}{8\pi} E^2$  и  $\frac{\mu}{8\pi} H^2$  равны между собой (и следовательно равны как геометрическому среднему  $\frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{8\pi} EH$ ), поток энергии, равный

$$u \left( \frac{\epsilon}{8\pi} E^2 + \frac{\mu}{8\pi} H^2 \right) = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \cdot 2 \frac{\sqrt{\epsilon\mu}}{8\pi} EH = \frac{c}{4\pi} EH,$$

опять выражается вектором Пойнтинга.

Направление вектора Пойнтинга всегда перпендикулярно к направлениям электрической и магнитной силы, которые лежат в плоскости волны. Поэтому направление вектора Пойнтинга есть в то же время направление луча, вдоль которого движется энергия волны. Электрический и магнитный вектор, каждый в отдельности, может характеризовать направление колебаний волны.

## § 42. Определение диэлектрических постоянных методом Друде.

Определение длины стоячих волн дает возможность измерять скорость распространения волн в разных диэлектриках и, следовательно, сравнивать их диэлектрические постоянные при частотах колебаний  $10^8 - 10^9$  в сек. Магнитная проницаемость  $\mu$  почти для всех плохо проводящих тел так мало отличается от единицы, что можно для скорости волн и для показателя преломления принимать упрощенное выражение  $u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}$ ,  $n = \sqrt{\epsilon}$ .

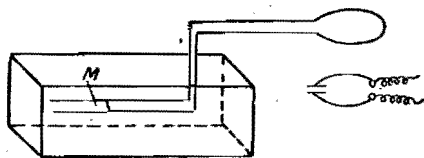


Рис. 76.

Для измерения длины волны применяются два метода, называемые первым и вторым методом Друде. Первый метод (рис. 76) заключается в том, что измеряется длина стоячих волн в параллельных проводах, проходящих через сосуд, наполненный жидкостью, диэлектрическая постоянная которой должна быть измерена. Подвижный мостик, ограничивающий систему Лехера в жидкости, устанавливается так, чтобы амплитуда колебаний в системе достигала максимума. Два соседние положения мостика, удовлетворяющие этому условию, определяют длину полуволны колебаний, возбуждаемых каким-нибудь источником. Граница жидкости, через которую входят проволоки, должна находиться в узле напряжения, а следовательно в жидкости до моста  $M$  уместится целое число полуволн.

Второй способ заключается в том, что к концам проволок присоединен конденсатор  $C_0$ , представляющий собой небольшой сосуд с впаянными электродами. При наполнении его жидкостью емкость его изменяется, и для получения резонанса приходится изменять длину проволок от мостика до конденсатора. Видоизменение этого метода, введенное Кулиджем, заключается в том, что конденсатор  $C_0$  перемещается вдоль проволок лехеровой системы (рис. 77). Его

влияние на длину лежеровой системы наибольшее вблизи пучности напряжения и равно нулю в узлах. Второй способ Друде особенно пригоден для малых количеств измеряемой жидкости и при сильном поглощении волн.

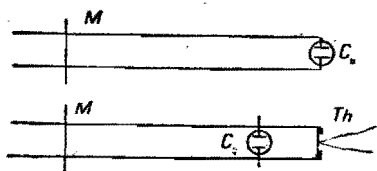


Рис. 77.

Амплитуда колебаний может быть измерена или непосредственно в лежеровой системе, в которую включают термоэлемент  $Th$ , состоящий из двух спаянных между собой проволок, которые могут служить мостиком, или же при помощи особой измерительной цепи, связанной с лежеровой системой. Термоэлемент  $Th$  в этом случае может быть заменен кристаллическим детектором.

### § 43. Излучение электромагнитных волн.

Электромагнитные волны могут распространяться не только вдоль проводок, но также, как свободные волны, в пространстве, окружающем источник колебаний или вибратор. Такое лучеиспускание имеет место в том случае, когда вибратор создает в окружающем его пространстве переменное электрическое поле. Классическим примером является вибратор Герца, состоящий из двух металлических стержней, которым сообщаются противоположные заряды и которые разряжаются через искровой промежуток (рис. 78). Электрические силовые линии во-

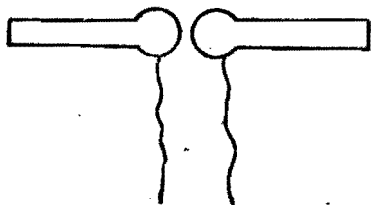


Рис. 78.

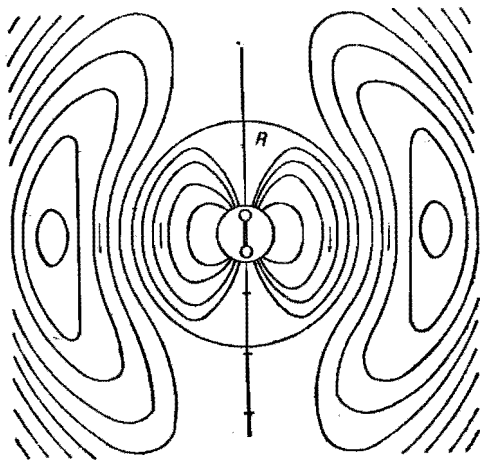


Рис. 79.

круг этого вибратора представлены для нескольких моментов (рис. 79). Вблизи вибратора они очень схожи с силовыми линиями электрического диполя, т. е. системы двух противоположных зарядов,  $+e$  и  $-e$ , находящихся на расстоянии  $l$  друг от друга. Если произведение  $el$ , т. е. момент диполя, периодически изменяется, оттого ли, что изменяются заряды при неизменном расстоянии  $l$ , или же меняется  $l$ , то окружающее поле изменяется. В некоторый момент времени, как показано на рис. 79, электрические силовые линии, связанные с диполем, находятся внутри сферы  $R$ . При уменьшении момента диполя происхо-

дит отшнуровывание силовых линий, которые отделяются от диполя, образуя замкнутые линии, распространяющиеся с постоянной скоростью во всех направлениях. Эти замкнутые на себя силовые линии и являются характерной особенностью электромагнитных волн, излучаемых диполем.

Поле электрических и магнитных сил излучающего вибратора на больших расстояниях, в области волн, имеет следующие особенности: обе силы перпендикулярны к направлению лучей, проведенных из центра диполя; электрическая сила лежит в плоскости, проходящей через ось диполя; магнитная — перпендикулярна к этой плоскости, и магнитные силовые линии представляют собой окружности, центры которых лежат на оси вибратора; электрическая и магнитная сила по величине равны, а по направлению взаимно перпендикулярны; наконец, величина силы равна нулю в направлении оси вибратора и наибольшая в плоскости экваториальной, т. е. проходящей через центр диполя и перпендикулярной к его оси.

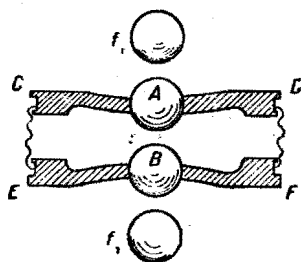


Рис. 80.

Взаимная перпендикулярность и равенство электрической и магнитной сил представляет характерную особенность всякой электромагнитной волны. В данном случае волны выходят из центра  $O$ , их поверхность имеет на большом расстоянии от центра шаровую форму. Если из центра  $O$  провести прямолинейные лучи, то вдоль каждого распространяются колебания, в которых электрическая сила параллельна меридианной плоскости, проведенной через направление луча. В экваториальной плоскости электрическая сила перпендикулярна к этой плоскости. В этой же плоскости лучеиспускание происходит с наибольшей силой.

Все эти особенности наблюдаются при излучении волн любым вибратором, имеющим ось, вдоль которой симметрично располагаются заряды во время колебаний. Напр., два металлических шара  $A$  и  $B$  (рис. 80), между которыми проскакивает искра и к которым заряды подводятся также через искры  $f_1$  и  $f_2$ , образуют вибратор Рити. Два коротких цилиндрика,  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 81), впаянные в стекло и заряжаемые противоположными зарядами, служили П. Лебедеву для получения волн, длина которых была всего 6 мм. Уменьшая длину проволочек, можно еще несколько укоротить длину волн.

На достаточно больших расстояниях от вибратора сферическую поверхность волны можно считать плоской и направления лучей в соседних точках параллельными. Если такая волна встречает металлическую поверхность, то она испытывает отражение подобно тому, как свет отражается от зеркала-

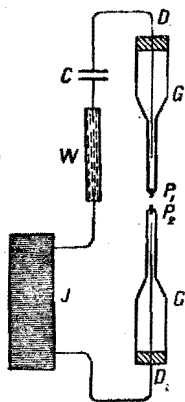


Рис. 81.



Причиной образования отраженных волн является известное условие, согласно которому у поверхности хорошо проводящих тел электрическая сила должна быть или перпендикулярна к их поверхности, или равна нулю. В виду этого, если плоскость падающей волны параллельна поверхности зеркала, электрическая сила должна быть равна нулю, так как иначе она была бы параллельна поверхности, что противоречит условию. Но это обращение в нуль электрической силы имеет место только у самой поверхности и является результатом отражения волн, причем фаза электрической силы в отраженной волне противоположна фазе падающей волны. Таким образом электромагнитная волна имеет узел у поверхности проводника. Так как узел может получиться только при равенстве амплитуд падающей и отраженной волн, то это показывает, что мы имеем полное отражение от металлического зеркала.

Отражение от поверхности металлического зеркала можно также рассматривать как результат излучения вторичных волн металлической поверхностью, в которой возникают электрические колебания под действием падающих электромагнитных волн. Это можно иллюстрировать следующим опытом Герца. Если волны падают на решетку, состоящую из металлических проволок, то происходит отражение волн, когда электрическая сила параллельна проводам решетки, и не происходит,—если

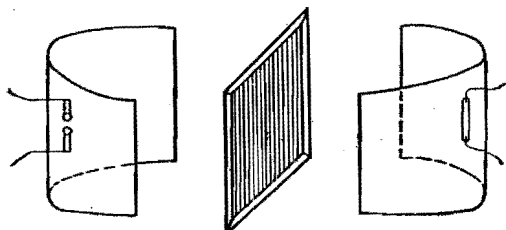


Рис. 82.

повернуть решетку на  $90^\circ$ . В последнем случае электрическая сила волны не может вызвать в проволоках решетки достаточно сильных колебаний, так как она перпендикулярна к ним.

Отражение происходит и на границе двух диэлектриков, но неполное; в этом случае волны частью проходят через границу, испытывая преломление, так как скорости волн по обе стороны границы различны, частью же отражаются.

Отражение волн металлическими экранами дает возможность использовать зеркала для излучения волн в определенном направлении. Помещая вибратор в фокусе параболического зеркала (рис. 82), Герц получал параллельный пучок лучей, который он принимал подобным же зеркалом, в фокусе которого помещался резонатор. При помощи таких направленных пучков лучей удобно демонстрировать отражение и преломление лучей, или же поляризацию их, пользуясь решеткой, состоящей из параллельных проволок.

У поверхности зеркала, как мы видели, электрическая сила близка к нулю, но зато магнитная сила достигает максимума. При этом величина магнитной силы связана с силой токов, возникающих под действием падающих волн в поверхностном слое зеркала. Если бы зеркало обладало бесконечно большой проводимостью, весь ток был бы сосредоточен в бесконечно тонком слое; при конечной, проводимости этот слой, хотя и очень тонок, но все же имеет ко-

мечную толщину, которая зависит как от проводимости, так и от частоты колебаний. Мы наблюдаем здесь проникновение электрических колебаний вглубь металла, причем амплитуда их быстро спадает с глубиной.

Таким образом сравнительно тонкие металлические экраны могут считаться непрозрачными для быстрых электрических колебаний.

Вследствие этого проникновения колебаний касательная составляющая электрической силы у проводящей поверхности не равна нулю, и полная электрическая сила не вполне перпендикулярна к поверхности. Поэтому и вектор Пойтинга  $S$  не строго параллелен к направлению проволок, вдоль которых распространяются волны, а имеет составляющую, направленную внутрь металла, как показано на рис. 83. (Магнитная сила, перпендикулярная к плоскости чертежа, на нем не показана). Вследствие этого происходит непрерывный поток энергии внутрь металла, т. е. поглощение волн при их распространении вдоль провода.

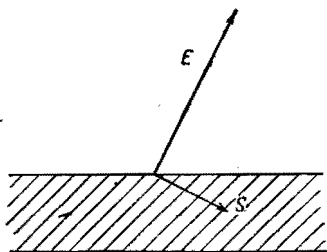


Рис. 83.

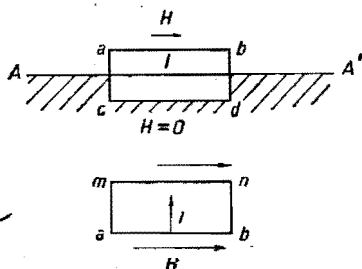


Рис. 84.

Сила тока в поверхностном слое металлического экрана может быть вычислена следующим образом. Пусть  $AA'$  — поверхность металлического зеркала (рис. 84),  $a$  и  $H$  — магнитная сила стоячих волн у поверхности; электрическая сила практически равна нулю. На некоторой глубине исчезают колебания, и магнитная сила  $H$  также равна нулю. Представим себе контур, состоящий из двух параллельных отрезков  $ab$  и  $cd$ , проведенных на таком расстоянии от поверхности, чтобы вдоль  $ab$  магнитная сила была такая же, как у самой поверхности вне металла, а вдоль  $cd$  равнялась нулю. Работа магнитной силы при движении единичного магнитного полюса вдоль этого замкнутого контура (магнитодвижущая сила) равна силе тока, проходящего через сечение  $abcd$ , умноженной на  $4\pi$ , а именно:

$$H \cdot ab = 4\pi I, \quad (84)$$

если силу тока будем выражать в электромагнитных единицах.

На поверхности зеркала представим себе прямоугольную площадку  $abnm$ , вдоль которой идет ток  $I$ ; под прямым углом к последнему направлена магнитная сила  $H$ . В таких условиях (т. П) проводник с током  $I$  испытывает

<sup>1</sup> При перемещении магнитного полюса вдоль  $bd$ ,  $dc$  и  $ca$  работа равна нулю, так как или перемещение полюса перпендикулярно к  $H$ , или  $H = 0$ .

силу, пропорциональную его длине  $l$  и произведению магнитной силы  $H$  на ток  $I$  и направленную перпендикулярно как к  $H$ , так и к  $l$ . Так как магнитная сила убывает по мере проникновения колебаний, то необходимо ввести среднюю силу магнитного поля  $\frac{1}{2}H$ , и следовательно на площадку  $abnm$  будет действовать перпендикулярно к ее поверхности сила

$$f = \frac{1}{2} H I a m \quad \text{или вследствие (84)} \quad f = \frac{1}{8\pi} H^2 a b a m.$$

Это соответствует силе на единицу поверхности или давлению  $p$ , равному

$$p = \frac{1}{8\pi} H^2. \quad (85)$$

Так мы пришли к определению давления электромагнитных волн на поверхность отражающего зеркала, причем величина этого давления совпадает с плотностью энергии волн у поверхности зеркала.

Способ вычисления, которым мы воспользовались, показывает, что если зеркало будет не вполне поглощать волны, а частью пропускать, то и давление будет меньше, так как ток  $I$  в зеркале будет пропорционален разности магнитной силы у передней и задней поверхностях зеркала. Точно так же давление уменьшается, если поверхность не отражает, но вполне поглощает волны.

#### § 44. Плоские электромагнитные волны.

Поверхность электромагнитных волн может иметь очень различную форму, распределение амплитуд на этой поверхности может сильно изменяться, но всегда справедливы следующие свойства: 1) равенство электрической и магнитной энергии в каждой точке волны и 2) перпендикулярность электрической и магнитной силы по отношению к лучу и между собою. Эти основные свойства мы докажем, пользуясь представлением о плоских волнах, в которых всюду амплитуда одна и та же, и которые распространяются в однородном диэлектрике. Мы воспользуемся при этом двумя основными соотношениями максвелловской теории:

А) Ток смещения в диэлектрике вызывает, как всякий ток, появление магнитных сил, которые при движении положительного магнитного полюса  $+1$  по замкнутой линии совершают работу (магнитодвижущая сила), равную току смещения через площадь, ограниченную этой линией, умноженному на  $4\pi$ .

В) Изменение магнитного потока вызывает появление электрических сил. Работа при движении единицы положительного электричества по замкнутой линии (или электродвижущая сила в таком замкнутом контуре) равняется скорости изменения магнитного потока через площадь, ограниченную этой линией, взятой с обратным знаком (закон электромагнитной индукции).

Положим, что поверхность волны (рис. 85) совпадает с плоскостью  $YZ$ , а направление распространения их — с осью  $OX$ . В каждой точке плоскости

волны, т. е. плоскости  $YZ$  электрическая и магнитная силы имеют одну и ту же амплитуду и фазу.

Поэтому работа при обходе по замкнутому контуру, будь то электрических или магнитных сил, равна нулю. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть замкнутый прямоугольник  $dydz$ ; параллельные стороны, вдоль которых движение происходит по противоположным направлениям (как показано стрелками на рис. 85), попарно дадут работу, равную нулю. Из этого следует, что поток как электрической, так и магнитной сил через площадь этого прямоугольника равен нулю, или что электрическая и магнитная силы не имеют составляющих, параллельных оси  $OX$ , т. е. вдоль направления распространения волн. Таким образом волны как электрической, так и магнитной силы поперечны.

Мы можем в плоскости волны направить оси  $OY$  и  $OZ$  как угодно; поэтому положим, что направление электрической силы параллельно  $OY$ . Поток электрической индукции через прямоугольную площадку  $dx dz$  можно считать равным  $\epsilon E dx dz$ , а ток смещения через нее же, умноженный на  $4\pi$ , равным

$$\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} dx dz,$$

где  $c$  — скорость света в пустоте,  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная среды; здесь ток выражен в электромагнитных единицах и  $E$  есть среднее значение силы поля на площадке  $dx dz$ . Если положить величину магнитной силы в плоскости

$YZ$  равной  $H$ , а в плоскостях параллельной  $H + \frac{\partial H}{\partial x} dx$ , то работа при движении единичного магнитного полюса вдоль контура  $dx dz$  равна

$$-\frac{\partial H}{\partial x} dx dz,$$

так как движение вдоль сторон  $dx$ , вследствие перпендикулярности к ним магнитной силы, не дает работы. Сравнивая оба выражения, мы находим:

$$\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (86)$$

Так как по условию электрическая сила перпендикулярна к плоскости  $XZ$  (параллельна  $OY$ ), то электродвижущая сила вдоль контура, лежащего в этой плоскости, равна нулю, и следовательно магнитный поток (вследствие соотношения  $B$ ) направлен вдоль оси  $OZ$ , т. е. электрическая и магнитная силы в плоскости волны взаимно перпендикулярны.

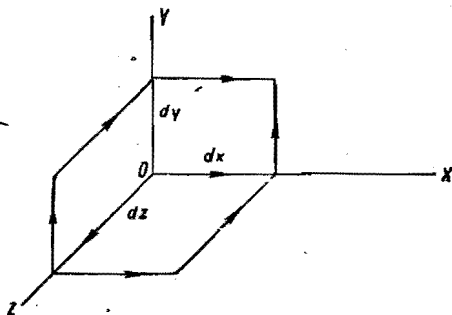


Рис. 85.

Поток магнитной силы через площадку  $dx dy$  равен  $\mu H dx dy$ , а электродвижущая сила, в электромагнитных единицах, вдоль контура, её ограничивающего, принимая во внимание направления, обозначенные стрелками, равна

$$C \frac{\partial E}{\partial x} dx dy.$$

В виду этого закон электромагнитной индукции даст соотношение

$$-\mu \frac{\partial H}{\partial t} = C \frac{\partial E}{\partial x}. \quad (87)$$

Из уравнений (86) и (87) легко исключить или  $H$  или  $E$ , дифференцируя одно по  $x$ , другое по  $t$  и складывая их с соответственными коэффициентами. Оба вектора — электрический и магнитный — удовлетворяют одному и тому же волновому уравнению:

$$\frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}, \quad (88)$$

подобному уравнению (79). Поэтому волны электрической и магнитной силы распространяются вдоль оси  $OX$  со скоростью  $u = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ . Мы можем таким образом представить электрическую и магнитную силы следующими формулами:

$$\begin{aligned} E &= E_0 \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right); \\ H &= H_0 \sin \omega \left( t - \frac{x}{u} \right). \end{aligned} \quad (89)$$

Если подставить эти выражения в (86) или (87) и принять во внимание выражение для скорости волн, то получим соотношение:

$$\sqrt{\epsilon} E = \sqrt{\mu} H, \quad (90)$$

которое приводит к равенству электрической и магнитной энергий волны:

$$\frac{\epsilon E^2}{8\pi} = \frac{\mu H^2}{8\pi}.$$

Умножая плотность полной энергии на скорость распространения волн вдоль оси  $OX$ , мы находим величину потока энергии, равного:

$$\frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} \left( \frac{\epsilon}{8\pi} E^2 + \frac{\mu H^2}{8\pi} \right) = \frac{c}{4\pi} EH, \quad (91)$$

вследствие (90). Направление потока энергии, который будем обозначать  $S$ , составляет прямой угол с направлениями  $E$  и  $H$  и может быть представлено вектором Пойнтинга, который мы рассматривали в § 41 в связи с распространением волн в параллельных проводниках. Сравнивая результаты, полученные здесь, с тем, что говорилось в § 40, мы видим, что распространение свободных волн в диэлектрике ничем по существу не отличается от распространения волн в проволоке.

## § 45. Техническое применение электромагнитных волн.

Электрические колебания и волны нашли широкое применение при передаче телеграфных сигналов, человеческой речи, а в последнее время и изображений без помощи проводов. Беспроволочный телеграф был первым и естественным применением тех явлений, при помощи которых Г. Герц доказал существование свободных волн в пространстве и их распространение со скоростью света. Он состоял вначале из искрового передатчика, в котором колебания возбуждались при помощи искрового разряда и получались в виде волн, и из приемника, в котором проходящие волны возбуждали колебания, передавая таким образом сигналы передатчика. Для усиления излучающей способности и связанной с ней способности принимать приходящие волны как передатчик, так и приемник снабжались воздушной сетью, т. е. системой проводов с возможно большей поверхностью, которые играли ту же роль, как Герцев вибратор.

Колебания, создаваемые с помощью искрового разряда, обычно сильно затухают, и поэтому использование резонанса вначале было весьма несовершенно. Задача получения мощных и возможно слабо затухающих колебаний была, в конце концов, разрешена открытием способов возбуждения колебаний незатухающих. Наиболее просто это достигается теперь применением трехэлектродных ламп (см. стр. 90).

Последние широко применяются и при приеме для уменьшения затухания колебаний в цепях приемника (при помощи регенерации колебаний), для уменьшения колебаний и также для выпрямления колебаний или детектирования. Выпрямление колебаний и получение постоянного тока, действующего на приемные аппараты, могут быть достигнуты как и в случае кристаллического детектора (стр. 82), так и вследствие односторонней проводимости электронной лампы.

Электромагнитные волны, применяемые для радиотелеграфирования, имеют различную длину. Вначале стремление к получению возможно мощных разрядов и к увеличению расстояний, на которые передаются сигналы, заставило увеличивать размеры воздушных сетей или антенн и, следовательно, длину волны. Технические длины волн мощных станций поэтому нередко измерялись десятками километров. Для очень дальних расстояний наилучшие результаты получались при этом еще и потому, что приходится считаться с кривизной земной поверхности, и чем длиннее волна, тем легче преодолевается эта кривизна.

Исследование силы электрического поля в месте приема сигналов показало, однако, что наблюдаемый эффект значительно сильнее, чем ожидаемый по расчету, и объяснение этому найдено в том влиянии, какое оказывают на распространение волн высокие слои атмосферы. В этих слоях, на высоте 100 км и больше над земной поверхностью, главным образом под влиянием солнечных лучей воздух приобретает весьма значительную проводимость, зависящую от присутствия здесь в достаточно больших ( $10^5$  в куб. см) количествах свободных

электронов. Присутствие электронов уменьшает показатель преломления волн и при этом тем значительнее, чем меньше частота колебаний. Вследствие этого проводящий слой, или, как его принято называть, слой Хевизайда, может вызывать полное отражение волн обратно к земной поверхности. Электромагнитные волны, не удаляясь от поверхности земли больше чем на 100 км, огибают ее и поэтому ослабление их значительно меньше, чем в случае свободного распространения вокруг непрозрачного для них земного шара.

Волны с очень малой длиной волны — меньше 10 м — могут проникать через слой Хевизайда без отражения и поэтому не могут применяться для передач сигналов на большие расстояния. В то же время при распространении вдоль поверхности земли они испытывают весьма сильное поглощение и рассеяние, и поэтому амплитуда их весьма быстро убывает с расстоянием. Несколько более длинные волны от 10 м до 100 м легко отражаются слоем Хевизайда; при этом они проходят значительные расстояния вдали от земли, испытывая там ничтожное поглощение. Этим объясняется, почему применение коротких волн в последнее время получило распространение.

Для передачи телефонной речи (и в особенности для ширококовещания) колебания в передатчике подвергаются модуляции. Последняя состоит в изменении амплитуды колебаний пропорционально амплитуде звуковых колебаний, так чтобы при приеме электромагнитных волн выпрямленный ток в телефоне менялся в соответствии с передаваемыми звуковыми колебаниями. Аналогичным образом производится и передача изображений, т. е. рисунков, фотографий, документов и т. п. Луч света, быстро скользя по поверхности передаваемого рисунка, отражается от различных точек его и попадает на поверхность фотоэлемента, дающего ток, пропорциональный яркости отраженного света. Ток фотоэлемента, действуя на передающее устройство, изменяет амплитуду электромагнитных волн, модулирует их. Передаваемые модулированные волны, действуя на приемник, должны изменять яркость луча, идущего от постоянного источника света, пропорционально амплитуде колебаний. В последнее время для этой цели обычно применяется свойство некоторых жидкостей (напр. нитробензола) изменять поляризацию световых лучей, проходящих через них, если жидкость находится под действием сильного электрического поля (явление Керра).

Из других применений электрических колебаний отметим те, которые основаны на физиологическом действии их. Проходя через живые ткани, токи высокой частоты не производят химических изменений в их клетках, так как действие тока одного направления нейтрализуется противоположным током, но зато вызывают сильное нагревание. Этим способом можно производить нагревание таких органов, которые находятся в глубине, или производить прогревание тканей, не подвергая кожу действию высокой температуры. Такое действие называется диатермией.

## ГЛАВА IV.

### СВЕТ.

#### § 46. Электромагнитная природа света.

Связь между электрическими и магнитными явлениями, с одной стороны, и явлениями света, с другой, может быть установлена уже тем, что отношение между силой тока в электростатических единицах и той же величиной, выраженной в электромагнитных единицах, совпадает по величине со скоростью света  $c$ . С другой стороны, как показал Максвелл, из этого же соотношения необходимо следует, что и электромагнитные волны должны распространяться с той же скоростью  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/сек, если распространение происходит в пустоте. В материальной среде, как мы видели, скорость электромагнитных волн определяется главным образом диэлектрической постоянной среды. Если оказалось, что свет имеет в такой среде скорость, совпадающую со скоростью электромагнитных волн, то естественно предположить, что свет есть электромагнитное явление и световые волны суть волны электромагнитные.

Распространение электромагнитных волн, изученное Г. Герцем, Лебедевым, Риги и другими физиками, подтвердило выводы теории Максвелла и обнаружило все те явления, которые известны были ранее как явления оптические. Но частота колебаний электромагнитных волн, полученных Герцем, в десятки тысяч раз отличается от частоты световых колебаний, и поэтому немудрено, что в некоторых отношениях полного совпадения между свойствами этих колебаний не могло быть обнаружено. Так, например, хотя в газах скорость света может быть вычислена из их диэлектрической постоянной, но в большинстве жидкостей диэлектрическая постоянная и вычисленный из нее показатель преломления электромагнитных волн совершенно не соответствуют показателю преломления света. Так, например, для воды диэлектрическая постоянная равна 81 и показатель преломления должен быть равен 9, что и подтверждается на опыте вплоть до самых коротких электромагнитных волн; но показатель преломления света для воды равен 1,4. Такое расхождение не представляет однако противоречия с теорией Максвелла, так как диэлектрическая постоянная жидкости иногда изменяется очень сильно в зависимости от частоты колебаний и от изменения ее физического состояния: температуры, агрегатного состояния (напр. затвердевания) и т. п. Кроме того, и скорость света также изменяется с частотой колебаний, и в некоторых участках спектра, в которых, например, наблюдается сильное поглощение света, показатель преломления может измениться очень значительно.



Чем ближе частота колебаний электромагнитных и световых, тем удобнее производить сравнение их свойств. Поэтому представляет большой интерес с одной стороны возможность укоротить длину волны электромагнитных колебаний, с другой стороны получить световые колебания с возможно более длинной волной. Однако получение электромагнитных колебаний с длиной волны в несколько мм представляет уже значительные трудности; в то же время инфракрасные световые волны длиной в несколько десятых мм представляют в настоящее время предел достижимого при помощи оптических методов. Поэтому свойства волн с промежуточной длиной еще не изучены в достаточной степени, и можно только косвенным образом судить, как изменяются оптические свойства тел при переходе от электромагнитных волн к световым. Тем не менее во многих случаях аналогия между этими видами волн проявляется очень наглядно.

Так, непрозрачность металлов и их отражательная способность (металлический блеск) представляют свойство, качественно сходное и для световых и для электрических волн.

Никольс и Рубенс показали также, что между отражательной и поглощательной способностью металлов при падении на них инфракрасных волн и электропроводностью их  $\sigma$  наблюдается та же зависимость, какая предсказывается электромагнитной теорией света, а именно:

$$100 - R = \frac{a}{\sqrt{\sigma T}}, \quad (92)$$

где  $R$  — отражательная способность,  $a$  — некоторая постоянная для всех металлов величина,  $T$  — период колебаний.

Так как в электромагнитных волнах имеются два вектора, взаимно перпендикулярных: электрический и магнитный, то возникает вопрос, какой из них следует считать вектором световых колебаний. Как мы видели, электрическая и магнитная энергии имеют одну и ту же величину, но в отношении действия на материальные тела, напр., химического действия света, электрический и магнитный векторы играют не одинаковую роль. Если молекула представляет собой электрический диполь, то действие электрического вектора должно обнаруживаться особенно сильно. В некоторых случаях можно опытом доказать, что фотохимическое действие производится электрическими силами волны. Так, напр., О. Винер, получив стоячие световые волны при отражении от поверхности ртути, обнаружил, что действие их на светочувствительный слой фотографической пластинки происходит лишь в тех местах, где находятся пучности электрической силы. С другой стороны, при вычислении давления света на проводящую и отражающую поверхности приходится принимать во внимание магнитную силу волны.

Итак, с точки зрения электромагнитной теории света обычные электромагнитные волны и волны световые отличаются только частотой их колебаний или длиной волны. Располагая числа колебаний в ряд, начиная от самых малых и кончая самыми большими, известными нам, мы получим спектр электромагнитных волн. При помощи машин переменного тока можно

дойти до частоты в  $10^4$  и даже больше колебаний в секунду, — это область технических переменных токов. Более высокие частоты, вплоть до  $10^7$  в секунду и несколько выше, представляют область технических радиочастот или область токов высокой частоты. Более высокие частоты, почти до  $10^{11}$  в сек., применяются уже почти исключительно для научных целей и могут быть названы ультра-, или сверхрадиочастотами. Промежуток спектра от  $10^{11}$  до  $10^{12}$  колебаний в секунду, хотя и наблюдался, но почти совсем не изучен и представляет область перехода от электромагнитных к инфракрасным волнам. Невидимые для глаза, но играющие большую роль в области оптических явлений, эти последние простираются вплоть до начала спектра видимых лучей, т. е. до частот  $4 \cdot 10^{14}$  и выше. Начиная от  $8 \cdot 10^{14}$  колебаний в секунду, мы имеем опять область невидимых лучей, вначале ультрафиолетовых, затем рентгеновых и радиоактивных лучей и, наконец, проникающей радиации, приходящей из мирового пространства. Эта область спектра охватывает частоты от  $10^{15}$  до  $10^{21}$  в секунду. На протяжении такого обширного спектра мы встречаем самые разнообразные явления и формы воздействия волн на материальные тела, но в то же время во всех явлениях проявляется их общая электромагнитная природа.

Длины волн всех этих лучей, распространяющихся со скоростью света  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/сек., изменяются в таких широких пределах, что для выражения их принято пользоваться различными единицами длины. Радиоволны, применяемые в технике, измеряются метрами, сверх-радиоволны — сантиметрами и миллиметрами (мм). Волны света обычно выражаются в микронах ( $1\mu = 0,001$  мм), равных одной тысячной миллиметра, или онгстремах ( $1\text{Å} = 10^{-8}$  см). Наконец, длина рентгеновых лучей выражается или в онгстремах, или в особых единицах  $X$ , в тысячу раз меньших онгстрема ( $1X = 10^{-3}\text{Å} = 10^{-11}$  см).

Таблица частот  $\nu$  и длин волн  $\lambda$ .

	ЧАСТОТА	длина волны
Электромагнитные волны . . . . .	$0 - 10^{11}$	$\sim - 4$ мм
Инфракрасные лучи . . . . .	$10^{12} - 4 \cdot 10^{14}$	$300\mu - 0,76\mu$
Видимые лучи . . . . .	$4 \cdot 10^{14} - 8 \cdot 10^{14}$	$0,76\mu - 0,36\mu$
Ультрафиолетовые лучи . . . . .	$8 \cdot 10^{14} - 1,5 \cdot 10^{15}$	$0,36\mu - 0,2\mu$
Крайние ультрафиолетовые лучи . . . . .	$1,5 \cdot 10^{15} - 3 \cdot 10^{15}$	$0,2\mu - 0,1\mu$
Рентгеновые лучи . . . . .	$3 \cdot 10^{16} - 3 \cdot 10^{19}$	$100\text{Å} (0,01\mu) - 0,1\text{Å}$
Лучи $\gamma$ . . . . .	$3 \cdot 10^{19} - 3 \cdot 10^{20}$	$0,1\text{Å} - 0,01\text{Å}$
Проникающие космические лучи . . . . .	$10^{21}$	$0,4X - 0,2X$

### § 47. Отражение света. Формулы Френеля.

Отражение света мы можем теперь рассматривать как частный случай отражения электромагнитных волн. Это дает возможность найти количество света, как отраженного от поверхности тела, так и вошедшего внутрь, т. е. преломленного, если тело прозрачно. С этой целью представим себе случай падения плоских волн на плоскую границу  $S$  между двумя непроводящими средами, из которых одна имеет диэлектрическую постоянную  $\epsilon_1$ , а другая  $\epsilon_2$ . Магнитную проницаемость их можно считать равной единице, так как у всех диэлектриков она в действительности почти не отличается от единицы. Мы знаем, что скорости распространения волн  $u_1$  и  $u_2$  в этих средах связаны с их диэлектрическими постоянными равенствами,  $u_1 : u_2 = \sqrt{\epsilon_2} : \sqrt{\epsilon_1}$ . Кроме того, так как средняя магнитная и электрическая энергии волны равны, то между магнитной и электрической силами существует следующее соотношение:

$$H_1 = \sqrt{\epsilon_1} E_1 \quad \text{и} \quad H_2 = \sqrt{\epsilon_2} E_2. \quad (93)$$

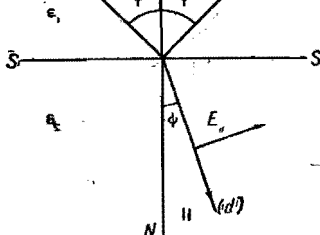


Рис. 86.

У поверхности  $S$  мы будем иметь три волны: с одной стороны падающую и отраженную, а с другой прошедшую через границу, или преломленную. Поэтому электрическая и магнитная силы по одну сторону поверхности складываются из сил падающей и отраженной волн, а по другую сторону определяются преломленной волной. Условия на границе двух различных диэлектриков требуют, чтобы электрическая сила испытывала скачок, переходя через границу, и при этом изменялась в отношении  $\epsilon_1 : \epsilon_2$ , если она перпендикулярна к поверхности раздела; или же чтобы она изменялась непрерывно, т. е. по обе стороны границы имела ту же величину, если она касательна к поверхности. Так как, по условию, магнитные свойства в той и другой среде одинаковы, то магнитная сила по обе стороны границы во всех случаях должна оставаться неизменной.

Необходимо различать два случая: когда электрическая сила волны лежит в плоскости падения, как показано на рис. 86, и когда она перпендикулярна к ней. Рассмотрим сначала первый случай. Обозначим величины, относящиеся к падающей волне, значком  $i$ , к отраженной  $r$ , и, наконец, к проходящей  $d$ . Угол падения и угол отражения, равные  $\varphi$ , а также угол преломления  $\psi$  определяют направление распространения волн, т. е. их лучей, по отношению к нормали  $NN'$ , проведенной в точке падения к поверхности  $S$ . Направление электрической и магнитной сил перпендикулярно к направлению луча; в рассматриваемом случае магнитная сила не изображена вовсе на черт. 86, так как она перпендикулярна к плоскости чертежа или параллельна поверхности  $S$ . В первой среде магнитная сила у поверхности складывается из магнит-

ных сил падающей и отраженной волны, и эта сумма равняется магнитной силе прошедшей волны:

$$H_i + H_r = H_d. \quad (94)$$

Что касается электрических сил, то нужно различать вертикальную и горизонтальную составляющие их. Условия, которым подчинены эти составляющие по обе стороны границы, имеют следующий вид:

$$\epsilon_1 (E_i \sin \varphi + E_r \sin \varphi) = \epsilon_2 E_d \sin \psi \quad (95)$$

$$\epsilon_1 (E_i \cos \varphi - E_r \cos \varphi) = \epsilon_2 E_d \cos \psi; \quad (96)$$

знак минус в левой части (96) появляется от того, что горизонтальные составляющие в первой среде направлены в противоположные стороны.

Вследствие (93) условие (94) можно представить еще так:

$$\sqrt{\epsilon_1} \cdot (E_i + E_r) = \sqrt{\epsilon_2} E_d. \quad (97)$$

Сравнивая это условие с (95), мы находим, что они не противоречат друг другу, если

$$n = \sin \varphi : \sin \psi = \sqrt{\epsilon_2} : \sqrt{\epsilon_1}, \quad (98)$$

т. е. если показатель преломления  $n$  равен отношению скорости волн

$$n = u_1 : u_2 = \sqrt{\epsilon_2} : \sqrt{\epsilon_1}.$$

Из условий (96) и (95), деля одно на другое, получаем соотношение:

$$\frac{E_i - E_r}{E_i + E_r} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\epsilon_1}} = \frac{\cos \psi}{\sqrt{\epsilon_2}}. \quad (99)$$

Введем отношение  $r = E_r : E_i$ , которое представляет относительную величину амплитуды отраженной волны, и вместо корней из диэлектрических постоянных, согласно (98), синусы углов падения и преломления. Условие (99) принимает тогда следующий вид:

$$\frac{1 - r}{1 + r} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \psi} = \frac{\cos \psi}{\sin \varphi}$$

или после простого преобразования:

$$\frac{1 - r}{1 + r} = \frac{\sin 2 \psi}{\sin 2 \varphi}. \quad (100)$$

Из этого условия мы находим относительную величину отраженной волны:

$$r = \frac{\sin 2 \varphi - \sin 2 \psi}{\sin 2 \varphi + \sin 2 \psi} = \frac{\operatorname{tg} (\varphi - \psi)}{\operatorname{tg} (\varphi + \psi)}. \quad (101)$$

При нормальном падении оба угла  $\varphi$  и  $\psi$  равны нулю, но предел отношения их вследствие (98) равен показателю преломления  $n$ ; поэтому и предельное значение  $r$  равно

$$r = \frac{n - 1}{n + 1}. \quad (102)$$

Если же  $\varphi_1 + \psi_1 = \frac{\pi}{2}$  и следовательно угол  $\varphi_1$  удовлетворяет условию

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = n = \frac{\sin \varphi_1}{\cos \varphi_1} = \operatorname{tg} \varphi_1, \quad (103)$$

то амплитуда  $r$  обращается в нуль, т. е. волны вовсе не будут отражаться от границы  $S$ . На рис. 87 кривая I представляет изменение амплитуды отраженной волны при возрастании угла падения от нуля.

Если  $\varphi > \varphi_1$ , то  $r$  меняет знак, т. е. фаза отраженной волны изменяется на  $180^\circ$ . При малых углах падения  $r > 0$ , если  $n > 1$ , и  $r < 0$  при  $n < 1$ .

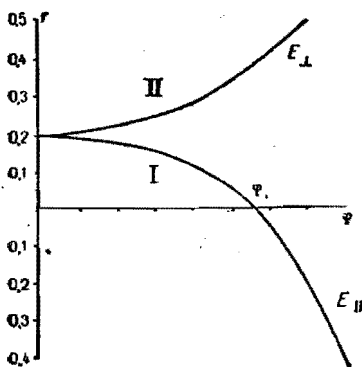


Рис. 87.

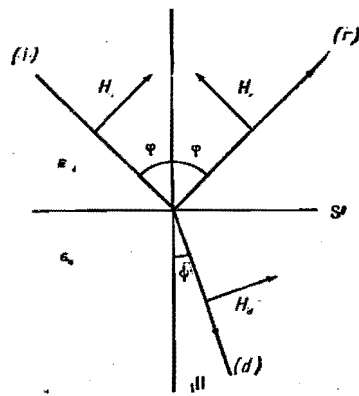


Рис. 88.

Во втором случае, когда электрическая сила перпендикулярна к плоскости падения (рис. 88) и параллельна границе  $S'$ , мы получим такую систему условий

$$\begin{aligned} E_i - E_r &= E_d, \\ H_i \sin \varphi - H_r \sin \varphi &= H_d \sin \psi, \\ H_i \cos \varphi + H_r \cos \varphi &= H_d \cos \psi \end{aligned} \quad (104)$$

или вследствие (93)

$$\begin{aligned} E_i - E_r &= E_d, \\ (E_i - E_r) \sqrt{\epsilon_2} \sin \varphi &= E_d \sqrt{\epsilon_2} \sin \psi, \\ (E_i + E_r) \sqrt{\epsilon_1} \cos \varphi &= E_d \sqrt{\epsilon_2} \cos \psi, \end{aligned} \quad (105)$$

что приводит к выражению для

$$r = \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sin(\varphi + \psi)}. \quad (106)$$

На рис. 87 кривая II представляет изменение отраженной амплитуды в зависимости от угла падения для этого случая ( $E_\perp$ ). Ни для какого угла мы не имеем нулевого значения отраженной амплитуды.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Формулы (101) и (106) называются формулами Френеля и были получены этим ученым при объяснении явления отражения и преломления световых волн.

Угол  $\varphi_1$ , при котором не происходит отражения колебаний электрической силы, лежащих в плоскости падения, носит название угла полной поляризации. При этом угле волны, как бы они ни были поляризованы при падении, после отражения все имеют одну и ту же плоскость поляризации, совпадающую с плоскостью падения. Заметим еще, что при возрастании показателя преломления отраженная амплитуда приближается к падающей, так как  $r$  стремится к единице. Отражение будет тем ближе к полному, чем больше  $n = \sqrt{\epsilon_2} : \sqrt{\epsilon_1}$ . При отражении от среды с большей диэлектрической постоянной ( $\epsilon_2 > \epsilon_1$ ) и при малых углах падения электрический вектор в падающей и отраженной волнах имеет противоположное направление; при отражении от среды с меньшей диэлектрической постоянной ( $\epsilon_2 < \epsilon_1$ ) направления электрических векторов совпадают, и мы можем иметь у отражающей границы пучность электрической силы. В этом заключается существенное различие отражения от электрически более плотной ( $\epsilon_2 > \epsilon_1$ ) или менее плотной среды ( $\epsilon_2 < \epsilon_1$ ).

Положим, что электромагнитные волны проходят из более плотной в менее плотную среду и что показатель преломления  $n$  меньше единицы, то при углах падения  $\varphi$ , больших некоторого угла  $\varphi_0$ , который определяется из условия

$$\sin \varphi_0 = n,$$

нельзя удовлетворить соотношению  $\sin \varphi : \sin \psi = n$  никаким вещественным углом  $\psi$  ( $\sin \psi > 1$ ).

В этом случае мы не будем иметь вовсе проходящих волн, и все падающие волны испытывают полное внутреннее отражение. Очевидно, что определение угла полного внутреннего отражения может служить для определения показателя преломления.

При углах больших, чем угол  $\varphi_0$ , не может быть и постоянного вещественного отношения  $r$  между величинами электрической силы в падающей и отраженной волне, так как при  $\sin \psi > 1$  косинус  $\psi$  есть величина мнимая, и формулы Френеля дают для  $r$  значение, имеющее такой вид:

$$r = e^{i\vartheta},$$

где  $\vartheta$  угол, который обращается в  $0^\circ$  или  $180^\circ$  ( $r = \pm 1$ ) в двух частных случаях: при угле полного внутреннего отражения  $\varphi_0$  и при скользком падении лучей,  $\varphi = 90^\circ$ . При всех других промежуточных значениях  $\varphi$  величина  $r$  по абсолютной величине сохраняет значение, равное единице, но является комплексной величиной. Это указывает на существование сдвига фазы между волнами падающими и отраженными. Так как этот сдвиг различен для колебаний, параллельных плоскости падения, и для колебаний, перпендикулярных к ней, то всякое колебание, которое можно разложить на такие взаимно перпендикулярные составляющие, после полного внутреннего отражения будет состоять из двух взаимно перпендикулярных колебаний, имеющих некоторую разность фаз. В виду этого полным внутренним отражением можно пользоваться для получения эллиптически поляризованных волн.

Отсутствие проходящих волн при углах, больших угла полного внутреннего отражения, не означает однако, что по ту сторону границы совсем нет электромагнитных колебаний. Можно утверждать только, что не может быть таких же волн, какими являются падающие и отраженные волны. Более подробное исследование показывает, что за преломляющей поверхностью при полном отражении имеются колебания, амплитуда которых убывает при удалении от границы и тем быстрее, чем больше угол падения. На расстояниях, меньших длины волны, однако легко можно еще обнаружить наличие электрических колебаний и во второй среде.

Необходимо сказать еще несколько слов об отражении от проводящих тел. В этом случае можно применить приведенные способы расчета, но необходимо считать диэлектрическую постоянную проводящей среды не вещественной, а мнимой величиной. Отражение будет происходить тем полнее, чем больше проводимость, но некоторая часть энергии волн все же будет проникать внутрь проводящего тела и там поглощаться. В отраженных лучах вследствие этого обнаруживается также некоторая разность фаз по сравнению с падающими, и поэтому они будут, вообще говоря, эллиптически поляризованными.

#### § 48. Поляризация света при отражении и преломлении.

Электромагнитная теория света приводит к выводу, что световые волны поперечны. Направление световых колебаний, которые электромагнитная теория отождествляет с электрической силой волны, перпендикулярно к направлению распространения волн или, другими словами, лежит в плоскости волны. Но, оставаясь в плоскости волны, электрическая сила может иметь в ней любое направление. Направление колебаний и определяет поляризацию света.

Под естественным или неполяризованным светом мы понимаем такой, в котором происходит непрерывное и беспорядочное изменение направления электрической силы. Разлагая электрическую силу на две составляющие вдоль каких-нибудь взаимно-перпендикулярных направлений, мы получим два световых колебания, амплитуды и фазы которых могут быть совершенно различны. Если основное колебание меняется по амплитуде и фазе, а также по направлению, то соответственные изменения испытывают и составляющие колебания. Изменения эти происходят хотя медленно по сравнению с временем одного колебания, но очень быстро по отношению к продолжительности наблюдения при опытах с естественным светом. Причина такой изменчивости естественного света заключается, напр., в том, что световые волны, доходящие до данной точки, создаются множеством независимых источников света, и поэтому результат их сложения определяется постоянно меняющимся случайным сочетанием амплитуд и фаз их колебаний.

Из естественного неполяризованного света мы можем получить прямолинейно поляризованный, если уничтожим или отчасти только ослабим одну из составляющих электрической силы. Если величина квадрата электрической силы

волны равна  $E^2$ , то, каковы бы ни были направление и фаза светового колебания, мы находим, что при разложении его на два взаимно-перпендикулярных колебания величины квадратов составляющих электрической силы по этим направлениям  $E_1^2$  и  $E_2^2$  связаны соотношением

$$E_1^2 + E_2^2 = E^2. \quad (107)$$

Это соотношение показывает, что энергия волн какого угодно света (сила света) равняется сумме энергий двух волн, поляризованных прямолинейно и взаимно перпендикулярно, на которые может быть разложена данная волна. Разложение может быть выполнено для всяких двух направлений, между собой перпендикулярных. Но в естественном свете, независимо от выбора этих направлений, мы получаем всегда одну и ту же среднюю энергию для каждой из составляющих, равную половине всей энергии:

$$\overline{E_1^2} = \overline{E_2^2} = \frac{1}{2} \overline{E^2}. \quad (108)$$

Это соотношение может служить определением основного свойства неполяризованного или естественного света.

