

SECHZEHNTER BAND

ERGEBNISSE DER EXAKTEN  
NATURWISSENSCHAFTEN

FERDINAND TRENDELENBURG

 Springer

# ERGEBNISSE DER EXAKTEN NATURWISSENSCHAFTEN

REDIGIERT IN GEMEINSCHAFT MIT  
F. HUND

VON

FERDINAND TRENDELENBURG

SECHZEHNTER BAND

MIT 287 ABBILDUNGEN



BERLIN  
VERLAG VON JULIUS SPRINGER  
1937

ISBN-13:978-3-642-93900-6 e-ISBN-13:978-3-642-94300-3  
DOI: 10.1007/978-3-642-94300-3

ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG  
IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.  
COPYRIGHT 1937 BY JULIUS SPRINGER IN BERLIN.  
SOFTCOVER REPRINT OF THE HARDCOVER 1ST EDITION 1937

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
<b>Fleischmann</b> , Dr. rer. nat. habil. R. und <b>Bothe</b> , Professor Dr. W., Heidelberg. Langsame Neutronen . . . . .	I
<b>Jordan</b> , Professor Dr. P., Rostock. Fortschritte der Theorie der Atomkerne . . . . .	47
<b>Siegbahn</b> , Professor Dr. Manne, Stockholm. Messung langer Röntgenwellen mit optischen Gittern . . . . .	104
<b>v. Auwers</b> , Dr. phil. habil. O., Berlin-Siemensstadt. Ferromagnetismus . . . . .	133
<b>Mark</b> , Professor Dr. H. und <b>Schossberger</b> , Dr. F., Wien. Die Kristallstrukturbestimmung organischer Verbindungen . . . . .	183
<b>Backhaus</b> , Professor Dr. H., Karlsruhe i. B. Nichtstationäre Schallvorgänge . . . . .	237
<b>Kossel</b> , Professor Dr. W., Danzig-Langfuhr. Röntgeninterferenzen aus Gitterquellen . . . . .	295
<b>Finch</b> , Professor Dr. G. I. und <b>Wilman</b> , Dr. H., London. The Study of Surface Structure by Electron Diffraction . . . . .	353
<b>Kienle</b> , Professor Dr. H., Göttingen. Das kontinuierliche Spektrum der Sterne . . . . .	437
<b>Strömgren</b> , Professor Dr. Bengt, Chicago. Die Theorie des Sterninnern und die Entwicklung der Sterne . . . . .	465
Inhalt der Bände I—XVI. I. Namenverzeichnis . . . . .	535
II. Sachverzeichnis . . . . .	539

# Langsame Neutronen.

Von R. FLEISCHMANN und W. BOTHE, Heidelberg.

Mit 13 Abbildungen.

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Allgemeine Übersicht . . . . .	I
1. Begriffsbestimmung, Einteilung . . . . .	I
2. Entdeckung, Eigenschaften . . . . .	2
3. Sekundäre Wirkungen . . . . .	3
II. Eigenschaften der entstehenden künstlich radioaktiven Kerne . . . . .	4
4. Aktivierbarkeit, Halbwertzeit . . . . .	4
5. Chemische Eigenschaften und Abtrennbarkeit radioaktiver Atome . . . . .	8
6. $\beta$ -Spektren . . . . .	9
7. Radioaktive $\gamma$ -Strahlen . . . . .	10
III. Einfangvorgang, $\gamma$ -Strahlen beim Einfang . . . . .	12
8. Entstehung, Intensität . . . . .	12
9. Bestimmung der Quantenenergie . . . . .	13
10. Zusammenhang mit der Ordnungszahl, Energietönung . . . . .	15
IV. Austauschprozesse . . . . .	17
11. Aussendung von $\alpha$ -Strahlen . . . . .	17
12. Aussendung von Protonen . . . . .	18
V. Absorption und Streuung . . . . .	18
13. Neutronengruppen . . . . .	18
14. Temperatureinfluß, Energie der C-Neutronen . . . . .	22
15. Energie von Resonanzneutronen . . . . .	25
16. Wirkungsquerschnitt als Funktion der Neutronenenergie . . . . .	28
17. Vorgang der Verlangsamung . . . . .	33
18. Diffusion langsamer Neutronen . . . . .	35
19. Streuquerschnitt, Rückstreuung . . . . .	36
20. Beugung . . . . .	38
21. Magnetisches Moment des Neutrons . . . . .	39
22. Theoretische Deutung der Neutroneneffekte . . . . .	40
Literaturverzeichnis . . . . .	41

## I. Allgemeine Übersicht<sup>1</sup>.

**1. Begriffsbestimmung, Einteilung.** Bei vielen Umwandlungsprozessen entstehen Neutronen mit kinetischen Energien bis zu etwa 14 eMV. Läßt man diese Neutronen auf wasserstoffhaltige Substanzen treffen, so werden sie verlangsamt. Das geschieht durch elastische Zusammenstöße mit den praktisch gleich schweren Wasserstoffkernen. Nimmt man an, daß die sich stoßenden Atomkerne wie starre Kugeln behandelt werden dürfen, so ergibt sich, daß beim Stoß des Neutrons

<sup>1</sup> Die Zahlen (I), (II), (*r*) . . . beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß. — Für die Kennzeichnung von Kernreaktionen wird die in (II) eingeführte abgekürzte Schreibweise benutzt.

gegen den gleich schweren Wasserstoffkern im Mittel die Hälfte der Energie übertragen wird (119, 141). Falls der Stoß genau zentral erfolgt, wird die gesamte Energie übertragen.

Als wasserstoffhaltige verlangsamende Substanzen verwendet man besonders häufig Paraffin und Wasser. Beide verhalten sich gegenüber Neutronen übereinstimmend. Das ist verständlich, weil die Zusammensetzung von hochschmelzenden Paraffinen in guter Näherung  $(\text{CH}_2)_n$  ist, also analog zu Wasser  $\text{H}_2\text{O}$ . Kohlenstoff und Sauerstoff werden von Neutronen kaum umgewandelt, Masse und Streuquerschnitt sind ähnlich.

Wie die Erfahrung zeigt, genügen wenige Zentimeter, um einen erheblichen Bruchteil der Neutronen bis auf die kinetische Energie der Temperaturbewegung zu verlangsamen, vgl. Ziff. 17. Gewisse Atomkerne werden von langsamen Neutronen umgewandelt, und zwar mit Wirkungsquerschnitten, die bis zum 1000fachen größer sein können, als die für schnelle Neutronen.

Unter langsamen Neutronen werden meist solche verstanden, die eine gewisse Paraffinschicht durchdrungen haben. Sie besitzen ein kontinuierliches Geschwindigkeitsspektrum, dabei hat ein erheblicher Teil von ihnen die kinetische Energie der Temperaturbewegung, also einige Hundertstel eV. Dieser „thermische“ Anteil wird in sämtlichen Stoffen absorbiert, die von langsamen Neutronen umgewandelt werden können. Daran schließen sich solche mit größerer kinetischer Energie bis etwa 100 eV. Da diese beim Wegfiltern thermischer Neutronen übrigbleiben, werden sie manchmal als „Restneutronen“ bezeichnet. Enge Geschwindigkeitsbereiche daraus sind in gewissen Elementen leicht, d. h. mit großem Wirkungsquerschnitt absorbierbar (Resonanzgebiete). Der Bereich noch schnellerer Neutronen, bei denen mit den heutigen Hilfsmitteln noch keine Resonanzabsorption gemessen werden konnte, bis zu den „schnellen“ Neutronen wird als „Zwischengebiet“ bezeichnet. „Schnelle“ Neutronen sind solche, die beim elastischen Stoß gegen andere Kerne, insbesondere Protonen, gut nachweisbare Rückstoßkerne erzeugen (Energie größer als etwa 10000 eV).

**2. Entdeckung, Eigenschaften.** Im Verlauf ihrer Untersuchungen über die Erzeugung künstlicher Radioaktivität durch Neutronen entdeckten FERMI, AMALDI, PONTECORVO, RASETTI und SEGRÈ (4), daß verschiedene Elemente viel stärker radioaktiv werden, wenn sie durch Paraffin hindurch mit Neutronen bestrahlt werden (Mitteilung vom 22. 10. 1934). Nach den damaligen Kenntnissen hätte man erwarten sollen, daß die Aktivierung durch „Absorption“ der Neutronen in Paraffin abnimmt. Starke Absorption von Neutronen war aus Beobachtungen bekannt, bei denen die Neutronen durch Rückstoßprotonen nachgewiesen wurden, bei denen daher nur schnelle Neutronen berücksichtigt wurden. Nachträglich läßt sich sagen, daß die so gemessene Intensitätsabnahme nicht von wahrer Absorption der Neutronen herrührt, sondern — abgesehen von Streuung aus dem Strahlengang — hauptsächlich

auf Eigenschaftsänderung der Neutronen zurückzuführen ist. Sie vermögen wegen ihrer geringen kinetischen Energie keine Rückstoßprotonen mehr zu erzeugen, sind aber in vielen Kernen leichter absorbierbar geworden und erzeugen dadurch stärkere Radioaktivität. Die Verstärkung der Radioaktivität tritt auch ein, wenn das Paraffin nicht zwischen Neutronenquelle und zu aktivierender Substanz eingeschoben, sondern irgendwo in der Nähe aufgestellt wird.

Von den gleichen Forschern (5, 1, 2, 11, 12, 13, 14) wurde dann näher untersucht, bei welchen Stoffen durch Paraffin eine Verstärkung der künstlichen Aktivierung eintritt. Dabei wurde eine große Zahl künstlich radioaktiver Kerne neu entdeckt. Durch analytisch-chemische Untersuchungen stellte sich heraus, daß verlangsamte Neutronen immer dann besonders stark wirken, wenn der neue Kern beim bloßen Einfangen des Neutrons gebildet wird, wenn also ein Isotop des gleichen Elementes mit einer um 1 höheren Masse entsteht [( $n, \gamma$ )-Prozesse; vgl. Ziff. 5]. Drei Ausnahmen bei leichten Kernen, bei denen Umwandlungen unter Aussendung eines Teilchens vorliegen, sind in Ziff. 11, 12 besprochen. Ausnahmslos läßt sich umgekehrt sagen: Wenn bei der Umwandlung durch Neutronen ein Isotop des gleichen Elementes entsteht, wenn also Neutronen eingefangen werden, dann sind verlangsamte Neutronen beträchtlich wirksamer als unverlangsamte.

**3. Sekundäre Wirkungen.** Die kennzeichnende Eigenschaft, durch die sich langsame Neutronen von schnellen unterscheiden, ist ihre hohe Absorbierbarkeit in gewissen Stoffen. Sie wurde ganz am Anfang von den genannten Forschern festgestellt (5). Die bei der Absorption hervorgerufenen Sekundärerscheinungen sind: a) die bereits erwähnte Radioaktivität, b) die Erregung von  $\gamma$ -Strahlen im Augenblick des Einfangens, c) Umwandlung unter Aussenden von  $\alpha$ -Teilchen oder Protonen (Nicht-einfangprozesse).

a) *Die Erzeugung von Radioaktivität* durch Einfangen langsamer Neutronen stellt überhaupt den am häufigsten beobachteten Umwandlungstyp dar (rund 70 Fälle). Er erweitert das System der bekannten Isotope meist nach höheren Massenzahlen zu. Radioaktivität ist nur für Stoffe zu erwarten, in deren Isotopenzusammensetzung über einem nicht zu seltenen stabilen Isotop eine Lücke vorhanden ist, oder bei denen das schwerste bekannte Isotop nicht zu selten ist. Zwei Beispiele mögen das verdeutlichen. Ag besitzt zwei stabile Isotope mit den Atomgewichten 107 und 109. Man beobachtet je einen radioaktiven Kern in der Lücke (Atomgewicht 108) und oberhalb des schwersten (Atomgewicht 110). Ein anderes Beispiel ist Sauerstoff. Er besteht aus 99,76%  $O^{16}$ ; 0,04%  $O^{17}$ ; 0,20%  $O^{18}$ . Hier könnte höchstens das seltene Isotop  $O^{18}$  in ein radioaktives, nämlich  $O^{19}$ , umgewandelt werden. Dieses ist als radioaktiv bekannt, die Umwandlung aus  $O^{18}$  ist jedoch nicht beobachtet; vielleicht existiert sie nicht, vielleicht ist sie nur wegen geringer Intensität noch nicht nachgewiesen.

In den meisten Fällen (z. B. Ag, Ga, Sb, Br) erweist sich, daß eine Lücke zwischen stabilen Isotopen nicht durch ein seltenes, noch unbekanntes stabiles Isotop ausgefüllt ist, sondern daß der leere Platz durch ein radioaktives Isotop besetzt wird.

*b) Erregung von  $\gamma$ -Strahlen* tritt notwendig bei allen Einfangprozessen ( $n, \gamma$ ) auf, gleichgültig, ob durch Einfangen ein radioaktiver oder ein stabiler Kern entsteht. In der  $\gamma$ -Strahlung erscheint nämlich die freiwerdende Bindungsenergie. In denjenigen Fällen, wo  $\gamma$ -Strahlung ausgesandt wird, aber keine Radioaktivität auftritt, liegt Umwandlung eines stabilen Isotops in ein anderes stabiles vor. Die  $\gamma$ -Strahlung ist dann das einzige Nachweismittel für den Umwandlungsprozeß. Es ist zu beachten, daß eine beobachtete  $\gamma$ -Strahlung nicht unbedingt zu einer beim gleichen Element auftretenden Radioaktivität zu gehören braucht, da die Umwandlung zweier Isotope in ein stabiles und in ein radioaktives nebeneinander herlaufen kann. Schließlich kann man bei Messung der Radioaktivität zwei radioaktive Kerne, die aus verschiedenen Isotopen desselben Elementes gleichzeitig entstehen, getrennt erfassen, da sie durch ihre Halbwertszeit unterscheidbar sind. Bei Beobachtung mit  $\gamma$ -Strahlung fehlt diese Unterscheidungsmöglichkeit.

*c) Nichteinfangprozesse* durch langsame Neutronen sind selten, man kennt bisher nur drei Beispiele: Die Umwandlung von Lithium und Bor unter Aussenden eines  $\alpha$ -Teilchens und die Umwandlung von Stickstoff unter Aussenden eines Protons. In allen drei Fällen entstehen bekannte stabile Kerne. Eine deutliche  $\gamma$ -Strahlung wird bei der Umwandlung nicht erzeugt. In der Tat können solche „Austauschreaktionen“ dem Energie- und Impulssatz genügen, ohne daß eine  $\gamma$ -Strahlung aufzutreten braucht.

## II. Eigenschaften der entstehenden künstlich radioaktiven Kerne.

Die Entdeckung und Untersuchung der hauptsächlichsten radioaktiven Erscheinungen, die durch langsame Neutronen erzeugt werden, geschah durch AMALDI, D'AGOSTINO, FERMI, PONTECORVO, RASETTI, SEGRÈ (14). Ihre Untersuchung ist nach wie vor grundlegend für die behandelten Fragen.

In diesem Zusammenhang sind nur solche Umwandlungen zu berücksichtigen, die durch Gegenwart von Paraffin verstärkbar sind. Wie schon in Ziff. 2 erwähnt, ist dieser Umstand ein hinreichendes Kriterium dafür, daß langsame Neutronen wirksam sind.

4. **Aktivierbarkeit, Halbwertszeit.** Von FERMI und Mitarbeitern (14) wurden von den 82 bekannten nicht radioaktiven chemischen Elementen 67 untersucht; nicht untersucht wurden die 5 Edelgase, 9 seltene Erden, Hafnium und Masurium. Bei sämtlichen untersuchten Elementen wurde geprüft, ob eine Verstärkbarkeit durch Paraffin vorhanden ist. Das



war der Fall bei 28 von den untersuchten. Wegen sehr großer verfügbarer Intensität konnte bei den Messungen der Radioaktivität in vielen Fällen eine Ionisationskammer statt des sonst üblichen statistischen Zählverfahrens verwendet werden. Die Halbwertzeiten konnten in diesen Fällen recht genau bestimmt werden.

Von anderen Forschern wurden die seltenen Erden sowie Scandium und Yttrium einer eingehenden Untersuchung unterzogen. Die ersten Versuche darüber hatten teilweise widerspruchsvolle Ergebnisse [v. HEVESY und LEVI, MARSH und SUGDEN (52, 66), McLENNAN und RANN (50), NEUNINGER und RONA (169)]. Die Ursache lag in geringen Beimengungen stark aktivierbarer seltener Erden, namentlich Dysprosium. Unter Verwendung sehr reiner Substanzen erhielten besonders v. HEVESY und LEVI (39, 129) zuverlässige Ergebnisse; mit MARSH und SUGDEN besteht jetzt meist Übereinstimmung.

Andere Forscher fanden bei verschiedenen von FERMI und Mitarbeitern als nicht aktivierbar bezeichneten Stoffen schwache Aktivierbarkeit unter Anlagerung langsamer Neutronen (45, 47, 61, 64, 153, 156, 220). Soweit neue Halbwertzeiten mit genügender Genauigkeit beobachtet wurden, ist trotz der vielfach *sehr* geringen Intensität nicht anzunehmen, daß Verunreinigungen die Aktivierbarkeit nur vorgetäuscht haben.

Besonderer Erwähnung bedarf die Bestimmung sehr kurzer Halbwertzeiten. KNOL und VELDKAMP (138, 231) haben einerseits mit einer Vorrichtung, die mit einem Fluoroskop zu vergleichen ist, andererseits mit einer Strömungsmethode, bei der ebenfalls zwischen Bestrahlung und Messungsbeginn sehr kurze Zeiten liegen, die Existenz des Prozesses  ${}_3\text{Li}^7(n, \gamma){}_3^*\text{Li}^8$  festgestellt. (Der Stern oben vor dem Symbol des Elementes bedeutet stets Radioaktivität des Kerns.) Für die Halbwertzeit von  ${}_3^*\text{Li}^8$  ergab sich 0,7 sec. Die Intensität war aber sehr gering. WALEN und NAHMIAS (180) haben die für den Einfangprozeß zu erwartende Paraffinverstärkbarkeit festgestellt und die Halbwertzeit zu  $0,75 \pm 0,05$  sec bestimmt.

Von BJERGE (84) und von NAHMIAS und WALEN (155, 180, 222) wurde bei 18 bzw. 52 Elementen nach Radioaktivität mit kurzer Halbwertzeit gesucht. Mit Hilfe eines drehbaren Armes konnte bereits 0,3 sec nach Ende der Bestrahlung mit der Messung begonnen werden. Es ergab sich keine neue kurze Halbwertzeit, die von langsamen Neutronen herührt.

Die durch langsame Neutronen erzeugbaren radioaktiven Kerne senden durchweg (negative) Elektronen aus. Eine Ausnahme bildet  ${}_{29}^*\text{Cu}$  mit der Halbwertzeit von 10—12 h, das nach VAN VOORHIS (179a) dual, nämlich teils unter Aussendung von Elektronen, teils von Positronen zerfällt.

In Tabelle 1, Spalte 2 und 3, sind die durch langsame Neutronen entstehenden Kerne und ihre Halbwertzeiten zusammengestellt. Besonders geringe Intensität der Aktivierung ist durch „g“ hinter der

Tabelle 1. Radioaktive Kerne, die durch  $(n, \gamma)$ -Prozesse erzeugt werden können.

$\beta_{\text{Max}}$  = Energie des Intensitätsmaximums;  $\beta_{\text{Grenze}}$  = Energie der beobachteten Grenze des  $\beta$ -Kontinuums in eMV.  $d_{\frac{1}{2}}$  = Halbwertdicke in  $\frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$  Al für Absorption des  $\beta$ -Kontinuums.

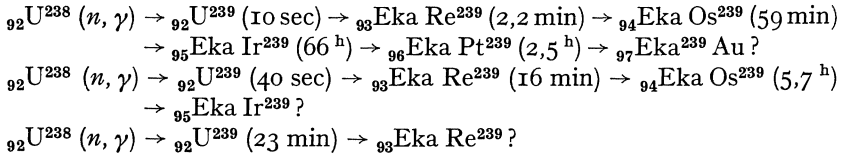
Ordnungszahl	Radioaktiver Kern	Halbwertszeit	$\beta_{\text{Max}}$	$\beta_{\text{Grenze}}$	$d_{\frac{1}{2}}$
3	Li <sup>8</sup>	0,5—0,7 sec	3,9	10	—
9	F <sup>20</sup>	8,4 sec	—	5	0,24
11	Na <sup>24</sup>	15,8 h	0,5	1,7	0,12
12	Mg <sup>27</sup>	10,25 min	—	~ 2	0,07
13	Al <sup>28</sup>	2,3 min	1,2	3,0	0,16
14	Si <sup>31</sup>	2,4 h	—	1,8	—
15	P <sup>32</sup>	14,5 d	~ 0,5	1,7	0,10
17	Cl	35 min	—	2 (?)	—
	Cl	1,9 min	—	—	—
18	A <sup>41</sup>	1 h 50 min	—	2,7	—
19	K <sup>42</sup>	16 h	—	3,5	—
20	Ca	4 h g	—	—	—
23	V <sup>52</sup>	3,75 min	—	—	0,17
25	Mn <sup>56</sup>	2,5 h	< 0,2—0,4	2,5—3,2	0,14
27	Co <sup>60</sup>	~ 20 min	—	—	—
	Co	~ 1 a	—	—	—
28	Ni	2—3 h g	—	—	0,085
29	Cu	5 min	—	—	—
	Cu	10 h	—	0,8	—
30	Zn	~ 100 min (?)	—	—	—
31	Ga <sup>70</sup>	20 min	—	—	0,17
	Ga <sup>72</sup>	23 h	—	—	—
33	As <sup>76</sup>	26 h	0,3	2,2	0,16
34	Se	35 min	—	—	—
35	Br <sup>80</sup>	18 min; 4,2 h	~ 0,6; < 0,3	2,0; 2,0	0,12; 0,12
	Br <sup>82</sup>	36 h	< 0,2	0,85	—
39	Y <sup>90</sup>	70 h g	—	—	—
40	Zr	40 h g	—	—	0,13
42	Mo	30 min	—	—	—
	Mo	36 h	—	—	—
44	Ru	? g	—	—	—
45	Rh <sup>104</sup>	44 sec	~ 0,6	2,5	0,15
	Rh	3,9 min	?	~ 2,1	—
46	Pd	15 min	—	—	—
	Pd	12 h	—	—	—
47	Ag <sup>108</sup>	2,3 min	—	—	—
	Ag <sup>110</sup>	22 sec	< 0,5	2,7	—
49	In	13 sec	—	3,1	—
		54 min	—	1,2	0,045
50	Sn	? g	—	—	—
51	Sb	2,5 d	—	—	0,09
52	Te	~ 45 min	—	—	—
53	I <sup>128</sup>	25 min	~ 0,5	2,1	0,11
55	Cs <sup>134</sup>	75 min (?)	—	—	—
56	Ba	80 min	—	—	—

Tabelle 1. (Fortsetzung.)

Ordnungs- zahl	Radioaktiver Kern	Halbwertszeit	$\beta_{\text{Max}}$	$\beta_{\text{Grenze}}$	$d_{\frac{1}{2}}$
57	La <sup>140</sup>	1,9 d	g	—	—
59	Pr	5 min	—	—	—
	Pr	19 h	—	—	0,12
60	Nd	1 h	g	—	—
62	Sm	40 min	—	—	—
	Sm	2 d	—	—	—
63	Eu	9,2 h	—	—	0,04
64	Gd	7 h	g	—	—
65	Tb <sup>160</sup>	3,9 h	—	—	—
66	Dy	2,5 h	—	1,2	0,025
67	Ho <sup>166</sup>	35 h	—	—	0,04
68	Er	7 min	—	—	—
	Er	12 h	—	—	0,03
69	Tu <sup>170</sup>	lang	—	—	—
70	Yb	3,5 h	—	—	0,04
71	Cp	4 h	—	—	—
	Cp	6—7 d	—	—	—
72	Hf	einige Monate	—	—	—
74	W	23 h	—	—	—
75	Re	20 h	—	—	0,12
		85 h	—	—	—
76	Os	40 h	g	—	—
77	Ir	19 h	—	~ 0,5	0,12
		68 d	—	—	—
78	Pt	~ 50 min	—	—	0,18
79	Au <sup>198</sup>	2,7 d	—	1,15	0,04
80	Hg	40 h	g	—	—
81	Tl <sup>204</sup>	4 min	g	—	—
	Tl	97 min	g	—	—
90	Th <sup>233</sup>	25 min	—	—	—
92	U <sup>239</sup>	siehe Text	—	—	—

Halbwertszeit angedeutet. Wo mehrere Halbwertszeiten durch Einfangen beim gleichen Element entstehen, kann die Zuordnung einer Halbwertszeit zu einem Isotop nur erfolgen, wenn dieses auch bei einer anderen Reaktion entsteht oder sicher nicht entsteht. So ermöglichen besonders die Kernphotoeffekte ( $\gamma, n$ ) nach BOTHE und GENTNER (190, 191) die Zuordnung von Isotop und Halbwertszeit, z. B. bei Ag<sup>108</sup> ( $\tau = 2,3$  min); Ag<sup>110</sup> ( $\tau = 22$  sec). Bei Brom läßt sich dadurch zeigen, daß die Halbwertszeiten von 18 min und 4,2 h beide zu Br<sup>80</sup> gehören müssen. Damit ist ein sicherer Fall von Kernisomerie festgestellt (vgl. zu dieser Frage 8, 13, 85, 183). Nach v. WEIZSÄCKER (183) kann man zum Verständnis der Isomerie gelangen, wenn man annimmt, daß es über dem Grundzustand des Kerns einen Term gibt mit stark verschiedenem Spin, aber nur geringem Energieunterschied. Solche Zustände können sehr große Lebensdauer haben.

Besonders interessant sind nach den letzten Arbeiten von MEITNER, HAHN und STRASSMANN (37a, 218, 219, 204a) die radioaktiven Vorgänge, welche sich an die Neutronenanlagerung bei Uran anschließen und zu „Transuranen“ führen (vgl. II, S. 27). Es ist auf diese Weise gelungen, das periodische System bis zur Ordnungszahl 97 zu erweitern. Die sehr verwickelten Verhältnisse in der auftretenden  $\beta$ -Strahlung werden nämlich folgendermaßen gedeutet:



Es treten danach drei parallele Zerfallsreihen auf, welche mindestens zwei Tripel und zwei Paare von Kernisomeren enthalten.

Das Intensitätsverhältnis der Aktivierung mit oder ohne Paraffin wird als Verstärkungsfaktor  $\alpha$  bezeichnet. Ist dieser wesentlich größer als 1, so ist damit Wirksamkeit langsamer Neutronen bewiesen. Es kommen Werte vor zwischen 3 und 80. Der Faktor ist einstweilen noch nicht gut definiert, er hängt erheblich von der geometrischen Anordnung und vom Energiespektrum der Neutronenquelle ab, insbesondere von der geringen Zahl der anscheinend stets gegenwärtigen langsamen Neutronen. Aus den bisherigen Messungen von  $\alpha$  kann man daher keine Schlüsse auf andere Eigenschaften ziehen.

Unter „Aktivierbarkeit“ im engeren Sinn versteht FERMI die Sättigungsintensität der entstehenden Radioaktivität in relativem Maß, bezogen auf diejenige der Halbwertszeit von 44 sec von Rh. Die Aktivierung wird dabei unter genau festgelegten geometrischen Bedingungen gemessen (77). Sie ist für die verschiedenen Elemente erheblich verschieden. Das rührt hauptsächlich von der verschiedenen Absorbierbarkeit der langsamen Neutronen her, genauer vom Verhältnis dieser Größe zur Absorbierbarkeit der radioaktiven Elektronen. Auch bei geringem Absorptionskoeffizienten für Neutronen werden bei genügender Schichtdicke zwar alle langsamen Neutronen absorbiert, aber nur ein sehr geringer Teil in einer Schichtdicke, aus der die radioaktiven Elektronen noch austreten können. Die „Aktivierbarkeit“ hängt also eng mit der Größe des Absorptionsvermögens zusammen (vgl. Ziff. 16).

**5. Chemische Eigenschaften und Abtrennbarkeit radioaktiver Atome.** FERMI und Mitarbeiter (14) haben — wie erwähnt — Aktivierbarkeiten, die mit Paraffin verstärkbar sind, bei 28 Elementen beobachtet. Durch analytisch-chemische Untersuchungen wurde in der Mehrzahl dieser Fälle ausdrücklich festgestellt, daß das radioaktive Element stets quantitativ den chemischen Reaktionen des Ausgangselementes folgt; es handelt sich also um ein Isotop des ursprünglichen Elementes. Man darf daher annehmen, daß das langsame Neutron

addiert wird und sich die Massenzahl dadurch um 1 erhöht. Daß die so gewonnenen Massenzahlen richtig sind, läßt sich in mehreren Fällen unabhängig bestätigen, in denen man den fraglichen Kern auch auf anderem Weg erzeugen kann. Beispiel:  ${}_{13}^*Al^{28}$  aus  ${}_{13}Al^{27}(n, \gamma)$  oder aus  ${}_{15}P^{31}(n, \alpha)$  oder aus  ${}_{14}Si^{28}(n, p)$ .

Besonders sorgfältig wurde immer nachgewiesen, daß die Aktivität nicht zu den beiden Elementen mit einer um 1 oder 2 niedrigeren Ordnungszahl gehört (14). Solche Elemente entstehen verschiedentlich mit *schmellen* Neutronen bei Umwandlungen von der Art  $(n, p)$  oder  $(n, \alpha)$ .

In gewissen Fällen ist eine chemische Abtrennung der radioaktiven Atome von der großen Menge der ursprünglichen Atome möglich, obwohl es sich um Isotope desselben Elementes handelt. Das ist der Fall, wenn die chemische Verbindung, welche bestrahlt wird, das Element in einer solchen Form enthält, daß es nicht die typischen Ionenreaktionen zeigt. So verhält es sich vor allem in organischen (10) oder komplexen Verbindungen (217). Außerdem gilt die einschränkende Bedingung, daß kein Austausch zwischen den freien Atomen und der Verbindung eintreten darf. Beim Einfangen eines langsamen Neutrons sendet das umgewandelte Atom  $\gamma$ -Strahlung aus und wird dabei durch den Rückstoß aus dem Molekelverband herausgerissen, so daß es dann mittels der Ionenreaktionen des Elementes abgetrennt werden kann. Das Verfahren wurde zuerst von SZILARD und CHALMERS (10) bei Jod angewandt; sie bestrahlten Äthyljodid. Ein Jodatome würde z. B. beim Aussenden eines Lichtquants von 5 eMV eine kinetische Energie von rund 100 eV erhalten. Die Jodatome werden also auch dann in Freiheit gesetzt, wenn langsame Neutronen die Umwandlung bewirken, deren kinetische Energie wesentlich kleiner ist als die Dissoziationsarbeit der Molekel (1–2 eV). Es gelingt dann leicht, das radioaktive J als AgJ abzutrennen.

Infolge von Sekundärwirkungen bei der Umwandlung können erfahrungsgemäß die entstehenden Atome auch elektrisch geladen sein. Bei gasförmigen Stoffen, z. B. Äthyl- oder Methyljodid, lassen sie sich dann auf einer Elektrode sammeln. FERMI und Mitarbeiter (2) sowie PANETH und FAY (58) erzielten auf diese Weise Anreicherungen der radioaktiven  ${}_{33}^*As^{76}$  gegenüber dem stabilen im Verhältnis 1:1500, unter Umständen sogar 1:20000.

Eingehende Versuche über die Anreicherung der radioaktiven Halogene zu höchster Konzentration haben ERBACHER und PHILIPP (99) ausgeführt.

Bei Gold gelang MAJER (217) die Abtrennung.

**6.  $\beta$ -Spektren.** Außer durch die Halbwertszeit sind radioaktive Kerne durch ihr  $\beta$ -Spektrum gekennzeichnet. Es handelt sich dabei um das kontinuierliche Spektrum der Kern-Elektronen. Das durch innere Absorption der Kern- $\gamma$ -Strahlung in der eigenen Elektronenhülle entstehende Linienspektrum ist demgegenüber so schwach, daß es sich bisher der Messung entzieht.

Um rasch zu einem Überblick zu gelangen, haben FERMI und Mitarbeiter (14) bei einer großen Zahl von radioaktiven Elementen, die durch langsame Neutronen erzeugt werden können, zunächst die Absorbierbarkeit der Elektronen in Al bestimmt. Ihre Werte sind in Tabelle 1, Spalte 6, angegeben.

Inzwischen ist von vielen dieser Stoffe auch das gesamte Spektrum ausgemessen worden. Die Energieverteilung ist stets ziemlich ähnlich. Kleinen Energiewerten entspricht geringe Häufigkeit, bei größeren wird ein Maximum der Häufigkeit erreicht, dann folgt ein monotoner Abfall bis zu einer definierten Grenzenergie. Über die genaue Form des  $\beta$ -Spektrums liegen mehrere Untersuchungen vor, besonders von ALICHANIAN, ALICHANOW, DŽELEPOW (73), FOWLER, DELSASSO, LAURITSEN (112), GAERTTNER, TUTIN, CRANE (116), KURIE, RICHARDSON, PAXTON (139). Um einen Überblick zu geben, ist in Tabelle 1 auch die Lage des Intensitätsmaximums und die Grenzenergie der Elektronen zusammengestellt. Besonderes Interesse bietet die Grenzenergie, da sie nach den Erfahrungen bei der natürlichen Radioaktivität die Energieionung bestimmt.

Wegen der geringen Intensität ist es schwierig, den Verlauf in der Nähe der Höchstenergie und deren genauen Wert experimentell sicher zu fassen. Es wäre aber erwünscht, die genaue Form des Verlaufs in der Nähe der Grenze zu kennen. Aussagen darüber sind vor allem durch zwei theoretische Formeln gemacht worden. Die eine stammt von FERMI (6); die andere, von KONOPINSKI und UHLENBECK (42), entspringt einer Fortführung der Theorie von FERMI. Aus genauen experimentellen Beobachtungen von LYMAN (216) und von LANGER und WHITAKER (212) geht hervor, daß in der Nähe der Grenzenergie der Ansatz von FERMI zu besserer Übereinstimmung mit der Erfahrung führt, als die zunächst viel gebrauchte Formel von KONOPINSKI und UHLENBECK. In Tabelle 1 ist daher die beobachtete Grenze und nicht die Extrapolation nach KONOPINSKI-UHLENBECK aufgenommen. Sie würde zu große Werte für die Grenze ergeben, bei RaE und bei  $^{32}_{15}\text{P}$  um 17%. Als völlig gesichert kann keine der beiden theoretischen Formeln gelten.

**7. Radioaktive  $\gamma$ -Strahlen.** Viele künstlich radioaktive Kerne senden eine  $\gamma$ -Strahlung aus (nicht zu verwechseln mit der bei der Entstehung der Kerne durch Neutroneneinfang ausgesandten  $\gamma$ -Strahlung; Ziff. 8, 9, 10). Über Zusammensetzung und Quantenenergie dieser  $\gamma$ -Strahlung ist wenig Zuverlässiges bekannt. Anscheinend werden jedoch Linienspektren von ähnlicher Art ausgesandt, wie bei den natürlichen radioaktiven Kernen.

Anfänglich wurde versucht, die mittlere Quantenenergie aus Versuchen über die Absorbierbarkeit der  $\gamma$ -Strahlen abzuleiten. Man bestimmt dazu den Absorptionskoeffizienten in Stoffen mit verschiedener Ordnungszahl, z. B. in Al, Cu, Sn, Pb. Das ist erforderlich, weil der Absorptionskoeffizient in einer einzelnen Substanz infolge des Wiederanstiegs bei

hohen Quantenenergien durch die Paarerzeugung nicht eindeutig von der Quantenenergie abhängt. Die Anteile des Absorptionskoeffizienten, die vom COMPTON-Effekt (KLEIN-NISHINA-Formel) und vom Photoeffekt herrühren und derjenige, der durch die Paarerzeugung bewirkt wird, sind für alle Ordnungszahlen bekannt. Es sollte daher auf diesem Wege möglich sein, eine gute Bestimmung der mittleren Quantenenergie durchzuführen. Solche Messungen würden sicher zum Erfolg führen, wenn man mit einwandfreien Meßbedingungen arbeiten könnte. Dazu gehören paralleler Strahlengang im Absorber und genügend große Abstände zwischen Absorber und Ionisationskammer bzw. Zählrohr, um die sonst erheblichen Störungen durch die Streustrahlung zu vermeiden. Leider ist es bisher meist aus Intensitätsgründen nicht möglich, diese Bedingungen einzuhalten. Die Messungen nach diesem Verfahren haben in den bisher nachprüfbareren Fällen nicht zu verlässlichen Ergebnissen geführt und sollen daher übergangen werden.

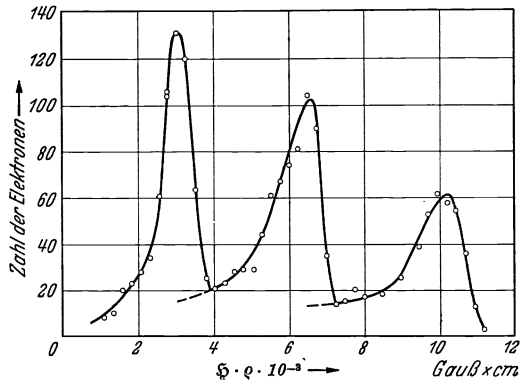


Abb. 1. Spektrum der Rückstoßelektronen, die durch radioaktive  $\gamma$ -Strahlen von  ${}_{11}^{24}\text{Na}$  ausgelöst werden. [Nach RICHARDSON und KURIE (166).]

Nur bei zwei Kernen,  ${}_{11}^{24}\text{Na}$  und  ${}_{18}^{41}\text{A}$ , ist bis jetzt die Zusammensetzung der radioaktiven  $\gamma$ -Strahlung infolge großer Intensität und einer überlegenen Methode recht genau bekannt. RICHARDSON und KURIE (166) haben mit einer Nebelkammer im Magnetfeld diejenigen Rückstoßelektronen aus einer dünnen Glimmerschicht ausgemessen, deren Richtung sich um weniger als  $10^\circ$  von der  $\gamma$ -Richtung unterscheidet. Durch die Auswahl der Richtung werden nur solche Elektronen verwendet, die bei der COMPTON-Streuung praktisch die gesamte übertragbare Energie auch tatsächlich erhalten haben. Man bekommt so ein vorzügliches Bild des Spektrums der  $\gamma$ -Linien. Für  ${}_{11}^{24}\text{Na}$  ( $\tau = 15^h$ ) ergaben sich 3 Linien mit 0,95; 1,93; 3,08 eMV mit relativen Intensitäten von 1,05; 0,95; 0,65. Das gemessene Elektronenspektrum ist in Abb. 1 dargestellt. Möglicherweise besteht zwischen den 3 Linien eine Kombinationsbeziehung so, daß die Summe der Quantenenergien der ersten beiden gleich der dritten ist. Das verwendete  ${}_{11}^{24}\text{Na}$  wurde durch die Umwandlung  ${}_{11}\text{Na}^{23} (d, p) {}_{11}^{24}\text{Na}$  gewonnen. Die Substanz entsteht auch beim Einfangen langsamer Neutronen, jedoch erreicht man dabei nur viel geringere Intensitäten.  ${}_{18}^{41}\text{A}$  besitzt nur eine einzige  $\gamma$ -Linie.

Die Entstehung dieser  $\gamma$ -Strahlen hat man sich ebenso wie bei natürlich radioaktiven Kernen zu denken: nach dem  $\beta$ -Zerfall kann der Kern in

einem angeregten Zustand zurückbleiben und nachträglich unter  $\gamma$ -Emission in den Grundzustand übergehen. Aus Energiegründen muß dann das  $\beta$ -Spektrum aus mehreren Teilspektren mit verschiedener Grenzenergie bestehen, entsprechend den verschiedenen Zuständen des umgewandelten Kernes. Beim  $\beta\gamma$ -strahlenden  $^{25}\text{Mn}^{56}$  und  $^{33}\text{As}^{76}$  sind in der Tat deutliche Anzeichen einer zusammengesetzten Struktur des  $\beta$ -Spektrums gefunden worden (89).

### III. Einfangvorgang, $\gamma$ -Strahlen beim Einfang.

**8. Entstehung, Intensität.** Die erste Beobachtung einer durch Neutronen hervorgerufenen  $\gamma$ -Strahlung stammt von LEA (9, 49). Er arbeitete mit einem Präparat von Po + Be und Ionisationskammern aus Eisen mit verschiedener Gasfüllung zur Unterscheidung von Neutronen und  $\gamma$ -Strahlung. Aus Paraffin oder flüssigem Wasserstoff wurde die Strahlung nach rückwärts beobachtet. Es ergab sich eine Erhöhung der  $\gamma$ -Intensität über den Nulleffekt um 2—3%. Nach unserer heutigen Kenntnis rührte die Erhöhung von zwei gleichzeitig auftretenden Erscheinungen her, 1. von der  $\gamma$ -Strahlung, die im Paraffin durch Anlagerung verlangsamer Neutronen an Wasserstoff entsteht („Paraffin- $\gamma$ -Strahlung“), 2. von  $\gamma$ -Strahlung, die durch Anlagerung langsamer, von Paraffin rückwärts gestreuter Neutronen an das Eisen der Kammerwände entsteht<sup>1</sup>.

Die Paraffin- oder genauer Wasserstoff- $\gamma$ -Strahlung wurde näher untersucht von FLEISCHMANN (7, 35). Er stellte fest, daß die H- $\gamma$ -Strahlung nur von langsamen Neutronen erregt wird. Das wurde aus dem Verlauf der Intensitätszunahme mit der Paraffindicke geschlossen. Die Messung wurde ausgeführt als Differenzmessung von Paraffin und Graphit mit einem Präparat von RaEm + Be in einem großen Bleifilter. Die Erhöhung der  $\gamma$ -Intensität gegenüber dem Nulleffekt betrug über 100%. Die Intensität der  $\gamma$ -Strahlung steigt bei kleinen Dicken in erster Näherung quadratisch mit der Dicke. Daraus ist zu folgern, daß zwischen die schnellen Neutronen, die von den Präparaten hauptsächlich ausgesandt werden, und die  $\gamma$ -Strahlung eine Zwischenstrahlung, die im Paraffin selbst zwangsläufig entsteht, eingeschaltet ist. Die Zwischenstrahlung besteht aus langsamen Neutronen. Ihre Intensität steigt näherungsweise linear an, ihr Maximum fällt mit dem Wendepunkt in der  $\gamma$ -Anstiegskurve bei rund 5 cm Paraffindicke zusammen (vgl. II, S. 23, Abb. 7).

Bei verschiedenen anderen Stoffen (Fe, Cu, Cd, Pb,  $\text{B}_2\text{O}_3$  u. a.) wurde festgestellt (36), daß  $\gamma$ -Strahlen ausgelöst werden, und zwar hauptsächlich durch langsame Neutronen. Mit Hilfe der  $\gamma$ -Strahlung und durch Anwendung geeigneter Filter wurde aus Anstiegs- und Ab-

<sup>1</sup> Auch die Messungen, welche LEA (49) an anderen Elementen durchgeführt hat, müssen wegen der Verwendung von Eisen in anderem Sinne als vom Verfasser gedeutet werden.



sorptionskurven die Absorbierbarkeit langsamer Neutronen und der durch sie erzeugten  $\gamma$ -Strahlung bestimmt (II, S. 23/24).

Als Folge starken Absorptionsvermögens für langsame Neutronen wurde  $\gamma$ -Strahlaussendung von FERMI und Mitarbeitern (12) bei Co, Cd, Cl, Ir, Au, Hg aufgefunden. Die Entstehung der  $\gamma$ -Strahlung in Paraffin, Wasser und auch Kohle wurde auch von ARZIMOWITSCH, KURTSCHATOW LATYSCHEW und CHRAMOW (16) festgestellt. Sie versuchten auch noch auf die Einfangquerschnitte zu schließen.

Bei einer größeren Zahl von Elementen wurde  $\gamma$ -Strahlung beim Einfangen langsamer Neutronen von KIKUCHI, AOKI, HUSIMI (134, 136) nachgewiesen.

$\gamma$ -Strahlen entstehen bei jedem Einfangprozeß. Dabei wird Bindungsenergie frei und diese kann allein in Form von Strahlung abgegeben werden. Alle Stoffe mit beträchtlichem Wirkungsquerschnitt für Einfangprozesse senden auch eine erhebliche  $\gamma$ -Strahlung aus, wenn sie von langsamen Neutronen getroffen werden.

Man kann nun die Intensität der entstehenden Strahlung für die verschiedenen Elemente, bezogen auf gleiche Neutronenintensität, miteinander vergleichen. Bei Stoffen mit großem Absorptionsvermögen für langsame Neutronen stimmt die Zahl der *ausgesandten* Lichtquanten mit der der *erzeugten* überein, denn die Neutronen werden schon in dünnen Schichten vollständig absorbiert, so daß alle  $\gamma$ -Strahlen aus der Schicht austreten können. Falls dagegen die Neutronen mit kleinem Wirkungsquerschnitt absorbiert werden, entstehen die  $\gamma$ -Strahlen zum großen Teil erst in beträchtlicher Tiefe der absorbierenden Substanz und werden daher auf ihrem Weg zum Zählrohr durch Absorption geschwächt. Dafür lassen sich einfache Korrekturen anbringen. Zum Intensitätsvergleich ist noch zu berücksichtigen, daß Lichtquanten verschiedener Energie mit verschiedener Ausbeute angezeigt werden. Die Korrektur dafür ist weniger sicher. FLEISCHMANN (105) fand auf diesem Weg für mehrere, die Neutronen teils stark, teils nur schwach absorbierende Stoffe näherungsweise gleiche erzeugte Intensität.

Die Versuche wurden in ähnlicher Weise von GRIFFITHS und SZILARD (204) wiederholt. Sie untersuchten 11 durchweg stark absorbierende Stoffe und erhielten (ohne Anwendung einer Korrektur für verschiedene Quantenenergie) innerhalb  $\pm 15\%$  übereinstimmende Werte für die Intensität der  $\gamma$ -Strahlung.

Hiernach ist die Zahl der von einem absorbierten Neutron erzeugten  $\gamma$ -Quanten für die verschiedenen Stoffe nicht sehr verschieden und vermutlich von der Größenordnung 1 oder etwas größer.

**9. Bestimmung der Quantenenergie** Da nach unserer heutigen Kenntnis die  $\gamma$ -Strahlung Quantenenergien im wesentlichen von etwa 3 bis zu etwa 8 eMV enthält, ist es nicht möglich, aus Absorptionsversuchen zuverlässige Schlüsse zu ziehen (vgl. Ziff. 7).

Tabelle 2. Quantenenergie der beim Neutroneneinfang entstehenden  $\gamma$ -Strahlen, abgeleitet aus Halbwertdicke und Grenzdicke. Die eingeklammerten Halbwertdicken sind in Blei gemessen, die übrigen in Aluminium.

Ordnungs- zahl	Element	Halbwertdicke $\frac{g}{cm^2}$		$h\nu$ in eMV	Grenzdicke	$h\nu$ in eMV
		RASETTI (62)	FLEISCHMANN (106)		$\frac{g}{cm^2}$ Al KIKUCHI (136)	
1	H	—	0,23	2,26	0,83	2,13
13	Al	—	0,60	5,8	1,65	4,05
17	Cl	0,66	—	6,5	2,55	6,15
19	K	—	—	—	2,05	5,0
22	Ti	—	—	—	2,05	5,0
24	Cr	—	—	—	2,85	6,85
25	Mn	—	—	—	2,25	5,45
26	Fe	—	0,78	7,7	2,75	6,6
27	Co	0,50	—	4,9	2,75	6,6
28	Ni	—	—	—	2,75	6,6
29	Cu	—	0,76	7,4	2,55	6,15
30	Zn	—	—	—	2,35	5,7
33	As	—	—	—	2,10	5,1
34	Se	—	0,60	5,8	2,35	5,7
35	Br	—	—	—	2,10	5,1
47	Ag	(0,36)	0,38	(3,5); 3,7	1,80	4,4
48	Cd	0,41	0,42	4,0 4,1	2,10	5,1
51	Sb	—	—	—	1,65	4,05
53	J	—	—	—	1,95	4,75
62	Sm	—	0,34	3,3	1,95	4,75
64	Gd	—	0,40	4,0	—	—
74	W	—	—	—	1,95	4,75
77	Ir	(0,33)	—	(3,2)	—	—
79	Au	—	—	—	2,15	5,2
80	Hg	0,53	0,46	4,5	2,45	5,9
82	Pb	—	0,43	4,2	—	—
	ThC''		0,27	2,65		

Gute Werte für die Quantenenergie würde man durch Ausmessen von Sekundärelektronen mit der Nebelkammer im Magnetfeld erhalten (vgl. Ziff. 7). Das Verfahren hätte den Vorzug, daß parallele  $\gamma$ -Strahlbündel nicht unbedingt erforderlich sind. Leider fehlen derartige Messungen noch vollständig.

Besonders einfach und dabei recht zuverlässig ist das zuerst von BOTHE und KOLHÖRSTER angegebene Koinzidenzverfahren. Man geht dabei indirekt vor und bestimmt die Energie der von  $\gamma$ -Strahlen ausgelösten Rückstoß- und Photoelektronen durch Absorptionsmessung. Die zu untersuchenden Elektronen durchsetzen zwei dünnwandige Zählrohre und erzeugen beim Durchgang durch beide einen Koinzidenzausschlag. Durch Einschieben von Absorbern zwischen die Zählrohre nimmt die Koinzidenzhäufigkeit ab. Man erhält auf diese Weise Kurven, die mit zunehmender Absorberdicke monoton abnehmen. Auf die

Energie der Elektronen könnte man aus der Grenzdicke schließen; da die Kurven aber fast asymptotisch auslaufen, ließe sich auf diesem Wege nur eine geringe Meßgenauigkeit erreichen. Es ist daher viel besser, die Halb- und Viertelwertdicken zu bestimmen und durch Vergleich mit Beobachtungen, die mit bekannten  $\gamma$ -Strahlen (ThC'') erhalten werden, auf die Quantenenergie der auslösenden  $\gamma$ -Strahlen zu schließen. Der Zusammenhang ist nahezu linear.

Messungen nach diesem Verfahren wurden ausgeführt von RASSETTI (62), FLEISCHMANN (106) und KIKUCHI, HUSIMI und AOKI (136). Die beiden ersteren verwendeten zur Energiebestimmung die Halbwertdicke (und Viertelwertdicke), die letzteren versuchten aus der Grenzreichweite der Elektronen auf die Quantenenergie zu schließen. Die Messungen für verschiedene Stoffe sind in Tabelle 2, Spalte 3 und 4, zusammengestellt. Spalte 5 enthält die daraus folgenden Quantenenergien, berechnet unter der Annahme, daß eine Halbwertdicke von  $0,27 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$  (1 mm) Al 2,65 eMV entspricht und der Zusammenhang linear ist. Spalte 6 und 7 enthält die Grenzdicken und die daraus abgeleiteten Quantenenergien.

Über die spektrale Zusammensetzung der  $\gamma$ -Strahlung läßt sich aus solchen Messungen kaum Genaueres aussagen. Aus der Halbwertdicke leitet man eine „mittlere“ Quantenenergie ab, in der — wegen der größeren Nachweiswahrscheinlichkeit — die harten Quanten bevorzugt berücksichtigt werden. Die Grenzreichweite ist, soweit sie genau genug bestimmt werden kann, von der härtesten starken Linie abhängig.

Nach PONTECORVO (159, 160) soll die Quantenenergie bei Gold verschieden sein, je nachdem ob thermische oder Resonanzneutronen (Ziff. 16) eingefangen werden. Das ist schwer verständlich, da die thermischen Neutronen nur im Ausläufer des Resonanzniveaus eingefangen werden.

**10. Zusammenhang mit der Ordnungszahl, Energietönung.** Da die  $\gamma$ -Strahlung die einzige Form einer Energieabgabe beim Einfangprozeß ist, kann man versuchen, die Quantenenergie mit der Bindungsenergie des angelagerten Neutrons in Zusammenhang zu bringen (104). Nach den massenspektroskopischen Daten für schwere Kerne beträgt der Massenunterschied benachbarter Isotope stets ziemlich genau 1,000, während die Masse des Neutrons 1,0090 ist. Da 0,001 Masseneinheiten äquivalent 0,93 eMV sind, entspricht dem Unterschied eine Bindungsenergie von rund 8 eMV. Da zur Zeit oberhalb eines Atomgewichts von 40 zu wenig genaue Werte verfügbar sind, wollen wir statt der Bindungsenergie für das einzelne Neutron den sogenannten Packungsanteil mit umgekehrtem Vorzeichen, d. h. die *mittlere* Bindungsenergie pro Kernteilchen zum Vergleich heranziehen. Diese Größe steigt bei kleinen Ordnungszahlen schnell an, erreicht ein Maximum in der Nähe von  ${}_{20}\text{Ca}$  und fällt dann langsam ab (Abb. 2). Falls die  $\gamma$ -Strahlung monochromatisch wäre, sollte dieser Verlauf mit dem der  $\gamma$ -Energie übereinstimmen.

Die oben abgeleiteten Quantenenergien liegen in einem Bereich von 2,3 bis 7,7 eMV. Trägt man sie als Funktion der Ordnungszahl des bestrahlten Elementes auf, so erhält man eine glatte Kurve, die eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Verlauf des Packungsanteils zeigt [FLEISCHMANN (104, 106)], im einzelnen treten jedoch Abweichungen auf. Die Kurve (Abb. 2) besitzt ein ausgeprägtes Maximum in der Gegend von Fe, hat einen steilen Abfall zu einem flachen Minimum bei den seltenen Erden und zeigt einen Wiederanstieg bei den höheren Ordnungszahlen.

KIKUCHI und Mitarbeiter (131, 137) haben bei fast doppelt so vielen Elementen die Grenzdicke der Sekundärelektronen (statt der Halbwert-

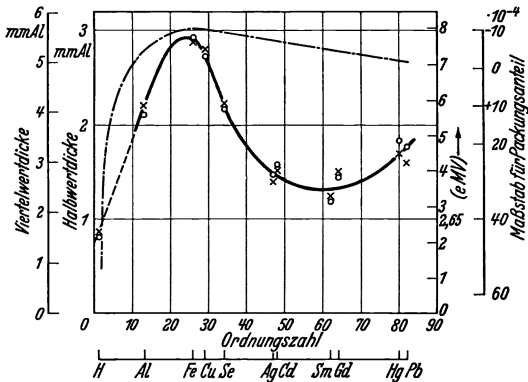


Abb. 2. Halbwertdicke (Quantenenergie) in Abhängigkeit von der Ordnungszahl (—) und mittlere Bindungsenergie pro Kernteilchen (---). [Nach (106).]

Ob die Grenzreichweiten tatsächlich zwei Kurven liefern, oder ob es sich nur um streuende Werte handelt, werden wohl neue Messungen ergeben, die von den Verfassern angekündigt sind. Bei Benutzung der Halbwertdicke erhalten KIKUCHI und Mitarbeiter recht stark streuende Werte und halten deshalb diese Berechnungsweise für unsicher.

Die Übereinstimmung des Kurvenverlaufs bei Auswertung nach den beiden Methoden und die Verschiedenheit des Verlaufs der Quantenenergie und des Packungsanteils wird verständlich, wenn im Gebiet des Minimums die  $\gamma$ -Energie in Form von mehreren gleichzeitig ausgesandten Quanten ausgestrahlt wird, die dann notwendig kleinere Energie als die Bindungsenergie des Neutrons besitzen müssen. So würde sich erklären, daß die Kurve der Quantenenergien streckenweise erheblich unter der Kurve der Packungsanteile liegt. Bei Cd wurde von FLEISCHMANN (106, sowie unveröffentlichte Versuche) diese Möglichkeit geprüft und in der Tat gleichzeitige Aussendung mehrerer Quanten festgestellt. Das geschah unter Verwendung von dickwandigen Zählrohren, die nur für  $\gamma$ -Strahlen, nicht für Elektronen, durchlässig sind, mit Hilfe von Koinzidenzausschlägen zwischen beiden Zählrohren. Andererseits wird bei Wasserstoff höchstwahrscheinlich nur ein einziges

gemessen. Für die daraus abgeleiteten Quantenenergien (Tabelle 2) finden sie im großen und ganzen einen ähnlichen Verlauf. Die gemessenen Werte scheinen sich jedoch um zwei Kurven zu gruppieren. Das Maximum in der Nähe von Fe, das Minimum in der Gegend der seltenen Erden und der Wiederanstieg bei größeren Ordnungszahlen ergeben sich auch hier.

Quant ausgesandt, da die Energie der Strahlung mit der aus dem Umkehrprozeß [Kernphotoeffekt ( $\gamma, n$ )] ermittelten Bindungsenergie übereinstimmt. Diese Deutung der Quantenenergie läßt sich an Hand der folgenden Überlegung noch weiter treiben.

Die langsamen Neutronen werden nach Ziff. 13 u. 16 auf Resonanzniveaus mit bestimmter Energie bzw. auf deren Ausläufern eingefangen, worauf der Kern unter Ausstrahlung der verfügbaren Energie in den Grundzustand übergeht. Aus den mittleren Wirkungsquerschnitten für das Einfangen kann man nach Ziff. 16 einigermaßen auf den mittleren Abstand der Energieniveaus schließen. Man findet auf diese Weise kleine Niveaudichte bei kleinen Ordnungszahlen, einen Anstieg in der Nähe von  $Z = 25 - 30$  (etwa bei  ${}_{26}\text{Fe}$ ), ein Maximum bei den seltenen Erden und dann wieder einen Abfall (vgl. Abb. 10). Der Verlauf ist ähnlich dem *Unterschied* zwischen der gemessenen Kurve der mittleren  $\gamma$ -Energie und dem Verlauf des Packungsanteils.

Dieser Umstand führt zu folgender Erklärung, durch welche die Form der Kurve (Abb. 2) auf den Verlauf der Niveaudichte (Abb. 10) zurückgeführt wird (106). Bei den Elementen mit geringer Niveaudichte etwa bis Eisen wird die Bindungsenergie in Form eines einzigen Quants ausgesandt, also nicht oder doch nur selten in kleinere Quanta unterteilt. Je größer die Niveaudichte ist, um so häufiger und stärker wird die  $\gamma$ -Strahlung in kleine Quanta zersplittert, weil die Möglichkeiten für Kaskadensprünge günstiger sind. Besonders im Gebiet der seltenen Erden sinkt daher die mittlere Quantenenergie stark ab. Wegen Abnahme der Niveaudichte bei höheren Ordnungszahlen steigt dann auch die mittlere Quantenenergie wieder an. *Warum* die Niveaudichte selbst diesen allgemeinen Verlauf zeigt, darüber soll in Ziff. 22 einiges gesagt werden.

#### IV. Austauschprozesse.

Wie erwähnt, werden langsame Neutronen von anderen Kernen im allgemeinen ohne Aussendung eines anderen Teilchens eingefangen. Es sind bis jetzt nur drei Stoffe bekannt, bei denen durch langsame Neutronen Teilchenstrahlen ausgelöst werden können („Austauschprozesse“), nämlich Bor, Lithium und Stickstoff. Die Seltenheit solcher Prozesse ist daraus zu verstehen, daß sie schon recht stark exotherm sein müssen, damit das  $\alpha$ -Teilchen oder Proton den Potentialwall der höheren Kerne nach außen durchdringen kann.

**11. Aussendung von  $\alpha$ -Strahlen.** Von FERMI und Mitarbeitern (11) wurde mittels einer Ionisationskammer gefunden, daß von Bor  $\alpha$ -Strahlen ausgesandt werden, wenn langsame Neutronen absorbiert werden. Der Prozeß wurde gedeutet als  ${}_5\text{B}^{10} (n, \alpha) {}_3\text{Li}^7$ .

Die anfänglich offene Möglichkeit, daß  ${}_2\text{He}^4 + {}_2\text{He}^4 + {}_1\text{H}^3$  entstehen könnte (23), wurde widerlegt mit Hilfe von photographischen Schichten, die mit Borax getränkt waren [TAYLOR und GOLDHABER (68)], und durch

Versuche in der Nebelkammer bei Gegenwart von Methylborat  $B(CH_3O)_3$  [KURTSCHATOW, LATYSCHEW (44)]. Messungen von WALLEN (181) mit Hilfe einer Ionisationskammer und Proportionalverstärker, von ROTBLAT (171), von FÜNFER (201) mit Proportionalzählrohr mit veränderlichem Druck ergaben für die Reichweite der  $\alpha$ -Strahlen Werte um 0,9 cm Luftäquivalent, für die Reichweite des Li-Kerns 0,3—0,4 cm. Die Energietönung ist dann 2,4 bis 2,5 eMV. Nach HAXEL (207) existieren zwei Reichweitengruppen der  $\alpha$ -Strahlung mit 0,64 und 0,94 cm. Das bei der Umwandlung von Bor in Form von  $\alpha$ -Teilchen entstehende Helium wurde von PANETH, LOLEIT und GLÜCKAUF (59, 157, 224) spektroskopisch und manometrisch nachgewiesen.

*Lithium* wird mit geringerem Wirkungsquerschnitt umgewandelt als Bor. Der Prozeß ist ähnlich und lautet nach CHADWICK und GOLDHABER (23)  ${}_3Li^6(n, \alpha){}_1H^3$ . Nach Messungen mit Ionisationskammer (23, 171), in der Nebelkammer (21) und mit photographischen Schichten (68) ergab sich für die  $\alpha$ -Reichweite 1,08 bis 1,5 (2,0) cm, für die Reichweite des  $H^3$ -Teilchens 5,36 bis 5,5 (6,5) cm und für die Energietönung um 4,5 eMV.

**12. Aussendung von Protonen.** Die Umwandlung von *Stickstoff* verläuft nach der Beziehung  ${}_7N^{14}(n, p){}_6C^{14}$ . Diese Reaktion ist mit *schnellen* Neutronen schon länger bekannt (HARKINS, vgl. I, S. 26—29). Daß eine Umwandlung durch *langsame* Neutronen unter Teilchenaussendung eintritt, wurde von CHADWICK und GOLDHABER (23) zuerst beobachtet. Anfänglich glaubte man, daß auch hier  $\alpha$ -Strahlen ausgesandt werden (20). Die Reichweite der ausgesandten Teilchen und des Rückstoßkerns beträgt zusammen  $1,06 \pm 0,02$  cm. Nimmt man an, daß ein  $\alpha$ -Teilchen ausgesandt wird, so stimmen die genügend genau bekannten Massen und die Energietönung nicht zusammen. Deutet man jedoch die Teilchen als Protonen, so erhält man Übereinstimmung [BONNER und BRUBAKER (87)]. Die Energietönung beträgt dann  $0,58 \pm 0,03$  eMV. Der Wirkungsquerschnitt für diese Umwandlung ist wesentlich kleiner als der von B oder Li.

Mit Hilfe von photographischen Platten mit verschiedenen Emulsionen, von denen die eine auf  $\alpha$ -Strahlen allein, die andere auf  $\alpha$ -Strahlen und Protonen anspricht, kamen BURCHAM und GOLDHABER (90) ebenfalls zum Ergebnis, daß Protonen ausgesandt werden.

## V. Absorption und Streuung.

**13. Neutronengruppen.** Schon die ersten Versuche von FERMI und Mitarbeitern (2) zeigten, daß eine Reihe von Stoffen langsame Neutronen mit großem Wirkungsquerschnitt absorbiert. Bei näherer Untersuchung erwiesen sich die Verhältnisse bald als recht verwickelt. Es zeigte sich, daß der gemessene Absorptionskoeffizient außer von der Natur des Absorbers auch von der Art des „Indikators“ beträchtlich

abhängen kann. [TILLMANN und MOON (69)]. Die Erklärung dafür liegt in dem Umstand, daß der „Indikator“ auf bestimmte Energiebereiche der aus dem Paraffin austretenden Neutronen selektiv anspricht, während der Absorber bestimmte, im allgemeinen andere Energiebereiche herausabsorbiert. Als „Indikator“ für Neutronen kann jeder Stoff verwendet werden, der künstlich radioaktiv wird oder beim Einfangen von Neutronen  $\gamma$ -Strahlung oder  $\alpha$ -Strahlung (Bor, Lithium) aussendet. Die nähere Aufklärung der Verhältnisse verdankt man im wesentlichen FERMI und Mitarbeitern.

Bei Absorptionsversuchen nimmt im allgemeinen die durchgehende Intensität mit zunehmender Absorberdicke nicht nach einem einfachen

Absorptionskoeffizienten ab, vielmehr bleibt nach einer gewissen Absorberdicke ein sehr viel durchdringenderer Anteil übrig. Wie groß er ist, hängt von der Wahl des Indikators ab. Ein Beispiel zeigt Abb. 3. Der stark absorbierbare Teil wird in erster Näherung nach einer Expo-

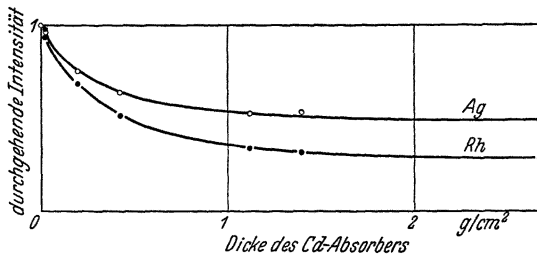


Abb. 3. Absorbierbarkeit langsamer Neutronen in Cd, gemessen mit künstlicher Radioaktivität von Ag und Rh. [Nach AMALDI und FERMI (77).]

ponentialfunktion geschwächt. Daher läßt sich ein Absorptionskoeffizient bzw. Wirkungsquerschnitt angeben. Der in gewissen Stoffen, vor allem solchen mit sehr großem Absorptionsquerschnitt, z. B. Cd, wenig absorbierbare Anteil ist besonders interessant. Die dazu gehörenden Neutronen bezeichnen wir als „Restneutronen“. Wie in Ziff. 14 gezeigt wird, haben die z. B. in Cd leicht absorbierbaren Neutronen eine kinetische Energie von einigen 0,01 eV, die Restneutronen dagegen größere Energie bis etwa 100 eV.

Einige Stoffe zeichnen sich, allgemein gesprochen, durch besonders hohe Absorptionskoeffizienten für langsame Neutronen aus; diese sind das oben schon genannte Cadmium, Gadolinium, Dysprosium und auch Bor. Nimmt man einen dieser Stoffe als Filter, und zwar jeweils in einer Dicke, durch die der näherungsweise exponentiell absorbierbare Bruchteil weggenommen wird, so stimmt die Intensität der Restneutronen für einen und denselben Indikator, aber verschiedene Filter überein, welchen Indikator man auch wählt. Daraus ist zu schließen, daß diese starken Absorber ein Energiegebiet besitzen, das von ihnen allen gemeinsam absorbiert wird. Die diesem Gebiet angehörenden Neutronen werden bei Messungen meist mit  $0,3$  bis  $0,4 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$  Cd absorbiert, man bezeichnet sie nach FERMI als *Neutronengruppe C* („Cd-Gruppe“). Wie in Ziff. 14 begründet wird, handelt es sich um Neutronen mit *thermischen*

*Geschwindigkeiten.* Diese Gruppe wird auch, weniger stark, von allen anderen Stoffen absorbiert, die überhaupt langsame Neutronen absorbieren. Die Absorptionsquerschnitte dafür schwanken um mehrere Zehnerpotenzen, und zwar etwa zwischen  $0,3 \cdot 10^{-24}$  und  $30000 \cdot 10^{-24}$  cm<sup>2</sup>, vgl. Tabelle 4 in Ziff. 19. Zum Vergleich sei daran erinnert, daß der in der gewöhnlichen Weise definierte geometrische Querschnitt, z. B. des Cd-Kernes, um  $2,5 \cdot 10^{-24}$  cm<sup>2</sup> beträgt. Experimentell untersucht man die Eigenschaften dieser C-Gruppe meist, indem man die Differenz zwischen zwei gleichartigen Messungen mit und ohne Cd-Filter bildet. Ein Beispiel bietet Abb. 13 (Ziff. 16). Kurve 3 gibt die Intensitätsabnahme für Gruppe C in Abhängigkeit von der Dicke des Absorbers wieder; sie ist durch die Differenzbildung von Kurve 1 und 2 entstanden.

Die Verhältnisse bei anderen Stoffen als den erwähnten stark absorbierenden sind verwickelter. Übersichtliche Verhältnisse entstehen bei folgendem Versuch: Man läßt langsame Neutronen zunächst durch Cd gehen, nimmt also die thermischen Neutronen weg und prüft die hindurchgehende „Reststrahlung“ auf ihr Vermögen, bestimmte „Indikatoren“ zu aktivieren. Je nach dem Indikator findet man ziemlich verschiedene Intensitäten. Groß erscheint die Intensität z. B., wenn die Neutronen durch die künstliche Radioaktivität von In oder Rh nachgewiesen werden. Bringt man zwischen Cd und Indikator verschiedenartige Absorber, so stellt man in manchen Fällen eine starke Absorption fest, z. B. bei In-Indikator mit Rh-Absorber  $\mu = 1,6 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$  Rh. Besonders groß ist die Absorption, wenn Indikator und Absorber aus dem gleichen Element bestehen („Resonanzabsorption“); z. B. erhält man mit Rh als Indikator für Rh als Absorber  $\mu = 2,0 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$  Rh. Schiebt man dagegen Ag, Au, Hg als Absorber ein, so erhält man eine verschwindend kleine Schwächung ( $\mu = 0,03$  bis  $0,07 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$ ). Man schließt daraus, daß es im Energiebereich der Restneutronen *selektive Absorptionsgebiete* gibt. Die selektive Absorption macht sich geltend einerseits im Indikator, der nur durch die von ihm selbst selektiv absorbierten Restneutronen überhaupt aktiviert wird, andererseits im Absorber, der wiederum nur die von ihm absorbierten Restneutronen wegnimmt. Fallen die beiden selektiven Gebiete zusammen (Rh, Rh oder auch In, Rh), so tritt starke Absorption ein; fallen sie nicht zusammen (Rh, Ag), so ergibt sich nur sehr geringe Schwächung. Das Vorhandensein der Resonanzabsorptionsgebiete ermöglicht es, enge Energiebereiche aus dem kontinuierlichen Energiespektrum auszusondern.

Bei den „stark absorbierenden“ Elementen Cd, Gd usw. liegen die Resonanzabsorptionsgebiete im Bereich der Gruppe C, also im Gebiet thermischer Neutronen. Verwendet man einen dieser Stoffe als Indikator, so gelingt es in keinem Fall, damit Restneutronen nachzuweisen. Man muß daraus schließen, daß diese Stoffe außerhalb ihres gemein-



samen Absorptionsgebietes keine merklichen anderen selektiven Absorptionsbanden besitzen. Dies allein würde schon die Annahme nahelegen, daß bei ihnen das selektive Absorptionsgebiet in den Bereich der thermischen Neutronen fällt oder in unmittelbare Nähe davon.

Bei gewissen Stoffen tritt eine Aktivierung mit verschiedenen Halbwertzeiten ein, z. B. Ag, Cu u. a. Man kann dann die Eigenschaften der zu den beiden Halbwertzeiten gehörigen Resonanzneutronen getrennt verfolgen.

In den Untersuchungen, durch die diese Zusammenhänge aufgeklärt wurden, unterschieden FERMI und Mitarbeiter mehrere „Gruppen“, die als Gruppen C, D, A, B, J bezeichnet werden. Die Bezeichnung „Gruppe C“ hat sich allgemein eingebürgert. Der Grund liegt in der Sonderstellung dieser thermischen Gruppe. Die übrigen Gruppen bezeichnet man heute wohl lieber mit dem Stoff, in dem die selektive Absorption erfolgt, und mit der Halbwertzeit, die damit verknüpft ist.

Gruppe C sind langsame Neutronen, die in **Cd** stark absorbiert werden und dabei  $\gamma$ -Strahlung, aber keine Radioaktivität erregen. Sie liegen im thermischen Gebiet, ihre Absorbierbarkeit in Cadmium beträgt  $\mu = 13,5 - 16 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$  Cd, in Bor  $\mu = 38 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$  B.

Gruppe D sind Restneutronen, die in **Rh** stark absorbiert werden ( $\mu = 2,0 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$  Rh) und die Halbwertzeit **44 sec** erzeugen. Das Resonanzgebiet von **In** (54 min) überdeckt sich damit zum großen Teil. Die Absorbierbarkeit in Bor beträgt:  $\mu = 4,7 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$  B.

Gruppe A sind Restneutronen, die in **Ag** stark absorbiert werden ( $\mu = 20 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$  Ag) und dabei in Ag die Halbwertzeit von **22 sec** erzeugen. Die Gruppe ist auch in Au stark absorbiert ( $\mu = 4 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$  Au) und aktiviert dieses mit einer Halbwertzeit von 2,7 Tagen; auch Ir (19 h) wird dadurch aktiviert. Die Absorbierbarkeit in B beträgt  $\mu = 3 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$  B.

Gruppe B sind Restneutronen, die  $\sim 0,5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$  Silber durchdrungen haben und in **Ag** mäßig absorbiert sind ( $\mu = \sim 0,3 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$  Ag). Die Gruppe ist nicht einheitlich. Nach neueren Untersuchungen von BORISOV (189) besteht sie aus zwei Anteilen mit stark verschiedener Absorbierbarkeit in Bor. Er unterscheidet Gruppe B<sub>1</sub> mit  $\mu \sim 20 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$  Bor und B<sub>2</sub> mit  $\mu \sim 0,8 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$  Bor. Der weniger absorbierte Anteil hängt anscheinend mit der Halbwertzeit 2,3 min von Ag zusammen.

Gruppe J sind Resonanzneutronen von **Jod (25 min)**; sie werden in Jod mit  $\mu = 0,7 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$  J absorbiert.

Man kann fragen, wie stark die verschiedenen Gruppen in der aus Paraffin austretenden Neutronenstrahlung besetzt sind. Nach AMALDI und FERMI (103) kann man die Besetzungszahlen der Gruppen (numerosity) im wesentlichen durch den Quotienten: (Aktivierung eines sehr dünnen Indikators durch die Gruppe)/(Absorptionskoeffizient der Gruppe im selben Indikator) messen. In der dort verwendeten Normierung besitzen die Gruppen . . . . .

C	D	A	J
40	7,5	0,5	5

die ungefähren Besetzungszahlen

**14. Temperatureinfluß, Energie der C-Neutronen.** FERMI und Mitarbeiter (4) haben bereits in ihrer ersten Mitteilung angenommen, daß ein beträchtlicher Teil der Neutronen in Paraffin bis zur kinetischen Energie der Temperaturbewegung verlangsamt wird. Nach unserer heutigen Kenntnis treten die verlangsamteten Neutronen nur deshalb so stark in Erscheinung, weil in Wasserstoff der Einfangquerschnitt für langsame Neutronen klein ist gegenüber dem Querschnitt für elastische Streuung.

Da die mittlere Energie der thermischen Neutronen proportional der absoluten Temperatur des verlangsamenen Paraffins sein sollte, darf man erwarten, daß bei Kühlung des Paraffins auf die Temperatur der flüssigen Luft eine Änderung der Wirksamkeit der austretenden Neutronen erfolgen kann. Auf diese Möglichkeit haben zuerst FERMI und Mitarbeiter (2) hingewiesen und haben auch nach einem solchen Einfluß gesucht, zunächst aber ohne Erfolg (14). Von MOON und TILLMAN (56) wurden ähnliche Versuche mit anderen Stoffen ausgeführt und ergaben in mehreren Fällen einen beträchtlichen Temperatureinfluß [bestätigt von FERMI und Mitarbeitern (13)]. Hierin liegt der Beweis dafür, daß in diesen Fällen Neutronen wirksam sind, deren Energie von der Größenordnung der Temperaturbewegung ist. MOON und TILLMAN (152) umgaben die Neutronenquelle und ein DEWAR-Gefäß gemeinsam mit großen Paraffinmengen. Im Innern des Gefäßes befand sich eine kühlbare Paraffinschicht bestimmter Dicke und darin der Indikator. Die künstliche Radioaktivität stieg beim Kühlen auf 90° K bei verschiedenen Stoffen um 20—50%. Die Erhöhung hängt stark von der Dicke der gekühlten Paraffinschicht ab. Abb. 4 zeigt die Verhältnisse für Ag (22 sec). Der Temperatureinfluß ist kleiner als man unter Voraussetzung thermischen Gleichgewichtes erwarten sollte. WESTCOTT und NIEWODNICZANSKI (72) erhielten ähnliche Ergebnisse und stellten weitere Zunahme der Aktivierung beim Kühlen auf 20° K fest; ferner fanden sie Abnahme der „Neutronenzahl“ (Besetzungszahl).

LUKIRSKY und ZAREVA (51) fanden, daß bei 10 cm Paraffindicke der Temperatureinfluß *vollständig* verschwindet. Zur Erklärung nehmen sie an, daß mit abnehmender Temperaturbewegung der Einfang-

querschnitt der Wasserstoffkerne für C-Neutronen zunimmt [Gang mit  $(\text{Energie})^{-\frac{1}{2}}$  vgl. unten]. Im Einklang damit fanden ARSENJEWA-HEIL, HEIL und WESTCOTT (79), daß die Besetzungszahl der C-Neutronen beim Kühlen stärker abnimmt als die anderer Gruppen.

Verschiedene Neutronengruppen verhalten sich bei Temperaturänderung verschieden. Nach PREISWERK und HALBAN (60) zeigt nur Gruppe C Temperatureinfluß. Nach MITCHELL, MURPHY und WHITAKER (150) findet man jedoch auch bei Gruppe D (In 54 min) einen kleinen Einfluß, der aber vielleicht von Änderungen der Neutronendiffusion herrührt.

Verschiedene Untersuchungen (79, 107, 152) wurden ausgeführt über die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes verschiedener Stoffe für Gruppe C von der Temperatur des Paraffins, aus dem die Neutronen austreten. Am eingehendsten hat sich damit wohl FINK (103) befaßt. Er fand beim Kühlen mit flüssiger Luft für 10 Elemente Zunahme bis zu 41% (Gd), bei Cd z. B. 7%, bei Sm jedoch eine geringe Abnahme von 4%. Die Zunahmen sind in Einklang mit dem in Ziff. 16 besprochenen Gang des Wirkungsquerschnittes  $\text{prop.} (\text{Energie})^{-\frac{1}{2}}$ , die Abnahme bei Sm dürfte sich durch die besondere, heute noch nicht genau bekannte Lage und Halbwertbreite der Resonanzstelle erklären.

Es ist möglich, mit Hilfe der Temperaturabhängigkeit die in Ziff. 16 angenommene Proportionalität des Wirkungsquerschnittes mit  $(\text{Energie})^{-\frac{1}{2}}$  im Bereich thermischer Energien zu prüfen. Befinden sich die Neutronen im thermischen Gleichgewicht mit Paraffin, so ist ihre Energie proportional der absoluten Temperatur  $T$ . Man untersucht dann, ob der Absorptionskoeffizient  $\text{proportional } T^{-\frac{1}{2}}$  verläuft. Frühere Beobachtungen (107) schienen mit dieser Abhängigkeit nicht verträglich zu sein, neuerdings haben aber FRISCH, v. HALBAN und KOCH (198) die Proportionalität mit  $T^{-\frac{1}{2}}$  für Temperaturen von 195° bis 415° K bestätigt. Bei 80° K tritt eine erhebliche Abweichung auf. Sie rührt wahrscheinlich zum größten Teil davon her, daß die Verlangsamung unter die niedrigste Schwingungsenergie des Wasserstoffatoms in der Paraffinmolekel, d. i. unter etwa 0,1 eV, so vor sich geht, als ob in Paraffin freie  $\text{CH}_2$ -Teilchen (mit einer Massenzahl 14) vorhanden wären. Außerdem reicht wohl die Zahl der Zusammenstöße mit den Atomen des gekühlten Paraffins nicht aus, um Temperaturgleichgewicht herzustellen; schließlich wird die Zunahme der Absorbierbarkeit der Neutronen in Wasserstoff eine Rolle spielen.

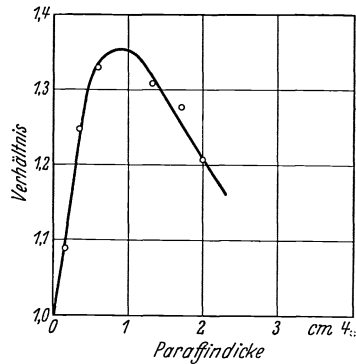


Abb. 4. Verhältnis der Aktivierung von Ag (22 sec) bei 90° K zur Aktivierung bei 300° K in Abhängigkeit von der Dicke des gekühlten Paraffins. [Nach MOON und TILLMAN (152).]

FERMI und Mitarbeiter (13) haben auf direktem Weg gezeigt, daß bei der Aktivierung in Gegenwart von Paraffin Neutronen von thermischer Energie wirksam sind. Sie haben dazu auf dem Rand einer Drehscheibe hintereinander Indikator, Neutronenquelle, Indikator angeordnet und die Scheibe zwischen Paraffinschichten rotieren lassen. Der vorausseilende Indikator wurde um 10% schwächer aktiviert. Der Versuch zeigt, daß die Aufenthaltsdauer der Neutronen im Paraffin von gleicher Größenordnung ist wie die Dauer der Verschiebung des Scheibenrandes um den Abstand der Indikatoren. Das ist nur möglich, wenn die Neutronen Geschwindigkeiten haben, die mit der Umfangsgeschwindigkeit der Scheibe vergleichbar sind.

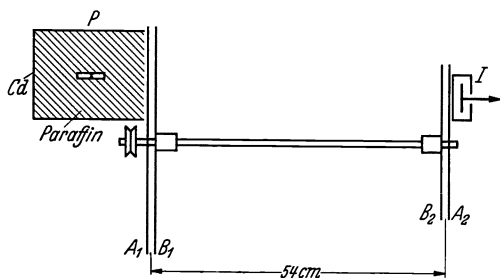


Abb. 5. Anordnung zur Geschwindigkeitsmessung thermischer Neutronen mit rotierenden Scheiben. [Nach DUNNING, PEGRAM, FINK, MITCHELL und SEGRÈ (31).]

Einen ähnlichen Versuch haben HARTECK und KNAUER (126) ausgeführt. Sie haben eine Neutronenquelle und einen Indikator (Rh) in einem Wasserkanal mit Geschwindigkeiten bis  $4,0 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$  geschleppt und erhalten gegenüber der Aktivierung bei Ruhe eine Änderung von 12%.

Ein weiterer Versuch wurde von FRISCH und SÖRENSEN (37) ausgeführt. Neutronen aus einem Paraffinblock von 20 cm Durchmesser treffen auf ein rotierendes Holzrad, dessen Rand sich mit  $90 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$  bewegt. In einer Richtung  $45^\circ$  zur Bewegungsrichtung nach vorwärts waren mit Bor-Indikator  $4,2 \pm 1\%$  mehr Neutronen zu beobachten als unter  $45^\circ$  nach rückwärts. Der Effekt rührt von der Mitführung und Streuung der Neutronen durch das Holzrad her. Dieser Versuch zeigt, daß ein Teil der langsamen Neutronen Geschwindigkeiten um  $100 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$  hat.

Eine direkte Geschwindigkeitsmessung der in Cd leicht absorbierbaren Neutronen wurde von DUNNING, PEGRAM, FINK, MITCHELL und SEGRÈ (31, 101) und von FINK (103) ausgeführt. Gemessen wird die Zeit, in der die Neutronen den Weg zwischen zwei mit Cd-Sektoren belegten Scheiben durchlaufen. Abb. 5 zeigt die Anordnung. P ist die Neutronenquelle in Paraffin. Der Nachweis der langsamen Neutronen erfolgt mit einer Lithium-Ionisationskammer I.  $B_1$  und  $B_2$  sind ruhende,  $A_1$  und  $A_2$  auf gemeinsamer Achse drehbare Scheiben, die sämtlich mit Cd-Sektoren belegt sind. Das Verhältnis der offenen zu den bedeckten Sektoren betrug bei früheren Versuchen (31) 1:1, bei späteren (103) 1:3. Das Öffnen und Schließen des Durchgangs bei  $A_1$  und  $A_2$  geschah teils gleichphasig, teils gegenphasig. Aus der Änderung der Intensität der langsamen Neutronen in Abhängigkeit von der Drehgeschwindigkeit

kann man auf die Energieverteilung schließen. Abb. 6 zeigt das Ergebnis der Messungen. Als Abszisse ist die Drehzahl aufgetragen und die entsprechende Geschwindigkeit für maximales Wegblenden bzw. für maximalen Durchgang, als Ordinate die durchgelassene Intensität. Die eingezeichneten Punkte sind gemessen, die Kurven geben die Erwartung wieder, wenn man MAXWELLSche Geschwindigkeitsverteilung für 300° K voraussetzt. Aus der Übereinstimmung ist zu folgern, daß die in Cd absorbierbaren Neutronen tatsächlich eine solche Geschwindigkeitsverteilung besitzen, und daß sich das Gleichgewicht auch wirklich eingestellt hat. Versuche bei gekühltem Paraffin (90° K) ergeben aber nur eine geringe Verschiebung des Absorptionsmaximums zu kleineren Neutronengeschwindigkeiten, also kein volles Temperaturgleichgewicht. Dies stimmt mit den obenerwähnten Aktivierungsversuchen überein.

### 15. Energie von Resonanzneutronen.

Eine Bestimmung der Energie von Restneutronen, genauer der selektiv absorbierbaren Energiebereiche, ist nur indirekt nach einem Verfahren möglich, das gleichzeitig unabhängig von FRISCH und PLACZEK (113) und von WEEKES, LIVINGSTON und BETHE (182) angegeben wurde. Bei den *Austauschreaktionen* z. B.  $B(n, \alpha)$ , die durch langsame Neutronen ausgelöst werden, kann man annehmen, daß der Absorptionskoeffizient — ohne Beschränkung auf gewisse Energiebereiche — proportional der Aufenthalts-

dauer in Kernnähe, also proportional  $E^{-\frac{1}{2}}$  ist, wenn unter  $E$  die Energie der Neutronen verstanden wird (Ziff. 16). Um noch den Proportionalitätsfaktor festzulegen, muß für Absorptionskoeffizient und Neutronenenergie ein zusammengehöriges Wertepaar bekannt sein. Nach den im vorigen Abschnitt geschilderten Versuchen darf man für die in Cd leicht absorbierbaren Neutronen (Gruppe C) näherungsweise thermische Energie annehmen. Der effektive Mittelwert dieser Energie, den die verschiedenen Forscher zugrunde gelegt haben, schwankt zwischen 0,02 und 0,037 eV  $\left(\frac{\pi}{4} kT \text{ und } \frac{3}{2} kT\right)$ . Wir rechnen nach GOLDSMITH, RASSETTI (118) mit 0,026 eV. Der Absorptionskoeffizient  $\mu_B$  dieser Neutronen in Bor wurde von verschiedenen Forschern zwischen 21,5 und  $38 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$  gefunden. Daraus folgt (mit  $\mu_B = 28 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$ ):  $E = \frac{20}{(\mu_B)^2}$ . Die Unsicherheit des Faktors ist zwar

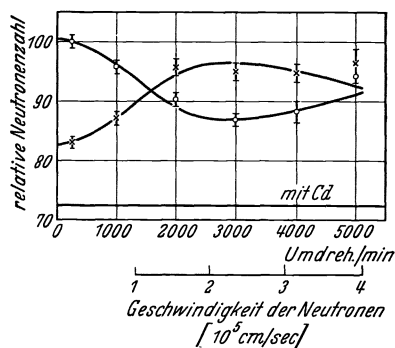


Abb. 6. Intensität der hindurchgehenden Neutronen bei gleich- und gegenphasigem Öffnen und Schließen in Abhängigkeit von der Drehzahl (Geschwindigkeit der Neutronen). [Nach (203).]

erheblich, aber man kann hiernach mindestens in relativem Maß die Energie einer Resonanzgruppe aus ihrer Absorbierbarkeit in Bor bestimmen.

Die Anordnung zur Bestimmung der Absorptionskoeffizienten in Bor ist in Abb. 7 dargestellt. Langsame Neutronen mit kontinuierlichem Geschwindigkeitsspektrum durchsetzen eine Cd-Schicht von mindestens  $0,25 \frac{\text{g}}{\text{cm}^2}$  ( $\sim 0,3 \text{ mm}$ ). Die thermischen Neutronen werden dabei vom Cd absorbiert. Der als Indikator verwendete Stoff wählt aus dem restlichen Geschwindigkeitsspektrum sein selektives Resonanzgebiet aus und wird durch dieses aktiviert. Der übrige Teil des Neutronenspektrums bleibt unwirksam. Beim Einschieben des Borabsorbers wird die Aktivierung vermindert. Man findet so den Massenabsorptionskoeffizienten  $\mu_B$  für

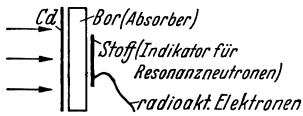


Abb. 7. Bestimmung von  $\mu_B$  für Resonanzneutronen.

Resonanzneutronen des Indikators. Diese Werte nach Messungen von AMALDI und FERMI (77) sind bei der Besprechung der Gruppen in Ziff. 13 jeweils mit angegeben worden.

Auch bei Lithium sollte der Wirkungsquerschnitt proportional  $(\text{Energie})^{-\frac{1}{2}}$  sein. Die Absorptionsquerschnitte von Bor und Lithium müßten dann proportional verlaufen. Nach den bisherigen Messungen von v. HALBAN und PREISWERK (125) besteht nur ein gleichartiger Gang. Die mangelnde Proportionalität rührt zum Teil wohl von Verschiedenheiten im Einfluß der Streuung, vielleicht auch von der Abbremsung der Neutronen durch elastische Stöße im Lithium- bzw. Bor-Absorber hier. Bei Messungen des Wirkungsquerschnittes verschiedener Stoffe für C-Neutronen erhielt MITCHELL (148) bis zu 40% Unterschied, wenn die Neutronen einmal mit Lithium, das andere Mal mit Bor nachgewiesen wurden. Auch das deutet auf verschiedenes Verhalten beider Indikatoren hin.

Von ROTBLAT (172) wurde das Verhältnis der Absorptionskoeffizienten verschiedener Resonanzgruppen in Bor nach einer abweichenden Methode bestimmt. Die Neutronen werden in einer borhaltigen Ionisationskammer proportional ihrer Absorbierbarkeit im Bor angezeigt. Die Schwächung beim Einschieben von Resonanzabsorbern ist bei diesem Verfahren sehr gering, außerdem muß das Intensitätsverhältnis der Neutronen, die verschiedenen Gruppen angehören, unabhängig aus Aktivierungsversuchen bekannt sein. Das Verfahren hätte andererseits den Vorzug, daß der reine Umwandlungsquerschnitt des Bors (also nicht die Summe aus diesem und dem Streuquerschnitt) eingeht.

In Tabelle 3 sind die von verschiedenen Forschern bestimmten Werte von  $\mu_B$  zusammengestellt. Hiernach lautet die Reihenfolge der Resonanzenergien für die am häufigsten untersuchten Stoffe: Cd < Rh (44 sec) < In (54 min) < Ag (22 sec) < J (25 min). In der letzten Spalte sind die

Tabelle 3. Resonanzenergien aus Absorbierbarkeit in Bor  $\mu_B$ .

Ordnungs- zahl	Element und Halbwertszeit	$\mu_B \left( \frac{\text{cm}^2}{\text{g}} \right)$					Energie in eV (118)
		AMALDI- FERMI (77)	HALBAN- PREISWERK (124,125,162)	GOLDSMITH- RASETTI (118)	JÄCKEL (209) [BURHOP (91)]	ROTLAT (172)	
25	Mn ( $2\frac{1}{2}$ h)			0,73			37
29	Cu (5 min)			$\sim 0,57$			62
33	As (26 h)			0,49			84
35	Br (18 min)		0,35	0,57			62
45	Rh (44 sec) (D) (3,9 min)	4,7	6,3	4,15	3		1,16 $\sim 1$
47	Ag (22 sec) (A) (2,3 min)	3	3,4	2,8	[8,1]	2,6	2,5 69
48	Cd (C)	38	30	28	21,5	(28)	0,026
49	In (13 sec) (54 min)	$\sim 4,7$		$\sim 3$			2,2 1,38
53	J (25 min) (J)	1	0,7	0,50			80
64	Gd			( $\sim 32$ )			( $\sim 0,026$ )
74	W (24,5 h)			—	1,15		(9)
75	Re (20 h)			0,83			30
77	Ir (19 h)	$\sim 3$		3,5			1,6
79	Au (2,7 d)			2,8		2,1	2,5

Energien in e-Volt unter Voraussetzung des von GOLDSMITH und RASETTI zugrunde gelegten Energiewertes von 0,026 eV für Cd-Neutronen angegeben (s. obige Gleichung). Die von BURHOP, HILL, TOWNSEND (91) bestimmten, von den anderen stark abweichenden Werte für Ag sind mit  $\gamma$ -Strahlung als Neutronen-Indikator ausgeführt.

Nach FURRY (202) ist es möglich, aus der Aktivierbarkeit wäßriger Lösungen mit zusätzlichem Cd- oder B-Gehalt auf die Resonanzenergie und Halbwertsbreite des zu untersuchenden gelösten Stoffes zu schließen.

Außer der Absorption in Bor gibt es noch einige andere Möglichkeiten, um wenigstens die Reihenfolge der Energien der verschiedenen Resonanzgruppen festzustellen. Ein zuerst von AMALDI und FERMI (76, 77) angewandtes Verfahren beruht darauf, daß man, von schnellen Neutronen ausgehend,

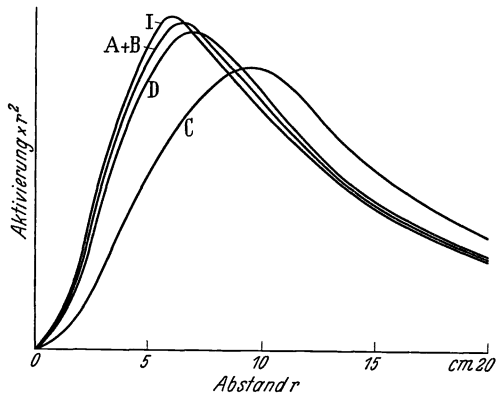


Abb. 8. Aktivierung  $\times r^2$  als Funktion des Abstandes  $r$  zwischen Neutronenquelle und Indikator, gemessen im Innern eines großen Wasserbehälters nach (77). Der Ordinatenmaßstab ist so gewählt, daß die Kurven gleiche Flächen einschließen.

eine dickere Paraffin- oder Wasserschicht braucht, um eine energieärmere Resonanzgruppe als eine energiereichere mit maximaler Intensität zu erhalten. Abb. 8 zeigt die Beobachtungen; hier sind die Intensitäten der verschiedenen Gruppen in Abhängigkeit von der Entfernung von der Neutronenquelle in Wasser aufgetragen; für das Abstandsquadrat ist dabei korrigiert. Die Unterschiede in der Lage der Maxima sind deutlich feststellbar und bestätigen die in Tabelle 3 angegebene Reihenfolge für die Energien der Gruppen.

Es gibt noch eine andere Möglichkeit, um wenigstens die Reihenfolge der Energien festzustellen. Läßt man Neutronen einer bestimmten Gruppe durch Paraffin laufen, so können sie durch Verlangsamung in eine Gruppe niedrigerer Energie übergehen, nie aber umgekehrt. Nach diesem Prinzip haben v. HALBAN und PREISWERK (205) sowie AMALDI und FERMI (77) in einigen Fällen feststellen können, welche von zwei Resonanzgruppen die größere Energie besitzt.

#### 16. Wirkungsquerschnitt als Funktion der Neutronenenergie.

Der gesamte Wirkungsquerschnitt, der das Ausscheiden eines Neutrons aus einem Bündel bestimmt, ist zu zerlegen in Umwandlungs- und Streuquerschnitt. Wir behandeln zunächst den Umwandlungsquerschnitt; der Streuquerschnitt wird in Ziff. 19 besprochen.

Im Anschluß an die Ideen von BOHR (Ziff. 22) wurde für Einfangprozesse von BREIT und WIGNER (88), sowie BETHE und PLACZEK (187) eine Theorie über die Abhängigkeit des Einfangquerschnittes  $\sigma_c$  von der Neutronenenergie  $E$  aufgestellt, deren Endformeln mit den experimentellen Ergebnissen gut zusammenstimmen. Die Abhängigkeit ist gegeben durch eine Beziehung der Form

$$\sigma_c = E^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{C \cdot \alpha}{(E_r - E)^2 + \alpha^2} = E^{-\frac{1}{2}} \cdot W.$$

Die Formel läßt sich anschaulich in zwei Faktoren aufspalten. Der erste Faktor  $E^{-\frac{1}{2}}$  bedeutet umgekehrte Proportionalität zur Neutronengeschwindigkeit  $v$ , d. i. Proportionalität zur Aufenthaltsdauer des Neutrons in Kernnähe. Der zweite Faktor stellt die Wechselwirkungswahrscheinlichkeit  $W$  für die Umwandlung (bezogen auf die Zeiteinheit) dar. Diese hat für  $(n, \gamma)$ -Prozesse die Form einer Dispersionsverteilung. Es gehen drei Konstanten ein: der Faktor  $C$ , die Halbwertbreite  $\alpha$  und die Energie der Resonanzstelle  $E_r$ .

Für Austauschprozesse  $(n, \alpha)$  und  $(n, p)$  kann man nach unserer gegenwärtigen Kenntnis formal die gleiche Formel anwenden, aber unter Einsetzen einer sehr großen Halbwertbreite ( $\alpha \gg E_r$ ). Dadurch wird  $W$  praktisch konstant und  $\sigma$  proportional  $E^{-\frac{1}{2}}$ . Diese Tatsache ist in Ziff. 15 zur Energiebestimmung benutzt („ $\frac{1}{v}$ -Gesetz“ für Bor).



Der Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  hängt mit dem in Ziff. 13 und 15 verwendeten Massenabsorptionskoeffizienten  $\mu$  bekanntlich nach folgender Beziehung zusammen:

$$\sigma_{\text{cm}^2} = \frac{\mu_{\text{cm}^2}}{g} \cdot \frac{A}{L},$$

wo  $A$  das Atomgewicht und  $L$  die Zahl der Atome pro Grammatom ist.

Der Verlauf von  $\sigma_c$  in Abhängigkeit von  $E$  für Einfangprozesse ist in Abb. 9 schematisch dargestellt. Es ergeben sich im allgemeinen zwei Hauptabsorptionsgebiete. Gebiet I liegt bei den geringsten Neutronenenergien; meist überwiegt hier der erste Faktor; dann gilt auch hier das  $\frac{1}{v}$ -Gesetz. Gebiet II ist das selektive Resonanzabsorptionsgebiet, für welches der zweite Faktor den Ausschlag gibt. Die Absorption im Gebiet I wird im allgemeinen gering, wenn das Gebiet II bei großen Neutronenenergien liegt, und umgekehrt.

Das Gebiet I umfaßt die nahezu thermischen, in Cd stark absorbierbaren Neutronen. Es ist also verständlich, daß die Gruppe C von sämtlichen Stoffen absorbiert wird, die überhaupt Neutronen absorbieren, wie in Ziff. 1 bereits erwähnt wurde. Restneutronen wirken größtenteils auf das Gebiet II. Liegt das Resonanzmaximum in großer Nähe der thermischen Energien, so fallen die beiden Gebiete zusammen und der Einfangquerschnitt wird besonders groß (z. B. Cd, Gd, Dy).

Von RASETTI und Mitarbeitern (164, 165) wurde ein Versuch zur Prüfung der  $\frac{1}{v}$ -Abhängigkeit für den Wirkungsquerschnitt im Gebiet thermischer Neutronenenergien ausgeführt. Wie erwähnt, ist die Abhängigkeit durch die verschiedene Aufenthaltsdauer der Neutronen in Kernnähe hervorgerufen. Bewegt man also einen Absorber relativ zu den Neutronen, so muß sich im allgemeinen der Wirkungsquerschnitt ändern. Trotzdem darf bei Gültigkeit des  $\frac{1}{v}$ -Gesetzes kein Einfluß der Bewegung eintreten, falls die Bewegung so erfolgt, daß die gesamte Aufenthaltsdauer der Neutronen im Absorber gleichbleibt. Der Versuch wurde mit einer mit Silber, Cadmium oder Borkarbid ( $B_4C$ ) belegten drehbaren Scheibe ausgeführt, die unter  $25^\circ$  zur Scheibenebene in der Richtung des Randes mit langsamen Neutronen durchstrahlt wurde. Beim Drehen der Scheibe mit  $140 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$  Umfangsgeschwindigkeit mit und gegen die

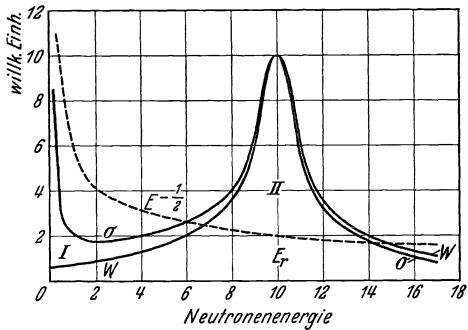


Abb. 9. Einfangquerschnitt  $\sigma$ , Wechselwirkungswahrscheinlichkeit  $W$  und  $E^{-\frac{1}{2}}$  als Funktion der Neutronenenergie (schematisch).

Neutronenrichtung trat bei Silber und Bor keine Änderung des Neutronendurchganges, bei Cadmium ein Unterschied von  $8,2 \pm 0,8\%$  auf. Das beweist Gültigkeit des  $\frac{1}{v}$ -Gesetzes für Ag und B, Nichtgültigkeit für Cd. Dies erklärt sich wiederum daraus, daß bei Cd eine Resonanzgruppe in das thermische Gebiet eingelagert ist (Ziff. 15).

Den Verlauf des Einfangquerschnittes in und außer der Resonanzstelle haben AMALDI und FERMI (77) experimentell untersucht, indem sie auf einen bestimmten Absorber verschiedene, durch Resonanzabsorption in anderen Stoffen isolierte Neutronenenergien auffallen ließen. Abb. 11 ist nach ihren Beobachtungen gezeichnet und enthält den Verlauf des Einfangquerschnittes von Ag, Au und Cd. Auf der Abszisse ist statt der Neutronenenergie die Größe  $\frac{1}{\mu_B}$  ( $\mu_B$  = Absorptionskoeffizient in Bor) aufgetragen, die man nach Obigem als proportional zu  $E^{\frac{1}{2}}$  annehmen darf. Die Resonanzenergien nach Tabelle 3 sind dazugeschrieben. Die Messungen zeigen den typischen Resonanzverlauf und beweisen auch deutlich, daß die Halbwertbreiten bei Ag und Au kleiner sind als die Resonanzenergien selbst.

Wirkungsquerschnitte von Neutronen mit Energien, die wenig über der thermischen liegen, hat FINK (103) gemessen. Er fand bei Ag, Rh, Hg: 20; 86;  $12 \cdot 10^{-24}$  cm<sup>2</sup>, während sich für thermische Neutronen ergaben: 56; 128;  $450 \cdot 10^{-24}$  cm<sup>2</sup>.

Die *Wirkungsquerschnitte* für Neutronen der *Gruppe C* werden meist durch Differenzmessung mit und ohne Cd-Absorber bestimmt (vgl. Abb. 13, S. 33). Meßwerte für einige Stoffe sind in Tabelle 4, Ziff. 19 enthalten. Eine ausführliche Tabelle mit Werten für 74 Elemente ist in II, S. 34 zu finden (30). Zu korrigieren ist dort der Wert für Y und Ba; beide haben nur geringe Wirkungsquerschnitte (128, 204). Neue Messungen finden sich für seltene Erden in (128, 129), für verschiedene andere Stoffe in (77). Über den Anteil des Streuquerschnittes ist in Ziff. 19 berichtet. Der Einfangquerschnitt von Wasserstoff ist durch Vergleich mit dem von Bor durch SEGRÈ (175) zu  $0,1 \cdot 10^{-24}$  cm<sup>2</sup>, durch Vergleich mit dem von Cd durch KIKUCHI, HUSIMI, AOKI (132) zu 0,03 bis  $0,08 \cdot 10^{-24}$  cm<sup>2</sup> gemessen worden. Auf anderem Wege (Ziff. 18) wurde  $0,31 \cdot 10^{-24}$  cm<sup>2</sup> erhalten (77).

Mit Hilfe der Wirkungsquerschnitte ist es noch möglich, eine Aussage über die in Ziff. 10 und 22 erwähnte Niveaudichte zu machen. Ein großer Wirkungsquerschnitt für C-Neutronen tritt dann auf, wenn in der Nähe der thermischen Energie ein Resonanzniveau liegt. Je dichter die Niveaus gelagert sind, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Atom einen großen Wirkungsquerschnitt besitzt. Besonders große Wirkungsquerschnitte treten auf, wenn eines der Niveaus bei sehr kleiner Neutronenenergie liegt (Verweildauer in Kernnähe proportional  $\frac{1}{v}$ ). Unter diesen

Umständen kann das arithmetische Mittel der Wirkungsquerschnitte von Elementen, die im periodischen System benachbart sind, als ungefähres Maß für den durchschnittlichen Abstand der Kernniveaus gelten. In Abb. 10 sind die Mittelwerte von je 10 Elementen in logarithmischem Maß aufgetragen; sie zeigen einen ausgesprochenen Gang mit einem Maximum bei der Ordnungszahl 60.

Die Größe des Gebietes I der Abb. 9 bestimmt den Wirkungsquerschnitt  $\sigma_C$  für die Absorption von C-Neutronen. Dieser Wirkungsquerschnitt ist, falls Gebiet I und II noch nicht zusammenfallen, augenscheinlich proportional der Größe  $W(0)$ , d. h. der Wechselwirkungsfunktion für Energie 0 (ungefähr thermische Energie). Die punktiert eingetragene Kurve prop.  $E^{-\frac{1}{2}}$  kann als Verlauf des Wirkungsquerschnittes in Bor  $\sigma_B(E)$  aufgefaßt werden. Der Funktionswert an der Resonanzstelle  $\sigma_B(E_r)$  entspricht in erster Näherung dem Absorptionskoeffizienten für Resonanzneutronen in Bor von Ziff. 13. Nach FLEISCHMANN (195) besteht empirisch zwischen beiden Größen  $\sigma_C$  und  $\sigma_B(E_r)$  innerhalb gewisser Grenzen ein monotoner Funktionszusammenhang, der in Abb. 12 in doppellogarithmischem Maßstab dargestellt ist. Jedem Punkt entspricht die Resonanzgruppe eines bestimmten Kerns. Unter der Voraussetzung strenger Gültigkeit der BREIT-WIGNERSchen Formel und des  $\frac{1}{v}$ -Gesetzes für Bor würde daraus eine Beziehung zwischen der Halbwertbreite  $\alpha$  des Resonanzgebietes, dem Faktor  $C$  und der Resonanzenergie  $E_r$  folgen, nämlich  $C\alpha = \text{const. } E_r^{3/2}$ .

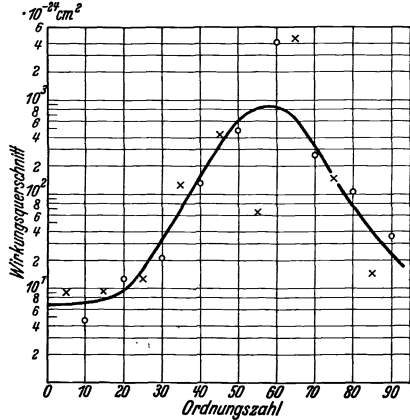


Abb. 10. Mittlerer Wirkungsquerschnitt für die Anlagerung von C-Neutronen. [Nach (106).]

Wir wenden uns noch besonders der Form und Breite des Resonanzgebietes zu. Von v. HALBAN und PREISWERK (162) wurde gezeigt, daß Resonanzneutronen einer bestimmten Substanz in dieser selben Substanz

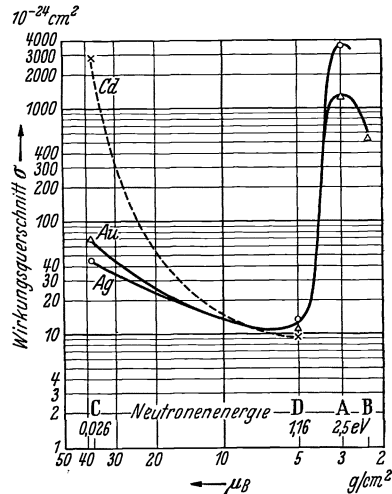


Abb. 11. Einfangquerschnitt in Cd, Au, Ag mit Resonanzneutronen verschiedener Energie gemessen. [Nach Beobachtungen von AMALDI und FERMI (77).]

nicht exponentiell mit ihrer Dicke absorbiert werden. Formal lassen sich die Beobachtungen durch einen mit zunehmender Dicke abnehmenden Absorptionskoeffizienten beschreiben. Der Grund für diese Erscheinung liegt in dem starken Abfall des Absorptionskoeffizienten beiderseits des Resonanzmaximums. Bereits durch dünne Schichten wird der größte Teil der dem Maximum entsprechenden Neutronen absorbiert, in die tieferen Schichten des Absorbens gelangen nur mehr Neutronen, die dem Ausläufer der Bande entsprechen; dort herrscht aber ein kleinerer Absorptionskoeffizient („Selbstumkehr“). Die genannten Verfasser versuchten auch die Breite der Resonanzbande von Ag abzuschätzen. Nach ihren Beobachtungen muß sie klein sein (125).

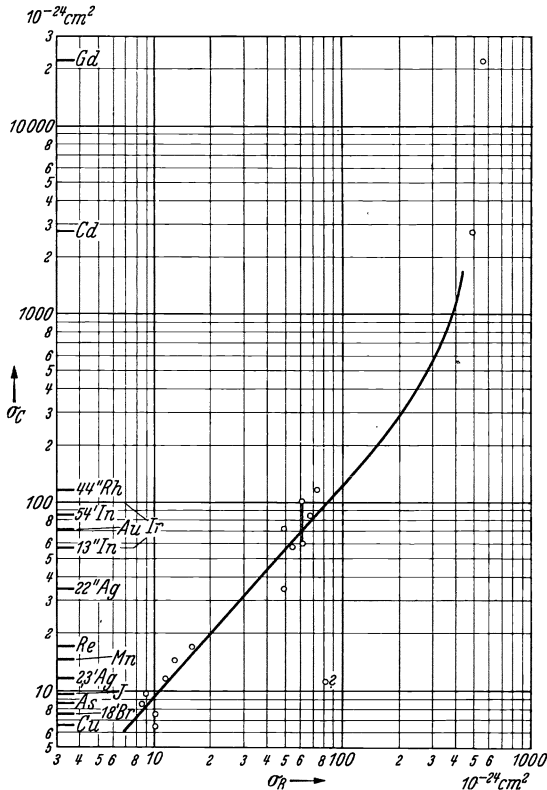


Abb. 12. Zusammenhang zwischen den Wirkungsquerschnitten  $\sigma_C$  und  $\sigma_R$ . [Nach (195).]

starke Abnahme des Absorptionskoeffizienten mit zunehmender Absorberdicke. Eine genaue Diskussion der Beobachtungen zeigt, daß die Kurve vorzüglich deutbar ist, wenn für die Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten von der Neutronenenergie eine Dispersionsverteilung, also

$\frac{C}{(E_r - E)^2 + \alpha^2}$  angenommen wird, in Übereinstimmung mit der theo-

retischen Formel ( $E^{-\frac{1}{2}}$  kann hier als konstant angesehen werden). Versucht man statt dessen eine Dopplerverteilung, so ist für keinen Wert der verfügbaren Konstanten Übereinstimmung mit der beobachteten Kurve zu erzielen. Wir dürfen also annehmen, daß die angegebene Formel mit guter Näherung den wahren Verlauf wiedergibt.

retischen Schichten des Absorbens gelangen nur mehr Neutronen, die dem Ausläufer der Bande entsprechen; dort herrscht aber ein kleinerer Absorptionskoeffizient („Selbstumkehr“). Die genannten Verfasser versuchten auch die Breite der Resonanzbande von Ag abzuschätzen. Nach ihren Beobachtungen muß sie klein sein (125).

Nach einem ziemlich verwickelten Verfahren leiteten AMALDI und FERMI (77) für die Breite der zu den Gruppen D, A und J gehörigen Resonanzgebiete 1; 0,15 und 10 eV ab.

Sorgfältige Bestimmungen des Absorptionsverlaufs mit der Dicke hat JÄCKEL (209) bei Wolfram ausgeführt. Seine Messung ist in Abb. 13 wiedergegeben. Man erkennt eine

Werden die Neutronen mit dem Resonanzabsorber, d. h. mit dem als Indikator verwendeten Element, vorgefiltert, so ändert sich ihre Absorbierbarkeit in Bor nicht. Das wurde festgestellt bei Rh und J (162) und bei W (209). Man kann daraus einen bedingten Schluß ziehen, daß nur eine einzige Absorptionsbande vorliegt. Falls mehrere Banden vorhanden wären, müßten sie gleiche Linienform und gleichen Absorptionsquerschnitt im Absorptionsmaximum besitzen, um diese Beobachtung zu erklären.

Im Widerspruch dazu fanden RUBEN und LIBBY (228), daß Resonanzneutronen von J beim Vorfiltern mit J in Bor wesentlich weniger absorbierbar werden. Ohne Vorfilter fanden sie  $\mu = 0,10 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$  B, mit Vorfilter, das 45% durchläßt,  $\mu = 0,05 \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$  B. Falls diese Beobachtungen sich bestätigen, würde man auf das Vorhandensein mehrerer Banden schließen. Der Widerspruch zwischen den Beobachtungen muß erst aufgeklärt werden.

Von SEGRÈ und ZAHN (176) wurden gewisse Versuche über Abhängigkeit des Absorptionskoeffizienten des Cd von der Paraffin-temperatur in Verbindung mit der BREIT-WIGNERSCHEN Formel diskutiert. Sie leiteten ab, daß die Resonanzstelle von Cd bei 0,055 eV anzunehmen ist und eine Halbwertbreite gleicher Größe besitzt. Dieser Befund ist jedoch nicht sehr sicher.

**17. Vorgang der Verlangsamung.** Für das genauere Verständnis des Verlangsamungsvorgangs durch Wasserstoff wäre es von Bedeutung, auch über den Bereich höherer Energien etwas zu wissen. Die Zusammensetzung des Geschwindigkeitsspektrums für schnelle Neutronen hinter verschiedenen Paraffinschichten wurde von DEISENROTH-MYSSOWSKY, KURTSCHATOW, LATYSCHEW und MYSSOWSKY (27) untersucht. Sie stellten in einer Nebelkammer eine Paraffinschicht auf, die mit schnellen Neutronen bestrahlt wurde und mit verschiedenen dicken Aluminiumfolien bedeckt war, und nahmen das Geschwindigkeitsspektrum der Neutronen auf, indem sie die Zahl der Protonen bestimmten, die die Aluminiumfolien verschiedener Dicken durchdrangen. Durch Filtern der primären Neutronen mit Wasser ergab sich eine gleichartige beträchtliche Intensitätsabnahme für alle Geschwindigkeiten. Genauere Schlüsse

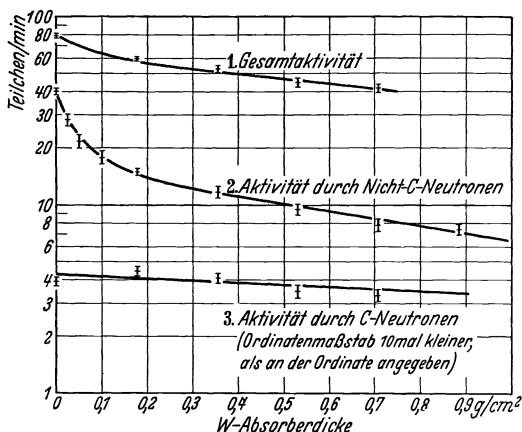


Abb. 13. Nichtexponentielle Absorption der Resonanzneutronen (Kurve 2), „Selbstumkehr“; exponentielle Absorption der thermischen (C-)Neutronen gemessen als Differenz zwischen Kurven 1 und 2. [Nach JÄCKEL (209).]

dürften hieraus schwer zu ziehen sein, weil die Geschwindigkeitsverteilung der ursprünglichen Neutronen zu unsicher ist. Interessant ist ein ähnlicher Versuch mit Blei. Bei Verstärkung des (dauernd vorhandenen) Bleifilters von 12 cm auf 20 cm blieb das Neutronenspektrum nahezu unverändert. Erst bei 30 cm sank die Intensität für alle Geschwindigkeiten ab, wahrscheinlich weniger durch Absorption als durch Streuung.

Die allmähliche Entstehung langsamer Neutronen mit wachsender Paraffindicke wurde untersucht von FERMI und Mitarbeitern (13, 14, 76, 77), von FLEISCHMANN (35) und von BJERGE und WESTCOTT (18) (über diese Versuche vgl. II, S. 16/18), ferner von DUNNING, PEGRAM und FINK (28, 30), YOST, DICKINSON (185), EREMEJEW, KURTSCHATOW, ŠČEPKIN (33, 140). Die Ausmessung geschah durch Nachweis der langsamen Neutronen, teils mit künstlicher Radioaktivität, teils mit  $\gamma$ -Strahlen, teils mit  $\alpha$ -Strahlen aus Bor. Arbeitet man mit punktförmiger Strahlenquelle und kugelförmigem Paraffin, so liegt das Maximum bei Nachweis mit Silberaktivierung bei 8 cm, bei Nachweis mit  $\alpha$ -Strahlen aus Bor bei 10 cm (18, 28). Der Unterschied bei den beiden Nachweisarten ist verständlich, da Bor durch thermische Neutronen am stärksten umgewandelt wird, Silber dagegen auch besonders stark durch Neutronen mit 2—3 eV, für die das Maximum naturgemäß früher eintritt (vgl. Ziff. 15). Arbeitet man mit Neutronen, die erst dicke Bleischichten durchdrungen und dabei diffuse Richtungsverteilung erhalten haben, so tritt das Maximum schon bei 5 cm Paraffin für thermische Neutronen auf (35).

Der Verlauf der Intensität für die Aktivierung durch verschiedene Gruppen langsamer Neutronen ist nach AMALDI und FERMI (77) in Abb. 8, Ziff. 15 wiedergegeben. Das Maximum für die thermische Gruppe tritt verständlicherweise am spätesten ein. [Vgl. dazu auch Rechnungen von ORNSTEIN und UHLENBECK (223).]

BJERGE und WESTCOTT (18) hatten auch die Entstehung langsamer Neutronen in Borsäurelösungen bis zu 4% Konzentration untersucht. Von WESTCOTT (233) wurden die Versuche fortgesetzt und Messungen für die verschiedenen Neutronengruppen ausgeführt. Er fand wie FERMI, daß für thermische Neutronen das Maximum erst bei größerer Paraffindicke erreicht wird als für die Neutronengruppen A + B. Dabei zeigte sich, daß beim Auflösen von Borsäure in der die Neutronen verlangsamen Wasser­kugel die Gruppen A und B nur sehr wenig, die thermische Gruppe C jedoch sehr erheblich geschwächt wurden, wie auch zu erwarten ist.

Auch im flüssigen Wasserstoff wurde die Entstehung langsamer Neutronen verfolgt (110). Die Verlangsamung wird sich auch verschieden vollziehen, wenn man Stoffe verwendet, in denen sich der Wasserstoff in verschiedener chemischer Bindung befindet (38, 144, 211). Ein solcher Einfluß ist noch nicht ganz gesichert (205). Auch für Ortho- und Para-Wasserstoff sind Unterschiede zu erwarten (230). Gewöhnliches Wasser verstärkt die Aktivierung von Silber 5,5mal mehr als schweres Wasser (30).

Kennt man die pro Kubikzentimeter erzeugte Zahl langsamer Neutronen in Wasser- oder Paraffinkugeln aus Aktivierungsversuchen für alle Abstände von der Neutronenquelle, so kann man durch Integration über das ganze Volumen auf die von der Quelle ausgesandte Gesamtneutronenzahl schließen. AMALDI und FERMI (77) fanden so für RaEm + Be 27 000 Neutronen pro sec und mCurie, FINK (103) fand 14 000, PANETH und LOLEIT (59) durch Nachweis von künstlich erzeugtem Helium > 3000.

Von mehreren Forschern wurde geprüft, ob eine Verlangsamung auch beim Zusammenstoß schneller Neutronen mit wesentlich schwereren Kernen möglich ist. Es würde sich dabei — im Gegensatz zur Verlangsamung in Wasserstoffverbindungen — um unelastische Stöße handeln. Es wurde eine Zunahme der Aktivierung eines Indikators festgestellt, wenn verschiedene Stoffe zwischen Präparat und Indikator eingeschoben wurden [FERMI und Mitarbeiter (2, 11); EHRENBERG (32); DANYSZ, ROTBLAT, WERTENSTEIN, ŻYW (3, 170); COLLIE und GRIFFITHS (93)]. Die Zunahme beträgt bis zu 40%. Um auch teilweise Verlangsamung bis zu Energien, die noch wesentlich höher sind als thermisch, mitzuerfassen, wurde der Indikator bei einem Teil der Versuche zwischen Paraffinschichten gelegt, die so dünn waren, daß sie für sich allein nur wenig langsame Neutronen erzeugten (93). Auch aus Versuchen über die Intensitätsabnahme schneller Neutronen bei kugelförmigem, die Quelle umgebendem Absorber geht hervor, daß 10% der Stöße von Neutronen auf Kerne verschiedener Elemente unelastisch sein müssen (30).

**18. Diffusion langsamer Neutronen.** Statt den Übergang von schnellen Neutronen in langsame zu betrachten, kann man auch fragen, wie sich die langsamen, und insbesondere die thermischen Neutronen selbst beim Durchgang durch wasserstoffhaltige Substanzen verhalten. Das Zusammenwirken von Diffusion und weiterer Verlangsamung bzw. Absorption schafft hier recht verwickelte Verhältnisse, die einer strengen mathematischen Behandlung schwer zugänglich sind. FERMI (100) ist es jedoch gelungen, eine vereinfachte Theorie zu entwickeln, die in Verbindung mit einfachen Messungen zusammenhängende Ergebnisse liefert und wichtige Einblicke in die Vorgänge gewährt (77). Für die thermischen (C-)Neutronen sind die wesentlichen Ergebnisse folgende: Die C-Neutronen erleiden eine große Zahl elastischer Zusammenstöße (im Mittel  $N$ ), bevor sie durch Anlagerung an Wasserstoff absorbiert werden; auf sie ist daher die Diffusionstheorie anwendbar. Diese lehrt, daß die Intensitätsabnahme der C-Neutronen beim Durchlaufen einer Schicht  $x$  nach einem Exponentialgesetz erfolgt:

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\frac{x}{l}}$$

Dabei ist  $l$  eine Konstante, die als „mittlerer Diffusionsweg“ aufgefaßt werden kann.  $l$  kann an Hand obiger Gleichung durch ein geeignetes Versuchsverfahren bestimmt werden und ergibt sich zu 2,1 cm Paraffin. Diese Größe hängt wieder zusammen mit der freien Weglänge  $\lambda$  und der

Zahl  $N$  der elastischen Stöße, die das Neutron im Mittel bis zu seiner Anlagerung an einen Wasserstoffkern im Paraffin erleidet:

$$l = \lambda \cdot \sqrt{N/3}.$$

$\lambda$  kann durch Streuversuche gemessen werden:  $\lambda = 0,3$  cm. Dies ergibt  $N = 140$ . Die große Stoßzahl ist verständlich, da für Wasserstoff der Einfangquerschnitt wesentlich kleiner ist als der Stoßquerschnitt, sie zeigt ferner, daß die C-Neutronen tatsächlich im thermischen Gleichgewicht mit dem Paraffin sein müssen.

Ähnliche Messungen hat auch FINK (103) ausgeführt mit ähnlichem Ergebnis. Er hat insbesondere auch die Richtungsverteilung der aus Paraffinoberflächen austretenden Neutronen gemessen und in Übereinstimmung mit einer von FERMI (100, 76, 77) theoretisch abgeleiteten Formel gefunden.

Bei den Resonanzneutronen liegen die Verhältnisse wesentlich anders (77); es genügen ein oder ganz wenige elastische Stöße, damit sie aus dem Energiebereich ihrer Gruppen austreten. Die freie Weglänge der A- und D-Neutronen ist größer als die der C-Neutronen, sie beträgt etwas über 1 cm.

Aus diesen Versuchen und Überlegungen ergeben sich weiter (77) die in Tabelle 4 angeführten Werte für die Streu- und Einfangquerschnitte von Wasserstoff für C-Neutronen; vgl. hierzu auch YOST und DICKINSON (185). Schließlich kann man im Zusammenhang mit solchen Überlegungen auch experimentelle Anhaltspunkte für die Breite der Resonanzgruppen gewinnen (77), vgl. Ziff. 16.

**19. Streuquerschnitt, Rückstreuung.** Ein Teil des Wirkungsquerschnittes (Ziff. 16) entfällt auf Streuung. Diese läßt sich am besten als Rückstreuung, durch den Bruchteil  $\beta$  langsamer Neutronen messen, der von irgendeiner Schicht zurückdiffundiert. Messungen darüber haben zuerst AMALDI und FERMI (15) angestellt. Ihre Beobachtungen beziehen sich vor allem auf Paraffin. Für C-Neutronen finden sie durch eingehende Messungen in Verbindung mit einfachen theoretischen Überlegungen einen Reflexionsbruchteil  $\beta = 0,82$ . Er ist temperaturunabhängig (74). Für Neutronen der Gruppen D, A, B, J ist  $\beta = 0$ ; man folgert daraus, daß Neutronen dieser Gruppen bereits durch einen einzigen Zusammenstoß mit Atomen des Paraffins aus dem für sie charakteristischen Energieband herausbefördert werden. Allgemein wurde von FERMI (100) unter bestimmten einfachen Voraussetzungen theoretisch abgeleitet, daß für Paraffin zwischen  $\beta$  und der Stoßzahl  $N$  (Ziff. 18) die Beziehung besteht

$$\beta = \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N+1}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{N}} + \dots$$

Die Rückstreuung verschiedener Elemente wurde besonders von MITCHELL, MURPHY, WHITAKER (53, 54, 147, 148, 149, 150) untersucht, ferner von BUDNITZKY und KURTSCHATOW (22), PONTECORVO



und WICK (158) und FLEISCHMANN (105). Bei MITCHELL und MURPHY lag dicht hinter dem die Neutronen verlangsamenden Paraffinklotz ein radioaktiver Indikator (z. B. Ag), hinter diesem der Rückstreuer. Die Rückstreuung steigt mit der Dicke des Streukörpers an, sie betrug bei 6 cm Dicke für Ni 100%, für Eisen 95%. Diese Werte sind überraschend hoch, sie hängen von der Wahl des Indikators (149) und den beteiligten Neutronengruppen beträchtlich ab. Die verwendete Anordnung legt den Einwand nahe, daß auch schnelle Neutronen zurückgestreut werden, die den Indikator auf dem Rückweg ohne Wirkung durchsetzen. Nachträglich werden sie dann im Paraffin verlangsamt und gelangen nochmals zum Indikator, in dem sie dann absorbiert werden (80, 105). Ein solcher Einfluß ist zwar bestimmt vorhanden (158) (s. unten), MITCHELL und MURPHY haben jedoch durch Kontrollversuche gezeigt, daß er bei ihren Versuchen keine entscheidende Rolle gespielt hat.

FLEISCHMANN (105), der mit größerem Abstand zwischen Indikator und Rückstreuer arbeitete, um solche Störungen von vornherein möglichst klein zu halten, und als Indikator die Einfang- $\gamma$ -Strahlung verwandte, erhielt für Eisen nur 9%, für Paraffin 40% Rückstreuung. Diese Diskrepanz ist noch nicht aufgeklärt.

Die Rückstreuung von Stoffen mit hohem Wirkungsquerschnitt ist sehr gering, z. B. bei Cd unter 1% (30).

Aus den Messungen von MITCHELL und MURPHY (148, 150) lassen sich Streuquerschnitte  $\sigma_s$  für C-Neutronen berechnen, die in Tabelle 4, Zeile 2, für einige Stoffe mitgeteilt sind. In Zeile 3 sind die gesamten Wirkungsquerschnitte  $\sigma$  nach DUNNING und PEGRAM (30) angegeben, die nach der benutzten Meßanordnung aufgefaßt werden müssen als  $\sigma_c + \text{Teil von } \sigma_s$ , in Zeile 4 sind Einfangquerschnitte  $\sigma_c$  nach FLEISCHMANN (36, 105) aufgeführt, gemessen mit Hilfe der beim Einfangen entstehenden  $\gamma$ -Strahlung. Die Werte in verschiedenen Zeilen sind nicht vollständig vergleichbar wegen verschiedener Richtungsverteilung der beim Versuch verwendeten Neutronen.

PONTECORVO und WICK (158) haben die Rückstreuung bei vielen Elementen getrennt nach Neutronengruppen untersucht. Als Beispiel seien die Verhältnisse von Eisen mit Rh-Indikator mitgeteilt. 2,2 cm

Tabelle 4. C-Neutronen.

Streuquerschnitt  $\sigma_s$  nach MITCHELL und MURPHY (150). Wirkungsquerschnitte  $\sigma = \sigma_c + \text{Teil von } \sigma_s$  nach (30). Absorptionsquerschnitte  $\sigma_c$  nach (36, 105).  $\sigma_s$  und  $\sigma_c$  für Wasserstoff nach (77). Alle Querschnitte sind in Einheiten  $10^{-24} \text{ cm}^2$  angegeben.

Element	H	Li	B	C	Fe	Ni	Cu	Rh	Ag	Cd	Sn	Gd	Hg	Pb	Bi
$\sigma_s$	43	—	—	3,4	10,6	18	8,3	—	6,3	1,2	4,1	—	4,7	7,7	10,2
$\sigma$	35	45	360	4,1	12,0	15,4	7,5	115	55	3300	4,0	30000	380	8,6	8,2
$\sigma_c$	0,3	—	—	—	7,5	—	7,3	—	79,4	3600	—	—	—	2,3	—

Eisen streut etwas über 100% zurück, davon gehören 70% zur Gruppe C, 20% gehören zur Gruppe D, 10% rühren von schnellen Neutronen her, die erst durch mehrmaliges Hin- und Herlaufen zwischen dem Streukörper und dem Paraffin verlangsamt werden. Allgemein fanden sie durch Messungen mit Gruppe C, D, J an vielen Stoffen ungefähr gleichen Streuquerschnitt für alle Gruppen; für Eisen beträgt er  $6-9 \cdot 10^{-24}$  cm<sup>2</sup>. Um zu dieser Aussage zu kommen, muß die Besetzungszahl (numerosity) der Gruppen im Neutronenspektrum berücksichtigt werden (Ziff. 13).

Die starke Rückstreuung von Eisen ist nicht durch magnetische Eigenschaften bestimmt, am CURIE-Punkt ändert sie sich nicht [LASLETT (213)].

Wegen der starken Rückstreuung von Paraffin kann man damit Neutronen teilweise kanalisieren [HOPWOOD und CHALMERS (40)]. Man kann auch ihre Konzentration in einem Hohlraum aus Paraffin [SEGRÈ (175)] oder auch aus Eisen [RAUSCH v. TRAUBENBERG und ADAM (227)] steigern.

**20. Beugung.** Thermische Neutronen haben eine DE BROGLIE-Wellenlänge von etwa  $3 \cdot 10^{-8}$  cm. Mit Wellen dieser Größenordnung sollten sich an gewöhnlichen Kristallen Interferenzen nachweisen lassen [ELSASSER (98), v. HALBAN und PREISWERK (122, 205)]. v. HALBAN und PREISWERK haben Versuche in dieser Richtung unternommen, und zwar nach dem DEBYE-SCHERRER-Verfahren. Scharfe Interferenzlinien sind hierbei keinesfalls zu erwarten, einmal weil die C-Neutronen nicht homogen sind, sondern eher eine Bande mit einer leidlich definierten oberen Energiegrenze darstellen, dann auch, weil aus Intensitätsgründen mit recht großem primärem Öffnungswinkel, also schlechter Ausblendung, gearbeitet werden muß. Die Ausblendung geschah mit Cadmiumblechen, als Streukörper diente ein Eisenzylinder (Polykristall), zum Nachweis der unter verschiedenen Winkeln abgebeugten Neutronen wurden Streifen des stark aktivierbaren Dysprosiums benutzt. Der Hauptversuch bestand darin, daß das Paraffin, welches zur Verlangsamung der Neutronen auf thermische Geschwindigkeiten diente, von 300° K auf 90° K abgekühlt wurde. Der Erfolg war, daß die Winkelverteilung der im Eisen gestreuten C-Neutronen um den „Durchstoßpunkt“ herum wesentlich breiter wurde. Dies stimmt mit der Erwartung überein. Da nämlich mit abnehmender Temperatur des Paraffins die Geschwindigkeiten der C-Neutronen abnehmen (Ziff. 14), muß ihre DE BROGLIE-Wellenlänge und damit auch der Beugungswinkel größer werden. Damit ist qualitativ erwiesen, daß auch die Neutronen sich als Materiewellen äußern können. Wenn es gelingen sollte, solche Messungen auch quantitativ zu gestalten, so wäre damit eine direkte Methode zur Energiebestimmung langsamer Neutronen, insbesondere auch Resonanzneutronen, gegeben, an der es ja bis heute noch fehlt.

BRAGGSche Reflexion langsamer Neutronen an Kristallflächen wurde von MITCHELL und POWERS (151) nachgewiesen. Dazu wurde eine zylindrische Fläche innen mit genau ausgerichteten, gut ausgebildeten MgO-Einkristallen belegt. Neutronenquelle und Indikator befanden sich

in geeigneten Abständen auf der Zylinderachse. Der Anteil der diffusen Streuung wurde durch Verdrehen der MgO-Kristalle bestimmt, er betrug 60%, der BRAGGSche  $40 \pm 6\%$  der gesamten vom Kristall herrührenden Streuung.

Ein weiterer Versuch stammt von PREISWERK (226). Er bestimmt die Intensitätsänderung eines Bündels langsamer Neutronen, die eintritt, wenn eine Einkristallplatte oder wenn eine polykristalline Platte aus Aluminium eingeschoben wird. Er findet eine deutliche Abhängigkeit der durchgehenden Intensität von der Kristallanordnung, also einen Einfluß BRAGGScher Reflexion.

**21. Magnetisches Moment des Neutrons.** Aus den bekannten magnetischen Momenten des Deuterons und des Protons folgt, daß das Neutron ein magnetisches Moment von  $-2$  Kernmagnetonen haben sollte ( $1$  Kernmagneton =  $1/1840$  des BOHRschen Magnetons). BLOCH (81, 188) und SCHWINGER (229) haben einen Weg gezeigt, wie man dies prüfen kann. Der Grundgedanke besteht darin, daß die Streuung von Neutronen in magnetisiertem Eisen verschieden stark sein müßte, je nachdem ob das magnetische Moment der Neutronen parallel oder antiparallel zur Magnetisierung ist. Man kann daher langsame Neutronen zum Teil „polarisieren“, d. h. in bezug auf eine Orientierung anreichern, indem man sie durch eine magnetisierte Eisenplatte hindurchgehen läßt oder auch an einer solchen streut. Entsprechend kann eine zweite Eisenplatte als „Analysator“ dienen, indem man sie in verschiedenen Richtungen magnetisiert. Die experimentelle Schwierigkeit ist hierbei, daß der magnetisch nicht beeinflussbare Wirkungsquerschnitt gerade in Eisen recht groß ist, so daß nur kleine Effekte von einigen Prozenten zu erwarten sind. Es ist DUNNING, POWERS und BEYER (194, 225), sowie HOFFMANN, LIVINGSTON und BETHE (208) durch ausgedehnte Zählversuche gelungen, einen Effekt in etwa der zu erwartenden Größe nachzuweisen. In der einfachsten Form besteht der Versuch darin, daß man ein Bündel langsamer Neutronen durch zwei transversal magnetisierte Eisenplatten gehen läßt. Während die Magnetisierung der ersten Platte konstant gehalten wird, ändert man Stärke und Richtung der Magnetisierung in der zweiten Platte und stellt fest, daß dabei die durchgehende Neutronenintensität sich etwas ändert.

Die Theorie dieser Erscheinung scheint in quantitativer Beziehung noch nicht ganz festzuliegen, weil man von verschiedenen Voraussetzungen ausgehen kann, die mit der Theorie des Ferromagnetismus zusammenhängen. Darum haben FRISCH, v. HALBAN und KOCH (197, 199) einen anderen Weg eingeschlagen. Läßt man Neutronen, die durch magnetisiertes Eisen teilweise polarisiert wurden, im freien Raum durch ein longitudinales Magnetfeld laufen, so führen sie eine Präzessionsbewegung aus, so daß ihre Polarisationsrichtung sich stetig ändert. Diese Änderung, die mit einer zweiten Eisenplatte als Analysator verfolgt werden kann, hängt sehr einfach mit dem magnetischen Moment  $\mu$  des

Neutrons zusammen; die Präzessionsfrequenz ist:

$$\omega = 4\pi\mu\mathfrak{H}/\hbar$$

( $\mathfrak{H}$  = Feldstärke,  $\hbar$  = PLANCKSche Konstante). Man kann nun die Größe und den Sinn der Drehung auf einer bestimmten Wegstrecke bestimmen und erhält daraus unter Berücksichtigung der Laufzeit die Größe und das Vorzeichen des magnetischen Momentes. Die bisherigen experimentellen Ergebnisse stimmen mit der Erwartung ( $\mu = -2$ ) überein, insbesondere ergibt sich ein negatives magnetisches Moment, d. h. das magnetische Moment hat die entgegengesetzte Richtung wie der mechanische Spin, also ebenso wie z. B. beim Elektron.

**22. Theoretische Deutung der Neutroneneffekte** [BOHR (86), BETHE (82, 83), BREIT-WIGNER (88), BETHE und PLACZEK (187), BARDEEN (186), PERRIN und ELSASSER (59a)]. Die Erscheinungen der Wechselwirkung zwischen langsamen Neutronen und Atomkernen lassen sich weitgehend verstehen auf Grund einer Vorstellung, welche BOHR (86) entwickelt hat, um verschiedene Schwierigkeiten zu beseitigen, welche bisher dem Verständnis von Kernreaktionen entgegenstanden (Häufigkeit von Einfangprozessen, Fragen der Lebensdauer u. a.). Hiernach laufen solche Prozesse in zwei Stufen ab. Erst wird das eingeschossene Teilchen auf einem Resonanzniveau eingefangen, so daß ein Zwischenkern in einem mehr oder weniger scharf definierten Anregungszustand entsteht. Dieser Zwischenkern geht dann unter Aussendung von Teilchen oder meist  $\gamma$ -Strahlen in einen stabilen Kern über. Bei dem ersten Teilprozeß, dem Einfangprozeß, wirkt aber nicht der ursprüngliche Kern als abgeschlossenes Ganzes mit, sondern die beim Einfangen frei gewordene Energie verteilt sich auf einzelne oder alle Teilchen des Kerngefüges. Entsprechend der hohen Zahl der Freiheitsgrade existieren daher viele, verhältnismäßig dicht beieinander liegende Resonanzniveaus von einigermaßen großer Lebensdauer. So erklärt sich, daß so viele Kerne Resonanzniveaus in der Nähe der Energie Null besitzen.

Von wesentlicher Bedeutung ist nun, in welchem Energieabstand die Resonanzniveaus aufeinanderfolgen, d. h. die „Dichte“ der Niveaus. Es ist viel Mühe darauf verwandt worden, diese Dichte aus den Vorstellungen über die Kernkräfte heraus zu berechnen [BETHE (17, 82, 83), VAN VLECK (70), BARDEEN (186)]. Es scheint jedoch, daß die hierfür maßgebenden Bedingungen zu verwickelt sind, als daß man sie heute schon mit Sicherheit übersehen könnte. Jedenfalls läßt nach den bisherigen, ziemlich schwankenden Ergebnissen die Theorie noch einigen Spielraum in dieser Beziehung. Qualitativ ergibt sich aber das folgende Bild. Die untersten Anregungszustände des Zwischenkernes werden verhältnismäßig weit auseinander liegen, weil, grob gesprochen, nur wenige Kernteilchen daran beteiligt sind. Nach oben nimmt dann die Dichte der Niveaus immer mehr zu, in dem Maße, wie der ganze Kern aufgelockert wird. Vergleicht man weiter leichte und schwere Kerne, so leuchtet ein, daß bei den schwereren Kernen die Niveaus im ganzen dichter liegen werden, weil mehr Teilchen, also mehr Freiheitsgrade, verfügbar sind.