Если же можно найти такие два направления, чтобы энергия одной из составляющих была в среднем больше энергии другой, то такой свет мы называем отчасти поляризованным. Наконец, вполне и притом прямолинейно поляризованным свет можно считать тогда, когда одна из составляющих исчезает вовсе. Поляризация света может быть описана либо направлением колебания электрического вектора, либо же перпендикулярной к нему плоскостью, называемой плоскостью поляризации, проходящей через направление луча.

От неполяризованного или отчасти поляризованного света нужно отличать свет эллиптически поляризованный и, в частности, поляризованный по кругу. В таком свете обе составляющие волны, как бы мы ни выбрали направления, по которым разлагаются колебания света, имеют энергию, отличную от нуля, и в случае круговой поляризации энергии составляющих волн всегда равны между собой. Но в отличие от естественного света между составляющими колебаниями света, поляризованного эллиптически или по кругу, имеется постоянная разность фаз, чего нет в неполяризованном свете.

Эллиптически поляризованный свет можно представить себе наглядно, если вообразить вращение вектора электрической силы в плоскости волны (рис. 89), причем длина его меняется, и конец описывает эллипс. Подобное же движение производит и вектор магнитной силы. Такой свет может быть разложен на составляющие, поляризованные прямолинейно, причем главными направлениями мы будем считать направления осей эллипса. При разложении эле-

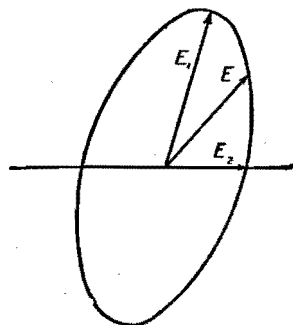


Рис. 89.



трического колебания по этим направлениям разность фаз между ними, очевидно, равна  $90^\circ$  или  $270^\circ$  в зависимости от направления вращения вектора  $E$ .

Поляризация естественного света легче всего осуществляется при помощи отражения от плоской поверхности какого-нибудь диэлектрика. Такими телами являются малопроводящие диэлектрики. Диэлектрическая постоянная их зависит, вообще говоря, от частоты колебаний и для световых колебаний имеет не то значение, как для колебаний электромагнитных, обладающих значительно меньшей частотой; но если поглощение и при частоте световых колебаний невелико, мы можем применить формулы Френеля, выведенные в § 47, к световым волнам.

Мы видели, что при падении плоских электромагнитных волн на поверхность диэлектрика они частью отражаются, частью проходят внутрь, испытывая преломление. Относительная величина амплитуды отраженной волны  $r$  и амплитуды преломленной волны  $d$  зависят от угла падения лучей  $\varphi$ , показателя преломления  $n$  (или, что то же, угла преломления  $\psi$ ) и, наконец, от того, как направлен электрический вектор относительно плоскости падения.

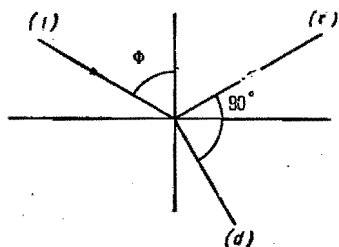


Рис. 90.

Если электрический вектор лежит в плоскости падения, т. е. плоскость поляризации и падения лучей взаимно перпендикулярны, то при известном угле падения  $\Phi$ , определяемого уравнением:

$$\operatorname{tg} \Phi = n, \quad (109)$$

отражение вовсе не будет происходить (стр. 116), и, следовательно, волна полностью будет проходить через границу ( $d=1$ ). Это имеет место, очевидно, если направление преломленного луча составляет прямой угол с направлением отраженного, как это видно на рис. 90. Так, для стекла с показателем преломления  $n=1,5$  угол  $\Phi=56^\circ$ , для воды ( $n=1,3$ )  $\Phi=52^\circ$ , а для алмаза ( $n=1,6$ )  $\Phi=58^\circ$ .

В другом случае, когда плоскости падения лучей и поляризации их совпадают, при всех углах падения будем иметь как отраженную, так и преломленную волны.

В случае падения на преломляющую плоскость волн неполяризованных мы должны разложить их на две волны поляризованных: одна — в плоскости падения, другая — в перпендикулярной плоскости. При падении под углом  $\Phi$ , будет отражаться только та волна, плоскость поляризации которой совпадает с плоскостью падения, и мы будем иметь в отраженном свете волну, прямолинейно поляризованную в плоскости падения.

Так как в падающей волне обе составляющие представлены одинаково сильно, то в проходящем свете мы будем иметь частичную поляризацию с преобладанием света, поляризованного в плоскости, перпендикулярной плоскости падения.

Если поляризацию характеризовать не положением плоскости поляризации, а направлением колебаний электрической силы, то можно утверждать, что в отраженном свете при угле падения, равном углу полной поляризации, электрическая сила перпендикулярна плоскости падения и, следовательно, параллельна отражающей плоскости; в преломленном же свете, наоборот, преобладает составляющая электрической силы, лежащая в плоскости падения.

В качестве поляризатора, т. е. прибора, дающего поляризованный свет, можно применить стеклянную пластинку (зеркало), отражающую свет под углом полной поляризации. Для стекла, показатель преломления которого равен 1,51, угол полной поляризации равен  $56^\circ 30'$ .

Отраженный под таким углом свет полностью поляризован, что можно обнаружить следующим опытом. Если заставить отраженный луч  $S_1$  падать на вторую пластинку (рис. 91) также под углом полной поляризации и вращать эту последнюю вокруг направления луча  $S_1$  как оси, тогда угол падения на нее будет оставаться неизменным и равным  $\Phi$ , но нормаль  $n_2$  ко второй пластинке и отраженный от нее луч  $S_2$  будут вращаться, меняя в пространстве положение плоскости падения луча  $S_1$ . Вследствие этого сила света отраженного луча  $S_2$

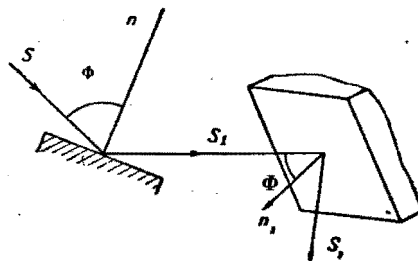


Рис. 91.

будет меняться и делается равной нулю, когда плоскости падения на первую и вторую пластинки будут составлять между собой прямой угол. Если бы падающий на вторую пластинку свет не был предварительно поляризован отражением от первой, то вращение второй пластинки не изменяло бы яркости света. При частичной поляризации сила света будет меняться, но ни при одном положении не делается равной нулю. Таким образом вторая пластинка может служить для обнаруживания поляризации света и называется анализатором.

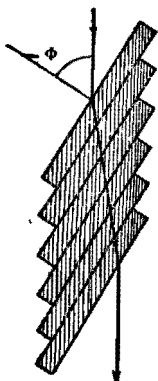


Рис. 92.

Как мы видели, проходящий сквозь границу раздела стекла и воздуха свет только отчасти поляризован в плоскости, перпендикулярной к плоскости падения. Но если взять несколько плоскопараллельных пластинок (рис. 92), то при прохождении через каждую из них роль составляющей поляризованной в той же плоскости возрастает, так как при каждом отражении (под углом  $\Phi$ ) проходящий свет теряет около  $27\%$  света, поляризованного в плоскости падения. Очевидно, что такая стеклянная стопа может служить и поляризатором, и анализатором света.

Мы знаем (стр. 117), что при полном внутреннем отражении электромагнитных волн, если в падающей волне имеется как параллельная, так и перпендикулярная составляющая, получается колебание эллиптическое. Для получения света, поляризованного по кругу, можно пользоваться ромбом Френеля (рис. 93).

Луч, входящий в ромб, дважды испытывает полное внутреннее отражение. При каждом отражении параллельная и перпендикулярная составляющие получают разность фаз в  $45^\circ$ , а после двукратного  $90^\circ$ . Если падающий луч прямолинейно поляризован в плоскости, составляющей  $45^\circ$  с плоскостью отражений внутри ромба, то при выходе из него обе составляющие светового колебания будут равны по амплитуде и отличаться на  $90^\circ$  по фазе. Таким образом, выходящий из ромба свет будет поляризован по кругу.



Рис. 93.

Мы видим, таким образом, что после всякого отражения или преломления естественный свет, вообще говоря, поляризуется, поэтому, например, рассеянный дневной свет, испытавший ряд отражений на границах между случайными скоплениями и разрежениями воздуха в атмосфере, также частично поляризован. Только при нормальном падении на плоскую поверхность поляризация в отраженном свете такая же, как и в падающем, и неполяризованный свет остается неполяризованным.

### § 49. Дисперсия света.

При изменении длины волны падающего света показатель преломления прозрачных тел не остается постоянным. Обычно при уменьшении длины волны он возрастает так, что в сложном белом свете, в состав которого входят различные длины волн, лучи фиолетовые, имеющие наиболее короткую волну среди видимых лучей, испытывают наибольшее преломление. На этом, как известно, основано получение спектра при помощи стеклянной призмы. Эту зависимость показателя преломления от длины волны мы называем дисперсией света. Нормальная дисперсия света обычно может быть представлена формулой такого вида:

$$n = -A'\lambda^2 + A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots, \quad (110)$$

в которой коэффициенты  $A'$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ... имеют различное значение для разных тел, напр., различных сортов стекла. Для практических целей, напр., для расчета оптических приборов, дисперсию характеризуют разностью показателей преломления для двух или трех различных длин волн. Так, напр., говорят — для кронгласа дисперсия равна 0,0086; это число означает разность показателей преломления  $n_c = 1,5153$  красной линии водородного спектра (линии  $C$  солнечного спектра) и  $n_F = 1,5239$  синей линии ( $F$ ) того же спектра.

Иногда однако изменение показателя преломления настолько значительно даже при небольших изменениях  $\lambda$ , что приходится пользоваться более точными формулами, для получения которых нам необходимо ближе ознакомиться с теорией дисперсии света, получившей наиболее наглядное истолкование в электронной теории.

Волны света, или, что то же, электромагнитные волны, проникая внутрь материальных тел, встречают на своем пути частицы тела (атомы и молекулы,

представляющие собою системы электрических зарядов). Эти частицы подвергаются действию периодически меняющейся электрической силы волны и под ее влиянием поляризуются, т. е. противоположные заряды перемещаются в противоположных направлениях, вследствие чего в электрическом поле волны частица приобретает свойства периодически меняющегося диполя. Такой диполь, как мы знаем (см. стр. 102), становится источником волн, период которых совпадает с периодом волн, падающих на него. Эти вторичные волны, создаваемые каждой отдельной частичкой на пути волны, складываясь с первичными (падающими), образуют волну преломленную, которая распространяется уже не с той скоростью, как первичные волны.

Причиной изменения скорости волн является то обстоятельство, что вторичные волны имеют другие фазы и амплитуды, чем первичные. Так как вторичные волны являются результатом вынужденных колебаний частиц тела под действием приходящих волн, то фаза их колебаний зависит как от фазы этих волн, так и от физических свойств самой частицы. Последнюю можно рассматривать как электрический резонатор с некоторым трением, вызывающим запаздывание фазы резонатора и его вторичной волны по отношению к возбуждающей его силе. Электрическая сила, вызывающая колебания этого резонатора, конечно, определяется всеми волнами, как первичными, так и вторичными, испускаемыми во всех направлениях окружающими частицами уже с иными фазами. В результате этого сложного взаимодействия различных волн одинакового периода мы получаем во всех точках тела колебания того же периода, фаза которых каждый раз при переходе от частицы к частице запаздывает по сравнению с подходящей к ней волне. В результате фаза проходящих световых волн распространяется внутри тела в направлении преломленных лучей со скоростью нормально меньшей, чем в пустоте.

Материальные частицы, поляризующиеся в поле волны, имеют различные свойства, но мы можем представить наиболее важные особенности при помощи следующей модели. Положим, что поляризация происходит от того, что в атомах имеются электроны, которые вместе с положительно заряженным остатком атома (ионом) образуют в нормальном состоянии нейтральный атом. Под действием света электроны приходят в движение в направлении электрической силы волны, и атом при этом поляризуется. Для простоты предположим, что каждый электрон имеет некоторое положение равновесия внутри атома, и что, будучи выведен из него, он испытывает квазиупругую силу, которая стремится вернуть его в положение равновесия. Так как электрон обладает определенной массой, то, очевидно, он будет иметь некоторый собственный период колебаний. Если у нашей модели несколько электронов, причем прочность связи их с атомом различна, то и частота собственных колебаний их будет различна.

Фаза колебания такого электронного резонатора (атома) зависит от разности частот внешней силы и собственных колебаний атома. Если период волны больше, чем период собственных колебаний, и затухания вследствие трения нет, то фазы их одинаковы; если же период волны меньше, то фазы противо-

положны. Соответственно этому и фазы вторичных волн меняются, как только период волны достигает значений, соответствующих собственным колебаниям какого-нибудь из электронов, и влияние их на скорость распространения фазы преломленной волны резко изменяется. Поэтому вблизи собственных колебаний электронов показатель преломления волн испытывает быстрые изменения, которые уже нельзя представить приближенной формулой (110).

При очень больших частотах колебаний волн, сильно превышающих все частоты собственных колебаний электронов, амплитуды вторичных волн делаются очень малыми и перестают оказывать влияние на скорость света в данном теле. Например, рентгеновы лучи вследствие малости длины их волны имеют показатель преломления, мало отличающийся от единицы.

Мы можем получить формулы для изменения показателя преломления с длиной волны путем более формальных, но весьма простых рассуждений. Диэлектрическая постоянная, которая, как мы видели, определяет показатель преломления волны, зависит от поляризации частиц тела под действием электрической силы. Если обозначим через  $E$  электрическую силу волны, которая есть сумма всех волн, первичных и вторичных, то электрическая индукция  $D$ , равная  $\epsilon E$ , где  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная, складывается из электрической силы  $E$  и поляризации материальной среды  $P$ , умноженной на  $4\pi$ :

$$D = E + 4\pi P. \quad (111)$$

Если  $e$  — заряд электрона и  $\xi$  — его смещение под действием электрического поля  $E$ , то момент диполя, который образуется вследствие этого, равен  $e\xi$ , а поляризация среды равна сумме таких моментов в единице объема  $P = \Sigma e\xi$ . Сначала рассмотрим наиболее простой случай, когда в каждом атоме есть только один электрон и число атомов в единице объема равно  $N$ , тогда  $P = Ne\xi$ . Если же в атоме несколько электронов, которые под действием той же силы получают различные перемещения  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots$ , то

$$P = Ne \Sigma \xi_i. \quad (112)$$

Если бы на наш электрический резонатор действовала только постоянная или очень медленно (сравнительно с периодом собственных колебаний электронов) изменяющаяся сила, то перемещение электрона было бы пропорционально действующей на него силе, согласно формуле

$$eE = k\xi, \quad (113)$$

в которой  $k$  — есть коэффициент квазиупругой силы, а скорости электрона можно было бы не принимать во внимание.

В этом случае

$$D = \left(1 + \frac{4\pi Ne^2}{k}\right) E, \quad (114)$$

и следовательно диэлектрическая постоянная

$$\epsilon_0 = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{k}. \quad (115)$$

Когда же частота электрической силы возрастает и приближается к частоте собственных колебаний электрона

$$\omega_e = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (116)$$

где  $m$  — масса электрона [см. стр. 3, форм. (8)], то смещение  $\xi$  электрона и амплитуда его колебаний возрастают вследствие резонанса и соответственно возрастает диэлектрическая постоянная, а следовательно и показатель преломления  $n$ . Если вынужденные колебания происходят с частотой  $\omega$  под действием внешней силы  $eE$ , то перемещение электрона равно [§ 11, форм. (18)]:

$$\xi = \frac{eE}{m(\omega_e^2 - \omega^2)}. \quad (117)$$

Поэтому до тех пор, пока частота  $\omega$  меньше частоты  $\omega_e$  собственных колебаний электрона, диэлектрическая постоянная согласно форм. (111), (112) и (117) равна:

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \frac{N}{\omega_e^2 - \omega^2} = 1 + \frac{4\pi e^2}{k} \frac{N}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_e^2}}. \quad (118)$$

Таким образом диэлектрическая постоянная должна возрастать при приближении частоты колебаний  $\omega$  к частоте  $\omega_e$  собственных колебаний. После перехода через резонансное значение  $\omega_e$  диэлектрическая постоянная согласно форм. (118) должна стать меньше единицы, т. е. скорость распространения волн в теле больше скорости их в пустоте. Но при дальнейшем возрастании  $\omega$  диэлектрическая постоянная опять стремится к единице. Изменение показателя преломления с частотой может быть представлено двумя ветвями кривой, изображенной на рис. 94, если атомы имеют только одну собственную частоту. Теоретически из форм. (118) следует, что показатель  $n$  должен обращаться в бесконечность при частоте  $\omega = \omega_e$ . Этот результат не имеет физического смысла и является следствием предположения, что потери и рассеяния энергии во время колебаний не происходит вовсе. Но мы должны иметь в виду, что уже вследствие испускания вторичных волн вынужденные колебания не могут возрастать безгранично, и поэтому показатель преломления также возрастает лишь до известного предела, как показано на рис. 94 тонкой чертой.

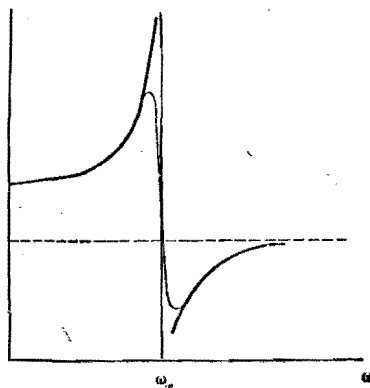


Рис. 94.

Когда частота света  $\omega$  очень далека от частоты собственных колебаний  $\omega_e$  (предполагая присутствие одного электрона), показатель преломления будет

равен или  $n_0 = \sqrt{\epsilon_0}$  (когда  $\frac{\omega^2}{\omega_e^2}$  мало по сравнению с единицей), или единице (если  $\frac{\omega^2}{\omega_e^2}$  настолько велико, что весь второй член мал по сравнению с единицей), смотря по тому, будет ли частота световых колебаний  $\omega$  меньше или больше  $\omega_e$ . В общем случае, когда имеется несколько частот собственных колебаний атома, ход показателя преломления несколько сложнее. При возрастании частоты  $\omega$  он резко уменьшается (аномальная дисперсия) каждый раз, когда  $\omega$  переходит через собственную частоту какого-нибудь из электронов атома. В промежутках происходит нормальное возрастание показателя преломления с частотой. Случай нескольких частот  $\omega_i = \omega', \omega'', \omega'''$  показан на черт. 95 (схематически).

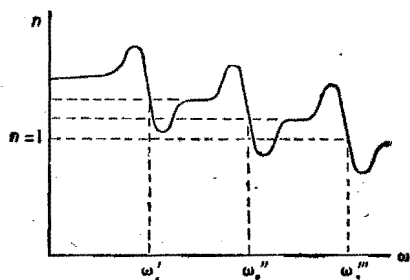


Рис. 95.

Таким образом общая формула для зависимости показателя от частот, или для кривой дисперсии, будет иметь следующий вид:

$$n^2 = 1 + 4\pi e^2 N \sum \frac{1}{k_i} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2}}. \quad (119)$$

Так как частоты обратно пропорциональны длине волны  $\lambda$  в пустоте, то  $\omega : \omega_i = \lambda_i : \lambda$ , где  $\lambda_i$  — длина волны собственных колебаний  $i$ -того электрона.

Если  $\omega < \omega_i$  и следовательно  $\lambda > \lambda_i$ , мы можем преобразовать множитель, зависящий от частоты, следующим образом:

$$\frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_i^2}} = \frac{1}{1 - \frac{\lambda_i^2}{\lambda^2}} = 1 + \frac{\lambda_i^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_i^4}{\lambda^4} + \dots$$

Если же  $\lambda < \lambda_i$ , то это же выражение можно представить так:

$$\frac{1}{1 - \frac{\lambda_i^2}{\lambda^2}} = -\frac{\lambda^2}{\lambda_i^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_i^2}} = -\left(\frac{\lambda^2}{\lambda_i^2} + \frac{\lambda^4}{\lambda_i^4} + \dots\right).$$

Мы видим теперь, что если длина волны света, преломленного данным телом, достаточно отличается от длины волны собственных колебаний его атомов, то в формуле (110) для показателя преломления члены с положительными степенями длины волны обусловлены собственными длинами волн, лежащими в длинноволновой части спектра, а члены с отрицательными степенями указывают на наличие коротковолновых собственных колебаний.

### § 50. Фазовая и групповая скорости волн.

Мы видели в § 49, что скорость распространения фазы волны может быть как меньше, так и больше скорости света в пустоте, так как в среде, обладающей дисперсией, для показателя преломления возможны значения как большие, так и меньшие единицы. С другой стороны, принцип относительности (т. I § 4) требует, чтобы измеренная величина скорости, с которой могут перемещаться как материальные тела, так и свет, никогда не превышала величины  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/сек, т. е. скорости света в пустоте. Это кажущееся противоречие разъясняется следующим образом. Скорость распространения фазы волны обусловлена, как мы видели выше, наложением на первичные волны вторичных, которые излучаются электронами, совершающими вынужденные, установившиеся колебания. Этот результат получается только в том случае, если через данную среду волны проходят непрерывно с неизменной амплитудой. Но эти волны не могут служить для измерения скорости света, так как в наших опытах мы не имеем возможности следить за распространением определенной фазы колебания в установившемся потоке волн, а можем лишь отмечать изменения этого потока,

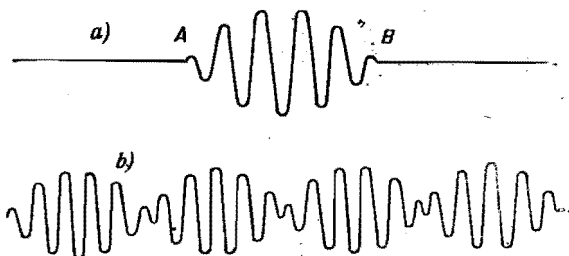


Рис. 96 а и б.

напр., начало и конец светового сигнала, максимальную или минимальную силу света и т. п. Можно показать, что такие сигналы распространяются в среде, обладающей дисперсией, не с фазовой, а с групповой скоростью, которая всегда меньше скорости света в пустоте.

Всякий световой сигнал, имеющий начало и конец, представляет конечный ряд волн, вообще говоря, с меняющейся амплитудой (рис. 96 а и б). Ряд таких сигналов можно создать путем сложения волн различной длины с соответственно подобранными амплитудами и фазами, например, простым наложением двух волн различной длины, как показано на рис. 96, б (биения, стр. 16).

Таким образом скорость сигнала есть не скорость фазы какой-либо из простых волн, а скорость распространения результата интерференции различных по длине волн, — результата, который обуславливает особенную форму сигнала. На кривой рис. 96, б, максимум амплитуды соответствует совпадению фаз интерферирующих простых волн, а минимум — их противоположности. Если фазовые скорости этих волн одинаковы, т. е. скорость волн не зависит от длины волны, то вся картина с указанным распределением амплитуд будет перемещаться с общей фазовой скоростью. Если же фазовые скорости не одина-



наковы, то одна из волн будет отставать по фазе от другой, и положение максимума амплитуд будет смещаться.

Положим, что две волны (рис. 97), длины которых отличаются на  $d\lambda$ , перемещаются с различными скоростями:  $u$  и  $u + \frac{du}{d\lambda} d\lambda$ . Положим, что через некоторый промежуток времени  $\tau$  более длинная волна обгонит более короткую на расстояние, равное разности их длин волн, т. е.

$$\tau(u + \frac{du}{d\lambda} d\lambda - u) = d\lambda;$$

тогда мы найдем, что

$$\frac{1}{\tau} = \frac{du}{d\lambda}. \quad (120)$$

За это же время  $\tau$  место совпадения фаз  $O$  переместится в сторону, противоположную направлению волн на длину волны  $\lambda$ ; поэтому скорость распространения максимума групп волн будет меньше скорости  $u$  первой волны на величину, равную  $\frac{\lambda}{\tau}$ . Отсюда следует, что скорость

распространения группы равна

$$v = u - \frac{\lambda}{\tau} = u - \lambda \frac{du}{d\lambda}. \quad (121)$$

Таким образом групповая скорость может быть как меньше, так и больше

$u$ , в зависимости от того, будет ли производная  $\frac{du}{d\lambda}$  иметь положительное или отрицательное значение.

При нормальной дисперсии показатель преломления  $n = \frac{c}{u}$  ( $c$  — скорость света в пустоте) увеличивается при уменьшении длины волны, следовательно

скорость  $u$  при этом убывает и производная  $\frac{du}{d\lambda} > 0$ . Поэтому групповая

скорость света при нормальной дисперсии меньше фазовой скорости. Групповая скорость  $v$ , очевидно, зависит только от величины и знака дисперсии в данном месте спектра и поэтому, если группа состоит не из двух, а большего числа волн с различными, но близкими длинами волн, то эта группа распространяется со скоростью  $v$ , как одно целое, так как все величины в форм. (121) почти одинаковы для всех волн.

В опытах с определением скорости света мы встречаемся обычно со скоростью сигнала, который испускается в течение определенного промежутка времени источником света. Световой сигнал при распространении в простран-

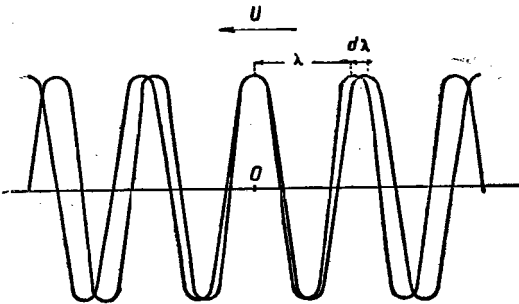


Рис. 97.

стве состоит из определенного числа колебаний переменной амплитуды. Во всяком случае в начале и в конце его амплитуда падает до нуля и остается таковой в обе стороны от сигнала. Такой сигнал можно всегда получить путем сложения бесконечного множества волн различной длины, из которых каждая простирается в бесконечность в ту и другую сторону, сохраняя неизменной свою амплитуду. Строго говоря, для того чтобы представить сигнал как результат сложения таких бесконечных волн, нужно, чтобы и число их было бесконечно и длины волн были всевозможные от самых длинных до самых коротких. Однако не все эти волны имеют заметную амплитуду, а только те, длина которых очень мало отличается от длины волн сигнала. Поэтому, если представить, как различаются амплитуды тех волн, которые входят в состав сигнала в виде графика, откладывая на оси абсцисс длину волны  $\lambda$ , а на оси ординат изображения их амплитуды, то получим примерное распределение амплитуд в зависимости от длины волн  $a(\lambda)$ , изображенное на рис. 98. Вблизи длины волны  $\lambda_0$ , которая есть не что иное, как длина волны сигнала, сгруппированы в бесконечном числе бесконечно близкие по длине волны, заполняя некоторый узкий интервал длин волн. За пределами его амплитуды так быстро убывают, что, если отбросить все волны, кроме тех, которые находятся в указанном интервале, то при сложении оставшейся группы волн получается сигнал, почти совсем не отличающийся от истинного. Этот сигнал распространяется со скоростью группы волн  $v$ , вычисляемой опять по форм.

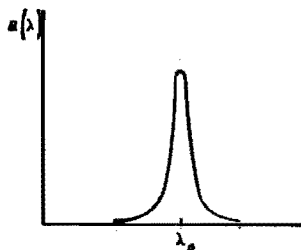


Рис. 98.

(121). Очевидно, центр сигнала можно представлять себе как место, где совпадают фазы колебаний всех волн, входящих в состав группы. За границами сигнала нет колебаний вследствие интерференции бесконечного множества волн, имеющих различные фазы колебания и взаимно уничтожающихся. Вся энергия колебаний сосредоточена только внутри сигнала и распространяется вместе с ним, т. е. со скоростью группы. Поэтому мы можем считать, что скорость группы есть скорость распространения энергии волн в диспергирующей среде.

Мы получили выражение (121) для групповой скорости, рассматривая распространение двух волн. В случае группы многих волн, строго говоря, оно справедливо только в том случае если, складывая две любые из них, мы получаем ту же величину групповой скорости. Это будет иметь место, если величина  $\frac{d\omega}{d\lambda}$  одинакова для любой из волн группы, а это означает, что показатель преломления в пределах группы изменяется пропорционально изменению длины волны. Для очень близких волн, т. е. внутри узкого интервала длин волн это всегда можно предположить за исключением тех случаев, когда показатель преломления изменяется очень сильно с длиной волны, что имеет место вблизи областей с аномальной дисперсией.

### § 51. Аномальная дисперсия и поглощение света.

Так как дисперсия согласно электронной теории вызывается возбуждением элементарных электрических резонаторов, которые имеются в атомах прозрачных тел, и так как при этом должно происходить рассеяние энергии и притом тем большее, чем сильнее возбуждены колебания электронов нашей модели атома, то следует ждать возрастания поглощения света при приближении его частоты к частоте собственных колебаний атомных резонаторов. Такая связь между явлениями дисперсии и поглощения электромагнитных волн наблюдается в действительности. Максимум поглощения света очень часто совпадает с возбуждением собственных колебаний атома.

Рассеяние энергии колебаний вызывает затухание их, а от величины затухания зависит ширина резонансной кривой (см. § 12) и величина максимума амплитуды при резонансе. Поэтому в тех случаях, когда затухание собственных колебаний атомных резонаторов значительно, мы должны ожидать появления в спектре сравнительно широкой полосы длин волн, которые испытывают поглощение. Наоборот, узкие полосы в спектре поглощения должны служить указанием на слабое затухание атомных колебаний.

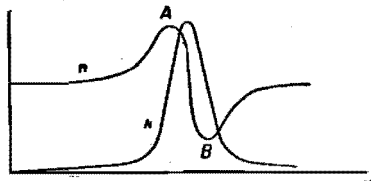


Рис 99.

Затухание колебания оказывает влияние также и на дисперсию вблизи полос поглощения. Под влиянием затухания ветви кривой дисперсии не уходят в бесконечность, а дают кривую, показанную на рис. 99. Между точками *A* и *B*, т. е. в той области, где наблюдается наибольшее поглощение света, показатель преломления уменьшается при возрастании частоты колебаний, т. е. мы имеем аномальный ход дисперсии. Аномальная дисперсия сопровождается обычно полосой поглощения. Так, например, фуксин, который сильно поглощает зеленые лучи, в этой именно части спектра дает аномальную дисперсию. Кундт приготовил из фуксина очень тонкие призмы, которые вблизи полосы поглощения давали сильное отклонение лучей света, несмотря на очень малый угол призмы. При этом оказалось, что желтые лучи отклонялись сильнее, чем красные и синие. На рис. 99 одновременно с кривой дисперсии *n* показана и кривая поглощения *k*, представляющая в сущности резонансную кривую атомных резонаторов.

### § 52. Давление света.

Как мы видели (§ 43), электромагнитные волны, падая на поверхность проводящего тела, производят на него давление. Еще ранее мы видели, что и акустические волны оказывают давление на отражающие или испускающие их тела. Давление света, таким образом, не представляет какого-либо нового явления, но оно играет весьма важную роль при объяснении многих явлений, связанных с испусканием и поглощением света.

С точки зрения электромагнитной теории света и в особенности при помощи модели электронных резонаторов легко понять связь между испусканием и поглощением света, с одной стороны, и давлением его на такие тела, с другой.

Как показал голландский физик Лоренц, всякий заряд, движущийся в магнитном поле со скоростью  $v$ , перпендикулярной к направлению магнитной силы  $H$ , испытывает действие силы  $f$ , пропорциональной величине заряда  $e$  и скорости, и направленной перпендикулярно как к скорости  $v$ , так и к магнитной силе  $H$ . Эта сила  $f$ , равная

$$f = Hv \frac{e}{c}$$

и называемая обычно силой Лоренца, является согласно электронной теории причиной того, что проводник с током  $i$  испытывает на себе действие магнитного поля или электромагнитную силу:

$$f = H \frac{i}{c}.$$

(Скорость света  $c$  входит в эти формулы, потому что электрический заряд  $e$  и силу тока  $i$  мы выражаем здесь в электростатических единицах, а магнитную силу  $H$  в магнитной системе единиц.) Так как в электромагнитных волнах всегда на ряду с электрической силой имеется и магнитная, то электроны, движущиеся в направлении, перпендикулярном к магнитной силе волны, испытывают ее действие.

Представим себе электроны, колеблющиеся под действием электрической силы волн света, падающих на тело. Направление скоростей, которые они имеют при этом, совпадает с направлением электрической силы и, следовательно, перпендикулярно к направлению магнитной силы волны. Поэтому действие лоренцевой силы направлено перпендикулярно к плоскости волны. Вследствие этого все тело испытывает давление в направлении лучей падающего на него света. Однако, если скорость электрона не в фазе с магнитной силой, то сила, действующая на движущийся электрон, будет направлена попеременно то внутрь тела, то наружу. Положим, что разность фаз между скоростью электрона и магнитной силой волны равна  $\varphi$ ; тогда величина среднего давления за время одного периода равняется (см. § 43)

$$H \frac{e}{c} v \cos \varphi, \quad (122)$$

где  $H$  — магнитная сила,  $e$  — заряд электрона, выраженный в электростатических единицах,  $v$  — его скорость. Если  $\varphi = 90^\circ$ , то давление равно нулю; оно наибольшее при  $\varphi = 0^\circ$ .

Сила, действующая на электрон, пропорциональна ускорению его. Если при колебаниях электрона не происходит рассеяния энергии, то разность фаз между ускорением и скоростью электрона составляет как раз  $90^\circ$  и такая же разность фаз будет между электрической силой волны и скоростью электрона.

Но мы знаем, что магнитная и электрическая силы имеют одну и ту же фазу; поэтому давление света при прохождении через непоглощающее тело должно быть равно нулю.

Работа электрической силы, рассчитанная на единицу времени (или мощность), также пропорциональна  $\cos \varphi$ , а именно равна:

$$E ev \cos \varphi, \quad (123)$$

где  $\varphi$  имеет то же значение, как и в форм. (122), так как фазы электрической и магнитной сил в волне одинаковы. Но работа, производимая электрической силой волны, сопровождается уменьшением ее энергии и, следовательно, поглощением света. Таким образом свет, проходящий через поглощающее тело, производит на него давление, пропорциональное поглощению света.

Если представить себе поверхность тела, испускающего свет, как совокупность колеблющихся диполей, то наибольшая величина магнитной силы, создаваемой каждым диполем, совпадает по времени с наибольшим смещением диполя, и поэтому при излучении волн диполь испытывает некоторую силу, реакцию излучения, которая направлена противоположно направлению излучения. Давление этих волн на диполь внутри тела уравнивается противоположным давлением их на остальное тело при поглощении; поэтому остается неуравновешенным только то давление, которое производят на диполи тела волны, испускаемые ими в окружающее пространство.

При отражении волн от поверхности тела даже при отсутствии поглощения свет производит давление на поверхность. Это давление можно рассматривать как действие вторичных волн, испускаемых резонаторами, находящимися в поверхностном слое. При полном отражении у поверхности электрическая сила равна нулю, а магнитная имеет пучность, так как магнитные силы падающей и отраженной волны складываются. Поэтому давление при отражении волн будет вдвое больше, чем при простом испускании вторичных волн. Если же отражение неполное, то давление зависит только от количества отраженного света и в два раза больше того давления, которое тело должно испытывать при простом испускании такого же количества лучей, какое им отражается.

Все эти соотношения могут быть прекрасно описаны следующим представлением. Волны света или вообще электромагнитные волны аналогичны движущимся вдоль их лучей материальным частицам, несущим запас количества движения, пропорционального массе их. Согласно основному результату общей теории относительности, всякая энергия, например, энергия волн, обладает инерцией, т. е. при движении в пространстве, как и материя, имеет запас количества движения, пропорционального количеству энергии. При изменении направления движения волн в обратное происходит изменение количества движения в два раза большее, чем при поглощении волн, когда количество движения волны просто исчезает и переходит в количество движения поглотившего ее тела. Одним словом, эти явления напоминают давление при упругом и неупругом ударе материальных частиц о неподвижную преграду.

Экспериментально давление света было получено и измерено впервые П. Лебедевым, а затем Никольсом и Хеллом в Америке. Заставляя свет падать на крылышки легкого подвеса (рис. 100), помещенного в пустоте; Лебедев показал, что давление на поглощающую, зачерненную поверхность в два раза меньше давления на зеркально-отражающую поверхность той же величины, и по величине пропорционально энергии лучей, т. е. силе света. В этих опытах чрезвычайно важно устранить влияние конвекционных потоков воздуха, которые образуются вследствие нагревания освещенной поверхности и вызывают вращение подобного же подвеса в обыкновенном радиометре. Радиометрические действия ничего общего не имеют с давлением света на поверхность крылышка, так как зависят от присутствия газа в сосуде, и по величине они гораздо больше светового давления (примерно в 10000 раз). Для измерения последнего необходимо исключить радиометрический эффект или свести его до минимума.

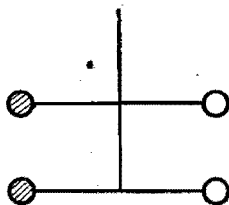


Рис. 100.

Впоследствии Лебедев удалось показать, что при прохождении света через поглощающий газ (напр., углекислоту), последний испытывает давление, пропорциональное коэффициенту поглощения, и приходит в движение. Такого действия не было обнаружено при прохождении через непоглощающий газ, напр. водород.

### § 53. Анизотропные тела.

В некоторых случаях движение электронов в атомах происходит более сложным образом, чем мы принимали до сих пор. Под действием других электронов атома или же вследствие того, что при колебаниях электрон находится под действием неоднородного электрического поля соседних атомов, одно и то же внешнее электрическое поле может вызывать различную поляризацию в зависимости от направления смещения электрона. Такое различие свойств в разных направлениях мы называем анизотропией атома, а тела, которые обладают такими свойствами — анизотропными. Анизотропными телами обычно являются кристаллы, которые обладают и в других явлениях (теплопроводность, электропроводность, упругость) свойствами, зависящими от направления, но возможна искусственная анизотропия, напр., при одностороннем растяжении или сжатии в телах волокнистой структуры и т. п.

В таких случаях направление поляризации, т. е. перемещения электронов в атомных диполях, или направление осей диполей, не всегда совпадает с направлением внешнего электрического поля. Поляризацию можно характеризовать тремя взаимно-перпендикулярными составляющими вдоль каких-либо координатных осей. Электрическое поле вдоль одной из этих осей, напр. оси  $x$ -ов, создает поляризацию  $P$ , а следовательно и индукцию  $D$ , с составляющими вдоль всех осей; все эти составляющие по величине пропорциональны создающей их электрической силе  $E_x$ . Эти составляющие (рис. 101) поляризации и индукции мы будем обозначать соответственно  $P_{xx}$ ,  $P_{xy}$ ,  $P_{xz}$  и  $D_{xx}$ ,  $D_{xy}$ ,  $D_{xz}$ . Подобным

же образом под действием составляющей  $E_y$  мы получим другие значения поляризации и индукции:  $P_{yx}$ ,  $P_{yy}$ ,  $P_{yz}$  и  $D_{yx}$ ,  $D_{yy}$ ,  $D_{yz}$  и также представим результаты действия составляющей  $E_z$ . Таким образом сумма всех составляющих поляризации и индукции вдоль направления  $x$  будет соответственно  $P_{xx} + P_{yx} + P_{zx} = P_x$  и  $D_{xx} + D_{yx} + D_{zx} = D_x$  и таким же образом мы найдем  $P_y$ ,  $P_z$ ,  $D_y$  и  $D_z$ .

Мы можем попрежнему написать  $D = [\epsilon] E$ , но это равенство будет лишь символическим изображением сложных соотношений между составляющими электрической силы и индукции, а именно:

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{yx} E_y + \epsilon_{zx} E_z \\ D_y &= \epsilon_{xy} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{zy} E_z \\ D_z &= \epsilon_{xz} E_x + \epsilon_{yz} E_y + \epsilon_{zz} E_z \end{aligned} \quad (124)$$

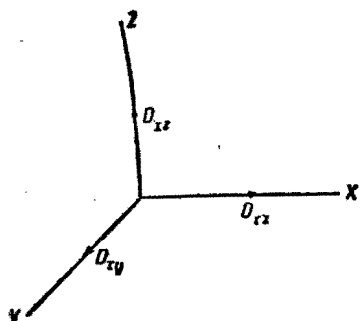


Рис. 101.

где  $\epsilon$  с двойными значками характеризуют отношения составляющих электрической индукции по направлению, даваемому вторым значком, к той составляющей электрической силы, которая определяется первым значком. Таким образом мы имеем, вообще говоря, 9 коэффициентов вместо одной диэлектрической постоянной. В большинстве случаев они сводятся к 6, так как 6 из 9 попарно равны:  $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$ ,  $\epsilon_{yz} = \epsilon_{zy}$  и  $\epsilon_{zx} = \epsilon_{xz}$ .

Можно так расположить направления осей координат, что все эти 6 коэффициентов исчезают, и остаются три главные диэлектрические постоянные  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$  вдоль трех главных осей. Одна из этих осей совпадает с направлением наибольшей величины смещения, другая — с наименьшим его значением. Каждая из этих осей отличается тем свойством, что электрическая сила, параллельная ей, вызывает поляризацию и индукцию, также параллельные этой оси, и не дает смещения по остальным осям:

$$\epsilon_1 E_x = D_x, \quad \epsilon_2 E_y = D_y \quad \text{и} \quad \epsilon_3 E_z = D_z. \quad (125)$$

Положим, что электрическая сила волны имеет составляющие по главным осям  $E_x$ ,  $E_y$  и  $E_z$ ; тогда для квадрата электрической силы имеем:

$$E^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2 = \frac{D_x^2}{\epsilon_1^2} + \frac{D_y^2}{\epsilon_2^2} + \frac{D_z^2}{\epsilon_3^2}. \quad (126)$$

Если мы обозначим отношения составляющих электрической индукции к величине электрической силы  $E$  буквами  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$ , т. е.

$$\xi = \frac{D_x}{E}, \quad \eta = \frac{D_y}{E} \quad \text{и} \quad \zeta = \frac{D_z}{E},$$

то получим из форм. (126) уравнение:

$$\frac{\xi^2}{\epsilon_1^2} + \frac{\eta^2}{\epsilon_2^2} + \frac{\zeta^2}{\epsilon_3^2} = 1. \quad (127)$$

Это уравнение приводит нас к следующему результату. Если мы построим трехосный эллипсоид (рис. 102) (эллипсоид диэлектрических постоянных), длина главных осей которого равна главным диэлектрическим постоянным  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$ , то любой вектор, проведенный из центра эллипсоида к его поверхности, своей длиной укажет отношение величины электрической индукции в этом направлении к величине вызвавшей ее электрической силы. Точно так же и ток смещения в нашем анизотропном диэлектрике в зависимости от направления будет иметь величину, пропорциональную радиусу-вектору  $r$ , и то же направление, что и радиус-вектор. Итак, величина  $r$  дает нам диэлектрическую постоянную в данном направлении.

Направление электрической силы не совпадает с направлением радиуса вектора  $r$ . Составляющие электрической силы  $E_x$ ,  $E_y$  и  $E_z$  в той же системе координат согласно уравнению (125) пропорциональны:

$$\frac{\xi}{\epsilon_1}, \frac{\eta}{\epsilon_2} \text{ и } \frac{\zeta}{\epsilon_3}.$$

Таким образом в анизотропных телах электрическая сила не совпадает по направлению с током смещения и коэффициент пропорциональности между ними зависит от направления силы. В электромагнитной волне магнитная сила и ток смещения взаимно-перпендикулярны; они определяют плоскость волны. Направление, перпендикулярное к плоскости волны, также перпендикулярно и к магнитной силе и к направлению тока смещения; оно определяет направление движения волновой поверхности или поверхности равных фаз. В виду этого в дальнейшем условимся ток смещения называть просто световым вектором волны.

Однако направление и величина электрической силы играют также большую роль в этих явлениях, определяя вектор Пойнтинга. Последний, как мы видели (стр. 101), перпендикулярен к электрической и магнитной силам и пропорционален их произведению. Вектор Пойнтинга определяет поток энергии при распространении волн, и поэтому в анизотропных телах направление потока энергии волны и направление распространения фазы волны не совпадают. Первое направление мы назовем направлением луча, второе — направлением нормали волны.

Вообразим теперь некоторую плоскость внутри кристалла, совпадающую с плоскостью волны (рис. 103). Построим вокруг какой-нибудь точки этой плоскости эллипсоид диэлектрической постоянной, пересечение которого с плоскостью волны дает эллипс. Если световой вектор волны совпадает

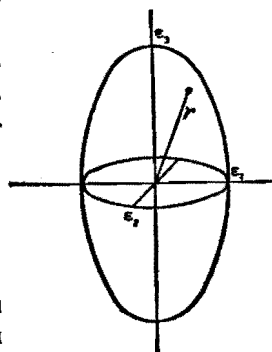


Рис. 102.



с одной из главных осей эллипса, то волна распространяется со скоростью.

$$v' = \frac{c}{\sqrt{\epsilon'}} \text{ или } v'' = \frac{c}{\sqrt{\epsilon''}},$$

где  $\epsilon'$  и  $\epsilon''$  — диэлектрические постоянные в направлениях главных осей эллипса. Если же световой вектор не совпадает с осями  $\epsilon'$  и  $\epsilon''$ , то мы имеем две волны, распространяющиеся со скоростями  $v'$  и  $v''$ , причем направление их световых векторов параллельно осям эллипса. Пользуясь этим простым правилом, мы можем, зная эллипсоид диэлектрических постоянных, найти две волны, распространяющиеся в определенном направлении с различной скоростью, причем световые векторы их взаимно перпендикулярны. Этот результат объясняет явление, называемое двойным лучепреломлением.

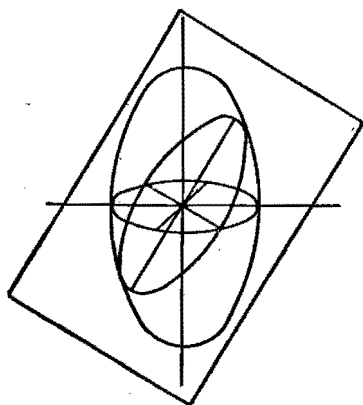


Рис. 103.

Каждая из волн, на которые распадается волна, вошедшая в двоякопреломляющий кристалл, прямолинейно поляризована и имеет свой показатель преломления. Но в тех случаях, когда сечение эллипсоида плоскостью волны есть не эллипс, а круг, разница между двумя этими волнами исчезает: их скорости одинаковы и направление колебаний произвольно, и двойного лучепреломления не происходит. Направление в кристалле, вдоль которого не происходит двойного лучепреломления, называется оптической осью кристалла.

Во всяком трехосном эллипсоиде есть два сечения, проходящих через центр (и только два), которые имеют форму круга. Волны, плоскость которых параллельна двум круговым сечениям эллипсоида, дают в сечении с эллипсоидом круг и распространяются, не распадаясь на две различные волны. Мы имеем таким образом не больше двух оптических осей; такие кристаллы мы называем двуосными. Эти оси могут слиться в одну, если эллипсоид есть тело вращения; ось вращения в этом случае есть единственная оптическая ось; такие кристаллы мы называем одноосными.

## § 54. Одноосные кристаллы.

Если эллипсоид вращения пересечь плоскостью, проходящей через его центр, то в сечении получим эллипс, одна из осей которого совпадает с радиусом кругового сечения (рис. 104), а другая имеет величину, различную в зависимости от угла между нормалью к плоскости и оптической осью  $OO_1$ . Соответственно этому в каждой плоскости возможны два направления свето-

вого вектора, параллельных главным осям эллипса, и следовательно две волны в каждом направлении. Одна из них распространяется в любом направлении с той же скоростью, как и волна вдоль оптической оси; эта волна называется обыкновенной. Другая волна, необыкновенная, имеет скорость, различную в разных направлениях. Колебания (светового вектора) в обыкновенной волне всегда перпендикулярны к оптической оси; колебания в необыкновенной волне составляют с оптической осью угол, изменяющийся от  $0^\circ$  до  $90^\circ$ , и лежат в плоскости, проходящей через нормаль волны и оптическую ось.

В обыкновенной волне скорость света  $u_0$  не зависит от направления распространения, отсюда и название ее. Выйдя из какой-либо точки внутри кристалла, она распространяется во все стороны с одинаковой скоростью и потому образует сферическую волну. В каждой точке ее колебания перпендикулярны к плоскости, проходящей через оптическую ось и данную точку.

В необыкновенной волне свет распространяется с различной скоростью  $u_e$  в зависимости от направления. Больше всего отличается скорость необыкновенной волны  $u_e$  от скорости обыкновенной  $u_0$  при распространении ее в направлении, перпендикулярном к оптической оси, когда колебания светового вектора параллельны оптической оси. При этом могут быть два случая: или  $u_e > u_0$  или же  $u_e < u_0$ . Им соответствуют волновые поверхности, изображенные на рис. 105 А и В. Кристаллы, относящиеся к первому случаю, т. е. те, в которых скорость обыкновенной волны меньше, чем необыкновенной,

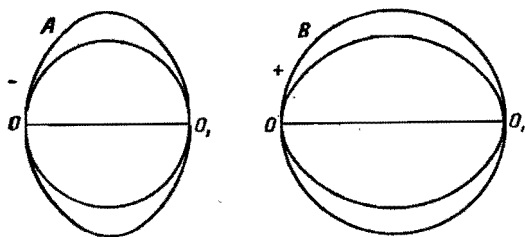


Рис. 105.