In unserem Zusammenhange interessiert besonders die Niveaudichte in der Nähe der Energie Null, weil sie für das Einfangen langsamer Neutronen auf Resonanzniveaus von Bedeutung ist. Sie hängt ab erstens von der Tiefe des Grundzustandes unter dem Nullniveau, zweitens von der Teilchenzahl, also der Masse des Kernes. Die Tatsache, daß schon leichte Kerne mit langsamen Neutronen reagieren, zeigt, daß bei diesen die Nulldichte schon so groß ist, daß mit einiger Wahrscheinlichkeit ein Niveau im Energiebereich der langsamen Neutronen liegt. Immerhin werden hier nur ein oder wenige Niveaus in Betracht kommen, und die Folge ist einmal, daß der Wirkungsquerschnitt noch klein ist, ferner, daß beim Übergang des Zwischenkernes in den Grundzustand unter  $\gamma$ -Emission die ganze verfügbare Energie in einem Quantensprung, also als ein einziges  $\gamma$ -Quant ausgesandt wird. Bei den höheren Kernen (etwa vom Eisen ab) ist die Nulldichte der Niveaus so groß, daß schon mehrere Resonanzniveaus ins Spiel kommen, daher wächst einerseits der Wirkungsquerschnitt im großen ganzen an, andererseits wird die  $\gamma$ -Strahlung in mehrere Quanten aufgespalten. Dies entspricht qualitativ dem empirischen Befund über den Verlauf des Einfangquerschnittes (Ziff. 16) und der Quantenenergie der Einfang- $\gamma$ -Strahlung (Ziff. 10) in Abhängigkeit von der Ordnungszahl. Bei noch höheren Ordnungszahlen beobachtet man allerdings wieder einen allgemeinen Abfall der Wirkungsquerschnitte und parallel damit einen Anstieg der Quantenenergien der  $\gamma$ -Strahlen. Beide Umstände deuten darauf hin, daß hier die Niveaudichte in der Nähe der Energie Null wieder abnimmt. Um die Deutung dieser Tatsache hat sich z. B. GOUDSMIT bemüht (203).

#### Literaturverzeichnis.

- I. FLEISCHMANN, R. u. W. BOTHE: Erg. exakt. Naturwiss. **13**, 1 (1934).
  - II. — — Erg. exakt. Naturwiss. **14**, 1 (1935).
  1. AMALDI, E., O. D'AGOSTINO ed E. SEGRÈ: Ric. scientif. **5** (2), No 9/10, 381 (1934).
  2. — — E. FERMI, B. PONTECORVO, F. RASETTI ed E. SEGRÈ: Ric. scientif. **5** (2), No 11/12, 467 (1934).
  3. DANYSZ, M., J. ROTBLAT, L. WERTENSTEIN and M. ŻYW: Nature (Lond.) **134**, 970 (1934).
  4. FERMI, E., E. AMALDI, B. PONTECORVO, F. RASETTI ed E. SEGRÈ: Ric. scientif. **5** (2), No 7/8 (1934).
  5. — B. PONTECORVO e F. RASETTI: Ric. scientif. **5** (2), No 9/10 (1934).
  6. — Z. Physik **88**, 161 (1934).
  7. FLEISCHMANN, R.: Naturwiss. **22**, 839 (1934).
  8. GAMOW, G.: Nature (Lond.) **133**, 833 (1934).
  9. LEA, D. E.: Nature (Lond.) **133**, 24 (1934).
  10. SZILARD, L. and T. A. CHALMERS: Nature (Lond.) **134**, 462 (1934).
- 1935.
11. AMALDI, E., O. D'AGOSTINO, E. FERMI, B. PONTECORVO, F. RASETTI ed E. SEGRÈ: Ric. scientif. **6** (1), No 2, 123 (1935).
  12. — — — — ed E. SEGRÈ: Ric. scientif. **6** (1), No 7, 432 (1935).
  13. — — — — Ric. scientif. **6** (1), No 11/12 (1935).
  14. — — — — F. RASETTI and E. SEGRÈ: Proc. roy. Soc. Lond. A **149**, 522 (1935).

15. AMALDI, E. ed E. FERMI: Ric. scientif. **6** (2), No 9/12, 344, 443 (1935).
16. ARZIMOWITSCH, L., I. KURTSCHATOW, G. LATYSCHEW u. W. CHRAMOW: Physik. Z. Sowjet-U. **8**, 472 (1935).
17. BETHE, H. A.: Physic. Rev. **47**, 747 (1935).
18. BJERGE, T. and C. H. WESTCOTT: Proc. roy. Soc. Lond. A **150**, 709 (1935).
19. — — Proc. Cambridge philos. Soc. **31**, 145 (1935).
20. BONNER, T. W. and W. M. BRUBAKER: Physic. Rev. **48**, 469 (1935).  
— — Physic. Rev. **48**, 470 (1935).
21. BUDNIZKI, D. Z., I. W. KURTSCHATOW u. G. D. LATYSCHEW: Physik. Z. Sowjet-U. **7**, 474 (1935).
22. BUDNITZKY, D. u. I. KURTSCHATOW: Physik. Z. Sowjet-U. **8**, 170 (1935).
23. CHADWICK, J. and M. GOLDBABER: Nature (Lond.) **135**, 65 (1935).
24. CURIE, I., H. v. HALBAN jun. et P. PREISWERK: C. r. Acad. Sci. Paris **200**, 1841 (1935).
25. — — — C. r. Acad. Sci. Paris **200**, 2079 (1935).
26. — — — J. Physique et Radium (7) **6**, 361 (1935).
27. DEISENROTH-MYSSOWSKY, M., I. KURTSCHATOW, G. LATYSCHEW u. L. MYSSOWSKY: Physik. Z. Sowjet-U. **7**, 656 (1935).
28. DUNNING, J. R., G. B. PEGRAM, G. A. FINK and D. P. MITCHELL: Physic. Rev. **47**, 970 (1935).
29. — — — — Physic. Rev. **47**, 888 (1935).
30. — — — — Physic. Rev. **48**, 265 (1935).
31. — — — — and E. SEGRÈ: Physic. Rev. **48**, 704 (1935).
32. EHRENBERG, W.: Nature (Lond.) **136**, 870 (1935).
33. EREMEJEW, M., I. KURTSCHATOW u. G. ŠČEPKIN: Physik. Z. Sowjet-U. **7**, 267 (1935).
34. FERMI, E.: Physic. Rev. **48**, 570 (1935).
35. FLEISCHMANN, R.: Z. Physik **97**, 242 (1935).
36. — Z. Physik **97**, 265 (1935).
37. FRISCH, O. R. and E. T. SÖRENSEN: Nature (Lond.) **136**, 258 (1935).
- 37a. HAHN, O. u. L. MEITNER: Naturwiss. **23**, 37, 230, 320, 544 (1935).
38. HALBAN jr., H. v. and P. PREISWERK: Nature (Lond.) **136**, 951 (1935).
39. HEVESY, G. v. and H. LEVI: Nature (Lond.) **136**, 103 (1935).
40. HOPWOOD, F. L. and T. A. CHALMERS: Nature (Lond.) **135**, 341 (1935).
41. KARA, I., L. ROSENKEWITSCH, L. SINELNIKOW u. A. WALTHER: Physik. Z. Sowjet-U. **8**, 215, 219 (1935).
42. KONOPINSKI, E. J. and G. E. UHLENBECK: Physic. Rev. **48**, 7 (1935).
43. KURTSCHATOW, I. u. G. LATISCHEW: Physik. Z. Sowjet-U. **7**, 262 (1935).
44. KURTSCHATOW, B., I. KURTSCHATOW et G. LATISCHEW: C. r. Acad. Sci. Paris **200**, 1199 (1935).
45. KURTSCHATOW, I., L. NEMENOW et I. SELINOW: C. r. Acad. Sci. Paris **200**, 2162 (1935).
46. — u. G. LATISCHEW: Physik. Z. Sowjet-U. **7**, 652 (1935).
47. KURTSCHATOW, W., G. LATISCHEW, L. M. NEMENOW u. I. P. SELINOW: Physik. Z. Sowjet-U. **8**, 589 (1935).
48. LATIMER, W. M., D. E. HULL and W. F. LIBBY: J. amer. chem. Soc. **57**, 781 (1935).
49. LEA, D. E.: Proc. roy. Soc. Lond. A **150**, 637 (1935).
- 49a. MCLENNAN, J. C., L. G. GRIMMET and J. READ: Nature (Lond.) **135**, 147, 505 (1935).
50. — and W. H. RAUN: Nature (Lond.) **136**, 831 (1935).
51. LUKIRSKY, P. and T. ZAREVA: Nature (Lond.) **136**, 681 (1935).
52. MARSH, J. K. and S. SUGDEN: Nature (Lond.) **136**, 102 (1935).
53. MITCHELL, A. C. G. and E. J. MURPHY: Physic. Rev. **47**, 881 (1935).
54. — — Physic. Rev. **48**, 653 (1935).

55. MITCHELL, D. P., J. R. DUNNING, E. SEGRÈ and G. B. PEGRAM: *Physic. Rev.* **48**, 774 (1935).
56. MOON, P. B. and J. R. TILLMAN: *Nature (Lond.)* **135**, 904 (1935).
57. OLANO, Z.: *Rendiconti Sem. Facult. Sci. Cagliari* **6**, No 2 (1935).
58. PANETH, F. A. and J. W. J. FAY: *Nature (Lond.)* **135**, 820 (1935).
59. — and H. LOLEIT: *Nature (Lond.)* **136**, 950 (1935).
- 59a. PERRIN, F. et W. ELSASSER: *C. r. Acad. Sci. Paris* **200**, 450, 1749 (1935). — *J. Physique et Radium (7)* **6**, 194 (1935).
60. PREISWERK, P. and H. v. HALBAN jun.: *Nature (Lond.)* **136**, 1027 (1935).
61. — — *C. r. Acad. Sci. Paris* **201**, 722 (1935).
62. RASETTI, F.: *Z. Physik* **97**, 64 (1935).
63. RIDENOUR, L. N. and D. M. YOST: *Physic. Rev.* **48**, 383 (1935).
64. ROTBLAT, J.: *Nature (Lond.)* **136**, 515 (1935).
65. SOSNOWSKI, L.: *C. r. Acad. Sci. Paris* **200**, 391, 446, 922, 1027 (1935).
66. SUGDEN, S.: *Nature (Lond.)* **135**, 469 (1935).
67. SZILARD, L.: *Nature (Lond.)* **136**, 950 (1935).
68. TAYLOR, H. J. and M. GOLHABER: *Nature (Lond.)* **135**, 341 (1935).
69. TILLMAN, J. R. and P. B. MOON: *Nature (Lond.)* **136**, 66 (1935).
70. VLECK, J. H. VAN: *Physic. Rev.* **48**, 367 (1935).
71. WESTCOTT, C. H. and T. BJERGE: *Proc. Cambridge philos. Soc.* **31**, 145 (1935).
72. — and H. NIEWODNICZANSKI: *Proc. Cambridge philos. Soc.* **31**, 617 (1935).
- 1936.**
73. ALICHANIAN, A. I., A. I. ALICHANOW u. B. S. DŽELEPOW: *Physik. Z. Sowjet-U.* **10**, 78 (1936).
74. AMALDI, E. and E. SEGRÈ: *Physic. Rev.* **50**, 571 (1936).
75. — ed E. FERMI: *Ric. scientif.* **7** (1), 56 (1936).
76. — — *Riv. scientif.* **7** (1), No 5/12, 223, 310, 393, 454 (1936).
77. — — *Physic. Rev.* **50**, 899 (1936).
78. ANDERSON, E. B.: *Nature (Lond.)* **137**, 457 (1936).
79. ARSENJEW-HEIL, A., O. HEIL and C. H. WESTCOTT: *Nature (Lond.)* **138**, 462 (1936).
80. BAYLEY, D. S., B. R. CURTIS, E. R. GAERTTNER and S. GOUDSMIT: *Physic. Rev.* **50**, 461 (1936).
81. BLOCH, F.: *Physic. Rev.* **50**, 259 (1936).
82. BETHE, H. A.: *Physic. Rev.* **50**, 332 (1936).
83. — *Physic. Rev.* **50**, 977 (1936).
84. BJERGE, T.: *Nature (Lond.)* **137**, 865 (1936).
85. BLEWETT, J. P.: *Physic. Rev.* **49**, 900 (1936).
86. BOHR, N.: *Nature (Lond.)* **137**, 344 (1936). — *Naturwiss.* **24**, 241 (1936).
87. BONNER, T. W. and W. M. BRUBAKER: *Physic. Rev.* **49**, 778 (1936).
88. BREIT, G. and E. WIGNER: *Physic. Rev.* **49**, 519 (1936).
89. BROWN, M. V. and A. C. G. MITCHELL: *Physic. Rev.* **50**, 593 (1936).
90. BURCHAM, W. E. and M. GOLDBERGER: *Proc. Cambridge philos. Soc.* **32**, 632 (1936).
91. BURHOP, E. H. S., R. D. HILL and A. A. TOWNSEND: *Nature (Lond.)* **138**, 1094 (1936).
92. COLLIE, C. H.: *Nature (Lond.)* **137**, 614 (1936).
93. — and J. H. E. GRIFFITHS: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **155**, 434 (1936).
94. CONDON, E. U. and G. BREIT: *Physic. Rev.* **49**, 229 (1936).
95. CURIE, M. et P. PREISWERK: *C. r. Acad. Sci. Paris* **203**, 787 (1936).
96. DIEBNER, K. u. E. GRASSMANN: *Physik. Z.* **37**, 359 (1936).
97. DÖPEL, R.: *Physik. Z.* **37**, 96 (1936).
98. ELSASSER, W. M.: *C. r. Acad. Sci. Paris* **202**, 1029 (1936).

99. ERBACHER, O. u. K. PHILIPP: Ber. chem. Ges. **69**, 893 (1936).  
 100. FERMI, E.: Ric. scientif. **7** (2), 13 (1936).  
 101. FINK, G. A., J. R. DUNNING and G. B. PEGRAM: Physic. Rev. **49**, 103 (1936).  
 102. — — — Physic. Rev. **49**, 340 (1936).  
 103. — Physic. Rev. **50**, 738 (1936).  
 104. FLEISCHMANN, R.: Naturwiss. **24**, 77 (1936).  
 105. — Z. Physik **100**, 307 (1936).  
 106. — Z. Physik **103**, 113 (1936).  
 107. FOMIN, V., F. G. HOUTERMANS, I. W. KURTSCHATOW, A. I. LEIPUNSKI, L. SCHUBNIKOW and G. ŠČEPKIN: Nature (Lond.) **138**, 326 (1936).  
 108. — — A. I. LEIPUNSKY, L. B. RUSSINOW and L. W. SCHUBNIKOW: Nature (Lond.) **138**, 505 (1936).  
 109. — — Physik. Z. Sowjet-U. **9**, 273 (1936).  
 110. — — A. I. LEIPUNSKY u. L. W. SCHUBNIKOW: Physik. Z. Sowjet-U. **9**, 696 (1936).  
 111. — — I. W. KURTSCHATOW, A. LEIPUNSKY, L. W. SCHUBNIKOW u. G. ŠČEPKIN: Physik. Z. Sowjet-U. **10**, 103 (1936).  
 112. FOWLER, W. A., L. A. DELSASSO and C. C. LAURITSEN: Physic. Rev. **49**, 561 (1936).  
 113. FRISCH, O. R. and G. PLACZEK: Nature (Lond.) **137**, 357 (1936).  
 114. — G. v. HEVESY and H. A. C. MCKAY: Nature (Lond.) **137**, 149 (1936).  
 115. FURRY, W. H.: Physic. Rev. **50**, 381 (1936).  
 116. GAERTTNER, E. R., J. J. TUTIN and H. R. CRANE: Physic. Rev. **49**, 793 (1936).  
 117. GOLDHABER, M.: Nature (Lond.) **137**, 824 (1936).  
 118. GOLDSMITH, H. H. and F. RASETTI: Physic. Rev. **50**, 328 (1936).  
 119. GOUDSMIT, S.: Physic. Rev. **49**, 406 (1936).  
 120. GUÉBEN, G.: Nature (Lond.) **138**, 1095 (1936).  
 121. HAENNY, CH. C. r. Acad. Sci. Paris **203**, 173 (1936).  
 122. HALBAN jun., H. v. et P. PREISWERK: C. r. Acad. Sci. Paris **203**, 73 (1936).  
 123. — — C. r. Acad. Sci. Paris **202**, 133 (1936).  
 124. — — Helvet. phys. Acta **9**, 318 (1936).  
 125. — — Nature (Lond.) **137**, 905 (1936).  
 126. HARTECK, P. u. F. KNAUER: Naturwiss. **24**, 558 (1936).  
 127. HERSZFINKIEL, H., L. WERTENSTEIN: Nature (Lond.) **137**, 106 (1936).  
 128. HEVESY, G. v. and H. LEVI: Nature (Lond.) **137**, 185 (1936).  
 129. — — Kgl. Danske Acad., Math.-fys. Medd. **14**, Nr 5 (1936).  
 130. HORVAY, G.: Physic. Rev. **50**, 897 (1936).  
 131. JOHNSON, C. H. and F. T. HAMBLIN: Nature (Lond.) **138**, 504 (1936).  
 132. KIKUCHI, S., K. HUSIMI and H. AOKI: Nature (Lond.) **137**, 30 (1936).  
 133. — — — Nature (Lond.) **137**, 186 (1936).  
 134. — — — Nature (Lond.) **137**, 745 (1936).  
 135. — — — Nature (Lond.) **138**, 841 (1936).  
 136. — — — Nature (Lond.) **137**, 992 (1936).  
 137. — — — Proc. phys.-math. Soc. Jap. **18**, 188 (1936).  
 138. KNOL, K. S. and J. VELDKAMP: Physica **3**, 145 (1936).  
 139. KURIE, F. N. D., J. R. RICHARDSON and H. C. PAXTON: Physic. Rev. **49**, 368 (1936).  
 140. KURTSCHATOW, I. u. G. ŠČEPKIN: Physik. Z. Sowjet-U. **9**, 102 (1936).  
 141. LAMLA, E.: Naturwiss. **24**, 251 (1936).  
 142. LEIPUNSKY, A. u. L. ROSENKEWITSCH: Physik. Z. Sowjet-U. **9**, 275 (1936).  
 143. — — u. D. TIMOSHUK: Physik. Z. Sowjet-U. **10**, 625 (1936).



144. LIBBY, W. F. and E. A. LONG: *Physic. Rev.* **50**, 577 (1936).  
145. MAMASACHLISOV, V. I.: *Physik. Z. Sowjet-U.* **9**, 198 (1936).  
146. MEITNER, L. u. O. HAHN: *Naturwiss.* **24**, 158 (1936).  
147. MITCHELL, A. C. G., E. J. MURPHY and L. M. LANGER: *Physic. Rev.* **49**, 400, 553 (1936).  
148. MITCHELL, D. P.: *Physic. Rev.* **49**, 453 (1936).  
149. MITCHELL, A. C. G., E. J. MURPHY and M. D. WHITAKER: *Physic. Rev.* **49**, 401, 553 (1936).  
150. — — — *Physic. Rev.* **50**, 133 (1936).  
151. — D. P. and P. N. POWERS: *Physic. Rev.* **50**, 486 (1936).  
152. MOON, P. B. and J. R. TILLMAN: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **153**, 476 (1936).  
153. NAHMIAS, M. E.: *C. r. Acad. Sci. Paris* **202**, 1050 (1936).  
154. — et R. J. WALLEN: *C. r. Acad. Sci. Paris* **203**, 71 (1936).  
155. — — *C. r. Acad. Sci. Paris* **203**, 176 (1936).  
156. NAIDU, R.: *Nature (Lond.)* **137**, 578 (1936).  
157. PANETH, F. A., E. GLÜCKAUF and H. LOLEIT: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **157**, 412 (1936).  
158. PONTECORVO, B. e G. C. WICK: *Ric. scientif.* **6** (2) No 3/6, 135, 220 (1936).  
159. — *Ric. scientif.* **7** (2), No 3/4 (1936).  
160. — *J. Physique et Radium* **7**, 511 (1936).  
161. PREISWERK, P. et H. v. HALBAN jun.: *C. r. Acad. Sci. Paris* **202**, 840 (1936).  
162. — — *Nature (Lond.)* **138**, 163 (1936).  
163. RAJEWSKI, V.: *Physik. Z. Sowjet-U.* **9**, 109 (1936).  
164. RASETTI, F., E. SEGRÈ, G. FINK, J. R. DUNNING and G. B. PEGRAM: *Physic. Rev.* **49**, 104 (1936).  
165. — D. P. MITCHELL, G. A. FINK and G. B. PEGRAM: *Physic. Rev.* **49**, 777 (1936).  
166. RICHARDSON, J. R. and F. N. D. KURIE: *Physic. Rev.* **50**, 999 (1936).  
167. ROAF, D.: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **153**, 568 (1936).  
168. RONA, E. u. E. NEUNINGER: *Naturwiss.* **24**, 491 (1936).  
169. NEUNINGER, E. u. E. RONA: *Wien. Akad. Anz.* **73**, 159 (1936).  
170. ROTBLAT, J. and M. ŻYW: *Nature (Lond.)* **137**, 185 (1936).  
171. — *Nature (Lond.)* **138**, 202 (1936).  
172. — *Nature (Lond.)* **138**, 545 (1936).  
173. RUSINOW, L. I. u. G. D. LATYSCHEW: *Physik. Z. Sowjet-U.* **9**, 287 (1936).  
174. SAMPSON, M. B., L. N. RIDENOUR and W. BLEAKNEY: *Physic. Rev.* **50**, 382 (1936).  
175. SEGRÈ, E.: *Ric. scientif.* **7** (1), No 9/10 (1936).  
176. — and C. T. ZAHN: *Physic. Rev.* **50**, 577 (1936).  
177. SEXL, TH.: *Z. Physik* **99**, 751 (1936).  
178. TILLMAN, J. R.: *Nature (Lond.)* **137**, 107 (1936).  
179. TUTIN, J.: *Nature (Lond.)* **137**, 34 (1936).  
179a. VOORHIS, S. N. VAN: *Physic. Rev.* **50**, 895 (1936).  
180. WALLEN, R. J. et M. E. NAHMIAS: *C. r. Acad. Sci. Paris* **203**, 1149 (1936).  
181. — *C. r. Acad. Sci. Paris* **202**, 1500 (1936).  
182. WEEKES, D. F., M. ST. LIVINGSTON and H. A. BETHE: *Physic. Rev.* **49**, 471 (1936).  
183. WEIZSÄCKER, C. F. v.: *Naturwiss.* **24**, 813 (1936).  
184. WICK, G. C.: *Physic. Rev.* **49**, 192 (1936).  
185. YOST, D. M. and R. G. DICKINSON: *Physic. Rev.* **50**, 128 (1936).

## 1937.

186. BARDEEN, J.: *Physic. Rev.* **51**, 799 (1937).  
187. BETHE, H. A. and G. PLACZEK: *Physic. Rev.* **51**, 450 (1937).

188. BLOCH, F.: *Physic. Rev.* **51**, 994 (1937).  
189. BORISOV, N. P.: *Physik. Z. Sowjet-U.* **10**, 711 (1937).  
190. BOTHE, W. u. W. GENFNER: *Naturwiss.* **25**, 90, 126, 191, 284 (1937).  
191. — — *Z. Physik* **106**, 236 (1937).  
192. CHAO, C. Y. and C. Y. FU: *Nature (Lond.)* **139**, 325 (1937).  
193. DIEBNER, K. u. E. GRASSMANN: *Physik. Z.* **38**, 406 (1937).  
194. DUNNING, J. R., P. N. POWERS and H. G. BEYER: *Physic. Rev.* **51**, 51 (1937).  
195. FLEISCHMANN, R.: *Z. Physik* **105**, 698 (1937).  
196. FLÜGGE, S. u. A. KREBS: *Physik. Z.* **38**, 13 (1937).  
197. FRISCH, O. R., H. v. HALBAN jun., J. KOCH: *Nature (Lond.)* **139**, 756 (1937).  
198. — — — *Nature (Lond.)* **139**, 922 (1937).  
199. — — — *Nature (Lond.)* **139**, 1021 (1937).  
200. FÜNFER, E.: *Naturwiss.* **25**, 235 (1937).  
201. — *Ann. Physik* **29**, 1 (1937).  
202. FURRY, W. H.: *Physic. Rev.* **51**, 592 (1937).  
203. GOUDSMIT, G.: *Physic. Rev.* **51**, 64 (1937).  
204. GRIFFITHS, J. H. E. and L. SZILARD: *Nature (Lond.)* **139**, 323 (1937).  
204a. HAHN, O., L. MEITNER u. F. STRASSMANN: *Ber. chem. Ges.* **70**, 1374 (1937).  
205. HALBAN jun., H. v. et P. PREISWERK: *J. Physique et Radium (7)* **8**, 29 (1937).  
206. HALPERN, O. and M. H. JOHNSON jr.: *Physic. Rev.* **51**, 992 (1937).  
207. HAXEL, O.: *Z. Physik* **104**, 540 (1937).  
208. HOFFMAN, J. G., M. ST. LIVINGSTON and H. A. BETHE: *Physic. Rev.* **51**, 214 (1937).  
209. JÄCKEL, R.: *Z. Physik* **104**, 762 (1937).  
210. KIKUCHI, S., K. HUSIMI u. H. AOKI: *Z. Physik* **105**, 265 (1937).  
211. LAMB jr., W. E.: *Physic. Rev.* **51**, 187 (1937).  
212. LANGER, L. M. and M. D. WHITAKER: *Physic. Rev.* **51**, 713 (1937).  
213. LASLETT, L. J.: *Physic. Rev.* **51**, 22 (1937).  
214. LEWIS, G. N. and PH. W. SCHUTZ: *Physic. Rev.* **51**, 369 (1937).  
215. — *Physic. Rev.* **51**, 371 (1937).  
216. LYMAN, E. M.: *Physic. Rev.* **51**, 1 (1937).  
217. MAJER, V.: *Naturwiss.* **25**, 252 (1937).  
218. MEITNER, L., O. HAHN u. F. STRASZMANN: *Z. Physik* **106**, 249 (1937).  
219. — *Ann. Physik* **29**, 246 (1937).  
220. MITCHELL, A. C. G.: *Physic. Rev.* **51**, 995 (1937).  
221. MÜLLER, H. K.: *Naturwiss.* **25**, 251 (1937).  
222. NAHMIAS, M. E. et R. J. WALLEN: *J. Physique et Radium (7)* **8**, 153 (1937).  
223. ORNSTEIN, L. S. and G. E. UHLENBECK: *Physica* **4**, 478 (1937).  
224. PANETH, F. A. and E. GLÜCKAUF: *Nature (Lond.)* **139**, 712 (1937).  
225. POWERS, P. N., H. G. BEYER and J. R. DUNNING: *Physic. Rev.* **51**, 371 (1937).  
226. PREISWERK, P.: *Helvet. phys. Acta* (im Druck).  
227. RAUSCH v. TRAUBENBERG, H. u. H. ADAM: *Z. Physik* **104**, 442 (1937).  
228. RUBEN, S. and W. F. LIBBY: *Physic. Rev.* **51**, 774 (1937).  
229. SCHWINGER, J. S.: *Physic. Rev.* **51**, 544 (1937).  
230. — and E. TELLER: *Physic. Rev.* **51**, 775 (1937).  
231. VELDKAMP, J. and K. S. KNOL: *Physica* **4**, 166 (1937).  
232. WESTCOTT, C. H.: *Cambridge philos. Soc.* **33**, 122 (1937).  
233. — *Proc. Cambridge philos. Soc.* **33**, 137 (1937).  
234. WICK, G. C.: *Physik. Z.* **38**, 403 (1937).

# Fortschritte der Theorie der Atomkerne.

Von P. JORDAN, Rostock.

Mit 5 Abbildungen.

Inhaltsverzeichnis.		Seite
Vorbemerkungen . . . . .		47
I. Einkörpermodell . . . . .		48
1. RUTHERFORD-Formel . . . . .		48
2. Teilchensymmetrie . . . . .		49
3. Zentralfeld . . . . .		49
4. Zentraler Stoß . . . . .		51
5. Potentialtopf . . . . .		52
6. Schwellendurchgang . . . . .		54
II. Tröpfchenmodell . . . . .		56
7. Kernbausteine . . . . .		56
8. Kernflüssigkeit . . . . .		58
9. Korrespondenzbetrachtungen . . . . .		59
10. Teilchenabsorption . . . . .		63
11. Revidierte Kernradien . . . . .		67
12. FERMI-Statistik . . . . .		68
13. Entropie . . . . .		72
III. Austauschkraft . . . . .		74
14. Absättigung . . . . .		74
15. Zweikörperproblem . . . . .		77
16. Deuteron . . . . .		79
17. Gleiche Teilchen . . . . .		82
18. 1 <i>s</i> -Schale . . . . .		84
19. 2 <i>p</i> -Schale . . . . .		86
20. Spezielle Reaktionen . . . . .		91
21. Isobare . . . . .		93
22. Auswahlregeln . . . . .		96
23. Relativistische Effekte . . . . .		97
Literaturverzeichnis . . . . .		98

**Vorbemerkungen.** Eine zusammenfassende Darstellung der Theorie der Atomkerne — also dessen, was an zusammenhängend deutbaren und verstehbaren Gesetzmäßigkeiten in dem umfangreichen kernphysikalischen Erfahrungsmaterial erkannt worden ist — wurde 1936 von C. F. v. WEIZSÄCKER gegeben: „Die Atomkerne“ (1). Ebenfalls 1936 wurde ein Bericht von H. A. BETHE und R. F. BACHER vorgelegt: „Nuclear Physics A“ (2), dessen zweiter Teil in Aussicht steht. Der Berichterstatter hat einen kurzen Überblick über den Stand der Kerntheorie in seiner „Anschaulichen Quantentheorie“ (3) gegeben.

Der vorliegende Bericht ist in erster Linie den seit Bearbeitung der genannten Berichte erzielten neuen Fortschritten gewidmet und beschränkt sich auch hinsichtlich der Literaturangaben auf die neueste

Entwicklung (1936/37). Er kann nach Inhalt und Darstellungsform als Ergänzung meiner „Anschaulichen Quantentheorie“ betrachtet werden. Zur Gewinnung eines abgerundeten Bildes, und um dem Leser unabhängig von kerntheoretischen Vorkenntnissen verständlich zu werden, sind jedoch einige Punkte hier kurz wiederholt, die in den genannten Zusammenfassungen schon besprochen waren.

Ausgeschlossen von der Betrachtung sollen alle mit dem  $\beta$ -Zerfall zusammenhängenden Fragen bleiben. Der augenblickliche Entwicklungsstand dieses Gebiets ist einer ausführlichen Zusammenfassung vom theoretischen Standpunkt nicht günstig; eine bisherige Schwierigkeit der Theorie ist allerdings jetzt beseitigt (1976).

## I. Einkörpermodell.

**1. RUTHERFORD-Formel.** Die spektroskopische Erfahrung lehrt bekanntlich, daß das Kraftfeld eines Atomkerns (soweit es für Elektronen als Probekörper merkbar ist) fast im ganzen Raumbereich des Atoms ein COULOMB-Feld ist. Erst bei Mitberücksichtigung der Hyperfeinstruktur erkennt man bei vielen Kernen das Vorhandensein eines geringfügigen *magnetischen Dipolmoments*, sowie bei einigen auch eines elektrischen Quadrupolmoments [vgl. (2, 44, 93)]. Dagegen ist die endliche *Ausdehnung* der Atomkerne spektroskopisch nicht mehr erkennbar, und schon die Sicherstellung eines exakten COULOMB-Feldes in der näheren Umgebung des Kerns erfordert andersartige Hilfsmittel: sie kann geschehen durch Abtastung des Kernfeldes vermittelt schneller  $\alpha$ -Teilchen oder schneller Protonen.

Nach klassischer Rechnung ergibt sich, wenn Teilchen der Ladung  $Z'e$  und der Masse  $\mu$  an unendlich schweren Teilchen der Ladung  $Ze$  gestreut werden, Folgendes:

1. Der *differentielle Wirkungsquerschnitt* eines Kerns in bezug auf eine Ablenkung, die in den Raumwinkel  $d\omega$  fällt, ist gleich

$$dQ = \left( \frac{Z'Z e^2}{2\mu v^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}} d\omega, \quad (1)$$

wenn  $\Theta$  der Ablenkungswinkel und  $v$  die Geschwindigkeit der gestreuten Teilchen ist.

2. Einem einzelnen Kern, in bezug auf welchen eines der bewegten Teilchen den Drehimpulsbetrag  $p_\varphi$  hat, kommt dieses Teilchen nahe bis auf den Minimalabstand

$$\left. \begin{aligned} r_{\min} &= \frac{p_\varphi^2 / \mu Z' Z e^2}{\sqrt{1 + \frac{p_\varphi^2 v^2}{Z'^2 Z^2 e^4} - 1}}; \\ r_{\min} &> \begin{cases} \frac{p_\varphi}{\mu v}, \\ \frac{2 Z' Z e^2}{\mu v^2}. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Die RUTHERFORD-DARWINSche Streuformel (1) wird auch dann anwendbar sein, wenn jeder der streuenden Kerne lediglich für solche Kernabstände, die  $> r_{\min}$  bleiben, ein exaktes COULOMB-Feld zeigt, während bei noch größerer Annäherung an den Kern Abweichungen vom COULOMBSchen Verlauf des Kraftfeldes zuzulassen sind.

Die Ersetzung der klassischen Mechanik durch die Wellenmechanik läßt die Streuformel (1) ungeändert in Kraft (analog dazu, daß bei den Ellipsenbahnen im COULOMB-Feld die BALMER-Formel halbklassisch und wellenmechanisch übereinstimmend herauskommt). An Stelle von (2) ist zwar wellenmechanisch naturgemäß nur eine etwas schwächere Aussage zu machen: die Wellenfunktion des stoßenden Teilchens reicht bekanntermaßen auch in das Gebiet hinein, dessen Betreten nach klassischer Mechanik wegen zu geringer Energie des Teilchens verboten wäre. Jedoch nimmt die Wellenfunktion beim Überschreiten der diesbezüglichen Grenze sehr stark ab (exponentiell).

Wenn die Masse  $M$  der streuenden Kerne nicht als unendlich groß gegenüber derjenigen der gestreuten Teilchen betrachtet werden kann, so ist die Streuformel (1) anzuwenden in demjenigen Koordinatensystem, welches sich mit dem Schwerpunkt eines aus je einem streuenden und gestreuten Teilchen gebildeten Teilchenpaares mitbewegt, also die Geschwindigkeit  $\frac{\mu}{M + \mu} v$  in Richtung der Primärstrahlung besitzt. Gleichzeitig ist  $\mu$  in (1) zu ersetzen durch  $\frac{\mu M}{\mu + M}$ .

Bekanntlich führt die beschriebene Abstastung der Kernfelder zu dem Ergebnis, daß die Kerndurchmesser nicht wesentlich über die Größenordnung  $10^{-12}$  cm hinausgehen.

**2. Teilchensymmetrie.** Sind gestreute und streuende Teilchen von gleicher Art, so ergeben sich durch Austauschwirkungen Abweichungen von der RUTHERFORDSchen Streuformel. Diese hängen davon ab, 1. ob die betreffenden Teilchen dem PAULI-Verbot oder statt dessen der BOSE-Statistik unterworfen sind; 2. welchen Wert ihr mechanisches Spinnmoment besitzt.

Die Streuintensität für eine Richtung, die mit der Primärstrahlrichtung den Winkel  $\Theta$  bildet, ist gegenüber der RUTHERFORD-Formel abgeändert um einen Faktor (9):

$$1 \pm \frac{2}{2i + 1} \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \Theta}{1 + \operatorname{tg}^4 \Theta} \cdot \cos \left( \frac{4\pi e^2 Z^2}{h v} \ln |\operatorname{tg} \Theta| \right); \quad (1)$$

dabei ist  $i$  die Quantenzahl des Kerndrehimpulses,  $v$  die Primärgeschwindigkeit der Streuteilchen. Bei BOSE-Statistik gilt das positive, bei FERMI-Statistik das negative Vorzeichen.

**3. Zentralfeld.** Eine ebene Teilchenwelle möge ein ruhendes (unendlich schweres) Streuzentrum überstreichen, das durch ein zentral-symmetrisches Potential  $V(r)$  gekennzeichnet ist. Die wellenmechanische

Untersuchung des Vorgangs verläuft folgendermaßen. Gehen in der Primärwelle  $I_0$  Primärteilchen pro Sekunde durch ein Quadratcentimeter, und werden pro Sekunde  $I_0 \cdot I(\Theta) d\omega$  Teilchen in einen zum Ablenkungswinkel  $\Theta$  gehörigen Raumwinkel  $d\omega$  hineingestreut, so ist  $I(\Theta) d\omega$  der zu  $d\omega$  gehörige Anteil  $dQ$  des *Wirkungsquerschnittes*  $Q$ , dessen Gesamtwert wir also durch Integration erhalten:

$$Q = \int I(\Theta) d\omega. \quad (1)$$

Ausdrücklich sei jetzt vorausgesetzt, daß  $V(r)$  mit wachsendem  $r$  stärker als  $1/r$  (etwa mindestens wie  $1/r^2$ ) abfällt; auf das (bereits behandelte) COULOMB-Feld sind also die folgenden Betrachtungen *nicht* anwendbar. Die Amplitude der *Primärwelle* werde in der Form

$$\psi^0 = e^{i k z}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (2)$$

angesetzt, was einem mit der Geschwindigkeit  $v = k h/2 \pi \mu$  in der  $z$ -Richtung fortschreitenden Teilchenstrom entspricht. Da die statistische *räumliche Teilchendichte* für diese Amplitude gleich 1 ist, haben wir einen *Teilchenstrom*  $I_0 = v$ .

Die Streuung ergibt nun eine zusätzliche, mit der Primärwelle zu superponierende Streuamplitude, welche einer vom Orte  $r = 0$  auslaufenden Kugelwelle entsprechen muß; für hinreichend große  $r$  (in der „Wellenzone“ der Kugelwelle) muß diese Streuamplitude also so aussehen:

$$\frac{1}{r} f(\Theta) e^{i k r}; \quad (3)$$

und es wird dann offenbar

$$I(\Theta) = |f(\Theta)|^2. \quad (4)$$

Die Gesamtamplitude

$$\psi = e^{i k z} + \frac{1}{r} f(\Theta) e^{i k r} + \frac{1}{r^2} \dots \quad (5)$$

können wir aber auch folgendermaßen betrachten. Wir zerlegen diesen Wellenvorgang in die Teilwellen, welche den verschiedenen Werten  $l = 0, 1, 2, \dots$  des *Drehimpulses* relativ zum Streuzentrum  $r = 0$  entsprechen. Da eine Interferenz zwischen zwei verschiedenen dieser Teilwellen nicht in Frage kommt, so muß, da im Zentrum  $r = 0$  weder Erzeugung noch Vernichtung von Teilchen geschieht, jede einzelne eine *stehende* (nicht etwa einlaufende oder auslaufende) Kugelwelle sein. Nehmen wir zunächst einmal  $V(r) = 0$ , so daß die Streuung ganz unterbleibt, so sieht die fragliche Zerlegung — die wir wieder nur für große  $r$  brauchen — folgendermaßen aus:

$$e^{i k z} = \frac{1}{k r} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \Theta) \cdot \sin \left( k r - l \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{r^2} \dots; \quad (6)$$

mit  $P_l$  ist die  $l$ -te Kugelfunktion bezeichnet<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Also  $P_l(\cos \Theta) = \frac{(-1)^l}{l!} r^{l+1} \frac{\partial^l}{\partial z^l} \frac{1}{r}$ .

Das Hinzukommen der Streuung kann jetzt offenbar nichts anderes bewirken, als daß die *Phasen* in den einzelnen Teilwellen von (6) abgeändert werden (durch Multiplikation jedes Sinus mit einem komplexen Faktor vom Betrage 1, und durch Addition einer Phase in jedem Sinus):

$$\psi = \frac{1}{k r} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l P_l(\cos \Theta) e^{i \delta_l} \sin \left( k r - l \frac{\pi}{2} + \eta_l \right) + \frac{1}{r^2} \dots \quad (7)$$

Subtraktion von (6) und (7) muß uns nach (5) die Streuamplitude (3) liefern, und man sieht daraus, daß  $\delta_l = \eta_l$  ist.

Nach (4), (1) ist dann der Streuquerschnitt zu bestimmen; die Ausrechnung ergibt

$$Q = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \eta_l. \quad (8)$$

Die oben für große  $r$  gemachten Ansätze entsprechen offenbar der Annahme, daß sich bei großen  $r$  die Teilchen praktisch *kräftefrei* bewegen: aus diesem Grunde können sie auf die zu weit reichenden COULOMB-Kräfte nicht angewandt werden. Die Untersuchung von Streuzentren, die sowohl einen COULOMBSchen als auch einen (mit  $r \rightarrow \infty$  stärker abfallenden) nicht-COULOMBSchen Feldanteil besitzen, erfordert deshalb schwierigere Hilfsmittel. Vgl. darüber (104).

Die Bestimmung der Phasen  $\eta_l$  in (8) macht natürlich eine genauere Untersuchung des Verlaufs von  $\psi$  bei *kleinen* Werten von  $r$  notwendig.

**4. Zentraler Stoß.** Zwischen einem *Neutron* und einem als Streuzentrum wirkenden Kern besteht eine merkliche Wechselwirkung nur bei sehr kleinen Abständen, in der Größenordnung der Kerndimensionen. Im Einklang mit den Ergebnissen der Abtastung von Kernfeldern durch positiv geladene Streuteilchen zeigen sich bei der Beschießung von Kernen mit *Neutronen* Wirkungsquerschnitte der Größenordnung  $10^{-24}$  cm<sup>2</sup>. Nur bei sehr langsamen Neutronen, deren DE BROGLIESche Wellenlänge merklich größer als  $10^{-12}$  cm ist, können *Resonanzeffekte* zu erheblich größeren Wirkungsquerschnitten Anlaß geben, die entsprechend (8) bis zur Größenordnung  $\lambda^2$  anwachsen können.

Nach klassischer Mechanik könnte ein Neutron, welches einen translatorischen Impuls  $p$  und einen Drehimpuls  $p_\varphi$  in bezug auf das Streuzentrum besitzt, diesem nicht näher kommen als bis auf den Minimalabstand  $p_\varphi/p$ ; und nur dann, wenn dieser Wert  $p_\varphi/p$  höchstens gleich  $\approx 10^{-12}$  cm wird, kann eine Beeinflussung des Neutrons durch den Kern zustande kommen. Nun ist aber der Drehimpuls *gequantelt*; abgesehen von dem Falle einer Drehimpulsquantenzahl  $l = 0$  ist  $p_\varphi$  stets mindestens von der Größe  $h/2\pi$ . Für Neutronen, deren kinetische Energie unterhalb von etwa 4 Millionen Elektronvolt bleibt, ist deshalb *nur im Falle*  $l = 0$  eine Streuung möglich; schon für  $l = 1$  kommt das Neutron dem Kern nicht nahe genug.

Demgemäß vereinfacht sich (8), § 3 zu

$$Q = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \eta_0; \quad (1)$$

und ferner wird nach (5), (6), (7), § 3 die *Streuwellen* kugelsymmetrisch.

Allerdings gilt dies in dem besonders wichtigen Falle der Neutron-Proton-Streuung nur *angenähert*: gewisse Abweichungen von der Kugelsymmetrie sind experimentell vorhanden (55) und theoretisch verständlich (129), wenn man berücksichtigt, daß ein schwacher Rest der Wechselwirkung auch noch bei etwas größerem Abstand vorhanden bleibt.

Auf die Streuung positiver Teilchen an Kernen übertragen, ergeben die obigen Betrachtungen, daß bei nicht zu großen Teilchenenergien auch in diesem Falle nur die „zentral“ stoßenden Teilchen mit  $l=0$  das Vorhandensein *nicht-Coulombscher* Kräfte erkennen lassen.

**5. Potentialtopf.** Um die Bedeutung der durch die Kernkräfte veranlaßten Streueffekte genauer zu prüfen, wird man zunächst versuchen, die Wechselwirkung des streuenden und des gestreuten Teilchens durch eine potentielle Energie  $V(r)$  darzustellen. Jedenfalls dann, wenn beide Teilchen *unzusammengesetzt* sind, muß dies berechtigt sein; aber auch für den Fall zusammengesetzter Kerne wird man auf diese Weise einige Aufschlüsse erhalten.

Wir betrachten die *Streuung von Neutronen* an Kernen und nehmen vereinfachend an, daß es sich dabei um einen „Potentialtopf“

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } r < r_0 \\ 0 & \text{für } r > r_0 \end{cases} \quad (1)$$

mit senkrechter „Wand“ bei  $r=r_0$  handle. Nach dem oben Gesagten hat uns nur der zu verschwindender Drehimpulsquantenzahl  $l=0$  gehörende Anteil  $\chi(r)$  der Wellenfunktion  $\psi$  zu beschäftigen:

$$\chi(r) = \begin{cases} \alpha \frac{\sin Kr}{Kr} & \text{für } r < r_0, \\ e^{i\eta_0} \frac{\sin(kr + \eta_0)}{kr} & \text{für } r > r_0; \end{cases} \quad (2)$$

für  $r < r_0$  entspricht das der obigen Formel (2), § 4; für  $r > r_0$  ist durch den Ausdruck (2) mit

$$K^2 = k^2 + \frac{8\pi^2\mu}{h^2} V_0 \quad (3)$$

die Erfüllung der SCHRÖDINGER-Gleichung sowie ein Endlichbleiben von  $\chi(r)$  für  $r \rightarrow 0$  garantiert. Die Konstanten  $\alpha$  und  $\eta_0$  sind daraus zu bestimmen, daß  $\chi(r)$  und  $\chi'(r)$  bei  $r=r_0$  stetig bleiben müssen. Demnach muß auch

$$\frac{d}{dr} \ln r \chi(r) = \frac{(r\chi(r))'}{r\chi(r)} \text{ bei } r=r_0 \text{ stetig sein:}$$

$$K \operatorname{ctg} K r_0 = k \operatorname{ctg} (k r_0 + \eta_0); \quad (4)$$

hierdurch ist  $\eta_0$  festgelegt, und aus  $\eta_0$  ist nach (1), § 4 der Streuquerschnitt zu berechnen.



Wir wollen jetzt voraussetzen, daß die kinetische Energie der benutzten Neutronen sehr *klein* gegenüber der Potentialtiefe  $V_0$  ist. Dann kann einerseits (3) vereinfacht werden zu

$$K^2 \approx K_0^2 = \frac{8\pi^2\mu}{h^2} V_0; \quad (5)$$

und andererseits wird  $kr_0 \ll 1$ . Die Ausrechnung von  $Q$  ergibt dann

$$Q = 4\pi \frac{(1 - K_0 r_0 \operatorname{ctg} K_0 r_0)^2}{k^2 + K_0^2 \operatorname{ctg}^2 K_0 r_0}. \quad (6)$$

Im allgemeinen wird man im Nenner  $k \ll K_0 \operatorname{ctg} K_0 r_0$  annehmen dürfen; auf Grund unserer Voraussetzung  $k \ll K_0$  ist das stets der Fall, wenn nicht  $\operatorname{ctg} K_0 r_0 \ll 1$  ist. Es wird dann

$$Q = 4\pi \left( r_0 - \frac{1}{K_0} \operatorname{tg} K_0 r_0 \right)^2 \quad (7)$$

und  $Q$  erhält die Größenordnung des Kernquerschnitts  $r_0^2$ .

In dem besonderen Falle der *Streuung von Neutronen an Protonen* ist jedoch  $Q$  merklich größer, so daß  $\operatorname{ctg} K_0 r_0 \ll 1$  sein muß. Aus (6) wird dann

$$Q = 4\pi \frac{1}{k^2 + K_0^2 \operatorname{ctg}^2 K_0 r_0}. \quad (8)$$

Hierin ist  $k^2 = 8\pi^2\mu E_{\text{kin.}}/h^2$ , wobei  $\mu = \frac{M^2}{2M}$  die halbe Masse  $M$  des Protons oder Neutrons, und  $E_{\text{kin.}} = \frac{1}{2} E_0$  die kinetische Energie im Schwerpunktskoordinatensystem, also die Hälfte der *kinetischen Energie*  $E_0$  des Neutrons bei *ruhemdem* Proton ist.

Mit der Bezeichnung

$$K_0 \operatorname{ctg} K_0 r_0 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2\mu E} = \frac{2\pi}{h} \sqrt{ME}, \quad (9)$$

deren Zweckmäßigkeit sich später erweisen wird, geht (8) über in:

$$Q = \frac{h^2}{\pi M} \cdot \frac{1}{E + \frac{1}{2} E_0}. \quad (10)$$

Bei der Anwendung dieser Formel auf die Neutron-Proton-Streuung ist aber noch zu berücksichtigen, daß die *Spinmomente* von Proton und Neutron entweder *parallel* oder *antiparallel* stehen können: die *statistischen Gewichte* für diese beiden Einstellungen verhalten sich wie 3:1.

Für diese beiden Fälle wird man mit zwei etwas verschiedenen Potentialtöpfen rechnen müssen, also auch mit zwei verschiedenen Werten von  $K_0 \operatorname{ctg} K_0 r_0$ . In diesem Sinne gehöre gemäß (9) der Energiewert  $E$  zur parallelen und  $E'$  zur antiparallelen Spinstellung; dann werden wir insgesamt einen Wirkungsquerschnitt

$$Q = \frac{h^2}{4\pi M} \left\{ \frac{3}{E + \frac{1}{2} E_0} + \frac{1}{E' + \frac{1}{2} E_0} \right\} \quad (11)$$

erwarten.

Tatsächlich stellt diese Formel die experimentellen Ergebnisse befriedigend dar<sup>1</sup>, wenn für die Energiewerte, ausgedrückt in Millionen Elektronvolt (MeV), eingesetzt wird:

$$E = 2,15 \text{ MeV}; \quad E' = 0,116 \text{ MeV}. \quad (12)$$

Diese Energiewerte spielen auch für die Theorie des *Deuterons* eine Rolle. Es sei hervorgehoben, daß  $E$  und  $E' \ll V_0$  sind, weil in (9)  $\text{ctg } K_0 r_0 \ll 1$  ist.

Zurückkehrend zu dem „normalen“ Fall  $k \ll |K_0 \text{ctg } K_0 r_0|$ , wie er bei der Streuung von langsamen Neutronen an *zusammengesetzten* Kernen zu erwarten ist, bemerken wir noch: Aus  $k r_0 + \eta_0 \ll 1$  ist in Verbindung mit  $K \approx K_0$  nach (4) zu folgern:

$$K_0 \text{ctg } K_0 r_0 = \frac{k}{k r_0 + \eta_0}. \quad (13)$$

Andererseits ergibt gemäß (2) die Stetigkeit von  $\chi(r)$  bei  $r = r_0$ :

$$|\alpha| \frac{\sin K_0 r_0}{K_0} = \frac{k r_0 + \eta_0}{k};$$

also bekommen wir

$$|\alpha| = \frac{1}{\cos K_0 r_0},$$

d. h.  $|\alpha|$  wird *unabhängig* von  $k$ .

Nun ist  $|\alpha|^2$  nach wellenmechanischen Grundsätzen ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, daß das Streuteilchen *im Innern des Potentialtopfes anzutreffen* ist; und da die unseren Rechnungen zugrunde gelegte ebene Primärwelle  $e^{ikz}$  einen mit der Teilchengeschwindigkeit  $v$  proportionalen Teilchenstrom darstellt, so ist die Unabhängigkeit dieser Wahrscheinlichkeit von  $k$  so zu deuten, daß für die hier betrachteten kleinen Geschwindigkeiten die *Wahrscheinlichkeit eines Eindringens in das Kerninnere umgekehrt proportional der Geschwindigkeit  $v$  ist*<sup>2</sup>.

**6. Schwellendurchgang.** Erfahrungsgemäß sind bei jedem  $\alpha$ -Strahler die Energien der emittierten  $\alpha$ -Teilchen *kleiner* als die Energie der schnellsten  $\alpha$ -Teilchen, welche im Kernfeld der betreffenden Atomart noch eine *rein* COULOMBSche Streuung erfahren. Die emittierten  $\alpha$ -Teilchen müssen also eine Potentialschwelle *durchdringen* haben. Für

<sup>1</sup> Die experimentelle Festlegung des Streuquerschnitts der Neutron-Proton-Streuung sowie auch des Querschnitts für die Anlagerung eines Neutrons an ein Proton (unter  $\gamma$ -Emission) beruht auf Methoden, die eine komplizierte Theorie erfordern; die unmittelbaren experimentellen Feststellungen beziehen sich etwa auf die *Diffusion* von Neutronen in Paraffin, und ihr Zusammenhang mit den gesuchten Wirkungsquerschnitten ist sehr verwickelt. Die Aufklärung dieser Zusammenhänge ist vornehmlich FERMI zu verdanken. Wir begnügen uns hier mit der Zusammenstellung einiger einschlägiger neuer Arbeiten (24, 25, 47). Auch die Bestimmung der Wirkungsquerschnitte sonstiger Kerne gegenüber Neutronen gründen sich auf diese Untersuchungen.

<sup>2</sup> Wie gesagt, gilt dies unter der Voraussetzung  $k r_0 + \eta_0 \ll 1$ , während bei der Neutron-Proton-Streuung statt dessen  $k r_0 \ll \eta_0$  zu setzen war.

diesen spezifisch wellenmechanischen Durchdringungseffekt ergibt die Theorie folgendes:

Es sei berechtigt, den Kern vor der Emission aufzufassen als ein  $\alpha$ -Teilchen in einem (durch den Kernrest gebildeten) Potentialtopf der Gestalt

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & \text{für } r < R, \\ \frac{z(Z-z)e^2}{r} & \text{für } r > R. \end{cases} \quad (1)$$

Dabei ist  $Z$  die Kernladungszahl des  $\alpha$ -Strahlers und  $z = 2$  die des  $\alpha$ -Teilchens. Mit  $z = 1$  können wir die Formel auch auf Protonenstrahler anwenden. Die *Zerfallskonstante* (reziproke mittlere Lebensdauer)  $\lambda$  ist dann gegeben<sup>1</sup> durch die Formel

$$\left. \begin{aligned} \log \lambda &= \text{const} - \frac{4\pi^2 e^2}{h} \cdot \frac{z(Z-z)}{v} + \frac{8\pi e \sqrt{M}}{h} \sqrt{2z(Z-z)R} \\ &= \text{const} - \text{const} \frac{Z-z}{v} + \text{const} \sqrt{(Z-z)R}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

welche die theoretische Deutung der *GEIGER-NUTALLSchen Beziehung* enthält;  $v$  ist die Geschwindigkeit der emittierten  $\alpha$ -Teilchen  $s$  (bzw. Protons), und  $M$  die reduzierte Masse  $\frac{M'(M^0 - M')}{M^0}$ , wo  $M^0$  die Masse des ursprünglichen Kerns,  $M'$  die des  $\alpha$ -Teilchens (bzw. Protons) ist.

Diese Formel ermöglicht eine Berechnung der *Kernradien*  $R$  von  $\alpha$ -Strahlern aus den empirischen Werten  $\lambda$ . Das grundsätzliche Ergebnis dieser Berechnungen ist eine *Proportionalität zwischen Kernvolumen und Atomgewicht*:  $R^3 \approx A$ .

Die *Absolutwerte* der so gefundenen Kernradien sind allerdings korrekturbedürftig, weil die zugrunde gelegte Vorstellung, daß im ursprünglichen Kern das  $\alpha$ -Teilchen als solches dauernd vorhanden sei, unzutreffend ist; hierauf kommen wir später zurück<sup>2</sup>.

Man erkennt übrigens aus (2), daß eine beobachtbare  $\alpha$ -Aktivität (Reichweite nicht allzu klein) an Kernen von merklicher Lebensdauer nur für höhere  $Z$  (etwa  $> 40$ ) erwartet werden kann (102). Tatsächlich ist  $Sm$  ( $Z = 62$ ) der niedrigste bekannte natürliche  $\alpha$ -Strahler; und die künstlich erzeugten leichten  $\alpha$ -Strahler oder Protonenstrahler haben durchweg geringe Lebensdauern (102).

Werden Kerne beschossen mit positiv geladenen Teilchen, deren Energie kleiner als die Höhe des für sie bestehenden Potentialwalls ist, so ist ein Schwellendurchgang Voraussetzung für ein *Eindringen* des fraglichen Teilchens in den Kern. Dementsprechend enthält dann die „*Anregungsfunktion*“ für einen durch Eindringen des positiven Teilchens

<sup>1</sup> Abgesehen von einem geringen, aber für die *Feinstruktur* der  $\alpha$ -Strahlung bedeutungsvollen Einfluß der Quantenzahl  $l$  des *Drehmoments* des  $\alpha$ -Teilchens relativ zum Restkern.

<sup>2</sup> Die Lebensdauern der künstlich erzeugten *Protonenstrahler*, bei denen diese Schwierigkeit fortfiel, entziehen sich leider durch ihre Kleinheit einer Messung.

auszulösenden Prozeß einen Faktor, dessen Logarithmus dem Ausdruck (2) ganz analog ist. Vgl. etwa (6), sowie (145), wo der betreffende Faktor experimentell nachgewiesen wird für die Zerlegung von  ${}^7_3\text{Li}$  durch langsame Protonen.

Überschreitet dagegen die kinetische Energie der positiven Teilchen die Höhe des Potentialwalls, so ist für das Eindringen kein Schwellendurchgang mehr erforderlich. Aus dem recht plötzlichen Aufhören des *unterhalb* der Wallhöhe stattfindenden schnellen Anwachsens der Anregungsfunktion mit zunehmender kinetischer Energie hat man in einigen Fällen *unmittelbar die Höhe des Potentialwalls* erkennen können (75).

## II. Tröpfchenmodell.

**7. Kernbausteine.** Nach HEISENBERG sind *Protonen* und *Neutronen* als Bausteine der Kerne anzusehen. Ein Kern mit dem ganzzahlig abgerundeten Atomgewicht  $A$  und der Ladungszahl  $Z$  enthält  $Z$  Protonen und  $A - Z$  Neutronen. Nach der DIRACschen Löchertheorie sollte es auch ein *negatives Proton* geben — ebenso, wie es neben dem negativen Elektron ein positives gibt; es ist mehrfach vermutet worden, daß in der *Höhenstrahlung* derartige negative Protonen tatsächlich vorhanden seien (58).

Die härtesten Anteile der Höhenstrahlung besitzen nämlich ein Durchdringungsvermögen, das höher ist, als theoretisch für Elektronen oder Positronen zu erwarten wäre; experimentelle Ergebnisse, nach denen die theoretischen Erwartungen in bezug auf Elektronen unzutreffend schienen — so daß also ein Versagen der Theorie bei sehr schnellen Elektronen vorläge —, sind inzwischen überholt (63). Allerdings haben genauere theoretische Überlegungen die Schwierigkeiten, die hier vorzuliegen schienen, sehr gemildert: Obwohl ein Elektron von  $10^{10}$  Volt in Luft eine freie Weglänge von nur 1,5 km hat, wird trotzdem die Durchdringung der Erdatmosphäre (äquivalent 8 km Luft) durch die Höhenstrahlung verständlich, weil die von diesen schnellen Teilchen (beim Durchgang durch COULOMBSche Kernfelder) erzeugten Lichtquanten sowie die von diesen Lichtquanten wiederum paarweise erzeugten Elektronen und Positronen praktisch dieselbe Richtung wie die Primärteilchen haben (64). Es ist deshalb doch nur ein geringer, härtester Anteil der Höhenstrahlung auf Rechnung *schwerer* Teilchen zu setzen, und man kann nicht ausschließen, daß diese sämtlich *positive* Protonen seien. Empirisch ist also das Vorhandensein negativer Protonen noch unbewiesen (vgl. ferner (80)].

Jedoch scheinen starke Gründe für das Vorhandensein noch unbekannter Teilchen in der Höhenstrahlung zu sprechen, die bei einer Ladung  $e$  Massenwerte zeigen, die zwischen der Masse des Elektrons und der des Protons liegen; etwa bei z. B. 50 Elektronenmassen (160). Vielleicht handelt es sich um Anregungszustände des Elektrons, für welche auch bei  $\beta$ -Teilchen Anzeichen gefunden zu sein scheinen; und vielleicht wird man — dieser Gedanke ist bereits aus der BORNSchen Elektrodynamik heraus entwickelt worden — auch das Proton als einen Anregungszustand des (positiven) Elektrons aufzufassen haben. Das Experiment hat hier anscheinend noch ganz neue Gebiete zu erschließen. Aber wahrscheinlich spielen diese Fragen für unser Thema, die Kerntheorie, höchstens indirekt eine Rolle.

Man hat vermutet, daß negative Protonen auch als Kernbausteine vorkämen; jedoch ist es wohl wahrscheinlicher, daß ein negatives Proton in der Nachbarschaft eines positiven sich mit diesem sehr bald unter Zerstrahlung neutralisieren würde. Das zur Stützung der fraglichen Vermutung angeführte, experimentell jetzt wohl gesicherte [z. B. (116)] Vorhandensein sogenannter *isomerer* Kerne, die bei gleichen  $Z$  und  $A$  doch verschieden sind, dürfte eher durch *Auswahlregeln*, welche „metastabile“ Kernzustände bedingen, zu deuten sein.

Die *Ruhmassen* von Proton, Neutron und Elektron sind in Atomgewichten und in Millionen Elektronvolt (MeV) ausgedrückt:

Die Tatsache, daß die Masse des Neutrons *größer* als die des *H-Atoms* ist, bedeutet nach einer Bemerkung von WENTZEL (11), daß eine spontane Umwandlung eines H-Atoms in ein Neutron *nicht* möglich ist. Wohl aber sollte eine *spontane  $\beta$ -Emission* des *freien Neutrons* möglich sein; empirisch ist es jedoch noch nicht bekannt (136). Immerhin würde sie gut zusammenpassen mit der astrophysikalischen Tatsache, daß *Wasserstoff* in der stellaren Materie in großer Menge vorhanden ist, während Neutronen nicht in merklicher Menge vorhanden zu sein scheinen (sofern das nicht etwa nur dadurch vorgetäuscht wird, daß man diese Möglichkeit noch nicht gründlich genug geprüft hat).

Tabelle 1.

	Atomgewicht	MeV
Proton . . .	1,00755	935
Neutron . .	1,0090	936,4
Elektron . .	0,00055	0,51

(Dem Atomgewicht 1 entsprechen 928 MeV.)

Die spektroskopischen und thermodynamischen Eigenschaften des molekularen Wasserstoffs  $\frac{1}{2}\text{H}_2$  sowie die Streuung von Protonen in Wasserstoff zeigen, daß die Protonen ein *mechanisches Spinnmoment*  $1/2$  besitzen und dem PAULI-Verbot unterworfen sind. Indem man dieselben Eigenschaften auch dem Neutron zuschreibt, erhält man theoretisch die Regel: *Kerne mit  $\frac{\text{geradzahligem}}{\text{ungeradzahligem}}$  Atomgewicht  $A$  gehorchen der BOSE-Statistik und haben  $\frac{\text{ganzzahligen}}{\text{halbzahligen}}$  Spin.*

Die Erfahrung bestätigt diese beiden Regeln in allen bislang analysierten Fällen. Die Quantenzahl des Drehimpulses ist für zahlreiche Kerne ermittelt, hauptsächlich aus Hyperfeinstrukturen, zum Teil auch aus Bandenspektren, und für  $\frac{1}{2}\text{H}$  ( $i = 1/2$ ) und  $\frac{2}{1}\text{H}$  ( $i = 1$ ) auch thermodynamisch. Die Statistik (FERMISCHE oder BOSESCHES) konnte außer für  $\frac{1}{1}\text{H}$  auch für die Kerne  $\frac{2}{1}\text{H}$ ,  $\frac{4}{2}\text{He}$ ,  $\frac{7}{3}\text{Li}$ ,  $\frac{14}{7}\text{N}$ ,  $\frac{16}{8}\text{O}$ ,  $\frac{23}{11}\text{Na}$ ,  $\frac{31}{15}\text{P}$ ,  $\frac{32}{16}\text{S}$ ,  $\frac{35}{17}\text{Cl}$ ,  $\frac{39}{19}\text{K}$ ,  $\frac{127}{53}\text{J}$  ermittelt werden [aus Bandenspektren; für  $\frac{4}{2}\text{He}$  auch aus der Streuung von  $\alpha$ -Teilchen in He (9); für  $\frac{1}{2}\text{H}$  und  $\frac{2}{1}\text{H}$  auch thermodynamisch (143)].

Das *magnetische* Spinnmoment des Protons ist aus Atomstrahlungsmessungen bekannt. Ausgedrückt in „Kernmagnetonen“

$$\frac{e h}{4 \pi M c} \tag{1}$$

hat es den Wert  $\mu = 2,85$ ; oder anscheinend noch genauer (184):  $\mu = 2,6$ .

Das Neutron hat gleichfalls ein magnetisches Spinmoment, das aus dem des Protons und des *Deuterons* ( $\mu = 0,85$ ) durch Differenzbildung entnommen werden kann; vgl. dazu § 16. Der so bestimmte Wert ist (in Kernmagnetonen) gleich  $\mu = -2,00$  bzw. gleich  $-1,75$ ; das Minuszeichen bedeutet entgegengesetzte Richtung von mechanischem und magnetischem Moment. Dies negative Vorzeichen ist experimentell auch am isolierten Neutron bestätigt (137).

Nach BLOCH (12) ist das magnetische Moment des Neutrons nachweisbar auf Grund einer *magnetischen Streuung* von Neutronen beim Durchgang durch ein *Ferromagnetikum*. Denn wiewohl die magnetische Wechselwirkung des Neutrons mit einem Atom bzw. Elektron des Ferromagnetikums ihrem Betrage nach sehr klein ist, so erlangt sie trotzdem Bedeutung dadurch, daß sie im Gegensatz zu den Kernkräften in Raumbereichen von atomarer Ausdehnung wirksam ist. In der Tat ist der BLOCHSche Effekt aufgefunden worden (13, 87); und weitere aufschlußreiche Ergebnisse dürften künftig von der Untersuchung dieses Effektes zu erwarten sein. Vgl. z. B. (137), ferner (183).

Theoretisch sollte es auch ein „*Antineutron*“ geben, für welches das magnetische Moment dann  $\mu = +2,00$  (bzw.  $+1,75$ ) wäre. Sein Vorhandensein in der *Höhenstrahlung* könnte in Betracht gezogen werden.

Über *Beugung* usw. von Neutronenstrahlen vgl. (3, 144).

**8. Kernflüssigkeit.** Bekanntlich zeigen die schwereren Atome *nahezu ganzzahlige Atomgewichte*. Betreffs genauer Werte vgl. etwa (14, 6, 118, 119, 33, 138). Die leichtesten Kerne zeigen dagegen stärkere Abweichungen von der Ganzzahligkeit. BONNER und BRUBAKER (19) geben zusammenfassend 25 genaue Atomgewichte bis zum  $^{18}\text{O}$  aufwärts; OLIPHANT (3) gibt 21 Werte aufwärts bis  $^{20}\text{Ne}$ ; FLÜGGE und KREBS (6) geben 65 Massenwerte aufwärts bis  $^{46}\text{Ti}$ . Vgl. ferner (22, 20, 37).

Die praktische Ganzzahligkeit der höheren Atomgewichte bedeutet offenbar, daß die *Bindungsenergie pro Teilchen* in allen Fällen *nahezu denselben Wert* hat: drücken wir diese Bindungsenergie pro Teilchen durch den in Atomgewichten gemessenen *Massendefekt* aus, so bekommen wir einen Durchschnittswert von etwa 0,0092, der also 8,5 MeV entspricht.

Die Tatsache, daß der Massendefekt pro Teilchen *klein gegen 1* ist, bedeutet ferner, daß die Teilchen im Kern sich nur mit mäßigen Geschwindigkeiten bewegen: *relativistische* Effekte können also nur kleine Korrekturen (40) für die Bindungsenergie liefern.

Übrigens steht die Größenordnung der Bindungsenergie in der richtigen, durch die HEISENBERGSche *Ungenauigkeitsregel* geforderten Beziehung zu derjenigen der *Kernradien* (2). Würde man dagegen die viel leichteren Elektronen als Kernbausteine in Betracht ziehen, so würde sich neben anderen Widersprüchen auch eine Verletzung der Ungenauigkeitsregel ergeben.

Angesichts der Proportionalität der *Bindungsenergie* mit  $A$  wird man kaum daran zweifeln, daß die Proportionalität des *Kernvolumens* mit  $A$  so zu deuten ist, daß innerhalb des Kerns eine *gleichmäßige* — und

dann also für verschiedene Kerne übereinstimmende — *räumliche Teilchendichte* besteht. An der *Oberfläche* allerdings wird eine Auflockerung des Kerns zu erwarten sein, welche den stetigen Übergang zu der verschwindenden Teilchendichte außerhalb des Kerns vermittelt; und bei den *leichten* Kernen wird ein großer Teil oder schließlich sogar das *ganze* Kernvolumen in diesem Sinne zur „Oberfläche“ zu rechnen sein. Dagegen können wir die schwereren Kerne geradezu als „*Tröpfchen*“ einer *homogenen Flüssigkeit* bezeichnen.

Aber nicht nur hinsichtlich der räumlichen Teilchendichte und hinsichtlich der Bindungsenergie (oder „Verdampfungswärme“, wie man anschaulich sagen könnte) erweisen sich die Kerne als Tröpfchen einer immer gleichartigen „Kernflüssigkeit“. Sondern auch das *Anteilsverhältnis* von Protonen und Neutronen ist nahezu konstant: die leichteren (stabilen) Kerne haben vorwiegend *gleich viel* oder fast gleich viel Protonen und Neutronen, und bei den schwereren Kernen tritt zwar allmählich ein Übergewicht der Neutronen über die Protonen ein, doch wächst das Anteilsverhältnis nicht höher als bis etwa 1,6. Es liegt aber nahe, dieses Anwachsen als Folge der *COULOMBSchen Abstoßung* der Protonen zu deuten, welche offenbar den Kern *auflockert* und dadurch bei zunehmender Kernladung die Kerne mit etwas größerem Neutronenanteil stabiler werden läßt gegenüber den „idealen“ Kernen mit gleich viel Neutronen und Protonen. Wir werden uns also vorstellen, daß die „eigentlichen“ Kernkräfte, welche den Zusammenhalt des Kerns bedingen, bei Abwesenheit der auflockernden *COULOMB-Kräfte* stets für *gleiche* Anzahl von Protonen und Neutronen die größten Bindungsenergien ergeben würden.

Auf Grund der erörterten Verhältnisse wird man sich ein rohes Bild der physikalischen Verhältnisse in einem schwereren Kern — zunächst unter Absehung von den *COULOMB-Kräften* — in folgender Form machen können. Der Kern ist darzustellen als eine flache „*Potentialschale*“; im Innern dieser Potentialschale — d. h. im Innern des Kernvolumens  $\frac{4\pi}{3}R^3$  — besteht eine konstante potentielle Energie  $-V_0$ , die an der Kernoberfläche steil auf den im Außenraum geltenden Potentialwert Null ansteigt. Diese Potentialschale ist angefüllt mit den Kernbestandteilen. Wenngleich die Potentialschale selber nur bei Vorhandensein dieser Teilchen zustande kommt, ist es berechtigt, bei Kernprozessen, in welchen das Atomgewicht  $A$  (die Anzahl der Kernbausteine) sich gar nicht oder relativ wenig ändert, die Potentialschale als unverändert anzusehen.

**9. Korrespondenzbetrachtungen.** Nach Überlegungen von BOHR (18) begründen die im vorstehenden besprochenen Umstände ein Verhalten der Kerne bei Stoß- und Umwandlungsprozessen, welches völlig verschieden von den Reaktionsgesetzen der Atome und Moleküle bei chemischen Umsetzungen ist. Die charakteristischen Eigentümlichkeiten

der Kernprozesse im Gegensatz zu den Atomprozessen sind nach BOHR an Hand korrespondenzmäßiger Erwägungen zu verstehen.

Bekanntlich ergibt sich — auch ohne Durchführung quantenmechanischer Rechnungen — eine bis in feinste Einzelheiten gehende korrespondenzmäßige Deutung der die Atome und ihre Reaktionen beherrschenden Gesetze aus dem Vergleich mit klassischen Bewegungsformen, die den Elektronenbewegungen im Atom analog sind. Von entscheidender Bedeutung für die Gesetzmäßigkeiten der Atom- und Molekülspektren ist dabei, daß die in Frage kommenden klassischen Vergleichsmodelle durchweg zum Typus der *mehrfach periodischen* Systeme gehören, deren Bewegungen Überlagerungen mehrerer rein periodischer Bewegungen sind. Die klassische Mechanik zeigt aber, daß derartige mehrfach periodische Bewegungen nur unter recht speziellen Bedingungen — bei besonders einfachen Systemen — zustande kommen; Systeme mit einer größeren Zahl von Bestandteilen (z. B. ein aus vielen Atomen bestehendes Gas) zeigen dagegen gewöhnlich einen ganz anderen Bewegungstypus, den man den „ergodischen“ nennt.

Daß die inneratomare Elektronenbewegung auch bei den höheren Atomen gleichwohl immer noch zu mehrfach periodischen Bewegungen in korrespondenzmäßiger Analogie steht, ist der *Unterteilung* der Elektronenhülle in eine Anzahl energetisch stark verschiedener „Elektronenschalen“ zu verdanken, die durch das starke Kernfeld in Verbindung mit dem PAULI-Verbot verwirkt wird. Da nun aber bei den schwereren Kernen eine solche Unterteilung hinsichtlich der Bindungsenergien — wie die in dem Begriff der „Kernflüssigkeit“ zusammenfassend ausgedrückten Tatsachen zeigen — offenbar *nicht* — oder nur andeutungsweise, vor allem bei leichteren Kernen (§§ 18—19) — besteht, so wird die Bewegung der Teilchen im Kerninnern nicht mehr dem bedingt periodischen Typus entsprechen. Solange der Energieinhalt des Kerns zu gering ist, um eine *Zerlegung* des Kerns unter Emission eines oder mehrerer seiner Bestandteile zu ermöglichen, wird trotz dieses nicht-mehrfach-periodischen Bewegungstyps eine *diskrete Quantelung* der Kernzustände zustande kommen [vgl. dazu (8)]. Wesentlich ist jedoch der gegenüber der Elektronenhülle andersartige Bewegungscharakter für die höher angeregten Kernzustände.

Eine Fülle experimenteller Erfahrungen zeigt, daß bei der Beschießung schwererer Kerne mit *schnellen Neutronen* der Wirkungsquerschnitt für eine *Kernumwandlung* keineswegs geringer ist, als der Streuquerschnitt; beide haben die Größenordnung eines Kernquerschnittes. Dabei hat sich weiterhin gezeigt, daß auch die bloße Streuung der Neutronen im allgemeinen mit kleinen *Energieabgaben* des Neutrons an den Kern verbunden ist. Das bedeutet nach BOHR, daß wir berechtigt sind, zu sagen: In praktisch allen Fällen wird das (schnelle) Neutron, welches einen schweren Kern trifft, zunächst einmal *eingefangen*. Es *bleibt im Kern stecken*; und es ist dann als ein zweiter, von dieser Einfangung *getrennter* Prozeß zu betrachten, daß der durch die Einfangung gebildete *angeregte Kern* nach kurzer Verweilzeit spontan irgendeine Energieabgabe ausführt. Für diesen spontanen Prozeß gibt es gewöhnlich verschiedene Möglichkeiten: eine bloße  $\gamma$ -Emission kann die geschehene Einfangung zu einer endgültigen machen; eine spontane Emission eines Neutrons kann den Gesamtvorgang scheinbar zu einer bloßen Streuung machen, jedoch kann ein Rest der Primärenergie des Neutrons im Kern zurückbleiben, indem dieser nicht sogleich in den Grundzustand, sondern in einen tieferen Anregungszustand springt. Aber auch ein  $\alpha$ -Teilchen kann emittiert werden, oder (in selteneren Fällen) ein Proton, oder *zwei* Neutronen (31).



Dieses nach BOHR im ersten Teil des Prozesses anzunehmende Steckenbleiben eines schnellen Neutrons in einem Kern ist völlig verschieden von den Verhältnissen beim Stoß zweier Atome oder beim Stoß eines Elektrons gegen ein Ion. Hierbei kommt es nämlich *nicht* vor, daß die zusammenstoßenden Atome  $A$  und  $B$  als ein Molekül  $AB$  aneinander haftenbleiben, oder daß das Elektron unter strahlungsloser Anlagerung an das Ion ein (hochangeregtes) Atom bildet. Vielmehr ist zur Molekülbildung etwa ein *Dreierstoß* und zur Rekombination des Atoms eine *Lichtemission* nötig. Man kann diese Notwendigkeit begründen unter Berufung auf die *diskrete Quantelung* des Moleküls  $AB$  und des rekombinierten Atoms: es ist unendlich unwahrscheinlich, daß die kinetische Relativenergie der Stoßpartner (d. h. die kinetische Energie im Schwerpunktskoordinatensystem) genau der Lage eines dieser diskreten Anregungsniveaus entspricht. Diese diskrete Quantelung ist aber selbst nur korrespondenzmäßiges Analogon klassischer Gesetzmäßigkeiten, und die Unentbehrlichkeit der Dreierstöße bzw. der Ausstrahlung, sowie andererseits die Möglichkeit eines strahlungslosen Steckenbleibens des schnellen Neutrons sind am besten an Hand einer rein klassischen Analogie zu verstehen.

Der größeren Anschaulichkeit halber denken wir uns statt der dreidimensionalen Potentialschale eine zweidimensionale, d. h. also eine flache Vertiefung in einem ebenen Tisch, auf welchem wir Billardkugeln rollen lassen. Ist die Schale zunächst *leer*, so wird (ideale Abwesenheit von Reibung usw. vorausgesetzt) eine in die Vertiefung hineinrollende Kugel aus dieser wieder herauskommen und in veränderter Richtung, aber mit unverminderter Energie weiterrollen. Dies bedeutet einen *reinen Streuworgang*. Ist aber die Schale durch mehrere andere (etwa zunächst ruhende) Kugeln zum Teil gefüllt, so wird die hineinrollende Kugel, mit diesen zusammenstoßend, eine sehr verwickelte Bewegung veranlassen: in zahlreichen Zusammenstößen findet eine fortgesetzte Energieübertragung zwischen den Kugeln statt, so daß bald eine im Mittel gleichmäßige Verteilung der Energie über sämtliche Kugeln eintritt; die hinzugekommene Kugel wird dann *außerstande* sein, die Schale wieder zu *verlassen*. In einem groben mechanischen Versuchsmodell wird dann die Bewegung der Kugeln gewöhnlich nach und nach zur Ruhe kommen; bei idealen Verhältnissen (Reibungsfreiheit usw.) ist das jedoch nicht möglich, sondern die Kugeln bleiben fortdauernd in Bewegung, und irgendwann wird einmal der Fall eintreten, daß die zwischen ihnen verteilte kinetische Energie sich gerade wieder größtenteils auf eine einzige Kugel sammelt, die dann befähigt ist, aus der Schale *hinauszurollen*.

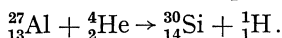
Die Gewißheit, daß dieser Fall einer sehr *unwahrscheinlichen* Verteilung der kinetischen Energie im Laufe der Zeit doch einmal eintreten muß, entnehmen wir aus dem „ergodischen“ Charakter der Bewegungen in der Potentialschale. Dagegen würden wir, wenn diese Bewegung mehrfach periodisch wäre, eine Unmöglichkeit einer solchen Teilchenemission erschließen müssen, da eine mehrfach periodische Bewegung *für alle Zeiten* eine solche *bleibt* und somit nicht ihre Fortsetzung in dem aperiodischen Hinausrollen einer Kugel finden kann. Umgekehrt könnte aber eine mehrfach periodische Bewegung auch niemals als zeitliche Fortsetzung des aperiodischen Hereinrollens der Kugel in die Schale *entstehen*.

Quantentheoretisch sind diese Erwägungen so zu verwerten, daß dem betrachteten Anregungszustand in Rücksicht auf die Herabsetzung seiner Lebensdauer  $\tau$  durch die Möglichkeit einer spontanen Teilchenemission eine entsprechend vergrößerte *Niveaubreite*  $1/\tau$  zuzuschreiben ist. Durch diese Niveaubreite wird der obige, auf die Energie-Impuls-

bilanz gestützte Einwand gegen die Möglichkeit einer strahlungslosen Einfangung offenbar hinfällig gemacht und eine der Niveaubreite proportionale Wahrscheinlichkeit für die „Absorption“ eines Neutrons geschaffen. Ist die Niveaubreite so groß, daß sie mit dem Abstand benachbarter Anregungsstufen vergleichbar wird, so werden wir für schnelle Neutronen tatsächlich einen Absorptionsquerschnitt von der Größenordnung des Kernquerschnittes erhalten.

Was hier für die Beschießung höherer Kerne mit Neutronen ausgeführt wurde, ist naturgemäß auch auf die Beschießung mit Protonen oder  $\alpha$ -Teilchen anzuwenden. Diese Teilchen müssen zwar erst den COULOMBSchen Potentialwall überschreiten oder teilweise durchdringen, um in den Kern zu gelangen; findet dies jedoch statt, so ist wie bei der Beschießung mit schnellen Neutronen zunächst ein Aufbau eines hochangeregten Kerns zu erwarten, der erst hernach eine weitere Umwandlung spontan vollführt.

Eine schöne Bestätigung dieser Vorstellung ergibt sich nach POLLARD (15) bei einigen Reaktionen, in welchen eine Beschießung mit  $\alpha$ -Teilchen zu Protonenemission führt; beispielsweise



In diesem und einigen weiteren Fällen treten nämlich Protonen auf, deren Energie — analog wie beim spontanen  $\alpha$ -Zerfall — *kleiner* ist als der Maximalwert der COULOMB-Energie im Felde des Restkerns (im obigen Beispiel: des  ${}_{14}^{30}\text{Si}$ ). Ein solches Proton muß also die COULOMBSche Potentialschwelle *durchdrungen* haben; und daraus folgt, daß der im obigen Reaktionsschema einzufügende intermediäre Kern  ${}_{15}^{31}\text{P}$  eine gewisse *Lebensdauer* besitzen muß, da sonst der Schwellendurchgang des Protons nicht geschehen könnte.

Nur bei der Beschießung höherer Kerne mit *Deuteronen* ist bei resultierender *Protonenemission nicht* eine Einfangung des Deuterons in den Kern als Primärvorgang anzunehmen. Die Auslösung von Kernumwandlungen durch Deuteronen geschieht nämlich in manchen Fällen schon bei so geringer Deuteronenenergie, daß ein Eindringen des Deuterons in den Kern kaum anzunehmen ist. Man muß hier schließen [OPPENHEIMER und PHILLIPS; vgl. (1, 6)], daß das sehr locker gebundene Deuteron eine starke Deformation im Kernfeld erfährt und schließlich geradezu zerrissen wird derart, daß nur das Neutron und nicht das Proton in den Kern gelangt. Quantitatives hierzu bei BETHE (189). Bei *leichten* Kernen aber gibt es mindestens einen Fall, der *nicht* in dieser Weise verläuft, nämlich die Reaktion  ${}_{3}^7\text{Li} + {}_1^2\text{H} \rightarrow {}_{3}^8\text{Li} + {}_1^1\text{H}$ , bei der ein intermediärer Kern  ${}_{4}^9\text{Be}$  gebildet wird (37); vgl. auch (177).

Es kommt aber bei der Beschießung von Kernen mit *geladenen* Teilchen auch die Möglichkeit einer bloßen *Kernanregung* durch Energieübertragung *ohne* Kernumwandlung in Betracht. Beispielsweise kommen bei Beschießung von  ${}_{3}^7\text{Li}$  mit  $\alpha$ -Teilchen derartige bloße Anregungen

des  ${}^7_3\text{Li}$  vor; der angeregte Kern verausgibt hernach die zugeführte Energie durch  $\gamma$ -Strahlung (96, 52).

In historischer Beziehung ist zu erwähnen, daß HARKINS (16) seit 1928 die These vertreten hat, daß als Primärvorgang der erzwungenen Kernumwandlungen ein Zusammenschluß der beiden Stoßpartner zu einem energiereichen intermediären Kern anzunehmen sei. Jedoch ist diese Vorstellung allgemeiner Ablehnung begegnet, da man glaubte, die in der Atomchemie bestehende Unmöglichkeit von Prozessen  $A + B \rightarrow AB$  auf die Kernchemie übertragen zu müssen. Erst BOHRs Beweisführung hat diesen Irrtum zu zerstören vermocht.

**10. Teilchenabsorption.** Naturgemäß wird die Form der „Absorptionslinien“ für Neutronen experimentell am besten zu studieren sein bei *weit getrennten* Absorptionsniveaus. Dieser Fall liegt vor bei Anwendung *langsamer* Neutronen, bei denen dann außerdem die DE BROGLIESche Wellenlänge  $\lambda$  wesentlich größer als ein Kerndurchmesser wird, wodurch der Wirkungsquerschnitt gemäß §§ 4, 5 erheblich größer als der Kernquerschnitt (bis  $\approx \lambda^2$ ) werden kann.

Analog den Lichtreaktionen der Atome, die einen engen Zusammenhang zwischen *Absorption* und *Dispersion* zeigen, besteht auch zwischen Absorption und Streuung von Neutronen ein Zusammenhang, den wir jetzt näher betrachten wollen (17).

Ein quantenmechanisches Gebilde (Molekül oder Atom oder Kern) habe einen Anregungszustand, von dem aus unter *spontaner Emission* eines Elementarteilchens — es kann sich z. B. um ein Lichtquant, aber ebensogut um ein Neutron handeln — ein Übergang in einen energieärmeren Zustand möglich ist. Die mittlere Lebensdauer dieses Zustandes sei  $\tau$ ; es findet also, wenn eine große Anzahl  $N$  von derartigen Gebilden in diesem Zustand vorgegeben ist, ein exponentielles Abklingen

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (1)$$

statt. Dann ist die Energie des betreffenden Zustandes *unscharf*; wird eine Energiemessung vorgenommen, so finden wir mit der Wahrscheinlichkeit

$$w(W) \cdot \Delta W = \frac{1}{\tau h} \cdot \frac{\Delta W}{\frac{1}{4\tau^2} + \frac{4\pi^2}{h^2} (W - W_0)^2} \quad (2)$$

einen in das Intervall  $W, W + \Delta W$  fallenden Energiewert;  $W_0$  ist die am häufigsten vorkommende Energie.

Es sei von dem fraglichen Zustand aus insbesondere ein Übergang in den — unendlich scharf gequantelten — *Grundzustand* möglich. Ein solcher Übergang bedeutet, daß eine exakte Festlegung der Energie stattfindet; die betreffende *Emissionslinie* (einerlei, ob es sich um eine optische Spektrallinie oder eine Linie im Spektrum der Neutronemission handelt) zeigt also in ihrer Intensitätsverteilung unmittelbar die Verteilung (2).

Aus thermodynamisch-statistischen Gründen muß bekanntermaßen dieser Emissionslinie eine *Absorptionslinie* von derselben Intensitätsverteilung entsprechen, deren Gesamtintensität folgendermaßen zu bestimmen ist.

Für das ausgestrahlte Elementarteilchen (Lichtquant; Neutron) möge es, wenn es sich in einem Kasten vom Volum  $V$  kräftefrei bewegt,

$$Z(W) \cdot V \cdot \Delta W \quad (3)$$

(einfache) stationäre Zustände im Energieintervall  $W, W + \Delta W$  geben. Beim *Lichtquant* ist

$$Z(W) \cdot \Delta W = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \Delta\nu; \quad \nu = \frac{W}{h}, \quad (4)$$

beim *Neutron* dagegen

$$\left. \begin{aligned} Z(W) \Delta W &= \frac{8\pi}{h^3} \mu^2 v \cdot \Delta W = \frac{8\pi\mu}{h^2} \lambda \cdot \Delta W, \\ W &= \frac{\mu v^2}{2}; \lambda = \frac{\mu v}{h} = \text{DE BROGLIESCHE Wellenlänge.} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Für ein aus den fraglichen Teilchen gebildetes *Strahlungsfeld* definieren wir eine *Strahlungsdichte*  $\varrho_\nu$  analog, wie im speziellen Falle des Lichtes: pro Volumeinheit gebe es  $\frac{\varrho_\nu \Delta\nu}{W} = \frac{\varrho_\nu \Delta\nu}{h\nu}$  Teilchen mit einer Energie im Intervall  $W, W + \Delta W$ . Das angeregte Gebilde habe nun für die betrachtete Emissionslinie eine *spontane Übergangswahrscheinlichkeit*  $A$ ; dann besteht für das unangeregte Gebilde aus thermodynamisch-statistischen Gründen bei Vorhandensein einer Strahlungsdichte  $\varrho_\nu$  eine *Absorptionswahrscheinlichkeit*  $B\varrho_\nu$  (mit  $h\nu = W_0$ ) derart, daß

$$\frac{A}{B} = W_0 Z(W_0); \quad (6)$$

im Falle des Lichtes ist das die bekannte EINSTEINSche Beziehung  $A/B = 8\pi h\nu^3/c^3$ .

Diese Feststellung, bei deren Formulierung wir soeben die Breite der fraglichen Linie als vernachlässigbar angesehen haben, ist unter Berücksichtigung der endlichen Linienbreite nach (2) folgendermaßen zu präzisieren: Befinden sich am Orte des Absorbers absorbierbare Teilchen mit einer (exakt definierten) Energie  $W$  in einer räumlichen Teilchendichte  $\varrho$ , so ist die Absorptionswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit gleich

$$B W_0 \cdot \frac{\varrho}{\tau h} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4\tau^2} + \frac{4\pi^2}{h^2} (W - W_0)^2}. \quad (7)$$

In einem ebenen Teilchenstrom  $I_0$  von Teilchen mit der Geschwindigkeit  $v$  ist offenbar  $\varrho = I_0/v$ ; so daß wir aus (7) mit (6) einen *Absorptionsquerschnitt*

$$\sigma = \frac{A}{vZ(W_0)} \cdot \frac{1}{\tau h} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4\tau^2} + \frac{4\pi^2}{h^2} (W - W_0)^2} \quad (8)$$

bekommen.

Es soll uns jetzt der Fall beschäftigen, daß der Übergang aus dem angeregten in den Grundzustand unter Emission eines *Neutrons* geschieht, mit einer Übergangswahrscheinlichkeit  $A = 4\pi\Gamma_n$ . Jedoch sollen außerdem andere spontane Übergänge unter *Licht*-Emission möglich sein, mit einer Gesamtübergangswahrscheinlichkeit  $4\pi\Gamma_r$ ; mit  $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_r$  wird also

$$\tau = \frac{1}{4\pi\Gamma}. \quad (9)$$

Ein zunächst absorbiertes Neutron wird also mit der Wahrscheinlichkeit  $\Gamma_n/\Gamma$  *reemittiert*, also insgesamt nur *gestreut*, aber mit der Wahrscheinlichkeit  $\Gamma_r/\Gamma$  *endgültig* im Kern *festgehalten* werden: dementsprechend zerlegt sich  $\sigma$  in zwei Addenden, den *Streuquerschnitt*  $\sigma_n$  und den *eigentlichen Absorptionsquerschnitt*  $\sigma_a$ :

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_n + \sigma_a = \frac{\lambda^2}{2\pi} \cdot \frac{\Gamma_n \Gamma}{\Gamma^2 + (\nu - \nu_0)^2}; \\ \sigma_n &= \frac{\lambda^2}{2\pi} \cdot \frac{\Gamma_n^2}{\Gamma^2 + (\nu - \nu_0)^2}; \quad \sigma_a = \frac{\lambda^2}{2\pi} \cdot \frac{\Gamma_n \Gamma_r}{\Gamma^2 + (\nu - \nu_0)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Wir haben aber hierbei noch nicht berücksichtigt, daß der durch Anlagerung des Neutrons entstehende angeregte Kern einen *Drehimpuls*  $I$  haben wird, der nicht derselbe ist, wie der Drehimpuls  $i$  des ursprünglichen Kerns: man sieht leicht, daß dieser Umstand dazu nötigt, die in (10) angegebenen Querschnitte noch mit dem Verhältnis  $(2I + 1)/(2i + 1)$  der entsprechenden *statistischen Gewichte* zu multiplizieren.

Übrigens ist beim Einfang langsamer Neutronen stets  $I = i \pm 1/2$ ; denn der Bahndrehimpuls  $l$  des Neutrons relativ zum Kern muß Null sein.

Bevor wir aber diesen Gewichtsfaktor anbringen, wollen wir noch hervorheben, daß nach wellenmechanischer Rechnung  $\Gamma_n$  *proportional der Geschwindigkeit*  $v$  ist:

$$\Gamma_n = \Gamma_n^0 \cdot \frac{v}{v_0}; \quad (11)$$

hier sind  $\Gamma_n^0$ ,  $v_0$  die zur Energie  $W_0 = h\nu_0$  gehörenden Werte<sup>1</sup> von  $\Gamma_n$  und  $v$ .

Danach wird aus (10) endgültig:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_a &= \frac{h^2}{2\pi M^2 v_0 v} \left( 1 \pm \frac{1}{2i + 1} \right) \cdot \frac{\Gamma_n^0 \Gamma_r}{\Gamma^2 + (\nu - \nu_0)^2}; \\ \sigma_n &= \frac{\Gamma_n}{\Gamma_r} \cdot \sigma_a = \frac{v}{v_0} \cdot \frac{\Gamma_n^0}{\Gamma_r} \cdot \sigma_a. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Unsere Definition der Größen  $\Gamma$  usw. gemäß (9) ist im Einklang mit (17) und (1); dagegen schreibt BETHE [z. B. (114, 34)]  $\Gamma/2h$  statt des hier gebrauchten  $\Gamma$ . Wir heben dies hervor, um Verwechslungen vorzubeugen.

Im Gegensatz zu  $\Gamma_n$  ist  $\Gamma_r$  merklich konstant (unabhängig von  $v$ ); und ferner ist in allen experimentell bekannten Fällen  $\Gamma_r \gg \Gamma_n^0$ , so daß wir  $\Gamma$  in (12) durch  $\Gamma_r$  ersetzen dürfen<sup>2</sup>. Bei Energiewerten  $h\nu$ , die  $\ll h\nu_0$  sind, bekommen wir dann ein  $\sigma_a$ , das *umgekehrt proportional mit der Geschwindigkeit*  $v$  ist. Das ist verständlich angesichts der in § 5 gemachten Feststellung, daß für langsame Neutronen die Wahrscheinlichkeit des Eindringens in einen Potentialtopf  $\approx 1/v$  ist.

<sup>1</sup> Genauer:  $v_0$  gehört zu  $|W_0| = \frac{1}{2} M v_0^2$ ; es könnte nämlich  $W_0$  auch negativ sein, wengleich man einen solchen Fall empirisch noch nicht kennt.

<sup>2</sup> Aus  $\Gamma_r \gg \Gamma_n^0$  folgt auch  $\sigma_a \gg \sigma_n$ , und das ist ein Ergebnis, welches *nur* auf Grund der *Mehrkörpertheorie* des Kerns im BOHRschen Sinne möglich ist.

Natürlich sind die obigen Formeln auch dann noch anzuwenden, wenn die Breite  $I'$  des Anregungsniveaus *nicht* in erster Linie durch  $\gamma$ -Emission, sondern durch einen anderen Prozeß bedingt ist. Ein Beispiel dafür ist die Reaktion  ${}^1_5\text{B} + {}^1_0\text{Nn} \rightarrow {}^{11}_5\text{B} \rightarrow {}^7_3\text{Li} + {}^4_2\text{He}$ .

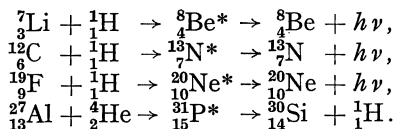
Für Cd liegt eine Neutron-Absorptionslinie bei ungefähr 0,1 Volt [vgl. dazu (23)] oder noch etwas niedriger; vielleicht haben Gd und Sm eine Absorption von gleicher Größenordnung der Energie. Für Ag, Ir und Au sind je eine, für Rh und In je zwei Absorptionslinien zwischen 1 und 5 Volt bekannt. W hat eine Linie bei etwa 9 Volt (117). Bei Mn, Cu, As, Br, Ag, I, Re ist je eine Absorptionslinie zwischen ungefähr 30 und 85 Volt gefunden (21, 24).

Betreffs der Breiten einiger dieser Absorptionslinien vgl. die Berechnungen (114). Ältere Versuche zur Berechnung dieser Breiten aus empirischen Daten ergaben zum Teil erheblich abweichende Werte. Vgl. auch (139, 148, 167, 186).

Ausführlicheres über die *Wirkungsquerschnitte* für langsame Neutronen siehe in der wichtigen Arbeit von FLEISCHMANN (161).

Ganz wie bei den optischen Spektrallinien kann neben der „natürlichen“ Linienbreite auch noch die DOPPLER-Breite eine Rolle spielen (114, 117).

Was hier für die „Absorption“ von Neutronen durch Kerne ausgeführt wurde, ist aber sinngemäß auch auf die Absorption *geladener* Teilchen durch Kerne (vor allem durch die schwereren Kerne) zu übertragen. Auch hierbei sind *Resonanzen* zu finden; beispielsweise in den Reaktionen



Ein geladenes Teilchen muß zwar im Gegensatz zu dem Neutron zunächst die COULOMBSche Potentialschwelle überwinden bzw. durchdringen; vgl. dazu § 6. Findet aber einmal ein Eindringen des Teilchens in den Kern statt, so sind ebenso wie bei den Neutronen die BOHRschen Überlegungen anzuwenden; und wiederum können wir den Einfangprozeß als eine *Absorption* auffassen, auf welche analog wie oben die auch für die Absorption von Lichtquanten oder von Neutronen geltenden Formeln zu übertragen sind. Diese Fragen sind von BETHE und PLACZEK (114) in umfassender Weise erörtert<sup>1</sup>. Man kann die Prozeßwahrscheinlichkeiten ganz allgemein durch zwei Faktoren darstellen: der eine dieser Faktoren ist mit der Geschwindigkeit der einfallenden Teilchen *langsam* veränderlich (merklich konstant etwa über Intervalle von 1 MeV). Er stellt im wesentlichen die *Eindringwahrscheinlichkeit* dar;

<sup>1</sup> Eine in Aussicht stehende Arbeit von BOHR und KALCKAR liegt noch nicht vor.

zu seiner Berechnung ist die Kenntnis der Potentialschwelle erforderlich. Wir erwähnen hierzu die ausführlichen Berechnungen von OSTROFSKY, BREIT und JOHNSON (71) betreffs der Reaktion  $\text{Li} + \text{H}$ . Der zweite Faktor dagegen gibt die Variation der Umwandlungswahrscheinlichkeit innerhalb *kleiner* Energieintervalle; und dieser Faktor ist im wesentlichen *immer* die universelle Formel (2) der Intensitätsverteilung in einer Resonanzlinie.

*Merkbar* sind die Resonanzlinien als solche natürlich nur dann, wenn ihre *Breiten klein* sind im Vergleich zu ihren *Abständen*. Da bei höheren Anregungsenergien, insbesondere bei den schwereren Kernen, die Niveaudichte stark anwächst, so findet man z. B. *keine* trennbaren Resonanzen bei der Beschießung schwerer Kerne mit positiven Teilchen. Für die Absorption *schneller Neutronen* bekommt man die einfache Formel (114)

$$\sigma = \frac{2\pi^2 R^2}{2i+1} \cdot \frac{h \bar{\Gamma}_n}{D}, \quad (113)$$

wobei  $\bar{\Gamma}_n$  der Mittelwert von  $\Gamma_n$  für die in Betracht kommenden Absorptionslinien,  $D$  ihr mittlerer Abstand, und  $R$  der Kernradius ist.

Betreffs spezieller Anwendungen und Beispiele zu allem hier Besprochenen sei auf (114) verwiesen. Vgl. auch (72, 73, 81, 157, 50, 187, 165, 166), sowie (5, 3) und insbesondere (168).

**11. Revidierte Kernradien.** Eine genaue Bestimmung der *Kernradien* ist von wesentlicher Bedeutung für viele Fragen der Kerntheorie. So hängt unsere Kenntnis der Dichte der Kernflüssigkeit, die Berechnung der Bindungsenergien (Massendefekte) aus vorgegebenen Ansätzen für die Kernkräfte, ferner die Oberflächengröße und die Oberflächenspannung, endlich auch der COULOMBSche Anteil der Kernenergie von den Kernradien ab.

Gegen die nach der GAMOWschen Theorie berechneten Radien (§ 6) ist einzuwenden, daß die zugrunde gelegte Vorstellung einer dauernden Existenz des  $\alpha$ -Teilchens im Kerninnern der in § 9 erläuterten BOHRschen Kerntheorie widerspricht. Statt dessen wird man nunmehr die Zerfallskonstante  $\lambda$  als ein Produkt

$$\lambda = 4\pi \Gamma_\alpha \cdot \lambda_0 \quad (1)$$

anzusetzen haben, wobei der Faktor  $\lambda_0$  nach der bisherigen Formel (GAMOW) zu berechnen ist, während  $4\pi \Gamma_\alpha$  die *Wahrscheinlichkeit für die Bildung eines  $\alpha$ -Teilchens im Kerninnern* ist: die  $\alpha$ -Emission geschieht jetzt in zwei Schritten, erst Bildung eines  $\alpha$ -Teilchens, und sodann Schwellendurchgang dieses  $\alpha$ -Teilchens. Wir können auch sagen:  $4\pi \Gamma_\alpha$  würde der Wert der Zerfallskonstanten sein, wenn die COULOMBSche Potentialschwelle *nicht vorhanden wäre*.

Für eine theoretisch begründete Schätzung von  $\Gamma_\alpha$  fehlen die Grundlagen; unsere Kenntnis der inneren Dynamik der Kerne ist dafür zu gering [vgl. aber in diesem Zusammenhange (185)]. Jedoch hat

BETHE (34) eine hypothetische Schätzung von  $\Gamma_\alpha$  auf die empirisch bekannte Neutronbreite  $\Gamma_n$  bei der Ag-Neutronenabsorption gegründet, bei welcher nämlich  $2h\Gamma_n = 0,0007$  Volt ist. Durch Multiplikation mit einem entsprechenden Geschwindigkeitsverhältnis ist daraus die analoge Breite für *schnelle* Neutronen zu berechnen; und BETHE nimmt dann an, daß diese für schnelle Neutronen geltende Breite auch für die  $\alpha$ -Teilchen anzuwenden sei. Das ergibt

$$h\Gamma_\alpha \approx 0,5 \text{ Volt}; \quad (2)$$

ein Faktor zwischen 1/100 und 100 mag dabei zu ergänzen sein, würde aber das Resultat betreffs der Kernradien nicht merklich ändern (nur um etwa 10%).

Die früheren Berechnungen nach § 6 ergaben für die  $\alpha$ -Strahler einen Durchschnittsradius von  $9 \cdot 10^{-13}$  cm; nach BETHEs Schätzung (1) erhöht sich dieser Wert auf  $13 \cdot 10^{-13}$  cm: diese Vergrößerung bedeutet eine Herabdrückung der *Potentialschwellen*, wodurch die durch den Faktor  $2\pi\Gamma_\alpha/h$  eingeführte Verringerung der Emissionswahrscheinlichkeiten wieder ausgeglichen wird.

Wie BETHE (34) gezeigt hat, wird die Zerlegung schwerer Kerne, wie Pt und Bi, durch Deuteronen von nur 4 bis 5 MeV Energie — mit einem Wirkungsquerschnitt  $Q \approx 10^{-28}$  cm<sup>2</sup> — mit diesen vergrößerten Radien und herabgesetzten Schwellen ohne weiteres verständlich.

Eine quantitative Bestätigung der BETHESchen Radienbestimmung ergibt sich nach POLLARD (15) aus der empirischen Wahrscheinlichkeit des Eindringens von  $\alpha$ -Teilchen in Argonkerne, welches zu Neutronenemission führt.

**12. FERMI-Statistik.** Zur näheren Orientierung über die Energieverhältnisse in den schweren, teilchenreichen Kernen wird man die Formeln der FERMI-Statistik anzuwenden suchen. Die oben an den Begriff der Kernflüssigkeit angeknüpften Betrachtungen erlauben folgende Präzisierung. Der Kern ist eine Kugel vom Radius  $R$  und Volum

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3. \quad (1)$$

Wir wollen zunächst den „idealen“ Fall betrachten, wie er sich bei Außerachtlassung der COULOMB-Kraft ergibt; gemäß den Erwägungen von § 8 nehmen wir dann  $Z = N = A/2$  an: wir hatten uns ja die Vorstellung gemacht, daß der bei schweren Kernen eintretende Neutronenüberschuß durch die COULOMB-Energie verursacht sei.

In erster Annäherung ersetzen wir die Wechselwirkung der Kernbestandteile durch eine *konstante Bindungsenergie pro Teilchen*; d. h. also wir nehmen innerhalb des Kernvolums (1) ein konstantes Potential  $-V_0$  an, und denken uns im Innern dieses Potentialtopfes die Teilchen *kräftefrei* bewegt. Indem wir für Neutronen und Protonen dieselbe Tiefe  $V_0$  des Potentialtopfes annehmen, bekommen wir, wie gewünscht, auf Grund des PAULI-Verbotes offenbar *gleiche* Anzahlen  $N$  und  $Z$  in



demjenigen Kern vorgegebenen Atomgewichtes  $A$ , welcher den geringsten Energieinhalt hat.

Nach (5), § 10 gibt es für ein einzelnes Teilchen der Masse  $M$  im Volum (1)

$$\frac{3}{2} C \sqrt{W} \Delta W = \frac{2^{11/2} \pi^2 M^{3/2}}{3 h^3} R^3 \sqrt{W} \Delta W \quad (2)$$

stationäre Zustände mit einer in  $W, W + \Delta W$  liegenden kinetischen Energie. Beim *Grundzustand* sind Protonen- und Neutronenniveaus unterhalb eines Energiewertes  $\epsilon_0$  völlig besetzt, und oberhalb von  $\epsilon_0$  völlig unbesetzt. Dies  $\epsilon_0$  ist bestimmt durch die Anzahl  $N = Z = A/2$  vorhandener Teilchen jeder Art:

$$\frac{A}{2} = C \epsilon_0^{3/2}; \quad (3)$$

und die *mittlere kinetische Energie*  $\bar{\epsilon}$  *pro Teilchen* ist mit  $\epsilon_0$  proportional:

$$\bar{\epsilon} = \frac{3}{5} \epsilon_0 \quad (4)$$

Zur Herleitung dieser Formeln vgl. etwa (8). In der linken Hälfte der Abb. 1 sind diese Verhältnisse veranschaulicht.

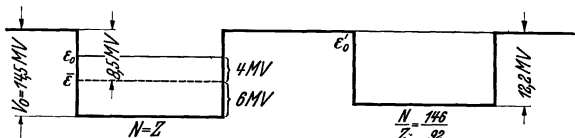


Abb. 1. Zum FERMI-Modell der Kerne.

Nun ist der Radius  $R$  proportional mit  $\sqrt[3]{A}$ , und folglich  $C$  nach (2) proportional mit  $A$ , so daß  $\epsilon_0$  *unabhängig von*  $A$  wird: mit

$$R = r_0 \sqrt[3]{A} \quad (5)$$

haben wir

$$\epsilon_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi} \cdot \frac{3 h^2}{2^5 \pi M r_0^2}}. \quad (6)$$

Der Wert  $r_0$  ist, wie wir wissen, empirisch bekannt:

$$r_0 = \begin{cases} 1,48 \cdot 10^{-13} \text{ cm nach GAMOW-Theorie,} \\ 2,14 \cdot 10^{-13} \text{ cm korrigiert nach BETHE;} \end{cases} \quad (7)$$

und so ergibt sich:

$$\epsilon_0 = \begin{cases} 21,5 \text{ MeV unkorrigiert,} \\ 10 \text{ MeV korrigiert.} \end{cases} \quad (8)$$

Wir wollen zunächst  $r_0 = \xi R_0$  setzen, und unter  $R_0$  den BETHESchen Radius  $2,14 \cdot 10^{-13}$  cm verstehen; dann ist also

$$\epsilon_0 = \frac{10}{\xi^2} \text{ MeV.} \quad (9)$$

Die *Bindungsenergie pro Teilchen*, die empirisch gleich etwa 8,5 MeV ist, wird in unserem Modell offenbar gleich  $V_0 - \bar{\varepsilon} = V_0 - \frac{3}{5} \varepsilon_0$ ; das ergibt in MeV:

$$V_0 = 8,5 + \frac{6}{\xi^2} = \begin{cases} 21,4 \text{ MeV unkorrigiert,} \\ 14,5 \text{ MeV korrigiert.} \end{cases} \quad (10)$$

Damit aber unser Modell widerspruchsfrei ist, muß natürlich  $V_0 > \varepsilon_0$  sein, oder anders ausgedrückt (vgl. Abb. 1):

$$\frac{2}{5} \varepsilon_0 = \frac{4}{\xi^2} < 8,5 \text{ MeV.} \quad (11)$$

Für den älteren Wert  $r_0$  (unkorrigiert) ist diese Bedingung  $V > \varepsilon_0$  gerade nicht mehr erfüllt; wohl aber für den BETHESchen, also den Fall  $\xi = 1$ .

Nunmehr wollen wir die COULOMBSche Wechselwirkung der Protonen berücksichtigen, und die Vermutung prüfen, daß diese für die Abnahme von  $Z/A$  mit wachsendem  $A$  verantwortlich sei.

Nach (3) entsprechen den nunmehr verschiedenen Werten  $N$  und  $Z$  auch verschiedene Werte  $\varepsilon'_0$ ,  $\varepsilon''_0$  der maximalen kinetischen Energie:

$$N = C \varepsilon'_0{}^{3/2}, \quad Z = C \varepsilon''_0{}^{3/2}, \quad (12)$$

oder

$$\varepsilon'_0 = \left( \frac{2N}{A} \right)^{2/3} \varepsilon_0, \quad \varepsilon''_0 = \left( \frac{2Z}{A} \right)^{2/3} \varepsilon_0. \quad (13)$$

Die *gesamte kinetische Energie* wird dann

$$E_{\text{kin}} = \frac{3}{5} (N \varepsilon'_0 + Z \varepsilon''_0) = \frac{3}{5} \left( \frac{2}{A} \right)^{2/3} (N^{5/3} + Z^{5/3}) \varepsilon_0. \quad (14)$$

Die *Tiefe* der Potentialschale wird jetzt vom Mischungsverhältnis  $Z/N$  der Kernflüssigkeit abhängig werden, und zwar *linear*. D. h. wir haben eine Topftiefe, die

$$\left. \begin{array}{l} \text{für Neutronen gleich } V_1 + 2 V_2 \frac{Z}{A}, \\ \text{für Protonen gleich } V_1 + 2 V_2 \frac{N}{A} \end{array} \right\} \quad (15)$$

ist. Für den „idealen“ Fall  $Z = N$  bekommen wir dann wieder für beide Teilchen *dieselbe* Topftiefe  $V_0 = V_1 + V_2$ ;

dagegen wäre  $V_1$  die Topftiefe für jedes Neutron in einem nur aus Neutronen, und  $V_1 + 2V_2$  die Topftiefe für ein einzelnes Proton in einem nur aus Neutronen bestehenden Kern.

Die *gesamte potentielle Energie der Kernkräfte* (ohne COULOMB-Energie) ist dann

$$E_{\text{pot}} = -A V_1 - \frac{ZN}{A} \cdot 4 V_2. \quad (17)$$

Dazu kommt nun die COULOMB-Energie, die wir gleich der Energie einer in der Kugel gleichförmig verteilten Ladung  $Ze$  setzen:

$$E_C = \frac{3}{5} \cdot \frac{Z^2 e^2}{r_0 \sqrt[3]{A}}. \quad (18)$$

BECHERT (54) hat diese Annahme einer gleichförmigen Ladungsverteilung zu verbessern gesucht, indem er die COULOMBSche Abstoßung der Protonen

analog zur FERMISCHEN Theorie der atomaren Elektronenhüllen behandelt hat: es ergibt sich aus der COULOMBSCHEN Abstoßung eine *Zusammendrängung* der Protonen gegen die Oberfläche hin. Nach BECHERTS Ergebnissen sollte in den schwersten Kernen die Protonendichte an der Oberfläche um etwa 23 % größer sein als im Mittelpunkt. Jedoch ist von BECHERT die durch unser obiges  $V_2 > 0$  ausgedrückte Tatsache nicht berücksichtigt worden, daß die Kernbindungskräfte ein möglichst wenig von 1 abweichendes Verhältnis  $Z/N$  energetisch begünstigen, und deshalb auch bei  $Z \neq N$  ein annähernd *konstantes* Verhältnis  $Z/N$  innerhalb des Kernvolums aufrecht erhalten werden.

Wir bestimmen nun das zu vorgegebenem  $A$  gehörige Verhältnis  $Z/N$  aus dem *Minimum der Energiesumme*  $E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} + E_C$ :

$$\left. \begin{aligned} 4V_2 \frac{I}{A} + \left(\frac{2}{A}\right)^{2/3} (N^{2/3} - Z^{2/3}) \varepsilon_0 - \frac{6}{5} \frac{Z e^2}{r_0 \sqrt[3]{A}} = 0; \\ I = A - 2Z. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Da  $I/A < 1/4$  bleibt, kann man mit weniger als 0,5% Fehler schreiben:

$$\left(\frac{2}{A}\right)^{2/3} (N^{2/3} - Z^{2/3}) = \left(1 + \frac{I}{A}\right)^{2/3} - \left(1 - \frac{I}{A}\right)^{2/3} = \frac{4}{3} \varepsilon_0 \frac{I}{A}, \quad (20)$$

also

$$2V_2 + \frac{2}{3} \varepsilon_0 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0} \cdot \frac{ZA^{2/3}}{I}. \quad (21)$$

Wir schließen hieraus zunächst, daß  $ZA^{2/3}/I$  *konstant* ist; und tatsächlich ist das empirisch der Fall:

$$\frac{I}{A} = 0,015 \cdot A^{2/3}. \quad (22)$$

Diese Beziehung ist von BECHERT (54) graphisch dargestellt: die *theoretische Kurve* seiner Zeichnung entspricht genau der Formel (22); der oben erwähnte von BECHERT mitberücksichtigte feinere Effekt, dessen Realität wir, wie gesagt, bezweifeln, ist nämlich an dieser Kurve (wie eine Nachrechnung nach BECHERTS Zahlen ergibt) nicht zu merken. Man sieht, daß sich die Kurve sehr gut den mittleren (chemischen!) Atomgewichten anschließt.

Angesichts der Ungenauigkeit, mit der  $I$  als Funktion von  $A$  definiert ist, ist die Anbringung weiterer Verbesserungen an (22) nicht sinnvoll. Insbesondere ergibt sich *keine* berücksichtigenswerte Abänderung aus der Tatsache, daß die Protonen etwas geringere *Ruhmasse* haben als die Neutronen.

Aus (21), (22), (9) folgt mit  $r_0 = \xi R_0$ , da  $\frac{3}{5} e^2/R_0 = 0,40$  MeV ist:

$$2V_2 + \frac{6,7}{\xi^2} = \frac{26,7}{\xi}. \quad (23)$$

Macht man mit BECHERT (54) die Annahme  $V_2 = 0$ , so wird  $\xi = 0,25$ . Das ist aber nicht nur empirisch zu klein, sondern macht durch Verletzung der Bedingung (11) das Modell widerspruchsvoll.

Mit  $\xi = 1$  wird

$$V_2 = 10 \text{ MeV}; \quad V_1 = 4,5 \text{ MeV}. \quad (24)$$

Bei Uran I mit  $A = 238$ ,  $Z = 92$ ,  $N = 146$  ist die maximale kinetische Energie der Neutronen angewachsen auf

$$\varepsilon'_0 = \left(\frac{2N}{A}\right)^{2/3} \cdot \varepsilon_0 = 12,2 \text{ MeV};$$

andererseits beträgt die Topftiefe für ein Neutron nur noch  $V' = V_1 + \frac{2Z}{A} V_2 = 12,2 \text{ MeV}$  (vgl. Abb. 1). Die für das Modell notwendige Bedingung  $V' \cong \epsilon'_0$  ist dann also eben noch gewahrt: Mit einiger Reserve kann man dies als eine *Begründung dafür* ansehen, daß es für  $Z > 92$  keine stabilen Kerne mehr gibt.

**13. Entropie.** Nunmehr werde die bisher im Grundzustand betrachtete Kernflüssigkeit durch Zufuhr einer Energie  $Q$  „erwärmt“. Bleiben wir dabei in der Nähe des Grundzustandes, also in der Nähe des „Temperaturnullpunktes“, so ist nach bekannten Formeln der FERMI-Statistik die kinetische Energie der  $N$  Neutronen gleich

$$U = \frac{3}{5} C \epsilon^{5/2} \left( 1 + \frac{5\pi^2}{8} \cdot \frac{(kT)^2}{\epsilon^2} + \dots \right), \quad (1)$$

wobei der Energiewert  $\epsilon$  als Funktion der Temperatur  $T$  festgelegt ist durch

$$N = C \epsilon^{3/2} \left( 1 + \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{(kT)^2}{\epsilon^2} + \dots \right). \quad (2)$$

Für  $T = 0$  wird  $\epsilon = \epsilon_0$ ; allgemeiner ergibt die Auflösung von (2) nach  $\epsilon$ :

$$\epsilon = \left( \frac{N}{C} \right)^{2/3} \left( 1 - \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{(kT)^2}{\epsilon_0^2} + \dots \right). \quad (3)$$

Danach bekommen wir aus (1) für die Energie:

$$U = \frac{3}{2} C \epsilon_0^{5/2} + \frac{1}{4} \pi^2 C \sqrt{\epsilon_0} (kT)^2,$$

oder

$$Q = U - U_0 = \frac{1}{4} \pi^2 C \sqrt{\epsilon_0} (kT)^2. \quad (4)$$

Eine weitere kleine Energiezufuhr  $\delta Q$  bedeutet eine *Entropie*-vermehrung im Kern um  $dS = \delta Q/T$ ; und aus

$$dS = \frac{1}{2} \pi^2 C \sqrt{\epsilon_0} k^2$$

erhalten wir als *Entropie des Kerns bei der Temperatur  $T$* :

$$S = \frac{1}{2} \pi^2 C \sqrt{\epsilon_0} k^2 T; \quad (5)$$

oder unter Eliminierung der Temperatur  $T$  mittelst (4):

$$\frac{S}{k} = \pi \sqrt{Q C \sqrt{\epsilon_0}};$$

und wegen  $C = N \epsilon_0^{-3/2}$  nach (3) ergibt das

$$\frac{S}{k} = \pi \sqrt{\frac{NQ}{\epsilon_0}}. \quad (6)$$

Nach einem allgemeinen Satz der statistischen Mechanik<sup>1</sup> hängt nun  $S/k$  zusammen mit dem „*Phasenvolumen*“  $J$  des Kerns, d. h. mit

<sup>1</sup> Vgl. z. B. P. JORDAN: Statistische Mechanik auf quantentheoretischer Grundlage. Braunschweig 1933.

der Gesamtzahl aller Anregungsstufen des Kerns unterhalb der Anregungsenergie  $Q$ : Es ist

$$\frac{S}{k} = \log J. \quad (7)$$

(Natürlich sind *entartete* Niveaus entsprechend ihrem statistischen Gewicht *mehrfach* zu zählen.)

Diesen Zusammenhang wollen wir benutzen, um die durchschnittliche Dichte der Anregungsstufen in der Energieskala zu bestimmen. Diese Dichte ist offenbar gleich  $dJ/dQ$ , oder auch einfacher gleich  $J/Q$ ; denn für die Genauigkeit, mit der die thermodynamischen Gesetze gelten, ist  $\log dJ/dQ$  von  $\log J/Q$  nicht zu unterscheiden. Wir bekommen also für die fragliche *Termdichte* einen Ausdruck

$$\frac{J}{Q} = \frac{1}{Q} \cdot e^{\pi \sqrt{\frac{NQ}{\epsilon_0}}}.$$

Dieses thermodynamisch-statistische Resultat ist jedoch noch zu verbessern um einen Faktor, der für thermodynamische Systeme — mit sehr großer Teilchenzahl — belanglos wäre, aber bei der immerhin beschränkten Teilchenzahl auch der schwersten Kerne noch von Bedeutung ist. Nach BETHE (53) ist die Termdichte genauer gleich

$$\frac{1}{4\sqrt{3} \cdot Q} e^{\pi \sqrt{\frac{NQ}{\epsilon_0}}}.$$

Bislang haben wir aber den Kern als lediglich aus  $N$  Neutronen bestehend angesehen; erweitern wir unsere Überlegungen zur Mitberücksichtigung der Protonen (wobei aber die COULOMB-Kraft vernachlässigt bleiben soll), so ergibt sich als endgültige Formel der *Termdichte*  $\varrho(Q)$  in der Energieskala nach BETHE (53):

$$\varrho(Q) = \frac{\sqrt{2}}{12} \left( \frac{\epsilon_0}{A Q^5} \right)^{1/4} e^{\pi \sqrt{\frac{A Q}{\epsilon_0}}}. \quad (8)$$

BETHE hat diese Formel insbesondere angewandt auf einen angeregten Kern, der durch Einfangung eines *langsamen* Neutrons entstanden ist; dann ist also  $Q \approx 8,5$  MeV.

Ist etwa  $A = 110$ , und wird für  $\epsilon_0$  der unkorrigierte Wert 21,5 MeV genommen, so ergibt sich ein *durchschnittlicher Termapstand*  $1/\varrho(Q)$  von 0,4 Volt. Derselbe Abstand würde sich also ergeben, wenn  $\epsilon_0$  gemäß der Radienkorrektur gleich 10 MeV genommen, aber das Beispiel  $A = 50$  gewählt würde. Mit  $A$  und mit  $Q$  nimmt, wie man sieht, die Termdichte sehr schnell zu.

Übrigens ist aus der Geschwindigkeitsverteilungsformel der FERMI-Statistik weiterhin zu ersehen (53), daß bei mäßiger Anregungsenergie  $Q$  (das soll heißen:  $Q$  nicht wesentlich größer als  $\epsilon_0$ ) die Anzahl der angeregten Teilchen im Kern von der Größenordnung

$$\sqrt{\frac{Q}{\epsilon_0}} \cdot \sqrt{N} \quad (9)$$

ist. Dies ist eine eindrucksvolle Bestätigung der in § 9 nach BOHR korrespondenzmäßig erschlossenen Erkenntnis, daß eine dem Kern zugeführte Energie  $Q$  (vorausgesetzt, daß sie die Mindestgröße  $\varepsilon_0/N$  merklich übersteigt) sich im Zeitmittel auf *viele* Teilchen verteilt.

Dagegen scheint der berechnete durchschnittliche Termabstand von 0,4 Volt zunächst viel zu klein in Anbetracht der in § 10 erwähnten Feststellungen, nach welchen die Abstände zwischen benachbarten Resonanzlinien für langsame Neutronen eher eine Größenordnung von vielleicht 10 bis 100 Volt zu haben scheinen.

Dies klärt sich nun dadurch auf (53), daß die bislang betrachteten Anregungsniveaus in weit überwiegender Anzahl große Werte der Drehimpulszahl  $i$  haben. Durch Einfang eines langsameren Neutrons kann aber nur ein solcher Kern entstehen, dessen Drehimpulszahl  $i'$  um  $\pm 1/2$  abweicht von dem (stets kleinen) Werte  $i$  des Grundzustandes des Atoms *vor* dem Absorptionsprozeß; denn die Drehimpulszahl  $l$  des Neutrons relativ zum Kern muß Null sein, damit ein Einfang stattfinden kann, und folglich ändert sich bei diesem Einfang der Kerndrehimpuls nur um den Spin  $1/2$  des Neutrons.

BETHE (53) findet, daß die Dichte  $\varrho(Q; i)$  der Terme mit einer Drehimpulszahl  $i$  gegeben ist durch

$$\varrho(Q; i) = \frac{1}{2^{15/4} 3^3} \left( \frac{5}{\log 2} \right)^{3/2} (2i + 1) \frac{\varepsilon_0}{(QA)^2} e^{-\pi \sqrt{\frac{AQ}{\varepsilon_0}}} . \quad (10)$$

Diese Formel ergibt mit  $\varepsilon_0 = 21,5$  MeV etwas zu große numerische Werte für den durchschnittlichen Termabstand (z. B. 300 Volt bei Ag); mit  $\varepsilon_0 = 10$  MeV werden die Werte merklich kleiner. BETHE hat anschließend verschiedene speziellere Anwendungen diskutiert.

OPPENHEIMER und SERBER haben nach vorläufiger Mitteilung (49) verwandte Überlegungen durchgeführt. Abweichende Vorstellungen erläutert BARDEEN (155).

Interessante Schlüsse betreffs der Niveaudichte in dem von BETHE untersuchten Gebiet gewinnt FLEISCHMANN (107) aus der Untersuchung der Anlagerung langsamer Neutronen an Kerne unter  $\gamma$ -Emission. Merkwürdigerweise scheint sich danach ein *Maximum* der Niveaudichte bei etwa  $Z = 60$  zu ergeben, und dann eine Wiederabnahme bei noch höheren Kernen. Diese Paradoxie bedarf noch der theoretischen Aufklärung. Weiteres über die durch Neutronen hervorgerufenen  $\gamma$ -Emissionen in (146).

### III. Austauschkraft.

14. **Absättigung.** Eine quantenmechanische Erklärung für das Zustandekommen der „Kernflüssigkeit“ erfordert bestimmte Annahmen über das zwischen den Kernbausteinen geltende Kraftgesetz; die grundsätzliche Tatsache dieser Existenz einer Kernflüssigkeit ergibt deshalb schon wichtige Aufschlüsse.

Zunächst wäre es naheliegend, zwischen den Kernbestandteilen eine Kraft anzunehmen, die in relativ größerer Entfernung (beispielsweise von  $10^{-13}$  cm bis  $10^{-12}$  cm) *anziehend*, bei Unterschreitung eines gewissen Minimalbestandes (sagen wir  $10^{-13}$  cm) dagegen *stark abstoßend* wirkt. Derartige liegt ja tatsächlich vor bei den Molekülen einer gewöhnlichen Flüssigkeit. Jedoch zeigt die wellenmechanische Analyse der zwischen-

molekularen Kräfte, daß diese teils anziehende, teils abstoßende Kraft auf recht verwickelte Weise zustande kommt. Weiterhin erwies sich bei der Untersuchung der Streuung von Neutronen an Protonen die Annahme eines bloßen Potentialtopfes — ohne eine Abstoßungskraft — als passend, und die Untersuchung des Deuteron-Grundzustandes ergibt weitere sehr überzeugende Bestätigungen dieses Potentialtopfmodells.

Danach erhebt sich die Frage nach einer andersartigen Möglichkeit, die Existenz der Kernflüssigkeit zu verstehen; und nach HEISENBERG liegt diese Möglichkeit darin, die Kernbindungskräfte als „Austauschkkräfte“ anzusetzen, welche eine *Absättigung* ähnlich den *chemischen Valenzen* zeigen.

Wir betrachten zunächst ein *Zweikörperproblem* mit gleichen Massen der beiden Teilchen. Die *Eigenfunktionen*  $\varphi = \varphi(r', s'; r'', s')$  dieses Systems hängen von den Örtern  $r', r''$  und den Spinkoordinaten  $s', s''$  ab; es ist  $s' = \pm 1$ , wobei  $s' = +1$  Parallelstellung des Spins mit einer Richtung  $z$ , und  $s' = -1$  antiparallele Spinstellung zu  $z$  bedeutet. Dann schreiben wir als *Energieoperator*:

$$H = \frac{-\hbar^2}{8\pi M} (\Delta' + \Delta'') + J(r) \cdot T. \quad (1)$$

Hierin ist  $M$  die übereinstimmende *Masse* der beiden Teilchen,  $\Delta', \Delta''$  sind LAPLACESche Operatoren in bezug auf  $r', r''$ : also  $\Delta' = \partial^2/\partial x'^2 + \partial^2/\partial y'^2 + \partial^2/\partial z'^2$ . Die *potentielle Energie*  $J(r) \cdot T$  enthält neben dem Faktor  $J(r)$ , der die Abhängigkeit vom Abstand  $r = |r' - r''|$  darstellt, noch den weiteren Faktor  $T$ . Wenn dieser Operator  $T$  einfach gleich 1 wäre, so hätten wir es mit einer *gewöhnlichen* Kraft — in der Literatur oft „WIGNER-Kraft“ genannt — zu tun, entsprechend einer potentiellen Energie  $J(r)$ . Dagegen erhalten wir eine *Austauschkraft*, wenn wir als Definition des Operators  $T$  ansetzen entweder:

$$T^H \varphi(r', s'; r'', s'') = \varphi(r'', s''; r', s'), \quad (2)$$

oder aber:

$$T^M \varphi(r', s'; r'', s'') = \varphi(r'', s'; r', s''). \quad (3)$$

Den Austauschoperator  $T^H$ , dessen Anwendung auf eine Wellenfunktion  $\varphi$  die Vertauschung von  $r', s'$  mit  $r'', s''$  bedeutet, nennen wir den HEISENBERG-Operator. Den Austauschoperator  $T^M$ , dessen Anwendung nur eine Vertauschung von  $r'$  und  $r''$  (*ohne*  $s', s''$ ) bedeutet, nennen wir den MAJORANA-Operator.

Diese Definitionen von  $T^H$  und  $T^M$  gelten in Strenge nur für den Fall *gleicher Massen* der beiden Teilchen. Wird bei der Formulierung der Proton-Neutron-Wechselwirkung der relativ geringe Massenunterschied der beiden Teilchen mit in Betracht gezogen, so ergibt sich bei einer Energiefunktion (1) mit (2) oder (3) eine Verletzung des *Schwerpunktsatzes*. Dem ist aber leicht abzuhelfen (113), indem die Definitionen von  $T^H, T^M$  ein wenig abgeändert werden: statt Vertauschung von  $r'$  und  $r''$ , also Umklappung der Verbindungslinie  $r' \leftrightarrow r''$  um ihren *Mittelpunkt*, ist Umklappung um den *Schwerpunkt* auszuführen. Für die praktische Rechnung spielt das aber keine Rolle.

Nach einer von MAJORANA durchgeführten Überlegung sollte die Proton-Neutron-Wechselwirkung von der Form  $J(r) T^M$  sein; ferner sollte eine Wechselwirkung Neutron-Neutron oder Proton-Proton (abgesehen von COULOMB- und magnetischen Spinkräften) nicht bestehen. Seither hat sich jedoch diese MAJORANASche Hypothese als zu speziell erwiesen. Es ist deshalb neueren Untersuchungen bezüglich der Proton-Neutron-Wechselwirkung der Ansatz

$$H = \frac{-\hbar^2}{8\pi^2 M} (\Delta' + \Delta'') + J(r) \{ (1-g) T^M + g T^H \} \quad (4)$$

( $g = \text{const}$ ) zugrunde gelegt.

Noch allgemeiner könnte man aber annehmen, daß neben der Austauschkraft auch noch eine *gewöhnliche*, also WIGNER-Kraft vorhanden ist. Und endlich kann eine sog. BARTLETT-Kraft (147) in Betracht gezogen werden, bei welcher eine Vertauschung von  $s'$  und  $s''$  ohne Vertauschung der Örter  $r'$ ,  $r''$  eingeführt wird. Der zugehörige Operator kann offenbar in der Form  $J(r) \cdot T^H T^M$  geschrieben werden.

Also verallgemeinert sich (4) zu

$$H = \frac{-\hbar^2}{8\pi^2 M} (\Delta' + \Delta'') + J(r) \{ (1-g-g_1-g_2) T^M + g T^H + g_1 + g_2 T^M T^H \}. \quad (4')$$

Die Mitnahme einer BARTLETT-Kraft neben der WIGNER-Kraft bedeutet übrigens nichts anderes, als daß wir eine *gewöhnliche*, aber von der Stellung (parallel oder antiparallel) der beiden Spinnmomente abhängige Kraft annehmen.

Handelt es sich um zwei *gleichartige* Teilchen (Proton-Proton oder Neutron-Neutron), so sind die Wellenfunktionen  $\varphi$  *antisymmetrisch*:

$$\varphi(r', s'; r'', s'') = -\varphi(r'', s''; r', s'); \quad (5)$$

der HEISENBERGSche Operator  $T^H$  ergibt dann stets  $T^H \varphi = -\varphi$ , hat also einfach die Bedeutung  $-1$ . Danach ist für die Wechselwirkung gleichartiger Teilchen analog zu (4) oder (4') eine Summe einer *gewöhnlichen* und einer MAJORANASchen Kraft in Betracht zu ziehen.

Nach FIERZ (127) ergibt der vermutliche Zusammenhang der Kernbindungskräfte mit den Gesetzmäßigkeiten des  $\beta$ -Zerfalls außer den besprochenen Wechselwirkungstypen noch einen weiteren, nämlich eine Energie der Form

$$(\mathfrak{s}' r) \cdot (\mathfrak{s}'' r) \cdot J(r), \quad (6)$$

wobei  $\mathfrak{s}'$ ,  $\mathfrak{s}''$  die Spinnmomente der beiden Teilchen sind, während  $r = |\mathbf{r}|$  ihr Abstand ist. Doch liegen noch keine Untersuchungen über die Verwendbarkeit eines solchen Ansatzes für die Kerntheorie vor; wir haben uns hier also auf die oben erläuterten Typen zu beschränken.

Gehen wir vom Zweikörperproblem zum Mehrkörperproblem mit  $N$  Teilchen über, so ist der obige Ansatz für die Wechselwirkungsenergie zweier Teilchen auf jedes der  $N(N-1)/2$  Teilchenpaare anzuwenden. Es ist nun nachzuweisen, daß die Summe von  $N(N-1)/2$  Wechsel-



wirkungsgliedern tatsächlich — vermittelt einer „Absättigung“ — eine nur mit  $N$ , und nicht mit  $\approx N^2$  proportionale Gesamtbindungsenergie ergibt.

Diesen theoretischen Nachweis für das Zustandekommen einer Kernflüssigkeit hat MAJORANA (51) unter den oben bezeichneten speziellen Voraussetzungen geführt. In anderer Form ist der Beweis unter denselben Voraussetzungen enthalten in den an HEISENBERG anknüpfenden Untersuchungen von v. WEIZSÄCKER (1) betreffs der Berechnung der Kernbindungsenergien nach der statistischen Methode, welche inzwischen von WANG (65) vervollständigt wurde. Jedoch ist, wie schon bemerkt, die fragliche Voraussetzung (Kernkräfte *nur* zwischen Proton und Neutron) irrig; auch Proton-Proton- sowie Neutron-Neutron-Kräfte müssen mitberücksichtigt werden. In diesem Sinne ist der Beweis vom Standpunkt der FERMI-HARTSEE-Methode bei BACHER und BETHE (2) besprochen.

SERBER (48) gibt an, daß für das Zustandekommen der Proportionalität von Bindungsenergie und Teilchenzahl notwendig sei, daß die Proton-Proton- und Neutron-Neutron-Wechselwirkung zu annähernd  $\frac{2}{3}$  vom MAJORANA-schen und  $\frac{1}{3}$  vom gewöhnlichen Typus ist.

BREIT und FEENBERG (57) sowie WIGNER (56) untersuchen die Frage der Absättigung auf Grund der später noch zu besprechenden Annahme einer *übereinstimmenden* Energiefunktion (4) bzw. (4') für alle Teilchenpaare (Proton-Neutron; Proton-Proton; Neutron-Neutron). VOLZ (101) behandelt dieselbe Frage, und kombiniert die Ergebnisse mit den Folgerungen, die aus den für die Proton-Neutron-Wechselwirkung maßgebenden Konstanten  $E, E'$  in (12), § 5 zu gewinnen sind. Auf diesem Wege erschließt er für die Koeffizienten in (4') die Proportion

$$(1 - g - g_1 - g_2) : g : g_1 : g_2 = 14 : -7 : -5 : 10. \quad (7)$$

Man kann aber natürlich nicht wissen, ob es wirklich richtig ist, wie in (4') für alle vier Kräfte *dasselbe*  $J(r)$  anzusetzen; es gibt sogar Gründe, das Gegenteil anzunehmen. Vgl. dazu die wichtigen Bemerkungen von FEENBERG (149), sowie (86, S. 542). Ferner in diesem Zusammenhang auch (159).

Der *Virialsatz* bleibt übrigens auch bei Zulassung von Austauschkräften gültig (79).

Betreffs einer etwaigen nicht-COULOMBSchen Wechselwirkung der Kernbestandteile mit *Elektronen* wissen wir noch nichts Gewisses. Vielleicht ist die durch die Hyperfeinstruktur-Untersuchungen festgestellte „*Isotopieverschiebung*“ [vgl. z. B. (106, 133, 150)] durch eine solche Wechselwirkung bedingt (112).

**15. Zweikörperproblem.** Im Energieansatz (1), § 14 für die Neutron-Proton-Wechselwirkung haben wir von einer Berücksichtigung *magnetischer* Spinwirkungen abgesehen. Die dadurch erzielte Einfachheit der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$H\varphi = W\varphi \quad (1)$$

erlaubt es,  $\varphi$  als Produkt einer nur von  $r', r''$  und einer nur von  $s', s''$  abhängenden Funktion anzusetzen:

$$\varphi(r', s'; r'', s'') = \psi(r', r'') \chi(s', s''); \quad (2)$$

nach bekannten wellenmechanischen Sätzen ist

$$\chi(s', s'') = \pm \chi(s'', s'), \quad (3)$$

wobei das Pluszeichen bei *paralleler* Stellung der beiden Spinnomente (*Triplet-Zustand*), das Minuszeichen bei *antiparalleler* Stellung (*Singulett-Zustand*) gilt.

Danach bekommen wir aus (1) eine Gleichung für den Faktor  $\psi(r', r'')$  allein, und diese können wir noch weiter vereinfachen durch Benutzung des Schwerpunktssatzes: Sei  $r = r' - r''$ ; wenn wir die gleichförmige Bewegung des Schwerpunktes  $(r' + r'')/2$  als uninteressant abspalten, bleibt eine Wellenfunktion  $u(r)$  übrig; und wenn wir noch beachten, daß Vertauschung von  $r'$  und  $r''$  Ersatz von  $r$  durch  $-r$  bedeutet, sehen wir leicht, daß die Wellengleichung für  $u(r)$  so aussieht (2):

$$\left. \begin{aligned} \frac{-\hbar^2}{4\pi^2 M} \Delta u(r) + W u(r) = \\ \pm J(r) u(-r) \text{ für HEISENBERG-Kraft,} \\ J(r) u(-r) \text{ für MAJORANA-Kraft,} \\ J(r) u(r) \text{ für WIGNER-Kraft,} \\ \pm J(r) u(r) \text{ für BARTLETT-Kraft.} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Im Falle der HEISENBERG-Kraft und der BARTLETT-Kraft gilt entsprechend (3) das positive Zeichen für Triplet- und das negative Zeichen für Singulett-Zustände.

Zur weiteren Behandlung von (4) wird man in üblicher Weise Polarkoordinaten einführen. Für den *radialen* Faktor  $u_l(r)$  der Wellenfunktion<sup>1</sup> wird (2):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\hbar^2}{4\pi^2 M} \left( \frac{d^2 u_l}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u_l \right) + W u_l = \\ \pm (-1)^l J(r) u_l \text{ (HEISENBERG-Kraft),} \\ (-1)^l J(r) u_l \text{ (MAJORANA-Kraft),} \\ J(r) u_l \text{ (WIGNER-Kraft),} \\ \pm J(r) u_l \text{ (BARTLETT-Kraft).} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Mit dieser Feststellung erhält der Begriff der Austauschkraft einen sehr anschaulichen Sinn. Es handelt sich um eine Kraft, die vom *Drehimpuls*  $l$  abhängt, derart, daß sie für *gerade* und *ungerade* Werte  $l$  *entgegengesetztes Vorzeichen* hat. Während also die erste der in § 14 erörterten Hypothesen zur Erklärung der Kernflüssigkeit ein für größere Abstände negatives und für kleinere Abstände positives Potential einführt, ergibt die Annahme von Austauschkräften schon für ein  $J(r)$ , das stets dasselbe Vorzeichen hat, teils Anziehung und teils Abstoßung zwischen den Kernbausteinen.

<sup>1</sup> Die vollständige Wellenfunktion  $u(r)$  hat die Form

$$u(r) = \frac{u_l(r)}{r} P_l^{(m)}(\Theta) e^{im\varphi},$$

$m$  die magnetische,  $l$  die azimutale Quantenzahl.

Betrachten wir jetzt die Neutron-Neutron- oder die Proton-Proton-Wechselwirkung, so ist natürlich auch aus (5) abzulesen, daß eine HEISENBERG-Kraft einfach eine *gewöhnliche* Kraft (WIGNER-Kraft) bedeutet. Ferner sieht man, daß die MAJORANA-Kraft dasselbe bedeutet, wie eine BARTLETT-Kraft. Auf Grund des PAULI-Verbots ist nämlich ein *gerades*  $l$  nur mit *antiparallelen* und ein *ungerades*  $l$  nur mit *parallelen* Spinmomenten möglich.

BLOCH und GAMOW (38) vertraten die Ansicht, daß eine *elektrische Dipolstrahlung* von dem durch Austauschkräfte zusammengehaltenen System Neutron-Proton *nicht* emittiert werde, und sahen in der Tatsache, daß die  $\gamma$ -Strahlung (wie man an dem „inneren Photoeffekt“ der  $\gamma$ -Strahlung erkannt hat) in gleicher Größenordnung Quadrupolanteile neben Dipolanteilen enthält, einen direkten Beweis für die Austauschnatur der Kernkräfte. Jedoch kann diese Überlegung nach WEISSKOPF (private Mitteilung) wohl nicht aufrechterhalten werden.

Nach BHABHA (153) gibt es aber anderweitige Möglichkeiten, den Austauschcharakter der Proton-Neutron-Wechselwirkung experimentell direkt festzustellen.

Voraussetzung für die Überlegungen dieses Paragraphen ist, wie schon gesagt, die Vernachlässigung der *magnetischen* Spinwirkungen. Für die Frage, wieweit diese Vernachlässigung erlaubt ist, bieten Rechnungen von CASIMIR (35) einen Anhaltspunkt: beim *Deuteron* ist diese magnetische Energie von der Größenordnung  $10^5$  Volt.

**16. Deuteron.** Der Grundzustand des Deuterons hat, wie schon in § 7 erwähnt, die Impulsquantenzahl  $i = 1$ . Es liegt nahe, diesen Grundzustand als *S-Zustand* (Bahndrehimpuls  $l = 0$ ) anzunehmen; doch macht die Annahme von *Austauschkräften* anstatt gewöhnlicher es unmöglich, von vornherein einen *P-Grundzustand* ( $l = 1$ ) auszuschließen. Deshalb ist es wichtig, daß die Annahme  $l = 0$ , welche gewissermaßen den ersten Schritt zu einer feineren Theorie der Kerne bildet, tatsächlich gut begründet ist: nämlich durch den Zusammenhang der Deuteron-Bindungsenergie mit dem Neutron-Proton-Streuquerschnitt, und durch die Geschwindigkeitsunabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für die Vereinigung eines Protons und eines Neutrons zu einem Deuteron.

Die *Ruhmasse* des  ${}^2_1\text{H}$ -Kernes entspricht einer *Bindungsenergie* von  $\approx 2,2$  MeV. Eine  $\gamma$ -Strahlung von entsprechendem  $h\nu$  wird bei der Anlagerung von Neutronen an Protonen beobachtet, und Photozerlegung des Deuterons führt auf denselben Wert der Bindungsenergie. Als genauester Wert wird zur Zeit 2,26 MeV angesehen; vgl. die Diskussion in (6). Diese Bindungsenergie stimmt nun innerhalb der Fehlergrenzen überein mit dem Energiewert  $E$  in der Formel (11), § 5 des Wirkungsquerschnitts  $Q$  für die *Streuung* von Neutronen an Protonen. Das ist theoretisch folgendermaßen zu verstehen:

Nach der Annahme  $l = 0$  muß das Moment  $i = 1$  des Deuterons durch Parallelstellung der Spinmomente zustande kommen; es handelt

sich also um einen Triplettzustand  ${}^3S_1$ . Da auch der durch den Energiewert  $E$  bestimmte Anteil von  $Q$  in (II), § 5 sich auf  ${}^3S_1$ -Zustände bezieht, haben wir für beide Probleme denselben Potentialtopf anzuwenden. Wie in § 5 bemerkt, ist der Energiewert  $E$  *klein* gegenüber der Potentialtiefe  $V_0$ .

Die SCHRÖDINGERSche Eigenfunktion des Deuterongrundzustandes muß nun so aussehen<sup>1</sup>:

$$\varphi(r) = \begin{cases} C' \cdot \frac{\sin K'r}{K'r} & \text{für } r < r_0, \\ C \cdot \frac{e^{-K''r}}{K''r} & \text{für } r > r_0; \end{cases} \quad (I)$$

dabei ist (mit  $\mu = \frac{1}{2} M$ ):

$$K'^2 = \frac{8\pi^2\mu}{h^2} (V_0 + W); \quad K''^2 = \frac{8\pi^2\mu}{h^2} |W|, \quad (2)$$

wenn  $W$  die (negative) *Energie* des Deuterons bedeutet. Berücksichtigung von  $|W| \ll V_0$  ergibt  $K' = K_0$  in der Bezeichnungsweise von (5), § 5; und die Forderung, daß  $\varphi(r)$  und  $\varphi'(r)$ , also auch  $(\ln r \varphi(r))'$  bei  $r = r_0$  *stetig* sein müssen, ergibt die Bedingung

$$K_0 \operatorname{ctg} K_0 r_0 = -K'' = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2\mu |W|}; \quad (3)$$

Vergleich mit (9), § 5 führt dann in der Tat zur Übereinstimmung

$$|W| = E. \quad (4)$$

Wie aus § 5 bekannt, ist  $\operatorname{ctg} K_0 r_0 \ll 1$ , also angenähert  $K_0 r_0 \approx \frac{\pi}{2}$ . D. h. die Potentialtiefe  $V_0$  hängt mit  $r_0$  zusammen durch

$$V_0 \approx \frac{h^2}{16 M r_0^2}. \quad (5)$$

Für  $r_0 = 2 \cdot 10^{-13}$  cm beispielsweise ergibt das  $V_0 = 26$  MeV.

Wäre die Neutron-Proton-Wechselwirkung rein vom MAJORANA-Typus, also *unabhängig* von der *Spinstellung*, so würde jedem  ${}^3S_1$ -Zustand ein  ${}^1S_0$ -Zustand ( $l = 0, i = 0$ ) entsprechen derart, daß die Energiedifferenz zwischen beiden ausschließlich auf Rechnung der *magnetischen Spinwechselwirkung* zu setzen wäre. Entgegen einer Angabe von BETHE und BACHER (2), welche diese Energiedifferenz für den Deuterongrundzustand auf etwa 100 Volt schätzten, ist nach CASIMIR (35) dieser Energiebetrag 0,5 bis  $1,0 \cdot 10^5$  Volt groß; und zwar würde der Singulettzustand  ${}^1S_0$  um diese Differenz *unter*  ${}^3S_1$  liegen. Eine rein MAJORANASche Kraft liegt danach sicher nicht vor.

Angesichts der Formel (II), § 5 für den Streuquerschnitt liegt die Vermutung nahe, daß der Energiewert  $E' = 0,116$  MeV die Bindungs-

<sup>1</sup> Die SCHRÖDINGER-Gleichung lautet für eine wegen  $l = 0$  *kugelsymmetrische* Wellenfunktion  $\varphi(r)$ :

$$-\frac{h^2}{8\pi^2\mu} \cdot \frac{d^2 r \varphi(r)}{dr^2} + V(r) \cdot r \varphi(r) = W \cdot r \varphi(r).$$

energie eines  ${}^1S_0$ -Zustandes sei. Jedoch ist dieser Schluß nicht sicher. Der Ansatz (1) führt nämlich offenbar nur dann zur Konstruktion eines stationären Zustandes, wenn  $K''$  positiv ausfällt; dazu ist aber  $K_0 r_0 > \frac{\pi}{2}$  nötig. Im Falle  $K_0 r_0 < \frac{\pi}{2}$  (aber immer noch  $K_0 r_0 \approx \frac{\pi}{2}$ ) dagegen entspricht der analog zu (3) aus  $K_0, r_0$  berechnete Energiewert nicht einem stationären Zustand; trotzdem spielt er gemäß (9), § 5 für die Streuung dieselbe Rolle wie ein stationäres Niveau. Man hat deshalb die (einigermaßen irreführende) Bezeichnung „virtuelles Niveau“ eingeführt.

Für die Frage, ob wir beim Deuteron ein wirkliches oder ein „virtuelles“ Niveau haben, wird sich nach SCHWINGER und TELLER (169) die überzeugendste experimentelle Entscheidung ergeben aus der Untersuchung der Streuung sehr langsamer Neutronen — nämlich „thermischer“ Neutronen von der Temperatur der flüssigen Luft — in Para- und Orthowasserstoff  ${}^1_2\text{H}_2$ . Die Spinabhängigkeit der Proton-Neutron-Kraft (HEISENBERG-Anteil, bzw. BARTLETT-Anteil) ergibt nämlich (im Gegensatz zur MAJORANA- oder WIGNER-Kraft) eine Möglichkeit, durch unelastische Streuprozesse die durch die Stellung der Protonenspins unterschiedenen beiden Wasserstoffarten ineinander umzuwandeln. Die Rechnung zeigt nun, daß bei der Temperatur der flüssigen Luft 1. der Ortho-Streuquerschnitt etwa 300mal größer als der Para-Streuquerschnitt; 2. dieser letztere etwa 100mal kleiner als bei gewöhnlicher Temperatur sein wird, falls das fragliche Niveau virtuell ist. Ein reelles  ${}^1S_0$ -Niveau dagegen würde die Größenordnung 1 für diese beiden Verhältnisse ergeben. Die Durchführung dieses Experiments bleibt abzuwarten.

Gegenwärtig kann der Schluß, daß das fragliche Niveau virtuell sei, nur auf die Untersuchung der Reaktion  ${}^1\text{H} + {}^1_0\text{Nn} \rightarrow {}^2_1\text{H} + h\nu$  gestützt werden, deren Theorie in der Hauptsache von FERMI (170, 24) gegeben ist. Diese Reaktion kann auf zwei Weisen vor sich gehen: Entweder ist, entsprechend der Auswahlregel für elektrische Dipolstrahlung, im Ausgangszustand die Quantenzahl des Bahndrehimpulses  $l = 1$  (also  $P$ -Zustand); dabei muß dann von vornherein Parallelstellung der Spinmomente bestehen (also  ${}^3P$ -Zustand). Oder es ist im Anfangszustand (wie im Endzustand)  $l = 0$ ; dann kann bei anfänglich antiparalleler Spinstellung ein Umklappen der Spinmomente unter magnetischer Dipolstrahlung in den stationären Zustand  ${}^3S_1$  führen. Bei langsamen Neutronen kann, wie wir wissen, nur vom Anfangszustand  $l = 0$  aus eine merkliche Wechselwirkung mit dem Proton erwartet werden; und es ist leicht verständlich, daß der somit allein übrigbleibende Umklappvorgang eine von der Geschwindigkeit unabhängige Lebensdauer langsamer freier Neutronen in Paraffin ergibt (171, 24). Quantitativ läßt nun die Theorie bei Vorhandensein eines reellen  ${}^1S_0$ -Niveaus eine Lebensdauer  $\tau = 6,5 \cdot 10^{-4}$  sec, für ein virtuelles dagegen  $\tau = 2,6 \cdot 10^{-4}$  sec erwarten; und der experimentelle Wert  $\tau = 1,7 \cdot 10^{-4}$  sec spricht zu Gunsten eines virtuellen Niveaus.

Die *Photozerlegung* des Deuterons ist der inverse Effekt des eben betrachteten, und die Berechnung des diesbezüglichen Wirkungsquerschnitts also eng damit verknüpft. Für  $h\nu = 2,62$  MeV ist dieser Wirkungsquerschnitt theoretisch [BETHE-PEIERLS; vgl. (2)]  $7 \cdot 10^{-28}$  cm<sup>2</sup> und experimentell (CHADWICK-GOLDHABER)  $5 \cdot 10^{-28}$  cm<sup>2</sup> in befriedigender Übereinstimmung. Ausführlichere experimentelle Daten würden auf Grund der vorliegenden theoretischen Untersuchungen (172) Genaueres über die Proton-Neutron-Wechselwirkung erkennen lassen. Vgl. auch (182).

Die aus den geschilderten Überlegungen und experimentellen Tatsachen gewonnene Kenntnis der Neutron-Proton-Wechselwirkung kann benutzt werden zur Erörterung der Frage, ob es *Anregungszustände* des Deuterons gibt. Der  ${}^3S_1$ -Grundzustand hat natürlich die *Hauptquantenzahl*  $n = 1$ ; aus unserer Kenntnis des für  ${}^3S_1$ -Zustände geltenden Potentialtopfes folgt dann (2), daß es höhere Zustände  $n {}^3S_1$  mit  $n > 1$  *nicht* geben kann; Singulettzustände  $n {}^1S_0$  des Deuterons gibt es überhaupt nicht. Bei Zuständen mit Drehimpuls  $l > 0$  erschwert die Zentrifugalkraft ein Zusammenhalten der beiden Teilchen, und trotz der innerhalb gewisser Grenzen noch bestehenden Unsicherheit betreffs der für *gerades*  $l$  geltenden Potentialtöpfe (zu  $i = 0$  und  $i = 1$ ) muß man der Feststellung (2) zustimmen, daß das Deuteron keinerlei diskreten Anregungszustand besitzt.

**17. Gleiche Teilchen.** Wir haben schon in II die Vorstellung ausgeführt, daß die Kernkräfte *allein* — ohne die COULOMB-Kraft — stets *gleiche* Anzahlen  $N = Z$  als energetisch stabilsten Fall ergeben würden. Das Überwiegen der Neutronen in den schwereren Kernen konnte ohne weiteres als Wirkung der COULOMB-Kraft gedeutet werden: theoretisch wäre zunächst sogar eher ein *noch stärkeres* Überwiegen auf Grund der COULOMB-Kraft zu erwarten gewesen.

Wenn aber die nichtelektrischen Kernkräfte allein genommen eine Übereinstimmung  $N = Z$  ergeben, so bedeutet das, wie schon hervorgehoben wurde, daß die *Wechselwirkungsenergie zwischen zwei Neutronen übereinstimmt mit der nicht-COULOMBSchen Wechselwirkungsenergie zwischen zwei Protonen.*

Eine unmittelbare Prüfung dieser Übereinstimmung ergibt sich durch die beiden Kerne  ${}^3_1\text{H}$  und  ${}^3_2\text{He}$ . Bei diesen ist nämlich infolge der behaupteten Übereinstimmung der *einzig*e Unterschied der Bindungsenergie (abgesehen von der Differenz der magnetischen Spinenergien) dadurch gegeben, daß es beim  ${}^3_2\text{He}$  eine COULOMBSche Abstoßung der beiden *gleichen* Teilchen dieses Kerns gibt, beim  ${}^3_1\text{H}$  dagegen nicht. Ohne Rechnung muß man erwarten, daß diese COULOMB-Energie etwa eine Elektronenruhenenergie beträgt; und da andererseits beim  ${}^3_1\text{H}$  die Summe der Ruhmassen der Bestandteile um 2 bis 3 Elektronenmassen größer ist (vgl. Tabelle 1, S. 57), so werden beide Unterschiede sich ungefähr kompensieren. Man versteht also gut, daß die beiden Kerne

empirisch nahezu *gleiche* Masse haben. Genauere Berechnungen (43) haben diese Schlußfolgerung präzisiert.

Als weitere hierher gehörige Beispiele sind die Paare  ${}^9_4\text{Be} - {}^9_5\text{B}$ ;  ${}^{11}_5\text{B} - {}^{11}_6\text{C}$ ;  ${}^{13}_6\text{C} - {}^{13}_7\text{N}$ ;  ${}^{15}_7\text{N} - {}^{15}_8\text{O}$ ;  ${}^{17}_8\text{O} - {}^{17}_9\text{F}$  bekannt. FEENBERG und WIGNER (69) haben im Zusammenhang einer noch zu besprechenden Untersuchung die COULOMBSchen Energien für alle 6 Beispiele berechnet und mit den nach Abzug der Ruhmassendifferenzen verbleibenden empirischen Massenunterschieden verglichen. Nach Korrektur eines rechnerischen Versehens (77) ergibt sich zwar nicht ganz befriedigende Übereinstimmung; jedoch darf eine hochgradige Gleichheit der nichtelektrischen Neutron-Neutron- und Proton-Proton-Kraft als gesichert gelten.

Diese Übereinstimmung der Kernbindungskräfte zwischen 2 Neutronen und 2 Protonen überhebt uns erfreulicherweise der Notwendigkeit, die experimentell schwer zugängliche Wechselwirkung zwischen 2 Neutronen unmittelbar zu untersuchen: die Untersuchung der *Proton-Proton-Wechselwirkung* genügt.

Nachdem bereits WHITE (62) eine nicht-COULOMBSche Proton-Proton-Kraft kurzer Reichweite wahrscheinlich gemacht hatte, haben experimentelle Untersuchungen von TUVE, HEYDENBURG und HAFSTAD (59) sowie die sorgfältige theoretische Auswertung ihrer Ergebnisse durch BREIT, CONDON, PRESENT (60) und SEXL (174) weitgehend Klarheit geschaffen. Eine befriedigende Darstellung der experimentellen Ergebnisse sowohl hinsichtlich der Winkel- als auch hinsichtlich der Energieabhängigkeit ist zu erhalten aus der Annahme eines *Potentialloches*, das bei einem Radius von  $2,8 \cdot 10^{-13}$  cm eine Tiefe von 11,1 MeV besitzen müßte. Man kann diesen Potentialtopf innerhalb gewisser Grenzen noch deformieren, ohne die Übereinstimmung mit dem Experiment zu verlieren; doch ist dann auch die Topftiefe in bestimmter Weise mit zu ändern.

Auf Grund des PAULI-Prinzipes sind zentrale Stöße zwischen 2 Protonen ( $l = 0$ ) nur bei *antiparalleler* Spinstellung möglich; d. h. das fragliche Potentialloch bezieht sich auf einen  ${}^1S_0$ -Zustand. Es wird dann auch für  ${}^1D_2$ -,  ${}^1G_4$ - usw. Zustände gelten; aber man weiß zunächst noch nicht, welches Potentialloch für die  ${}^3P$ -,  ${}^3F$ - usw. Zustände gilt.

Nun haben aber BREIT-CONDON-PRESENT (70) darauf aufmerksam gemacht, daß das für die Singulettzustände der Proton-Proton-Wechselwirkung gefundene Potentialloch innerhalb der Fehlergrenzen *übereinstimmt mit demjenigen der Neutron-Proton-Wechselwirkung im Singulettfall*. Sie haben danach die Hypothese vorgeschlagen, daß auch im Triplettfall dieselbe Übereinstimmung bestehe, so daß also ein „*universelles Kernkraftgesetz*“ alle 3 Fälle Neutron-Neutron, Proton-Proton und Neutron-Proton umfasse (57); vgl. auch CASSEN und CONDON (61). Verschiedene noch zu besprechende Untersuchungen scheinen mit dieser Hypothese gut im Einklang zu sein und ihre mindestens *approximative* Richtigkeit sogar zu sichern. Jedoch bestehen andererseits ernste theoretische Bedenken gegen diese Hypothese (7, 76).

Für die weitere Untersuchung der Kernkräfte wird man naturgemäß die Bindungsenergien der Kerne mit 3 oder 4 Teilchen zu berechnen suchen:  ${}^3_1\text{H}$ ,  ${}^3_2\text{He}$ ,  ${}^4_2\text{He}$ . Das ist in einer Anzahl von Arbeiten geschehen, von denen nur die 1936/37 erschienenen zusammengestellt seien (43). Die früher (7) festgestellten Unstimmigkeiten dieser Untersuchungen sind inzwischen weitgehend behoben, und die aus den oben besprochenen Tatsachen und Erwägungen gezogenen Schlüsse erhalten durch diese Rechnungen wichtige Bestätigungen und Ergänzungen [vgl. übrigens (149)]. Jedoch sind diese Untersuchungen für eine ausführlichere Besprechung an diesem Orte zu kompliziert. Erwähnt sei nur, daß in der Formel (4), § 14 für die *Proton-Neutron-Wechselwirkung*, wenn

$$J(r) = A e^{-\frac{r^2}{r_0^2}} \quad (1)$$

angenommen wird, am besten

$$\left. \begin{aligned} A &= 72 m_0 c^2; & r_0 &= 2,25 \cdot 10^{-13} \text{ cm}; \\ g &= 0,22 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

zu nehmen ist. Diese Werte liegen auch den zu Beginn dieses Paragraphen besprochenen Rechnungen von FEENBERG-WIGNER zugrunde.

**18. 1 s-Schale.** Der „ergodische“ Charakter der inneren Bewegung in den Kernen, den wir nach BOHR in § 9 hervorgehoben haben, kommt nur bei den schweren, teilchenreichen Kernen und erst bei einer gewissen Höhe der Anregungsenergie zur Geltung. Betrachten wir dagegen die untersten, noch verhältnismäßig weit getrennt liegenden Anregungsstufen der Kerne, so werden wir, ohne uns in Widerspruch mit den Erwägungen von § 9 zu setzen, eine ähnliche Klassifizierung und Ordnung sowie approximative Berechnung der Terme durchführen können, wie es für die Elektronenhüllen möglich ist. Allerdings sind die so zu gewinnenden Ergebnisse in mancher Hinsicht als nicht sehr zuverlässig und jedenfalls experimenteller Prüfung bedürftig anzusehen.

Wir wenden wieder das Potentialschalenmodell an; für ein einzelnes Teilchen, das sich in einer solchen Potentialschale befindet, können die Anregungsniveaus nach ELSASSER und MARGENAU (2) exakt berechnet werden. Natürlich ergeben sich ähnliche Verhältnisse, wie für ein Elektron in einem COULOMBSchen Kernfeld (mit oder ohne Abschirmung), doch besteht ein Unterschied betreffs der Reihenfolge der Terme.

Im Inneren der Elektronenhülle haben die „Schalen“ bekanntermaßen die Reihenfolge:

Röntgenterm . . . . .	$K$	$L_{11}$ $L_{21}$ $L_{22}$	$M_{11}$ $M_{21}$ $M_{22}$ $M_{32}$ $M_{33}$
Hauptquantenzahl . . . . .	1	2	3
Elektronenterme . . . . .	$s$	$s$ $\overbrace{p \quad p}$	$s$ $\overbrace{p \quad p}$ $\overbrace{d \quad d}$
Besetzungszahl . . . . .	2	2 $\overbrace{6}$	2 $\overbrace{6}$ $\overbrace{10}$

In unserem Potentialtopf aber folgt auf den tiefsten Term 1 s des Einzelteilchens (dessen *Spin* zunächst unberücksichtigt bleibe) sogleich

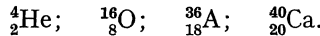


der Term  $2p$ , und danach der Term  $3d$ ; erst dann kommt als nächster  $2s$ . Wir haben also folgendes Bild für den Schalenbau der niedrigsten Kerne:

Dabei ist zu beachten, daß die angegebenen Besetzungszahlen, die aus der für die Elektronenschalen geltenden Tabelle übernommen sind (die *statistischen Gewichte* der  $s$ -,  $p$ -,  $d$ -, ...

Hauptquantenzahl .	1	2	3	2	4
Teilchenterme . . .	$s$	$p$	$d$	$s$	$f$
Besetzungszahl . .	2	6	10	2	14

Terme bleiben natürlich unabhängig von der energetischen Reihenfolge dieselben), für Protonen und Neutronen *einzel*n gelten; wir haben also eine *abgeschlossene Schale* dann, wenn wir je *zwei* Protonen und Neutronen haben, oder je  $2 + 6 = 8$ ; oder je  $8 + 10 = 18$ ; oder je 20. Das sind die Kerne:

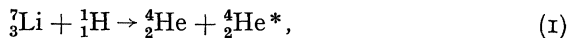


Für diese werden wir also im Grundzustand ein *verschwindendes Drehmoment*  $i = 0$  erwarten. Tatsächlich trifft das empirisch für  ${}^4_2\text{He}$  und  ${}^{16}_8\text{O}$  zu; allerdings beweist das wenig für diese Schalenvorstellung, weil nach einer empirischen Regel sowieso stets  $i = 0$  ist, wenn  $A$  und  $Z$  gerade sind. Doch werden wir sehen, daß bis mindestens  ${}^{19}_9\text{F}$  aufwärts diese Vorstellung gut zu bestätigen ist. Ob aber bei  ${}^{36}_{18}\text{A}$  wirklich der Grundzustand gerade der vollständigen Ausfüllung der  $3d$ -Schale entspricht, ist zweifelhaft. Die empirischen Momente  $i$  und  $\mu$  der Kerne  ${}^{35}_{17}\text{Cl}$ ,  ${}^{37}_{17}\text{Cl}$ ,  ${}^{39}_{19}\text{K}$  deuten nämlich auf kompliziertere Verhältnisse hin. Leider sind gerade für den sehr interessanten Fall des Cl die beiden magnetischen Momente  $\mu$  nur schlecht bekannt (anscheinend  $\mu < 0,5$ ).

Beim  ${}^3_1\text{H}$  müssen die beiden Neutronen, da sie beide zur  $1s$ -Schale gehören, antiparallele Spinmomente haben; das Proton liefert dann für diesen Kern ein Drehmoment  $1/2$ . Wir können also den Grundzustand des  ${}^3_1\text{H}$  als Dublett-S-Zustand  ${}^2S_{1/2}$  bezeichnen. Die Existenz von Anregungsniveaus neben diesem Grundzustand ist unwahrscheinlich.

Für das  ${}^3_2\text{He}$  gilt Entsprechendes.

Beim  ${}^4_2\text{He}$  jedoch ist die Bindungsenergie so groß geworden, daß Anregungszustände zu erwarten sind (6). Experimentell sind sie von CRANE und LAURITSEN wahrscheinlich gemacht; die Beschießung von  ${}^7_3\text{Li}$  mit Protonen ergibt nach diesen Verfassern (was freilich in § 19 etwas zu korrigieren sein wird):



und das  ${}^4_2\text{He}^*$  geht unter  $\gamma$ -Emission in ein normales  ${}^4_2\text{He}$  über. Nach FEENBERG (66) und BETHE-BACHER (2) sind die experimentellen Tatsachen wahrscheinlich so zu deuten, daß es *zwei* angeregte Zustände des  ${}^4_2\text{He}$  gibt; nämlich einen Zustand  ${}^1P_1$  etwa 16 MeV über dem Grundzustand  ${}^1S_0$ , und einen Zustand  ${}^3P$  etwa 10 MeV über dem Grundzustand. (Die obere Grenze für mögliche Anregungsenergien des  $\alpha$ -Teilchens ist 19,4 MeV; mit 19,4 MeV wird eine Zerlegung  ${}^4_2\text{He} \rightarrow {}^3_1\text{H} + {}^1_1\text{H}$  möglich.)

Im Zustand  ${}^1P_1$  stehen sowohl die beiden Protonenspins als auch die beiden Neutronenspins (wie im Grundzustand  ${}^1S_0$ ) antiparallel, doch ist ein Bahndrehmoment  $l = 1$  vorhanden. *Zwei* Terme  ${}^3P$  gehen aus diesem  ${}^1P_1$  hervor, indem entweder bei den Neutronen oder bei den Protonen die Spins parallel gestellt werden; aber einer von diesen beiden  ${}^3P$ -Termen dürfte bereits oberhalb der 19,4 MeV-Grenze liegen. Man kann auch die *Auswahlregeln* für die Übergänge zwischen den 3 Zuständen des  $\alpha$ -Teilchens leicht übersehen (2).

Natürlich wird der Term  ${}^3P$  seinerseits noch aus drei eng benachbarten Termen  ${}^3P_2$ ,  ${}^3P_1$ ,  ${}^3P_0$  bestehen; Erwägungen von INGLIS (45) lassen vermuten, daß  ${}^3P_2$  der unterste ist.

Weiteres über  ${}^4\text{He}$  bei INGLIS (80).

**19. 2 p-Schale.** Wir verschaffen uns nun eine Übersicht über die Kerne von  ${}^4\text{He}$  bis  ${}^{16}\text{O}$  in Tabelle 2. Dabei sind unmittelbar untereinander gestellt solche Kerne, welche aus einander hervorgehen durch Vertauschung von  $Z$  und  $N = A - Z$ . Ferner sind benachbart aufgeführt Kerne mit *reziproken 2 p-Schalen*: die eine Schale enthält gerade so viele Protonen-, „Löcher“ bzw. Neutronen-, „Löcher“, wie die reziproke Protonen bzw. Neutronen enthält.

Natürlich entspricht nicht *jede* Kombination einer beliebigen Anzahl 2 p-Protonen (von 0 bis 6) mit beliebiger Anzahl von 2 p-Neutronen einem möglichen Kern. Empirisch *nicht* bekannt sind Kerne (unterhalb  ${}^{16}\text{O}$ ) mit *drei* oder mehr überschüssigen Protonen oder Neutronen; diese sind wohl in der Tat als nicht existierend zu vermuten. Außerdem fallen noch die in Tabelle 2 durch einen Strich bezeichneten Fälle empirisch aus; vielleicht werden sie durch ihren Protonenüberschuß (COULOMB-Kraft!) ebenfalls existenzunfähig gemacht. Vgl. die ausführliche Diskussion (120). Endlich sind  ${}^5\text{Li}$  und  ${}^5\text{He}$  experimentell noch nicht bekannt [wegen  ${}^5\text{He}$  vgl. (158)]; sie dürften astrophysikalisch wichtig sein (36).

Die Kerne  ${}^5\text{Li}$ ,  ${}^5\text{He}$ ,  ${}^{15}\text{N}$ ,  ${}^{15}\text{O}$  besitzen je *ein* Teilchen oder *ein* „Loch“ in der 2 p-Schale. Ihr Zustand ist demnach ein Dublett- $P$ -Zustand  ${}^2P$ , der zwei eng benachbarte Komponenten  ${}^2P_{3/2}$ ,  ${}^2P_{1/2}$  haben wird, die einer Resultante  $i = 3/2$  bzw.  $i = 1/2$  aus Spinmoment  $1/2$  und Bahnmoment  $l = 1$  entsprechen. Nach Erwägungen von INGLIS muß man vermuten, daß bei  ${}^5\text{Li}$ ,  ${}^5\text{He}$  das *tiefer*e Niveau  $i = 3/2$  hat, bei den reziproken Kernen  ${}^{15}\text{N}$ ,  ${}^{15}\text{O}$  dagegen  $= 1/2$ . Außer  ${}^2P_{3/2}$ ,  ${}^2P_{1/2}$  dürfte es bei  ${}^5\text{Li}$  und  ${}^5\text{He}$  *keine* weiteren Anregungszustände geben; und auch diese Zustände sind vermutlich schon instabil. Aber bei  ${}^{15}\text{N}$  und  ${}^{15}\text{O}$  gibt es natürlich Anregungszustände, bei denen ein Teilchen in die 3 d-Schale gehoben ist [vgl. dazu (121)].

Bei dem locker gebundenen  ${}^6\text{He}$  wird man erwarten, daß die beiden 2 p-Neutronen antiparallele Spinmomente und auch antiparallele Bahnmomente haben, so daß sich ein impulsloser Zustand  ${}^1S_0$  ergibt. Anregungszustände dürften nicht vorhanden sein.

Tabelle 2.

Kerne	In der 2p-Schale		Tiefste Terme (Abstände in Elektronen-Ruhenergien)	Symmetrie- charaktere	
	Protonen	Neutronen			
${}^4_2\text{He}$	0	0	${}^{11}\text{S}$		
${}^{16}_8\text{O}$	6	6			
${}^7_3\text{Li}$	1	0	${}^{12}\text{P}$		
${}^7_2\text{He}$	0	1			
${}^{15}_7\text{N}$	5	6			
${}^{15}_8\text{O}$	6	5			
${}^9_3\text{Li}$	1	1	${}^{22}\text{S}$ ${}^{22}\text{D}$ ${}^{22}\text{P}$	$\overline{12}$ für S, D $\overline{12}$ für P	
${}^{14}_7\text{N}$	5	5	4,3      2,85		
—	2	0	${}^{11}\text{S}$ ${}^{11}\text{D}$	$\overline{12}$	
${}^9_2\text{He}$	0	2			
${}^{14}_6\text{C}$	4	6	2,7		
—	6	4			
—	2	1	${}^{12}\text{P}$ ${}^{12}\text{F}$	$\overline{123}$	
${}^7_3\text{Li}$	1	2			
${}^{13}_6\text{C}$	4	5	6,25		
${}^{13}_7\text{N}$	5	4			
—	3	1	${}^{22}\text{P}$ ${}^{22}\text{D}$ ${}^{22}\text{F}$	$\overline{123}$ 4	
${}^7_3\text{Li}$	1	3			
${}^{12}_5\text{B}$	3	5	3 bis 3,5   1,5 bis 3,4		
—	5	3			
${}^8_2\text{Be}$	2	2	${}^{11}\text{S}$ ${}^{11}\text{D}$ ${}^{11}\text{G}$	$\overline{1234}$	
${}^{10}_4\text{C}$	4	4	3,8      8,8		
${}^9_3\text{B}$	3	2	${}^{12}\text{P}$ ${}^{12}\text{D}$ ${}^{12}\text{F}$ ${}^{12}\text{G}$	$\overline{1234}$ 5	
${}^9_4\text{Be}$	2	3			
${}^{11}_5\text{B}$	3	4			2,45      3,75      5,05
${}^{11}_6\text{C}$	4	3			
${}^{10}_6\text{C}$	4	2	${}^{11}\text{S}$ ${}^{11}\text{D}$ ${}^{11}\text{D}$ ${}^{11}\text{F}$ ${}^{11}\text{G}$	$\overline{1234}$ $\overline{56}$	
${}^{10}_4\text{Be}$	2	4	2,4      0,8      2,7      5,75		
${}^{10}_5\text{B}$	3	3	${}^{22}\text{S}$ ${}^{22}\text{D}$ ${}^{22}\text{D}$ ${}^{22}\text{F}$ ${}^{22}\text{G}$	$\overline{1234}$ $\overline{56}$	
			4,05      0,45      3,8      4,65		

Für die anderen Kerne der Tabelle 2 kann durch eine umständlichere Untersuchung entschieden werden, wie der Grundzustand aussehen wird<sup>1</sup>. Dabei ist nun wichtig, daß der Hauptanteil der Proton-Neutron-Kraft eine MAJORANA-Kraft, also *spinunabhängig* ist; die von der Spinstellung abhängige HEISENBERG-Kraft kann als eine zusätzliche kleinere Korrektur behandelt werden. Man hat dann in erster Näherung folgendes Modell: Die Protonenspins bilden eine gequantelte Resultante  $\sigma$ ; die Neutronenspins bilden eine Resultante  $\sigma'$ ; und die Bahndrehmomente bilden eine gequantelte Resultante  $l$ . Je nach dem Werte von  $l$  sprechen wir von  $S$ -,  $P$ -,  $D$ -,  $F$ -,  $G$ -, ... Termen; und diese sind *einerseits* hinsichtlich der Protonen, aber *andererseits* auch noch hinsichtlich der Neutronen als Singulett-, Dublett-, ...-Terme zu kennzeichnen. So verstehen wir die FEENBERG-WIGNER (69) gebrauchte Bezeichnungsweise:

$${}^{11}\text{S}: \quad l = 0; \quad \sigma = \sigma' = 0;$$

$${}^{12}\text{P}: \quad l = 1; \quad \sigma = 0, \sigma' = 1/2 \quad \text{oder} \quad \sigma = 1/2, \sigma' = 0;$$

$${}^{22}\text{S}: \quad l = 0; \quad \sigma = \sigma' = 1/2.$$

Man beachte aber, daß bei HUND (152) dieselbe Bezeichnungsweise in *anderer* Bedeutung gebraucht wird.

FEENBERG und WIGNER (69) haben nun für alle Kerne bis  ${}^{16}\text{O}$  die tiefsten Terme berechnet. Dieselben und noch weitergehende Resultate erzielte HUND (152). Die Proton-Neutron-Kraft wurde von FEENBERG-WIGNER gemäß (2), § 17 angesetzt. Die Kraft zwischen gleichartigen Teilchen ist als wenigstens ungefähr gleich damit anzusetzen, und es macht für die Ergebnisse nicht viel aus, ob exakte oder ungefähre Gleichheit angenommen wird. In Tabelle 2 sind die Ergebnisse (abgekürzt) wiedergegeben; die tiefsten Terme sind angeschrieben, und dazu ihre in Elektronenruhenenergien  $m_0c^2$  gemessenen Abstände. Diesen Zahlenwerten ist zwar keine allzu große Bedeutung beizulegen, da die benutzten Approximationen (HARTREE-Methode) roh sind; aber die Reihenfolge der Terme dürfte im allgemeinen zuverlässig sein, so daß man insbesondere auch den *Grundzustand* erkennt<sup>2</sup>.

Wir haben außerdem noch die zugehörigen *Symmetriecharaktere* nach HUND (152) angegeben; für nähere Erläuterungen vgl. die HUNDSche Arbeit.

Die HEISENBERG-Kraft wird nun eine *Aufspaltung* der Terme  ${}^{22}\text{S}$ ,  ${}^{22}\text{P}$ , ... bewirken:  $\sigma$  und  $\sigma'$  setzen sich zu einer gequantelten Resultante zusammen, und es entstehen je ein Singulett- und ein Tripletterm. Dagegen werden  ${}^{11}\text{S}$ ,  ${}^{11}\text{P}$ , ... Singulett-Terme bleiben; und aus  ${}^{12}\text{S}$ ,  ${}^{12}\text{P}$ , ... werden Dublett-Terme.

<sup>1</sup> Für einige weitere Fälle werden wir aber hernach das Ergebnis auch einfacher begründen können.

<sup>2</sup> Grundsätzliche Untersuchungen zur Anwendbarkeit der HARTREE-Methode auf die Kerne s. (84, 85, 164).

Nicht die HEISENBERG-Kraft, wohl aber andere, noch kleinere, von INGLIS (45) erörterte Energieanteile werden dann  ${}^2P$ ,  ${}^3P$  usw. noch einmal aufspalten:

Bei  ${}^6_3\text{Li}$ ,  ${}^{14}_7\text{N}$ ,  ${}^{10}_5\text{B}$  ergibt sich nach FEENBERG-WIGNER eine Aufspaltung  ${}^1S - {}^3S$  von 6 bis  $9 m_0 c^2$ ; und wie beim Deuteron liegt  ${}^3S$  tiefer als  ${}^1S$ . Man bekommt also für diese Kerne im Grundzustand ein Drehmoment  $i = 1$ . Empirisch stimmt das tatsächlich für  ${}^6_3\text{Li}$  und  ${}^{14}_7\text{N}$ ; für  ${}^{10}_5\text{B}$  fehlt die experimentelle Bestimmung noch. — Weiteres zur Theorie des  ${}^6_3\text{Li}$  bei INGLIS (86).

Tabelle 3.

MAJORANA	MAJORANA + HEISENBERG	Bahn-Spin-Kopplung (INGLIS)
${}^{11}S$	${}^1S$	${}^1S_0$
${}^{11}P$	${}^1P$	${}^1P_1$
${}^{12}S$	${}^2S$	${}^2S_{1/2}$
${}^{12}P$	${}^2P$	${}^2P_{1/2}, {}^2P_{3/2}$
${}^{22}S$	$\begin{cases} {}^1S \\ {}^3S \end{cases}$	${}^1S_0, {}^3S_1$
${}^{22}P$	$\begin{cases} {}^1P \\ {}^3P \end{cases}$	${}^1P_1, {}^3P_0, {}^3P_1, {}^3P_2$

Bei  ${}^8_3\text{Li}$  und  ${}^{12}_5\text{B}$  ist die Aufspaltung  ${}^1P - {}^3P$  so klein, daß man theoretisch noch nicht entscheiden kann, welches der tiefere Term sein wird. Also wäre  $i = 0$  oder  $1$  oder  $2$  möglich. Aber es bestehen empirische Gründe, anzunehmen, daß der Grundzustand  ${}^3P_2$  mit  $i = 2$  ist: Das  ${}^8_3\text{Li}$  geht unter  $\beta$ -Emission in  ${}^8_4\text{Be}$  über, und die Energiebilanz (37) spricht nach BREIT und WIGNER (32) dafür, daß dieses  ${}^8_4\text{Be}$  angeregt ist. Es muß sich um den Zustand  ${}^1D_2$  des  ${}^8_4\text{Be}$  handeln; zum Teil gehen die  ${}^8_3\text{Li}$ -Atome aber auch in einen noch höheren Zustand des  ${}^8_4\text{Be}$  über (89). Die Annahme  $i = 2$  für den  ${}^8_3\text{Li}$ -Grundzustand macht aber wegen der beim  $\beta$ -Zerfall geltenden Auswahlregel  $\Delta i = 0, \pm 1$  verständlich, daß  ${}^8_3\text{Li}$  nicht unmittelbar in den Grundzustand  ${}^1S_0$  des  ${}^8_4\text{Be}$  übergehen kann (32). Andererseits wird beim  ${}^{12}_5\text{B}$  durch den  $\beta$ -Übergang in  ${}^{12}_6\text{C}$  [vgl. (6)] gerade der Wert  $i = 2$  ausgeschlossen.

Aus den  ${}^{12}P$ -Grundtermen bekommen wir für  ${}^5_3\text{Li}$ ,  ${}^5_2\text{He}$ ,  ${}^{15}_7\text{N}$ ,  ${}^{15}_8\text{O}$ ,  ${}^7_3\text{Li}$ ,  ${}^{13}_6\text{C}$ ,  ${}^{13}_7\text{N}$ ,  ${}^9_5\text{B}$ ,  ${}^9_4\text{Be}$ ,  ${}^{11}_5\text{B}$ ,  ${}^{11}_6\text{C}$  einen Wert  $i = 1/2$  oder  $3/2$ . Empirisch ist  $i = 3/2$  für  ${}^7_3\text{Li}$ ; und danach wird man für die reziproken Fälle  ${}^{13}_6\text{C}$  und  ${}^{13}_7\text{N}$  umgekehrt  $i = 1/2$  erwarten. Eine theoretische Begründung dafür, daß  $i = 3/2$  bei  ${}^7_3\text{Li}$  tiefer liegt, gibt INGLIS (45), der eine Aufspaltung  ${}^3P_{1/2} - {}^3P_{3/2}$  von  $\approx 0,2$  MeV berechnet. Das entspricht gut den experimentellen Feststellungen von RUMBAUGH und HAFSTAD (37) an der Reaktion  ${}^6_3\text{Li} + {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H}$ . Man erhält nämlich bei dieser Reaktion zwei Gruppen von Protonen mit einem Energieunterschied von  $\approx 0,4$  MeV, und zwar ist das Intensitätsverhältnis  $1 : 2$ , entsprechend den statistischen Gewichten der beiden  ${}^2P$ -Zustände des  ${}^7_3\text{Li}$  [vgl. auch (73 und 177)]. HAXEL (108) erschließt aus der Reaktion  ${}^{10}_5\text{B} + {}^1_0\text{Nn} \rightarrow {}^7_3\text{Li} + {}^4_2\text{He}$  für  ${}^7_3\text{Li}$  eine Anregungsstufe mit dem Werte  $0,9$  MeV, der wohl etwas zu groß sein dürfte.

Durch Beschießung mit  $\alpha$ -Teilchen können Li-Atome angeregt und zur  $\gamma$ -Emission veranlaßt werden; man erhielt  $h\nu = 0,5$  oder  $0,7$  MeV (6, 52), was wieder dem Übergang  ${}^2P_{1/2} \rightarrow {}^2P_{3/2}$  zugeschrieben werden

könnte. Zur Deutung von (96) dagegen vgl. (6). Die Reaktion  ${}^{12}_6\text{C} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^{13}_7\text{N} + h\nu$  (73) läßt ferner die Termdifferenz  ${}^2P_{1/2} - {}^2P_{3/2}$  für  ${}^{13}_7\text{N}$  erkennen; sie beträgt ungefähr 0,08 MeV.

Auch für  ${}^5_3\text{Li}$  und  ${}^5_2\text{He}$  ist nach den Erwägungen INGLIS' die obige Voraussage zu verschärfen:  $i = 3/2$ ; und die reziproken Fälle  ${}^{15}_7\text{N}$ ,  ${}^{18}_8\text{O}$  müssen dann umgekehrt  $i = 1/2$  haben.

BETHE und ROSE (68) haben im Anschluß an FEENBERG-WIGNER die Untersuchung von INGLIS weitergeführt und festgestellt, daß für die weiteren Kerne  ${}^9_4\text{Be}$ ,  ${}^9_5\text{B}$  die Drehimpulsquantenzahl  $i = 3/2$ , für  ${}^{11}_5\text{B}$ ,  ${}^{11}_6\text{C}$  dagegen  $i = 1/2$  ist. Ferner finden sie — im Einklang mit den obigen Erwägungen —, daß bei  ${}^8_3\text{Li}$  unter den  ${}^3P$ -Termen der mit  $i = 2$  der tiefste ist, bei  ${}^{12}_5\text{B}$  dagegen der mit  $i = 0$ , der dann also als Grundterm anzusehen ist.

Eindeutig bekommen wir  $i = 0$  für die  ${}^{11}\text{S}$ -Grundterme der Tabelle 2, also für  ${}^4_2\text{He}$ ,  ${}^{16}_8\text{O}$ ,  ${}^6_2\text{He}$ ,  ${}^{14}_6\text{C}$ ,  ${}^8_4\text{Be}$ ,  ${}^{12}_6\text{C}$ ,  ${}^{10}_6\text{C}$ ,  ${}^{10}_4\text{Be}$ . Empirisch stimmt das für  ${}^4_2\text{He}$ ,  ${}^{16}_8\text{O}$ ,  ${}^{12}_6\text{C}$ .

Insgesamt haben wir also folgende Kernmomente:

Tabelle 4.

Kern	${}^4_2\text{He}$	${}^5_2\text{He}$	${}^5_3\text{Li}$	${}^8_4\text{Be}$	${}^8_5\text{B}$	${}^7_3\text{Li}$	${}^8_3\text{Li}$	${}^8_4\text{Be}$	${}^9_4\text{Be}$	${}^9_5\text{B}$
Term	${}^1\text{S}$	${}^2\text{P}$	${}^2\text{P}$	${}^1\text{S}$	${}^3\text{S}$	${}^2\text{P}$	${}^3\text{P}$	${}^1\text{S}$	${}^2\text{P}$	${}^2\text{P}$
$i$	0	3/2	3/2	0	1	3/2	2	0	3/2	3/2
$\mu$	0			0	0,85	3,07	0,97	0	-1,65	3,50

Kern	${}^{10}_4\text{Be}$	${}^{10}_6\text{C}$	${}^{10}_5\text{B}$	${}^{11}_5\text{B}$	${}^{11}_6\text{C}$	${}^{12}_6\text{C}$	${}^{13}_5\text{B}$	${}^{13}_6\text{C}$	${}^{13}_7\text{N}$
Term	${}^1\text{S}$	${}^1\text{S}$	${}^3\text{S}$	${}^2\text{P}$	${}^2\text{P}$	${}^1\text{S}$	${}^3\text{P}$	${}^2\text{P}$	${}^2\text{P}$
$i$	0	0	1	1/2	1/2	0	0	1/2	1/2
$\mu$	0	0	0,85	-0,52	1,57	0	0	1,14	-0,72

Kern	${}^{14}_6\text{C}$	${}^{14}_7\text{N}$	${}^{15}_7\text{N}$	${}^{15}_8\text{O}$	${}^{16}_8\text{O}$
Term	${}^1\text{S}$	${}^3\text{S}$	${}^2\text{P}$	${}^2\text{P}$	${}^1\text{S}$
$i$	0	1	1/2	1/2	0
$\mu$	0	0,85	-0,28	0,67	0

Hier sind auch noch die in Kernmagnetonen ausgedrückten *magnetischen* Momente  $\mu$  aufgeführt, die von BETHE und ROSE (68) berechnet sind, auf Grund der empirischen Werte  $\mu = 2,85$  für das Proton und  $\mu = -2,00$  für das Neutron; mit dem anscheinend genaueren Wert  $\mu = 2,6$  für das Proton würden sich also die berechneten Werte  $\mu$  noch ein wenig ändern. Bei  ${}^8_3\text{Li}$  und  ${}^7_3\text{Li}$  haben wir gute Übereinstimmung mit den empirischen (42, 39, 103) Werten  $\mu = 0,85$  und  $\mu = 3,20$ .

Wie FEENBERG und PHILIPS (77) in Fortführung der Untersuchung von FEENBERG-WIGNER feststellen, könnte für  ${}^{14}_7\text{N}$  und  ${}^{10}_5\text{B}$  möglicherweise  ${}^3D$  noch tiefer liegen als  ${}^3S$ . Der sich dann ergebende Wert  $\mu = 0,33$  für  ${}^{14}_7\text{N}$  scheint der Erfahrung besser zu entsprechen, als 0,85.

In den Elektronenhüllen hat die Schale  $L_{21}$  für sich allein die maximale Besetzungszahl 2; und  $L_{22}$  allein hat 4. Wir können dieselbe Unterteilung der 2  $p$ -Schale auch bei den Kernen vornehmen; nur hat jetzt gemäß ENGLIS nicht  $L_{21}$ , sondern umgekehrt  $L_{22}$  die *festere* Bindung. Bei  $^{12}\text{C}$  ist  $L_{22}$  gerade gefüllt; dies macht sogleich den  $^1S_0$ -Grundzustand verständlich. Unterhalb  $^{12}\text{C}$  sind folgende Kernpaare *reziprok in bezug auf die  $L_{22}$ -Schale*:  $^4\text{He} \leftrightarrow ^{12}\text{C}$ ;  $^5\text{Li} \leftrightarrow ^{11}\text{B}$ ;  $^6\text{He} \leftrightarrow ^{10}\text{C}$ ;  $^7\text{Li} \leftrightarrow ^9\text{B}$ ;  $^8\text{Be} \leftrightarrow ^8\text{B}$ . Für diese Paare haben wir in der Tat in Tabelle 2 gleiche Grundterme. Dasselbe gilt für die bei ausgefüllter  $L_{22}$ -Schale in bezug auf die  $L_{21}$ -Schale reziproken Paare  $^{16}\text{O} \leftrightarrow ^{18}\text{C}$ ;  $^{12}\text{N} \leftrightarrow ^{13}\text{N}$ ;  $^{16}\text{O} \leftrightarrow ^{18}\text{C}$ . Bei  $^{11}\text{B}$  und  $^{10}\text{C}$  haben wir gerade ein Loch in der Protonen- bzw. Neutronenschale  $L_{22}$ ; also erwarten wir  $i = 3/2$ . Bei  $^{12}\text{C}$  und  $^{13}\text{N}$  haben wir je *ein* Neutron bzw. Proton in der  $L_{21}$ -Schale, und demgemäß  $i = 1/2$ . Diese Bemerkungen, die noch vervollständigt werden könnten, zeigen, daß die durch die oben besprochenen umständlichen Untersuchungen erhaltenen Ergebnisse zum großen Teil auch einfacher begründet werden können, und somit *weitgehend unabhängig* sind von spezielleren Annahmen betreffs der Kernkräfte.

**20. Spezielle Reaktionen.** Betreffs einiger experimentell gefundener Anregungsstufen der in § 19 besprochenen Kerne ist die Deutung noch ungewiß; vgl. (69, 6, 123). Klare Verhältnisse bestehen jedoch bei  $^{12}\text{C}$ ; dieser Fall ist von BOTHE (96) und MAIER-LEIBNITZ (115) untersucht mit einer Methodik,

die für die weitere Untersuchung der Kernspektren wegweisend werden dürfte: der Zusammenhang der in der Reaktion  $^9\text{Be} + ^4\text{He} \rightarrow ^{12}\text{C} + ^1\text{Nn}$  auftretenden Elementarprozesse ist durch *Koinzidenz*-Beobachtungen sichergestellt. Die Ergebnisse sind in Abb. 2 dargelegt; vgl. dazu auch (6). Man wird die beiden untersten Terme des  $^{12}\text{C}$  gemäß Tabelle 2 als  $^1S_0$  und  $^1D_2$  ansehen; der dritte, der in die Nähe von  $^1G_4$  fällt, kann trotzdem nicht einfach mit  $^1G_4$  identifiziert werden (Auswahlregeln!). Es dürfte sich um einen Term mit einem 3  $d$ -Teilchen handeln; wir vermuten, daß es ein  $^3P$ -Term ist. Etwas abweichend von FEENBERG-WIGNER möchten wir vermuten, daß *nur* dieser Term mit  $i = 1$ , und *nicht* auch  $^1G_4$ , für die BOTHEsche Reaktion eine Rolle spielt.

Schon vorher war nach der Koinzidenzmethode der  $^2F$ -Term des  $^{13}\text{C}$  sichergestellt [vgl. (6)]. Jedoch sind die aus der Dublettaufspaltung von  $^2P$  und  $^2F$  entstehenden Komplikationen noch nicht bewältigt [vgl. aber (181)]. Ebenso ist bei  $^{13}\text{N}$  der Term  $^2F$  experimentell bekannt (73, 74), seine Aufspaltung jedoch noch nicht.

Das Berylliumisotop  $^8\text{Be}$  ist massenspektroskopisch nicht nachweisbar (26). Es tritt jedoch bei Kernumwandlungen auf (27, 28, 73,

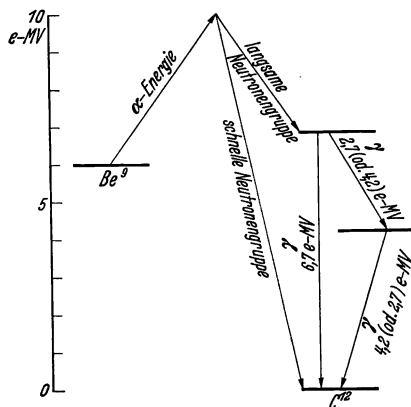


Abb. 2. Umwandlungsschema; die kinetischen Energien des Kerns sind den Neutronenergien zugerechnet.

37, 124, 20, 90, 110, 30, 91, 99), und zwar mit merklicher Lebensdauer, derart, daß es in der WILSON-Kammer zu sehen ist.

Die Masse des  ${}^8_4\text{Be}$  ist innerhalb der Fehlergrenzen gleich der doppelten von  ${}^4_2\text{He}$ , und das Nichtvorhandensein von  ${}^8_4\text{Be}$  in der Natur spricht wohl dafür, daß die Energie des  ${}^8_4\text{Be}$  ein wenig (z. B.  $\approx 10000$  Volt) größer als die von zwei  $\alpha$ -Teilchen ist, so daß eine Neigung zur Dissoziation in  $\alpha$ -Teilchen besteht [KRONIG (29)]. Jedenfalls wird schon das Anregungsniveau  ${}^1D_2$  nicht mehr stabil sein, sondern starke  $\alpha$ -Aktivität zeigen. Dies bestätigt sich durch Experimente von LEWIS, BURCHAM und CHANG (88), die nach KRONIG (29) bedeuten, daß das aus  ${}^8_3\text{Li}$  durch  $\beta$ -Prozeß gebildete (gemäß § 19 *angeregte*)  ${}^8_4\text{Be}$  sofort in zwei  $\alpha$ -Teilchen zerfällt. Dementsprechend muß natürlich das instabile Niveau  ${}^1D_2$  stark unscharf sein; die Breite dürfte  $\approx 1$  MeV betragen (89). Experimentell ergab sich neben  ${}^1D_2$  auch noch ein noch höheres  $\alpha$ -instabiles Niveau, dessen Deutung als das  ${}^1G_4$  von Tabelle 2 jedoch bedenklich scheint. Vgl. (140). Auch die Prozesse  ${}^{10}_5\text{B} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^8_4\text{Be} + {}^4_2\text{He}$  (90) und  ${}^{11}_5\text{B} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^8_4\text{Be} + {}^4_2\text{He}$  (110, 30, 91) ergeben *angeregtes*  ${}^8_4\text{Be}$  und lassen  ${}^1D_2$  erkennen.

Für eine nähere Diskussion der  $\beta$ -Umwandlung  ${}^8_3\text{Li} \rightarrow {}^8_4\text{Be}$  ist es nach KRONIG (29) naheliegend, das  ${}^8_4\text{Be}$  als aus zwei  $\alpha$ -Teilchen bestehend aufzufassen. Wegen der BOSE-Statistik der  $\alpha$ -Teilchen muß die Drehimpulszahl  $l$  *geradzahlig* sein; wir erhalten also wiederum die von FEENBERG-WIGNER auf anderem Wege gefundenen Singulett-Terme  ${}^1S_0$ ,  ${}^1D_2$ ,  ${}^1G_4$ , ... Die Umwandlung von  ${}^8_3\text{Li}$  in  ${}^8_4\text{Be}$  kann dann analog zu Molekülprozessen (FRANCK-CONDON-Prinzip) diskutiert werden.

Nach Ausweis der Bindungsenergien ist übrigens gerade bei den leichteren Kernen die Annahme präformierter  $\alpha$ -Teilchen eine durchaus nicht schlechte Approximation. Vgl. (69, 142). Insbesondere bei den Fällen  ${}^8_4\text{Be}$ ,  ${}^{12}_6\text{C}$ ,  ${}^{16}_8\text{O}$ ,  ${}^{20}_{10}\text{Ne}$  ist die Anwendung des „ $\alpha$ -Teilchen-Modells“ naheliegend.

Der in (1), § 18 angenommene Reaktionsverlauf ist neuerdings (28, 73) durch die Deutung  ${}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^8_4\text{Be} + h\nu$  ersetzt worden. Die fragliche Reaktion ist nämlich ein ausgesprochener *Resonanzeffekt*, und gibt somit Veranlassung, einen hochangeregten Zustand des  ${}^8_4\text{Be}$  anzunehmen, dessen geringe Breite — nur 11 KV — zeigt, daß er *nicht* mit einem der in Tabelle 2 genannten Zustände identisch ist. Man unterscheidet bekanntlich „gerade“ und „ungerade“ Zustände eines Quantensystems; strahlungslose Umwandlungen gibt es nur zwischen zwei geraden oder zwei ungeraden Zuständen; Dipol-Strahlungsübergänge dagegen nur zwischen einem geraden und einem ungeraden. Von dem fraglichen  ${}^8_4\text{Be}^*$  ist nun anzunehmen, daß es sich um einen ungeraden Zustand handelt (wahrscheinlich mit  $i = 1$ ), der also (im Gegensatz zu den Termen der Tabelle 2) *nicht* eine strahlungslose Dissoziation in zwei unangeregte  $\alpha$ -Teilchen erlaubt<sup>1</sup>. Nach BETHE und PLACZEK (114)

<sup>1</sup> Während die in Tabelle 2 gegebenen Terme des  ${}^8_4\text{Be}$  den Symmetriecharakter  $\overline{1234}$  in der HUNDSchen Bezeichnungsweise haben, ist dem fraglichen Zustand  $\overline{123} 4$  zuzuschreiben.



sollte danach nur ein Zerfall in  ${}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H}$  in Betracht kommen. Doch scheint uns der Ausschluß eines Zerfalls in  ${}^4_2\text{He} + {}^4_2\text{He}^*$  nicht überzeugend begründet; findet er statt, so kommen wir im wesentlichen auf (1), § 18 zurück. — Der fragliche Anregungszustand dürfte übrigens ein  ${}^1P_1$  sein; vorstellbar als aus einem normalen  ${}^4_2\text{He}$  und einem angeregten (im Zustand  ${}^1P_1$ ) zusammengesetzt. Noch unterhalb dieses Zustands liegt übrigens ein  ${}^3P$ -Term des  ${}^8_4\text{Be}$ , der dem  ${}^3P$  des  ${}^4_2\text{He}$  entspricht. Beide Terme sind in den noch näher zu besprechenden Untersuchungen von HUND (152) mit erfaßt.

Betreffs weiterer Reaktionen der uns interessierenden leichten Kerne vgl. (5, 6, 10) und z. B. (92, 41, 122, 125, 82, 83, 94, 95, 109, 105, 128, 134, 135, 141, 154, 156, 178, 179, 177, 180).

Bei  ${}^{15}_7\text{N}$  ist ein Anregungsniveau experimentell bekannt, bei welchem offenbar ein Teilchen in die 3  $d$ -Schale gehoben sein muß (69). Zu einer näheren Analyse dieses Falles fehlen jedoch noch die theoretischen Vorarbeiten. Dagegen enthält die HUNDSche Arbeit (152) bereits einige Feststellungen (dortige Tabellen 7, 8) für Kerne mit bereits *abgeschlossener* 2  $p$ -Schale. Z. B. entnehmen wir dort, daß für  ${}^{19}_9\text{F}$  die tiefste Termgruppe (Symmetriecharakter  $\overline{123}$ )  ${}^2S$ ,  ${}^2D$ ,  ${}^2F$ ,  ${}^2G$ ,  ${}^2J$  lauten muß; und in der Tat ist empirisch  $i = 1/2$ .

Für die oben schon erwähnten aus 2, 3, 4, 5, ...  $\alpha$ -Teilchen bestehenden Kerne sind offenbar ganz allgemein eine tiefste Termgruppe  ${}^1S_0$ ,  ${}^1D_2$ ,  ${}^1G_4$ , ... , sowie Terme  ${}^3P$ ,  ${}^1P$  zu erwarten.

**21. Isobare.** Die Hypothese, daß die nichtelektrischen Kräfte zwischen einem Paar von Kernteilchen in jedem der 3 Fälle Proton-Proton, Proton-Neutron und Neutron-Neutron *dieselben* seien, muß nach dem jetzigen Stande unseres Wissens als mindestens mit erheblicher Approximation zutreffend anerkannt werden. Da nun die Rolle der COULOMB-Kraft nur eine untergeordnete ist, so wird man daraufhin erwarten müssen, daß *isobare Kerne angenähert dasselbe Termsystem zeigen, soweit nicht Ausfälle auf Grund des PAULI-Verboteseintreten.*

Beachtet man noch weiterhin, daß die MAJORANA-Kraft gegenüber der HEISENBERG-Kraft die Hauptrolle spielt, so ergibt sich die Möglichkeit, als *erste Approximation* für die Bestimmung der Termsysteme ein vereinfachtes Modell zu benutzen, in welchem 1. die Annahme des „*universellen*“ Kernkraftgesetzes *exakt* gilt, und ferner auch die COULOMB-Kräfte zunächst vernachlässigt werden; 2. die *Spinabhängigkeit* der Kernkräfte ganz gestrichen wird. Für ein solches schematisiertes Modell kann man nun durch *Symmetriebetrachtungen* (Anwendungen der Gruppentheorie) sehr viel erreichen. WIGNER (97) und noch wesentlich ausführlicher HUND (152) haben derartige Betrachtungen durchgeführt. HUNDS Ergebnisse umfassen auch die in § 19 erläuterten Ergebnisse von FEENBERG und WIGNER, und gehen über diese wesentlich hinaus durch Untersuchung der höher gelegenen Termgruppen. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen von HUND und WIGNER können hier nur auszugsweise wiedergegeben werden; ihre ganze Bedeutung und Fruchtbarkeit für die kernphysikalische Forschung dürfte sich erst mit dem weiteren Fortschritt der experimentellen Arbeit voll entwickeln.

Die Abb. 3—5 geben nach HUND Termsysteme für das in der erläuterten Weise schematisierte Modell. Dabei gehört also jedes Termsystem zu je einer

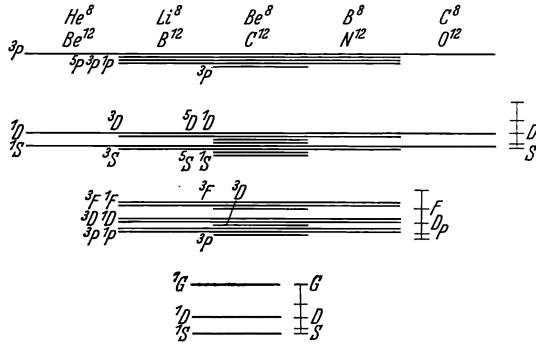


Abb. 3. Terme für  $p^4$  und  $p^6$ .



Abb. 4. Terme für  $p^5$  und  $p^7$ .

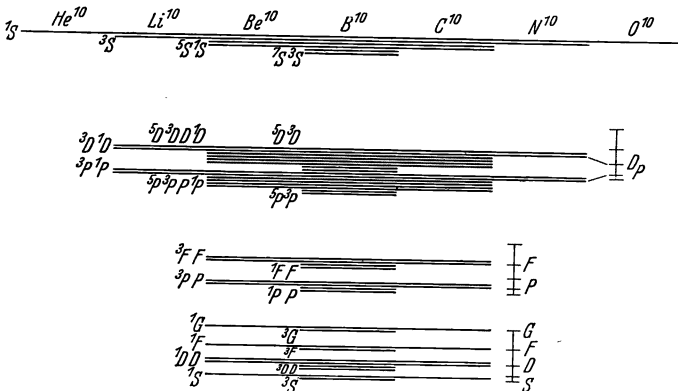


Abb. 5 Terme für  $p^8$ .

Reihe von Isobaren. Aber jeder einzelne Term tritt nicht bei allen diesen Isobaren, sondern nur bei einigen auf; das ist durch die verschiedene Länge

der Niveaustiche angezeigt. Man sieht, daß diejenigen Isobare, welche *gleiche* bzw. nur um 1 verschiedene Protonen- und Neutronenzahl besitzen, jeweils das *umfangreichste* Termschema zeigen: mit wachsendem Betrage  $|I| = |A - 2Z|$  fallen immer mehr Terme auf Grund des PAULI-Verbotes aus. Das ist sehr schön zu sehen an den Beispielen  ${}^7_3\text{Li}$  und  ${}^9_4\text{Be}$ , sowie  ${}^{10}_5\text{B}$ ;  ${}^{12}_6\text{C}$ ,  ${}^{14}_7\text{N}$ . Es sei dem Leser übrigens empfohlen, durch eingehenden Vergleich dieser Abbildungen mit Tabelle 2 die Übereinstimmung der über die tiefsten Termgruppen gemachten Angaben festzustellen. Natürlich sind die in den HUNDSchen Abbildungen gezeichneten Terme zum großen Teil in Wirklichkeit energetisch instabil, so daß auch die angegebenen Kerne zum erheblichen Teil schon nicht mehr existenzfähig sind.

Es kann wünschenswert werden, bei Bezeichnung eines bestimmten Termes sogleich anzugeben, *bei wievielen* Isobaren er auftritt. Wir schreiben diese Anzahl links oben vor das Termsymbol in folgender Weise:

$$\begin{array}{c} {}^{11}S, {}^{11}D, {}^{11}G; {}^{13}P \text{ kommen nur bei } {}^4_2\text{Be vor;} \\ \hline \begin{array}{ccc} {}^{313}P, {}^{311}P; & {}^{313}D, {}^{311}D; & {}^{313}F, {}^{311}F \\ \hline {}^{3122}P; & {}^{3122}D; & {}^{3122}F \end{array} \text{ kommen bei } {}^4_2\text{Be; } {}^6_3\text{Li, } {}^8_4\text{Be, vor.} \end{array}$$

HUND schreibt diese Symbole ohne den hier angewandten Trennungsstrich; man muß sich dann also hüten vor Verwechslungen mit den oben nach FEENBERG-WIGNER gebrauchten Bezeichnungen.

Werden nun die im schematisierten Modell vernachlässigten Kräfte ergänzend eingeführt, so ergeben sich: 1. *Aufspaltungen* von Termen, die im vereinfachten Modell exakt zusammenfielen. Diese Aufspaltungen sind übrigens in den HUNDSchen Zeichnungen zum Teil (Triplet-Singulett-Trennung usw.) bereits mit dargestellt. 2. Termverschiebungen durch die HEISENBERG- (und BARTLETT-)Kraft. Man kann dies in Tabelle 2 am Beispiel der Isobaren vom Atomgewicht 10 erkennen. 3. Termverschiebungen durch die COULOMB-Kraft. Diese werden geringer sein; aber ihre monotone Zunahme beim Übergang zu höheren Kernen ist, wie wir sehen werden, in diesem Zusammenhange wichtig.

Man kann nämlich aus den Untersuchungen von HUND und WIGNER auch entnehmen, daß die empirisch festzustellende „Periodizität“ der Kerneigenschaften mit der Periode 4 im Atomgewicht eine notwendige Folge unserer Ansätze betreffs der Kernkräfte ist. [Vgl. hierzu übrigens auch (175).] Insbesondere ist zu sagen: Wenn man die HUNDSchen Abb. 3—5 vereinfacht in dem Sinne, daß auf die Unterscheidung der Terme hinsichtlich der *Bahndrehimpulszahl l verzichtet* wird, so entstehen Schemata, die nach WIGNER ganz allgemein anzuwenden sind auf alle Kerne vom Atomgewicht  $4n$  (Abb. 3) bzw.  $4n \pm 1$  (Abb. 4) bzw.  $4n + 2$  (Abb. 5). Das erlaubt nun, unsere Frage von § 12, die Bestimmung von  $I = A - 2Z$  als Funktion von  $A$ , in verfeinerter Form wieder aufzunehmen.

Für Kerne  $A = 4n + 2$  beispielsweise hätten wir nach Abb. 5 stets zu erwarten, daß das Isobar mit  $I = 0$  und dem Grundzustand  ${}^3S_1$  das stabilste wäre. Nun ändert aber mit wachsendem  $n$  die COULOMB-Kraft unsere Abb. 5 fortschreitend in dem Sinne, daß die Terme *erhöht* werden, um so mehr, *je weiter sie nach rechts liegen*. Also wird von einem gewissen Werte  $n$  ab der Kern mit  $I = 2$  einen Grundterm  ${}^1S_0$  haben, der *tief* liegt als  ${}^3S_1$  von  $I = 0$ . Empirisch zeigt eine Isotopentafel [z. B. (1)], daß die gegenüber  $\beta^-$ - und  $\beta^+$ -Emission *stabilen* Kerne  $A = 4n + 2$  von  $n = 1$  bis  $n = 3$  tatsächlich  $I = 0$  haben, aber von  $n = 4$  an (das ist  ${}^{18}_8\text{O}$ ) bis  $n = 11$  stets  $I = 2$ . Die Lage dieser und weiterer analoger „Übergangspunkte“ — z. B. bei  ${}^{37}_{17}\text{Cl}$ ,  ${}^{49}_{18}\text{A}$ ,  ${}^{48}_{20}\text{Ca}$  und bei  ${}^{49}_{22}\text{Ti}$ ,  ${}^{50}_{22}\text{Ti}$ ,  ${}^{51}_{23}\text{V}$  — ist nach WIGNER

theoretisch im Einklang mit den empirischen Verhältnissen berechenbar. (Bis etwa Mo aufwärts; bei noch höheren Kernen wird die Methode unzulänglich.) Übrigens kann man diese Berechnung auch ohne ein Zurückgreifen auf die Abb. 3—5 auf schnellerem Wege erhalten (98). Man versteht durch diese Überlegungen ferner gewisse empirische Regeln, wie etwa die, daß bei  $I > 0$  niemals ungerades  $Z$  bei geradem  $A$  einen stabilen Kern ergibt. (Offenbar ist in diesen Fällen stets durch Bildung eines weiteren  $\alpha$ -Teilchens im Kern eine stärkere Bindung zu erzielen.)

Wie WIGNER (188) neuestens gezeigt hat, können diese Überlegungen noch wesentlich weitergeführt werden; viele experimentelle Daten können danach theoretisch in geradezu erstaunlicher Übereinstimmung berechnet werden.

Betreffs der genaueren Erörterung der energetischen Stabilitätsbedingungen gegenüber  $\beta^-$ -Emission,  $\beta^+$ -Emission und Kernabsorption eines  $K$ -Schalenelektrons vgl. die interessante Arbeit von SIZOO (162).

Endlich sei noch hingewiesen auf die bemerkenswerten empirischen Regeln, die SCHÜLER und KORSCHING (106) betreffs der Drehmomente auch der höheren Kerne zusammengestellt haben, und deren weitere Verfolgung wichtige Aufschlüsse erhoffen läßt.

**22. Auswahlregeln.** Die Möglichkeiten der Kernumwandlungsprozesse sind naturgemäß eingeschränkt durch *Auswahlregeln*. Diese lassen sich folgendermaßen aussprechen (114).

Es handele sich um eine Reaktion



ein Kern  $A$  werde beschossen mit einem Teilchen  $P$ ; dieses bleibt stecken, womit sich  $C$  ergibt; und  $C$  seinerseits geht in den Kern  $B$  über unter Abspaltung eines Teilchens  $Q$ .

Der Kern  $C$  habe die Drehquantenzahl  $J$ ; dann muß also auch für das System  $A + P$  und für  $B + Q$  der resultierende Gesamtdrehimpuls gleich  $J$  sein. Nun seien  $i$  und  $i'$  die Drehquantenzahlen für  $A$  und  $B$ , und  $s, s'$  diejenigen für  $P$  und  $Q$ . Endlich gibt es Quantenzahlen  $l$  und  $l'$  für das *Bahndrehmoment* von  $P$  relativ zu  $A$ , bzw. von  $Q$  relativ zu  $B$ .

Dann haben wir die Auswahlregeln

$$\left. \begin{aligned} |i - J| &\leq l + s, \\ |i + J| &\leq l - s \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

und

$$|i' - i| \leq l + l' + s + s'. \quad (3)$$

Zu (2) kommen natürlich noch die analogen Ungleichungen für den zweiten Teilprozeß, also für  $i', l', s'$ . Übrigens gelten (2), (3) auch dann, wenn die Reaktion nach dem Schema  $A + P \rightarrow B + Q$  erfolgt, *ohne* einen Zwischenkern  $C$ .

Man kann als  $P$  oder  $Q$  auch *Lichtquanten* zulassen, wenn man dann definitionsmäßig  $s$  bzw.  $s'$  durch 0 ersetzt, und  $l$  bzw.  $l'$  durch 1 für *Dipolstrahlung*, und durch 2 für *Quadrupolstrahlung*.

Wenn  $P$  ein *langsames* Teilchen ist, so kommt für  $l$  nur der Wert 0 in Frage. Ebenso natürlich für  $l'$ , falls  $Q$  langsam ist.

Es kommen dann noch, wie in der Spektroskopie, einige Zusatzverbote in Betracht; wir verzeichnen sie in der Tabelle 5 [nach (114)], die unter  $J$  Folgerungen aus dem oben Gesagten enthält:

Tabelle 5.

	$J$	Verboten	Spiegelungscharakter
$h\nu$ , Dipol . . . . .	$i, i \pm 1$	$0 \rightarrow 0$	geändert
$h\nu$ , Quadrupol . . . . .	$i, i \pm 1, i \pm 2$	$0 \rightarrow 0$	
<i>langsames:</i>		$0 \rightarrow 1$	ungeändert
Proton oder Neutron . . . . .	$i \pm 1/2$	—	
$\alpha$ -Teilchen . . . . .	$i$	—	
Deuteron . . . . .	$i, i \pm 1$	$0 \rightarrow 0$	

Hier ist auch noch hervorgehoben, daß bei Dipolstrahlung stets „ungerade“ Terme in „gerade“ (oder umgekehrt) übergehen, bei den anderen Fällen dagegen nur gerade in gerade, oder ungerade in ungerade.

Die im Obigen ausführlicher besprochenen Reaktionen bieten Beispiele, an denen man sich von der Erfüllung der Auswahlregeln überzeugen kann.

Über die Auswahlregel für *magnetische* Dipolstrahlung vgl. (126). — Betreffs der  $\beta$ -Strahlung erwähnten wir oben die Auswahlregel  $\Delta i = 0, \pm 1$ .

**23. Relativistische Effekte.** In § 19 haben wir mehrfach Bezug genommen auf eine Untersuchung von INGLIS (45), welche die theoretische Begründung für die energetische Reihenfolge der Terme  ${}^2P_{3/2}$ ,  ${}^2P_{1/2}$  oder  ${}^3P_2$ ,  ${}^3P_1$ ,  ${}^3P_0$  usw. gab. Es handelt sich dabei um eine sinngemäße Übertragung der älteren Gedankengänge von THOMAS, welche noch vor der Aufstellung der DIRAC-Gleichung eine korrespondenzmäßige Begründung für den Faktor 2 im Verhältnis des magnetischen und mechanischen Spinmoments des Elektrons lieferten. Es erhellt hieraus die Wichtigkeit von Untersuchungen, welche sich mit den relativistischen Effekten in den Kernspektren befassen.

Zur Erläuterung der Situation wird ein kurzer Vergleich mit den COULOMBSchen Wirkungen nützlich sein. Es kann als unmittelbare Folge relativistischer Notwendigkeiten aufgefaßt werden, daß neben der Wirkung des elektrischen Feldes auf ein ruhendes Elektron auch eine durch die LORENTZSche Formel  $\mathfrak{K} = -\frac{e}{c} [\mathbf{v}, \mathfrak{H}]$  gegebene Kraftwirkung eines Magnetfeldes auf eine *bewegte* Ladung vorhanden ist. Analog wird man erwarten können, daß ein *bewegtes* schweres Teilchen (Proton; Neutron) im Felde der Kernbindungskräfte zusätzliche Kraftwirkungen erfährt. Man könnte diese Verhältnisse völlig übersehen, wenn man schon eine *Feldtheorie der Kernkräfte* besäße; und natürlich wird eine *vollständige* relativistische Formulierung der Wechselwirkung schwerer Teilchen *nur* in der Form einer solchen Feldtheorie gegeben werden können. Auch die COULOMBSche Wechselwirkung kann ja nur durch die Zurückführung auf das MAXWELLSche Feld vollständig in Einklang mit dem Relativitätsprinzip gebracht werden: die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wirkungen und die *Strahlungswechselwirkung* müssen berücksichtigt werden. Die bisherigen Versuche, eine Feldtheorie der Kernkräfte zu entwickeln, gehen von der Annahme aus, daß die  $\beta$ -Strahlung in bezug auf die Kernkräfte Analoges bedeute, wie die Lichtstrahlung in bezug auf die COULOMB-Kraft. Aber diese Versuche stehen bislang noch erheblichen Schwierigkeiten gegenüber; und außerdem

ist die Vermutung geäußert worden, daß *nicht* die  $\beta$ -Strahlung, sondern vielmehr eine Strahlung von Elektronenpaaren mit den Kernkräften in Zusammenhang zu bringen sei.

Deshalb wird es zweckmäßiger sein, von der vollständigen Feldtheorie der Kernkräfte zunächst abzusehen, und eine *approximativ relativistische* Formulierung der Kernkräfte zu erstreben, welche das Analogon der LORENTZ-Kraft, sowie ferner den THOMAS-INGLIS-Effekt umfaßt. In diesem Sinne ist das Problem von BREIT (78) und KEMMER (190) behandelt worden. BREIT findet, daß es verschiedene erwägare Möglichkeiten gibt, eine approximativ relativistische Verallgemeinerung der Kernkraftgesetze durchzuführen. Das Experiment wird zwischen diesen Möglichkeiten entscheiden müssen.

Auch von diesen Fragen aus ergibt sich eine sehr bestimmte Aufgabenstellung für die experimentelle Kernphysik: Das *Dringlichste und Wichtigste vom theoretischen Standpunkt aus* ist zur Zeit die *möglichst umfassende und möglichst genaue empirische Feststellung der niedrigsten Anregungsstufen der leichten Kerne*, sowie ihre genauere Analyse hinsichtlich der Drehimpulse  $i$  (und, soweit möglich, der magnetischen Momente  $\mu$ ). *Koinzidenzbeobachtungen* nach BOTHE dürften dabei entscheidend wichtig sein.

### Literaturverzeichnis.

(Literatur 1936 bis Juni 1937.)

#### A. Zusammenfassende Darstellungen.

1. WEIZSÄCKER, C. F. v.: Die Atomkerne. Leipzig 1937.
2. BETHE, H. A. and R. F. BACHER: Rev. of mod. Physics **8**, 82 (1936).
3. Kernphysik. Herausgeg. von E. BRETSCHER. Berlin 1936.
4. KOPFERMANN, H.: Erg. exakt. Naturwiss. **15**, 229 (1936).
5. PHILIPP, K.: Kernspektren. Leipzig 1937.
6. FLÜGGE, S. u. A. KREBS: Physik. Z. **38**, 13 (1937).
7. JORDAN, P.: Naturwiss. **24**, 209 (1936); **25**, 273 (1937).
8. — Anschauliche Quantentheorie. Berlin 1936.
9. SEXL, TH.: Naturwiss. **25**, 153 (1937).
10. DIEBNER, K. u. E. GRASSMANN: Physik. Z. **37**, 359 (1936); **38**, 406 (1937).

#### B. Einzelabhandlungen.

11. WENTZEL, G.: Naturwiss. **23**, 35 (1937).
12. BLOCH, F.: Physic. Rev. **50**, 259 (1936); **51**, 994 (1937).
13. HOFFMAN, I. G., M. S. LIVINGSTONE and H. A. BETHE: Physic. Rev. **51**, 214 (1937). — POWERS, P. N., H. G. BEYER and I. R. DUNNING: Physic. Rev. **51**, 51, 371 (1937). — POWERS, P., H. CARROLL and J. DUNNING: Physic. Rev. **51**, 1022 (1937). [Negativ: L. I. LASLETT: Physic. Rev. **51**, 22 (1937).]
14. POLLARD, E. and C. I. BRASEFIELD: Physic. Rev. **51**, 1 (1937).
15. — Physic. Rev. **51**, 290 (1937). Vgl. auch (14) und E. POLLARD u. C. I. BRASEFIELD: Physic. Rev. **50**, 890 (1936).
16. HARKINS, W. D.: Physic. Rev. **51**, 52 (1937). — Proc. nat. Acad. Sci. U.S.A. **23**, 120 (1937) und die dort angegebene Literatur.
17. BREIT, G. and E. WIGNER: Physic. Rev. **49**, 519 (1936).
18. BOHR, N.: Nature (Lond.) **137**, 344 (1936).
19. BONNER, T. W. and W. M. BRUBAKER: Physic. Rev. **50**, 308 (1936); daselbst weitere Literatur.

20. ALLEN, I. S.: *Physic. Rev.* **51**, 182 (1937).
21. GOLDSMITH, H. H. and F. RASETTI: *Physic. Rev.* **50**, 328 (1936) und dort genannte Literatur. Vgl. auch A. MITCHELL, E. MURPHY, M. WHITAKER: *Physic. Rev.* **50**, 133 (1937). — FINK, G.: *Physic. Rev.* **50**, 738 (1936).
22. LIVINGSTONE, S. and I. G. HOFFMAN: *Physic. Rev.* **50**, 401 (1936).
23. SEGRÈ, E. and C. T. ZAHN: *Physic. Rev.* **50**, 578 (1936).
24. AMALDI, E. and E. FERMI: *Physic. Rev.* **50**, 899 (1936) und dort genannte Literatur.
25. FURRY, W. H.: *Physic. Rev.* **50**, 381 (1936); **51**, 592 (1937). — ZAHN, C. T., E. L. HARRINGTON and S. GOUDSMIT: *Physic. Rev.* **49**, 406 (1936); **50**, 570 (1936). — BAYLEY, D. L., B. R. CURTIS, E. R. GAERTTNER and S. GOUDSMIT: *Physic. Rev.* **50**, 461 (1936). — AMALDI, E. and E. SEGRÈ: *Physic. Rev.* **50**, 571 (1936). — YOST, D. and R. DICKINSON: *Physic. Rev.* **50**, 128 (1936). — LIBBY, W. F. and E. LONG: *Physic. Rev.* **50**, 575, 577 (1936). — LAMB, W. jr.: *Physic. Rev.* **51**, 187 (1937). — CONDON, E. U. and G. BREIT: *Physic. Rev.* **49**, 229 (1936). — FINK, G., J. DUNNING, G. PEGRAM and D. MITCHELL: *Physic. Rev.* **49**, 103 (1936). — RASETTI, F., E. SEGRÈ, G. FINK, J. DUNNING and G. PEGRAM: *Physic. Rev.* **49**, 104 (1936). — WICK, G. C.: *Physic. Rev.* **49**, 193 (1936). — RAUSCH v. TRAUBENBERG, H. u. H. ADAM: *Z. Physik* **104**, 422 (1937). — FLEISCHMANN, R.: *Z. Physik* **100**, 307 (1936). — FRISCH, O., H. v. HALBAN jr. and J. KOCH: *Nature (Lond.)* **139**, 922 (1937). — YUKAWA, H.: *Proc. physic.-math. Soc. Japan* **18**, 507 (1936). — ORNSTEIN, L. and G. UHLENBECK: *Physica* **4**, 478 (1937). — WESTCOTT, C.: *Proc. Cambridge philos. Soc.* **33**, 122, 137 (1937).
26. BLEAKNEY, W., I. P. BLEWETT, R. SHERR and R. SMOLUCHOWSKI: *Physic. Rev.* **50**, 545 (1936).
27. VELDKAMP, J. and K. S. KNOL: *Physica* **4**, 166 (1937) und dort sowie in (29) genannte Literatur.
28. HAWORTH, L. J. and L. D. P. KING: *Physic. Rev.* **51**, 59 (1937). — GAERTTNER, E. R. and H. R. CRANE: *Physic. Rev.* **51**, 49 (1937). — DELSASSO, L. A., W. A. FOWLER and C. C. LAURITSEN: *Physic. Rev.* **51**, 391 (1937).
29. KRONIG, R. DE L.: *Physica* **4**, 171 (1937).
30. WILLIAMS, J. H., W. H. WELLS, J. T. TATE and E. L. HILL: *Physic. Rev.* **51**, 434 (1937) und dort genannte Literatur.
31. HEYN, F. A.: *Physica* **4**, 160 (1937).
32. BREIT, G. and E. WIGNER: *Physic. Rev.* **50**, 1191 (1936).
33. ASTON, F. W.: *Nature (Lond.)* **137**, 357, 613 (1936); **138**, 1094 (1936). — MATTAUCH, J.: *Naturwiss.* **25**, 156 (1937) und dort genannte Literatur.
34. BETHE, W. A.: *Physic. Rev.* **50**, 977 (1936).
35. CASIMIR, H. B. G.: *Physica* **3**, 936 (1936).
36. WEIZSÄCKER, C. F. v.: *Physik. Z.* **38**, 176 (1937).
37. RUMBAUGH, L. H. and L. R. HAFSTAD: *Physic. Rev.* **50**, 681 (1936).
38. BLOCH, F. and E. GAMOW: *Physic. Rev.* **50**, 260 (1936).
39. BARTLETT, J. H., J. J. GIBBONS and R. E. WATSON: *Physic. Rev.* **50**, 315 (1936).
40. MARGENAU, H.: *Physic. Rev.* **50**, 342 (1936). — FEENBERG, E.: *Physic. Rev.* **50**, 674 (1936).
41. LADENBERG, R. and R. B. ROBERTS: *Physic. Rev.* **50**, 1190 (1936); **51**, 141 (1937).
42. MANLEY, J. H. and S. MILLMAN: *Physic. Rev.* **50**, 380 (1936); **51**, 19 (1937). — MILLMAN, S. and J. ZACHARIAS: *Physic. Rev.* **51**, 380 (1937).

43. INGLIS, D. R.: *Physic. Rev.* **50**, 399 (1936). — SHARE, S.: *Physic. Rev.* **50**, 488 (1936). — MASSEY, H. S. W. and C. B. O. MOHR: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **156**, 634 (1936). — FEENBERG, E. and S. SHARE: *Physic. Rev.* **50**, 253 (1936). — FISK, I. B., L. I. SCHIFF and W. SHOCKLEY: *Physic. Rev.* **50**, 1090, 1191 (1936). — MORSE, P. M., I. B. FISK and L. I. SCHIFF: *Physic. Rev.* **50**, 748 (1936). — PRESENT, R. D.: *Physic. Rev.* **49**, 640 (1936); **50**, 635, 870 (1936). — PHILLIPS, M., L. EISENBUD and E. U. CONDON: *Physic. Rev.* **51**, 382 (1937). — PRESENT, R. D. and W. RARITA: *Physic. Rev.* **51**, 382, 788 (1937). — INGLIS, D. R.: *Physic. Rev.* **51**, 387 (1937). — HOUSTON, W.: *Physic. Rev.* **49**, 206 (1936). — FEENBERG, E.: *Physic. Rev.* **49**, 273 (1936). — DOLCH, H.: *Z. Physik* **100**, 401 (1936); **101**, 404 (1936); **104**, 473 (1937). — MARGENAU, H. and D. WARREN: *Physic. Rev.* **51**, 1003 (1937). — KROEGER, J. and D. INGLIS: *Physic. Rev.* **51**, 1003 (1937). Vgl. auch L. SCHIFF: *Physic. Rev.* **51**, 1003 (1937).
44. BACHER, R. F. and D. H. TOMBOULIAN: *Physic. Rev.* **50**, 1096 (1936).
45. INGLIS, D. R.: *Physic. Rev.* **50**, 783 (1936). Vgl. auch (67).
46. MITCHELL, D. P., F. RASETTI, G. A. FINK and G. B. PEGRAM: *Physic. Rev.* **50**, 189 (1936).
47. HORWAY, G.: *Physic. Rev.* **50**, 897 (1936).
48. SERBER, R.: *Physic. Rev.* **50**, 389 (1936).
49. OPPENHEIMER, J. R. and R. SERBER: *Physic. Rev.* **50**, 391 (1936).
50. FAY, C.: *Physic. Rev.* **50**, 560 (1936); **51**, 995 (1937).
51. MAJORANA, E.: *Z. Physik* **82**, 137 (1933).
52. SPEH, K. C.: *Physic. Rev.* **50**, 689 (1936).
53. BETHE, H. A.: *Physic. Rev.* **50**, 332 (1936).
54. BECHERT, K.: *Z. Physik* **101**, 721 (1936); **103**, 276 (1936).
55. HARKINS, W., M. KAMEN, H. NEWSON and D. GANS: *Physic. Rev.* **50**, 980 (1936).
56. WIGNER, E.: *Proc. nat. Acad. Sci. U.S.A.* **22**, 662 (1936).
57. BREIT, G. and E. FEENBERG: *Physic. Rev.* **50**, 850 (1936).
58. BHABHA, H. T.: *Nature (Lond.)* **139**, 415 (1937) und dort genannte Literatur.
59. TUVE, M. A., N. P. HEYDENBURG and L. R. HAFSTAD: *Physic. Rev.* **50**, 806 (1936); **51**, 1023 (1937).
60. BREIT, G., E. U. CONDON and R. D. PRESENT: *Physic. Rev.* **50**, 825 (1936).
61. CASSEN, B. and E. U. CONDON: *Physic. Rev.* **50**, 846 (1936).
62. WHITE, M. G.: *Physic. Rev.* **49**, 309 (1936).
63. ANDERSON, C. and S. NEDDERMEYER: *Physic. Rev.* **50**, 263 (1936).
64. BHABHA, H. T. and W. HEITLER: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **159**, 432 (1937).
65. WANG, F. S.: *Z. Physik* **100**, 734 (1936).
66. FEENBERG, E.: *Physic. Rev.* **49**, 328 (1936).
67. FURRY, W. H.: *Physic. Rev.* **50**, 784, 1099 (1936).
68. ROSE, M. E. and H. A. BETHE: *Physic. Rev.* **51**, 205, 993 (1937).
69. FEENBERG, E. and E. WIGNER: *Physic. Rev.* **51**, 95 (1937).
70. ROBERTS, A., T. ZANSTRA, R. CORTELL and F. E. MYERS: *Physic. Rev.* **49**, 783 (1936). Vgl. auch J. GIARRATANA, C. BRENNECKE: *Physic. Rev.* **49**, 35 (1936).
71. OSTROFSKY, M., G. BREIT and D. JOHNSON: *Physic. Rev.* **49**, 22 (1935). Vgl. auch N. HEYDENBURG, C. ZAHN, L. KING: *Physic. Rev.* **49**, 100 (1936). — OSTROFSKY, M., W. BLEICK and G. BREIT: *Physic. Rev.* **49**, 352 (1936).
72. DELSASSO, L., W. A. FOWLER and C. LAURITSEN: *Physic. Rev.* **51**, 527 (1937).



73. HAFSTAD, L., N. HEYDENBURG and M. TUVE: *Physic. Rev.* **50**, 504 (1936).
74. HERB, R., D. KERST and J. MC KIBBEN: *Physic. Rev.* **51**, 59 (1937). Vgl. auch (I28).
75. NEWSON, H. W.: *Physic. Rev.* **51**, 621 (1937).
76. JOHNSON, M. and A. PRIMAKOFF: *Physic. Rev.* **51**, 612 (1937).
77. FEENBERG, E. and M. PHILIPS: *Physic. Rev.* **51**, 597 (1937).
78. BREIT, G.: *Physic. Rev.* **51**, 248, 778 (1937).
79. HILL, E.: *Physic. Rev.* **51**, 370 (1937).
80. BLACKETT, P. M. S.: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **159**, 1, 19 (1937).
81. CHANG, W. Y.: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **159**, 72 (1937).
82. KEMPTON, A., B. BROWNE and R. MAASDORP: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **157**, 386 (1936).
83. SCHIFF, L.: *Physic. Rev.* **51**, 595 (1937).
84. FRANK, N. H.: *Physic. Rev.* **51**, 577 (1937).
85. BETHE, H. A. and M. E. ROSE: *Physic. Rev.* **51**, 283 (1937). — STEVENSON, A. F.: *Physic. Rev.* **51**, 590 (1937).
86. INGLIS, D. R.: *Physic. Rev.* **51**, 531 (1937).
87. SCHWINGER, I. S.: *Physic. Rev.* **51**, 544 (1937). — HALPERN, O., M. JOHNSON jr.: *Physic. Rev.* **51**, 992 (1937).
88. LEWIS, W., W. BURCHAM and W. CHANG: *Nature (Lond.)* **139**, 24 (1937).
89. BREIT, G. and E. WIGNER: *Physic. Rev.* **51**, 593 (1937).
90. COCKCROFT, J. D. and W. LEWIS: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **154**, 246 (1936).
91. DEE, P. and C. GILBERT: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **154**, 279 (1936).
92. BONNER, T. and W. BRUBAKER: *Physic. Rev.* **49**, 19 (1936).
93. SCHÜLER, H. u. TH. SCHMIDT: *Z. Physik* **99**, 717 (1936); **100**, 113 (1936); **104**, 468 (1937). — SCHÜLER, H. u. H. KORSCHING: *Z. Physik* **103**, 434 (1936). — SCHÜLER, H. u. M. MARKETU: *Z. Physik* **102**, 703 (1936). — GOLLNOW, H.: *Z. Physik* **103**, 443 (1936).
94. BONNER, T. and W. BRUBAKER: *Physic. Rev.* **49**, 223, 778 (1936).
95. MITCHELL, D.: *Physic. Rev.* **49**, 453 (1936).
96. BOTHE, W.: *Z. Physik* **100**, 273 (1936).
97. WIGNER, E.: *Physic. Rev.* **51**, 106 (1937).
98. INGLIS, D. and L. YOUNG: *Physic. Rev.* **51**, 525 (1937).
99. FLEISCHMANN, R. u. W. GENTNER: *Z. Physik* **100**, 440 (1936).
100. EULER, H.: *Naturwiss.* **25**, 201 (1937). — *Z. Physik* **105**, 553 (1937).
101. VOLZ, H.: *Naturwiss.* **25**, 200 (1937). — *Z. Physik* **105**, 537 (1937). Vgl. auch S. FLÜGGE: *Z. Physik* **105**, 522 (1937).
102. DÖPEL, R.: *Z. Physik* **99**, 161 (1936).
103. SCHÜLER, H. u. TH. SCHMIDT: *Z. Physik* **99**, 285 (1936).
104. SEXL, TH.: *Z. Physik* **99**, 751 (1936).
105. STETTER, G.: *Z. Physik* **100**, 652 (1936) und dort genannte Literatur.
106. SCHÜLER, H. u. H. KORSCHING: *Z. Physik* **102**, 373 (1936).
107. FLEISCHMANN, R.: *Z. Physik* **102**, 113 (1936); **100**, 307 (1936).
108. HAXEL, O.: *Z. Physik* **104**, 540 (1937).
109. DÖPEL, R.: *Z. Physik* **104**, 666 (1937).
110. BOTHE, W. u. W. GENTNER: *Z. Physik* **104**, 685 (1937).
111. CORK, J. and E. O. LAWRENCE: *Physic. Rev.* **49**, 205, 788 (1936). — SNELL, A.: *Physic. Rev.* **49**, 207 (1936).
112. CONDON, E.: *Physic. Rev.* **49**, 459 (1936).
113. PLESSET, M. S.: *Physic. Rev.* **49**, 551 (1936).
114. BETHE, H. A. and G. PLACZEK: *Physic. Rev.* **51**, 450 (1937).
115. MAIER-LEIBNITZ, H.: *Z. Physik* **101**, 478 (1936).
116. BOTHE, W. u. W. GENTNER: *Naturwiss.* **25**, 284 (1937).

117. JAECKEL, R.: *Z. Physik* **104**, 762 (1937).  
 118. WILSON, H. A.: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **154**, 560 (1936).  
 119. MATTAUCH, J.: *Naturwiss.* **25**, 156, 170 (1937).  
 120. BOTHE, W. u. H. MAIER-LEIBNITZ: *Naturwiss.* **25**, 25 (1937).  
 121. WILHELMY, E.: *Naturwiss.* **25**, 173 (1937).  
 122. KALLMANN, H. u. E. KUHN: *Naturwiss.* **25**, 231 (1937).  
 123. DYMOND, E.: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **157**, 302 (1936).  
 124. KEMPTON, A., B. BROWNE and R. MAASDORP: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **157**, 372 (1936).  
 125. BURHOP, E.: *Proc. Cambridge philos. Soc.* **32**, 643 (1936).  
 126. TAYLOR, H.: *Proc. Cambridge philos. Soc.* **32**, 291 (1936).  
 127. FIERZ, M.: *Z. Physik* **104**, 553 (1936).  
 128. HERB, R., D. KERST and J. MCKIBBEN: *Physic. Rev.* **51**, 691 (1937).  
 129. MORSE, P., J. FISK and L. SCHIFF: *Physic. Rev.* **51**, 706 (1937). Vgl. auch (173).  
 130. RUBEN, S. and W. LIBBY: *Physic. Rev.* **51**, 774 (1937).  
 131. SCHWINGER, J. and E. TELLER: *Physic. Rev.* **51**, 775 (1937).  
 132. FEENBERG, E.: *Physic. Rev.* **51**, 777 (1937).  
 133. RITSCHL, R. u. H. SCHÖBER: *Physik. Z.* **38**, 6 (1937). — D'EUSTACHIO, D.: *Physic. Rev.* **51**, 780 (1937).  
 134. JOHNSON, M. jr.: *Physic. Rev.* **51**, 779 (1937).  
 135. NEUERT, H.: *Physik. Z.* **38**, 122 (1937).  
 136. GILBERT, C., C. SMITH and J. FREMLIN: *Nature (Lond.)* **139**, 796 (1937).  
 137. FRISCH, O., H. v. HALBAN and I. KOCH: *Nature (Lond.)* **139**, 756, 1020 (1937).  
 138. ASTON, F. W.: *Nature (Lond.)* **139**, 922 (1937).  
 139. CHAO, C. and C. FU: *Nature (Lond.)* **139**, 325 (1937).  
 140. LEWIS, W., W. BURCHAM and W. CHANG: *Nature (Lond.)* **139**, 24 (1937).  
 141. BERTEL, E., R. FÜRTH, F. OBOŘIL and K. SITTE: *Nature (Lond.)* **139**, 716 (1937).  
 142. OLIPHANT, M.: *Nature (Lond.)* **137**, 396 (1936). — POLLARD, E. and C. BRASEFIELD: *Nature (Lond.)* **137**, 934 (1936).  
 143. CLUSIUS, K. u. E. BARTHOLOMÉ: *Z. Elektrotechn.* **40**, 524 (1934). — *Götting. Nachr.* **III** **1**, 1, 15, 29 (1934).  
 144. HALBAN, H. v. et P. PREISWERK: *C. r. Acad. Sci. Paris* **203**, 1 (1936).  
 145. DOOLITTLE, H. D.: *Physic. Rev.* **49**, 779 (1936).  
 146. KIKUCHI, S., H. AOKI and E. TAKEDA: *Sci. Pap. Inst. physic.-chem. Res. Tokyo* **31**, 195 (1937). — KIKUCHI, S., K. HUSIMI and H. AOKI: *Proc. physic.-math. Soc. Japan* **18**, 35, 187, 727 (1936). — KIKUCHI, S., E. TAKEDA and I. ITO: *Proc. physic.-math. Soc. Japan* **19**, 43 (1937).  
 147. BARTLETT, J. jr.: *Physic. Rev.* **49**, 102 (1936).  
 148. PREISWERK, P. and H. v. HALBAN: *Nature (Lond.)* **138**, 163 (1936).  
 149. FEENBERG, E.: *Physic. Rev.* **51**, 777 (1937).  
 150. JOOS, G. u. K. HELLWEGE: *Physik in regeln. Ber.* **5**, 1 (1937).  
 151. WICK, G.: *Physik. Z.* **38**, 403 (1937).  
 152. HUND, F.: *Z. Physik* **105**, 202 (1937).  
 153. BHABHA, H.: *Nature (Lond.)* **139**, 1021 (1937).  
 154. SCHIFF, L. I.: *Physic. Rev.* **51**, 783 (1937).  
 155. BARDEEN, I.: *Physic. Rev.* **51**, 799 (1937).  
 156. ROBERTS, R.: *Physic. Rev.* **51**, 810 (1937).  
 157. CHANG, W. Y. and A. SZALAY: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **159**, 72 (1937).  
 158. WILLIAMS, I., W. SHEPHERD and R. HAXBY: *Physic. Rev.* **51**, 888 (1937).  
 159. BARTLETT, J. jr.: *Physic. Rev.* **51**, 889 (1937).  
 160. NEDDERMEYER, S. and C. ANDERSON: *Physic. Rev.* **51**, 884 (1937).

161. FLEISCHMANN, R.: Z. Physik **105**, 698 (1937).  
162. SIZOO, G. I.: Physica **4**, 476 (1937).  
163. DELSASSO, L., W. A. FOWLER and C. LAURITSEN: Physic. Rev. **51**, 527 (1937).  
164. STEPHENSON, A. F.: Physic. Rev. **51**, 590 (1937).  
165. HALBAN, H. v. et P. PREISWERK: Helvet. physic. Acta **9**, 318 (1937).  
166. GRAHAME, D., G. SEABORG and G. GIBSON: Physic. Rev. **51**, 590 (1937).  
167. RUBEN, S. and W. LIBBY: Physic. Rev. **51**, 774 (1937).  
168. AMALDI, E., O. D'AGOSTINO, E. FERMI, B. PONTECORVO, F. RASETTI and E. SEGRÈ: Proc. roy. Soc. Lond. A **149**, 522 (1935).  
169. SCHWINGER, I. and E. TELLER: Physic. Rev. **51**, 775 (1937).  
170. FERMI, E.: Physic. Rev. **48**, 570 (1935).  
171. FINK, G., I. DUNNING, G. PEGRAM and E. SEGRÈ: Physic. Rev. **49**, 199 (1936).  
172. HALL, H.: Physic. Rev. **49**, 401 (1936). — BREIT, G., I. STEHN and E. CONDON: Physic. Rev. **49**, 904 (1936); **51**, 56 (1937). — WAY, K.: Physic. Rev. **51**, 552 (1937).  
173. FISK, I. and P. MORSE: Physic. Rev. **51**, 54 (1937).  
174. SEXL, TH.: Naturwiss. **24**, 795 (1936).  
175. ELSASSER, W. M.: Physic. Rev. **51**, 55 (1937).  
176. FIERZ, M.: Helvet. physic. Acta **10**, 253 (1937).  
177. WILLIAMS, J., W. SHEPHERD and R. HAXBY: Physic. Rev. **51**, 1011 (1937).  
178. BAYLEY, D. and H. CRANE: Physic. Rev. **51**, 1012 (1937).  
179. RUMBAUGH, L., R. ROBERTS and L. HAFSTAD: Physic. Rev. **51**, 1013 (1937).  
180. LADENBURG, R. and M. KANNER: Physic. Rev. **51**, 1022 (1937).  
181. BRUBAKER, G. and E. POLLARD: Physic. Rev. **51**, 1013 (1937).  
182. RICHARDSON, R. and L. EMO: Physic. Rev. **51**, 1014 (1937).  
183. SCHWINGER, J. and J. RABI: Physic. Rev. **51**, 1003 (1937).  
184. ESTERMANN, J., O. SIMPSON and O. STERN: Physic. Rev. **51**, 1004 (1937).  
185. KONOPINSKI, E. and H. A. BETHE: Physic. Rev. **51**, 1004 (1937).  
186. LIVINGSTONE, S., J. HOFFMANN sowie J. HOFFMAN, H. A. BETHE: Physic. Rev. **51**, 1021 (1937).  
187. MANLEY, J., H. GOLDSMITH, J. SCHWINGER sowie H. GOLDSMITH, J. MANLEY: Physic. Rev. **51**, 1022 (1937).  
188. WIGNER, E.: Physic. Rev. **51**, 947 (1937).  
189. BETHE, H. A.: Physic. Rev. **51**, 1004 (1937).  
190. KEMMER, N.: Helvet. physic. Acta **10**, 47 (1937).

# Messung langer Röntgenwellen mit optischen Gittern.

Von **MANNE SIEGBAHN**, Stockholm.

Mit 22 Abbildungen.

Inhaltsverzeichnis.		Seite
I. Einleitung . . . . .		104
II. Ebene Gitter. Absolutmessung von Röntgenwellenlängen und Bestimmung der elektrischen Elementarladung . . . . .		106
III. Die Konkavgittermethode . . . . .		107
IV. Ergebnisse der Untersuchungen über die Emissionsspektren . . . . .		114
A. Die K-Reihe . . . . .		114
B. Die L-Reihe . . . . .		121
C. Die M-, N- und O-Reihen . . . . .		125
V. Ergebnisse der Untersuchungen über die Absorptionsspektren . . . . .		129
Literaturverzeichnis . . . . .		132

## I. Einleitung.

Die Röntgenspektren der Elemente haben in der Richtung der kurzen Wellen einen natürlichen Abschluß; die Wellenlänge der härtesten Liniengruppe, die K-Reihe, des schwersten Elementes, d. h. 92 Uran, liegt bei 108 X-Einheiten ( $10^{-11}$  cm). Da der entsprechende Übergang in den Uranatomen den energiereichsten unter den prinzipiell möglichen Übergängen in den Atomen darstellt, sind — wenigstens bei den normalen Röntgenspektren — keine kurzwelligeren Spektrallinien zu erwarten. Diese Begrenzung der Röntgenspektren gegen kurze Wellen geht am besten aus dem Diagramm Abb. 1 hervor.

In Richtung der größeren Wellenlängen dagegen dehnen sich die Röntgenserien, besonders die höheren, wie sofort aus Abb. 1 ersichtlich, weit aus: eine vorausgegebene Abgrenzung gibt es hier nicht.

Aus diesen Gründen ist eine Erweiterung des untersuchten Wellenlängengebietes in der langwelligen Richtung von offensichtlichem Interesse. Die spektrographischen Methoden, die sich der natürlichen Kristallgitter bedienen, sind nach der bekannten BRAGGSchen Beziehung

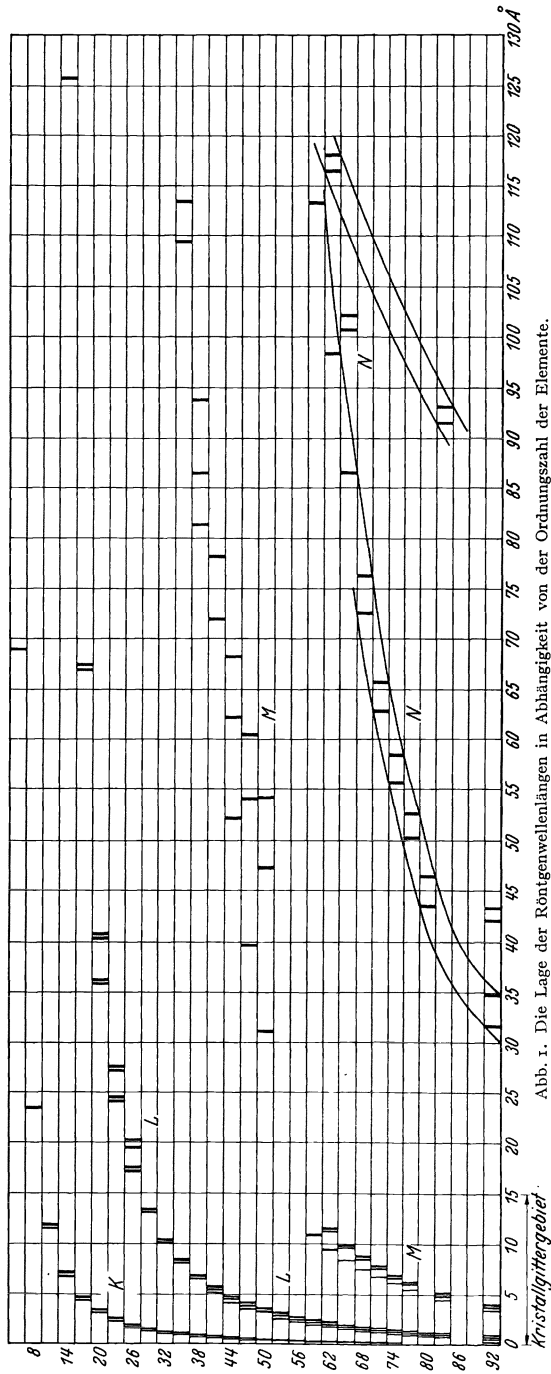
$$n \lambda = 2d \sin \varphi$$

zu Wellenlängen begrenzt, die kleiner als  $2d$  sind, d. h. durch den zweifachen Atomebenenabstand. Unter den bis jetzt benutzten Kristallen, welche genügend gut ausgebildet sind, um für spektroskopische Zwecke verwandt werden zu können, besitzt Glimmer mit  $2d = 19,9 \text{ \AA.E.}$  die

größte Gitterkonstante. Dies gibt also gleichzeitig die langwellige Grenze dieser Methode an. Es sei noch darauf hingewiesen, daß bei einer Reihe organischer Kristalle weit größere Gitterkonstanten vorkommen und daß vereinzelt Versuche gemacht worden sind, diese Kristalle für Untersuchungen im langwelligen Gebiet zu benutzen. Unter diesen Kristallen seien folgende erwähnt und die zugehörigen Werte von  $2d$  angeführt

	$2d$ in Å.E.
Zucker . . . . .	21,14
Lauro-Stearinsäure	54,5
Palmitinsäure . . .	71
Stearinsäure . . . .	79
Pb-Palmitat . . . . .	91
Cerotinsäure . . . .	145

Seit aber von A. H. COMPTON und DOAN (1) 1925 der erste Nachweis erbracht wurde, daß bei Verwendung von nahezu streifender Einfallsrichtung der Strahlung geritzte Gitter zur Registrierung von Röntgenspektren benutzt werden können, ist diese Methode besonders für Untersuchungen im langwelligen Gebiet ( $\lambda > 20 \text{ Å.E.}$ ) stark entwickelt worden; sie ist jetzt ohne Frage die wichtigste Methode zur Erforschung der langwelligen Röntgenspektren.



## II. Ebene Gitter. Absolutmessung von Röntgenwellenlängen und Bestimmung der elektrischen Elementarladung.

In den ersten Jahren der Gitterspektroskopie der Röntgenstrahlen wurden hauptsächlich *ebene* Gitter benutzt. Um dabei eine befriedigende Linienschärfe bei den Spektrogrammen zu erhalten, wurden drei verschiedene Anordnungen verwandt: a) zwei enge Spalte zwischen Lichtquelle und Gitter, b) einen Spalt nahe der Lichtquelle und eine Schneide gegenüber dem Gitter, c) einen Spalt und Abgrenzung des Gitters bzw. Verwendung eines sehr schmalen Gitters. Da diese früheren Untersuchungen schon mehrfach in zusammenfassenden Berichten behandelt worden sind (s. z. B. J. THIBAUD<sup>1</sup>), werden wir hier nur ein mit dieser Methode erzieltetes Ergebnis besprechen, welches in der späteren Entwicklung von hervorragender Bedeutung geworden ist und ein allgemeineres Interesse hat, nämlich die Neubestimmung der elektrischen Elementarladung.

In den ersten Arbeiten von COMPTON und DOAN (1) und von THIBAUD (2) wurden durch Ausmessung der Beugungswinkel und mit Hilfe der Gittergleichung die Wellenlängen der Mo-K- $\alpha$ -Strahlung ( $\lambda = 710$  X.E.) und der Cu-K- $\alpha$ -Strahlung ( $\lambda = 1538$  X.E.) bestimmt. Innerhalb der erzielten, mäßigen Genauigkeit stimmten die so gefundenen Wellenlängenwerte mit den aus Kristallmessungen bekannten (weit genaueren) Werten gut überein.

Bei der Durchführung einer Präzisionsmessung einiger Röntgenwellenlängen mit Hilfe der eben genannten Gittermethode (in der Ausführung b) fand aber E. BÄCKLIN (3) systematische Abweichungen zwischen den so ermittelten Wellenlängenwerten und den aus Kristallmessungen bekannten Werten. Die mit geritzten Gittern gemessenen waren durchwegs um etwa  $1,5 \text{ ‰}$  höher als die mit Kristallgitter erhaltenen. BÄCKLIN schloß aus diesen Ergebnissen, daß der bei der Berechnung der Gitterkonstante benutzte Wert für die Elektronenladung ( $e = 4,774 \cdot 10^{-10}$  E.S.E.) zu niedrig sein mußte, wodurch dann die aus Kristallgittermessungen berechneten Wellenlängenwerte zu klein ausgefallen seien.

Dieses überraschende Ergebnis wurde in der nächsten Zeit durch neue sehr genaue und sorgfältige Messungen von BEARDEN (4) bestätigt. Es wurde von verschiedenen Seiten nach anderen Gründen zur Erklärung der Diskrepanz zwischen den Ergebnissen der Gittermessung und der Kristallmessung gesucht; da es aber inzwischen festgestellt worden ist, daß die Vermutung von BÄCKLIN betreffend den fehlerhaften Wert der Elektronenladung der Wahrheit entspricht, wollen wir uns mit dieser Diskussion nicht weiter aufhalten.

Nach den neuesten Messungen von BÄCKLIN (5), BEARDEN (6) und DU MOND und BOLLMAN (7) muß man folgende Werte der Elektronen-

<sup>1</sup> THIBAUD, J.: Physik. Z. 29, 241 (1928).

ladung voraussetzen, um die Kristallmessungen in Übereinstimmung mit den Meßergebnissen mit geritzten Gittern zu bringen:

	$e \cdot 10^{10}$	Angeg. Fehlergrenzen
BÄCKLIN . . . . .	4,805	$\pm 0,004$
BEARDEN . . . . .	4,8036	$\pm 0,0005$
DU MOND und BOLLMAN .	4,799	$\pm 0,007$

Es ist noch zu erwähnen, daß dieser neue Wert der Elektronenladung durch die später zu besprechenden Konkavgittermessungen bestätigt worden ist und daß sie durch die ganz anderweitige Methode mit Elektronenwellen nach S. VON FRIESEN (8) eine neue Stütze gefunden hat. Einen Grund, den früheren Wert ( $4,774 \cdot 10^{-10}$  E.S.E.) zu bevorzugen, gibt es jetzt nicht mehr, seitdem die Neubestimmung der Luftviskosität durch G. KELLSTRÖM (9) gezeigt hat, daß der bei der Berechnung der Elektronenladung nach der Öltropfenmethode verwandte Wert ( $\eta_{23^\circ} = 1822,6 \cdot 10^{-7}$ ) zu niedrig ist. Die sehr genaue Neubestimmung ergab  $\eta_{23^\circ} = (1834,9 \pm 2,7) \cdot 10^{-7}$ .

Für die röntgenspektroskopischen Messungen haben diese Untersuchungen und die dabei erzielten Ergebnisse die Bedeutung, daß alle Wellenlängenwerte, die mit Kristallmessungen erzielt worden sind, um etwa 2 ‰ zu erhöhen sind, um dieselben in absolutem Längenmaß zu erhalten.

### III. Die Konkavgittermethode.

Für die Erforschung der langwelligen Röntgenstrahlung steht zur Zeit die Konkavgittermethode als leistungsfähigstes Verfahren zur Verfügung. Wesentlich ist dabei auch, daß man mit genau derselben Anordnung die kurzwelligeren optischen Spektren und die Röntgenspektren registrieren kann; hierdurch ist ein direkter Anschluß der Wellenlängenmessungen an die fest fundierten optischen Spektralmessungen erreicht worden. Ein Blick auf Abb. 20 zeigt z. B., daß die zwei starken Röntgen-N-Linien von 90 Th bei 50 Å.E. in acht Ordnungen, also bei 100, 150, 200, 250, 300, 350 und 400 Å.E. gut meßbar erscheinen; im selben Spektralgebiet liegt eine große Anzahl optischer Linien, die ihrerseits in höheren Ordnungen mit Hilfe der optischen Standardlinien gemessen werden können. Optische Linien in dem Wellenlängengebiet, das uns hier interessiert — d. h. also unter 500 Å.E. —, sind jetzt in großer Zahl nach der zuletzt erwähnten Methode mit hoher Genauigkeit ausgemessen worden<sup>1</sup>. Durch Vergleichsmessungen der Röntgenlinien mit Benutzung dieser optischen Linien erhält man also ohne weiteres die Wellenlängen in Ängströmeinheiten.

Diese Angaben genügen, um zu zeigen, daß die Weiterverfolgung der optischen Spektren in Richtung der kurzen Wellen von wesentlicher

<sup>1</sup> Siehe z. B. EDLÉN: Z. Physik 85, 85 (1933). — BOYCE, J. C. and H. A. ROBINSON: J. opt. Soc. Amer. 26, 133 (1936).

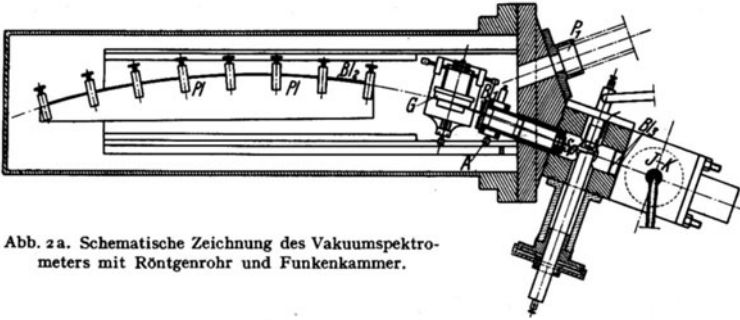


Abb. 2a. Schematische Zeichnung des Vakuumspektrometers mit Röntgenrohr und Funkenkammer.

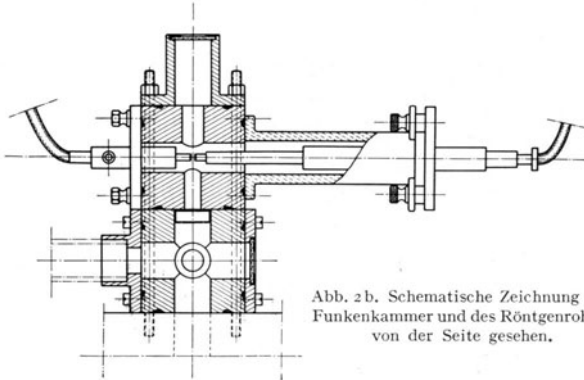


Abb. 2b. Schematische Zeichnung der Funkenkammer und des Röntgenrohres von der Seite gesehen.

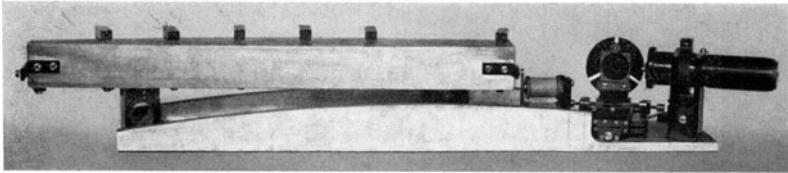


Abb. 2c. Spektrometereinsatz mit Spalt, Gitter und Plattenhalter.

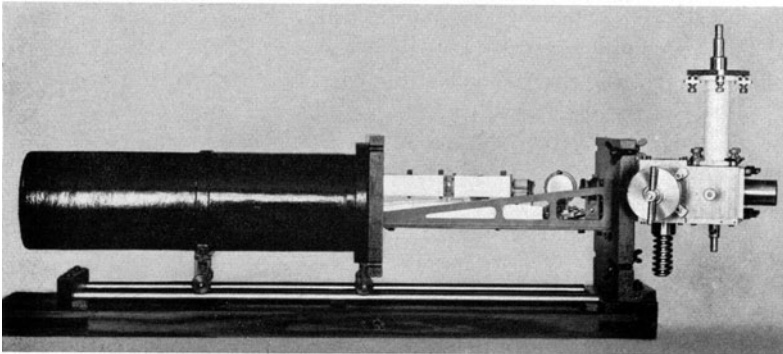


Abb. 2d. Vakuumspektrometer mit Röntgenrohr und Funkenkammer.



Bedeutung für die Untersuchung der langwelligen Röntgenspektren war. Die Registrierung der optischen Spektren in diesem Wellenlängengebiet ist auch in anderer Beziehung von Bedeutung für die Fragen, die uns hier interessieren. Dank des im Vergleich zu Röntgenspektren großen Linienreichtums und der großen Linienschärfe der optischen Spektren hat man hier ein sehr leistungsfähiges Hilfsmittel zur Hand, wenn es auf die Einstufung des Spektrometers und die Ausmessung der Platten ankommt. Aus diesen Gründen sind auch die Anordnungen für die Aufnahme der langwelligen Röntgenspektren so gewählt, daß gleichzeitig mit optischen Spektren und Röntgenspektren gearbeitet wird. Betreffend Einzelheiten der Justierung sei auf die verschiedenen Publikationen hingewiesen.

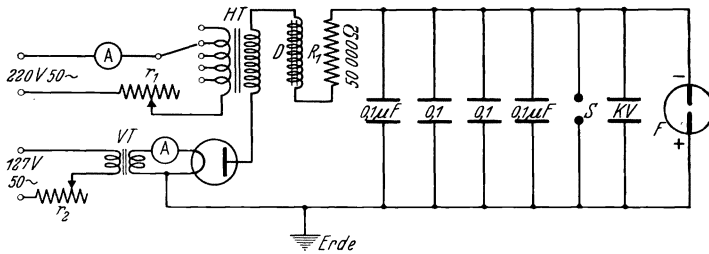


Abb. 3. Schaltungsschema der Hochvakuum-Funkenanordnung.

Als Lichtquelle können an das Vakuumgehäuse des Spektrometers (Abb. 2a, b, c, d) nacheinander zwei Vakuumröhren aus Metall angeschlossen werden. Die eine Röhre (Abb. 2b) ist mit Glühkathode und verstellbarer Antikathode versehen und dient als Röntgenstrahlenquelle; die andere hat zwei verstellbare Elektroden mit auswechselbaren Endstücken. Die eine dieser Elektroden ist für 80 kV isoliert. In diesem Rohr wird ein Hochvakuumfunke (mit Be-, C-, Al-, Cu- usw. oder Mischelektroden) erzeugt; hierbei ergibt sich die erwünschte kurzwellige optische Strahlung. Eine geeignete elektrische Anordnung zum Betrieb des Hochvakuumfunkens ist in Abb. 3 wiedergegeben, dort finden sich auch nähere Angaben über die elektrischen Daten. Es sei noch bemerkt, daß die Selbstinduktion im Funkenkreise ( $I_0$ ) möglichst herabgedrückt werden muß, wenn man kürzeste Wellenlängen erzielen will.

Als Gitter sind in diesem Wellenlängengebiet solche aus Glas vorzuziehen, wenn auch Spiegelmetall- und Stahlgitter, wie mehrere Versuche zeigen, gut verwendbar sind. Bei den großen hier in Frage kommenden Einfallswinkeln ist die optimale Breite ( $Y_{\text{opt.}}$ ) der zu benutzenden Gitterfläche ziemlich begrenzt ( $IX$ ), angenähert

$$Y_{\text{opt.}}^4 = \frac{2,5 \lambda R^3}{\sin \varphi \operatorname{tg} \varphi + \sin \psi \operatorname{tg} \psi},$$

wo  $R$  der Krümmungsradius des Gitters und  $\varphi$  und  $\psi$  Einfalls- bzw. Ausfallswinkel der Strahlung bedeuten. In der folgenden Tabelle geben wir einige Angaben über diese Breite (in Millimeter) für die

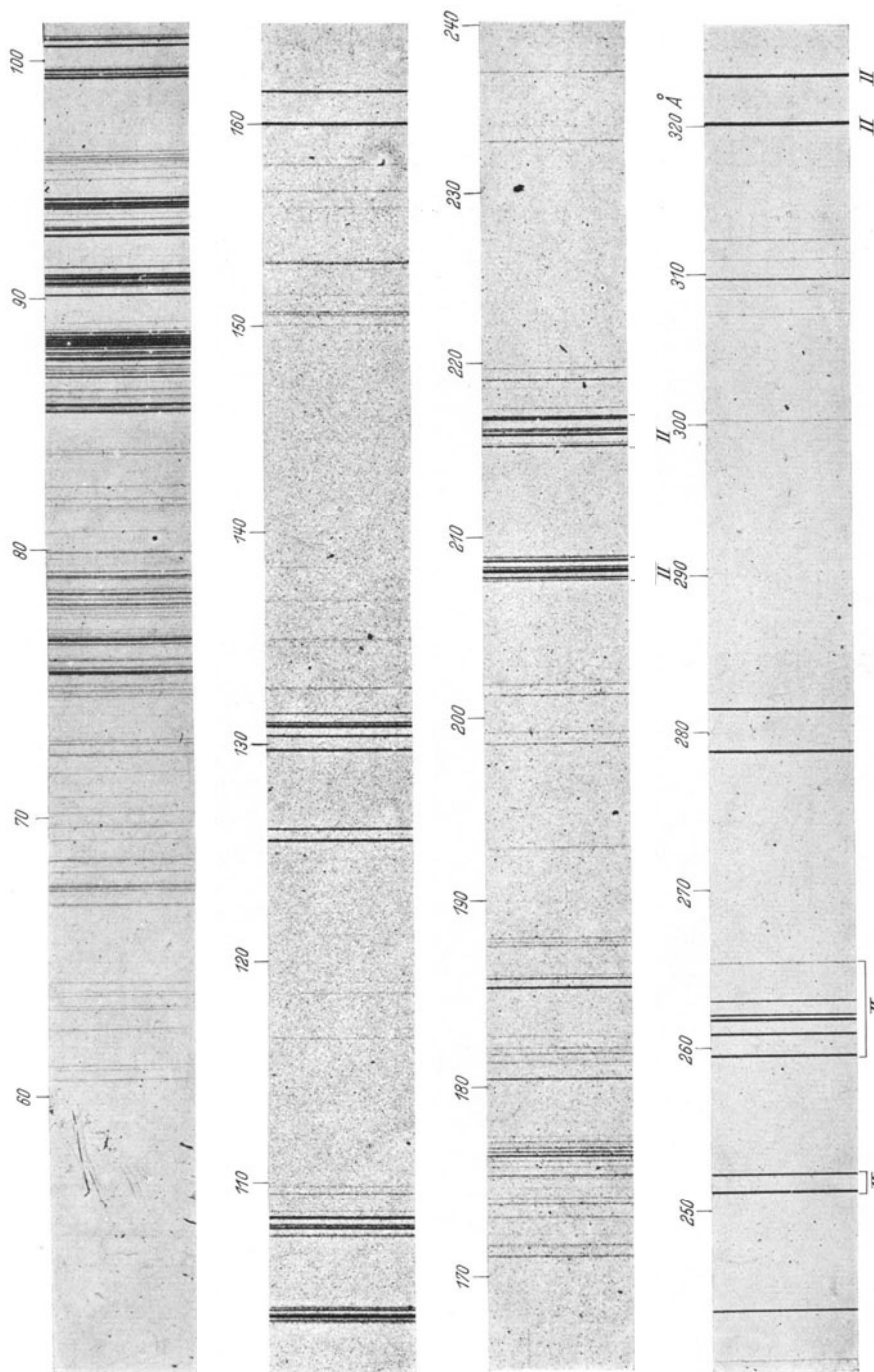


Abb. 4. Aufnahme des Al-Funkenspektrums im Gebiete 60—320 Å.E. Das Wellenlängengebiet 60—100 Å.E. (oberste Streifen) mit Spiegelmetallgitter, 1152 Str./mm, erhalten, Vergrößerung 2mal; das Gebiet 100—320 Å (die drei unteren Streifen) mit Glasgitter, 576 Str./mm, Vergrößerung 3,5mal.

Einfallswinkel  $80^\circ$  und  $88^\circ$  bei Gitterradius 1 m und 5 m und für die Wellenlängen 10, 100 und 1000 Å.E.

		$\lambda = 10$	100	1000 Å.E.
$80^\circ$	$R = 1 \text{ m}$	7,7	14,0	26,5 mm
	$R = 5 \text{ m}$	25,7	46,8	88,5 mm
$88^\circ$	$R = 1 \text{ m}$	5,3	10,3	18,8 mm
	$R = 5 \text{ m}$	17,7	34,4	62,8 mm

Selbstverständlich sind diese Gitterbreiten nur in groben Zügen zu berücksichtigen. Im allgemeinen wurde im Physikalischen Institut der Universität Upsala mit folgenden Gitterbreiten und Linienzahlen gearbeitet.

Radius	Geteilte Fläche	Linienzahl
1 m	$10 \times 20 \text{ mm}$	5700, 11500
2 m	$10 \times 35 \text{ mm}$	10000, 20000
5 m	$10 \times 60 \text{ mm}$	35000, 70000

Diese Linienzahlen entsprechen 288, 576 und 1152 Striche pro Millimeter. Es wurden durchwegs nur Gitter mit sehr leichter Ritzung benutzt.

Es sei daran erinnert, daß in diesem Gebiet nur SCHUMANN-Platten mit Nutzen verwendet werden können. Da ferner die spektral zerlegte Strahlung unter nahezu streifender Inzidenz auf die photographische Platte fällt, ist es sehr wichtig, daß die Platten sehr genau dem ROWLAND-Kreis folgen und keine Unebenheiten zeigen. Der Plattenhalter muß deswegen genau zylindrisch und mit richtigem Radius geschliffen sein. Für Präzisionsmessungen ist es aus demselben Grunde nötig, die Glasplatten genau eben zu schleifen und zu polieren, ehe die SCHUMANN-Schicht aufgelegt wird. Die geringe Dicke der SCHUMANN-Belegung gegenüber der üblichen photographischen Emulsion ist ferner hier von großem Vorteil.

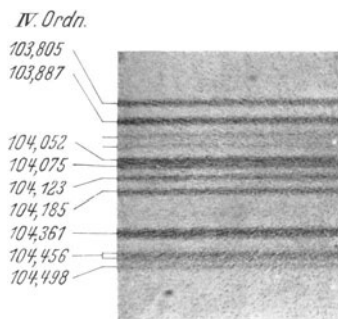
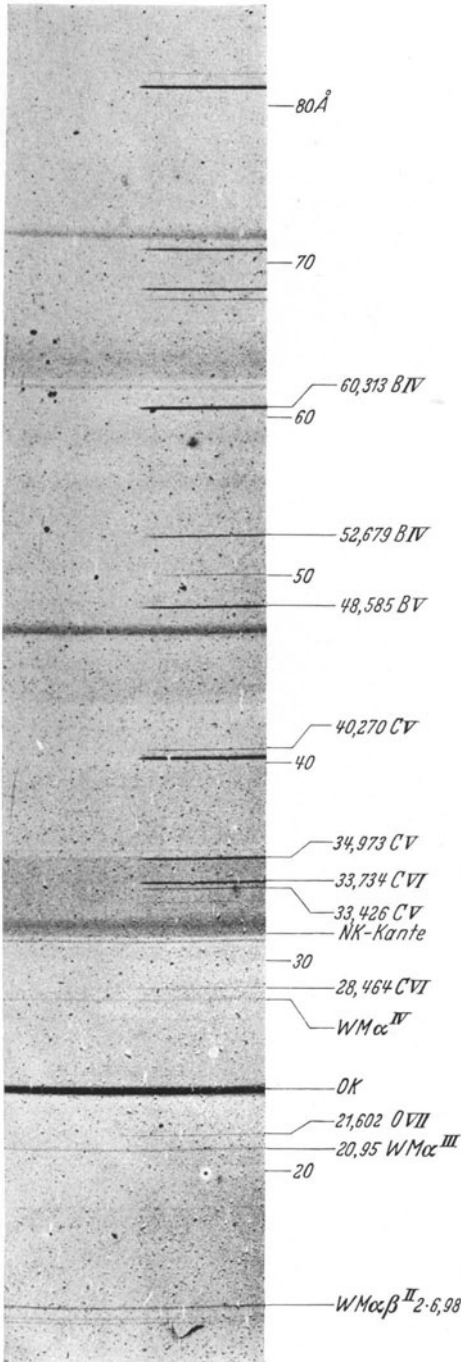


Abb. 5. Al-Gruppe bei 104 Å.E. IV. Ordn. Vergrößerung 25mal.

Wie schon erwähnt, werden für Justier- und Meßzwecke kurzwellige optische Spektren benutzt. Zur Orientierung sei in Abb. 4 das Funkenspektrum von Aluminium wiedergegeben. Die verschiedenen Teile sind zum Vergleich — wie unter der Abbildung angegeben — mit verschiedenen Gittern aufgenommen. Um die Auflösung besser zu zeigen, ist in Abb. 5 die Liniengruppe bei 104 Å.E. in 25facher Vergrößerung aus einer Aufnahme in der 4. Ordnung reproduziert. Schließlich gibt Abb. 6 das kurzwelligste Gebiet, 15—80 Å.E., nach einer Aufnahme von T. MAGNUSON wieder. Die optischen Spektrallinien gehören zu den höchsten Ionisierungsstufen von O, C und B, die in diesem Gebiet als Referenzlinien dienen können.



Eine Zusammenstellung einer Anzahl Wellenlängenwerte aus den kurzwelligen optischen Spektren, welche bei den Messungen als Standardlinien dienen können, ist in Tabelle 1 gegeben. Weitere Linien finden sich in den schon angegebenen Publikationen, sowie in einer Anzahl Arbeiten von B. EDLÉN (12).

In methodischer Hinsicht ist eine Anordnung zu erwähnen,

Tabelle 1.  
Optische Referenzlinien  
im Wellenlängengebiet  
20–100 Å.E.

In Å.E.	Spektrum	Referenz
21,602	O VII	Ty.
28,464	C VI	Ed. ber.
32,754	C V	Rob.
33,426	C V	Rob.
33,734	C VI	Ed. ber.
34,973	C V	Rob.
40,270	C V	Rob.
40,995	B V	Ed. ber.
48,585	B V	Ed. ber.
50,435	B IV	Rob.
52,679	B IV	Rob.
60,313	B IV	Rob.
64,063	Be IV	Ed. ber.
75,925	Be IV	Ed. ber.
84,758	Be III	Rob.
88,314	Be III	Rob.
100,254	Be III	Ed.

Ty.: F. TYRÉN: Ark. Mat., Astr. o. Fys. 25 A, Nr 32 (1937).  
Ed. ber. und Ed.: B. EDLÉN: Nova Acta Reg. Soc. Sci. Upsaliensis, IV, Vol. 9, Nr 6. Rob.: H. ROBINSON: Physic. Rev. 51, 14 (1937). Die Wellenlängen sind von B. EDLÉN — für C V zusammen mit ROBINSON — gemessen.

Abb. 6. Aufnahme von Röntgenemissions- und Absorptionsspektrum, sowie optischem Spektrum im Gebiete 15–80 Å.E. Von T. MAGNUSSON.

welche von M. SÖDERMAN (13) angegeben wurde und die für besondere Zwecke im kurzwelligsten Gebiete geeignet sein kann. Wenn man mit sehr großen Einfallswinkeln (etwa  $89^\circ$ ) zu arbeiten wünscht, um die kurzwelligste Strahlung mit guter Intensität zu bekommen, kann man — um

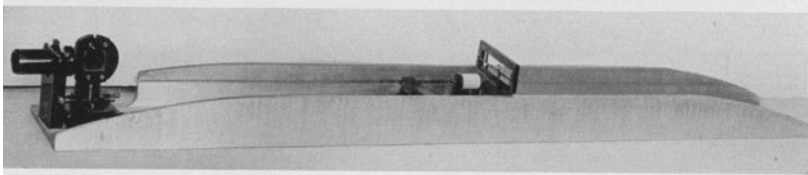


Abb. 7. Spektrometereinsatz für Aufnahmen nach der Methode von SÖDERMAN.

die Schwierigkeiten mit der streifenden Inzidenz an der photographischen Platte zu beheben — diese senkrecht zur Strahlung aufstellen, statt längs des ROWLAND-Kreises. Die Platte wird dann an die Stelle des

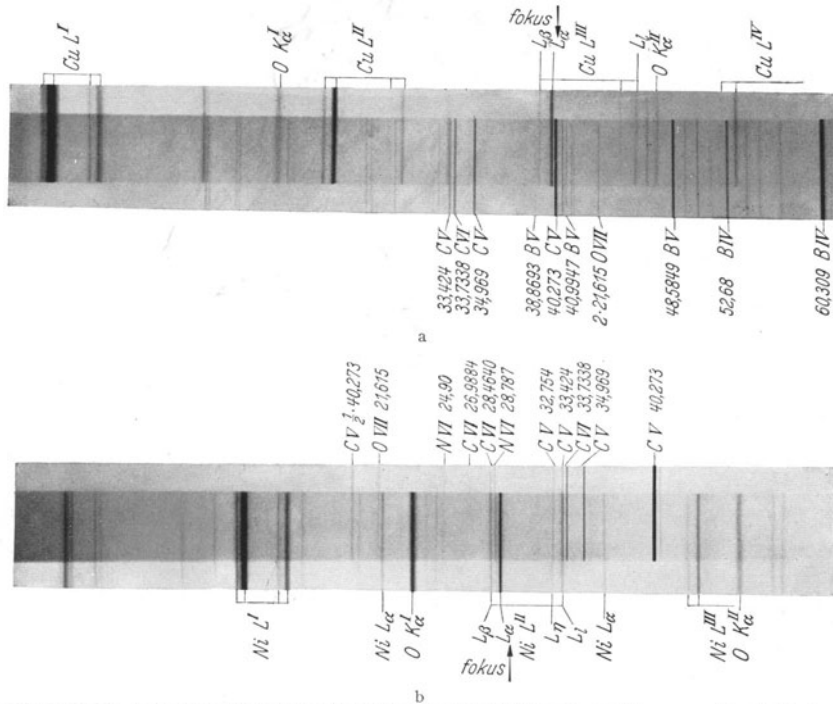


Abb. 8 a und b. Aufnahmen von kurzwelligen Spektren nach der Methode von SÖDERMAN. Von F. TYRÉN.

ROWLAND-Kreises gestellt, an welche die gesuchte Spektrallinie trifft. Selbstverständlich wird auf diese Weise nur ein ganz kleines Wellenlängengebiet scharf abgebildet, so daß eine Anzahl verschiedener Aufnahmen mit jedesmal neuer Aufstellung der photographischen Platte benötigt wird, um eine Registrierung eines gewünschten Spektralgebietes

zu gestatten. Da aber die Spalte und das Gitter ein für allemal einjustiert sind, kann die Verschiebung der Plattenhalter, die ja nur annähernd geschehen muß, schnell ausgeführt werden.