принято называть отрицательными; в положительных кристаллах, наоборот, скорость обыкновенной волны наибольшая. К отрицательным кристаллам относится известковый шпат, или, как его еще называют по месту добычи, исландский шпат; к положительным принадлежит кварц. Показатели преломления обратно пропорциональны скоростям, и поэтому для отрицательных кристаллов исландского шпата  $n_e < n_o$  ( $n_e = 1,48054$ ;  $n_o = 1,65846$ ), для положительных  $n_e > n_o$ ; так, для кварца  $n_e = 1,55338$ , а  $n_o = 1,54423$ , для желтого цветалинии D.

При преломлении света плоской поверхностью одноосного кристалла возможны различные случаи в зависимости от направления оптической оси по отношению к поверхности кристалла. Плоскость, проведенная через нормаль к поверхности кристалла параллельно оптической оси, называется

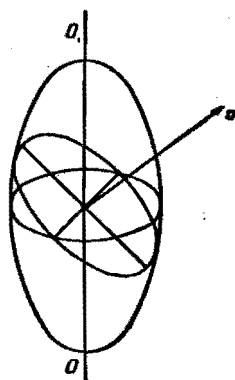


Рис. 104.

главным сечением кристалла. Мы рассмотрим сначала случаи, когда лучи, падающие на поверхность кристалла, лежат в плоскости главного сечения.

а) Оптическая ось перпендикулярна к поверхности кристалла. Если лучи падают на поверхность кристалла нормально, т. е. параллельно оптической оси, то они входят в кристалл, не изменяя направления, и распространяются независимо от поляризации со скоростью обыкновенной волны  $u_0$ .

При конечном угле падения преломленный луч разделяется на два луча: обыкновенный и необыкновенный. Оба они остаются в плоскости падения, но показатель преломления обыкновенного луча остается неизменным, а необыкновенного меняется в зависимости от угла падения, от  $n_0$  при нормальном падении до  $n_e$  при скольжении. Направления колебаний обыкновенного луча перпендикулярны к плоскости падения, а необыкновенного лежат в плоскости падения (показано для отрицательного и положительного кристаллов стрелками и точками, рис. 106).

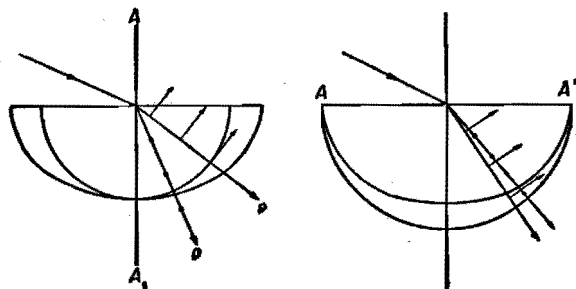


Рис. 106.

б) Оптическая ось параллельна поверхности кристалла. При нормальном падении на пластинку кристалла преломления не происходит, но волны, обыкновенная и необыкновенная, войдя внутрь кристалла, распространяются в

нем с различной скоростью. Если лучи при входе в кристалл имели одинаковые фазы, то по мере проникновения вглубь разность фаз меняется.

При наклонном падении лучей показатель преломления необыкновенного луча возрастает с увеличением угла падения.

с) Оптическая ось пересекает поверхность кристалла под острым или тупым углом. При нормальном падении плоских волн на поверхность кристалла они распространяются внутри кристалла в том же направлении как две волны, обыкновенная и необыкновенная, но лучи, т. е. направление распространения энергии в необыкновенной волне не перпендикулярны к плоскости волны и поэтому не совпадают с направлением распространения волн внутри кристалла. В предыдущих примерах направления лучей нормали вполне совпадали.

Этими примерами исчерпываются наиболее важные случаи двойного лучепреломления в одноосных кристаллах.

Если оптическая ось не лежит в плоскости падения, то преломленный необыкновенный луч не остается в плоскости падения. Но на разборе этого более общего, но не представляющего особого интереса случая, мы не будем останавливаться.

## § 55. Двуосные кристаллы.

В двуосных кристаллах поверхность волны имеет гораздо более сложный вид. Мы можем построить ее, проведя из начала координат прямые и откладывая на них отрезки, пропорциональные скорости как обыкновенной, так и необыкновенной волны. Построенная таким образом поверхность четвертого порядка имеет довольно сложную форму, но ее сечения координатными плоскостями представляют окружности и эллипсы, если оси координат направлены параллельно главным осям диэлектрических постоянных. Вид этих сечений в одном квадранте изображен на рис. 107. Вдоль каждой оси распространяется по две волны с различными скоростями соответственно колебаниям параллельно главным диэлектрическим осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ , т. е. со скоростями  $u_1 = \frac{c}{\epsilon_1}$ ,  $u_2 = \frac{c}{\epsilon_2}$ ,  $u_3 = \frac{c}{\epsilon_3}$ , которые мы называем главными скоростями кристалла.

Если взять направления, лежащие в одной из координатных плоскостей, то вдоль этих направлений распространяются две волны: одна, в которой колебания перпендикулярны к координатной плоскости со скоростью, равной одной из главных скоростей, и другая с колебаниями, лежащими в этой плоскости, со скоростью промежуточной между другими главными скоростями. Скорость первой волны не зависит (как и направление ее колебаний) от ее направления распространения в плоскости координат, и поэтому соответствующее сечение этой волновой поверхности дает круг. Сечение для другой волны эллиптическое, так как направление колебаний все время изменяется при изменении направления распространения волны.

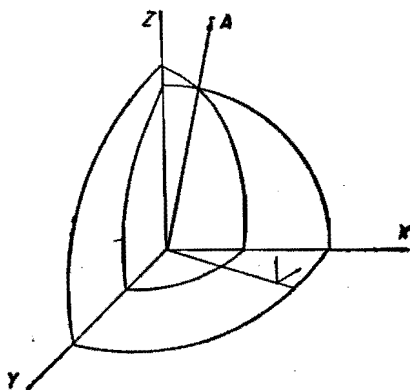


Рис. 107.

## § 56. Поляризационные приборы.

Двойное лучепреломление в анизотропных телах дает возможность получить два луча, поляризованных во взаимно-перпендикулярных плоскостях. Наиболее удобным для этой цели является исландский шпат (углекислый кальций), который находится в природе в больших прозрачных кристаллах гексагональной системы. Форма кристалла — ромбоэдр, и его оптическая ось  $OO_1$  проходит через два противоположных трехгранных угла, где сходятся тупые углы граней кристалла (рис. 108).

Если через такой кристалл пропустить свет в виде тонкого пучка лучей, то вследствие большой разности показателей преломления два пучка лучей, обыкновенных и необыкновенных, разойдутся внутри кристалла и выйдут с другой стороны, как два отдельных пучка поляризованных прямолинейно и при

том во взаимно-перпендикулярных плоскостях. Если вращать кристаллы не изменяя угла падения, то обыкновенный луч  $O$  будет сохранять свое направление, а необыкновенный  $E$  — вращаться вокруг обыкновенного. При таком вращении изменяется, вообще говоря, направление оптической оси и поэтому плоскость поляризации как обыкновенного, так и необыкновенного лучей вращается.

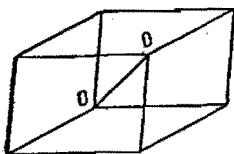


Рис. 108.

Положим, что свет, уже поляризованный, пропускается через такой кристалл. Амплитуды преломленных лучей, обыкновенного и необыкновенного, можно найти, разлагая колебания падающего света на две составляющие лежащую в плоскости главного сечения  $a_1$  (рис. 109) и перпендикулярную к ней  $a_2$ . Если вращать плоскость главного сечения вокруг луча, вращая кристалл, то относительные величины этих составляющих, т. е. колебаний обыкновенного  $O$  и необыкновенного  $E$  лучей, меняются и следовательно изменяется относительная яркость лучей. При этом в некоторых положениях кристалла свет будет проходить весь как обыкновенный, при других — как необыкновенный.

Если вырезать из кристалла исландского шпата две трехгранные призмы так, чтобы оптическая ось была параллельна грани призмы, и сложить их, как показано на рис. 110 (стрелки показывают направление оптической оси), то луч света, падая на грань такой сложной призмы нормально, проходит вначале вдоль оптической оси, как через изотропную среду (всякий луч в этом слу-

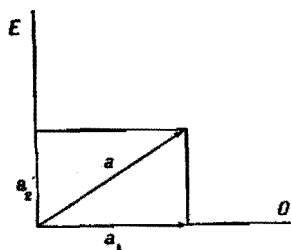


Рис. 109.

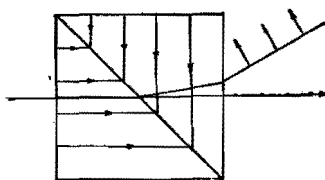


Рис. 110.

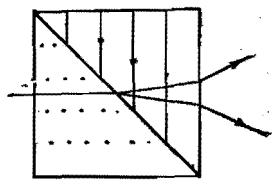


Рис. 111.

чае будет обыкновенным), но во второй половине призмы разделяется на лучи обыкновенный и необыкновенный. Колебания, перпендикулярные к оптической оси, проходят без отклонения, как обыкновенный луч, а колебания, параллельные оптической оси, преломляются на границе, так как показатель преломления необыкновенного луча больше обыкновенного. Таким образом эта призма, называемая призмой Рошона, дает значительное разделение лучей, из которых неотклоненный поляризован в плоскости чертежа, что обозначено точками на изображении луча.

Другая призма — Волластона (рис. 111) — дает еще большее расхождение лучей, так как они отклоняются второй призмой в разные стороны. Для этого в первой призме оптическая ось должна быть перпендикулярна к плоскости чертежа. Оба луча — обыкновенный и необыкновенный — преломляются различ-

ным образом, так как тот, который в первой призме был обыкновенным, во второй становится необыкновенным, и наоборот.

Особенно часто применяется в оптических работах призма Николя. Она также состоит из двух призм, выпиленных определенным образом из кристалла исландского шпата и склеенных тонким слоем канадского бальзама. На рис. 112 показано направление оптической оси и ход луча в призме.

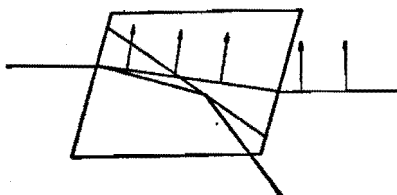


Рис. 112.

Обыкновенный луч имеет показатель преломления ббльший, чем у канадского бальзама, и направление этого луча и угол его падения на слой канадского бальзама подобраны таким образом, чтобы он испытывал полное внутреннее отражение и выходил из призмы в боковом направлении, где он обычно поглощается зачерненной оправой. Необыкновенный луч вследствие малости его показателя проходит через слой канадского бальзама без заметного отражения и выходит из призмы как свет прямолинейно поляризованный, причем направление колебаний в нем (показанное стрелками) лежит в плоскости главного сечения.

Призма Николя (или просто николь) служит в качестве поляризатора, когда на нее падает естественный, неполяризованный свет. Она может играть роль анализатора, т. е. служить для определения плоскости поляризации проходящего через нее света. Для этого оправа николя снабжается разделенным кругом, который позволяет отсчитывать вращение плоскости его главного сечения. При этом николь можно устанавливать или на свет, иначе, параллельно, когда поляризованный свет проходит с наибольшей яростью, или же на темноту, накрест, если прямой производится гашение света до минимальной яркости. Два николя, поляризатор и анализатор, поставленные параллельно или накрест, играют видную роль в большинстве опытов с поляризованным светом.

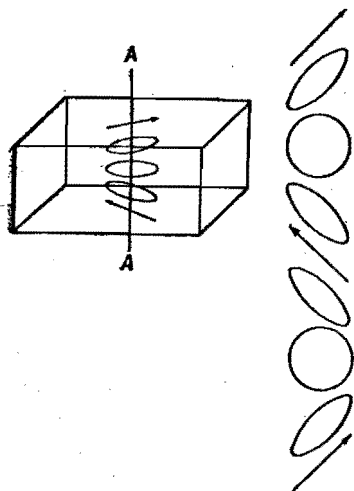
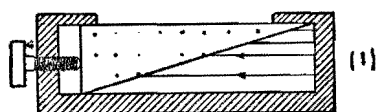


Рис. 113.

Пластинка одноосного кристалла, вырезанная так, что ее грани параллельны оптической оси, при падении на ее поверхность прямолинейно-поляризованного луча, дает возможность получить лучи с любым типом поляризации: эллиптической, круговой и прямолинейной. Положим, что направление колебаний в падающем луче составляет с оптической осью  $AA$  (рис. 113) угол в  $45^\circ$ . Войдя в кристалл, луч разделяется на два, обыкновенный и необыкновенный, с одинаковыми амплитудами. Так как их фазовые скорости внутри кристалла неодина-

ковы, то фаза одного из них запаздывает; получается разность фаз, которая все возрастает. Таким образом мы будем иметь вдоль луча два взаимно-перпендикулярных колебания, у которых в разных точках разность фаз будет различна. Складываясь, они дают колебания: эллиптическое, с главной осью эллипса, наклоненной почти так же, как прямолинейное колебание, затем круговое, затем опять эллиптическое, переходящее в прямолинейное, но с главной осью, лежащей в других квадрантах. При дальнейшем возрастании разности фаз происходит такое же превращение колебаний, но только направление вращения вектора (при эллиптическом или круговом колебании) будет противоположным.

Круговое колебание получается первый раз, когда разность достигает  $90^\circ$ . Толщина  $d$ , соответствующая этому условию, может быть определена следующим образом. Длины волн обыкновенной и необыкновенной в кристалле равны:



$$\frac{\lambda}{n_o} \text{ и } \frac{\lambda}{n_e}.$$

Следовательно, на расстоянии  $d$  разность фаз равна:

$$\frac{2\pi d}{\lambda} (n_o - n_e) = \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$d = \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{1}{n_o - n_e}.$$

Рис. 114.

Пластинка, имеющая такую толщину, называется пластинкой „в четверть волны“. Она, конечно, имеет толщину большую, чем  $\frac{1}{4}\lambda$ , так как знаменатель  $n_o - n_e$ , обычно, есть дробь, значительно меньшая единицы.

Пластинка „в пол-волны“ дает возможность, сохранив прямолинейную поляризацию, повернуть ее плоскость на  $90^\circ$  или же при падении на нее света, поляризованного по кругу, изменить направление вращения светового вектора в обратное и т. д.

Две клинообразные пластинки, в которых оптические оси ориентированы, как в призме Воластона (см. рис. 114), при пропускании через них поляризованного света вносят разность фаз между колебаниями, поляризованными в главных сечениях обеих призм.

При равенстве толщины обоих клиньев разность фаз, внесенных одним, компенсируется противоположным сдвигом фазы, производимым другим клином. По ту и другую сторону этой полосы лежат те части призмы, которые дают все возрастающую разность фаз, положительную с одной стороны и отрицательную с другой.

Этот прибор — компенсатор Бабиня — служит для компенсации разности фаз между взаимно-перпендикулярными колебаниями, следующим образом. Положим, что на компенсатор падает свет, имеющий эллиптическую поляри-

зацию, причем оси эллипса параллельны главным сечениям клиньев компенсатора. В средней части компенсатора, изображение которого рассматривается через окуляр, свет проходит без изменения; в тех точках, где компенсатор вводит добавочную разность фаз  $+\frac{\pi}{2}$  или  $-\frac{\pi}{2}$ , мы получим два взаимно-перпендикулярных колебания с разностью фаз  $+\pi$  или  $0$ , т. е. колебание прямолинейное. Если между компенсатором и окуляром еще поместить николю как анализатор, то можно, поставив его на темноту, погасить прямолинейно-поляризованный свет, и следовательно, получить темную полосу там, где разность фаз, вносимая компенсатором, равна  $\frac{\pi}{2}$ . На равных расстояниях, соответствующих разностям фаз  $\frac{\pi}{2} + k2\pi$ , где  $k$  — целое число, получим также темные полосы. Если же свет, падающий на компенсатор, имеет иную разность фаз, то и темные полосы получатся на другом расстоянии от середины компенсатора, которая как-нибудь отмечена, напр., нитью в окуляре (рис. 114, 2).

При помощи микрометрического винта можно перемещать один из клиньев компенсатора и менять вносимую им разность фаз. Так, можно достичь, чтобы в средней части разность фаз была равна не нулю, а напр.  $+\frac{\pi}{2}$  или  $-\frac{\pi}{2}$ , тогда вся система темных полос переместится. Точно так же всякое изменение разности фаз в исследуемом эллиптическом колебании может быть компенсировано передвижением клина, что обнаруживается по восстановлению прежнего расположения темных полос. Этим способом, очевидно, можно измерить любую разность фаз между взаимно-перпендикулярными колебаниями, напр., при отражении поляризованного света от поглощающих (металлических) тел и т. п.

### § 57. Цветная (хроматическая) поляризация.

Под цветной поляризацией понимают те явления окрашивания проходящего белого света, которые наблюдаются всякий раз, когда между скрещенными или, наоборот, параллельно поставленными николями вводится пластинка, дающая двойное лучепреломление. Наиболее простые явления получают, если лучи, проходящие через плоскопараллельную кристаллическую пластинку, образуют параллельный пучок, так как в этом случае весь пучок окрашивается в один цвет. Более сложную картину мы имеем, если различные лучи падают под различными углами на пластинку и проходят ее под разными углами. Рассматривая пластинку в этом случае, мы видим на ее поверхности более или менее сложные рисунки, характерные для хроматической поляризации в сходящихся лучах.

Пусть пучок параллельных лучей, как показано на рис. 115, проходит через поляризатор  $P$ , кристаллическую пластинку  $C$  и анализатор  $A$ , который поставлен „на темноту“. При отсутствии кристалла анализатор тушит свет, прошедший через поляризатор, так как их главные сечения взаимно-перпенди-



куляры (рис. 116). Если же пластинка  $C$ , в которой оптическая ось, параллельная ее плоскости, превращает линейно-поляризованный свет в эллиптически-поляризованный, или же поворачивает его плоскость поляризации на  $90^\circ$ , то анализатор не дает темноты.

Окрашивание света получается от того, что вносимая пластинкой разность фаз зависит от разности показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей, которая различна для лучей разной длины волны вследствие дисперсии света в кристаллах. Положим,

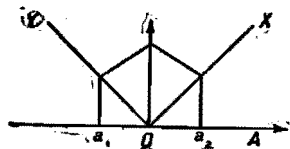
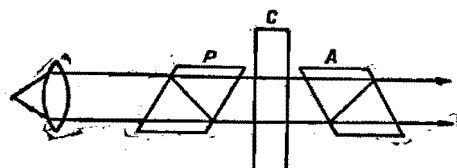


Рис. 115 — 116.

напр., что пластинка „ $\frac{1}{2}$  волны“ обладает свойством поворачивать плоскость поляризации на  $90^\circ$ , сохраняя его прямолинейность лишь для определенных лучей, напр. для желтых. Такая пластинка будет обогащать свет, прошедший через анализатор, желтыми лучами, если анализатор был поставлен на темноту, или же, наоборот, тушить желтые лучи, если анализатор был поставлен „на свет“. В этом случае появится окраска дополнительным к желтому синим цветом.

### § 58. Кристаллы в сходящемся свете.

Весьма важное значение для изучения строения кристаллических тел имеют явления цветной поляризации при сходящихся лучах. Для наблюдения их можно пользоваться поляризационным микроскопом, схематически представленным на рис. 117. Свет поляризуется при помощи николя в осветительном приборе, который дает сильно сходящийся пучок лучей, проходящий через кристаллическую плоскость, рассматриваемую в микроскоп. Окуляр последнего снабжен никодем-анализатором.

Рассмотрим случай одноосной пластинки, вырезанной перпендикулярно к оптической оси. Лучи, падающие нормально на пластинку, проходят вдоль оптической оси, сохраняя свою плоскость поляризации, дают в центре темноту, если николи поставлены накрест. Луч, падающий на пластинку наклонно, разложится на два, поляризованные во взаимно-перпендикулярных плоскостях. Луч необыкновенный дает колебания в плоскости падения, обыкновенный — в перпендикулярной. Свет, поляризованный в одной из этих плоскостей  $PP'$  или  $AA'$ , пройдет сквозь пластинку без изменения. В анализаторе по этим двум перпендикулярным направлениям будет виден крест — темный при скрещенных николях, светлый — при параллельных (рис. 118). Во всех остальных направлениях колебания будут разлагаться на два:  $PP'$  и  $AA'$ . Проходя сквозь пластинку с разной скоростью, эти два луча получают разность фаз и, складываясь, дают окрашивание, различное при разных углах падения. Это ведет к образованию вокруг центра цветных колец. Более сложный характер имеет картина в слу-

чае оси, параллельной плоскости пластинки, когда мы получаем систему гипербол (рис. 119). При двуосной пластинке, вырезанной перпендикулярно к ли-

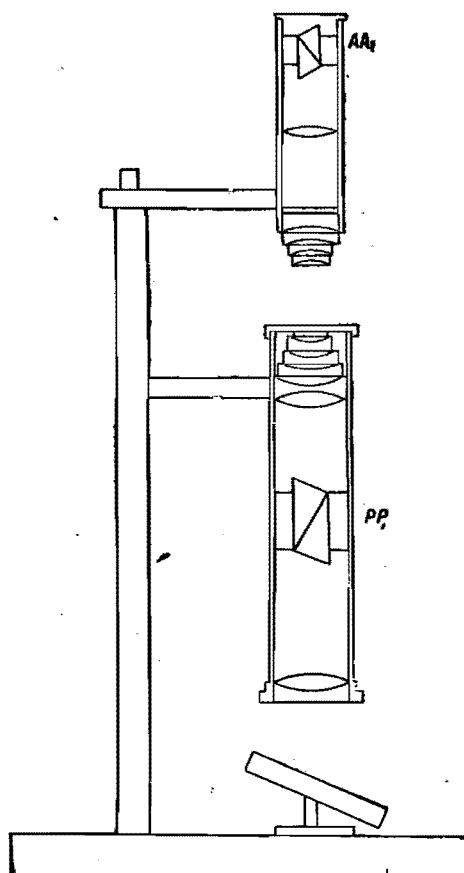


Рис. 117.

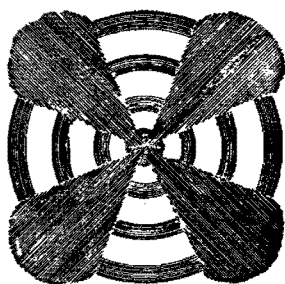


Рис. 118.

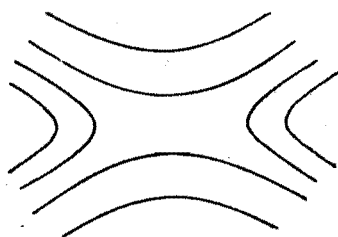


Рис. 119.

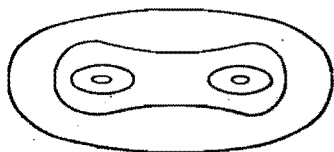


Рис. 120.

нии, делящей угол между осями пополам, расположение изохромат представлено на рис. 120.

### § 59. Случайное и искусственное двойное лучепреломление.

Двойное лучепреломление наблюдается в кристаллических телах, обладающих кристаллографическими осями, вдоль которых физические свойства (напр., диэлектрические постоянные) отличны от свойств их в других направлениях. Поэтому кристаллы, обладающие симметрией кубической системы, т. е. имеющие три взаимно-перпендикулярные оси, вдоль которых диэлектрические постоянные ( $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3$ ), не дают двойного лучепреломления. Их эллипсоид есть шар, как и в телах вполне изотропных.

Однако при исследовании таких оптически-изотропных тел в проходящем поляризованном свете можно часто наблюдать явления цветной поляризации, ко-

торые могут сохраняться телом неопределенно долго или же приобретаться под влиянием внешних условий. Напр., стекло, быстро затвердевшее, „закаленное“, представляет явления хроматической поляризации, указывающие на неоднородность его свойств в разных местах и по разным направлениям. Такая „случайная“ анизотропия иногда исчезает при отжигании стекла, т. е. выдерживании его при высокой температуре и медленном охлаждении. Иногда такая анизотропия наблюдается и в естественных кристаллах кубической системы, напр., в каменной соли ( $\text{NaCl}$ ), и исчезает лишь при обжигании.

Искусственное получение анизотропии возможно так же путем механических воздействий. Тело, сжатое в одном направлении, приобретает благодаря этому в этом направлении особые свойства и делается оптически анизотропным. Это дает возможность изучать распределение давлений внутри прозрачного и изотропного в нормальных условиях тела, определяя направление оптической оси по разности показателей преломления  $n_0$  —  $n_x$  в разных точках тела, вызванной внешней силой. Напр., можно исследовать экспериментально распределение напряжений в различных сооружениях и конструкциях, которое обычно рассчитывается сложными математическими методами теории упругости. Для этого делаются прозрачные модели изучаемых конструкций, напр., балок сложной формы, из стекла или целлюлоида. Подвергая эти модели заданным нагрузкам, можно по величине двойного лучепреломления судить о напряжениях в различных частях модели. Это дает возможность на опыте проверять результаты теоретических подсчетов. Когда твердое тело подвержено действию столь больших напряжений, что появляются остаточные деформации, то при этом в местах наибольших напряжений происходят сдвиги отдельных частей тела относительно друг друга. Эти сдвиги происходят в том направлении, в котором всего меньше прочность тела. Так как при этом изменяется распределение напряжений около места сдвига, то после удаления внешней силы внутренние напряжения в этом месте не исчезают. Если сдвиг происходит вдоль какой-нибудь плоскости, то по одну ее сторону образуется сжатие материала, а по другую — растяжение. В результате этого вдоль плоскости сдвига остается область, имеющая свойство двоякопреломляющего кристалла. Таким методом можно уже заметить первое появление остаточных деформаций, столь слабых, что их еще невозможно обнаружить по изменению размеров тела.

## § 60. Вращение плоскости поляризации. Естественное вращение.

Известны тела, обладающие всеми признаками изотропных тел, но все же оказывающие влияние на проходящий через них поляризованный свет. Так, напр., направление плоскости поляризации вращается при прохождении через раствор сахара поляризованных лучей, в каком бы направлении они ни проходили. Это вращение зависит лишь от числа „активных“ молекул, вращающая способность которых связана с их строением, а именно с пространственным расположением атомов в молекуле. Такие тела называются активными; среди них есть и кристаллические, которые однако обладают

свойством вращать плоскость поляризации только при распространении света вдоль определенного направления. Напр., кварц вращает плоскость поляризации при прохождении лучей вдоль оптической оси. При этом то же самое по химическому составу тело может вращать плоскость в одну или другую сторону, т. е. по и против часовой стрелки. Такие противоположно вращающие разновидности носят название оптических изомеров. Известны, напр., право- и лево-вращающий кварц, виноградный сахар и т. п.

Вращение плоскости поляризации есть сложное явление, но оно может быть значительно упрощено, если рассматривать свет, поляризованный по кругу. В таком свете световой вектор все время находится во вращении и при распространении внутри активного тела сохраняет свое вращение, скорость которого определяется периодом его колебаний. Преломление луча, поляризованного по кругу, в активном теле также не представляет каких-либо особых явлений, т. е. луч, поляризованный по кругу, имеет вполне определенный показатель преломления. Однако оптически активные тела отличаются тем свойством, что два луча, поляризованные по кругу, но с противоположным вращением светового вектора, имеют в них различные показатели преломления.

Этим и объясняется вращение плоскости поляризации при распространении прямолинейно-поляризованного света. Последний можно рассматривать как результат сложения двух лучей, поляризованных по кругу, но с разным направлением вращения.

Если мы представим себе два вращающихся в противоположные стороны вектора,  $OA$  и  $OB$  (рис. 121), то в случае одинаковой скорости вращения их геометрическая сумма будет совершать гармонические колебания и сохранять постоянное направление в пространстве. Направление это определяется положением одного из векторов в начальный момент и начальной разностью фаз, т. е. углом  $\varphi_0$  в тот же момент. При распространении таких круго-поляризованных колебаний с различной скоростью начальная разность фаз изменяется на величину

$$\Delta\varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda} (n_1 - n_2)$$

на каждый сантиметр слоя, а так как результирующий вектор при этом вращается на угол, вдвое меньший, то угол вращения плоскости поляризации равен

$$\frac{\pi}{\lambda} (n_1 - n_2)$$

при толщине слоя в 1 см.

Мы можем представить себе модель электромагнитного резонатора, который различно возбуждается электрическим вращающимся полем при изменении на

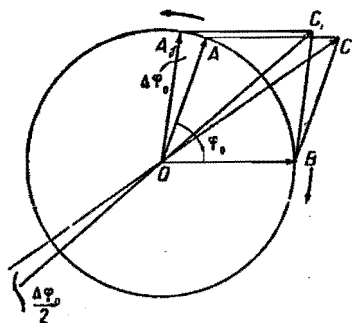


Рис. 121.

правления вращения. Спирали (рис. 122), имеющие определенное направление витков, возбуждаются при вращении электрического поля различным образом, смотря по направлению вращения. Эта разница в особенности заметна вблизи частоты собственных колебаний резонаторов. Поэтому при помощи таких спиральных резонаторов можно построить модель среды, обладающей всеми особенностями активного тела. Смесь таких резонаторов с правым и левым вращением может дать среду неактивную. Свойства оптически активного тела в



Рис. 122.

некоторых отношениях подобны указанной модели. Они зависят от пространственного расположения атомов в молекуле, от числа активных молекул и в смесях различных активных молекул их действия складываются. Это дает возможность применять вращение плоскости поляризации для определения содержания активного вещества в растворе.

Вращение плоскости поляризации зависит, как и показатели преломления, от длины волны. Вращение в случае фиолетовых лучей значительно больше, чем для красных. При прохождении света через вращающие тела мы получаем пучок плоскостей поляризации различных цветов, повернутых на разные углы. Поэтому, говоря о вращении плоскости поляризации, необходимо указывать, какая длина волны имеется в виду.

Измерение вращения может быть произведено при помощи николя анализатора, снабженного кругом с делениями для отсчета угла вращения николя. Свет, поляризованный николем  $P$  (рис. 123), проходит через сосуд  $C$ , снабженный по концам стеклянными окошками, и николю  $A$  устанавливается так, чтобы свет был потушен. Если налить в сосуд раствор, содержащий вращающие свет молекулы (напр. сахара), то наблюдается просветление поля зрения. В случае монохроматического света, напр. желтого света от натрового пламени, не трудно вращением анализатора найти новое положение его, при котором свет был бы погашен. Если же источник света дает белый свет, то ни при каком положении анализатора нельзя получить темноту; при вращении его наблюдается только изменение окраски проходящего света, так как анализатор тушит при разных положениях различные участки спектра. В этом случае применяется для более точной установки бикварц  $B$  (рис. 123, б), представляющий собой пластинку кварца, вращающего плоскость поляризации, но склеенную из двух половинок равной толщины. Каждая из них вращает плоскость поляризации на равные углы, но в противоположные стороны, так как половинки бикварца сделаны из право- и лево-вращающего кварца. Толщина бикварца делается такой, чтобы вращение для желтых лучей равнялось  $90^\circ$  (в противоположные

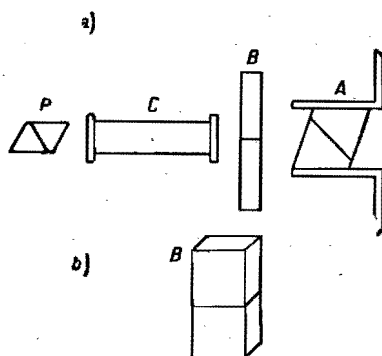


Рис. 123.

стороны). Анализатор устанавливается так, чтобы были потушены именно желтые лучи, и поле зрения оказывается окрашенным в особый дополнительный фиолетовый цвет, представляющий так называемую чувствительную окраску. При повороте плоскости поляризации желтых лучей одна из половин бикварца окрашивается в синий, другая в красный цвет, что в силу контраста цветов делает возможным замечать и небольшие вращения и точно устанавливать анализатор с бикварцем на чувствительную окраску. Приборы такого рода применяются большей частью для определения содержания сахара в растворе (в медицине и технике) и поэтому называются сахариметрами

### § 61. Магнитное вращение плоскости поляризации.

Вращение плоскости поляризации может происходить также под влиянием магнитного поля при распространении света вдоль магнитных силовых линий. Наиболее простой случай такого влияния мы имеем при распространении волн в среде, где имеются свободные электроны, т. е. не связанные с материальными атомами. Положим, что электрическая сила  $E$  (рис. 124) волны направлена параллельно оси  $X$ , магнитная сила  $H$  волны параллельна оси  $Y$ , а внешнее магнитное поле  $H_0$  направлено перпендикулярно к плоскости волны, т. е. параллельно оси  $Z$ . Электрическая сила  $E$  приводит в колебание электрон, имеющий заряд  $e$  (отрицательный) и массу  $m$ , в направлении оси  $X$ . Но на электрон, имеющий скорость  $v$ , перпендикулярную к  $H_0$ , действует также электромагнитная сила  $F$  (сила Лоренца), направленная под прямым углом как к скорости  $v$ , так и к магнитной силе  $H_0$  и равная

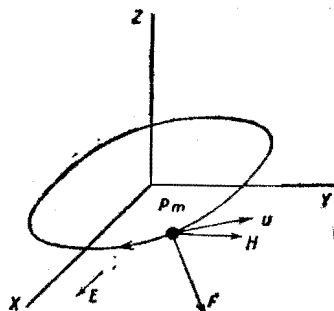


Рис. 124.

$$F = -\frac{e}{c} vH.$$

Поэтому электрон получит ускорение не только в направлении электрической силы, т. е. оси  $X$ , но и в перпендикулярном направлении вдоль оси  $Y$ ; составляющая электромагнитной силы  $F_y$ , параллельной оси  $Y$ , равна

$$-\frac{e}{c} H_0 \frac{dx}{dt};$$

поэтому движение в направлении оси  $Y$  должно удовлетворять уравнению

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{eH_0}{c} \frac{dx}{dt},$$

или, что то же,

$$m \frac{dy}{dt} = -\frac{eH_0}{c} x. \quad (128)$$

Эти уравнения показывают, что колебания вдоль осей  $X$  и  $Y$  по фазе сдвинуты относительно друг друга на  $90^\circ$ . Напр., если колебание вдоль оси  $Y$  выражено формулой

$$y = y_0 \sin \omega t,$$

то перемещение

$$x = -\frac{m \omega c}{eH_0} y_0 \cos \omega t = x_0 \cos \omega t.$$

Таким образом электрон совершает эллиптическое гармоническое колебание причем оси эллипса относятся между собой как:

$$x_0 : y_0 = \frac{m \omega c}{eH_0}.$$

Если частота колебаний равна  $\omega_0 = \frac{eH_0}{mc}$ , то колебание электронов делается круговым ( $x_0 = y_0$ ) и вместе с тем непрерывно возрастает под действием силы  $E$ , что можно показать следующим образом. В направлении  $X$  действуют на электрон две силы  $E$  и  $-\frac{eH_0}{c} \frac{dy}{dt}$  (знак — необходим для соблюдения правила, определяющего направление электромагнитной силы). Итак, имеем уравнение:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = eE - \frac{eH_0}{c} \frac{dy}{dt} = eE - \frac{e^2 H_0^2}{c^2 m} x \quad (129)$$

вследствие (128). Так как

$$\omega_0 = \frac{eH}{cm}, \quad (130)$$

то после деления на  $m$  и подстановки (130) имеем уравнение.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{e}{m} E - \omega_0^2 x.$$

Таким образом мы имеем уравнение вынужденных колебаний под действием электрической силы  $E$ , причем на электрон действует, кроме того, сила, пропорциональная перемещению и направленная в обратную сторону, т. е. квазиупругая сила. Электрон, следовательно, имеет частоту собственных колебаний  $\omega_0$ , находясь в магнитном поле и испытывая действие электрического поля волны. При приближении частоты колебаний к частоте собственных колебаний амплитуда установившихся колебаний возрастает безгранично, т. е. мы имеем дело с электрическим резонансом.

Вращение электронов происходит всегда в направлении, указанном стрелкой, в плоскости  $XY$ , т. е. так, что если смотреть с той стороны, куда направлена магнитная сила  $H_0$  (сверху), то вращение электрона представляется происходящим в направлении движения часовой стрелки. Лишь при изменении направления силы  $H_0$  изменяется и направление вращения электрона.

Вообразим, что в такой среде распространяется волна, поляризованная по кругу, и пусть вращение вектора электрической силы совпадает по направлению с вращением электрона, вызываемым действием магнитного поля  $H_0$ . Амплитуда колебаний электронов в этом случае будет особенно велика и будет возрастать при приближении к резонансу; соответственно будет возрастать и электронный ток и, следовательно, влияние электронов на скорость распространения волны, поляризованной указанным образом. Если же вращение электрического вектора имеет противоположное направление, то хотя электроны придут в движение по кругу, направленное согласно с вращением электрического поля, но амплитуда колебаний будет значительно меньше; при возрастании частоты амплитуда падает и резонанса не будет. Вследствие этого влияние на скорость волны, поляризованной по кругу, при вращении вектора в противоположную сторону будет меньше.

Из сказанного следует, что в рассмотренном примере показатель преломления различен для волн с противоположным вращением светового вектора. Поэтому те два круговых колебания, на которые мы можем разложить прямолинейно поляризованный свет, распространяются с разными фазовыми скоростями. В результате плоскость поляризации вращается (см. стр. 147) и притом в направлении вращения вектора той волны, скорость которой меньше. Такое вращение вектора электромагнитных волн наблюдается при распространении коротких радиотехнических волн, длиной в несколько десятков метров, в слое Хевизайда (см. стр. 110), содержащем свободные электроны. Магнитное поле, вызывающее вращение, есть поле земного магнетизма, и так как величина этого поля около 0,5 гаусса, то, согласно форм. (130), влияние его на распространение волн достигает максимума (резонанс) при длине волны около 200 м. При более коротких волнах фаза колебаний электронов противоположна фазе электрического вектора, и поэтому электроны (см. 123) дают уменьшение показателя преломления. Как и в случае обычной дисперсии в области коротких световых волн, показатель преломления меньше единицы, и следовательно фазовая скорость больше скорости света в пустоте.

То же самое мы должны наблюдать и в случае связанных электронов обычной дисперсии. Но значительное влияние магнитного поля на скорость кругополяризованных волн наблюдается лишь вблизи резонансных частот или вблизи полос поглощения, где амплитуды электронных колебаний достаточно велики. Такое вращение можно наблюдать, пропуская свет через пары натрия, который имеет две сильные линии поглощения в желтых лучах (линия  $D$ ), и помещая пары в магнитное поле. Вблизи линий  $D$  вращение плоскости поляризации очень велико и может достигать нескольких полных оборотов.

Вдали же от полос поглощения магнитное вращение очень невелико для большинства тел. В отличие от вращения, вызываемого активными молекулами (напр. раствором сахара) или вращающим кварцем, где вращение всегда одинаково по отношению к направлению луча, в случае магнитного вращения при изменении направления магнитного поля изменяется и направление вращения. Этим свойством можно воспользоваться для увеличения наблюдаемого поворота



плоскости поляризации. Пропуская луч в магнитном поле последовательно то в одном, то в другом направлении с помощью многократного отражения от двух зеркал, мы получаем сложение вращений, которые меняют направление, если смотреть в направлении распространения света при каждом отражении, но остаются неизменными по отношению к направлению магнитного поля (рис. 125).

При пропускании света перпендикулярно к магнитным силовым линиям вращающиеся тела обнаруживают свойства двоякопреломляющих тел. Объяснение этому мы можем опять найти, разлагая движение электронов по двум направлениям: вдоль магнитных силовых линий и перпендикулярно к ним. На колебания электронов параллельно магнитному полю последнее не оказывает никакого влияния; движение же в перпендикулярном направлении нами уже было

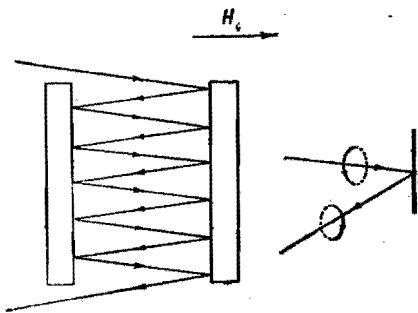


Рис. 125.

рассмотрено выше и приводит к изменению показателя преломления, особенно заметного в области полос поглощения.

Все указанные нами явления сопровождаются поглощением света. Чем больше амплитуда колебаний, тем больше, вообще говоря, поглощение, и поэтому магнитное поле в тех случаях, где оно оказывает влияние на амплитуду колебаний, также изменяет расположение и форму полос поглощения.

К рассмотренным явлениям относится также вращение плоскости поляризации при прохождении света через тонкие слои магнитных металлов и при отражении света от поверхности намагниченного железного зеркала. Это так называемые внутренний и внешний магнитный эффект (явление) Керра. Они имеют заметную, хотя и малую величину, так как слой металла в виду его непрозрачности должен быть очень тонок, если мы рассматриваем проходящий свет. При отражении от поверхности металлического зеркала мы имеем дело тоже с весьма тонким слоем, в который проникает свет при отражении. В обоих случаях вращение происходит на небольшой толщине и поэтому не достигает больших значений.

## § 62. Явление Зеемана.

В тесной связи с рассмотренными в предыдущем параграфе явлениями находится влияние магнитного поля на длину волны, испускаемую источником света. Фарадей, открывший вращение плоскости поляризации в магнитном поле в разных матерьялах и в стеклах в том числе, тщетно пытался обнаружить изменение периода световых колебаний в магнитном поле. Оказалось, что магнитные поля, которыми располагал Фарадей, были недостаточны при той спектроскопии, которой он мог располагать. Это явление лишь в 1896 г. удалось заметить голландскому физическому Зееману. Элементарную теорию этого явления, которую мы здесь изложили, дал Лорентц. Позднейшее изучение показало, что явление это тесно связано со строением атомов и законами спектров. Удо-

влетворительная теория явления Зеемана, как и теория спектров испускания, будет дана в последнем томе. Мы будем исходить здесь из той модели, которую уже неоднократно рассматривали, а именно колебаний электрона около положения равновесия. Период колебаний такого диполя зависит от сил, действующих на электрон, и между прочим от магнитного поля. Рассмотрим сначала прямолинейные колебания электрона в плоскости, перпендикулярной к направлению магнитного поля. Разложим прямолинейное колебание электрона на два круговых, имеющих противоположные вращения (рис. 126). Электромагнитная сила  $F$ , действующая на электрон, как показано на рис. 126, в одном случае прибавляется, а в другом вычитается из квазиупругой силы, направленной к центру круга. Величина ее равна

$$F = \frac{ev}{c} H,$$

а величина всей силы  $f$  должна соответствовать, с одной стороны, центростремительному ускорению кругового движения

$$f = \frac{mv^2}{r},$$

где  $r$  — радиус круговой орбиты, а с другой — равняться алгебраической сумме электромагнитной силы  $F$  и квазиупругой  $kr$ :

$$f = \frac{mv^2}{r} = kr \pm \frac{evH}{c}.$$

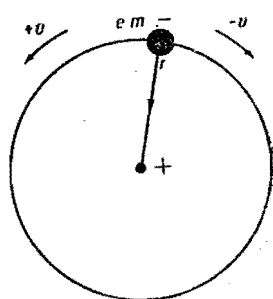


Рис. 126.

Уже из этого уравнения мы можем заключить, что магнитное поле изменяет период колебания. В самом деле, электромагнитная сила  $F$  в каждый момент перпендикулярна к направлению движения электрона и поэтому никакой работы не производит. Следовательно магнитное поле не может изменить ни кинетической энергии, ни скорости  $v$  электрона. Наше уравнение показывает тогда, что изменяется радиус  $r$  вращения электрона: для одного направления вращения магнитное поле увеличивает радиус, для другого уменьшает. При неизменной скорости кругового движения это значит, что один из периодов уменьшился, другой увеличился. Изменения периода мы можем подсчитать, исходя из того же уравнения.

Так как  $v = \omega r$ , где  $\omega$  — круговая частота, то это уравнение дает следующее уравнение для  $\omega$ :

$$m\omega^2 = k \pm \frac{e\omega H}{c}.$$

Частоту свободных колебаний электрона обозначим через  $\omega_0$ , причем

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

и следовательно:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = \pm \frac{e}{m} \frac{\omega}{c} H.$$

Разность  $\delta\omega$  частоты  $\omega$ , измененной под действием магнитного поля, и первоначальной  $\omega_0$  величина очень малая, и поэтому мы можем приближенно положить

$$\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \cong 2\omega\delta\omega.$$

Таким образом изменение частоты колебаний электрона в магнитном поле равно

$$\delta\omega = \pm \frac{eH}{2mc}. \quad (131)$$

Изменения эти будут иметь знак  $+$  или  $-$  в зависимости от направления вращения светового вектора.

Так как всякое колебание может быть разложено на два круговополяризованные колебания, то излучение электрона вдоль магнитного поля дает два луча с частотой, измененной в ту и другую сторону на величину  $\pm \delta\omega$ , в зависимости от направления вращения светового вектора.

Рассмотрим теперь любое колебание электрона в магнитном поле. Разложим его колебание на два направления: вдоль магнитного поля и перпендикулярно к нему. Первое не будет изменено магнитным полем, так как электромагнитная сила  $F$  в этом случае равна нулю. Второе же, как в рассмотренном уже случае, можно представить как два по кругу поляризованных колебания, изменяющие свою частоту на  $\pm \delta\omega$ . Применяя эти рассуждения к опыту, надо помнить, что в каждом луче существуют только колебания в плоскости, ему перпендикулярной. Поэтому при наблюдении вдоль магнитного поля мы можем видеть лишь две составляющие, ему перпендикулярные. При наблюдении перпендикулярно к магнитному полю колебания вдоль магнитных силовых линий дают неизменную частоту  $\omega_0$ ; что же касается по кругу поляризованных колебаний, то они проектируются на поле зрения как вертикальные колебания. Эти явления называются продольным и поперечным явлением Зеемана. Такой простой характер явление Зеемана имеет лишь в отдельных случаях. Обычно спектральная линия распадается в магнитном поле на большее число составляющих.

Очевидно, что, определяя величину изменения частоты спектральных линий, мы можем, если известна сила поля  $H$ , найти отношение заряда  $e$  к массе  $m$  электрона. С другой стороны это же соотношение дает возможность определить величину магнитного поля  $H$  по его действию на спектральные линии.

## ГЛАВА V.

### ВОЛНОВАЯ ТЕОРИЯ СВЕТА.

#### § 63. Прямолинейное распространение света.

Основным свойством света, которое мы постоянно наблюдаем и которым пользуемся в различных применениях, является прямолинейность лучей, причем под лучами мы, как и раньше, понимаем те прямые, вдоль которых происходит распространение света в однородной среде. Пользуясь этим свойством, можно очень просто описывать основные законы отражения и преломления света. Мы говорим в таких случаях об изменении направления отдельных лучей или пучков лучей, как если бы лучи света имели реальное и независимое друг от друга существование. Под отдельным лучом можно представлять себе достаточно узкий конус или цилиндр, внутри которого происходит распространение света. Чем уже такой элементарный пучок прямых линий, тем более определенным представляется нам направление его. В некоторых опытах мы приближаемся к осуществлению его, пользуясь узкими отверстиями или диафрагмами; в других мы только мысленно разбиваем широкий пучок лучей на отдельные элементарные пучки, или отдельные лучи.

Стремясь осуществить узкий пучок лучей, мы наталкиваемся на своеобразное явление, которое было изучено и описано Гримальди в XVII веке под названием диффракции света. Явление это заключается в том, что свет, прошедший через узкое отверстие  $A$  и падающий на экран  $B$ , освещает не только тот участок  $a$  экрана, на который падают прямолинейные лучи пучка, но также соседние участки (рис. 127). Свет попадает в область геометрической тени, т. е. отклоняется от прямолинейного распространения, и притом тем больше, чем уже пучок. При достаточно малом отверстии  $A$  мы не имеем уже за диафрагмой сколько-нибудь определенного и ограниченного пучка лучей; вместо этого происходит диффузное освещение всех точек экрана, которое медленно убывает к краям. Таким образом на опыте оказывается невозможным осуществить сколь угодно узкий пучок, и, как мы видим, самое основное свойство света, прямолинейность его лучей, в этом случае утрачивается.

Указанные здесь явления находят полное объяснение с точки зрения волновой теории света. Первые шаги в этом направлении сделал Гюйгенс, кото-

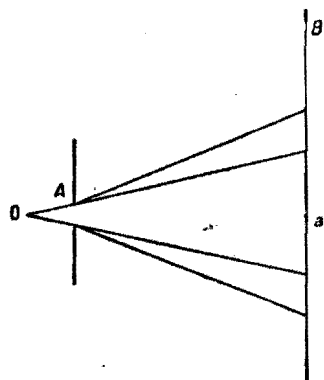


Рис. 127.