Die allgemeine Anordnung des Spektrometersatzes (Abb. 7) ist sonst so ausgeführt, wie an den früher beschriebenen Vakuumspektrometern. Als Beispiel der Verwendung dieser Methoden sind in Abb. 8 zwei Spektrogramme nach F. TYRÉN (14) wiedergegeben. Bei jeder ist ein kurzwelliges optisches Vergleichsspektrum aufgenommen. Es kommen hier B-, C-, N- und O-Linien aus höheren Ionisierungsstufen vor mit Wellenlängen zwischen 21,6 und 60 Å.E. Die Stelle der Platte, an der scharfe Fokussierung vorliegt, ist mit „Fokus“ bezeichnet. Wie ersichtlich, ist die Linienschärfe auch in der nächsten Umgebung dieser Stelle sehr gut.

#### IV. Ergebnisse der Untersuchungen über die Emissionsspektren.

##### A. Die K-Reihe.

Die K-Reihe hatte man nach der Kristallmethode bis 11 Na sehr vollständig ausgemessen. Bei den nächstniedrigen Elementen 9 Fl, 8 O und 6 C war die stärkste Linie noch mit organischen Kristallen nachgewiesen, nämlich

	$\lambda$ in Å.E.
9 Fl . . .	18,37 (15)
8 O . . .	23,73 (15)
6 C . . .	45,5 (16)

Die Linien der zwei letzterwähnten Elemente erscheinen im allgemeinen als Verunreinigungslinien an den mit Gittern registrierten Spektrogrammen, wenn nicht besondere Vorsichtsmaßregeln vorgenommen werden. Diese Linien sind daher in mehreren Untersuchungen ausgemessen worden. Allerdings ist zu bemerken, daß diese Linien eine gewisse Struktur besitzen, die von der chemischen Bindung abhängig ist, und daß deswegen Aufnahmen unter verschiedenen Bedingungen nicht ohne weiteres vergleichbar sind.

**8 O.** Aus einer großen Zahl von Spektralaufnahmen, die die Sauerstofflinie in mehreren Ordnungen — 3. bis 14. — enthalten, ermittelten SIEGBAHN und MAGNUSSON (17) als Wellenlängenwert für das Intensitätsmaximum  $\lambda = 23,61$ . HAUTOT (18) gibt für die Breite dieser Linie den Wert 0,045 Å.E. an und findet eine Sattelite mit einer Wellenlänge, die 0,15 Å.E. größer ist als die Hauptlinie, sowie noch eine sehr schwache Sattelite mit einem Abstand von etwa 1 Å.E. von der Hauptlinie. Nach unveröffentlichten Aufnahmen und Messungen von MAGNUSSON läßt sich das Hauptmaximum in zwei Maxima zerlegen, wozu dann noch zwei schwächere Maxima mit größeren Wellenlängen hinzukommen:

Wellenlänge	Rel. Intensität	Wellenlänge	Rel. Intensität
1. Max. . . 23,58	5	3. Max. . . 23,75	4
2. „ . . 23,64	5	4. „ . . 24,43	1

Diese Ergebnisse stimmen betreffs der Satteliten sehr gut mit denen von HAUTOT überein.

7 N. Die Stickstofflinie ( $\lambda 7$ ) ist ihrem Charakter nach der entsprechenden Linie bei den niedrigeren Elementen ähnlich, d. h. die Linie

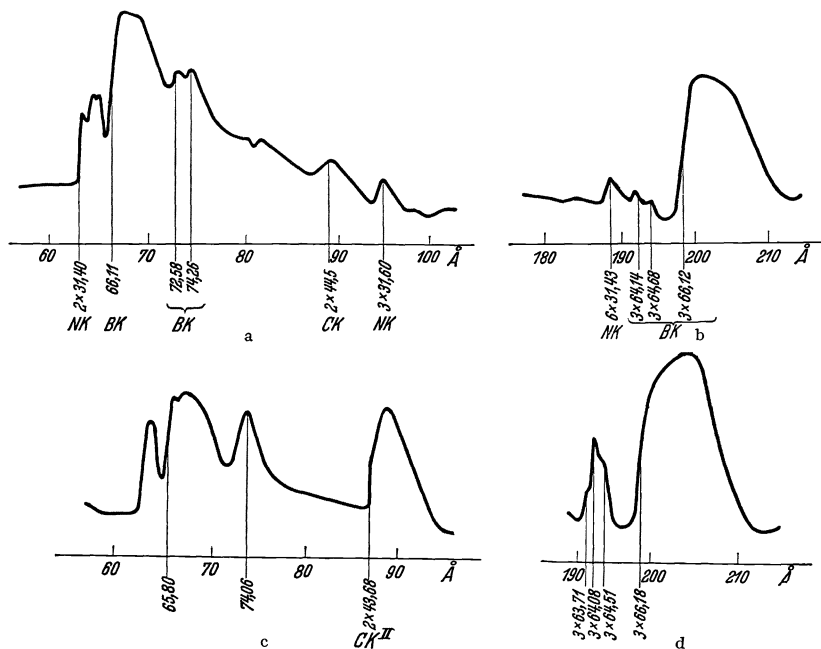


Abb. 9a–d. Photometrische Registrierungen der K-Linie von 5 B, a und b bei BN, c und d bei  $\text{Na}_2\text{B}_4\text{O}_7$ .

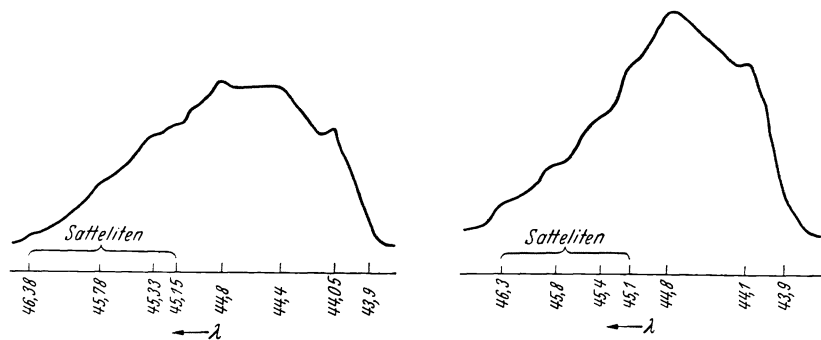


Abb. 10a. Die K-Linie von Kohlenstoff mit Graphit. (Nach HAUTOT.)

Abb. 10b. Die K-Linie bei „amorphem Kohlenstoff“. (Nach HAUTOT.)

ist ziemlich breit mit einer scharfen Abgrenzung gegen kurze Wellen (s. die Photometerkurven Abb. 9a, b). Für die kurzwellige Grenze wurde der Wert  $\lambda = 31,37$  ermittelt, für das Intensitätsmaximum  $\lambda = 31,57$   $\text{\AA}$ .E.

6 C. Betreffs des schon öfters untersuchten Röntgenspektrums von Kohlenstoff im ultraweichen Gebiete seien hier nur die neuesten Arbeiten

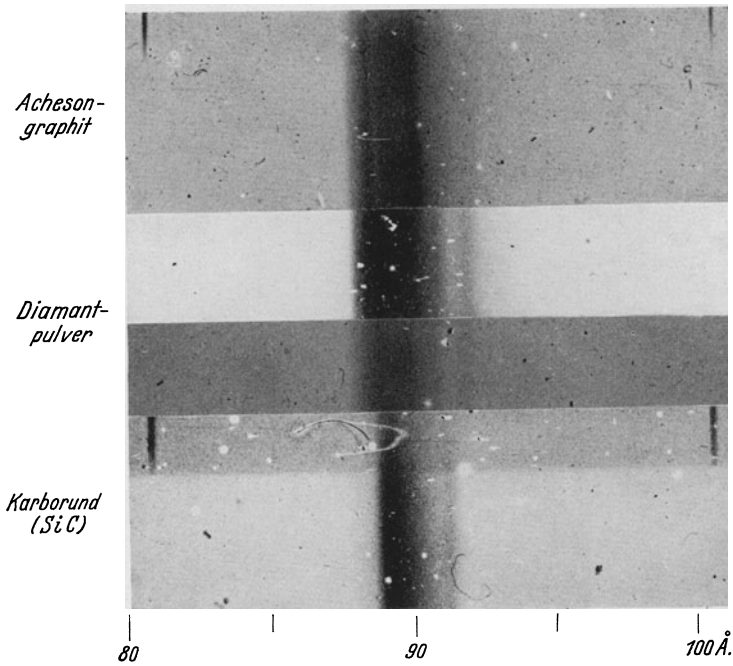


Abb. 11a. Die K-Linie von Kohlenstoff bei Graphit, Diamant und Karborund.

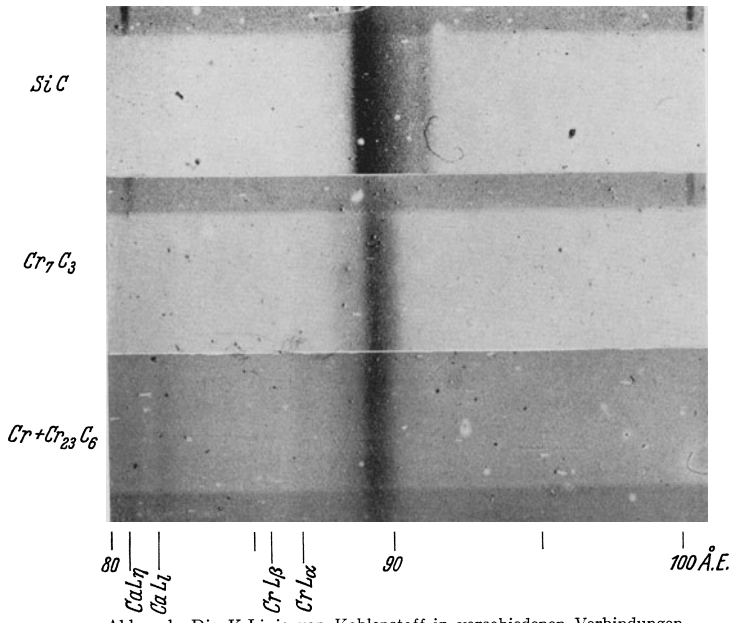


Abb. 11b. Die K-Linie von Kohlenstoff in verschiedenen Verbindungen.



erwähnt. Die erste eingehendere Untersuchung über die Struktur der Kohlenstofflinie in verschiedenen Verbindungen verdanken wir GLOCKER

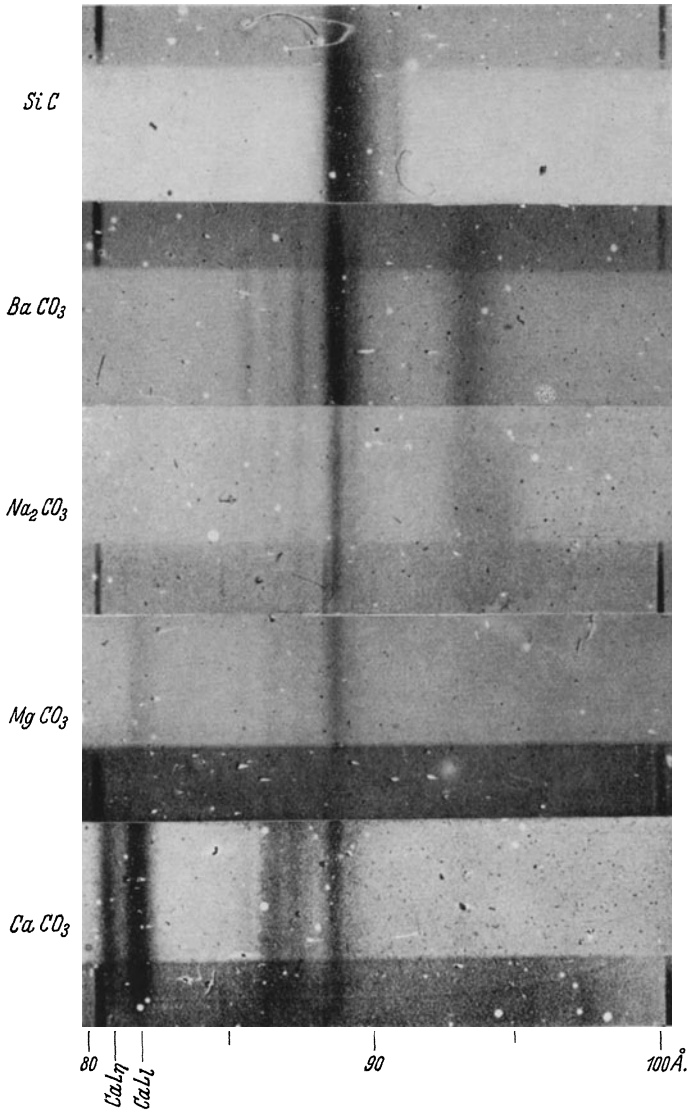


Abb. 11 c. Die K-Linie von Kohlenstoff in Carbonaten.

und seinen Mitarbeitern RENNINGER, KIESSIG und BROILI (19). Diese Untersuchungen wurden mit ebenem Gitter und deswegen mit verhältnismäßig geringer Dispersion und Auflösung ausgeführt. HAUTOT (18) sowie SIEGBAHN und MAGNUSSEN (15) haben die Kohlenstofflinie mittels

Konkavgitter und hoher Auflösung untersucht. HAUTOT gibt in seiner Arbeit Registrieraufnahmen wieder, die er mit Graphit und mit „amorphem Kohlenstoff“ erhalten hat. Diese Aufnahmen (Abb. 10a, b) zeigen einen gewissen Unterschied in der Struktur des Hauptmaximums; die kurzwellige Grenze liegt nach HAUTOT in beiden Fällen bei 43,9 Å.E. Ebenso findet HAUTOT, daß die zwei von ihm registrierten Kohlenstoffarten übereinstimmend 4 Satteliten gaben bei 45,15, 45,33, 45,78 und 46,38 Å.E.

SIEGBAHN und MAGNUSSON haben Kohlenstoff als Graphit und als Diamant sowie in einer Reihe von chemischen Verbindungen untersucht und dabei sehr charakteristische Unterschiede gefunden. Besonders ist zu bemerken, daß die Carbonate sehr scharfe Spektrallinien geben. Die Mannigfaltigkeit des Linienaussehens bei den verschiedenen Fällen ist aus den Abb. 11a, b, c, d zu ersehen. Um den verschiedenen Charakter quantitativ besser zu zeigen, sind die graphischen Darstellungen (Abb. 11 e, f) wiedergegeben, wo Lage und geschätzte

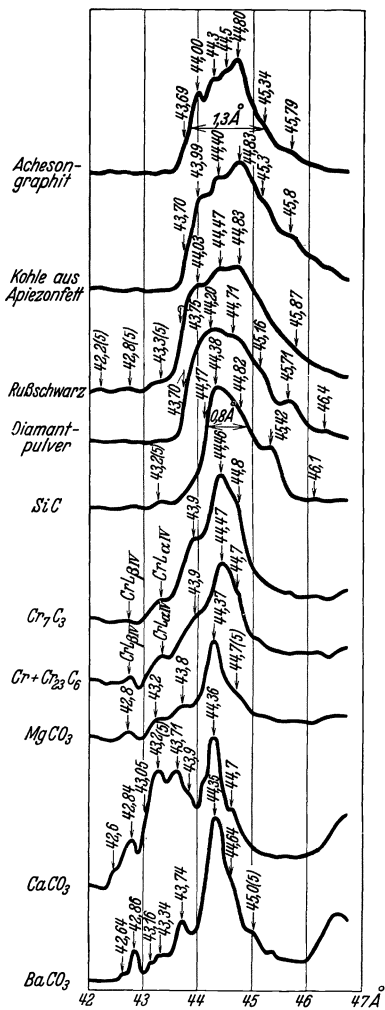


Abb. 11 d. Photometrische Registrierungen der K-Linie von Kohlenstoff in verschiedenen Verbindungen.

Tabelle 2.

Intensität	Wellenlängen	
	bei BN	bei Na <sub>2</sub> B <sub>4</sub> O <sub>7</sub>
0	53,8	—
2	64,17	64,09
2	64,76	64,54
Grenze	66,2	66,0
4	72,40	—
4	74,14	74,14

Intensitäten der Maxima in einer Frequenzskala  $\nu/R$  (bzw. Voltskala) eingetragen sind. Eine nähere Diskussion dieser Ergebnisse steht noch aus.

5 B. Die sehr komplizierte Linienstruktur von Bor ist schon in den Abb. 9 nach Aufnahmen von SIEGBAHN und MAGNUSSON wiedergegeben. Die Meßergebnisse bei Bor in den Verbindungen BN und Na<sub>2</sub>B<sub>4</sub>O<sub>7</sub> sind in der vorstehenden Tabelle 2 zu finden.

In einer eben erschienenen Arbeit haben HAUTOT und SERPE (20) über neue Untersuchungen des Borspektrums berichtet. Als wichtigstes Ergebnis wurde gefunden, daß Bor als Element nur eine einzige

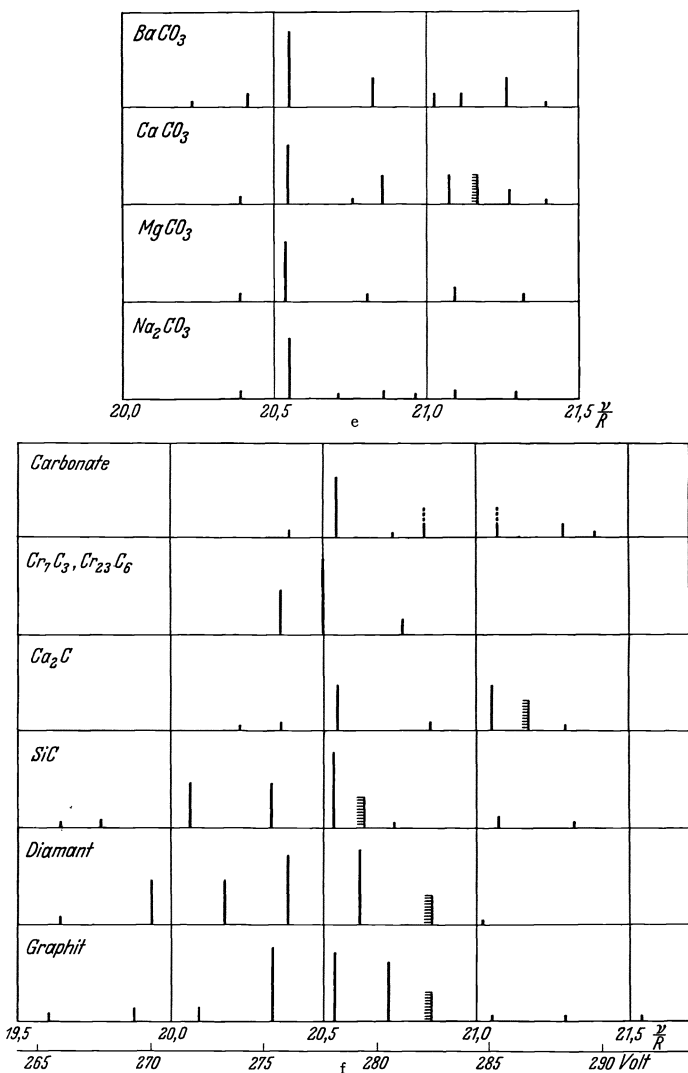


Abb. 11e und f. Graphische Darstellung der Lage der Intensitätsmaxima der K-Linie von Kohlenstoff.

Linienkomponente aufweist. Diese Linie oder richtiger Bande zeigt gegen kurze Wellen bei  $65,8 \pm 0,4 \text{ \AA.E.}$  ein steiles Abfallen. Wenn das Bor bei hohen Temperaturen ( $T > 1500^\circ \text{C}$ ) kristallisiert worden ist, finden HAUTOT und SERPE eine Breite der Bande von etwa  $8,5 \text{ \AA.E.}$  entsprechend  $21,5 \text{ Volt}$ , während die Breite beim Kristallisieren bei niedrigerer

Temperatur ( $T < 500^\circ \text{C}$ )  $13 \text{ \AA.E.}$  ist. Innerhalb der Bande treten sekundäre Maxima bei  $67, 68,5$  und  $71,3 \text{ \AA.E.}$  auf. Die Verfasser diskutieren die Linienstruktur im Sinne der FERMI-Statistik und der Fortpflanzung von Elektronenwellen in einem Kristalle und finden dabei eine befriedigende Deutung der experimentellen Ergebnisse.

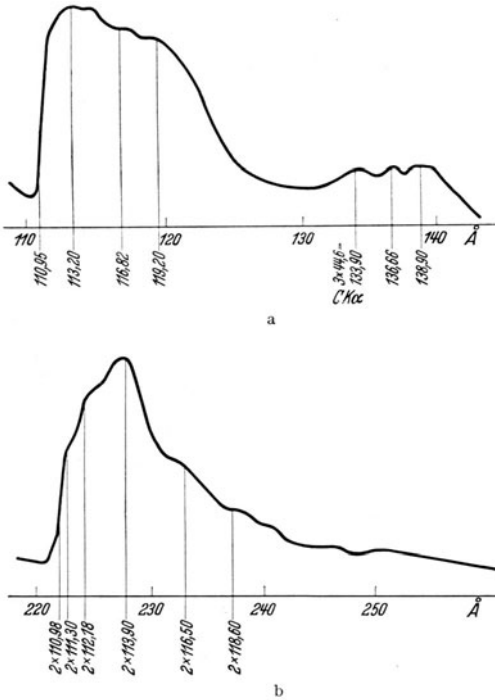


Abb. 12a und b. Photometrische Registrierungen der K-Linie von 4 Be.

hervortretenden Linie wurden auch einige andere verhältnismäßig starke Linien gefunden, deren Ursprung noch nicht ganz klar ist.

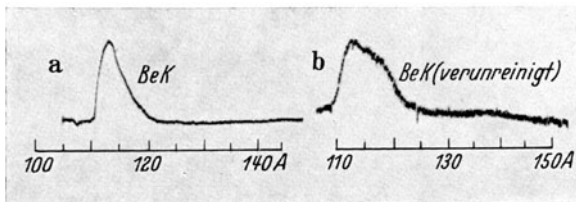


Abb. 13. Die Änderung des Intensitätsverlaufes bei der K-Linie von Be mit Verunreinigung. (Nach O'BRYAN und SKINNER.)

Eine sehr sorgfältige Untersuchung über die Kurvenform der Emissionslinie von reinem Beryllium wurde von O'BRYAN und SKINNER (21) ausgeführt, um die Linienbreite mit den aus der SOMMERFELDSchen Theorie über die Energieverteilung bei den Leitungselektronen zu berechnenden Linienbreiten zu vergleichen. Wichtig war es bei dieser Unter-

4 Be. Metallisches Beryllium zeigt eine sehr typische Intensitätsverteilung in der Spektrallinie oder Bande, welche der Energieverteilung der Leitungselektronen zuzuschreiben ist. Die kurzwellige Grenze liegt nach SIEGBAHN und MAGNUSSON bei  $110,95 \text{ \AA.E.}$  In der Bande sind dann bei höherer Auflösung 3 Maxima bei  $113,2, 116,8$  und  $119,2$  zu sehen, wie die Registrierkurve Abb. 12a, b zeigt. Außer dieser stark

suchung, die Reinheit der Berylliumantikathode zu sichern. O'BRYAN und SKINNER erhielten für die Linienbreite den Wert  $13,5 \pm 2,5$  Volt, während theoretisch mit zwei Leitungselektronen pro Atom  $13,8$  Volt zu erwarten ist. Die kurzwellige Grenze wurde zu  $110,9$  Å.E. bestimmt. Bei Oxydbildung ändert sich die Kurvenform und das Band wird gleichzeitig wesentlich breiter, wie aus Abb. 13 zu ersehen ist.

**3 Li.** Für Lithium finden SIEGBAHN und MAGNUSSON eine Linie mit Maximum bei  $228,1$  Å.E., welcher die schon erwähnten Linien bei den nächst höheren Elementen entsprechen, und ferner eine langwelligere Linie mit Maximum bei  $251$  Å.E. und die kurzwellige Grenze bei  $245$  Å.E.

O'BRYAN und SKINNER (21) geben als kurzwellige Grenze der erstgenannten dieser Linien den Wert  $225,3 \pm 0,2$  Å.E. an und als Breite der Linie, in Volt gerechnet,  $4,2 \pm 0,6$ . Dieser Wert stimmt sehr gut mit den nach der SOMMERFELDSchen Theorie berechneten, nämlich  $4,6$  Volt, überein.

### B. Die L-Reihe.

In die L-Reihe wurde die starke Dublette  $\eta l$  mit Hilfe der Gittermethode weiter in Richtung der leichteren Elemente verfolgt. Von besonderem Interesse wird die Erweiterung dieser Reihe erst bei 17 Chlor, wo eine starke Abhängigkeit des Spektrums von der chemischen Bindung hervortritt. Ähnliche Verhältnisse treten dann auch bei den niedrigeren Elementen hervor.

**17 Cl.** Die  $\eta l$ -Dublette hat bei Chlor noch den typischen Charakter, welcher bei den höheren Elementen bekannt, ist und besteht hier aus verhältnismäßig scharfen Linien (s. Abb. 14, CsCl). Die Halbweite ist schätzungsweise  $< 0,15$  Å.E. oder  $< 0,45$  Volt. In einer Anzahl Verbindungen des Chlors erscheint die Dublette verdoppelt, wie aus Abb. 14

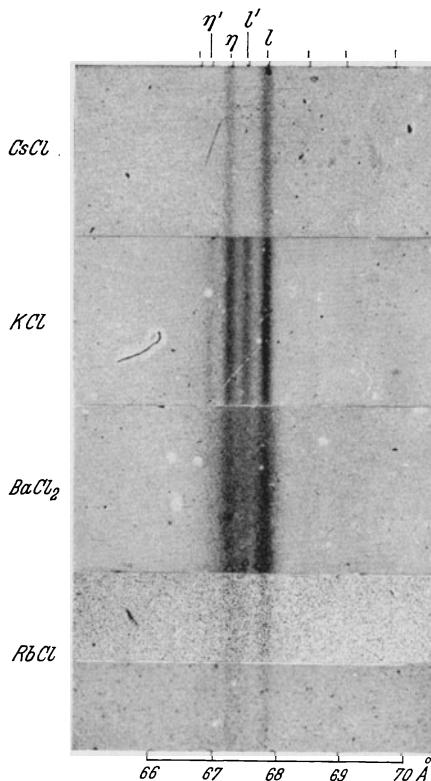


Abb. 14. Die  $\eta l$ -Dublette bei 17 Cl in verschiedenen Verbindungen.

Tabelle 3.

Linie	Rel. Intensität	$\lambda$
$\eta'$	0—1	66,91
$\eta$	4	67,25
$l'$	1—2	67,53
$l$	5	67,84

zu ersehen ist. Die eine Dublette ist um etwa 0,8 Volt im Verhältnis zu der anderen verschoben. Die Wellenlängenwerte sind in der vorstehenden Tabelle 3 zusammengestellt.

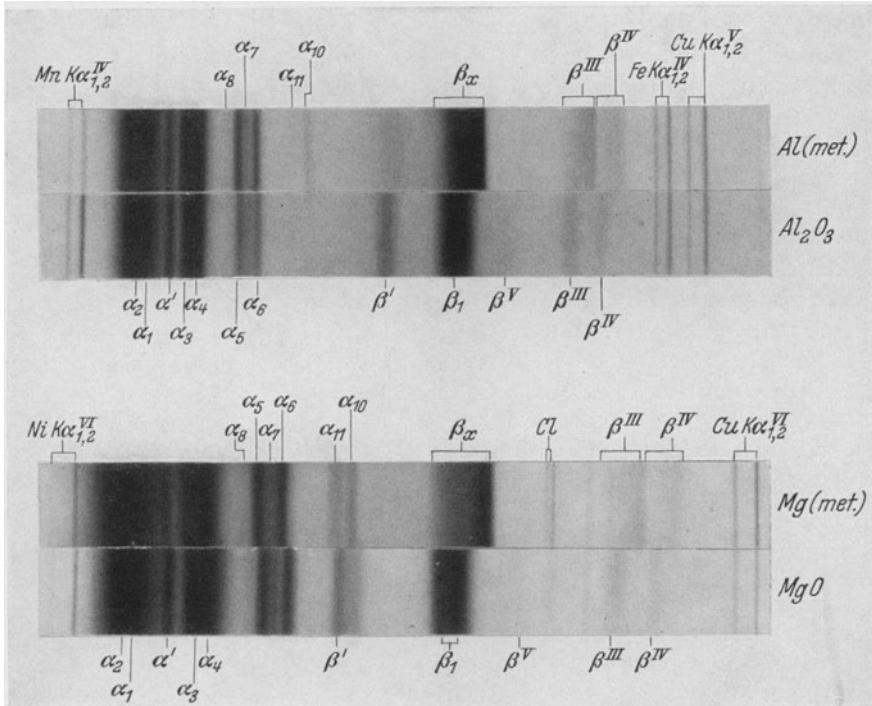


Abb. 15. Kristallgitteraufnahmen der K-Gruppe bei Al und Mg im Zustand von Metall bzw. einer nichtleitenden Verbindung.

**16 S.** Die noch spärlichen Untersuchungen (17) über die L-Reihe von Schwefel haben gezeigt, daß bei S als Element eine starke Dublette mit ziemlich diffusen Linien an der Stelle auftritt, wo die  $\eta l$ -Dublette zu erwarten ist. Die Wellenlängen sind 77,41 und 83,32 Å.E. Mit  $\text{Li}_2\text{SO}_4$  an der Antikathode erschien neben zwei breiten Linien, von denen die Lage der langwelligeren mit der entsprechenden Linie von reinem S übereinstimmt, noch eine sehr enge Dublette von zwei scharfen Komponenten. Die Wellenlängen der ganzen Gruppe sind

Tabelle 4.

Rel. Intensität	$\lambda$
(Liniengrenze)	95,64
2 (Max. I)	96,3
4 (Max. II)	97,9
1	100,89
3	104,5
2	113,1
2	118,15

- breite Linie . . . . . 76,75 Å.E.
- scharfe Dublette . . . . . { 79,29 Å.E.
- . . . . . { 79,98 Å.E.
- breite Linie . . . . . 83,35 Å.E.

15 P. Beim Phosphor, der noch nur ganz wenig untersucht worden ist, wurde (17) mit  $P_2O_5$  eine Gruppe von wenigstens fünf ziemlich diffusen Linien gefunden (s. Tabelle 4).

14 Si, 13 Al, 12 Mg, 11 Na. In dieser Elementengruppe kommt der mit den Leitungselektronen zusammenhängende Charakter der

Linien sehr schön zum Ausdruck. Wir erinnern uns des ausgeprägten Unterschiedes zwischen leitenden und nichtleitenden Verbindungen, welcher in der *K-Reihe*, und zwar bei der  $K-\beta_x$ -Linie, zum Vorschein kommt. Wie die Abb. 15 zeigt (23), ist diese Linie, die dem Übergang der Valenzelektronengruppe entspricht, bei Al und Mg in metallischer Form, ein breites Band mit scharfer, kurzweiliger Grenze, während die Linie bei den Oxyden weniger ausgedehnt ist und eine symmetrische Struktur hat.

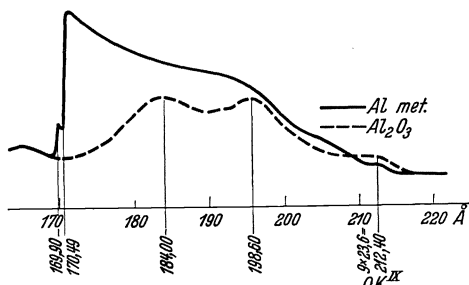


Abb. 16. Photometrische Registrierung der Intensitätsverlauf in der L-Linie von Al met. und  $Al_2O_3$ .

In der *L-Reihe* kommt der entsprechende Übergang der Valenzelektronengruppe wieder vor und zeigt dann auch einen ähnlichen Charakter. Die kurzweilige scharfe Grenze ist hier aber doppelt (s. Abb. 16) entsprechend den zwei Endniveaus  $L_{II}$  und  $L_{III}$ .

O'BRYAN und SKINNER (21) haben in ihrer oben erwähnten Arbeit diese Linie bei den Elementen Si bis Na untersucht und die Linienbreite mit der nach der SOMMERFELDSchen Theorie berechneten verglichen. Ihre Werte sind (s. Tabelle 5).

Tabelle 5.

Element	Kurzweilige Grenze Å.E.	Linienbreite in Volt	
		gemessen	theor.
14 Si	123	$19,2 \pm 2,5$	13
13 Al	169,8	$16,0 \pm 2$	12
12 Mg	251,0	$9,0 \pm 1,5$	7,2
11 Na	405	$3,5 \pm 1$	3,2

Bei der Berechnung der Linienbreite wurde folgende Zahl der Leitungselektronen pro Atom vorausgesetzt.

Na	1	Al	3
Mg	2	Si	4

SIEGBAHN und MAGNUSSON (17) haben für die kurzweiligen Grenzen und für die Linienbreite folgende Werte gefunden:

$\lambda$	Geschätzte Linienbreite in Volt	
14 Si	$L_{II}, III$	125,5
13 Al	$L_{II}$	169,9
	$L_{III}$	170,5
12 Mg	$L_{II}, III$	250,2

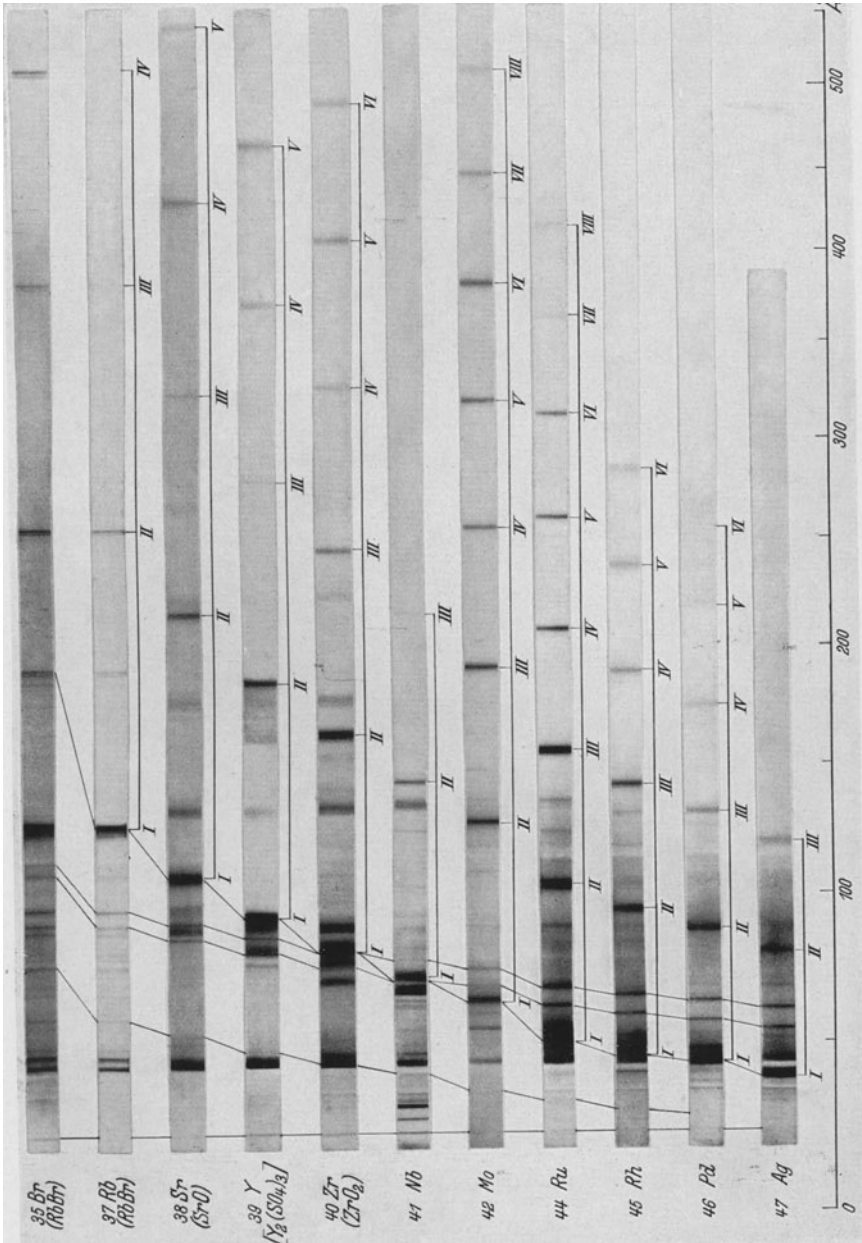


Abb. 17. Die M-Reihe der Elemente 35 Br bis 47 Ag.

In einer eben erschienenen Arbeit hat J. FARINEAU (24) die Röntgenspektren der Elemente Mg und Si studiert und findet dabei für die Breite



der L-Bande bei Mg den Wert  $8,5 \pm 1,5$  Volt, der also innerhalb der Fehlergrenzen mit dem oben angegebenen theoretisch berechneten Wert übereinstimmt. Bei Si in kristallisiertem Zustand und bei niedrigen Temperaturen wurde eine Breite von  $18 \pm 1,5$  Volt gefunden mit einer unsymmetrischen Struktur der Bande, aber keine scharfe kurzwellige Grenze. Dies ist in Übereinstimmung mit der Erwartung mit Rücksicht auf das niedrige Leitungsvermögen des Siliciums bei niedrigen Temperaturen.

### C. Die M-, N- und O-Reihen.

Einige der stärksten Linien der M-Reihe wurde von PRINS und TAKENS (25) mit Hilfe der Plangittermethode im ultraweichen Spektralgebiet bis nahe 100 Å.E. verfolgt. Mit derselben Methode hat ferner

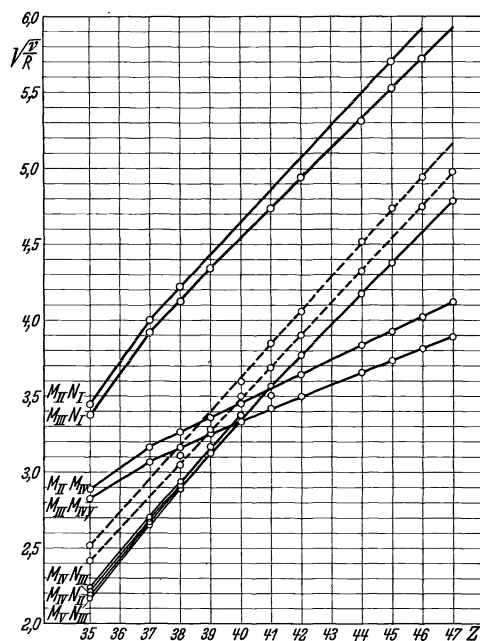


Abb. 18. MOSELEY-Diagramme der Linien der M-Reihe im Gebiet 35 Br bis 47 Ag.

THIBAUD (26) bei den Elementen 79 Au bis 73 Ta Linien gefunden und ausgemessen, die dem Übergang  $N_{IV,V} N_{VI,VII}$  entsprechen.

Mit Hilfe der Konkavgittermethode war es möglich, die Kenntnis dieser Reihen wesentlich zu erweitern (17). Eine Zusammenstellung von Spektrogrammen über die M-Reihe im Elementengebiet 47 Ag bis 35 Br ist in Abb. 17 wiedergegeben. Die Meßergebnisse, soweit sie sich auf sicher identifizierte Übergänge beziehen, sind in Tabelle 6 zusammengestellt. Außer diesen Linien sind noch eine Anzahl anderer bei den

verschiedenen Elementen gefunden und ausgemessen, wie aus den zitierten Publikationen zu ersehen ist. In mehreren Fällen ist auch eine starke Abhängigkeit von der chemischen Bindung nachgewiesen worden, wobei u. a. der Zusammenhang mit der elektrischen Leitfähigkeit zum Vorschein kommt.

Aus den Meßergebnissen ist in Abb. 18 ein MOSELEY-Diagramm der verschiedenen M-Reihenlinien gezeichnet.

Mit Hilfe der Meßergebnisse der Spektrallinien lassen sich dann die Werte der äußeren Niveaus berechnen (s. Tabelle 7). Als Ausgangswerte

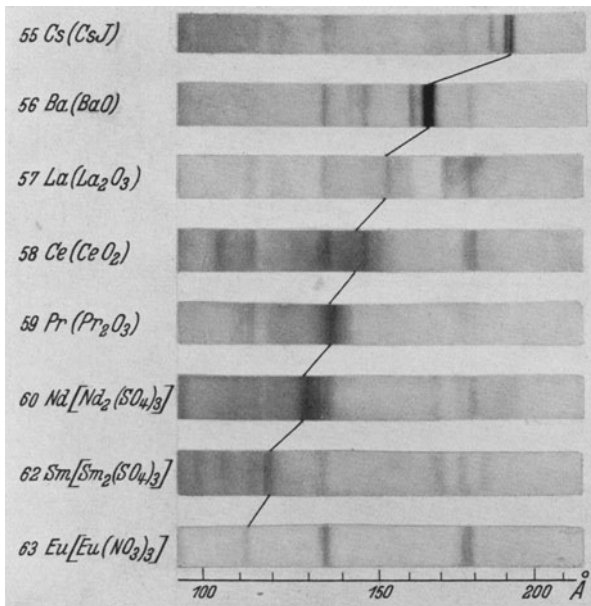


Abb. 19a. Die N-Reihe bei den seltenen Erden.

sind die in Klammern eingetragenen Werte benutzt, welche zum größten Teil aus Kristallmessungen von INGELSTAM und RAY (27) stammen.

Mit den Einzelheiten der Spektren der verschiedenen Elemente wollen wir uns hier nicht aufhalten, da die Untersuchungen noch einen nur vorläufigen Charakter haben. Sehr summarisch sind auch noch die Ergebnisse, welche über die N- und O-Reihen vorliegen. Es möge daher genügen, einige Aufnahmen und photometrische Registrierungen dieser Reihen hier wiederzugeben, um den komplizierten Bau dieser Spektren zu zeigen. Die Abb. 19a, b gibt die N-Reihe bei den seltenen Erden 63 Eu bis 57 La wieder. Bei 55 Cs erscheint eine gut zerlegte Gruppe von drei Linien, deren Deutung als Übergänge  $N_{IV, V}$   $O_{II, III}$  wahrscheinlich





Abb. 20. Die N-Reihe bei den schwersten Elementen. Eine Linie der O-Reihe von 90 Th bei  $\lambda = 174 \text{ \AA}$ .

Eine graphische Zusammenstellung der bis jetzt eingeordneten Linien der N-Reihe ist in Abb. 21 wiedergegeben.

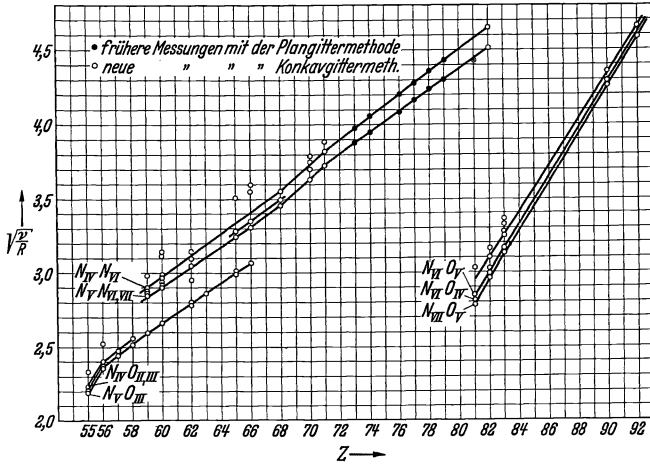


Abb. 21. MOSELEY-Diagramme der Linien der N-Reihe für die Elemente 55 Cs bis 92 U.

Tabelle 7.

	M <sub>I</sub>	M <sub>II</sub>	M <sub>III</sub>	M <sub>IV</sub>	M <sub>V</sub>	N <sub>I</sub>	N <sub>II</sub>	N <sub>III</sub>	Y <sub>I</sub>	Y <sub>II</sub>
35 Br	19,48	[13,60]	13,21	5,27	5,13	1,76	0,50	0,40	—	—
37 Rb	24,11	[18,46]	17,80	8,50	8,39	2,48	1,37	1,31	—	—
					M <sub>IV, V</sub>		N <sub>II, III</sub>			
38 Sr	—	[20,77]	20,01	10,16	10,04	3,01	1,73	1,66	0,58	—
39 Y	—	[23,02]	[22,13]	11,84	11,59	3,34	1,85	—	—	—
40 Zr	—	[25,44]	[24,43]	13,56	13,29	—	2,15	—	1,16	0,40
41 Nb	—	[28,11]	[26,91]	15,48	15,26	4,52	2,63	—	1,70	0,50
42 Mo	—	[30,47]	[29,17]	17,22	16,97	4,74	2,81	—	1,73	0,33
44 Ru	—	[35,87]	[34,15]	21,22	20,82	5,94	3,40	—	2,20	0,46
45 Rh	—	[38,31]	[36,45]	22,94	22,56	5,78	3,41	—	—	0,21
46 Pd	—	[41,29]	[39,20]	25,13	24,70	6,42	—	—	2,17	0,30
47 Ag	—	[44,57]	[42,21]	27,73	27,17	—	4,27	—	2,43	—

Schließlich sei erwähnt, daß in dem in Abb. 20 wiedergegebenen Spektrogramm von 90 Th eine diffuse Linie bei 174 Å.E. zu sehen ist, die unzweideutig der O-Reihe angehört.

## V. Ergebnisse der Untersuchungen über die Absorptionsspektren.

Die Untersuchung von Absorptionsspektren im ultraweichen Spektralgebiet stößt auf große Schwierigkeiten wegen der geringen Intensität der kontinuierlichen Strahlung in diesem Wellenlängengebiet; unsere Kenntnisse über die Absorptionsspektren sind daher hier noch sehr spärlich. Bei den früheren Untersuchungen mit Plangittern, besonders

von THIBAUD (28), wurden durch Eigenabsorption in den Restgasen des Vakuumspektrometers die K-Absorptionskanten von 8 O, 7 N und 6 C erhalten. Die Wellenlängen nach Messungen von THIBAUD sind 23,5, 31,1 und 43,5 Å.E.

Im kurzwelligen Gebiete, bis etwa 35 Å.E., haben ferner PRINS und TAKENS (29) mit der Plangittermethode die  $L_{II,III}$ -Kanten von 20 Ca, 22 Ti und 29 Cu, sowie die  $M_{IV,V}$ -Kanten von 47 Ag, 48 Cd, 50 Sn, 53 J und 56 Ba registriert

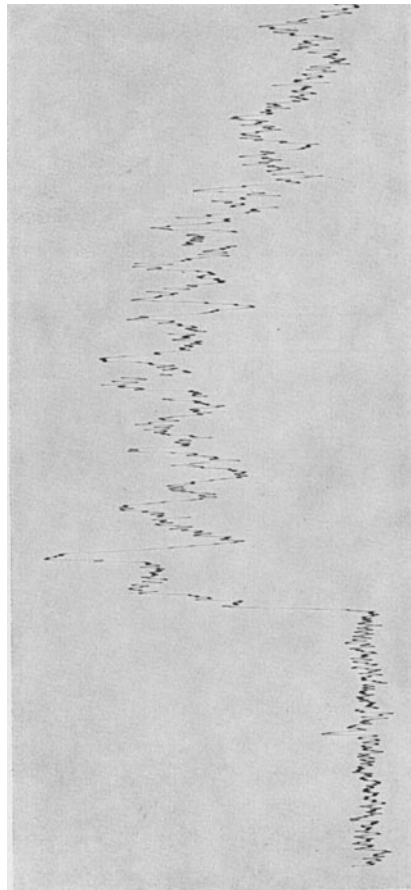
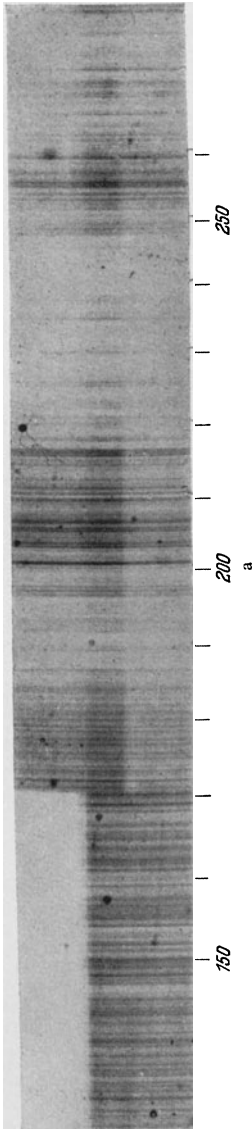


Abb. 22 a und b. Aufnahme des Absorptionsspektrums von Al mit einem linienreichen optischen Spektrum (Cu) als Hintergrund. Von V. H. SANNER.)

und gemessen. Mit derselben Methode hat dann noch PRINS (30) die  $L_{II,III}$ -Kanten von 18 A und 17 Cl bei etwa 50 und 60 Å.E. untersucht. In mehreren Fällen wurde eine Struktur der Absorptionskanten gefunden, die denen in dem Kristallgittergebiete bekannten ähnlich ist.

Eine derartige Feinstruktur ist in Abb. 6 bei der Absorptionskante von Stickstoff (als  $N_2O$ ) zu sehen.

Bei der Deutung der auf den Spektralaufnahmen erscheinenden Absorptionskanten hat man, wegen der großen Absorbierbarkeit der ultraweichen Röntgenstrahlung, nicht nur die Absorption im eigentlichen Strahlenweg (Gasreste oder eingeführte Absorptionsstoffe) zu berücksichtigen, sondern auch die Eigenabsorption in der Oberfläche der Antikathode und in den an dieser aufgedampften Stoffen, welche schon in winzigen Mengen Einfluß haben können, ferner Niederschläge am Spalt, Eigenabsorption im Gitter und endlich Absorption im photographisch aktiven und inaktiven Stoff der Plattenemulsion. Eine Anzahl der auf den Spektralplatten registrierten Absorptionskanten ist unter diesem Gesichtspunkt von PRINS (30), DOLEJŠEK und JANÍČEK (31), BAČKOVSKÝ und DOLEJŠEK (32) und SIEGBAHN und MAGNUSSON (17) diskutiert worden.

Um den in der ungenügenden Intensität der kontinuierlichen Strahlung liegenden Schwierigkeiten bei Untersuchung von Absorptionsspektren im langwelligen Gebiet zu entgehen, wurde versucht (33), statt kontinuierlicher Röntgenstrahlung ein linienreiches optisches Spektrum zu benutzen. In dieser Weise hat V. H. SANNER (34) mit dem Linienspektrum von Kupfer bei Hochvakuumfunken die langwelligen Absorptionsspektren von Al in metallischem Zustand ( $L_{III} \lambda = 170,56 \text{ \AA.E.}$ ), von Al als Oxyd ( $Al_2O_3$ ,  $L_{III} \lambda = 161,96 \text{ \AA.E.}$ ), von Mg, metallisch ( $L_{III} \lambda = 250,25 \text{ \AA.E.}$ ) und von Selen ( $M_V \lambda = 227,76 \text{ \AA.E.}$ ) messen können. Im letzten Falle war auch eine deutliche Feinstruktur erkennbar, wenn auch diese Methode, wo der Untergrund in sich große Intensitätsunterschiede aufweist, weniger geeignet ist, Feinstrukturen zu studieren. Das Aussehen der Absorptionaufnahme von Aluminium mittels dieser Methode zeigt Abb. 22.

Mit der zuletzt angeführten Methode haben SKINNER und JOHNSTON (35) unter Benutzung von Mo-Funkenspektrum als Lichtquelle die Absorptionskanten im langwelligen Gebiete für nebenstehende Elemente gemessen.

Besonders im langwelligsten Röntgengebiet scheint diese Methode sehr geeignet zu sein; im kurzwelligeren Gebiet ist es schwierig, ein genügend dichtes optisches Linienspektrum zu finden.

Die hier gegebene Darstellung hat sich wesentlich mit den Untersuchungsmethoden, besonders mittels Konkavgitter, für das ultraweiche Röntgenstrahlengebiet und mit den bis jetzt gewonnenen, zum Teil sehr spärlichen Ergebnissen beschäftigt. Die Knappheit des experimentellen Materiales hat es nur gestattet, eine Übersicht über den Weiterverlauf der früher bekannten Röntgenserien zu gewinnen, wobei noch neue

Tabelle 8.

Element	Kante	Wellenlänge in $\text{\AA.E.}$
3 Li	K	227 $\pm$ 1,5
12 Mg	$L_{II}$	249,4
	$L_{III}$	250,7 $\pm$ 0,2
27 Co	$M_{II,III}$	202 $\pm$ 1
28 Ni	$M_{II,III}$	190,5 $\pm$ 1,5

Reihen und wesentliche Änderungen in Intensitätsregeln gefunden worden sind. Eine mehr eingehende Verwertung des Materiales wird erst dann möglich sein, wenn die experimentellen Tatsachen besser durchgearbeitet worden sind, wozu jetzt die Voraussetzung vorzuliegen scheint.

#### Literaturverzeichnis.

1. COMPTON, A. H. and R. L. DOAN: Proc. nat. Acad. Sci. U.S.A. **11**, 598 (1925).
2. THIBAUD, J.: J. Physique (Paris) **8**, 13 und 447 (1927). — Physik. Z. **29**, 241 (1928).
3. BÄCKLIN, E.: Uppsala Univ. Årsskr. **1928**. Inaug.-Diss.
4. BEARDEN, J. A.: Physic. Rev. **37**, 1210 (1931).
5. BÄCKLIN, E.: Z. Physik. **93**, 450 (1935).
6. BEARDEN, J. A.: Physic. Rev. **48**, 385 (1935).
7. DU MOND, J. W. M. and V. L. BOLLMAN: Physic. Rev. **50**, 524 (1936).
8. FRIESEN, S. VON: Uppsala Univ. Årsskr. **1935**. Inaug.-Diss.
9. KELLSTRÖM, G.: Philosophic Mag. **23**, 313 (1937).
10. ALFVÉN, H. and V. H. SANNER: Nature (Lond.) **135**, 580 (1935).
11. MACK, J. E., J. R. STEHN and B. EDLÉN: J. opt. Soc. Amer. **22**, 245 (1932).
12. EDLÉN, B.: Z. Physik **100**, 621 (1936); **103**, 536 (1936); **104**, 188 und 407 (1937).
13. SÖDERMAN, M.: Nova Acta Reg. Soc. Sci. Upsaliensis, IV, Vol. **9**, Nr 8 (1935). Inaug.-Diss.
14. TYRÉN, F.: Z. Physik **98**, 768 (1936).
15. SIEGBAHN, M. u. R. THORÆUS: Ark. Mat., Astr. o. Fys. **18**, Nr 24 (1924). — Philosophic. Mag. **1**, 312 (1926); **2**, 1007 (1926).
16. DAUVILLIER, A.: J. Physique (Paris) **8**, 1 (1927).
17. SIEGBAHN, M. u. T. MAGNUSSON: Z. Physik **62**, 435 (1930); **87**, 291 (1934); **88**, 559 (1934); **95**, 133 (1935); **96**, 1 (1935).
18. HAUTOT, A.: Thèse de Liège **1934**.
19. BROILI, H., R. GLOCKER u. H. KIESSIG: Z. Physik **92**, 27 (1934).
20. HAUTOT, A. et J. SERPE: J. Physique (Paris) **8**, 175 (1937).
21. O'BRYAN, L. and H. W. B. SKINNER: Physic. Rev. **45**, 370 (1934).
22. SKINNER, H. W. B. and J. E. JOHNSTON: Nature (Lond.) **137**, 826 (1936).
23. KARLSSON, HARALD u. MANNE SIEGBAHN: Z. Physik **88**, 76 (1934).
24. FARINEAU, J.: C. r. Acad. Sci. Paris **204**, 1108 (1937).
25. PRINS, J. A. u. A. J. TAKENS: Z. Physik **75**, 741 (1932); **77**, 795 (1932).
26. THIBAUD, J.: J. Physique (Paris) **8**, 484 (1927). — Ann. Soc. Sci. Bruxelles (B) **48**, 145 (1928).
27. INGELSTAM, E. u. B. B. RAY: Z. Physik **88**, 218 (1934).
28. THIBAUD, J.: J. Physique (Paris) **8**, 13 und 447 (1927).
29. PRINS, J. A. u. A. J. TAKENS: Z. Physik **84**, 65 (1933).
30. — Physica **1**, 1174 (1934).
31. DOLEJŠEK, V. and B. JANÍČEK: Nature (Lond.) **132**, 443 (1933).
32. BAČKOVSKÝ, J. M. u. V. DOLEJŠEK: Z. Physik **99**, 42 (1936).
33. SIEGBAHN, MANNE: Proc. physic. Soc. (Lond.) **45**, 689 (1933).
34. SANNER, V. H.: Nature (Lond.) **134**, 100 (1934). — Z. Physik **94**, 523 (1935).
35. SKINNER, H. W. B. and J. E. JOHNSTON: Nature (Lond.) **137**, 826 (1936).



# Ferromagnetismus.

Von **O. v. AUWERS**, Berlin-Siemensstadt.

Mit 42 Abbildungen.

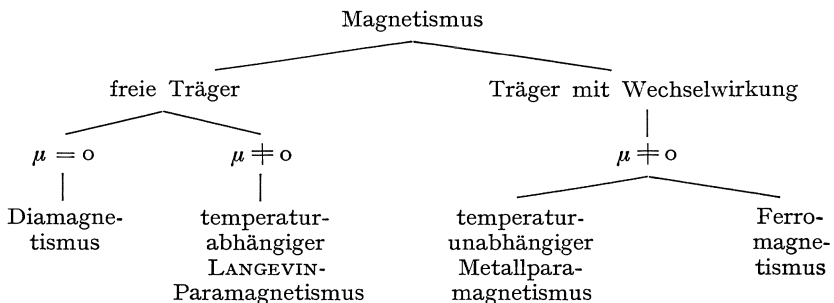
Inhaltsverzeichnis.		Seite
Einleitung . . . . .		133
I. Wechselwirkung als Grundlage des Ferro- und Antiferromagnetismus		135
II. Konzentrierte Lösungen ferromagnetischer Metalle in ferromagnetischen Gittern . . . . .		141
III. Das Problem der CURIE-Temperatur . . . . .		149
IV. Magnetische Anisotropie . . . . .		153
A. Vorzugsrichtungen (Anisotropie 1. Ordnung) . . . . .		153
B. Texturen (Anisotropie 2. Ordnung) . . . . .		161
V. Dauermagnete . . . . .		171
Schlußwort . . . . .		179
Literaturverzeichnis . . . . .		180

## Einleitung.

Im Rahmen der magnetischen Erscheinungen stellt der Ferromagnetismus nur einen kleinen besonderen Ausschnitt dar, dem man gewöhnlich den Dia- und Paramagnetismus gegenüberstellt. Die Berechtigung dieser Abzweigung des Ferromagnetismus vom Paramagnetismus, mit dem der Ferromagnetismus das positive Vorzeichen der Suszeptibilität und das Vorhandensein magnetischer Dipolmomente ( $\mu$ ) gegenüber dem Diamagnetismus gemein hat, liegt nicht nur in der Sinnfälligkeit der ferromagnetischen Erscheinungen begründet, die dem Laien am stärksten auffällt, so daß er unter „Magnetismus“ schlechthin nur den Ferromagnetismus zu verstehen gewohnt ist, sondern in dem tieferen Wesen des molekularen Aufbaus der Metalle, den man mit dem Worte „Wechselwirkung“ kennzeichnen kann. Während der Diamagnetismus eine allen Atomen und jedem Stoff eigentümliche Induktionserscheinung ist, die auch ohne Vorhandensein eines permanenten Dipolmomentes ( $\mu=0$ ) durch die Induktionswirkung des äußeren Magnetfeldes hervorgerufen wird, ist der Para- und Ferromagnetismus an das Vorhandensein permanenter Dipolmomente ( $\mu \neq 0$ ) in den Atomen des Stoffs gebunden. P. WEISS (91) hat schon frühzeitig erkannt, daß man die Erscheinungen des Ferromagnetismus aus denen des Paramagnetismus formal durch Einführung eines inneren Molekularfeldes ableiten kann. Dabei schwebte als Vergleichsstoff und als theoretischer Ausgangspunkt das Verhalten der paramagnetischen Gase und Salze vor, die dem CURIESchen oder CURIE-WEISSschen Gesetz folgen. Das Kennzeichen dieser paramagnetischen Stoffe ist die anscheinend „freie“ Einstellung der Momentachsen der einzelnen Atome im Magnetfeld, nicht nur in Gasen, sondern auch in festen Stoffen, die — abgesehen von der theoretischen Schwierigkeit, daß ohne jede Wechselwirkung überhaupt keine „Einstellung“, d. h. Änderung der

Achsenrichtung, sondern nur ein Pendeln (bei Dipolen) oder Präzedieren um eine Gleichgewichtslage (bei Kreiseln) stattfinden kann — trotz der teilweisen Verlegung des Sitzes des magnetischen Momentes in den Spin der unaufgefüllten Elektronenschalen wegen der Kopplung zwischen dem Spin- und Bahnmoment keineswegs selbstverständlich ist. Immerhin läßt sich das Gebiet des *temperaturabhängigen* Paramagnetismus in fast allen Fällen befriedigend durch die Annahme frei drehbarer Atommomente beschreiben, zumal wenn man die Entkoppelung der Bahn- und Spinvektoren bei engen und stark gestörten Multipletts und die Aufspaltungseinflüsse des Kristallgitter-Starkeffekts berücksichtigt. Neben diesem temperaturabhängigen Paramagnetismus, der bisher als das eigentliche Gegenstück des Ferromagnetismus aufgefaßt worden ist, gibt es jedoch noch eine — bisher mit keinem einheitlich angenommenen Namen belegte — Gruppe paramagnetischer Stoffe, die durch weitgehende oder völlige *Temperaturunabhängigkeit* des Paramagnetismus gekennzeichnet ist. Sie sei im folgenden in Anlehnung an einen aufkommenden Sprachgebrauch kurz als „Metallparamagnetismus“ bezeichnet, da sie die meisten paramagnetischen Metalle des Periodischen Systems umfaßt. Diese Gruppe folgt also *keineswegs* dem CURIE- oder WEISSschen Gesetz. Sie ist an dieser Stelle von E. VOGT (87) im Rahmen der magnetischen Eigenschaften der metallischen Elemente behandelt worden.

Man muß also bei dem heutigen Stand der Erkenntnis in Wahrheit vier statt drei Gruppen unterscheiden: Diamagnetismus, CURIE- oder LANGEVIN-Paramagnetismus, Metallparamagnetismus und Ferromagnetismus und die Abgrenzung des Ferromagnetismus vom Paramagnetismus hat nicht — wie bisher — zwischen Paramagnetismus schlechthin und Ferromagnetismus stattzufinden, sondern zwischen CURIE- und Metall-Paramagnetismus, während Metallparamagnetismus und Ferromagnetismus ihrem Wesen nach eng zusammen gehören. Der ihnen gemeinsame Gegensatz zum CURIE-Paramagnetismus liegt in der *Unzulässigkeit* der Annahme der freien Drehbarkeit der Atommomente. Vielmehr gilt für beide Arten des Magnetismus eine starke *wechselseitige Beeinflussung* der Einstellung der Atommomente benachbarter Bausteine. Sinngemäß kann man also alle Erscheinungen des Magnetismus in folgendem Schema unterbringen:



## I. Wechselwirkung als Grundlage des Ferro- und Antiferromagnetismus.

So bekannt die formale Ableitung der ferromagnetischen Erscheinungen aus den curieparamagnetischen durch P. WEISS (1907) (91) durch Einführung eines inneren Molekularfeldes — ähnlich der Erweiterung der BOYLE-MARIOTTESchen Gasgesetze durch VAN DER WAALS auf Flüssigkeiten — ist, so bekannt ist auch das vergebliche Bemühen um eine atomphysikalische Erklärung der notwendigen Größe dieses Molekularfeldes bis zur wellenmechanischen Deutung W. HEISENBERGS (1928) (42) als Austauschwechselwirkung benachbarter Bausteine.

Die Elektronen der Riesenmolekeln, die die Metalle darstellen, können wegen der räumlichen Quantelung infolge ihres Dralls nur zwei Einstellungen zueinander einnehmen: parallel oder antiparallel. Für die freien Leitungselektronen ist die antiparallele Absättigung — solange sie möglich ist — die stabilere Einstellung. Sie führt unter dem Einfluß äußerer Felder zum temperaturunabhängigen Paramagnetismus (Metallparamagnetismus), der vor der Übertragung der Quantentheorie durch PAULI (68) auf die Leitungselektronen für die Theorie unverständlich war. Durch Berücksichtigung eines diamagnetischen Anteils, der von der Krümmung der Elektronenbahnen im Gitter durch das Magnetfeld herrührt (22, 33, 57, 70, 84, 85), läßt sich in einigen Fällen eine befriedigende Übereinstimmung mit der Erfahrung erreichen.

HEISENBERG hat jedoch gezeigt, daß in bestimmten Fällen auch die parallele Einstellung der Elektronenspins bei nicht zu hohen Temperaturen stabiler sein kann als die antiparallele. Dabei bleibt der Sitz der für diese Erscheinung verantwortlichen Elektronengruppen in der Metallriesenmolekel noch mehr oder weniger verborgen. Ansätze zu ihrer örtlichen Bestimmung findet man bei R. SWINNE (83) und J. C. SLATER (80).

Der alten Frage, die die Forschung immer wieder beschäftigt hat, wann — beispielsweise bei den Elementen des Periodischen Systems — die parallele (ferromagnetische), wann die antiparallele („antiferromagnetische“, metallparamagnetische) Einstellung eintritt oder überwiegt, kann man auf einem Umwege über die binären Metallegierungen etwas näherkommen. Zu diesem Zweck betrachten wir eine Gruppe von binären Legierungen, die dadurch gekennzeichnet ist, daß sie verdünnte Lösungen beliebiger Metallatome in ferromagnetischen Gittern umfaßt. Unter „ferromagnetischen Gittern“ sollen hier solche Metallgitter verstanden sein, in denen bestimmte, räumlich über viele Atomplätze ausgedehnte Gruppen von Elektronenspinmomenten in dem oben erwähnten Sinn parallel gerichtet sind. Dann kann man die Frage aufwerfen, ob die Spinnomente der gelösten Fremdatome in statistischer Verteilung ihrer Achsenrichtungen ohne Wechselwirkung in das Gitter eingehen oder ob sie in irgendeiner Form an der Ausrichtung der

Spinmomente des lösenden Gitters teilnehmen. Wenn ja, so sind wieder zwei Fälle denkbar: entweder die Teilnahme am Ferromagnetismus durch Parallelstellung oder dessen Schwächung durch Antiparallelstellung.

Der Gedanke, etwas über die Einstellung der Spinmomente gelöster Fremdatome durch Messung der Änderung der magnetischen Sättigung der binären Legierung aussagen zu können, beruht auf einer nachträglichen Rechtfertigung der Fragestellung durch eine sinnvolle, d. h. gesetzmäßige Antwort. Denn es ist keineswegs a priori selbstverständlich,

daß überhaupt eine Teilnahme der gelösten Atome an der Einstellung der Spinmomente des lösenden Gitters stattfindet und wenn, daß sie nicht stets durch das zur Sättigung notwendige äußere Feld als erzwungene Parallelstellung erscheint.

Der auf R. FORRER (31) zurückgehende und hauptsächlich von CH. SADRON (75) und L. NÉEL (64) durchgeführte Gedanke der Bestimmung der Einstellung gelöster Spinmomente beruht auf der Bestimmung des Sättigungsmomentes dieser gelösten Atome durch Extrapolation der Tangente an die Sättigungs-Konzentrations-Kurve der binären Legierungen. Abb. 1 stellt die Verhältnisse schematisch dar. Als Ordinaten sind die (auf die Feldstärke  $\infty$  und Temperatur  $0^\circ$  K extrapolierten) Sättigungsmomente  $\sigma$  der binären Legierungen, die sich aus den Bestandteilen  $A$  und  $B$  zusammensetzen (Abszissenachse: Prozent  $B$ ) aufgetragen.  $A$  sei im reinen Zustand

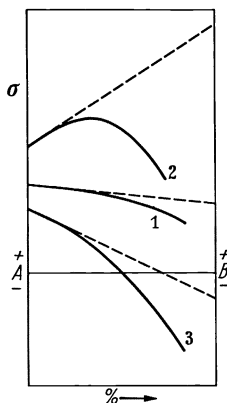


Abb. 1. Schema der Momentbestimmung des in  $A$  gelösten Zusatzes  $B$  nach Größe und Vorzeichen.

ferromagnetisch,  $B$  ein beliebiges Metall. Dann kann man sicher, selbst wenn die  $\sigma$ -Kurve mit steigender Konzentration des gelösten Stoffs  $B$  gekrümmt ist, aus der *Tangente* an diese Kurve im Schnittpunkt des Lots in  $A$  mit der Kurve auf das Moment des gelösten Stoffs schließen. In Abb. 1 sind drei verschiedene Fälle dargestellt:

1. Die Tangente an die  $\sigma$ -Kurve (1) fällt wie diese Kurve mit steigender Konzentration von  $B$  und schneidet das Lot in  $B$  in einem bestimmten positiven Ordinatenwert, der — die Gültigkeit der WIEDEMANNschen Mischungsregel vorausgesetzt — den Sättigungswert der Komponente  $B$  darstellen würde. Daß die Mischungsregel bei höheren Konzentrationen dieser Metallegierungen fast nie gültig bleibt — wie die meist vorhandene Krümmung der  $\sigma$ -Kurven anzeigt —, tut der Anwendbarkeit dieser Extrapolation keinen Abbruch, solange nur bei kleinen Konzentrationen ein hinreichend geradliniges Stück auftritt, das die Bestimmung der Tangentenneigung mit ausreichender Genauigkeit zuläßt.

2. Die Tangente an die  $\sigma$ -Kurve (2) steigt mit steigender Konzentration, obwohl die Kurve (2) bei höheren Konzentrationen von  $B$

Tabelle 1. Magnetonzahlen der gelösten Elemente in ferromagnetischen Gittern.

reihe		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I	In Fe*: Element			Al	Si						
	Moment			o	o						
V	Element					V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni
	Moment					o	o	-1	+11	+16,3	+14
7	Element				Sn						
	Moment				o						
I	Element	Au									Pt
	Moment	o									+14
I	In Co: Element				Si						
	Moment				-18						
V	Element							Mn	Fe	Co	Ni
	Moment							-15	+14,7	+9	+3
I	Element	Au									Pt
	Moment	+2,3									+3
I	In Ni*: Element			Al	Si						
	Moment			-12,2	-18						
V	Element	Cu	Zn	-15,5	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni
	Moment	-2	-7,2			-23	-19	+15	+14	+9	+3
I	Element										
	Moment	-5,2	-10			-20	-20	+11,5	+11	+7	
I	Element				Sn	Sb	Mo		Ru		Pd
	Moment				-18	-24,5	-19		-11		+3
I	Element	Au									Pt
	Moment	-3,5				-20	-25,5	-30	-13		-1
							W				
							-19				
							-30				-3

die Frage aufgeworfen werden, wie sich die Sätze I und II weiter auswirken müssen, wenn man mit den Elementen des lösenden Gitters noch weiter nach links im Periodischen System fortschreitet, d. h. zunächst zum Mn übergeht.

Dabei verliert jedoch die Fragestellung nach der Parallel- oder Antiparallelstellung der gelösten Spinnomente in kleinen Konzentrationen ihren Sinn, da das lösende Mn-Gitter Antiferromagnetismus, d. h. antiparallele Spinstellung hat. Erst bei größeren Konzentrationen des gelösten Stoffs könnte sie sinnvoll werden, wenn die Verstärkung der *einen* Richtung die Antiparallelstellung des Mn-Gitters aufheben könnte.

\* Die Kursivzahlen geben Meßwerte von MARIAN (61) an; die Fe-Werte stammen mit Ausnahme der Mn-, Fe-, Co- und Ni-Werte von FALLOT (29), alle übrigen von SADRON (75).

Wenn Satz II dann weiterhin gültig bleiben soll, muß der Höchstwert jetzt bis zum Ni, d. h. ans Ende der Übergangsreihe, gewandert sein. Nach der Lage der CURIE-Temperaturen für die rechts von Mn folgenden Elemente Fe und Co kann man annehmen, daß für diese, wie für das reine Mn die antiparallele Stellung gilt. Ferner weiß man aus der Cu-Mn- und Ag-Mn-Reihe, daß in ihnen *positive* Wechselwirkungen erreicht werden und daß Legierungen des B, Al, Sn, N, P, As, Sb und Bi, d. h. also unter anderen *aller* Elemente der 5. Vertikalreihe des Periodischen Systems mit Mangan ferromagnetisch werden können.

Aus allen diesen Tatsachen zusammen kann man vermuten, daß der Kurvenverlauf der Abb. 4 für Mangan spiegelbildlich zu denen des Co und Ni verlaufen muß, woraus man als

*Satz III* die Vermutung ableiten kann, daß mit weiterhin steigender Elektronenzahl des lösenden Gitters, d. h. mit Annäherung an die halb-besetzte Untergruppe, das Gesetz, das die parallele oder antiparallele Einstellung der Spinnomente bestimmt (PAULI-Prinzip zweiter Art), umschlägt.

Eine Vorbereitung dieses Umschlags deutet sich in dem Nullwerden der Eisenkurve in der linken Hälfte des Periodischen Systems an. Man käme also zu einer wesentlichen Erweiterung des Satzes I, die nicht nur die ferromagnetischen Legierungen der rechten Hälfte, sondern auch die meist als „überraschend“ empfundenen der linken Hälfte aus dem Obwalten des gleichen Gesetzes herzuleiten erlaubt.

Diese Vermutungen sind jedoch zur Zeit noch zu wenig durch die Erfahrung belegt, als daß ihre Folgerungen hier weiter erörtert werden sollten. Berücksichtigt man den einigermaßen gesicherten Verlauf der Kurve in der Pd-Reihe, die *keinen* Umschlag enthält, so kann man rein schematisch folgende 6 Fälle für möglich halten, von denen bisher zwei als einigermaßen gesichert gelten können:

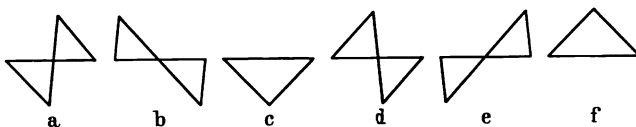


Abb. 5. Mögliche Schemata der parallelen und antiparallelen Spin-Spin-Koppelung benachbarter Atome in Abhängigkeit von der Zahl der Außenelektronen. (Koordinaten vgl. Abb. 4.)

Es liegt auf der Hand, daß sich in allen diesen Formen ein ausgeprägter Einfluß der Elektronenzahlen beider Partner — des lösenden Gitters und der gelösten Fremdatome — bemerkbar macht. Zum völligen Verständnis dieses Einflusses der Elektronenzahl auf die Spinnstellung bedarf es jedoch noch der empirischen Bestimmung aller dieser Kurven für jede *Horizontalreihe* des Periodischen Systems. Die hier aufgestellten Regeln über die Parallel- und Antiparallel-Einstellung der Spinnomente benachbarter Atome der Riesenmolekel erinnern zum Teil überraschend stark an die HUNDSchen Regeln über regelrechte und

stark fällt. Wieder gibt der positive Ordinatenabschnitt über  $B$  den Sättigungswert der  $B$ -Komponente in kleinen Konzentrationen an.

3. Die Tangente an die  $\sigma$ - $\%$ -Kurve (3) fällt mit steigender Konzentration wie diese und schneidet auf dem Lot in  $B$  einen negativen Ordinatenwert ab. Dann gibt dieser Abschnitt zahlenmäßig den Wert des gelösten Momentes an, zeigt aber gleichzeitig, daß das Moment des gelösten Stoffs mit entgegengesetzter Spinrichtung in das ferromagnetische Gitter eingebaut wird.

Die Straßburger Schule hat in zahlreichen Arbeiten viele binäre Lösungen in Eisen, Kobalt und Nickel untersucht und ist dabei im wesentlichen zu der Erkenntnis gekommen, daß das Moment der gelösten Fremdatome im ferromagnetischen Gitter eine einfache periodische Funktion der Zahl der Außenelektronen

der Untergruppen ist, ähnlich wie bei den freien Ionenmomenten der Salze der Übergangsgruppen.

CH. SADRON (75) hat seine ersten Ergebnisse in der Abb. 2 zusammengefaßt, in der Elemente der senkrechten Reihen des Periodischen Systems als gleichwertig und ersetzbar behandelt werden. Etwas ausführlicher stellt Abb. 3 nach O. v. AUWERS (3) die Verhältnisse dar.

Doch gehen beide Darstellungen an der Berücksichtigung des Vorzeichens der so bestimmten Momentwerte vorbei, die gerade etwas über die gesetzmäßige Abhängigkeit der Wechselwirkung vom Periodischen System erkennen läßt.

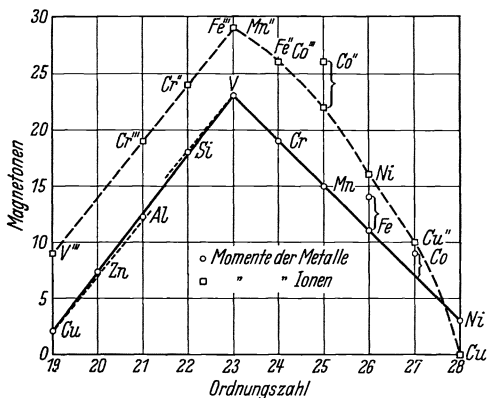


Abb. 2. Ionen- und Metallmomente in Abhängigkeit von der Ordnungszahl. [Nach CH. SADRON (75).]

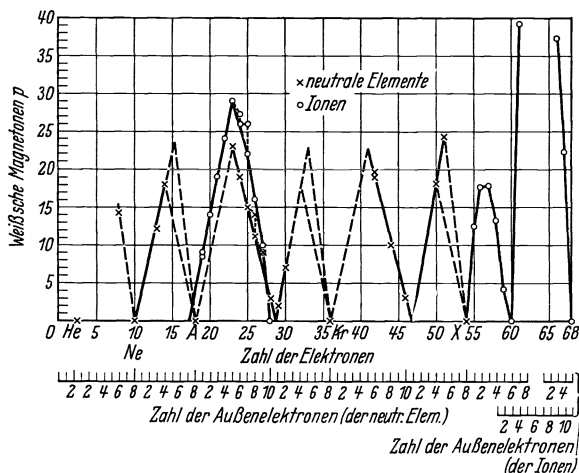


Abb. 3. Ionen- und Metallmomente in Abhängigkeit von der Ordnungszahl. [Nach O. v. AUWERS (3).]

Stellt man die zur Zeit vorliegenden Meßergebnisse an Fe-, Co- und Ni-Gittern in Abb. 4 zusammen, so erkennt man folgende Gesetzmäßigkeiten (6):

**Satz I.** Am Anfang der Untergruppen werden die gelösten Momentträger mit antiparallelem Spin in das lösende ferromagnetische Gitter aufgenommen, am Ende dagegen mit parallelem, wie es der Beteiligung am Ferromagnetismus des lösenden Gitters entspricht.

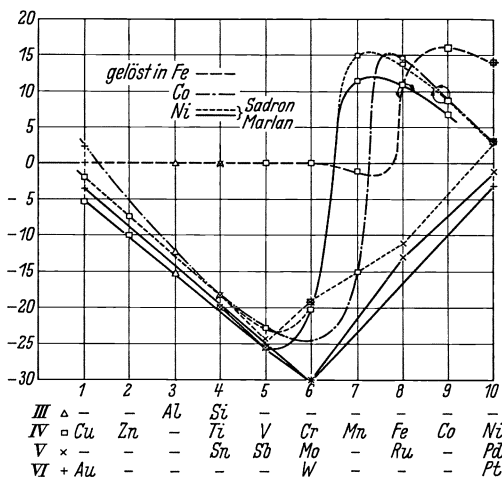


Abb. 4. Metallmomente in Abhängigkeit von der Zahl der Außenelektronen. [Nach O. v. AUWERS (6).] (Nach Messungen verschiedener Verfasser gezeichnet.)

Elektronenzahlen des gelösten Elements, so daß die Neigung zum Umschlag von antiparalleler zu paralleler Spinstellung auf die Gesamtzahl der beteiligten Elektronen beider Partner bezogen stets bei der gleichen Elektronenzahl aufzutreten scheint.

Die Abb. 4 zugrunde gelegten Meßwerte der Magnetonzahlen der gelösten Elemente sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Man erkennt an ihnen im großen und ganzen die ungefähre Gültigkeit der SADRONschen Annahme der gegenseitigen Ersetzbarkeit der Elemente ein und derselben senkrechten Reihe des Periodischen Systems, aber doch auch zugleich wesentliche Ausnahmen. So fallen z. B. alle Elemente bis zur 6. Reihe in Fe gelöst völlig heraus.

Man sieht also, daß man zur völligen Kenntnis der für die Spin-einstellung maßgeblichen Gesetze für jede Horizontalreihe des Periodischen Systems — im Gegensatz zu SADRON — eine eigene Kurve aufstellen muß. Das dazu notwendige Tatsachenmaterial ist noch nicht ausreichend genug. Immerhin läßt die in Fe gelöste Reihe erkennen, daß neben der Parallel- und Antiparallelstellung der Spinmomente auch völlige Änderungen der magnetischen Momente durch den Lösungsvorgang eintreten können. Ehe wir hierauf näher eingehen, soll zunächst

Das Gesamtmoment des gelösten Stoffs stellt sich also jedesmal dann anders zum lösenden Gitter ein, wenn die Spinzahl des gelösten Stoffs die nach dem PAULI-Prinzip mögliche Anzahl paralleler Spins in der Schale zu übersteigen beginnt und deshalb zu dem das Moment wieder herabsetzenden antiparallelen Aufbau übergehen muß.

**Satz II.** Die Lage der positiven Höchstwerte verschiebt sich gesetzmäßig mit zunehmender Elektronenzahl des lösenden Gitters um ebensoviel zu kleineren



verkehrte Terme, so daß man sie als eine Erweiterung der HUNDSchen Regeln von der Spin-Bahn-Koppelung im Einzelatom auf die Spin-Spin-Koppelung in metallischen Riesenmolekeln auffassen kann (HUNDSche Regeln zweiter Art).

Wir hatten auf S. 135 gesagt, daß man der Frage nach der „Ursache“ der Verteilung von Metallparamagnetismus und Ferromagnetismus im Periodischen System der Elemente auf einem „Umwege“ über die binären Legierungen näherkommen kann. Was damit gemeint war, dürfte jetzt klar sein. Denn man kann die reinen Elemente im Sinne des hier entwickelten Gedankens natürlich stets als Lösungen ihrer eigenen Atome in sich selbst als lösendem Gitter auffassen. In diesem Sinn waren ja die reinen Elemente (Mn), Fe, Co und Ni ohne weiteres mitbenutzt und fügten sich zwanglos den Kurven ein. Wir können also die oben gewonnene Einsicht, daß Parallel- und Antiparallelstellung des Elektronenspins in erster Linie eine Frage der Elektronenzahl und des dadurch bestimmten PAULI-Zustandes zweiter Art ist, verallgemeinern und auf die Elemente des Periodischen Systems ausdehnen. Die daneben ebenfalls maßgebliche Geometrie des Gitters — die Kristallstruktur — hängt ebenfalls, wie vor allem U. DEHLINGER (23) betont hat, von der Elektronenzahl ab, ist also, obwohl sie Einfluß auf die Spinstellungen benachbarter Sphären hat, nur eine koordinierte Folge derselben Ursache.

## II. Konzentrierte Lösungen ferromagnetischer Metalle in ferromagnetischen Gittern.

Die bisher entwickelten Gedankengänge, die den Zweck verfolgten, die Bedeutung der *Wechselwirkung* für das Verständnis des Ferromagnetismus herauszuheben, waren ausschließlich an verdünnten Lösungen nichtferromagnetischer Metalle in ferromagnetischen Gittern gewonnen worden. Ebenso fruchtbar haben sich die Untersuchungen von verdünnten Lösungen ferromagnetischer Metalle in diamagnetischen Gittern erwiesen. Auch in diesem Gebiet des Legierungsmagnetismus erweist sich der Gedanke der Wechselwirkung als Wegweiser durch die Mannigfaltigkeit der Erscheinungen. Da diese jedoch ausschließlich dem Dia- und Paramagnetismus — und zwar beiden Arten von Paramagnetismus — angehören, wollen wir sie als nicht zu unserem Thema gehörig beiseite lassen, so sehr an und für sich dieses Gebiet auch geeignet ist, weiteres Licht auf das Wesen des Magnetismus schlechthin zu werfen.

Dagegen verdienen die konzentrierten Lösungen ferromagnetischer Metalle in ferromagnetischen Gittern noch einen kurzen Überblick, obwohl das Gebiet bisher weder eine gewisse Abgeschlossenheit noch eine befriedigende Klärung gefunden hat.

Die atomtheoretische Deutung des magnetischen Momentes läßt eigentlich ein ganzzahliges Vielfaches des BOHRschen Magnetons erwarten, wenn — wie in den ferromagnetischen kubischen Metallen — das

Bahnmoment „totgeschlagen“ ist und der Spin die einzige Ursache des magnetischen Momentes ist<sup>1</sup>.

Ansätze zur Deutung der Nichtganzzahligkeit sind oft gemacht. J. DORFMAN (27) geht dabei von der Bemerkung aus, daß die nach dem SADRONschen Verfahren gefundenen Magnetonenwerte von Cu, Zn, Al und Sn in Ni ganzzahlig 0 bzw. -1, -2 und -3 BOHRsche Magnetonen werden, wenn man dem Ni<sup>+</sup>-Ion 1 BOHRsches Magneton und dem Ni-Atom 0 Magnetonen zuschreibt, wie es der Schalenbau in beiden Fällen erfordert, und die Annahme macht, daß der Ni-Wert von 0,6 BOHRschen Magnetonen durch 60% Ni<sup>+</sup>-Ionen ( $2 D_{5/2} d^9$ ) und 40% Ni-Atome ( $1S_0 d^{10}$ ) hervorgerufen wird. Das reine Ni-Metall wird hier also ebenso als „binäre Legierung“ aufgefaßt, wie wir die reinen Metalle schon im vorausgehenden Abschnitt behandelt haben. Eine Rechtfertigung dieses Vorgehens liegt lediglich in der Tatsache, daß man durch diese Annahme zu einer — theoretisch plausibeln — Ganzzahligkeit der gelösten Fremdatome kommt. Auf die gleiche Weise findet man für Fe mit  $\bar{\mu} = 2,2 \mu_B$  20% Fe<sup>+</sup>-Ionen und 80% Fe-Atome und für Co mit  $\bar{\mu} = 1,75 \mu_B$  70% Co<sup>+</sup>-Ionen und 30% Co-Atome.

Diese Aussagen unterliegen jedoch dem Mangel, daß man über die Ionisierungszustände der Atome im Metallgitterverband oft sehr wenig<sup>2</sup> weiß, also verhältnismäßig viel Spielraum zur Deutung hat. Das hat dazu Anlaß gegeben, daß man eher umgekehrt aus magnetischen Messungen — beispielsweise von Elementen der Fe-Übergangsgruppe in dia- oder ferromagnetischen Gittern — Aussagen über den Ionisierungszustand machen zu können hoffte. Leider liegen aber — wie besonders E. VOGT (88) betont hat — die Unterschiede der theoretischen Werte, die für die verschiedenen Atomzustände berechenbar sind, in den Grenzen der experimentellen Bestimmung der Magnetonenwerte, so daß von hier aus bisher sichere Aussagen häufig nicht möglich sind. Die Tabellen 2 und 3 zeigen diesen Vergleich.

Tabelle 2. Experimentelle Magnetonzahlen.

	$\mu_W$	$\mu_B$		$\mu_W$	$\mu_B$		$\mu_W$	$\mu_B$
Mn in Cu	25	5,05	V in Ni	23	4,65	Mn <sup>++</sup> Fe <sup>+++</sup>	29	5,85
Mn in Ag	23	4,65	Cr in Ni	19	3,84	Fe <sup>++</sup> Co <sup>+++</sup>	26	5,25
Cr in Au	24	4,85	Mn in Ni	15	3,03	Co <sup>++</sup>	26; 22	5,25; 4,45
Fe in Au	26	5,25				Ni <sup>++</sup>	16	3,23
Co in Au	22	4,45						

<sup>1</sup> Bei den freien Atomen und Ionen ist diese Ganzzahligkeit nicht zu erwarten, weil sich das magnetische Moment vektoriell aus dem Bahn- und Spinnmoment zusammensetzt.

<sup>2</sup> Durch magnetische Messungen konnten bisher Cu, Ag und Au als einwertig, Ni, Pd und Pt in verdünnten Lösungen als nullwertig nachgewiesen werden; vgl. E. VOGT (88).

Tabelle 3. Theoretische Magnetonenwerte.

Ionen	Grund- term	Zahl der Außen- elektronen	HUND	BOSE- STONER
Cr <sup>+++</sup> Mn <sup>++++</sup>	<sup>4</sup> F <sub>3/2</sub>	3	3,48	19,18
Cr <sup>++</sup> Mn <sup>+++</sup>	<sup>5</sup> D <sub>0..</sub>	4	0	24,26
Cr <sup>+</sup> Mn <sup>++</sup> Fe <sup>+++</sup>	<sup>6</sup> S <sub>5/2</sub>	5	29,30	29,30
Cr Mn <sup>+</sup> Fe <sup>++</sup> Co <sup>+++</sup>	<sup>5</sup> D <sub>4</sub>	6	33,22	24,26
Mn Fe <sup>+</sup> Co <sup>++</sup>	<sup>4</sup> F <sub>9/2</sub>	7	32,85	19,18
Fe Co <sup>+</sup> Ni <sup>++</sup>	<sup>3</sup> F <sub>4</sub>	8	27,68	14,01
Co Ni <sup>+</sup> Cu <sup>++</sup>	<sup>2</sup> D <sub>5/2</sub>	9	17,58	8,58

Bei dieser großen Unsicherheit kann es nicht wundernehmen, daß auch andere Vorschläge zur Erklärung der Nichtganzzahligkeit gemacht sind. So erklärt z. B. WOLF (92) den Ni-Wert durch 70% Ni im <sup>1</sup>S<sub>0</sub>d<sup>10</sup>-Zustand und 30% Ni<sup>+</sup>-Ionen im <sup>3</sup>F<sub>4</sub>d<sup>8</sup>s<sup>2</sup>-Zustand, während STONER (82) zur Deutung das Gleichgewicht heranzieht, das sich aus den beiden widerstreitenden Bestrebungen ergibt, einerseits die Elektronenspins durch das HEISENBERGSche Austauschintegral parallel zu stellen, andererseits möglichst viele Elektronenspins in die niedrigste Energiezelle zu bringen, d. h. möglichst viele Paare gegenseitig zu kompensieren. Hier tritt das Austauschintegral an die Stelle des äußeren Feldes in der Behandlung des paramagnetischen Elektronengases durch PAULI.

In ähnlicher Weise lassen sich dann auch die Magnetonzahlen der binären Reihen der ferromagnetischen Metalle — Fe-Co, Fe-Ni und Co-Ni — verstehen, die — wie Abb. 6 andeutet — Mischungswerten zwischen neutralen und ionisierten Metallen entsprechen. Der Verlauf weist in allen 3 Fällen auf eine Zunahme der Ionisierung hin. Eine an STONER anklingende Deutung hat DEHLINGER (25) gegeben, indem er drei verschiedene Austauschintegrale annimmt: eins zwischen den Atomrümpfen untereinander (*d-d*-Kopplung), eins zwischen den s-Elektronen untereinander (*s-s*-Kopplung) und als drittes eins zwischen den

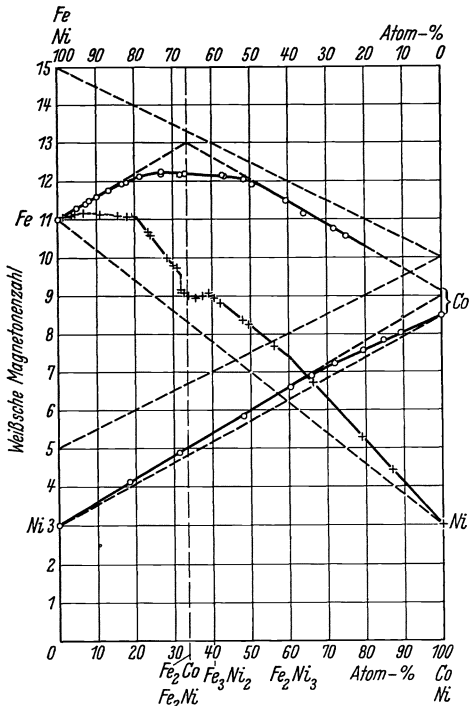


Abb. 6. Magnetonzahlenwerte der binären Fe-Co, Fe-Ni- und Co-Ni-Legierungen. (Nach verschiedenen Forschern.)

Atomrümpfen und dem Elektronengas ( $d$ - $s$ -Kopplung). Das erste ist stets positiv, sucht also Parallelstellung der Spins hervorzurufen, das zweite ist negativ und das dritte wird ebenfalls als negativ angenommen. Man kann sich das Bild, das sich mit dem von STONER weitgehend deckt, so vorstellen, daß das paramagnetische Elektronengas unter dem Einfluß des inneren Feldes von den Atomrümpfen ein dieses entgegengesetztes magnetisches Moment bekommt, da einerseits die gegenseitige Absättigung der  $s$ -Elektronen und andererseits die Parallelstellung der

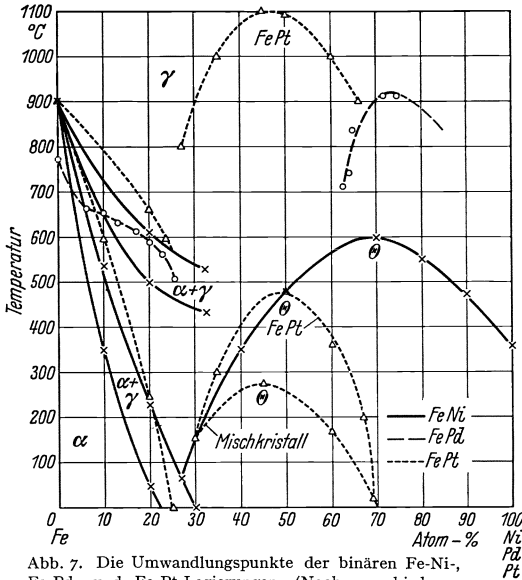


Abb. 7. Die Umwandlungspunkte der binären Fe-Ni-, Fe-Pd- und Fe-Pt-Legierungen. (Nach verschiedenen Forschern.)

$d$ -Rümpfe durch das negative Austauschintegral zwischen  $d$  und  $s$  gestört wird.

Das letzte Wort ist in dieser für das Verständnis des Ferromagnetismus wichtigen Frage sicher noch nicht gesprochen. Trotzdem wird man die Bemühungen, aus magnetischen Messungen Rückschlüsse auf den Ionisierungszustand der Atome im Metallgitterverband ziehen zu können, fortsetzen müssen, da hierfür außer den kreiselmagnetischen  $g$ -Bestimmungen (4) durch den BARNETT- und RICHARDSON-DE HAAS-Effekt kaum andere Möglichkeiten zur Verfügung stehen.

Neben den drei binären Legierungsreihen der drei ferromagnetischen Metalle Fe, Co und Ni verdienen die anderen binären Systeme der 8. Vertikalreihe des Periodischen Systems noch einen kritischen Blick, da sie manche für den Ferromagnetismus und den ihn bedingenden Begriff der Wechselwirkung bemerkenswerte Eigentümlichkeit aufweisen.

Beispielsweise zeigen die drei Zweistoffsysteme Fe-Ni, Fe-Pd und Fe-Pt eine auffallende Verwandtschaft untereinander. Sie sind in Abb. 7 zusammengezeichnet. Allen<sup>1</sup> gemeinsam ist der Übergang vom raumzentrierten  $\alpha$ - zum flächenzentrierten  $\gamma$ -Gitter mit steigender Konzentration des Ni, Pd oder Pt im Eisen und ein Höchstwert einer Umwandlungslinie im  $\gamma$ -Gebiet, die für das Fe-Ni- und Fe-Pt-System als CURIE-Temperaturen feststehen. Diese Höchstwerte der CURIE-Temperaturen in Abhängigkeit von der Konzentration verdienten theoretisch

<sup>1</sup> Für Fe-Pd fehlen die röntgenographischen und magnetischen Messungen noch. Doch dürfte die Verallgemeinerung nach dem bisher bekannten Zustandsdiagramm berechtigt sein.

mehr Beachtung, als ihnen bisher geschenkt worden ist. Man ist nämlich durch die Häufung der Erfahrung und durch die Deutung der CURIE-Temperatur durch das abstandsabhängige Austauschintegral nur allzu geneigt — und neuerdings hat es MARIAN (vgl. S. 149) wieder als fast allgemeingültige Regel hingestellt —, zwischen dem magnetischen Moment und der CURIE-Temperatur einer Legierung einen in erster Näherung proportionalen Zusammenhang in Abhängigkeit von der Konzentration anzunehmen. Diese drei Beispiele widersprechen der Allgemeingültigkeit einer derartigen Regel durchaus und verraten zugleich, daß noch ein anderer Faktor als die Momente der Partner und der Abstand benachbarter Atome allein mitwirkt.

Ebenso ist den Fe-Ni, Fe-Pt- und den Co-Pd-Systemen (das Fe-Pd-System ist noch nicht hinreichend untersucht) einschließlich dem Fe-Mn-System die noch immer so rätselhafte Erscheinung der Irreversibilität der kristallographischen Umwandlung gemeinsam.

Zur Aufhellung dieser thermodynamisch irgendwie lückenhaften Darstellung der Zustandsdiagramme sind seit Jahrzehnten viele Anstrengungen gemacht, ohne daß ihnen bisher ein befriedigender Erfolg beschieden gewesen wäre. Berücksichtigt man, daß — meines Wissens — kein einziges System, das die Erscheinung der Irreversibilität zeigt, bekannt ist, das nicht zugleich ferromagnetisch ist, so liegt der Gedanke nahe, die zur Deutung notwendige Energiestufe in den ferromagnetischen Zustand selber zu verlegen. Diesen Gedanken hat zuerst M. FALLOT (30) an Hand des Fe-Pt-Systems angedeutet, indem er die Erscheinung so beschrieb, daß es scheine, daß der Ferromagnetismus das  $\alpha$ -Gitter bei der Erhitzung über die eigentliche — durch die Abkühlungskurve bestimmte — Phasengrenze der  $\gamma \rightarrow \alpha$ -Umwandlung hinaus stabilisiere. Da der ferromagnetische Zustand des  $\alpha$ -Gitters eine energetisch tiefere Stufe darstellt, verdient dieser Gedanke Beachtung. Seine Prüfung durch die Erfahrung hängt im wesentlichen an der Frage, ob die Kurve  $CB$  (vgl. Abb. 8) die Linie  $FD$  tatsächlich in  $B$  — und nicht erst in  $F$  — trifft, wie es üblicherweise angenommen wird (vgl. z. B. Abb. 7).

Eine besondere Rolle spielen bei den binären Legierungen der Elemente der 8. Reihe des Periodischen Systems untereinander oder mit benachbarten Elementen die Einflüsse der Atomordnung. Als kennzeichnendes Beispiel dafür sei das Ni-Mn-System (45) erwähnt, das als statistischer Mischkristall magnetisch ein ähnliches Verhalten in Abhängigkeit von der Konzentration zeigt wie das Fe-Mn-System, d. h. also starke Abnahme der Magnetisierbarkeit und der CURIE-Temperatur mit steigendem Mn-Gehalt, durch langzeitiges Tempern jedoch in eine Überstrukturphase übergeführt werden kann, die ferromagnetisch ist und eine höhere CURIE-Temperatur und ein größeres Sättigungsmoment aufweist als reines Ni. Hier wird also erstens allein durch Platzwechsel die Vorbedingung für die Parallelstellung benachbarter Spinmomente

geschaffen und zweitens durch Zusatz eines „unmagnetischen“ Metalls (Mn) der Magnetismus des Ni gehoben.

Der Temperaturcharakter der paramagnetischen (statistischen) Ni-Mn-Legierungen entspricht dem des reinen Mangans (86), zeigt also temperaturunabhängigen Paramagnetismus an, so daß der Einfluß der Atomordnung im wesentlichen darin besteht, daß bei bestimmten Zusammensetzungen — es handelt sich um das Gebiet um 25 At.-% Mn

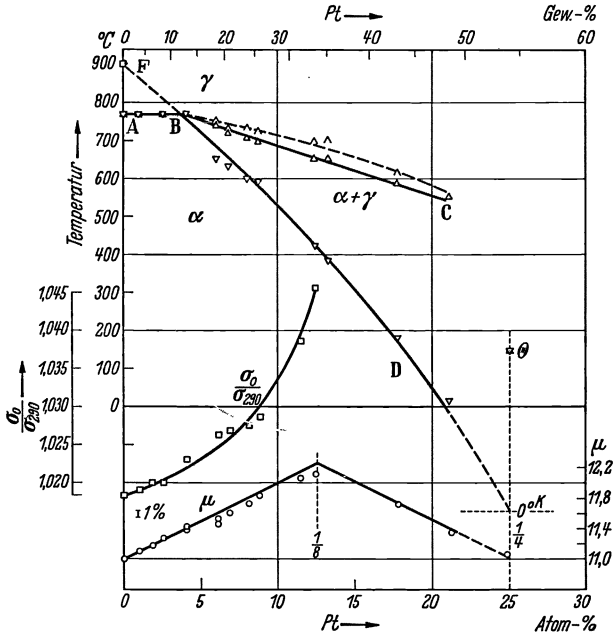


Abb. 8. Das Fe-Pt-System. [Nach M. FALLOT (30).]

herum — die Antiparallelistellung in Parallelstellung übergeht, das Austauschintegral also unter dem Einfluß der Ordnung, d. h. wenn jedes Mn-Atom von 8 gleich nahen Ni-Atomen in kürzestem Abstand umgeben ist, sein Vorzeichen wechselt<sup>1</sup>.

Überstrukturen sind stets energieärmere, stabilere Phasen, deren Energiedifferenz gegenüber dem statistischen Mischkristall meist gering ist. Diese Energiedifferenz drückt sich aber deutlich in einem Anstieg der CURIE-Temperatur aus, der bei dem Ni-Mn-System mehrere hundert Grad betragen kann.

<sup>1</sup> Die Straßburger Schule — besonders M. FALLOT (30) — behauptet für zahlreiche binäre Legierungen sogar eine diskontinuierliche Änderung des magnetischen Momentes (und der CURIE-Temperatur) bei bestimmten stöchiometrischen Verhältnissen.

Daß gleichzeitig das magnetische Gesamtmoment der Legierung steigt und die des reinen Nickels übertrifft, ist verständlich, da das Mn ein wesentlich größeres Moment als das Ni hat.

Wie stark in dieser Gegend des Periodischen Systems Wechselwirkungen

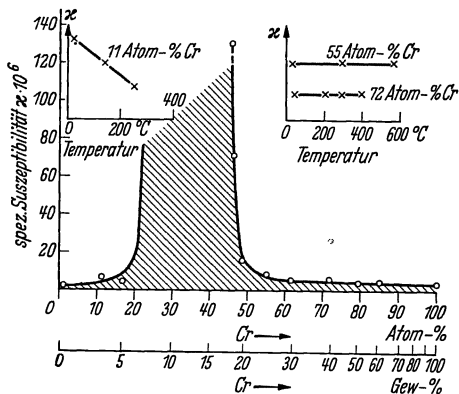


Abb. 9. Die Suszeptibilitätsverteilung und Temperaturabhängigkeit im Pt-Cr-System. [Nach E. FRIEDERICH und A. KUSSMANN (34).]

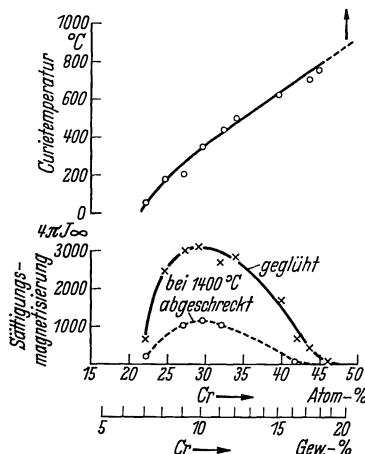


Abb. 10. Sättigungswerte und CURIE-Temperaturen im Pt-Cr-System. [Nach E. FRIEDERICH und A. KUSSMANN (34).]

kungen wirksam werden können, zeigt auch das Pt-Cr-System (34), das — aus zwei paramagnetischen Elementen zusammengesetzt — Ferromagnetismus zeigen kann. Das Gebiet des Ferromagnetismus erstreckt sich hier bei stetig steigender CURIE-Temperatur von 22...49 (rund 25—50) At.-% Cr. Die CURIE-Temperatur steigt auch dann noch, wenn der Ferromagnetismus (gegen 50 At.-% Cr) schon wieder zum temperaturunabhängigen Paramagnetismus des Cr abfällt (Abb. 9—11). Dieser Umschlag von der parallelen zur antiparallelen Spinkopplung scheint eine unmittelbare Folge der Änderung der Elektronenkonzentration im Sinne von Satz II (S. 138) zu sein.

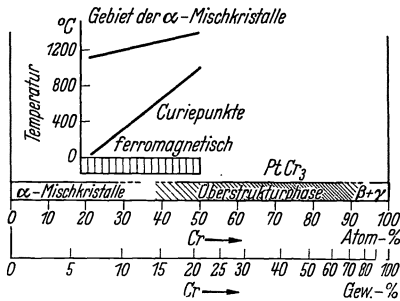
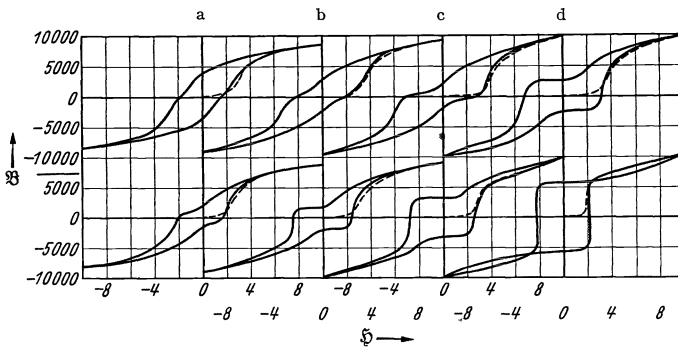


Abb. 11. Kristallographischer und magnetischer Überblick über das Pt-Cr-System. [Nach E. FRIEDERICH und A. KUSSMANN (34).]

Eine Überstruktur tritt hier erst bei noch höheren Cr-Gehalten (PtCr<sub>3</sub>) auf in einem Gebiet, in dem der Ferromagnetismus längst wieder verlorengegangen ist, also sehr im Gegensatz zum Ni<sub>3</sub>Mn und den HEUSLERschen Legierungen (Al, Mn, Cu), in denen eine dreifache Überstruktur den Ferromagnetismus des Mn- und wahrscheinlich Cu-Gitters hervor-treten läßt. Das Aluminium, das ohne wesentliche Beeinträchtigung

des Ferromagnetismus durch B, Sn, As, Sb und Bi, nicht aber durch Metalloide wie C, Si und P ersetzbar ist, wirkt dabei offenbar als Elektronenspender, der erst die nach Satz I (S. 138) erforderliche Voraussetzung der Elektronenhüllen des Mn und Cu schafft.

Will man zu einer halbwegs vernünftigen Auffassung des Pt-Cr-Systems kommen, muß man wohl annehmen, daß es ternär aufzufassen ist, d. h. daß erst die in überschüssigem Pt gelöste Überstruktur  $\text{PtCr}_3$  zum Ferromagnetismus führt, wie es ähnlich bei den HEUSLERSchen Legierungen für die in überschüssigem Mn gelöste  $\text{AlMnCu}_2$ -Phase



Figurenteil	Zusammen in %		
	Fe	Co	Ni
a	5	30	65
b	10	35	55
c	15	40	45
d	20	45	35

Glühungen: Obere Reihe 1 Stunde bei 900° C, untere Reihe 1 Stunde bei 1000° C.

Abb. 12. Änderung des Perminvar-Charakters mit der Zusammensetzung und der Glühtemperatur. [Nach H. KÜHLEWEIN (54).]

bekannt ist. Für diese Auffassung spricht, daß die geglühten Legierungen wesentlich ferromagnetischer sind als die abgeschreckten und daß die CURIE-Temperatur — soweit verfolgbare — mit Annäherung an die Überstruktur stetig steigt.

Hierher gehört auch ein anderes ternäres System, nämlich das aus den drei ferromagnetischen Metallen Fe, Co und Ni gebildete, das Legierungen mit ganz besonders abweichenden Hysteresisschleifen aufweist (vgl. Abb. 12). Die eigenartigen — eingeschnürten und ausgebauchten — Schleifen sind als die magnetische Entkoppelung zweier ohne äußeres Feld teilweise antiparallel eingestellter Teilgitter, die durch ein äußeres Feld „umgepolt“ werden können, gedeutet worden (8).

Allen diesen Erscheinungen gemeinsam ist die Tatsache, daß in den Legierungen der Elemente dieser Gruppe schon sehr kleine Kräfte ausreichen, wesentliche Änderungen in der gegenseitigen Einstellung und Bindung hervorzurufen, sei es, daß der Energieinhalt des Ferromagnetismus das Instabilwerden eines Gitters verhindert, sei es, daß



Überstruktur, also Platzwechsel, oder die Änderung der Elektronenkonzentration ausreicht, Antiferromagnetismus in Ferromagnetismus zu verwandeln, sei es, daß sich die gegenseitige Antiparallelstellkraft zweier ferromagnetischer Gitter als so schwach erweist, daß sie durch äußere Felder aufgehoben werden kann.

Diese Labilität in der Einstellung der Spinmomente unter dem Einfluß wechselseitiger Bindung am Ende der Übergangsgruppen ist ein Gegenstück zu dem Wechsel der Einstellung in der Mitte der Gruppen (Satz I und III): während in dem einen Fall die Elektronenkonzentration ausreicht, den Umschlag vom Para- zum Ferromagnetismus zu bedingen, genügen im zweiten Fall geringste Energiedifferenzen, eine Änderung des Vorzeichens des Austauschintegrals hervorzurufen.

### III. Das Problem der CURIE-Temperatur.

Nach der Theorie von HEISENBERG (42) besteht zwischen der CURIE-Temperatur  $\Theta$ , bei der die parallelstellende Kopplung durch die thermische Energie aufgelöst wird, und der Größe des Austauschintegrals  $I_0$  ein unmittelbarer Zusammenhang, der durch die Gleichung

$$\Theta = \frac{2 I_0}{k b} \quad (1)$$

gegeben ist, wenn  $k$  die BOLTZMANNsche Konstante und  $b$  einen geometrischen Faktor

$$b = 1 - \sqrt{1 - 8/z} \quad (2)$$

bedeutet ( $z$  = Zahl der gleich nahen Atomnachbarn). Das HEISENBERGsche Austauschintegral steht heute an Stelle der Molekularfeldenergie  $\nu \mu^2 = 3 k \Theta$  von WEISS ( $\nu$  = Molekularfeldkonstante,  $\mu$  = magnetisches Moment des einzelnen Trägers) und enthält ebenso das magnetische Moment, wie die alte Hypothese des Molekularfeldes von WEISS. Man sollte danach einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen der CURIE-Temperatur  $\Theta$  und dem magnetischen Moment  $\mu$  erwarten. Ebenso wie die Kopplungsgesetze der reinen Elemente am ehesten auf dem Umweg über die Zweistofflegierungen, bei denen man das Moment der Mischung gleichmäßig verändern kann, zu erkennen waren, kann man auch erwarten, einen zahlenmäßigen Zusammenhang zwischen  $\Theta$  und  $\mu$  am ehesten in den Zweistofflegierungen aufzufinden. Vor wenigen Jahren reichte das vorliegende Tatsachenmaterial noch nicht aus, den gesuchten Zusammenhang aufzudecken. Neuerdings hat aber die Straßburger Schule (61) auch hierfür systematische Unterlagen geschaffen und ist dabei auf sehr einfache Zusammenhänge gestoßen.

Trägt man einerseits — wie es in Abb. 1, S. 136 angedeutet ist — die Sättigungsmomente einer Mischkristallreihe und andererseits ihre CURIE-Temperaturen über der Konzentration auf, so findet man zwischen beiden Neigungen — beide wieder als Tangenten über beschränkte Konzentrationsbereiche aufgefaßt — einen einfachen Zusammenhang.

In Abb. 13 ist die Momentänderung  $\Delta\mu$  je Prozent Zusatzstoff in Nickel über der Zahl der Außenelektronen für verschiedene Horizontalreihen des Periodischen Systems dargestellt. Das Bild muß — seiner Entstehung nach — zwangsläufig der Abb. 4 für Nickel gleichen<sup>1</sup>.

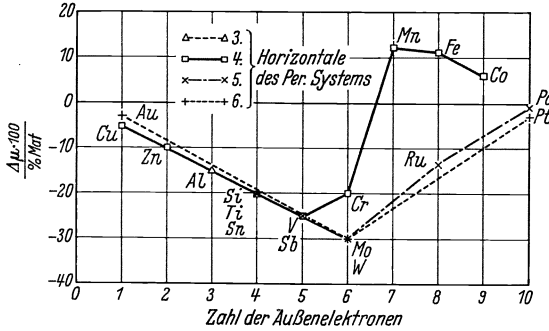


Abb. 13. Prozentuale Momentänderung des Nickels durch verschiedene Zusätze in Abhängigkeit von der Zahl der Außenelektronen der Zusätze. [Nach Messungen von V. MARIAN (62) gezeichnet.]

$\Delta\theta/\Delta\mu$  und trägt ihn entsprechend über der Elektronenzahl auf (Abb. 15), so sieht man, daß er in 13 von den untersuchten 18 Fällen übereinstimmend bei einem konstanten Wert liegt, und zwar unabhängig davon, ob es sich um auf- oder absteigende Äste der Untergruppe handelt<sup>2</sup>.

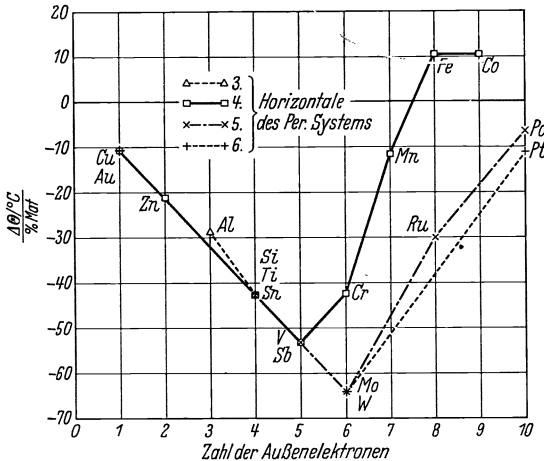


Abb. 14. Prozentuale Änderung der CURIE-Temperatur des Nickels durch verschiedene Zusätze in Abhängigkeit von der Zahl der Außenelektronen der Zusätze. [Nach Messungen von V. MARIAN (62) gezeichnet.]

Spinrichtung. Aber auch Eisen weicht deutlich ab, obwohl hier das Vorzeichen des Quotienten wieder positiv ist, da Zähler und Nenner ihr

<sup>1</sup> Ein näherer Vergleich läßt geringfügige Abweichungen erkennen, die auf die vorläufige Meßgenauigkeit geschoben werden müssen; vgl. besonders die Vertikalverschiebung der Ni-Reihe in Abb. 4, S. 138.

<sup>2</sup> Vgl. Fußnote 1, S. 152.

Vorzeichen geändert haben. Kobalt dagegen fügt sich wieder — mit einer sehr geringfügigen Abweichung — fast völlig ein.

Man sieht also, daß sich der vermutete Zusammenhang zwischen dem Moment  $\mu$  und der CURIE-Temperatur  $\Theta$  — von den zwei Ausnahmen Mn und Fe abgesehen — in allen Fällen in einfachster und eindringlichster Weise bemerkbar macht. Dieser Zusammenhang ist unabhängig von dem Grad der Auffüllung der Elektronenhülle, d. h. ob es sich um die erste oder zweite Hälfte der Untergruppe handelt, hängt also nur von der absoluten Größe des Momentes ab, nicht von der Konfiguration, aus der das Moment entstanden ist.

Auf den ersten Blick scheint das Ergebnis  $\Delta \Theta = c \Delta \mu$  einen dimensionsmäßigen Widerspruch zu dem Ansatz von WEISS (vgl. S. 149) zu enthalten, nach dem die CURIE-Temperatur dem *Quadrat* des Momentes proportional sein sollte, da ja das Molekularfeld

$\mathfrak{H}_i = N \mathfrak{J} = N n \mu = \nu \mu$  (3)  
( $n$  = Zahl der Träger in  $\text{cm}^3$ )  
proportional der Magnetisierungsintensität  $\mathfrak{J}$  sein

soll, die thermische Energie  $k\Theta$  also erst dem Produkt  $\mu \cdot \mathfrak{H}_i = \nu \mu^2$  entspricht. Der empirische Befund  $\Delta \Theta = c \Delta \mu$  fordert demgegenüber, daß entweder das Molekularfeld  $\mathfrak{H}_i$  eine von dem veränderlichen Moment unabhängige Konstante oder das Moment unveränderlich sein muß.

Der Widerspruch löst sich jedoch, wenn man die physikalisch berechtigte Annahme<sup>1</sup> macht, daß die thermische Energie  $k\Theta$  die Loslösung eines Trägers mit naturgemäß jeweils konstantem Moment  $\mu_0$  aus dem Einfluß des — mit der Konzentration veränderlichen und dem Moment proportionalen — Molekularfeldes  $\mathfrak{H}_i$  darstellt, also

$$k\Theta \approx \mu_0 \mathfrak{H}_i \tag{4}$$

ist. Da das Moment eines Kubikzentimeters der binären Legierung  $\mu = n_{\text{Ni}} \mu_{\text{Ni}} + n_A \mu_A$  ist, wenn  $n_{\text{Ni}}$  die Anzahl der Träger eines Ni-Momentes  $\mu_{\text{Ni}}$  im Kubikzentimeter und  $n_A$  die Anzahl der Träger eines Zusatzmomentes  $\mu_A$  im Kubikzentimeter ist, ist

$$\mathfrak{H}_i = \nu \mu = \nu (n_{\text{Ni}} \mu_{\text{Ni}} + n_A \mu_A), \tag{5}$$

also

$$k\Theta \approx \mu_0 \cdot \nu \mu \tag{6}$$

<sup>1</sup> Worauf mich freundlicherweise Dr. M. STEENBECK hinwies.

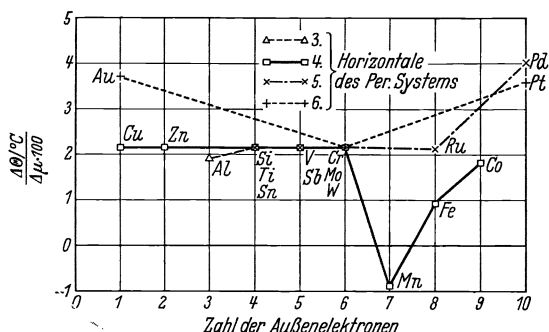


Abb. 15. Verhältnis der prozentualen CURIE-Temperaturänderung zur Momentänderung des Nickels in Abhängigkeit von der Zahl der Außenelektronen der Zusatzstoffe. [Nach Messungen von V. MARIAN (6x) gezeichnet.]

oder

$$\Theta \approx \frac{\nu \mu_0}{k} \cdot \mu$$

$$\approx \frac{\nu \mu_0}{k} (n_{\text{Ni}} \mu_{\text{Ni}} + n_A \mu_A). \quad (7)$$

Daß diese Annahme zweifellos etwas Wahres trifft, erkennt man am besten, wenn man nicht die Differenzen  $\Delta \mu$  und  $\Delta \Theta$  der Momente und CURIE-Temperaturen aufträgt, sondern den Zusammenhang zwischen  $|\mu|$  und  $\Theta$  selber untersucht. Dann ordnen sich nämlich alle Meßpunkte

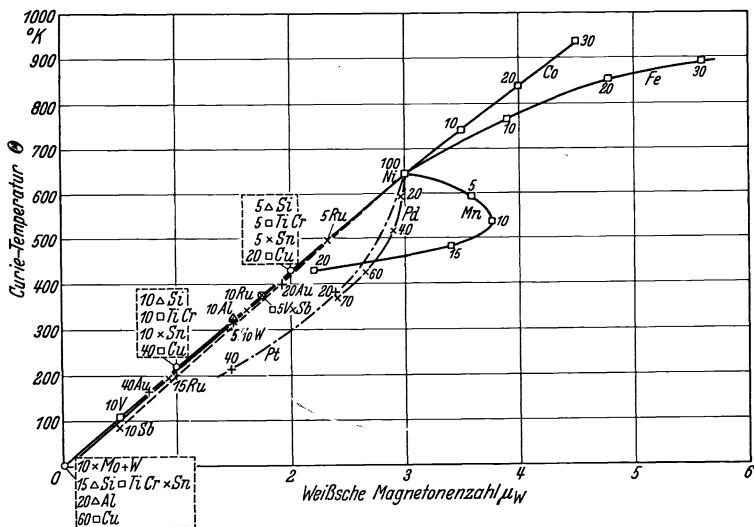


Abb. 16. Zusammenhang zwischen CURIE-Temperatur und magnetischem Moment bei binären Nickellegierungen. [Nach Messungen von V. MARIAN (61) gezeichnet.] (Die Zahlen vor den Symbolen geben den Prozentgehalt an.)

mit Ausnahme von Mn, Fe, Pd und Pt über große Konzentrationsbereiche in eine einzige gerade Linie ein, die durch den Nullpunkt des Koordinatennetzes geht, also die Gleichung

$$\Theta = c \mu \quad (8)$$

aufs neue bestätigen; vgl. Abb. 16. Man sieht also, daß das „Molekularfeld“  $\Theta$  dem magnetischen Moment des Mischkristalls *direkt* proportional ist, solange die magnetischen Momente der beiden Bestandteile als unveränderliche Größen im Mischkristallgitter erhalten bleiben<sup>1</sup>.

Zugleich erkennt man in dieser Darstellung, daß von den oben (in Abb. 15) vernachlässigten Abweichungen die des Au *nicht* reell, die des Pd und Pt dagegen *reell* sind, denn Au fügt sich in die Gerade ein,

<sup>1</sup> Dies Ergebnis, das schon aus der Konstanz des Quotienten  $\Delta \Theta / \Delta \mu$  in Abb. 15 folgt, besagt physikalisch, daß es für die Erniedrigung der CURIE-Temperatur einerlei ist, ob das dafür notwendige magnetische Moment durch 1% Mo, W oder 1,2% V, Sb oder 1,5% Si, Sn oder 2% Al oder 3% Zn oder 6% Cu, Au usw. in das Ni-Gitter hereingebracht wird.

während die Pd- und Pt-Kurven weit außerhalb der Geraden bleiben. Dasselbe gilt auch für Fe und Mn, während die Abweichung von Co zwar noch erkennbar, aber sehr gering ist.

Diese Betrachtung bietet einen neuen magnetischen Weg, Aussagen über die Veränderlichkeit des Ionisierungszustandes der beteiligten Stoffe zu machen. Solange die  $\Theta$ - $\mu$ -Beziehung extrapoliert durch Null geht, ändern sich die Momente der beteiligten Stoffe nicht; jede Abweichung von dieser Richtung zeigt jedoch zwangsläufig eine *Veränderlichkeit des magnetischen Momentes mit der Konzentration* an.

Bemerkenswert ist, daß die Proportionalitätskonstante für alle im Nickel ohne Ionisierungsänderung eingehenden Stoffe ein und dieselbe Konstante ist. Diese Konstante ist jedoch eine nur für das Ni-Gitter kennzeichnende Größe. Für das Fe- und Co-Gitter liegen verwickeltere Verhältnisse vor [Änderung der Konstanten durch den gelösten Stoff; Auftreten eines additiven Gliedes in Gleichung (8), S. 152], die mit einer Änderung des Momentes des lösenden Gitters Hand in Hand zu gehen scheinen.

#### IV. Magnetische Anisotropie.

##### A. Vorzugsrichtungen (Anisotropie 1. Ordnung).

Die Tatsache der Spinkopplung, die wegen der räumlichen Quantelung und der Quantenzahl  $s = 1/2$  an nur zwei Lagemöglichkeiten in bezug auf ein vorhandenes Magnetfeld gebunden ist, macht die kurz vor der HEISENBERG'schen Deutung des WEISS'schen Molekularfeldes entdeckte magnetische Anisotropie kubischer Kristallgitter verständlich. Die starken Anisotropien nichtkubischer Systeme wie z. B. von Magnetit, Pyrrhotin u. a. ferromagnetischen Kristallen waren schon lange bekannt und hatten historisch zu der Entwicklung der Vorstellung eines „Molekularfeldes“ im Innern des Stoffs geführt. Dagegen war die Vorstellung, daß sich kubische Gitter magnetisch isotrop verhalten müßten, auf Grund einer Scheinerfahrung weit verbreitet. Eine Berichtigung dieser Anschauung kam erst mit fortschreitender Züchtung großer Einkristalle der ferromagnetischen Metalle (43), die eine Untersuchung der Richtungsabhängigkeit der magnetischen Eigenschaften möglich machte und zu der Erkenntnis führte, daß sich die Spinmomente unter dem Einfluß der Gitterkräfte stets in kristallographisch ausgezeichnete Feldrichtungen einstellen.

Diese Erfahrung belebte einerseits die theoretische Verfeinerung der alten EWING'schen Theorie der Magnetisierungskurve, die trotz der zugrunde gelegten Vorstellung von Atomgittern ihren rein thermodynamischen Charakter bewahrte, andererseits die metallographisch-magnetische Erforschung von Kristalltexturen und ihren Entstehungsbedingungen, die eine erwünschte Brücke vom Einkristall zum vielkristallinen Werkstoff zu schlagen erlaubte.

Mit der Deutung des seinerzeit von P. WEISS rein formal eingeführten Molekularfeldes durch W. HEISENBERG als Austauschenergie war zwar eine jahrzehntealte Verlegenheit der klassischen Physik, die nicht in der Lage war, die im Magnetismus — abweichend von der Theorie der Dielektrika — notwendige ungewöhnliche Größe des inneren Feldes abzuleiten, mit Hilfe der Wellenmechanik behoben und damit die Existenz der „spontanen“ Magnetisierung der WEISSschen Elementargebiete verständlich gemacht. Es blieben aber immer noch zwei Fragen offen, nämlich die nach der Richtung der Vektoren der spontanen Magnetisierung im Kristallgitter und nach ihrer Festhaltekraft, bzw. der Kraft, gegen die bei der Drehung der Vektoren durch ein äußeres Feld Arbeit geleistet werden muß.

Die erste Frage ist bis heute theoretisch noch nicht befriedigend beantwortbar, was im wesentlichen darin begründet ist, daß eine Lösung nur atomtheoretisch zu geben ist. Die Atomtheorie der Spinkopplung, sowohl der parallelen wie der antiparallelen, ist jedoch kaum in ihren Anfängen entwickelt.

Die zweite Frage hat jedoch an Hand der kubischen Gittermodelle eine weitgehende Förderung durch die Arbeiten von MAHAJANI (60), MCKEEHAN, AKULOV (1), BECKER (10) und GANS (35) erfahren. Diese Arbeiten haben die räumliche Funktion, die die magnetische Anisotropie der Magnetisierung bestimmt, bei regulären Kristallen weitgehend klargelegt. Allerdings mußte man dabei zu einer zweiten Näherung — der begründeten Annahme von Quadrupolmomenten — greifen, da das unverzerrte kubische Dipolgitter dazu nicht ausreicht. In gleicher Weise war es möglich, die Anisotropie der Magnetostriktion in befriedigender Weise abzuleiten.

Am sinnfälligsten hat die Zusammenhänge zwischen Kristallgittersymmetrie und magnetischer Anisotropie R. BECKER (10) für den Fall des elastisch verzerrten (kubischen) Gitters nachgewiesen. Für diesen Fall des dann nicht mehr streng regulären Gitters kommt man mit der Annahme von Dipolen aus und kann sowohl die Magnetisierungsarbeit wie die Magnetostriktion in den verschiedenen Kristallgitterrichtungen, d. h. die Anisotropiefunktion, aus der Differenz der Magnetisierungsarbeiten in der schwersten und leichtesten Magnetisierungsrichtung bestimmen. Abb. 17 gibt die Verteilung der Energiefunktion eines regulären Einkristalls im ebenen Polardiagramm für zwei verschiedene Ebenen des Kristallgitters für den Fall einer positiven Anisotropiekonstanten  $K_1$  (z. B. Eisen) wieder. Dabei ist nach AKULOV die Kristallgitterenergie

$$W = K_0 + K_1 (\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_1^2), \quad (9)$$

wenn  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  die Richtungskosini des Magnetisierungsvektors zu den Koordinaten des Gitters sind.

Die Magnetisierung eines aus spontan gesättigten WEISSschen Elementargebieten bestehenden regulären Kristallgitters stellt man sich seit diesen Arbeiten in zwei Schritten vor: erst gehen alle Gebiete durch

„Schrumpfprozesse“ in die zur äußeren Feldrichtung den kleinsten Winkel bildenden Richtungen leichtester Magnetisierung über (von denen es für den Fall des Eisens sechs gleichberechtigte gibt:  $[100]$ ,  $[010]$ ,  $[001]$ ,  $[\bar{1}00]$ ,  $[0\bar{1}0]$ ,  $[00\bar{1}]$ ), dann folgt die Eindrehung der Vektoren in die äußere Feldrichtung gegen die Kristallgitterenergie. Der erste Schritt erfolgt schon unter sehr geringem Energieaufwand, der sich in bestimmten Fällen bei vollkommen ungestörten kubischen Gittern und dem Fehlen entmagnetisierender freier Pole wohl beliebig — wenn auch wegen der Umpolungsenergie nie ganz — der Null nähern kann. Der zweite dagegen erfordert die durch Abb. 17 dargestellte Arbeitsleistung.

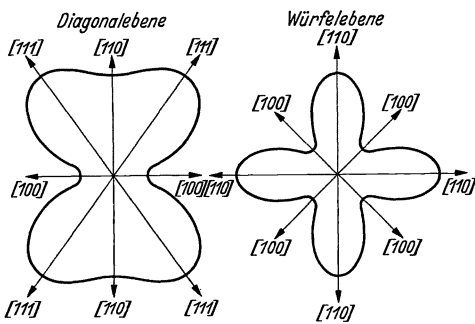


Abb. 17. Polares Energiediagramm eines kubischen Einkristallgitters. [Nach der AKULOVschen Anisotropieformel für  $K > 0$  (Fall des Eisens) dargestellt von F. PREISACH (72).]

AKULOV konnte mit diesem Modell die Höhe der Knickpunkte der in Abb. 18 dargestellten Magnetisierungskurven in befriedigender Weise für die  $[100]$ -Achse zu  $\mathfrak{J}_\infty/\sqrt{2}$  und für die  $[111]$ -Achse zu  $\mathfrak{J}_\infty/\sqrt{3}$  berechnen. Es sind das die Punkte, an denen die erste Phase der Magnetisierung praktisch beendet ist und die zweite — die Drehung der Vektoren — beginnt.

Die zweite Phase stellte schon einen wesentlichen Teil der alten EWINGSchen Theorie dar, während die erste heute noch mehr oder weniger ungeklärt ist. AKULOV hat für sie das Bild der „Inversion“ oder des „Schrumpfprozesses“ geschaffen, das besagt, daß hier nicht ein Vektor *unveränderlicher* Größe  $\mathfrak{J}_\infty$  seine Richtung durch kontinuierliche Drehung um  $180^\circ$  ändert, sondern daß der Vektor *unter*

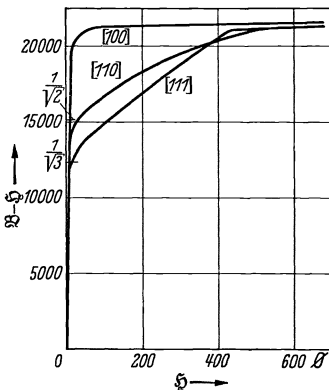


Abb. 18. Magnetisierungskurven von Einkristallen. [Nach K. HONDA und S. KAYA (43).]

Beibehaltung seiner Richtung leichtester Magnetisierung seine Größe kontinuierlich von  $+\mathfrak{J}_\infty$  über 0 nach  $-\mathfrak{J}_\infty$  verändert. Dieses Bild ist kreiseltheoretisch — und jedes magnetische Moment beruht, wie alle kreiselmagnetischen Effekte beweisen, auf den Eigenschaften eines Kreisels — unmöglich. Diesen Mangel vermeidet die von R. BECKER vertretene Anschauung der „Wandverschiebung“ als Deutung der ersten reversiblen Phase der Magnetisierung, die besagt, daß sich die im Kristallgitter elastisch gebundenen Grenzen der einzelnen zur Feldrichtung

ungünstig gelegenen Elementargebiete unter dem Einfluß des überlagerten äußeren Feldes reversibel zu Gunsten der zur Feldrichtung günstig gelegenen Elementargebiete verschieben. Mit dem Verschwinden des Feldes kehren sie elastisch in ihre ursprüngliche Lage zurück und erklären so in befriedigender Weise die reversible Permeabilität. Dieses Bild, das gleichsam nur den Volumenzuwachs des Vektors eines Elementargebietes betrachtet, vermeidet ein atomares Modell und entgeht somit kreiseltheoretischen Schwierigkeiten. Es hat mit dem AKULOVschen Modell das gemeinsame, daß es — da es in einer flächenhaften „Wand“ vor sich geht — die *energetische Unmöglichkeit* des „gleichzeitigen“ Umklappens kohärenter Volumina vermeidet.

AKULOV (*1*) ist in einer älteren Arbeit so weit gegangen, das bewährte Bild der „spontanen Magnetisierung“ wegen dieser Schwierigkeit überhaupt zu verwerfen. Ein genaueres Studium seiner Arbeiten zeigt jedoch, daß er die spontane Magnetisierung schon durch die Annahme von kristallographisch bedingten Vorzugsrichtungen der Vektoren keineswegs entbehren kann und daß er sie nur für den Zeitpunkt des Umklappens leugnet. Das Bild der „Wandverschiebung“ tut praktisch das gleiche, so daß hierin kein Unterschied der Auffassungen mehr besteht.

Bei der Schwierigkeit der Berechnung der im Kristallgitter wirkenden atomaren Kräfte, die auch im Quadrupolgitter nicht ohne Benutzung einer experimentell bestimmten Kristallkonstanten auskommt, stellte die Theorie des verzerrten Dipolkristallgitters von R. BECKER einen wesentlichen Fortschritt dar, der allerdings nur durch die Hereinnahme von *zwei* experimentellen Kristallkonstanten, der Sättigungsmagnetostriktion in zwei verschiedenen Richtungen, beispielsweise der  $[100]$ - und  $[111]$ -Richtung, erkauft werden konnte.

In diese *rein thermodynamische* Theorie der Magnetisierung läßt sich die ganze Fülle der Erfahrungen von EWING und seinen Zeitgenossen über die Zusammenhänge zwischen der Richtung der Magnetisierung und der elastischen Spannung, der Aeolotropie, wie man früher sagte, einbauen. Die bestimmende Größe ist dabei das *Vorzeichen* der Magnetostriktion: verlängert sich ein Ferromagnetikum im longitudinalen Magnetfeld, so muß sich die Richtung der spontanen Magnetisierung unter dem Einfluß eines longitudinalen Zuges in die Zugrichtung einstellen, da er sich so der Wirkung des elastischen Zuges bis zur Grenze der Möglichkeit seiner magnetostriktiven Kristallgitterenergie anpaßt. Bei Druck muß das Umgekehrte, d. h. eine Querstellung der Magnetisierungsvektoren zur Zugrichtung, auftreten. Mit Umkehrung des Vorzeichens der Magnetostriktion kehren sich beide Wirkungen um, so daß wir folgendes Schema (*72*) (Abb. 19) bekommen, das entsprechend seiner Herkunft aus der Erfahrung mit dieser weitgehend in Einklang ist, obwohl in der Natur die der Theorie zugrunde gelegte Isotropie der Sättigungsmagnetostriktion nur mehr oder weniger unvollkommen verwirklicht ist.



Zwischen der Anfangsuszeptibilität  $\kappa_0$  und der Magnetostriktion  $\lambda$  besteht nach der Theorie der Zusammenhang

$$\kappa_0 = \frac{2 \mathfrak{S}_\infty^2}{9 \sigma_i \lambda_\infty} \quad (10)$$

( $\mathfrak{S}_\infty$  = magnetische Sättigung,  $\sigma_i$  = mittlere innere Eigenspannungen) oder, wenn man die dem Versuch schwer zugänglichen inneren Spannungen  $\sigma_i$  durch  $\lambda E$  ersetzt ( $E$  = Elastizitätsmodul),

$$\mu_{0 \max} = \frac{8}{9} \cdot \pi \cdot \frac{\mathfrak{S}_\infty^2}{\lambda^2 E}. \quad (11)$$

Danach muß die höchstmögliche Anfangspermeabilität  $\mu_0$  eines Werkstoffs einerseits um so größer sein, je kleiner die Magnetostriktion in der Magnetisierungsrichtung ist, andererseits aber auch

durch die meist vorhandene Anisotropie der Magnetostriktion in den verschiedenen Kristallachsen daran verhindert sein, durch das Nullwerden der Magnetostriktion unendlich groß zu werden.

Nach M. KERSTEN (47) kann man auf diese Weise den qualitativen Verlauf der Anfangspermeabilität  $\mu_0$  mit der Konzentration in der Eisen-Nickelreihe wiedergeben (vgl. Abb. 20). Ebenso haben AUWERS und NEUMANN (9) gezeigt, daß der starke Anstieg der Anfangspermeabilität des Permalloys durch Kupferzusatz dem Verlauf der Nulllinie der Magnetostriktion folgt (Abb. 21). Interessant ist dabei, daß auch die Koerzitivkraft (vgl. Abb. 22) dort eine spaltartige Senke aufweist, was darauf hinzudeuten scheint, daß ein großer Anteil der bei diesen Legierungen gemessenen kleinen Koerzitivkräfte auf die Magnetostriktionsverspannungen zurückgeführt werden kann. Daß die

abgeleitete Größe der Anfangspermeabilität sich umgekehrt wie die Koerzitivkraft verhalten muß, ist erfahrungsgemäß, aber nicht logisch selbstverständlich, solange es noch keine Theorie der Koerzitivkraft gibt, die zugleich die Verknüpfung mit der Permeabilität enthält.

Dieser Befruchtung der thermodynamischen Theorie durch die Erfahrung an kubischen Einkristallen blieb bisher eine *atomphysikalische* Rechtfertigung versagt. Warum das eine Gitter auf Zug so, das andere

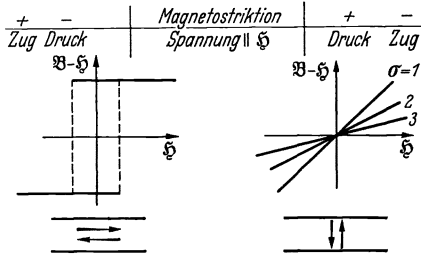


Abb. 19. Schema der beiden Idealfälle von Magnetisierungsschleifen unter dem Einfluß von elastischen Spannungen (72).

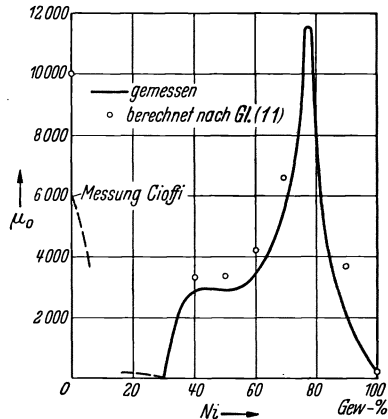


Abb. 20. Theoretische Höchstwerte der Anfangspermeabilität der Eisen-Nickellegierungen [nach KERSTEN (47)] und gemessene Werte der reversiblen Fe-Ni-Legierungen.

anders antwortet, ist bisher eine ungeklärte Frage geblieben. Die Thermodynamik geht einfach von der Erfahrung der Magnetostriktion aus und steckt deren Vorzeichen als Voraussetzung in die Rechnung hinein, um den Drehsinn des Magnetisierungsvektors unter elastischer Beanspruchung daraus abzuleiten.

Ein Ansatz zu einer atomtheoretischen, d. h. wellenmechanischen Rechtfertigung der Bedeutung der verschiedenen Kristallgitterachsen

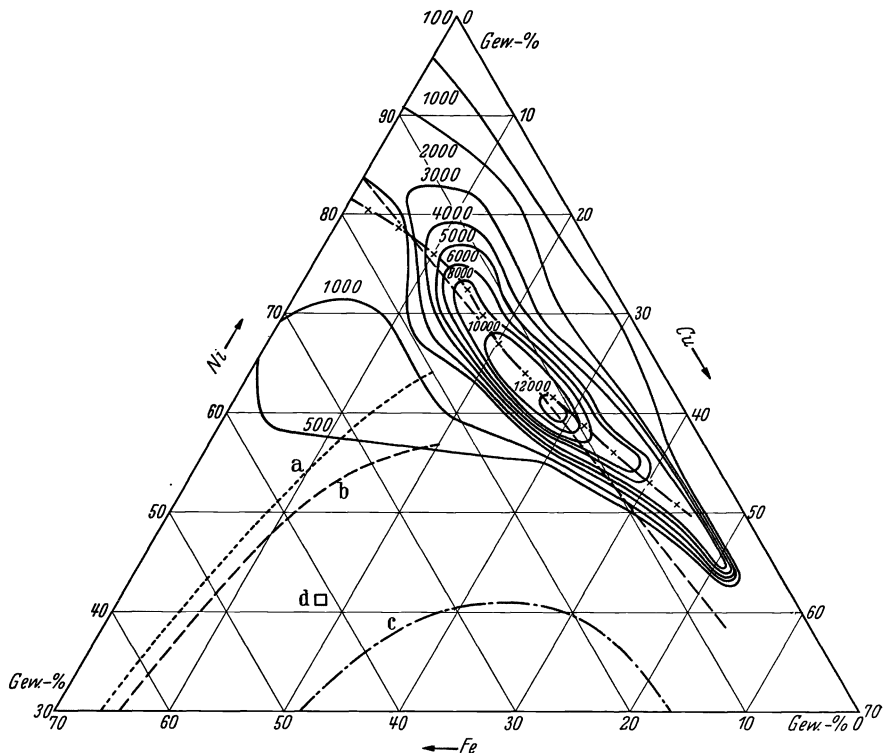


Abb. 21. Anfangspermeabilität im Fe-Co-Ni-Dreistoffsystem. [Nach O. v. AUWERS und H. NEUMANN (9).]  
— x — x Linie der Magnetostriktion Null.

findet sich für das Beispiel des Eisens nur<sup>1</sup> bei U. DEHLINGER (24), wenn man die Zurückführung der Vorzugsrichtungen auf geometrische Betrachtungen über die Abstandsabhängigkeit des HEISENBERGSchen Austauschintegrals als solche gelten lassen will. Der von DEHLINGER dabei benutzte Gedankengang beschränkt sich auf die Tatsache, daß das Vorzeichen des Austauschintegrals — und mithin die Einstellung benachbarter Spins — eine Funktion des Abstands der benachbarten Atome

<sup>1</sup> Auch R. FORRER (32) ist 2 Jahre früher aus geometrischen und atomtheoretischen Anschauungen zu dem gleichen Ergebnis wie DEHLINGER gekommen, doch haben sich die von ihm dabei zugrunde gelegten Anschauungen bisher nicht durchsetzen können.

ist und daß die Bedingung für Parallelstellung beim raumzentrierten Fe-Gitter aus geometrischen Gründen nur in der größeren Entfernung der Atome in den kubischen Achsen, nicht aber in der kürzeren der Raumdiagonale erfüllt ist.

Wieweit sich dieser Weg als fruchtbar erweist, indem er auch für Nickel und Mischkristalle zu einer „Deutung“ führt, muß zur Zeit dahingestellt bleiben. In dieser Einfachheit reicht er sicher nicht vollständig

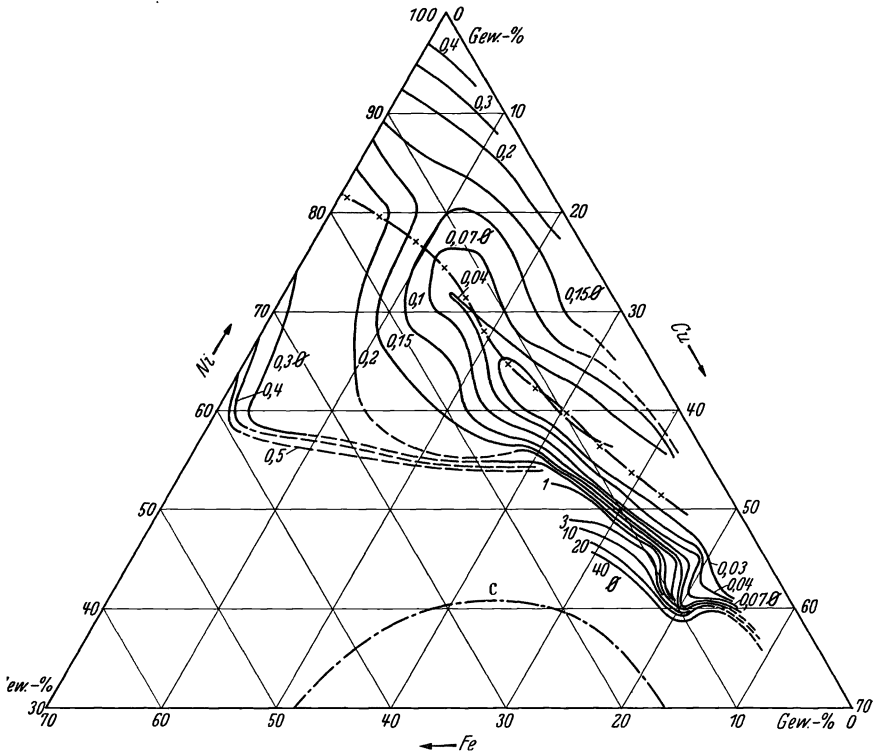


Abb. 22. Koerzitivkraft im Fe-Co-Ni-Dreistoffsystem. [Nach O. v. AUWERS und H. NEUMANN (9).]  
 — x — x Linie der Magnetostriktion Null.

aus, um alle bisher bekannten Erscheinungen daraus abzuleiten. Denn erstens weiß man, daß sich die Vorzugsrichtung bei gleichbleibender Kristallstruktur (Geometrie) mit der Konzentration in Mischkristallen (Chemie) ändern kann, wie z. B. LICHTENBERGER (58), SHIH (77), BURGERS und SNOEK (81) u. a. für die Reihen Fe-Ni, Fe-Co und Co-Ni nachgewiesen haben, und zweitens weiß man aus den Untersuchungen von HONDA, MASUMOTO und SHIRAKAWA (44), daß die den heutigen Theorien zugrunde gelegten sog. „Vorzugsrichtungen“ doch recht veränderliche, fast zufällig anmutende Größen sind, da sie sowohl feldstärken- wie temperaturabhängig sind, wie die Abb. 23a bis f zeigen.

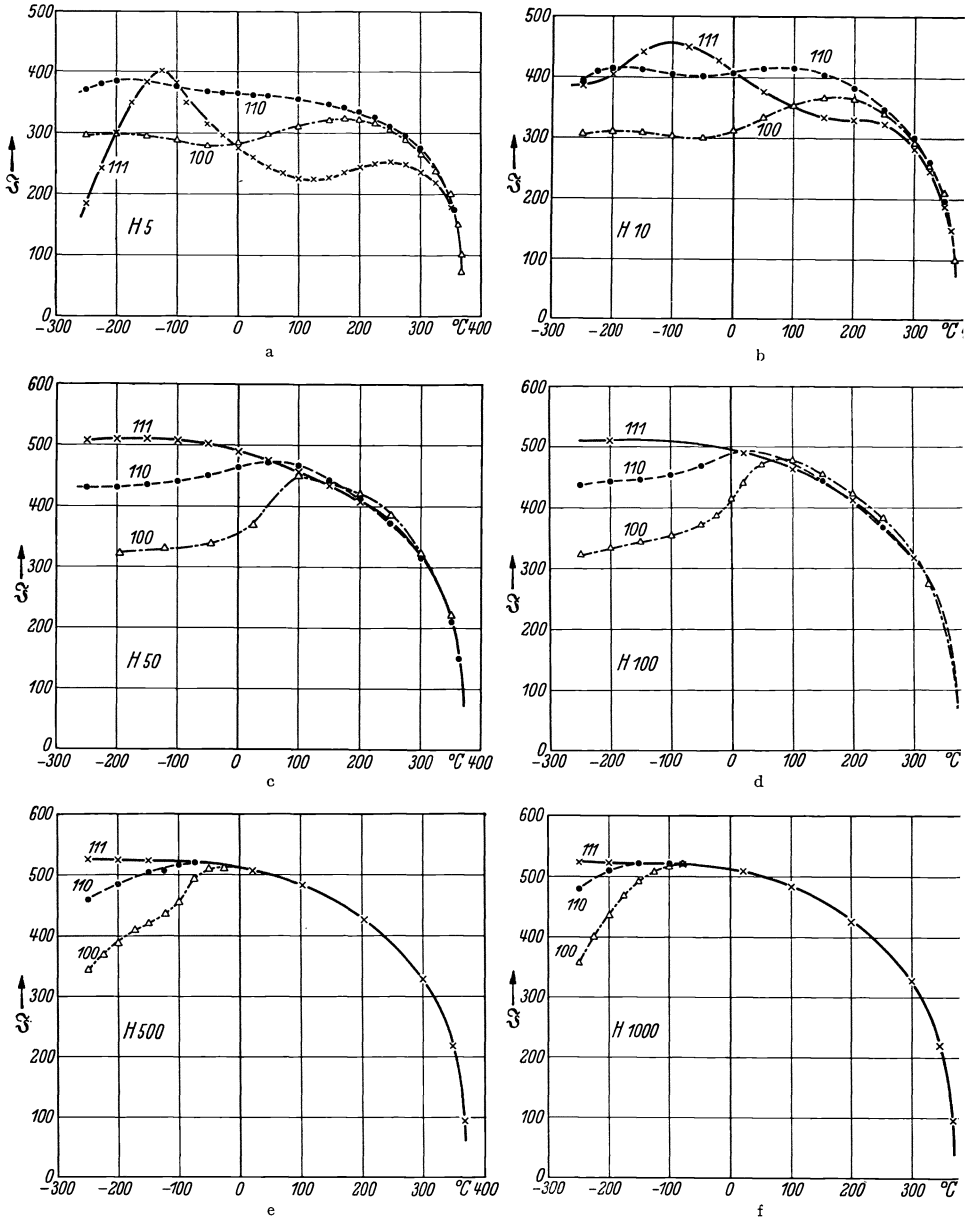


Abb. 23 a-f. Abhängigkeit der Magnetisierungsintensität von Nickeleinkristallen in den drei kristallographischen Hauptrichtungen  $[100]$ ,  $[110]$  und  $[111]$  von der Temperatur für verschiedene Feldstärken: a) 5 o, b) 10 o, c) 50 o, d) 100 o, e) 500 o, f) 1000 o. [Nach K. HONDA, H. MASUMOTO und Y. SHIRAKAWA (44).]

Versuche, wie sich die Magnetisierung oder Magnetostriktion bei verschiedenen Temperaturen unter dem Einfluß von Zug verhält, sind

meines Wissens an Einkristallen noch nicht ausgeführt. So erfolgreich die thermodynamische Theorie der Magnetisierung von kubischen Gittern auch auf vielen Gebieten des Ferromagnetismus schon gewesen ist, so steckt ihre atomistisch-wellenmechanische Begründung doch noch tief in den Kinderschuhen.

### B. Texturen (Anisotropie 2. Ordnung).

Neben dieser allgemeinen Belebung der Theorie der Magnetisierungskurve aus den Erfahrungen der regulären Einkristalle heraus haben die letzten Jahre noch eine nicht minder bedeutungsvolle Erweiterung der Erfahrung selbst von der kristallographischen Seite her gebracht. Da neben dem Drang der Wissenschaft nach reiner Erkenntnis der Wunsch nach praktischer Verwertung der theoretischen Erkenntnis liegt, lag es nahe, die Eigenschaften der magnetischen Anisotropie auch technisch zu verwerten. Diesem Streben steht die grundsätzliche Beschränktheit der räumlichen Ausdehnung von Metalleinkristallen hinderlich im Wege. Man kann es deshalb als einen wesentlichen Fortschritt bezeichnen, daß auf dem Umwege über „Texturen“ die Möglichkeit besteht, auch vielkristallinen Blechen und Werkstücken Eigenschaften von „Einkristallen“ aufzuprägen.

Auf die technischen Gründe dieses Strebens sei hier nicht näher eingegangen, sondern nur betont, daß es wünschenswert ist, magnetische „Vorzugsrichtungen“ der spontanen Magnetisierung, wie wir sie in der Anisotropie der Einkristalle kennengelernt haben, willkürlich in vielkristallinen Werkstoffen erzeugen und festlegen zu können. Hierfür hat man bisher zwei ganz verschiedene Wege gefunden, von denen der eine sich wiederum in zwei gabelt (5).

Der erste knüpft unmittelbar an die thermodynamische Wechselbeziehung zwischen Magnetisierungsvektor und Magnetostriktion an, beruht also im wesentlichen auf einer *magnetischen* Erscheinung, während der zweite zunächst eine rein *kristallographische* Angelegenheit ist, die erst auf dem Umwege über die Verknüpfung des Magnetisierungsvektors mit dem Gitter auch eine magnetische Wirkung hervorruft.

Betrachten wir zunächst den ersten Weg:

Wenn man eine hochpermeable Legierung — beispielsweise eine Eisen-Nickellegierung — einmal ohne und das andere Mal mit einem *Magnetfeld*, d. h. in einem Längsfeld abkühlt, kann man die in Abb. 24 dargestellte Veränderung ihrer Permeabilitätskurve hervorrufen (26). Die erstaunliche Steigerung der Maximalpermeabilität auf den ungewöhnlichen Wert von  $610000 I/\mathcal{O}$  ist lediglich durch langsame Abkühlung der Probe — nach 18stündigem Glühen bei  $1400^\circ$  in Wasserstoff, die ohne Magnetfeld die Kurve *a* ergibt — von  $650^\circ$  ab in einem nur wenige Oersted betragenden Längsfeld erreicht. Die dazugehörigen Hysteresisschleifen sind in Abb. 25 dargestellt und zeigen einen ebenso erstaunlichen

Wandel der Form. Schließlich zeigt Abb. 26 den Einfluß der Richtung des Magnetfeldes während der Abkühlung durch den Vergleich von Längs- und Quersfeldern. Eine nähere Untersuchung hat gezeigt, daß der Einfluß des Magnetfeldes auf einen verhältnismäßig engen

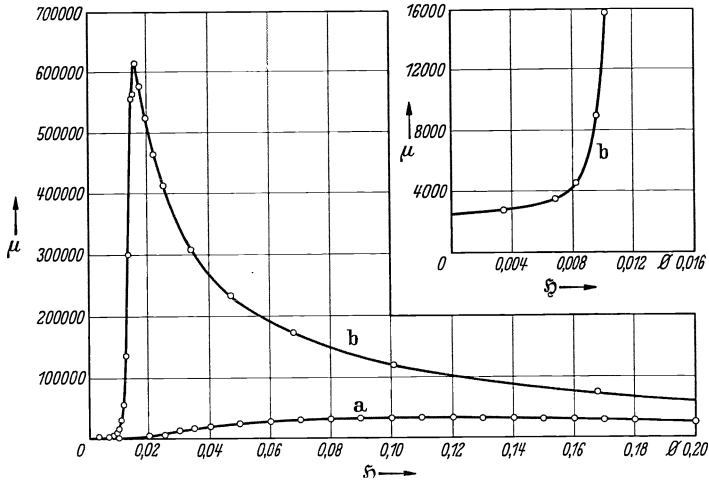


Abb. 24. Permeabilitätskurven einer Eisen-Nickellegierung (mit 65% Ni). [Nach J. F. DILLINGER und R. M. BOZORTH (26).] a Ohne Magnetfeld abgekühlt, b mit Magnetfeld abgekühlt.

Temperaturbereich beschränkt ist, nämlich auf nur 200° zwischen 550° und 350° C. Die Deutung dieser Beobachtungen kann man darin suchen, daß in diesem Temperaturbereich eine Kristallgittererholung möglich ist,

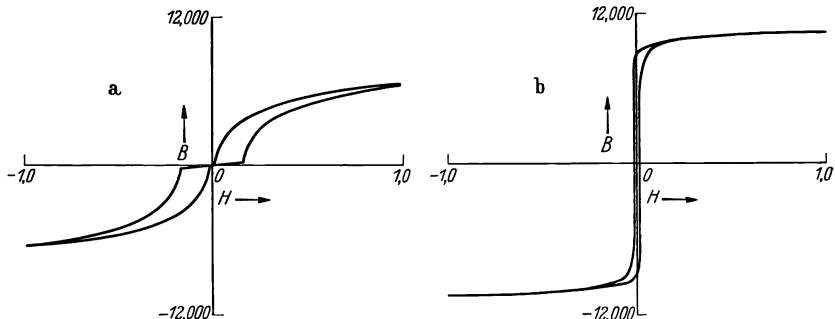


Abb. 25a und b. Hysteresisschleifen einer Eisen-Nickellegierung (mit 65% Ni). [Nach J. F. DILLINGER und R. M. BOZORTH (26).] a Ohne Magnetfeld abgekühlt, b mit Magnetfeld abgekühlt.

bei der die durch die Magnetostraktion der einzelnen Elementargebiete erzeugten Gitterspannungen ausheilen, so daß jede spätere Magnetisierung in Richtung des während der Abkühlung wirksamen Feldes ohne Arbeitsleistung gegen die Magnetostraktionsverspannungen erfolgen kann. Daß die Ursache der Spannungen in der Magnetostraktionsverzerrung, d. h. in der Magnetisierung selber zu suchen sind, beweist die

Tatsache, daß die Erscheinung nur bei Legierungen mit hinreichend hohen CURIE-Temperaturen auftritt und ihr Höchstwert in Abhängigkeit von der Ni-Konzentration mit dem Höchstwert der CURIE-Temperatur in der Fe-Ni-Reihe zusammenfällt, wie Abb. 27 zeigt. Die Temperaturgrenzen ergeben sich einerseits aus der Notwendigkeit einer hinreichenden Unterschreitung der CURIE-Temperatur, da die Magnetostruktionsverspannungen erst dann merkbliche Beträge annehmen können, andererseits durch den Umstand, daß die Kristallerholung eine untere Temperaturgrenze hat, unterhalb der ein Spannungsausgleich in endlichen Zeiten nicht mehr möglich ist. Ganz in diesem Sinne hat sich

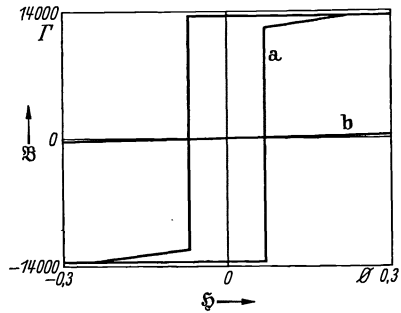


Abb. 26. Hysteresisschleifen einer Perminvarlegierung (30% Fe, 25% Co, 45% Ni). [Nach J. F. DILLINGER und R. M. BOZORTH (26).] a Im Längsmagnetfeld abgekühlt, b im Quermagnetfeld abgekühlt.

gezeigt, daß die Einwirkungszeiten des Magnetfeldes während des Abkühlens um so kürzer sein können, je höher die Temperatur ist (14).

Man kann sich also vorstellen, daß hier künstlich in den vielkristallinen Werkstoff magnetische Vorzugsrichtungen der Elementargebiete „eingebacken“ werden, die auf dem thermodynamischen Umweg über die Magnetostruktion festgehalten werden, so daß der Körper magnetisch selbst in seinen kristallographisch gleichberechtigten Gitterachsen nicht mehr isotrop ist. Die Richtigkeit dieser Anschauung erhellt anschaulich aus dem Verhalten der Maximalpermeabilität solcher Stoffe gegenüber elastischen Beanspruchungen. Solange eine isotrope Verteilung der Magnetisierungsvektoren vorliegt, muß man bei Stoffen mit positiver Magnetostruktion unter dem Einfluß eines Längszuges eine Erhöhung der Permeabilität bekommen, und zwar bis zu Zügen, die eine annähernd vollkommene Parallelrichtung der Vektoren mit der Zugrichtung bewirken. Wenn diese Vektoren

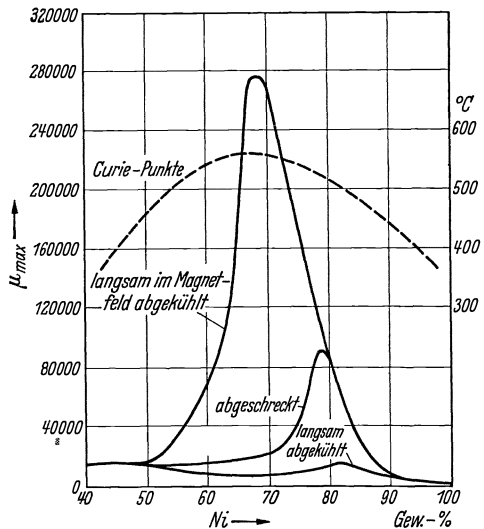


Abb. 27. Einfluß verschiedener Abkühlungsarten (von 1000°C) auf die Maximalpermeabilität der reversiblen Eisen-Nickellegierungen und deren CURIE-Temperaturen. [Nach R. M. BOZORTH und J. F. DILLINGER (14).]

liegt, muß man bei Stoffen mit positiver Magnetostruktion unter dem Einfluß eines Längszuges eine Erhöhung der Permeabilität bekommen, und zwar bis zu Zügen, die eine annähernd vollkommene Parallelrichtung der Vektoren mit der Zugrichtung bewirken. Wenn diese Vektoren

aber überwiegend schon in einer bestimmten Richtung liegen — wie wir es oben angenommen haben —, kann einerseits durch Zug keine wesentliche Steigerung mehr erreicht werden und muß andererseits der Anfangswert der Permeabilität ohne Zug schon ungefähr dem durch Zug erreichbaren Höchstwert entsprechen, wie es Abb. 28 tatsächlich bestätigt.

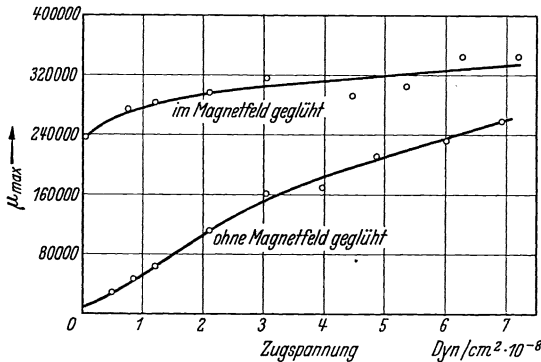


Abb. 28. Einfluß von Zugbeanspruchungen auf die Maximalpermeabilität bei einer Eisen-Nickellegierung (mit 65% Ni) mit und ohne Magnetfeldglühung. [Nach J. F. DILLINGER und R. M. BOZORTH (26).]

drückten Nullpunkt, so wird man zugeben müssen, daß hier durch künstliche Mittel eine recht bemerkenswerte magnetische Anisotropie erreicht ist, die sogar über das Wesen der magnetischen Anisotropie des kubischen Einkristallgitters noch einen Schritt hinausgeht und den Einkristallen mit freier Oberfläche nicht einmal eigen sein kann. Versuche an Fe-Ni-Einkristallen scheinen das zu bestätigen (7).

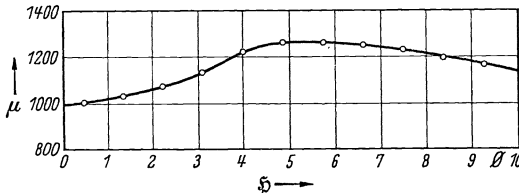


Abb. 29. Einfluß eines Quermagnetfelds während der Abkühlung auf die Permeabilitätskurve einer Perminvarlegierung (mit 30% Fe, 25% Co und 45% Ni). [Nach J. F. DILLINGER und R. M. BOZORTH (26).]

Ein ganz anderer Weg zur Erzeugung von magnetischen Anisotropien beruht auf einem *kristallographischen* Eingriff. Während bei den eben besprochenen Versuchen selbstverständlich keine Änderung der Lage der Kristallgitter, d. h. keine Drehung der Gitter im Werkstoff auftritt, sondern nur eine Anpassung ihrer Gestalt an die mit einer bestimmten Magnetisierungsrichtung verknüpften Formänderungen und die dadurch bedingten gegenseitigen Verspannungen, kann man natürlich zu der früher besprochenen Anisotropie des Einkristallgitters im Vielkristall auch dadurch kommen, daß man die Kristallgitter der Vielkristalle durch kristallographische Maßnahmen mehr oder weniger gewaltsam *ausrichtet*. Auch dieser Weg, den die Metallographie schon lange kennt,

Gleichzeitig wird auch verständlich, daß ein Querfeld während der Abkühlung die Magnetisierungsvektoren in gleicher Weise in der Querichtung festlegen muß und dementsprechend die Magnetisierungskurve und die dazugehörige Permeabilitätskurve in der in den Abb. 26 b und 29 gezeigten Weise verändern und herabsetzen muß. Beachtet man den in Abb. 29 stark unter-

drückten Nullpunkt, so wird man zugeben müssen, daß hier durch künstliche Mittel eine recht bemerkenswerte magnetische Anisotropie erreicht ist, die sogar über das Wesen der magnetischen Anisotropie des kubischen Einkristallgitters noch einen Schritt hinausgeht und den Einkristallen mit freier Oberfläche nicht einmal eigen sein kann. Versuche an Fe-Ni-Einkristallen scheinen das zu bestätigen (7).

Ein ganz anderer Weg zur Erzeugung von magnetischen Anisotropien beruht auf einem *kristallographischen* Eingriff. Während bei den eben besprochenen Versuchen selbstverständlich keine Änderung der Lage der Kristallgitter, d. h. keine Drehung der Gitter im Werkstoff auftritt, sondern nur eine Anpassung ihrer Gestalt an die mit einer bestimmten Magnetisierungsrichtung verknüpften Formänderungen und die dadurch bedingten gegenseitigen Verspannungen, kann man natürlich zu der früher besprochenen Anisotropie des Einkristallgitters im Vielkristall auch dadurch kommen, daß man die Kristallgitter der Vielkristalle durch kristallographische Maßnahmen mehr oder weniger gewaltsam *ausrichtet*. Auch dieser Weg, den die Metallographie schon lange kennt,



ist in den letzten Jahren mit großem Erfolg auf den Magnetismus übertragen worden. Es sind die sog. „Texturen“, die in der magnetischen Literatur häufig nicht ganz korrekt als „Fasertexturen“ bezeichnet werden.

Wir haben bei ihnen sog. „Walztexturen“ und „Rekristallisationstexturen“ zu unterscheiden. Die Walztexturen sind Kristallgitterausrichtungen, die allein durch Kaltverformung entstehen, Rekristallisationstexturen solche, die in kaltverformten Metallen durch gerichtete Rekristallisation, d. h. durch Erhitzen und gerichtete Kornneubildung, entstehen.

Ihre Lagen können je nach der Gitterart (flächen- oder raumzentriert) und der chemischen Zusammensetzung sehr verschieden sein. Ob sie magnetisch bedeutungsvoll sind, hängt im wesentlichen von ihrem magnetischen Verwendungszweck ab. Wo hohe Permeabilitäten und kleine Hysteresisverluste erwünscht sind, können die Rekristallisationstexturen schon wesentliche Fortschritte bedeuten, wie z. B. in der Starkstromtechnik der silicierten Bleche (39, 59, 74), wo jedoch Konstanz der Permeabilität und kleine Verluste in kleinsten Feldern wichtig sind, wie in der Schwachstromtechnik (Fernmelde- und Verstärkertechnik), ist mit beiden zunächst wenig erreicht. Hier hilft erst genau der gleiche Schritt wie bei der Magnetfeldtemperung, der die magnetische Gleichwertigkeit der drei kubischen Achsen unterdrückt, allerdings mit dem Unterschied, daß hier dieses Ziel auf ganz andere Weise erreicht wird.

Verformt man beispielsweise eine flächenzentrierte Eisen-Nickellegierung — zwischen 40 und 60% Ni — mehr als 99% kalt und glüht diese Legierung hoch, so entsteht eine ausgeprägte „Würfeltextrur“ als Rekristallisationstextur, d. h. alle kubischen Achsen fallen mit der Walzrichtung und alle kubischen Flächen mit der Walzebene zusammen. Ein derartiger Werkstoff verhält sich magnetisch wie ein Einkristall, d. h. er hat in drei aufeinanderstehenden Richtungen Höchstwerte der Permeabilität, wobei zwischen den drei Würfelachsen, abgesehen vom Einfluß des Entmagnetisierungsfaktors, d. h. der Form, kein Unterschied zwischen dem Verhalten der drei Achsen besteht.

Verformt man jedoch diese spannungsarme Rekristallisationstextur noch einmal kalt, zwischen 30 und 60%, so wird der Werkstoff jetzt auch in bezug auf seine bisher gleichberechtigten drei Würfelrichtungen magnetisch anisotrop, und zwar in dem Sinne, daß die Permeabilität in der Walzrichtung stark herabgesetzt wird, während sie senkrecht dazu praktisch unverändert erhalten bleibt. Der Magnetisierungsvektor stellt sich also jetzt senkrecht zur Walzrichtung in der Walzebene ein, also so, wie es eine Quermagnetfeldtemperung hervorrufen würde.

Daß die Magnetisierungsvektoren tatsächlich quer zur Walzrichtung liegen hat J. L. SNOEK (81) in überzeugender Weise durch das Verhalten der Widerstandsänderung im Magnetfeld (THOMSON-Effekt  $\epsilon L_e$ ) nachweisen können. Außerdem zeigt (16, 78, 81) eine derartig kaltverformte

Rekristallisationstextur senkrecht und parallel zur Walzrichtung ganz verschiedene Magnetisierungsschleifen (Abb. 30): im ersten Fall können beim Ummagnetisieren praktisch nur Schrumpfprozesse (vgl. S. 155), im zweiten Fall nur Drehprozesse (vgl. S. 155) auftreten. Abb. 30 zeigt gleichzeitig, daß dieser magnetisch anisotrope Zustand, der hier ja durch eine Kaltverformung eines ursprünglich spannungsarmen Werkstoffs erzeugt ist, durch Erhitzen wieder ausheilen kann, wobei sich natürlich die Magnetisierungskurve entsprechend dem Wiedergerichtwerden aller drei Würfelrichtungen stark aufrichten muß.

Die Ursachen dieser Anisotropie und der Festhaltekräfte der Magnetisierungsvektoren senkrecht zur Walzrichtung sind in diesem Fall — im

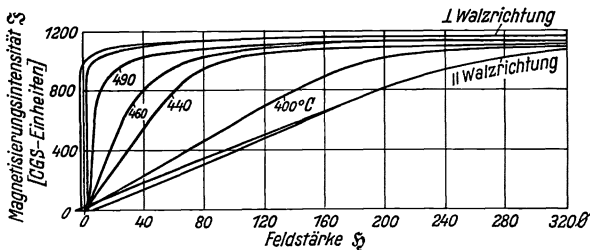


Abb. 30. Hysteresisschleifen eines rekristallisierten und kaltverformten Eisen-Nickelblechs (mit 50% Ni) in verschiedenen Walzrichtungen und Neukurven in der Walzrichtung nach Anlassen auf verschiedene Temperaturen. [Nach J. L. SNOEK (8z).]

Gegensatz zu der magnetostraktiv-thermisch erzeugten entsprechenden Anisotropie (vgl. S. 161) — noch ziemlich unklar und haben ihren Sitz aller Wahrscheinlichkeit nach in einer gesetzmäßigen Störung der Gittersymmetrie, die G. WASSERMANN (90) neuerdings als eine Abweichung von der kubischen Symmetrie nachweisen konnte.

Vom Standpunkt der thermodynamischen Spannungstheorie (S. 154) aus müßte man folgern, daß im Werkstoff eine Druckspannung in der Walzrichtung zurückbleibt. Derartige Vorstellungen kranken jedoch stets an dem Mangel, daß man es hier mit einem in sich abgeschlossenen System zu tun hat, in dem man sich die Aufrechterhaltung des „Spannungszustandes“ ohne die entsprechenden Gegenspannungen nicht recht vorstellen kann.

Um der Sache näherzukommen, muß man wohl auf die Beschaffenheit eines gestörten Gitters selber zurückgreifen. Wenn man ein ungestörtes Gitter elastisch verzerrt, ändern sich *alle* Gitterabstände der einen Richtung *gleichmäßig* und ebenso die der darauf senkrecht stehenden Richtungen. Diese tetragonale Verzerrung führt sinngemäß zu den auf S. 155 geschilderten Drehungen der Magnetisierungsvektoren. Mit dem Verschwinden der tetragonalen Verzerrung des Gitters bei der Entlastung verschwindet auch wieder die Drehung der Vektoren. Bei diesem Versuch wird zwar die kubische Symmetrie des Gitters gestört und geht in eine geringere Symmetrieklasse über, aber das Gitter bleibt grund-

sätzlich in seinen einzelnen Atomabständen regelmäßig und quantitativ beschreibbar.

Ganz anders ist es bei sog. „Gitterstörungen“. Denken wir uns an irgendeiner Stelle eines regelmäßigen Raumgitters ein Fremdatom mit anderem Atomradius oder anderer Affinität oder auch ein „Loch“ sitzen, so werden sich die mittleren Ruhelagen der Atome der benachbarten Gitterplätze in ein anderes Gleichgewicht einstellen müssen als wenn dort ein gleichartiges Atom säße. Es wird also eine zu dieser Fehlstelle hin- oder von ihr wegweisende Verrückung vieler Nachbaratome stattfinden, bis die Verschiebungen in endlicher Entfernung bis zur Unmerklichkeit abgeklungen sind. Eine derartige, in erster Annäherung kugelsymmetrisch abklingende Verzerrung des Gitters wird naturgemäß ebenfalls eine Festlegung der Spinmomente, d. h. des resultierenden Magnetisierungsvektors verursachen, die von der früheren Gleichwertigkeit — beispielsweise der drei Würfelachsen — grundverschieden ist. Der Werkstoff wird eine mit der Zahl und dem „Volumen“ der Störstellen irgendwie wachsende Koerzitivkraft zeigen, d. h. die für den Schrumpfprozeß (vgl. S. 155) nötige Energie wird anwachsen. Dabei bleibt es hier zunächst gleichgültig, daß diese Festhaltekraft sicher *nicht proportional* dem gestörten *Einzelvolumen* wächst, sondern eher umgekehrt, da — wenn das gestörte Volumen sehr groß wird — die daraus ableitbare Verzerrung und mithin Festlegung der Vektoren abnimmt, also mit dem *Verzerrungsgradienten* und der *Zahl* dieser Störstellen wächst. Wesentlich gegenüber der vorhin betrachteten elastischen „tetragonalen“ Verzerrung ist nur, daß es sich hier um Verrückungen der Atomgitterplätze handelt, die erstens überhaupt nicht mehr durch eine nächst tiefere Symmetrieklasse beschrieben werden können und zweitens in sich stabil sind, also ohne äußere Gegenkräfte im Gleichgewicht bleiben. Es ist aber klar, daß derartige kugelsymmetrische Verzerrungen des Gitters eine Ausrichtung aller Magnetisierungsvektoren in eine Richtung wie im Fall einer kaltverformten Rekristallisationstextur niemals erklären können.

Legt man sich andererseits die Frage vor, welcher Art die Ursachen der Gitterstörungen durch Kaltverformung in einem chemisch nicht merklich verunreinigten Gitter aus zwei Atomarten sein können, so bieten sich zwei Möglichkeiten dar:

entweder tritt bei der Kaltverformung der Würfeltextrur — denn durch diese tritt die magnetische Anisotropie ja erst auf — eine Entmischung der beiden Atomarten in bestimmten, zum Walzdruck (oder der Walzrichtung) irgendwie gelagerten Ebenen auf,

oder es treten Gleitebenen auf, die in ähnlicher Weise irgendwie geordnet gelagert sind.

Der erste Fall ist sehr unwahrscheinlich, da erstens zu seiner Verwirklichung sicher sehr große Kräfte erforderlich sind, die sowieso weit über der Erzeugung von Gleitebenen liegen, und zweitens vorhandene

geordnete Atomverteilungen erfahrungsgemäß (17) durch plastische Verformung restlos zerstört werden.

Dagegen enthält die zweite Möglichkeit eigentlich alles, was man zur Erklärung der beobachteten Erscheinungen braucht:

Wir hatten oben gesehen, daß Gitterstörungen entweder durch Fremdatome oder durch „Löcher“ entstehen. Fremdatome können durch die Kaltverformung nicht in nennenswertem Maße in das Gitter hineingebracht werden, wohl aber Löcher. Eine *stationäre* Verzerrung bestimmter Atome aus ihrer Ruhelage im ungestörten Gitter ist ohne Fremdatome überhaupt *nur* auf Grund von Löchern, d. h. *fehlenden* Atomen, möglich, die dadurch entstanden sind, daß Gleitprozesse in irgendeiner Ebene stattgefunden haben, die irgendwo ihr Ende gefunden haben. Überall da, wo eine Gleitung abgerissen ist, fehlt ein Atom in der Reihe und bildet die Ursache eines stationären Verzerrungszustandes.

Wenn nun, wie im Fall der Eisen-Nickel-Rekristallisationstextur, Würfellage vorliegt und die Walzrichtung eine Würfelkante ist, ist es einleuchtend, daß die bei der plastischen Verformung betätigten Gleitebenen in einer definierten Orientierung zur Walzrichtung liegen werden, beispielsweise wie bei einer Geldrolle, die unter irgendeinem Winkel zu ihrer Achse verformt wird. Dementsprechend werden auch die Störstellen eine definierte Ordnung zur Walzrichtung haben, also jetzt keine „kugelsymmetrischen“ Verzerrungen, sondern periodisch flächenhafte erzeugen.

Allein die Tatsache plastischer, stationärer, sich selbst tragender Verzerrungen schließt die Anwendung der thermodynamischen Spannungstheorie (S. 154) aus und zwingt beim Fehlen von Fremdatomen als Ursache der Verzerrungen zur Annahme von Gleitprozessen als einzige Ursache stationärer Verzerrungen. Nicht die Spannung, sondern die Verzerrung ist hier das primär Gegebene.

Das magnetisch gleiche Ergebnis, „als ob“ eine gerichtete Spannung vorhanden wäre, hat immer wieder dazu verleitet, nach solchen unmöglichen Modellen zu suchen, ist aber in der Literatur ebensooft berechtigten Zweifeln begegnet. Daß gerichtete Gleitprozesse die Permeabilität in der einen Richtung herabsetzen, in einer dazu senkrechten Ebene jedoch nicht beeinflussen, scheint auf der Hand zu liegen. Der Befund von WASSERMANN widerspricht dieser Anschauung nicht. Ebenso steht die in Abb. 30, S. 166 dargestellte thermische Ausheilbarkeit dieser magnetischen Anisotropie in Einklang mit der Annahme von Störstellen — nicht „Spannungen“ — als Ursache der Anisotropie.

Wir hatten auf S. 161 angedeutet, daß sich der kristallographische Weg zur Erzeugung von magnetischen Anisotropien in zwei Wege spalte. Der eben besprochene — die Kaltverformung einer Rekristallisationstextur — ist der später aufgefundene, aber einfachere Fall. Der zweite, der jetzt kurz erörtert werden soll, ist in seinem Ablauf wesentlich verwickelter und noch weniger geklärt als der erste. Außerdem beruht

er nicht nur auf einfachen Symmetrie- und Ausrichtungsfragen des Gitters und seinen Verformungen, sondern benutzt noch Tatsachen der Phasenlehre.

Löst man beispielsweise Zucker in Wasser, so vermag das Lösungsmittel in der Wärme mehr Zucker aufzunehmen als in der Kälte. Beim Abkühlen einer in der Wärme gesättigten Lösung müssen also Kristalle ausgeschieden werden. Dieselbe Erscheinung tritt auch bei Legierungen, die homogene Mischkristalle bilden, auf, wenn die Löslichkeit der einen Komponente in der anderen mit sinkender Temperatur abnimmt. Derartige Systeme gibt es viele. Sie haben zugleich häufig noch die Fähigkeit der Unterkühlbarkeit: man kann durch Abschrecken einer gesättigten Mischkristallegierung „Übersättigung“ hervorrufen. Bei tiefen Temperaturen, z. B. bei Zimmertemperatur, ist die thermische Beweglichkeit, d. h. der atomare Platzwechsel, meist zu klein, als daß sich das der Zimmertemperatur entsprechende Gleichgewicht nachträglich durch Ausscheidung einstellen könnte. Der an sich instabile Zustand der Übersättigung kann also praktisch unbegrenzt stationär sein. Führt man einer solchen quasistabilen Lösung jedoch Wärmeenergie zu, kann sich nachträglich das Gleichgewicht durch Ausscheidung des überschüssig gelösten Stoffs, d. h. durch heterogenen Zerfall, einstellen.

Die an sich sehr verwickelten Ausscheidungsvorgänge in angelassenen, übersättigten Lösungen haben in den letzten Jahren in zwei ganz verschiedenen Gebieten des Ferromagnetismus Bedeutung gewonnen und sind deshalb Gegenstand zahlreicher Untersuchungen geworden (19, 21, 48).

Im vorausgehenden Abschnitt hatten wir die Gitterverzerrungen, die *ohne* Anwesenheit von wesentlichen Mengen von Fremdatomen auftreten können, ins Auge gefaßt. Hier dagegen haben wir es mit den entsprechenden Möglichkeiten zu tun, die gerade durch die Anwesenheit von Fremdatomen hervorgerufen werden.

An den Gedankengängen der kugelsymmetrischen Verzerrungen durch Fremdatome, die die Koerzitivkraft erhöhen, ändert sich grundsätzlich nichts. Wir werden auf diesen wichtigen Fall, der die Entwicklung eines ganz neuen Zweiges der Dauermagnete hervorgerufen hat, im letzten Abschnitt des Aufsatzes zurückkommen. Selbstverständlich können auch diese Verzerrungen keinen Beitrag zu einer magnetischen Anisotropie im Sinne gerichteter Magnetisierungsvektoren liefern.

Wohl aber besteht zwischen der Ausscheidung überschüssiger Fremdatome und der Kaltverformung übersättigter Mischkristalle ein enger Zusammenhang, der auf die mannigfaltigsten Weisen zu magnetischen Anisotropien Anlaß geben kann.

Wie verwickelt die Verhältnisse im einzelnen sind, sei durch die folgende Gegenüberstellung einiger Beispiele angedeutet:

1. Setzt man den oben besprochenen Eisen-Nickellegierungen 13% Cu zu, schreckt die Legierung ab, d. h. führt sie in einen übersättigten, quasistabilen Zustand über und unterwirft sie einer starken Kalt-

verformung, so entsteht eine magnetische Vorzugslage senkrecht zur Bandebene, d. h. parallel zum Walzdruck.

2. Dieselbe Vorzugslage erhält man, wenn man den Cu-Gehalt wesentlich senkt (9% Cu), also die Übersättigung bei Zimmertemperatur nicht so weit treibt, dafür aber langsam abkühlt und dann kalt verformt.

3. Läßt man dagegen diese Legierungszusammensetzung (9% Cu) nach langsamer Abkühlung und Kaltverformung nachträglich noch einmal an, so erhält man eine andere Vorzugsrichtung der Magnetisierungsvektoren, die parallel zur Walzrichtung in der Bandebene, also senkrecht zum Walzdruck liegt.

4. Dieselbe Lage wie die eben genannte kann man andererseits aber auch durch einfache Kaltverformung nach langsamer Abkühlung ohne anschließendes Anlassen bekommen, wenn man den Cu-Gehalt wiederum auf 12–15% Cu steigert.

Die Beweise für die verschiedenen Vorzugslagen der Magnetisierungsvektoren folgen wieder aus den Formen der Hysteresisschleifen. Daneben ist auch ein auf dem magnetostriktiven Verhalten derartig anisotroper Stoffe begründeter Beweis durchgeführt worden (5).

Diese Beispiele sollen, ohne näher auf Einzelheiten einzugehen, nur zeigen, daß die drei Größen der Übersättigung (Konzentration), Kaltverformung und notwendigen thermischen Energie gesetzmäßig miteinander verknüpft sind und zu sehr verschiedenen magnetischen Anisotropien führen können. Allen gemeinsam ist die mehr oder weniger weit getriebene Übersättigung und die Kaltverformung. Es treten also stets Gleitprozesse auf, von denen man seit langem weiß, daß sie die Ausscheidung überschüssig gelöster Atome, oder besser gesagt, die Aufhebung instabiler Zustände begünstigen. Dabei richtet sich die Art der Ausscheidung (Anisotropie) und die Größe der mechanisch und thermisch zuzuführenden Energie nach dem Grad der Übersättigung, der seinerseits von der Konzentration und der Art der Abkühlung (abgeschreckt oder langsam abgekühlt) abhängt.

Man kann — ganz grob gesprochen — die auszuscheidenden überschüssigen Atome gleichsam als Schmiermittel in den Gleitebenen auffassen, wobei je nach dem Vorgehen (nach Konzentration und Abkühlungsart, d. h. Ausscheidung *vor* der Kaltverformung) verschiedene Gleitebenen betätigt werden, die ihrerseits zu verschiedenen magnetischen Vorzugsrichtungen führen.

Die Frage, welche Gleitebenen betätigt werden und wie sie von der Konzentration und Verformung abhängen, geht zunächst mehr die Metallographie als den Magnetismus an. Trotz Sammlung zahlreicher empirischer Erfahrungen steht die Forschung hier noch ziemlich am Rande eines Neulandes, an dessen Durchforschung eifrig gearbeitet wird.

Man hat unter dem Einfluß der Erfolge der Spannungstheorie (154) für den Ferromagnetismus auch in diesem Gebiet der magnetischen

Anisotropie nach „Spannungsmodellen“ in den ausscheidungsfähigen kaltverformten Systemen gesucht<sup>1</sup>, ohne damit jedoch mehr Erfolg gehabt zu haben, als bei den reinen kaltverformten Rekristallisationstexturen. Nach dem oben Gesagten ist es auch hier abwegig, den Gedanken „homogener tetragonaler Spannungen“ übertragen zu wollen, da auch hier die stationären Verzerrungen aus Gitterstörungen stammen, deren Ursache in der Kaltverformung zu suchen ist, lediglich mit dem Unterschied, daß hier die „Textur“ von den vor und während der Kaltverformung ausgeschiedenen Atomen bestimmt wird.

Überblickt man noch einmal zusammenfassend das Gebiet der magnetischen Anisotropie, so bietet es heute schon eine Fülle von empirischen Möglichkeiten, Magnetisierungsvektoren willkürlich in bestimmten Richtungen festzulegen. Abgesehen von dem magnetisch-thermischen Wege (S. 161) bieten auch die beiden metallographischen jede erwünschte Möglichkeit, wie aus den ausgewählten Beispielen hervorgeht. Denn wir haben Vorzugslagen in der Walzrichtung und in den beiden zu ihr senkrechten Richtungen kennengelernt. Ein besonderer Reiz liegt für die Forschung darin, daß man alle ausgewählten Beispiele chemisch nahe benachbart in einen einzigen Dreistoffsystem verwirklichen kann. Den *kristallographischen* Ursachen dieser Vektordrehungen nachzugehen, wäre eine dankbare und lohnende Aufgabe der Forschung.

## V. Dauermagnete.

Auf S. 167 wurde schon angedeutet, daß kugelsymmetrische Verzerrungen des kubischen Gitters die Koerzitivkraft erhöhen, und S. 169 wurde auseinandergesetzt, daß bei der Ausscheidung aus übersättigten Lösungen solche Gitterverzerrungen auftreten können. Ehe wir auf die Bedeutung dieser Tatsache für die Herstellung von Dauermagneten eingehen, müssen wir erst einen Blick auf die Frage werfen, wieso „Ausscheidungen“ zu Gitterverzerrungen oder — wie man meist sagt — zu Verspannungen Anlaß geben können. Naiverweise sollte man doch annehmen, daß die Aufhebung eines instabilen Übersättigungszustandes zu einer völligen Entspannung und Ausheilung des Gitters oder besser gesagt beider neu entstehenden Gitter führen sollte, so daß kein Platz für das Bild örtlich gestörter Gitterteile bleibt.

Tatsächlich ist das zum Teil auch der Fall, denn es unterliegt keinem Zweifel, daß die Koerzitivkraft mit fortschreitender Annäherung an den stabilen heterogenen Zustand vollendeter Ausscheidung über einen ausgeprägten Höchstwert wieder stark absinkt. Nicht der heterogene Zustand schlechthin hat eine große Koerzitivkraft, wie KUSSMANN und SCHARNOW (55, 56) behauptet haben, sondern ein bis heute mehr oder

<sup>1</sup> Um die magnetisch notwendige Spannungsverteilung herauszubekommen, hat man angenommen, daß Schichten mit verschiedenen Konzentrationen abwechselnd unter Zug und Druck stehen (19).

weniger unfaßbar gebliebener Vorbereitungs-  
zustand der Ausscheidung. Worin atom- und gitterphysikalisch dieser „Vorbereitungs-  
zustand“

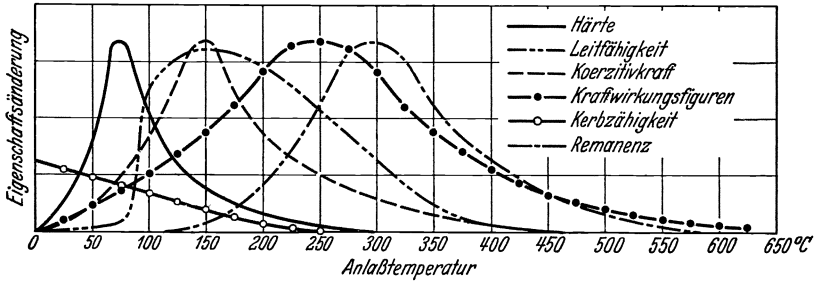


Abb. 31. Verschiedenheit des Aushärtungsvorganges für einige physikalische Eigenschaften von stickstoffhaltigem Eisen (29).

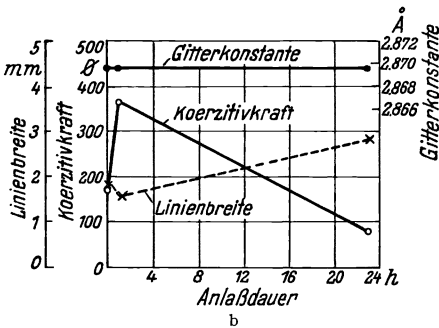
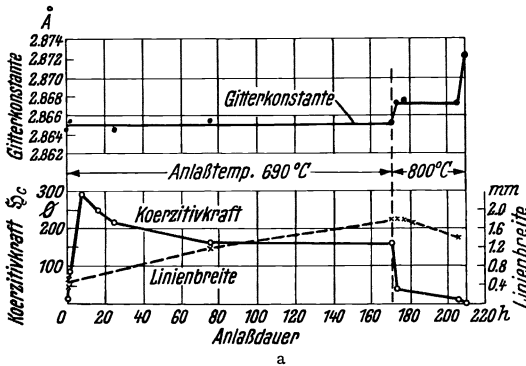


Abb. 32 a und b. Abhängigkeit der Koerzitivkraft, Gitterkonstanten und Linienbreite von der Anlaßdauer bei aushärtbaren Legierungen. [Nach R. GLOCKER, H. PFISTER und P. WIEST (38).] a Fe mit 13% Co, 22,5% Ni und 10% Al, von 1300° abgeschreckt, bei 690° angelassen; b Fe mit 30% Ni und 12% Al, von 1300° abgeschreckt, bei 720° angelassen.

eigentlich besteht, ist heute noch eine umstrittene Frage.

Das unbestreitbare Verdienst der frühzeitigen Untersuchungen von KUSSMANN und SCHARNOW liegt vielmehr in der Erkenntnis, daß die althergebrachte Anschauung, daß mechanische Härte und Koerzitivkraft („magnetische Härte“) *ursächlich* zusammenhängen, nicht allgemeingültig ist. Man muß sich vergegenwärtigen, daß man bis vor 10 Jahren große Koerzitivkräfte nur auf der Grundlage der martensitischen Stähle erzeugen konnte, bei denen mechanische und magnetische Härte Hand in Hand gehen. Dieser martensitische Zustand beruht auf einem tetra-

gonalverzerrten  $\alpha$ -Gitter, das instabil ist. Beim Anlassen geht aus dieses Gitter unter Ausscheidung des überschüssigen Kohlenstoffs oder Karbids in ein kubisches  $\alpha$ -Gitter über, wobei gleichzeitig Härte und



Koerzitivkraft absinken. Schon diese Tatsache widerspricht der KUSSMANN-SCHARNOWSCHEN Behauptung, daß der heterogene Zustand die größere Koerzitivkraft habe.

Mit der Entdeckung der ausscheidungs-fähigen Dauermagnete (20, 50, 63, 65, 73, 76) zeigte sich jedoch mehr und mehr, daß Härte und Koerzitivkraft ihre Höchstwerte bei ganz verschiedenen Gitterzuständen erreichen können, wie Abb. 31 für das Beispiel eines stickstoffhaltigen Armco-Eisens (29) zeigt.

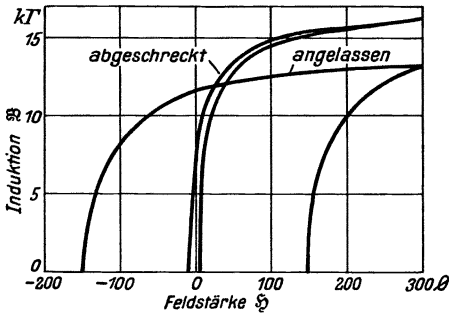


Abb. 33. Hysteresisschleifen einer Eisenlegierung mit 15% Co und 18% W nach dem Abschrecken von 1300° C und nachfolgendem Anlassen auf 700° C. [Nach W. KÖSTER (50).]

Die veränderliche Größe dieser Gitterzustände dürfte nach heutiger Ansicht der Verzerrungsgradient der einzelnen Störstellen sein, der jedoch bisher nicht quantitativ faßbar geworden ist. Für die Koerzitivkraft liegt er — wie GLOCKER, PFISTER und WIEST (38) für das Beispiel der Eisen-Nickel-Aluminiumlegierungen nachgewiesen haben — unter der Grenze einer röntgenographisch nachweisbaren Linienverbreiterung, die ein Maß für die Verzerrung ist, und weit vor einer durch Änderung der Gitterkonstanten nachweisbaren Ausscheidung (vgl. Abb. 32a, b).

Man hat, nachdem man die überragende Wirksamkeit der Ausscheidungsfähigkeit auf die Koerzitivkraft zahlreicher Mehrstoffsysteme kennengelernt hatte, oft einen Gegensatz zwischen diesen Dauermagneten und den martensitischen konstruiert. In der Tat scheinen sie sich ja auf den ersten Blick geradezu entgegengesetzt zu verhalten: die martensitischen erhalten ihre große Koerzitivkraft durch Abschrecken und verlieren sie beim Anlassen, während die ausscheidungs-

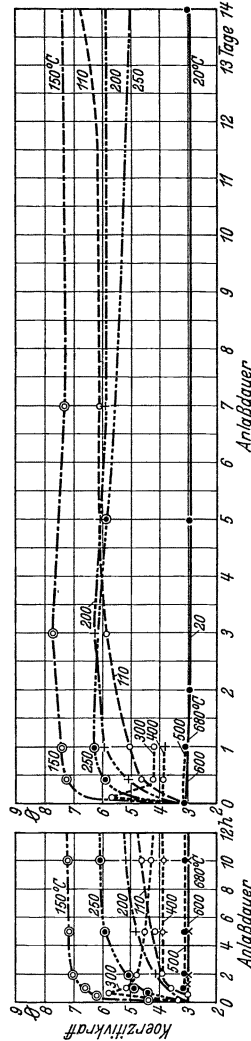


Abb. 34. Zeitliche Änderung der Koerzitivkraft eines von 680° C abgeschreckten Thomasstahls mit 0,018% N bei verschiedenen Anlaßtemperaturen. [Nach W. KÖSTER (50).]

fähigen im abgeschreckten Zustand eine kleine Koerzitivkraft haben, die erst durch Anlassen zur Entwicklung kommt (vgl. Abb. 33). Trotzdem ist es bei der zwiefachen Unkenntnis, welcher „Grad“ der geometrischen Gitterstörung die Koerzitivkraft am größten macht und welcher atomistische<sup>1</sup> Vorgang überhaupt die Koerzitivkraft des verzerrten Gitters bedingt, vielleicht unberechtigt, aus diesem scheinbaren Gegensatz des Einflusses der Wärmebehandlung auf einen tatsächlichen Gegensatz in der Sache selbst zu schließen. Man weiß aus den Untersuchungen über die Ausscheidungsvorgänge beim Anlassen abgeschreckter übersättigter Lösungen, daß der zeitliche Ablauf der Ausscheidung sehr wesentlich von der Temperatur und der Menge des überschüssig gelösten

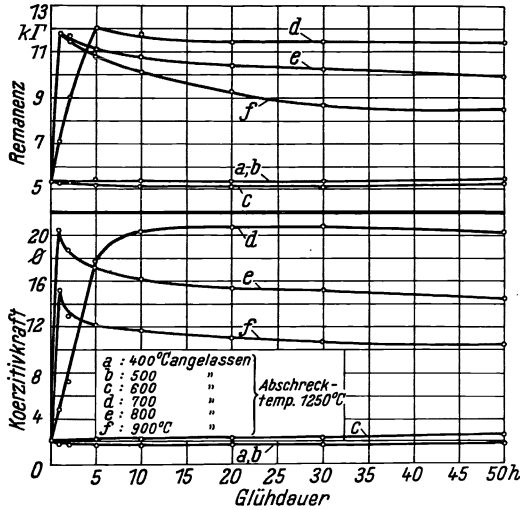


Abb. 35. Einfluß der Anlaßdauer auf die Remanenz und Koerzitivkraft eines Stahls mit 0,09% C, 1,03% Si, 2,24% Mn und 3,75% Ti. [Nach R. WASMUH (89).]

Stoffs abhängt. Als Beispiel hierfür mögen die Abb. 34, 35 und 36 dienen, die den zum Teil sehr verwickelten normalen (Abb. 34 und 35) und anomalen Verlauf (Abb. 36) erkennen lassen. Danach tritt bei

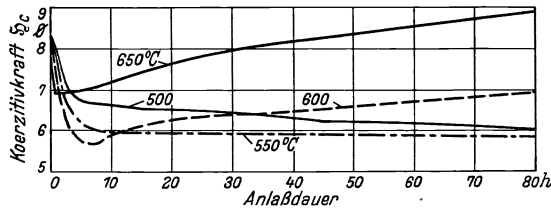


Abb. 36. Einfluß der Anlaßdauer auf die Koerzitivkraft einer von 900° C abgeschreckten Eisen-Kupferlegierung mit 5% Cu bei verschiedenen Anlaßtemperaturen. [Nach W. KÖSTER (57).]

weiterer Steigerung der Temperatur folgt auf die sehr plötzliche Erreichung des Höchstwertes stets ein mehr oder weniger ausgeprägtes Absinken mit wachsender Glühzeit.

<sup>1</sup> In einem magnetisch spontan gesättigten Elementarbereich befindet sich jeder Spin eines kubischen Gitters auch ohne Berücksichtigung der magnetostriktiven Verzerrung nicht mehr in einem Feld von kubischer, sondern niedriger Symmetrie.

des überschüssig gelösten

niedrigen Temperaturen eine — anomale — Abnahme der Koerzitivkraft auf, die mit steigender Temperatur in den — normalen — Anstieg übergeht, der um so größer ist und um so schneller erreicht wird, je höher die Temperatur ist. Bei noch

Bei den ausscheidungsfähigen Magneten kennt man ebensogut Mehrstoffsysteme, bei denen der Höchstwert der Koerzitivkraft erst durch einen Anlaßvorgang allmählich erreicht wird, wie solche, bei denen er unmittelbar nach dem Guß vorhanden ist und durch Anlassen entweder nicht oder nur unwesentlich verändert oder gar herabgesetzt wird. Die Stabilität des Höchstwertes hängt wesentlich von dem Verhältnis des überschüssig gelösten Stoffs zu der Höhe der Anlaßtemperatur ab. Man kann also den Fall der martensitischen Härtung als einen Grenzfall sehr schnell erreichten Höchstwertes — nämlich schon beim Abschrecken — auffassen, dessen „Anstieg“

experimentell nicht erfaßt werden kann und der in der Folgezeit entsprechend Abb. 35e und f wieder zerfällt, da er für die gewählte Anlaßtemperatur und die vorhandene überschüssig gelöste Menge kein Gleichgewicht darstellt. So betrachtet wären die ausscheidungsfähigen Dauermagnete nichts anderes als ein zeitlupenmäßig auseinandergezerrter Ablauf der martensitischen Härtung, den man sogar als den einfacheren und allgemeineren Fall betrachten muß, da er — im Gegensatz zur martensitischen Härtung — im allgemeinen ohne Gitterumschlag vor sich geht.

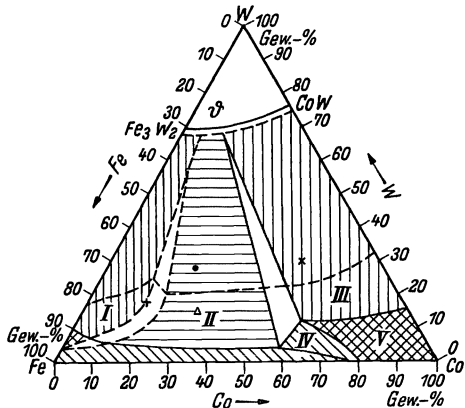


Abb. 37. Zustandsfelder der Fe-Co-W-Legierungen bei 20° C (—) und 1300° C (---). [Nach W. KÖSTER (50).]  
 |||| I und III, Ausscheidung ohne Gitterumwandlung;  
 ≡ II, Ausscheidung und Gitterumwandlung (Martensit);  
 ▨ IV, keine Ausscheidung, aber Gitterumwandlung;  
 × × V, keine Ausscheidung, keine Gitterumwandlung;  
 + vgl. Abb. 38a; × vgl. Abb. 38b; • vgl. Abb. 38c;  
 Δ vgl. Abb. 38d.

Die Bedeutung der Verschiedenartigkeit der Ausscheidung je nach dem Ausgangsgitter hat besonders W. KÖSTER (50) betont, der sie an einem System untersucht hat, das drei verschiedene Typen in sich vereinigt. Es ist das in Abb. 37 dargestellte Fe-Co-W-System, dessen Zustandsgrenzen für 1300° und 20° C gleichzeitig eingezeichnet sind. In ihm finden sich folgende drei Fälle verwirklicht:

1. Ausscheidung aus ferritischem  $\alpha$ -Mischkristallgitter,
2. Ausscheidung aus austenitischem  $\gamma$ -Mischkristallgitter,
3. Ausscheidung aus martensitischem Gefüge.

Im Raum I der Abb. 37 ist bei 1300° das raumzentrierte  $\alpha$ -Gitter beständig, aus dem sich bei Zimmertemperatur die wolframreiche  $\vartheta$ -Phase ohne Gitterumwandlung ausscheidet (Fall 1). Im Raum III ist bei 1300° das flächenzentrierte  $\gamma$ -Gitter beständig, aus dem sich bei Zimmertemperatur — ebenfalls ohne Gitterumwandlung — ebenfalls eine wolframreiche  $\vartheta$ -Phase ausscheidet.

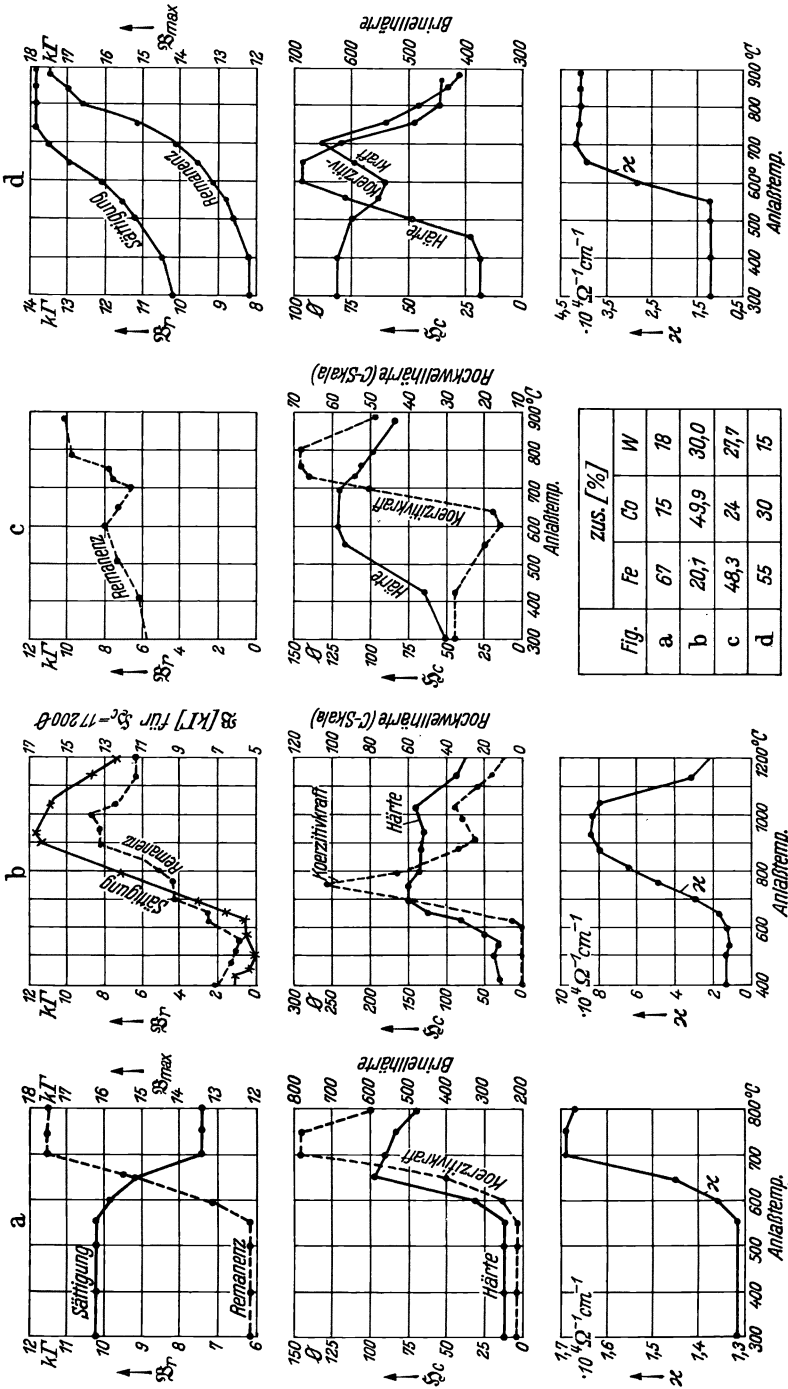


Abb. 38 a-d. Einfluß des Anlassens auf verschiedene magnetische, elektrische und mechanische Eigenschaften verschiedener Fe-Co-W-Legierungen nach Messungen verschiedener Beobachter. a Von 1300° abgeschreckt. [Nach W. Köster (50).] b Von 1400 bis 1450° abgeschreckt. [Nach K. S. Seljesäter und B. A. Rogers (76).] c Von 1400 bis 1450° abgeschreckt. [Nach K. S. Seljesäter und B. A. Rogers (76).] d Von 1200° abgeschreckt. [Nach W. Köster (59).]

Dazwischen liegt endlich ein Gebiet (II), das beim Übergang von 1300° zur Zimmertemperatur eine  $\gamma \rightarrow \alpha$ -Gitterumwandlung durchmacht und aus diesem martensitischen Zustand ebenfalls eine wolframreiche  $\vartheta$ -Phase ausscheidet.

In Abb. 38, S. 176, sind die dazugehörigen Abläufe der wichtigsten Kennziffern der Werkstoffe über der Anlaßtemperatur dargestellt. Man erkennt dabei wesentliche Unterschiede im Ablauf, beispielsweise der Sättigung und Remanenz oder der Koerzitivkraft und Härte.

Das verschiedene Verhalten der Sättigung ist in diesen Beispielen wohl im großen ganzen verständlich: da im Raum I eine eisenhaltige unmagnetische Phase ( $\vartheta$ ) ausgeschieden wird, muß die Sättigung mit dem Anlassen sinken. Da andererseits im Raum II und III nach dem Verlauf der Konoden mit der Ausscheidung der  $\vartheta$ -Phase eine Anreicherung an Kobalt stattfindet, muß die Sättigung entsprechend der bekannten Erhöhung der Fe-Sättigung durch Kobalt gemäß der Zusammensetzung auf der Fe-Co-Seite steigen. Abb. 38d läßt außerdem erkennen, daß diese erhöhende Wirkung des Co auf die Sättigung erst nach Ausscheidung der Co-haltigen  $\vartheta$ -Phase auftreten kann, das gelöste W also offenbar diesen Einfluß des Co auf die Fe-Co-Sättigung unterdrückt.

Die martensitischen Stahlhärtungen stellen demnach Vertreter vom Typus 3 (S. 175) dar, die gegenüber den einfachen Aushärtungsmagneten durch den gleichzeitig möglichen Ablauf einer Gitterumwandlung ausgezeichnet sind. Wegen ihrer Instabilität sind sie gegen Erwärmung sehr empfindlich im Gegensatz zu den ausscheidungsfähigen Magneten, die dann gegen Erwärmung bis zu 500° und 600° gänzlich unempfindlich sind, wenn die Menge und Verteilung der überschüssig gelösten und ausscheidbaren Stoffe so gewählt ist, daß sie sich bis zu diesen Temperaturen nicht mehr verändert. Dazu gehören z. B. gewisse Fe-Ni-Al-Legierungen (MK-Stähle), die Koerzitivkräfte von 600–700  $\varnothing$  zu erreichen erlauben; vgl. Abb. 39.

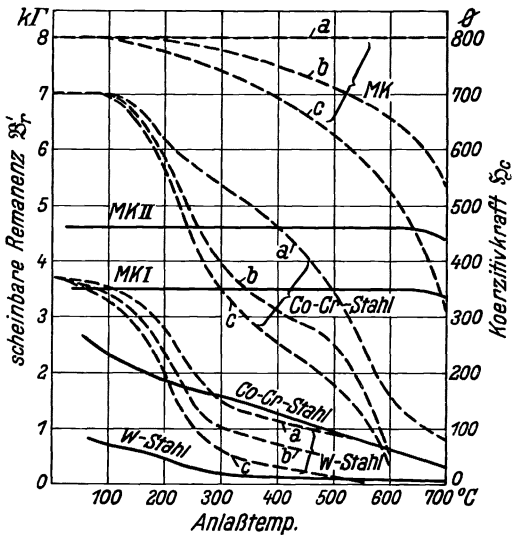


Abb. 39. Änderungen der magnetischen Eigenschaften verschiedener Dauermagnete durch Erhitzen. [Nach F. PÖLZGUTER (69).] --- Remanenz: a Nach 30 Min. dauernder Erhitzung und Abkühlung und wiederholter Magnetisierung: diese Kurve entspricht der bleibenden Gefügeänderung. b Nach 30 Min. dauernder Erhitzung und Abkühlung ohne Nachmagnetisierung: die hierbei entstehende Remanenzminderung entspricht der magnetischen Alterung. c Während der Erhitzung: die Differenz gegen Kurve b entspricht dem Temperatureinfluß. — Koerzitivkraft nach 30 Min. dauernder Erhitzung und Abkühlung.

Das System Fe-Ni-Al ist noch dadurch interessant, daß es neben den ausscheidungsfähigen Dauermagneten, die von MISHIMA

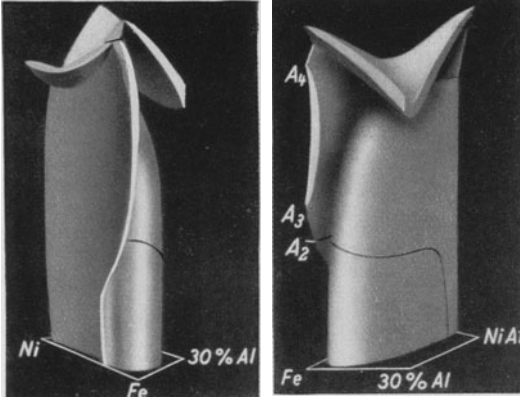


Abb. 40. Heterogenitätskörper der Fe-Ni-Al-Legierungen. [Nach W. KÖSTER (50).]

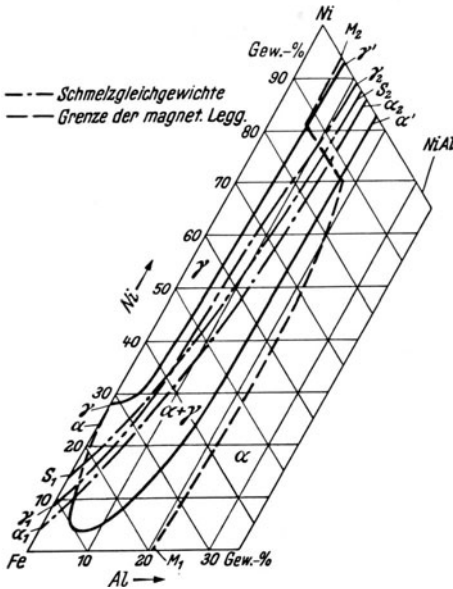


Abb. 41. Zustandsfelder des Fe-Ni-Al-Systems bei verschiedenen Temperaturen. [Nach W. KÖSTER (50).]  $\alpha \alpha' \gamma' \gamma \dots$  Begrenzung des Heterogenitätskörpers bei Zimmertemperatur;  $\alpha_1 \alpha_2 \gamma_2 \gamma_1 \dots$  Begrenzung des Heterogenitätskörpers bei der Schmelztemperatur;  $S_1 S_2 \dots$  Grenzlinie der Dreiphasenumsetzung:  $\alpha - \gamma$  — Schmelze;  $M_1 M_2 \dots$  Grenze der magnetischen Legierungen.

Grundlage der Ausscheidungsfähigkeit das Fe-Ni-Cu-System. Bei diesen

entdeckt wurden und die heute gebräuchlichsten Magnetsorten darstellen, auch eine Gruppe von magnetisch anisotropen Legierungen, wie sie S. 169 beschrieben sind, enthält. Der Heterogenitätskörper dieses Dreistoffsystems ist in Abb. 40 dargestellt, der dazugehörige Grundriß in Abb. 41. Die Dauermagnete liegen auf der  $\alpha$ -Seite dieses Körpers

und entstehen durch die Vorbereitung des  $(\alpha + \gamma)$ -Zerfalls im  $\alpha$ -Gitter, während die anisotropen Legierungen auf der  $\gamma$ -Seite des Heterogenitätskörpers liegen und durch die — durch Kaltverformung gesteuerte — Vorbereitung der Ausscheidung aus dem  $\gamma$ -Gitter entstehen.

Ob derselbe Ausscheidungsmechanismus auch auf die  $\alpha$ -Seite übertragbar ist, ist bei diesem System noch nicht näher untersucht. Wegen der geringen oder oft ganz fehlenden Verformbarkeit der ausscheidungsfähigen Dauermagnete besteht im allgemeinen keine Möglichkeit zu dieser Übertragung der Anisotropie auf Dauermagnete. Wohl aber kennt man bisher ein System, das neben technisch guten magnetischen Werten auf der gute Verformbarkeit behält: kupperreichen Dauermagneten

sind solche Verformungsversuche schon ausgeführt und haben auch hier zu Anisotropien geführt (65, 67).

Wir wollen das Gebiet der Dauermagnete nicht abschließen, ohne noch auf einen ganz anderen Mechanismus der Erzeugung großer Koerzitivkräfte hingewiesen zu haben. Im System Fe-Pt entsteht bei 50 At.-% Pt eine Verbindung, deren Bildung sich bisher durch keine noch so schroffe Abschreckung aus dem Gebiet des reinen Mischkristalls heraus hat unterdrücken lassen. Andererseits ist es ebenfalls noch nicht gelungen, den ganzen Mischkristall durch langes Erhitzen bei tiefen Temperaturen völlig in die Verbindung Fe-Pt überzuführen. Es tritt in beiden

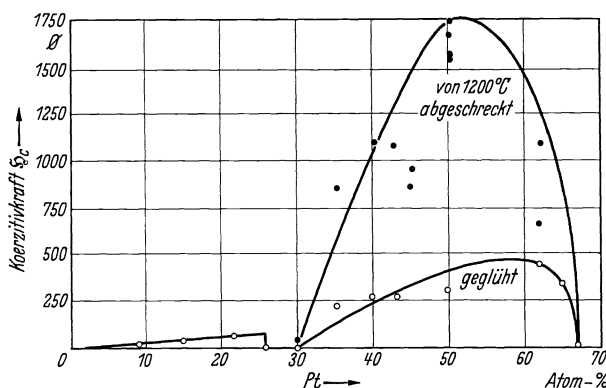


Abb. 42. Koerzitivkraft der Fe-Pt-Legierungen bei verschiedenen Wärmebehandlungen. [Nach L. GRAF und A. KUSSMANN (40).]

Fällen stets ein Gemenge beider Phasen auf. Diese Legierungen zeigen — bei verhältnismäßig<sup>1</sup> hohen Remanenzen — sehr große Koerzitivkräfte, wie Abb. 42 erkennen läßt. Die Ursache dieser Koerzitivkräfte muß man in einem einphasigen Gitterumklappmechanismus sehen, der — wie die Versuche beweisen — nur unvollständig abläuft und so zu starken Gitterstörungen Anlaß gibt.

### Schlußwort.

Wir haben in dem vorstehenden Überblick über die Entwicklung der Erkenntnis über das Wesen des Ferromagnetismus scheinbar sehr

<sup>1</sup> Bei kleinen Remanenzen kennt man noch wesentlich größere Koerzitivkräfte, beispielsweise bei den POTTERSchen Ag-Mn-Al-HEUSLER-Legierungen (71), bei Fe-Nd- (28) und Fe-Ag-Legierungen (93), die alle rund 5000 Ø erreichen. Es ist dabei jedoch zu beachten, daß es sich bei diesen großen Koerzitivkräften meist um diejenigen Feldstärken handelt, die man zum Vernichten der Magnetisierungsintensität  $\mathfrak{S}$ , nicht — wie technisch üblich — der Induktion  $\mathfrak{B}$  aufwenden muß. Bei kleinen Remanenzen können die  $\mathfrak{H}_c$ -Koerzitivkräfte auf Bruchteile der  $\mathfrak{H}_c$ -Koerzitivkräfte absinken, z. B. bei der von H. H. POTTER (l. c.) angegebenen Koerzitivkraft von  $\mathfrak{H}_c = 5640 \text{ Ø}$  auf  $\mathfrak{H}_c = 460 \text{ Ø}$ ; vgl. dazu z. B. H. NEUMANN (66).

verschiedenartige Gebiete der Forschung nebeneinandergestellt, die auf den ersten Blick wenig oder nichts miteinander gemein haben, es sei denn den Begriff des „Ferromagnetismus“. Bei näherem Hinsehen erweist sich aber das Band, das alle 5 Abschnitte zusammenfaßt, doch als stärker als nur eine Begriffsbestimmung.

„Ferromagnetismus“ ist keine Eigentümlichkeit des Momentes, hat also nichts mit dem Bau des Einzelatoms schlechthin zu tun, wie etwa der Unterschied zwischen Dia- und Paramagnetismus. Er ist vielmehr eine Eigentümlichkeit einer *Vielheit* von Atomen und der *Ausrichtbarkeit* der Atommomente, ist also einerseits ein ausgesprochenes Problem der *Orientierung* der Momentachsen und andererseits der *Kristallgitter*beschaffenheit. Diese beiden miteinander wechselseitig verknüpften Gedanken der Spinorientierung und des Gitterbaus ziehen sich als verbindender roter Faden durch alle fünf nebeneinander gestellten Kapitel.

Auf der einen Seite hat der Begriff der Wechselwirkung, der die Orientierung benachbarter Spinmomente bestimmt, den Begriff des Ferromagnetismus aufgeweitet, indem er ihn mit dem temperaturunabhängigen Paramagnetismus in Verbindung brachte, auf der andern Seite hat er Licht auf das Wesen des „Molekularfeldes“ geworfen und schließlich die gitterbedingte Orientierung der Spinmomente im symmetrischen Gitter in ihrer Abhängigkeit von den Abweichungen von der Gittersymmetrie beleuchtet. Erst an wenigen Stellen ist es der Forschung gelungen, die Gesetzmäßigkeiten, die die Orientierung der Spinmomente im Kristallgitter bestimmen, aufzudecken. Vieles, allzuviel bleibt noch zu tun. Überblickt man aber die Fortschritte der letzten Jahre, so kann man hoffen, daß auch der Zukunft weitere Erfolge beschieden sein werden, die das Verständnis der wellenmechanischen Bedingtheit der Spinorientierung im Metallgitter immer klarer erkennbar hervortreten lassen werden.

#### Literaturverzeichnis.

1. AKULOV, N. S.: Z. Physik **52**, 389 (1928); **54**, 582 (1929); **57**, 249 (1929); **59**, 254 (1930); **64**, 817 (1930); **66**, 533 (1930); **67**, 794 (1931); **69**, 78 (1931).
2. — Z. Physik **64**, 559 (1930).
3. AUWERS, O. v.: MÜLLER-POUILLETs Lehrbuch der Physik, II. Aufl., Bd. 4, Teil 4, S. 770. 1934.
4. — Naturwiss. **23**, 202 (1935).
5. — Wiss. Veröff. Siemens-Werke **15**, H. 2, 112 (1936).
6. — Wiss. Veröff. Siemens-Werke **16**, H. 2 (1937). Im Druck.
7. — Unveröffentlicht.
8. — u. H. KÜHLEWEIN: Ann. Physik (5) **17**, 107, 121 (1933).
9. — u. H. NEUMANN: Wiss. Veröff. Siemens-Werke **14**, H. 2, 93 (1935).
10. BECKER, R.: Z. Physik **62**, 253 (1930).
11. — u. M. KERSTEN: Z. Physik **64**, 660 (1930).
12. BITTER, F.: Physic. Rev. (2) **39**, 337, 371 (1932).



13. BOZORTH, R. M.: *Physic. Rev.* (2) **46**, 232 (1934).
14. — and J. F. DILLINGER: *Physics* **6**, 285 (1935).
15. — — and G. A. KELSALL: *Physic. Rev.* (2) **45**, 742 (1934).
16. BURGERS, W. G. u. J. L. SNOEK: *Z. Metallkde* **27**, 160 (1935).
17. DAHL, O.: *Z. Metallkde* **28**, 133 (1936).
18. — u. F. PAWLEK: *Z. Physik* **94**, 504 (1935).
19. — u. J. PFAFFENBERGER: *Z. Metallkde* **25**, 244 (1933). — *Z. techn. Physik* **15**, 99 (1934). — *Metallwirtsch.* **13**, 527, 543, 559 (1934).
20. — — u. N. SCHWARTZ: *Metallwirtsch.* **14**, 655 (1935).
21. — — u. H. SPRUNG: *Elektr. Nachr.techn.* **10**, 317 (1933).
22. DARWIN, C. G.: *Proc. Cambridge philos. Soc.* **27**, 86 (1931).
23. DEHLINGER, U.: *Z. Physik* **96**, 620 (1935).
24. — *Z. Physik* **96**, 620 (1935). — *Z. Elektrochem.* **41**, 657 (1935).
25. — *Z. Elektrochem.* **41**, 657 (1935). — *Z. Metallkde* **28**, 116 (1937).
26. DILLINGER, J. F. and R. M. BOZORTH: *Physics* **6**, 179 (1935).
27. DORFMAN, J.: *Nature (Lond.)* **130**, 506 (1932). — *Physik. Z. Sowjetunion* **3**, 398 (1933).
28. DROZZINA, V. and R. JAANUS: *Nature (Lond.)* **135**, 37 (1936).
29. EILENDER, W., A. FEY u. A. GOTTWALD: *Stahl u. Eisen* **54**, 564 (1934).
30. FALLOT, M.: *C. r. Acad. Sci. Paris* **199**, 128 (1934); **194**, 1803 (1932). — *Diss. Straßburg* 1935.
31. FORRER, R.: *J. Physique et Radium* (7) **1**, 325 (1930).
32. — *J. Physique et Radium* (7) **4**, 109 (1933).
33. FRENKEL, J.: *Z. Physik* **49**, 31 (1928).
34. FRIEDERICH, E. u. A. KUSSMANN: *Physik. Z.* **36**, 185 (1935).
35. GANS, R.: *Ann. Physik* (5) **15**, 28 (1932).
36. — u. J. v. HARLEM: *Ann. Physik* (5) **16**, 162 (1933).
37. GERLACH, W.: *Physik. Z.* **26**, 914 (1925). — *Z. Physik* **38**, 828 (1926).
38. GLOCKER, R., H. PFISTER u. P. WIEST: *Arch. Eisenhüttenwes.* **8**, 561 (1934/35).
39. GOSS, N. P.: *Trans. amer. Soc. Metals* **22**, 1138 (1934); **23**, 521 (1935).
40. GRAF, L. u. A. KUSSMANN: *Physik. Z.* **36**, 544 (1935).
41. GRIES, H. u. H. ESSER: *Arch. Elektrotechn.* **22**, 145 (1929).
42. HEISENBERG, W.: *Z. Physik* **49**, 619 (1928).
43. HONDA, K., Y. MASHIYAMA and S. KAYA: *Nature (Lond.)*, 29. Mai 1926. — *Sci. Rep. Tohoku Univ.* (1) **15**, 721 (1926).
44. — H. MASUMOTO and Y. SHIRAKAWA: *Sci. Rep. Tohoku Univ.* (1) **24**, 391 (1935).
45. KAYA, S. u. A. KUSSMANN: *Z. Physik* **72**, 293 (1931).
46. KELSALL, G. A.: *Physics* **5**, 169 (1934).
47. KERSTEN, M.: *Z. techn. Physik* **12**, 668 (1931).
48. — *Z. techn. Physik* **15**, 249 (1934). — *Wiss. Veröff. Siemens-Konz.* **13**, H. 3, 1 (1934).
49. KLEMM, W.: *Z. angew. Chem.* **48**, 617 (1935).
50. KÖSTER, W.: *Arch. Eisenhüttenwes.* **6**, 17 (1932/33). — *Z. Elektrochem.* **38**, 549 (1932). — *Stahl u. Eisen* **53**, 849 (1933).
51. — *Z. Metallkde* **22**, 294 (1930).
52. — *Arch. Eisenhüttenwes.* **4**, 145 (1930/31).
53. — *Arch. Eisenhüttenwes.* **7**, 257 (1933/34).
54. KÜHLEWEIN, H.: *Wiss. Veröff. Siemens-Konz.* **10**, H. 2, 71 (1931).
55. KUSSMANN, A. u. B. SCHARNOW: *Z. Physik* **54**, 1 (1929).
56. — — u. W. S. MESSKIN: *Stahl u. Eisen* **50**, 1194 (1930).
57. LANDAU, L.: *Z. Physik* **64**, 629 (1930).
58. LICHTENBERGER, F.: *Ann. Physik* (5) **15**, 45 (1932).
59. LIPPERT, T. W.: *Iron Age* **135**, 25 (1935).

60. MAHAJANI, G. S.: Proc. Cambridge philos. Soc. **23**, 136 (1926). — Philos. Trans. Lond. (A) **228**, 63 (1929).
61. MARIAN, V.: Diss. Straßburg 1936. — Ann. Physique (11) **7**, 459 (1937).
62. MCKEEHAN, L. W.: Physic. Rev. (2) **23**, 783 (1924); **26**, 274 (1925); **36**, 1670 (1930). — J. Franklin Inst. **202**, 737 (1926).
63. MISHIMA, T.: Iron Age **130 II**, 346 (1932). — Ohm, Juli 1932. — Aciers spéc. **8**, 84 (1933).
64. NÉEL, L.: Diss. Straßburg 1932. — Ann. Physique (10) **18**, 5 (1932).
65. NEUMANN, H.: Metallwirtsch. **14**, 778 (1935).
66. — Arch. Techn. Mess. J 66—3 (1935); Z 912—1 (1937); Arch. Elektro-techn. **31** (1937). Im Druck.
67. — A. BÜCHNER u. H. REINBOTH: Z. Metallkde **29**, 173 (1937).
68. PAULI, W.: Z. Physik **41**, 81 (1927).
69. PÖLZGUTER, F.: Nickel-Ber. **5**, 3 (1935).
70. POSENER, L.: Z. Physik **75**, 809 (1932).
71. POTTER, H. H.: Philos. Mag. (7) **12**, 255 (1931).
72. PREISACH, F.: Elektr. Nachr.techn. **9**, 334 (1932).
73. ROGERS, B. A.: Metals Alloys **4**, 69 (1933, Mai).
74. RUDER, W. E.: Trans. amer. Soc. Metals **22**, 1123 (1934).
75. SADRON, CH.: C. r. Acad. Sci. Paris **193**, 1070 (1931). — Diss. Straßburg 1932. — Ann. Physique (10) **17**, 371 (1932).
76. SELJESATER, K. S. and B. A. ROGERS: Trans. amer. Soc. Steel Treat. **19**, 567 (1931/32).
77. SHIH, J. W.: Physic. Rev. (2) **46**, 139 (1934); **50**, 379 (1936).
78. SIX, W., J. L. SNOEK en W. G. BURGERS: De Ingenieur **49**, E 199 (1934).
79. SIZOO, G. J.: Z. Physik **56**, 649 (1929); **57**, 106 (1929).
80. SLATER, J. C.: Physic. Rev. (2) **35**, 509 (1930); **36**, 57 (1930).
81. SNOEK, J. L.: Physica **2**, 403 (1935); **3**, 118 (1936).
82. STONER, E. C.: Philos. Mag. (7) **15**, 1018 (1933). — Magnetism and Matter, p. 432. London 1934.
83. SWINNE, R.: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. **7**, H. 2, 85 (1929).
84. TAKÉUCHI, T.: Proc. physic.-math. Soc. Jap. **13**, 267 (1931).
85. TELLER, E.: Z. Physik **67**, 311 (1931).
86. VALENTINER, S. u. G. BECKER: Z. Physik **93**, 795 (1935).
87. VOGT, E.: Erg. exakt. Naturwiss. **11**, 323 (1932).
88. — Ann. Physik (5) **18**, 771 (1933). — Z. Metallkde **27**, 40 (1935). — Z. angew. Chem. **48**, 734 (1935).
89. WASMUHT, R.: Arch. Eisenhüttenwes. **5**, 49 (1931/32).
90. WASSERMANN, G.: Z. Metallkde **28**, 262 (1936).
91. WEISS, P.: J. Physique (4) **6**, 661 (1907). — Arch. Sci. phys. nat. (4) **31**, 401 (1911).
92. WOLF, A.: Z. Physik **70**, 519 (1931).
93. ZUMBUSCH: Stahl u. Eisen **55**, 860 (1935).

# Die Kristallstrukturbestimmung organischer Verbindungen.

Von **H. MARK** und **F. SCHOSSBERGER**, Wien.

Mit 43 Abbildungen.

<b>Inhaltsverzeichnis.</b>		Seite
Einleitung . . . . .		184
Definition der Elementarzelle . . . . .		184
I. Die röntgenographischen Aufnahmeverfahren . . . . .		185
1. Die DEBYE-SCHERRER-Methode . . . . .		185
2. Die Drehkristallmethode . . . . .		187
3. Die Röntgengoniometer . . . . .		188
WEISSENBERG-Goniometer . . . . .		188
SCHIEBOLD-SAUTER-Goniometer . . . . .		191
4. Das LAUE-Verfahren . . . . .		193
5. Das Faserdiagramm . . . . .		193
Tabellenübersicht der einzelnen Aufnahmeverfahren und deren Anwendung . . . . .		195
II. Die Intensitäten der Röntgeninterferenzen . . . . .		194
1. Der Polarisations- oder THOMSON-Faktor . . . . .		194
2. Der LORENTZ-Faktor . . . . .		194
3. Der Strukturfaktor . . . . .		194
4. Der Atomformfaktor . . . . .		196
5. Der DEBYESCHE Temperaturfaktor . . . . .		196
6. Die Absorption . . . . .		197
7. Der Häufigkeitsfaktor . . . . .		198
8. Der photographische Wirkungsfaktor . . . . .		198
9. Die Intensitätsformel . . . . .		198
III. Übersicht über den Gang einer Strukturbestimmung . . . . .		199
IV. Die Messung der Intensitäten der reflektierten Strahlung . . . . .		200
Ionisation an Gasen . . . . .		200
Das Zählrohr . . . . .		202
Photographische Intensitätsmessung . . . . .		203
V. Methoden der Strukturparameterbestimmung aus Intensitäts- messungen . . . . .		205
a) trial and error Methode . . . . .		205
b) FOURIER-Analyse . . . . .		205
VI. Ergebnisse der Strukturbestimmung . . . . .		210
1. Amylammoniumchlorid . . . . .		210
2. Paraffine . . . . .		210
3. Carboxylgruppe . . . . .		211
4. Kohlehydrate . . . . .		211
5. Guadoniumbromid und Guadoniumjodid . . . . .		213
6. Benzol . . . . .		213
7. p-Dichlor, p-Dibrombenzol . . . . .		213
8. Hexachlorbenzol . . . . .		214

	Seite
9. Durol 1, 2, 4, 5 sym. Tetramethylbenzol . . . . .	215
10. Resorcin . . . . .	217
11. Benzochinon . . . . .	218
12. p-Dinitrobenzol . . . . .	219
13. Dibenzyl . . . . .	219
14. Anthracen . . . . .	220
15. Naphtalin . . . . .	221
16. Chrysen . . . . .	221
17. Cyanursäuretriacid . . . . .	222
18. Phtalocyanine . . . . .	223
19. Das Steringerüst . . . . .	224
20. Hochpolymere . . . . .	225
a) Kautschuk . . . . .	225
b) Cellulose . . . . .	226
c) Teilchengröße . . . . .	226
d) Riesenperioden . . . . .	227
e) Proteine . . . . .	228
Literaturverzeichnis . . . . .	234

**Einleitung.** Die Bedeutung der Röntgenstrahlinterferenzen für die Arbeit des organischen Chemikers ist erst einige Jahre nach der Entdeckung v. LAUEs offenbar geworden und es war das Verdienst SIR W. H. BRAGGs, daß er als erster diesen Effekt bei der Untersuchung organischer Kristalle nutzbar gemacht hat. Ursprünglich wurden unter Verzicht auf eine vollständige Strukturbestimmung einfache Gesetzmäßigkeiten homologer und isomerer Verbindungen gesucht, und gefunden, daß gewissen Atomkonfigurationen z. B. dem Benzolkern oder der  $\text{CH}_2$ -Gruppe eine bestimmte, in allen Verbindungen gleichbleibende Größe und Form zukommt. In der Folgezeit hat sich daraus die Anschauung einer konstanten Raumbeanspruchung der Atome entwickelt, nach welcher den in der organischen Chemie vorkommenden Hauptvalenzen stets gleiche Atomabstände entsprechen.

Das Hauptproblem der Röntgenstrukturanalyse ist die Bestimmung der Atomlagen im Elementarkörper des Kristalls, wobei unter Elementarkörper eine regelmäßige räumliche Anordnung von Atomen verstanden wird, die durch gesetzmäßige Wiederholung das Rauggitter erzeugt. Da fast alle organischen Verbindungen in niedrig symmetrischen Kristallsystemen kristallisieren, gelingt es nicht, die Atome im Elementarkörper *allein* mit Hilfe der geometrischen Strukturtheorie festzulegen, so wie es bei vielen anorganischen und intermetallischen Verbindungen möglich war. Bei Substanzen mit komplizierten Molekülen bleibt immer eine große Zahl von „Parametern“ zu bestimmen, was eine ausführliche Intensitätsdiskussion der Röntgeninterferenzen notwendig macht.

Die Elementarzelle der meisten organischen Kristalle enthält nur wenige Moleküle und die Untersuchungen des Chemikers laufen darauf hinaus, die relative Anordnung und Lage der Atome zu erforschen, während die Strukturanalyse mit Röntgenstrahlen quantitative Aussagen

über die Elektronenverteilung und über die interatomaren Abstände machen will, nicht nur innerhalb ein und desselben Moleküls, sondern auch innerhalb des kleinen Raumes, den die Elementarzelle einnimmt. Für die Behandlung dieses Problems ist es notwendig, daß man von einem ungefähren Modell der Struktur ausgeht, das sich aus der chemischen Strukturformel und aus dem optischen und magnetischen Verhalten des Kristalls ergibt. Die optische (magnetische) Anisotropie eines Moleküls ist eng mit seiner Gestalt verknüpft, so daß lange Moleküle optisch positiv, flache Moleküle negativ und runde oder kompakte Moleküle quasi-isotrop erscheinen. Wenn nun die Moleküle im Kristall parallel gepackt sind, so erscheint das optische Verhalten des Moleküls und das des Kristalls als das gleiche. Seltener tritt der Fall ein, daß die Molekülachsen in einer Ebene liegen, so daß sich der Charakter umkehrt. Unter Zuhilfenahme der wahrscheinlichsten Atomabstände und Valenzwinkel werden dann die Atomkoordinaten solange geändert, bis eine hinreichende Übereinstimmung zwischen den experimentell gefundenen und den berechneten Intensitäten gefunden wird (*trial and error-Methode*). So wertvoll die angedeutete Methode der Strukturbestimmung ist, so führt sie doch nicht zu genauen bis in die Einzelheiten reichende Aussagen.

Weniger allgemein anwendbar, aber direkt zu den Atomlagen führend ist die zuerst von COMPTON angewandte FOURIER-Analyse. Mit ihrer Hilfe bekommt man auf analytischem Wege aus den gemessenen Intensitäten der Reflexionen direkt die Ladungsdichte in jedem Punkte des Gitters. Voraussetzung dieser Methode ist eine absolute Intensitätsmessung der Interferenzen, die von W. H. und W. L. BRAGG als Messung der Ionisationswirkung der Röntgenstrahlen entwickelt wurde. Die Eigenart der Analyse bringt es dabei mit sich, daß man die Ladung kontinuierlich verteilt erhält und in praktischen Fällen begnügt man sich mit der Projektion der gesamten Ladung in eine Ebene oder betrachtet sie in Schichten parallel zu einer Gittergeraden. Die Anwendung erfordert eine bereits weitgehende Kenntnis der Struktur und dient deshalb vorteilhaft zur genaueren Bestimmung der Atomkoordinaten und zur Verfeinerung des nach der vorher erwähnten Methode erhaltenen Bildes.

Die folgenden Ausführungen sind von dem leitenden Gesichtspunkte getragen, dem an Kristallstruktur interessierten organischen Chemiker eine Übersicht der praktischen Verfahren und der hauptsächlichsten Ergebnisse auf diesem Gebiete zu verschaffen.

## I. Die röntgenographischen Aufnahmeverfahren.

Die Entwicklung von Hochspannungsapparaten und Röntgenröhren ist in der letzten Zeit zu einem gewissen Abschluß gelangt, so daß sie hier nicht näher zu behandeln sind. Anders liegen die Dinge bei den Aufnahmekameras.

**1. Das Verfahren nach DEBYE-SCHERRER und HULL.** Das von DEBYE und SCHERRER (1) und gleichzeitig von HULL (2) angegebene

Verfahren besteht darin, daß ein Kristallpulver von regellos durcheinander liegenden Kriställchen in einen parallelen monochromatischen Röntgenstrahl gebracht wird; die auftretenden reflektierten Strahlen, die für eine mit Atomen belegte Netzebene auf dem Mantel eines Kegels liegen, werden dann auf einem zylindrischen Film abgebildet. Bei der Untersuchung organischer Substanzen hat es sich als zweckmäßig erwiesen, wegen der relativ schwachen Reflexionsintensität und der damit verbundenen langen Belichtungszeit dieser Kristalle die Kamera zu evakuieren, um die an der Luft gestreuten Röntgenstrahlen zu vermeiden und außerdem den Film nicht mehr in seiner ganzen Breite an der Innenwand eines Metallzylinders aufliegen zu lassen, um so unter Vermeidung von Streustrahlung der Metallwand klarere Diagramme zu erhalten. Die Vermessung des Abstandes zweier korrespondierender Linien, die die Schnittkurve des reflektierten DEBYE-SCHERRER-Kegels mit dem Filmzylinder darstellen, liefert, wenn der Durchmesser der Kamera  $2r = 360/\pi = 57,3$  mm ist, den Winkel  $4\vartheta$  direkt in Graden. Die so erhaltenen  $\vartheta$ -Werte bedürfen dann verschiedener Korrekturen, die bedingt sind durch Meßfehler, Absorption innerhalb des Präparats, Exzentrizität des Präparats, schiefer Einfall des Primärstrahles gegen die Präparatachse, unrunder Querschnitt des Filmzylinders und Filmschrumpfung.

Die Absorption der Röntgenstrahlen im Präparat beeinflußt sowohl die Lage und Schärfe als auch die Intensität der Reflexionen. Bei starker Absorption sind die Innenringe des DEBYE-SCHERRER-Diagramms stark geschwächt und schmaler, so daß ihre Durchmesser bis zu 1 mm kleiner als bei schwach absorbierenden Substanzen gemessen werden. Im allgemeinen tritt bei organischen Substanzen starke Absorption nicht auf, weil es sich hier um die relativ wenig absorbierenden Verbindungen der Elemente C, H, Cl, N handelt, so daß für die meisten Fälle die Anwendung der HADDING-Korrektur (2a)

$$2b_{\text{Korr}} = 2b - \varrho (1 \pm \cos 2\vartheta) \quad \text{je nachdem} \quad 2\vartheta \leq 90^\circ \quad (1)$$

genügt, wo  $b_{\text{Korr}}$  und  $b$  den auf Absorption korrigierten und unkorrigierten gemessenen Linienabstand im DEBYE-SCHERRER-Diagramm und  $\varrho$  den Durchmesser des Präparates bedeuten. Die Korrekturen der anderen Fehler werden erhalten, wenn man der zu untersuchenden Substanz einen Eichstoff (Steinsalz, Quarz, MgO, Silber) zumischt, und durch Vergleichen der gut bekannten Reflexionswinkel der Eichstoffe mit den gemessenen Abständen auf dem Film eine Eichkurve gezeichnet werden kann. Zur Indizierung, d. h. zur Zuordnung der einzelnen Interferenzen zu den Netzebenen, die zur Reflexion gelangten, ist die Aufstellung „einer quadratischen Form“ notwendig, die für jede Netzebene mit den Indices  $(hkl)$  den Netzebenenabstand  $d$  liefert, wenn  $abc$  und  $\alpha\beta\gamma$  die Kantenlängen und die Kantenwinkel der Elementarzelle bekannt sind. Es gilt dann für den allgemeinen Fall  $1/d^2 = f_1 h^2 + f_2 k^2 + f_3 l^2 +$

$f_4 h k + f_5 k l + f_6 h l$ , wo  $f_1, f_2 \dots$  Funktionen von  $a b c$  und  $\alpha \beta \gamma$  sind. Im rhombischen Kristallsystem, wo  $a, b, c$  verschieden und  $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$  sind, ist z. B.

$$\frac{1}{d^2} = \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2}.$$

Aus der BRAGGSchen Reflexionsgleichung

$$n \lambda = 2 d \sin \vartheta \quad (2)$$

erhält man

$$\sin^2 \vartheta = \frac{\lambda^2}{4} (f_1 h^2 + f_2 k^2 + f_3 l^2 + f_4 h k + f_5 k l + f_6 h l), \quad (3)$$

wenn  $\lambda$  die Wellenlänge und  $\vartheta$  der Inzidenzwinkel ist. Die Indizierung des Diagramms einer kubischen Substanz gelingt leicht mit Hilfe der kubischen quadratischen Form durch Probieren. Für tetragonale, rhombische, hexagonale und rhomboedrische Kristallsysteme werden mit Vorteil die graphischen Verfahren [HULL und DAVEY (3)] angewandt. Die Indizierung niedrigsymmetrischer Substanzen nach dem DEBYE-SCHERRER-Verfahren ist schwierig, wenn nicht unmöglich, seine Bedeutung für die organische Strukturanalyse erscheint dadurch verringert. Das Verfahren behält jedoch seine Bedeutung in den Fällen, wo es darauf ankommt, genaue Gitterkonstanten oder Teilchengrößen zu bestimmen. In Abb. 1 ist die Ausführung einer solchen Kamera im Schnitt gezeichnet.

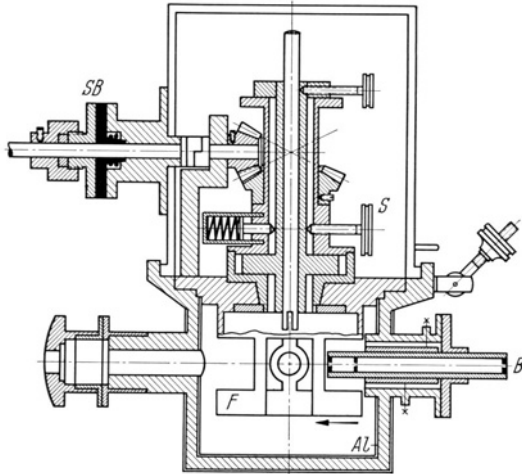


Abb. 1. DEBYE-SCHERRER-Vakuumkamera.

Bei  $F$  befindet sich der Film, der in der Mitte frei und an seinen beiden Längsrändern am Metallzylinder durch Gummibänder gehalten wird. In der Zeichnung ist der Filmzylinder, der besseren Sichtbarkeit halber, um  $90^\circ$  von rechts nach links in der Pfeilrichtung gedreht gezeichnet. Das Präparat kann durch die Schraube  $S$  zentriert und durch die Stopfbüchse  $SB$  und Welle im Vakuum um seine eigene Achse gedreht werden. Bei  $B$  tritt durch eine Blende der Röntgenstrahl ein. Die Innenwand der Kamera ist mit Aluminiumblech ausgekleidet und an dem der Blende entgegengesetzten Teil kann der Röntgenstrahl die Kamera ungehindert verlassen.

Bei  $F$  befindet sich der Film, der in der Mitte frei und an seinen beiden Längsrändern am Metallzylinder durch Gummibänder gehalten wird. In der Zeichnung ist der Filmzylinder, der besseren Sichtbarkeit halber, um  $90^\circ$  von rechts nach links in der Pfeilrichtung gedreht gezeichnet. Das Präparat kann durch die Schraube  $S$  zentriert und durch die Stopfbüchse  $SB$  und Welle im Vakuum um seine eigene Achse gedreht werden. Bei  $B$  tritt durch eine Blende der Röntgenstrahl ein. Die Innenwand der Kamera ist mit Aluminiumblech ausgekleidet und an dem der Blende entgegengesetzten Teil kann der Röntgenstrahl die Kamera ungehindert verlassen.

**2. Die Drehkristallmethode.** Auch die Herstellung des Drehkristalldiagramms, das so entsteht, daß ein Einkristall im Röntgenstrahl

gedreht wird und der Reflex einer gerade in Reflexionsstellung befindlichen Netzebene auf einen zylindrischen Film aufgefangen wird, hat sich in den letzten Jahren in seiner experimentellen Technik nicht wesentlich

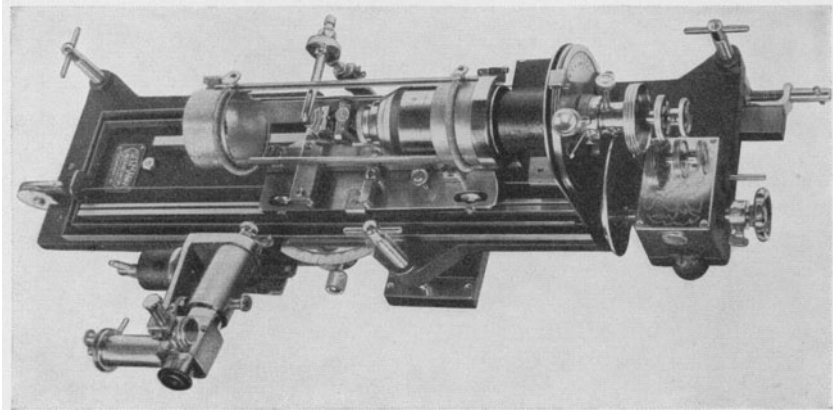


Abb. 2. Das Röntgengoniometer nach WEISSENBERG-BÖHM.

geändert. Die große praktische Bedeutung dieser „Schichtliniendiagramme“ liegt darin, daß man eine direkte Messung der Kantenlängen der Elementarzelle des Gitters erhält und außerdem Drehdiagramme um verschiedene Richtungen des Kristalls vorteilhaft zur Ermittlung der Translationsgruppe verwendet werden können (s. S. 199).

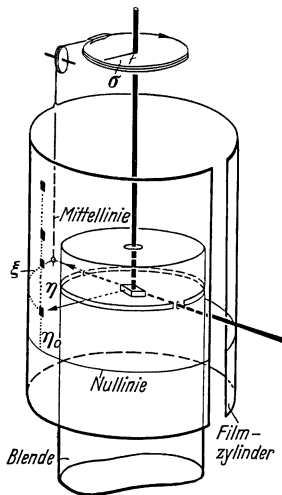


Abb. 3. Schematische Darstellung der WEISSENBERG-Kamera. (SEEMANN.)

**3. Die Röntgengoniometer.** Ein weiterer Fortschritt in der Technik des Röntgendiagramms ist durch die Ausbildung von Röntgengoniometern erzielt worden, deren Grundgedanke dahin geht, daß eine zwangsläufige Koppelung der Kristalldrehung mit einer Längsbewegung des Films stattfindet.

Die Bewegung des zylindrischen Films wird durch eine Schraubenspindel und mit Hilfe von Kegelrädern so mit der Drehung des Kristalls gekoppelt, daß  $1^\circ$  Kristalldrehung 1 mm Filmbewegung entspricht. Durch eine Blende, die als Metallzylinder mit einem Schlitz ausgebildet ist und längs der Drehachse verschiebbar angebracht ist, können

Reflexionen nur einer Schichtlinie zur Aufnahme gelangen. Zur Einstellung höherer Schichtlinien ist die Primärstrahlblende senkrecht zur Richtung der Drehachse schwenkbar. Die Abb. 3 zeigt schematisch das



Zustandekommen des WEISSENBERG-Diagramms. Das Diagramm, das so entsteht (Abb. 4), unterscheidet sich von einer Drehkristallaufnahme dadurch, daß die dort auf einer Linie verteilten Interferenzpunkte auf

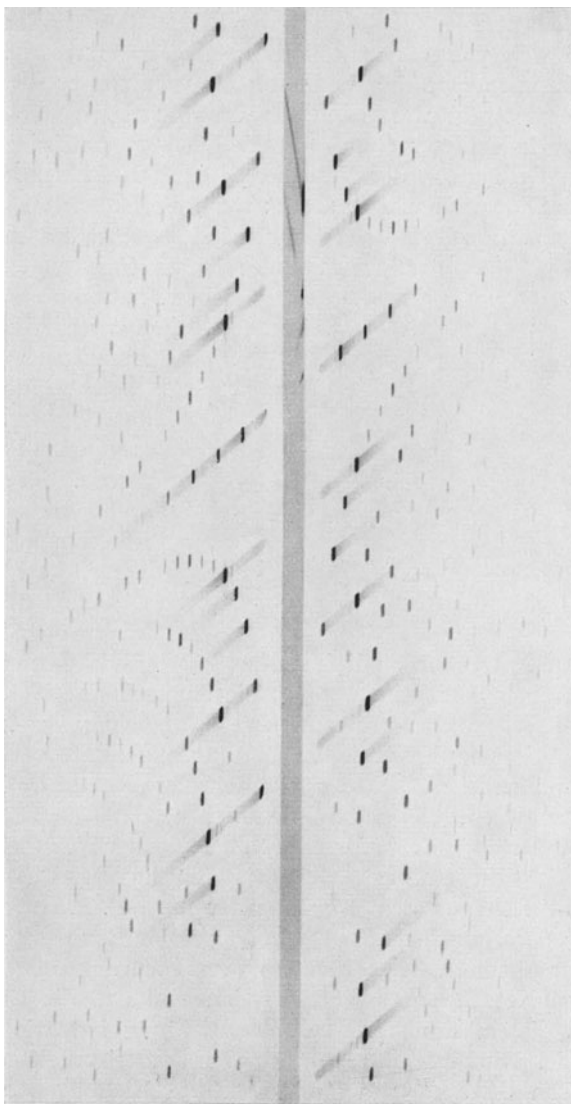
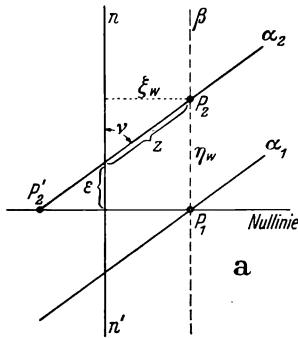


Abb. 4. WEISSENBERG-Aufnahme eines Gallensäurekristalls.

eine Fläche verteilt werden und sich so Reflexionen verschiedener Netzebenen nicht mehr überdecken.

Der aufgerollte Film zeigt als Mittellinie ein breites schwarzes Band, das durch den direkten Strahl hervorgerufen wird. Charakteristisch für

dieses Diagramm ist, daß bei Äquatoraufnahmen um  $[001]$  die Interferenzen  $(h k 0)$ ,  $(\bar{h} \bar{k} 0)$  und deren verschiedene Ordnungen auf Geraden liegen, die außerdem noch oft durch die kontinuierliche Schwärzung hervorgehoben werden. Diese Schräglinien sind zur Mittellinie um einen Winkel  $\nu$  geneigt. Die auf ihnen liegenden Reflexe sind auf beiden Seiten gleich weit von der Mittellinie entfernt, wenn es sich um ein Äquatorschichtliniendiagramm handelt oder wenn unter dem Schichtlinienwinkel eingestrahlt wurde und das Kristallgitter eine rechtwinkelige Zelle besitzt. Jede dieser Geraden bildet den geometrischen Ort der verschiedenen Ordnungen der Reflexionen einer Netzebene. Zur Indizierung dieses Diagramms ist zu sagen: wenn die Drehachse gleichzeitig Kante der Elementarzelle ist, so ist der auf diese Achse bezügliche Index



dann 0, wenn es sich um eine Äquatoraufnahme handelt, er ist 1 bzw. 2, wenn man die erste bzw. zweite Schichtlinie vor sich hat. Durch

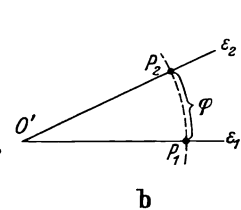


Abb. 5 a und b. Zur Auswertung von WEISSENBURG-Aufnahmen (5).

Aufnahmen mehrerer Schichtlinien liefert das WEISSENBURG-Diagramm die Kristallsymmetrie. Bei der graphischen Indizierung des Diagramms, die den Vorteil hat, sofort eine Übersicht über die vor-

kommenden Indices der reflektierenden Netzebene zu liefern, handelt es sich darum, aus den Interferenzen einer Schichtlinie sofort die dazugehörige Netzebene des reziproken Gitters zu konstruieren. Die Einführung des „reziproken Gitters“, dem keine physikalische Realität zukommt, vermeidet gewisse Umständlichkeiten bei der Betrachtung geometrischer Fragen der Strukturanalysen, die dadurch entstehen, daß die Röntgeninterferenzen eine Beschreibung des Kristallgitters nach Netzebenen, die Strukturtheorie dagegen nach Gitterpunkten liefert. Das „reziproke Gitter“ ergibt sich aus dem Kristallgitter nach P. P. EWALD (4) dadurch, daß jeder Netzebene  $(h k l)$  ein Punkt im Raum so zugeordnet wird, daß der Abstand dieses Punktes vom Ursprung umgekehrt proportional dem Netzebenenabstand  $d_{hkl}$  ist, und daß die Gerade vom Ursprung zu diesem Punkt die gleiche Richtung hat wie die Netzebenennormale. Die Beziehungen der Größen des Kristallgitters zu denen des „reziproken Gitters“ sind durch Vektorengleichungen so gegeben, daß die beiden Vektorensysteme zueinander reziprok sind. Die Vereinfachung der Rechnung durch Konstruktion des „reziproken Gitters“ aus dem Röntgendiagramm ist besonders bei schiefwinkelligen Gitterzellen groß. Zur Umzeichnung werden die schrägen Verbindungslinien der einzelnen Interferenzpunkte gezeichnet (Abb. 5) und der Abstand ihres

Schnittpunktes mit der Mittellinie des Films von einem willkürlich gewählten Nullpunkte aus gemessen ( $\varepsilon$  in mm). Auf den schrägen Linien werden die Abstände zweier zusammengehöriger Reflexe gemessen ( $2Z$  in mm).

Diese schiefwinkligen Koordinaten werden in Polarkoordinaten nach (4)

$$\varphi^\circ = \varepsilon \frac{360^\circ}{\eta_{360}} \quad (4)$$

und

$$\xi = 2 \sin \frac{360^\circ \cos \nu}{\eta_{360}} \cdot Z \quad (5)$$

transformiert. Die Steigung der schrägen Verbindungslinie ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{4 \pi r_{\text{Film}}}{\eta_{360}}, \quad (6)$$

wo  $r_{\text{Film}}$  der Radius des Films und  $\eta_{360}$  die Verschiebung des

Filmzylinders in Millimeter, während einer Kristalldrehung um  $360^\circ$  bedeuten.

Für jeden Wert von  $\varphi$  zeichnet man den Leitstrahl der diesen Winkel mit einer beliebigen Nullrichtung einschließt und trägt darauf die Größe  $A = K \xi$  auf, wo  $K$

eine Maßstabkonstante zur Umzeichnung ist ( $K = 20 \text{ \AA} \cdot \text{cm}$ ). Für höhere Schichtlinien ist

$$\xi = 2 \sin \frac{\varphi_R}{2} \cdot \sin \varrho_R, \quad (7)$$

wo

$$\varphi_R = 2Z \frac{\cos \nu \cdot 360^\circ}{\eta_{360}} \quad \text{und} \quad \varrho_R = 90^\circ - \mu,$$

wenn der Primärstrahl gegen die Drehachse um den Winkel  $90^\circ - \mu$  geneigt ist. Die so erhaltenen Punkte stellen eine Netzebene des „reziproken Gitters“ dar. Die Werte von  $\xi$  können aus einer Tabelle entnommen werden (5), ohne sie punktweise konstruieren zu müssen. Es sind in der Folge besondere Ablesevorrichtungen (Raster) zur Umzeichnung von WEISSENBERG-Diagrammen konstruiert worden, die die Auswertung wesentlich vereinfachen (6).

Eine andere Ausführung des Röntgengoniometers bildet das SCHIEBOLD-SAUTER-Goniometer (7). Hier wird ein zum Primärstrahl

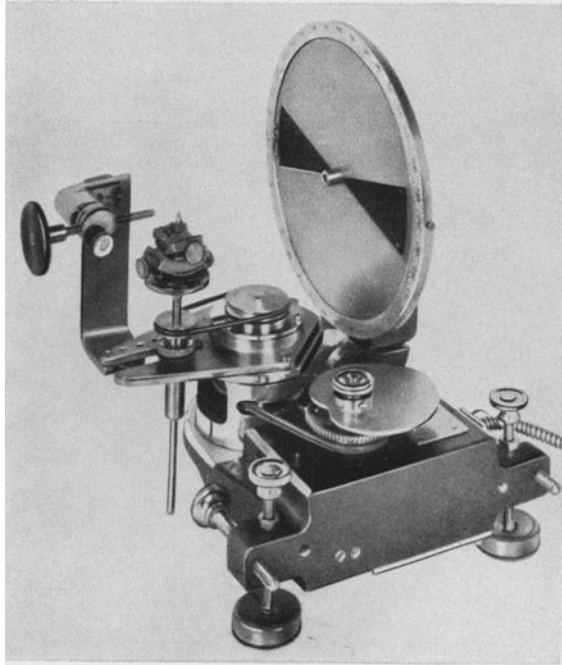


Abb. 6. Das SCHIEBOLD-SAUTER-Goniometer. (SEEMANN.)

senkrechter oder auch um  $45^\circ$  geneigter Film mit gleicher Geschwindigkeit wie der Kristall gedreht. Eine Schlitzblende in einem Metallzylinder läßt nur die eine Hälfte einer Schichtlinie hindurch. In der Abb. 6 ist der Metallzylinder abgenommen und nicht dargestellt.

Am Außen- und Innenmantel des Zylinders liegen Filme, so daß gleichzeitig eine Drehkristallaufnahme hergestellt werden kann. Um den Kristall unter dem Schichtlinienwinkel bestrahlen zu können, kann das Blendenrohr gegen die Kristalldrehachse bis zu  $60^\circ$  verstellt werden. Die große

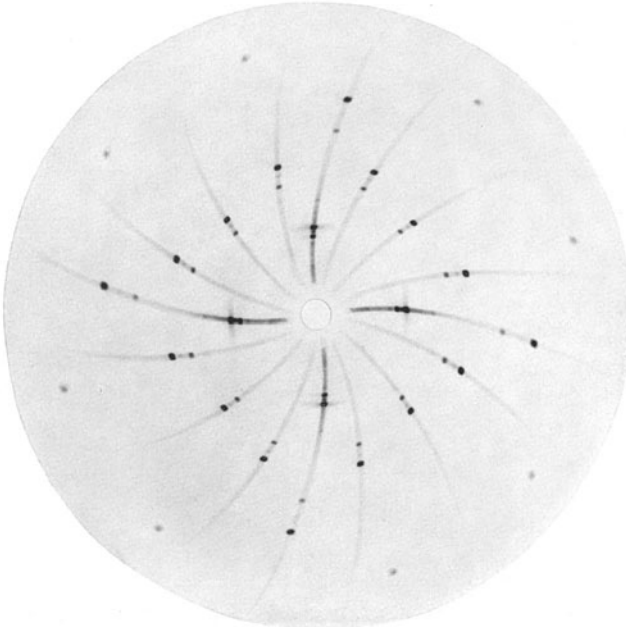


Abb. 7. Schichtebendiagramm des Äquators von Harnstoff. [Nach SAUTER (7a).]

Scheibe trägt den Film für Goniometeraufnahmen und rotiert mit gleicher Winkelgeschwindigkeit wie der Kristall und ist um die Kristallachse schwenkbar und um  $45^\circ$  neigbar gegen die Primärstrahlrichtung angebracht. Steht die Aufnahmescheibe senkrecht zum Primärstrahl und ist die Äquatorschichtlinie ausgeblendet, so liegen die Reflexe auf Spiralen, die ihren Ausgang vom Mittelpunkt des Diagramms nehmen, und die Reflexionen verschiedener Ordnungen derselben Netzebene darstellen. Der Abstand  $r$  eines Reflexes vom Mittelpunkt ist  $r = A \operatorname{tg} 2\vartheta$ , wo  $A$  der Abstand der Drehachse vom Bildmittelpunkt bedeutet. Das Azimut  $\varphi$  auf dem Diagramm ist proportional  $\vartheta$ , während  $r$  proportional  $\operatorname{tg} 2\vartheta$  ist, also rascher zunimmt, so daß auf diese Weise die Spiralkurven zustande kommen (Abb. 7).

Das so entstandene Diagramm kann als eine in Polarkoordinaten übertragene WEISSENBERG-Aufnahme aufgefaßt werden. Gegenüber dem

WEISSENBERG-Diagramm hat es den Vorzug, daß die Elementarzellen des „reziproken Gitters“ direkt auf der Aufnahme erscheinen, wenn auch verzerrt. Dieses Verfahren wird daher häufig als selbstindizierendes Drehkristallverfahren bezeichnet. Das SCHIEBOLD-SAUTER-Diagramm liefert sofort einen Überblick über die reflektierenden Netzebenen und die Anzahl der gleichzeitig aufgezeichneten Reflexe kann durch eine Neigung der Aufnahmescheibe um  $45^\circ$  (SAUTER) gegen den Primärstrahl erhöht werden.

**4. Das LAUE-Verfahren.** Dieses Aufnahmeverfahren, das entwicklungsmäßig an erster Stelle der hier aufgezählten Aufnahmefethoden stehen sollte, setzt einen einzelnen Kristall in ein Bündel weißen Röntgenlichts (d. h. Licht mit verschiedenen Wellenlängen). Die Reflexe des LAUE-Bildes zeigen dieselbe Symmetrie wie die kristallographische Symmetrie der Durchstrahlungsrichtung mit der Einschränkung, daß auf das Fehlen oder Vorhandensein eines Symmetriezentrums nicht geschlossen werden kann. Das Diagramm erlaubt von den 32 verschiedenen Kristallklassen 11 Gruppen zu unterscheiden und kann als Reflexprojektion der Netzebenen des Kristalls betrachtet werden, da jeder einzelne LAUE-Punkt die Spiegelung des Primärstrahls an einer bestimmten Netzebene darstellt (Anwendung s. S. 195).

**5. Das Faserdiagramm.** In einem vielkristallinen Haufwerk kann dann Anisotropie auftreten, wenn die einzelnen Kriställchen mit einheitlichem Gitter in einer bestimmten Weise geordnet sind. Solche Ordnungen liegen bei vielkristallinem Material vor, wenn es eine plastische Verformung erlitten hat oder können durch natürliches Wachstum (Textilfasern) entstanden sein. Die Anordnung der Kristallite in solchen Texturen ist keine vollkommene, d. h. bestimmte kristallographische Symmetrieelemente der Einzelkristalle haben zu der physikalisch ausgezeichneten Richtung des ganzen Haufwerks eine bestimmte Lage, die aber nicht streng eingehalten wird, sondern um einen gewissen Mittelwert schwankt. Bei Texturaufnahmen spielen zweierlei Ebenen eine besondere Rolle, solche, die annähernd senkrecht zur Faserachse verlaufen, daher nicht zur Reflexion gelangen, „diatrophe“ Ebenen (POLANYI) genannt werden und die meist mit der Basisfläche des Elementarkörpers zusammenfallen, und Ebenen, die zur Zone der Faserachse gehören und auf den sog. Äquator reflektieren; sie heißen „paratrophe“ Ebenen. Das Faserdiagramm liefert an Stelle der beim DEBYE-SCHERRER-Verfahren auftretenden gleichmäßig geschwärzten Ringen ein Diagramm, dessen Schwärzungen an bestimmten Stellen der Ringe angehäuft sind, was daher kommt, daß sich in bestimmten Richtungen die reflektierten Strahlen der nahezu gleichorientierten Kriställchen addieren, dagegen finden sich keine oder nur wenige Kriställchen in solchen Lagen, daß die Strahlen nach den nichtgeschwärzten Ringstellen hin reflektiert werden würden. Seine Anwendung findet das Faserdiagramm hauptsächlich bei

der Erforschung von organischen Faserstoffen wie Cellulose, Eiweiß und Kautschuk usw.

Eine Übersicht über die Anwendbarkeit der beschriebenen Röntgenmethoden zeigt die Tabelle 1.

## II. Die Intensitäten der Röntgeninterferenzen.

Die Intensität der Röntgeninterferenzen ist von einer Reihe voneinander unabhängiger Faktoren bestimmt. Da für die eindeutige Strukturanalyse besonders mit Hilfe der FOURIER-Projektionen die Kenntnis absoluter Intensitäten notwendig ist, sollen die einzelnen Faktoren hier ausführlicher besprochen werden. Mit dem Beugungsvorgang des Röntgenlichts hängen unmittelbar die „inneren“ Intensitätsfaktoren zusammen, die den Strukturfaktor, den Atomformfaktor, den Polarisationsfaktor, den LORENTZ-Faktor und den DEBYESchen Temperaturfaktor enthalten. Nicht mit dem Beugungsvorgang verbunden sind die „äußeren“ Faktoren, die durch die Art der Registrierung der Intensitäten und durch die geometrischen Bedingungen des Strahlenganges hervorgerufen werden und die sich aus dem Häufigkeitsfaktor, Absorptionsfaktor und dem photographischen Wirkungsfaktor zusammensetzen.

**1. Der Polarisations- oder THOMSON-Faktor (P) (8).** Dieser Faktor muß wegen der Transversalität der Röntgenstrahlen besonders dann berücksichtigt werden, wenn die Primärstrahlung teilweise polarisiert ist (Monochromatisatoren), weil die senkrecht zueinander polarisierten Komponenten der Primärstrahlung nicht in gleicher Weise zur Auswirkung kommen. Es ist zu setzen

$$P = \frac{1 + \cos^2 2\vartheta}{2}, \quad (8)$$

wo  $2\vartheta$  den Winkel zwischen Primärstrahl und Streurichtung bedeutet.

**2. Der LORENTZ-Faktor (L) (8)** hat seine Ursache in dem Umstande, daß die Primärstrahlung einen gewissen Divergenzwinkel besitzt und ist von der angewandten Aufnahmetechnik abhängig. Für DEBYE-SCHERRER-Aufnahmen lautet er mit Einbeziehung des vorher genannten Polarisationsfaktors

$$L = \frac{1 + \cos^2 2\vartheta}{2 \sin^2 \vartheta \sin \vartheta}. \quad (9)$$

**3. Der Strukturfaktor (S) (8)** ist eine reine Gittereigenschaft und gibt die Schwächung der Interferenzen an, die dadurch entsteht, daß die gestreute Welle nicht an einem einzigen Atom in der Zelle entsteht, sondern auch noch die Phasenunterschiede der Streuwellen der verschiedenen Atome zu berücksichtigen sind. Die Intensität des reflektierten Strahles

$$I_s \text{ ist proportional } |S^2|, \quad (10)$$

wobei, weil  $S$  im allgemeinen eine komplexe Größe ist, der absolute Betrag einzusetzen ist. Der Strukturfaktor kann zahlenmäßig aus den

Tabelle I. Anwendung der Röntgenmethoden.

LAUE-Verfahren	Drehkristallverfahren		Pulververfahren		Goniometerverfahren nach WEISSENBURG, SCHUBOLD u. a.
	photometr.	ionometr.	photometr.	ionometr.	
Zulässige Kristallgröße	0,1 bis 0,01 cm	größer als 0,1 cm; natürliche oder angeschliffene Flächen	klein	< 0,1 cm	0,1 bis 0,01 cm
Zulässige Kristallsymmetrie	jede	jede; aber schwierig für nichtorthogonale Kristalle	nur vom rhombischen System aufwärts		jede
Zahl der beobachteten Reflexionen	sehr groß (einige hundert)	beliebig, aber langwierig und für manche Flächen schwierig; aber sicher	unter 40	sehr wenige	beliebig; wohl unterscheidbar
Indizierung	einfach und sicher	für manche Flächen schwierig, aber sicher	nur für niedrig indizierte Ebenen sicher		absolut sicher
Zur Bestimmung der geometrischen Gitter- parameter	unbrauchbar	genau	für wenige Flächen ziemlich genau, bei Überlagerungen unsicher		recht gut
Symmetrie- bestimmung	beste Methode	durch Intensitäts- schätzungen	unmöglich		gute Methode
Raumgruppen- bestimmung	indirekt und Irr- tümern ausgesetzt	sicher nur bei genügender Zahl von Ebenen	unmöglich bei niedriger Zahl von Ebenen		beste Methode
Genauigkeit der Intensitätsmessung	unzureichend; zuviel Korrek- turen notwendig	Standardmethode; aber Extinktionskorrekturen notwendig	beste photo- graphische Methode	sehr genau; we- nige Korrek- turen, aber be- schränkte An- wendbarkeit	recht gut, aber langwierig

Koordinaten der Atome in der Zelle berechnet werden und ist für die 230 Raumgruppen in den „Internationalen Tabellen zur Bestimmung von Kristallstrukturen“ enthalten (9). Es ist

$$S_0 = \sum f_0 \cdot e^{2\pi i \left( \frac{hx}{a} + \frac{ky}{b} + \frac{lz}{c} \right)}$$

und

$$\left. \begin{aligned} |S_0|^2 = & \left\{ \sum f_0 \cos 2\pi \left( \frac{hx}{a} + \frac{ky}{b} + \frac{lz}{c} \right) \right\}^2 + \\ & + \left\{ \sum f_0 \sin 2\pi \left( \frac{hx}{a} + \frac{ky}{b} + \frac{lz}{c} \right) \right\}^2, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

wo  $f_0$  der Atomformfaktor für ein Atom in  $xyz$  ist.

Die Kenntnis des Strukturformfaktors ist zur Lösung der eigentlichen Aufgabe der Röntgenstrukturanalyse, nämlich der Bestimmung der Parameter  $xyz$  der einzelnen Atome notwendig. Bei organischen Verbindungen kann die Zahl der Parameter oft dadurch eingeschränkt werden, daß ein mehrfach auftretender Atomkomplex als streuende Einheit aufgefaßt und dann unveränderlich beim Einbau in die verschiedenen Raumgitter angenommen werden kann, so daß die Angabe der Koordinaten des Schwerpunktes der Atomgruppe genügt.

**4. Der Atomformfaktor (F) (8).** Das Verhältnis der Amplituden der gestreuten Strahlung eines Atoms und der eines freien, klassisch streuenden Elektrons liefert den Atomformfaktor, der also die räumliche Ausdehnung des Atoms berücksichtigt. Die von den einzelnen Elektronen eines Atoms ausgehenden sekundären Wellen haben untereinander Phasendifferenzen, so daß in gewissen Richtungen Verstärkung oder Schwächung eintreten wird. Das atomare Streuvermögen hängt also außer von dem Aufbau des Atoms und von der eingestrahlten Wellenlänge  $\lambda$  noch von der Beobachtungsrichtung ab und wird bei kugelförmiger Ladungsverteilung als eine Funktion von  $\sin \vartheta/\lambda$  dargestellt. Diese  $f$ -Kurven sind von verschiedenen Forschern (HARTREE, PAULING, SHERMAN, THOMAS-FERMI) für alle Elemente rechnerisch und experimentell bestimmt worden (9).

Die für organische Strukturen wichtigen Atomformfaktoren für Diamant und Graphit sind in der folgenden Tabelle aufgenommen.

Tabelle 2.

$\frac{\sin \vartheta \cdot 10^{-8}}{\lambda}$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Diamant . . . .	6	5,35	4,25	2,85	2,10	1,75
Graphit . . . .	6	5,20	3,00	1,95	1,30	0,80

Bei Benzolderivaten werden die Werte von Graphit, bei aliphatischen Verbindungen, die Werte des Diamanten benutzt (S. 221).

**5. Der DEBYESche Temperaturfaktor (D) (9).** Für die später zu besprechende FOURIER-Analyse müssen die auf den Atommittelpunkt



bezogenen temperaturunabhängigen „wahren“ Atomformfaktoren benutzt werden, im Gegensatz zu den experimentell ermittelten „scheinbaren“ Atomformfaktoren. Da der Atomfaktor das Streuvermögen ruhender Atome angibt, also für den absoluten Nullpunkt gilt, erscheint bei höheren Temperaturen, wo die Atome Schwingungen um ihre Ruhelage ausführen, die reflektierte Intensität geschwächt. Diese durch die Wärmebewegung bedingte Aufrauhung der Netzebenen im Kristall schwächt die reflektierte Intensität um so stärker, je größer  $\vartheta$  ist. Die Intensität ist dann nicht dem Quadrat der Amplitude proportional, sondern dem Ausdruck

$$F^2 \cdot e^{-2M}. \quad (12)$$

Die Zusammenziehung des Strukturfaktors mit dem Atomformfaktor und dem DEBYE-Temperaturfaktor kann in der Form

$$|S \cdot F e^{-M}|^2 \quad (13)$$

vollzogen werden. Der Exponent im Temperaturfaktor [DEBYE und WALLER (9)] beträgt

$$M = \frac{6 h^2}{m k \Theta} \left( \frac{\sin \vartheta}{\lambda} \right)^2 \left( \frac{\Phi(x)}{x} + \frac{1}{4} \right), \quad (14)$$

wenn  $x = \Theta/T$  und wenn  $T$  klein gegen  $\Theta$

$$\frac{\Phi(x)}{x} = \frac{\pi^2}{6} \cdot \frac{T^2}{\Theta^2}.$$

- $h$  = PLANCKSches Wirkungsquantum,
- $m$  = Masse des Atoms,
- $k$  = BOLTZMANN-Konstante,
- $\Theta$  = charakteristische Temperatur.

Enthält das Gitter mehrere Atomarten, so wird der Temperaturfaktor eine Atom- und Gittereigenschaft, so daß eine genaue Berechnung selbst bei binären Verbindungen nur selten möglich wird und oft nur näherungsweise mit Mittelwerten der Atomnummer und des Atomgewichts gerechnet werden kann.

**6. Die Absorption (K) (8).** Legt der Primärstrahl im Präparat einen gewissen Weg zurück, so wird er erstens durch *Absorption* infolge photoelektrischer Emission und inkohärenter Streuung und zweitens durch *Extinktion* geschwächt.

Die primäre Extinktion tritt dadurch ein, daß durch Reflexionen des Primärstrahls an den Netzebenen eine die lineare Absorption übersteigende Schwächung auftritt. Bei organischen und unvollkommenen Einkristallen muß diese primäre Extinktion nicht berücksichtigt werden (s. S. 186), wohl aber die sekundäre Extinktion, eine Erscheinung, die bei Einkristallen mit Mosaikstruktur auftritt, d. h. bei Kristallen, die aus einer großen Anzahl von kleinen Gitterbereichen bestehen, die um kleine Winkelbereiche gegeneinander geneigt sind und an denen die Streuung stattfindet.

Experimentell kann die sekundäre Extinktion durch Messung des Reflexionsvermögens eines stufenweise auf geringe Dicke abgeschliffenen Kristalls erfolgen.

Die Wirkung der Absorptionsfaktoren übersteigt bei weitem sowohl die des DEBYESchen Temperaturfaktors als auch die des Atomformfaktors und wirkt diesen beiden entgegen. Die von den beiden Extinktionen verursachte scheinbare Erhöhung der linearen Absorption ist

$$\mu' = \mu + \alpha \bar{R},$$

wo  $\alpha$  eine von  $\bar{R}$  [vgl. Gl. (19)] unabhängige Konstante ist.  $\mu$  ist der Massenabsorptionskoeffizient.

**7. Der Häufigkeitsfaktor (H) (10).** Der Häufigkeitsfaktor (Flächenhäufigkeitszahl) gibt an, wieviel Reflexe bei einer vollen Umdrehung des Kristalls zusammenfallen. Je mehr Netzebenen nämlich mit dem gleichen Netzebenenabstand, Indicestripel  $(h \ k \ l)$  und dem gleichen Strukturfaktor vorhanden sind, um so größer ist die Zahl der Reflexionsstellungen dieser Ebene  $(h \ k \ l)$ . Für den einfachen kubischen Fall ist im DEBYE-SCHERRER-Diagramm die Flächenhäufigkeit der Würfebene  $\{100\}$  6, die der Oktaederebene  $\{111\}$  8, und nur von der Symmetrie des Gitters abhängig, weil das Pulverpräparat in der DEBYE-SCHERRER-Kamera alle möglichen regellosen Lagen hat.

Bei Drehkristallaufnahmen erfolgt ein Zusammenfallen von Interferenzen nur dann, wenn die Drehachse eine mehrzählige Symmetrieachse für den Netzebenenkomplex  $\{h \ k \ l\}$  ist, der Häufigkeitsfaktor also noch von der Richtung der Drehachse abhängig wird.

**8. Der photographische Wirkungsfaktor oder Schrägheitsfaktor (W)** ist dadurch bedingt, daß für verschiedene Werte des Winkels zwischen Filmnormale und dem reflektierten Strahl das Volumen der getroffenen und geschwärzten photographischen Schicht verschieden ist.  $W$  bewegt sich meist nahe 1, kann aber auch  $< 0,5$  werden und darf dann nicht vernachlässigt werden.