рый показал, как связаны между собой распространение волн и прямолинейность лучей. По правилу, данному Гюйгенсом, точки той среды, в которой распространяются волны, следует рассматривать как центры элементарных волн (рис. 128). Эти волны имеют шаровую форму, если скорость распространения колебаний не зависит от направления. Если центры этих вторичных волн мы представим себе расположенными на поверхности волны, то можно построить новую волновую поверхность  $S_1$ , которая показывает, как изменяется волна  $S$  после распространения ее на некоторое расстояние, равное радиусу вторичных волн. При построении волны  $S_1$  используются только те небольшие участки вторичных волн, в которых происходит касание их с поверхностью  $S_1$ . Отрезки

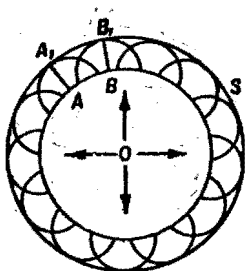


Рис. 128.

прямых  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,..., т. е. радиусы вторичных волн, проведенные к точкам касания, определяют направление прямолинейных лучей. Они имеют направление нормалей к поверхности волны.

Как мы видим, построение Гюйгенса приводит к тому же результату, как и геометрическое построение лучей. Каждый элемент волновой поверхности определяет направление луча, проходящего через него, и мы пользуемся в сущности этими лучами, откладывая вдоль них отрезки, пропорциональные скорости распространения волны. В случае неоднородной среды эти отрезки имеют неодинаковую длину, так как скорость волн в разных точках различна, и, производя построение, мы должны пользоваться достаточно малыми отрезками, т. е. рассматривать изменение волны через достаточно малый промежуток времени.

Построение Гюйгенса, как мы уже видели (стр. 41), дает правильное объяснение преломления и отражения волн на границе, отделяющей две среды с разными скоростями распространения; оно находит применение и в случае анизотропной среды, когда направление лучей может и не быть перпендикулярно к волновой поверхности. Однако описанный выше метод Гюйгенса приводит к неверным результатам в том случае, когда данная поверхность волны, а, следовательно, и пучок лучей ограничен, напр., заключен внутри узкого цилиндра или конуса, вырезающего небольшой участок на волновой поверхности. Особенно резко расхождение между построением Гюйгенса и опытом проявляется в случае очень узких пучков лучей.

### § 64. Принцип Френеля-Гюйгенса.

Более удовлетворительный способ построения, указанный Френелем, представляет собой видоизменение и развитие метода Гюйгенса. Рассматривая, подобно Гюйгенсу, точки данной волновой поверхности как центры вторичных волн, Френель однако не ограничивается построением поверхности огибающей все вторичные волны, а производит сложение этих волн в какой-нибудь точке, вычисляя для нее амплитуду и фазу колебания.

Способ Гюйгенса-Френеля применим и к случаю ограниченных участков исходной поверхности как вдали, так и вблизи от границы, где уже нельзя

построить настоящую волновую поверхность. Рассмотрим сначала применение способа Френеля к неограниченной плоской волне, где он дает тот же результат, что и способ Гюйгенса.

Пусть  $S$  (рис. 129) — плоская волна, простирающаяся неограниченно во все стороны и распространяющаяся снизу вверх по направлению к точке  $A$  в которой мы ищем амплитуду колебания, создаваемого приходящими вторичными волнами. Опустим из точки  $A$  перпендикуляр на поверхность волны, пересекающий ее в точке  $O$ . Эту точку называют полюсом волны по отношению к точке  $A$ . Поверхность волны — это геометрическое место точек, обладающих в определенный момент времени одинаковой фазой. Так как расстояние от различных точек поверхности  $S$  до точки  $A$  различно, то в точку  $A$  вторичные волны придут с разными фазами. Чтобы учесть фазы вторичных волн

в точке  $A$ , произведем следующее построение: на поверхности волны найдем такую точку  $O_1$ , чтобы разность расстояний  $O_1A$  и  $OA$  равнялась бы одной полуволне света.

(Производя такое построение, мы, очевидно, должны иметь в виду монохроматический свет определенной длины волны  $\lambda$ , а в сложном свете рассматривать каждую длину волны отдельно.) Точек, удовлетворяющих этому условию, будет не одна. Все точки, равноотстоящие от  $A$ , будут и равно-

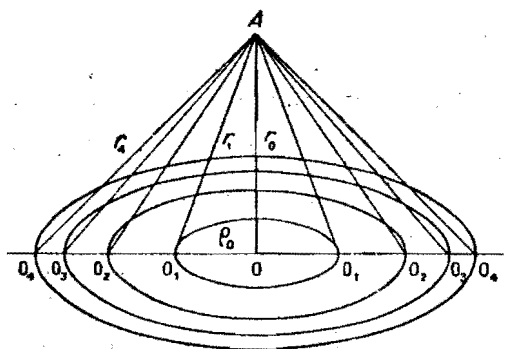


Рис. 129.

отстоящими от  $O$ , т. е. далее построим другой круг с тем же центром  $O$  и с таким радиусом  $OO_2$ , чтобы расстояние  $O_2A$  отличалось от  $OA$  на  $2\frac{\lambda}{2}$ . Третий круг с радиусом  $OO_3$  должен удовлетворять условию  $O_3A - OA = 3\frac{\lambda}{2}$  и т. д. Этими

кругами поверхность волны разобьется на кольцеобразные участки, называемые зонами Френеля.

Все вторичные волны, исходящие из точек одного круга, приходят в точку  $A$  одновременно и, следовательно, с одинаковой фазой. Вторичные волны от двух соседних кругов, отстающие на расстояние  $\frac{\lambda}{2}$ , запаздывают по фазе на  $\pi$ .

Для каждой точки, лежащей в одной зоне, можно найти точку соседней зоны, из которых придут волны в точку  $A$  с противоположными фазами. Чтобы учесть результат сложений всех волн, нужно знать число вторичных волн с каждой зоны, которое можно положить пропорциональным поверхности зоны, и амплитуду их колебаний в точке  $A$ .

Поверхности различных зон имеют приблизительно одинаковую величину,

равную величине центральной зоны, если расстояние  $OA$  очень велико по сравнению с длиной волны. Радиус центральной зоны, который обозначим  $\rho_0$ , мы найдем из условия:  $r_1 - r_0 = \frac{\lambda}{2}$ . Радиус  $n$ -ой зоны  $\rho_n$  находится подобным же образом из условия:  $r_n - r_{n-1} = \frac{\lambda}{2}$  или  $r_n - r_0 = n \frac{\lambda}{2}$ , где  $r_n$  обозначает расстояние точки  $A$  до  $O_n$ . Способ вычисления радиусов зон очень прост. Из рис. 129 видно, что

$$r_1^2 = r_0^2 + \rho_0^2,$$

и следовательно

$$(r_1 - r_0)(r_1 + r_0) = \rho_0^2.$$

Таким образом

$$\rho_0^2 = \frac{\lambda}{2}(r_1 + r_0). \quad (132)$$

Так как  $r_1$  отличается от  $r_0$  на очень малую величину  $\frac{\lambda}{2}$ , то мы можем приближенно положить  $r_1 + r_0 = 2r_0$ , делая при этом ошибку, относительная величина которой равна  $\frac{\lambda}{4r_0}$ , т. е. по условию очень мала. Поэтому с достаточной точностью находим из (132), что

$$\rho_0 = \sqrt{\lambda r_0} \quad (132')$$

и следовательно поверхность центральной зоны равна

$$\pi \rho_0^2 = \pi \lambda r_0. \quad (133)$$

Точно таким же образом мы найдем, что поверхность  $n$ -ой зоны, равная  $\pi r_n^2 - \pi r_{n-1}^2$  в силу условия  $r_n - r_{n-1} = \frac{\lambda}{2}$  достаточно точно может быть представлена выражением:

$$\pi \lambda r_{n-1}. \quad (133')$$

Так как расстояния  $r$  соседних зон от точки  $A$  отличаются между собой на очень малую величину  $\frac{\lambda}{2}$ , то также мало отличаются и их поверхности. Но все же, как показывает формула (133'), поверхность зон медленно возрастает по мере возрастания их радиуса. Это возрастание компенсируется удалением их от точки  $A$ , а также тем, что телесный угол, под которым видны равные участки поверхности, уменьшается по мере удаления их от полюса  $O$ . Указанные здесь причины могут привести к медленному уменьшению амплитуды колебаний, создаваемых отдельными зонами, по мере увеличения их радиуса. Следует указать еще на одну возможную причину такого уменьшения и, может быть, гораздо более действительную. Поверхность волны, испускаемой реальным источником света, не является идеальной поверхностью, испускаемой одной точкой. При распространении по разным направлениям волны

могут испытывать различные влияния. Поэтому распределение колебаний на поверхности волны может быть весьма сложным и непостоянным во времени. Чем дальше находятся две какие-нибудь точки на поверхности волны, тем вероятнее, что равенство их фаз будет нарушаться. Поэтому для точек волновой поверхности, приходящих в точку  $A$  с большою разностью хода, нельзя ожидать строгого постоянства фаз даже для точек одного и того же круга  $O_n, O_n$ . Следовательно волны, приходящие из отдаленных зон, будут давать меньшую амплитуду в точке  $A$ , чем волны близких зон.

Все эти соображения, не устанавливая определенного закона убывания, все же заставляют предполагать, что амплитуда в точке  $A$  может быть представлена как сумма постепенно убывающих слагаемых:

$$S = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots, \quad (134)$$

где  $a_0$  — амплитуда колебания, создаваемого одной центральной зоной,  $a_1$  — амплитуда, создаваемая второй зоной,  $a_2$  — третьей и т. д. Эти колебания имеют противоположные фазы, так как разность расстояний от соответственных точек соседних зон равна половине длины волны. Поэтому ряд (134) знакопеременный.

Представим себе сумму  $n$  членов ряда (134) в таком виде:

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \left( \frac{a_0}{2} - a_1 + \frac{a_2}{2} \right) + \left( \frac{a_2}{2} - a_3 + \frac{a_4}{2} \right) + \dots + \left( \frac{a_{n-2}}{2} - a_{n-1} + \frac{a_n}{2} \right) + \frac{a_n}{2},$$

если  $n$  — четное число.

Если можно считать, что каждый член суммы по величине близок к среднему арифметическому из соседних членов, то все выражения в скобках будут малыми величинами, которыми можно пренебречь, и мы получим приближенно:

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \frac{a_n}{2}, \quad (135)$$

если  $n$  — число четное, и

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \frac{a_{n-1}}{2} - a_n \quad (135')$$

если  $n$  — число нечетное. Как только  $n$ , т. е. число рассматриваемых зон, делается настолько большим, что действием последней зоны можно будет пренебрегать, мы получим для амплитуды в точке  $A$  просто

$$S = \frac{a_0}{2},$$

т. е. колебания, вызываемые большим числом зон или большим участком волновой поверхности, имеют такую же амплитуду, как колебания, создаваемые половиной центральной зоны. В этом случае мы в праве говорить о прямолинейном распространении света, так как луч света, проходящий через точку  $O$ , соединяет последнюю со средней точкой центральной зоны. Эта зона является тем эффективным участком волновой поверхности, от которого колебания доходят до всех точек, лежащих на перпендикуляре  $OA$  к волновой поверхности. Из всех возможных



прямых  $OA$ ,  $O_1A$ ,  $O_2A\dots$  и т. д., соединяющих различные точки волновой поверхности с точкой  $A$ , прямую  $OA$  можно рассматривать как луч, идущий от источника света к точке  $A$ .

Однако, если закрыть центральную зону (рис. 130, свет идет сверху вниз к точке  $A$ ), то освещение в точке  $A$  не прекратится. Роль центральной зоны будет играть половина той зоны, которая прилегает к закрытому участку. В этом случае амплитуду в точке  $A$  можно будет вычислять по формуле

$$S_n' = \frac{a_1}{2} + \left( \frac{a_1}{2} - a_2 + \frac{a_3}{2} \right) + \dots$$

Эта формула применима и в том случае, когда закрыто несколько зон или вообще некоторый небольшой участок волновой поверхности. Освещение в точке  $A$  определяется каждый раз половиной первой зоны, прилегающей к непрозрачному экрану. Как мы видели, амплитуда колебаний, создаваемых отдельными зонами, уменьшается при возрастании радиуса зоны, но уменьшается медленно, и поэтому при очень малых размерах непрозрачного экрана освещение в центре его геометрической тени почти такое же, как и в отсутствии экрана. Этот парадоксальный результат, противоречащий представлению о прямолинейном распространении света, был указан Пуассоном как следствие волновой теории света, и подтвержден на опыте Араго.

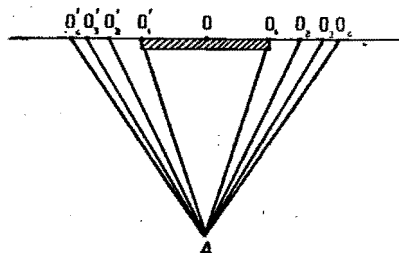


Рис. 130.

Если на пути лучей, идущих от светящейся точки, поставить непрозрачный экран, то на тени, которую он отбрасывает, в самом центре ее можно наблюдать светлое пятно. Если же туда поместить глаз, то непрозрачный экран представляется окруженным светящимся ореолом. Это свечение и есть результат действия первой незакрытой полузоны.

Теория Френеля делает понятным и явление диффракции, о котором упомянуто было выше, и которое обнаруживается при выделении узкого, ограниченного пучка лучей. Мы видели, что влияние отдельных зон тем слабее, чем дальше они от центральной. Поэтому для получения отчетливых явлений диффракции необходимо брать диафрагму с очень малым отверстием, пропускающим небольшое число зон Френеля. Освещение, создаваемое таким пучком в центре картины на экране  $B$  (рис. 127), будет зависеть, согласно форм. (135) или (135'), от последней зоны, т. е. от величины и знака  $a_n$ , и может быть меньше, больше или равно тому освещению, которое получается при диафрагме с широким отверстием.

Все эти факты показывают, что понятие об определенном направлении и интенсивности световых лучей тесно связано с размерами волновой поверхности. Только при значительных поперечных размерах пучка лучей имеет смысл говорить о прямолинейных лучах. Чем уже пучок, тем менее определены границы его, и при достаточно узких пучках наблюдается рассеяние света по всем направлениям.

Все эти факты показывают, что понятие об определенном направлении и интенсивности световых лучей тесно связано с размерами волновой поверхности. Только при значительных поперечных размерах пучка лучей имеет смысл говорить о прямолинейных лучах. Чем уже пучок, тем менее определены границы его, и при достаточно узких пучках наблюдается рассеяние света по всем направлениям.

## § 65. Принцип Ферма.

Среди различных прямых, соединяющих точки волновой поверхности с точкой  $A$  (рис. 129), луч  $OA$  отличается тем, что по этому пути колебания доходят до точки  $A$  в кратчайшее время. Тем же условием кратчайшего времени прохождения света определяются и направления лучей при отражении и преломлении. Пусть плоская волна  $SS$  падает наклонно на плоскую отражающую поверхность  $PP$  (рис. 131). В этом случае, как мы уже видели, можно считать, что свет достигает точек  $A_1, A_2, A_3 \dots$  распространяясь вдоль лучей  $O_1A_1, O_2A_2, O_3A_3 \dots$ . Каждая из точек отражающей поверхности является центром вторичных волн, которые собираются в точке  $B$ . Фазы колебаний их определяются длиной лучей  $O_1A_1B, O_2A_2B, O_3A_3B \dots$ , и среди них один будет иметь наименьшую величину. Этот луч, положим,  $O_4A_4B$ , мы будем называть центральным, а точку  $O_4$  — полюсом волны. Границы зон Френеля на поверхности  $S$  можно, как и ранее, найти из условия, чтобы длина лучей от границ соседних зон отличалась на пол-волны. Как и в случае свободного распространения волн, колебания в точке  $B$  при неограниченных размерах волны определяются половиной центральной зоны, окружающей точку  $O_4$ , и мы в праве говорить о распространении света вдоль луча  $O_4A_4B$ , который оказывается кратчайшим путем для колебаний, отражаемых поверхностью зеркала.

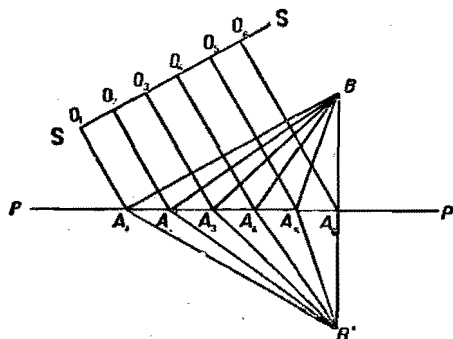


Рис. 131.

Построим зеркальное изображение  $B'$  точки  $B$ .<sup>1</sup> Из элементарных геометрических свойств этого построения видно, что  $OAB' = OAB$  для всех точек  $O$  и  $A$ , и, следовательно, направление центрального луча  $O_4A_4$  удовлетворяет также условию, чтобы линия  $O_4A_4B'$  была наикратчайшим путем между точками  $O$  и  $B'$ . Это означает, что точки  $O_4$  и  $B'$  лежат на прямой, нормальной к поверхности волны  $SS$ , откуда и получаем обычный закон отражения луча, т. е. равенство углов падения и отражения и совпадение плоскостей падения и отражения луча.

Таким образом луч, испытывающий правильное отражение, т. е. луч  $O_4A_4B$ , отличается от всех других, напр. от луча  $O_1A_1B$ , тем, что он доходит до точки  $B$  в кратчайшее время. В данном случае геометрическая длина луча  $O_4A_4B$  является наименьшей. Но, если скорость на разных участках траектории луча неодинакова, то понятия кратчайшего пути и кратчайшего времени не совпадают.

<sup>1</sup> Зеркальным изображением точки  $B$  является точка, лежащая на перпендикуляре к отражающей поверхности на расстоянии  $A_1B' = AB$ . В виду этого для всякой другой точки  $A$  на плоскости  $PP$  имеет место равенство

$$AB = AB'.$$

Представим себе две среды, в которых скорость распространения фазы волны различна и которые разделены плоскостью  $PP$  (рис. 132). Если скорость в первой среде  $u_1$ , а во второй  $u_2$ , то время распространения колебаний вдоль лучей  $O_1A_1B$ ,  $O_2A_2B\dots$  равно соответственно

$$t_1 = \frac{O_1A_1}{u_1} + \frac{A_1B}{u_2}, \quad t_2 = \frac{O_2A_2}{u_1} + \frac{A_2B}{u_2}.$$

Рассмотрим два бесконечно близких луча  $OAB$  и  $O_1A_1B$ , причем угол падения их равен  $\alpha$ , а угол преломления —  $\beta$ . Время распространения их в первой среде различно и отличается на  $\frac{O_1A_1 - OA}{u_1} = \frac{AA_1 \sin \alpha}{u_1}$ , а во второй среде на

$$\frac{AA_1 \sin \beta}{u_2}.$$

Таким образом, переходя от луча  $OAB$  к соседнему, мы имеем следующие изменения времени распространения:

$$t_1 - t_2 = \frac{AA_1}{u_1} \sin \alpha - \frac{AA_1}{u_2} \sin \beta. \quad (136)$$

Условие минимума для времени  $t$  может быть выражено так: при изменении пути (бесконечно малом) изменение времени  $t$  должно равняться нулю. Приравняв выражение (136) нулю, находим известный закон преломления:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{u_1}{u_2}. \quad (137)$$

В этом случае, хотя геометрическая длина ломаной линии  $OAB$  больше, чем длина прямой  $O_2A_2B$ , проходящей через точку  $A_2$  и перпендикулярной к плоскости волны  $S$ , но время распространения вдоль  $OAB$  короче, так как путь  $AB$  в среде с меньшей скоростью в последнем случае меньше.

Правило, по которому мы находили в этих простейших случаях направление лучей, называется принципом Ферма, или принципом кратчайшего времени. Как мы видели, оно не совпадает с правилом кратчайшего пути, если длину пути определять геометрически. Но можно ввести понятие оптической длины пути; пропорциональной времени, и тогда принцип Ферма можно назвать принципом кратчайшей оптической длины луча. Для этого умножим геометрическую длину на показатель преломления  $n$ , т. е. на отношение скорости света в пустоте  $c$  к скорости в данной среде  $u$ . Оптическая длина  $L$  равна

$$L = ln = l \frac{c}{u} = ct,$$

<sup>1</sup> Это справедливо, строго говоря, лишь в том случае, если точка  $B$  находится настолько далеко от  $PP$ , что лучи  $AB$  и  $A_1B$  можно рассматривать как параллельные

где  $t$  — время распространения света на расстояние  $l$  в данной среде; таким образом  $L$  пропорциональна времени  $t$ .

Принцип Ферма может быть применен в случае какого угодно числа отражающих и преломляющих поверхностей, а также при распространении света в неоднородной среде с меняющимся вдоль луча показателем преломления.<sup>1</sup>

### § 66. Диффракция Френеля.

Явления диффракции Френеля наблюдаются около краев тени, отбрасываемой непрозрачным телом или экраном с отверстиями, когда они освещаются лучами, исходящими от точечного источника света. Различные случаи, напр. диффракция, создаваемая круглым отверстием или небольшим непрозрачным диском, узкой и длинной щелью или узким непрозрачным цилиндром (провоолокой), или диффракция у края бесконечно большого экрана, были разобраны Френелем с точки зрения волновой теории.

Вычисления распределения света в этих случаях имеют следующий ход. Представим себе какую-нибудь поверхность, проходящую через края отверстия. На различные элементы ее падают лучи, исходящие из светящейся точки, причем фаза колебаний в различных элементах зависит от расстояния их от светящейся точки. Каждый элемент поверхности является в свою очередь источником вторичных лучей; проведя луч от этого элемента в ту точку, где мы желаем вычислить освещение, находим фазу колебаний, создаваемую соответственным элементом. Наконец, мы складываем колебания от разных элементов, принимая во внимание разность фаз и амплитуд, и таким образом находим величину колебания в данной точке.

С точки зрения механизма диффракции указанный ход вычисления представляется весьма естественным и простым.

Однако с математической стороны такое вычисление представляет значительную сложность. Мы не станем останавливаться здесь на изложении тех математических методов, которые позволили Френелю в указанных выше простых случаях решить эту задачу до конца. Заметим, что математические формулы значительно упрощаются, если предполагать, что лучи света идут от бесконечно далекого источника, т. е. параллельным пучком, а вторичные лучи собираются тоже в бесконечно удаленных точках. Подобные случаи были изучены Фраунгофером и называются диффракцией Фраунгофера, которой и посвящены следующие §§ 67 и 68.

Явления диффракции Френеля в основном сводятся к образованию максимумов и минимумов света у края тени, так что очертания края становятся размытыми.

<sup>1</sup> В некоторых специальных случаях нельзя говорить об одном определенном кратчайшем пути. Если источник света  $S$  находится в одном из фокусов эллипсоида вращения, а освещаемая точка  $B$  в другом фокусе, то по известному свойству эллипса длина лучей  $SPB = SP'B$ , т. е. не зависит от направления луча  $SP$ , отражающегося от поверхности эллипса. Все лучи, вышедшие из фокуса  $S$  в одно и то же время, придут в точку  $B$ .

Переход от света к тени благодаря диффракции представляется не как резкая граница, а как чередование более светлых и более темных полос. Разница освещения их уменьшается по мере перехода в область тени или же в область, освещенную прямыми лучами. Ширина полос или расстояние между светлыми и темными областями зависит от расстояния между точкой и отверстием, а также от размеров отверстия. Чем меньше последнее, тем шире полосы и тем более размыты края тени, для больших же отверстий полосы диффракции на границе света и тени столь узки и сжаты, что их нельзя наблюдать невооруженным глазом.

Ширина полос, кроме того, зависит от длины волн света и пропорциональна ей. В виду этого, если освещение отверстия производится белым светом, то различные лучи спектра дадут различные системы полос, которые, складываясь, дадут окрашивание, зависящее от того, какие волны имеют темную полосу в данной точке.

Чем больше длина волны при данных размерах отверстия или экрана, тем сильнее выражены явления диффракции. Если размеры отверстия сравнимы с длиной волны, то теневое изображение вообще расплывается. Точно так же и тень от мелких непрозрачных предметов, имеющих размеры порядка длины волны или меньше, т. е. значительно меньше 0,001 мм, совсем не передает истинных очертаний или размеров предметов. Поэтому формы таких мелких предметов мы не можем различить невооруженным глазом.

### § 67. Диффракция Фраунгофера.

В отличие от диффракции Френеля, в которой мы имеем дело с волнами, выходящими из точки на конечном расстоянии от отверстия и собирающимися в различных точках экрана, также не очень удаленного от отверстия, в случаях диффракции Фраунгофера как источник света, так и освещаемая поверхность отодвигаются на бесконечность. Это значит, что волна, падающая на отверстие, может рассматриваться как плоская, и лучи, ее образующие, — как параллельный пучок прямых. Если волна падает нормально на плоскость отверстия, т. е. направление лучей совпадает с направлением нормали к плоскости, то колебания во всех точках отверстия имеют одинаковую фазу. Если же волна падает наклонно и лучи составляют с нормалью угол, отличный от нуля, то фазы колебаний в плоскости отверстия для разных точек различны.

Для того чтобы осуществить пучок параллельных лучей, мы можем воспользоваться свойством собирающей линзы. Если светящаяся точка (рис. 133) находится в главном фокусе  $F$  (см. стр. 209), или в какой-нибудь точке  $F'$  главной фокальной плоскости линзы, то расходящийся пучок лучей после преломления в линзе превращается в пучок параллельных лучей, составляющий с оптической осью  $OF$  линзы некоторый угол  $\varphi$ , которым определяется направление пучка. Каждой точке фокальной плоскости соответствует определенное направление пучка, которое можно найти, проведя лучи  $FO$  или

$F'O$  через оптический центр  $O$  линзы. Если  $FF'$  — расстояние точки  $F'$  от главного фокуса  $F$ , то соответствующие им лучи составляют с оптической осью линзы угол  $\varphi$ , определяемый уравнением  $OF \operatorname{tg} \varphi = FF'$ , где  $OF$  есть главное фокусное расстояние линзы.

Обычно линза или объектив помещаются в одном конце трубы, а другой конец ее снабжается отверстием или узкой щелью. Освещаемая широким пламенем щель может служить линейным источником света. Если к тому же щель находится в фокальной плоскости объектива, то из последнего выходят лучи, параллельные плоскости щели. Труба, снабженная щелью и объективом, носит название коллиматора; она заменяет источник света, бесконечно удаленный от отверстия.

В дальнейшем мы будем рассматривать лучи, выходящие из одной точки освещенной щели и дающие после объектива пучок, параллельный определенному направлению. Такой пучок, попадая затем в объектив зрительной трубы, собирается в главной фокальной плоскости последней и притом в точке, расстояние которой от главного фокуса  $F$  равно

$$F_1 F_1' = O_1 F_1 \operatorname{tg} \varphi_1,$$

где  $O_1 F_1$  — главное фокусное расстояние зрительной трубы, а  $\varphi_1$  — угол, составляемый параллельным пучком с ее оптической осью. Таким образом в главной фокальной плоскости трубы получается изображение точек щели коллиматора.

В фокальной плоскости трубы пересекаются те лучи, которые должны были бы дать пересечение в точках бесконечно удаленной плоскости, как параллельные. Следовательно, распределение освещения в этой плоскости соответствует освещению бесконечно удаленного экрана.

При этом, если колебания в точках плоскости, перпендикулярной к направлению параллельного пучка, имеют одну и ту же фазу, то и в точке фокальной плоскости они складываются; если же фазы в различных точках неодинаковы, то и в фокальной плоскости происходит интерференция лучей.

Для наблюдения дифракции Фраунгофера необходимо иметь: 1) коллиматор, как источник параллельных лучей, 2) отверстие, ограничивающее пучок и производящее поэтому дифракцию лучей, и 3) зрительную трубу, установленную на бесконечность, в которой можно наблюдать изображение щели коллиматора.

На рис. 134 представлено отверстие (щель), производящее дифракцию, и пучок лучей, которые собираются объективом трубы в точке  $B$ . В плоскости  $A'A'$ , перпендикулярной к пучку, фазы одинаковы, если все лучи при-

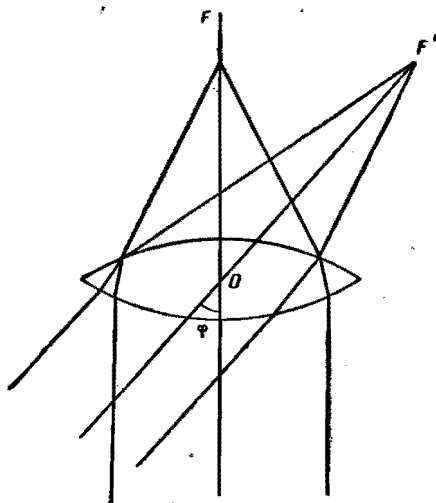


Рис. 133.

надлежат одной волне; если же различные лучи являются лучами вторичных волн от разных точек отверстия, то фаза колебаний вдоль плоскости  $A''A'$  медленно изменяется. В точке  $B$  мы получим тогда сложение колебаний различной фазы.

Допустим, что волна падает на отверстие нормально, так что во всех его точках фаза колебаний одна и та же. Рассмотрим параллельный пучок лучей, выходящий из щели под углом  $\varphi$  и собираемый зрительной трубой в точке  $B'$ . Между лучами, исходящими от краев щели  $A''$  и  $A'$  при приходе в точку  $B'$ , будет существовать разность фаз, определяемая разностью их хода. Последнюю мы получим, опустив перпендикуляр  $A'A$ :

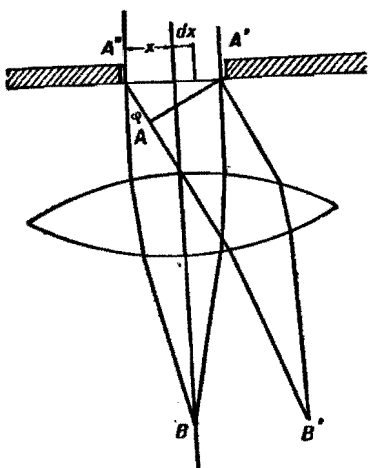


Рис. 134.

разность хода равна  $A''A$ , а разность фаз  $\frac{2\pi}{\lambda} A''A$ .

С другой стороны  $A''A = a \sin \varphi$ , где  $a$  — ширина щели  $A''A'$ . Следовательно разность фаз в точках  $A$  и  $A''$  равна  $\frac{2\pi}{\lambda} a \sin \varphi$ . Положим, что эта разность фаз равна  $2\pi$ ; тогда все сечение пучка можно разделить на два равных пучка с противоположными фазами, и в точке  $B'$  при их сложении должно наступить полное уничтожение колебаний. Этот первый дифракционный минимум получается для угла дифракции  $\varphi$ , определяемого условием

$$\frac{2\pi a}{\lambda} \sin \varphi = 2\pi \quad \text{или} \quad \sin \varphi = \frac{\lambda}{a}. \quad (138)$$

Угол  $\varphi$  определяет расстояние точки  $B'$  от главного фокуса  $B$ . Если это расстояние обозначим через  $y$ , то, как мы видели,

$$y = f \operatorname{tg} \varphi, \quad (139)$$

где  $f$  — главное фокусное расстояние зрительной трубы.

Из уравнения (138) видно, что  $\varphi$  представляет собой очень малый угол, если, как это обычно бывает, ширина щели значительно больше длины волны. А для малых углов мы можем заменить тангенс синусом и получим приближенное равенство

$$y = f \sin \varphi = f \frac{\lambda}{a}. \quad (139')$$

Для вычисления амплитуды в любой точке  $B$  мы, разбив отверстие щели на ряд элементарных полос шириной  $dx$ , найдем результат сложения колебания в точке  $B$ . Если элементарная волна, приходящая из точки  $A'$ , создает колебания, пропорциональные  $dx \cos \omega t$ , то элементарное колебание, приходящее из таких же полос  $dx$  на расстоянии  $x$  от  $A'$ , пропорционально

$$dx \cos(\omega t - kx \sin \varphi),$$

где  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  — волновой множитель. Таким образом сложение колебаний в точке  $B$  дает результат, выражаемый интегралом

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \cdot \cos(\omega t - kx \sin \varphi) dx = \cos \omega t \cdot \frac{2 \sin\left(\frac{ka}{2} \sin \varphi\right)}{k \sin \varphi}. \quad (140)$$

Если мы обозначим  $\frac{ka}{2} \sin \varphi = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi = \alpha$ , то правая часть выражения (140) представится в следующем виде:

$$a \cos \omega t \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (140')$$

В главном фокусе  $B$ , где собираются лучи не отклоненные, мы имеем максимум освещения. В этой точке  $\alpha = 0$ , и так как  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ , то амплитуда колебания равна  $a$ . Множитель  $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$  имеет максимум, равный единице при  $x = 0$  (нулевой максимум) и ряд максимумов и минимумов, как показывает рис. 135.

При значениях  $\alpha$  кратных  $\pi$  этот множитель обращается в нуль, а вместе с ним уничтожается и амплитуда колебаний. Что касается максимальных значений амплитуд, то они убывают при возрастании порядка максимума, а именно ближайший максимум, или максимум 1-го порядка, составляет всего  $\frac{2}{3\pi}$  нулевого, следующий  $\frac{2}{5\pi}$  и т. д.

В фокальной плоскости объектива рядом с центральным изображением щели мы будем наблюдать ряд светлых полос, яркость которых, пропорциональная квадрату амплитуды, убывает пропорционально

$$1 : \frac{4}{9\pi^2} : \frac{4}{25\pi^2} : \dots = 1 : 0,045 : 0,016.$$

Эти полосы отделены темными промежутками и находятся на равных расстояниях, соответствующих изменению угла  $\alpha$  на  $\pi$ , и, следовательно, изменению  $\sin \varphi$  на  $\frac{\lambda}{a}$ , так как, согласно определению  $\alpha$ .

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{\pi a} \alpha.$$

Расстояние между дифракционными максимумами, таким образом, зависит от длины волны, и поэтому только в однородных лучах можно наблюдать рас-

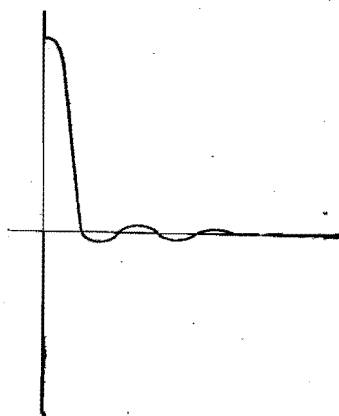


Рис. 135.



пределение амплитуды колебаний, изображенное на рис. 135, или распределение силы света, представленное на рис. 136.

Если освещение щели производится одновременно волнами различной длины, то только центральные максимумы совпадают для всех длин волн. Следующие светлые полосы расходятся тем больше, чем выше порядок соответствующего им максимума.

Распределение максимумов света, создаваемых различными длинами волн, будем называть дифракционным спектром. Изменение угла дифракции  $d\varphi$ , соответствующее изменению длины волны  $d\lambda$ , можно рассматривать как меру дисперсии лучей в спектре. Если  $k$ -тый максимум соответствует

согласно (140') значению  $\alpha \cong \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ ,<sup>1</sup> то

соответственный угол дифракции определится из равенства  $\sin \varphi_k \cong \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{a}$ ; поэтому дисперсия для дифракционного максимума  $k$ -того порядка равна

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{a \cos \varphi_k}. \quad (141)$$

Таким образом дисперсия зависит от порядка максимума, или, как мы будем говорить, от порядка спектра, а, кроме того, от ширины щели  $a$ . Чем уже щель, тем больше дисперсия,

а также и расстояния между спектрами различных порядков, так как при переходе от спектра одного порядка к спектру следующего, более высокого, угол  $\alpha$  изменяется на  $\pi$ , а  $\sin \varphi$  на  $\frac{\lambda}{a}$ .

Дифракционный спектр от одной щели состоит, как мы видим, из ряда широких полос, которые в сложном свете налагаются друг на друга, причем минимумы перекрываются отчасти максимумами другой длины волны. Вследствие этого в белом свете мы будем наблюдать чередование цветных полос, а совершенно темных полос либо совсем не будет, либо они будут очень размытыми и узкими.

## § 68. Дифракционные решетки и спектры.

Дифракционные спектры, создаваемые дифракцией одной щели, представляют даже в случае однородного света ряд широких светлых полос, отделенных узкими минимумами. Однако можно получить спектр с узкими максимумами, если воспользоваться рядом одинаковых щелей с равными промежутками  $b$ , т. е. дифракционной решеткой.

<sup>1</sup> Точные значения угла  $\alpha$ , соответствующие максимумам, находятся из уравнения  $\operatorname{tg} \alpha - \alpha = 0$ .

Такие диффракционные решетки были впервые применены Фраунгофером для определения длины волны главных линий солнечного спектра. Они представляли собой или ряд параллельных проволок, натянутых между двумя параллельными винтами с очень малым шагом, или ряд линий, нанесенных на стеклянной пластинке алмазом. Позднее такие пластинки, изготовленные Нобертом (в середине прошлого столетия), сделались основным прибором при изучении спектров. Промежутки между непрозрачными царапинами, нанесенными алмазом, образуют те отверстия или щели, через которые свободно проходят лучи света. Расстояние между линиями решетки, равное  $a + b$ , сумме толщины щели  $a$  и расстояния между ними  $b$ , называется постоянной решетки. Постоянная решетки может измеряться, конечно, и числом  $N_1$  линий на единицу длины решетки (в одном сантиметре, дюйме и т. п.):

$$a + b = \frac{1}{N_1}.$$

Рассмотрим результат сложения ряда параллельных пучков вторичных лучей, соответствующих углу диффракции  $\varphi$ .

Как и в случае одной щели, нужно иметь в виду, что колебания от всех точек плоскости  $A_0A'$ , перпендикулярной к направлению лучей, одновременно достигнут некоторой точки в фокальной плоскости объектива. Результат их сложения зависит от разности фаз не только разных лучей одного пучка, но также и от разности фаз в различных пучках.

Разберем, как в предыдущем параграфе, случай нормального падения волны на плоскость решетки (рис. 137); к случаю же наклонного падения волны мы вернемся ниже. Во всех точках плоскости  $A_0A'$  фаза колебания одна и та же; в точках плоскости  $A_0A$  она изменяется в пределах одного пучка согласно форм. (140) на величину  $ka \sin \varphi$ , а в соседних пучках различается на величину

$$k(a + b) \sin \varphi. \quad (142)$$

Положим, что амплитуда колебания, создаваемого в фокусе трубы одним пучком, идущим под углом  $\varphi$ , равна  $A_\varphi$ . Если мы выберем угол  $\varphi = \varphi_0$  так, чтобы разность хода между соседними пучками  $(a + b) \sin \varphi_0$  равнялась целому числу длин волн, то они будут складываться с одинаковыми фазами и создадут амплитуду  $A_0 = NA_{\varphi_0}$  и, следовательно, интенсивность, пропорциональную  $N^2 A_{\varphi_0}^2$ . Действительно, во всех пучках мы можем рассматривать соответственные лучи, напр., лучи, проходящие у правого края щели, посередине щели, у левого ее края и т. д. Между всеми соответственными лучами существует под данным углом  $\varphi_0$  разность фаз, равная целому числу длин волн. В фокусе трубы все соответственные лучи сложатся с одинаковыми амплитудами и увеличат свою амплитуду в  $N$  раз. Если теперь сложить лучи, прохо-

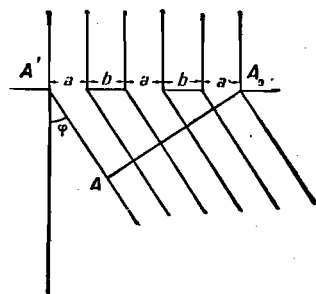


Рис. 137.

дящие через различные участки щели, то они дадут тот же результат, что и каждая щель в отдельности ( $A_{\varphi_0}$ ), но только увеличенный в  $N$  раз, т. е.  $NA_{\varphi_0}$ .

Если условие  $(a + b) \sin \varphi = k\lambda$  не удовлетворено, напр. разность хода двух соседних лучей на  $0,01\lambda$  отличается от целого числа длин волн, то через пятьдесят пучков разность достигнет  $50 \cdot 0,01 = \frac{\lambda}{2}$ , и следовательно 51-й, 151-й, 251-й и т. д. пучки будут приходить в фокус, отвечающий углу  $\varphi$ , с фазами, противоположными первому, а 100-й, 200-й, 300-й и т. д. — одинаковыми. В результате сложения мы получим либо полное взаимное уничтожение отдельных пучков, либо взаимное уничтожение большей их части, и только небольшой остаток даст некоторую амплитуду, небольшую по сравнению с амплитудой при угле  $\varphi_0$ .

Итак, условие

$$(a + b) \sin \varphi = k\lambda \quad (142')$$

определяет те направления, в которых мы можем ожидать появления ярких пучков света. Мы видим, что чем больше длина волны  $\lambda$ , тем больше и угол  $\varphi$ , под которым мы наблюдаем ее в данной диффракционной решетке, в противоположность призме, где при нормальной дисперсии угол отклонения тем больше, чем меньше  $\lambda$ .

Связь между  $\lambda$  и  $\varphi$  выражается простым геометрическим соотношением и не зависит от индивидуальных свойств вещества. Наконец, из той же формулы (142') мы видим, что диффракционная решетка дает целый ряд спектров, из которых спектр, соответствующий  $k=0$  и, следовательно,  $\varphi=0$ , называется нулевыми, при  $k=1$  — спектром первого порядка;  $k=2$  — второго порядка и т. д. Отдельные части спектра могут перекрываться, когда

$$(a + b) \sin \varphi = k_1 \lambda_1 = k_2 \lambda_2.$$

Эти соображения определяют положение главных максимумов и характер спектра диффракционных решеток. Для того чтобы определить распределение света вне и в особенности вблизи главных максимумов нулевого, первого, второго и т. д. порядков, нужно определить амплитуду под любым углом  $\varphi_1$ , не отвечающим условию (142').

Колебания, создаваемые первым пучком, мы представим согласно (140'), формулой  $a \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos \omega t$ . Колебания же, создаваемые следующими пучками, будут иметь фазы, отличные от  $\omega t$ , а именно:

$$\left( \omega t - k(a + b) \sin \varphi \right); \quad \left( \omega t - 2k(a + b) \sin \varphi \right);$$

и следовательно для получения амплитуды от всей решетки мы должны вычислить сумму

$$a \frac{\sin \alpha}{\alpha} \sum_{n=0}^{n=N} \cos \left( \omega t - nk(a + b) \sin \varphi \right), \quad (143)$$

где  $N$  — число щелей решетки.

Фазы колебаний отдельных пучков изменяются в пределах от  $\omega t$  до  $\omega t - Nk(a+b) \sin \varphi$ ; поэтому фаза колебания, получаемая от их сложения, имеет среднюю величину  $\omega t - \frac{1}{2} Nk(a+b) \sin \varphi$ . Что же касается амплитуды, то она равна амплитуде, создаваемой отдельными пучками, но умноженной на

$$\frac{\sin \left( \frac{1}{2} Nk(a+b) \sin \varphi \right)}{\sin \left( \frac{1}{2} k(a+b) \sin \varphi \right)}. \quad (144)$$

Этот множитель является отличительной особенностью решетки, состоящей из  $N$  параллельных щелей. При возрастании угла дифракции он изменяется таким же образом, как и рассмотренный выше множитель  $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ , и имеет ряд максимумов и минимумов при возрастании угла  $\varphi$ . По сравнению с множителем  $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$  он имеет следующую особенность: его знаменатель обращается в нуль

<sup>1</sup> Доказательство формулы:

Сумму косинусов можно рассматривать как действительную часть суммы, члены которой образуют геометрическую прогрессию, пользуясь тем, что

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x, \quad \text{где } j = \sqrt{-1}.$$

Поэтому вычисление суммы косинусов сводится к вычислению суммы

$$a \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \sum_{n=0}^{n=N-1} e^{j\omega t} e^{-jn k(a+b) \sin \varphi}.$$

Мы имеем здесь геометрическую прогрессию из  $N$  членов, и ее сумма равна

$$a \frac{\sin \alpha}{\alpha} e^{j\omega t} \cdot \frac{1 - e^{-jNk(a+b) \sin \varphi}}{1 - e^{-jk(a+b) \sin \varphi}}.$$

Эту формулу легко преобразовать, придав ей следующий вид:

$$a \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{e^{j\frac{N\beta}{2}} - e^{-j\frac{N\beta}{2}}}{e^{j\frac{\beta}{2}} - e^{-j\frac{\beta}{2}}} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{N\beta}{2}\right)},$$

если мы для краткости обозначим

$$\frac{k(a+b)}{2} \sin \varphi = \beta.$$

Действительная часть этого выражения пропорциональна  $\cos \left( \omega t - \frac{N\beta}{2} \right)$ , где  $\frac{N\beta}{2}$  — средняя фаза колебаний, складывающихся в рассматриваемой точке, а амплитуда содержит теперь еще один диффракционный множитель

$$\frac{e^{jN\beta} - e^{-jN\beta}}{e^{j\beta} - e^{-j\beta}} = \frac{\sin N\beta}{\sin \beta}.$$

не только для угла диффракции  $\varphi = 0$ , но и для всех углов, которые удовлетворяют условию

$$\frac{\pi}{\lambda}(a + b) \sin \varphi = p\pi, \quad (145)$$

где  $p$  — целое число.

Для таких значений угла  $\varphi$  исчезает и числитель (144). Однако предел, к которому приближается (144), когда оно приобретает неопределенную форму  $\frac{0}{0}$ , равен просто  $N$ .

Эти значения будем называть главными максимумами диффракции, их положение совпадает с условием (142'). Между ними помещаются вторичные максимумы, отделенные минимумами, в которых значения выражения (144)

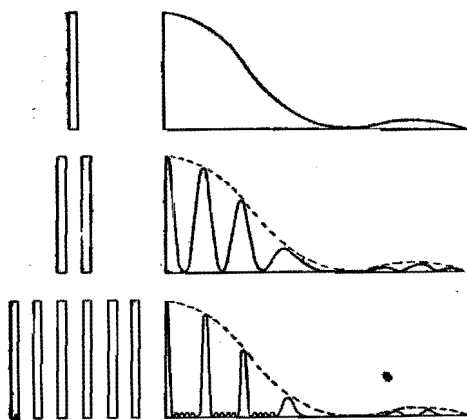


Рис. 138.

обращаются в нуль. Расстояния между этими нулевыми значениями, а также между соседними вторичными максимумами тем меньше, чем больше число всех щелей в решетке. На рис. 138 представлено распределение максимумов в случае 1, 2 и 6 щелей, причем ординатами служат квадраты диффракционного множителя, т. е. интенсивности света в данной точке. Мы видим, что величина максимумов спадает тем быстрее, чем больше число  $N$  линий диффракционной решетки. Хотя отношение величины первого главного максимума к величине следующего за ним главного максимума остается почти неизменным, но расстояние между вторичными максимумами уменьшается обратно пропорционально числу линий  $N$ . При большом числе линий решетки происходит очень быстрое спадание силы света, при углах диффракции, сколько-нибудь отличающихся от главных углов, определяемых уравнением (145).

Каждому углу диффракции  $\varphi$  соответствует в фокальной плоскости объектива определенная точка, находящаяся на расстоянии  $y$  от главного фокуса, причем, как мы видели (139), приближенно  $y = f \operatorname{tg} \varphi$ .

Поэтому, вместо того чтобы говорить об угле диффракции, можно говорить о положении диффракционного изображения источника света (т. е. светящейся точки или линии), определяемом расстоянием  $y$ . Распределение света, соответствующее различным углам диффракции, может представляться в диффракционном спектре квадратом амплитуды

$$\frac{\sin^2 \alpha \sin^2 N\beta}{\alpha^2 \sin^2 \beta},$$

если

$$\alpha = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi$$

и

$$\beta = \frac{\pi(a+b)}{\lambda} \sin \varphi,$$

причем

$$\sin \varphi = \frac{y}{f}.$$

Это распределение зависит, как видно, от двух диффракционных множителей. Первый из них представляет собою распределение интенсивности при диффракции от одной щели; он определяется шириной щели  $a$  и дает ряд широких максимумов, отделенных минимумами, в которых величина его обращается в нуль. В виду этого, независимо от значения второго диффракционного множителя, сила света равна нулю в тех точках, где

$$\frac{a}{\lambda} \sin \varphi = q, \quad (146)$$

а  $q$  равно целому числу, т. е. там, где каждая щель в отдельности дает отсутствие света. На это распределение максимумов и минимумов накладывается то, которое зависит от второго множителя, представляющего сложение света отдельных щелей между собою. Этот множитель зависит от величины  $\beta$ , определяемой постоянной решетки

$$a + b = \frac{1}{N_1},$$

где  $N_1$  — число линий на единицу длины, а также от общего числа всех линий решетки

$$N = N_1 d,$$

где  $d$  — ширина решетки. Постоянная решетки, согласно форм. (145), определяет положение главных максимумов, расстояние между ними, а также изменение положения максимума при изменении длины волны, т. е. дисперсию решетки. Различные главные максимумы представляют собой спектры решетки различных порядков, причем каждой длине волны соответствует особая линия спектра. Спектры разных порядков находятся между собою на расстояниях, которые можно считать равными, если углы диффракции настолько малы, что синусы можно считать пропорциональными углам; но расстояния между отдельными спектральными линиями растут вместе с порядком спектра. Поэтому и длина спектров различных порядков различна, а для данного порядка тем больше, чем меньше постоянная решетки  $a + b$  и чем выше порядок спектра  $p$ .