**9. Die Intensitätsformel.** Die Intensität  $I_s$  eines reflektierten Strahles kann also unter Zusammenfassung aller genannten Faktoren dargestellt werden als

$$I_s \text{ proportional } P \cdot L \cdot |S F e^{-M}|^2 \cdot K \cdot H \cdot W. \quad (15)$$

Sind Atome verschiedener Elemente in der Elementarzelle enthalten, so hat man an Stelle

$$|S F e^{-M}|^2$$

zu bilden

$$|S_1 F_1 e^{-M_1} + S_2 F_2 e^{-M_2} + S_3 F_3 e^{-M_3}|^2,$$

wobei die Strukturfaktoren  $S_1, S_2 \dots$  aus den Koordinaten der Atome der Elemente 1, 2 ... zu berechnen sind.

Die absolute Intensität des Interferenzstrahles für den Fall eines DEBYE-SCHERRER-Diagramms ist gegeben durch

$$\frac{I_1}{I_0} = \frac{l}{16 \pi r} \left( \frac{N e^2}{m c^2} \right)^2 \lambda^3 \cdot H V \frac{1 + \cos^2 2 \vartheta}{\sin 2 \vartheta \sin \vartheta} \cdot |S F e^{-M}|^2. \quad (16)$$

Für Drehkristallaufnahmen läßt sich eine ähnliche Formel aufstellen (9). In der Gleichung bedeuten

- $e = 4,774 \cdot 10^{-14}$  el.St.E.  
 $m = 8,999 \cdot 10^{-28}$  g,  
 $c = 2,9986 \cdot 10^{10}$  cm/sec,  
 $l$  = Höhe des ausgeblendeten Ausschnittes des DEBYE-SCHERRER-Ringes,  
 $z$  = Radius des Films,  
 $V$  = bestrahltes Volumen,  
 $N$  = Zahl der Gitterzellen in 1 ccm,  
 $I_0$  = Primärintensität,  
 $I_1$  = Intensität des beobachteten Interferenzstrahles.

### III. Übersicht über den Gang einer Strukturbestimmung.

1. Mit Hilfe von Drehkristallaufnahmen werden die Identitätsabstände auf den 3 Achsen ermittelt.

2. Aus den bekannten Achsen, der Dichte  $\rho$  und dem Molekulargewicht  $M$ , wird die Anzahl der in der Elementarzelle enthaltenen Atome  $Z$  durch

$$Z = \frac{\rho \cdot V}{M \cdot m_H} \quad (17)$$

erhalten, wo  $V$  das Volumen der Elementarzelle und  $M \cdot m_H$  die Masse eines Atoms ( $m_H = 1,650 \cdot 10^{-24}$  g) bedeutet.

3. Prüfung des Translationsgitters, d. h. jenes Gitters, das durch Verschiebung eines einzigen Atoms (Moleküls) in 3 nichtkomplanaren Richtungen erzeugt werden kann, auf Zentrierung. Diese Prüfung erfolgt durch die Bestimmung der Translationsperioden in verschiedenen nicht mit den Kristallachsen zusammenfallenden Richtungen.

4. Aufstellen einer Flächenstatistik, d. h. einer Statistik der Netzebenen, die reflektieren bzw. ausgelöscht sind. Dazu sind indizierte Drehkristall- oder besser WEISSENBERG-Goniometeraufnahmen notwendig.

5. Unter Umständen kann eine LAUE-Aufnahme Anhaltspunkte über die Kristallsymmetrie geben (s. S. 193).

6. Raumgruppendifkussion. Auf dem internationalen Kongreß zu Zürich im Jahre 1930 ist die von C. HERMANN (11) und C. H. MAUGUIN (12) aufgestellte und vereinfachte Raumgruppenbezeichnung als allgemein gültig angenommen worden. Dieses System bezeichnet mit 1, 2, 3, 4, 6 Drehachsen, mit 1, 2, ... Zähligkeit, mit  $\bar{1}$ ,  $\bar{3}$ ,  $\bar{4}$ ,  $\bar{6}$  Drehinversionsachsen, mit  $2_1$ ,  $3_1$ ,  $3_2$ ,  $4_1$ ,  $4_2$ ,  $4_3$ ,  $6_1$ ,  $6_2$ ,  $6_3$ ,  $6_4$ ,  $6_5$  Schraubenachsen.  $m$  bedeutet eine Spiegelebene und  $a b c$  Gleitspiegelebenen mit einer Translation von  $1/2$  parallel zu den  $a b c$ -Achsen.  $P$  bedeutet ein primitives Gitter,  $A$  ein flächenzentriertes Gitter in (1 0 0),  $B$  ein flächenzentriertes Gitter in (0 1 0),  $C$  ein flächenzentriertes Gitter in (0 0 1),  $I$  ein innenzentriertes Gitter,  $F$  ein allseitig flächenzentriertes Gitter,

$R$  ein rhomboedrisches und  $H$  und  $C$  ein hexagonales Gitter. So daß z. B.  $P 4 mm$  eine tetragonale Raumgruppe mit vierzähligen Achsen parallel zur Hauptachse, Spiegelebenen parallel  $(100)$ , und parallel  $(110)$  abwechselnd Spiegel- und Gleitebene bedeuten. Die Kombinationen von Symmetrieelementen bedingen meist neue Symmetrieelemente; unter einer Raumgruppe versteht man die Gesamtheit aller Symmetrieeoperationen die einen unbegrenzten Kristall mit sich zur Deckung bringen. Es ergeben sich im dreidimensionalen Raum 230 verschiedene Raumgruppen. Ihre Auswahl geschieht am besten in folgender Weise:

a) Einschränkung der Anzahl der Raumgruppen auf die einer bestimmten Kristallklasse, wenn diese aus kristallographischen Daten bekannt ist.

b) Auswahl der Raumgruppen, in denen die vorher bestimmte Translationsgruppe vorkommen kann.

c) Ausscheiden derjenigen Raumgruppen, die den beobachteten Auslöschungen der Röntgeninterferenzen nicht genügen. So wird z. B. durch Zentrierung eines einfachen Translationsgitters die Intensität gewisser Reflexionen gleich Null, während bei einfachen Translationsgittern jede beliebige Ebene  $(hkl)$  den Röntgenstrahl mit gleicher Intensität reflektiert. Man nennt diese Erscheinung *Auslöschung* und spricht von *Auslöschungsgesetzen* oder *Auswahlregeln*, die aus Tabellen zu entnehmen sind (9).

7. Nach Bestimmung der Raumgruppe werden die im Elementarkörper enthaltenen Atome auf die zur Verfügung stehenden Punktlagen unter Berücksichtigung der *Zähligkeit* verteilt. Unter *Zähligkeit* einer Punktlage ist jene Zahl verstanden, die angibt, wieviel gleichwertige Lagen eines Punktes in der Raumgruppe möglich sind. Bei der Durchführung dieser Aufgabe müssen besonders bei organischen Strukturen oft andere Gesichtspunkte mit herangezogen werden, die sich aus chemischen Überlegungen, aus den Werten der Atomradien und aus der Eigensymmetrie der Moleküle ergeben.

8. Am Ende werden die mit den beobachteten Intensitäten in Einklang stehenden Atomlagen und die damit zusammenhängenden Parameter der Atome bestimmt. Wenn die Punktlagen Freiheitsgrade besitzen [in „allgemeiner Lage“ die Atome in 3 Richtungen verschoben werden können oder in „speziellen Lagen“ (mit 2 Freiheitsgraden) auf einer Ebene, und (mit einem Freiheitsgrad) auf der Schnittlinie zweier Symmetrieebenen liegen], müssen die „Parameter“, d. h. die Abstände vom Eckpunkt der Zelle, bestimmt werden (s. S. 205).

#### IV. Die Messung der Intensitäten der reflektierten Strahlung.

1. **Durch Ionisation an Gasen.** Die ionisierende Wirkung der Röntgenstrahlen besteht darin, daß ihre Photonen durch Zusammenstöße mit Gasmolekülen Elektronen lostrennen, hierdurch Ionen erzeugen, und die so gebildeten Elektronen für sich wieder imstande

sind, das Gas zu ionisieren. Der zu messende Ionisationsstrom setzt sich aus der Gesamtheit der so gebildeten freien Ladungen zusammen und ist der Röntgenstrahlintensität proportional, wenn Sättigung erreicht ist, d. h. wenn die Spannung des elektrischen Feldes, innerhalb dessen die Ionenbildung stattfindet, groß genug ist, um sämtliche von der Strahlung erzeugten Ionen zu entfernen.

Die eigentliche Ionisationskamera (Abb. 8) befindet sich zwischen den durch einen gasgefüllten Zwischenraum getrennten Platten  $P_1$  und  $P_2$ . Die durch eine Blende eintretenden Röntgenstrahlen ionisieren dieses Gas und der infolge der angelegten Spannung  $V$  fließende Strom kann mit einem hochempfindlichen Galvanometer gemessen werden.

Die Verbindung der Ionisationskammer mit einem Spektrometer bildet den Ionisationsspektrographen, wie er von W. L. BRAGG und I. WEST (13) angewandt wurde (Abb. 9).

Der einfallende Primärstrahl wird zunächst an einem Kristall (NaCl) monochromatisiert und gelangt dann zu dem bis 60 cm entfernten zu untersuchenden Kristall, der drehbar auf einem Tisch angebracht ist. So wird erreicht, daß das Strahlungsfeld auf 1% gleichförmig ausgebildet ist, während die Konstanz der Strahlung durch eine konstante Gleichspannung gewährleistet sein muß und Strom und Spannung auf 0,2% genau gemessen werden. Das am DAVY-FARADAY-Laboratorium angewandte Ionisationsspektrometer besitzt eine Elektrometerröhre zur Verstärkung der kleinen Ionisationsströme und registriert die Stromaufzeichnungen auf einer Skala, bei der 1 mm ungefähr  $10^{-15}$  Ampere entsprechen. Das Füllgas der Ionisationskammer ist meist ein schweres Edelgas oder eine Edelgas Mischung, weil der Massenabsorptionskoeffizient mit der vierten Potenz der Ordnungszahl zunimmt und z. B. die Absorption der gleichen Primärstrahlung bei Argon 15mal so groß ist als bei Luft.

Ist der zu untersuchende Kristall allseits von Röntgenstrahlen umgeben („gebadet“), so setzt die Bestimmung des integralen Reflexionsvermögens  $\bar{R}$  die Kenntnis des streuenden Volumens voraus, das aus dem Volumen und der Dichte nach

$$N^2 V = \frac{\rho \cdot p}{M^2 m_H^2}, \quad (18)$$

wo  $N$  die Zahl der Gitterzellen in 1 ccm,  $V$  das bestrahlte Volumen,  $\rho$  die Dichte,  $M$  das Atomgewicht des Kristalls,  $m_H$  die Masse des Wasserstoffatoms und  $p$  das Gewicht des Stoffes bedeuten.

Das integrale Reflexionsvermögen  $\bar{R}$  ist eine reine Zahl und wird erhalten, wenn man den Kristall bei weit geöffneter Blende und mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  durch die ganze Reflexionsstellung hindurch

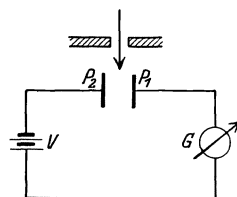


Abb. 8. Schema einer Ionisationsmessung (7a).

dreht und die während dieser Zeit beobachtete Entladung  $E$  des Elektrometers mißt,

$$\bar{R} = \frac{E \omega}{I}, \quad (19)$$

wenn  $I$  der Ionisationsstrom des Primärstrahlbündels ist und so bestimmt wird, daß man den gewogenen Kristall (0,1 mg) durch eine Blende von bekannter Flächengröße ersetzt und die in einer bestimmten Zeit hindurchgehende Strahlungsenergie bestimmt. Die Bestimmung des absoluten

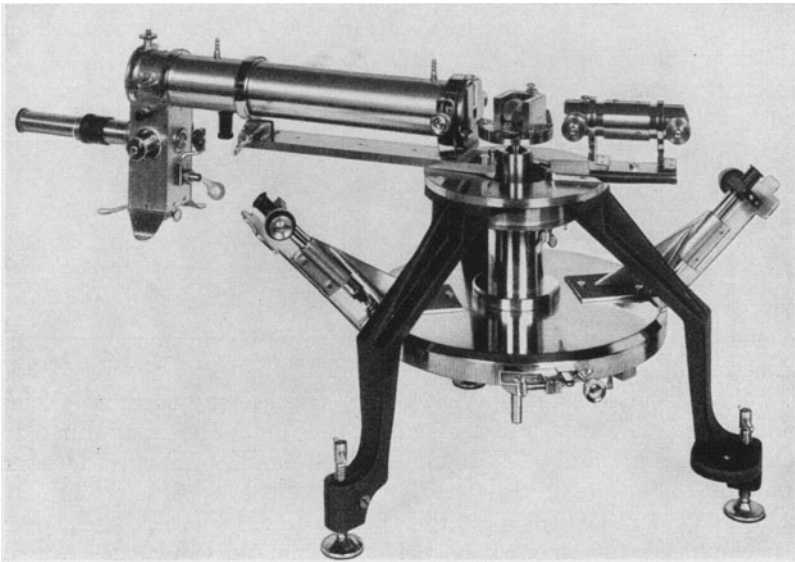


Abb. 9. Ionisationsspektrometer. (Nach SEEMANN.)

Reflexionsvermögens an Pulvern hat gegenüber der an Einkristallen vorgenommenen den Vorteil, daß die Korrekturen für Absorption und Extinktion (s. S. 197) viel genauer und leichter anwendbar sind. Die Gleichung (19) ist uneingeschränkt nur dann anwendbar, wenn die eingestrahlte Intensität an allen beugenden Atomen den gleichen Betrag besitzt — Vernachlässigung der Extinktion —, was selbst für kleine Kristalle nicht zutrifft. Als Beispiel für die Genauigkeit des aus dem Reflexionsvermögen für 2 verschiedene Wellenlängen ( $\lambda = 1,54$  und  $0,71 \text{ \AA}$ ) bestimmten Strukturfaktors sei der für die (001) Ebene des Anthracens erwähnt, welcher innerhalb der Fehlergrenzen auf 2% übereinstimmt (14).

**2. Das Zählrohr.** Das Zählrohr nach GEIGER und MÜLLER eignet sich zur Intensitätsmessung kurzweilliger Strahlung und ist der Ionisationskammer an Empfindlichkeit um Zehnerpotenzen überlegen (15). Es zählt die einzelnen Photonen durch die Anzahl der von den los-

gelösten Elektronen hervorgerufenen Stromstöße und ist in Abb. 10 schematisch dargestellt.

Der Apparat besteht aus einem zylindrischen Metallrohr und einem isoliert eingeführten Zähldraht. An diesen beiden Elektroden liegt eine konstante Gleichspannung von 12 bis 1400 V. Der Rohrinhalt ist Luft von ungefähr 50 mm Hg-Druck. Die Röntgenstrahlung tritt durch das Aluminiumfenster *S* ein und trifft zur Vermehrung der ausgelösten Elektronen auf das schalenförmige Blech *B* (Ag oder Pt). Die vom Zählrohr abgegebenen Stromimpulse werden über einen Schirmgitterverstärker verstärkt, der seinerseits ein Zählwerk steuert.

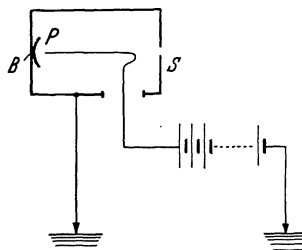


Abb. 10. Das Zählrohr (s).

**3. Die photographische Intensitätsmessung.** Am genauesten geschieht die quantitative Messung der Schwärzung des photographischen Films durch das integrierende Photometer (16). Ist die zu photometrierende Linie nicht scharf begrenzt, sondern unregelmäßig und von inhomogener Schwärzung, dann ist die Intensität durch das Integral der Schwärzung gegeben, dessen Bestimmung mit Hilfe eines Mikrophotometers ziemlich umständlich ist. Der Grundgedanke des integrierenden Photometers ist es, auf dem gleichen Film neben dem Diagramm auch eine kontinuierlich abgestufte Schwärzungsskala mitaufzunehmen. Diese Schwärzungsskala erhält man durch eine Vorbelichtung des Films mit einer Röntgenstrahlung, die einen Spalt durchsetzt, vor dem sich eine Scheibe von geeigneter Gestalt (logarithmische Spirale) dreht (Abb. 11).

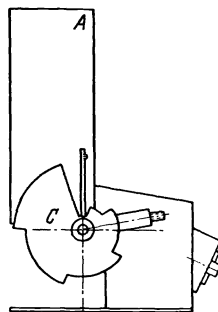
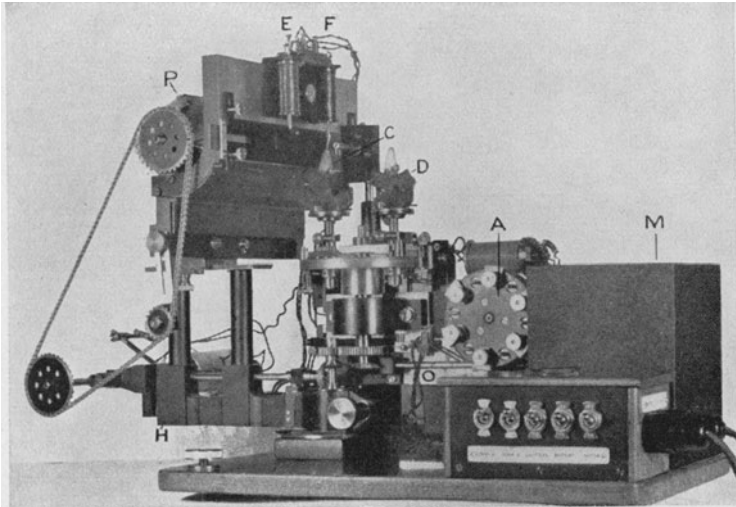


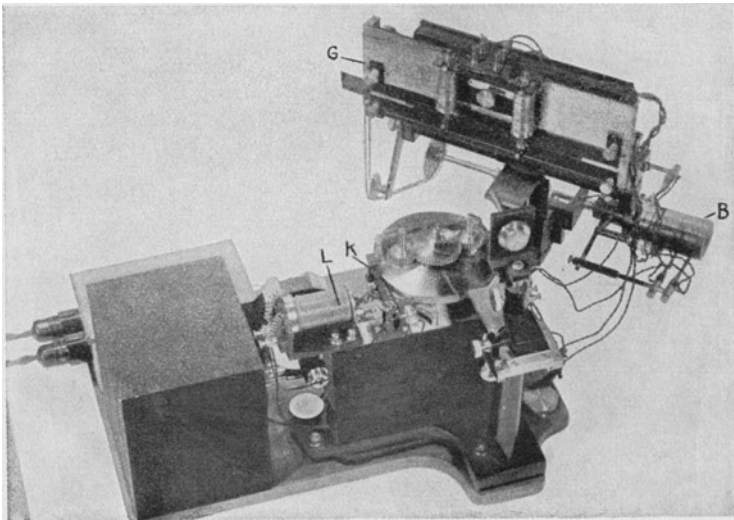
Abb. 11. Sektorenblende zur Erzeugung einer Schwärzungsskala (s).

Beide Teile des Films, der den Schwärzungsskeil und der das Diagramm enthält, werden gleichzeitig entwickelt, auseinandergeschnitten und getrennt unter 2 Photozellen betrachtet. Die beiden Photozellen befinden sich in Kompensationschaltung, so daß, soll der Galvanometerausschlag verschwinden, die Schwärzungsskala verschoben werden muß. Die Verschiebung der Schwärzungsskala bildet also ein lineares Maß der Röntgenstrahlintensität pro Flächeneinheit für den gerade zur Messung gelangenden Teil des Films. Mit Hilfe einer einfachen Addiervorrichtung werden die Intensitäten nacheinander summiert. Die Kompensation mit dem Schwärzungsskeil und die Addition zur Gesamtsumme geschieht in etwa 1 Sekunde, so daß ein Interferenzfleck von einigen Quadratmillimetern Ausdehnung in wenigen Minuten bestrichen werden kann. Das Zählwerk liefert die integrierte Schwärzung, die auf 1 bis 3% reproduzierbar ist.

Die photographische Bestimmung absoluter Intensitäten kann ferner durch eine Normierung der relativen Intensitäten mit Hilfe eines



a



b

Abb. 12a und b. Zweikristall-Spektrometer (17).

Eichwertes erfolgen, eine Methode, die von J. M. ROBERTSON ausgebaut wurde (17) (Abb. 12).

Der Apparat ist so gebaut, daß nur die Interferenzen des Äquators vermessen werden können und besitzt eine Vorrichtung, um den unter-



suchten Kristall und einen Standardkristall (Anthracen, Triphenylbenzol) abwechselnd in den Strahlengang zu bringen. Dabei kann die Intensität eines Reflexes durch längeres Verweilen des einen oder des anderen Kristalls verstärkt oder geschwächt werden, so daß starke Interferenzen des einen Kristalls mit schwachen des anderen verglichen werden können. Diese Spezialkamera hat ferner den Vorteil, daß man die photographisch registrierten Intensitäten in einer für die Messung mit einem integrierenden Photometer viel geeigneteren Form erhält, als aus einem Drehkristalldiagramm.

Zusammenfassend kann über die Messung der Röntgenintensitäten gesagt werden, daß für den genauen Vergleich einiger weniger Intensitäten und für absolute Messungen die Ionisationsmethode als die beste erscheint, während die photographische Methode leichter einen Überblick über die 200 bis 300 Reflexionen eines Kristalls liefert.

## V. Methoden der Strukturparameterbestimmung aus Intensitätsmessungen.

Als letztes Ziel einer Strukturanalyse hat die Bestimmung der Koordinaten  $x y z$  jedes einzelnen streuenden Atoms im Elementarkörper zu gelten. Es ist weiter oben gezeigt worden, wie auf Grund der systematischen Auslöschungen bestimmter Indiceskombinationen das Translationsgitter und die Raumgruppe ausgewählt werden können; nun gilt es, mit Hilfe des Strukturfaktors die Parameter der Atome zu bestimmen.

a) Zunächst werden unter den reflektierenden Netzebenen zwei ausgesucht, die möglichst verschiedene Intensität, aber ähnlichen Reflexionswinkel besitzen. Nun werden die Strukturfaktoren  $S_{hkl}$  und  $S_{h'k'l'}$  mit verschiedenen Parametern gerechnet, bis sich zwischen beobachteter und berechneter Intensität Übereinstimmung erzielen läßt [Gl. (15)]. Erst dann erfolgt die Prüfung der übrigen Intensitäten mit den gleichen Parametern. Die auf diese Weise erforschten Strukturen organischen Stoffe, deren Genauigkeit von der Feinheit der Intensitätsunterschiede abhängt, haben Bedeutung erlangt, weil sie eine Bestätigung der chemischen Strukturformel liefern, und zwar durch eine Analyse, welche von den Methoden des Chemikers gänzlich verschieden ist.

Die eben beschriebene Methode des Probierens (trial and error-Methode) kann aber eine bis in Einzelheiten gehende Darstellung nicht liefern; wünscht man genaue Angaben über eine komplizierte Struktur zu erhalten, dann muß man zur FOURIER-Analyse übergehen.

b) *Die Parameterbestimmung durch FOURIER-Analyse.* SIR WILLIAM BRAGG (18) hat schon 1915 darauf hingewiesen, daß sich, entsprechend der periodischen Struktur der Kristalle, die Dichte der streuenden Materie als eine dreidimensionale FOURIER-Reihe darstellen läßt, deren Koeffizienten durch die Intensitäten der Reflexionen bzw. durch die

äquivalenten Strukturamplituden der betreffenden Ebenen gegeben sind. An Stelle der Vorstellung von räumlich scharf lokalisierten Streuzentren (Elektronen im Atomverband) setzt die Wellenmechanik eine kontinuierlich über dem Elementarkörper verteilte Elektronendichte, deren Häufungsstellen sich in den Atomen befinden. Der allgemeine Ausdruck für die Elektronendichte als Funktion der Koordinaten  $x y z$  lautet:

$$\delta_{xyz} = \frac{1}{V} \left. \begin{aligned} &\sum_h \sum_k \sum_l S_{hkl} \sin \left( 2\pi h \frac{x}{a} - \alpha \right) \\ &\sin \left( 2\pi k \frac{y}{b} - \beta \right) \sin \left( 2\pi l \frac{z}{c} - \gamma \right), \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

wo  $S_{hkl}$  die Strukturamplitude der Ebene  $(h k l)$ ,  $V$  das Volumen der Elementarzelle mit den Kanten  $a b c$ , und  $\alpha \beta \gamma$  die Phasenkonstanten bedeuten.

Zur Anwendung dieser Methode der Darstellung einer Kristallstruktur ist aber, wie man aus der Formel ersieht, eine bereits weitgehende Kenntnis der Struktur erforderlich, und zwar:

1. Ordnungszahl, Anzahl und Atomformfaktoren der die Punktlagen besetzenden Atome.
2. Raumgruppe und Parameter (auch ungenau) für die Punktlagen mit Freiheitsgraden.
3. Relative oder besser absolute Intensitätswerte (womöglich auf sekundäre Extinktion korrigiert).

Liegen diese Zahlen vor, dann begnügt man sich wegen der Langwierigkeit der Rechnung, mit der Projektion von  $\delta$  auf *eine* Ebene, d. h. man berechnet die Verteilung in *einem* ebenen Querschnitt des Elementarkörpers. R. I. HAWIGHURST, W. L. BRAGG (18) und andere haben diese Gleichung (20) für den viel einfacheren zweidimensionalen Fall folgendermaßen geschrieben

$$\delta_{yz} = \frac{1}{V} \sum_k \sum_l S_{okl} \cos 2\pi \left( \frac{k y}{b} - \frac{l z}{c} \right). \quad (21)$$

Hier sind auf Grund der praktisch oft vorkommenden Symmetriezentren in der Struktur die Sinusglieder, die durch die Phasenkonstanten dargestellt werden, fortgefallen, so daß nur reelle Funktionen übrigbleiben.

Die praktische Durchführung geschieht so, daß man für eine genügend große Anzahl von Punkten die Dichten berechnet und gleiche Werte von  $\delta$  auf dem Projektionsraster durch Niveaulinien nach Art einer kartographischen Darstellung verbindet, so daß die Maxima sich gut abheben (s. Abb. 38). Um eine möglichst vollkommene Darstellung zu erhalten, müßte man auch die S-Werte der höchsten  $(h k l)$  mit heranziehen, die aber verschwindend klein werden. Ein vorzeitiges Abbrechen der Reihen dadurch, daß man sich nur auf die intensivsten Linien beschränkt, bewirkt das Auftreten von Minimalstellen mit negativem  $\delta$ , die natürlich keine physikalische Bedeutung besitzen. Die Koordinaten eines solchen „Gespenstes“ stehen mit den Koordinaten der realen Maxima in einem

durch die Symmetrieeoperationen der Raumgruppe bedingten Zusammenhang, in dem  $(x\ y)$  etwa in  $(y\ x)$  oder in  $(x + 1/2, y + 1/2)$  usw. übergeht. Wenn in der Formel die absoluten Werte der Strukturamplituden  $S$  auch bekannt sind, so sind doch ihre Vorzeichen noch unbekannt. Die Bestimmung des Vorzeichens von  $S_{0kl}$  setzt nun die Kenntnis einer wahrscheinlichen Struktur voraus, so daß eine absolute Bestimmung einer Kristallstruktur unabhängig von chemischen und anderen Kenntnissen vorläufig nur in einfachen Fällen möglich sein wird.

Die außerordentlich große Rechenarbeit, die bei der Auswertung solcher zweidimensionaler FOURIER-Reihen erwächst und in deren Verlauf bis zu 250000 Glieder berechnet werden müssen, hat dazu geführt, die Rechenoperationen zu vereinfachen, und zwar erstens durch geeignete Umformung der zweidimensionalen Reihen und zweitens durch Anwendung nomographischer und mechanischer Methoden. Die Umformung kann z. B. geschehen nach

$$\delta_{(x\ 0\ z)} = \sum \left[ \sum S_{(h\ k\ 0)} \cos 2\pi \frac{h y}{b} \right] \cos 2\pi \frac{h x}{a} - \sum \left[ \sum S_{(h\ k\ 0)} \sin 2\pi \frac{h y}{b} \right] \cdot \left. \begin{aligned} &\cdot \sin 2\pi \frac{h x}{a} \equiv \sum \left[ A \cos 2\pi \frac{h x}{a} - B \sin 2\pi \frac{h x}{b} \right], \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

wobei die eingeklammerten Summationen zuerst auszuführen und mit  $A$  und  $B$  bezeichnet sind. Hierdurch wird die Zahl der Glieder wesentlich reduziert und die Operation auf zwei einfachere Summationen zurückgeführt.

Der von J. M. ROBERTSON (19) konstruierte Rechenbehelf findet folgendermaßen Anwendung: Statt eine große Anzahl von Termen für einen Punkt auszurechnen, wird ein Term für verschiedene Punkte der Projektionsfläche

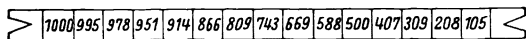


Abb. 13. Rechenbehelf zur FOURIER-Analyse (19).

berechnet und für jeden Punkt die Summation nach der Ausrechnung der verschiedenen Terme vorgenommen. Für die Rechnung ist es zweckmäßig, die Kristallachse in 60 Teile zu teilen und die Koordinaten dann in diesen Bruchteilen darzustellen. Z. B. ist  $x = n \cdot a/60$  und  $A = \cos hn6^\circ$ ,  $B = \sin hn6^\circ$ . Nun wird eine Tabelle hergestellt, welche die die Größe  $A = \cos hn6^\circ$  auf drei Dezimalen genau von 1 bis 1000 und  $hn$  von 1 bis 15 enthält. Die Zahlen werden auf Kartonstreifen aufgetragen, so daß am linken Ende des Streifens (Abb. 13) mit  $1000 \cos 0^\circ$ ,  $1000 \cos 6^\circ$ ,  $1000 \cos 12^\circ$  usw. begonnen wird und am rechten Ende  $1000 \sin 6^\circ$ ,  $1000 \sin 12^\circ$  usw. steht. Die Streifen werden auf einem Schieber montiert, dessen Endpunkt  $C$  mit einer Reihe von übereinanderliegenden Skalenstreifen für die einzelnen  $h$ -Werte so eingestellt werden kann, daß seine Lagen dem Produkt  $n \cdot h$  entsprechen und daß in dieser Stellung in den Fenstern (Abb. 14)  $F$ ,  $G$ ,  $H$  der numerische Wert von  $A \frac{\cos}{\sin} n \cdot h \cdot 6^\circ$  erscheint.

Die Skalenstreifen der einzelnen  $h$  tragen Marken mit dem einzustellenden  $n$  (1 bis 15). Der Schieber  $CE$  ist in Abb. 14 in 3 verschiedenen Stellungen  $C, C', C''$  gezeichnet, so daß auf ihm die Streifen der

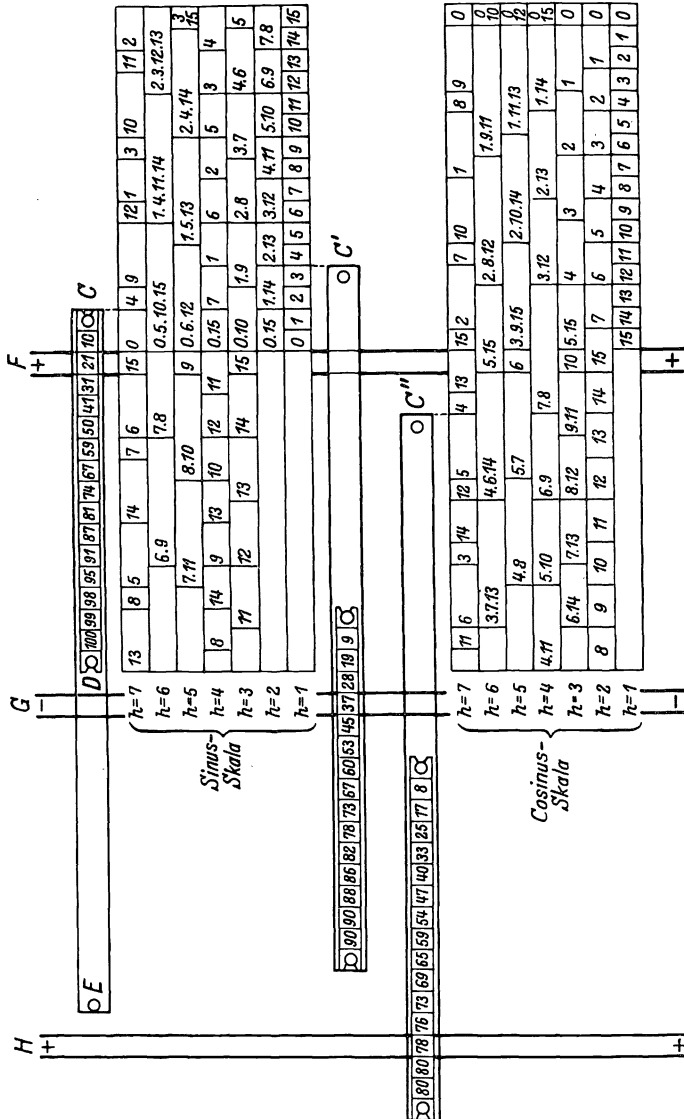


Abb. 14. Schematische Ansicht der Rechenmaschine (19).

verschiedenen  $A$  in zwei Lagen entweder zwischen  $C$  und  $D$  oder zwischen  $D$  und  $E$  befestigt werden können, je nachdem  $A \forall \circ$  ist. Der obere Teil stellt die Sinusskala  $h$  von 1 bis 7 und die untere Cosinusskala dar. Z. B. befindet sich der obere Streifen  $A = +100$  zwischen  $C$  und  $D$

auf der positiven Seite der Ablesung. Der Schieber ist innerhalb der Skala  $h = 7$  auf die Marke  $n = 4$  eingestellt und im Fenster  $F$  erscheint dann die Zahl  $+ 21 = + 100 \cdot \sin (7.4.6^\circ)$ . Die Gesamtanordnung nach J. M. ROBERTSON (19) zeigt Abb. 15.

Aus 2 oder 3 FOURIER-Projektionen nach verschiedenen Richtungen kann ein ziemlich genaues Bild des Moleküls, seiner Nachbarn und der

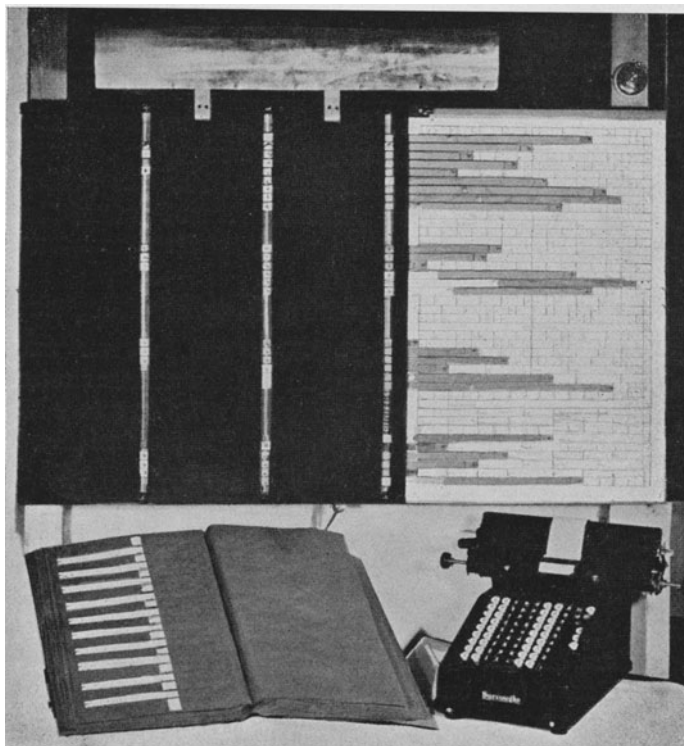


Abb. 15. Gesamtansicht der Rechenmaschine (19).

Winkel und Entfernungen zwischen den Zentren erhalten werden. Die berechneten FOURIER-Koeffizienten dieses vervollkommenen Modells können nun mit den experimentellen Daten verglichen werden und die allmähliche Annäherung kann, wenn es die Genauigkeit der Intensitätsmessung und die Geduld des Rechners zuläßt, wiederholt werden.

Aus der allgemeinen Intensitätsformel [Gl. (15)] ist zu ersehen, daß die Intensitätswerte nicht durch  $S$ , sondern durch  $S^2$  gegeben sind, so daß man auch Reihen mit  $S^2$  als Koeffizienten aufstellen kann, in derselben Weise, wie bei der gewöhnlichen FOURIER-Analyse. Die Reihen-summe ergibt dann Maxima, die nicht die Lage der interatomaren Abstände innerhalb der Struktur angeben, aber doch die Länge und Richtung der Fahrstrahlen dieser Maxima zum Ursprung. Bei komplizierteren

Strukturen ist die Anzahl der interatomaren Abstände so groß, daß nur die Abstände zwischen den schwersten Atomen erkennbar werden. Der Methode sind daher gewisse Grenzen gesetzt und sie führt manchmal zu weniger aufschlußreichen Resultaten, als es eine Analyse der allgemeinen Näherung tun würde. Sie hat jedoch den Vorteil, daß es gelingt, die experimentellen Tatsachen wirklich frei von sonstigen Hilfsmitteln direkt auf eine Parameterbestimmung hin auszuwerten.

Zusammenfassend ist zu sagen, daß die Anwendungsbereiche der Methode der FOURIER-Analyse von der Kenntnis einer ungefähr richtigen Struktur abhängen. Dieser Nachteil beeinflußt jedoch nicht den Wert des Endergebnisses, welches einmal erhalten, ebenso zuverlässig ist wie die zur Ausführung gelangte Intensitätsmessung selbst. Trotz der geschilderten Kunstgriffe ist die Rechenarbeit leider viel größer als die experimentelle Arbeit der Röntgenaufnahme und Intensitätsmessung und wird deshalb nur bei prinzipiell wichtigen Strukturen angewandt.

## VI. Ergebnisse der Strukturbestimmung organischer Stoffe.

1. Amylammoniumchlorid  $C_5H_{11}NH_3Cl$  (20). Pulver und Drehkristallaufnahmen bei Zimmertemperatur führten zu einer tetragonalen Zelle mit den Achsen  $a = 6,501 \text{ \AA}$  und  $c = 16,69 \text{ \AA}$ , mit 2 Molekülen im Elementarkörper. Interessant ist, daß Pulveraufnahmen bei der Temperatur der flüssigen Luft sehr ähnliche Diagramme, aber sehr verschiedene Intensitätsverhältnisse gegen das erste Diagramm und eine Vergrößerung der Zelle zu  $a = 7,0 \text{ \AA}$  und  $c \approx 16,6 \text{ \AA}$  mit 4 Molekülen ergaben, so daß bei Zimmertemperatur eine Rotation der Zickzack-Kette um ihre Längsachse angenommen werden muß, während bei der Temperatur der flüssigen Luft keine solche Drehung möglich ist. Im Gegensatz dazu hat das Octadecylammoniumchlorid  $C_{18}H_{37}NH_3Cl$  keine rotierenden Ketten (21) und die 4 Moleküle der rhombischen Zelle sind in Doppelschichten angeordnet.

2. Paraffine  $C_nH_{2n+2}$  (22). Die zwischen den Temperaturen der flüssigen Luft und dem Schmelzpunkt angestellten Versuche zeigen, daß die Zickzack-Ketten verschiedene Längen besitzen. Die  $a$ - und  $b$ -Achsen sind bei allen Substanzen die gleichen, dabei ist die thermische Ausdehnung von  $a$  erheblich größer als die von  $b$ . Man kann zwischen einer Hochtemperaturform mit größerem Netzebenenabstand und einer Tieftemperaturform mit kürzerem Netzebenenabstand unterscheiden. Die Paraffine mit einer geraden Anzahl von C-Atomen  $> 20$  gehören der Hochtemperaturform an, diejenigen mit einer Anzahl von C-Atomen  $= 18, 20$  (vielleicht auch 24) treten in beiden Formen auf, während die niedrigeren Glieder mit einer C-Atomezahl  $< 16$  bis 6 der Tieftemperaturform angehören.

Die normale Form der Paraffine wird durch eine prismatische Zelle mit rechteckigem Querschnitt dargestellt, in der die Ketten senkrecht

zur Basis verlaufen. In der Nähe des Schmelzpunktes schlägt die Struktur bei  $C_{21}H_{44}$ ,  $C_{22}H_{46}$ ,  $C_{23}H_{48}$ ,  $C_{24}H_{50}$ ,  $C_{25}H_{52}$ ,  $C_{26}H_{54}$ ,  $C_{27}H_{56}$ ,  $C_{29}H_{60}$  in eine hexagonale um, während die Glieder unterhalb  $C_{21}$  und über  $C_{29}$  schmelzen, bevor sie eine hexagonale Symmetrie erlangen. Bei  $C_{21}$  und  $C_{23}$  ändert sich  $a$  und  $b$  kontinuierlich mit der Temperatur.  $C_{24}$ ,  $C_{25}$ ,  $C_{26}$ ,  $C_{27}$ ,  $C_{29}$ ,  $C_{30}$ ,  $C_{31}$ ,  $C_{34}$ ,  $C_{44}$  haben dagegen einen scharfen Umschlagspunkt.

**3. Die Carboxylgruppe.** Die Konfiguration der Carboxylgruppe ist von W. H. ZACHARIASEN (23) in einer Struktur des Oxalsäuredihydrats bestimmt und von S. B. HENDRICKS (24) für andere Oxalate bestätigt worden. Für die Oxalatgruppe ist eine ebene Konfiguration mit einem Symmetriezentrum gefunden worden (Abb. 16).

Der C—C-Abstand ist  $1,59 \pm 0,07$ , der Abstand C—O in beiden Fällen  $1,25 \pm 0,05$  Å und der Winkel O—C—O beträgt  $126^\circ$ . Die beiden Sauerstoffatome sind jedoch strukturell nicht gleichwertig. Ihre Anordnung ist im Hinblick auf die Wassermoleküle verschieden. Da die Abstände zwischen den O-Atomen der Oxalatgruppe und den Wassermolekülen nur 2,87, 2,77 und 2,60 Å betragen, also wesentlich kürzer sind als bei den normalen intermolekularen Distanzen (3,5 Å), hat ZACHARIASEN vermutet, daß die Wassermoleküle die Oxalatgruppen durch eine Reihe von Hydroxylbindungen zu Ketten verbinden. Später haben J. D. BERNAL und H. W. MEGAW (25) gezeigt, daß es zwei Möglichkeiten dieser Bindung gibt, je nachdem  $O_1$  oder  $O_2$  zur Hydroxylgruppe gehören.

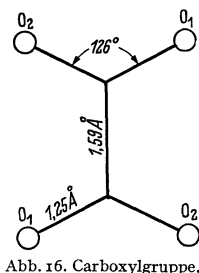
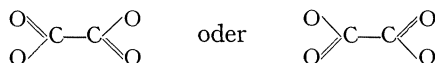


Abb. 16. Carboxylgruppe.



Es könnte aber auch möglich sein, und die Fehlergrenzen der Bestimmung lassen das auch zu, daß kleine Unterschiede in den C— $O_1$ - und C— $O_2$ -Abständen bestehen.

**4. Kohlehydrate.** Die Struktur der Zucker gehört zu den schwierigsten mit Röntgenstrahlen in Angriff genommenen Problemen, weil die Gestalt des Moleküls eine ganz andere ist als die im allgemeinen bei organischen Verbindungen gefundene und weil die optischen Messungen keine Anhaltspunkte zur Struktur geliefert haben. E. G. COX, T. H. GOODWIN und A. J. WAGSTAFF (27) haben aus einer Übersicht der Röntgendaten von 60 Substanzen und aus der Härte, dem Schmelzpunkt und der hohen Dichte der Kristalle geschlossen, daß die Kristallstruktur der Zucker in weitem Maße von den Hydroxylgruppen bestimmt wird, die nach allen Richtungen im Gitter die Moleküle verbinden, so daß auf den ersten Blick die Dimensionen der Elementarzellen der verschiedenen Verbindungen wenig Unterschiede zeigen. Es hat sich auch gezeigt, daß die Wechselwirkung zwischen den Molekülen in methylierten Zuckern gemildert wird.

Die Form des Moleküls muß in erster Linie von der stereochemischen Konfiguration des Pyranoseringes abhängig sein.

Abb. 17 läßt die „Sessel- und Wannenform“, wie sie in Cyclohexan-derivaten gefunden wurde, und den flachen Ring, den COX, beim  $\alpha$ -Methylglucosid diskutiert hat, erkennen. In diesem „flat“ Ring liegen die Kohlenstoffatome in einer Ebene und die Sauerstoffatome ein wenig außerhalb davon. Für die Hydroxylgruppen besteht bei der Sessel-

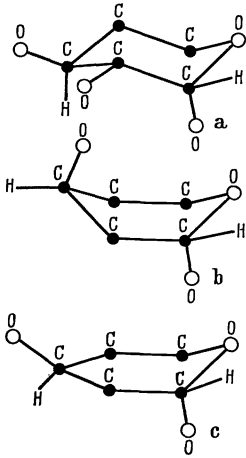


Abb. 17. Der Pyranosering.

und Wannenform die Möglichkeit in der Ebene oder senkrecht zu der Ebene des Ringes gebunden zu sein, so daß man für die zwei Lagen merklich verschiedene Dicken des Moleküls beobachten müßte. Für den flachen Ring bestehen diese Möglichkeiten nicht.

Die methylierten Zucker bilden häufig lange Kristallnadeln mit einer relativ kleinen Identitätsperiode in der Nadelachse von ungefähr 4,5 Å eine Größe, die nur die Dicke des Moleküls vorstellen kann. Nun ist die maximale Dicke beispielsweise für  $\alpha$ -Lactose 4,69, also etwas größer als die für  $\beta$ -Methylglucosid (4,4 bis 4,45), ein Resultat, das zeigt, daß Zucker mit verschiedenen Methylkonfigurationen nur sehr kleine Unterschiede in der Moleküldicke erfahren und ein flacher Ring vorliegt.

Die Elementarzellen von  $\beta$ -Methylarabinose,  $\alpha$ -Methylfucose und  $\alpha$ -Methylgalactose 6-Bromhydrin sind in der Tabelle 3 angegeben.

Tabelle 3.

$\beta$ -Methylarabinose	$\alpha$ -Methylfucose	$\alpha$ -Methylgalactose 6-Bromhydrin	
$d_{100}$	8,10	9,96	10,58
	7,74	7,87	7,81
$c$	5,89	5,72	$2 \times 5,62$

Die Beziehungen zwischen den drei Elementarkörpern bestätigen die Richtigkeit der aus chemischen und optischen Untersuchungen gewonnenen Konfiguration und beweisen außerdem das Vorliegen eines Pyranoseringes im  $\alpha$ -Methylfucosid.



5. **Guanidoniumbromid**  $\text{C}(\text{NH}_2)_3\text{Br}$  und **Guanidoniumjodid**  $\text{C}(\text{NH}_2)_3\text{J}$  (28). Diese beiden Verbindungen sind ein typisches Beispiel zweier chemisch verwandter Substanzen mit verschiedener Kristallstruktur. Es hat sich ja überhaupt in der organischen Strukturanalyse sehr häufig gezeigt, daß eine Einteilung nach Strukturtypen, wie sie bei den anorganischen Substanzen bevorzugt wird, keine großen Vorteile hat. Guanidoniumbromidkristalle haben rhombische Achsen mit  $a = 6,77 \pm 0,01$ ,  $b = 8,64 \pm 0,01$ ,  $c = 8,30 \pm 0,01$  Å. In dieser Elementarzelle sind 4 Moleküle enthalten. Die Raumgruppe ist  $Pmn\bar{2}$  und die 3 N-Atome besetzen die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks, in dessen Zentrum das C-Atom gelagert ist. Diese Ebenen liegen in den Gitterebenen  $(0\ 1\ 1)$  und  $(0\ \bar{1}\ 1)$ , und stehen nahezu senkrecht aufeinander. Daß die 2 Guanidoniumbromidionen nicht genau senkrecht zueinander stehen, ergibt sich auch aus einem kleinen optischen Achsenwinkel.

Hingegen kristallisiert Guanidoniumjodid hexagonal in der Raumgruppe  $C6mc$  mit den Zelldimensionen  $a = 7,19$  und  $c = 12,30$  Å mit ebenfalls 4 Molekülen pro Zelle. Im Gitter bilden die Jodionen gewellte Sechseringe parallel  $(0\ 0\ 1)$ , während oberhalb und unterhalb der Ringzentren die Guanidoniumionen liegen, so daß wieder die 3 N-Atome die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks besetzen, in dessen Mittelpunkt ein C-Atom angeordnet ist. Hier liegen jedoch die Ebenen dieser Dreiecke parallel zueinander. Die aus der Struktur sich ergebenden Abstandsverhältnisse erlaubten eine Berechnung der Brechungsindices nach W. L. BRAGG (29), die mit den experimentellen Werten genau übereinstimmt.

6. **Benzol** (30). Die an Benzol bei  $-40^\circ$  vorgenommenen Drehkristallaufnahmen und Intensitätsmessungen waren wegen der Unregelmäßigkeit der Kristalle nicht sehr befriedigend. Nimmt man ebene Ringe an, so ergeben sich für einen C—C-Abstand von  $1,42$  Å eine große Zahl möglicher Anordnungen der Moleküle in der Elementarzelle, von denen am wahrscheinlichsten eine Anordnung erscheint, in der die Ringebene parallel zur  $b$ -Achse der Zelle liegt und mit  $(1\ 0\ 0)$  einen Winkel von  $40^\circ$  einschließt. Ein nicht ebener Ring scheint schon nach groben Intensitätsbetrachtungen unwahrscheinlich zu sein. Die Struktur des Benzols verhält sich insofern anomal, als sie zwischen der einer einfachen Molekülstruktur und der einer typischen aromatischen Struktur liegt, da die Moleküle nicht zu Platten gehäuft sind, sondern im rechten Winkel zueinander stehen.

7. **p-Dichlorbenzol**  $\text{C}_6\text{H}_4[1,4]\text{Cl}_2$ , **p-Dibrombenzol**  $\text{C}_6\text{H}_4[1,4]\text{Br}_2$  und **p-Bromchlorbenzol**  $\text{C}_6\text{H}_4[1]\text{Cl}[4]\text{Br}$  (31). Für alle 3 Substanzen ist die Raumgruppe die gleiche. Auch die Dimensionen der Zelle und die Anzahl der Moleküle ( $z = 2$ ) sind gleich. Die kleinen Intensitätsunterschiede zwischen p-Dibrom- und p-Dichlorbenzol lassen sich durch kleine Strukturverschiedenheiten erklären. In der Raumgruppe sind 2 Möglichkeiten für die Lage des Sechseringes vorhanden, von denen

die eine das p-Dichlor- und die andere das p-Dibrombenzol einnimmt, während die p-Bromchlorbenzole in der Zelle abwechselnd die eine oder die andere Lage einnehmen.

**8. Hexachlorbenzol  $C_6Cl_6$  (32).** Die Bestimmung der Struktur des Hexachlorbenzols durch K. LONSDALE ist mit Hilfe der FOURIER-Analyse durchgeführt worden. Um das Vorzeichen der Struktur Faktoren

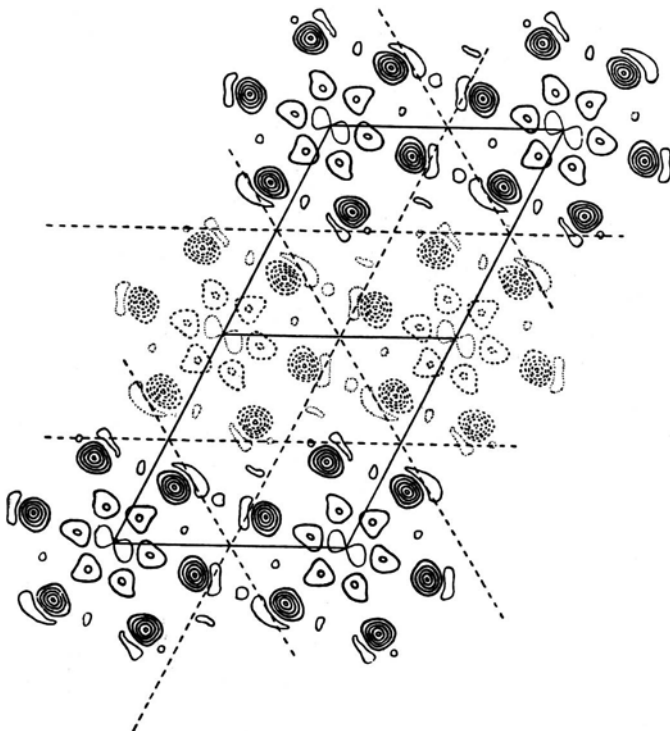
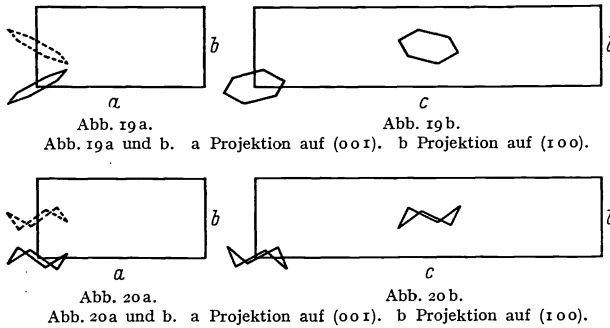


Abb. 18. FOURIER-Projektion des Hexachlorbenzols auf die Ebene (010) (32).

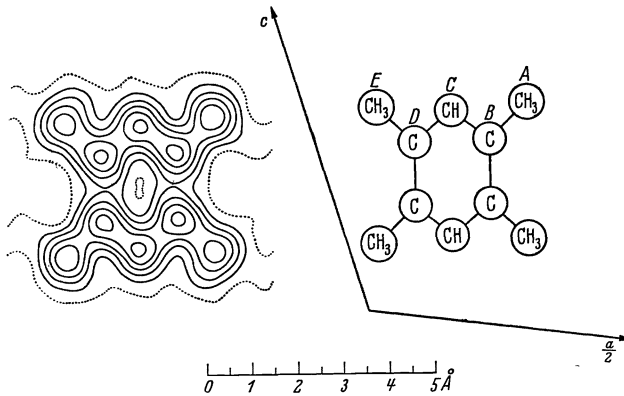
(s. S. 207) zu erhalten, mußte zuerst eine rohe Annahme für die Strukturbestimmung gemacht werden, bei der die 12 C- und Cl-Atome in je 3 Gruppen von vierzähligen Punktlagen der Raumgruppe  $P 2_1/c$  liegen. Intensitätsmessungen an 120 Ebenen ( $h\ 0\ l$ ) unter Berücksichtigung der Absorption und des Atomformfaktors sowie die Annahme, daß die Cl-Atome wahrscheinlich nicht ionisiert sind, lieferte dann einen experimentellen Strukturfaktor. Zur Bestimmung der genauen  $x$ - und  $z$ -Parameter von C und Cl ist eine FOURIER-Analyse in der Projektion auf die Ebene (010) vorgenommen worden. Der nadelförmige Charakter der Kristalle läßt Intensitätsmessungen in allen Zonen, die zur Bestimmung des dritten  $y$ -Parameters notwendig werden, nicht zu, so daß eine Entscheidung, ob der Sechsering eben oder nicht eben in der Elementarzelle vorliegt, nicht getroffen werden kann. Das „contour diagram“ (Abb. 18)

zeigt eine deutliche Polarisation der C-Atome in Richtung der beiden Nachbarn und zum benachbarten Cl-Atom, während die Cl-Atome selbst nicht polarisiert erscheinen.

In welchen Lagen die Moleküle in der Zelle möglicherweise angeordnet sein können, zeigen die Abb. 19a und 19b für den ebenen und 20a und 20b für den nichtebenen Sechsering.



9. Durol 1, 2, 4, 5 (sym.) Tetramethylbenzol  $C_{10}H_{14}$  (33). Der Benzolring im Durol bildet ein regelmäßiges Sechseck, dessen Dimensionen ähnlich denen bei Naphtalin und Anthracen (s. S. 220 u. 221) gefunden wurden.



Die Ebene des Moleküls ist ungefähr um  $48,6^\circ$  gegen die Projektionsebene geneigt, was eine Verzerrung des Bildes zur Folge hat. Die FOURIER-Zeichnungen lassen die Individualität und Kugelförmigkeit der Kohlenstoffatome erkennen, so daß eine „Elektronenzählung“ vorgenommen werden kann, die, wie Abb. 22 zeigt, in guter Übereinstimmung mit der Gesamtzahl der Elektronen wie sie aus der chemischen Formel erhalten werden, steht.

Die Zählung geht so vor sich, daß man die Zentren der Atome durch Punkte markiert und auf den Verbindungslinien der Punkte die Mittellote

(gestrichelt gezeichnet) errichtet, so daß die Zelle in einzelne Stücke geteilt wird. In jedem Teilstück sind dann die Elektronendichten summiert und mit den aus der chemischen Formel erhaltenen Elektronenzahlen verglichen. Aus dieser Zählung können Mutmaßungen über die Verteilung der Wasserstoffatome und über die Unterschiede zwischen den verschiedenen Typen von Kohlenstoffatomen gemacht werden. In der Abbildung (Abb. 23) ist die Anordnung der Moleküle zueinander dargestellt.

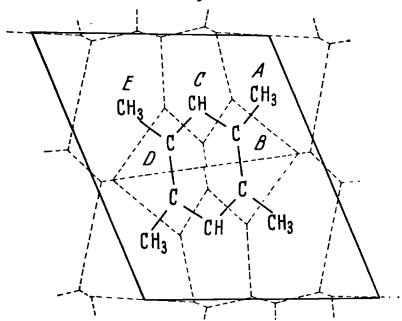


Abb. 22. Elektronenzählung am Durol.

A Methylgruppe $-\text{CH}_3$ ; 8,4 Elektronen	(9 nach der Strukturformel)
B und D einzelnes Kohlenstoffatom $\equiv \text{C}$ ; 6,4 Elektronen	(6 " " " " )
C Kohlenstoff und Wasserstoff $> \text{CH}$ ; 7,2 Elektronen	(7 " " " " )
E Methylgruppe $-\text{CH}_3$ ; 8,7 Elektronen	(9 " " " " ) (33).

Das interessanteste Ergebnis dieser Strukturbestimmung bildet die Lage der Methylgruppen, denn wenn die Substitution vollkommen

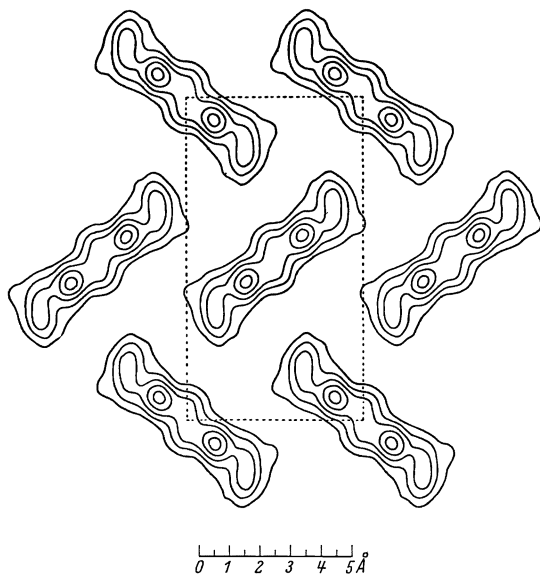
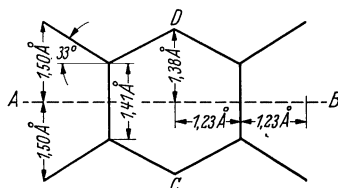
Abb. 23. FOURIER-Projektion längs der  $c$ -Achse. Jede Konturlinie bedeutet 2 Elektronen pro  $\text{\AA}^2$  (33).

Abb. 24. Dimensionen des Durolmoleküls (33).

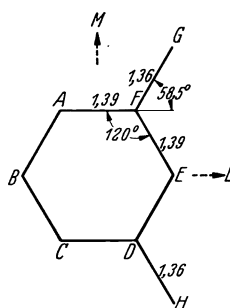


Abb. 25. Dimensionen des Resorcinmoleküls (34).

symmetrisch geschehen würde, müßten die 3 Valenzen des Kohlenstoffatoms miteinander einen Winkel von  $120^\circ$  einschließen. Die Messungen haben jedoch gezeigt, daß das nicht genau der Fall ist und eine kleine, aber merkliche Verschiebung stattfindet, die ungefähr  $3^\circ$

beträgt. In Abb. 24 sind die aus den FOURIER-Projektionen erhaltenen Dimensionen des Moleküls dargestellt.

10. Resorcin  $C_6H_4(OH)_2$  (34). Der Benzolring ist ein reguläres Sechseck, in dem die Kohlenstoffatome eine Entfernung von  $1,39 \pm 0,01 \text{ \AA}$  besitzen, während die Sauerstoffatome symmetrisch zum Ring zu liegen scheinen, doch ist die Lage des in der Projektion schlecht aufgelösten O-Atoms (G) leicht verschoben (Abb. 25).

Die Zentren der Hydroxylgruppen liegen  $1,36 \text{ \AA}$  von den Zentren der Kohlenstoffatome entfernt und sind nicht ganz symmetrisch zueinander, doch beträgt diese Abweichung nur  $1,5^\circ$ . Das O-Atom (G) liegt dann ein wenig außerhalb der Ebene des Ringes und macht das Modell in der Richtung  $L$  unsymmetrisch.

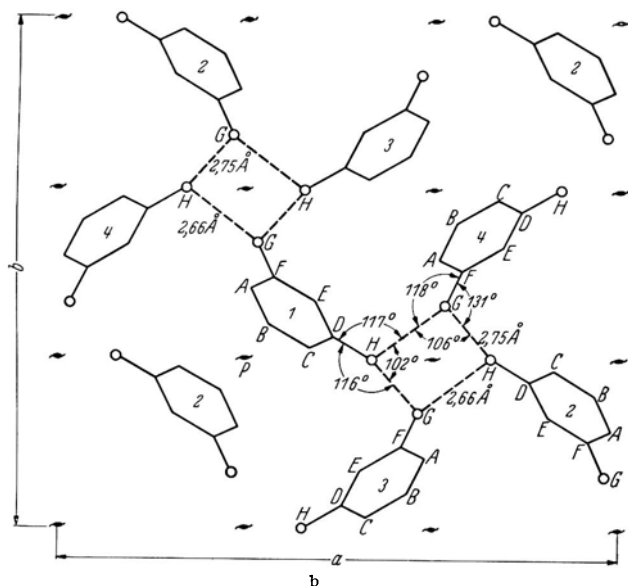
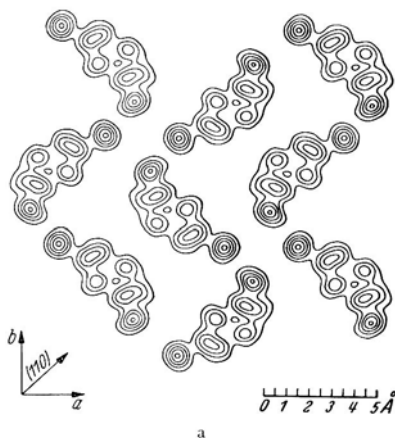


Abb. 26a und b. Die Projektion einer Gruppe von 9 Molekülen des Resorcins entlang der  $c$ -Achse. Jede Niveaulinie bedeutet 2 Elektronen/Å<sup>2</sup> (34).

Die hauptsächlichsten Merkmale dieser Struktur sind die spirale Anordnung der Moleküle und die ziemlich kurze Distanz von 2,66 bis 2,75 Å der Hydroxylgruppen aufeinanderfolgender Moleküle. Die Abstände O—C und C—C von Molekül zu Molekül (in Abb. 26b z. B.  $H_1-A_4$

3,53 Å und  $B_1-A_2$  3,66 Å) sind charakteristisch für Strukturen, in denen VAN DER WAALSSche Kräfte zwischen den Atomen wirken. Die Distanzen zwischen den Sauerstoffatomen (2,66 Å) deuten Hydroxylbindungen an, wie sie von J. D. BERNAL und H. W. MEGAW (35) diskutiert worden sind, wo jedes Sauerstoffatom eng mit zwei benachbarten Molekülen zusammenhängt.

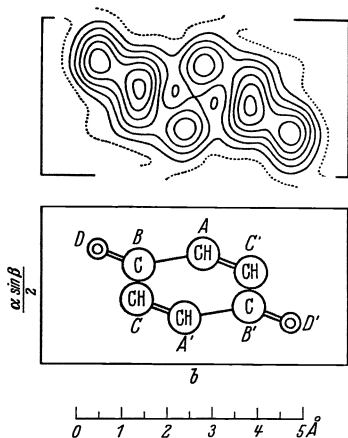


Abb. 27.  
Projektion des Benzochinonmoleküls  
gegen die  $c$ -Achse (36).

**11. Benzochinon  $C_6H_4O_2$**  (36). Die Verbindung enthält zwei O-Atome in  $p$ -Stellung, so daß es nur eine Möglichkeit gibt, die Ringbindungen anzuordnen, wenn man von der Peroxydformel absieht, die unwahrscheinlich ist, und außerdem durch die vorliegende Untersuchung ausgeschlossen wird. Die Röntgenanalyse zeigt, daß die Ebenen der Moleküle ziemlich parallel liegen, aber einander so überlappen, daß eine zweidimensionale FOURIER-Analyse mit großen Schwierigkeiten verbunden ist. Nun ist bei der

ungefähren Strukturbestimmung zur Festlegung der ungenauen Parameter, als Vorstufe zur FOURIER-Analyse, angenommen worden, daß im

Benzochinon ein regulärer Benzolring vorliegt, und es fragt sich, ob die FOURIER-Projektionen Abweichungen von dieser Regelmäßigkeit erkennen lassen (Abb. 27).

Die große Neigung der Molekülebene gegen die Projektionsebene ( $59,5^\circ$ ) verursacht auch hier Schwierigkeiten bei der Auflösung der Atome. Man erkennt, daß die zwei Sauerstoffatome und zwei von

den Kohlenstoffatomen klar aufgelöst erscheinen, während die genaue Position der anderen C-Atome verwaschen bleibt. Eine nähere Betrachtung dieses Diagramms aber läßt leichte Unregelmäßigkeiten des Ringes erkennen.

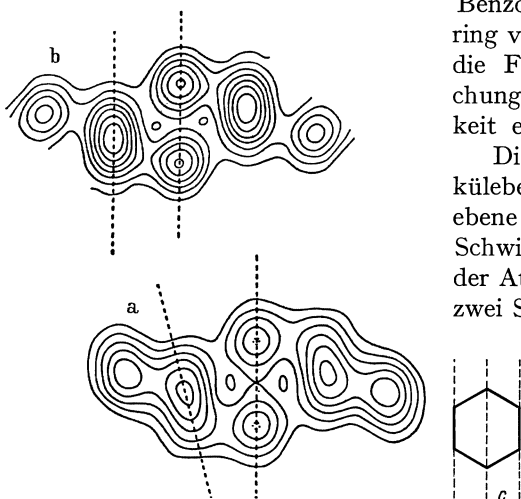


Abb. 28 a—c. Der zentrale Ring von Anthracen (a) als Vergleich zum Kohlenstoffring im Benzochinon (b).

Die einander entgegengesetzten Seiten eines regulären Sechsecks sind nämlich zueinander und zu einer Verbindungslinie der beiden

restlichen Eckpunkte durch die Mitte parallel (Abb. 28c), eine Parallelität, die in allen Projektionen erhalten bleibt. Aus der FOURIER-Projektion (Abb. 28a) ist aber zu ersehen, daß die Verbindungslinie der unaufgelösten C-Atome bestimmt nicht parallel zu den beiden Sechseckseiten liegt. Zum Vergleich ist in Abb. 28b oben der zentrale Ring des Anthracens projiziert, der eine ähnliche Orientierung im Kristall besitzt und von dem man aus den FOURIER-Projektionen aussagen kann, daß der Ring ein exaktes Sechseck bildet, und daß der Einfluß der Nachbaratome ein ähnlicher sein muß. Die Parallelität der Ovale zur Linie durch das Zentrum einerseits und die Konvergenz der entsprechenden Linien beim Benzochinon andererseits sind somit vergleichbar.

Die endgültigen Dimensionen des Benzochinonmoleküls ergeben sich aus der Abb. 29.

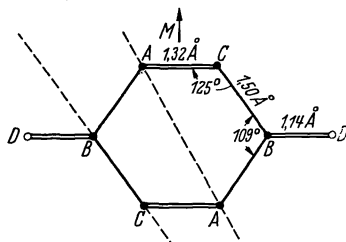


Abb. 29. Dimensionen des Benzochinonmoleküls (36).

**12. p-Dinitrobenzol (37).** Die durch R. W. JAMES und Mitarbeiter sowie durch K. BANERJEE angestellte FOURIER-Analyse nach 3 Richtungen hat die wichtigen Resultate gebracht, daß die Nitrogruppe fast eben ist und beinahe in einer Ebene mit dem Benzolring liegt, so daß ein Sauerstoffatom in die Ebene des Benzolringes zu liegen kommt und das andere etwas herausgedreht erscheint (Abb. 30).

Die Distanz zwischen dem Ring C-Atom und dem Stickstoffatom ist 1,53, also größer als der C—N-Abstand im Hexamethyltetramin (s. Tabelle S. 232). Die zwei Sauerstoffatome sind in verschiedener Entfernung vom Stickstoffatom angeordnet (1,10 und 1,25 Å), eine Tatsache,

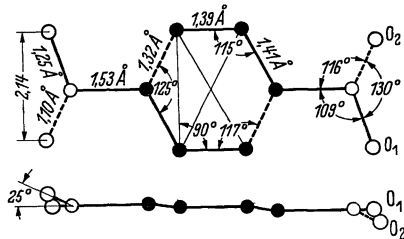


Abb. 30. p-Dinitrobenzol.

die auf 2 Bindungsarten in der Nitrogruppe  $\text{—N} \begin{array}{l} \diagup \text{O} \\ \diagdown \text{O} \end{array}$  zurückzuführen ist. Genaue Messungen durch H. O. JENKINS (38) haben gezeigt, daß das p-Dinitrobenzol kein Dipolmoment hat. Man hat also anzunehmen, daß die für den festen Körper gefundene Konfiguration, die ein Symmetriezentrum besitzt, auch in der Lösung vorhanden ist, d. h. keine freie Drehbarkeit um C—N stattfindet. Die Substitution durch Nitrogruppen hat eine ziemliche Verkürzung der Ringbindung parallel zu der kürzeren N = O-Bindung mit sich gebracht.

**13. Dibenzyl ( $\text{C}_6\text{H}_5$ )<sub>2</sub>( $\text{CH}_2$ )<sub>2</sub> (39).** Im Molekül des Dibenzyls liegen zwei Benzolringe vor, die durch 2  $\text{CH}_2$ -Gruppen so miteinander verbunden sind, daß eine freie Drehbarkeit sowohl um die Bindung Ring- $\text{CH}_2$  als auch um die Bindung  $\text{H}_2\text{C—CH}_2$  stattfinden kann. Die bisher

behandelten Moleküle haben sich im allgemeinen als eben erwiesen, doch bildet das Dibenzyl eine interessante Ausnahme von dieser Regel. Die von J. M. ROBERTSON unter Zugrundelegung eines ebenen Modells

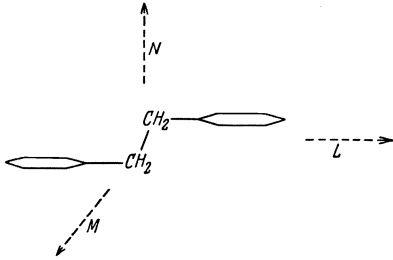


Abb. 31. Dreidimensionales Modell des Dibenzylmoleküls. *M* steht senkrecht zur Projektionsebene und parallel zu den Ebenen der Benzolringe.

—CH<sub>2</sub> beträgt 1,47 Å, der Abstand zweier CH<sub>2</sub>-Gruppen ist 1,58 Å und der Winkel CH<sub>2</sub>—CH<sub>2</sub> liegt bei 109°. Dabei ist aber die Ebene der CH<sub>2</sub>—CH<sub>2</sub> gegen die Ringebene um ungefähr 16° gedreht.

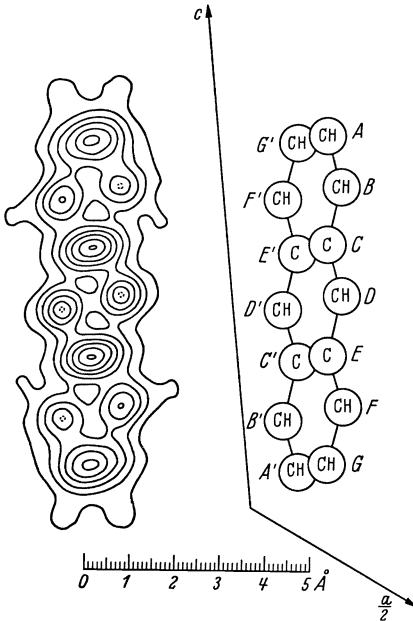


Abb. 32. FOURIER-Projektion des Anthracens nach der *b*-Achse (40).

angestellten Untersuchungen waren monatelang ohne Erfolg geblieben, bis ein dreidimensionales Modell angenommen wurde. In diesem Modell liegen die Benzolringe wenn auch parallel, so doch in verschiedenen Ebenen und sind durch die 2 Methylengruppen unter dem normalen Tetraederwinkel miteinander verbunden (Abb. 31).

Der Benzolring ist ein reguläres Sechseck und der Abstand C<sub>aromatisch</sub> beträgt 1,41 Å. Was den Chemiker aber

14. Anthracen C<sub>14</sub>H<sub>10</sub> (40). Die in Abb. 32 dargestellte FOURIER-Projektion des Anthracens nach der *b*-Achse zeigt ein Molekül, dessen Ebene um 60° gegen die Projektionsebene geneigt ist, so daß zur Auflösung einiger Atome andere Projektionen nötig waren.

Das hauptsächlichste Merkmal dieser Projektion ist, daß eine Reihe von Atomen (*BDF*) entlang des Moleküls auf genau parallelen Linien liegen und außerdem die Verbindungslinien von Paaren wie *D—D'*, *B—F'* parallel zueinander sind. Aus diesen Tatsachen und aus den anderen FOURIER-Projektionen kann die Schlußfolgerung gezogen werden, daß der Ring ein reguläres Sechseck und die Distanz C—C 1,41 Å ist.

Was den Chemiker aber darüber hinaus interessiert, ist, daß die Kohlenstoffe 9, 10 (mittlerer Ring) durch eine verschiedene Reaktionsfähigkeit im Vergleich zu den übrigen Kohlenstoffen ausgezeichnet sind. Trotzdem die Atomabstände überall die gleichen sind, ist aus der Abb. 33 zu erkennen, daß an der Meso-Stellung Unterschiede in der Elektronendichte vorhanden



sind, die 7 Elektronen pro  $\text{\AA}^2$  gegen 5,5 bis 6 Elektronen pro  $\text{\AA}^2$  für die anderen Stellungen betragen.

In Abb. 33 ist die Anzahl der Elektronen im Molekül gezeigt. Die in Klammer gesetzten Zahlen bedeuten die nach der chemischen Strukturformel theoretisch berechnete Zahl der Elektronen innerhalb der gestrichelten Linien. Dem tertiären Kohlenstoffatom kommt der niedrigste Wert zu und es ist interessant festzustellen, daß auch der Einfluß der Wasserstoffatome deutlich erkennbar ist.

### 15. Naphtalin $\text{C}_{10}\text{H}_8$ (41).

Abb. 34 zeigt die FOURIER-Projektion des Naphtalins

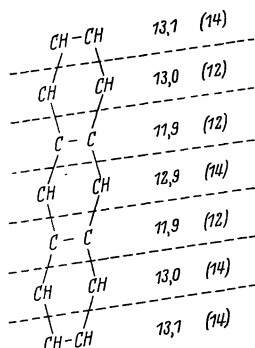


Abb. 33. Elektronenverteilung im Anthracen. Projektion entlang der  $b$ -Achse (40).

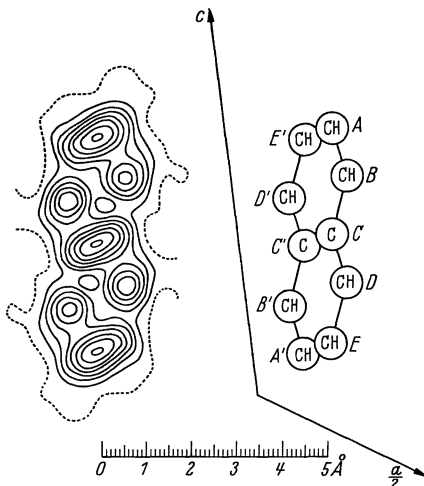


Abb. 34. FOURIER-Projektion des Naphtalins nach der  $b$ -Achse. Die Ebene des Moleküls ist ungefähr um  $64,5^\circ$  gegen die Projektionsebene geneigt (41).

nach der  $b$ -Achse. Die Dimensionen der Ringe sind die gleichen wie beim Anthracen, d. h. es liegen reguläre Sechsecke vor mit einem C—C-Abstand von  $1,41 \text{ \AA}$ .

Die außerordentlich wichtige Feststellung, daß aus zwei verschiedenen experimentellen Messungen und Berechnungen an zwei verschiedenen Substanzen der Wert von  $1,41 \text{ \AA}$  erhalten wird, führt, abgesehen vom Beweis der Richtigkeit der angewandten Methode, zu dem Ergebnis, daß der seit langem im Graphit bekannte ebene Sechsering mit dem Atomabstand von  $1,42 \text{ \AA}$  in komplizierten aromatischen Verbindungen erhalten bleibt, obwohl die Moleküle unter verschiedenen Winkeln zu den Kristallachsen und Flächen geneigt sind.

**16. Chrysen  $\text{C}_{18}\text{H}_{12}$  (42).** Die Ausmessung des Benzolringes zeigt auch hier Übereinstimmung mit den oben genannten Abmessungen des ebenen Sechseringes und geht so weit, daß auch Übereinstimmung zwischen den Entfernungen größter Annäherung benachbarter Moleküle besteht. Das Kohlenstoffatom im Graphit, in dem es keine individuellen Moleküle gibt, ist von seinen nächsten 6 Nachbarn  $3,7 \text{ \AA}$  entfernt, so daß die Abstandswerte beim Hexamethylbenzol (Schichtenstruktur) mit  $3,70 \text{ \AA}$ ,

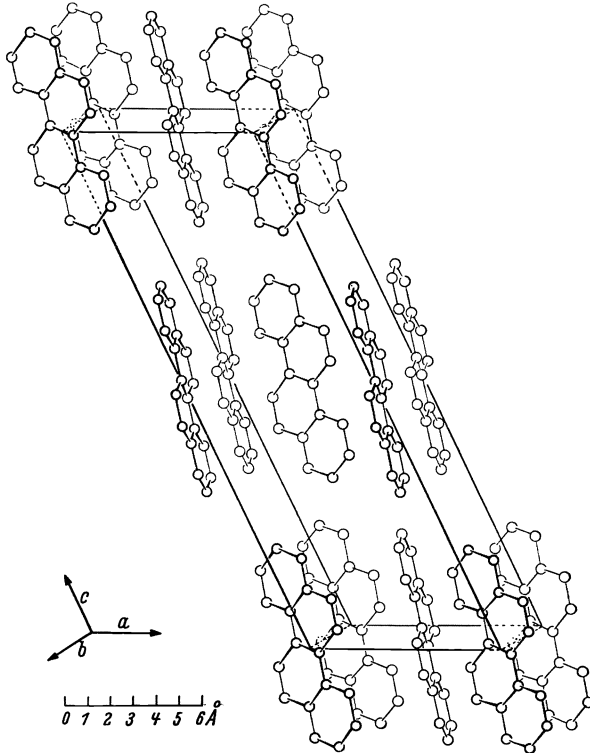


Abb. 35. Elementarzelle und Lage der Moleküle des Chrysens (87).

beim Naphtalin, Durol, Anthracen zwischen 3,7 und 3,9 Å damit gut übereinstimmen. Die monokline Elementarzelle und die Lage der Moleküle des

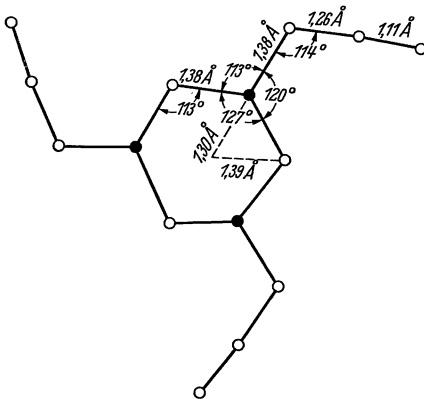


Abb. 36. Cyanursäuretriacid (43).

Chrysens, wie sie aus den doppelten FOURIER-Projektionen erhalten wurden, sind in Abb. 35 dargestellt.

**17. Cyanursäuretriacid ( $C_3N_3$ ) ( $N_3$ )<sub>3</sub> (43).** Das Molekül bildet einen nahezu hexagonalen Ring, an dessen 3 C-Atomen die 3 Acidgruppen sitzen. Die Acidgruppe ist nicht vollkommen linear, sondern beim mittelständigen Stickstoffatom um  $15^\circ$  geknickt,

Die Acidgruppen sind an die C-Atome mit einfachen Bindungen gebunden mit einem C-N-Abstand von  $1,38 \text{ \AA}$ , so daß der Winkel der

linearen Gruppe mit der Valenzbindung  $114^\circ$  ist. Der Netzebenenabstand zwischen den einzelnen Molekülschichten ist  $2,98 \text{ \AA}$  (Graphit 3,41).

**18. Phtalocyanine  $C_{32}N_8H_{18}$  (44).**

Aus den Zellendimensionen ergibt sich, daß durch den Eintritt des Metallatoms keine beachtenswerte Verzerrung des Moleküls auftritt (Tabelle 4).

Die Änderung der Dimensionen beim Platinsalz rühren wahrscheinlich von einer Änderung der Molekülorientierung her. Das Molekül selbst stellt ein großes viereckiges flaches Gebilde dar.

Die Molekülebene ist um  $44,2^\circ$  gegen die Projektionsebene geneigt. Jede Niveaulinie entspricht einer Elektronendichte von 1 Elektron pro  $\text{\AA}^2$ . (Beim zentralen Ni-Atom 5 Elektronen pro  $\text{\AA}^2$ .) Die beiden Iminowasserstoffe liegen

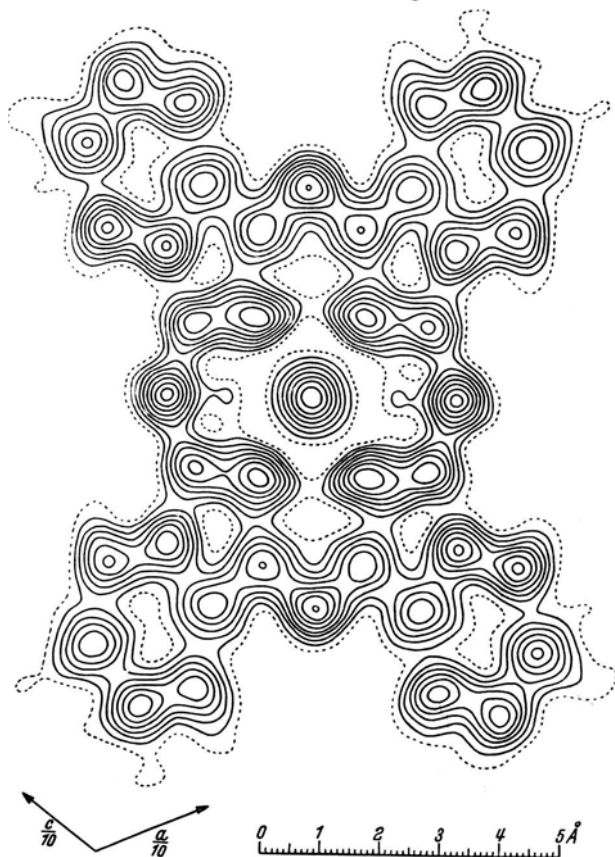
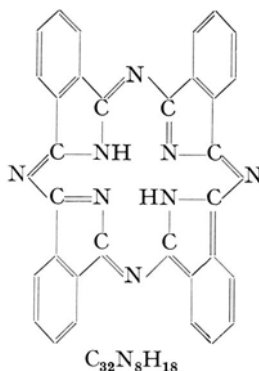


Abb. 37. Projektion des Nickel-Phtalocyanins gegen die  $b$ -Achse (44).

außerhalb der Molekülebene und geben so zu cis- und trans-Formen Anlaß. Die Struktur des Innenkerns zeigt im Vergleich zu dem des

Tabelle 4.

Substanz	Achsen und Winkel				Raumgruppe	Anzahl der Moleküle pro Zelle
	a	b	c	$\beta$		
Phtalocyanin . .	19,85	4,72	14,8	122,25	} $P 2_{1/a}$ }	2
Ni-Verbindung .	19,9	4,71	14,9	121,9		2
Cu-Verbindung .	19,6	4,79	14,6	120,6		2
Pt-Verbindung .	23,9	3,81	16,9	129,6		2

Phtalocyanins gewisse Unterschiede, die gerade noch über der Grenze der Meßgenauigkeit liegen. Es sind in Abb. 38 die Zentren der 4 umgebenden isoindol-Stickstoffatome durch Kreise, die entsprechenden Zentren beim Phtalocyanin durch Kreuze gekennzeichnet.

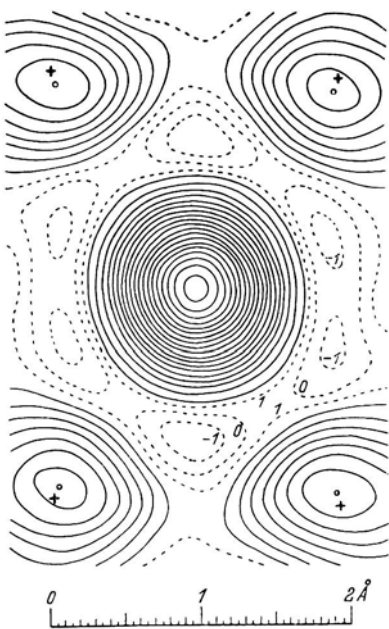


Abb. 38. Vergrößerung des zentralen Teils der Abb. 37 (44).

Die Verschiebung beträgt ungefähr 0,09 Å und der Abstand des isoindol-Stickstoffs vom Zentrum des Nickelatoms beträgt 1,83 Å. Es ist interessant, daß dieser Ni—N-Abstand gut zu den Radien von neutralem Nickel (1,24 Å) und von N = (Doppelbindung) mit 0,61 Å paßt. Ferner ist zu sagen, daß solche Änderungen auch bei der C—N-Bindung auftreten, da im Phtalocyanin die Werte mit 1,33 bis 1,34 Å praktisch konstant sind und in der vorliegenden Struktur die Bindungen 9—8 und 9—10 die Länge 1,38 bis 1,39 Å besitzen. Auch die übrigen Bindungen 8—7 und 10—11, die entfernter vom Nickelatom liegen, haben die gleichen Längen und sind um rund 0,04 Å länger als die im Phtalocyanin.

**19. Das Steringerüst (45).** Im Laufe der letzten Jahre hat sich aus verschiedenen experimentellen Daten ergeben, daß eine Reihe von biologisch wichtigen Verbindungen wie Gallensäure, Sexualhormone, Sterine, Vitamine, Digitoxin usw. auf ein und demselben kondensierten Ringsystem basieren. Zunächst haben die Kristallstruktur-Untersuchungen an Vitamin D<sub>2</sub> und an verwandten Substanzen gezeigt, daß das Steringerüst einen Raum von 5·7,2·17—20 Å beansprucht und im Kristall eine doppelte Schicht formen muß ähnlich wie bei den langkettigen Alkoholen. Das alte Ringskelett (vgl. Abb. 39 a) würde zu einem viel dickeren und kürzeren Molekül führen, so daß, im Hinblick auf die chemischen Widersprüche dieser Anordnung und weil die

Doppelschicht auf eine endständige Hydroxylgruppe hinweist, von ROSENHEIM und KING (46) auf Grund der Röntgenuntersuchungen von BERNAL eine neue Strukturformel vorgeschlagen wurde (vgl. Abb. 39b).

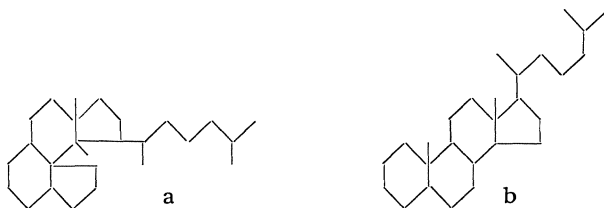


Abb. 39a und b, a alte und b neue Formel.

**20. Hochpolymere Verbindungen.** Exakte Kristallstrukturbestimmungen sind bei hochpolymeren Stoffen aus Mangel an gut ausgebildeten Kristallen nicht oder nur selten durchgeführt worden. Daß trotzdem die Untersuchung mit Röntgenstrahlen interessante und wichtige Ergebnisse erzielen konnte, lag daran, daß auch andere als röntgenographische Methoden zur Deutung herangezogen wurden.

a) *Kautschuk.* Nach der Entdeckung der Kristallinterferenzen an gedehntem Kautschuk durch J. R. KATZ und der Bestimmung der Elementarzelle durch H. MARK und G. v. SUSICH (47) ist von G. L. SIMARD und B. E. WARREN (48) eine FOURIER-Analyse für den amorphen Ring des ungedehnten Kautschuks ausgeführt worden. Das Ergebnis war eine Verteilungskurve der Anzahl der C-Atome, die in einer beliebigen Entfernung von einem gegebenen C-Atom liegen. Diese Verteilungskurve hat zwei Maxima, eines bei 1,5 Å und eines bei 2,6 Å. Die Intensitätsänderungen des amorphen Ringes von Kautschuk in Abhängigkeit von der Dehnung (49) führte zu der Erkenntnis, daß die Bildung der Kristallite auch schon vor der „kritischen Dehnung“, bei der das Kristalldiagramm auftritt, vorbereitet wird. Der Intensitätsabfall des amorphen Ringes von schwach gedehntem vulkanisiertem Kautschuk vom Äquator zum Meridian hin ist also dahin zu deuten, daß im Verlaufe der Dehnung die Molekülketten teilweise parallel gerichtet werden. Bei der Untersuchung des micellaren Aufbaues des Kautschuks ist zur Klärung der Frage: liegen individuelle Micellen vor oder nicht, ein Effekt herangezogen worden, der mit „höhere Orientierung“ bezeichnet wird (50). Dieser Effekt besteht darin, daß man bei extrem gedehnten Kautschukfilmen zwei verschiedene Röntgendiagramme erhält, je nachdem senkrecht oder parallel zur Filmebene durchstrahlt wird. Die ursprünglich nicht geordneten Hauptvalenzketten des ungedehnten Kautschuks sind im Falle der höheren Orientierung in zweifacher Weise orientiert, etwa wie ein Bündel Bleistifte, deren Aufschriften alle nach derselben Seite hin gerichtet sind. Die Deutung dieses Phänomens kann durch die Annahme (51) schachtelförmiger Micellen geschehen, die sich durch das

Dehnen (Walzen) in die Walzebene hineinlegen. Zwischen den beiden extremen Auffassungen, daß die Hauptvalenzketten allseitig begrenzte Bündel (individuelle Micellen) bilden oder daß die Hauptvalenzketten sich über viele solcher Bereiche erstrecken, steht nun das Bild der schachtelförmigen Micellen, über welche zwar die Hauptvalenzketten hinausgehen, ohne aber die Individualität der Micellen völlig aufzuheben. Die Fortsetzung einer Untersuchung über die Abnahme der Untergrundschwärzung des Röntgendiagramms von gedehntem Kautschuk von P. A. THIESSEN und W. WITSTADT (84) wird einen wichtigen Beitrag zur Kenntnis der Micellen und zur Abschätzung des kristallisierten Anteils im gedehnten Kautschuk bilden.

b) *Cellulose*. Der Elementarkörper und die Anordnung der Cellulosemoleküle ist schon frühzeitig bestimmt worden (52). Die Untersuchungen haben bald darauf das wichtige Ergebnis gehabt (53), daß in einem so kurzen Elementarkörper von 10,3 Å kein genügender Platz für ein so langes Kettenmolekül vorhanden ist und daß der Elementarkörper — wie jetzt bei allen hochpolymeren Substanzen angenommen wird — viel kürzer ist als das Molekül. Gegen das von SPONSLER und DORE (54) vorgeschlagene Cellulosemodell spricht das Ergebnis des chemischen Abbaues, weil es ausgeschlossen ist, daß die dort angenommenen abwechselnden 4,4-Äther- und 1,1-Glucosidbindungen vorliegen. Auch eine kürzlich von E. SAUTER (55) diskutierte größere Elementarzelle und die damit verbundenen neuen Angaben über den Bau des Cellulosemoleküls halten einer Kritik nicht stand (56). Es ist vor allem unmöglich, ohne eine Intensitätsdiskussion lediglich aus Elementarkörperabmessungen und aus inneren Reflexionen des Röntgendiagramms, die, nach E. SAUTER selbst, vielleicht von der Bremsstrahlung herrühren, etwas über den Bau des Moleküls auszusagen. Demgegenüber zeigte eine eingehende Durchrechnung der Intensitäten, wie sie zuerst von K. R. ANDRESS (57) und jetzt von K. H. MEYER und L. MISCH (58) durchgeführt wurde, eine wenig gegen das frühere Modell (59) veränderte Anordnung und eine sehr befriedigende Übereinstimmung zwischen den beobachteten und den berechneten Intensitäten.

Nach den viskosimetrischen Messungen H. STAUDINGERS (60) haben die Hauptvalenzketten in Lösung eine Länge bis zu  $10^4$  Å, die röntgenographische Methode der Teilchengrößenbestimmung der Cellulose (61) dagegen ergab für die Dicke etwa 50 Å und für die Länge *mindestens* 600 Å. Der Unterschied läßt sich zwanglos aus der angewandten Rechenmethode erklären: Die Winkelbreite einer Interferenz des DEBYE-SCHERRER-Verfahrens wird durch den Einfluß der Kristallitgröße und durch die Präparatdicke bestimmt. Die von P. SCHERRER für kubische Teilchen angegebene Methode ist von M. v. LAUE, R. BRILL und PELZER (62) zu einer allgemeinen Theorie für alle Kristallsysteme ausgestaltet worden. Die Teilchengröße  $A$  senkrecht zu einer Netzebenenchar und die Breite des DEBYE-SCHERRER-Kreises ergibt sich dann zu

$$A = \frac{\lambda}{2\omega} \frac{R}{r} \left( \frac{1}{\frac{b}{r} \cos \frac{\vartheta}{2} - \frac{r}{b} \pi^2 \cos^3 \frac{\vartheta}{2}} \right), \quad (23)$$

wo  $\lambda$  die Wellenlänge des eingestrahnten Röntgenlichtes,  $R$  den Radius der Kamera,  $r$  den Radius des Präparates,  $\vartheta/2$  den Reflexionswinkel,  $b$  die Halbwertsbreite der Interferenz am photographischen Film,  $\omega$  eine von LAUE eingeführte Konstante mit dem Wert 0,556 bedeuten.

Der Differenz  $\frac{b}{r} \cos \frac{\vartheta}{2} - \frac{r}{b} \pi^2 \cos^3 \frac{\vartheta}{2}$  kommt insofern eine besondere Bedeutung zu, als sie die Bedingung liefert, unter welchen Voraussetzungen bei gegebenem Präparatradius  $r$  eine Teilchengrößenbestimmung röntgenographisch noch möglich ist. Wird diese Differenz sehr klein, d. h.  $b/r = \pi \cos \vartheta/2$ , so wird  $\Delta \rightarrow \infty$ ; mit anderen Worten, die Teilchen sind dann zu groß, um gemessen werden zu können. Die micellare *Breitenbestimmung* fällt mit dem günstigen Meßbereich zusammen, für die Längenmessung aber befindet man sich im ungünstigen Gebiet, wo sich  $b/r$  nur wenig von  $\pi \cos \vartheta/2$  unterscheidet. Die in der Literatur verbreitete Meinung, daß das Breite-Längenverhältnis der Cellulosemicellen 1:10 ist, muß also dahin richtiggestellt werden (63), daß die Länge ebensogut größer als 600 Å sein kann. Um über die Ausmaße der submikroskopischen Räume in hochpolymeren Gerüstsubstanzen Aufschluß zu erhalten, sind von A. FREY-WYSSLING durch Quellung von Ramie, Hanf, Bast, Bambus, Viskose, Acetatseide und Wolle in Silber- bzw. Goldlösungen und nachherige Reduktion der zwischen die Micellen eingedrungenen Salzlösung, in den Hohlräumen der Fasersubstanz Metalle abgeschieden worden. Eine röntgenographische Bestimmung der Teilchengrößen dieser Metalle lieferte Teilchen von rund 50 bis 100 Å.

Die röntgenographische Vermessung von hochmolekularen Substanzen ist ferner von K. HESS und C. TROGUS (63a) zu einem Identifizierungsmittel dieser Stoffe ausgebaut worden, mit dessen Hilfe es gelang, die Wirkung chemischer Reagenzien zu verfolgen, ohne genauere Angaben über die Kristallstruktur zu erhalten. Es darf deshalb von der Beschreibung dieser Art der Anwendung trotz ihrer Wichtigkeit für den Reaktionsmechanismus hier abgesehen werden.

*Riesenperioden.* Die Entdeckung und die Messung von großen Perioden, die z. B. größer als 40 Å sind, in natürlichen Faserstoffen wie Proteine, Cellulose usw. hat augenblicklich großes Interesse. Die normale Röntgentechnik ist nicht imstande, diese Reflexe, die nahe am Durchstoßpunkt des Primärstrahls mit dem Film liegen, aufzulösen. Zu diesem Zwecke sind besonders feine Blenden und Kameras mit besonders großen Abständen Präparat  $\rightarrow$  Film konstruiert und wegen der dabei auftretenden langen Belichtungszeit Anordnungen geschaffen worden, die es gestatten, die Kamera zu evakuieren und durch ein magnetisches Feld Streuelektronen, die eine zusätzliche Schwärzung des Films ergeben würden, in der Kamera zu verhindern.

Besonders große Perioden sind bisher an Sehnen (64) festgestellt worden, wo in Richtung der Faserachse 4 Reflexionen auftreten, die den Netzebenenabständen von 21,7; 33,6; 53,1; 68,9 Å entsprechen, und

es ist denkbar, daß diese die 5., 6., 10. und 15. Ordnung eines 330 Å betragenden Abstandes vorstellen.

Ferner zeigen Röntgenfaseraufnahmen von Cellulose (65) Streuungen, die in der Gegend des Durchstoßpunktes der Cellulose an einer Stelle einsetzen, die einem Netzebenenabstand von 130 Å entsprechen würden und die mit steigender Intensität gegen den Primärstrahl hin verlaufen.

Lebende Nerven (66) lassen Interferenzen von einem Netzebenenabstand von ungefähr 171 Å, Kollagen (67) gut aufgelöste Interferenzen mit einem Netzebenenabstand von 220 oder 440 Å erkennen. Interessant ist, daß diese großen Perioden in Gelatine nicht auftreten, trotzdem sonst zwischen den beiden Diagrammen eine große Ähnlichkeit besteht. In Keratin sind Abstände von 81 Å festgestellt worden, die eine Bestätigung des von ASTBURY vorausgesagten Wertes von etwa 90 Å darstellen.

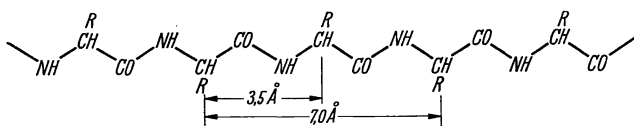


Abb. 40. Hauptvalenzkette einer gestreckten  $\alpha$ -Aminosäure.

Folgerungen für die Struktur aus diesen großen Perioden können im Augenblick wegen des relativ geringen Tatsachenmaterials noch keine gezogen werden.

*Proteine.* Das von der Cellulose erhaltene Bild ist von K. H. MEYER und H. MARK (59) auf das Seidenfibroin übertragen worden; R. BRILL (68) und O. KRATKY (69) haben im Seidenfibroin ungefähr parallele Polypeptidketten angenommen (Abb. 40), in denen Glycin und Alanin abwechselnd auftreten und so den in der Faserrichtung auftretenden Identitätsabstand von 7 Å erklären können.

Dabei ist es gar nicht notwendig, Glycin und Alanin als Kettenbausteine anzunehmen, sondern es müssen nur  $\alpha$ -Aminosäurereste sein, die diesen Identitätsabstand bestimmen (69a).

Die von ASTBURY und seinen Mitarbeitern (70) erforschte Struktur von Haarkeratin ergab zunächst, daß bei zunehmender Dehnung des Haares unter Wasser das Röntgendiagramm an Intensität verliert und daneben ein Diagramm entsteht, das auffallende Ähnlichkeit mit dem des Seidenfibroins zeigt. Diese Umwandlung ist reversibel, so daß das Keratin in zwei isomeren Formen, dem  $\alpha$ -Keratin und  $\beta$ -Keratin, auftritt. Ein Strukturmodell dieser Substanz muß auf diese Umwandlung und auf die große Dehnbarkeit Rücksicht nehmen. Die Ähnlichkeit des  $\beta$ -Keratindiagramms mit dem des Seidenfibroins führt zunächst dazu, auch hier gestreckte Polypeptidketten anzunehmen und die Röntgenaufnahmen liefern einen Wert von 3,38 Å pro Aminosäurerest. Außerdem treten am Äquator des  $\beta$ -Keratindiagramms zwei starke Reflexionen auf, die den Netzebenenabständen von 9,8 und 4,65 Å entsprechen und die die seitlichen Dimensionen der Kette sein müssen.



Der Abstand  $9,8 \text{ \AA}$  nimmt bei der Quellung zu (71) und entspricht den parallelen Peptidketten in Richtung der Seitenkette („Seitenkettenlänge“), während der Abstand  $4,65$  der Dicke der Kette („Rückgratdicke“) entspricht, deren Richtung zur Seitenkettenlänge senkrecht steht. Das Modell des  $\beta$ -Keratins stellt sich dann folgendermaßen dar (Abb. 41).

Die Polypeptid-Hauptvalenzketten liegen parallel und bilden einen Rost, dessen seitlicher Zusammenhalt durch elektro- und kovalente Bindungen zwischen den Seitenketten erhalten ist. Der Beweis, daß diese Seitenketten senkrecht zur Rückgratdicke liegen, ist von ASTBURY und SISON (72) dadurch geliefert

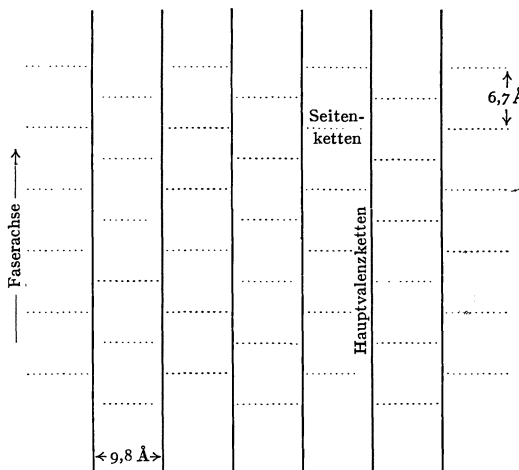


Abb. 41. Hauptvalenzketten-Rost (parallel der Faserachse Hauptvalenzen, senkrecht dazu Nebenvalezen).

worden, daß durch geeignete Behandlung von Horn unter Druck nicht nur seine Umwandlung zum  $\beta$ -Keratin, sondern auch eine höhere Orientierung (s. S. 225) als gewöhnliche Faserstruktur erzielt werden konnte. In einem solchen Präparat kann der Winkel der betreffenden Netzebenen röntgenographisch bestimmt werden und beträgt etwa  $90^\circ$ . Die Länge eines Aminosäurerestes ist aber, wie oben erwähnt, eine andere als die im vollständig gestreckten Seidenfibroin, was darin seinen Grund hat, daß die starken Seitenkettenbindungen die Kette in eine gefaltete Form ( $\alpha$ -Form), und auch im gedehnten  $\beta$ -Keratin in eine schwache Faltung zwingen. Die Faserperiode des  $\alpha$ -Keratins im entspannten Zustande ist  $5,06 \text{ \AA}$ , während die intensivsten Reflexe am Äquator  $9,8$  und  $27 \text{ \AA}$  sind. Die Intensität dieser beiden starken Reflexe ist so zu erklären, daß die Polypeptidketten im  $\alpha$ -Keratin in Pseudo-Diketopiperacinringe gefaltet sind (sekundäre Faltung), die in Richtung der Faserachse eine Länge von  $5,06 \text{ \AA}$  haben und daß die Seitenketten senkrecht auf die Ebene dieser Pseudo-Diketopiperacinringe stehen. Die Abb. 42 zeigt, wie aus diesem Bild die Dehnungselastizität bis zu 100% erklärt werden kann.

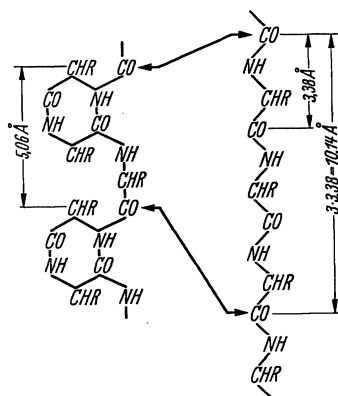


Abb. 42. Die  $\alpha \rightleftharpoons \beta$ -Keratinumwandlung (86).

Die Intensität dieser beiden starken Reflexe ist so zu erklären, daß die Polypeptidketten im  $\alpha$ -Keratin in Pseudo-Diketopiperacinringe gefaltet sind (sekundäre Faltung), die in Richtung der Faserachse eine Länge von  $5,06 \text{ \AA}$  haben und daß die Seitenketten senkrecht auf die Ebene dieser Pseudo-Diketopiperacinringe stehen. Die Abb. 42 zeigt, wie aus diesem Bild die Dehnungselastizität bis zu 100% erklärt werden kann.

Diese Vorstellung vom Aufbau des Keratins ermöglicht es auch (85) die mechanischen und elastischen Eigenschaften des Haares insbesondere die Superkontraktion, die temporäre und permanente Festigung zu erklären.

Die Aufklärung der Struktur der wasserlöslichen Proteine bereitete Schwierigkeiten, weil es immer nur gelang Pulveraufnahmen zu erhalten die 2 Ringe mit 4,5 und 10 bis 11 Å lieferten, auch dann, wenn, wie z. B. im Falle des Pepsins (73), Einkristalle verwendet wurden. Man hat daher vermutet, daß diese Pulveraufnahmen von einem veränderten Material herkommen, weil die Messungen in der Ultrazentrifuge von SVEDBERG (74) ergaben, daß Pepsin und auch andere von ASTBURY und LOMAX (75) untersuchte lösliche Proteine ein sehr großes Molekulargewicht (34500 oder ein Vielfaches dieses Wertes) besitzen und sicher mehr oder minder Kugelgestalt haben.

Inzwischen gelang es BERNAL und CROW-FOOT (76) dadurch, daß Pepsineinkristalle in ihrer Mutterlauge in den Röntgenstrahl gesetzt wurden, Einkristalldiagramme zu erhalten, die zeigten, daß im Gitter die Pepsinmoleküle kugelige Körper vom Molekulargewicht um 40000 sind. In Berührung mit Luft trat bei diesen Kristallen sofort Degeneration auf, so daß Pulverdiagramme entstehen. Die Verwandtschaft der Struktur der kugeligen Proteine und die der faserförmigen Proteine ist besonders auffällig sichtbar in den Beziehungen zwischen dem Röntgendiagramm des Pepsins und des Federkeratins. Das Pepsindiagramm (73) zeigt Zellendimensionen, die ganze Vielfache von denen des Federkeratins sind, und es erhebt sich die Frage, ob bei der Denaturierung die Polypeptidketten durch Verkettung der anfänglich kugelförmigen Moleküle ent-

stehen oder ob umgekehrt die Polypeptidketten das Ursprüngliche sind.

ASTBURY, DICKINSON und BAILEY (77) gelang es schließlich aus typisch kugelförmigen Proteinen [Edestin (78), Eieralbumin (79)] Fäden und Filme zu erzeugen, die in diesem Zustande ein Faserdiagramm vom Typus des  $\beta$ -Keratins ergeben, woraus geschlossen werden kann,

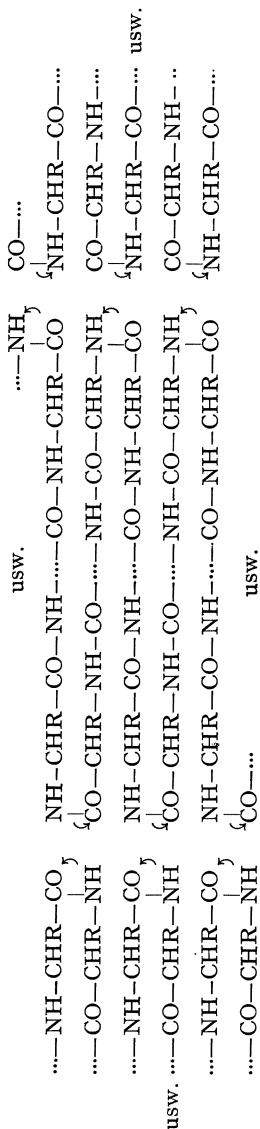


Abb. 43. Die Degenerierung von kugelförmigen und faserförmigen Proteinen (86).

daß im koagulierten vollkommen denaturierten Zustande alle Proteine parallele Peptidketten besitzen.

Ein Zwischenstadium zwischen dem nativen und dem denaturierten Zustand ist bei den Kristallen des Samenglobulins Excelsin (80) entdeckt worden, in dessen Diagramm die großen Netzebenenabstände kugelförmiger Proteine mit einem anderen Faserdiagramm überlagert (degeneriert) sind. Abschließend lassen die Untersuchungen von ASTBURY an den großen kugelförmigen Proteinmolekülen nach Abb. 43 gefaltete Ketten vermuten, die durch Aufheben von Peptidbindungen innerhalb der großen Moleküle und durch Neubildung von Bindungen zwischen benachbarten Molekülen zu langen parallelen Ketten polymerisieren können.

Eine interessante und wichtige Beobachtung ist am Muskelprotein gemacht worden. BÖHM und WEBER (81) konnten zeigen, daß das Muskelprotein Myosin in gedehntem Zustande ein  $\alpha$ -Keratindiagramm liefert und später haben W. T. ASTBURY und S. DICKINSON (82) gefunden, daß auch an diesem Muskel und am Sartoriusmuskel des Fisches sowie am Retraktormuskel von *Mytilus edulis* (83) eine  $\alpha \leftrightarrow \beta$ -Umwandlung durchführbar ist. Myosinfilme verhalten sich ähnlich wie die superkontrahierte Form des Keratins und die Kontraktion des Muskels würde der Superkontraktion des Haares entsprechen. Werden in Myosin die gleichen Aminosäuren wie im Keratin angenommen, so würde das heißen, daß das Keratin große Mengen Cystin enthält, die eine Kontraktion des  $\alpha$ -Keratins verhindern, während im Muskel weniger Cystin vorkommt und dieser sich so ausdehnen und kontrahieren kann. Sollte sich dieses Bild als zutreffend herausstellen, so kann das Haar als „vulkanisierter Muskel“ aufgefaßt werden.

### Übersicht.

Das Ziel der Strukturanalyse *alle* Koordinaten der im Elementarkörper enthaltenen Atome zu ermitteln, ist, wie im vorangehenden gezeigt wurde, nicht immer und nur unter Heranziehung zusätzlicher Annahmen erreicht worden. Die wichtigste dieser Hilfsvorstellungen ist die chemische Strukturformel und nur ihre Verbindung mit der exakten Röntgenanalyse gibt uns ein mächtiges Mittel in die Hand, Molekülstrukturen im festen Zustande zu erforschen. Die chemische Strukturformel besitzt jetzt einen neuen Grad von quantitativer Realität, die durch gänzlich andere Untersuchungsmethoden als die des Chemikers erreicht wurde.

Die Resultate der Untersuchungen an den vielen organischen Substanzen, die mit mehr oder minder großem Erfolg mit Hilfe von Röntgenstrahlen untersucht worden sind, findet man in der Tabelle 5 der „interatomaren und intermolekularen Abstände“ zusammengefaßt und ausführlich im „Strukturbericht 1933—1935“ (87) besprochen.

Tabelle 5.

Bindung	Abstand in Å	Verbindung	Methode <sup>1</sup>
H—H	0,75	H <sub>2</sub>	B. Sp.
N—H	1,02 bis 1,06	NH <sub>3</sub>	U. Sp.
C—H	1,08	CH <sub>4</sub>	R. Sp.
	1,06	C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	B. Sp.
	1,06	C <sub>2</sub> HD	B. Sp.
	1,01 <sub>3</sub>	H <sub>2</sub> O	U. Sp.
O—H	0,92	HF	B. Sp.
Cl—H	1,28	HCl	B. Sp.
Br—H	1,41	HBr	B. Sp.
J—H	1,62	HJ	B. Sp.
B—N	1,47 ± 0,07	B <sub>3</sub> N <sub>3</sub> H <sub>6</sub>	E. I.-Gas
B—B	1,6	B <sub>2</sub> H <sub>6</sub>	R. I.-Kristall
C—C <sub>al</sub>	1,54	Diamant	R. I.
	1,54	Paraffine	R. I.-Kristall
	1,52 ± 0,1	Äthan	E. I.-Gas
	1,56 ± 0,05	Äthan	B. Sp.
	1,51 ± 0,03	Cyclohexan	E. I.-Gas
	1,58	Dibenzyl	R. I.-Kristall
	1,59	Oxalsäuredihydrat	R. I.-Kristall
	1,42 ± 0,01	Graphit	R. I.-Kristall
	1,42	C <sub>6</sub> (CH <sub>3</sub> ) <sub>6</sub> , C <sub>6</sub> Cl <sub>6</sub> u. C <sub>10</sub> H <sub>6</sub>	R. I.-Kristall
	1,39 ± 0,03	C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>	E. I.-Gas
	1,41	Anthracen, Naphthalin, Tetramethylbenzol, Dibenzyl, Chrysen	R. I.-Kristall
	1,42	p-Diphenylbenzol, Diphenyl	R. I.-Kristall
	1,48	Diphenyl, p-Diphenylbenzol	R. I.-Kristall
	C—C <sub>arom-al.</sub>	1,47	Dibenzyl, Tetramethylbenzol
1,48		Hexamethylbenzol	R. I.-Kristall
C = C	1,3 ± 0,1	Äthylen	E. I.-Gas
	1,31 ± 0,05	Allen	E. I.-Gas
	1,35 ± 0,15	Polyene	R. I.-Kristall
	1,3	Äthylen	B. Sp.
C ≡ C	1,34	Äthylen	U. Sp.
	1,20	Acetylen	B. Sp. C <sub>2</sub> HD
	1,22	Acetylen	E. I.-Gas
C—N	1,33	Harnstoff	R. I.-Kristall
	1,35	Thioharnstoff	R. I.-Kristall
	1,48	NH <sub>2</sub> CH <sub>3</sub> , Hexamethylen-tetramin	R. I.-Kristall
C—N	1,38	Cyanurtriacid	R. I.-Kristall
C = N	1,31	Cyanurtriacid	R. I.-Kristall
C ≡ N	1,15 u. 1,17	HCN	U. Sp.; B. Sp.
	1,16 ± 0,02	C <sub>2</sub> N <sub>2</sub>	E. I.-Gas
C—O	1,49 ± 0,1	Äthylenoxyd	E. I.-Gas
	1,43 ± 0,1	Dimethyläther	E. I.-Gas
	1,49 ± 0,1	Polyoxymethylene	R. I.-Kristall
C = O	1,21	Formaldehyd	B. Sp.
	1,25 ± 0,17	Harnstoff	R. I.-Kristall
	1,15	Formaldehyd	E. I.-Gas
	1,13	COCl <sub>2</sub> , COBr <sub>2</sub> , usw.	E. I.-Gas

<sup>1</sup> Es bedeuten: B. Sp. Bandenspektrum; R. Sp. RAMAN-Spektrum; U. Sp. Iferenzen.

Tabelle 5 (Fortsetzung).

Bindung	Abstand in Å	Verbindung	Methode <sup>1</sup>
C ≡ O	1,05 bis 1,2	CO <sub>2</sub>	R.I.-Kristall
	1,13	CO <sub>2</sub>	E.I.-Gas
	1,1	CO <sub>2</sub>	R.I.-Gas
	1,15 ± 0,03	CO <sub>2</sub>	R.Sp.
	1,15	CO	B.Sp.
C—F	1,43	CH <sub>3</sub> F	U.Sp.
C—Cl	1,82 ± 0,04	CCl <sub>4</sub>	R.I. u. E.I.-Gas
	1,8 ± 0,1	CH <sub>3</sub> Cl	R.I.-Gas
	1,85 ± 0,06	CH <sub>3</sub> Cl	E.I.-Gas
C—Br	1,86 ± 0,05	C <sub>6</sub> Cl <sub>6</sub>	R.I.-Kristall
	1,94 ± 0,1	C <sub>6</sub> H <sub>6</sub> Br <sub>6</sub>	R.I.-Kristall
	1,97	C <sub>2</sub> Br <sub>6</sub>	R.I.-Kristall
	2,03	CBr <sub>4</sub>	R.I.-Flüssigkeit
	2,05	CBr <sub>4</sub>	E.I.-Gas
C—J	2,2 ± 0,025	CJ <sub>4</sub>	R.I.-Kristall
	2,28 ± 0,05	CH <sub>3</sub> J	E.I.-Gas
	2,12	C <sub>6</sub> H <sub>10</sub> S <sub>2</sub>	R.I.-Kristall
	1,64	Thioharnstoff	R.I.-Kristall
C = S	1,6	CS <sub>2</sub>	E.I.-Gas
C ≡ S	1,52 ± 0,05	CS <sub>2</sub>	R.I.-Gas
	1,39	CS <sub>2</sub>	B.Sp.
	1,26	Cyanurtriacid	R.I.-Kristall
N = N	1,10	N <sub>2</sub>	B.Sp.; R.Sp.
N ≡ N	1,065	N <sub>2</sub>	R.I.-Kristall
	1,11	Cyanurtriacid	R.I.-Kristall
	1,15	NO	B.Sp.
N ≡ O	1,13	NO <sub>2</sub> -Gruppe in NaNO <sub>2</sub>	R.I.-Kristall
N = O	1,22	O <sub>2</sub>	B.Sp.
	1,29	O <sub>3</sub>	U.Sp.
	1,37	SO <sub>2</sub>	E.I.-Gas
S = S	1,60	S <sub>2</sub>	B.Sp.
F—F	1,28	F <sub>2</sub>	B.Sp.
Cl—Cl	1,98	Cl <sub>2</sub>	B.Sp.
Br—Br	2,28 ± 0,04	Br <sub>2</sub>	E.I.-Gas
	2,26	Br <sub>2</sub>	B.Sp.
	2,66	J <sub>2</sub>	B.Sp.
J—J	2,64	J <sub>2</sub>	E.I.-Gas
Si—Cl	2,02	SiCl <sub>4</sub>	E.I.-Gas
Ge—Cl	2,1	GeCl <sub>4</sub>	E.I.-Gas
Ti—Cl	2,21	TiCl <sub>4</sub>	E.I.-Gas
Sn—Cl	2,33	SnCl <sub>6</sub>	E.I.-Gas
Ge—J	2,57	GeJ <sub>4</sub>	R.I.-Kristall
Sn—J	2,65	SnJ <sub>4</sub>	R.I.-Kristall
P—Cl	2,04 ± 0,04	PCl <sub>3</sub>	E.I.-Gas
S—F	1,57	SF <sub>6</sub>	E.I.-Gas
Se—F	1,69	SeF <sub>6</sub>	E.I.-Gas
Te—F	1,83	TeF <sub>6</sub>	E.I.-Gas
Hg—Cl	2,28	HgCl <sub>2</sub>	E.I.-Gas
Hg—Br	2,38	HgBr <sub>2</sub>	E.I.-Gas
Hg—J	2,55	HgJ <sub>2</sub>	E.I.-Gas

ultrarotes Spektrum; R. I. Röntgeninterferenzen und E. I. Elektroneninter-

## Literaturverzeichnis.

1. DEBYE, P. u. P. SCHERRER: *Physik. Z.* **18**, 291 (1917).
2. HULL, A.: *Physic. Rev.* **10**, 661 (1917).
- 2a. HADDING, A.: *Zbl. Mineral.* **1921**, 631.
3. HULL, A. and W. P. DAVEY: *Physic. Rev.* **17**, 549 (1921).
- 3a. GO, Y. u. O. KRATKY: *Z. Physik B* **26**, 439 (1934).
4. EWALD, P. P.: *Ann. Physique* **44**, 257 (1914).
5. HALLA, F. u. H. MARK: *Die röntgenographische Untersuchung von Kristallen*, S. 127. Leipzig 1937.
6. BUERGER, M. J.: *Z. Kristallogr.* **88**, 356 (1934).
7. SCHIEBOLD, E.: *Z. Kristallogr.* **86**, 377 (1933). — SAUTER, E.: *Z. Kristallogr.* **84**, 461 (1933).
- 7a. GLOCKER, R.: *Materialprüfung mit Röntgenstrahlen*, 2. Aufl. Berlin 1936.
8. BLAKE, F. C.: *J. Chem. Physique* **2**, 320 (1934). (Enthält eine Ableitung der inneren Intensitätsfaktoren.)
9. Internationale Tabellen zur Bestimmung von Kristallstrukturen, 1936.
10. OTT, H.: *Strukturbestimmung mit Röntgeninterferenzen*. Leipzig 1928.
11. HERMANN, C.: *Z. Kristallogr.* **68**, 257 (1928); **69**, 226, 250, 533 (1929); **76**, 559 (1931).
12. MAUGUIN, C. H.: *Z. Kristallogr.* **76**, 529 (1931).
13. BRAGG, W. L. and J. WEST: *Philosophic. Mag.* **10**, 123 (1930).
14. ROBINSON, B. W.: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **147**, 467 (1934).
15. HENGSTENBERG, J.: *Z. Physik* **58**, 395 (1929).
16. ROBINSON, B. W.: *I. sc. Inst.* **10**, 233 (1933).
17. ROBERTSON, J. M.: *Philosophic. Mag.* **18**, 745 (1934).
18. BRAGG, W.: *Philos. Trans. roy. Soc. Lond. A* **215**, 253 (1915). — HAVIGHURST: *Proc. nat. Acad. Sci. Washington* **11**, 502 (1925). — BRAGG, W. L.: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **123**, 537 (1929). — *The Crystalline State*, Vol. I, p. 221. 1933.
19. ROBERTSON, J. M.: *Philosophic. Mag.* **21**, 176 (1936).
20. HENDRICKS, St. B.: *Nature (Lond.)* **126** (1930). — *Z. Kristallogr.* **74**, 29 (1930).
21. BERNAL, J. D.: *Z. Kristallogr.* **83**, 153—155 (1932).
22. MÜLLER, A.: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **127**, 417 (1930). — *Nature (Lond.)* **129**, 436 (1932).
23. ZACHARIASEN, W. M.: *Z. Kristallogr.* **89**, 442 (1934). — *Physic. Rev.* **45**, 755 (1935).
24. HENDRICKS, St. B.: *Z. Kristallogr.* **91**, 48 (1935).
25. BERNAL, J. D. and H. W. MEGAW: *Proc. roy. Soc. Lond.* **151**, 384 (1935).
26. LEUCK, G. u. H. MARK: *Annalen* **1934**, 1162.
27. COX, E. G., J. M. GOODWIN, A. J. WAGSTAFF: *Annalen* **1935**, 1195.
28. THEILACKER, W.: *Z. Kristallogr.* **90**, 51, 256 (1935).
29. BRAGG, W. L.: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **105**, 370 (1924); **106**, 346 (1924).
30. COX, E. G.: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **135**, 491 (1932).
31. HENDRICKS, St. B.: *Z. Kristallogr.* **84**, 85 (1932).
32. LONSDALE, K.: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **133**, 536 (1931).
33. ROBINSON, B. W.: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **141**, 594 (1933); **142**, 559 (1933).
34. ROBERTSON, J. M.: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **157**, 79 (1936).
35. BERNAL, J. D. and H. W. MEGAW: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **151**, 384 (1935).
36. ROBERTSON, J. M.: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **150**, 106 (1935).

37. JAMES, R. W., G. KING and H. HARROCKS: Proc. roy. Soc. Lond. **153**, 225 (1935). — BANERJEE, K.: Philosophic. Mag. **18**, 1004 (1934).
38. JENKINS, H. O.: Nature (Lond.) **134**, 217 (1934).
39. ROBERTSON, J. M.: Proc. roy. Soc. Lond. A **146**, 473 (1934). — Nature (Lond.) **134**, 381 (1934).
40. — Proc. roy. Soc. Lond. A **142**, 333 (1933).
41. — Proc. roy. Soc. Lond. A **146**, 674 (1934).
42. IBALL, J.: Proc. roy. Soc. Lond. A **146**, 140 (1934).
43. HUGHES, E. W.: J. chem. Physics **3**, 1 (1935). — KNAGGS, J. E.: Nature (Lond.) **135**, 268 (1935). — Proc. roy. Soc. Lond. A **150**, 576 (1935).
44. ROBERTSON, J. M. and L. WOODWARD: J. chem. Soc. Lond. **219** (1937).
45. BERNAL, J. D.: Nature (Lond.) **129**, 277 (1932).
46. ROSENHEIM and G. KING: Chem. Ind. **51**, 464 (1932).
47. MARK, H. u. G. v. SUSICH: Kolloid-Z. **46**, 11 (1928).
48. SIMARD, G. L. and B. E. WARREN: Physic. Rev. **47**, 808 (1935).
49. MARK, H. u. E. A. HAUSER: Kolloid-Z. **22**, Beil., 63 (1926). — IGUCHI, M. u. F. SCHOSSBERGER: Kautschuk **12**, 194 (1936).
50. SCHOSSBERGER, F. u. C. J. CLEWS: Kautschuk **13**, 170 (1937).
51. KRATKY, O. u. H. MARK: Z. physik. Chem. B **36**, 129 (1937).
52. MARK, H. u. G. v. SUSICH: Z. physik. Chem. B **4**, 431 (1929). — MARK, H. u. K. H. MEYER: Z. physik. Chem. B **2**, 115 (1929).
53. SPONSLER, O. L. u. W. DORE: Coll. Symp. **4**, 174 (1926).
54. — u. W. DORE: Cellulosechem. **11**, 186 (1930).
55. SAUTER, E.: Z. physik. Chem. B **35**, 83—128 (1937).
56. MARK, H. u. K. H. MEYER: Z. physik. Chem. Im Druck (1937).
57. ANDRESS, K. R.: Z. physik. Chem. B **2**, 380 (1929).
58. MEYER, K. H. u. L. MISCH: Helvet. physic. Acta. Im Druck (1937).
59. — u. H. MARK: Aufbau der hochpolymeren Naturstoffe, 1930.
60. STAUDINGER, H.: Die hochmolekularen Verbindungen. Berlin 1932.
61. HENGSTENBERG, J. u. H. MARK: Z. Kristallogr. **69**, 271 (1928).
62. LAUE, M. v.: Z. Kristallogr. **64**, 115 (1926). — BRILL, R.: Z. Kristallogr. **74**, 147 (1930); **95**, 455 (1936).
63. FREY-WYSSLING, A.: Protoplasma (Berl.) **27**, 377 (1937).
- 63a. Ergebnisse der technischen Röntgenkunde, Bd. 4, S. 21. Leipzig 1934.
64. WYCKOFF, R. W. G., R. B. COREY and J. BISCOE: Science (N. Y.) **1935**, 175.
65. COREY, R. B. and R. W. G. WYCKOFF: J. of biol. Chem. **14**, 407 (1936).
66. SCHMITT, F. O., D. R. BEAR and G. L. CLARK: Radiology **1935**, 133.
67. CLARK, G. L., E. H. PARKER, J. A. SCHAAD and W. J. WARREN: J. amer. chem. Soc. **57**, 1509 (1935).
68. BRILL, R.: Liebigs Ann. **431**, 204 (1923).
69. KRATKY, O.: Z. physik. Chem. B **5**, 297 (1929). — KRATKY, O. u. S. KURIYAMA: Z. physik. Chem. B **11**, 363 (1931).
- 69a. ASTBURY, W. T.: J. Soc. Dyers Colourists **49**, 169 (1933).
70. — J. Soc. chem. Ind. **49**, 441 (1930). — ASTBURY, W. T. and A. STREET: Philos. Trans. roy. Soc. Lond. A **230**, 75 (1931). — ASTBURY, W. T. and H. J. WOODS: Philos. Trans. roy. Soc. Lond. A **232**, 333 (1933).
71. — Trans. Faraday Soc. **29**, 193 (1933). — KATZ, J. R. et J. C. DERKSEN: Rec. Trav. chim. Pays-Bas et Belg. (Amsterd.) **51**, 513 (1932).
72. ASTBURY, W. T. and W. A. SISSON: Proc. roy. Soc. Lond. A **150**, 533 (1935).
73. — and R. LOMAX: Nature (Lond.) **133**, 795 (1934).

74. SVEDBERG, T.: Nature (Lond.) **127**, 438 (1931).
75. ASTBURY, W. T. and R. LOMAX: J. chem. Soc. Lond. **1935**, 846.
76. BERNAL, J. D. and D. CROWFOOT: Nature (Lond.) **133**, 796 (1934).
77. ASTBURY, W. T., S. DICKINSON and K. BAILEY: Biochemic. J. **29**, 2351 (1935).
78. SVEDBERG and STAMM: J. amer. chem. Soc. **51**, 2170 (1929).
79. — Kolloid-Z. **51**, 10 (1930).
80. — and SJÖGREN: J. amer. chem. Soc. **52**, 279 (1930).
81. BOEHM, G. u. H. H. WEBER: Kolloid-Z. **61**, 269 (1932).
82. ASTBURY, W. T. and S. DICKINSON: Nature (Lond.) **135**, 95 (1935).
83. — — Nature (Lond.) **135**, 765 (1935).
84. THIESSEN, P. A. u. W. WITTSTADT: Z. physik. Chem. B **29**, 359 (1935).
85. WRINCH, D. M.: Protoplasma (Berl.) **24**, 550 (1936).
86. MARK, H. u. H. PHILIPP: Naturwiss. **25**, 120 (1937).
87. GOTTFRIED, C., unter Mitwirkung von F. SCHOSSBERGER: Strukturbericht, Bd. 3. 1933—1935. Leipzig 1936.



# Nichtstationäre Schallvorgänge.

Von **H. BACKHAUS**, Karlsruhe.

Mit 21 Abbildungen.

Inhaltsverzeichnis.		Seite
I.	Einleitung . . . . .	237
II.	Theorie der Ausgleichsvorgänge . . . . .	239
	1. Systeme mit einem Freiheitsgrad . . . . .	239
	2. Systeme mit mehreren Freiheitsgraden . . . . .	240
	3. Symbolische Methoden . . . . .	244
	4. Näherungsweise Berechnung von Ausgleichsvorgängen. . . . .	248
III.	Wahrnehmung von nichtstationären Vorgängen durch das menschliche Gehörorgan . . . . .	254
	5. Ohrmodell und Ausgleichsvorgänge . . . . .	254
	6. Der Aufbau des Tonhöhenbewußtseins . . . . .	256
	7. Die Hörbarkeit von Ausgleichsvorgängen . . . . .	260
	8. Modulierte Klänge. . . . .	266
IV.	Elektroakustische Fragen . . . . .	269
	9. Untersuchungsmethoden für nichtstationäre akustische Vorgänge . . . . .	269
	10. Ausgleichsvorgänge an elektroakustischen Apparaten . . . . .	271
V.	Ausgleichsvorgänge in Sprachlauten . . . . .	273
	11. Das Sprachorgan . . . . .	273
	12. Nichtstationäre Vorgänge bei Vokalen . . . . .	275
	13. Die Konsonanten . . . . .	276
VI.	Nichtstationäre Vorgänge an Musikinstrumenten . . . . .	280
	14. Allgemeines . . . . .	280
	15. Streichinstrumente . . . . .	281
	16. Blasinstrumente . . . . .	283
	17. Die Orgel . . . . .	284
	18. Das Klavier . . . . .	286
	19. Schlaginstrumente . . . . .	288
	20. Elektrische Musikinstrumente . . . . .	290
	Literaturverzeichnis . . . . .	292

## I. Einleitung.

Das menschliche Gehörorgan unterscheidet stationäre Klänge nach ihrer Stärke, Tonhöhe und Klangfarbe. Die Stärke ist bestimmt durch die Amplitude des Grundtons und der Obertöne, die Tonhöhe durch die Frequenz des Grundtons, die Klangfarbe durch die Zusammensetzung des Gesamtklanges aus harmonischen Teiltönen verschiedener Amplitude. Dieser Begriff der Klangfarbe, von HELMHOLTZ (6) als „musikalische Klangfarbe“ bezeichnet, bildete lange Zeit den fast ausschließlichen

Gegenstand der Klangforschung. Es gelang, durch Verbesserung der elektroakustischen Methoden und Apparate immer mehr Feinheiten solcher stationären Klänge zu finden. Besonders auf dem Gebiet der Vokalforschung konnte man zu weitgehender Klarheit über die Charakterisierung verschiedener Vokale nach der Art ihrer Zusammensetzung aus Teiltönen gelangen.

Schwierigkeiten ergaben sich zuerst bei der Feststellung der unterscheidenden Merkmale von Musikklängen. Nur bei wenigen Instrumenten konnten bestimmte Frequenzgebiete festgestellt werden, deren regelmäßige Bevorzugung für den betreffenden Klang eigentümlich ist. Die akustischen Besonderheiten der verschiedenen musikalischen Klangvorgänge mußten daher auf anderem Gebiet als dem der „musikalischen Klangfarbe“ liegen. Einen sehr bedeutsamen Hinweis hierfür gaben Untersuchungen von STUMPF (20), aus denen man schließen muß, daß die für die einzelnen Musikinstrumente charakteristischen Eigentümlichkeiten weniger im stationären Klange, als in den Ausgleichsvorgängen, vor allem in den Einschwingungsvorgängen zu suchen sind.

Auch für die technische Elektroakustik sind diese Gesichtspunkte von großer Bedeutung. Bei der Herstellung von elektroakustischen Übertragungsanlagen und Apparaten hatte man sich ursprünglich auf die Diskussion der Frequenzabhängigkeit der Übertragung im stationären Betriebe beschränkt. Angesichts der Schwierigkeit, die darin liegt, bei größeren mechanischen Schwingern, besonders bei Lautsprechern, mechanische Resonanzen zu vermeiden, hatte man sich damit begnügt, darauf zu achten, daß die Frequenzkurve des Apparates genügend breite Frequenzbereiche überdeckte. Innerhalb dieser Bereiche glaubte man Ungleichmäßigkeiten in Kauf nehmen zu dürfen, um so mehr als gegen Amplitudenfälschungen die Empfindlichkeit des Ohres nur gering ist. Hierbei wurde aber übersehen, daß solche Spitzen in der Resonanzkurve auf schwach gedämpfte Eigenfrequenzen des Apparates hindeuten, die zwar im stationären Betrieb bedeutungslos sind, aber bei den Ausgleichsvorgängen Veranlassung zu freien Schwingungen geben, die um so länger andauern, je schärfer die Spitzen der Resonanzkurve sich ausprägen. Im normalen Betrieb entstehen dann also, durch immer wiederholte Anstöße neu erregt, fremde Frequenzen, die nur dem verwendeten Apparat eigentümlich sind, und die eine schwere Beeinträchtigung des subjektiven Klangeindrucks darstellen.

Seit einigen Jahren hat sich daher die akustische Forschung sehr eingehend mit den nichtstationären Vorgängen befaßt und zahlreiche beachtliche Ergebnisse auf diesem Gebiet gewonnen. Hierüber soll im Nachstehenden berichtet werden. Dabei muß das große Gebiet der Raum- und Bauakustik, in dem auch gerade nichtstationäre Vorgänge eine sehr große Rolle spielen, außer Betracht bleiben und einem eigenen Bericht überlassen werden.

## II. Theorie der Ausgleichsvorgänge.

1. **Systeme mit einem Freiheitsgrad.** Die Bewegung eines Systems mit einem Freiheitsgrad, das die Masse  $m$  besitzt, der Reibungskraft  $r$  und der Rückstellkraft  $c$  unterliegt, vollzieht sich nach der Differentialgleichung:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + c x = P \sin \omega t.$$

Die allgemeine Lösung ist:

$$x = A e^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \psi) + B \sin(\omega t - \varphi). \quad (1)$$

Darin ist:

$$B = \frac{P}{m \sqrt{(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 r^2}{m^2}}} = \frac{P}{m \varrho}$$

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \varphi = \arctg \frac{\frac{\omega r}{m}}{\Omega_0^2 - \omega^2}, \quad \delta = \frac{r}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}.$$

$A$  und  $\psi$  sind Integrationskonstanten, die von der Wahl der Anfangsbedingungen abhängen. Ihre Berechnung ist hiernach schon in diesem einfachen Fall recht umständlich. Man findet, wenn man annimmt, daß das System sich ursprünglich in Ruhe befindet und die Wirkung der sinusförmigen Kraft zur Zeit  $t = 0$  plötzlich einsetzt:

$$A = \frac{P \omega}{m \varrho^2 \omega_0} \sqrt{4 \delta^2 \omega_0^2 + (\Omega_0^2 - \omega^2 - 2 \delta^2)^2}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2 \delta \omega_0}{2 \delta^2 - (\Omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Der Vorgang stellt sich dar als Überlagerung der stationären Schwingung mit der Amplitude  $B$  und der gedämpften Ausgleichsschwingung mit der Amplitude  $A$ . Wenn die Anregungsfrequenz  $\omega$  der Eigenfrequenz  $\omega_0$  des Systems nahekommt, sind Schwebungen wahrzunehmen, die nach dem Dämpfungsfaktor  $\delta$  abklingen. Der Exponentialfaktor läßt sich

auch schreiben:  $e^{-\delta t} = e^{-\frac{r}{2m} t} = e^{-\frac{t}{T_0}}$ , wo  $\frac{1}{T_0} = \frac{\pi r}{\omega_0 m}$  das logarithmische

Dekrement und  $T_0$  die Periodendauer der Eigenschwingung des Systems ist. Maßgebend für die Schnelligkeit des Ausklingens ist also das logarithmische Dekrement oder die Dämpfung des Schwingungssystems. Je stärker die Dämpfung ist, um so schneller ver klingt der Ausgleichsvorgang. Nach Verlauf von  $1/\delta$  Perioden ist der Ausgleichsvorgang auf  $e^{-1} = 0,37 = 37\%$  seines Anfangswertes abgeklingen.

Die relative Stärke des Ausgleichsvorganges, d. h. das Verhältnis der Amplitude  $B$  der stationären Schwingung und  $A$  der Ausgleichsschwingung hängt von der Abstimmung des Systems im Vergleich zur Anregungsfrequenz ab. Liegt die Eigenfrequenz sehr tief im Vergleich zur Anregungsfrequenz, ist also:  $\Omega_0 \ll \omega$ , so wird:

$$B = \frac{P}{m \omega} \frac{1}{\omega}, \quad A = \frac{P}{m \omega} \frac{1}{\Omega_0}, \quad \text{also } B \ll A.$$

Für  $\Omega_0 = \omega$  wird:  $B = \frac{P}{\omega r}$ ,  $A = \frac{P}{\omega r \omega_0}$ , also bei kleiner Dämpfung:  $B \approx A$ .  
Schließlich für hohe Abstimmung, also für  $\Omega_0 \gg \omega$  ist:  $B = \frac{P}{m \Omega_0^2}$ ,  $A = \frac{P}{m \Omega_0^2 \omega_0}$ ,  
d. h.  $B \gg A$ . Der Ausgleichsvorgang macht sich also um so mehr störend bemerkbar, je höher die Anregungsfrequenz über der Eigenfrequenz liegt.

Aus der Lösung (1) ist auch der Ausgleichsvorgang beim Aussetzen der erregenden Kraft, d. h. der Ausschwingvorgang, zu entnehmen. Wenn die eingeprägte Kraft in dem Augenblick aussetzt, wo sie durch Null geht, so wird der Ausschwingvorgang dargestellt durch:  $x = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \psi)$ , d. h. durch das erste Glied auf der rechten Seite von Gl. (1).

**2. Systeme mit mehreren Freiheitsgraden.** Bei der Berechnung der Ausgleichsvorgänge an Systemen mit zwei Freiheitsgraden ist die Bestimmung der Integrationskonstanten aus den Anfangsbedingungen schon so umständlich, daß sie hiernach niemals unternommen worden ist. Zur strengen Berechnung von Ausgleichsvorgängen bedient man sich daher eines Verfahrens, das darauf beruht, daß man die nichtstationäre eingeprägte Kraft unter Anwendung des FOURIERSchen Integralsatzes in eine unendliche Anzahl von stationären Sinusschwingungen mit geeignet gewählter Amplitude zerlegt, und nach dem Prinzip von der ungestörten Superposition die durch die stationären Einzelursachen hervorgerufenen stationären Einzelergebnisse überlagert.

Das plötzliche Einschalten einer stationären Kraft mit der Amplitude  $K$  zur Zeit  $t = 0$  kann man darstellen durch:

$$k = K \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega \right], \quad (2)$$

denn die eckige Klammer hat in diesem Ausdruck folgende Werte:

$$\text{für } t < 0: 0, \quad \text{für } t = 0: 1/2, \quad \text{für } t > 0: 1.$$

Die Formel (2) läßt sich durch formale Rechnung leicht überführen in die komplexe Form:

$$k = \frac{K}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega} d\omega. \quad (3)$$

Die stationäre Kraft  $\mathfrak{R}$  erzeuge in dem System die stationäre Wirkung:  $\mathfrak{X} = \mathfrak{R}/\mathfrak{B}$ , worin  $\mathfrak{B}$  eine Funktion von  $\omega$  ist. Dann wird die Gesamtwirkung:

$$x = \frac{K}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\mathfrak{B}(\omega)\omega} d\omega. \quad (4)$$

Der Integrand hat Singularitäten für  $\omega = 0$  und für die Wurzelwerte  $\omega = p_r$  der „Stammgleichung“  $\mathfrak{B}(\omega) = 0$ . Den allgemeinen Fall, in dem diese Gleichung auch mehrfache Wurzeln haben kann, hat K. W. WAGNER (7) behandelt. Hier sei angenommen, daß die Wurzeln nur einfach und endlich sind. Ferner folgt für passive Schwingungssysteme, d. h. für

solche, die nicht selbst Energie erzeugen, leicht, daß die Imaginärteile der Wurzeln positiv sind. Wenn wir dann den Integrationsweg nach Abb. 1 in der komplexen Ebene von  $\omega = R e^{i\vartheta}$  betrachten, so folgt durch Abschätzung des Integranden für den oberen Halbkreis, daß längs dieses Halbkreises für  $R \rightarrow \infty$  das Integral verschwindet. An Stelle des gesuchten Integrals (4) längs der reellen Achse darf also das Integral auf dem Wege nach Abb. 1 gesetzt werden, und hierfür folgt aus dem Residuensatz leicht:

$$x = K \left[ \frac{1}{\mathfrak{B}(\omega)} + \sum_{\nu} \frac{e^{i p_{\nu} t}}{p_{\nu} \left( \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \omega} \right)_{\omega = p_{\nu}}} \right] = K \cdot \varphi(t). \quad (5)$$

Diese zuerst von HEAVISIDE (3) ohne Beweis mitgeteilte Formel ist zuerst von K. W. WAGNER (7) bewiesen worden. Sie gestattet, den zeitlichen Verlauf von Vorgängen streng zu berechnen, der eintritt, wenn eine konstante Kraft plötzlich auf ein lineares passives System zu wirken beginnt. Voraussetzung dazu ist die Lösung der algebraischen oder transzendenten Gleichung:  $\mathfrak{B}(\omega) = 0$ .  $\varphi(t)$  heißt die „Übergangsfunktion“.

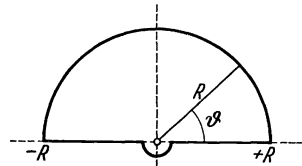


Abb. 1.  
Integrationsweg für Formel (4).

Hiernach ist es nun auch möglich, die Wirkung einer zeitlich beliebig verlaufenden Kraft zu ermitteln, indem man nämlich diese Kraft unterteilt in eine zeitliche Folge von unendlich kleinen konstanten Einzelkräften, deren Übergangsfunktionen ja nach (5) bekannt sind. Ist  $f(t)$  der zeitliche Verlauf der wirkenden Kraft, die zur Zeit  $t = 0$  einsetzt, so folgt nach CARSON (11) für die Berechnung der Wirkung die Vorschrift:

$$x = \frac{d}{dt} \int_0^t f(t) \varphi(t - \lambda) d\lambda. \quad (6)$$

Der wichtigste Fall ist wohl der des Einsetzens einer Kraft von zeitlich sinusförmigem Verlauf zur Zeit  $t = 0$ . Dann ist zu setzen:  $f(t) = K \sin \omega t$  oder  $f(t) = K e^{i\omega t}$ . Im letzten Fall ist dann für sinusförmigen Verlauf aus dem Resultat der imaginäre Teil auszusondern. Die Ausführung der Rechnung führt unter Anwendung der LAPLACESchen Interpolationsformel zu dem Ergebnis:

$$x = K \left[ \frac{e^{i\omega t}}{\mathfrak{B}(\omega)} + \sum_{\nu=1}^n \frac{e^{i p_{\nu} t}}{(p_{\nu} - \omega) \mathfrak{B}'(p_{\nu})} \right]. \quad (7)$$

Das erste Glied auf der rechten Seite stellt den stationären Vorgang dar, die Summe den überlagerten Ausgleichsvorgang. Dieses zweite Glied allein ist unter Anfangsbedingungen, die dem gewählten Einschaltvorgang entsprechen, als Darstellung des Ausschwingvorganges zu deuten. Die Wurzeln  $p_{\nu}$  sind, wenn die Einzelsysteme alle schwingungsfähig

sind, sämtlich komplex. Die imaginären Teile sind, wie vorher festgestellt, alle positiv. Demnach stellen je zwei Glieder der Summe, die konjugiert komplexen Wurzeln entsprechen, eine gedämpfte Schwingung dar. Der gesamte Ausgleichsvorgang setzt sich demnach aus gedämpften Schwingungen zusammen, deren Frequenzen die Eigenfrequenzen des Systems sind.

Mit Hilfe der Formel (7) hat der Verfasser (19) die Ausgleichsvorgänge berechnet, die in Systemen mit zwei und drei Freiheitsgraden entstehen. Es handelt sich hier um gekoppelte elektrische Schwingungskreise, deren erster durch eine plötzlich einsetzende sinusförmige Spannung erregt wird. Berechnet wird der Verlauf des Stromes im letzten Glied. In der bisherigen Betrachtung von mechanischen Schwingungen würde dem die Geschwindigkeit des zweiten Systems entsprechen. Die Bedeutung von  $\mathfrak{B}$  ist hier eine entsprechend andere. Für den Fall, daß beide Systeme gleiche ungekoppelte Eigenfrequenz  $\omega_0$ , die mit der Anregungsfrequenz übereinstimmt, und gleiche Dämpfung  $D$  haben, ergibt sich im Fall elastischer Koppelung für die Geschwindigkeit des zweiten Systems:

$$v_2 = -\frac{P}{\sqrt{r_1 r_2}} \frac{m}{1+m^2} \left[ \cos \omega_0 t - \frac{\sqrt{1+m^2}}{2m} e^{-\omega_0 \frac{D}{2} t} \left\{ \frac{\sqrt{1+k^2}}{v_1} \cos(\omega_0 v_1 t - \varphi_1) + \frac{\sqrt{1-k^2}}{v_2} \cos(\omega_0 v_2 t + \varphi_2) \right\} \right] \quad (8)$$

Darin bedeutet:  $P$  die Amplitude der eingepprägten Kraft,  $k$  den Koppelungskoeffizienten,  $r_1$  bzw.  $r_2$  die Reibungskräfte in beiden Teilsystemen,  $D$  die für beide Systeme gleiche Dämpfung,

$$m = \frac{k}{D}, \quad v_1 = \sqrt{1 - \frac{D^2}{4} + k}, \quad v_2 = \sqrt{1 - \frac{D^2}{4} - k},$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{2+k}{2v_1 m}, \quad \varphi_2 = \arctg \frac{2-k}{2v_2 m}.$$

In den praktisch interessanten Fällen sind Koppelung und Dämpfung von gleicher Größenordnung  $10^{-2}$ . Dann läßt sich durch Vernachlässigung höherer Potenzen von  $D$  die strenge Formel (8) noch weiter vereinfachen und es ergibt sich:

$$v_2 = -\frac{P}{\sqrt{r_1 r_2}} \frac{m}{1+m^2} \cos \omega_0 t \left[ 1 - \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} e^{-\omega_0 \frac{D}{2} t} \cos\left(\omega_0 \frac{k}{2} t - \varphi\right) \right]$$

mit  $\varphi = \arctg \frac{1}{m}$ .

Wenn man für den Ausschwingvorgang annimmt, daß die eingepprägte Kraft in dem Augenblick aussetzt, in dem sie durch Null geht, findet man für den Ausschwingvorgang:

$$v_2 = \frac{P}{\sqrt{r_1 r_2}} \frac{e^{-\omega_0 \frac{D}{2} t}}{\sqrt{1+m^2}} \cos \omega_0 t \cdot \cos\left(\omega_0 \frac{k}{2} t - \varphi\right). \quad (9)$$

Der Ausgleichsvorgang kommt zustande durch Überlagerung der beiden Koppelschwingungen:  $\omega_{1,2} = \omega_0 (1 \pm k/2)$ , stellt sich demnach als Schwebung dar. Da die Amplituden der beiden Koppelschwingungen mit guter Näherung einander gleich sind, ist die Schwebung bis auf Null durchmoduliert. Die Schwebungsfrequenz ist proportional dem Koppelungskoeffizienten  $k$ , die Schwebung erfolgt also um so schneller, je enger die Koppelung ist. Die Schwingung vollzieht sich beim Ausschwingvorgang zwischen zwei Paaren von Umhüllungskurven: einmal den

Kurven:  $\pm e^{-\omega_0 \frac{D}{2} t} \cos\left(\omega_0 \frac{k}{2} t - \varphi\right)$  und ferner den Exponentialkurven  $\pm e^{-\omega_0 \frac{D}{2} t}$ , s. Abb. 2. Von technischem Interesse ist vor allem die Dauer des Ausgleichsvorganges, die man etwa als die Zeit definieren kann, innerhalb derer der Vorgang bis auf 10% seines Anfangswertes

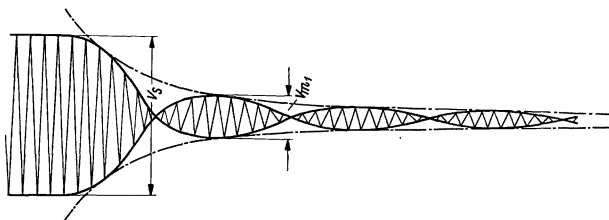


Abb. 2. Ausschwingvorgang eines Systems mit zwei Freiheitsgraden.

abgeklungen ist. Nach der Abb. 2 wird man allgemein sagen können, daß der Ausgleichsvorgang um so schneller abklingt, je größer die Dämpfung ist. In praktischen Fällen ist aber meist die Koppelung so lose, daß die Schwebungsumhüllungskurve sich in ihrem ersten Abfall nicht viel von der Exponentialkurve unterscheidet. Dann kann man sagen, daß die Ausgleichsdauer kleiner wird mit wachsender Koppelung oder, was in der Theorie der Siebketten etwa auf das gleiche hinauskommt, mit wachsender Lochbreite.

Die strenge Berechnung des Verlaufes von Ausgleichsvorgängen, wie sie in Gl. (8) und (9) gegeben ist, kann dazu dienen, um aus experimentellen Aufnahmen von Ausschwingvorgängen umgekehrt auf die Größe von Koppelung und Dämpfung zu schließen. Zunächst kann durch Auszählung der Schwingungen, die auf eine Schwebungsperiode entfallen, bei Systemen mit zwei Freiheitsgraden allgemein die Größe der Koppelung ermittelt werden. Da man nämlich für die Koppelfrequenzen setzen kann:  $\omega_1 = \omega_0 (1 + k/2)$ ,  $\omega_2 = \omega_0 (1 - k/2)$ , so ist die Schwebungsfrequenz  $\omega_0 k$ . Ist also  $n$  die Anzahl der Schwingungen, die auf eine Schwebungsperiode entfallen, so wird:  $k = 1/n$ . Weiter kann man aus solchen durchmodulierten Schwebungen, wie man sie unter den gemachten Voraussetzungen bei elastischer Koppelung erhält, aus dem Verhältnis des ersten Schwebungsmaximums  $v_{m_1}$  zu der stationären Amplitude  $v_s$  auf die Größe  $m = k/D$  schließen. Nach (8) ist nämlich:

$v_{m1} =_2 v e^{-\pi/m}$ , demnach:  $m = \frac{\pi}{\ln \frac{v_s}{v_{m1}}}$ . Das wurde vom Verfasser (94) be-

nutzt, um aus Ausschwingaufnahmen, die bei der Hauptresonanz von Geigen gemacht wurden, auf die Dämpfung der beiden Teilsysteme, Saite und Instrumentkörper, und die Koppelung zwischen beiden zu schließen. Hier sind in der Tat die Voraussetzungen erfüllt, die der Gl. (9) zugrunde liegen: für die aufgenommenen Druckschwankungen im Schallfeld ist die Geschwindigkeit  $v_2$  des nicht angeregten Systems, des Instrumentkörpers, maßgebend: Durch Abgriff der Saite ist diese auf die Hauptresonanz des Instrumentkörpers abgestimmt. Die Koppelung über den Steg ist wesentlich elastisch. Gleichfalls folgt hieraus, daß die beiden Systeme, Saite und Körper, merklich gleiche Eigendämpfung haben müssen. Bei der Saite, die an und für sich viel schwächer gedämpft ist als der Körper, findet eine zusätzliche Dämpfung durch die Deformation des Steges statt.

**3. Symbolische\* Methoden.** Ein wichtiges Hilfsmittel zur Berechnung von Ausgleichsvorgängen, besonders in komplizierten Fällen, bei denen die gewöhnlichen Rechenmethoden sehr unübersichtlich werden, liegt in der Verwendung symbolischer Methoden, die, auf Gedanken von HEAVISIDE (3) beruhend, von K. W. WAGNER (7), BROMWICH (9) und CARSON (11) streng begründet und ausgestaltet worden sind. Das Hauptanwendungsgebiet lag ursprünglich auf dem Gebiet der Elektrotechnik. Erst neuerdings sind durch PRAGER (40) auch mechanische Aufgaben hiernach behandelt worden. Dessen Darstellung soll hier zugrunde gelegt werden.

Die Bewegung eines Systems sei bestimmt durch die lineare Differentialgleichung:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = z(t). \quad (10)$$

An Stelle einer unbekanntn Funktion  $f(t)$  führt man eine Funktion  $F(p)$  der komplexen Variablen  $p = \tau + j\sigma$  ein durch die Beziehung

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} k(t, p) F(p) dp, \quad (11)$$

wobei über den Transformationskern  $k(t, p)$  so verfügt wird, daß

$$k(t, p) = \frac{e^{pt}}{p} \quad (12)$$

ist.

Der Integrationsweg liegt parallel zur imaginären Achse in der  $p$ -Ebene. Die reelle positive Größe  $c$  wird so gewählt, daß die singulären Stellen des Integranden links vom Integrationsweg liegen. Wenn man annimmt, daß die Differentiation unter dem Integralzeichen zulässig ist, findet man für die Ableitungen von  $f(t)$ :



$$\frac{d^n}{dt^n} [f(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} k(t, p) p^n F(p) dp. \quad (13)$$

Die Störungsfunktion  $z(t)$  sowie die gesuchte Funktion seien gleichfalls in der Form (11) darstellbar:

$$z(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} k(t, p) Z(p) dp \quad (14)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} k(t, p) Y(p) dp. \quad (15)$$

Dann ergibt sich durch Einsatz von (14) und (15) in (10) und Berücksichtigung von (13):

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} dp k(t, p) [(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) Y(p) - Z(p)] = 0.$$

Daraus folgt

$$Y(p) = \frac{Z(p)}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}.$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist dann durch (15) gegeben. Wenn man (12) in (11) einsetzt, so sieht man leicht durch Ausführung der komplexen Integration, daß  $f(t)$  für negative Zeiten  $t$  verschwindet. Hierin liegt die besondere Eignung dieser Wahl von  $k(t, p)$  nach (12) für die Berechnung des Einflusses plötzlich einsetzender störender Kräfte auf ein ruhendes System.

Die von HEAVISIDE vorgeschlagene symbolische Rechnung besteht nun darin, daß man in (11) auf der rechten Seite nur die Funktion  $F(p)$  stehen läßt. Man schreibt dann:

$$F(p) \doteq \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{pt}}{p} F(p) dp = f(t).$$

In Worten:  $F(p)$  ist das abgekürzte symbolische Zeichen für  $f(t)$ . Aus (13) folgt dann:

$$\frac{d^n}{dt^n} [f(t)] \leftarrow p^n F(p). \quad (16)$$

Man rechnet dann mit den Operatoren wie mit Zahlen und hat schließlich unter Benutzung von (14) und (15) zu den eigentlichen Funktionen durch Ausführung der Integrationen überzugehen. Es ist demnach nützlich, die Bedeutung der einfachsten Funktionen des Operators  $p$  ein für alle Male zu ermitteln.

Für  $F(p) = p^{-n}$  wird der Integrand in (11):

$$e^{pt} \cdot p^{-n-1} = p^{-n-1} + t p^{-n} + \dots + \frac{t^n}{n!} p^{-1} + \dots$$

Man sieht dann leicht, daß  $f(p)$  für  $t < 0$  verschwindet, für  $t > 0$  liegt ein  $(n-1)$ -facher Pol bei  $p = 0$ , der das Residuum  $t^n/n!$  ergibt. Demnach:

$$p^{-n} \div \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0. \\ \frac{t^n}{n!} & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

Speziell:

$$p^0 \div \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp = 1.$$

Das gilt für  $t > 0$ . Man begnügt sich mit dieser Angabe und schreibt hierbei und in ähnlichen Fällen den Wert 0 für  $t < 0$  nicht mehr eigens an.

Ähnlich findet man wenn,  $\alpha$  komplex ist:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{p-\alpha} &\div e^{\alpha t} \\ \frac{p^n}{(p-\alpha)^{n+1}} &\div \frac{t^n}{n!} e^{\alpha t} \\ \frac{p^2}{p^2+\alpha^2} &\div \cos \alpha t \\ \frac{\alpha p}{p^2+\alpha^2} &\div \sin \alpha t \\ \frac{p^2}{p^2-\alpha^2} &\div \mathfrak{C} \cos \alpha t \\ \frac{\alpha p}{p^2-\alpha^2} &\div \mathfrak{S} \sin \alpha t. \end{aligned} \right\} \quad (I7)$$

Aus (I1), (I2) folgt ferner:

$$F\left(\frac{p}{a}\right) \div f(at) \quad (I8)$$

Ebenso:

$$e^{-ap} \cdot F(p) \div f(t-a). \quad (I9)$$

Der Operatorausdruck  $e^{-ap}$  stellt hiernach eine Funktion dar, die für  $t < a$  identisch verschwindet und für  $t > a$  den Wert 1 annimmt. Das ist der unstetige Einschaltstoß, Abb. 3a.

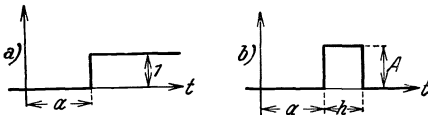


Abb. 3 a und b. Zur Definition von  $\mathfrak{S}_1(t)$ .

Setzt man jetzt zwei derartige Funktionen nach Abb. 3b zusammen, so erhält man den Operatorausdruck:

$$A(e^{-ap} - e^{-(a+h)p}).$$

Die Integration von  $-\infty$  bis  $+\infty$  hinüber ergibt  $Ah$ . Wenn nun  $h$  gegen Null geht, aber dabei  $A$  so wächst, daß  $Ah = 1$  bleibt, so erhält man eine singuläre Funktion, die für  $t \geq 0$  verschwindet, aber bei  $t = 0$  so unendlich wird, daß ihr Integral von  $-\infty$  bis  $+\infty$  den Wert 1 hat. Ihre Operatordarstellung ist:

$$\lim_{h=0} \frac{e^{-ap} - e^{-(a+h)p}}{p} = p \cdot e^{-ap}.$$

Nach (19) ist dann  $p$  der Operatorausdruck für diese singuläre Funktion  $\mathfrak{E}_1(t)$ .  
 Also:  $p \div \mathfrak{E}_1(t)$  }  
 und nach (19):  $p \cdot e^{-ap} \div \mathfrak{E}_1(t-a).$  } (20)

Es ist offenbar:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{E}_1(t) dt = 1$ . Man kann  $\mathfrak{E}_1(t)$  als Darstellung einer plötzlichen Stoßkraft auffassen, die zur Zeit  $t$  einer ruhenden Masse  $m$  plötzlich die Geschwindigkeit  $v = 1/m$  erteilt. Ähnlich findet man für einen Grenzübergang  $h \rightarrow 0$  nach Abb. 4 eine Funktion  $\mathfrak{E}_2(t)$ , die zwei unendlich rasch aufeinanderfolgende entgegengesetzt gleiche Stöße darstellt, durch die zur Zeit  $t = 0$  eine ruhende Masse  $m$  plötzlich die Auslenkung  $s = 1/m$  erhält. Man findet:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t \mathfrak{E}_2(t) dt = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{E}_2(t) \div p^2. \quad (21)$$

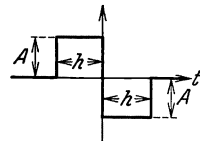


Abb. 4. Zur Definition von  $\mathfrak{E}_2(t)$ .

In diesem Zusammenhang kann man noch  $1 = p^0 \div \mathfrak{E}_0(t)$  setzen.

Mit diesen Mitteln kann man in sehr eleganter Weise auch schwierige Probleme lösen. Dies sei an zwei einfachen Beispielen erläutert: Eine Masse  $m$  stehe unter dem Einfluß einer Rückstellkraft  $c$ . Zur Zeit  $t = 0$  habe sie die Anfangsauslenkung  $s_0$  und die Geschwindigkeit  $v_0$ . Gleichzeitig werde plötzlich eine konstante Kraft  $P$  angebracht. Dann gilt mit den eingeführten Bezeichnungen die Differentialgleichung:

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} + c s = P \mathfrak{E}_0(t) + v_0 m \mathfrak{E}_1(t) + s_0 m \mathfrak{E}_2(t).$$

Dann gilt entsprechend (16), (20), (21), wenn  $c/m = \omega_0^2$  gesetzt wird:

$$(p^2 + \omega_0^2) S = \frac{P}{m} + v_0 p + s_0 p^2,$$

dennach:

$$S(p) = \frac{P}{m \omega_0^2} \left( 1 - \frac{p^2}{p^2 + \omega_0^2} \right) + \frac{v_0 p}{p^2 + \omega_0^2} + \frac{s_0 p^2}{p^2 + \omega_0^2}.$$

Der Deutung nach (17) ergibt die Lösung:

$$s(t) = \frac{P}{m \omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + s_0 \cos \omega_0 t.$$

Ein weiteres Beispiel bezieht sich auf einen kontinuierlichen schwingenden Körper, eine homogene Saite, auf deren Mitte zur Zeit  $t = 0$  plötzlich eine konstante Kraft  $P$  zu wirken beginnt. Wenn  $S$  die Spannkraft und  $\mu$  die Masse der Längeneinheit ist, so lautet die Differentialgleichung der Saite:  $S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ . Es sei  $\frac{S}{\mu} = a^2$ . Dann erhält man entsprechend (13) für  $Y(x, p)$  die Gleichung:  $\frac{d^2 Y}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2} Y = 0$ . Die Lösung, die für  $x = 0$  verschwindet, ist:  $Y = A \mathfrak{E} \sin \frac{p}{a} x$ , und die Integrationskonstante  $A$  findet man aus der Gleichgewichtsbedingung

für den Saitenmittelpunkt:  $2 S \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=l/2} = -P$  zu:  $A = \frac{P}{2 S \frac{p}{a} \mathfrak{Cof} \frac{pl}{2a}}$ .

Damit erhält man die Lösung in symbolischer Form:

$$y \left( \frac{l}{2}, t \right) \leftarrow \frac{Pl}{4S} \frac{\mathfrak{Sin} \frac{pl}{2a}}{\frac{pl}{2a} \mathfrak{Cof} \frac{pl}{2a}}.$$

Es ist:

$$\frac{\mathfrak{Sin} q}{q \mathfrak{Cof} q} = \frac{8}{\pi^2} \left( \mathbf{I} - \frac{p^2}{p^2 + \frac{\pi^2}{4}} \right) + \frac{8}{9\pi^2} \left( \mathbf{I} - \frac{p^2}{p^2 + \frac{9\pi^2}{4}} \right) + \dots$$

Daraus folgt mit einigen Umformungen und unter Benutzung von (17) und (18):

$$y \left( \frac{l}{2}, t \right) = \frac{Pl}{4S} \left[ \mathbf{I} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{8 \cos(2r+1)\pi \frac{at}{l}}{(2r+1)^2 \pi^2} \right].$$

Eine andere Form dieses Resultates, die manchmal nützlich ist, erhält man durch die Reihenentwicklung:

$$\frac{\mathfrak{Sin} q}{q \mathfrak{Cof} q} = \frac{\mathbf{I} - e^{-2q}}{q(\mathbf{I} + e^{-2q})} = \frac{\mathbf{I}}{q} (\mathbf{I} - 2e^{-2q} + 2e^{-4q} \dots).$$

Die Reihe ist gleichmäßig konvergent, weil längs des Integrationsweges für (11) wegen  $\Re(2p) > 0: |e^{-2p}| < \mathbf{I}$  ist. Man kann also die Reihe gliedweise interpretieren, und erhält als Resultat:

$$\begin{aligned} \frac{4S}{Pl} \cdot y \left( \frac{l}{2}, t \right) &= \frac{2at}{l} && \text{für } 0 < \frac{2at}{l} < 2 \\ &= 4 - \frac{2at}{l} && \text{für } 2 < \frac{2at}{l} < 4 \\ &= \frac{2at}{l} - 4 && \text{für } 4 < \frac{2at}{l} < 6 \end{aligned}$$

usw.

Für andere Formen der symbolischen Rechnung, insbesondere eine von H. SCHMIDT (24) vorgeschlagene, sei auf die Arbeit von PRAGER (40) verwiesen, wo auch weitere Literatur angegeben ist.

**4. Näherungsweise Berechnung von Ausgleichsvorgängen.** Voraussetzung für die strenge Berechnung der Ausgleichsvorgänge ist die Lösung einer algebraischen Gleichung. Das ist schon bei Systemen mit zwei Freiheitsgraden eine Gleichung vierten Grades. Eine Darstellung des Ergebnisses in übersichtlicher Form gelingt daher nur unter besonders einfachen Umständen. Bei Systemen mit mehr als zwei Freiheitsgraden gilt das in verstärktem Maße. Auch hier gelingt eine Lösung nur unter besonderen Annahmen, die technisch meist nicht in Betracht kommen. Es ist aber möglich, unter Berücksichtigung der Resonanzeigenschaften

der betrachteten Systeme Beziehungen zwischen diesen und der Dauer der Ausgleichsvorgänge herzuleiten. Diesen Weg hat zuerst KÜPFMÜLLER (16) gezeigt.

KÜPFMÜLLER hat auch zuerst darauf hingewiesen, daß es nützlich ist, die FOURIER-Integrale von verschiedenen Einschaltursachen zu betrachten. Das plötzliche Einschalten einer konstanten Kraft  $K$  zur Zeit  $t = 0$  läßt sich nach (2) darstellen durch:

$$k = K \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega \right] = \frac{K}{2} + \int_0^{\infty} A(\omega) \sin \omega t d\omega,$$

worin:  $A(\omega) = K/\pi\omega$  ist. Der unstetige Einschaltvorgang erscheint hier ersetzt durch eine ständige Kraft  $K/2$  und eine unendliche Folge von Einzelkräften  $\frac{K}{\pi\omega} \sin \omega t$ , die je in den Frequenzintervallen  $d\omega$  wirken und als streng stationär, d. h. von der Zeit  $-\infty$  bis  $+\infty$  als vorhanden angenommen werden müssen. Der Faktor  $A(\omega) = K/\pi\omega$  stellt hier das Gewicht dar, mit dem die Frequenz  $\omega$  zu dem Einschaltvorgang beiträgt. Durch die Funktion  $A(\omega)$  wird hiernach das Spektrum des Vorganges dargestellt. In dem hier betrachteten Fall sind die Amplituden der Teilfrequenzen umgekehrt proportional der Frequenz. Die kurvenmäßige Darstellung des Amplitudenspektrums ergibt daher eine Hyperbel.

Wird die Kraft nicht unstetig geschaltet, erfolgt vielmehr ihr Einsatz nach einer Exponentialfunktion mit der Zeitkonstante  $T$  in der Form:  $k = K(1 - e^{-t/T})$ , so finden BÜRCK, KOTOWSKI und LICHTÉ (67) für das Amplitudenspektrum:

$$A(\omega) = \frac{K}{\pi\omega} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}. \quad (22)$$

Der Abfall nach höheren Frequenzen erfolgt hier schneller als bei dem unstetigen Einsatz. Dieser Unterschied zeigt sich um so stärker, je größer die Zeitkonstante  $T$  ist. Akustisch bedeutet das, daß ein „weicher“ Einsatz der Kraft den geräuschartigen Charakter des Vorganges, der hauptsächlich durch die hohen Teilfrequenzen bedingt ist, schwächer erscheinen läßt.

Ein kurzer Stoß, der unstetig einsetzt, um, nach Erreichen der Amplitude 1, mit der Zeitkonstante  $T$  exponentiell abzuklingen, hat das Amplitudenspektrum (67):

$$A(\omega) = \frac{T}{\pi\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}. \quad (22a)$$

Schließlich ist von Interesse das Verhalten eines elektrischen Schwingungskreises  $R, L, C$  im Falle der aperiodischen Grenzämpfung, wenn zur Zeit  $t = 0$  unstetig die Gleichspannung  $E$  angelegt wird. Dann ist bekanntlich:  $i = \frac{2E}{R} \frac{t}{T} e^{-t/T}$ , worin  $T = \frac{2L}{R}$  ist. Setzt man  $\frac{2E}{R} = 1$ ,

so ergibt sich für das Amplitudenspektrum dieses Stromstoßes (67):

$$A(\omega) = \frac{2}{T} \frac{1}{\left(\frac{1}{T^2} + \omega^2\right)}. \quad (22b)$$

Wenn die Kraft  $K$  zur Zeit  $t_1$  einsetzt und zur Zeit  $t_2 = t_1 + T$  wieder aussetzt, so sind zwei Vorgänge nach (2) mit umgekehrten Vorzeichen zusammzusetzen. Die konstanten Teilkräfte  $K/2$  heben sich dann heraus und man erhält das Amplitudenspektrum nach:

$$A(\omega) = \frac{2K}{\pi\omega} \sin \frac{\omega T}{2}. \quad (23)$$

Auch hier nehmen die Teilamplituden mit wachsender Frequenz ab, aber unter Schwankungen. Für alle Frequenzen, deren Periodendauern ganzzahlig in  $T$  aufgehen, wird  $A(\omega) = 0$ .

Von besonderer Bedeutung ist das plötzliche Einsetzen einer sinusförmigen Kraft mit der Kreisfrequenz  $\Omega$ . Hierfür ist dann in (2) statt  $K$  zu setzen:  $K \sin \Omega t$ . Für das Amplitudenspektrum findet man dann:

$$A(\omega) = \frac{K\Omega}{\pi(\Omega^2 - \omega^2)}, \quad (24)$$

dem eine Kraft  $\frac{K}{2} \sin \Omega t$  überlagert ist. Für  $\omega = \Omega$  wird  $A(\omega)$  unendlich. Die Kurve  $A(\omega)$  hat die gleiche Gestalt wie die Resonanzkurve eines ungedämpften Systems mit der Eigenfrequenz  $\Omega$ .

Wenn die sinusförmige Kraft  $K(\lambda) = a \sin \Omega \lambda + b \cos \Omega \lambda$ , worin  $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$  angenommen ist, zur Zeit  $t = -T/2$  einsetzt und bis zur Zeit  $t = +T/2$  andauert, so ergibt sich für das Amplitudenspektrum nach BÜRCK, KOTOWSKI und LICHTÉ (68):

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \sqrt{F^2 + G^2 + 2FG(1 - 2a^2)}, \quad (25)$$

wobei

$$F = \frac{\sin(\Omega - \omega) \frac{T}{2}}{\Omega - \omega}, \quad G = \frac{\sin(\Omega + \omega) \frac{T}{2}}{\Omega + \omega}$$

ist. Wenn man von sehr tiefen Frequenzen und sehr kurzen Einschaltzeiten absieht, kann man alle Glieder mit  $G$  gegen  $F^2$  vernachlässigen, und es bleibt:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\Omega - \omega) \frac{T}{2}}{\Omega - \omega}.$$

Eine andere Form für das Amplitudenspektrum erhält man, wenn man berücksichtigt, daß die Einschaltphase erfahrungsgemäß für den Verlauf der Ausschwingvorgänge nur eine untergeordnete Rolle spielt. Man kann dann etwa setzen:  $a = 1$ ,  $b = 0$ . Ferner sei angenommen, daß die Einschaltdauer  $T$  eine ganze Zahl von Perioden  $2\pi/\Omega$  enthält, was gleichfalls keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet. Dann findet man:

$$|A(\omega)| = \frac{2\Omega}{\pi(\Omega^2 - \omega^2)} \sin \omega \frac{T}{2}. \quad (26)$$

Hiernach ist die Form der Kurve  $A(\omega)$  leicht zu erkennen. Die Einhüllkurve ist von gleicher Form wie (24). Zwischen dieser Kurve und der  $\omega$ -Achse schwanken die Werte derart, daß für  $\omega = 2\pi n/T$ , wo  $n$  eine ganze Zahl ist, die Teilamplitude verschwindet. Die Schwankungen erfolgen um so schneller, je größer die Einschaltdauer  $T$  ist. Hier ist die Teilamplitude für  $\omega = \Omega$  nicht unendlich, vielmehr ergibt sich nach (25):

$$A(\omega)_{\omega=\Omega} = \frac{T}{2\pi}, \quad (27)$$

sie wächst also mit der Einschaltdauer.

Die Berechnung von Ausgleichsvorgängen, die infolge solcher Ursachen auftreten, geschieht dann in der Weise, daß man für jede Teilschwingung des Amplitudenspektrums nach den für stationäre Schwingungen gültigen Regeln die Teilwirkung bestimmt und diese dann summiert. Die Teilwirkung  $s$  wird zu der Teilursache  $A(\omega)$  ins Verhältnis gesetzt:  $s = \mathfrak{B} \cdot A(\omega)$ , worin der Übertragungsfaktor im allgemeinen komplex angenommen werden muß:  $\mathfrak{B} = B(\omega) e^{j\beta(\omega)}$ , um sowohl die Amplitudenverzerrung wie auch die Phasenverzerrung zu berücksichtigen.  $B$  und  $\beta$  sind Funktionen der Frequenz. Das Gesamtergebn wird dann durch Summation der Teilwirkungen gewonnen, wobei man wegen der komplexen Darstellung von  $\mathfrak{B}$  auch das FOURIER-Integral des Einschaltvorganges in komplexer Form wie z. B. (3) anzusetzen hat. Es wird dann:

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} s \, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) B(\omega) e^{j(\omega t + \beta)} \, d\omega.$$

In einfachen Fällen ist das Integral streng ausführbar, wie z. B. KÜPFMÜLLER (16) für den Fall eines Systems mit einem Freiheitsgrad gezeigt hat. Der Vorteil dieser Betrachtung liegt darin, daß die Ausgleichsvorgänge durch die Einführung des Übertragungsfaktors, durch den ja die Resonanzeigenschaften oder Frequenzcharakteristiken des betrachteten Systems dargestellt werden, mit diesen Resonanzeigenschaften in Verbindung gebracht werden. In komplizierten Fällen geht man so vor, daß man für den Übertragungsfaktor besonders einfache Formen annimmt, die dem wirklichen Verlauf angenähert sind und eine Ausführung der Integration gestatten.

Der einfachste Fall ist der, daß  $B$  bis zu einer gewissen Frequenzgrenze  $\omega_0$  konstant und oberhalb dieser Grenze als verschwindend angenommen werden kann. Das gilt etwa bei hochwertigen Mikrofonen. Für den Übertragungswinkel kann man dann mit guter Näherung annehmen, daß er der Frequenz proportional ist:  $\beta = \omega t_0$ . Wird dann eine konstante Kraft  $K$  zur Zeit  $t = 0$  angelegt, so ergibt sich unter Zugrundelegung der reellen Form (2):

$$x = BK \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} \frac{\sin \omega(t - t_0)}{\omega} \, d\omega \right].$$

Die Integration führt auf die Funktion „Integralsinus“ und ergibt:

$$x = BK \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si} \omega_0(t-t_0) \right]$$

(s. Abb. 5). Das Resultat entspricht den Voraussetzungen insofern nicht genau, als zur Zeit  $t=0$  die Elongation  $x$  nicht verschwindet, sondern erst für  $t=-\infty$  zu Null wird. Der Grund liegt in der weitgehenden Idealisierung des Übertragungsfaktors, der in dieser Form streng nur für Systeme mit unendlich vielen Freiheitsgraden und mit

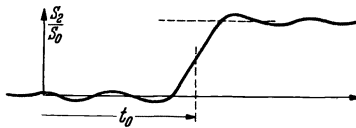


Abb. 5. Einschaltvorgang beim Tiefpaßfilter.  
(Nach K. KÜPFMÜLLER.)

unendlich langer Laufzeit gelten kann. Die Einschwingzeit  $\tau$  wird dann durch die Projektion der Tangente im Punkte  $t=t_0$  auf der Abszissenachse gefunden. Man erhält dafür:

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_0} \quad \text{oder} \quad \tau \omega_0 = \pi.$$

Diese grundlegende Beziehung, die zuerst von KÜPFMÜLLER (16) gefunden wurde, sagt aus, daß die Einschwingzeit in einem solchen idealen Gebilde umgekehrt proportional der Grenzfrequenz  $\omega_0$  ist. Um bei einer praktisch gegebenen Resonanzkurve die beste Übereinstimmung mit diesem Resultat zu bekommen, ist die Grenzfrequenz  $\omega_0$  so

anzusetzen, daß:

$$\omega_0 = \frac{1}{B(0)} \int_0^{\infty} B(\omega) d\omega$$

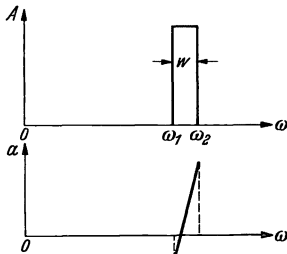


Abb. 6. Ideales Wellensieb.  
(Nach K. KÜPFMÜLLER.)

ist. Praktisch ist das die Frequenz, bei der die Kurve  $B(\omega)$  ihre größte Steilheit hat.

Von besonderer Bedeutung sind die Ausgleichsvorgänge, bei selektiven Systemen, d. h. bei solchen, die ein bestimmtes Frequenzband hervorheben, außerhalb dieses Bandes aber nur sehr wenig ansprechen. Der einfachste Fall ist der eines schwingungsfähigen Systems mit einem Freiheitsgrad, wie er in II, 1 behandelt ist. Auch bei zweigliedrigen Systemen ist unter gewissen Bedingungen eine strenge Lösung noch in einfacher Form angebbbar (s. II, 2). Für komplizierteren Aufbau kann man die Resonanzkurve als rechteckig annehmen und innerhalb dieses Bereichs den Übertragungswinkel  $\beta$  als linear mit der Frequenz zunehmend (s. Abb. 6).

Wenn dann zur Zeit  $t=0$  plötzlich eine sinusförmige Kraft mit der Frequenz  $\Omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ , also mit der mittleren Durchlaßfrequenz, zu wirken beginnt, so ergibt eine ähnliche Rechnung wie bei dem vorigen Beispiel für die Einschwingzeit die KÜPFMÜLLERSche Regel:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}, \quad \text{oder} \quad \tau \cdot \Delta\omega = 2\pi.$$



Die Einschwingzeit ist also umgekehrt proportional der Durchlaßbreite. In praktischen Fällen, in denen die Resonanzkurve von der Rechteckform abweicht, sind die Grenzfrequenzen dort anzunehmen, wo die Resonanzkurve von ihrem Maximalwert  $B_{\max}$  auf  $B_{\max}/\sqrt{e} = 0,607 B_{\max}$  gesunken ist.

Bei Anwendung des Amplitudenspektrums kann man nach BÜRCK, KOTOWSKI und LICHTÉ (83) eine Reihe von qualitativen Aussagen machen

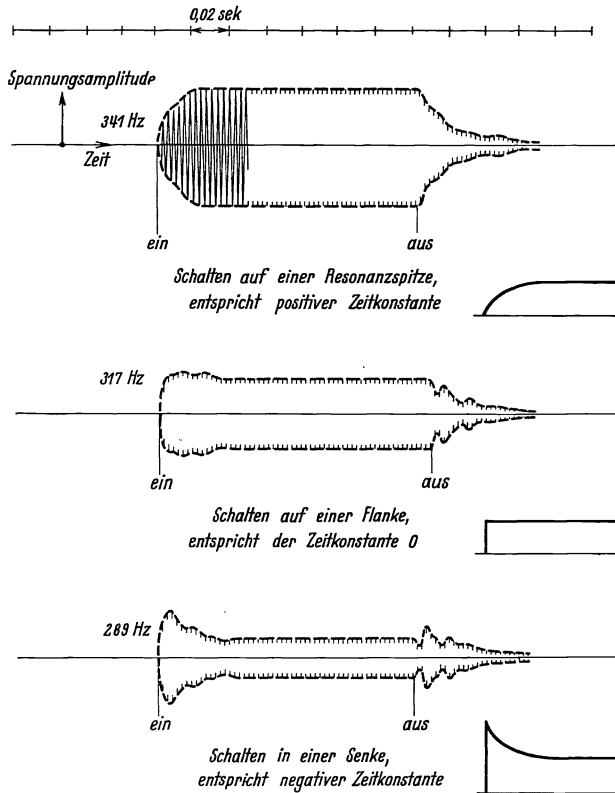


Abb. 7. Oszillogramme und vereinfachte Schemata typischer Schaltvorgänge.  
(Nach W. BÜRCK, P. KOTOWSKI und H. LICHTÉ.)

über den Charakter und die Dauer von Ausgleichsvorgängen. Die Kurve des Amplitudenspektrums einer für eine Zeit  $T$  wirkenden Sinuskraft hat nach (27) an der Stelle der Sollfrequenz ein Maximum:  $A(\omega)_{\max} = T/2\pi$ . Je länger also der Ton dauert, um so stärker tritt die Sollfrequenz hervor gegenüber den anderen Frequenzen, die das Ein- und Ausschaltgeräusch bedingen. Wird die Kraft nicht sofort mit ihrer endgültigen Amplitude geschaltet, sondern mit einer gewissen Zeitkonstante, so treten auch hier, ähnlich wie bei der Gleichkraft nach (22), die Fremdfrequenzen um so mehr gegen die Sollfrequenz zurück, je größer die Einschaltzeitkonstante ist, je weicher also der Einsatz erfolgt.

Wird beim Einschalten einer Sinuskraft auf ein Schwingungssystem die Frequenz  $\Omega$  so gewählt, daß sie dem Maximum der Resonanzkurve entspricht, so wird aus dem Amplitudenspektrum diese Frequenz, die an und für sich schon darin stark überwiegt, auf Kosten der Fremdfrequenzen weiter bevorzugt. Die entstehende Schwingung setzt also weich ein. Für den Fall eines Systems mit einem Freiheitsgrad ist die Zeitkonstante dieses Einsetzens gegeben durch:  $T = 1/f\delta$ , wo  $f$  die Frequenz,  $\delta$  das logarithmische Dekrement ist. Schaltet man auf einer Flanke der Resonanzkurve ein, so wird die Sollfrequenz geschwächt. Gebiete daneben jedoch durch die Resonanzwirkung verstärkt. Der resultierende Vorgang hat dann ein Spektrum ähnlich wie das einer plötzlich geschalteten Sinuskraft, die Schwingung setzt also sehr schnell, nahezu unstetig ein, die resultierende Zeitkonstante wird praktisch gleich Null. Ist schließlich die Sollfrequenz stark von der Resonanzfrequenz verschieden, so wird aus dem Amplitudenspektrum das Gebiet, das der Lage der Resonanz entspricht, verstärkt, die Sollfrequenz dagegen sehr schwach übertragen. In diesem Fall kann das Schaltgeräusch wesentlich lauter werden als der Sollton. Wenn man hierfür eine resultierende Zeitkonstante festlegen will, so muß man sie negativ annehmen. Die Verhältnisse in diesem Falle werden durch die Abb. 7 veranschaulicht.

### III. Wahrnehmung von nichtstationären Vorgängen durch das menschliche Gehörorgan.

5. Ohrmodell und Ausgleichsvorgänge. Nach der Auffassung von HELMHOLTZ (6) enthält die Basilmembran im menschlichen Ohr eine große Anzahl von Fäserchen, die auf die verschiedenen wahrnehmbaren Tonhöhen abgestimmt sind. Beim Auftreffen vom Schall geraten die Fasern, deren Eigenfrequenzen in dem Schall enthalten sind, in Schwingungen und erregen dadurch die Nervenenden. Hierdurch wird das Auflösungsvermögen des Ohres gut erklärt. Aber gerade für nichtstationäre Vorgänge ergeben sich Schwierigkeiten. HELMHOLTZ hat aus Beobachtung der höchsten noch wahrnehmbaren Unterbrechungsgeschwindigkeit von Tönen auf ein logarithmisches Dekrement von  $\delta = 0,1$  der Ohrresonatoren geschlossen. WAETZMANN (4) hat dann bei Beobachtung von Trillergeschwindigkeiten gefunden, daß in verschiedenen Höhenlagen gleich schnell getrillert werden kann, bevor der Triller verwaschen wird. Das würde bedeuten, daß für alle Frequenzen die Ohrresonatoren gleiche Ausgleichszeiten haben, d. h. daß das Dekrement mit wachsender Frequenz abnimmt.

Die Bestimmung der Dämpfung der Ohrresonatoren ist aber auch noch auf andere Weise möglich, nämlich durch Aufnahme ihrer Resonanzkurve. Durch Ermittlung der Steilheit dieser Resonanzkurve kann unmittelbar auf das Dekrement geschlossen werden. Eine solche Messung

kann natürlich nur dann vorgenommen werden, wenn man die Wirkung einzelner Ohrresonatoren, unabhängig von der Wirkung ihrer Nachbarn, beobachten kann. Das ist bei gewissen Hörschädigungen der Fall, wo bestimmte Frequenzgebiete wegen Degeneration der betreffenden Nervenfasern nicht gehört werden können. Man kann dann wenigstens die eine Hälfte einer solchen Resonanzkurve aufnehmen. Die Kurve erwies sich als überraschend steil. Ihr würde ein Dekrement  $\delta = 0,0006$  entsprechen (22). Einer so geringen Dämpfung würden so lange Einschwingzeiten entsprechen, wie sie nie beobachtet worden sind. BÉKÉSY (22) zog hieraus den Schluß, daß die HELMHOLTZsche Auffassung über die Rolle der Basilarmembran nicht zutreffend sein könne. Er zeigte an einem Modell der Schnecke, daß die Basilarmembran bei mittleren Frequenzen vom Steigbügel beginnend überall stark schwingt und daß sie nur in der Nähe des Helikotrema in Ruhe bleibt. Die neue auf dieses Ohrmodell begründete Hörtheorie ist trotzdem eine „Einortstheorie“ und ist als Weiterbildung der HELMHOLTZschen Theorie aufzufassen. Die Selektivität der Gehörsempfindung, die nach dieser Schwingungsform der Basilarmembran allein nicht erklärlich ist, wird durch einen weiteren Effekt begründet, der an diesem Ohrmodell auch experimentell nachgewiesen werden konnte. Es entstehen nämlich zu beiden Seiten der Basilarmembran Wirbel, deren Lage von der Frequenz des auffallenden Tones derart abhängt, daß mit sinkender Frequenz diese Wirbel sich nach dem Helikotrema zu verschieben.

Um nun die Wirkung von nichtstationären Vorgängen auf das menschliche Gehörorgan zu ermitteln, ist es wichtig, seine Eigenfrequenz und Dämpfung zu kennen. Beides kann man gemeinsam ermitteln, wenn man das freie Ausschlagen des Organs nach einer Auslenkung registriert. Das gelingt, wie BÉKÉSY (37, 66) weiter gezeigt hat, nach einiger Übung mit Hilfe des beim Schlucken auftretenden Tubenknackens. Die hiernach auftretenden freien Schwingungen des Trommelfells können mit Hilfe eines Gummischlauches von einer zweiten Person abgehört oder mittels eines geeigneten Mikrophons registriert werden. Die so erhaltenen Kurven ergeben logarithmische Dekremente von der Größenordnung  $\delta = 1,1-1,8$  und eine Eigenfrequenz von etwa 1200—1500 Hz. Das Mittelohr ist demnach nahezu aperiodisch gedämpft, und man wird den wirklichen Verhältnissen ziemlich nahekommen, wenn man für die Dämpfungsverhältnisse im Mittelohr den sog. aperiodischen Grenzfall annimmt.

Die Wirkung von aperiodischen Stößen auf das Ohr konnte BÉKÉSY (37, 66) an seinem Ohrmodell durch stroboskopische Methoden beobachten. Die Flüssigkeit in der Nähe des Steigbügels bewegt sich dann kolbenartig mit, die Basilarmembran buchtet sich in ihren steigbügelnahen Teilen momentan aus, während die Teile in der Nähe des Helikotremas in Ruhe bleiben (s. Abb. 8, ausgezogene Kurve). Dann bewegt sich der Teil in Steigbügelnähe aperiodisch in die Ruhelage zurück,

während nach dem Helikotrema zu sich eine flache Wanderwelle ausbildet, die sich langsamer, nämlich in 0,05 sec, über das Helikotrema ausgleicht.

Wenn im menschlichen Ohr ein ähnlicher Vorgang sich abspielt, wie der am Modell beobachtete, so wird der zeitliche Schwerpunkt der Ohrerregung um so früher auftreten, je weniger eine Wanderwelle über das Helikotrema hinweg auftritt. Diese Gebiete der Basilarmembran vermitteln die Empfindung tiefer Frequenzen, und man kann diese Empfindung durch Verdeckung auslöschen, wenn man einen genügend starken tiefen Ton hinzufügt. Wenn man also mit zwei Telefonen gleichzeitige Knacke an beide Ohren gibt, aber bei dem einen Ohr eine Ver-

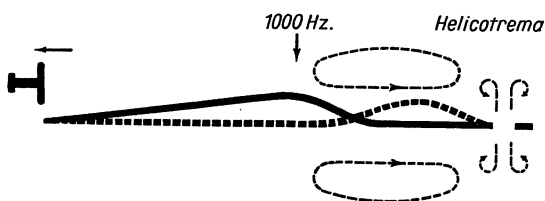


Abb. 8. Wanderwellen auf der Basilarmembran.  
(Nach G. v. BÉKÉSY.)

deckung der tiefen Töne durch einen hinzugefügten tiefen Ton hervorbringt, so wird bei diesem Ohr der zeitliche Schwerpunkt früher eintreten als bei dem anderen, wo die Wanderwelle ungestört einwirken kann. Subjektiv wird sich das

dann als eine Verschiebung des Richtungseindrucks bemerkbar machen: gleichartige Knalle erzeugen ein Schallbild in der Mittelebene des Kopfes, bei Hinzutreten des verdeckenden tiefen Tones mußte eine Richtungsverschiebung eintreten. Daß dieser Effekt in der Tat von BÉKÉSY einwandfrei beobachtet werden konnte (36, 66), bildet eine starke Stütze für das von ihm vorgeschlagene Ohrmodell.

**6. Der Aufbau des Tonhöhenbewußtseins.** Schon frühzeitig ist die Frage Gegenstand der Untersuchung gewesen, wie lange ein Ton erklingen muß, um als solcher mit Sicherheit auch seiner Tonhöhe nach erkannt zu werden. Schon im Jahre 1873 hat MACH (1) für ein Ton von 128 Hz diese Mindestdauer von 35 msec ermittelt. Für 500, 1000 und 2000 bestimmte LÜBKE (14) Tonkennzeiten zu 10,7; 8,6; bzw. 7,3 msec. Andere Untersuchungen hierüber waren mit ungenügenden Mitteln unternommen und haben zu Ergebnissen geführt, die sich als unrichtig erwiesen haben. BÜRCK, KOTOWSKI und LICHTÉ (68) haben neuerdings die Frage eingehend experimentell untersucht nach einer früher von LEIMBACH (5) angewandten Methode. Hierbei wurden die nötigen Schaltungen mit Kontakten vorgenommen, die durch ein HELMHOLTZ-Pendel betätigt wurden. In Abb. 9 geben die Kurven *a* und *b* die obere und die untere Grenzkurve für die Tonkennzeiten wieder in Abhängigkeit von ihrer Frequenz, die bei mehreren Versuchspersonen gewonnen wurden.

Bei sehr kurzer Tondauer ist nur ein Knacklaut hörbar. Wird die Zeitdauer vergrößert, so entsteht eine Tonempfindung, die aber zunächst bei höheren und tieferen Tönen noch nicht dem wirklich eingeschalteten

Ton entspricht, während in der Mitte des Tonbereiches, wo auch die Tonkennzeiten am kürzesten sind, die Tonempfindung sofort tonhöhenrichtig ist. Bei tiefen Frequenzen ist die empfundene Tonhöhe bei kurzer Tondauer zunächst zu hoch, bei hohen Frequenzen zu tief. Dieser Befund läßt sich auch, wie die Verfasser (68) zeigen, theoretisch erklären. Unter-Zugrundelegung von (25) für das Amplitudenspektrum erhält man unter der Annahme, daß das Ohr als System mit einem Freiheitsgrad im aperiodischen Grenzfall mit der ungedämpften Eigenfrequenz  $\Delta$  arbeitet, für den im Ohr wirksamen Energieanteil des Schallvorganges von der Frequenz  $\omega$ :

$$\tau_{\omega}^2 = c \frac{4\Delta^2 \omega^2 \sin^2(\Omega - \omega) \frac{T}{2}}{(\omega^2 + \Delta^2)^2 (\Omega - \omega)^2}. \quad (28)$$

Das Maximum dieser Schalleistung liege bei  $\Omega + x$ . Dann findet man durch eine Näherungsrechnung:  $\frac{x}{\Omega} = \frac{12}{\Omega^2 T^2} \frac{\Delta^2 - \Omega^2}{\Delta^2 + \Omega^2}$ . Je größer die Einschaltdauer  $T$  ist, um so kleiner ist diese relative Verstimmung des Leistungsmaximums. Ferner ist, wenn  $\Omega < \Delta$ , die Verstimmung positiv, das Maximum erscheint dann nach höheren Frequenzen verschoben, umgekehrt wird für  $\Omega > \Delta$  die Verstimmung negativ, und das Maximum verschiebt sich nach niederen Frequenzen. Wenn man annimmt, daß das Schallmaximum die Tonhöhenempfindung bestimmt, so steht das im Einklang mit der Beobachtung.

Wenn zwei Töne in kurzem Abstand nacheinander einsetzen, so ist nach BÜRCK, KOTOWSKI und LICHTÉ (69) die kürzeste Laufzeitdifferenz, die eben noch wahrgenommen werden kann, gleich der vorher bestimmten Tonkennzeit.

Der Frage, welche Konzentration der Schalleistung in einem Spektrum erforderlich ist, um einen Tonhöheneindruck in reproduzierbarer Weise zu gewährleisten, ist eine weitere Arbeit [79] der gleichen Verfasser BÜRCK, KOTOWSKI und LICHTÉ gewidmet. Die gesamte Energie  $E_g$  des Spektrums erhält man, wenn man den Ausdruck (28) über  $\omega$  von 0 bis  $\infty$  integriert. Diese Gesamtenergie wird in drei Teile aufgespalten:  $E_g = E_e + E_u + E_o$ , die durch Teilintegrationen berechnet werden. Darin ist  $E_e$  die Energie der Teilfrequenzen in einem Bereich um die erkennbare Frequenz herum, die durch  $(1 - p)\Omega$  bis  $(1 + p)\Omega$  eingegrenzt ist.  $E_u$  ist der Anteil unterhalb  $(1 - p)\Omega$ ,  $E_o$  der Anteil oberhalb

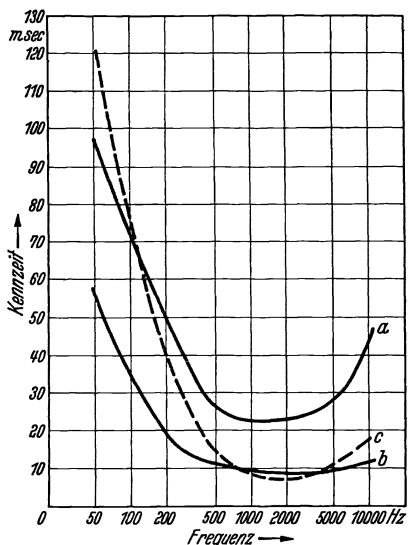


Abb. 9. Tonkennzeit als Funktion der Frequenz. a obere, b untere Grenze der gemessenen Werte, c berechnete Kurve. (Nach W. BÜRCK, P. KOTOWSKI und H. LICHTÉ.)

$(1 + p)\Omega$ .  $E_e$  ist also die eigentliche Tonenergie,  $E_u + E_o$  die Fremdenergie. Es wird  $p = \pm 0,05$  angenommen. Außerdem kann für die Eigenfrequenz des Ohres gesetzt werden:  $\Delta = 2\pi \cdot 1300$ .  $E_e/E_g = \mu$  ist der Prozentsatz der Gesamtenergie, der in einem Bereich um  $\pm 5\%$  der Sollfrequenz herum liegt.  $\mu$  ist dann so zu bestimmen, daß die dazugehörigen Werte von  $T$  für verschiedene Werte von  $\Omega$  sich den experimentellen Kurven  $a$  und  $b$  in Abb. 9 anpassen. Das ist der Fall für  $\mu = 0,70$ , für welchen Wert die Kurve  $c$  in Abb. 9 gilt. Hiernach kann man also folgern, daß in einem kontinuierlichen Schallspektrum ein Ton dann reproduzierbar erkannt wird, wenn in einem Bereich von  $\pm 5\%$  um seine Frequenz herum 70% der Gesamtenergie vereinigt ist. Aus der Berechnung der Teilenergien kann man ferner entnehmen, daß für  $\Omega/2\pi = 65$  Hz, wenn die Einschaltzeit  $T$  gleich  $1/3$  der Kennzeit gewählt wird,  $E_u/E_g = 0,31$ ,  $E_o/E_g = 0,3725$  ist. Im Bereich oberhalb der Sollfrequenz steckt also mehr Energie als in dem Bereich unterhalb. Für  $\Omega/2\pi = 9100$  Hz folgt unter den gleichen Annahmen:  $E_u/E_g = 0,504$ ,  $E_o/E_g = 0,009$ . Hier ist also der Schwerpunkt nach unten verschoben. Es folgt also auch hieraus die Tatsache, daß kurz dauernde tiefe Töne zu hoch, kurz dauernde hohe Töne zu tief empfunden werden.

Eine experimentelle Bestätigung des Wertes  $\mu = 0,70$  wird in folgender Weise gewonnen: das durch (28) gegebene Frequenzspektrum eines Tones, der während einer Zeit  $T$  erklingt, hat einen ähnlichen Verlauf wie die Resonanzkurve eines einfachen Schwingungssystems, wobei das Maximum bei der Sollfrequenz  $\Omega$  um so höher wird, je länger die Einschaltzeit  $T$  dauert, während bei Verkürzung der Tondauer die Kurve immer flacher wird. Das gleiche Frequenzspektrum kann man auch auf andere Weise erzeugen. Das Amplitudenspektrum eines kurzen einseitig von der Nulllinie ausgehenden Impulses wird durch eine horizontale Gerade dargestellt. Läßt man einen solchen Impuls auf einen einfachen Schwingungskreis wirken, so entsteht dahinter ein Frequenzspektrum, das durch die Resonanzkurve des Schwingungskreises dargestellt wird, also dem Frequenzspektrum eines kurz andauernden Tones wesentlich gleich ist. Während hierbei die Verbreiterung der Resonanzkurve durch Verkürzen der Einschaltdauer zustande kommt, wirkt im anderen Fall in gleicher Richtung die Vergrößerung der Dämpfung des Schwingungskreises. Die Versuche wurden so unternommen, daß durch eine Röhrenkippschaltung kurzzeitige Impulse auf ein geeignetes Schwingungssystem mit einstellbarer Dämpfung gegeben wurden. Die Dämpfung wurde so eingestellt, daß der gehörte Impuls gerade eine deutliche Klangfärbung erhielt, deren Tonhöhe reproduziert werden konnte. Dann ergab die Quadrierung des bei dieser Dämpfung gemessenen Frequenzspektrums und seine Planimetrierung, daß innerhalb  $\pm 5\%$  um die Resonanzfrequenz 68,6% der Gesamtenergie konzentriert waren, in vorzüglicher Übereinstimmung mit dem auf anderem Wege ermittelten Resultat.

Zu einer anderen Herleitung eines angenäherten Ergebnisses über die Tonkennzeiten gelangt man durch Anwendung der HEISENBERGSchen Unsicherheitsrelation, auf deren Anwendbarkeit für akustische Vorgänge zuerst STEWART (31) hingewiesen hat. Aus der Form:  $\Delta E \cdot \Delta t \cong h$  erhält man nach:  $E = h\nu$ :  $\Delta\nu \cdot \Delta t \cong 1$ . Das heißt: in einem Zeitintervall  $\Delta t$  kann die Frequenz eines Tones mit einem Mindestfehler von  $\Delta\nu$  erkannt werden. Die Kurve *c* in Abb. 9 würde für tiefe Frequenzen bis 1000 Hz dem entsprechen, wenn angenommen wird, daß die Bestimmung der Frequenz mit einem Fehler von einem Ganzton erfolgt.

Andere Schlüsse auf die Funktionen des menschlichen Gehörorganes zieht BOUMANN (89) aus der Untersuchung kurzzeitiger Frequenzänderungen eines Dauertones. Zwischentöne von sehr kurzer Dauer werden als Knall empfunden. Eine Tonempfindung tritt erst von einer bestimmten Zwischentondauer aufwärts ein, die der Frequenz des Zwischentones umgekehrt proportional ist. Die Anzahl der Perioden, die für eine Tonerkennung erforderlich ist, ist unabhängig von der Frequenz etwa 8. Hierdurch wird jeder Tondauer  $d$  eine Grenzhöhe  $8/d$  zugeordnet. Dieses Resultat stimmt innerhalb des von BOUMANN berücksichtigten Frequenzbereiches von 200—1400 Hz etwa mit den Ergebnissen nach Abb. 9 überein. Weiter wird gefunden, daß bei kurz dauernden Zwischentönen, die nur als Knall empfunden werden, ein Frequenzunterschied von etwa 40 Hz zwischen Dauerton und Zwischenton erforderlich ist, um überhaupt wahrgenommen zu werden. Ist dagegen der Zwischenton so lang, daß er als solcher hörbar ist, so gelten die normalen Unterschiedsschwellen für Frequenzänderungen. Der Verfasser schließt daraus, daß die Klanganalyse nicht im Zentralnervensystem stattfinden könne, weil so kurze Zeiten dort nie auftreten. Wenn man zwei Zwischentöne gleicher Frequenz mit einem gewissen Zeitabstand beobachtet, so wird sich, wenn eine subjektive Verschmelzung, eine „Summation“, auftritt, die Grenzhöhe aus der doppelten Zwischentondauer ergeben, anderenfalls aus der einfachen Zwischentondauer. Bei einer Dauertonfrequenz von 100 Hz ergibt sich für eine Zwischentonfrequenz von 530 Hz eine Intervallgrenze von 100 msec, unterhalb deren Summation auftritt. Diese Summation entspricht den Forderungen der allgemeinen Nervenphysiologie: sie ist unabhängig von der Dauer der einzelnen Impulse, von der Anzahl und der Intensität der einzelnen Impulse, ist also offenbar eine nervöse Erscheinung. Auch bei Zwischentönen verschiedener Frequenz ist Summation zu beobachten. Je größer die Lautstärke ist, um so weiter können die beiden Zwischenfrequenzen auseinanderliegen, die Summation ergeben. Hieraus folgt, daß die physiologisch wirksame Breite der Auslenkung der Basilarmembran mit der Lautstärke wächst. Schließlich werden eine große Anzahl von Knallen verschiedener Tonhöhe in unregelmäßiger Folge nacheinander beobachtet, die soweit voneinander entfernt sind, daß keine Summation eintreten kann. Es zeigt sich, daß dann eine

Geräuschempfindung entsteht. Der Verfasser schließt daraus, daß Geräusche ebenso wie Klänge im CORTISchen Organ wahrgenommen werden. Um den Eindruck eines Geräusches zu erhalten, mußte der ganze Vorgang etwa 200—400 msec, je nach der Intensität, dauern.

Andere Geräusche mit kontinuierlichem Frequenzspektrum hat THIEDE (84) untersucht. Zu ihrer Erzeugung wurden benutzt die Entladungen eines Zählrohres, das mit  $\alpha$ -Strahlen beschickt wurde, der BARKHAUSEN-Effekt, das Mikrophongeräusch und der Schroteffekt. Das Frequenzspektrum des Schroteffektes zeigt die Eigentümlichkeit, daß seine Komponenten im ganzen Frequenzbereich gleich stark sind. Auch bei solchen Geräuschen sind Zeiten von etwa 200 msec erforderlich, um den Eindruck eines anhaltenden Geräusches zu erwecken.

**7. Die Hörbarkeit von Ausgleichsvorgängen.** Nach Beobachtungen von BÉKÉSY (29) erscheint beim glatten exponentiellen Ausklingen eines Tones auch subjektiv der Abfall monoton, solange die Abklingzeit bis zur Hörschwelle nicht die Zeit von 0,8 sec überschreitet. Bei länger dauernden Vorgängen empfindet man subjektiv, auch bei monotonem Abklingen, 0,8 sec nach Beginn des Vorganges ein Minimum, unabhängig von der Gesamtlautstärke. Der Grund dafür liegt darin, daß ein Vorgang von größerer Länge als 0,8 sec nicht als einheitliches Ganzes aufgefaßt werden kann, wie in der Psychologie wohlbekannt ist. Man nennt diese Zeit die „Präsenzzeit“. Auch die Sprache nimmt hierauf Rücksicht: Wörter mit mehr als vier Silben sind sehr selten. Bei einer durchschnittlichen Silbendauer von 0,2 sec wird also gerade bei einem viersilbigen Wort die Präsenzzeit erreicht.

In einer späteren Arbeit desselben Verfassers (36) werden Ausgleichsvorgänge eingehend auf ihre Hörsamkeit untersucht. Unter *Ausschwingdauer* wird die Zeit verstanden, die ein Ton braucht, um von seinem ursprünglichen Wert bis auf die Hörschwelle zu sinken. Die subjektive Empfindung des Ausschwingvorgangs hängt, abgesehen von der Ausschwingdauer, auch noch von der Lautstärke und Frequenz ab. Sie wird als *Ausschwingstärke* definiert. Bei Verkürzung der Ausschwingdauer wird man schließlich eine Grenze erreichen, bei der ein Unterschied gegenüber einem plötzlichen Ausschalten nicht mehr wahrgenommen werden kann. Die SABINESche Ausschwingzeit hierfür, d. h. die Zeit, innerhalb derer die Amplitude auf  $\frac{1}{1000}$  ihres Anfangswertes abgeklungen ist, wird als *physiologische Ausschwingzeit* definiert, die zugehörige Empfindung als *physiologische Ausschwingstärke*. Die entsprechenden Definitionen gelten auch für Einschwingvorgänge und ganz allgemein für Ausgleichsvorgänge.

Die Messung der physiologischen Ausschwingzeit wurde so vorgenommen, daß die Ausschwingzeit immer weiter verkürzt wurde, bis der Abklingvorgang von einem solchen mit romal kleinerer Ausschwingzeit nicht unterschieden werden konnte. Es ergab sich ein Steigen der physiologischen Ausschwingzeit mit abnehmender Lautstärke nach Abb. 10.



Für die physiologische Einschwingzeit wurde unabhängig von der Lautstärke 0,07 sec gefunden. Bei komplizierteren Vorgängen beobachtet man, wie ASCHOFF (93) bemerkt hat, Unterscheidungsmöglichkeit zwischen sehr viel kürzeren Ausgleichsvorgängen. Hier spielen offenbar neben der reinen Dauer für die subjektive Wirkung auch noch andere Umstände, wie die Form der Hüllkurve und der zeitliche Verlauf der Teiltonamplituden, eine Rolle. Die Unterschiedsschwelle der Ausschwingzeit fand BÉKÉSY (36) für momentan angestoßene Ausgleichsvorgänge ziemlich gleichmäßig zu 10%. Wenn der Ausschwingvorgang auf einen länger gehaltenen Ton folgt, so steigt bei kurzen Ausschwingvorgängen die Unterschiedsschwelle an. Bei Einschwingvorgängen von 1,5 sec Dauer wurde bei einer Lautstärke von 60 Phon die Unterschiedsschwelle für 800 Hz und höhere Frequenzen zu etwa 16% gefunden, während sie für tiefe Frequenzen größer ist und bei 100 Hz etwa 27% beträgt. Bezüglich der Hörbarkeit von Formverzerrungen der Ausschwingvorgänge wurde gefunden, daß eine während des Vorgangs

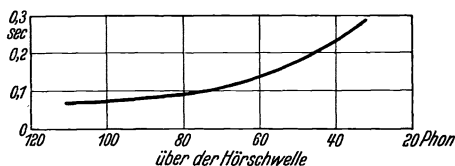


Abb. 10. Physiologische Ausschwingzeit als Funktion der Lautstärke. (Nach G. v. BÉKÉSY.)

vorgenommene Änderung der Ausschwingzeit um 10—20% eben als Knick in der Ausklingkurve subjektiv erkennbar war. Das gilt für längere Ausschwingzeiten von 1—2 sec. Bei kürzerer Ausschwingzeit wächst der eben hörbare Prozentsatz. Bei Einschwingvorgängen ist der Prozentsatz größer, etwa 20—30% bei längeren Einschwingvorgängen. Schließlich wurde durch vorzeitiges Abbrechen des Einschwingvorgangs bei Konstanthalten der erreichten Amplitude gefunden, daß der Einschwingvorgang schon bei Erreichung von 75% der stationären Amplitude als beendet empfunden wird.

Über die Lautstärke von nichtstationären Vorgängen liegen Untersuchungen von STEUDEL (38) und von BÜRCK, KOTOWSKI und LICHTÉ (67, 80) vor. Die letztgenannten Verfasser zeigen hierbei, daß unter plausiblen Annahmen über die Wirkungsweise des menschlichen Gehörs eine Vorausberechnung der Lautstärke aus der Form der Vorgänge mit guter Annäherung möglich ist. Hierdurch finden die erwähnten Annahmen über die Wirkungsweise des Gehörs eine starke Bestätigung.

Gleichstromeinschaltstöße nach dem Zeitgesetz:  $i = i_0 (1 - e^{-t/T})$  haben, nach (22) das Amplitudenspektrum:

$$\frac{A(\omega)}{i_0} = \frac{1}{\pi \omega} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

Demgegenüber gilt für den nicht abgeflachten Stoß mit der Amplitude  $a < 1$ :  $A(\omega) = a/\pi \omega$  nach (2). Für die Ermittlung der Lautstärke sind die Einzelenergien zum Gesamteindruck zu addieren. In erster Näherung werden zunächst die höchsten und tiefsten Frequenzen vernachlässigt und die Ohrempfindlichkeit innerhalb des Gebietes von  $\omega_1$  bis  $\omega_2$  als

konstant angenommen. Dann ergibt sich als Lautstärke für den abgeflachten Stoß:

$$L_A = \sqrt{\pi \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left( \frac{A(\omega)}{i_0} \right)^2 d\omega} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2} + T (\text{arc tg } \omega_1 T - \text{arc tg } \omega_2 T)}$$

und für den nicht abgeflachten Stoß:

$$L_P = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2}}.$$

Die Messung wird nun so vorgenommen, daß abgeflachte Stöße mit nichtabgeflachten bezüglich ihrer Lautstärke verglichen werden, wobei

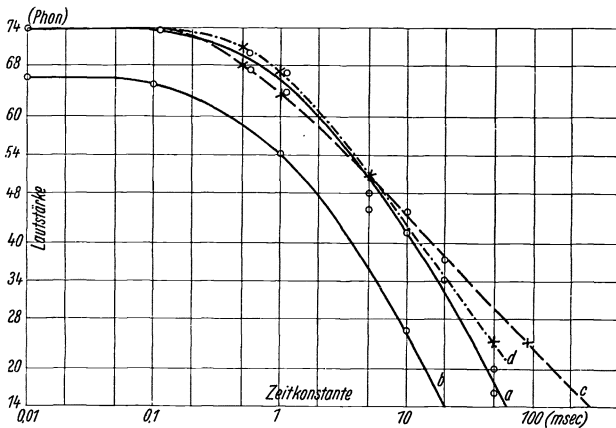


Abb. 11. Lautstärke von Knacken. (Nach W. BÜRCK, P. KOROWSKI und H. LICHTÉ.)

die gleiche Lautstärke durch Ändern der Amplitude des un stetigen Stoßes eingestellt wird. Es ist also aus  $L_A = L_P$   $a$  zu berechnen. Man findet:

$$a^2 = 1 + \frac{T}{\frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2}} (\text{arc tg } \omega_1 T - \text{arc tg } \omega_2 T).$$

Die experimentellen und theoretischen Ergebnisse zeigt die Abb. 11. Es ist aufgetragen die Lautstärke in Abhängigkeit von der Zeitkonstante  $T$ . Kurve  $a$  ist experimentell gewonnen. Der berechneten Kurve  $c$  liegen für  $\omega_1$  und  $\omega_2$  die Telephoniegrenzfrequenzen 300 und 2400 Hz zugrunde. Eine noch bessere Übereinstimmung erhält man, wenn man auf Grund der berechneten Kurve aus den Kurven gleicher Lautstärke für jede Lautstärke die Integrationsgrenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  so bestimmt, daß innerhalb dieses Bereiches die Ohrempfindlichkeit nur um  $\pm 6$  Phon schwankt. So wurde die Kurve  $d$  der Abb. 11 gewonnen. Nach der guten Übereinstimmung mit den experimentell gefundenen Werten ist man berechtigt, das Ohr für kurze Knalle als linearen Empfänger zu betrachten.

Für plötzlich einsetzende mit verschiedenen Zeitkonstanten exponentiell abklingende Gleichstromstöße hat STEUDEL (38) die Lautstärke in

Abhängigkeit von der Zeitkonstante gemessen. Die Berechnung auf Grund des Amplitudenspektrums (22a) führt (67) zu:

$$L = \sqrt{\frac{T}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{T(\omega_2 - \omega_1)}{1 + \omega_1 \omega_2 T^2}}. \quad (29)$$

Wenn für die Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$ , innerhalb derer die Integration vorgenommen wird, dieselben Gesichtspunkte Anwendung finden wie bei Abb. 11, Kurve *d*, so erhält man die gestrichelten Kurven *a'*, *b'*, *c'* in Abb. 12 für verschiedene Werte der Gleichstromamplitude. Die Kurven *a'*, *b'*, *c'* sind so gelegt, daß sie für  $T = 10^{-3}$  sec mit den STEUDELschen Kurven *a*, *b*, *c* zusammenfallen. Die Übereinstimmung der experimentell und theoretisch gewonnenen Resultate ist befriedigend, bis auf das Gebiet sehr kleiner Lautstärken. Der Grund hierfür liegt augenscheinlich darin, daß die obere Frequenzgrenze mit 7500 Hz für die benützte Telephonübertragung zu hoch angenommen war.

Die Lautstärkenempfindung folgt dem Reiz nicht streng, es ist vielmehr eine gewisse Trägheit des

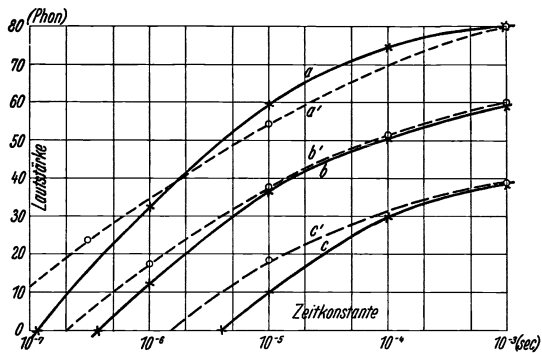


Abb. 12. Gemessene (*a*, *b*, *c*) und berechnete (*a'*, *b'*, *c'*) Lautstärken von Knacken mit verschiedener Anfangsamplitude und Abklingzeit. (Nach W. BÜRCK, P. KOROWSKI und H. LICHTÉ.)

Gehörempfindens zu beobachten. Messungen hierüber hat STEUDEL (38) angestellt. Er hat den subjektiven Lautstärkeabfall von periodisch unterbrochenen Tönen durch Verdeckung eines ausgehaltenen, in seiner Stärke veränderlichen Tones ermittelt und gefunden, daß der Abfall exponentiell erfolgt mit einer mittleren Zeitkonstante von 50 msec. Andere Messungen, die hierüber Aufschluß geben könnten, stammen von BÉKÉSY (25). Er beobachtete die Zunahme der Lautstärke eines kurze Zeit eingeschalteten Tones mit wachsender Einschaltdauer. Nach diesen Messungen kommt man auf eine Zeitkonstante von 130 msec. Der Unterschied gegenüber dem Ergebnis nach der STEUDELschen Messung ist sehr erheblich und dürfte zum Teil durch individuelle Unterschiede bei den sehr schwierigen Messungen zu erklären sein. Außerdem dürften aber wohl die letztgenannten Messungen durch das Ausschaltgeräusch beeinträchtigt sein. Jedenfalls kann man hiernach für die Lautstärke eine Differentialgleichung aufstellen (67), mit deren Hilfe man den Lautstärkenverlauf errechnen kann. Wie früher gesagt, arbeitet das Ohr bei kürzeren Knallen wie ein ballistisches Instrument, das Energien anzeigt, also etwa wie ein Thermoinstrument. Die Gesamtlautstärke ist also, wenn  $p$  der Schalldruck ist, proportional:

$L = \sqrt{\int_{-\infty}^t p^2 dt}$ . Hieraus folgert man unter Berücksichtigung von Verlusten, die proportional der gespeicherten Energie angesetzt werden, die Differentialgleichung:

$$a \frac{d(L^2)}{dt} = p^2 - c L^2.$$

Daraus ergibt sich für das Abschalten eines Sinustones:

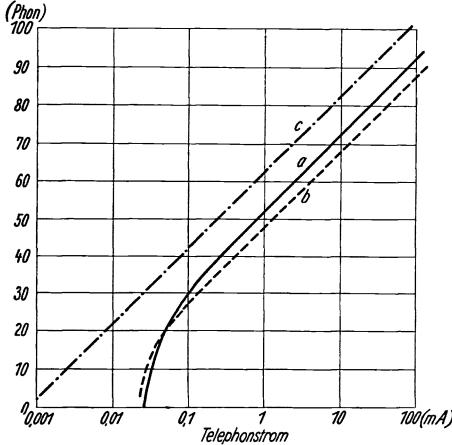


Abb. 13. Lautstärke von Knacken im Vergleich mit der Lautstärke von Dauertönen. *a* von STEUDEL gemessen, *b* berechnet, *c* Lautstärke des Vergleichsdauertons. (Nach W. BÜRCK, P. KOROWSKI und H. LICHTÉ.)

$$L = L_0 e^{-\frac{c}{2a}t} = L_0 e^{-\frac{t}{T}},$$

wo  $T = 2a/c$  die Zeitkonstante des Gehörs ist. Für einen eingeschalteten Sinuston folgt:

$$L^2 = \frac{p_0^2}{4a} T \left( 1 - e^{-\frac{2t}{T}} \right). \quad (30)$$

STEUDEL (38) hat die Lautstärke  $L$  von reinen Tönen mit der  $L'$  von Knallen nach (29) verglichen, wobei die Anfangsdruckwerte des exponentiell abklingenden Knalles jeweils gleich der Druckamplitude des Sinustones waren. Es ergibt sich dann für das Verhältnis der Lautstärken nach (29) und (30):

$$V = \frac{L}{L'} = \sqrt{\frac{T \pi}{4 T \arctg T \frac{\omega_2 - \omega_1}{1 + \omega_1 \omega_2 T^2}}}.$$

Die hiernach berechneten Werte stimmen mit den von STEUDEL gemessenen gut überein, s. Abb. 13.

Besonders aufschlußreich für die Wirkungsweise des Gehörs sind kurze Stromstöße im Telephon, das in einem Schwingungskreis mit aperiodischer Grenzämpfung liegt. Wenn man annimmt, daß das Ohr ebenfalls arbeitet wie ein solcher Schwingungskreis, wobei der Kurve gleicher Lautstärke für 50 Phon ein Schwingungskreis mit  $3500 \Omega$ ,  $0,1 \text{ H}$  und  $33400 \mu\text{F}$  entsprechen würde, so findet man unter Berücksichtigung des Amplitudenspektrums (22b) für die Lautstärke:

$$L = \int_0^{\infty} \frac{1}{T^2} \frac{1}{\left( \frac{1}{T^2} + \omega^2 \right)^2} \frac{1}{4 + \left( \frac{\omega}{T'} - \frac{T'}{\omega} \right)^2} d\omega,$$

worin die Ohrzeitkonstante  $T' = 1,75 \cdot 10^4 \text{ sec}$  gesetzt ist. Die Ausführung der Integration ergibt (67):

$$L = \frac{\pi}{4 T} \frac{T'}{\left(\frac{1}{T} + T'\right)^3}.$$

Abb. 14 zeigt den Vergleich der hiernach berechneten Lautstärke, Kurve *b*, mit den STEUDELSCHEN Messungen (38) Kurve *a*. Wenn man weiter berücksichtigt, daß beim Experiment die Frequenzen bis 300 Hz stärker unterdrückt wurden, so ergibt der Abzug der hiernach berechneten Energieanteile, Kurve *c*, eine noch bessere Übereinstimmung nach Kurve *d*.

Die Ergebnisse zeigen also, daß man zur Darstellung der Lautstärke das Ohr als linearen Empfänger anzusehen hat, mit der durch

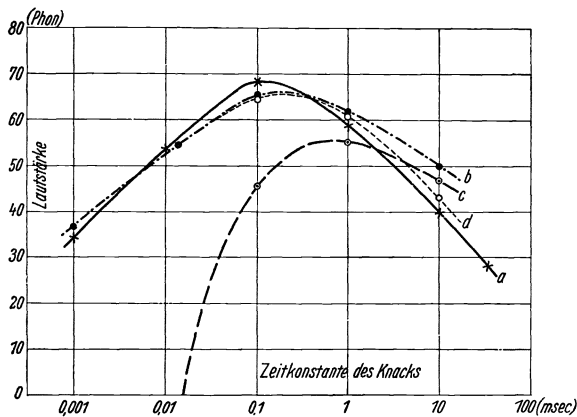


Abb. 14. Lautstärke von Stromstößen in einem aperiodischen Schwingungskreis.  
(Nach W. BÜRCK, P. KOTOWSKI und H. LICHTRE.)

die Ohrempfindlichkeitskurve gegebenen Frequenzcharakteristik und einer Zeitkonstante von etwa 50 msec. Einen Hinweis dafür, daß eine Nichtlinearität des Gehörorgans, im Sinne des WEBER-FECHNERschen Gesetzes, die Lautstärke merklich beeinflußt, ist nicht gefunden worden.

Über die Störungen des Höreindrucks durch Fälschung der Ausgleichsvorgänge haben BÜRCK, KOTOWSKI und LICHTRE (83) eingehende Untersuchungen angestellt. An einer Übertragungsanlage, bestehend aus einem Kondensatormikrophon, einem dreistufigen Widerstandsverstärker, einem Leistungsverstärker und einem Lautsprecher wurden die Zeitkonstanten für verschiedene Belastungen und verschiedene Frequenzen gemessen. Hierzu wurden in einer geeigneten Schaltung die beim plötzlichen Einschalten von Sinustönen auftretenden Toneinsätze mit solchen an einfachen Schwingungskreisen mit bekannter regelbarer Zeitkonstante entstehenden im Telephon verglichen. Es wurden dann entsprechend Abb. 7 positive Zeitkonstanten an Resonanzstellen, negative an Einbrüchen der Frequenzcharakteristik der Anlage beobachtet. Die

Differenz zwischen den Extremwerten der Zeitkonstanten erwies sich als von der Leistung unabhängig. Doch trat mit zunehmender Übertragungsleistung eine Verschiebung der Einschwingzeitkonstanten ins Negative auf, d. h. eine erhöhte Knallneigung. Die Maximaldifferenz der Zeitkonstanten betrug bei einem ungünstigen Versuchslautsprecher 7 msec, was deutlich hörbare Einschwingverzerrungen ergab. Bei besseren Lautsprechern mit glatteren Frequenzkurven wurden Maximaldifferenzen nur bis 3,5 msec gefunden.

Eine geeignete Schaltung zur objektiven Messung der Einschwingvorgänge haben ebenfalls BÜRCK, KOTOWSKI und LICHTÉ (83) angegeben. Hierbei wird der Vorgang am Eingang und der am Ausgang der Übertragungsanlage gleichgerichtet und beide in entgegengesetzter Richtung auf ein ballistisches Galvanometer gegeben. Die Anlage kann mit Hilfe eines HELMHOLTZ-Pendels geeicht werden. Der Ausschlag des Galvanometers ist dann ein Maß für die Einschwingverzerrung. Je nachdem, ob auf Resonanzspitzen oder in Senken der Frequenzkurve geschaltet wird, ändert sich die Ausschlagsrichtung.

**8. Modulierte Klänge.** Ein lange ausgehaltener stationärer Klang wirkt auch bei großem Obertonreichtum monoton. Es ist daher ein wichtiges Kunstmittel, diesen Klang durch Abwandlung zu beleben. Dies geschieht bei der menschlichen Stimme sowohl, als auch bei vielen Musikinstrumenten, die wegen dieser Möglichkeit besonders beliebt sind, durch ein Frequenzvibrato. OBATA, HIROSE und TESIMA (56) berichten über eigentümliche Trillerformen in der japanischen Gesangskunst, bei denen Frequenzänderungen um über einen Ganzton mit einer Modulationsfrequenz von etwa 4 Hz ausgeführt werden. In einer großen Untersuchungsreihe hat BARTHOLOMEW (54) 40 Männerstimmen untersucht und gefunden, daß bei einer gutgeschulten Stimme im Vibrato Tonhöhe, Intensität und Klangfarbe gleichzeitig schwanken. Die Vibrationsfrequenz ist sehr konstant und beträgt bei den verschiedenen Stimmen 6—7 Hz. Das Maximum der Intensität bei den Obertönen bewegt sich hierbei um mehr als eine Oktave.

Bezüglich der Theorie des Vibratos ist über eine Arbeit von TOLMIE (75) zu berichten, in der ältere bekannte Rechnungen weitergeführt und auf akustische Probleme angewandt werden. Ein reines Frequenzvibrato läßt sich darstellen durch:

$$f(t) = \sin(\omega t + m \sin \mu t). \quad (31)$$

Darin ist:  $\omega/2\pi$  die Frequenz des zu modulierenden Tones, die wir als Grundfrequenz bezeichnen wollen,  $\mu/2\pi$  die Modulationsfrequenz,  $m = \Delta\omega/\omega$  der Modulationsgrad, wobei gelten soll:  $\Delta\omega \ll \omega$ ,  $\mu \ll \omega$ . (31) läßt sich in eine FOURIER-Reihe entwickeln:

$$f(t) = \sum_{v=-\infty}^{+\infty} J_v(m) \sin(\omega t + v \mu t), \quad (32)$$

worin  $J_\nu$  die BESSELSchen Funktionen von der Ordnung  $\nu$  sind. Entsprechend dem praktischen Gebrauch kann man die Modulationsfrequenz  $\mu$  als konstant annehmen. Weiter soll die Modulationsweite immer z. B.  $\frac{1}{4}$  Ton betragen. Dann ist  $\Delta\omega$  proportional  $\omega$ , und man sieht, daß die Entwicklungskoeffizienten  $J_\nu(m)$  um so schneller mit wachsendem  $\nu$  gegen Null gehen, je tiefer der modulierte Ton liegt. Im übrigen gruppieren sich die Teiltöne symmetrisch mit gleichem Frequenzabstand um den Grundton, wie es die Abb. 15 für verschiedene Grundtöne zeigt. Wenn man (32) in komplexer Form schreibt:

$$f_1(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_\nu(m) e^{j(\omega t + \nu \mu t)},$$

so liegt es nahe, hierfür die Darstellung komplexer Schwingungen durch

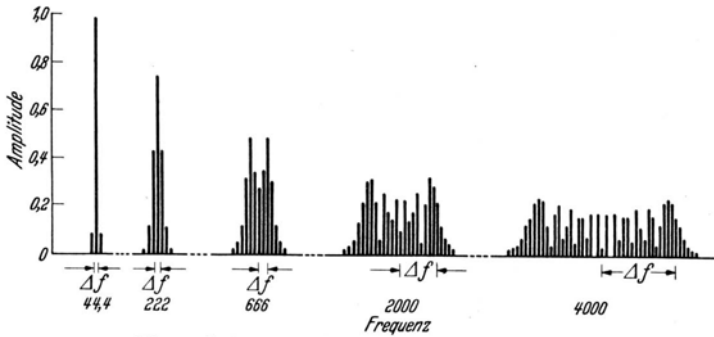


Abb. 15. Spektren von Frequenzvibratos. (Nach J. R. TOLMIE.)

Vektoren anzuwenden, und man erhält dann unter Anwendung bekannter Regeln für BESSELSche Funktionen für den mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotierenden Vektor die Form:

$$f_2(t) = e^{j m \sin \mu t}.$$

Dieser Vektor oszilliert um den mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  umlaufenden Vektor innerhalb eines Winkels  $2m$  im Bogenmaß mit der Winkelgeschwindigkeit  $m \mu \cos \mu t$ .

Wenn gleichzeitig mit der Frequenzmodulation eine Amplitudenmodulation mit dem Modulationsgrad  $k$  erfolgt, so läßt sich dies darstellen durch:

$$F(t) = [1 + k \cos(\mu t + \varphi)] \sum_{-\infty}^{+\infty} J_\nu(m) \sin(\omega t + \nu \mu t).$$

Hieraus folgt die komplexe Form:

$$F_1(t) = \left\{ 1 + \frac{k}{2} [e^{j(\mu t + \varphi)} + e^{-j(\mu t + \varphi)}] \right\} \sum_{-\infty}^{+\infty} J_\nu(m) e^{j \nu \mu t},$$

wenn der Zeitfaktor  $e^{j\omega t}$  unterdrückt wird. Nach elementaren Umrechnungen unter Benutzung der Rekursionsformeln für BESSELSche

Funktionen kommt:

$$F_1(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\left[1 + \frac{\nu k}{m} \cos \varphi\right]^2 J_\nu^2(m) + k^2 \sin^2 \varphi J_\nu'^2(m)} \cdot \sin(\omega t + \nu \mu t + \psi) \quad (33)$$

wo

$$\psi = \arctg \frac{k \sin \varphi J_\nu'(m)}{\left(1 + \frac{\nu k}{m} \cos \varphi\right) J_\nu(m)}$$

ist. Bei einem künstlerisch ausgeführten Vibrato sind Amplituden- und Frequenzmodulation entweder in Phase oder in Gegenphase, d. h.  $\varphi = 0$  oder  $\varphi = \pi$ . Dafür wird (33):

$$F_1(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(1 \pm \frac{\nu k}{m}\right) J_\nu(m) \sin(\omega t + \nu \mu t),$$

dabei gilt das Pluszeichen für  $\varphi = 0$ , das Minuszeichen für  $\varphi = \pi$ . Das unterscheidet sich von der Formel für die reine Frequenzmodulation nur durch den Faktor  $\left(1 \pm \frac{\nu k}{m}\right)$ . Dadurch wird das Spektrum unsymmetrisch,

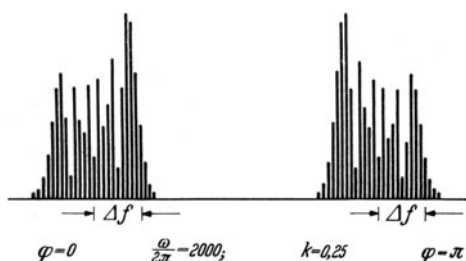


Abb. 16.

Spektren von Frequenz- und Amplitudenvibratos.  
(Nach J. R. TOLMIE.)

und zwar werden für  $\varphi = 0$  die höheren Teiltöne, für  $\varphi = \pi$  die tieferen Teiltöne verstärkt, wie Abb. 16 zeigt. Es würde dann also der akustische Schwerpunkt nicht mehr bei der Grundfrequenz liegen, und eine solche Vereinigung von Frequenz- und Amplitudenmodulation würde sich subjektiv als Verschiebung der Grundfrequenz bemerkbar machen. Diese Unsymmetrie fällt weg, wenn

$\varphi = \pi/2$  ist. Dies kommt bei den bisher benutzten Musikinstrumenten nicht vor. TOLMIE weist aber darauf hin, daß man unter Umständen solche Effekte mit Vorteil bei elektrischen Musikinstrumenten verwenden kann.

Aus der HEISENBERGSchen Unsicherheitsrelation in der Form:  $\Delta\nu \cdot \Delta t \cong 1$  folgt, wie KOCK (92) bemerkt, daß ein Frequenzvibrato bei fest gegebener Vibratofrequenz und Modulationsgrad, das bei hohen Grundtönen als solches eben hörbar ist, in tieferer Lage nur dann wahrgenommen wird, wenn die Vibratofrequenz erniedrigt wird, oder wenn bei festgehaltener Vibratofrequenz der Modulationsgrad vergrößert wird. Nach BARTHOLOMEW (54) ist ein Haupterfordernis für eine Gesangsstimme ein gutes Vibrato. Wie experimentelle Untersuchungen zeigen, wird ein elektrisch erzeugtes reines Frequenzvibrato in der Tat erst bei Überschreitung eines bestimmten Modulationsgrades erkennbar. Vorher erschien der Ton nicht als konstant, der Eindruck war dann der eines Amplitudenvibratos.



#### IV. Elektroakustische Fragen.

9. **Untersuchungsmethoden für nichtstationäre akustische Vorgänge.** Für die Untersuchung akustischer Vorgänge kommt heute wohl ausschließlich das Verfahren in Betracht, bei dem die Vorgänge im Schallfeld mit Hilfe von Mikrofonen in elektrische Schwingungen umgesetzt werden. Hierbei wird meist der Druck im Schallfeld durch entsprechende Mikrophone aufgenommen. Es ist hier nicht der Ort, die verschiedenen Arten von Mikrofonen zu würdigen. Es soll daher auf das Kondensatormikrofon allein Bezug genommen werden, das für derartige Messungen am besten geeignet ist und daher meist benutzt wird. Durch Druckänderungen wird die Kapazität eines solchen Kondensatormikrophons geändert, und diese Kapazitätsänderungen sind durch elektrische Mittel abzubilden. Das kann grundsätzlich auf zwei verschiedene Arten geschehen: entweder wird nach RIEGGER und F. TRENDELENBURG (17) das Mikrofon in einen Hochfrequenzschwingungskreis gelegt, dessen Abstimmung durch die Kapazitätsänderungen geändert wird. Hierdurch wird dann die Hochfrequenzamplitude im Takt der Druckänderungen am Mikrofon moduliert. Oder das Mikrofon wird über einen hohen Widerstand an eine Gleichspannungsquelle gelegt, so daß Kapazitätsänderungen Ladungsströme zur Folge haben, die dann ihrerseits als Änderungen des Spannungsabfalls an dem Widerstand abgenommen und verstärkt werden können. Diese zweite Methode hat wegen ihrer Einfachheit, weil dabei die Inanspruchnahme hochfrequenter Vorgänge unterbleibt, vielfach Eingang gefunden. Bezüglich der Vermeidung nichtlinearer Vorgänge sind beide Methoden insofern nahezu gleichwertig, als die Amplituden in hinreichend weiten Frequenzbereichen getreu übertragen werden. Wenn es aber auf eine kurvengetreue Abbildung des Vorganges ankommt, so ist zu berücksichtigen, daß bei den Niederfrequenzschaltungen Phasenverzerrungen auftreten, die bei tiefen Frequenzen, je nach der Kapazität des verwendeten Mikrophons, bis etwa zu 200 Hz hinauf, eine Entstellung der im Oszillographen erhaltenen Kurve zur Folge haben.

In manchen Fällen, besonders bei geringem Oberwellengehalt, wird eine einfache Aufzeichnung des Ausgleichsvorganges genügen. Man kann dann aus dieser Kurve Ausgleichsdauer, Zeitkonstante und Dekrement leicht ermitteln. Wenn dagegen der Vorgang zahlreiche und starke Oberschwingungen enthält, wird man sich zu fragen haben, in welcher Weise hier eine Zerlegung stattzufinden hat. Der Verfasser (33) ist hierbei so vorgegangen, daß er grundsätzlich den Vorgang möglichst ohne Amplituden- und Phasenverzerrungen aufzeichnete. Um nun festzustellen, welche Frequenzbereiche zu bestimmten Zeitpunkten des nichtperiodischen Vorganges vorherrschten, wurden FOURIER-Analysen mit willkürlicher Grundperiode vorgenommen. Hierbei wurde als Grundperiode die Periode des stationären Klanges gewählt. Wenn man dann

in aufeinanderfolgenden Zeitabschnitten von dieser Länge analysiert, so werden diejenigen Teilfrequenzen, die den wirklich vorhandenen Frequenzen am nächsten benachbart sind, in der Analyse besonders stark hervortreten. Das Ergebnis ist eindeutig. Die Amplitude der Teiltöne erhält man dann dargestellt in Treppenkurven, bestehend aus horizontalen geraden Linien von der Länge einer Periode, zwischen denen unstetige Übergänge stattfinden. Wenn man dann diese Treppenkurven durch stetige Kurven annähert, so sind diese erhaltenen Ergebnisse nicht so zu verstehen, daß hiermit streng die zeitliche Entwicklung der Teiltöne dargestellt werden soll. Es ist ja durchaus nicht sicher, daß der benachbarte Teilton des periodischen Klanges mit der gleichen konstanten Frequenz auch im Ausgleichsvorgang vorkommt. Es soll damit vielmehr nur angedeutet werden, in welcher Stärke Frequenzbereiche, die dem betreffenden Teilton benachbart sind, zu jeder Zeit in dem nichtstationären Vorgang angenähert enthalten sind.

Das hier geschilderte Verfahren ist außerordentlich mühsam, weil hiernach schon viele graphische Analysen zu machen sind, um auch nur zur Darstellung eines einzelnen Teiltones in einem Ausgleichsvorgang zu gelangen. Es ist deshalb von mehreren Seiten der Versuch gemacht worden, um hier zu einer Vereinfachung der Methode zu gelangen. Die bekannten automatischen Analysierverfahren (21, 46) versagen hier wegen ihrer begrenzten Analysiergeschwindigkeit. Eine solche Analyse beansprucht selbst unter besonders günstigen Umständen mindestens einige Sekunden. Trotzdem können solche Verfahren auch bei nicht-periodischen Vorgängen einen gewissen Anhalt liefern, wenn es möglich ist, den Vorgang in hinreichender Treue immer wieder zu reproduzieren. Auf diese Weise haben MEYER und BUCHMANN (28) bei der Untersuchung von immer wiederholten Vorgängen, die Ein- und Ausschwingvorgang mitenthielten, außer dem harmonischen Linienspektrum in vielen Fällen bei Musikinstrumenten ein kontinuierliches Schallspektrum gefunden. Auch diese Ergebnisse sind, selbst wenn hinreichende Reproduzierbarkeit angenommen werden kann, vorsichtig zu bewerten, weil schneller veränderliche Komponenten hierbei unter Umständen nicht hinreichend zur Darstellung gelangen und auch ihr Zusammentreffen mit der geeigneten Suchtonhöhe vom Zufall abhängig ist.

Die Erkenntnis, daß es für die Erforschung von schnellveränderlichen akustischen Vorgängen nicht nötig, und auch streng genommen nicht möglich ist, den zeitlichen Verlauf der einzelnen Teiltöne zu ermitteln, daß es vielmehr genügt, festzustellen, zu welchem Zeitpunkt Schwingungen bestimmter Frequenzbereiche mehr oder weniger stark vorhanden sind, hat zur Durchbildung einer Reihe von Verfahren geführt, denen die Benutzung von Frequenzfiltern gemeinsam ist. F. TRENDELENBURG und FRANZ (63) benutzen hierfür ein Oktavsieb nach THILO und STEUDEL (71), bei dem Durchlaßbereiche von je einer Oktave der Reihe nach einschaltbar waren, derart, daß der ganze Frequenzbereich von 37,5 bis 9600 Hz

überdeckt war. Hierbei mußten mehrfache Aufnahmen, jeweils für einen Oktavbereich, gemacht werden, wobei jeweils gleichzeitig der ungesiebte Vorgang mit aufgenommen wurde, um die Reproduzierung zu prüfen. Eine weitere Ausgestaltung des gleichen Gedankens stellt das „Tonfrequenzspektrometer“ nach FREYSTEDT (65) dar. Hierbei werden für jede Oktave drei Siebe in logarithmischer Verteilung benutzt. Diese Siebe werden durch einen rotierenden Schalter der Reihe nach eingeschaltet, ihre Angaben durch Ausschläge eines Kathodenstrahloszillographen angezeigt, die für die verschiedenen Siebe parallel zueinander erfolgen und von einer bestimmten Nullstellung ausgehen. Der ganze Vorgang wird dann durch kinematographische Aufnahme festgehalten. Schließlich wurde die Methode der „Oktavsieboszillographie“ gleichzeitig und unabhängig voneinander durch F. TRENDELENBURG und FRANZ (88) einerseits und VIÉRLING (64) andererseits so zu einem Abschluß gebracht, daß gleichzeitig durch 6 Oktavsiebe bei TRENDELENBURG in dem Bereich von 100 bis 6400 Hz 6 Kanäle geschaffen wurden, wobei die Angaben der einzelnen Siebe gleichzeitig durch 6 Oszillographenschleifen und außerdem der ungesiebte Vorgang durch eine 7. Schleife aufgezeichnet wurde. TRENDELENBURG (88) hat die Leistungsfähigkeit dieser Methode eingehend diskutiert. Er kommt hierbei zu dem Ergebnis, daß Schallvorgänge, die mit einem Dekrement abklingen, das größer als das Eigendekrement der verwandten Oktavsiebe ist, unzulässig verfälscht werden. Bei den Oktavsieben für gleichzeitige Verwendung waren diese Eigendekremente von der Größenordnung 0,21, bei dem früher benutzten (63) umschaltbaren Einzeloktavsieb etwa 0,7. Doch reicht für Untersuchungen der menschlichen Sprache und von Musikinstrumentklängen ein Dekrement von 0,21 meist aus.

**10. Ausgleichsvorgänge an elektroakustischen Apparaten.** Die Güte von elektroakustischen Apparaten hat man ursprünglich wohl ausschließlich nach ihrer Frequenzcharakteristik beurteilt, d. h. man hat sich gefragt, inwieweit verschiedene Frequenzen gleichmäßig übertragen werden. Nach den theoretisch bekannten Zusammenhängen zwischen Resonanzkurven und Ausgleichsvorgängen konnte dies als grundsätzlich ausreichend betrachtet werden. Aber diese Zusammenhänge sind, wie der Verfasser (33) bemerkt hat, nur für sehr einfache Formen der Resonanzkurve brauchbar und nicht ohne weiteres auf so komplizierte Kurven zu übertragen, wie sie besonders Lautsprecher und auch Mikrophone manchmal aufweisen. Aus diesem Grunde haben sich experimentelle Untersuchungen der Ausgleichsvorgänge an Lautsprechern und Mikrophonen als notwendig erwiesen. Bei den anderen elektrischen Übertragungsmitteln wie Verstärkern, Transformatoren sind aus der Elektrotechnik Methoden bekannt, die die Vermeidung derartiger Störungen gewährleisten. Siehe hierzu (83, S. 10). Die Fragestellung hierbei wird dann entweder die sein, ob die betreffenden Geräte bei veränderlichen Schwingungsvorgängen zu gedämpften Schwingungen in

ihren Eigenfrequenzen angeregt werden, die bei hinreichender Amplitude die Übertragung als fremde Frequenzen stören müßten, oder inwieweit ein solcher Apparat einen irgendwie gewählten Ausgleichsvorgang ohne merkliche Störungen mitmacht.

An trichterlosen Großflächenlautsprechern hat der Verfasser (33) durch Aufzeichnung von Ein- und Ausschwingvorgängen im Schallfeld und durch Abtasten der Membranbewegung gezeigt, daß hierbei meist schwach gedämpfte Eigenschwingungen in der Gegend von 50 Hz auftreten. Die Ausgleichsdauern waren bei besseren Lautsprechern etwa 40 msec, bei schlechten bis zu 1 sec. Der Grund dafür liegt darin, daß bei derartigen Lautsprechern infolge der weichen Aufhängung der Membran eine starke mechanische Eigenfrequenz bei etwa 50 Hz liegt. Die eigentümlich dumpfe Klangfarbe bei solchen Lautsprechern liegt offenbar an solchen im normalen Betrieb immer wieder aufs neue angestoßenen tiefen Eigenschwingungen. Die Verhältnisse können wesentlich gebessert werden durch extrem weiche Aufhängung, wodurch die Eigenfrequenz an die untere Grenze des Hörbereichs verlegt wird, und durch stärkere Dämpfung. Eine Vergrößerung der Dämpfung kann man bei elektrodynamischen Lautsprechern, worauf NEUMANN (30) hinwies, ähnlich wie beim Drehspulgalvanometer, durch Verstärkung des äußeren Magnetfeldes erreichen. NEUMANN hat experimentell gezeigt, wie durch diese Maßnahme sowohl die Form der Frequenzkurve als auch der Verlauf der Ausgleichsvorgänge günstig beeinflusst wird. Bei Trichterlautsprechern mit relativ kleiner Membran tritt durch die Wirkung des Trichterhohlraumes eine Verlegung der Eigenfrequenz nach oben, gleichzeitig aber auch eine erhebliche Vergrößerung der Dämpfung auf. MCLACHLAN und MCKAY (52) haben das theoretisch durch Berechnung des Schalldruckes bei einer aufgezungenen exponentiell gedämpften Sinuskurve gezeigt. Experimentelle Ergebnisse hierzu bringt SCHAFFSTEIN (62). Übertragungsanlagen und speziell Lautsprecher sind auch von BÜRCK, KOTOWSKI und LICHTÉ (83) nach einem oben geschilderten Verfahren, s. III, 7, bezüglich der darin auftretenden Entstellung von Ausgleichsvorgängen untersucht worden. Es zeigt sich, daß in der Nähe von Lautsprecherresonanzen erhebliche Zeitkonstanten bei mäßigen Lautsprechern auftreten, bei hohen Tönen im Minimum der Resonanzkurve ergeben sich „negative“ Zeitkonstanten, d. h. Knallwirkungen, die auf eine Gleichrichtwirkung im Lautsprecher zurückgeführt werden. Im allgemeinen glauben die genannten Forscher, daß besonders bei Lautsprechern zwar bemerkbare Fälschungen der Ausgleichsvorgänge auftreten, daß sie aber weniger störend empfunden werden als andere Verzerrungen, von denen unterharmonische Membranschwingungen, sog. „son rauque“ (49), am auffälligsten sind.

Leichter als bei Lautsprechern lassen sich die Ausgleichsvorgänge bei den kleinflächigen Mikrofonen beherrschen. Ein hochabgestimmtes Mikrofon mit hinreichend glatter und innerhalb des Hörbereiches

horizontaler Frequenzkurve wird, wie man leicht einsieht, keine meßbaren Ausgleichsvorgänge haben. Andererseits ist aber die experimentelle Untersuchung in dieser Hinsicht nicht so einfach wie bei Lautsprechern, weil es schwierig ist, einen Ton ohne Ausgleichsvorgang auf das Mikrophon zu geben. Mit Telefonen oder Lautsprechern ist das nicht möglich. Deshalb hat BARTA (50) in seiner eingehenden Untersuchung dieser Frage das Mikrophon entweder durch Thermophon oder durch elektrostatische Anzapfung angeregt. Er hat gezeigt, daß ein hochabgestimmtes Kondensatormikrophon geeigneter Bauart in der Tat keine merkbaren Ausgleichsvorgänge aufweist. Für die weitere Untersuchung anderer Mikrophone wurde dann ein solches Kondensatormikrophon als Vergleichsmikrophon gleichzeitig mit dem zu untersuchenden Mikrophon durch einen Lautsprecher erregt. Auf diese Weise wurden untersucht: 1. Kondensatormikrophon nach RIEGGER, 2. Bändchenmikrophon, 3. hochwertiges Kohlemikrophon nach REISS, 4. gewöhnliches Fernsprechkohlemikrophon, 5. elektromagnetisches Mikrophon, „Telephonhörer“. Das Ergebnis läßt sich am besten folgendermaßen darstellen: um alle in Sprache und Musik vorkommenden Ausgleichsvorgänge richtig zu übertragen, muß das Mikrophon in etwa 3 msec praktisch eingeschwungen sein. Dem entspricht eine gewisse Grenzdämpfung  $D_{gr} = \delta_{gr}/\pi$ , wo  $\delta$  das logarithmische Dekrement ist, die mindestens erreicht sein muß. Die Versuche ergaben, daß bei den Mikrophenen 1 und 3 diese Grenzdämpfung überschritten, bei 2 eben erreicht, bei 4 und 5 dagegen nicht erreicht wird. Dem entspricht die Form der Frequenzkurven, aus denen die Dämpfungen gleichfalls ermittelt werden.

## V. Ausgleichsvorgänge in Sprachlauten.

11. **Das Sprachorgan.** Der Mechanismus der Entstehung menschlicher Sprachlaute ist durch neuere Arbeiten von W. TRENDELENBURG und Mitarbeitern (59, 60, 77, 78) weitgehend und endgültig geklärt worden. Es hat sich hiernach (59) in Übereinstimmung mit den Anschauungen von HELMHOLTZ (6) ergeben, daß die Stimmbänder im Kehlkopf infolge des von der Lunge erzeugten Druckes kurze Luftstöße durchlassen, um sich dann wieder vollständig zu schließen. Hierbei dauert die Verschußphase, besonders bei tiefen Tönen, manchmal länger als die Öffnungsphase, kann aber bei hohen Tönen auch ganz in Fortfall kommen. Man kann hiernach den Vorgang während einer Periode so auffassen, daß die an den Kehlkopf angeschlossenen Rachen-, Nasen- und Mundhöhlungen in ihren Eigenfrequenzen angestoßen werden. Es ergeben sich dann gedämpfte Schwingungen, wie man sie ja bei manchen Sprechlauten während einer einzelnen Periode deutlich beobachten kann. W. TRENDELENBURG (78) weist darauf hin, daß bei allen Vokalen in Oszillogrammen von Mikrophonaufnahmen zu Beginn jeder Periode eine Gruppe von starken Formantschwingungen

auftritt, die etwa  $\frac{1}{3}$ – $\frac{1}{5}$  der Periode in Anspruch nimmt. Diese „Anfangsgruppe“ fällt bei gleichzeitiger Aufnahme des Stimmklangs und der Stimmritzenbewegung am Kehlkopfpräparat zeitlich sehr genau mit der Stimmritzenöffnung zusammen. Aus den Aufnahmen von Vokalkurven von Lebenden kann man dann aus der Form des Einsatzes, wenn dieser „scharf gestoßen“, d. h. durch plötzliche Sprengung des Stimmritzenverschlusses ausgeführt wird, erkennen, daß der ganze Schwingungsvorgang mit der „Anfangsgruppe“ beginnt (s. Abb. 17). Hierdurch wird bestätigt, daß diese Anfangsgruppe in der Tat durch die Öffnung der Stimmritze erzeugt wird. Bei Klängen von höherer

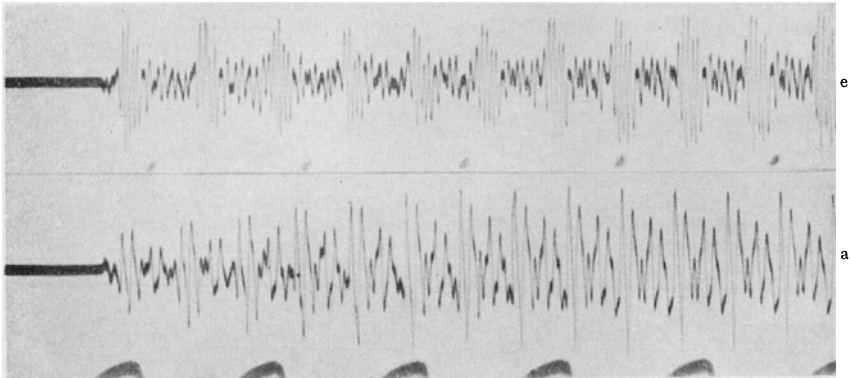


Abb. 17. Scharfgestoßene Vokaleinsätze e und a. (Nach W. TRENDLENBURG.)

Stimmlage, wo also die Öffnungszeit einen größeren Teil der Periode einnimmt, wird die Anfangsgruppe merklich undeutlicher.

Diese Betrachtung einer Einzelperiode kann über die Wirkungsweise des Sprachorgans Aufklärung bringen. Für die Darstellung des akustischen Effekts ist sie dagegen ungeeignet. Hierfür ist es notwendig zu berücksichtigen, daß die erwähnten Öffnungen der Stimmritze innerhalb gewisser Zeitabschnitte periodisch erfolgen, und es ist notwendig, diesen ganzen periodischen, oder doch wenigstens nahezu periodischen Vorgang ins Auge zu fassen. Hierfür ist es nicht allein aus mathematischen Gründen zweckmäßig, sondern, wegen der Eigenschaft des menschlichen Gehörs als Frequenzanalysator notwendig, eine Zerlegung dieser periodischen Vorgänge nach dem FOURIERSchen Satz vorzunehmen. Hiernach ist der Luftstrom, der aus der Stimmritze austritt, im Takte der Grundfrequenz gesteuert, und enthält eine große Anzahl von harmonischen Oberschwingungen beträchtlicher Amplitude. Der akustische Effekt, der eigentliche Sprachklang, entsteht dann so, daß diese Oberschwingungen in den Nasen-, Rachen- und Mundhöhlungen Resonanzen finden, die ihm den eigentlichen charakteristischen Klang, seine Klangfarbe, geben. Diese Darstellung der Entstehung der Sprachlaute ist der oben gegebenen, auf jede einzelne Periode bezüglichen, in jeder Beziehung

gleichwertig. Es muß sich bei strenger Durchführung dieser beiden Auffassungen identisch das gleiche Resultat ergeben. Deshalb ist es verfehlt, auf diese beiden äquivalenten Auffassungen verschiedene Vokaltheorien aufbauen zu wollen. W. TRENDELENBURG (59) bemerkt die Übereinstimmung der Wirkungsweise des Sprachorgans mit der eines Streichinstrumentes. Den beiden gekoppelten Teilsystemen, Saite und Instrumentkörper, entsprechen bzw. Stimmlippe und Hohlraum. Die Primärsysteme sind durch die Wirkung des Bogens bzw. des Anblasluftstroms entdämpft. Das entsprechende elektrische System ist, wie der Verfasser (81) gezeigt hat, ein Zwischenkreisröhrensender. W. TRENDELENBURG konnte ferner durch Versuche an Präparaten durch Abbau der an den Kehlkopf angrenzenden Resonanzräume zeigen, daß hierdurch die Stimmlippenschwingungen sich nicht merklich ändern. Es wird hiernach auf eine sehr lose Koppelung der beiden Schwingungssysteme miteinander geschlossen.

**12. Nichtstationäre Vorgänge bei Vokalen.** Einschwingvorgänge treten beim Intonieren von Vokalen nicht auf. Der Verfasser (33) fand, daß beim natürlichen Aussprechen die für den Vokal charakteristische Schwingungsform schon nach wenigen Millisekunden aufgebaut ist. W. TRENDELENBURG (78) hat darüber hinaus festgestellt, daß bei scharfgestoßenen Vokaleinsätzen die Schwingung ganz unvermittelt beginnt (s. Abb. 17). Es fehlt den Vokalen daher ein Merkmal, das bei anderen Klängen, vornehmlich denen der Musikinstrumente, zur Erkennung des Klanges benutzt wird. Bei Vokalen ist das auch nicht nötig, weil sie aus ihrer stationären Klangfarbe, aus ihren Formanten, immer mit Sicherheit erkannt werden können, was bei Musikklingen meist nicht der Fall ist. Diese Tatsache hat der Verfasser (33) so begründet, daß diese Resonanzbereiche, auf die die Mund- und Nasenhöhlungen für jeden Vokal eingestellt werden, sehr breit sind. Die charakteristischen Formantbereiche werden deshalb immer mit einem, meist sogar mit mehreren bevorzugten Teiltönen belegt. Diese große Resonanzbreite folgt aus der starken Dämpfung, die die Luftschwingungen in den Resonanzhöhlräumen durch die weichen Wandungen erfahren. Andererseits hat die große Dämpfung ein sehr schnelles Einschwingen zur Folge, wie es ja in der Tat bei Vokalen gefunden wurde. Diese Auffassung ist durch die Untersuchungen von W. TRENDELENBURG (77) bestätigt worden, der durch momentane Impulse die Mundhöhlungen in den charakteristischen Vokalstellungen anstieß und aus Registrierungen der Schallschwingungen Eigenfrequenz und Dekrement der Mundhöhle bestimmen konnte. Die Impulse wurden erzeugt durch Lippensprengung mittels schnellen Mundöffnens, durch Fingeranprall und durch Platzen einer Speichelmembran, die sich leicht zwischen den Lippen ausspannen läßt. Bei richtiger Haltung der Mundhöhle ergeben sich in der Tat neben einer Bestätigung der Lage der Vokalformanten sehr große Dekremente in der Größenordnung 0,2—0,37. Diese Werte sind in befriedigender Übereinstimmung mit den von

F. TRENDELENBURG und FRANZ (63) aus Oktavsiebaufnahmen gefundenen Dekrementwerten: für Vokal a 0,13—0,29, Vokal i 0,2.

Es muß gegenüber immer wieder geäußerten mißverständlichen Auffassungen (76) daran festgehalten werden, daß Vokale grundsätzlich streng periodische Vorgänge sind. Die natürliche Entwicklung nach den Eigenfunktionen solcher linearen Schwingungssysteme, als welche Sprach- und Gehörorgan im wesentlichen zu betrachten sind, führt zwangsläufig auf eine FOURIER-Analyse. Ein bei konstanter Tonhöhe und Amplitude hinreichend lange gesungener Vokal ist also, wenn man den ganzen Vorgang, nicht nur eine Einzelperiode, ins Auge faßt, aus stationären Teiltönen zusammengesetzt, die streng harmonisch zueinander liegen. Ein solcher Vorgang wird nun zwar deutlich als Vokal aufgefaßt und erkannt werden, und es ist daher wohl berechtigt, hierin die einfachste und reinste Verkörperung eines Vokals zu sehen. In der Sprache treten aber meist Änderungen in der Grundfrequenz, der Amplitude und der Klangfarbe auf, ohne daß jedoch der Vokalcharakter beeinträchtigt zu werden braucht. Der Verfasser (33) fand, daß bei „ba“ und „da“ der a-Formant nach 10 msec erst in tieferer Lage bei 660 Hz bemerkbar wird, um dann nach etwa 20 msec bis 1155 Hz zu steigen. W. TRENDELENBURG (78) erklärt das so, daß beim Öffnen des Mundes nach den Konsonanten die Lippen in endlicher Geschwindigkeit in die a-Stellung übergehen und auf ihrem Wege dahin die u- und o-Stellung überschreiten müssen. Im laufenden Sprachtext werden solche Übergänge von einem reinen und deutlichen Vokalklang zu weniger klaren Formen sehr häufig gefunden, wie GEMELLI und PASTORI (51, 70) gefunden haben. Sie unterscheiden dann zwischen „typischen“ und „atypischen“ Vokalkurvenformen. Zur Erkennung des Vokals sollen zwei „typische“ Perioden ausreichen. Genauere Untersuchungen über Änderungen der Amplitude und der Formantgebiete in zusammenhängender Sprache hat STEINBERG (53) angestellt. Mit den Methoden der Oktavsieboszillographie, wobei das kontrollierte Frequenzband nach oben hin bis zu 11200 Hz ausgedehnt wurde, haben VIERLING und SENNHEISER (96) die kurzen und langen Vokale untersucht. Sie finden, daß der Unterschied zwischen beiden nicht allein in der Zeitdauer liegt, sondern daß erhebliche Unterschiede im Spektrum vorliegen. Die kurzen Vokale zeigen gegenüber den bisher meist untersuchten langen Vokalen vor allem eine Anreicherung an hohen Frequenzen. Beim „a“ verschieben sich die Formanten nach höheren Frequenzen, beim „e“ nur der untere Formant, während bei 700—1400 Hz ein neuer Formant auftritt.

**13. Die Konsonanten.** Während die Vokale das Gerippe der Sprache ausmachen, sind die Konsonanten vielfach im eigentlichen Sinne als Ausgleicherscheinungen zu betrachten, denen wenig eigene klangliche Eigenschaften beizumessen sind, die vielmehr hauptsächlich so wirken, daß sie den folgenden oder vorangegangenen Vokal in seinem Ein- bzw.



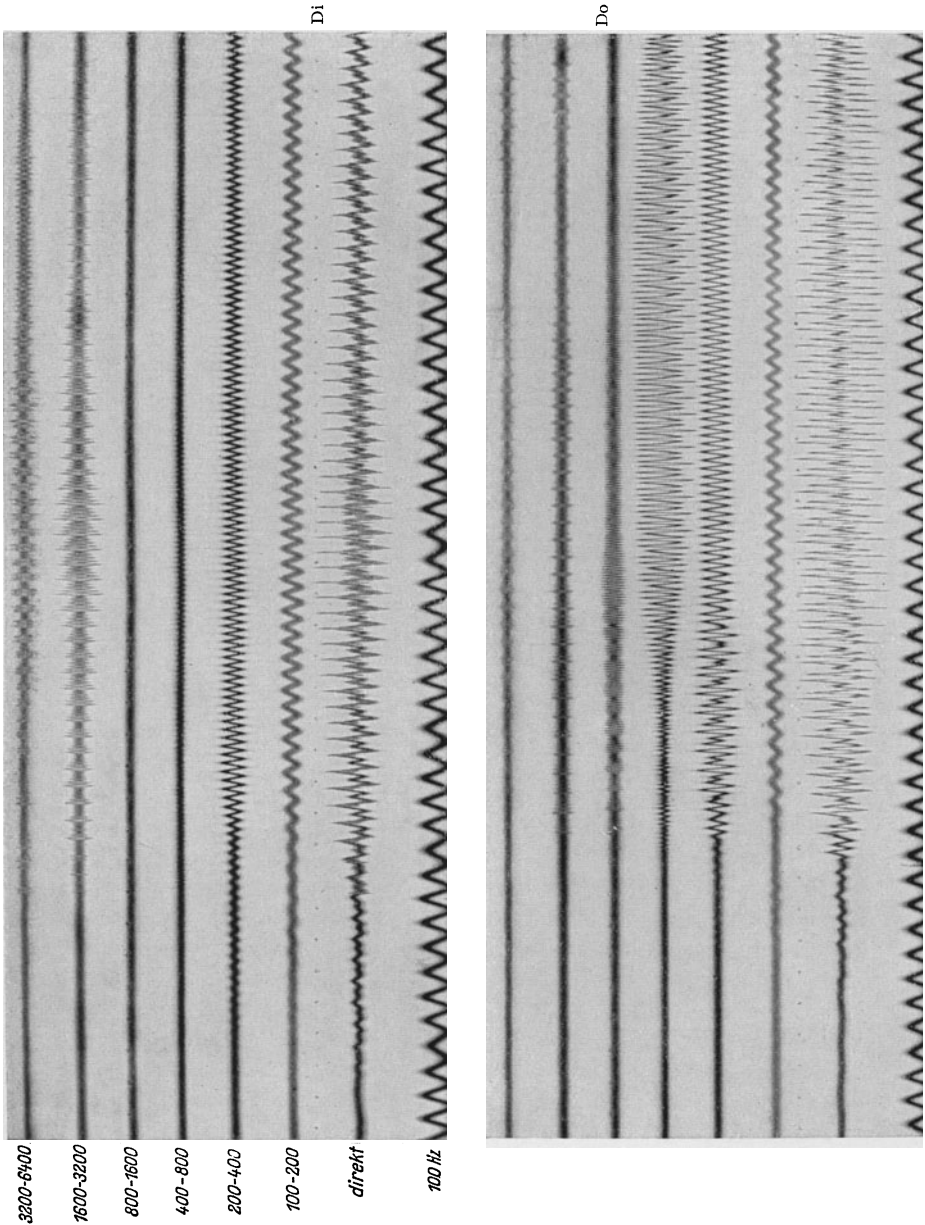
Ausklang beeinflussen. Als Übergang sind zu bewerten die Liquidae M, N, L, R als stimmhafte Halbvokale. Hierfür hatte schon vor längerer Zeit F. TRENDELENBURG (18) gefunden, daß diese Laute Klanggemische sind, die aus starken harmonischen und unharmonischen Bestandteilen vor allem in höheren Lagen zusammengesetzt sind. Dies kann mit dem Mittel der Oktavsieboszillographie besonders eindrucksvoll gezeigt werden (58). Die Stimmbandschwingung ist dann nicht die einzige Schallquelle. Es wird hierbei nicht die ganze Strömungsenergie des Luftstromes im Kehlkopf in Schall umgesetzt, vielmehr vermag ein überlagerter Gleichstromanteil an den Einengungsstellen im Ansatzrohr, insbesondere durch Wirbelbildung, Geräusche zu erzeugen. Die charakteristischen Frequenzanteile der Liquidae L, M, N fand F. TRENDELENBURG in Übereinstimmung mit den Angaben von STUMPF (20), worauf im Rahmen dieses Berichts nicht näher eingegangen zu werden braucht. GEMELLI und PASTORI (51) finden, daß bei L, M, N die benachbarten Vokale auf den Konsonanten übergreifen in der Weise, daß darin die betreffenden Vokalformanten zu erkennen sind. So enthält das L in „cabala“ etwa den a-Formanten, dagegen in „mocolo“ den o-Formanten.

Eine besondere Rolle spielt das R. Hierbei wird durch Bewegungen der Zunge beim R linguale, oder des Zäpfchens, beim R uvulare, der Luftstrom in einer Frequenz von 20—40 Hz unterbrochen. Hierdurch entsteht eine Amplitudenmodulation des Klanges. F. TRENDELENBURG (18) weist darauf hin, daß dieser Sachverhalt als eine Überlagerung zweier benachbarter sinusförmiger Schwingungen aufzufassen ist, die natürlich im allgemeinen in keinem harmonischen Verhältnis zueinander zu stehen brauchen. Das R ist demnach auch als Klanggemisch anzusehen.

Zu den Klanggemischen gehören ferner die stimmhaften Zischlaute. F. TRENDELENBURG und FRANZ (63) zeigen, mit den Mitteln der Oktavsieboszillographie, daß in tiefen Frequenzen bis 600 Hz streng harmonische Komponenten liegen, die von der Stimmbandschwingung herrühren, während in höheren Gebieten völlig unharmonische Bestandteile zu finden sind, die als Wirbelgeräusche des Luftstromes an den Zähnen gedeutet werden. Bei stimmlosen Zischlauten bleiben diese Geräusche allein übrig, die nach GRÜTZMACHER (26) bei besonders scharfer Aussprache bis zu 13000 Hz hinaufreichen.

Von besonderer Bedeutung für die hier interessierenden Fragen sind die sog. Explosivlaute, die wir in die Gruppen der Mediae: B, D, G und der Tenues: P, T, K einteilen. Schon HELMHOLTZ (6) verdankt man einige wertvolle subjektive Beobachtungen hierzu. Eingehende Untersuchungen hat der Verfasser (33) und mit den Mitteln der Oktavsieboszillographie F. TRENDELENBURG und FRANZ (63, 88) darüber angestellt. Bei den Tenues ist die Stimmritze geöffnet, bei den Mediae ist sie zunächst geschlossen und beginnt beim Einsatz sofort zu schwingen. Die

Mediae sind daher stimmhafte Laute. Je nach der Verschlusstelle im Ansatzrohr, die beim Einsatz gesprengt wird, gehören zusammen B und



P als Labiale, D und T als Dentale, G und K als Gutturale. Die objektiven Unterschiede zwischen den verschiedenen Lauten liegen zunächst

in der Dauer des eigentlichen Konsonantgeräusches. F. TRENDELEBURG (88) fand hierfür im Mittel in guter Übereinstimmung mit den Resultaten des Verfassers (33) in Millisekunden:

pe 65, te 57, ke 79, be 13, de 19, ge 22.

Dieselben Zeiten etwa ergeben sich auch, wenn der betreffende Konsonant zwischen zwei Vokalen erklingt. Angaben über Konsonantdauern

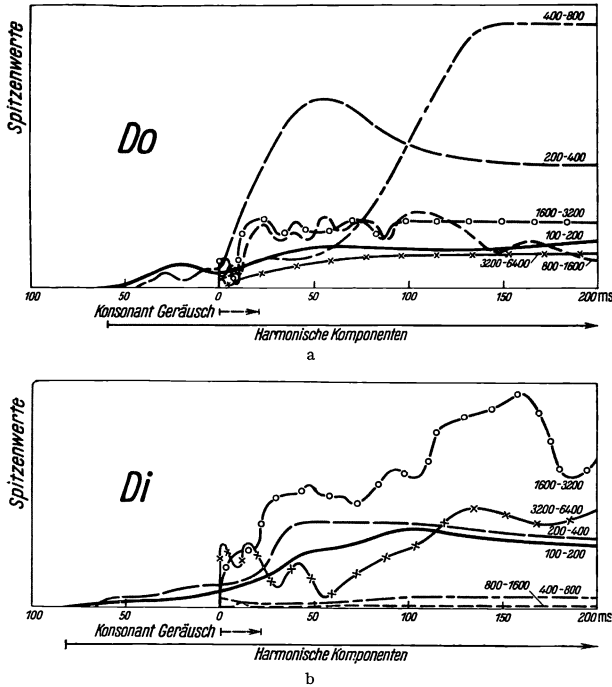


Abb. 19a und b. Spitzenwerte in den einzelnen Oktavbereichen bei den Silben Di und Do.  
(Nach F. TRENDELEBURG und E. FRANZ.)

in der chinesischen und mongolischen Sprache, die zum Teil mit der vorstehenden übereinstimmen, machen OBATA und TESIMA (57). Während bei den Tenues das Konsonantgeräusch allein ziemlich stark erscheint, bestehen bei den Mediae die stimmhaften Anteile gleichzeitig mit einem schwächeren Konsonantgeräusch. Bei den Mediae hat F. TRENDELEBURG (88) in Übereinstimmung mit einer subjektiven Beobachtung von HELMHOLTZ (6) weiter gefunden, daß die stimmhaften Anteile sogar schon vor dem Beginn des eigentlichen Konsonantengeräusches vorhanden sind. Bei den Mediae zwischen zwei Vokalen bleiben die stimmhaften Anteile bestehen, während sie bei den Tenues in solchen Fällen völlig verlöschen. Die gutturalen Laute g und k zeichnen sich dadurch aus, daß das Konsonantengeräusch mit einem impulsähnlichen Einsatz beginnt. Bei den Tenues hat der Verfasser (33) nach dem ersten Einsatz

ein Zwischenstadium gefunden, das aus einem Hauchlaut besteht. Besonders stark macht sich das, wie F. TRENDELENBURG (88) und LICHTÉ (67) gefunden haben, beim p bemerkbar. Hier liegt ein deutlicher und starker Gleichdruckstoß vor. Aus der frühzeitigen Stimmbandbetätigung bei den Mediae folgt, daß der Aufbau der Formanten eines nachfolgenden Vokals im allgemeinen schneller erfolgt als bei nach den Tenues. Im besonderen bemerkt F. TRENDELENBURG (88), daß diese Aufbauzeit sehr wesentlich davon abhängt, inwieweit Mund- und Zungenstellung beim Konsonanten von der für den Vokal notwendigen abweichen. So liegt z. B. beim d die Zunge an den oberen Zähnen und braucht für ein nachfolgendes i nur ganz wenig davon entfernt zu werden, während für ein o die Zunge sich weit von den Zähnen entfernen muß und zwischen dem hinteren Teil der Zunge und dem Zäpfchen eine Einengung gebildet werden muß. Dem entspricht auch die Beobachtung. In Abb. 18 sind nach TRENDELENBURG (88) die Oktavsiebaufnahmen, in Abb. 19 die Spitzenwerte in den einzelnen Oktavbereichen bei Di und Do in Abhängigkeit von der Zeit eingetragen.

## VI. Nichtstationäre Vorgänge an Musikinstrumenten.

14. **Allgemeines.** Bei Musikklängen spielen nichtstationäre Vorgänge, vornehmlich die Einschwingvorgänge, eine besonders bedeutsame Rolle. Nachdem aus Versuchen von STUMPF (20) bekannt war, daß die Erkennung und Unterscheidung selbst für erfahrene Kenner nicht mehr möglich war, wenn nur der reine stationäre Klang, unter Ausschaltung von Ein- und Ausschwingvorgängen, dargeboten wurde, mußte (33) geschlossen werden, daß die Erkennbarkeit hier nicht in der „musikalischen“ Klangfarbe begründet sein kann, sondern daß hierzu besonders die sehr stark differenzierten Einschwingvorgänge beitragen mußten. Von Formanten, d. h. von Frequenzbereichen, deren starke Betonung für den Klang charakteristisch ist, kann, wie zuerst MEYER (28) bemerkte, kaum die Rede sein. Die Verhältnisse liegen hier gerade umgekehrt wie bei den Vokalklängen: die Resonanzgebilde bei Musikinstrumenten sind meist schwach gedämpft, ihre Resonanzkurven enthalten daher oft scharfe Zacken, wie dies bei der Geige zuerst der Verfasser (81) gezeigt hat. Zu einer regelmäßigen Formantausbildung kann es daher nicht kommen, weil häufig die betreffende Teilschwingung des erregenden Systems auf ein Minimum der Resonanzkurve fallen wird. Andererseits sind aber wegen der geringen Dämpfung die Ausgleichsvorgänge sehr deutlich und relativ lang dauernd. In ihnen, vornehmlich in den Einschwingvorgängen, liegt das hauptsächliche Erkennungsmerkmal für Musikinstrumente.

Aber darüber hinaus kommt auch anderen nichtstationären Vorgängen bei Musikinstrumenten eine große Bedeutung zu. Ein rein stationärer Klang erscheint monoton und wenig reizvoll. Die Wirkung

wird sehr viel angenehmer, wenn unharmonische Bestandteile in gewisser Menge, gleich wie das Salz zu den Speisen, beigemischt werden, wie z. B. die Schlaginstrumente im Orchester. Es erfreuen sich daher von jeher solche Instrumente einer besonderen Beliebtheit, deren Klang, wie z. B. bei den Streichinstrumenten, leicht moduliert werden kann. Bei der Orgel wird der Mangel an Modulationsfähigkeit viel beklagt. Der Klang erhält dadurch etwas Starres, so daß die Orgel nur für bestimmte Zwecke verwendet wird, bei denen ein solcher Effekt erwünscht ist.

**15. Streichinstrumente.** Der Einschwingvorgang einer Geige ist sehr ausgesprochen und dauert etwa 100 msec. In Abb. 20 ist die Entwicklung der einzelnen Teiltöne angedeutet. Bis zu 30 msec wiegen höhere Teiltöne vor im Gebiet von 3000—5200 Hz. Sie stellen das bekannte Bogenansatzgeräusch dar. Dieselben Teiltöne sind übrigens auch im stationären Klang besonders betont. Die Entwicklung der tieferen Teiltöne erfolgt dann augenscheinlich so, daß der Bogen-druck beim ersten Aufsetzen für eine Schwingungsform mit vorherrschendem Grundton nicht ausreicht. Mit der Zeit wächst der Bogen-druck, und damit wird die Ordnung des vorherrschenden Obertons immer niedriger, bis schließlich nach etwa 100 msec der Grundton vorherrscht.

Man findet dann weiter, durch Ermittlung der Teiltonamplituden über einen längeren Zeitraum hin, daß selbst bei diesem Vorgang, bei dem der Spieler bestrebt war, einen möglichst gleichmäßigen Klang zu erzeugen, starke relative Veränderungen der Teiltonamplituden durch die Eigenart des Bogenstriches mit der Hand zwangsläufig eintreten (33).

Um die durch den Handanstrich bedingten Unregelmäßigkeiten auszuschalten, hat der Verfasser (94) Ausgleichsvorgänge an der Geige mit Hilfe einer automatischen Anstrichvorrichtung aufgenommen. Bei Untersuchungen einer beiderseits fest eingespannten Saite zeigt sich, daß es einen optimalen Bogen-druck gibt, bei dem einerseits der Einschwingvorgang der Saite am schnellsten verläuft und andererseits der Anteil des Grundtons in der Saitenschwingung am stärksten wird. Das

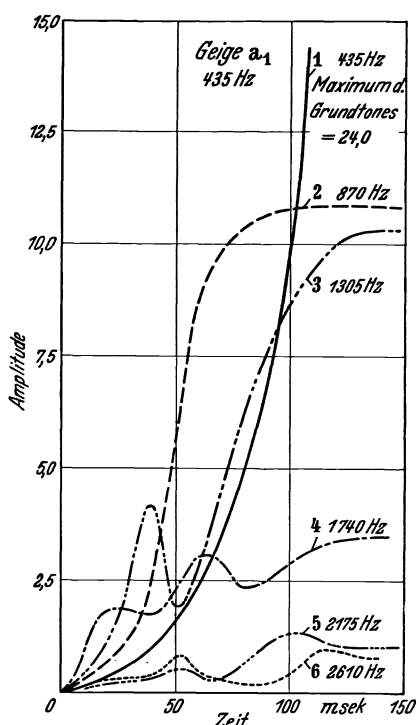


Abb. 20.  
Zeitlicher Aufbau der einzelnen Komponenten  
eines Geigenklanges. (Nach H. BACKHAUS.)