Общее число линий решетки, или, при заданной величине постоянной решетки, размеры последней, оказывают иное влияние, а именно определяют ширину спектральных линий. Эту ширину при вполне определенной длине волны, т. е. при полной монохроматичности световых колебаний, мы будем определять как расстояние между главным максимумом и ближайшим вторичным минимумом. Следующие вторичные максимумы значительно слабее главного (первый вторичный максимум составляет меньше 5% главного), и их можно не принимать в расчет. Поэтому спадание силы света около главного максимума  $p$ -того порядка зависит от расстояния между этим максимумом, определяемым из условия

$$N \frac{a+b}{\lambda} \sin \varphi_1 = Np, \quad (147)$$

и первым минимумом, определяемым условием:

$$N \frac{a+b}{\lambda} \sin \varphi_2 = Np + 1, \quad (148)$$

когда числитель второго диффракционного множителя обращается в нуль. Так как разность  $\varphi_2 - \varphi_1$  очень мала, мы находим из форм. (147) и (148) приближенное равенство:

$$N \frac{a+b}{\lambda} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) = N \frac{a+b}{\lambda} \cos \varphi_1 \cdot (\varphi_2 - \varphi_1) = 1$$

или

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\lambda}{N(a+b) \cos \varphi_1}. \quad (149)$$

Таким образом ширина спектральной линии, пропорциональная  $\varphi_2 - \varphi_1$ , обратно пропорциональна числу  $N$  линий решетки и ее ширине:

$$N(a+b) = d.$$

Чем больше ширина решетки, тем тоньше диффракционные максимумы и тем определеннее положения спектральных линий, соответствующих данным длинам волн.

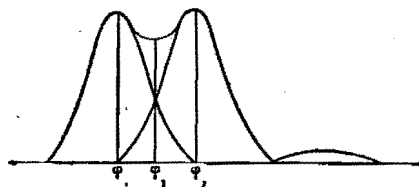


Рис. 139.

Этим обстоятельством определяется и разрешающая сила решетки, т. е. способность ее разделять близкие спектральные линии. Две соседние линии можно разделить только в том случае, если их максимумы, накладываясь отчасти друг на друга, не сливаются в один более

широкий. Положим, что максимум одной линии приходится как раз на место минимума другой, и пусть длины их волн соответственно равны  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , а углы дифракции, соответствующие этим линиям,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Согласно (147) мы будем иметь

$$\frac{a+b}{\lambda_1} \sin \varphi_1 = p = \frac{a+b}{\lambda_2} \sin \varphi_2. \quad (150)$$

Пусть угол  $\varphi_1$  меньше угла  $\varphi_2$ . Если минимум первой линии приходится на максимум второй, т. е. соответствует углу  $\varphi_2$ , то согласно условию (149)

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\lambda_1}{N(a+b) \cos \varphi_1}. \quad (151)$$

Кроме того, из условия (145) мы найдем

$$p(\lambda_2 - \lambda_1) = (a+b)(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1). \quad (152)$$

Пользуясь формулой

$$\frac{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \cong \cos \varphi_1$$

и исключая из равенств (151) и (152)

$$(\varphi_2 - \varphi_1) \cos \varphi_1,$$

найдем, что разность длин волн

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{\lambda_1}{pN}. \quad (153)$$

Отношение

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = pN$$

и есть та величина, которая характеризует разрешающую силу диффракционной решетки, так как можно показать, что при этой разности длин волн спектральные линии не сливаются. Для того чтобы убедиться в этом, вычислим, какова сила света в той точке спектра, которая лежит как раз между максимумами, соответствующими углам  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Этой точке отвечает угол, обозначенный на рис. 139  $\varphi_3$  и определяемый согласно (147) и (148) уравнением

$$N \frac{a+b}{\lambda} \sin \varphi_3 = Np + \frac{1}{2} \quad (154)$$

или

$$\frac{a+b}{\lambda} \sin \varphi_3 = p + \frac{1}{2N}. \quad (154')$$

Сила света в этой точке определяется величиной второго диффракционного множителя для угла  $\varphi_3$ , а именно в виду (154)

$$\frac{\sin^2 \left( \pi N \frac{a+b}{\lambda} \sin \varphi_3 \right)}{\sin^2 \left( \pi \frac{a+b}{\lambda} \sin \varphi_3 \right)} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2N}} \cong \frac{4N^2}{\pi^2},$$

так как угол  $\frac{\pi}{2N}$  очень мал при большом числе  $N$  линий решетки. Таким образом сила света между максимумом, где она равна  $N^2$ , и минимумом, где



она нуль, равна  $\frac{4}{\pi^2} = 0,4$ . Если максимумы обеих линий  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  одинаковы, то сила света между ними, очевидно, равна  $\frac{8}{\pi^2} = 0,8$ , т. е. составляет 80% максимальной силы света. Этот минимум силы света, показанный на рис. 139, позволяет еще разделить положение спектральных линий; он исчезает, если расстояние между линиями несколько уменьшить.

Таким образом разность длин волн, определяемых уравнением (153), находится на границе разрешающей способности решетки, и величина разрешающей силы

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = pN \quad (155)$$

измеряется произведением порядка спектра и общего числа линий решетки. В виду этого, для разделения очень близких линий необходимо иметь решетку с большим числом линий и выгодно производить наблюдения в спектре возможно высокого порядка.

Если распределение силы света около главных максимумов определяется вторым множителем, то от первого дифракционного множителя зависит сила света в различных максимумах, т. е. в спектрах различного порядка. Мы видели, что сила света, определяемая этим множителем, убывает по мере увеличения угла дифракции и для некоторых углов равна нулю. Поэтому сила света, вообще говоря, убывает при возрастании порядка спектра и для некоторых порядков может оказаться равной нулю.

Рассмотрим еще, какое влияние оказывает наклон лучей, освещающих решетку. Пусть  $\psi$  — угол, составляемый этими лучами с нормалью к плоскости решетки, а  $\varphi$  — угол дифракции (рис. 140). Разность ходов лучей отклоненного лучка в точках  $A_0$  и  $A$  равна

$$A_0A (\sin \varphi + \sin \psi),$$

и следовательно наклон лучей эквивалентен увеличению угла дифракции.

## § 69. Металлические решетки.

Наиболее совершенные решетки изготавливаются не из стекла, а из металла, который мягче стекла, не так портит алмазное острие и позволяет наносить более правильные линии. Большого совершенства в этом отношении достиг Роулэнд, применявший для нанесения штрихов делительную машину с очень совершенным винтом, позволяющим сохранять расстояние между линиями неизменным на всем протяжении решетки. Это условие имеет большое значение, так как всякие неправильности в решетке, особенно те, которые перио-

дически повторяются, могут вызвать появление новых диффракционных спектров, так называемых „духов“ (ghosts) и создать иллюзию таких новых линий в спектре, которых в действительности не существует.

Металлическая решетка может служить, конечно, лишь как отражательная решетка. Участки зеркала между двумя штрихами отражают свет, падающий под углом  $\varphi$  на решетку  $A_0A_0'$  (рис. 141). Положим, что решетка плоская и волны, падающие на нее, тоже плоские. Представим себе пучки параллельных лучей, составляющие с нормалью к решетке угол  $\psi$ , не равный углу падения  $\varphi$ . Эти лучи мы строим, рассматривая распространение вторичных волн в этом направлении. В плоскости  $A_0A$ , перпендикулярной к лучам, фаза колебаний, конечно, изменяется от точки к точке. Когда эти пучки собираются в фокальной плоскости объектива, то результат их интерференции зависит от разности фаз между крайними пучками и между крайними лучами в каждом пучке. Только в случае правильного отражения, т. е. при  $\psi = \varphi$ , фазы во всех точках плоскости  $A_0A$ , перпендикулярной к правильно отраженным пучкам, одинаковы. В этом направлении получается центральный максимум, или максимум нулевого порядка, для всех длин волн.

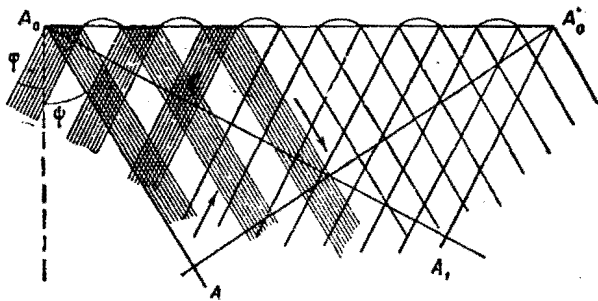


Рис. 141.

Из рис. 141 видно, что разность хода лучей, отраженных от решетки, в точках  $A_0$  и  $A_0'$  под углом  $\psi$ , мы получили, опустив перпендикуляр  $A_0'A$  на направление лучей. Разность хода лучей после отражения от зеркала равна  $A_0A_1 = A_0A_0' \sin \psi$ . Но в момент отражения от  $A_0'$  лучи запаздывают по сравнению с лучами, отраженными в точке  $A_0$  на расстояние  $A_0A = A_0A_0' \sin \varphi$ . Таким образом разность хода двух рассматриваемых лучей:

$$A_0A_1 - A_0A = A_0A_0' (\sin \varphi - \sin \psi),$$

а соответствующая этим крайним лучам разность фаз:

$$\frac{2\pi A_0A_0'}{\lambda} (\sin \varphi - \sin \psi). \quad (156)$$

Мы видим, что в случае равенства углов  $\varphi$  и  $\psi$  разность фаз равна нулю и что при нормальном падении лучей на решетку, т. е. при  $\varphi = 0$ , разность фаз зависит от угла диффракции.

Развитая выше теория диффракционных спектров применима, конечно, и к случаю отражающей решетки.

Металлическая решетка представляет преимущества перед прозрачной между прочим в том отношении, что, придав поверхности зеркала форму сферической или цилиндрической поверхности большого радиуса, можно получать резкие



стояние между отдельными спектральными линиями, или дисперсия, возрастает также с радиусом. В спектре 2-го порядка при 560 линиях на миллиметр и радиусе 7 м расстояние между линиями натрия  $D_1$  и  $D_2$  равно 5 мм.

### § 70. Ступенчатые решетки (эшелоны).

Рассмотрим еще решетки, в которых отражающие элементы не лежат в одной плоскости (рис. 143). Такие решетки, имеющие ступенчатую поверхность, могут давать спектры высоких порядков с большой силой света.

Для этого необходимо, чтобы лучи, образующие диффракционный спектр, отражались от каждого элемента решетки под углом, равным углу падения, как показано на рис. 143. Каждый из пучков, на которые распадается отраженный луч, состоит из лучей, находящихся между собой в фазе, и только различные пучки имеют разную фазу (в зависимости от разности хода).

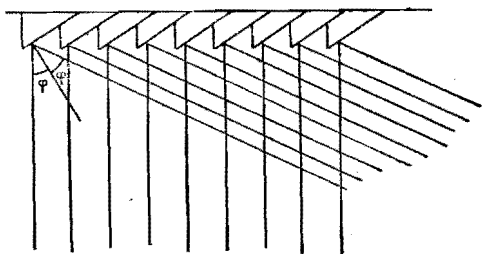


Рис. 143.

При нормальном падении лучей на поверхность ступенчатой решетки отраженные от соседних ступенек пучки имеют разность хода  $2b$ , если  $b$  расстояние между ступеньками. Если лучи падают наклонно под углом  $\varphi$  (рис. 143), отраженные под тем же углом соседние пучки лучей имеют разность хода  $\frac{2b}{\cos \varphi}$ . Если эта разность хода равна целому числу  $p$  длин волн, то, собирая отраженные лучи в фокальной плоскости объектива, получаем там максимум  $p$ -го порядка.

Таким образом, ступенчатая решетка дает при правильном отражении сразу спектр высокого порядка, который даже при не очень большом числе ступеней обладает, согласно форм. (153), большой разрешающей силой. Этот спектр, полученный в результате правильного отражения от каждой ступеньки, является наиболее ярким; в спектрах же соседних порядков сила света будет значительно слабее. Если  $N$  — число ступеней решетки, то, складывая колебания, вызываемые отдельными пучками, как и в случае обычной диффракционной решетки, приходим к вычислению суммы  $N$  колебаний

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cos(\omega t - 2nkb), \text{ если } k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Амплитуду сложного колебания можно в таком случае представить в виде диффракционного множителя

$$\frac{\sin Nkb}{\sin kb} = \frac{\sin \left( \pi \frac{2Nb}{\lambda} \right)}{\sin \left( \pi \frac{2b}{\lambda} \right)}. \quad (157)$$

Если длина волны  $\lambda$  такова, что  $\frac{2b}{\lambda} = p$ , то отраженные лучи дают спектр  $p$ -го порядка при нормальном падении и отражении лучей. Для других длин волн тот же спектр получится при других углах падения  $\varphi$  лучей на решетку, когда имеет место условие  $\frac{2b}{\lambda \cos \varphi} = p$ .

Особый тип ступенчатой решетки, названной эшеленом, изобретен был Майкельсоном. Эшелон состоит из ряда плоско-параллельных стеклянных пластин равной толщины, образующих стопу со ступенчатым краем, как показано на рис. 144. Пучки лу-

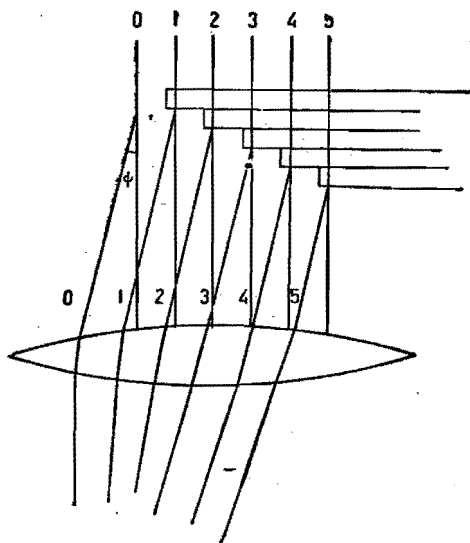


Рис. 144.

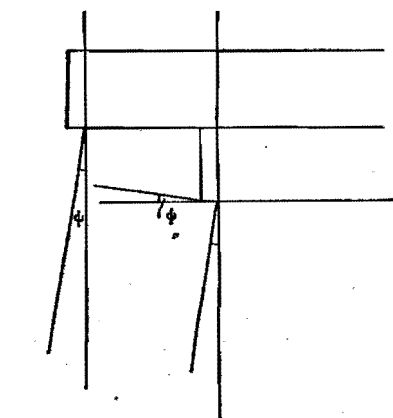


Рис. 145.

чей, прошедшие разное число пластин, обозначим цифрами 0, 1, 2, 3... Так как скорость волны в стекле меньше, чем в воздухе, то соседние пучки имеют тем большую разность хода, чем больше толщина  $b$  пластин и показатель преломления  $n$  стекла. Если  $\lambda$  — длина волны в воздухе и  $\lambda/n$  — длина волны в стекле, то между лучами 0, прошедшими только через слой воздуха, и лучем, прошедшим слой стекла в  $b$  см, устанавливается оптическая разность хода

$$\frac{b(n-1)}{\lambda} = p. \quad (158)$$

Точно такая же разность хода будет и между всеми соседними пучками. Если  $p$  целое число, то лучи, прошедшие через эшелон, собираются в главном фокусе объектива и дают спектр  $p$ -го порядка для данной длины волны.

При малых углах дифракции разность хода соседних пучков изменяется на величину  $a\psi$ , где  $a$  — длина ступеньки. Как видно из рис. 145, это изменение определяется перемещением конца плоскости, перпендикулярной к лучам при вращении их на угол  $\psi$ . Таким образом оптическая разность хода лучей

соседних пучков равна  $\frac{b(n-1) - a\psi}{\lambda}$  и амплитуда колебаний в точке спектра, соответствующей углу диффракции  $\psi$ , равна

$$\frac{\sin\left(\pi N \frac{b(n-1) - a\psi}{\lambda}\right)}{\sin\left(\pi b \frac{(n-1) - a\psi}{\lambda}\right)} = \frac{\sin\left(\pi N p - \pi \frac{Na\psi}{\lambda}\right)}{\sin\left(\pi p - \pi \frac{a\psi}{\lambda}\right)} = \frac{\sin \pi \frac{Na\psi}{\lambda}}{\sin \frac{\pi a\psi}{\lambda}}, \quad (159)$$

если для данной волны соблюдено условие (158), где  $p$  — целое число.

Первый минимум соответствует тому углу диффракции, при котором числитель (159) обращается в нуль и следовательно:

$$\frac{Na\psi_1}{\lambda} = 1. \quad (160)$$

Этим условием определяется ширина спектральной линии, пропорциональная  $\psi_1 = \frac{\lambda}{Na}$ . Для другой длины волны  $\lambda_1$  спектральный максимум будет иметь место при угле диффракции  $\psi'$ , если

$$\frac{b(n_1 - 1) + a\psi'}{\lambda_1} = p,$$

где  $n_1$  — показатель преломления для волны  $\lambda_1$ , откуда вместе с уравнением (158) находим

$$b(n_1 - n) + a\psi' = p(\lambda_1 - \lambda). \quad (161)$$

Разрешающую силу ступенчатой решетки определим опять по разности длин волн, для которых диффракционные максимумы налагаются на минимумы соседней волны, или угол  $\psi'$ , определяющий положение максимума  $\lambda_1$ , равен углу  $\psi$ , соответствующему минимуму  $\lambda$ . Из уравнений (160) и (161) мы находим в этом случае:

$$\frac{\lambda}{\lambda_1 - \lambda} = Np - bN \frac{n_1 - n}{\lambda_1 - \lambda}.$$

Эта формула показывает, что если можно пренебречь изменением показателя преломления с длиной волны (это упрощение вносит незначительную ошибку), разрешающая сила решетки  $\frac{\lambda}{\lambda_1 - \lambda}$  зависит от оптической разности хода крайних пучков решетки и возрастает пропорционально числу ступеней и порядку  $p$  спектральной линии. При толщине пластин в 1 см, показателе преломления 1,56 и длине волны  $\lambda = 0,56 \mu = 0,56 \cdot 10^{-4}$  см, мы находим, что порядок спектра  $p = 10^4$ , и разрешающая сила при 30 пластинах равна  $3 \cdot 10^5$ . Для получения такой же разрешающей силы диффракционной решетки с числом линий 500 на 1 мм, в спектре второго порядка нужно, чтобы ширина ее составляла 30 см, или чтобы число линий, нанесенных на ее поверхности, было не менее 150 000.

Ступенчатая решетка имеет большие преимущества при изучении узкого участка спектра вблизи определенной спектральной линии. Но ее нельзя применять для больших участков спектра, так как спектры соседних порядков весьма близки друг к другу и перекрывали бы друг друга.

Понятие о разрешающей силе оптических приборов имеет значение не только в теории диффракционных решеток. Если ширина спектральных линий в диффракционных спектрах (которые суть не что иное, как диффракционные изображения освещенной щели коллиматора) зависит от общих размеров решетки, т. е. от ширины пучка лучей, отражаемого решеткой или проходящего через нее, то в других оптических системах от размеров объектива зрительной трубы или телескопа, определяющих ширину пучков лучей, которые должны собираться в определенной точке, точно так же зависят размеры изображения светящейся точки, т. е. распределение света около той точки изображения, где должны пересекаться лучи пучка. Точка пересечения лучей определяет только центр диффракционного максимума, вокруг которого происходит более или менее быстрое спадание силы света вплоть до первого минимума, который в виде темного кольца окружает центральный максимум.

Радиус диффракционного изображения точки, подобно ширине спектральной линии, зависит от размеров пучка лучей, собирающихся в центральной точке, т. е. от размеров объектива. Если мы получаем в трубе изображение двух близких точек, то, как и в случае близких спектральных линий, изображения их могут быть разделены лишь при том условии, что центры их диффракционных изображений располагаются не ближе, чем на расстоянии первого минимума от центра.

## § 71. Когерентность лучей света.

Рассматривая интерференцию диффракционных лучей, мы имели дело с такими лучами, источниками которых являются точки волновой поверхности, колеблющиеся все в одной фазе, или же точки поверхности, вдоль которой фаза распределена по известному закону. Интерференция таких лучей приводит к вполне определенной амплитуде колебания, потому что фазы их находятся в некоторой связи между собой. Такие лучи называются когерентными. В отличие от них некогерентные лучи испускаются независимыми источниками, например, различными атомами светящегося тела.

Эти колебания происходят строго периодически лишь в течение короткого времени, после которого в силу столкновения с другой частицей фаза внезапно меняется. Разность фаз двух лучей, испускаемых двумя независимыми источниками света, чрезвычайно часто и совершенно неправильно изменяется.

В силу этой независимости лучи, испускаемые соседними точками, будут иметь произвольную разность фаз и при интерференции будут то усиливаться, то ослабляться, причем этих отдельных изменений, сменяющих друг друга через стомиллионные доли секунды, мы не можем проследить, а замечаем лишь некоторый средний их результат.

Результат сложения некогерентных колебаний при очень большом числе их однако дает вполне определенный средний результат. Для того чтобы получить его, мы должны решить задачу о сложении большого числа колебаний с различными фазами. Полагая для простоты, что амплитуды их одинаковы и равны единице, мы имеем сумму

$$y = \sum_{k=1}^n \cos(\omega t - \varphi_k), \quad (162)$$

состоящую из  $n$  членов, причем каждый член суммы может быть представлен в виде суммы  $\cos \omega t \cos \varphi_k + \sin \omega t \sin \varphi_k$ .

Поэтому всю сумму можно написать в таком виде:

$$y = \cos \omega t \sum_{k=1}^n \cos \varphi_k + \sin \omega t \sum_{k=1}^n \sin \varphi_k \quad (163)$$

Она дает величину колебания с некоторой амплитудой  $A$  и фазой  $\varphi$ , которые можно вычислить, если известны величины сумм в выражении (163):

$$y = A \cos(\omega t - \varphi).$$

Интерес представляет только квадрат амплитуды  $A^2$ , от которого зависит сила света, получаемая при сложении  $n$  независимых колебаний. Из уравнения (163) мы находим, что

$$A^2 = \left( \sum_{k=1}^n \cos \varphi_k \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^n \sin \varphi_k \right)^2$$

или, возводя суммы в квадрат и складывая их:

$$A^2 = n + 2 \sum_{l=k}^n \sum_{k=i}^n \cos(\varphi_k - \varphi_l). \quad (164)$$

В виду произвольности фаз, их разность может принимать какие угодно значения, а косинусы различные значения в пределах от  $-1$  до  $+1$ . В виду этого во второй части (164) сумма косинусов может иметь одинаково часто как положительные, так и отрицательные значения и в среднем равна нулю.

Таким образом независимость колебаний приводит к тому, что сила света, получаемая при сложении  $n$  колебаний, будет равна  $n$ , т. е. сумме сил света, которые создает каждое колебание в отдельности. Поэтому, напр.,  $n$  ламп, поставленных на данном расстоянии, дают освещение в  $n$  раз более сильное, чем одна лампа, и нигде не дают темноты. В случае когерентности колебаний, напр., если бы все  $\varphi_k$ , т. е. их фазы, были одинаковы, квадрат амплитуды сложного колебания был бы равен не  $n$ , а  $n^2$ .

В дальнейшем нам придется знакомиться с явлениями интерференции при сложении колебаний, которые создаются различными лучами, приходящими в данную точку. Вопрос о когерентности лучей в этом случае является основным условием возможности наблюдать их интерференцию.



## § 72. Полосы интерференции.

Когерентность лучей обеспечена, если интерферирующие лучи испускаются такими связанными между собой источниками света, как, напр., светящаяся точка  $O$  и ее изображение  $O_1$  в зеркале (рис. 146). Очевидно, что в этом случае интерферируют различные лучи одного и того же источника, прошедшие разные пути, и поэтому разность фаз пересекающихся лучей вполне определенная величина в каждой точке пространства.

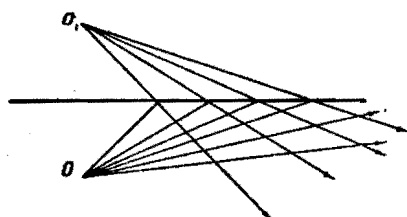


Рис. 146.

Если эта разность равна четному числу  $\pi$ , фазы колебаний одинаковы и амплитуды их складываются; если же она равна нечетному числу  $\pi$ , то происходит вычитание амплитуд, т. е. ослабление света. Таким образом в тех точках, где накладываются прямой и отраженный пучок лучей, мы будем иметь систему светлых и темных полос интерференции.

При двух когерентных источниках лучей распределение света находится очень просто. Мы находим такие поверхности, во всех точках которых разность фаз приходящих колебаний одинакова. Для всех этих точек расстояния их от источников света отличаются на одну и ту же величину, которую мы будем называть разностью хода лучей.

Этому условию удовлетворяют поверхности так называемых двухполых гиперболоидов вращения, если их фокусы совпадают со светящимися точками.

На рис. 147 мы видим ряд гипербол, полученных пересечением поверхностей гиперболоидов плоскостью, проходящей через точки  $O$  и  $O'$ . Так как точки эти являются фокусами гипербол, то по свойству этих кривых разность расстояний  $OB$  и  $O'B$  одна и та же для любой точки  $B$  данной гиперболы. Частным случаем этих кривых можно считать и прямую  $A$ , вдоль которой расположены точки с нулевой разностью хода.

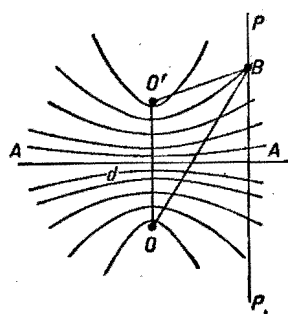


Рис. 147.

Результат сложения колебаний в какой-нибудь точке  $B$  зависит от разности хода  $O'B - OB$ . Если эта разность равна целому числу волн (или нулю), то колебания имеют одинаковые фазы, и вдоль таких гипербол мы имеем светлые полосы, так как колебания взаимно усиливаются. Наоборот, мы должны наблюдать ослабление освещения, если разность хода лучей равна нечетному числу полуволн. Таким образом светлые и темные полосы в пространстве чередуются, и в соседних полосах разность хода лучей отличается на очень малую величину, половину длины световой волны.

Отношение разности хода лучей к длине волны мы будем называть оптической разностью хода. Мы должны отличать эту последнюю от гео-

метрической разности длин лучей, так как часто приходится иметь дело со случаями, в которых длина волны на различных участках луча неодинакова. Такой случай будет иметь место, если часть пути свет проходит в среде с иной скоростью распространения. Чем меньше скорость, тем короче волна, и поэтому оптически равные длины лучей геометрически могут быть очень различны.

Как видно из рис. 147, гиперболы, очень сжатые между точками  $O$  и  $O'$ , расходятся все больше по мере удаления от источников света. Поэтому только на больших расстояниях удобно производить наблюдения над полосами интерференции, вблизи же приходится рассматривать их в лупу. Для того чтобы сделать их видимыми простым глазом, нужно поставить экран на достаточно большом расстоянии от источников  $O$  и  $O'$ . Освещение экрана должно быть достаточно ярким, так как поверхность его рассеивает свет равномерно во все стороны, и мы можем наблюдать интерференционные полосы только благодаря тем немногим лучам, которые попадают в наш глаз от каждой точки экрана. Гораздо выгоднее производить наблюдение без экрана и на близком расстоянии от источников света при помощи лупы, которая собирает в глазу полностью те пучки лучей, которые проходят через точки пространства, находящиеся в поле зрения лупы (рис. 148).

Расстояние между полосами легко вычислить, если плоскость  $PP_1$  (рис. 147), где находятся рассматриваемые полосы, достаточно удалена от светящихся точек. Пусть расстояние между последними  $OO' = d$ , расстояние их до плоскости  $PP_1$  равно  $D$  и расстояние какой-нибудь точки экрана  $B$  от точки  $A$ , в которой разность хода равна нулю, обозначим через  $y$ . Рассматривая рис. 147, найдем, что

$$OB^2 = D^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2,$$

$$O'B^2 = D^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2,$$

а следовательно:

$$OB^2 - O'B^2 = 2yd.$$

Так как расстояние  $d$  и  $y$  всегда очень малы, по сравнению с  $D$ , и поэтому лучи  $OB$  и  $O'B$  составляют с перпендикуляром к плоскости  $PP'$  весьма малые углы, то можно приближенно положить

$$OB + O'B = 2D.$$

Тогда предыдущее равенство даст разность хода лучей в точке  $A$ :

$$O'B - OB = \frac{yd}{D}.$$

Если эта разность равна  $k\lambda$ , где  $k$  — число целое, то в точке  $B$  мы имеем:

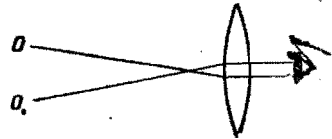


Рис. 148.

светлую полосу  $k$ -того порядка. Расстояние ее от полосы нулевого порядка, т. е. от точки  $A$ , равно в этом случае

$$y_k = k\lambda \frac{D}{d}.$$

Таким образом, чем ближе расположены точки  $O$  и  $O'$  (чем меньше  $d$ ) и чем больше расстояние  $D$ , тем больше расстояние интерференционных полос от центра  $A$ . Очевидно, что следующая светлая полоса отстоит от центра на

$$y_{k+1} - y_k = \lambda \frac{D}{d}$$

дальше, и таким образом все интерференционные полосы, не очень удаленные от центра, отстоят друг от друга на том же расстоянии  $\lambda \frac{D}{d}$  или целом крат-

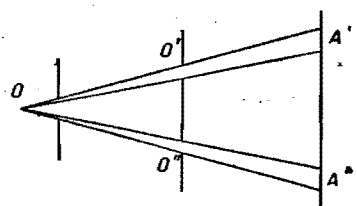


Рис. 149.

ном его. Вследствие малости длин волн эти расстояния очень малы, но все же увеличены по сравнению с длиной волны  $\lambda$  в  $\frac{D}{d}$  раз.

Пользуясь источником света монохроматическим, дающим определенную длину волны  $\lambda$ , мы можем измерить расстояние между интерференционными полосами и найти из последнего уравнения длину волны. Если же освещение

производится неоднородным светом, напр. белым, в котором имеются волны различной длины, то расстояние между полосами для разных волн различно, и вследствие этого световые полосы одной волны будут накладываться на темные полосы некоторых других волн; тогда мы видим окрашенные полосы. В тех точках, где накладываются несколько светлых полос, принадлежащих разным лучам, распределенным по всему спектру белого света, полоса нам может казаться белой, однако, разлагая при помощи спектроскопа пучок лучей, проходящих через данную точку, мы увидим в спектре ряд темных полос, соответствующих тем длинам волн, которые создают в этой точке темные полосы.

Существование полос интерференции доказывает волнообразное распространение света, и поэтому осуществление этого явления в наиболее простой форме исторически имело большое влияние на развитие учения о свете. Английский ученый Юнг пытался получить интерференцию лучей, освещая через узкое отверстие экран, снабженный двумя отверстиями  $O'$  и  $O''$ , расположенными на очень близком расстоянии. В этом опыте (рис. 149) прямые лучи от точки  $O$  не могут пересечься, но, тем не менее, Юнг наблюдал между точками  $A'$  и  $A''$  ряд темных и светлых полос, которые, как мы знаем, должны получиться от интерференции не прямых, но диффракционных лучей от соседних отверстий  $O'$  и  $O''$ . Только Френелю удалось впервые осуществить интерференцию в чистом виде при пересечении прямых лучей. Его прибор, носящий название зеркала Френеля, схематически изображен на рис. 150. Он состоит из двух

зеркал  $S$  и  $S'$ , наклоненных под очень малым углом. Узкая щель, освещаемая однородным светом, служит источником  $O$ , от которого идут два пучка лучей, отражающихся зеркалами. Каждый из этих пучков можно рассматривать как испускаемый источниками  $O'$  и  $O''$  зеркальными изображениями щели  $O$ . В месте пересечения пучков образуются полосы интерференции, которые и рассматриваются в лупу.

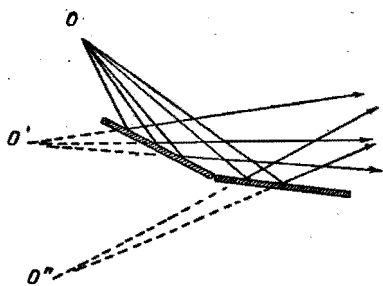


Рис. 150.

### § 73. Кривые равной толщины.

Рассмотрим теперь некоторую разновидность явлений интерференции, которые наблюдаются при отражении от тонких прозрачных пластинок или пленок, а также при прохождении через них света от какого-нибудь источника однородного света. Так, при освещении очень тонких стеклянных пленок, светом натрового (желтого) пламени легко наблюдать большое число темных линий, прорезывающих изображение отражающегося в пленке пламени. Каждая такая линия указывает, как увидим, место, где толщина стекла имеет определенную величину, и поэтому все такие полосы интерференции называются кривыми равной толщины. Окрашенные полосы на тонких мыльных или масляных пленках относятся к этому же типу явлений.

Пусть на пленку (рис. 151), имеющую в данном месте толщину  $d$ , падает пучок когерентных лучей, из которых мы рассмотрим только два: луч  $ABD$  и луч  $A'B'CBD$ . Первый из них просто отражается от верхней поверхности пленки. Если пленка прозрачна, то это отражение невелико: при падении луча, близком к нормальному, отражается, напр. от стекла, около 5% падающего света. (Амплитуда отраженного света в этом случае составляет около 2,2% амплитуды падающего.)

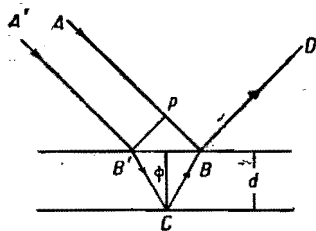


Рис. 151.

Остальные 95% света проходят через поверхность внутрь пленки, испытывая преломление, и распространяются здесь со скоростью, соответствующей показателю преломления  $n$  пленки. Точно так же и луч  $A'B'CBD$  внутри пленки дойдет до противоположной ее поверхности и здесь в точке  $C$

отразится от границы между пленкой и воздухом. Если угол падения луча  $A'B'$  невелик, то из 95% его света около 5% отражаются вдоль  $CB$ . Мы выбираем рассматриваемые лучи так, чтобы они пересекались в точке  $B$ , а в дальнейшем их ход может быть каким угодно. При преломлении в точке  $B$  также теряется 5% света, но в общем лучи  $BD$  и  $B'D$  будут иметь практически ту же силу света или равные амплитуды колебаний, если амплитуды их до отражения были равны. Когда эти лучи попадают в глаз и пересекаются в одной точке на сетчатке глаза, мы наблюдаем их интерференцию в зависимости от разности хода. Для

этого необходимо, конечно, чтобы лучи  $BD$  и  $B'D$  были не очень расходящимися и чтобы глаз был установлен так, чтобы в нем получалось изображение точек поверхности пленки, в частности точки  $B$ . В таком случае лучи, вышедшие из какой-нибудь точки поверхности, в глазу опять пересекутся в одной точке.

Для того чтобы найти разность хода лучей, представим себе поверхность волны  $B'r$ , нормальную к обоим лучам. В точках  $B'$  и  $r$  колебания имеют одинаковую фазу, поэтому в точке  $B$  оптическая разность хода их равна

$$\frac{B'CB}{\lambda_1} - \frac{pB}{\lambda},$$

причем  $\lambda$  — длина волны в воздухе, а  $\lambda_1$  — в пленке. Так как  $\lambda = n\lambda_1$ , то ту же величину можно представить как

$$(B'CB \cdot n - pB) \frac{1}{\lambda},$$

а при нормальном падении лучей на пленку просто, как

$$\frac{2dn}{\lambda}.$$

Однако, производя этот подсчет, мы не принимали во внимание одного обстоятельства, которое было обнаружено нами в теории отражения лучей, а именно изменения фазы при отражении от среды, имеющей показатель преломления больший единицы. Такая среда, оптически более плотная, чем воздух, изменяет фазу отражающихся колебаний в противоположную; при отражении же от среды менее плотной изменения фазы не происходит. Так как луч  $ABD$  испытал отражение от среды более плотной, а луч  $AB'CD$  — от среды менее плотной, то разность хода лучей увеличивается на полволны. В этом случае обычно говорят о потере полуволны при отражении от более плотной среды.

Таким образом окончательное выражение для оптической разности хода лучей, отражающихся при нормальном падении на пленку, будет

$$\frac{2dn}{\lambda} + \frac{1}{2}.$$

Если эта разность хода равна целому числу  $k$ , то происходит сложение колебаний с равными фазами, и точка  $B$  нам будет представляться освещенной; светлая полоса интерференции, проходящая через  $B$ , будет  $k$ -того порядка.

Если же разность хода равна  $k + \frac{1}{2}$ , то мы будем иметь в точке  $B$  темную полосу  $k$ -того порядка. В частности, если в каком-нибудь месте толщина пленки значительно меньше длины волны, то разность хода близка к  $\frac{1}{2}$ , и мы имеем здесь темное пятно или полосу нулевого порядка; другими словами пленки очень тонкие по сравнению с длиной волны в отраженном свете кажутся темными.

Кривые равной толщины в форме окружностей с общим центром можно осуществить, получая кольца Ньютона. Если на плоскую стеклянную по-

верхность положить линзу (рис. 152), сферическую с одной стороны и плоскую с другой, то слой воздуха между плоской пластинкой и линзой будет служить пленкой переменной толщины. Точкам, находящимся на расстоянии  $r$  от точки соприкосновения поверхностей, соответствует толщина слоя  $d$ , которая определяется из известного соотношения  $r^2 = d(2R - d)$ , где  $R$  — радиус сферы.

Согласно предыдущей формуле разность хода равна  $\frac{2d}{\lambda} + \frac{1}{2} = \frac{r^2}{R\lambda} + \frac{1}{2}$ , если толщина  $d$  — настолько мала, что можно пренебречь по сравнению с  $2R$ . Таким образом радиус светлой полосы  $k$ -того порядка  $r_k$  находится из соотношения

$$r_k = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right)R\lambda}.$$

Освещая линзу однородным светом, мы будем видеть большое число светлых и темных колец, расстояние между которыми все уменьшается по мере удаления от центра. В случае неоднородного света радиусы колец различны в зависимости от длины волны, и поэтому темные и светлые кольца различных волн накладываются друг на друга и интерференционные полосы или исчезают вовсе, или же делаются размытыми, как, например, при получении колец Ньютона в белом свете.

Желтый свет, испускаемый горелкой, в пламя которой введены пары натрия, состоит из двух близких между собой длин волн  $\lambda = 5890 \text{ \AA}$  и  $\lambda = 5896 \text{ \AA}$ . На близком расстоянии от центра радиусы интерференционных полос для этих волн почти одинаковы вследствие того, что разность между ними составляет около одной тысячной их длины; но легко видеть, что для полос такого высокого порядка  $k$ , при котором

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda_1 = k\lambda,$$

светлая полоса для волны  $\lambda_1$  будет совпадать с темной полосой для  $\lambda$ , и мы получим равномерное освещение поверхности линзы. При еще более высоком порядке интерференции, когда  $(k - 1/2)\lambda_1 = (k + 1/2)\lambda$ , радиусы светлых колец опять совпадают и полосы появляются вновь. Из этих уравнений мы находим, что первое исчезновение полос натрового пламени будет наблюдаться, когда

$$k = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} \cong 500,$$

т. е. через каждые пятьсот полос будет наблюдаться пропадание их и затем вновь появление. Это явление делает возможным измерение малых разностей длин волн, т. е. разделение близких линий спектра.

Кривые равной толщины могут быть использованы для проверки того, насколько близка поверхность данного тела по своей форме к плоскости. Для этого необходимо иметь уже вполне плоскую поверхность прозрачной стеклянной пла-

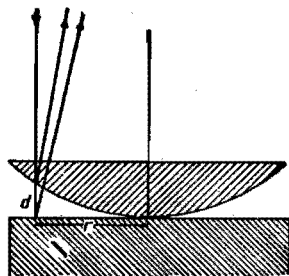


Рис. 152.



Рис. 153.

поверхности *A* проявится в искажении интерференционных полос.

Обычно интерференционные полосы получаются в отраженном свете. При этом оба интерферирующие луча имеют приблизительно одинаковую интенсивность. В проходящем свете условия иные. Один из лучей, а именно тот, который проходит прямо через пластинку, теряет при этом только 10% силы света (5% на каждой границе). Другой луч, интерферирующий с ним, до выхода из пластинки должен был дважды испытать отражение (от нижней и верхней границы), причем каждый раз отражается только 5%, или  $\frac{1}{20}$  падающего света, так что после двукратного отражения луч будет ослаблен в 400 раз. При интерференции колебаний столь неравной интенсивности интерференционные полосы представляются лишь как неглубокие минимумы на общем светлом фоне.

#### § 74. Кривые равного наклона.

Возьмем плоско-параллельную пластинку, прозрачную для лучей света, и заставим падать на нее пучок лучей. Угол падения обозначим  $i$ . Пусть два луча (рис. 154) после отражения от пластинки выйдут из точки *B*, причем один из них испытал одно отражение в точке *B*, а другой — одно отражение в точке *C* и два преломления в *A* и *B*.

Опустим из точки *A* перпендикуляр *AP* на направление второго луча, а из точки *B* перпендикуляр *BQ* на направление первого луча. Точки *A* и *P*, а также *B* и *Q* лежат в плоскости волны, когда эта плоскость находится вне пластинки и внутри ее. Отсюда можно видеть, что колебания, распространяющиеся вдоль лучей *NPB* и *MAQ* в точках *B* и *Q* имеют одинаковые фазы, и следовательно разность хода лучей определяется длиной второго луча между точками *QCB*. Очевидно, что  $QCB = 2d \cos \psi$ , где  $d$  — толщина пластинки, а  $\psi$  — угол преломления луча. Оптическая разность хода, принимая во внимание показатель преломления пластинки и потерю полуволны при отражении в точке *B*, равна

$$\frac{2dn \cos \psi}{\lambda} + \frac{1}{2} = \delta.$$

Таким образом при отражении от плоско-параллельной пластинки мы получим лучи, имеющие попарно тем большую разность хода, чем меньше угол падения и преломления. При нормальном падении ( $\psi = 0$ ) разность хода лучей наи-

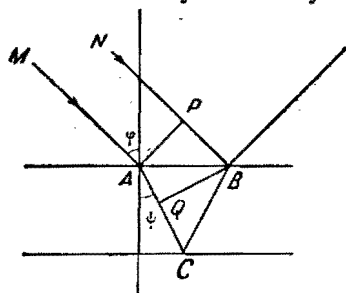


Рис. 154.

большая, а чем больше наклон лучей, тем она меньше. Наименьшая разность хода получается при скользющем падении лучей на пластинку, когда угол  $\psi$  равен углу полного внутреннего отражения. Так как при этом  $\sin \psi = \frac{1}{n}$ , то  $\cos \psi = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1}$ , и следовательно наименьшая разность хода равна

$$\delta_{\min} = \frac{2d \sqrt{n^2 - 1}}{\lambda} + \frac{1}{2}.$$

Положим, что  $\delta = k$ , где  $k$  — целое число, и, следовательно, лучи, идущие вдоль  $BD$ , дают интерференцию  $k$ -того порядка. То же самое дают все лучи параллельного пучка лучей, определяемого углом  $\varphi$  или  $\psi$ . Все такие лучи собираются в какой-нибудь точке фокальной плоскости объектива зрительной трубы или же просто пересекаются на сетчатке глаза, а к комодированного на бесконечность, и дают там светлую полосу интерференции  $k$ -того порядка.

Положим, что пластинка освещается широким источником света, так что на нее падают лучи под всевозможными углами  $\varphi$ . Отраженные параллельные пучки будут иметь различное направление, причем каждому направлению соответствуют определенный наклон лучей и разность хода. Собранные в фокальной плоскости, эти лучи дают светлые и темные полосы интерференции на равных расстояниях от главного фокуса, который будет центром системы кругов, представляющих собой интерференционные полосы различных порядков. Наибольший порядок имеем, конечно, в центре, где собираются лучи, нормально ( $\varphi = 0$ ) отражающиеся от пластинки и имеющие наибольшую разность хода.

Если увеличивать толщину пластинки, то порядок интерференционных полос возрастает. Радиус существующих полос увеличивается, и из центра выходят все новые круги более высоких порядков. Наоборот, при уменьшении толщины пластинки круги сжимаются и более близкие к центру исчезают, обращаясь в точку. При нулевой толщине, очевидно, совсем не будет полос, и вся фокальная плоскость будет равномерно темная.

Преимущество интерференционных полос равного наклона перед полосами равной толщины заключается в том, что для получения интерференции в какой-либо точке фокальной плоскости мы собираем там лучи, отраженные от всех точек плоско-параллельной пластинки, в то время как в случае кривых равной толщины мы пользуемся лучами от одной точки поверхности пластинки. Поэтому в первом случае имеем значительный выигрыш в силе света полос.

Можно еще увеличить силу отраженного света, если повысить отражательную способность поверхности пластинки. Обычно для этого слегка серебрят поверхность стекла, но таким тонким слоем, что он остается еще довольно прозрачным. Тогда заметную роль начинают играть лучи, испытавшие внутри пластинки несколько отражений. Это обстоятельство, как мы увидим далее, имеет весьма существенное значение для распределения света в полосах, делая максимумы очень узкими и следовательно светлые полосы очень тонкими.



## § 75. Интерферометры.

Явления интерференции находят разнообразные применения для измерительных целей, и для этого имеется несколько типов приборов — интерферометров. В большинстве случаев в интерферометрах пользуются кривыми равного наклона, которые наблюдаются трубой, установленной на бесконечность.

Интерферометр Жамена, схематически, изображенный на рис. 155, состоит из двух толстых плоско-параллельных пластинок  $P$  и  $P'$ , у которых одна сторона посеребрена. Луч света, попадая на пластинку, отражается отчасти от ее прозрачной грани и идет вдоль  $AB$  ко второй пластинке, где он преломляется и после отражения от посеребренной поверхности  $P_1$  выходит в точке  $B'$ . Другая часть лучей, преломляясь в пластинке  $A$  и отражаясь в  $B'$  от второй

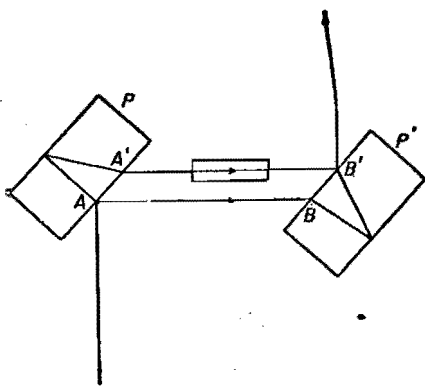


Рис. 155.

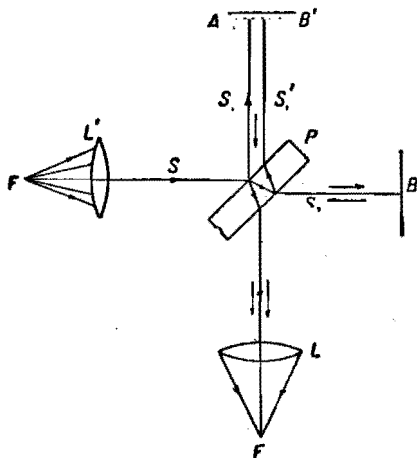


Рис. 156.

пластинки  $P'$ , опять соединяется с первым пучком. Если пластинки параллельны, то никакой разности хода в лучах не получается и никаких интерференционных полос не видно. Но если слегка изменить наклон одной из пластин, то лучи  $AA'B'$  и  $ABB'$  приобретают некоторую разность хода, зависящую притом от угла, под которым лучи падают на поверхность первой пластинки. Освещая эту последнюю широким пламенем, мы получаем пучок лучей разного направления, причем каждому направлению соответствует своя разность хода.

Изображение пламени, получаемое после двукратного отражения от пластинок  $P$  и  $P_1$ , оказывается перерезанным системой интерференционных полос равного наклона, которые перемещаются, если изменять угол между пластинками.

Особенностью этого интерферометра является разделение лучей  $A'B'$  и  $AB$ . На пути одного из них может быть помещена плоско-параллельная пластинка, искусственно увеличивающая разность хода (см. рис. 155). Так как эта разность хода определяется толщиной и показателем преломления пластинки, то интерферометр Жамена может служить для определения показателей преломления (интерференционный рефрактометр). Положим, что лучи

проходят через два сосуда равной длины и наполненных равными газами. Изменение разности хода при замене одного из газов воздухом или при изменении давления газа в одном из сосудов дает возможность определить показатель преломления газа, вообще мало отличающийся от единицы.

Другим интерферометром, который мы рассмотрим здесь, является прибор Майкельсона, схематически изображенный на рис. 156.

Луч света  $S$  здесь также разделяется на два луча при помощи плоско-параллельной стеклянной пластинки  $P$  наклоненной таким образом, чтобы часть света отражалась под прямым углом, образуя луч  $S_1$ , а другая часть проходила через пластинку, как второй луч  $S_2$ . Плоские зеркала  $A$  и  $B$  отражают эти лучи, так что они возвращаются к пластинке  $P$ , отчасти отражаются и отчасти проходят через нее, образуя в направлении от пластинки к линзе  $L$  пучок лучей, параллельных между собой, если зеркала  $A$  и  $B$  установлены строго перпендикулярно к падающим на них лучам. Отражение от пластинки  $P$  происходит, вообще говоря, от двух ее границ, и поэтому, чтобы иметь дело не с двумя лучами  $S_1$  и  $S_1'$ , одну из поверхностей пластинки покрывают тонким слоем серебра и тем значительно увеличивают ее отражательную способность. Наиболее выгодно в смысле использования света, чтобы коэффициент отражения был равен 50%. Если посеребрена поверхность, обращенная к источнику света, то луч  $S_1$  дойдет до линзы  $L$ , пройдя один раз через пластинку  $P$  на обратном пути, а луч  $S_2$  пройдет через нее трижды, один раз на пути к зеркалу  $B$  и дважды на обратном. Таким образом при равных расстояниях зеркал  $A$  и  $B$  от пластинки  $P$  оптическая длина пути обоих лучей не одинакова, но если на пути луча  $S_1$  поместить прозрачную пластинку той же толщины, что и  $P$ , то можно достигнуть нулевой разности хода для обоих лучей  $S_1$  и  $S_2$ . Передвигая одно из зеркал, мы создаем соответствующую разность хода лучей и получаем в фокусе линзы  $L$  интерференцию их.

Все параллельные лучи испытают те же отражения и преломления и дадут тот же эффект в фокальной плоскости линзы, но лучи, падающие на пластинку под углом, несколько отличным от  $45^\circ$ , получают иную разность хода и соберутся в другой точке фокальной плоскости. Мы получим, как и при отражении широкого пучка лучей от плоско-параллельной пластинки, ряд концентрических полос равного наклона в виде колец, окружающих главный фокус.

Очевидно, что при некотором изменении наклона одного из зеркал  $A$  или  $B$  мы должны наблюдать линии равной толщины (как при отражении от клинообразной пластинки), параллельные ребру клина. При этом (рис. 157б) интерференционные полосы получаются на поверхности пластинки или, точнее, на изображении этой поверхности в нашем глазу. Чем ближе к параллельности плоскости  $A$  и  $B$ , тем больше расстояние между полосами и меньше их число, и при полной параллельности пластинка представляется освещенной равномерно,

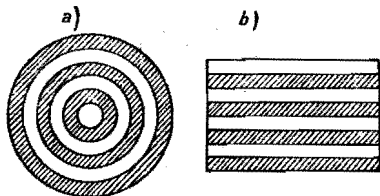


Рис. 157.

если рассматривать ее поверхность. Два отраженных изображения источника света при этом сливаются в одно.

В фокальной плоскости линзы зато появляются кольца (рис. 157а), представляющие линии равного наклона, которые при увеличении разности хода лучей выходят из центра и передвигаются к краям пластинки. По перемещению полос можно судить о перемещении зеркал и измерять его с точностью до долей длины световых волн.

Интерферометр Майкельсона может быть использован для получения полос очень высокого порядка, если свет достаточно однороден. При неоднородном свете различные длины волн дают круги различного диаметра, и при достаточно высоком порядке интерференции максимум одной системы полос начинает перекрывать минимумы полос для соседних волн, что ведет к исчезновению интерференционной картины. При наибольшей однородности, а именно при использовании светом, дающим в спектре наиболее тонкие линии, можно получить полосы порядка 100 000 и более. Для получения еще более высоких порядков и для одновременного наблюдения интерференционных полос, создаваемых близкими волнами, применяются интерферометры, дающие очень тонкие светлые линии на темном фоне.

Одним из таких интерферометров является прибор французских физиков Фабри и Перо. Принципиальное отличие даваемой им интерференционной картины сравнительно с тем, что дает интерферометр Майкельсона, можно сопоставить с тем различием дифракционных спектров, какие получаются от одной щели и от дифракционной решетки или эшелона. Как и в этих последних, в интерферометре Фабри и Перо каждая полоса получается от интерференции не двух, а многих лучей, и поэтому максимумы получаются гораздо более узкими.

Интерферометр Фабри состоит из двух параллельных стеклянных пластинок, (рис. 158), между которыми заключен слой воздуха, играющий роль плоско-параллельной пластинки. Обращенные друг к другу плоские поверхности пластинок покрываются полупрозрачным слоем серебра. Каждый луч, попадающий в плоско-параллельный воздушный слой, испытывает там несколько повторных отражений от противоположащих посеребренных поверхностей, как показано на рис. 158. Таким образом каждый луч в зависимости от коэффициента отражения поверхности дает большее или меньшее число лучей  $S_1, S_2, S_3, \dots$  с все возрастающей разностью хода. Максимумы интерференции получаются, когда все лучи попарно имеют одинаковые фазы, т. е. разность хода соседних лучей равна целому числу волн.

При постепенном изменении наклона лучей первый раз минимум получается, когда разность хода между крайними лучами увеличивается на одну длину волны. Чем больше число повторных отражений, тем меньше будет

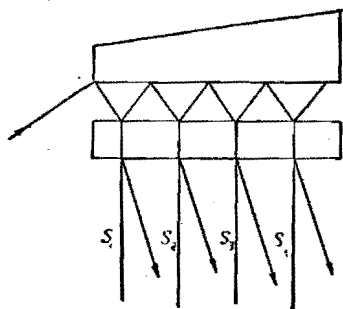


Рис. 158.

при этом разность хода между соседними лучами. При пользовании двумя только лучами, как в приборе Майкельсона, мы получили бы минимум света лишь при таком наклоне, когда разность хода соседних лучей равна

$$\frac{1}{2} \lambda.$$

Таким образом в интерферометре Фабри получается быстрое спадание силы света при небольшом изменении наклона лучей, и следствием этого являются очень резкие и узкие светлые линии на почти темном фоне.

Интерференционные кольца, принадлежащие двум различным волнам, могут теперь наблюдаться одновременно. Когда полосы одной из волн располагаются между полосами другой волны, то они не портят резкости картины. Это обстоятельство имеет большое значение для разделения лучей с очень близкой длиной волны, т. е. для интерференционной спектроскопии, а также для измерения отношения между близкими длинами волн с большой точностью

### § 76. Применения интерферометров.

Наиболее известными из применений интерферометра Майкельсона являются: 1) сравнение основного эталона длины метра с длиной световой волны, как наиболее устойчивой и независимой от нашего произвола образцовой длиной, и 2) измерение влияния движения земли в пространстве на скорость распространения света.

Сравнение эталона метра с длиной волны было осуществлено Майкельсоном при помощи интерферометра, в котором перемещение зеркала могло производиться с помощью винта. Вспомогательный эталон, состоящий из двух зеркал  $A_1$  и  $A_2$  (рис. 159), установленных между собой параллельно и на определенном расстоянии, помещался в двух положениях таким образом, чтобы получить нулевую разность хода сначала для одного зеркала эталона, затем для другого. При перемещении эталона производился счет числа интерференционных полос, проходивших в поле зрения наблюдателя, что дает непосредственно отношение длины эталона к длине волны. За длину эталона принимается таким образом расстояние между плоскими поверхностями  $A_2$  и  $A_1$ . Такое непосредственное сравнение производилось лишь для самого малого эталона, который является исходным образцом.

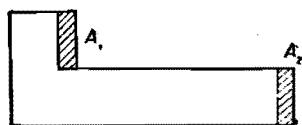


Рис. 159.

Следующий эталон имел длину почти точно вдвое большую, и при помощи интерферометра определялась только разность между длиной второго эталона и двойной длиной первого.

Так производилось сравнение всех вспомогательных эталонов до самого большого, имевшего 10 см в длину. Сравнение последнего с метром производилось также на интерферометре, но путем многократного перемещения его на собственную длину.

Таким образом интерферометр позволяет с точностью до долей длины волны света определить отношение между длинами эталонов, если это отношение близко к целому числу. Кроме того, счет полос интерференции дает длину исходного эталона в длинах волны. В результате этих измерений длина международного эталона метра оказалась равной

$$1 \text{ метр} = 1\,553\,163,5 \lambda_1 = 1\,966\,249,7 \lambda_2 = 2\,083\,372,1 \lambda_3,$$

где  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$  — длины волн трех линий спектра кадмия (красной, зеленой и синей). По более поздним измерениям Бенуа, Фабри и Перо

$$1 \text{ метр} = 1\,553\,164,13 \lambda_1.$$

Подобным образом могут быть измерены любые малые длины или изменения длины, вызванные, напр., тепловым расширением стержней, несущих зеркала интерферометра, или коэффициента преломления среды, в которой распространяются лучи. Необходимо в виду этого тщательно предохранять интерферометр от местных нагреваний, так как изменение температуры на доли градуса может вызвать значительные смещения системы полос. Лучшим способом избежать этих влияний является уменьшение размеров интерферометра.

Другим применением интерферометра, имевшим решающее значение для развития теории относительности Эйнштейна, был знаменитый опыт Майкельсона (см. ч. I, стр. 68). Целью его было решение вопроса, какое влияние оказывает перемещение находящегося на земле и движущегося вместе с ней в пространстве наблюдателя с его измерительными приборами на результаты измерения скорости света. Разность хода лучей в интерферометре, когда один из лучей имел направление скорости земли, а другой был к ней перпендикулярен, как было показано в т. I (стр. 6—8), должна была бы зависеть как от оптической длины пути между зеркалами интерферометра, так и от квадрата отношения скорости земли  $v$  к скорости света  $c$ . Так как отношение этих скоростей составляет всего  $10^{-8}$  ( $v = 3 \cdot 10^6$  см/сек,  $c = 3 \cdot 10^{10}$ ), то разность хода, которую нужно было измерить, имела величину  $\frac{v^2 l}{c^2 \lambda} = 10^{-8} \frac{l}{\lambda}$ . Если принять во внимание, что отношение 1 м к длине волны имеет величину порядка  $10^6$ , то, очевидно, длина пути лучей должна составлять много метров для того, чтобы получилась разность хода в полволны.

Заставляя лучи многократно проходить расстояние при помощи дополнительных отражающих зеркал, Майкельсон (в 1887 г.) мог увеличить до 23 м общий путь лучей (рис. 160).

Это должно было бы вызвать смещение интерференционной картины на 0,4 расстояния между соседними полосами, если бы свет распространялся в неподвижной среде (эфире), не принимающей участия в движении земли. Опыт показал, что наблюдаемые смещения значительно меньше и не превосходят 0,02 ширины полосы. Все последующие наблюдения, в которых принима-

лись должные предосторожности против температурных влияний на прибор, неизменно приводили к тому же отрицательному результату. Таким образом можно считать экспериментально доказанным, что в системе, которая движется вместе с наблюдателем и источником света, распространение света в любом направлении происходит так же, как и в покоящейся системе, т. е. с одной и той же скоростью в любом направлении. Существенно в этом результате, чтобы и наблюдатель, и источник света двигались в одном направлении и с одинаковой скоростью, т. е. не имели относительного движения. Влияние движения

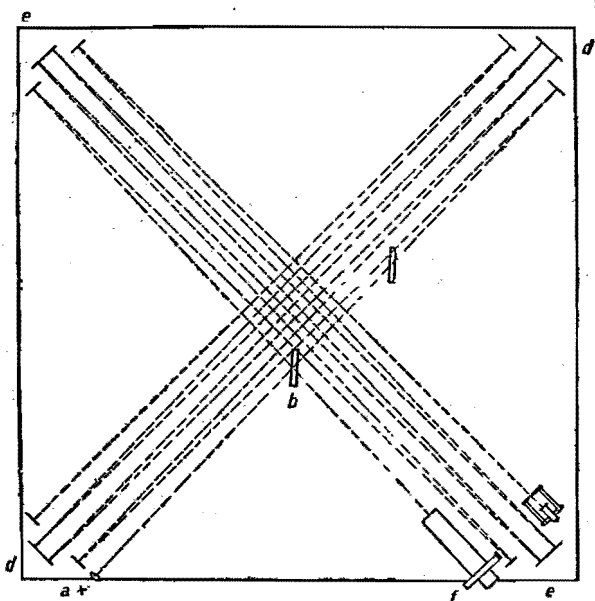


Рис. 160.

источника света относительно наблюдателя или последнего относительно источника на распространение света будет рассмотрено в следующем параграфе.

### § 77. Аберрация света. Принцип Доплера.

Положим, что лучи света достигают наблюдателя в то время, как он движется с некоторой скоростью относительно источника света. Движение это может быть или в направлении, совпадающем с направлением скорости света, или же в направлении перпендикулярном; в общем случае оно будет иметь одну составляющую вдоль луча и другую — перпендикулярную к лучу. Мы рассмотрим эти случаи отдельно, так как они приводят к различным результатам.

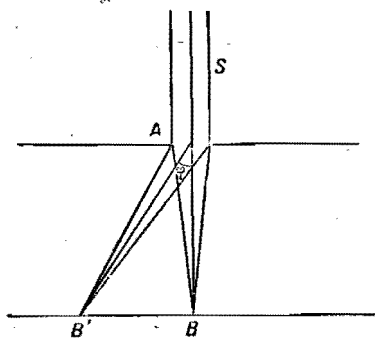


Рис. 161.

Представим себе пучок параллельных лучей, идущих от какого-либо достаточно удаленного источника света, и проходящих через отверстие  $A$ , напр. через объектив телескопа, направленного на какую-нибудь звезду (рис. 161).

Пусть эти лучи собираются объективом в точке  $B$ , где получается изображение источника света, в случае неподвижной трубы. Если однако наблю-

датель вместе с трубой движутся со скоростью  $v$  перпендикулярно к лучам  $S$ , то за то время  $t$ , которое необходимо свету для распространения от  $A$  до  $B$ , фокальная плоскость трубы переместится на расстояние  $BB'$ . Таким образом изображение источника сместится так, как если бы свет распространялся в направлении  $AB'$ . Это изменение относительного направления лучей в трубе, движущейся вместе с наблюдателем, называется аберрацией света. Угол  $\varphi$  аберрации определяется из очевидного соотношения  $l \operatorname{tg} \varphi = B'B$ , или, так как  $l = ct$ ,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v}{c},$$

т. е. аберрация света определяется отношением скорости наблюдателя к скорости света.

При изменении направления движения наблюдателя изменяется и направление аберрации, и потому наблюдение положения изображения  $B'$  в двух случаях, когда скорости  $v$  имеют противоположные направления, дает максимальное смещение, равное  $\frac{2v}{c}$ .

Это явление было замечено астрономом Бредлеем в 1727 г., который заметил периодическое смещение положения неподвижных звезд в зависимости от направления движения земли. Так как отношение скорости земли к скорости света равно  $10^{-4}$ , то эту величину должен иметь и угол аберрации в радианах, что составляет около  $20''$ . Новейшие измерения подтверждают этот результат и дают для угла аберрации  $20,5''$ . Обратно, исходя из астрономических наблюдений, мы можем определить скорость света. Точность этого определения вследствие малости угла  $\varphi$  очень невелика.

При движении источника света вдоль луча по направлению к наблюдателю наблюдается другое явление, известное как явление Допплера.

Положим, что источник света приближается к наблюдателю со скоростью  $u$ . За время одного колебания  $T$  расстояние между ними уменьшается на  $uT$ . Если в начальный момент расстояние источника света от наблюдателя равно  $l$ , то начальная фаза волны, испускаемой источником, дойдет до наблюдателя за время  $t = \frac{l}{c}$ . Та же фаза волны, испускаемой спустя один период коле-

бания  $T$ , дойдет до наблюдателя за время  $t - \frac{uT}{c}$ . Промежуток времени между двумя моментами, когда наблюдатель снова видит ту же фазу, воспринимается им как период световых колебаний, равный в данном случае:  $T' = T - \frac{u}{c} T$ .

Такой же результат мы получим, рассматривая движение наблюдателя к источнику света. Как мы видим, период колебаний должен казаться наблюдателю измененным в отношении  $\frac{c-u}{c}$ , которое зависит только от относительной скорости друг к другу источника и наблюдателя вдоль луча. Этим явлением

пользуются в астрономии для определения скорости движения света в направлении к наблюдателю или от него. Так, напр., линии солнечного спектра представляются смещенными в ту или другую сторону в зависимости от того, какой край солнечного диска служит источником света, так как вследствие вращения солнца вокруг его собственной оси один край удаляется от земли, а другой приближается к ней.

Явление Допплера объясняет отчасти расширение спектральных линий вследствие беспорядочного теплового движения атомов, испускающих свет. Наибольшее расширение линии, вызванное этой причиной, равно отношению скорости атомов при данной температуре к скорости света, составляет  $10^{-6}$  —  $10^{-5}$  длины волны.



## ГЛАВА VI.

### ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА.

#### § 78. Геометрические лучи и свет.

Нам уже неоднократно приходилось говорить о лучах, вдоль которых происходит распространение света. В каждой точке волны можно построить перпендикуляр к ее поверхности, которым определяется направление светового луча, или направление распространения волны, пока распространение происходит в однородной среде. Мы видели (стр. 159), что амплитуда колебаний, распространяющихся вдоль луча, зависит только от того элемента волновой поверхности, через который проходит данный луч и который равен половине нулевой зоны Френеля. Это справедливо, если поверхность волны имеет достаточно большие размеры, и в этом случае отдельные лучи как будто независимы друг от друга. Эта независимость не имеет места у края волны или в том случае, когда размеры поверхности волны настолько малы, что вмещают только небольшое число зон Френеля. Тогда получаются диффракционные явления, мы уже не можем представить распространения света просто в виде прямолинейного распространения вдоль определенных линий, и понятие луча или скорее понятие о независимости лучей теряет всякий смысл.

В большинстве случаев однако отверстия, через которые проходит свет, весьма велики по сравнению с длиной волны, и диффракционные явления мало заметны. Распространение света происходит так, что каждая точка источника света является центром пересечения лучей, образующих конические пучки. Такие пучки мы называем гомоцентрическими, т. е. имеющими общий центр. На ряду с расходящимися пучками мы рассматриваем также сходящиеся гомоцентрические пучки, лучи которых собираются в одной точке, образуя изображение светящейся точки.

Если все лучи пучка составляют между собой очень малые углы и имеют почти одинаковые направления, то мы имеем элементарный пучок, который можно заменить одним лучом, его представителем. В дальнейшем мы неоднократно будем рассматривать отдельные элементарные пучки, из которых состоят конечные пучки лучей, хотя они на опыте и не могут быть выделены и изолированы без того, чтобы не возникли явления диффракции, искажающие явление прямолинейного распространения света.

Оптические явления, в которых можно пользоваться прямолинейными лучами, образуют особый отдел учения о свете — геометрическую оптику. Прямолинейность, конечно, имеет место только в однородной среде. На границе, отделяющей две различные среды, лучи испытывают отражение и пре-

ломление, после чего они распространяются опять прямолинейно. Только в тех случаях, когда показатель преломления изменяется непрерывно от одной точки среды к другой, как это имеет место в земной атмосфере, лучи света искривляются.

Построение лучей дает возможность проследить, как изменяется пучок после ряда преломлений и отражений. Вообще говоря, он при этом теряет свою гомоцентричность, и отдельные лучи уже не пересекаются в одной точке. Такой пучок мы называем астигматическим.<sup>1</sup> На рис. 162 изображен (а) гомоцентрический и (б) астигматический пучок. Волновая поверхность  $S$  в первом случае представляет часть шаровой поверхности, радиус которой уменьшается по мере приближения к точке  $O$ , где пересекаются все лучи. Таким образом все колебания, приходящие в точку  $O$ , имеют одинаковую фазу и, следовательно, в гомоцентрических пучках действие всех лучей, пересекающихся в точке  $O$ , складывается. В непосредственной близости  $O$ , где размеры волновой поверхности делаются очень малыми, конечно, могут наблюдаться явления дифракции, вследствие чего свет не соберется в одной точке, а распределится на некоторой конечной поверхности порядка длины волны.

В случае астигматического пучка волновая поверхность имеет более сложную форму, и лучи, перпендикулярные к ней, пересекаются не в одной точке, а вдоль линий  $O_1O_2$  и  $O_3O_4$ , как показано на рис. 162, б, причем эти линии взаимно-перпендикулярны. В этом случае волновая поверхность  $S$  дважды обращается в отрезок прямой; такое изображение мы называем астигматическим. Чем больше величина астигматизма, т. е. длина отрезков  $O_1O_2$  и  $O_3O_4$  и расстояние между ними, тем сильнее искажение изображения светящейся точки.

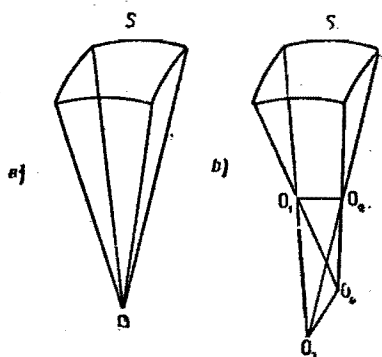


Рис. 162.

### § 79. Оптические приборы.

Геометрическая оптика имеет преимущественно прикладное значение: ее основная задача — дать методы расчета оптических инструментов. Назначение последних может быть очень различно, но преимущественно они служат для получения изображений объектов, светящихся или освещенных посторонним источником света. Изображение получается обычно на плоскости, на которую проектируются отдельные части объекта так, чтобы они по возможности представлялись в таком же взаимном расположении, как и при его непосредственном рассматривании. Такое воспроизведение объектов, по возможности не искаженное, достигается лишь при соблюдении определенных условий.

<sup>1</sup> Т. е. не имеющим точки пересечения; „стигма“ по-гречески значит точка.

Необходимо, чтобы отдельные точки предмета воспроизводились как отдельные точки изображения, прямые линии оставались прямыми. Очевидно, что гомоцентрические пучки должны оставаться гомоцентрическими, так как только при этом условии каждой точке объекта, лежащей в вершине расходящегося пучка лучей, соответствует точка изображения, в которой лучи эти сходятся и пересекаются.

Роль оптических приборов не ограничивается получением изображения, т. е. простым воспроизведением объекта. Большею частью изображение позволяет рассмотреть такие детали, которые невооруженному глазу недоступны. Для этого прибор должен увеличивать изображение или же приближать его к глазу, как это мы делаем с мелкими предметами, желая их лучше рассмотреть. Однако, эта цель достигается только тогда, когда каждой точке предмета соответствует одна определенная точка и в увеличенном изображении. Если же по мере увеличения изображения пучки лучей перестают быть гомоцентрическими, то увеличение изображения может и не представить никаких преимуществ. Возможность различать соседние точки изображения ограничивается еще и дифракционными явлениями, которые, вообще говоря, должны обнаруживаться в месте пересечения пучка. Так как длина световой волны не бесконечно мала, то свет будет наблюдаться не только в точке пересечения лучей, но также и в соседних точках, причем расстояния, на которых еще заметно освещение, вследствие дифракции будут тем больше, чем длиннее волна. В виду этого даже при большом увеличении мы не можем разделить двух точек, находящихся на расстоянии меньшем, чем длина волны того света, которым мы пользуемся. Эти явления однако уже выходят за пределы геометрической оптики и рассматриваются волновой оптикой. Мы возвратимся к ним в § 97.

Оптические приборы имеют еще одно весьма важное свойство, а именно: увеличивать или видоизменять освещение изображений. Увеличение изображения обычно сопровождается значительным ослаблением яркости освещения. Количество света, распределяющееся на плоскости изображения, зависит от ширины тех пучков лучей, которые попадают в прибор. В этом отношении выгодно пользоваться возможно широкими пучками. Увеличение яркости изображения имеет особое значение при фиксировании его фотографическим путем, при проектировании изображения на экране и в других подобных случаях. Большинство условий, необходимых для получения достаточно отчетливого, неискаженного и хорошо освещенного изображения, может быть выяснено при рассмотрении хода лучей в приборе, их преломления и отражения, ограничения их отверстием, или диафрагмой и т. п.

При этом каждый луч мы рассматриваем независимо от соседних, распространение света считаем строго прямолинейными, а преломление и отражение каждого луча происходящим по законам Декарта и Снеллиуса.

Волновая природа света при таком рассмотрении явления не играет никакой роли. Различные лучи спектра мы различаем только по их показателю преломления и окраске, которую они производят в изображении.

### § 80. Центрированные оптические системы.

Мы встречаемся преимущественно с такими оптическими приборами, которые состоят из стекол, ограниченных сферическими поверхностями, или зеркал, также имеющих сферическую или плоскую форму. Таким свойством обладают телескопы, микроскопы, фотографические объективы и тому подобные приборы, имеющие целью давать неискаженное изображение светящихся или освещенных предметов. Каждый такой прибор состоит из более или менее сложной системы сферических поверхностей, и если все их центры лежат на оптической оси, то он представляет собой центрированную оптическую систему.

Ось прибора, или главная оптическая ось, является осью симметрии для всякого пучка лучей, который выходит из точки  $O$ , находящейся на оси (рис. 163). Всякий луч, образующий с осью определенный угол  $u$ , преломляется

в некоторой плоскости, проходящей через ось и называемой поэтому меридианной плоскостью. После преломления он пересекает ось в некоторой точке  $O_1$ , зависящей от угла  $u$ , кривизны поверхности, показателя преломления и пр. Во всякой другой плоскости, проходящей через ось  $OCO_1$ , преломление происходит таким же образом, т. е. луч, составляющий в этой плоскости угол  $u$  с оптической осью, пересекает последнюю

также в точке  $O_1$ . Таким образом все такие лучи, лежащие на поверхности конуса  $OAB$ , пересекаются в одной точке  $O_1$  на оптической оси; они образуют так называемый сагиттальный пучок.

Такой же пучок, но соответствующий несколько большему углу  $u + du$ , пересечется в точке  $O_2$ , лежащей несколько ближе на оптической оси. Очевидно, что точки пересечения всех сагиттальных пучков лежат на оптической оси, заполняя некоторый отрезок на ней.

Лучи, лежащие в одной меридианной плоскости, напр. лучи  $OA$  и  $OA_1$ , и составляющие с оптической осью различные углы, напр.  $u$  и  $u + du$ , образуют меридианные пучки. Точки их пересечения между собою, напр.  $O'$  и  $O''$ , лежат вне оптической оси. Совокупность таких меридианных пучков, лежащих в разных меридианных плоскостях под углами  $u$  и  $u + du$ , пересекается по окружности  $O'O''$ . Радиус этой окружности тем больше, чем больше угол  $u$ . С уменьшением угла  $u$  до нуля круг  $O'O''$  стягивается в одну точку на главной оптической оси.

По мере того как угол  $u$  уменьшается, точка  $O_1$ , или фокус сагиттального пучка, перемещается и приближается к пределу, который яв-

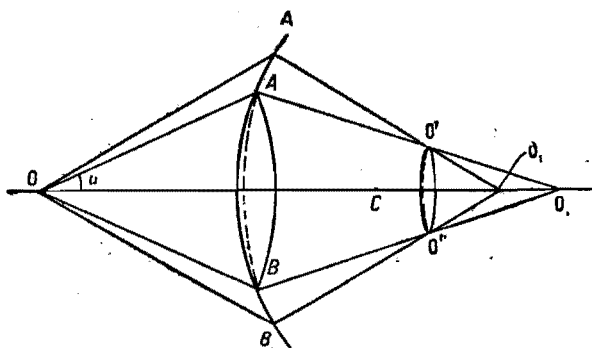


Рис. 163.

ляется вершиной узкого конуса, охватывающего оптическую ось. Все лучи, находящиеся внутри этого конуса и составляющие малые углы с оптической осью, как будет доказано далее, собираются в одной точке и образуют гомоцентрический пучок. Эти лучи называются центральными, или осевыми. Лучи, заключенные в более широком конусе, не гомоцентричны. Это явление, свойственное всякой сферической поверхности, называется сферической аберрацией (см. § 87). Очевидно, что всякий узкий пучок лучей, не принадлежащих к осевым, напр. пересекающих ось под углом  $u$ , после преломления теряет свою гомоцентричность (их волновая поверхность не остается шаровой). При этом меридианные пучки образуют линию фокусов, перпендикулярную к меридианной плоскости и не лежащую на оси, а сагитальные (экваториальные) пучки дают фокусы, лежащие на оптической оси, т. е. образуют другую линию фокусов, лежащую в меридианной плоскости. Таким образом лучи узкого косоугольного пучка, образующего конус около луча  $OA$ , заключающие в себе как группу меридианных, так и группу сагитальных лучей, после преломления не пересекутся в одной точке. Такой пучок, очевидно, будет астигматическим.

Устранение сферической аберрации и астигматизма в оптических приборах является одной из главных задач геометрической оптики. Обычно она может быть решена только за счет усложнения оптических систем, которые состоят из ряда преломляющих сферических поверхностей, образующих сложную центрированную оптическую систему.

### § 81. Объекты и их изображения.

Положим, что мы имеем такую идеальную центрированную оптическую систему, которая дает точечное изображение каждой точки объекта. Гомоцентрические пучки лучей, выходящие из различных точек объекта, пройдя через систему, должны превращаться также в гомоцентрические пучки. Каждой точке пространства, где могут находиться объекты, соответствует определенная точка пространства, где может получиться изображение. Пространство объектов и пространство изображений не могут быть безграничны. В некоторых случаях они сводятся к той части пространства, которая находится около оптической оси системы. В этих случаях только для точек, находящихся на оптической оси или вблизи нее, можно получить точное изображение.

Точки пространства объектов и их изображений мы будем называть также сопряженными точками, или фокусами лучей. Если две точки объекта лежат на одной прямой, которую можно рассматривать как луч, принадлежащий к обоим гомоцентрическим пучкам, выходящим из тех же точек, то их изображения должны лежать также на прямой, которая является сопряженным лучом в пространстве изображений. Мы будем предполагать, что и в том случае, когда две точки не имеют общего луча и лежат на прямой, которая не совпадает ни с какими из действительных лучей, попадающих в прибор, их изображения располагаются все же на сопряженной прямой, которая

состоит из точек, являющихся изображением точек прямой пространства объектов. Двум пересекающимся прямым и плоскости, которую они определяют в пространстве объектов, должны соответствовать сопряженные прямые, пересекающиеся также в одной точке, и сопряженная плоскость в пространстве изображений. В частности всякой плоскости, перпендикулярной к оптической оси пространства объектов, должна соответствовать плоскость, также перпендикулярная к оси в пространстве изображений.

Когда мы рассматриваем объекты и их изображения, то удобно рассматривать отдельно каждую плоскость, перпендикулярную к оптической оси. Точки, лежащие в этой плоскости, образуют плоский рисунок, которому соответствует плоский рисунок в пространстве изображений.<sup>1</sup>

Поэтому, говоря о размерах изображений или объектов, мы имеем в виду обычно размеры плоских фигур, перпендикулярных к оптической оси.

Расстояние между двумя точками таких фигур определяет поперечную линейную величину объекта или изображения, а отношение линейной величины изображения к линейной величине объекта называется поперечным линейным увеличением.

Изображения могут быть как увеличенными, так и уменьшенными, и поэтому увеличение может изменяться, вообще говоря, от 0 до  $\infty$ .

Если точкам, лежащим над оптической осью в пространстве объектов, соответствуют точки пространства изображений, расположенные таким же образом по отношению к оси, то изображение считается прямым (рис. 164 верх). Отношения линейных размеров прямых изображений и объектов выражаются положительными числами. Если изображение относительно оптической оси оказывается перевернутым, то оно называется обратным (рис. 164 низ), и линейное увеличение его выражается отрицательным числом. Если точки объекта лежат в меридианной плоскости (т. е. в плоскости, проходящей через оптическую ось), то точки его изображения должны также лежать в меридианной плоскости. В центрированных системах эти сопряженные меридианные плоскости просто совпадают (так как луч при преломлении и отражении не выходит из плоскости падения).

Так как оптическая ось есть ось симметрии, то безразлично, в какой меридианной плоскости рассматривать ход лучей, фокусы которых расположены на оптической оси. Для точек, находящихся вне оптической оси, можно также

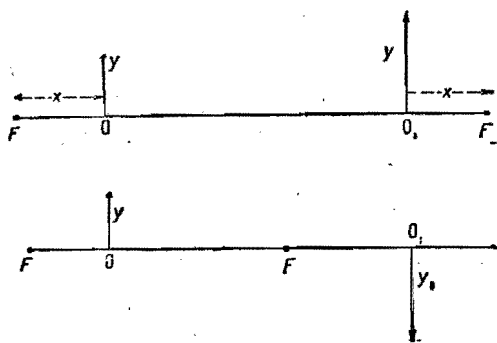


Рис. 164.

<sup>1</sup> Получение плоских изображений имеет особое практическое значение потому, что экраны, на которые проектируются изображения, или фотографические пластинки, обычно имеют плоскую форму.

рассматривать только меридианные пучки; поэтому при построении изображений объектов мы обычно рассматриваем сечение объекта какой-нибудь меридианной плоскостью. В любой меридианной плоскости одинаково расположенные точки дают одинаково расположенные изображения.

Расположение точек объекта мы выражаем прямоугольными координатами  $x, y$  (рис. 164). Ордината  $y$  дает расстояние точки от оптической оси, положительное, если точка лежит над осью, и отрицательное в обратном случае. Абсциссы откладываются параллельно оптической оси от какой-нибудь особенной точки системы (напр. от главного фокуса, см. § 83), причем положительное или отрицательное направление устанавливается совершенно произвольно и иногда различным образом для пространства объектов и изображений.

Все точки, имеющие ту же абсциссу  $x$ , образуют плоский объект или изображение, который пересекается меридианной плоскостью вдоль прямой, перпендикулярной к оси  $x$ , т. е. к оси прибора. Мы можем таким образом еще упростить рассмотрение объектов и изображений, ограничиваясь одной какой-нибудь меридианной плоскостью, сводя плоские объекты к отрезкам прямых.

Если обозначить координаты точек изображения в меридианной плоскости теми же буквами с соответственными индексами, напр.  $x_1, y_1$ , то соотношения между координатами сопряженных точек выражаются соотношениями коллинеации, а именно:

$$x_1 = \frac{a_1 x + a_2 y + a}{c_1 x + c_2 y + c} \quad (165)$$

$$y_1 = \frac{b_1 x + b_2 y + b}{c_1 x + c_2 y + c}, \quad (166)$$

так как только при таком соотношении всякая прямая будет иметь своим изображением также прямую.

Эти формулы в нашем случае значительно упрощаются вследствие симметрии оптической системы. Двум точкам объекта, имеющим ту же абсциссу  $x$ , но разные по знаку ординаты  $\pm y$ , должны соответствовать изображения, также имеющие одну и ту же абсциссу  $x_1$  и разные по знаку ординаты  $\pm y_1$ . Другими словами, так как все точки, лежащие на прямой, перпендикулярной к оптической оси, имеют своими изображениями точки, лежащие на подобной же прямой в пространстве изображений, то переворачивание объекта относительно оптической оси должно переворачивать его изображение.

Вследствие этого коэффициенты  $a_2$  и  $c_2$  в уравнении (165) должны обращаться в нуль, равно как и коэффициенты  $b_1$  и  $b$  в уравнении (166), или

$$x_1 = \frac{a_1 x + a}{c_1 x + c}, \quad (165')$$

$$y_1 = \frac{b_2 y}{c_1 x + c}. \quad (166')$$

Последняя формула показывает, что если объектом является отрезок прямой, перпендикулярной к оптической оси и имеющей длину  $y$ , то его изображение

$y_1$ , также перпендикулярное к оси, будет иметь увеличение  $\frac{y_1}{y} = \frac{b_2}{c_1x+c}$ , независящее от величины объекта.

Таким образом, любому объекту в плоскости, определяемой заданной абсциссой  $x$ , соответствует в плоскости  $x_1$  изображение, увеличенное определенным образом. Если коэффициент  $c_1$  не равен нулю, то увеличение может стать бесконечно большим, если объект находится в плоскости, для которой  $c_1x+c=0$ . В этом случае и абсцисса  $x_1$  обращается в бесконечность, т. е. изображение отодвигается на бесконечно большое расстояние. Только в одном случае, а именно, когда  $c_1=0$ , увеличения, как поперечное, т. е.  $y_1:y$ , так и продольное, равное  $dx_1:dx$ , будут постоянны независимо от положения объекта и изображения.

Заметим еще, что уравнение (165') может быть представлено в более простом виде, а именно:

$$x_1 - \frac{a_1}{c_1} = \frac{A}{x + \frac{c}{c_1}}, \quad (167)$$

где

$$A = a - \frac{a_1 c}{c_1}.$$

Еще проще соотношение получается, если плоскости, от которых отсчитывается расстояние объектов и изображений, переместить соответственно на  $-\frac{c}{c_1}$  и на  $\frac{a_1}{c_1}$ . Тогда абсциссы объектов будут  $x' = x + \frac{c}{c_1}$ , а абсциссы изображений  $x_1' = x_1 - \frac{a_1}{c_1}$ , и следовательно уравнение (167) примет такой вид:

$$x_1' = \frac{A}{x'} \quad \text{или} \quad x_1' x' = A. \quad (167')$$

Что же касается второго уравнения, то оно примет вид:

$$y_1 = \frac{fy}{x'}, \quad \text{где} \quad f = \frac{b_2}{c_1}. \quad (168)$$

Необходимо иметь в виду, конечно, что формулы (167) и (168) имеют смысл только при  $c_1$ , не равном нулю.

Формулы, полученные нами, позволяют найти как положение, так и величину изображения данного объекта. Но может случиться, что за изображение мы принимаем место пересечения лучей, хотя бы ему и не соответствовало действительное изображение. Примером этого может служить случай, изображенный на рис. 165а. Лучи, пройдя из  $O$  через линзу, образуют расходящийся пучок и не могут дать действительного изображения. Но, тем не менее, пучок лучей гомоцентричен, и если направление его лучей продолжить назад,



до пересечения в точке  $O_1$ , что показано пунктиром, то получается мнимое изображение в этой точке.

Точно так же мы можем говорить о мнимых объектах, если, как показано на рис. 165 б, в пространстве объектов нет такой точки, в которой пересекались бы лучи гомоцентрического пучка, и его вершину  $O$  мы находим, только продолжая мысленно лучи до пересечения их за пределами пространства объектов.

Наблюдать изображения можно двояким путем. Если в месте, где получается изображение, поставлен белый экран, то освещение его поверхности лучком пересекающихся лучей делает видимым действительное изображение. Этот способ наблюдения называется объективным. Субъективным

способом наблюдения мы называем такой, при котором лучи непосредственно попадают в глаз. При этом наш глаз, наблюдая лучи, в него попадающие, видит в точке их пересечения их источник, т. е.

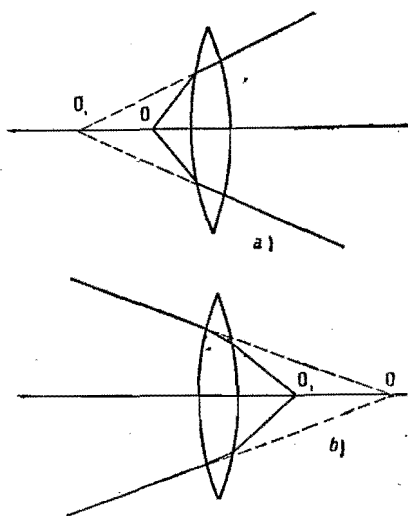


Рис. 165.

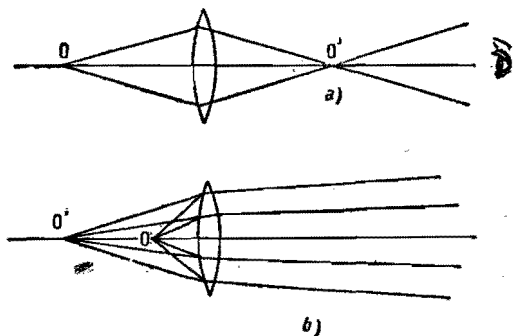


Рис. 166.

изображение предмета, безразлично, попадают ли лучи после действительного пересечения в точках изображения, или же они на пути к точке их пересечения испытывают преломление, и мы имеем дело с мнимым изображением, как показано на рис. 166.

Заметим в заключение, что если бы мы могли изменить направление распространения лучей на прямо противоположное, то точки изображения стали бы посылать лучи в прибор, т. е. сделались бы точками объектов, а точки объектов превратились бы в точки изображений. Ход же лучей от такой перемены ролей несколько не изменился бы. Это правило, в котором легко убедиться, рассматривая каждое отдельное преломление или отражение луча, называется принципом взаимности объекта и изображения, или же принципом обратимости лучей.

## § 82. Главные фокусы.

Мы нашли, что в пространстве объектов существует плоскость, которая определяется уравнением  $c_1 x + c = 0$  (если  $c_1 \neq 0$ ) и обладает следующим

свойством: изображения объектов, находящиеся в этой плоскости, получаются бесконечно большими и на бесконечно большом расстоянии. Эта плоскость называется фокальной плоскостью пространства объектов, а точка пересечения ее с оптической осью — главным фокусом того же пространства, или первым главным фокусом.

Бесконечное удаление изображения означает следующее. Если источником пучка лучей, попадающего в прибор, является какая-нибудь точка фокальной плоскости, то при выходе из прибора он превращается в пучок параллельных лучей, которые могут пересекаться лишь в некоторой точке бесконечно удаленной плоскости, а следовательно и наоборот, только параллельные лучи собираются в главной фокальной плоскости.

Таким образом с первой фокальной плоскостью сопряженной является бесконечно удаленная плоскость в пространстве изображений. Каждой точке последней соответствует определенное направление пучка параллельных лучей. Если мы ограничимся меридианными пучками, то это направление определяется углом  $u$  (рис. 167), который лучи образуют с оптической осью. Различать точки, лежащие на бесконечности, мы можем лишь по углу  $u$  соответствующего им пучка параллельных лучей. Итак, каждой точке первой фокальной плоскости отвечает определенный угол  $u$  в пространстве изображений, определяющий направление пучка параллельных лучей, как изображено на рис. 167.

Если мы выберем координатную плоскость, от которой откладывается  $x$ , так, чтобы уравнения приняли вид (167') и (168):

$$x'x_1' = A,$$

$$\frac{y_1}{y} = \frac{f}{x'},$$

то видно, что первая фокальная плоскость определяется уравнением  $x = 0$ , т. е. совпадает с координатной плоскостью в пространстве объектов. Положение же всякой другой плоскости, перпендикулярной оптической оси, определяется ее расстоянием от главной фокальной плоскости.

Но уравнение  $x'x_1' = A$  показывает, что и координатная плоскость в пространстве изображений, определяемая условием  $x_1' = 0$ , имеет свойства, подобные первой фокальной плоскости. Если изображение находится в этой плоскости, то объект находится от первой фокальной плоскости на бесконечно

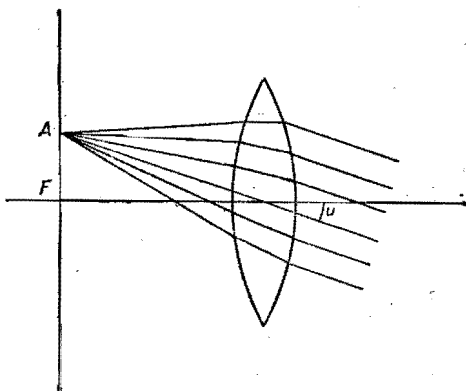


Рис. 167.

большом расстоянии  $x' = \infty$ , а величина объекта должна быть бесконечно велика,  $y = \infty$ , если величина изображения  $y_1$  конечна. Это означает, что лучи, образующие в пространстве объектов параллельные пучки, после выхода из

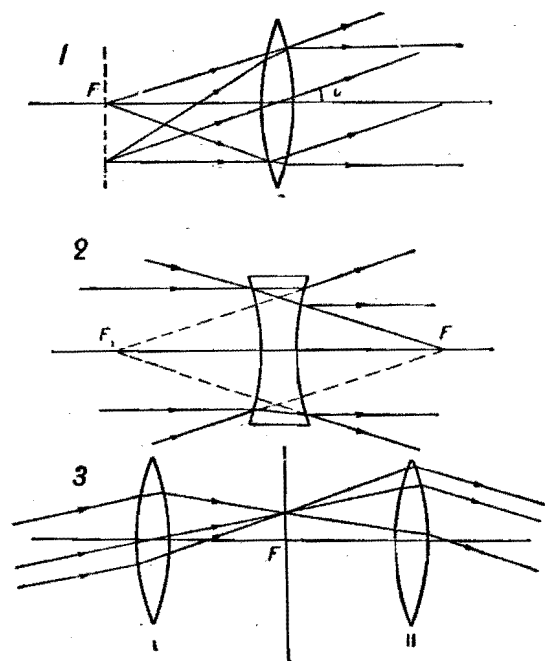


Рис. 168.

прибора пересекаются в точках плоскости  $x_1' = 0$ , которую мы назовем второй фокальной плоскостью, или фокальной плоскостью пространства изображений. Каждой точке второй фокальной плоскости соответствует некоторый угол  $u$  наклона параллельных лучей. Различные случаи оптических систем, показанные на рис. 168, отличаются тем, что имеют или два действительных главных фокуса, или два мнимых, или вовсе не имеют их. Первый случай соответствует собирающей оптической системе, которая увеличивает схождение лучей; второй случай представляет рассеивающую оптическую систему, которая увеличивает расхождение лучей; наконец, третий случай телескопической системы отличается тем, что вовсе не имеет главных фокальных плоскостей в конечном расстоянии от прибора, так как первая и вторая фокальные плоскости отодвинуты в бесконечность. Очевидно, что последний случай может быть осуществлен соединением двух собирающих систем так, чтобы вторая фокальная плоскость системы I была совмещена с первой фокальной плоскостью системы II. Параллельные лучи, падающие на первую систему, после выхода из второй делаются опять параллельными, хотя, вообще говоря, изменяют при этом свое направление.

Мы должны условиться еще относительно того, в каком направлении откладываются положительные абсциссы как  $x'$ , так и  $x_1'$ . Обычно эти направления различны для пространств объектов и изображений. В первом за положительное направление мы выбираем направление слева направо (рис. 169), т. е. направление распространения лучей, попадающих в прибор параллельно оптической оси; во втором положительным направлением считается направление

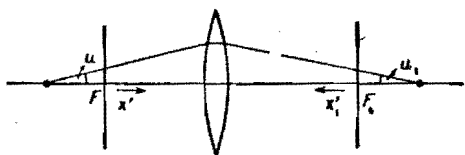


Рис. 169.

обратное, т. е. справа налево. Поэтому все объекты, лежащие вправо от первой фокальной плоскости, имеют положительные абсциссы, независимо от того, будет ли эта плоскость действительной или мнимой. В пространстве изображений абсциссы всех действительных объектов будут отрицательны.

Что касается знака ординат, то и в пространстве объектов и в пространстве изображений точкам, лежащим над оптической осью, будем приписывать положительные ординаты. Наконец, углы, составляемые лучами с осью прибора в пространстве объектов и изображений, мы условимся отсчитывать, как показано стрелками на рис. 169.

Условившись отсчитывать абсциссы от фокальных плоскостей, мы будем в дальнейшем обозначать их буквами  $x$  и  $x_1$  без штрихов и перепишем уравнения (167') и (168) в следующем виде:

$$\frac{y_1}{y} = \frac{f}{x} = \frac{x_1}{f_1}, \quad (169)$$

положив  $A = ff_1$ . Величины  $f$  и  $f_1$ , как мы увидим в следующем параграфе, имеют весьма важное значение и называются первым и вторым фокусными расстояниями системы.

Уравнения (169), дающие непосредственно поперечное увеличение изображения, позволяют вычислить также и продольное увеличение, которое должно быть определено как отношение приращений  $dx_1$  к  $dx$ , очевидно равное

$$\frac{dx_1}{dx} = -\frac{ff_1}{x^2} = -\frac{x_1^2}{ff_1} = -\frac{x_1}{x}.$$

Величина продольного увеличения таким образом совершенно отлична от величины поперечного увеличения, и поэтому подобие изображения предмету сохраняется лишь в том случае, если последний лежит весь в плоскости (плоский объект), перпендикулярной к оптической оси.

Нам придется в дальнейшем рассматривать еще одну величину, которую назовем угловым увеличением. Если какой-нибудь луч в пространстве объектов пересекает ось прибора под углом  $u$ , а сопряженный ему луч составляет с осью угол  $u_1$ , то отношение  $\operatorname{tg} u_1 : \operatorname{tg} u$  есть угловое увеличение, соответствующее точке пересечения луча с оптической осью. Все лучи, проходящие через эту точку, будут иметь одинаковое угловое увеличение, которое следовательно зависит только от положения точки относительно главного фокуса, но не зависит от величины угла  $u$ . Это утверждение будет доказано в следующем параграфе.

### § 83. Главные плоскости и фокусные расстояния.

Из уравнения (169) можно получить следующий результат: поперечное увеличение равно единице, если объект отстоит от своей фокальной плоскости на расстояние  $f$ , а изображение на расстояние  $f_1$  от фокальной плоскости изображений; или, иначе, две плоскости, проведенные параллельно

фокальным плоскостям на расстоянии  $f$  и  $f_1$  от них, представляют сопряженные плоскости, отличающиеся тем, что объекты, расположенные в этих плоскостях, и их изображения не только имеют равную величину, но и расположены одинаковым образом (прямое изображение).

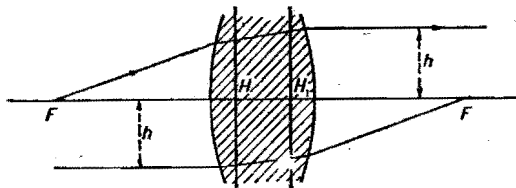


Рис. 170.

Эти плоскости ( $H$  и  $H_1$ , рис. 170), называемые главными плоскостями оптической системы, имеют весьма важное значение, но не как место действительных объектов и изображений, а лишь для нахождения сопряженных лучей, которые мы должны уметь строить для определения положения и величины изображения.

Таким образом основным свойством главных плоскостей является то, что всякий луч в пространстве объектов и сопряженный ему в пространстве изображений должен пересечь их на одинаковой высоте ( $y = y_1$ ). Это позволяет построить две пары сопряженных лучей, проходящих через любую точку объекта и его изображения (рис. 171, а). Одну пару образуют луч, параллельный оси прибора и пересекающий главную плоскость  $H$  на высоте  $h$ , и сопряженный ему луч, проходящий через  $F_1$  и также пересекающий вторую главную плоскость  $H_1$  на высоте  $h$ . Другая пара состоит из луча, проходящего через фокус  $F$ , и из сопряженного ему, параллельного оси в пространстве изображений.

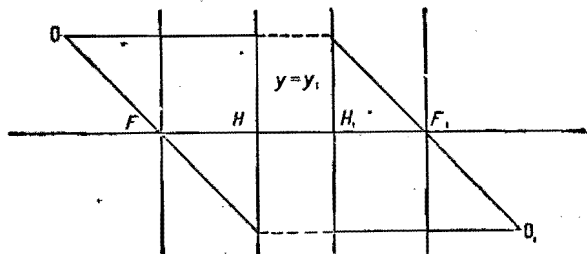


Рис. 171а.

Так как через всякую точку пространства можно провести луч, параллельный оси, и луч, проходящий через главный фокус (за исключением тех точек, которые лежат в фокальной плоскости), то можно построить и изображение точки по пересечению сопряженных лучей. Это построение не может дать, конечно, ответа на вопрос, где находится изображение точки, если последняя лежит на оси прибора.

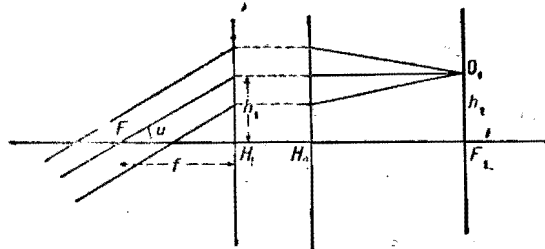


Рис. 171б.

Положим еще, что мы нашли пучок параллельных лучей, пересекающих ось  $FH$  под углом  $u$  (рис. 171, б). Эти лучи, пройдя через систему, соберутся

и изображение точки по пересечению сопряженных лучей. Это построение не может дать, конечно, ответа на вопрос, где находится изображение точки, если последняя лежит на оси прибора.

Положим еще, что мы нашли пучок параллельных лучей, пересекающих ось  $FH$  под углом  $u$  (рис. 171, б). Эти лучи, пройдя через систему, соберутся

в точке фокальной плоскости на расстоянии  $h_1$  от оси. Можно считать, что весь пучок параллельных лучей идет от точки бесконечно удаленного объекта, изображение которого имеет величину  $h_1$ . В таком случае мы определим угловую величину бесконечно удаленного объекта как  $\operatorname{tg} u$ , где  $u$  — угол между крайними лучами. Этим углом мы оцениваем величину объекта, как он представляется нам при сравнении с более близкими объектами, видимыми под тем же углом.

Так как  $h_1 = f \operatorname{tg} u$ , то можно определить величину  $f$  как отношение линейной величины изображения бесконечно удаленного объекта к угловой величине самого объекта. Величину  $f$ , определенную таким образом, мы назовем первым фокусным расстоянием.

Подобно  $f$ , фокусное расстояние в пространстве изображений, т. е.  $f_1$ , мы определим как отношение линейной величины объекта, расположенного в фокальной плоскости, к угловой величине его бесконечно удаленного изображения:

$$f_1 = \frac{h}{\operatorname{tg} u}. \quad (170)$$

Фокусные расстояния определяют положение главных плоскостей относительно фокальных, которые мы выбрали за координатные плоскости. Но можно, конечно, поступить иначе и за координатные плоскости выбрать главные плоскости. Посмотрим, как изменится форма уравнения (169), если ввести расстояние предмета и изображения от главных плоскостей. Условимся считать эти расстояния положительными, если объект находится перед главной плоскостью  $H$ , а изображение — за второй главной плоскостью  $H_1$ . Обозначим эти расстояния  $\xi$  и  $\xi_1$ . На рис. 172 объект находится влево от главного фокуса и следовательно его  $x < 0$ , как это следует из условия о положительном направлении осей. Точно так же и  $x_1 < 0$ , и поэтому  $\xi = f - x$  и  $\xi_1 = f_1 - x_1$ .

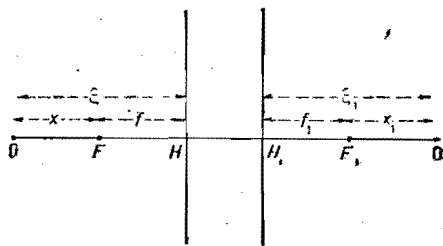


Рис. 172.

Если выразить  $x$  и  $x_1$  в формуле (169) через  $\xi$  и  $\xi_1$ , то получим  $xx_1 = (f - \xi)(f_1 - \xi_1) = ff_1$ .

Из этого уравнения находим  $\xi\xi_1 - f\xi_1 - f_1\xi = 0$ , или же при помощи простого преобразования:

$$1 = \frac{f}{\xi} + \frac{f_1}{\xi_1}. \quad (171)$$

Пользуясь главными плоскостями, мы можем найти величину углового увеличения (стр. 211) для любой точки оптической оси.

Пусть луч, проходящий через точку  $O$  и составляющий с осью прибора угол  $u$  (рис. 173), пересекает главную плоскость на расстоянии  $h$  от оси; сопряженный

ему луч, пересекающий ось в точке  $O_1$  под углом  $u_1$ , должен пересекать главную плоскость  $H_1$  на том же расстоянии и следовательно

$$\operatorname{tg} u_1 : \operatorname{tg} u = \frac{h}{\xi_1} : \frac{h}{\xi} = (f - x) : (f_1 - x_1).$$

Но из уравнений (169) получаем:

$$f_1 - x_1 = f_1 - \frac{ff_1}{x} = \frac{f_1}{x} (x - f) = -\frac{f_1}{x} (f - x)$$

и поэтому:

$$\operatorname{tg} u_1 : \operatorname{tg} u = -\frac{x}{f_1} = -\frac{f}{x_1}. \quad (172)$$

Формулы (172) показывают, что угловое увеличение для данной точки  $O$  есть величина постоянная, не зависящая от  $u$ , и что оно пропорционально расстоянию  $x$  точки от главного фокуса.

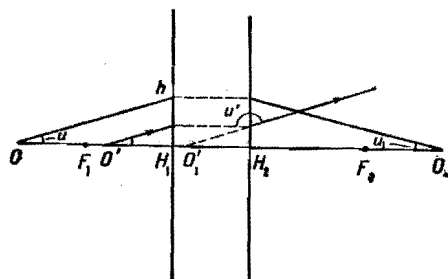


Рис. 173.

Знак этого отношения, зависящий от того, по какую сторону от  $F$  лежит  $O$ , определяет направление сопряженного луча. Так напр., при  $x > 0$ , т. е. если  $O'$  лежит между главным фокусом и главной плоскостью (рис. 173), направление сопряженного луча таково, что угол  $u' > 90^\circ$ , и действительного изображения точки  $O'$  не получается. В этом случае угловое увеличение отрицательно.

Сравнивая формулу (169) для поперечного увеличения  $y_1 : y$  с формулой для углового увеличения  $\operatorname{tg} u_1 : \operatorname{tg} u$ , мы находим замечательное соотношение: произведение поперечного и углового увеличения есть величина постоянная, независящая от положения точки на оси, а именно:

$$\frac{y_1}{y} \cdot \frac{\operatorname{tg} u_1}{\operatorname{tg} u} = -\frac{f}{f_1}.$$

Как следствие, имеем не менее замечательное соотношение:

$$f_1 y_1 \operatorname{tg} u_1 = -f y \operatorname{tg} u. \quad (173)$$

В правой и левой части этого равенства мы находим произведение величин, относящихся только к пространству объектов или же только к пространству изображений. Произведение этих величин сохраняет неизменную величину, если заменить фокусное расстояние  $f$  одного пространства фокусным расстоянием  $f_1$  другого, линейную величину объекта  $y$  в какой-нибудь точке оси линейной величиной  $y_1$  его изображения, а угол наклона  $u$  любого луча в этой точке углом наклона  $u_1$  луча сопряженного.

Это произведение инвариантно по величине, но можно сделать его инвариантным и в отношении знака, если во всех пространствах сделать поло-

жительное направление оси  $x$  одинаковым (слева направо) и отсчитывать углы, составляемые лучами с этим направлением одинаковым образом в обоих пространствах ( $u_1' = -u_1$ ):

$$fy \operatorname{tg} u = f_1 y_1 \operatorname{tg} u_1'. \quad (173')$$

Угловое увеличение дает возможность определить положение еще двух особенных точек оптической системы, называемых узловыми. Узловые точки являются сопряженными точками, обладающими тем свойством, что для них угловое увеличение равно  $-1$ .

Согласно формулам (173) и (169)  $\operatorname{tg} u_1 : \operatorname{tg} u = -1$ , если  $x = f_1$  и  $x_1 = f$ , поэтому узловые точки  $K$  и  $K_1$  мы получим, откладывая от главных фокусов  $F$  и  $F_1$  отрезки, равные фокусным расстояниям. Это определение узловых точек напоминает способ построения главных точек, с той разницей, что  $FH = f$  в то время как  $FK = f_1$  и соответственно  $F_1H_1 = f_1$ , а  $F_1K_1 = f$ .

Если фокусные расстояния  $f$  и  $f_1$  равны, то главные точки совпадают с узловыми. Если же  $f$  и  $f_1$  различны, то расстояние между главной и узловой точкой и в пространстве объектов и в пространстве изображений одно и то же:

$$HK = H_1K_1 = f - f_1.$$

Таким образом луч, проходящий через узловую точку, выйдет из прибора, не изменив своего направления, но испытав некоторое смещение вдоль оси прибора.

Если известно положение узловых точек, то можно для построения сопряженных лучей пользоваться лучами, проходящими через эти точки, так же, как выше мы пользовались лучами, проходящими через главные фокусы.

## § 84. Преломление и отражение лучей шаровой поверхностью.

В сложных центрированных системах ход лучей зависит от преломления и отражения их сферическими поверхностями. Каждая линза, напр., представляет собой систему двух таких поверхностей, и луч, проходя через линзу, дважды испытывает преломление. Но прежде чем разбирать более сложные системы, мы остановимся на рассмотрении преломления лучей одной поверхностью, разделяющей две среды с различными показателями преломления  $n$  и  $n_1$ . Как мы

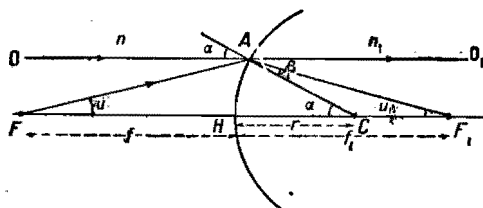


Рис. 174.

увидим, случай отражения легко может быть сведен также к случаю преломления. Рассмотрим вначале преломление лучей, параллельных главной оптической оси (рис. 174), пересекающей поверхность сферы в точке  $A$ . При этом мы ограничимся только лучами, идущими вблизи от оптической оси, т. е. лучами аксиальными. Тогда можно считать поверхность сферы совпадающей с



касательной плоскостью в точке  $H$ , которая и будет главной плоскостью и для пространства объектов и для пространства изображений, так как и падающий на сферу и преломленный ею луч пересекают ее в одной и той же точке на высоте  $h$ . Главные плоскости  $H$  и  $H_1$ , которые могут быть различными в сложных оптических системах, здесь сливаются в одну. Расстояние от точки  $H$  до главного фокуса  $F_1$ , где преломленный луч пересекает оптическую ось, есть фокусное расстояние для пространства изображений  $f_1 = HF_1$ . Подобным же образом мы определим  $f = FH$  как фокусное расстояние в пространстве объектов.

Положение точки  $A$  на преломляющей сфере определяет угол  $\alpha$ , который луч  $OA$  составляет с радиусом  $AC$ , т. е. с нормалью к поверхности. Этот угол должен быть мал, раз мы условились рассматривать только аксиальные лучи. Также малы угол преломления  $\beta = \angle CAF_1$  и тот угол  $u_1 = \angle CF_1A$ , под которым преломленный луч  $AF_1$  пересекает оптическую ось. Согласно закону преломления

$$\sin \alpha : \sin \beta = n_1 : n$$

и из треугольника  $CAF_1$  имеем:

$$\frac{\sin \beta}{\sin u_1} = \frac{f_1 - r}{r} = \frac{CF_1}{CA}$$

Перемножая эти равенства, получаем:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin u_1} = \frac{n_1}{n} \frac{f_1 - r}{r}$$

С другой стороны  $AH = CH \operatorname{tg} \alpha = F_1H \operatorname{tg} u_1$  или  $h = r \operatorname{tg} \alpha = f_1 \operatorname{tg} u_1$  и следовательно

$$\operatorname{tg} \alpha : \operatorname{tg} u_1 = f_1 : r.$$

Если углы  $\alpha$  и  $u_1$  достаточно малы, то приближенно можно считать отношение тангенсов и синусов равными и поэтому

$$\frac{f_1}{r} = \frac{n_1}{n} \frac{f_1 - r}{r}.$$

Откуда находим выражение для фокусного расстояния:

$$f_1 = \frac{n_1}{n_1 - n} r. \quad (174)$$

Подобным же образом, рассматривая преломление луча  $FAO_1$ , найдем:

$$FH = f = \frac{n}{n_1 - n} r. \quad (174')$$

Мы видим, что фокусные расстояния здесь неодинаковы и относятся между собой, как показатели преломления в пространствах объектов и изображений,

$$f : f_1 = n : n_1. \quad (175)$$

Узловые точки в этом случае совпадают и притом они находятся в центре сферы  $C$ . Всякий луч, проходящий через центр сферы, тем самым направлен по нормали к ее поверхности и поэтому не будет изменять своего направления. Выше было показано, что расстояние между точками  $H$  и  $K$  равно разности фокусных расстояний. Но из (174) и (174') мы находим, что

$$f_1 - f = r$$

или, иными словами, узловые точки  $K$  находятся от главной точки  $H$ , т. е. от поверхности сферы, на расстоянии  $r$ , т. е. совпадают с центром  $C$ .

Рассмотрим еще преломление луча сферой (рис. 175), когда угол наклона его равен  $u$  и очень мал так же, как и угол  $u_1$ . В этом случае синусы и тангенсы приближенно равны между собой, а кроме того отрезки наклонных прямых  $OA$  и  $O_1A$  могут быть заменены их проекциями  $OH$  и  $O_1H$ .

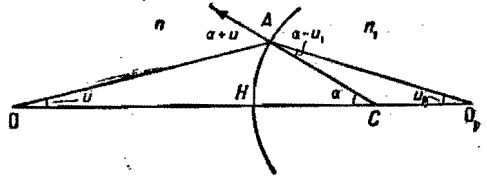


Рис. 175.

Обозначив эти расстояния  $\xi$  и  $\xi_1$  и считая их равными соответственно отрезкам  $OA$  и  $O_1A$ , мы находим соотношение  $\xi \sin u = \xi_1 \sin u_1$ , или  $\xi \operatorname{tg} u = \xi_1 \operatorname{tg} u_1$ .

Угловое увеличение равно, очевидно,

$$\operatorname{tg} u : \operatorname{tg} u_1 = \xi_1 : \xi = (f_1 - x_1) : (f - x),$$

если, как и ранее, обозначить  $FO = -x$  и  $F_1O_1 = -x_1$ .

Кроме того угол падения луча  $OA$  на поверхность сферы равен  $\alpha + u$ , а угол преломления  $\angle CAO_1 = \alpha - u_1$  и, следовательно,

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\sin(\alpha + u)}{\sin(\alpha - u_1)}.$$

Но треугольники  $OAC$  и  $O_1AC$  дают следующие соотношения:

$$\frac{AC}{OC} = \frac{\sin u}{\sin(\alpha + u)} \quad \text{и} \quad \frac{AC}{O_1C} = \frac{\sin u_1}{\sin(\alpha - u_1)}$$

и следовательно

$$\frac{OC}{O_1C} = \frac{\sin(\alpha + u)}{\sin(\alpha - u_1)} \cdot \frac{\sin u_1}{\sin u} = \frac{n_1 \sin u_1}{n \sin u}.$$

Не трудно видеть, что  $OC = \xi + r$  и  $O_1C = \xi_1 - r$ ; поэтому из форм. (175) получаем:

$$(\xi + r)n \sin u = (\xi_1 - r)n_1 \sin u_1. \tag{176}$$

Вследствие малости углов  $u$  и  $u_1$  можно считать:

$$\sin u : \sin u_1 = \operatorname{tg} u : \operatorname{tg} u_1 = \xi_1 : \xi,$$

что позволяет исключить из уравнения (176) синусы и привести его в такой вид:

$$(\xi + r) \cdot n \xi_1 = (\xi_1 - r) \xi n.$$

Разделив его на  $\xi \xi_1$  и преобразуя, мы приводим его к виду

$$\left(1 + \frac{r}{\xi}\right)n = \left(1 - \frac{r}{\xi_1}\right)n_1$$

и окончательно находим уравнение:

$$\frac{r}{\xi} \cdot \frac{n}{n_1 - n} + \frac{r}{\xi_1} \cdot \frac{n_1}{n_1 - n} = 1. \quad (177)$$

Сравнивая последнее уравнение с (171), мы видим, что они тождественны, если фокусные расстояния определить равенствами (174) и (174'). От уравнения же (171), полагая в нем  $\xi = f - x$  и  $\xi_1 = f_1 - x_1$ , мы приходим к уравнению  $xx_1 = ff_1$ .

Поперечное увеличение изображений найдем следующим образом.

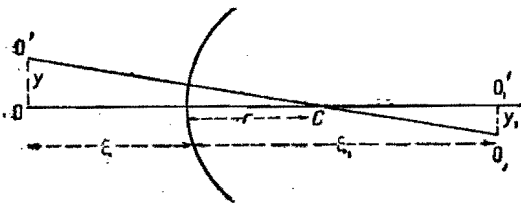


Рис. 176.

Проведем через центр  $C$  побочную ось  $O'CO_1$  (рис. 176). Тогда, очевидно, точки  $O'$  и  $O_1'$  будут сопряженными, если они находятся от  $C$  на расстояниях, равных  $OC$  и  $O_1'C$ , т. е. лежат на окружностях, описанных около  $C$  радиусами  $OC$  и  $O_1'C$ . Если отрезки  $OO'$  и  $O_1O_1'$  достаточно малы, то можно считать, что они представляют собой объект  $y$  и изображение  $y_1$ . Поэтому поперечное линейное увеличение равно

$$-\frac{y_1}{y} = \frac{CO_1'}{CO} = \frac{\xi_1 - r}{\xi + r}.$$

Знак минус показывает, что изображение объекта должно быть обратным.

Последнее соотношение позволяет преобразовать уравнение (176) в уравнение, близкое к (173), а именно:

$$yn \sin u = -y_1 n_1 \sin u_1,$$

совпадающее с ним, если углы достаточно малы.

Таким образом в случае одной преломляющей сферы для аксиальных лучей и точек, близких к главной оптической оси, мы имеем все те геометрические отношения, которые должны иметь место в центрированных оптических системах, удовлетворяющих условиям, изложенным в § 81. Но оптические системы состоят всегда из нескольких преломляющих поверхностей (напр., линза имеет две поверхности), и поэтому нам придется рассмотреть, как комбинируются различные простые системы и как находятся расчетом основные свойства сложных систем.

Законы отражения лучей сферическим зеркалом могут быть выражены предыдущими формулами, если положить отношение показателей преломления  $n_1 : n = -1$ . В самом деле, если  $i$  — угол падения, то, как видно на рис. 177,

можно считать, что угол преломления  $r = -i$ . Лучи, падающие на зеркало и отраженные от него, идут в том же пространстве и отличаются только направлением распространения. Главной плоскостью является здесь плоскость, совпадающая с поверхностью зеркала около оптической оси. Оба главных фокуса совпадают, так как фокусные расстояния имеют равную величину и противоположные знаки (т. е. отсчитываются не в разные стороны от главной плоскости, а в одном направлении). Величина фокусных расстояний:

$$f = \frac{nr}{n_1 - n} = -\frac{r}{2} \text{ и } f_1 = \frac{n_1 r}{n_1 - n} = \frac{r}{2}.$$

Узловые точки также совпадают в центре сферического зеркала.

Наконец, уравнение (171) превращается в известное уравнение сферического зеркала:

$$\frac{2}{r} = -\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi_1}, \quad (178)$$

где  $\xi$  и  $\xi_1$  — расстояния точки  $O$  и ее изображения  $O_1$  от главной плоскости.

Знак фокусных расстояний зависит от того, какую кривизну имеет зеркало. Если оно вогнутое, т. е. центр сферы находится влево от зеркала, то кривизна считается отрицательной, и следовательно радиус  $r < 0$ . Поэтому фокусное расстояние  $f$  мы будем считать положительным, и первый главный фокус лежит перед главной плоскостью. Для выпуклого зеркала наоборот:  $r > 0$ , но  $f < 0$  и следовательно первый главный фокус находится позади зеркала (мнимый).

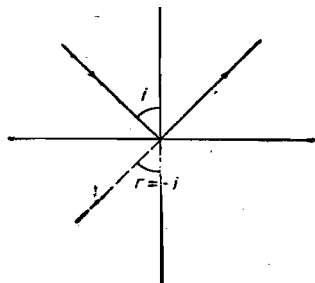


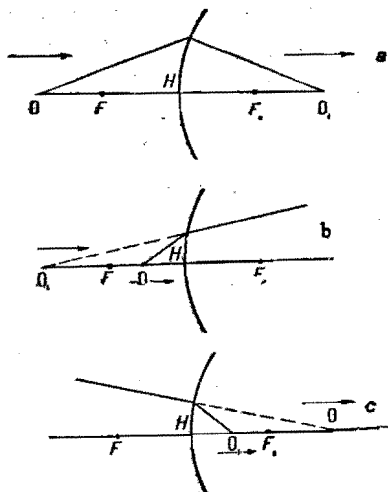
Рис. 177.

## § 85. Классификация оптических систем.

На примере тех простейших систем, которые мы рассмотрели в предыдущем параграфе, можно установить классификацию, соответствующую их основным свойствам.

Диоптрическими, или преломляющими, системами мы будем называть такие, у которых оба фокусных расстояния имеют один и тот же знак. Главные фокусы лежат по разные стороны от соответствующих главных плоскостей. Примером такой системы является разобранный случай сферической преломляющей поверхности. При этом можно различать три случая: если объект находится слева на бесконечно большом расстоянии от этой поверхности, то его изображение находится во втором главном фокусе справа; при приближении объекта к первому главному фокусу, т. е. при движении его слева направо, изображение отодвигается в бесконечность, т. е. тоже совершает движение слева направо (рис. 178, а). Если объект  $O$  находится между фокусом и поверхностью сферы, то его изображение  $O_1$  будет мнимым и находится позади объекта. При приближении  $O$  к поверхности изображение догоняет его (рис. 178, б), двигаясь с большей скоростью. В точке  $H$  они совпадают.

Если объект (рис. 178, *с*) мнимый, т. е. находится справа от поверхности сферы в точке  $O$ , то изображение расположено между сферой и вторым фокусом в точке  $O_1$ . При удалении в бесконечность изображение перемещается, двигаясь в ту же сторону между  $H$  и  $F_1$ , и приходит в точку  $F_1$ , когда мнимый объект оказывается на бесконечности.

Рис. 178 *a, b, c.*

Диоптрическую систему можно назвать системой прямого хода, так как при перемещении объекта изображение перемещается в том же направлении.

Диоптрические системы, в свою очередь, разделяются на собирающие (положительные) и рассеивающие (отрицательные) в зависимости от знака фокусных расстояний. Если оба фокусные расстояния положительные (рис. 180), то первый главный фокус находится в пространстве объектов, а второй — в пространстве изображений; оба фокуса действительные, и всем объектам, которые находятся перед первым фокусом, со-

ответствуют действительные изображения за вторым главным фокусом. Лучок лучей, выходящий из любой точки, находящейся перед первым фокусом, превращается в сходящийся пучок, т. е. собирается в некоторой точке позади второго фокуса. Для того чтобы фокусные расстояния были положительны, в случае одной преломляющей сферы, как показывают формулы (174) и (174'), нужно, чтобы радиус ее и разность  $n_1 - n$  показателей преломления по обе стороны сферы были одного знака.

Таким образом, если центр сферы лежит справа, т. е. выпуклой стороной она обращена к пространству объектов, необходимо, чтобы показатель преломления справа (в пространстве изображений) был больше, чем слева. Наоборот, если мы имеем со стороны объектов вогнутую сферу ( $r < 0$ ), нужно, чтобы среда по другую сторону сферы была менее преломляющая ( $n_1 < n$ ).

Отрицательные системы (рис. 179), имеющие отрицательные фокусные расстояния, дают мнимые изображения действительных объектов, так как оба главных фокуса их мнимые. Вогнутая сфера, отделяющая сферу с малым показателем преломления  $n$  от сферы с большим показателем  $n > n_1$ , является примером рассеивающих систем прямого хода.

Другой класс систем представлен сферическим зеркалом (рис. 180). Его фокусные расстояния имеют противоположные знаки, и поэтому оба главных

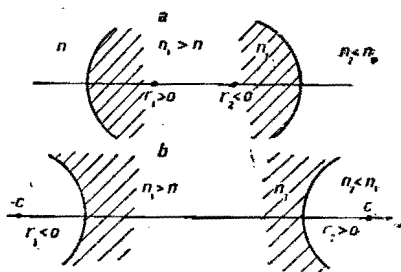


Рис. 179.

фокуса находятся по ту же сторону от главной плоскости, и пространства действительных объектов и изображений совпадают.

При приближении объекта к главному фокусу зеркала слева изображение удаляется в бесконечность, т. е. движется в обратном направлении. Таким образом зеркало является примером системы обратного хода, или катоптрической. Более сложные системы этого рода всегда содержат одно или вообще нечетное число зеркал, которые меняют направление хода лучей в обратное и делают систему катоптрической.

Эти системы могут быть положительными или отрицательными в зависимости от того, где находится первый главный фокус. Если он лежит перед зеркалом или перед первой главной плоскостью  $H$ , то мы имеем систему с действительным фокусом. Второй главный фокус будет лежать перед второй главной плоскостью. В этом случае  $f_1 > 0$ , а  $f_2 < 0$ . Если первый главный фокус мнимый, т. е.  $f_1 < 0$ , то мы имеем рассеивающую систему, представителем которой может быть выпуклое зеркало, дающее расходящиеся пучки лучей, если светящаяся точка находится перед сферой.

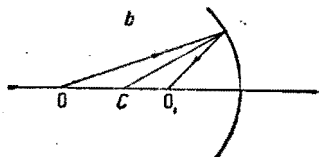


Рис. 180.

### § 86. Сложные оптические системы. Линзы.

Обыкновенная линза является простейшим примером сложной центрированной системы. Она включает две преломляющие сферические поверхности на некотором расстоянии друг от друга. Для расчета таких сложных систем можно исходить из свойств простых сферических поверхностей, принимая во внимание их взаимное расположение и строя лучи по известным нам правилам. Можно исходить и из более сложных систем, если для них известны положения как главных фокусов, так и главных плоскостей, т. е. оба их фокусные расстояния. Расчет должен дать положения главных фокусов сложной системы и величины их фокусных расстояний.

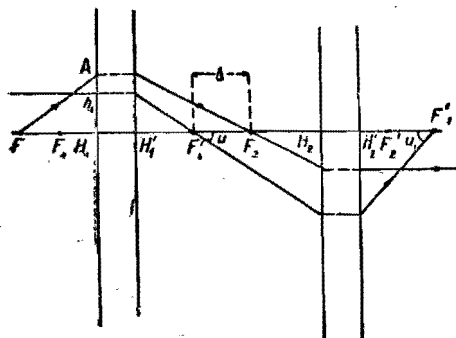


Рис. 181.

Пусть  $F_1$  и  $F_1'$  (рис. 181) обозначают главные фокусы одной системы, а  $F_2$  и  $F_2'$  — главные фокусы второй системы. Расстояние между вторым фокусом первой системы и первым фокусом второй, т. е. расстояние  $F_1'F_2 = \Delta$ , мы будем называть интервалом сложной системы, который может быть и положительным и отрицательным, смотря по тому, находится ли фокус  $F_2$  позади фокуса  $F_1'$  или впереди него. Плоскости  $H_1$  и  $H_1'$ , а также плоскости  $H_2$  и  $H_2'$ , т. е. главные плоскости отдельных систем, должны быть также известны, если даны фокусные расстояния (запр.  $F_1H_1 = f_1$  и т. д.).

Луч  $A$ , параллельный оптической оси, пройдя через первую систему, пересекает ось в точке  $F_1'$ . Изображение этой точки, даваемое второй системой, мы обозначим через  $F'$ . Очевидно, эта точка и будет главным вторым фокусом сложной системы, так как в ней пересекаются все лучи, которые перед входом в сложную систему были параллельны оптической оси. Чтобы найти положение точки  $F'$  напр. расстояние ее от  $F_2'$ , мы воспользуемся уравнением (169). В данном случае  $x = -\Delta$ , а  $x_1 = F_2'F'$  и следовательно

$$-\Delta F_2'F' = f_2 f_2'.$$

Таким образом главный фокус  $F'$  сложной системы тем дальше, чем меньше интервал  $\Delta$ , и, когда последний обращается в нуль, система вообще не имеет фокусов на конечном расстоянии, и мы имеем телескопическую систему. Таким же точно образом найдем положение и первого фокуса  $F$  из уравнения

$$\Delta F_1 F = f_1 f_1'.$$

Положим, что луч  $A$  пересекает плоскость  $H_1$  в точке  $h_1$ . Из определения фокусного расстояния находим:

$$f_1' \operatorname{tg} u = h_1.$$

С другой стороны, по формуле (172)

$$\operatorname{tg} u : \operatorname{tg} u_1 = +\Delta : f_2'.$$

Из этих двух формул получаем:

$$f = \frac{h_1}{\operatorname{tg} u} = \frac{f_1' f_2'}{\Delta}. \quad (179)$$

Точно таким же образом найдем, что

$$f = -\frac{f_1 f_2'}{\Delta}. \quad (179')$$

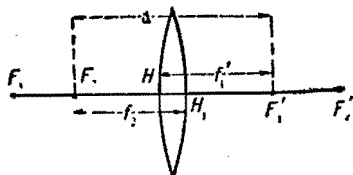


Рис. 182.

Этот метод расчета применим и к расчету линз, т. е. стекол, ограниченных сферическими поверхностями. Каждая такая поверхность характеризуется радиусом кривизны и показателем преломления стекла  $n$ . Другой показатель равен единице, так как линзы обычно находятся в воздухе. Кроме того необходимо иметь в виду, что главные плоскости каждой поверхности совпадают с касательной плоскостью к ним. Если линзы к тому же достаточно тонки, так что можно считать, что поверхности их почти совпадают, то интервал  $\Delta$  (рис. 182) просто равен

$$-(f_1' + f_2) = \Delta.$$

Фокусные расстояния  $f_1'$  и  $f_2$  согласно формулам (174) и (174') равны соответственно

$$f_1' = \frac{n}{n-1} r_1$$

и

$$f_2 = \frac{n}{1-n} r_2$$

и следовательно

$$\Delta = -\frac{n(r_1 - r_2)}{n-1}$$

Для определения фокусного расстояния линзы мы найдем согласно (179') такую формулу ( $f_1 = \frac{r_1}{n-1}$ ):

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} = -\frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_1 - r_2)}$$

или

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (180)$$

Если обе поверхности линзы выпуклые (рис. 184, *a*), т. е. первая обращена налево выпуклостью, а вторая вогнутостью, то радиус  $r_2$  нужно считать отрицательным, и следовательно такая линза будет иметь положительное фокусное расстояние, которое найдется по формуле

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (180')$$

Таким образом двояко-выпуклая стеклянная линза всегда является собирающей. Таким же образом легко показать, что двояко-вогнутая линза (рис. 183, *b*) всегда рассеивающая, а

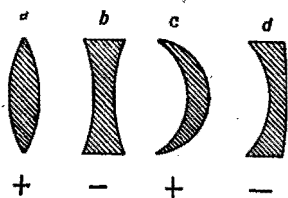


Рис. 183.

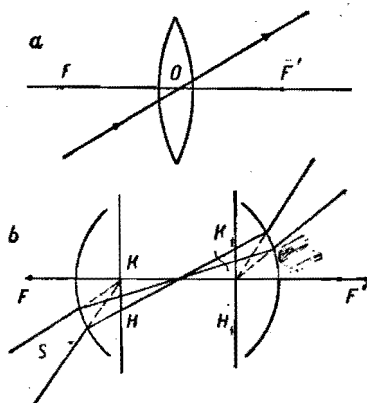


Рис. 184.

выпукловогнутая (рис. 183, *c* и *d*) является собирающей (+), если кривизна выпуклой части больше кривизны вогнутой, и рассеивающей (-) при обратном отношении.

Главные плоскости тонкой линзы практически совпадают с ее поверхностью или проходят через некоторую точку внутри нее, которая называется оптическим центром линзы. Оба фокусных расстояния равны, и потому узловые точки тонкой линзы также совпадают с оптическим центром. В виду



этого лучи, проходящие через оптический центр, не испытывают изменения направления (рис. 184, *a*).

В линзах, имеющих конечную толщину, ход лучей будет несколько иной, и формула для вычисления фокусного расстояния усложняется, так как интервал  $\Delta$  будет зависеть от толщины линзы  $d$ :

$$\Delta = -(f_1' + f_2 + d).$$

Оба фокусных расстояния линзы одинаковы, так как показатель преломления в пространстве объектов и в пространстве изображений один и тот же ( $n=1$ , воздух). Узловые точки  $K$  и  $K_1$  совпадают поэтому с главными точками  $H$  и  $H_1$  линзы, но эти последние не совпадают друг с другом, и вместо одного оптического центра мы имеем две узловые точки. Луч  $S$ , направленный в точку  $K$ , после преломления в линзе выйдет из нее по направлению, параллельному  $SK$  и проходящему через вторую узловую точку  $K_1$  (рис. 184, *b*).

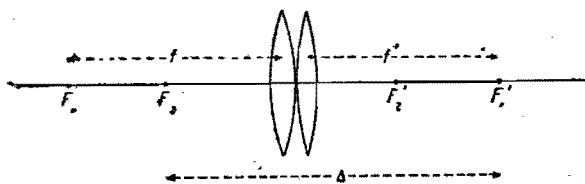


Рис. 185.

Подобным же образом можно рассчитывать и фокусные расстояния системы линз. Мы ограничимся здесь рассмотрением случая двух тонких линз (рис. 185), расположенных настолько близко друг к другу, что расстоянием между их главными

плоскостями по сравнению с фокусными расстояниями  $f_1$  и  $f_2$  отдельных линз можно пренебречь. В этом случае интервал  $\Delta = F_1'F_2$  равен сумме фокусных расстояний, взятой с соответственным знаком. В случае, изображенном на рис. 185, когда  $F_2$  находится влево от  $F_1'$ :

$$\Delta = -(f_1 + f_2).$$

На основании (179') мы имеем для фокусного расстояния  $f$  системы линз уравнение

$$f = -\frac{f_1 f_2}{\Delta} = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2},$$

или, что то же:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \quad (181)$$

Последнее уравнение дает простое правило приближенного вычисления фокусных расстояний сложных линз. Если назовем обратную величину фокусного расстояния оптической силой линзы, то можно формулировать его как правило простого сложения оптических сил. При сложении нужно, конечно, иметь в виду знак фокусных расстояний.

Две собирающие линзы с положительными фокусными расстояниями дают

при сложении систему с меньшим фокусным расстоянием. Складывая собирающую и рассеивающую линзы, мы, наоборот, увеличиваем фокусное расстояние.

Как пример расположения главных плоскостей и главных фокусных расстояний для линзы не тонкой, приведем случай выпукло-вогнутых линз, предполагая, что показатель преломления стекла  $n = 1,5$ , радиусы сферических поверхностей  $r_1 = 10$  и  $r_2 = 20$ , а толщина  $d$  линзы меняется от нуля (тонкая линза) до 40 (рис. 186).

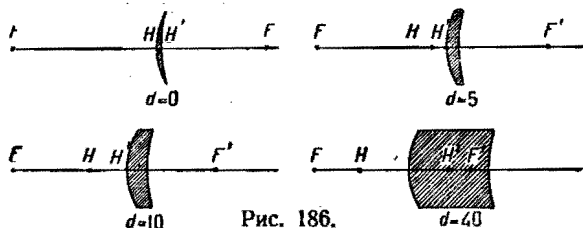


Рис. 186.

### § 87. Недостатки оптических систем.

Изложенная выше геометрическая теория изображений, получаемых при помощи оптических приборов, предполагает, что лучи, вышедшие из одной точки в пространстве объектов, пересекутся также в одной точке в пространстве изображений. Другими словами, пучки лучей после ряда преломлений и отражений, испытанных у сферических поверхностей линз и зеркал, должны сохранить свою гомоцентричность. Однако это условие соблюдается для точек, находящихся на оси прибора, только тогда, когда лучи составляют малые углы с оптической осью, т. е. образуют узкие аксиальные пучки. Когда углы, образуемые лучами пучка, не могут считаться малыми, пучок после преломления у сферической поверхности теряет гомоцентричность. Правда, как мы уже видели, все лучи, образующие с осью  $OCO_1$  один и тот же угол, пересекаются на оси в одной точке, но положение этой точки зависит не только от положения источника лучей  $O$ , но и от угла  $u$  (рис. 187, а). Получается как бы бесконечное число изображений, лежащих на оптической оси. С другой стороны, если рассматривать пересечение лучей для близких углов  $u$  и  $u_1$  (рис. 187 а),

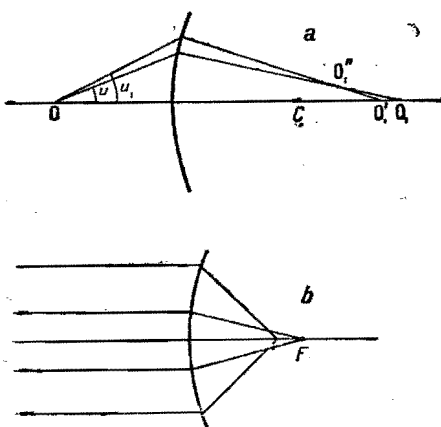


Рис. 187.

которые нельзя считать малыми, то они образуют геометрическое место точек  $O'$ , лежащих вне оптической оси. Эти недостатки изображений при преломлении у сферической поверхности имеют место и тогда, когда падающие лучи образуют пучок, параллельный оси, после преломления превращающийся в широкий сходящийся конус (рис. 187 б). Все эти недостатки называются сферической аберрацией и сводятся к свойству сферической поверхности

слишком сильно отклонять краевые лучи пучка, удаленные от оптической оси.

Другой недостаток, наблюдаемый при широких пучках, даже в тех случаях, когда сферическая аберрация для точек, лежащих на оси прибора, каким-либо способом устранена, заключается в том, что изображение точки, не лежащей на оптической оси, даваемое различными лучами, получается на разном расстоянии от оси; другими словами, поперечное увеличение объектов зависит от угла  $u$ , даже если размеры объекта малы.

Недостатки, связанные с шириной пучков, представляют одну группу и могут быть устранены при соблюдении определенных условий, если объекты невелики и лежат вблизи оптической оси. Наиболее важными приборами, в которых эти недостатки играют решающую роль, являются микроскоп и некоторые фотографические объективы с широким отверстием. О способах устранения в них сферической аберрации будет сказано в следующих параграфах.

Другая группа недостатков имеет место, если пучки лучей, хотя бы узкие, составляют большие углы с осью прибора. В этом случае объект находится вдали от оптической оси. Так, фотографические объективы для съемок больших поверхностей, напр., ландшафтов, должны давать хорошие изображения при преломлении косых пучков. Как мы уже видели (стр. 201), такие пучки делаются после преломления астигматическими. Лучи пучка, лежащие в меридианной плоскости, и лучи в сагитальной плоскости пересекаются в разных точках. Вместо точечного пересечения получается пересечение вдоль двух взаимно перпендикулярных отрезков, находящихся на разных расстояниях от линзы. Для устранения или ослабления астигматизма требуются уже иные изменения в оптических системах, чем те, которые позволяют уменьшить сферическую аберрацию. В виду этого функции оптических приборов обычно ограничены или получением изображений при помощи широких пучков, но при малой величине объекта, расположенного вблизи оптической оси, или же при пользовании узкими пучками воспроизведением изображений больших объектов, видимых под большими углами зрения. Но и в том и в другом случае устранение недостатков оптической системы связано с осложнениями ее путем комбинации линз разной формы и различным образом расположенных вдоль оси прибора.

Дальнейшее усложнение вызывается необходимостью устранения и хроматических недостатков приборов. Так как все прозрачные преломляющие тела обладают дисперсией, то положение изображений, зависящее от величины фокусных расстояний и положения главных фокусов, будет различно в зависимости от длин волн лучей. При нормальной дисперсии показатель преломления растет при убывании длины волны, и поэтому изображение, даваемое собирающей линзой, будет расположено тем ближе к ее поверхности, чем меньше длина волны. Вследствие этого при пользовании белым светом около краев изображений наблюдается окрашивание. Самым важным здесь является порча деталей изображения. Устранение хроматических недостатков достигается при помощи применения ахроматических линз (см. стр. 233). сверх того,

при расчете оптических систем нужно стремиться к тому, чтобы сферическая aberrация или астигматизм был устранен не для одной только волны, а по крайней мере для двух волн, достаточно различных по длине.

Менее важными недостатками изображений являются их выпуклость и искажения формы. Они особенно заметны, если изображение имеет большие размеры и следовательно осуществляется косыми пучками, составляющими с оптической осью большие углы.

Если изображения краевого объекта получаются на другом расстоянии от главной плоскости, чем изображение его середины, то все изображение делается выпуклым и, при пользовании плоскими экра-

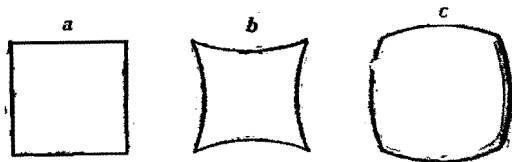


Рис. 188.

нами или фотографическими пластинками, края и середина изображения не выходят одновременно резкими. Искажение формы изображения получается от того, что пучки, наклонные к оси под различными углами, дают различное поперечное увеличение, вследствие чего фигура квадрата (рис. 188, *a*) принимает форму „подушки“ *b* (рис. 188), если увеличение растет при возрастании наклона лучей, или же форму „боченка“ *c* (рис. 188), если увеличение, наоборот, убывает.

### § 88. Сферическая aberrация.

Остановимся несколько подробнее на тех недостатках оптических систем, зависящих от ширины пучков лучей, которые носят название сферической aberrации. Пересечение лучей различных сагиттальных пучков происходит, как мы видели (стр. 225), в различных точках оптической оси в зависи-

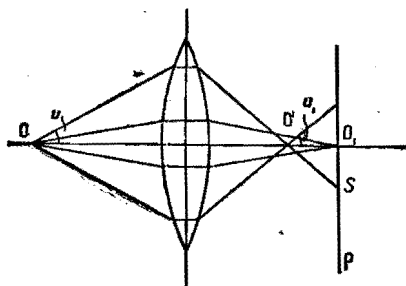


Рис. 189.

мости от угла, образуемого лучами пучка с осью. Аксиальные лучи пересекаются в точке  $O_1$  (рис. 189), где получается наиболее резкое и яркое изображение светящейся точки  $O$ . Лучи, составляющие конечный угол  $u$  с оптической осью, пересекаются в другой точке, лежащей по отношению к оптической системе (напр, линзе, рис. 189) ближе или дальше в зависимости от того, какой знак имеет фокусное расстояние, т. е. будет ли система собираю-

щей или рассеивающей. Расстояние  $O_1O_1'$  между изображениями, даваемыми аксиальными и крайвыми лучами пучка, называется продольной сферической aberrацией. Если в точке  $O_1$  поместить экран, то кроме изображения  $O_1$  мы получим еще ореол, или кружок рассеяния, т. е. освещение экрана лучами, выходящими из  $O$  под конечными углами к оси. Радиус этого кружка  $O_1S = \rho$  называется поперечной сфери-

ческой aberrацией и равен продольной aberrации, умноженной на тангенс угла  $u$ , определяющего ширину пучка:  $\rho = O'_1 O_1 \operatorname{tg} u_1$ .

Уменьшение aberrации достигается комбинированием преломляющих поверхностей, имеющих сферическую aberrацию разных знаков. При этом весьма важно, как расположены и в каком порядке чередуются эти поверхности. Так, напр., если заставить параллельный пучок лучей падать на плосковыпуклую линзу, то aberrация оказывается меньше, когда линза обращена к источнику лучей своей выпуклой стороной. Причиной этого является следующее обстоятельство. Если параллельные лучи падают вначале на выпуклую сторону, а затем уже и на плоскую, то они дважды испытывают преломление, прежде чем собраться в главном фокусе. При падении того же пучка вначале на плоскую поверхность лучи проходят, не преломляясь. Они преломляются, только проходя сферическую поверхность и испытывая таким образом сразу значительное изменение своего направления. В первом случае сумма сферических aberrаций оказывается меньше, чем aberrация при однократном преломлении. Особенно малую aberrацию можно получить в случае выпукловогнутой линзы при определенном соотношении между кривизной выпуклой поверхности и кривизной вогнутой. Вогнутая поверхность должна иметь в этом случае значительно больший радиус кривизны, чем выпуклая; поэтому ее можно заметить плоской, не вводя значительного увеличения aberrации.

Распределяя преломление лучей между несколькими поверхностями, образующими оптическую систему с данными фокусными расстояниями, можно значительно понизить или даже вовсе уничтожить aberrацию для конечных, но не очень больших углов.

### § 89. Каустика.

Если точки пересечения сагиттальных пучков расположены на оптической оси, заполняя короткий отрезок ее около фокуса аксиальных лучей  $O_1$  (рис. 190),

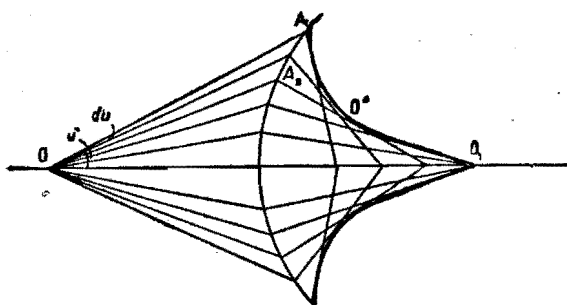


Рис. 190.

то меридианные пучки, заключенные между лучами  $OA_1$  и  $OA_2$ , составляющими с осью углы  $u$  и  $u + du$ , дают фокус в точке  $O'$ , находящейся вне оптической оси. Изменяя угол  $u$ , мы получим ряд таких точек, образующих кривую фокусов, или каустическую кривую (каустику), преломляющей поверхности. Так как оптическая ось

является осью симметрии, то все такие кривые лежат на поверхности вращения, или на каустической поверхности. Каждый луч имеет с каустикой две общие бесконечно близкие точки (точки пересечения с соседними лучами) и поэтому является касательной к ней. Каустика таким образом является огибающей всех преломленных лучей.

Подобные каустические поверхности можно построить и в случае плоской границы, разделяющей две среды. Положим, что светящаяся точка  $O$  (рис. 191) находится на глубине  $AO$  под плоской поверхностью воды. Оптической осью этой системы является нормаль  $AO$ . Луч  $OB$ , составляющий с ней угол  $i$ , после преломления будет иметь направление  $O_1B$ , где  $\angle AO_1B = r$  равен углу преломления. При малых углах  $i$  и  $r$  точка  $O_1$  находится на определенном расстоянии от поверхности жидкости, а именно:

$$AO_1 : AO = \operatorname{tg} i : \operatorname{tg} r \cong \frac{1}{n},$$

где  $n$  — показатель преломления воды относительно воздуха. Здесь мы отношение синусов заменили отношением тангенсов, что можно сделать только при малых углах  $i$  и  $r$ . Таким образом изображение точки  $O$ , которую мы увидим в точке  $O_1$ , представляется поднятым к поверхности. При конечных углах преломления соседние лучи пересекаются в точках, расположенных на каустике, и поэтому изображения точки  $O$  при наблюдении под большими углами к нормали кажутся поднятыми еще более. Каустика состоит из прямолинейного отрезка  $O_1O''$ , где пересекаются элементарные сагиттальные пучки, и из криволинейной поверхности вращения  $O_1O'''$ , на которой расположены точки пересечения аксиальных пучков.

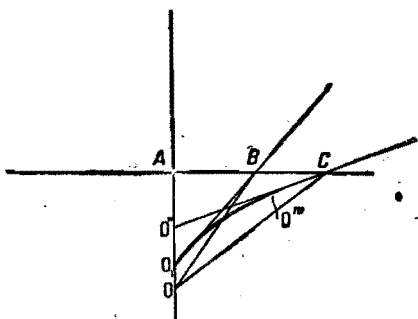


Рис. 191.

### § 90. Апланатические точки. Условие апланатизма.

Величина сферической aberrации зависит между прочим и от положения светящейся точки  $O$  на оптической оси. Если мы возьмем одну сферическую поверхность, то всегда можно найти такое положение точки  $O$  (она может оказаться и мнимой), чтобы aberrация была равна нулю при каком угодно угле наклона лучей.

Положим, что на сферическую преломляющую поверхность, разделяющую две среды с показателями преломления  $n$  и  $n_1$ , падают лучи, которые, если их продолжить внутрь сферы, пересекают оптическую ось в точке  $O$  (рис. 192) на расстоянии от центра  $C$ , равном

$$OC = r \frac{n_1}{n}. \quad (182)$$

Из треугольника  $ACO$  находим, что

$$\sin \angle OAC : \sin \angle AOC = OC : AC = \frac{n_1}{n}$$

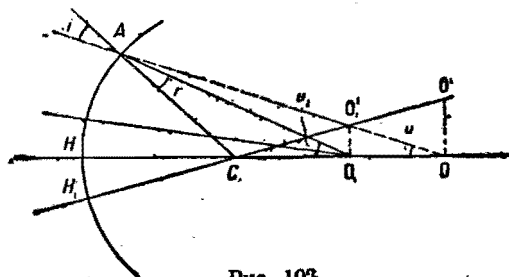


Рис. 192.

В силу этого соотношения угол  $\angle AOC = u$ , образуемый лучом  $AOC$  оптической осью, равен углу преломления его  $r$  в точке  $A$ , так как  $\angle OAC$  равен углу падения  $i$ . Точно так же легко видеть, что угол  $u_1$ , составляемый с осью преломленным лучом  $AO_1$ , равен  $i$ , т. е. углу падения. Итак, треугольники  $OAC$  и  $O_1AC$  подобны, вследствие чего

$$O_1C : AC = AC : OC = n : n_1$$

или

$$O_1C = \frac{n}{n_1} r \quad (183)$$

независимо от угла  $u$ . Все лучи, направленные к точке  $O$ , т. е. к мнимому объекту, пересекаются в точке  $O_1$ , которая является точечным изображением его. Если изменить направление лучей так, чтобы действительная светящаяся точка находилась в точке  $O_1$ , то в точке  $O$  мы получим мнимое изображение без аберрации при сколько угодно широких пучках.

Такие сопряженные точки называются апланатическими. Кроме найденных нами точек  $O$  и  $O_1$ , очевидно центр  $C$  также является апланатической точкой, которая сопряжена сама с собой; точно так же любая точка поверхности сферы является самосопряженной апланатической точкой.

Если мы построим побочную оптическую ось  $H_1C$ , то на ней мы также найдем две апланатические точки  $O'$  и  $O_1'$ . Очевидно, что апланатические точки лежат на двух сферических поверхностях, описанных около  $C$  радиусами  $OC$  и  $O_1C$ . Таким образом, две элементарные площадки около точек  $O$  и  $O_1$ , перпендикулярные к оптической оси  $HCO_1O$ , представляют сопряженные объект и изображение, полученные без аберрации при помощи лучей сколько угодно широких пучков. Необходимым условием для этого апланатизма двух элементарных сопряженных площадок является, как мы видим, определенное соотношение между углами  $u$  и  $u_1$  сопряженных лучей, а именно

$$\sin u_1 : \sin u = n_1 : n, \quad (184)$$

т. е. отношение их синусов должно быть постоянно для всех лучей пучка.

Отношение линейной величины объекта и изображения  $OO' : O_1O_1'$  также постоянно, а именно вследствие (182) и (183)

$$OO_1 : O_1O_1' = OC : O_1C = n_1^2 : n^2. \quad (185)$$

• Воспользовавшись равенством (184), мы найдем из (185) то соотношение, которое мы получим дальше, рассматривая освещенность изображения (стр. 240).

$$OO'n \sin u = O_1O_1'n_1 \sin u_1. \quad (186)$$

Это есть условие апланатизма, или условие синусов.

Оптические приборы, в которых аберрация должна быть уничтожена не только для одной точки на оптической оси, но и для соседних с ней точек в плоскости, перпендикулярной к оси, должны удовлетворять этому условию.

В микроскопах это условие приобретает особенно важное значение, так как там приходится пользоваться весьма широкими пучками. Действительно, во-первых, при больших увеличениях, даваемых микроскопом, требуется увеличение освещенности изображения и следовательно широкие пучки. Во-вторых, как мы увидим далее (стр. 240), для возможности видеть раздельно очень близкие точки объекта необходимо также пользоваться возможно широкими пучками.

Рис. 193 представляет собой сечение объектива микроскопа. Точка  $O$  находится очень близко перед передней поверхностью линзы объектива, имеющей обычно плоскую форму. Можно совершенно уничтожить aberrацию при преломлении широкого пучка в первой линзе, если среда, в которой находится объект, имеет тот же показатель преломления, что и линза; тогда лучи, идущие от объекта, на границе не преломляются. Если расстояние точки  $O$  от центра второй поверхности линзы равно ее радиусу, деленному на показатель преломления  $n$  линзы, то в силу апланатического условия мы получим без aberrации в точке  $O_1$  мнимое изображение объекта и притом не одной его точки, а некоторой площадки. Вторая линза — вогнутовыпуклая и имеет такие радиусы кривизны, что точка  $O_1$  оказывается в центре передней ее поверхности, так что лучи, проходя через нее, опять не испытывают преломления; в то же время точка  $O_1$  по отношению к задней поверхности второй линзы должна помещаться в ее апланатической точке, и, следовательно, после преломления лучи дадут без aberrации мнимое изображение  $O_2$  еще на большем расстоянии от объекта.

Этот тип объектива микроскопа, придуманный Амичи, дает возможность превратить широкий пучок лучей в более узкий, не вводя при этом заметной aberrации лучей.

Но такой способ уничтожения aberrации наталкивается на весьма существенное препятствие. Так как показатель преломления зависит от длины волны, то и положение апланатических точек для разных лучей спектра различно. В виду этого применение метода Амичи дает, строго говоря, уничтожение aberrации только для лучей определенной длины волны. Для других лучей условие апланатизма не будет удовлетворено, и это введет хроматические недостатки, для устранения которых приходится применять особые меры, указанные в параграфе 92.

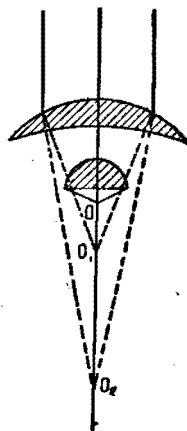


Рис. 193.

### § 91. Астигматизм. Кома.

Мы уже видели, стр. 204, что астигматизм пучков лучей при косом падении на поверхность преломляющей сферической поверхности обусловлен тем, что лучи, образующие сагиттальные и меридианные пучки, пересекаются в разных точках. Для уяснения влияния астигматизма на качество изображения мы и в дальнейшем ограничимся рассмотрением одной преломляющей поверхности.



Наибольшее значение приобретает астигматизм в тех случаях, где поле зрения очень велико, т. е. прибор должен давать изображение точек, удаленных от главной оптической оси. Можно ограничить ширину пучков диафрагмой  $D$  для того, чтобы уменьшить сферическую aberrацию лучей, но это не устраняет астигматизм пучка  $O'D$ , составляющего с оптической осью конечные углы.

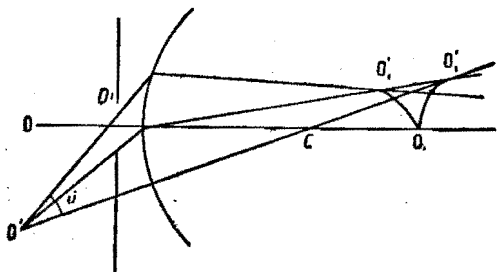


Рис. 194.

Проведем побочную оптическую ось  $O'C$  (рис. 194), на которой должно лежать изображение точки  $O'$ . Так как лучи, проходящие через диафрагму  $D$ , составляют с этой осью конечный угол  $u$ , то пересечение сагиттальных пучков происходит вдоль короткого отрезка фокальной линии, лежащей на оси около  $O_1'$ , а пересечение меридианных пучков

вдоль другого отрезка второй фокальной линии, перпендикулярной к плоскости чертежа и пересекающей последнюю в точке  $O_2'$ . Чем больше угол  $u$ , т. е. чем больше наклон лучей к главной оптической оси, тем больше расстояние между этими фокальными линиями.

Фокальные линии  $O_1'$  и  $O_2'$  представляют собой изображения точки  $O'$ , вытянутые в виде двух коротких отрезков. Точки  $O_1'$  и  $O_2'$  лежат на двух кривых, проходящих через точку  $O_1$ , в которой находится изображение, даваемое аксиальными лучами. Обе эти кривые касательны к перпендикуляру, восстановленному в точке  $O_1$  к оси.

Уменьшение астигматического расстояния между точками  $O_2'$  и  $O_1'$  и достижение совпадения их в одной плоскости, где должно получиться изображение точек объекта, представляет основную задачу при построении таких объективов (напр. ландшафтных фотографических), которые пользуются хотя и узкими, но косыми пучками лучей.<sup>1</sup>

В астрономических объективах косое падение лучей тоже вызывает астигматизм, если поле зрения астрономической трубы не очень мало.

Пусть пучок параллельных лучей  $OD$  (рис. 195) падает на объектив  $O'$  и собирается в фокусе  $O_1$ , причем для тех лучей, которые проходят через отверстие  $pp$  параллельно оси, устранена сферическая aberrация.

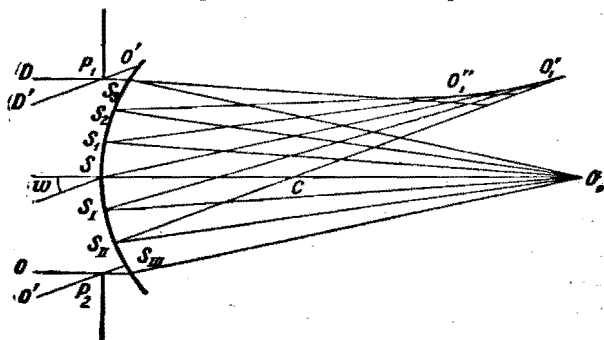


Рис. 195.

<sup>1</sup> Такие объективы называют анастигматами.

Если мы представим себе наклонный параллельный пучок  $O'D$ , то, как видно из рис. 195, лучи пучка после преломления составляют с оптической (побочной) осью бóльшие углы, чем лучи пучка  $OD$  с главной осью. Вследствие этого лучи, более удаленные от оси, будут пересекаться в разных точках, образуя фокальную линию  $O_1'O_1''$ , которая и является астигматическим изображением точки с несимметричным и однобоким распределением освещения. Этот недостаток называется комой (coma — запятая).

### § 92. Ахроматические системы.

Фокусные расстояния, положения главных фокусов, а следовательно увеличение изображений и положение их на оси зависят от показателей преломления тех линз, из которых составлена данная оптическая система. Так как показатель преломления зависит от длины волны, то все эти величины для разных лучей различны. Изображение, даваемое системой, вообще говоря, будет хроматично, т. е. окрашено и не вполне резкое, так как изображения, получаемые при помощи лучей различной длины волны, не совпадают ни по положению, ни по величине. Задача ахроматизировать линзы, т. е. освободиться от влияния длины волны, может быть решена только частично, а именно можно поставить требование, чтобы, напр., фокальные расстояния для двух лучей заданных длин волн были одинаковыми. В случае тонких линз это условие достаточно, но в общем случае нужно ахроматизировать не только фокусные расстояния, но и положение главных точек так, чтобы главные фокусы для обоих лучей совпадали.

Мы видели, что фокусное расстояние тонких линз определяются формулой (180):

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

При изменении показателя преломления на  $dn$  фокусное расстояние изменится на  $df$ , причем:

$$-\frac{df}{f} = \frac{dn}{n-1}. \quad (187)$$

Так вычисляется изменение фокусного расстояния для двух лучей, показатели преломления которых отличаются на малую величину  $dn$ . Дисперсия показателя преломления в пределах видимого спектра невелика, как показывает нижеследующая таблица. В ней приведены показатели преломления фраунгоферовых — спектральных линий  $C$  (красной),  $D$  (желтой) и  $F$  (фиолетовой) для двух различных сортов стекла: кронгласа и флинтгласа, применяемых при изготовлении линз.

СОРТ СТЕКЛА	$n_C$	$n_D$	$n_F$	$\nu = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1}$
Кронглас . . . . .	1,5153	1,5179	1,5239	0,0166
Флинтглас . . . . .	1,6143	1,6292	1,6314	0,0276

В этой же таблице приведена величина дисперсии  $\nu$ , вычисляемая из разности показателей преломления по типу выражения, стоящего во второй части уравнения (187). Относительную разность фокусных расстояний крайних лучей видимого спектра мы можем считать согласно уравнению (187) равной дисперсии стекла линзы для тех же лучей.

Для ахроматизации фокусного расстояния пользуются двойными линзами из разных сортов стекла с различной дисперсией, напр. крона и флинта.

Так как для фокусного расстояния  $f$  такой сложной линзы имеем формулу (181)

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2},$$

то изменение фокусного расстояния  $f$  при изменении длины волны будет равно нулю, если

$$\frac{df_1}{f_1^2} + \frac{df_2}{f_2^2} = 0.$$

Вводя вместо относительного изменения фокусного расстояния линз величину дисперсии их стекол, т. е.  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , мы найдем условие для ахроматизации линзы:

$$\frac{\nu_1}{f_1} + \frac{\nu_2}{f_2} = 0. \quad (187')$$

Это условие может быть выполнено, если фокусные расстояния  $f_1$  и  $f_2$  имеют противоположные знаки и относятся между собой, как величины дисперсии линз. Дисперсии  $\nu_1$  и  $\nu_2$  должны быть различны, так как иначе фокусные расстояния были бы равны по величине и обратны по знаку, т. е. линзы при сложении имели бы оптическую силу, равную нулю. Кроме того, та линза, которая имеет меньшую оптическую силу, т. е. большее фокусное расстояние, должна иметь и большую дисперсию. Если мы хотим построить ахроматическую линзу с положительным фокусным расстоянием, то должны взять собирающую линзу из кронгласа с меньшим фокусным расстоянием и рассеивающую линзу из флинтгласа с большим фокусным расстоянием, напр. систему, изображенную на рис. 196. Если система состоит из ряда линз, то каждая может быть ахроматизирована отдельно. Этим достигается наилучшая ахроматизация и всей системы. Для более совершенной ахроматизации ставят еще требование, чтобы были уничтожены хроматические недостатки высших порядков, а именно добиваются полной ахроматизации не для двух, а для трех лучей спектра.

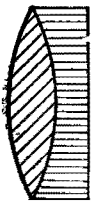


Рис. 196.

### § 93. Диафрагмы в оптических приборах.

Пучки лучей, попадающие в оптический прибор, не могут быть сколько угодно широкими; они ограничены диафрагмами или размерами линз, края которых также играют роль диафрагм. От величины и расположения последних

зависит ширина пучков лучей, попадающих в прибор. Шириной же пучков определяется, с одной стороны, количество света, которое попадает на различные участки изображения, но с этим связаны и недостатки изображений, зависящие от ширины пучков; наконец, ширина пучков, имеет значение для устранения дифракционных явлений, которые мешают получать точечные изображения при узких пучках лучей. Таким образом влияние диафрагм очень многообразно.

Обычно в приборе имеется целый ряд естественных диафрагм, образуемых оправами линз; но часто, сверх того, помещается особая диафрагма  $D$ , имеющая специальное назначение ограничивать ширину пучков лучей более сильно, чем это делают другие диафрагмы. Такая диафрагма называется входной диафрагмой прибора. Она может быть расположена или впереди прибора, т. е. перед первой линзой, или внутри его, как изображено на рис. 197, или же наконец позади последней линзы. Необходимо только, чтобы она ограничивала пучок лучей сильнее, чем любая другая из имеющихся диафрагм. При

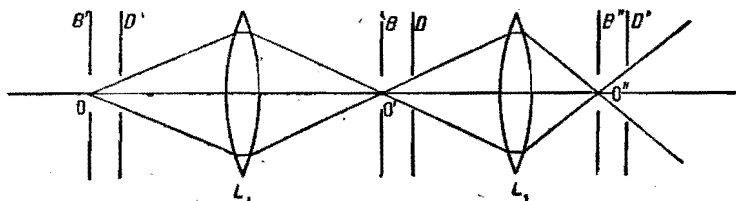


Рис. 197.

этом роль входной диафрагмы может переходить к другим диафрагмам, если положение источника света на оптической оси изменится.

Положим, что между входной диафрагмой и объектом находится часть  $L_1$  оптической системы, изменяющая ход лучей, как показано на рис. 197.

Для более наглядного представления границ входящего пучка удобно построить изображение  $D'$  диафрагмы  $D$ , даваемое  $L_1$ . Луч, проходящий через какую-нибудь точку изображения  $D'$ , пройдет через соответствующую ему (сопряженную) точку отверстия  $D$ . Последнее может быть больше или меньше  $D'$ , смотря по увеличению изображения, создаваемого  $L_1$ . Величиной  $D'$  и определяется ширина входящего пучка, который может пройти через всю систему; и поэтому именно это воображаемое отверстие называют входным отверстием системы, или первым зрачком.

Можно также построить выходное отверстие, или второй зрачок, найдя изображение диафрагмы  $D$ , даваемое той частью  $L_2$  оптической системы, которая находится позади  $D$ .

Совершенно другую роль играют диафрагмы, ограничивающие не ширину пучков, а предельную величину объектов, изображение которых можно получать при помощи данной системы, или, как говорят, величину поля зрения. На рис. 197 такую роль играет диафрагма  $B$ , которая совсем не может влиять

на ширину пучков лучей, выходящих из любой точки плоскости объекта  $O$ , но зато пропускает только те пучки, которые испускаются светящимися точками, находящимися внутри некоторого участка этой плоскости. Этот участок очевидно представляет собой изображение отверстия диафрагмы  $B$ , даваемое  $L_1$ . Точно так же изображение  $B$ , создаваемое  $L_2$ , т. е.  $B''$ , определяет предельную величину изображения.

Если диафрагма  $B$  (рис. 197), ограничивающая поле зрения, находится в плоскости  $O'$ , где получается изображение объекта  $O$ , то ее изображение совпадает с плоскостью объекта. Тогда все лучи, вышедшие из любой точки объекта, ограниченного отверстием  $B'$ , и прошедшие через входное отверстие  $D'$ , пройдут и через диафрагму  $B$  в соответственной точке. При этом положении диафрагмы  $B$  границы поля зрения резкие, так как пучки от разных точек плоскости объекта целиком или проходят через диафрагму, или задерживаются ею.

Рассматривая ход лучей, мы можем ограничиться построением только главных лучей пучка, проводимых от точек объекта к центру входного отверстия. Угол  $W$ , составляемый крайними лучами из главных, определяет то, что принято называть угловой величиной поля зрения.

Для субъективного наблюдения желательно помещать глаз так, чтобы использовать все поле зрения. Так, напр., если выходное отверстие совпадает со зрачком глаза, то может быть видно все изображение; если же глаз поместить дальше, то часть поля зрения будет закрыта краями выходного отверстия. В виду этого выходное отверстие называется также **глазным кружком**.

## § 94. Фотометрические величины и законы.

При определении силы света источников света и освещения, которое они производят, можно исходить из представления о световом потоке, т. е. количестве световой энергии, проходящей в единицу времени в определенном направлении через определенную поверхность. Всякое светящееся тело создает такой поток, и мы можем определять его величину в различных точках пространства, измеряя количество света, попадающее в единицу времени на плоскую площадку, поставленную перпендикулярно к направлению лучей. Это определение светового потока предполагает применение каких-либо методов измерения количества световой энергии. В обычных фотометрических измерениях пользуются субъективным сравнением освещения, производимого различными источниками света, из которых один выбирается как нормальный. Эта обычная фотометрия отличается от объективной фотометрии тем, что она пользуется для сравнения двух источников света действием их на наш глаз. Человеческий глаз позволяет правильно и довольно точно судить о равенстве или различии освещения, производимого однородными лучами. Однако он не может служить для надежного сравнения источников, дающих свет различной окраски. Так, например, если при освещении красной или синей поверхности белым светом эти различно окрашенные поверхности кажутся одинаково освещен-

ными, то при сильном ослаблении света красная покажется значительно темнее синей, несмотря на то, что освещение обеих поверхностей уменьшилось в одно и то же число раз. Явление это известно как явление Пуркинье.

Рассмотрим сначала простейший случай фотометрических измерений, когда источник света можно считать точкой, от которой во все стороны расходятся прямолинейные лучи (рис. 198). Опишем около нее сферу радиуса  $r$  и найдем величину светового потока через элемент ее поверхности  $dS$ . Количество света  $dL$ , падающего на площадку  $dS$ , очевидно, зависит от величины телесного угла  $d\omega$  того конуса лучей, который имеет своим основанием  $dS$ . Поэтому можно написать такое соотношение

$$dL = Jd\omega = J \frac{dS}{r^2}, \quad (188)$$

причем коэффициент  $J$  называется силой света источника. Согласно этому определению сила света не зависит от того, какой радиус имеет сфера, или на каком расстоянии находится элемент  $dS$  от светящейся точки. Она характеризует только самый источник света. Но, разумеется, сила света зависит от направления, в котором лежит элемент  $dS$  по отношению к светящемуся телу, так как исходящий от него световой поток может иметь в разных направлениях неодинаковую силу.

Если источником света является лампа, то распределение светового потока будет различно в горизонтальном и вертикальном направлениях. Если свет испускается небольшой накаленной площадкой, то сила света зависит от угла между направлением светового потока и направлением нормали к поверхности. Пусть направление лучей составляет с нормалью угол  $\vartheta$ ; тогда сила света приблизительно пропорциональна  $\cos \vartheta$ . Эта зависимость силы света от угла  $\vartheta$ , называемая законом Ламберта, только приблизительно, но в большинстве случаев она дает достаточно точные результаты. Источник света, имеющий форму элементарной площадки, играет особую важную роль во всех вопросах, относящихся к освещению изображений, получаемых при помощи оптических приборов. Поэтому мы будем пользоваться в дальнейшем законом Ламберта, как наиболее простой и удобной формой зависимости силы света от направления:

$$J = J_0 \cos \vartheta, \quad (189)$$

где  $J_0$  — сила света для направления, нормального к поверхности светящейся площадки.

Фотометрические измерения обычно сводятся к сравнению силы света данного источника с силой света нормального источника, для которого сила света принимается равной единице. Имеется несколько различных единиц, выбранных совершенно произвольно. При выборе их руководствуются теми требованиями,

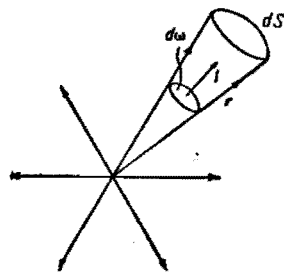


Рис. 198.

какие необходимо предъявлять к нормальному источнику света, а именно: постоянством, определенностью и удобством в обращении. Наиболее распространены следующие определения единиц силы света:

1. Международная единица (1 виоль), принятая рядом лабораторий по предложению Виоля и определяемая как сила света единицы поверхности ( $\text{см}^2$ ) платины при температуре ее плавления ( $1776^\circ$ ) в направлении, нормальном к поверхности.

2. Международная свеча, определяемая как  $\frac{1}{20}$  предыдущей величины и осуществляемая при помощи электрических ламп накаливания.

3. Нормальная свеча Гейфнера-Альгенек — единица, принятая в Германии и определяемая как сила света амиллацетатовой<sup>1</sup> лампы с фитилем определенных размеров и формы и при определенной высоте пламени. Эта лампа оказалась весьма удобным и постоянным источником, но цвет ее пламени значительно отличается от цвета современных ламп накаливания. Она составляет 0,9 международной свечи.

Основная фотометрическая единица — это единица силы света, или свеча; остальные являются производными от нее. Световой поток равен единице (1 люмен), если он исходит из точечного источника света в виде конуса лучей, при силе света, равной одной свече, и если телесный угол конуса лучей равен единице. Полный поток во всех направлениях от одной свечи, равномерно излучаемый по всем направлениям, равен  $4\pi$ . Наконец, освещенность некоторой поверхности измеряется в особых единицах, люксах; 1 люксу соответствует освещение, производимое одной свечей, если освещенная поверхность перпендикулярна к лучам и находится от источника на расстоянии метра. Другое название той же единицы — метр-свеча. Главное применение все эти фотометрические величины находят в технике освещения.

Сравнение источников света, или фотометрирование, производится таким образом, чтобы можно было иметь одинаковое освещение двух рядом расположенных белых экранов. Сравнимые источники должны быть расположены на таких расстояниях от них, чтобы освещенность, т. е. количество света, приходящееся на единицу поверхности, была одинакова. Согласно (188) эта величина

$$\frac{dL}{dS} = \frac{J}{r^2},$$

т. е. обратно пропорциональна квадрату расстояния.

Один из наиболее употребительных фотометров Луммера и Бродхуна дает возможность сравнить две освещенные поверхности в особо выгодных условиях. Фотометрический кубик, который служит для этого, как видно на рис. 199, состоит из двух соприкасающихся половин, причем одна половина имеет плоскую поверхность, а другая сферическую.

<sup>1</sup> Амиллацетат, или уксусноаминовый эфир, — органическое соединение определенного химического состава. Химическая чистота горючего необходима для того, чтобы иметь определенную температуру пламени.

На сферической поверхности имеется плоская площадка, плотно прилегающая к плоской поверхности  $AB$ . Если со стороны грани  $BC$  на куб падает поток лучей, то та часть поверхности  $AB$ , которая соприкасается с воздухом, производит полное внутреннее отражение по направлению к грани  $AC$ , а средняя часть, где стеклянные поверхности прилегают друг к другу, полностью пропускает лучи. Наоборот, те лучи, которые падают со стороны грани  $EF$ , проходят через кубик и грань  $AC$  полностью. Таким образом со стороны можно наблюдать рядом два световых потока, обычно идущих от двух экранов, освещаемых различными источниками света. Если освещение неодинаково, мы видим или освещенный фон с темным пятном посредине, или же светлое пятно на темном фоне. При равенстве освещения граница между средним пятном и остальной поверхностью исчезает вовсе.

Обычно источники света, напр. лампы накаливания, имеют различную силу света в разных направлениях. Поэтому, определив силу света источника в одном направлении, мы не можем еще судить об общем количестве света, которое он дает и которое может быть использовано для освещения. Световой поток, который исходит от него по разным направлениям, падая на отражающие или рассеивающие (белые) поверхности (рефлектор, потолок, стены помещения), распределяется более равномерно, чем поток, непосредственно исходящий от лампы. Вследствие этого при использовании лампы для осветительных целей нужно знать или величину общего потока, или же среднюю силу света.

Если определить силу света в разных направлениях и затем вычислить интегрированием величину всего светового потока, то, разделив весь поток на  $4\pi$  мы находим среднюю сферическую силу света  $J_0$  или среднюю величину потока в телесном угле, равном единице (единица телесного угла называется „стерадиан“, и в этих единицах телесный угол, соответствующий полной сфере, равен  $4\pi$ ). Этот метод вычисления средней сферической силы света может быть заменен следующим опытным определением. Представим себе полый шар  $K$  (фотометрическая сфера), внутренние стенки которого покрыты белой краской, хорошо рассеивающей лучи света. Благодаря многократному рассеянию, которое испытывают лучи от всех элементов поверхности, как непосредственно освещаемых лампой, так и получающих рассеянный свет от других участков, световой поток распределится внутри сферы почти равномерно по всем направлениям, и можно измерять силу света его через небольшое отверстие  $O$  в стенке сферы, если это отверстие защищено от

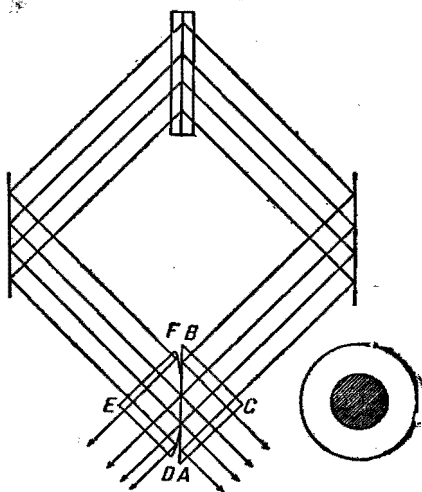


Рис. 199.



непосредственного освещения лампы  $L$  непрозрачным экраном  $P$ , как показано на рис. 200.

Источники света, применяемые в технике освещения, имеют различные силы — от нескольких свечей до тысяч свечей, которые могут дать вольтера дуга или мощные лампы накаливания. Пользуясь зеркалами, напр., в прожекторе, можно весь поток практически направить в одном направлении и поэтому чрезвычайно усилить силу света в этом направлении. Таким образом силу света можно легко увеличить до сотен миллионов свечей. Однако эта сила света имеет место только в очень узком пучке лучей; средняя же сила наиболее мощных источников измеряется только тысячами или десятками тысяч свечей.

Освещенность, создаваемая различными источниками света, может изменяться в широких пределах. Если освещенность, производимая одной свечей на расстоянии одного метра, равна 1 люксу, то освещенность, создаваемая прямыми лучами солнца, равна 100 000 лк; дневное освещение в комнатах равно 100 — 1000 лк. Для чтения в зависимости от шрифта требуется нормально от 30 — 100 лк.

Если источником лучей является светящаяся поверхность, то яркость ее определяется как сила света, создаваемая каждым квадратным сантиметром. Она находится простым делением силы света всей поверхности на величину последней или на проекцию ее в том направлении, в котором измеряется сила света. Наибольшей яркостью обладает поверхность солнца, а именно 200 000 св/см<sup>2</sup>; яркость нити ламп накаливания равна 60 — 250 св/см<sup>2</sup>; предельная яркость, которую может выносить глаз, не испытывая неприятных ощущений, приблизительно 15 св/см<sup>2</sup>; наименьшая яркость поверхности, вызывающая ощущение света в глазу после продолжительного пребывания в темноте, меньше 10<sup>-10</sup> св/см<sup>2</sup>.

### § 95. Яркость объекта и освещенность изображения.

Представим себе объект как бесконечно малую площадку  $dS$ , испускающую свет по всем направлениям согласно закону Ламберта (см. форм. 189), так что сила света в каком-нибудь направлении, составляющем угол  $\epsilon$  с нормалью к площадке, равна

$$J = J_0 \cos \epsilon.$$

При возрастании площадки  $dS$  сила света  $J$  пропорционально возрастает, поэтому можно ввести новую величину  $i$  — удельную силу света, или яркость объекта в данном направлении, определив ее как силу света, рассчитанную на единицу светящейся поверхности. Ту же величину, но в направлении нормали к поверхности, будем называть просто яркостью данной поверхности и обозначать  $i_0$ . Таким образом

$$J = i dS = i_0 \cos \epsilon dS. \quad (190)$$

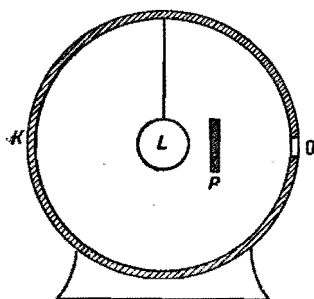


Рис. 200.

Представим себе сферу радиуса  $r$  (рис. 201), на которую падает световой пучок, испускаемый площадкой  $dS$ , и выделим на сфере кольцевой участок (зону)  $d\Sigma$ , ограниченный двумя параллельными окружностями, как показано на рис. 201. Направление лучей, падающих на элементы этого участка, составляет угол  $\epsilon$  с нормалью к  $dS$ , и поэтому сила света вдоль всего кольца равна

$$J_0 \cos \epsilon = i_0 dS \cos \epsilon.$$

Площадь  $d\Sigma$  кольцевой зоны можно найти как произведение длины окружности  $2\pi r \sin \epsilon$  на ширину полоски  $r d\epsilon$ , т. е.

$$d\Sigma = 2\pi r^2 \sin \epsilon d\epsilon.$$

Разделив эту площадь на квадрат радиуса сферы, найдем телесный угол  $d\omega$ , соответствующий кольцевой зоне:

$$d\omega = d\Sigma : r^2 = 2\pi \sin \epsilon d\epsilon. \quad (191)$$

Световой поток через  $d\Sigma$  согласно (188) равен

$$dL = J d\omega = J_0 \cos \epsilon d\omega = 2\pi J_0 \sin \epsilon \cos \epsilon d\epsilon.$$

Это выражение можно преобразовать в следующее:

$$dL = \pi J_0 d(\sin^2 \epsilon).$$

Полный поток через часть сферической поверхности  $ACB$ , соответствующей углу  $u$  при вершине конуса лучей, равен

$$L = \pi J_0 \sin^2 u = \pi i_0 dS \sin^2 u. \quad (192)$$

Величина  $\sin u$  называется отверстием, или апертурой, пучка лучей

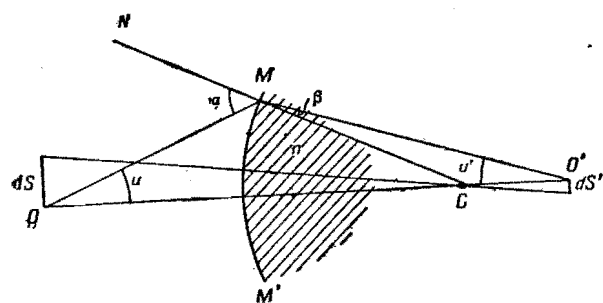


Рис. 202.

Поток  $L$  попадет на поверхность преломляющей сферы (рис. 202), какой является, напр., поверхность линзы. Показатель преломления ее обозначим через  $n$ . Лучи, вышедшие из  $dS$  после преломления сферой  $MN$ , соберутся в соответствующих точках изображения  $dS'$ . Поток  $L$  распределится на площадке  $dS'$ , и поэтому освещенность изображения будет

$$L : dS' = \pi i_0 \sin^2 u \frac{dS}{dS'}. \quad (193)$$

Проведем от краев площадки  $dS$  лучи, проходящие через центр сферы  $C$  (рис. 202), и продолжим их до пересечения с изображением  $dS'$ . Если изоб-

ражение  $dS'$  имеет вполне определенную величину, не зависящую от ширины пучка лучей, которые собираются в различных точках его, то

$$dS : dS' = OC^2 : O'C^2.$$

С другой стороны, из треугольников  $OMC$  и  $O'MC$  имеем:

$$\frac{OC}{OM} = \frac{\sin OMC}{\sin u} \quad \text{и} \quad \frac{O'C}{CM} = \frac{\sin O'MC}{\sin u'}.$$

Деля эти равенства друг на друга, найдем, что

$$\frac{OC}{O'C} = \frac{\sin OMC}{\sin O'MC} \cdot \frac{\sin u'}{\sin u} \quad (194)$$

Не трудно видеть, что угол  $OMC$  является дополнительным к углу падения луча  $OMN$  на поверхность сферы, т. е. угла  $OMN = \alpha$ , так как нормаль  $N$  является продолжением радиуса  $CO$ . Угол  $O'MC = \beta$  есть угол преломления того же луча, поэтому

$$\frac{\sin OMC}{\sin O'MC} = n \quad (195)$$

и, следовательно, из (194) и (195) находим:

$$\frac{OC}{O'C} = \frac{n \sin u}{\sin u'}$$

и

$$\frac{dS}{dS'} = \frac{n^2 \sin^2 u'}{\sin^2 u}. \quad (196)$$

Таким образом освещенность изображения согласно (193) и (196) равна

$$L : dS' = \pi i_0 n^2 \sin^2 u', \quad (197)$$

Количество света, приходящееся на единицу площади изображения, определяется квадратом величины

$$a = n \sin u' \quad (198)$$

которая также называется апертурой пучка лучей в среде с показателем преломления  $n$ .

Таким образом освещенность изображения зависит только от яркости источника и апертуры. Применяя то же самое рассуждение последовательно к ряду преломляющих поверхностей, мы найдем выражения, подобные (196) и (197) для изображения, даваемого всей системой.

## § 96. Условие синусов. Апертура.

Из полученных нами равенств мы находим, что

$$n^2 \sin^2 u_1 dS_1 = \sin^2 u dS,$$

или

$$\sin^2 u : n^2 \sin^2 u_1 = dS_1 : dS. \quad (199)$$

Это отношение справедливо при всяком значении угла  $u$  и соответствующего ему угла  $u_1$ . Отношение площадей объекта и изображения, равное отношению квадратов их линейных размеров, не должно зависеть от угла  $u$  или от ширины пучка лучей. Вследствие этого отношение, стоящее в левой части (199), т. е. квадрат отношения произведений показателя преломления среды на синус соответственного угла  $u$ , и само это отношение сохраняет свое значение при всех углах  $u$  и  $u_1$ , относящиеся к сопряженным лучам.

Если  $y$  и  $y_1$  линейные величины объекта и изображения, то

$$dS : dS_1 = y^2 : y_1^2,$$

и следовательно уравнение (199) может быть представлено в следующем виде:

$$y \sin u = n y_1 \sin u_1. \quad (200)$$

Это условие, известное под названием условия синусов, было в несколько иной форме получено нами в § 90 как условие апланатизма. Оно должно быть соблюдено, если мы требуем, чтобы величина изображения  $dS_1$  не зависела от угла  $u$  даже при больших углах, или чтобы все лучи, вышедшие из какой-нибудь точки объекта, опять собрались в одной точке изображения. Для малых углов мы имели раньше уравнение

$$y \operatorname{tg} u = n y_1 \operatorname{tg} u_1,$$

которое совпадает с (200), пока синусы и тангенсы можно считать равными (при малых углах) и если положить  $n = 1$  и  $n_1 = n$ . При конечных углах однако эти условия друг другу противоречат. Это означает, что условие синусов, или условие для получения изображения широкими пучками, осуществляется только в исключительных случаях, напр., в отдельных точках на оптической оси. Значение условия синусов было открыто и выяснено Аббе.

Условие синусов выведено нами пока только для случая одной сферической поверхности. Но не трудно распространить его на случаи более сложных систем. В самом деле для всякой преломляющей поверхности можно написать уравнение (199), причем роль элемента  $dS$  может играть элемент изображения, даваемого предыдущей поверхностью. Каждому из этих элементов мы можем приписать такую яркость, которая равняется яркости объекта, если показатель преломления среды, где этот элемент находится, равен показателю преломления среды, где находится объект, или же в том случае, когда изображение находится в среде с другим показателем преломления, яркость элемента относится к ней, как относятся между собой квадраты показателей преломления. Применяя это рассуждение последовательно к каждой из преломляющих поверхностей, мы получим для различных преломляющих сред следующие соотношения:

$$n y \sin u = n_1 y_1 \sin u_1 = n_2 y_2 \sin u_2,$$

или

$$n y \sin u = n y_k \sin u_k$$

для любой среды, если  $u_2$  определяет линейные размеры изображения, получающегося в ней.

Произведение показателя преломления на синус наибольшего угла  $u_1$ , входящего в систему пучка лучей, как видно из сказанного, играет важную роль в теории оптических приборов. По предложению Аббе, оно названо численной апертурой прибора  $a = n \sin u$ . Так как согласно (198) эта же величина определяет и освещенность изображения, то ею можно характеризовать и светосилу прибора.

В заключение еще раз отметим, что условие синусов получено в результате требования, чтобы свет, испускаемый элементом поверхности  $dS'$ , находящимся на оптической оси, целиком попадал на поверхность  $dS_1$ , которая является изображением  $dS$ . Это требование должно иметь место при всяком угле  $u$ , т. е. при любой ширине пучка лучей. Мы можем формулировать его еще и так: изображение элементарной площадки  $dS$  должно получаться вполне определенной величины независимо от величины угла  $u$ , т. е. наклона тех лучей, которые служат для получения изображения. Иначе говоря, увеличение изображения не должно зависеть от  $u$ . Если это условие не соблюдено, то изображения соседних элементов частью перекрываются и теряют резкость очертаний. Однако это условие справедливо только для элементарных площадок вблизи оси прибора, так как при выводе полученных формул предполагалось, что площадка достаточно мала и находится на оптической оси.

### § 97. Субъективное наблюдение изображения.

Если мы рассматриваем невооруженным глазом светящийся объект, то наш глаз представляет собой оптический прибор, в котором на сетчатке получается изображение объекта. Так как изображение получено в среде с показателем преломления большим единицы, то яркость его больше яркости объекта в  $n^2$  раз, где  $n$  показатель преломления студенистой среды, которая заполняет глаз. Освещенность изображения определяется, кроме яркости изображения, еще величиной (угловой) входного отверстия, которое определяется величиной зрачка и расстоянием его от глазного дна. Освещенность  $dS'$  изображения оказывается равной (см. 197)

$$L : dS' = \pi i_0 n^2 \sin^2 u',$$

т. е. пропорциональна яркости объекта и численной апертуре  $a = n \sin u'$  глаза. Последняя остается приблизительно неизменной, если не изменяется диаметр глазного зрачка. Поэтому освещенность изображений  $dS'$  представляется нам неизменной, независимо от расстояния до объекта. Эту величину мы назовем естественной освещенностью объекта

$$H_0 = \pi i_0 n^2 \sin^2 u'.$$

Совсем иной результат мы получаем, если источник света точечный. Лучи света, исходящие от него, в глазу собираются почти в точку и притом не-

зависимо от расстояния. При изменении расстояния между точечным объектом и глазом размеры изображения остаются теми же по величине, но величина светового потока, входящего в зрачок глаза, изменяется, и светящаяся точка представляется нам тем более яркой, чем она ближе к глазу.

При пользовании оптическим прибором мы должны различать два случая:

а) Выходное отверстие или второй зрачок прибора больше или равен главному зрачку. В этом случае зрачок глаза весь заполнен световым потоком, проходящим через зрачок прибора, и освещенность изображения, получаемого в глазу, не отличается от естественной освещенности, и следовательно никаким прибором она не может быть повышена.

б) Выходное отверстие  $H'$  меньше зрачка глаза. Угловая величина пучка луча  $u'$  определяется не глазом, а выходным отверстием, и освещенность будет меньше естественной:

$$H_0 = \pi i_0 n^2 \sin^2 u'.$$

Таким образом при рассматривании протяженных объектов оптические приборы могут только уменьшить их яркость. Если же источник точечный, то чем больше пучок, попадающий в прибор, тем более освещенным будет и изображение.

При субъективном наблюдении изображений мы обычно помещаем изображение на расстоянии ясного зрения, т. е. приблизительно в 25 см от глаза. Если мы пользуемся окуляром или лупой, дающей увеличенное изображение, то глаз должен находиться вблизи главного фокуса окуляра, и расстояние изображения от главного фокуса приблизительно равно 25 см. Линейное увеличение, которое дает прибор, равно на основании (169):

$$v = y : y_1 = x_1 : f,$$

где  $x_1$  — расстояние изображения от глазного фокуса или, что почти то же, — от глаза. Таким образом при субъективном наблюдении увеличение обратно пропорционально фокусному расстоянию прибора.

## § 98. Разрешающая сила оптических приборов.

Мы рассматривали в предыдущих параграфах лучи, как независимые друг от друга. Каждый пучок, если его лучи пересекаются в одной точке, должен давать в ней точечное изображение какой-нибудь точки объекта. С точки зрения волновой теории такое представление является фикцией. В действительности мы имеем сферическую волну и притом ограниченный участок такой волны, который создает около точки, где собираются лучи, некоторое дифракционное распределение света. Обычно мы имеем здесь освещенное пятно конечных размеров, окруженное кольцами, темными и светлыми, представляющими собой дифракционные (рис. 203) минимумы и максимумы разных порядков.

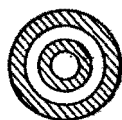


Рис. 203.

Размеры центрального максимума зависят от размеров волновой поверхности, которая создает эту дифракционную картину. Мы можем выяснить эту зависимость следующим приближенным подсчетом. Пусть  $R$  радиус отверстия

(рис. 204), через которое входит волна, имеющая центр в точке  $F$ . Для астрономической трубы расстояние от объектива до точки  $F$  есть его фокусное расстояние.

Выберем в фокальной плоскости другую точку  $F'$  на расстоянии  $x$  от первой. Для того чтобы в точке  $F'$  получился минимум, соответствующий первому темному кольцу, мы должны иметь разность хода между крайними лучами  $AF'$  и  $BF'$  порядка длины волны. Но

$$AF' - BF' = \sqrt{f^2 + (R+x)^2} - \sqrt{f^2 + (R-x)^2} \cong \lambda.$$

Если  $x$  мало по сравнению с  $f$  и  $R$ , то мы находим с точностью до величин первого порядка малости

$$\frac{2Rx}{\sqrt{R^2 + f^2}} = 2x \sin u \cong \lambda,$$

где  $u$  — угол отверстия пучка лучей.

Таким образом расстояние от центра изображения до первого минимума, т. е. радиус центрального пятна, равен

$$x = \frac{\lambda}{2 \sin u}, \quad (201)$$

т. е. обратно пропорционален синусу угла, определяющего численную апертуру  $a = n \sin u$  прибора. Если в пространстве, где получается изображение, показатель преломления  $n$  и, следовательно, длина волны  $\lambda$  в  $n$  раз меньше длины волны  $\lambda_0$  в воздухе, то

$$x \cong \frac{\lambda_0}{2n \sin u} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_0}{a}. \quad (201')$$

Если изображения двух светящихся точек располагаются так, что их дифракционные картины частью накладываются друг на друга (рис. 205), то положение центральных максимумов можно еще определить, если они придутся на первый минимум соседнего изображения. При более близком расположении оба изображения сливаются в одно. Таким образом условие, определяющее предельную разрешающую силу прибора, дает или предельное расстояние между изображениями точек, определяемое форм. (201), или угол  $\varphi$  (рис. 204) между направлениями лучей, которые идут от соответственных светящихся точек (напр. звезд):

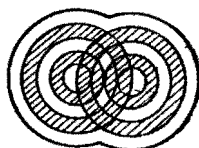


Рис. 205.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{f} = \frac{\lambda}{2f \sin u} = \frac{\lambda}{2R}. \quad (202)$$

В случае микроскопа представляет интерес выяснить предельное расстояние между теми точками объекта, которые могут быть различены при рассмотрении изображения. Это можно сделать, основываясь на условии апланатизма, которое должно быть выполнено для объектива микроскопа. Согласно этому условию

$$yn \sin u = y_1 n_1 \sin u_1,$$

где  $y$  — расстояние между точками объекта,  $y_1$  — между сопряженными точками изображения,  $n$  и  $n_1$  — соответственно отверстия пучков лучей, входящих в объектив и выходящих из него. В изображении мы можем видеть точки раздельно если согласно (201) расстояние  $y_1$  между ними не меньше предельного расстояния  $x$ , т. е.

$$y_1 \geq \frac{1}{2} \frac{\lambda_0}{\sin u_1}^2$$

или если

$$y \sin u \geq \frac{1}{2} \lambda_0.$$

В виду этого расстояние между соответственными точками объекта

$$y = \frac{y_1 \sin u_1}{n \sin u} \geq \frac{1}{2} \frac{\lambda_0}{n \sin u}. \quad (203)$$

Это условие показывает, какое значение для разрешающей силы имеет апертура микроскопа, т. е. угол отверстия пучков лучей, попадающих в объектив. Показатель преломления среды, в которую погружены объект, и передняя поверхность объектива при пользовании гомогенной иммерзией (что достигается введением капли кедрового масла между покровным стеклом и объективом), также увеличивает разрешающую силу микроскопа. Но, как показывает та же формула, предел дальнейшему повышению разрешающей силы кладет длина волны  $\lambda_0$ . Применение ультра-фиолетового света поэтому дает лучшие результаты, чем обычное наблюдение глазом.

Таким образом наименьшие линейные размеры объектов, которые еще не сливаются в один дифракционный кружок, могут быть вычислены по формуле (203). Например, если положить  $\lambda = 0,5\mu$  ( $\mu = 0,001$  мм), а для апертуры наиболее благоприятное значение  $a = 1,4$ , которое может быть еще получено при иммерзии и очень широких отверстиях пучка лучей (при  $\sin u = 0,9$  и  $n = 1,75$ ), то найдем, что в микроскопе можно видеть только такие детали объекта, которые больше  $0,2\mu$ .

Указанная этим граница разрешающей силы микроскопа не мешает однако пользоваться последним для того, чтобы видеть и более мелкие частицы, если они являются светящимися точками и находятся достаточно далеко от других таких же частиц. Их изображения однако не будут передавать их истинной формы и деталей. Они представляются светлыми кружками, окруженными си-

<sup>1</sup> Изображение получается в воздухе, поэтому  $n_1 = 1$ .



стемой диффракционных колец, причем размеры последних тем больше, чем меньше сама частица.

Для наблюдения таких ультра-микроскопических частиц необходимо, чтобы они рассматривались на темном фоне. Если сами частицы не светятся, то для того, чтобы их сделать видимыми, необходимо их освещать, но так, чтобы свет, попадающий в микроскоп, шел только от рассматриваемых частиц. Это достигается при помощи таких систем освещения, когда поле зрения микроскопа остается темным, и свет попадает в объектив только вследствие рассеивания его, производимого частицами; например, боковое освещение жидкости, в которой взвешены ультра-микроскопические частицы, позволяет видеть их диффракционные изображения на темном фоне.

---