Dekrement der reinen Saite erwies sich als sehr klein, etwa  $\delta = 0,004$ . Infolge der Arbeit aber, die zur Deformation des Steges geleistet wird, erscheint das Dekrement der Saiten erheblich vergrößert, im Mittel etwa  $\delta = 0,04$ , ein Wert, der auch für den Resonanzkörper zutrifft, so daß die beiden Teile, Saite und Körper, praktisch gleich stark gedämpft erscheinen. Beim Instrument finden sich die Einschwingdauern auf den reinen Saiten: g-Saite 0,4 sec, d-Saite 0,24 sec, a-Saite 0,16 sec, e-Saite (Metall) 0,16. Die hiernach berechneten Gesamtdämpfungen sind alle von der gleichen Größenordnung für die leere Saite 0,01 sec. Für die verkürzten Saiten wurden etwa doppelt so große Werte gefunden. Die aus Ausschwingaufnahmen berechneten Dämpfungen sind von derselben Größenordnung 0,01; sie zeigen ein deutliches Maximum bei der Hauptresonanz der Geigen in Gegend 500 Hz. Außerdem werden die Dämpfungen mit der Saitendicke größer. Beim Abarbeiten des Geigenkörpers auf kleinere Holzdicke wurde eine Zunahme der Dämpfung, wohl infolge Vergrößerung der Strahlungsdämpfung, beobachtet. An Ausschwingaufnahmen bei der Hauptresonanz wurden beim Herausziehen der Grundfrequenz besonders einfache Ausschwingvorgänge beobachtet, wie sie bei Systemen mit zwei Freiheitsgraden bei gleicher Eigenfrequenz und Dämpfung der Teilsysteme auftreten. Nach den hierfür bekannten theoretischen Ergebnissen konnten aus solchen Aufnahmen Kopplung und Dämpfung berechnet werden (siehe II, 2). Beide Größen zeigen bei allen untersuchten Instrumenten einen Abfall mit abnehmender Saitenstärke. Für die Kopplung ist das nach der Lage der Saiten verständlich, wenn man berücksichtigt, daß die Schwingungsübertragung auf die Geigendecke wesentlich durch den linken Stegfuß erfolgt. Für besondere Güte der Geige ist anscheinend eine recht enge Kopplung zwischen Saite und Körper erwünscht.

Ausschwingaufnahmen von Geigen hat mit einem logarithmischen Verstärker VIERLING (64) gemacht. Er erhält keinen gradlinigen Abfall und schließt hiernach darauf, daß bei kleiner werdender Amplitude immer weniger Teile des Instruments mitschwingen und dadurch die Dämpfung kleiner wird. Bei Geigen dürfte der beobachtete Effekt wohl dadurch stark beeinflußt werden, daß man es mit den freien Schwingungen eines Systems mit mehreren Freiheitsgraden zu tun hat, wobei man einen streng exponentiellen Abfall, besonders bei fester Kopplung, nicht erwarten kann.

Bei Streichinstrumenten, besonders beim Cello, tritt manchmal eine Instabilitäterscheinung auf, die unter dem Namen „Wolftön“ bekannt ist. Hiermit beschäftigt sich eine Arbeit von VOLLMER (90), s. a. (81). Bei Beobachtungen mit Hilfe eines Oktavsiebes zeigt es sich, daß hierbei starke Schwebungen des Grundtons auftreten mit einer Frequenz von etwa 10—15 Hz. Eine energetische Erklärung hat dafür RAMAN gegeben (8). Eine deutlichere Einsicht in den Vorgang erhält man, wenn man beachtet, daß die Wirkungsweise eines Streichinstru-

menten der eines Zwischenkreisröhrensenders oder einer Zungenpfeife weitgehend analog ist. In beiden Fällen erhält man die von WIEN und VOGEL (12) an der Zungenpfeife gefundenen Ziehschleifen. Die Erklärung des Wolfstones folgt dann aus der Theorie des Zwischenkreisröhrensenders von ROGOWSKI (15): bei geeigneter Rückkopplung ist es möglich, beide Systeme bei Abstimmung aufeinander zu entdämpfen. Es entstehen dann die beiden freien entdämpften Koppelschwingungen, die dann natürlich Schwebungen miteinander bilden. Die hiernach berechneten Kopplungskoeffizienten stimmen gut mit den anderweitig gefundenen Werten überein. Der Wolfston ist ein Mangel eines Instruments. Doch es ist nicht so, daß daraus auf seine Güte allgemein ungünstige Schlüsse gezogen werden dürfen. Im Gegenteil findet man bei Geigen solche Wolfstöne häufig bei den berühmtesten Instrumenten. Voraussetzung dafür ist nämlich eine starke Ausbildung der Hauptresonanz. Man kann den Wolf wohl als die unangenehme Begleiterscheinung einer guten Eigenschaft bezeichnen. Seine Beseitigung geschieht daher auch durch vermehrte Dämpfung der Hauptresonanz, was entweder durch Anbringung eines Gummistopfens zwischen Körper und Griffbrett oder durch entsprechendes Abgreifen und Mitschwingenlassen einer zweiten Saite ausgeführt werden kann.

**16. Blasinstrumente.** Bei Blasinstrumenten sind nichtstationäre Vorgänge von geringerer Bedeutung als bei Streichinstrumenten. Bei ausgehaltenen Klängen ist Amplitude und Klangfarbe wenig schwankend. Bei Oboe und Fagott kann man wohl von Formantgebieten sprechen, wie MEYER und BUCHMANN (28) gefunden haben. Der Grund dafür dürfte die starke Dämpfung der Luftsäule infolge der engen Mensur sein. Demgemäß sind auch bei diesen Instrumenten die Ausgleichsvorgänge sehr kurz. Für die Oboe liegt eine Messung von F. TRENDELENBURG und FRANZ (88) vor. Der Einschwingvorgang verläuft hiernach sehr glatt und dauert etwa 10 msec. Bei der Klarinette (33) dauert der Vorgang 50—70 msec. Es entstehen zuerst die tiefen Teiltöne. Einen weniger glatten Verlauf hat F. TRENDELENBURG (88) hierfür gefunden. Nach Beobachtungen von ASCHOFF (87), der die Wirkungsweise der Klarinette und die Vorgänge beim Überblasen untersucht hat, kann man bei sehr starkem Lippendruck Schwebungen erhalten, die wohl ein Gegenstück zu dem Wolfston bei Streichinstrumenten sind, auch wohl eine ähnliche Entstehungsursache haben. Beim Saxophon fand der Verfasser (33) eine Einschwingdauer von etwa 40 msec, bei etwas stärkerer Betonung höherer Frequenzen als bei der Klarinette. Auffallend ist bei diesem Vorgang ein Absinken der meisten Teilamplituden in der Mitte des Anklangs. Hierin dürfte das dem Saxophon eigentümliche Blökgeräusch begründet sein. Der Flötenanklang ist sehr lang, 200—300 msec. Gelegentlich wurde (33) ein schnelleres Einschwingen nach 50 und 60 msec beobachtet, worauf der Klang noch einmal zurückging, um erst später endgültig seine volle Stärke zu erreichen. Der Klang beginnt häufig

mit einer etwas abweichenden Frequenz, was durch den labilen Anblasmechanismus verständlich wird. Das Einsetzen des Flötenklangs wird demnach einen wenig bestimmten, verschwommenen Eindruck machen. VIERLING (64) erhielt durch Oktavsieboszillographie ähnliche Resultate. Darüber hinaus zeigte er aber, daß trotz der langen Einschwingzeit der Übergang von einem Ton zu einem anderen sehr viel schneller, in weniger als der Hälfte der Einschwingzeit, vor sich geht. Während des Übergangs zeigen sich Schwebungen zwischen dem schnell neu entstehenden zweiten und dem etwas langsamer verklingenden ersten Ton.

Von den Blechblasinstrumenten sind Einschwingvorgänge bisher nur von der Trompete registriert worden. Der Verfasser (33) fand hier ein sehr schnelles Ansteigen aller Teiltöne zu einem Maximum mit nachfolgendem allmählichem Ausgleich. F. TRENDELENBURG und FRANZ (88) finden zu Beginn ein durchaus unharmonisches Anblasgeräusch.

**17. Die Orgel.** Der Orgelklang wird durch Anblasen von Pfeifen hervorgebracht, wobei die Anblaseluft durch mechanische Vorrichtungen an- und abgestellt wird. Der Klang hat daher etwas sehr Gleichmäßiges, aber auch Monotones. Eine Änderung der Tonstärke eines bestimmten Registers kann nur durch recht unvollkommene „Schweller“, eine Änderung der Klangfarbe gar nicht erfolgen, wenn man hierfür nicht die sog. Nebenstimmen in Anspruch nehmen will. Für diesen vielbeklagten Übelstand haben nun die Orgelbauer ganz unbewußt einen Ersatz dadurch zu schaffen gesucht, daß sie die Einschwingvorgänge bei den verschiedenen Registern höchst vielseitig gestalten.

Umfangreiche Untersuchungen über die Klangeinsätze bei Orgeln hat F. TRENDELENBURG mit seinen Mitarbeitern (82, 86) angestellt. Er fand, daß bei den Zungenregistern (Trompete, Posaune, Cornett, Oboe, Vox humana) der Klang im allgemeinen sehr sicher und plötzlich aufgebaut wird; während bei den Lippenpfeifen (Prinzipal, Gedackt, Flöte, Streicher) der stationäre Zustand unsicher und langsam, meistens sogar unter erheblicher zeitlicher Änderung der Klangzusammensetzung erreicht wird. Das entspricht den an der Einzelflöte gemachten Feststellungen. Die Nachahmung der Instrumente durch die einzelnen Orgelregister erscheint dem unbefangenen Hörer häufig nicht recht gelungen. Der Grund dafür dürfte weniger in Abweichungen bei der musikalischen Klangfarbe als in solchen bei den Einschwingvorgängen zu suchen sein. Am besten gelungen scheinen die Register Trompete und Posaune, die wie ihre Vorbilder sehr rasche Einschwingvorgänge zeigen, ebenso die Oboe. Bei der Vox humana liegt vor dem sehr rasch erfolgenden Klangeinsatz ein wesentlich unharmonischer Vorläufer mit tiefen Komponenten. Die Abweichung des Registerklanges von seinem Vorbild erklärt sich hierdurch. Er ähnelt mehr dem eines Explosivlautes, wobei auf einen Konsonant aus der Gruppe der Mediae ein Vokal folgt. Im stationären



Klang wird dagegen vor allem in den hohen periodisch angestoßenen Formantschwingungen weitgehende Ähnlichkeit mit Vokalen der menschlichen Stimme gefunden. Den Grund für dieses Verhalten sieht F. TRENDELENBURG hauptsächlich in der verschiedenen Bauart der Zungen. Beim Trompeten- und Posaunenregister sind diese kurz, breit und kräftig, bei der Vox humana länger, schmaler und dünner.

Besondere Beachtung verdienen Aufnahmen an dem Register „Lieblich Gedackt“ (s. Abb. 21). Vor dem Beginn des eigentlichen Klanges liegt ein Vorläufer mit einer Frequenz, die etwa das  $5\frac{1}{2}$ -fache des stationären Klanges

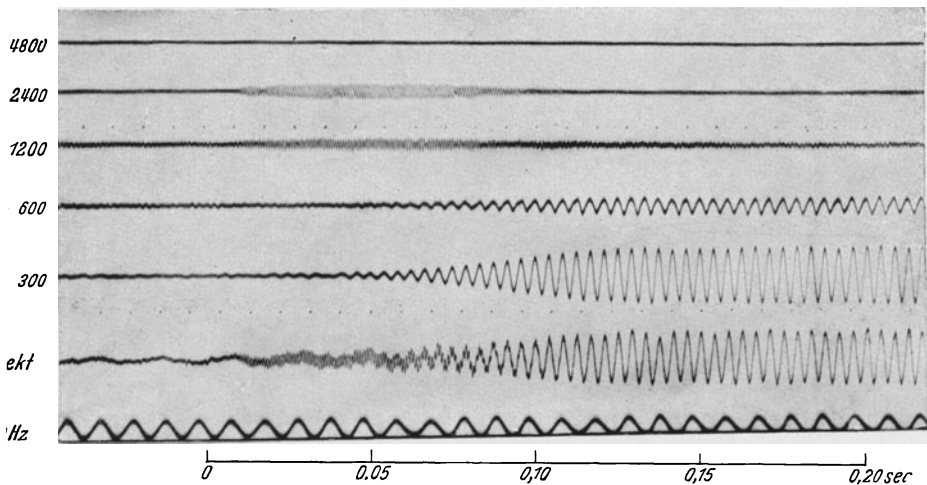


Abb. 21. Klangeinsatz beim Orgelregister „Lieblich Gedackt“, Tonhöhe  $c^1$ . (Nach F. TRENDELENBURG, E. TRIENHAUS und E. FRANZ.)

beträgt, also durchaus nicht harmonisch zum Grundton liegt. TRENDELENBURG (82) deutet diesen Vorläufer so, daß wegen der sehr labilen Intonation des Registers ein bestimmter Luftdruck zur Aufrechterhaltung des stationären Grundtons erforderlich ist. Wird dieser Luftdruck nicht erreicht, so springt die Pflöfe in einen höheren Ton um. Man kann mit diesem Register sehr eigenartige und reizvolle Klangwirkungen erzielen: bei einer raschen Tonfolge hört man nur den Vorläufer, erst beim langsamen Spiel erscheinen auch die stationären Anteile. Bei einem anderen ähnlichen Register fand F. TRENDELENBURG ungewöhnlich lange und gleichmäßige Einschwingvorgänge von etwa 400 msec Dauer. Das muß subjektiv fast den Eindruck eines Anschwellens des Klanges erwecken, der bei der Orgel ja sonst nicht möglich ist, aber hier durch besondere Gestaltung der Einschwingvorgänge ersetzt wird.

Es wird ausdrücklich betont, daß solche Erscheinungen nicht nur vereinzelt an einer Orgel zu finden sind, daß sie sich vielmehr an wertvollen, vor allem alten Orgeln häufig finden. „In der Mannigfaltigkeit

der Einsätze liegt ein großer Teil der belebenden Wirkung des Spiels wirklich guter Orgeln, eine Wirkung, welche durch noch so ausgeklügelte Klangfarbenzusammenstellungen in den stationären Klangteilen niemals ersetzt werden kann.“

Für die Technik des Orgelbaues ist daher diese Frage der Einschwingvorgänge von großer Bedeutung. Deshalb hat HAUSMANN (43) den Einfluß der Windladensysteme und der Ventilformen auf die Einschwingvorgänge von Orgelpfeifen untersucht. Wenn eine Ansprache derart angestrebt wird, daß die Grundtöne besonders schnell vorherrschend werden, so ist hierfür eine solche Anordnung der Kanzellen und Ventile besonders günstig, bei der der Windweg möglichst kurz und möglichst gradlinig verläuft. Für diesen Zweck ist eine Anordnung mit Tonkanzellen der heute üblichen mit Registerkanzellen vorzuziehen. Die Untersuchungen von F. TRENDELENBURG lassen allerdings durchaus nicht die Deutung zu, daß die „grundtönige“ Ansprache unter allen Umständen wünschenswert ist.

**18. Das Klavier.** Klaviertöne sind grundsätzlich nicht stationär. Daher fanden auch MEYER und BUCHMANN (28) dabei außer dem harmonischen Linienspektrum ein kontinuierliches Spektrum. Das hierdurch dargestellte Geräusch rührt für die tiefen und mittleren Töne von der Saite selbst her, die sich beim Anschlag verstimmt. Bei höheren Tönen wird das Hammergeräusch bemerkbar, dessen Komponenten aber immer nur bis zum Grundton des angeschlagenen Klanges reichen. Das wird so erklärt, daß, um den Hammer zum Tönen zu bringen, die Saite hinreichend starr sein muß. Das ist nur unterhalb der Eigenfrequenz der Saite der Fall. Ähnliche Ergebnisse haben F. TRENDELENBURG und FRANZ (88) mit der Methode der Oktavsieboszillographie erhalten. Auch sie finden, besonders deutlich bei hohen Tönen, Eigenschwingungen des Klavierresonanzsystems, die durch die Anschlagunstetigkeit erregt sind und unharmonisch zum Grundton liegen. MEYER und BUCHMANN haben Ein- und Ausschwingvorgänge von einzelnen Teiltönen mit Hilfe ihrer Suchtonapparatur aufgezeichnet. Hierbei zeigen sich beim Ausschwingvorgang deutlich Schwebungen, wie man sie ja bei einem solchen gekoppelten System mit mehreren Freiheitsgraden erwarten muß. Die gleichen Ergebnisse finden WOLF und SETTE (73). Eingehende Untersuchungen über die Hammer- und Saitenbewegung sowie über die akustische Abstrahlung hat LANGE (61) unternommen. Es zeigte sich, daß die Hammergeschwindigkeit im Augenblick des Anschlags eine Funktion der Tastengeschwindigkeit allein ist. Hiernach steht dem Spieler zur Änderung des Klanges nur eine Möglichkeit zur Verfügung, nämlich die Änderung der Tastengeschwindigkeit. Das mußte entgegen den Anschauungen vieler Musiker erwartet werden, da der Hammer im Augenblick des Anschlages sich frei und ohne Verbindung mit der Taste bewegt, so daß seine Geschwindigkeit die einzige veränderliche Größe ist. Das gleiche Ergebnis haben durch gleichzeitige Aufnahmen der Hammerbewegung und des

erzeugten Klanges HART, FULLER und LUSBY (55) gefunden. GHOSH (74) weist darauf hin, daß die Schwingungsform der Klaviersaite von der Hammergeschwindigkeit unabhängig ist. Andererseits ist bekannt, daß die Klangfarbe mit der Anschlagstärke sich ändert. Nach Beobachtungen von MEYER und BUCHMANN (28) wächst bei stärkerem Anschlag der Obertongehalt. VIERLING (64, 72) zeigt, daß ein stark angeschlagener Ton zu Anfang schnell abklingt, während ein schwach angeschlagener von Anfang an schwächer gedämpft ist. Die Dämpfung kommt, wie durch Entfernen von stark schwingenden Teilen des Resonanzbodens erwiesen wurde, wesentlich durch Energieverbrauch im Instrument und nur zum geringsten Teil durch Abstrahlung zustande. Diese Amplitudenabhängigkeit der Reibungskräfte glaubt VIERLING dadurch zu erklären, daß bei stärkerem Anschlag mehr Teile des Instruments mitschwingen als bei schwachem. Diese Auffassung konnte durch Messungen der Schwingungsbewegung der Einzelteile, die GRÜTZMACHER und LOTTERMOSER (85) unternahmen, nicht bestätigt werden. Diese Forscher haben die Abklingkurven von Klavieren mittels Lautstärkepegelschreibers eingehend untersucht. Sie finden dabei wie auch SAWADE (39) einen erheblichen Anteil der Kopplungsschwingungen zwischen Saite und Resonanzboden auf den Ausklingvorgang. In der Nähe von Eigenfrequenzen des Resonanzbodens treten starke Schwebungserscheinungen auf, die ein Gegenstück zum Wolfon bei den Streichinstrumenten darstellen. Unter Umständen kann hierdurch ein anfänglich zu rasches Absinken der Amplitude entstehen, so daß der Ton trocken und reizlos klingt. Der Klavierstimmer beseitigt diesen Übelstand dann dadurch, daß er die Saiten eines Chores etwas gegeneinander verstimmt. Das gleiche Ergebnis erhält VIERLING (95) aus Klangregistrierungen mittels Oktavsieboszillographie. Die Gesamtdämpfung verschiedener Klavier- und Flügelarten nimmt in großen Zügen übereinstimmend von tiefen Tönen nach hohen hin zu.

VIERLING (64) hat bemerkt, daß bei Klaviertönen die hohen Komponenten langsamer verklingen als die tiefen. Durch eingehende Modellversuche hat er später (95) diese Frage geklärt. Durch elektrostatische Abtastung der Saitenschwingung und Registrierung mittels Oktavsieboszillographie wurde erwiesen, daß die vermehrte Dämpfung der tiefen Komponenten nur dann zustande kommt, wenn die Saite auf einen Resonanzboden wirkt, der ja auf die tiefen Frequenzen besonders stark anspricht und hierdurch diesen Komponenten viel Energie entzieht.

LANGE (61) hat durch Beobachtung der Klaviersaitenschwingung mittels Abtastkondensatoren in Richtung der Hammerbewegung, vertikal, und senkrecht dazu, horizontal, gefunden, daß die Bewegung in der Vertikalrichtung ähnlich wie der Schall verläuft, die Horizontalbewegung anders. Er schließt daraus, daß die Horizontalkomponente im wesentlichen unwirksam sei. Im Gegensatz dazu findet VIERLING (95), daß bei

der Abnahme und Wiedergabe der reinen Vertikalbewegung der Saite oder des Steges kein präziser Klavierton auftritt, daß vielmehr, um den starken Abfall unmittelbar nach dem Anschlag, der für den Klavierton charakteristisch ist, zu erhalten, auch die Horizontalbewegung des Steges noch mit hinzugenommen werden muß. Er erklärt diese Bewegung als Drehschwingung des Steges, die besonders die ersten großen Amplituden auf den Resonanzboden überträgt. Hierdurch wird verständlich, daß der präzise Toneinsatz an Stellen starker Stegkrümmung fehlt, weil hier der Steg eine große Steifigkeit gegen Drehschwingungen hat. Andererseits haben Klaviere mit geradem Steg einen sehr gleichmäßigen Ton über den ganzen Bereich.

Schließlich seien noch Untersuchungen von URBACH und SCHLESINGER (91) erwähnt, die mit Hilfe einer regelbaren Anschlagsvorrichtung Messungen an Klavieren und Flügeln gemacht haben. Hiernach sinkt die Abklingdauer im allgemeinen mit der Tonhöhe. Beim Piano ist sie bei tiefen Tönen viel kürzer, bei hohen länger als beim Konzertflügel. Wenn man die Tonstärke in Abhängigkeit von der Anschlagstärke aufträgt, so ist die meist sehr beträchtliche Steilheit dieser Kurven für die verschiedenen Instrumentarten charakteristisch. Im Pianobereich sind die mittleren Steilheiten beim Salonflügel am größten, im Fortissimo hat bei den tiefen und mittleren Tönen der Konzertflügel die größten Steilheiten.

**19. Schlaginstrumente.** Die Klanganalysen von MEYER und BUCHMANN (28) geben hier, wie zu erwarten, ein fast ausschließlich kontinuierliches Spektrum mit mehr oder weniger Andeutung von harmonischen Bestandteilen. Ausgenommen sind Triangel und die Glocken, die deutliche, wenn auch meist unharmonische Teilklänge zeigen. Bei gewissen indischen Trommeln wird nach RAMAN (13) durch schichtweise Belastung die Flächendichte des Trommelfells nach außen zu verstärkt. Hierdurch sollen die Teiltöne nahezu harmonisch zum Grundton werden, wodurch ein größerer Wohlklang erreicht wird. Ein ähnlicher Effekt scheint bei einem japanischen Instrument, dem Tudumi, erreicht zu sein, über dessen Klangeigenschaft OBATA und OZAWA (32) berichten. Das Instrument besteht aus einem hölzernen Hohlkörper, der in der Mitte schlank, nach den beiden Enden glockenförmig erweitert ist. Auf diesen offenen Enden liegen zwei in Holzrahmen gespannte Membranen derart, daß sie über den Körper noch beträchtlich überstehen. Die Spannung der Membranen kann dadurch verändert werden, daß die Schnüre, die die beiden Holzrahmen verbinden, durch eine weitere Schnur nach der Achse zusammengezogen werden können. Auch dieses Instrument scheint, soweit die Klangaufzeichnungen das zu beurteilen erlauben, nur wenige und nahezu harmonische Teiltöne zu haben.

Bei den Glocken ist das interessanteste Problem das des „Schlagtons“. Die Ergebnisse von älteren Arbeiten von LORD RAYLEIGH (2) BIEHLE (10),

JONES (23) kann man etwa wie folgt zusammenfassen: die Teiltöne der Glocken liegen praktisch nicht harmonisch zueinander. Es zeigt sich aber, aus einer großen Menge von Untersuchungen, daß der Glockenton um so besser wirkt, je mehr sich wenigstens die tiefsten Teilfrequenzen dem Verhältnis nähern:  $1 : 2 : 2,4 : 3 : 4$  oder  $1 : 2 : 2,5 : 3 : 4$ , je nachdem ob die Glocke in Moll oder in Dur klingt. Unmittelbar nach dem Anschlag ist der fünfte Teilton beherrschend, während nach Ablauf einiger Sekunden meist der dritte Teilton besonders hervortritt. Beim subjektiven Hören ordnet man dem Glockenton eine Frequenz zu, die nach JONES eine Oktave tiefer als der fünfte Teilton, also in der Nähe des zweiten Teiltone, liegt. Dieser Ton, der sog. Schlagton, ist aber im Klang nicht objektiv nachweisbar, kann auch nicht durch Resonatoren verstärkt werden. Einen wichtigen Beitrag zur Klärung dieser auffallenden Erscheinung haben Untersuchungen von MEYER und KLAES (42) gebracht. Sie analysierten den Klang einer in regelmäßigen Abständen angeschlagenen Glocke mittels der Suchtonmethode. Bei dieser Glocke lag der zweite Teilton bei 495 Hz, der Schlagton bei 530 Hz. Die Analysen ergaben, daß der Schlagton physikalisch nicht nachweisbar ist. Der fünfte bzw. siebente Teilton lagen bei 1072 bzw. 1605 Hz. Es wäre also denkbar, daß der Schlagton als physiologischer Differenzton erster Ordnung zwischen diesen beiden Teiltönen erscheint. Um diese Möglichkeit zu klären, wird als Aufnahmemikrophon ein Kohlemikrophon benutzt, das eine Nichtlinearität ähnlich der des menschlichen Ohres hat. Hiermit gelingt es dann in der Tat, den Schlagton objektiv in der Analyse nachzuweisen. Es entstehen dann zwar auch noch andere Kombinationstöne, aber der Schlagton wird offenbar durch seine Harmonie mit physikalisch vorhandenen Teiltönen besonders hervorgehoben. Auch seine Abklingzeit konnte mit Hilfe von Siebketten in dieser Anordnung gemessen werden. Sie erwies sich als übereinstimmend mit der subjektiv beobachteten Ausklingzeit. Zur Klärung der Frage, ob der Schlagton als Unteroktave des fünften Teiltone, also psychologisch durch eine Art Oktaventäuschung bedingt ist, wurde der Glockenklang hinter einer besonders sorgfältig gebauten Übertragungsanlage durch einen Lautsprecher abgehört. Dabei wurden durch Drosselketten zunächst nur die beiden ersten Teiltöne durchgelassen. Der Schlagton war zunächst unhörbar und trat auch nicht auf, wenn der fünfte Teilton mit übertragen wurde. Erst wenn auch der siebente Teilton hinzugefügt wurde, erschien der Schlagton. Diese Differenztontheorie gründet sich, wie die Verfasser betonen, nur auf die Beobachtungen an einer Glocke. JONES (97) erhebt Einwendungen gegen diesen Schluß, weil bei der von MEYER und KLAES untersuchten Glocke die Unteroktaven des fünften Teiltone und der Differenzton zwischen fünftem und siebentem Teilton sehr nahe beieinander liegen. Nach Beobachtungen von Fällen, wo diese Übereinstimmung nicht vorlag, glaubt er annehmen zu müssen, daß die Übereinstimmung des beobachteten Schlagtone mit der Unteroktave des fünften Teiltone

besser sei als mit dem Differenzton. Er glaubt hiernach, daß das Entstehen dieses Differenztons die Oktaventäuschung unterstütze.

**20. Elektrische Musikinstrumente.** Die leichte Möglichkeit durch Elektronenröhren Schwingungen zu erzeugen und zu verstärken, hat viele Stellen zu Vorschlägen für elektrische Musikinstrumente angeregt. Die hierauf bezügliche Literatur ist von VIERLING (34, 35) und JANOVSKY (41) zusammengestellt worden. Man kann hiernach zwei verschiedene Prinzipien unterscheiden: Die radikalste Methode ist die, auch die Schwingungserzeugung elektrisch vorzunehmen, während bei anderen Vorschlägen eine mechanische Schwingung angeregt, aber mit elektrischen Mitteln abgenommen, verstärkt und wiedergegeben wird. Der Verfasser (44) hat bei früherer Gelegenheit darauf hingewiesen, daß es bei solchen Instrumenten nicht damit getan ist, musikalische Klangfarben von bekannten Instrumenten nachzuahmen oder neue musikalische Klangfarben zu erzeugen, daß vielmehr ein solches neues Instrument den Vergleich mit den zu hoher Vollendung ausgebildeten mechanischen Musikinstrumenten nur dann aushalten kann, wenn es bei Dauerklangen zu feiner Modulation nach Frequenz und Amplitude fähig ist, und auch in seinen Ein- und Ausschwingvorgängen Eigenschaften zeigt, wie sie uns den Klang bei den mechanischen Instrumenten so reizvoll erscheinen lassen.

Von den Instrumenten mit elektrischer Schwingungserregung ist am weitesten entwickelt worden das sog. Trautonium, nach Vorschlägen von TRAUTWEIN (27, 47) gebaut. Hierbei erfolgt die Schwingungserzeugung durch eine Kippschwingungsröhre, deren Frequenz durch Tastung der Gitterspannung geändert wird. Hierdurch werden dann Formantkreise angestoßen, die nach Bedarf zur Regelung der Klangfarbe umgeschaltet werden können. So erhält man eine Form der Erregung dieser Zwischenkreise, wie sie ähnlich bei der menschlichen Stimme und bei manchen Musikinstrumenten auch vorkommt. Auf eine Möglichkeit, die Form der Anklänge leicht zu ändern und sogar Vorgänge zu erzeugen, die den Klängen von Instrumenten mit geschlagenen Saiten ähneln, durch Einfügung einer Regelröhre, deren Gitterspannung durch eine Kondensatorentladung zeitlich beeinflußt wird, hat ASCHOFF (93) hingewiesen.

Für die Orgel und das Harmonium dürfte es am ehesten möglich sein, einen Ersatz durch ein rein elektrisches Instrument zu finden. Hierfür hat VIERLING (48) eine praktisch brauchbare Lösung angegeben. Als Schwingungserzeuger dient ein nach einem Vorschlag von KOCK (45) durch Hinzuschaltung einer Induktivität in den Entladungskreis stabilisierte Glimmlampe. Durch Veränderung der Abnahme an der Glimmlampe, am Kondensator oder an der Induktivität und durch Ändern der Glimmlampenspannung lassen sich weitgehende Klangfarbenänderungen erreichen. Auch ein Vibrato kann man durch eine zugeschaltete Modulationsspannung von 8 Hz erzeugen. Solche Instrumente gestatten

eine stetige Lautstärkerregelung während des Tons und sind in dieser Hinsicht den normalen Orgeln und Harmonien überlegen. Ob es gelingen wird, den eigenartigen Reiz, den der Klang alter Orgeln durch ihre sehr mannigfachen Einschwingvorgänge hat, mit hinreichend einfachen Mitteln auch bei elektrischen Orgeln zu erzeugen, steht noch dahin.

Die andere Möglichkeit, wobei die Schwingung auf mechanischem Wege erzeugt wird, hat vor allem durch NERNST und VIERLING zum Bau zweier klavierähnlicher Instrumente geführt, die den Vorteil haben, auf einen Resonanzboden verzichten zu können. VIERLING (72) hat erkannt, daß die Möglichkeiten der mechanischen Schwingungserzeugung sehr viel vielseitiger sind als die der elektrischen und daß es mit mechanischen Mitteln viel leichter ist, mannigfache Ein- und Ausschwingformen zu erzeugen. Die Umformung in elektrische Schwingungen kann entweder elektromagnetisch oder elektrostatisch geschehen. Für die magnetische Abnahme ist der Anschlag durch normale Klavierhämmer ungeeignet, weil hierdurch eine zu große Amplitude und damit wegen der Nichtlinearität der Abnahmeverrichtung ein unerwünschtes Klopfgeräusch auftreten würde. SAWADE (39) untersucht einige Möglichkeiten des Saitenschlags durch „Mikrohämmer“ und durch eine pneumatische Vorrichtung, die diesen Übelstand vermeiden. Eine andere Möglichkeit eine unzulässige Vergrößerung der ersten starken Amplituden durch weitere Verzerrung zu unterbinden, gibt VIERLING (72) an. Es wird die Tatsache benutzt, daß beim Anschlag auch Schwingungen senkrecht zur Anschlagrichtung auftreten, die allmählich ohne scharfe Zacken einsetzen. Wenn man daher die Abnahmemagnete je nach der Tonhöhe in verschiedener Weise seitlich verschiebt, erhält man ein befriedigendes Ergebnis, so daß der Klang dem natürlichen Klavierklang sehr ähnlich wird. VIERLING findet trotzdem Unzuträglichkeiten in der magnetischen Abnahme durch die Nichtlinearitäten der Magnete und ist deshalb zu elektroakustischer Abnahme übergegangen. Hierbei können dann durch verschiedene Wahl des Abnahmepunktes längs der Saite erhebliche Modifikationen der Klangfarbe vorgenommen werden.

Die Saitendämpfung bei Klavieren ohne Resonanzboden ist klein. Wenn also klavierähnliche Töne erzeugt werden sollen, so muß eine zusätzliche Dämpfung angebracht werden. NERNST (39) verwendet hierfür eine sog. „Zeitdämpfung“, die den ersten Anschlag unbeeinflusst läßt und erst unmittelbar nachher einsetzt. Zur Erzeugung von lang andauernden Tönen wird mit sehr kleinen Amplituden gearbeitet. Die amplitudenabhängige Dämpfung ist hierfür besonders klein. Es können hiermit Klänge erzielt werden, die denen von Holzblasinstrumenten ähnlich sind. Zur Variation des Anklingvorganges benutzt VIERLING zwei Saiten, die gleichzeitig angeschlagen werden. Davon ist die eine ungedämpft, die andere stark gedämpft. Bei elektrischer Abnahme erhalten beide Saiten entgegengesetzt gleiches Potential, so daß ihre Wirkungen bei gemeinsamer Abnahme einander entgegengewirken. Dann

heben sich die ersten Spitzen gegenseitig auf, und es entsteht ein Vorgang, der je nach Wahl der beiden Einzeldämpfungen mehr oder weniger langsam anklingt.

### Literaturverzeichnis.

1. MACH, E.: *Lotos*, S. 23, 1873.
2. LORD RAYLEIGH: *Philosophic. Mag.* (5) **29**, 1 (1890). — *Sci. Pap.* **3**, 318 (1902).
3. HEAVISIDE, O.: *Electromagnetic Theory*. London 1899.
4. WAETZMANN, E.: *Resonanztheorie des Hörens*. Braunschweig 1912.
5. LEIMBACH, G.: *Ann. Physik* (4) **39**, 251 (1912).
6. HELMHOLTZ, H. v.: *Die Lehre von den Tonempfindungen*, 6. Ausg. Braunschweig 1913.
7. WAGNER, K. W.: *Arch. Elektrotechn.* **4**, 160 (1916).
8. RAMAN, C. V.: *Philosophic. Mag.* (6) **32**, 391 (1916).
9. BROMWICH, T. J. I'A.: *Proc. Lond. math. Soc.* (2) **15**, 401 (1916). — *Philosophic. Mag.* (6) **37**, 407 (1919). — *Proc. Cambridge philos. Soc.* **20**, 411 (1921). — *Proc. Lond. math. Soc.* (2) **28**, 438 (1928); **31**, 209 (1930).
10. BIEHLE, J.: *Physik. Z.* **20**, 429 (1919).
11. CARSON, J. R.: *J. amer. Inst. electr. Engr.* **38**, 345 (1919); s. a. J. R. CARSON: *Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung*. Berlin 1929.
12. VOGEL, H. u. M. WIEN: *Ann. Physik* (4) **62**, 649 (1920).
13. RAMAN, C. V.: *Nature (Lond.)* **104**, 500 (1920).
14. LÜBCKE, E.: *Z. techn. Physik* **2**, 52 (1921).
15. ROGOWSKI, W.: *Arch. Elektrotechn.* **10**, 1 (1922).
16. KÜPFMÜLLER, K.: *Elektr. Nachr.-Techn.* **1**, 141 (1924); **5**, 19 (1928).
17. TRENDELENBURG, F.: *Wiss. Veröff. Siemens-Konz.* **3**, H. 2, 43 (1924).
18. — *Wiss. Veröff. Siemens-Konz.* **4**, H. 1, 1 (1925).
19. BACKHAUS, H.: *Wiss. Veröff. Siemens-Konz.* **4**, H. 2, 209 (1925).
20. STUMPF, C.: *Die Sprachlaute*. Berlin 1926.
21. GRÜTZMACHER, M.: *Elektr. Nachr.-Techn.* **4**, 533 (1927).
22. BÉKÉSY, G. v.: *Physik. Z.* **29**, 793 (1928).
23. JONES, A. T.: *Physic. Rev.* (2) **31**, 1092 (1928). — *J. acoust. Soc. Amer.* **1**, 382 (1930). — JONES, A. T. and G. W. ALDERMAN: *J. acoust. Soc. Amer.* **3**, 297 (1931); **4**, 331 (1933).
24. SCHMIDT, H.: *Z. Physik* **59**, 117 (1929); **60**, 269, 702 (1930).
25. BÉKÉSY, G. v.: *Physik. Z.* **30**, 115 (1929).
26. GRÜTZMACHER, M.: *Z. techn. Physik* **10**, 570 (1929).
27. TRAUTWEIN, F.: *Elektrische Musik*. Veröff. der Rundfunkversuchsstelle bei der Staatlichen Akademischen Hochschule für Musik, Bd. 1. Berlin 1930.
28. MEYER, E. u. G. BUCHMANN: *Berl. Ber.* **1931**, 735.
29. BÉKÉSY, G. v.: *Ann. Physik* (5) **8**, 851 (1931).
30. NEUMANN, H.: *Z. techn. Physik* **12**, 627 (1931).
31. STEWART, G. W.: *J. acoust. Soc. Amer.* **2**, 325 (1931).
32. OBATA, J. and Y. OZAWA: *Proc. physic.-math. Soc. Jap.* (3) **13**, 93 (1931).
33. BACKHAUS, H.: *Z. techn. Physik* **13**, 31 (1932).
34. VIERLING, O.: *Z. VDI* **76**, 625, 741 (1932).
35. — *Elektrotechn. Z.* **53**, 155 (1932).
36. BÉKÉSY, G. v.: *Ann. Physik* (5) **16**, 844 (1933).
37. — *Physik. Z.* **34**, 577 (1933).



38. STEUDEL, V.: Hochfr.-Techn. u. Elektroakust. **41**, 116 (1933).
39. SAWADE, S.: Z. techn. Physik **14**, 353 (1933).
40. PRAGER, W.: Ing.-Arch. **4**, 16 (1933).
41. JANOVSKY, W.: Elektrotechn. Z. **54**, 675, 727 (1933).
42. MEYER, E. u. J. KLAES: Naturwiss. **21**, 697 (1933).
43. HAUSMANN, J. R.: Diss. Aachen 1933.
44. BACKHAUS, H.: Musikinstrumente. Handbuch der Experimental-Physik, Bd. 17 III, S. 177. 1934.
45. KOCK, W.: Z. techn. Physik **15**, 577 (1934).
46. MEYER, E. u. E. THIENHAUS: Z. techn. Physik **15**, 630 (1934).
47. KOTOWSKI, P. u. W. GERMANN: Elektr. Nachr.-Techn. **11**, 389 (1934).
48. VIERLING, O.: Z. VDI **78**, 1217 (1934).
49. SCHMOLLER, F. v.: Telefunken-Ztg **15**, 47, Nr 67 (1934).
50. BARTA, St.: Diss. Karlsruhe 1934.
51. GEMELLI, A. e G. PASTORI: L'Analisi Elettroacustica Del Linguaggio. Mailand 1934.
52. McLACHLAN, N. W.: Loud Speakers, p. 204 f. Oxford 1934. — McLACHLAN, N. W. and A. T. MCKAY: Proc. Cambridge philos. Soc. **32**, 265 (1936). — Elektr. Nachr.-Techn. **13**, 251 (1936).
53. STEINBERG, J. C.: J. acoust. Soc. Amer. **6**, 16 (1934).
54. BARTHOLOMEW, W. T.: J. acoust. Soc. Amer. **6**, 25 (1934).
55. HART, H. C., M. W. FULLER and W. S. LUSBY: J. acoust. Soc. Amer. **6**, 80 (1934).
56. OBATA, J., M. HIROSE and T. TESIMA: Proc. imp. Acad. Tokyo **10**, 326 (1934).
57. — and T. TESIMA: Proc. imp. Acad. Tokyo **10**, 322, 636 (1934).
58. TRENDELENBURG, F.: Klänge und Geräusche. Berlin 1935.
59. TRENDELENBURG, W. u. H. WULLSTEIN: Berl. Ber. **1935**, 399.
60. — Berl. Ber. **1935**, 525.
61. LANGE, W.: Hochfr.-Techn. u. Elektroakust. **45**, 120, 159 (1935).
62. SCHAFFSTEIN, G.: Hochfr.-Techn. u. Elektroakust. **45**, 204 (1935).
63. TRENDELENBURG, F. u. E. FRANZ: Z. techn. Physik **16**, 513 (1935).
64. VIERLING, O.: Z. techn. Physik **16**, 528 (1935).
65. FREYSTEDT, E.: Z. techn. Physik **16**, 533 (1935).
66. BÉKÉSY, G. v.: Elektr. Nachr.-Techn. **12**, 71 (1935).
67. BÜRCK, W., P. KOTOWSKI u. H. LICHTÉ: Elektr. Nachr.-Techn. **12**, 278 (1935).
68. — — — Elektr. Nachr.-Techn. **12**, 326 (1935).
69. — — — Elektr. Nachr.-Techn. **12**, 355 (1935).
70. KETTERER, K.: Naturwiss. **23**, 685 (1935).
71. THILO, G. u. U. STEUDEL: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. **14**, H. 1, 79 (1935).
72. VIERLING, O.: Diss. Univ. Berlin 1935.
73. WOLF, S. K. and W. J. SETTE: J. acoust. Soc. Amer. **6**, 164 (1935).
74. GHOSH, R. N.: J. acoust. Soc. Amer. **7**, 27 (1935).
75. TOLMIE, J. R.: J. acoust. Soc. Amer. **7**, 29 (1935).
76. SCRIPTURE, E. W.: Nature (Lond.) **136**, 223 (1935).
77. TRENDELENBURG, W.: Berl. Ber. **1936**, 308.
78. — Berl. Ber. **1936**, 338.
79. BÜRCK, W., P. KOTOWSKI u. H. LICHTÉ: Ann. Physik (5) **25**, 433 (1936).
80. — — — Hochfr.-Techn. u. Elektroakust. **47**, 33 (1936).

81. BACKHAUS, H.: Z. techn. Physik **17**, 573 (1936).
82. TRENDELENBURG, F.: Z. techn. Physik **17**, 578 (1936).
83. BÜRCK, W., P. KOTOWSKI u. H. LICHTÉ: Elektr. Nachr.-Techn. **13**, 1 (1936).
84. THIEDE, H.: Elektr. Nachr.-Techn. **13**, 84 (1936).
85. GRÜTZMACHER, M. u. W. LOTTERMOSER: Akust. Z. **1**, 49 (1936).
86. TRENDELENBURG, F., E. THIENHAUS u. E. FRANZ: Akust. Z. **1**, 59 (1936).
87. ASCHOFF, V.: Akust. Z. **1**, 77 (1936).
88. TRENDELENBURG, F. u. E. FRANZ: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. **15**, H. 2, 78 (1936).
89. BOUMANN, H. D.: Z. Biol. **97**, 44 (1936).
90. VOLLMER, W.: Diss. Karlsruhe 1936.
91. URBACH, F. u. H. SCHLESINGER: Wiener Anz. **1936**, Nr 21, 208.
92. KOCK, W.: J. acoust. Soc. Amer. **7**, 56 (1935); **8**, 23 (1936).
93. ASCHOFF, V.: Hochfr.-Techn. u. Elektroakust. **49**, 138 (1937).
94. BACKHAUS, H.: Z. techn. Physik **18**, 98 (1937).
95. VIERLING, O.: Z. techn. Physik **18**, 103 (1937).
96. — u. F. SENNHEISER: Akust. Z. **2**, 94 (1937).
97. JONES, A. T.: J. acoust. Soc. Amer. **8**, 199 (1937).

# Röntgeninterferenzen aus Gitterquellen.

Von **W. KOSSEL**, Danzig.

Mit 46 Abbildungen.

<b>Inhaltsverzeichnis.</b>		Seite
1.	Einleitung . . . . .	296
I.	Experimentelles Verfahren. Beobachtungsweise . . . . .	297
2.	Grundgedanke und Auffindung . . . . .	297
3.	Anregung mit Kathodenstrahlen . . . . .	297
4.	Anregung mit Röntgenstrahlen . . . . .	300
II.	Das vollständige Reflexsystem eines Kristalls . . . . .	303
A.	Konstruktion . . . . .	303
5.	Prinzip der Darstellung . . . . .	303
6.	Reziprokes Gitter . . . . .	306
7.	Der Raum des reziproken Gitters als Impulsraum. . . . .	308
B.	Die Entwicklung des Reflexsystems mit fallender Wellenlänge . . . . .	310
8.	Darstellung des Einzelfalls . . . . .	310
9.	Entwicklung des Systems am flächenzentrierten Gitter . . . . .	314
10.	Zahl der Reflexmöglichkeiten . . . . .	316
11.	Der Grenzfall sehr kurzer Wellenlänge . . . . .	317
C.	Beziehungen im Reflexsystem . . . . .	319
12.	Koinzidenzen . . . . .	319
13.	Die Anwendung von Lagenbeziehungen im Reflexsystem als spektrometrische Methode . . . . .	320
14.	Kompensationsmethode . . . . .	323
15.	Mehrfachreflexe . . . . .	328
16.	Umwegreflexe; Einfluß auf Intensitätsfragen . . . . .	332
III.	Die Struktur der Gitterquellen-Interferenzen . . . . .	333
A.	Experimentelle Ergebnisse . . . . .	333
17.	Umfang des Auftretens . . . . .	333
a)	Beobachtete Stoffe . . . . .	333
b)	Vollständigkeit des Systems . . . . .	335
18.	Zeichnung . . . . .	335
19.	Linienbreite, Mosaikeinfluß . . . . .	337
20.	Feinstruktur, Helldunkellinien . . . . .	339
21.	Intensitätsstufen des Untergrunds . . . . .	341
B.	Zur theoretischen Deutung . . . . .	342
22.	Systematik der Strahlengänge: LAUE-Fall und BRAGG-Fall . . . . .	342
23.	Beziehung zu Weitwinkelverfahren mit Außenquelle . . . . .	343
24.	Reflexion und Extinktion . . . . .	344
25.	Elementare Deutung der Feinstruktur . . . . .	346
26.	v. LAUEs Anwendung der dynamischen Theorie: die Ein- führung des optischen Reziprozitätssatzes. . . . .	347
27.	Grenzen der klassischen Behandlungsweise . . . . .	350
Literaturverzeichnis . . . . .		351

**1. Einleitung.** Wir betrachten die Röntgeninterferenzen, die in einem Kristall entstehen, wenn die Röntgenstrahlen aus Atomen des Kristallkörpers selbst kommen.

Diese Anordnung bedeutet schärfere Bedingungen für die Anwendung der Wellenvorstellung als die klassischen Anordnungen, in denen die Röntgenstrahlen, aus einer fernen Antikathode kommend, als ebene Wellen den Kristall erreichen. Jetzt sind die Wege, die die Strahlen zurücklegen, allein durch die Strecken bestimmt, die sie in den Kristall einzudringen vermögen, also im ungestörten Gitter durch die Interferenzvorgänge selbst. In welchem Maß gelten so nahe an der Quelle, nur wenige tausendstel Millimeter von ihr entfernt, noch die gewohnten Vorstellungen, in denen ebene Wellen an Netzebenen gespiegelt werden? Macht es sich geltend, daß hier die einzelne Quelle mitten im optischen Apparat steckt, daß also Bewegungen, die nach ganz verschiedenen Richtungen von ihr ausgingen, wieder zusammengespiegelt werden und interferieren könnten? Besteht überhaupt bei diesen Wellen, die Tausende von Malen kürzer sind als die des Lichts, noch die Kohärenz über große Raumwinkel, die dem klassischen Oszillator zukommt? Die Tatsache, daß hier jede einzelne Quelle am optischen Apparat selbst fixiert ist, daß also zwischen Primär- und Sekundärbewegung definierte Phasenbeziehungen vorliegen müssen, läßt hoffen, daß hier vielleicht die Antwort auf solche Fragen zugänglich werde.

Schon vor diesen wellentheoretischen taucht eine einfachere systematische Aufgabe auf. Die Erregung von Quellen mitten im Kristall ist das einzige Verfahren, mit dem sich erreichen läßt, daß das Kristallgitter völlig gleichförmig nach allen Richtungen zugleich von Strahlen durchzogen wird. Auch die sogenannten Weitwinkelverfahren nämlich senden höchstens die Strahlung aus einem Halbraum in den Kristall. Zudem führt die Tatsache, daß hier Quelle und Beugungsapparat praktisch zusammenfallen — die ganze Umlenkung der Primärstrahlen vollzieht sich in Tiefen, die geringer sind als  $\frac{1}{100}$  mm — zu einer äußerst einfachen Geometrie von durchsichtiger Bedeutung. Man hat praktisch mit Strahlen aus *einem* Zentrum zu tun, das System der beobachteten Strahlen ist unmittelbar identisch mit dem System der durch die LAUESchen oder BRAGGSchen Bedingungen ausgezeichneten Richtungen im Kristallkörper. Die photographischen Aufnahmen der Gitterquelleninterferenzen sind unmittelbare Aufzeichnungen — Zentralprojektionen auf eine Ebene — dieses vollständigen Reflexsystems.

Es ist also von drei Hauptpunkten zu berichten, zunächst vom Grundgedanken und der experimentellen Durchführung, dann vom *vollständigen Reflexsystem*, seiner Konstruktion und seinen Beziehungen, also den *Lagen* der Gitterquelleninterferenzen, schließlich von ihrer *Struktur* und den Gedanken darüber, wie sie wellentheoretisch zu deuten ist.

## I. Beobachtungsverfahren.

**2. Grundgedanke und Auffindung.** Die Gitterquellen-Interferenzen wurden 1934 beobachtet (1). Die Versuche gingen auf einen Gedanken zurück, der 1924 bei der kritischen Betrachtung (9) von Versuchen entstanden war, die eine selektive Reflexion von Röntgenspektrallinien durch einen Kristall, also einen den Reststrahlen des Ultrarot entsprechenden Vorgang, nachweisen sollten [DUANE und CLARK (10)]. Das widersprach dem sonst für Röntgenstrahlen Bekannten und den Vorstellungen, die man sich danach vom Entstehen der Röntgenstrahlen gemacht hatte, besonders der Einsicht, daß eine Elektronenschale nur eine begrenzte Anzahl von Elektronen aufzunehmen vermag, zu der gerade das Fehlen von selektiver Absorption der Röntgenlinien dem Verfasser den ersten Anlaß gegeben hatte. Der Verfasser fand (9), daß der größte Teil des von DUANE und CLARK Beschriebenen auf Wohlbekanntes zurückging. Auch Kristallfehler hatten mitgespielt (11) und so ist von jener scheinbaren selektiven Reflexion, wie um der klaren Unterscheidung willen noch einmal betont sei, nichts übriggeblieben.

Sie hatte aber einen weiteren Gedanken angeregt (9, S. 282). Wenn auch die auf den Spektrometerkristall auffallende weiße Strahlung dort nicht selektiv reflektiert wurde, so mußte sie doch darin die Eigenstrahlung seiner Atome anregen und diese mußte allerdings gerade unter dem zu ihr passenden BRAGGSchen Winkel mit besonderer Intensität aus dem Kristallgebäude austreten. Sie konnte daher eine besonders intensive Reflexion der einfallenden Strahlung unter diesem Winkel vortäuschen. Die Intensität dieses Zusatzes mußte freilich sehr gering sein. WEBER (12) und KULENKAMPFF (13) stellten fest, daß sich in der Spektrometeranordnung nichts davon wahrnehmen lasse, SEEMANN (14) gab eine theoretische Abschätzung, die zum gleichen Ergebnis führte.

Bei allem dem mußte dieser Vorgang doch existieren und verdiente Interesse. Da er ja mit einer wirklichen Reflexion primärer Röntgenstrahlen nichts zu tun hat, mußte er auch mit Anregung durch Kathodenstrahlen auftreten, und diese Anregung an der Einkristallantikathode versprach sogar, wie schon 1924 erkennbar war, bessere Aussichten für den Nachweis. In dieser Form wurde die Interferenz der aus Gitteratomen stammenden Strahlung 1934 im Danziger Institut gesucht und beobachtet (I—VIII).

**3. Anregung mit Kathodenstrahlen.** Von der gesamten Wellenbewegung, die aus einem dem Kristall angehörenden Atom nach allen Seiten in das Gitter hinausläuft, müssen die Anteile umgelenkt werden, die unter dem BRAGGSchen Winkel eine Netzebene treffen. Für jede Netzebene ist das ein Kreiskegel von Strahlen, dessen Achse auf ihr senkrecht steht. Wird die Emission nur in einem so engen Bereich

angeregt, daß dessen Durchmesser klein ist gegen den Abstand, in dem man die Strahlen beobachtet, so wird man (Abb. 1) auch im ganzen einen Kreiskegel beobachten, auf einer ebenen Platte also seine Spur als einen Kegelschnitt auffangen. Die Eindringtiefe geht in dem zunächst praktisch interessierenden Wellenlängenbereich höchstens nach Hundertstel Millimeter (II), man hat sich also,

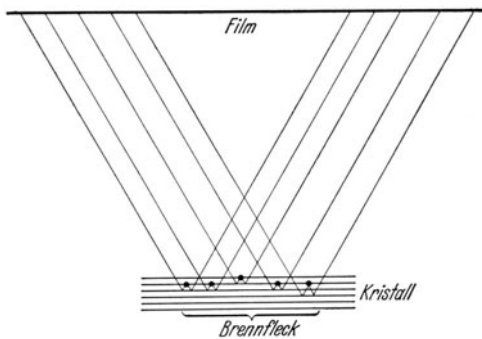


Abb. 1.

um die Erscheinungen möglichst scharf zu machen, nur um die Verringerung der Breite des Brennflecks zu kümmern. Der durch die endliche Wellenlängenbreite und die Totalreflexionsbreite des Gitters bedingte Öffnungswinkel der Reflexion ist von der Ordnung einer Winkelminute; das von einer idealen Punktquelle stammende reflektierte Bündel würde also

in etwa 30 cm Abstand auf  $\frac{1}{10}$  mm Breite auseinander gelaufen sein. Da die Breite des Brennflecks aber bei erträglichen Expositionszeiten bestenfalls auf  $\frac{2}{10}$ — $\frac{3}{10}$  mm gedrückt werden kann, ist die Dicke des

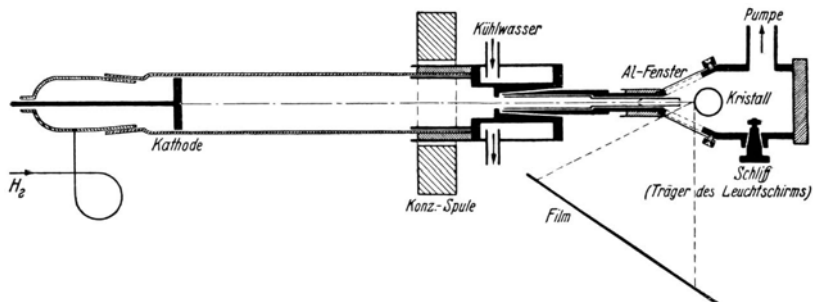


Abb. 2. Rohr für Einkristall-Antikathode.

Kegelmantels, die Breite der Spur auf einem der Oberfläche parallelen Film, zunächst praktisch gleich der Breite des Brennflecks zu erwarten. Die Intensität geht demnach hier nur mit  $1/r$ , im Untergrund aber mit  $1/r^2$  herab, und so hat man mit dem Film möglichst von der Quelle wegzurücken, um die Erscheinung deutlich hervortreten zu lassen.

Während bei Kathodenstrahlanregung ursprünglich der Film im Rohr selbst angebracht war, um einen möglichst großen Raumwinkel damit zu umfassen und so die Erscheinung überhaupt einmal aufzufinden, wurden später, als dort diese Abhängigkeit des Kontrastes von der Entfernung sich bestätigt hatte, Fensterrohre und Filmabstände von

Dezimetern (bis über 1 m) verwendet. Abb. 2 zeigt die auf Zugänglichkeit großer Raumwinkel hin gebaute Rohrform, die sich gut bewährt hat. Der Kristall wird durch die Kante zwischen zwei Fensterwänden von dem durch Konzentrationsspule und eng herangerückte Blende zusammengefaßten Kathodenstrahl getroffen. Die eine Fensterwand trägt drei, die andere vier durch dünne Stege getrennte Ausschnitte von  $18 \times 26 \text{ mm}^2$ . Eine Aluminiumfolie von  $\frac{3}{100} \text{ mm}$  Stärke ist über sämtliche Fenster gezogen. Diese Stärke erwies sich als noch genügend gleichförmig ausgewalzt; die Fenstergröße ist nach systematischen Vorversuchen so groß gewählt, als die Festigkeit mit Sicherheit zuläßt. Man erhält so schön gleichförmig durchgewölbte Fensterflächen (Abb. 3), die auch für die sehr weichen Eigenstrahlungen die Homogenität des Bildes nicht stören. Der Kristall, dessen Lage im Rohr durch einen Mehrfachschliff in jeder Richtung fein eingestellt werden kann, sitzt mit dem

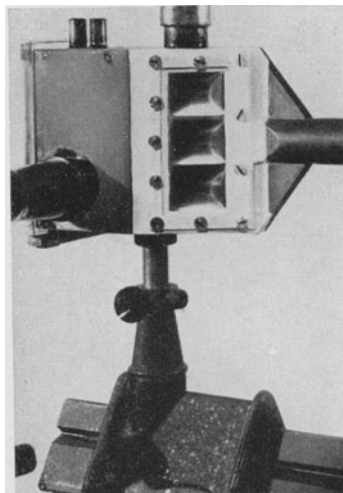


Abb. 3. Fensteranordnung.

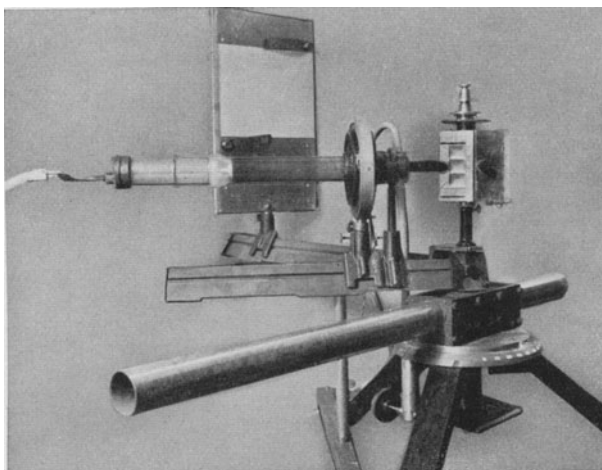


Abb. 4. Aufbau des Rohrs für Einkristall-Antikathode.

Rohr im Mittelpunkt eines spektrometerartigen Aufbaus (Abb. 4), von dem ein Arm das Entladungsrohr, andere die in beliebige Abstände zu rückenden Kassetten tragen. Von dem ursprünglich angewandten

Röntgenfilm mußte, um die Feinstruktur der Bilder herauszuholen und einen für das Photometrieren ausreichend ruhigen Untergrund zu erhalten, zu kontrastreicheren und feinkörnigeren, freilich auch um Vieles unempfindlicheren Emulsionen übergegangen werden. Die hier wiedergegebenen Aufnahmen von H. VOGES, der die Beobachtung mit Kathodenstrahlerregung durchentwickelt hat, sind auf extra-harten Diapositivplatten in Expositionszeiten bis zu 20 Stunden erhalten (Abb. 5).

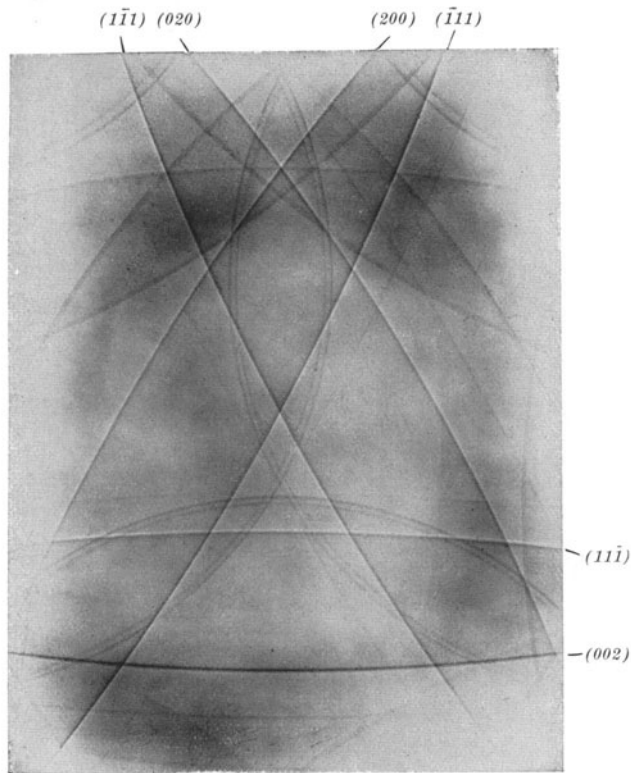


Abb. 5. Emission der Kupfer-Einkristall-Antikathode im Gebiet um den Oktaederpol. Übersicht. Abstand 20 cm. Auf  $\frac{2}{3}$  verkleinert.

**4. Anregung mit Röntgenstrahlen.** Bei der Erregung mit *Röntgenstrahlen*, die von G. BORRMANN nachgewiesen und studiert wurde, zeigt sich, wenn man einen engen Fleck intensiv mit der Strahlung aus dem Rohr beleuchtet, auf dem Film, der die von dort zurückkommende Strahlung auffängt, natürlich vor allem intensiv das Bild der LAUE-Flecken, die aus der Reflexion der weißen Strahlung hervorgehen. Um innerhalb dieser normalen LAUE-Rückstrahlungs-Aufnahme das System der Bögen hervorkommen zu lassen, das von der im Kristall selbst an-



geregten Eigenstrahlung gezeichnet wird, muß gut durchbelichtet werden. Bei der systematischen Entwicklung der Bedingungen, die die Intensität der Bögen steigern, fand BORRMANN u. a. besonders wirksam, nur unmittelbar vor dem Kristall eine enge, das Bündel auf 0,3 mm Durchmesser begrenzende Blende anzuwenden, nach der Antikathode zu aber den Weg weiter zu öffnen, so daß ein breiter Bereich der Antikathode, der eine hohe Totalbelastung aufnehmen kann, auf den anzuregenden Kristallbereich einwirkt („Kegelblende“, Abb. 6). Man ist hier ja nicht wie sonst an die Anwendung paralleler Strahlen gebunden. Die von

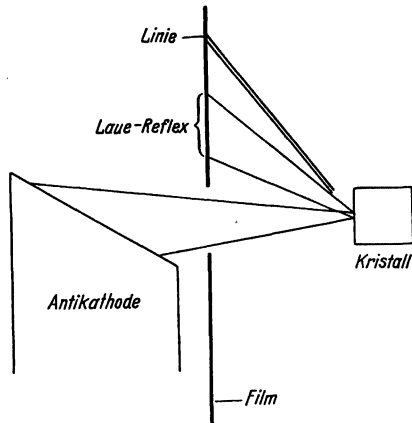


Abb. 6. Zur Geometrie der Anregung mit Röntgenstrahlen (Kegelblende).

dem auf den Kristall hin konvergierenden Strahlenbündel erzeugten LAUE-Flecke werden freilich groß; die von der Breite des beleuchteten Bereichs bestimmten Eigenstrahlungsbögen hingegen sind scharf (Abb. 6). Da ihre Schwärzung der Totalbelastung, die der LAUE-Flecke der spezifischen Flächenbelastung der Antikathode proportional ist, ist die relative Intensität der Bögen gesteigert (Abb. 7a). Noch weitere Steigerung erlauben sehr dünne Kristallblättchen, die man eng ans Rohr rückt und von hinten beobachtet (20).

Durch diese und andere von VOGES und BORRMANN entwickelte, in ihren Arbeiten angegebene Verbesserungen des Experiments ist es gelungen, die zunächst äußerst schwachen Erscheinungen der Gitterquellen-Interferenzen so kräftig herauszubringen, daß bei eingehend untersuchten Stoffen wie Cu und Zn das System bis zu den höchsten zu erwartenden Ordnungen vollständig und mit der Schärfe einer Präzisionsmessung ausmeßbar ist und zusammenhängende Beobachtungen über die Feinstruktur der Interferenzen, über Intensitätsumschläge während ihres Verlaufs, über Helligkeitsstufen im Untergrund vorliegen, die zum Teil theoretisch verständlich sind, zum großen Teil aber auch noch der sicheren theoretischen Deutung entbehren.

Von DEBYE-SCHERRER-Linien an polykristallinem Material, die den Wellenlängen des Materials selbst entsprechen, berichten 1937 FINBAK

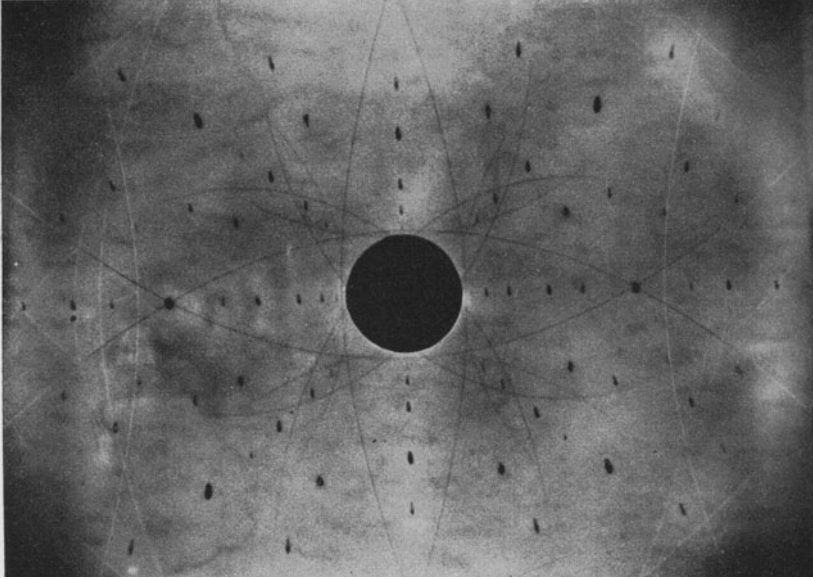


Abb. 7a. Röntgenerregung, Cu, Würfelpol. Übersichtsaufnahme auf Halbzylinderfilm, Abstand 5,5 cm (VII).

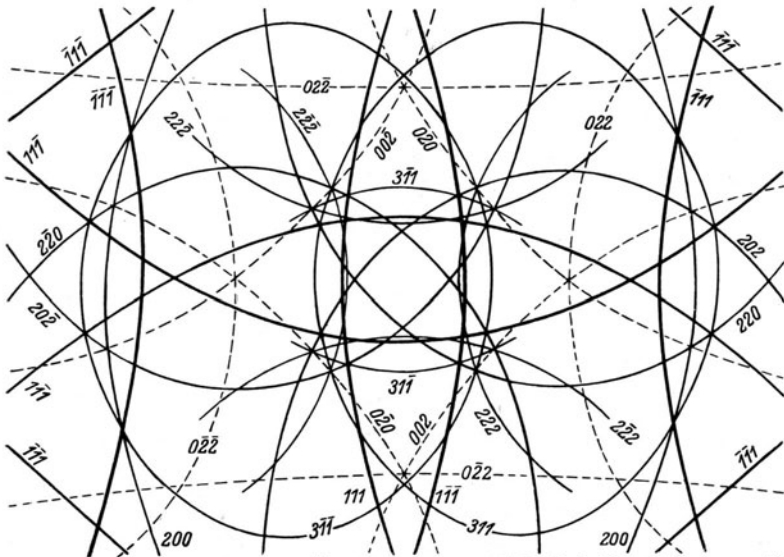


Abb. 7b. Röntgenerregung, Cu, Würfelpol. Übersichtsaufnahme auf Halbzylinderfilm. Abstand 5,5 cm (VII).

und HASSEL (41). Die offenbar schwachen Erscheinungen machen nach Ansicht der Autoren neue Vorstellungen über den Erregungsvorgang nötig.

## II. Das vollständige Reflexsystem eines Kristalls.

### A. Konstruktion.

5. **Prinzip der Darstellung.** Um einen Überblick über sämtliche am Kristall möglichen Reflexe zu gewinnen, wird man das Verfahren fortsetzen, das oben für die einzelne Netzebene geschildert wurde. So wie man dort alle Richtungen, die eine BRAGGSche Reflexion ergeben, von einem Punkte aus auftrug und damit einen Kreiskegel erhielt, dessen halber Öffnungswinkel gleich dem — gegen die Normale gerechneten — BRAGGSchen Reflexionswinkel ist, wird man auch die Strahlrichtungen, die zur Reflexion an anderen Netzebenen führen, vom selben Punkt aus auftragen. Das Gewirr

einander durchgreifender Kegel von verschiedener Öffnung, das so entsteht, ist natürlich wenig übersichtlich. In Wirklichkeit benutzt auch das Experiment, wie oben ausgeführt, praktisch eine Punktquelle, gibt aber durchaus nicht den gesamten Verlauf dieser Strahlenkegel, sondern nur ihre Schnitte mit der Fläche des Films oder der Platte. So ergibt sich als der

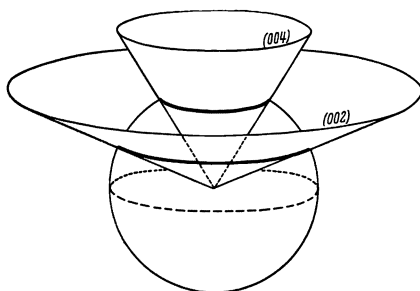


Abb. 8. Schnitte von Strahlenkegeln mit der Hilfskugel.

eigentlich naturgemäße Weg der Darstellung die Aufzeichnung der Schnitte der Strahlenkegel mit einer Fläche, die keine Richtung bevorzugt: mit einer Kugel um die gemeinsame Quelle. Abb. 8 veranschaulicht, wie zwei Kegel, die — als erste und zweite Ordnung — durch Reflexion an derselben Netzebene entstehen, ihre Spuren auf der Kugel als zwei Kreise abzeichnen. Die Ebenen der beiden Kreise sind parallel miteinander und mit der Netzebene, deren Spur punktiert am Äquator erscheint. Ein vollständiges Bild aller derartigen Kegelspuren auf der Kugel wird erlauben, solche Lagenbeziehungen zwischen den Kegeln zu überblicken, und ergibt zudem das Aussehen einer wirklichen Aufnahme, wenn man das Kreissystem auf der Kugel vom Mittelpunkt her auf die — ebene oder gewölbte — Fläche der photographischen Schicht projiziert. Ebene Platten, die man senkrecht zur Strahlung aufstellt, zeigen also die Projektion auf eine Tangentialebene der Kugel. Diese ist nahe am Berührungspunkt dem Kugelbild so ähnlich, daß dies Bild praktisch stets ausreicht, sich über die aufgenommenen Reflexe zu orientieren.

Eine zweckmäßige Konstruktion dieser Kreise, die eigentlich Schnitte von *Kegeln* mit der Kugel vorstellen, ergibt sich, wenn man sie als Schnitte von *Ebenen* durch die Kugel gewinnt. Abb. 9a veranschaulicht, wie die in der BRAGGSchen Gleichung gegebene Forderung, daß der Cosinus des Einfallswinkels  $\varphi$  einen bestimmten Wert haben soll, dadurch erfüllt

wird, daß man die Hilfskugel  $K$  vom Radius  $R$  mit einer Hilfsebene  $H$  vom Abstand  $p$  schneidet, so daß

$$\cos \varphi = \frac{n \lambda}{2d} = \frac{p}{R}.$$

Offenbar muß es möglich sein,  $p$  und  $R$  so zu definieren, daß jedes nur die Funktionen *einer* der beiden beteiligten physikalischen Größen, des Gitters und der Welle, übernimmt, und es liegt auf der Hand, daß  $p$ , das senkrecht zur Netzebene steht, die kristallographische Seite, also den Netzebenenabstand  $d$  und die Netzebenenlage, zu vertreten hat,

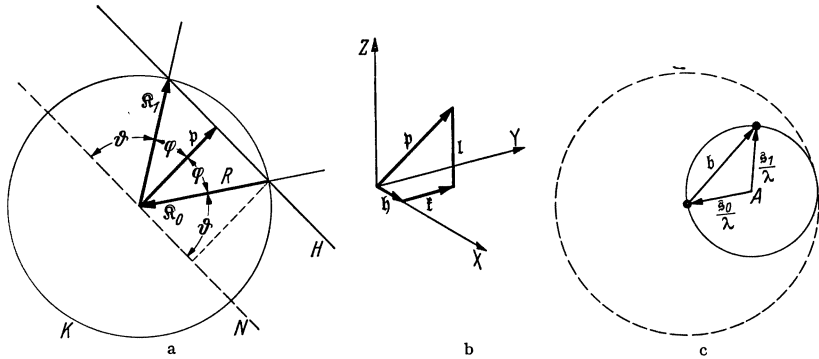


Abb. 9a—c. Konstruktion der Interferenzrichtungen. a Mit fester Kugel, zur Darstellung des vollständigen Reflexsystems. b Vektorgerüst von  $p$ . c Nach EWALD, mit beweglicher „Ausbreitungskugel“.

während der Radius  $R$  der Kugel der Vertreter der in allen Richtungen vorgegebenen Strahlen, also mit  $\lambda$  zu normieren ist. So steht fest, daß

$$p \sim \frac{1}{d} n \quad \text{und} \quad R \sim \frac{1}{\lambda}$$

sein muß, wobei  $n$  die Netzebenennormale (Einheitsvektor). Man erhält durch die  $p$  ein Hilfsebenensystem, das ein für alle Mal, für sämtliche Wellenlängen, zu brauchen ist, also eine selbständige physikalische Bedeutung haben muß. Die Änderung der BRAGGSchen Winkel mit der Wellenlänge wird allein durch Ändern des Radius der Kugel erhalten, die das Fachwerk der Hilfsebenen durchschneidet. Die Ordnung  $n$  könnte man mit dem Kugelradius darstellen, also  $R \sim \frac{1}{n \lambda}$  setzen, so daß man mit einer Reihe von Kugeln zu tun bekäme, deren Radien sich wie reziproke ganze Zahlen verhielten. Diese Überlegung ist zwar darin instruktiv, daß sie zeigt, wie das ganze System der Reflexe  $n$ -ter Ordnung identisch ist mit dem System erster Ordnung für die  $n$ -fache Wellenlänge. Man wird aber vorziehen, die Darstellung aller Reflexe auf *einer* Kugel zu bekommen, wird also das  $n$  auf die Seite der Hilfsebenen verlegen, indem man

$$p \sim \frac{n}{d}$$

setzt, also die höheren Ordnungen durch Hilfsebenen im doppelten, dreifachen usw. Abstand wiedergibt. So erhält man für die beiden ersten

Ordnungen auf einer Kugel wieder das in Abb. 8 gegebene Bild. Daß eine solche Wiedergabe der höheren Ordnungen auf der kristallographischen Seite der Darstellung sachgemäß sein kann, geht schon aus dem bekannten Gebrauch hervor, sie durch Multiplikation der in der reinen Kristallographie teilerfremden MILLERSchen Indizes mit der Ordnungsziffer darzustellen. In beiden Fällen verfährt man so, als stammten die höheren Ordnungen als erste von Netzebenenfamilien, deren Abstand  $1/n$  des wirklichen ist.

Um die Entwicklung der Erscheinungen mit geänderter Wellenlänge zu überblicken, wird man augenscheinlich am besten mit kleiner Hilfskugel beginnen und sie allmählich in das System der Hilfsebenen hineinwachsen lassen. Da  $R \sim 1/\lambda$ , heißt das: man wird, um mit einfachen Reflexsystemen anzufangen und dann zu den verwickelteren überzugehen, mit der Seite der großen Wellenlängen beginnen. Zunächst wird die Kugel zu klein sein,  $H$  überhaupt zu berühren, die Wellenlänge ist noch zu groß, um ins Gitter zu passen. Sobald  $\lambda = 2d$ , berührt die Kugel die Hilfsebene: ein entgegen  $p$ , also senkrecht zur Netzebene einfallender Strahl kann jetzt in sich zurück reflektiert werden. Mit weiter fallendem  $\lambda$  wächst  $K$  über die Berührung hinaus, es entsteht ein immer weiter sich öffnender Strahlenkegel, auf der Kugel erscheint also als Bild der an dieser Netzebene möglichen Reflexionsrichtungen ein immer weiter sich öffnender Kreis. Mit weiter fallendem  $\lambda$  wird sie eine nach der anderen von den parallelen Hilfsebenen berühren und schneiden, die die höheren Ordnungen vorstellen. Um den Pol der Netzebene entwickelt sich ein Kreis nach dem anderen, der „jüngste“, kleinste stellt die höchste an dieser Netzebene vorhandene Ordnung dar, während die Bilder der niederen Ordnungen, immer größer werdend, dem Äquator, der Netzebenen Spur auf der Kugel, immer näher rücken, ein Umstand, der praktisch die Bilder für kurze Wellenlängen beherrscht (11).

Da jede Netzebene eine solche Kette ihr paralleler Hilfsebenen erzeugt, besteht im ganzen ein System einander durchkreuzender Ebenenfamilien, ein räumliches Fachwerk von Hilfsebenen. Die Schnitte der Hilfskugel mit diesem Fachwerk, ein System gegeneinander geneigter Kreise um die Ebenenpole der Kugel, sind das gesuchte vollständige Reflexsystem des Gitters.

Wir haben bis jetzt die Proportionalitätsfaktoren offen gelassen, also z. B. nicht etwa einfach  $p = n/d$  gesetzt. Sie sollen so normiert werden, daß die Darstellung noch etwas allgemeiner brauchbar wird. Da in allen Kristallen eines Typs, etwa in allen flächenzentrierten oder allen raumzentrierten Gittern, die Abstandsverhältnisse zwischen den verschiedenen Netzebenen und deren Neigungen dieselben sind, können sich die Systeme der  $p$  für sie nur im Maßstab unterscheiden. Wir normieren so, daß sich ein gemeinsames System der  $p$  für sie ergibt; wir suchen das Hilfsebenensystem für „das flächenzentrierte Gitter“. Man hat dazu einen Fundamentalabstand  $a$  im wirklichen Gitter, in kubischen Gittern

etwa die Kante des Elementarwürfels, als Längeneinheit zu benutzen, also nicht mit  $d$  und  $\lambda$ , sondern mit  $d/a$  und  $\lambda/a$  zu arbeiten. Demnach setzen wir fest

$$p = \frac{na}{d} n$$

und

$$R = \frac{2a}{\lambda}.$$

Haben wir also z. B. ein kubisches Gitter, so ist

$$p = \frac{na}{d} = \sqrt{h^2 + k^2 + l^2},$$

wo  $h, k, l$  die im oben erwähnten Sinn, mit Einschluß der Ordnungszahl, gebrauchten MILLERSchen Indizes, oder in leichtverständlicher Bedeutung (vgl. Abb. 9 b)

$$p = h + k + l.$$

Diese einfache Darstellbarkeit durch die kristallographischen Größen zeigt, daß jetzt etwas allgemein für den Gittertyp Brauchbares erreicht ist und macht die wirkliche Aufzeichnung des Systems überaus bequem. Für weniger symmetrische Kristalle wird  $p$  weniger einfach aussehen, man wird zunächst die Längenverhältnisse der einzelnen Fundamentalabstände hereinbekommen, also etwa für rhombisches Gitter zu schreiben haben

$$p = h + \frac{a_1}{a_2} k + \frac{a_1}{a_3} l,$$

für schiefwinklige noch verwickelter. Die Konstruktion als solche ist selbstverständlich allgemein anwendbar.

**6. Reziprokes Gitter.** Vektoren, die wie die hier aufgetretenen  $p$  auf den Netzebenen senkrecht stehen und deren Länge dem Netzebenenabstand umgekehrt proportional ist, heißen, unmittelbar nach diesen beiden geometrischen Vorschriften definiert, Fahrstrahlen des „reziproken Gitters“. Die Grundvektoren  $b_1, b_2, b_3$ , die es aufspannen, sind mit den Grundvektoren  $a_1, a_2, a_3$  des Lagengitters, das zunächst ein reines Translationsgitter sein mag, demnach durch die Beziehungen

$$(b_i a_k) = 0; \quad (b_i a_i) = 1; \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3 \\ i \neq k \end{pmatrix}$$

verknüpft. Die  $b$  haben demnach hier die Dimension einer reziproken Länge, das gleiche gilt für ihre geometrischen Summen und für alle Größen, die im Raum des reziproken Gitters als Strecken dargestellt werden. Der Pfeil  $b_{hkl}$  einer beliebigen Netzebene ist

$$b_{hkl} = h b_1 + k b_2 + l b_3,$$

die Kugel des vollständigen Reflexsystems erhält den Radius  $2/\lambda$ .

Die am Ende des vorigen Abschnittes besprochenen  $p$  bilden also ein „normiertes reziprokes Gitter“, in dem die Absolutdimensionen nicht

mehr vorkommen, sondern neben den laufenden Indizes der Gitterebenen allein die Verhältnisse der Fundamentalabstände und die Neigungen der Axen erscheinen. Augenscheinlich ist solche Normierung da zweckmäßig, wo viele Stoffe sich einem Gesetz unterwerfen und nur im Absolutwert der Gitterkonstanten unterscheiden, am meisten also im kubischen System, ferner zu grundsätzlichen Betrachtungen über den Einfluß der Symmetrieeigenschaften des Gitters auf das Reflexsystem.

V. LAUE und EWALD haben bekanntlich das reziproke Gitter, eine ursprünglich rein geometrische Konzeption, in die Interferenztheorie der Röntgenstrahlen eingeführt. Der Grundvorgang, die Verknüpfung eines Strahls in einen zweiten, nimmt hier durch Umformung der LAUESchen oder BRAGGSchen Gleichungen die Form

$$\frac{\mathfrak{s}}{\lambda} - \frac{\mathfrak{s}_0}{\lambda} = \mathfrak{b}_{hkl}$$

an, worin  $\mathfrak{s}_0$  und  $\mathfrak{s}$  die Einheitsvektoren in Richtung des einfallenden und des reflektierten Strahls bedeuten.

EWALDs *Konstruktion mit der Ausbreitungskugel*. Innerhalb des Gebrauchs des reziproken Gitters hat EWALD nun noch eine besondere Konstruktionsweise der Interferenzrichtungen eingeführt. [Man darf diese spezielle Konstruktion nicht, wie es manchmal geschieht, mit dem Gebrauch des reziproken Gitters überhaupt gleichsetzen — das Gitter hat für sich, als Impulssystem (7), eine ganz selbständige physikalische Bedeutung, es können darin verschiedenartige Konstruktionen durchgeführt werden.] Um die darin gegebenen  $\mathfrak{b}$  unmittelbar in ihrer Lage gebrauchen zu können, wird der Vektor  $\mathfrak{s}_0/\lambda$  des einfallenden Strahls an ihren gemeinsamen Anfangspunkt, den Ursprung des reziproken Gitters herangeschoben (Abb. 9c). Man sucht seinen eignen Anfangspunkt, indem man um  $1/\lambda$  in der Richtung des  $\mathfrak{s}_0$  rückwärts geht und legt um diesen „Ausbreitungspunkt“  $A$  eine Kugel mit dem Radius  $1/\lambda$ . Alle Punkte des Gitters, die sie trifft, sind Endpunkte von Vektoren, die, zu  $\mathfrak{s}_0/\lambda$  addiert, wieder einen Strahlvektor  $\mathfrak{s}/\lambda$  ergeben, der die vorgeschriebene unveränderte Länge  $1/\lambda$  hat — alle bezeichnen Reflexionen an Netzebenen, die für den einfallenden Strahl möglich sind. Abb. 9c zeigt eine „Ausbreitungskugel“ inmitten der festen Kugel vom Radius  $2/\lambda$ , die Abb. 9a entspricht.

Offenbar kann man sich für den Fall, daß eine feste Einfallrichtung schon gegeben ist, nichts Einfacheres denken, und die Arbeiten EWALDs und LAUES haben gezeigt, wie natürlich sich diese Art, das reziproke Gitter anzuwenden, fortgestalten läßt, um die feinen Veränderungen und Aufspaltungen der Strahlvektoren zu verfolgen, die durch die dynamischen Wechselwirkungen im Gitter entstehen. Man macht immer wieder die Erfahrung, daß in Fragen, die von *einer* Einfallrichtung handeln, die EWALDsche Methode die klarste Einsicht gibt. Will man indes die Erscheinungen überblicken, die bei *verschiedenen* Strahlrichtungen auftreten, so wäre es nicht praktisch, eine Darstellung zu gebrauchen, bei

der man für jede Strahlrichtung eine andere Ausbreitungskugel von einem anderen Ausbreitungspunkt aus durch das Gitter legen muß. Für den in diesem Bericht zu betrachtenden Problemkreis, bei dem man stets die *Gesamtheit* der Richtungen, den Übergang von einer zur anderen, den Wechsel der Wellenlänge im Auge hat, tritt die EWALDSche Konstruktion mit der Ausbreitungskugel daher zurück, doch muß man sie stets im Sinn haben, sobald einmal ein Problem fester Richtungen auftritt. Für die hier zu betrachtenden Fragen gebrauchen wir die in (5) geschilderte Konstruktion, die auf einer Kugel um ein *festes* Zentrum, den Ursprung, die Ergebnisse für alle Richtungen vereinigt.

**7. Der Raum des reziproken Gitters als Impulsraum.** Ein Hilfsmittel, das so zwangsläufig auftritt, wie das Vektorensystem des reziproken Gitters und sich in verschiedenartigen Konstruktionen — unter Benutzung der Endpunkte selbst oder zur Definition der Hilfsebenen —, brauchbar erweist, muß augenscheinlich eine selbständige physikalische Bedeutung haben. Der abstrakte und unanschauliche Charakter der rein geometrischen Vorschriften beweist, daß mit der Darstellung als Raum der reziproken Längen — so gut sich schon mit ihr rechnen läßt — das physikalisch Wesentliche noch nicht herausgeholt ist. Es tritt hervor, wenn man die mechanische Seite der Umsteuerung des Strahlvektors hervorhebt.

Die elementare BRAGGSche Reflexionsbetrachtung behandelt die Netzebene des Kristalls wie einen glatten Spiegel. Das Spiegelungsgesetz bedeutet Umkehr der normalen, Erhaltung der tangentialen Komponente der auffallenden Bewegungsgröße. Der Körper des Kristalls tauscht also das Doppelte der Normalkomponente des ankommenden Impulses mit der Bewegung aus. Die Auszeichnung bestimmter Winkel durch die BRAGGSche Gleichung

$$2d \cos \varphi = n\lambda$$

heißt, in Bewegungsgröße umgeschrieben,

$$2 \frac{h\nu}{c} \cos \varphi = n \frac{h}{d},$$

daß die links angegebene doppelte Normalkomponente des einfallenden Impulses, von deren Austausch eben die Rede war, ein ganzes Vielfaches einer natürlichen Einheit sein muß, die vom Gitterbau bestimmt ist. Für Reflexion an anderen Netzebenen gilt Analoges, nur sind die natürlichen Einheiten von anderer Richtung, und, den anderen Abständen  $d$  entsprechend, von anderem Wert. Man hat also mit einem System *natürlicher Impulseinheiten* zu tun, die dieses Gitter mit darauf auffallenden Bewegungen auszutauschen vermag, und die in ihrer Richtung durch die Netzebenenormalen, in ihrem Wert durch die (reziproken) Netzebenenabstände bestimmt sind. Alle am Kristall möglichen Interferenzerscheinungen bestehen darin, daß zum Strahlvektor, ohne seinen Absolutwert zu ändern, ein Vektor aus diesem Vorrat addiert wird.



Man geht also, um sämtliche am Kristall möglichen Reflexionsrichtungen zu übersehen und das vollständige Reflexsystem zu konstruieren, zweckmäßig in den Impulsraum über und trägt von einem festen Zentrum aus einerseits das System der erlaubten Impulspfeile, andererseits den doppelten Absolutwert  $2 \frac{h\nu}{c}$  des Impulses der betrachteten Wellenbewegung auf, den man, dem Experiment entsprechend, nicht an eine feste Richtung bindet, sondern als Kugelradius gibt. Eine senkrechte Ebene durch das Ende eines der Impulspfeile bezeichnet auf der Kugel den Endpunkt der Strahlvektoren, deren Projektion auf die Pfeilrichtung — die doppelte Normalkomponente zur Netzebene — die von der BRAGGSchen Gleichung vorgeschriebene Größe hat. Anderen Netzebenen entsprechen andere Impulspfeile, die andere Schnittebenen bestimmen und so zeichnet sich auf der Kugel das System der Strahlvektoren, die am Kristall zu BRAGGScher Reflexion kommen, als ein System verschieden großer, einander durchgreifender Kreise ab.

Der Raum des reziproken Gitters erweist sich danach als Impulsraum, wie er vom „Geschwindigkeitsraum“ der Gastheorie an in der Statistik und Quantentheorie seit langem geläufig ist. Er ist hier eine ebenso notwendige Ergänzung des Lagenraums, wie dort. In ihm liegt die dynamische Struktur des Kristalls, das reziproke Gitter, wie in jenem die geometrische, das Lagengitter. Der Zustand des Kristalls springt im reziproken Gitter umher. So wie die *Lagen* aller Massenpunkte des Gitters zu erhalten sind, wenn man von irgendeinem von ihnen nach bestimmten Ganzzahlgkeitsvorschriften fortschreitet, findet man alle *Bewegungszustände*, in die der Kristallkörper durch eine Strahlung versetzt werden kann, wenn man von einem unter ihnen, einem Punkt des reziproken Gitters, nach bestimmten Ganzzahlgkeitsvorschriften fortschreitet, das reziproke Gitter ist die Gesamtheit der zulässigen Bewegungszustände des Kristalls. In der Metallelektronik steht naturgemäß die Wechselbeziehung zwischen den Impulsgrößen der Leitungselektronen und der wellenmechanischen Behandlung ihrer Bewegung im Vordergrund. So finden sich dort bei der Behandlung der Gitterprobleme schon unsere Hilfsebenen vor, freilich in einer anderen Rolle. Da der Impulsaustausch mit dem gesamten Gitterkörper, der hier der Gegenstand des Interesses ist, dort als *Störung* der Translation gewertet wird, erscheinen die Fälle, die hier interessieren und zusammengefaßt werden, dort als das „Verbotene“; aus Stücken der Hilfsebenen setzen sich dort die Wände der BRILLOUINSchen Zonen (1931, 15) zusammen, deren Anfüllung studiert wird. Besonders klar ist diese Anwendung des reziproken Gitters für die Quantenstatistik der festen Leiter bei SOMMERFELD und BETHE und neuerdings bei MOTT und JONES hervorgehoben (15). Der Gedanke, Interferenzvorgänge als gequantelten Impulsaustausch mit dem Gitter aufzufassen, ist zuerst von W. DUANE (16) ausgesprochen worden, kurz nach den oben erwähnten Versuchen,

die wir als irrtümlich ansehen mußten, ja sogar durch sie angeregt, aber scharf von jener speziellen Idee einer selektiven Reflexion der Linien zu unterscheiden.

Wir fassen noch einmal zusammen, indem wir die drei Maßeinheiten für Strahlvektoren einander gegenüberstellen, die in den drei innerlich zusammenhängenden Darstellungsweisen gebraucht werden:

im einfachen reziproken Gitter:  $1/\lambda$ , also Zahl der Wellen auf dem Zentimeter, Dimension: reziproke Längen;

im normierten reziproken Gitter:  $\frac{2a}{\lambda}$ , also Zahl der Halbwellen auf dem Fundamentalabstand  $a$  im Kristall, Dimension: reine Zahlen;

im Impulsraum:  $\frac{2h}{\lambda} = \frac{2h\nu}{c}$ , also CGS-Einheiten der Bewegungsgröße des Lichtquants, Dimension: Bewegungsgröße.

Die beiden ersten sind für den rechnerischen und zeichnerischen Gebrauch bestimmte Vertreter der letzten, die eine wirkliche physikalische Größe darstellt.

Wir werden demnach überall da, wo es sachgemäß scheint, ohne weiteres vom Impulsraum sprechen. Zunächst kehren wir zur eigentlichen Darstellung des vollständigen Reflexsystems mit Hilfe der festen Kugel im Impulsraum zurück.

## B. Die Entwicklung des Reflexsystems mit fallender Wellenlänge.

8. Darstellung des Einzelfalls. Der Weg zur praktischen Ausführung dieses Gedankens beginnt damit, daß man passende Schnitte

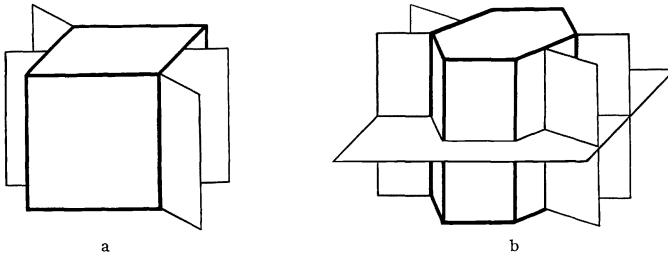


Abb. 10a und b. Schnittebenen; a für kubisches, b für hexagonales System.

durch dies Fachwerk zeichnet. Man wählt etwa für einen kubischen Kristall die in Abb. 10a als Schnitte durch den Würfel angegebenen Ebenen. Die in eine Schnittebene fallenden Vektoren  $p$  sind durch ihre Abschnitte  $h, k, l$  gegeben, wie Abb. 11 am Beispiel der in Abb. 10a eingetragenen Würfelebene erläutert. Am Ende jedes Pfeils ist kurz der Schnitt der auf ihm und damit auch auf der Schnittebene senkrechten Hilfsebene angegeben. In der eigentlichen Schnittzeichnung werden nur diese Spuren der Hilfsebenen beibehalten und voll durchgezogen. Abb. 12 gibt eine solche Schnittzeichnung für das einfache

Würfelgitter, die Durchführung des in Abb. 11 begonnenen Beispiels. Die Schnittzeichnungen für das flächen- und das raumzentrierte Gitter sind eine Auswahl daraus, da Reflexe ausgelöscht werden.

Um aus diesen Schnitten Diagramme des vollständigen Reflexsystems für eine bestimmte Wellenlänge zu erhalten, trägt man die Spur der zu dieser Wellenlänge gehörenden Kugel als Kreis vom Radius  $\frac{2a}{\lambda}$  in sie ein und vermag nun Lagen und Radien der einzelnen Schnittkreise abzulesen oder einfach mit dem Zirkel abzugreifen. Während beim kubischen Gitter zunächst die angegebenen zwei Schnitte ausreichen [bis zum Auftreten von  $(420)$ ,  $\frac{\lambda}{a} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,447$ , reicht man sogar mit dem Flächendiagonalschnitt

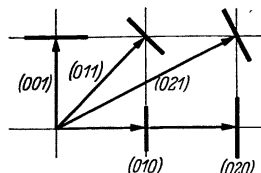


Abb. 11. Zur Konstruktion.

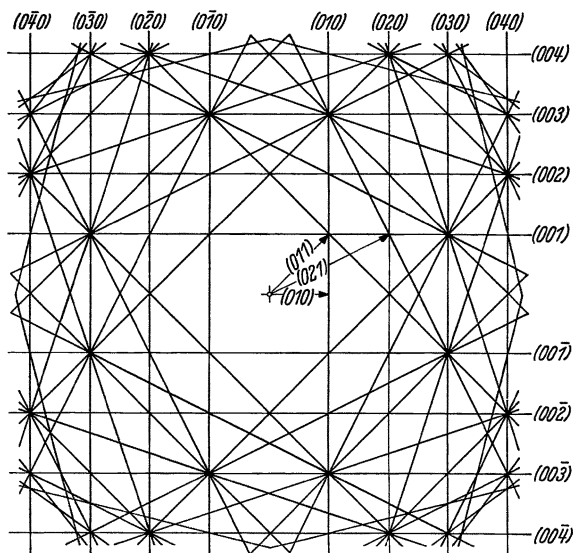


Abb. 12. Hilfsebenensystem des einfachen Würfelgitters; Schnitt mit Würfelebene.

aus], braucht man für das hexagonale sogleich die drei, die in Abb. 10b angegeben sind.

Abb. 13 und 14 geben die zwei Konstruktionsschnitte für die  $K\alpha$ -Wellenlänge des Kupfers im flächenzentrierten Kupferkristall, also die für die Gitterquellenerscheinungen in Cu geltenden Verhältnisse. Die von der Kugel aus den Spuren der Hilfsebenen herausgeschnittenen Stücke, deren Länge den Durchmesser der Schnittkreise bedeutet, sind stark ausgezogen.

Das Reflexsystem selbst wird natürlich am sachgemäßesten dargestellt, wenn man es wirklich auf eine Kugel aufzeichnet. Man hat

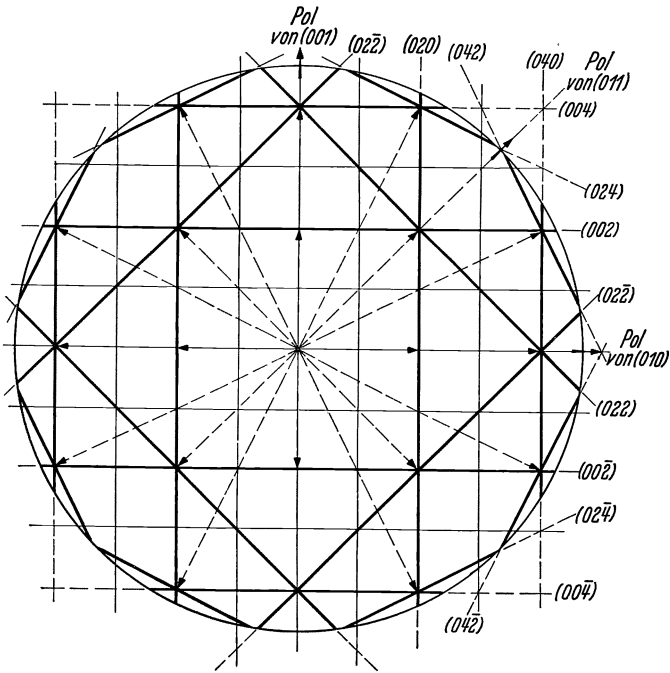


Abb. 13. Hilfsebenensystem des flächenzentrierten Würfelgitters mit Hilfskugel für  $\lambda/a = 0,426$  (CuK $\alpha$  in Cu); Schnitt mit Würfelfläche.

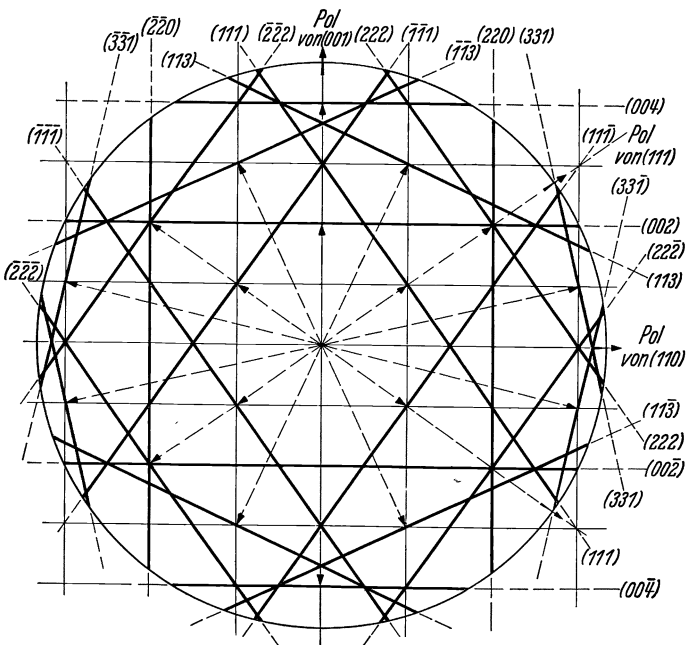
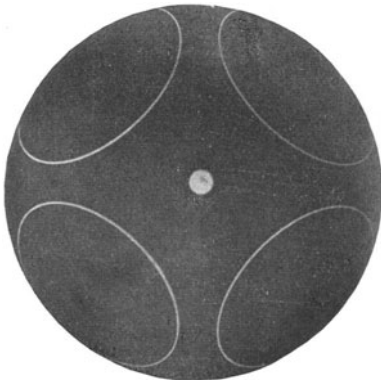
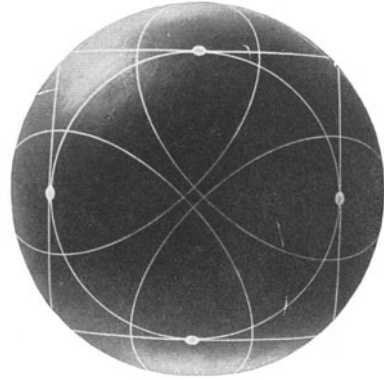


Abb. 14. Hilfsebenensystem des flächenzentrierten Würfelgitters mit Hilfskugel für  $\lambda/a = 0,426$  (CuK $\alpha$  in Cu); Schnitt mit Rhombendodekaederebene.



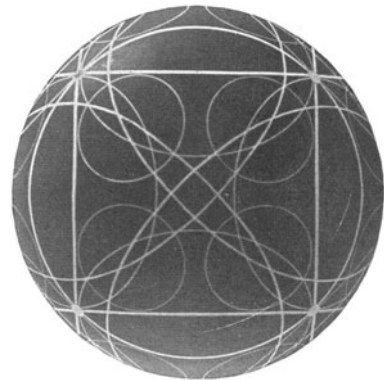
a  $\lambda/a = 1,0000.$



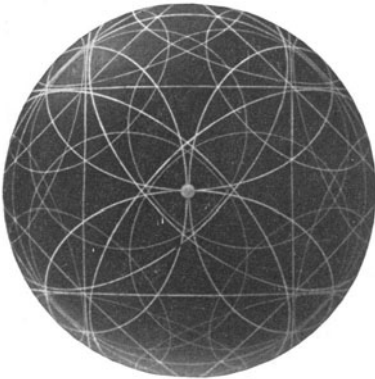
b  $\lambda/a = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7071.$



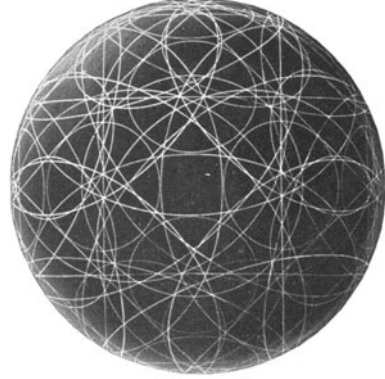
c  $\lambda/a = \frac{2}{\sqrt{11}} = 0,6030.$



d  $\lambda/a = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,5774.$



e  $\lambda/a = 0,5000.$



$\lambda/a = 0,426.$

Abb. 15a-f. Entwicklung des vollständigen Reflexsystems des flächenzentrierten Würfelgitters.  
Zeichnung und Aufnahme von H. JAEGER (V).

einfach mit dem Zirkel in den Netzebenenpolen der Kugel einzusetzen und Kreise zu ziehen, deren Radien man als Sehne zwischen Flächenpol

und Schnitt von Hilfsebene und Kreis auf den Schnittfiguren findet. Aufnahmen solcher Kugelzeichnungen zeigt Abb. 15. Für die zusammenhängende Arbeit an einem bestimmten Reflexsystem ist die Darstellung auf einer wirklichen Kugel ganz ausgezeichnet zu brauchen, um alle Zusammenhänge und Aufnahmemöglichkeiten gleichmäßig zu überblicken.

Um eine Darstellung der das Reflexsystem tragenden Kugel in einer Ebene unmittelbar zeichnerisch zu konstruieren, ist eine Parallelprojektion

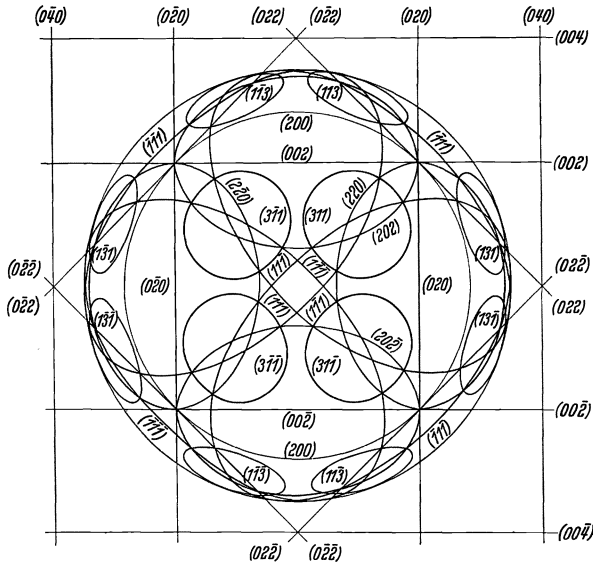


Abb. 16. Vollständiges Reflexsystem des flächenzentrierten Würfelgitters für  $\frac{\lambda}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

das Gegebene. Die Schnitte enthalten die dafür notwendigen Elemente; die bei Parallelprojektion der einzelnen Kreise vorkommenden Strecken können darin rechnerisch abgelesen oder abgegriffen werden. Die Mittelpunkte aller Kreise, die in den beiden in der Schnittebene aufgetragenen Teilindizes übereinstimmen, erscheinen an einem Punkt, um den sich die Kreise mit fallender Wellenlänge nur erweitern usw. So entstehen Zeichnungen wie Abb. 16, die dem vierten Teilbild aus Abb. 15 entspricht und die von M. RENNINGER stammende Abb. 30.

**9. Entwicklung des Systems am flächenzentrierten Gitter.** Die Reihe 15 zeigt am Beispiel des flächenzentrierten Würfelgitters, wie sich das vollständige Reflexsystem eines Kristalls mit fallender Wellenlänge entwickelt. Mit dem Fall beginnend, in dem die Wellenlänge der Kante  $a$  des Elementarbereichs gerade gleich ist, stellt sie bis zu dem Fall, wo  $\lambda$  auf die Hälfte dieses Wertes herabgegangen ist, alle Einzelstufen der Entwicklung dar, in denen ein neuer Reflex auftaucht, also eine neue Netzebene mitzuarbeiten beginnt. So zeigt das erste Bild, da die

Oktaederhilfsebenen nach dem Schnitt Abb. 14 als erste von der wachsenden Kugel erreicht werden, nur *ein* System von Kreisen: die Reflexe an den Oktaederebenen. In den weiteren Stufen werden sie größer und größer, im zweiten Bild treffen sich die einander gegenüberliegenden bereits fast im Mittelpunkt, im dritten haben sie sich bereits überschritten. Im fünften Bild ist dann die zweite Ordnung der Oktaederreflexe aufgetreten, die hier genau so liegt wie die erste Ordnung im ersten Bild ( $\lambda/a$  ist ja genau auf die Hälfte herabgesetzt), und auch in

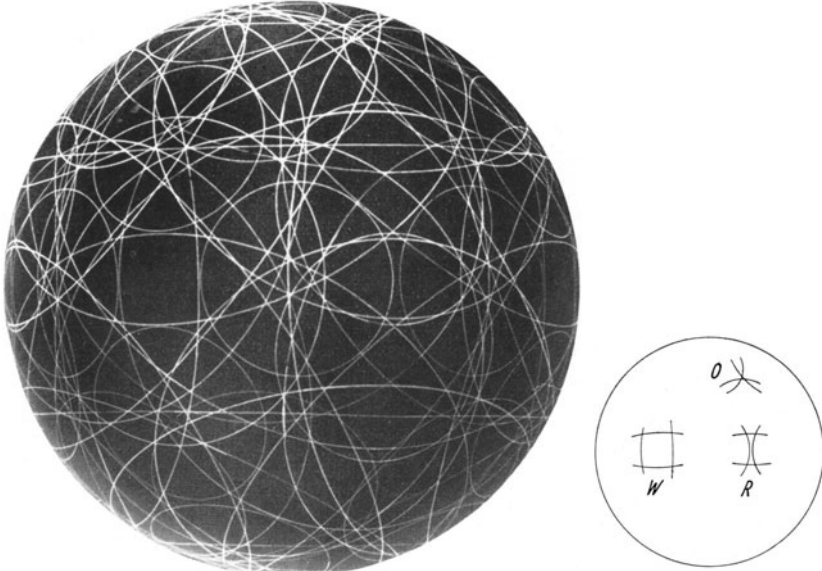


Abb. 17. Vollständiges Reflexsystem von  $\text{CuK}\alpha$  in Cu.

dem zunächst so verwickelt anmutenden letzten Bild sind die beiden Oktaederordnungen an Lage und Größe klar herauszuerkennen. Analog entwickeln sich die Würfelreflexe, zuerst in der zweiten Stufe als Kreis und vier — hier gerade den Kreis berührende — gerade Linien erkennbar, dann die der Rhombendodekaederebenen und so fort. Als natürlicher Schlußstein der Kette ist hinter  $\lambda/a = 0,5$  noch  $\lambda/a = 0,426$  gegeben, der Fall der Cu- $\text{K}\alpha$ -Wellenlänge im Cu-Gitter, der Gitterquelleninterferenzen des Kupfers, die das erste durchbeobachtete Beispiel gebildet haben.

Zum Vergleich der Konstruktion mit der Beobachtung diene Abb. 17, die die Konstruktion für Cu im Anblick vom Pyramidenwürfelpol her zeigt, bei dem man die wichtigsten Pole gleichzeitig überblickt. Am Äquator, etwas nach rechts gerückt, erscheint die Gegend des Rhombendodekaederpols, die in Abb. 20 aufgenommen ist, darüber der Oktaederpol, dessen fernere und engere Umgebung in Abb. 5 und 22 beobachtet ist. Die Aufnahmen bedeuten Projektion des auf der Kugel gezeichneten

Systems auf eine Ebene und so ist es aufs Bequemste möglich, in der Anschauung der Bilder vom einen zum anderen, von der Aufnahme zur Konstruktion, überzugehen.

Zu eingehenderen Überlegungen braucht man natürlich Ansichten des Systems von mehreren Seiten. In Abb. 15 sind nur die Ansichten von einem Würfelpol her gegeben, die analogen Reihen für den Anblick vom Oktaeder- und Rhombendodekaederpol her finden sich in der Arbeit V, die die Systematik und Darstellung des Reflexsystems behandelt.

**10. Zahl der Reflexmöglichkeiten.** An Einzelzügen fällt in Abb. 15 vor allem ins Auge, wie schnell mit fallender Wellenlänge die Zahl der Reflexe anwächst. Sie erfüllen die Kugel dichter und dichter und dabei bedeuten unsere Bilder nur den Anfang der Entwicklung. Die Kupfer-K $\alpha$ -Linie, von der das letzte Bild handelt, hat mit  $\lambda = 1,54$  AE noch immer eine verhältnismäßig große Wellenlänge. Die Anwendung einer praktisch so viel gebrauchten Welle, wie der K $\alpha$ -Linie des Molybdäns mit  $\lambda = 0,71$  AE oder gar des Silbers mit  $\lambda = 0,56$  AE bedeutet eine ganz gewaltige Zunahme der Richtungen, in denen Reflexion am Kristall möglich ist. Man erhält die höchste Reflexordnung, die auftreten kann, aus der Bedingung  $\frac{2a}{\lambda} \cong \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$ , der Forderung nämlich, daß in der BRAGGSchen Gleichung der  $\cos \varphi \cong 1$  sein muß. Diese bekannte Bedingung wird hier geometrisch so interpretiert, daß der Radius der Hilfskugel  $R = \frac{2a}{\lambda}$  größer als der Pfeil  $p$  sein muß, damit ein Schnitt zustande kommen kann. Die Zahl der in der Kugel endenden Pfeile ist die Zahl der auftretenden Reflexkegel. Da die Pfeilenden im Impulsraum mit konstanter Dichte verteilt sind — sie bilden das „reziproke Gitter“ — wird die Zahl der in der Kugel liegenden bei genügend großem Radius einem Gang mit  $R^3$  zustreben, die Zahl der Reflexkreise wird mit  $1/\lambda^3$  zunehmen.

Die Abschätzung auf diesem Weg führt schon ziemlich bald zu brauchbaren Werten. Die Zahl  $N$  der Reflexkreise auf der Kugel ist danach

$$N = \frac{32\pi}{3} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^3 D,$$

wo  $D$  die Dichte der Endpunkte im Impulsraum vorstellt. Die Überlegung läßt sich natürlich auf jeden beliebigen Gittertyp anwenden. [Im einfachen reziproken Gitter gilt  $N = \frac{32\pi}{3} \left(\frac{1}{\lambda}\right)^3 D$ .] Für das flächenzentrierte Würfelgitter sieht man z. B. aus den Schnitten 13, 14, daß je zwei Punkte auf einen Würfel entfallen, dessen Kante in den von uns benutzten Einheiten die Länge 2 hat. So ist  $D = 1/4$ . Man berechnet damit für das Kupfersystem ( $\lambda/a = 0,426$ )  $N = 108$ , während die 8 vorhandenen Reflexgruppen in der Tat 112 Reflexkegel entstehen lassen.

Für die K $\alpha$ -Linie des Molybdäns, deren Wellenlänge etwas weniger als halb so groß ist wie die des Kupfers, erhält man bereits mehr als das 10fache an Reflexen, hier müßten — für  $\lambda/a = 0,194$  — nicht weniger



als 1100 Kreise auf der Modellkugel eingetragen werden. Für Silber unter der eigenen  $K\alpha_1$ -Linie ( $\lambda/a = 0,137$ ) findet man 3270 Reflexe — hier nimmt die Zahl bereits von  $K\alpha_2$  zu  $K\alpha_1$  um 100 zu.

**11. Der Grenzfall sehr kurzer Wellenlänge.** Mit weiter fallender Wellenlänge treten in dem Gewirr indes wieder klare Beziehungen hervor. Die zuerst aufgetretenen Reflexe, die die niederste Indizierung tragen und, soweit nicht von seiten des Strukturfaktors eine Änderung eintritt, auch die stärksten sind, bilden natürlich auch die Strahlenkegel größter Öffnung und diese werden schließlich so flach, daß ihre Spuren eng an die auf der anderen Seite derselben Netzebene reflektierten heranrücken. Zur Erläuterung betrachte man etwa die Reflexe an der horizontalen Würfel-Netzebene des in der Abb. 15 dargestellten Beispiels, die in der zweiten Teilfigur als horizontale Gerade oben und unten auftauchen und einander in der weiteren Folge der Bilder mit fallender Wellenlänge näher und näher rücken. Wird schließlich  $\lambda/a$  klein gegen 1, also der Kugelradius groß gegen die Maschenweite des Fachwerks der Hilfsebenen, so kommt ein solches Paar von Parallelkreisen einander so nahe, daß es beim Anblick der Aufnahmen sofort als zusammengehörig erkannt wird. So entstehen die von Paaren parallel laufender Reflexe beherrschten Bilder, die von den Elektronenstrahlen her, bei denen so kurze Wellenlängen bequem erreicht werden, wohl bekannt sind und nach ihrem ersten Beobachter KIKUCHI-Bilder genannt werden. Sie erscheinen dort in den gewohnten Anordnungen als zweite Stufe: sehr dünne Kristallstücke, in denen der Kathodenstrahl praktisch parallel bleibt, geben beim Durchstrahlen Kreuzgitterspektren, stärkere, in denen er bereits merklich gestreut wird, geben  $KIKUCHI$ -Linien. Die Streuung hat, wenigstens für den kleinen hier in Frage kommenden Winkelbereich, ein stetig über verschiedene Richtungen verteiltes Bündel geschaffen und damit die Bedingungen, unter denen ein Ausschnitt aus dem vollständigen Reflexsystem entstehen kann. Diese Erscheinungen sind nicht nur systematisch, als Durchführung der Reflexionsvorgänge bis zu kurzen Wellenlängen, von Interesse; gewisse Züge an den Intensitätsverteilungen sind elementar nicht verständlich und bisher nicht gedeutet. Wir kommen unten bei den eigentlichen Interferenzfragen darauf zurück.

Die Wellenlänge der Elektronenstrahlen wird z. B. bei der bequem zu handhabenden Spannung von 40 kV zu  $\lambda = 0,06$  AE.

Für Röntgenstrahlen war dieser zu kurzen Wellen gehörende Typ von Interferenzbildern bisher nicht beobachtet. H. DETERMANN (18) hat kürzlich (1937) bei Gelegenheit einer Untersuchung über die Voreilung der Bremsstrahlung bei harten Röntgenstrahlen festgestellt, daß man sie bekommt, wenn man die Bremsstrahlung selbst verwendet, deren reichliche Intensität ja eine scharfe Filterung erlaubt, und ihr ursprünglich breites Band durch Filtern mit 10 Halbwertschichten der Grenzfrequenz auf ihren härtesten, bis etwa 15% über die Grenzwellenlänge reichenden Anteil einengt.

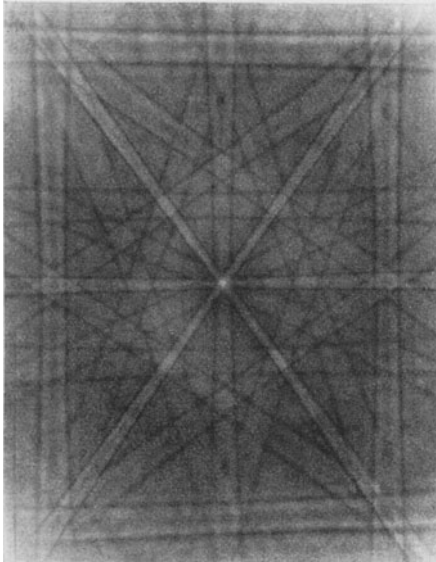


Abb. 18a. Interferenzsystem kurzer Wellen (H. DETERMANN). (KIKUCHI-Bänder von Röntgenstrahlen.) 112 kV, Cu-Kugel von 1 cm Radius, Abstand Quelle-Platte 21 mm. Natürliche Größe.

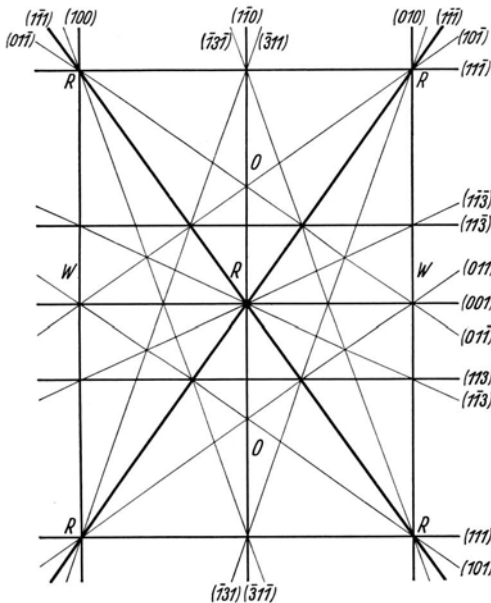


Abb. 18b. Indizierung zu Abb. 18a.

Die Bremsstrahlung wird inmitten des Kristallkörpers, einer Kupfer-Einkristallkugel, erzeugt. Die durch einen Ausschnitt hereinkommenden Kathodenstrahlen treffen sich hier in einem Brennpunkt von wenigen zehnteln Millimeter Durchmesser, von dem aus nun die Röntgenstrahlen nach allen Seiten in den Kristall hinauslaufen. Die Filterung besorgt hier der Kristallkörper selbst, dessen Radius 1 cm ist. Die Versuche gehen bis zu 140 000 Volt; zu 125 000 Volt gehört als Grenzwellenlänge 0,1 ÅE. Man ist also in dem sonst mit Elektronen studierten Wellenlängenbereich, dort gehört 0,1 ÅE zu Kathodenstrahlen von 15 000 Volt.

Abb. 18 zeigt eine der DETERMANNschen Aufnahmen, bei der die ebene Platte einem Rhombendodekaederpol der Kugel gegenüberstand. Die Begleitfigur zeigt die Indizierung, sie gibt nur die inmitten der Paare verlaufenden Netzebenenansichten. Man erkennt auf der hier vorliegenden Aufnahme vor allem an den engsten Paaren, den Oktaederreflexen, auch die zweite Ordnung, die die erste auf jeder Seite außen begleitet, und kommt damit in günstigen Fällen bis zur vierten Ordnung. Der Intensitätsabfall zu höheren Reflexen ist so erheblich, daß in den vorliegenden Aufnahmen nur die Reflexe von vier Netzebenenarten sichtbar werden.

Der Gang durch die Wellenlängen beginnt also mit einfachen Bildern, weil im Anfang, für große Wellenlängen, nur wenige Reflexe überhaupt

möglich sind, und er endet wiederum bei verhältnismäßig einfachen Bildern, weil die starke Intensitätsabstufung mit dem Winkel nur noch die stärksten Reflexe übrigläßt.

### C. Beziehungen im Reflexsystem.

**12. Koinzidenzen.** Beginnt man wiederum vom Einfachen, von großen Wellenlängen her, so hat man zunächst einzelne, voneinander getrennt liegende Reflexkegel. Mit fallender Wellenlänge werden sie größer, berühren einander und durchschneiden sich dann. Am Schema Abb. 19 wird deutlich, daß die Reflexe einander berühren, sobald die Kugel die Schnittgerade der zwei Hilfsebenen erreicht. Ihr Radius ist jetzt gleich dem Abstand dieser Ebenenkante vom Mittelpunkt,  $\lambda/a$  hat einen ganz bestimmten, im Ebenennetz ablesbaren Zahlenwert.

Am flächenzentriert kubischen Gitter z. B. treten zuerst die Oktaederreflexe auf, die das erste Bild von Abb. 15 noch allein und vor ihrer ersten Berührung zeigt. Man erkennt bereits, wo sie einander zum erstenmal treffen werden; es geschieht natürlich auf den Mitten der kürzesten Strecken von einem Oktaederpol zum nächsten, in den Rhombendodekaederpolen. In dem hierzu gehörenden Schnitt Abb. 14, der rechts oben und unten zwei durch kurze Pfeile angegebene Oktaederpole, auf der Horizontalen nach rechts den dazwischenliegenden Rhombendodekaederpol zeigt, hat man vor Augen, wie die zu jenen Polen gehörenden Hilfsebenen, (111) und (11 $\bar{1}$ ), einander in der Tat auf der Horizontalen schneiden und liest ab, daß die Schnittkante hier die Entfernung  $\frac{3}{2}\sqrt{2}$  vom Mittelpunkt hat. Die Kugel muß also, um die zwei einander benachbarten Oktaederreflexe einander gerade berühren zu lassen, den Radius

$$R = \frac{2a}{\lambda} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

aufweisen und es muß gelten

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{a} &= \frac{2}{3}\sqrt{2} \\ &= 0,9428089. \end{aligned}$$

Der Schnitt zeigt, daß die Oktaederreflexe einander bald ein zweites Mal treffen, und zwar oben in der Figur, im Abstände 3 von der Mitte, also für  $R = 3$  oder  $\lambda/a = 2/3 = 0,6666666$ . Da dies ein Würfelpol ist, also vierzählig, muß noch ein zweites Paar von Oktaederreflexen, in der Richtung senkrecht zu diesem Schnitt, einander begegnen. Das zweite Bild der Reihe Abb. 15 zeigt den Zustand kurz vorher: die

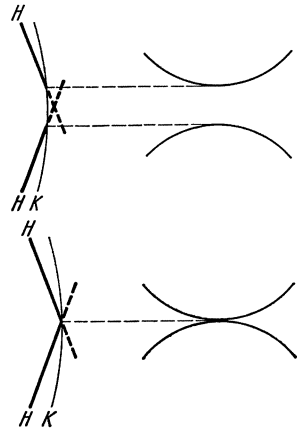


Abb. 19. Auftreten einer Berührung mit fallender Wellenlänge.

vier Kreise stehen davor, einander im Mittelpunkt des Bildes, einem Würfelpol, zu begegnen. Einen dritten, ebenfalls die Oktaederflächen betreffenden Fall von Koinzidenz entnehmen wir unmittelbar der Praxis. Die Cu-Aufnahmen liefern ein hübsches Beispiel: Die  $\beta$ -Linien der Oktaederebenen schneiden einander, wie Abb. 22 zeigt, so genau im Oktaederpol, als man nur ablesen kann. Daraus ist zu schließen, daß im Schnitt 14 die Kugel für die  $\beta$ -Linie (die natürlich größer sein muß als die eingezeichnete für die langwelligere  $\alpha$ -Linie) exakt durch die Ecke des Netzes geht, in der (rechts oben) die Richtung zum Oktaederpol die Hilfsebene (111) trifft. Natürlich treffen in diesem dreizähligen Pol noch zwei weitere Oktaederebenen denselben Punkt (sie erscheinen im Schnitt nicht, da sie nicht auf ihm senkrecht stehen) und so durchschneiden sich hier drei Reflexe. Der Abstand dieses Punktes vom Ursprung ist aber  $\sqrt{3^2 + (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{3}$ . Für  $K\beta$ -Wellenlänge und Gitterkonstante des Cu gilt demnach  $\frac{\lambda}{a} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0,3849002$ .

In dieser Weise ist fortzufahren und man erkennt, daß in den Koinzidenzen eine natürliche Skala von Werten für  $\lambda/a$  gegeben ist. Für das flächenzentriert kubische Gitter ist die Tabelle aller Koinzidenzen zwischen kristallographisch gleichwertigen Flächen bis zu  $\lambda/a = 0,5000$  herab in VI, S. 537 gegeben. Auf den Abb. 15 kann das tatsächliche Aussehen der einzelnen Fälle verfolgt werden. Die Überlegung wird auch nicht verwickelter, wenn die Reflexe nicht kristallographisch gleichwertig sind (wie hier die an den Oktaederflächen), stets hat man einfach nach dem Abstände zu fragen, in dem die beiden Hilfsebenen einander schneiden. So steht eine große Fülle von ausgezeichneten Werten von  $\lambda/a$  zur Verfügung.

**13. Die Anwendung von Lagenbeziehungen im Reflexsystem als spektrometrische Methode.** Nun ist die Messung der Größe  $\lambda/a$  die Grundaufgabe der Spektrometrie. Im allgemeinen wird  $a$  auf anderem Wege gemessen,  $\lambda$  als Unbekannte ermittelt. Heute liegt das Interesse vielfach eher in der Richtung,  $\lambda$  für das man ja vielfach schon sehr gute Präzisionswerte besitzt, als bekannt zu behandeln und die Gitterkonstante  $a$  exakt ermitteln zu wollen. Dazu kommen die Fälle, in denen exakte Ermittlung von Verhältniswerten im Gitter selbst, von Parametern oder von Neigungswinkeln zwischen Achsen erwünscht ist, die sich naturgemäß ebenfalls im Reflexsystem, in der Lage der Koinzidenzen zwischen den Reflexen an verschiedenen Ebenen, geltend machen müssen. Für das Thema der Gitterquelleninterferenzen schließlich, von dem wir ausgegangen sind, ist die noch allgemeinere Frage von Bedeutung, wie weit überhaupt das System jener Interferenzen von der einfachen Reflexionsvorschrift dargestellt werden kann. Die Interferenzbögen zeigen zum Teil sonderbare Strukturen. Wie liegen diese, geprüft an dem bequemen und exakten Mittel der Koinzidenz zwischen den verschiedenen Bögen?

Um dies Kapitel der Beziehungen zwischen den Reflexen an verschiedenen Netzebenen auszubauen, muß man vom System der

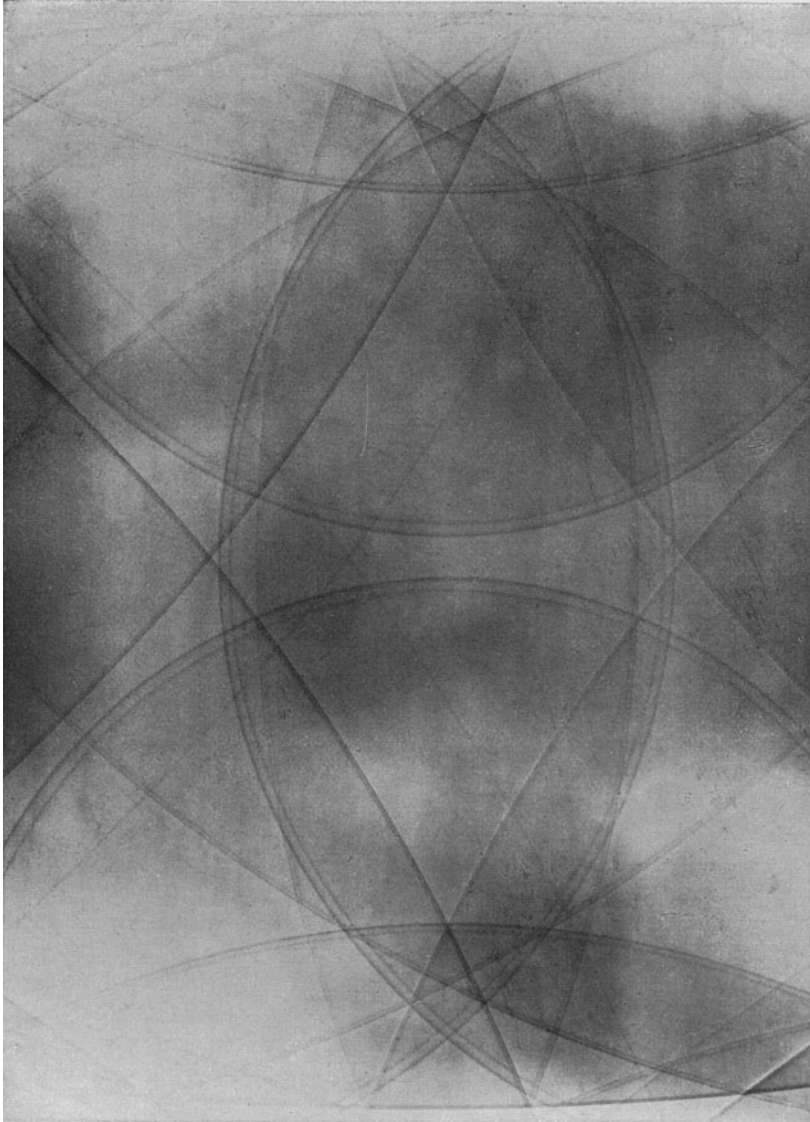


Abb. 20. Cu-Einkristall-Antikathode. Emission im Gebiet um den Rhombendodekaederpol. Anregung am Würfelpol. Abstand 20 cm.  
 (024) (042)  
 Natürliche Größe.

Koinzidenzen zu den Fällen weiterkommen, die zwischen ihnen liegen. Da man weder die Gitterkonstanten noch die Wellenlängen der Röntgenlinien stetig einstellen kann, sind Fälle, die innerhalb der Meßgenauigkeit als Koinzidenzen gelten können, bei großen Wellenlängen

selten. Im allgemeinen wird man zu interpolieren haben. Man sucht in der Konstruktion des vollständigen Reflexsystems Fälle auf, die einer Koinzidenz nahestehen. (Dazu genügen im allgemeinen schon Schnittfiguren.) Unter ihnen sind solche vorzuziehen, die hohe Empfindlichkeit gegen Änderung der Wellenlänge zeigen, also die, in denen die Hilfsebene gerade erst von der tangierenden Lage in die Kugel hineingerückt ist und noch ganz flach von ihr geschnitten wird, so daß eine Änderung des Kugelradius den Öffnungswinkel stark ändert. Das sind die äußersten von der Kugel erreichten Ebenen, die Reflexe höchster Ordnung, oder, wenn wir

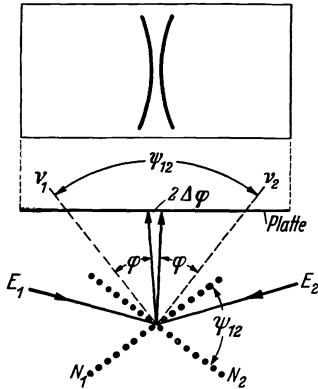


Abb. 21. Strahlverlauf bei Annäherung zweier gleichwertiger Bögen, wie in Abb. 20.

an die Entwicklung des Systems mit fallender Wellenlänge denken, die „jüngsten“ Reflexe. Da diese die engsten Öffnungskegel, die kleinsten Kreise auf der Modellkugel besitzen, ist wachsende Ordnung an wachsender Krümmung zu erkennen und in den Aufnahmen wird der Zusammenhang von Dispersion und Ordnungszahl, der ja wohl bekannt und praktisch viel gebraucht ist, gut anschaulich: Die Trennung des  $\alpha$ -Dubletts steigt mit der Krümmung. Die zuerst aufgetretenen Oktaederreflexe ergeben gestreckte Spuren, in denen das  $\alpha$ -Dublett äußerst scharf, indes so schmal ist, daß man es in der Druck-Reproduktion knapp erkennt. Die „spätesten“ Reflexe, (331)

und (420), sind so stark gekrümmt, daß sie sich mit den hier verwandten Fenstergrößen ohne weiteres als Vollkreise auffangen lassen, und zeigen die Dublettlinien weit getrennt.

Wieder zum Einzelbeispiel übergehend, lesen wir zunächst am Kupfersystem an den Schnitten für die beiden empfindlichsten Reflexe ab:

a) Aus Schnitt Abb. 13: Zwei Pyramidenwürfelreflexe, z. B. (042) und (024), sind nahe daran, sich im Rhombendodekaederpol zu begegnen. Abb. 20 zeigt diese einander nahekommenden kräftig gekrümmten Bogen rechts und links der Mitte. Abb. 21 zeigt den Gang der einfallenden (E) und austretenden Strahlen.

b) Aus Schnitt Abb. 14: (331) kommt dem Oktaederpol äußerst nahe. Da dieser dreizählig ist, muß er dort zwei andern seinesgleichen begegnen. Aufnahme 22 zeigt, inmitten des nahezu geradlinigen Dreieckes von Oktaederreflexen, die drei einander nahekommenden Dublettbögen.

c) Die beiden ersten Beispiele, an einem regulären Gitter, zeigten die Aufgabe,  $\lambda/a$  zu messen, in voller Einfachheit, da nur von einer Gitterkonstanten  $a$  die Rede sein kann. Als drittes folge ein Beispiel, in dem zwei Längenverhältnisse empirisch bestimmt werden müssen, also ein Verhältnis von zwei Abmessungen im Gitter selbst zugänglich wird.

Die Metalle der zweiten Vertikalreihe, Be, Mg, Zn, Cd, Hg stehen bekanntlich ebenfalls einer engsten Kugelpackung nahe, nämlich der hexagonalen, weichen indes im Verhältnis  $c/a$  der hexagonalen zu den zweizähligen Achsen davon ab. Für die Kugelpackung selbst hängt natürlich  $c$  eben-  
sogut zwangsläufig mit  $a$  zusammen, wie im kubisch flächenzentrierten Gitter irgend zwei Periodizitätsabstände — etwa der längs der Oktaedernormale mit der Würfelkante. So ist der Periodizitätsabstand  $c$  längs der Achse der hexagonalen Kugelpackung  $c = \frac{2}{3} \sqrt{6} \cdot a = 1,633 a$ . Die Gitter der wirklichen Elemente sind dagegen in der  $c$ -Richtung teils gedehnt, teils gestaucht. Zn ist gedehnt,  $c/a = 1,860$ . Nun hängt die Lage von Prismenreflexen (vertikale Hilfsebenen) allein vom Gitterabstand der Prismen-  
Netzebenen, also allein von  $a$  ab. Aus ihren Abstandsverhältnissen längs des Äquators kann also  $\lambda/a$  ermittelt werden. Umgekehrt hängt der Abstand der Basisreflexe allein von  $c$  ab. So ergibt sich  $\lambda/c$ . Das Ineinandergreifen ergibt Erscheinungen, wie sie Abb. 23 andeutet: Der hochempfindliche, noch als ganzer Kreis aufnehmbare Reflex an der Prismenfläche ( $3\bar{3}00$ ) wird, je nach dem Verhältnis  $c/a$ , von den ersten Basisreflexen ( $0002$ ), ( $000\bar{2}$ ) in verschiedener Höhe durchschnitten.

**14. Kompensationsmethode.** Mit den gewohnten Begriffen der Spektrometrie ausgedrückt, bedeutet das Verfahren, die Koinzidenz von Reflexen an verschiedenen Netzebenen auszunutzen, folgendes:

Die Aufgabe ist,  $\lambda/a$  als Sinus eines Beugungswinkels zu messen. Jedes Spektrometer ist daher seinem Wesen nach ein Winkelmeßgerät und alle Sorgfalt beim Bau, der Justierung und

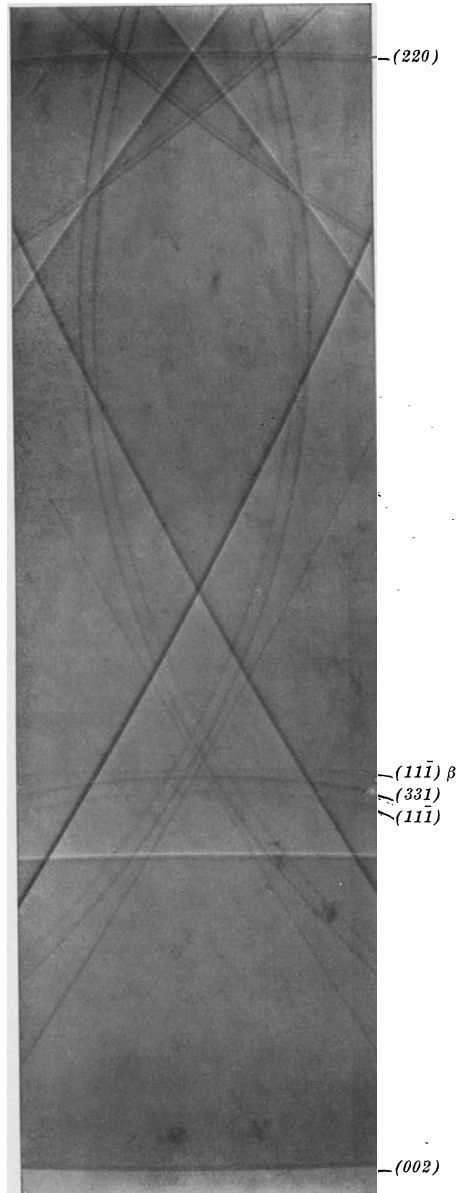


Abb. 22. Cu-Einkristall-Antikathode, Emission in Richtung des Oktaederpols (s. a. Abb. 5). Abstand 30 cm. Natürliche Größe.

der Teilung der Skalen gilt dieser Aufgabe. Das hier betrachtete Verfahren macht nun Gebrauch davon, daß im Kristall eine *Mehrzahl* von Gittern, die Spektren entwerfen können — die verschiedenen Netzebenenfamilien —, vorhanden und in exakter Winkelstellung gegeneinander aufgestellt sind. Diese von der Natur gegebenen Winkel werden benutzt, um

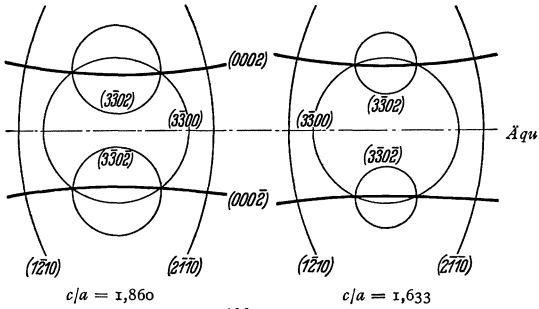


Abb. 23. Abhängigkeit der Lagenverhältnisse vom Axenverhältnis (Zn).

die gesuchten Beugungswinkel daran abzumessen, indem man Fälle aufsucht, in denen der Beugungswinkel einem Winkel im Kristallgebäude nahekommt. Das von der Natur selbst gebaute Präzisionsinstrument arbeitet mit einer Genauigkeit, die an der künstlichen Winkelteilung

eines Spektrometers erst als Leistung höchster Exaktheit im Bau und größter Erfahrung und Sorgfalt in der Anwendung erreicht wird.

Jede Annäherung an eine Koinzidenz bedeutet, daß der austretende Strahl *A*, der aus dem einfallenden *E* durch Reflexion an der Netzebene *N* entstand, dem Bezugspol *T* nahekommt, in dem die Hilfsebene *H* eine oder mehrere andere ihresgleichen trifft. Der BRAGGSche Winkel  $\varphi$  — den wir hier anschaulicher mit dem Gebrauch der Optik gegen die Flächennormale rechnen — kommt also (Abb. 24) dem Winkel zwischen Ebenenpol *P* und dem Bezugspol (Treffpunkt) *T* nahe:

$$\varphi = \psi_P^T - \Delta\varphi.$$

Die Aufgabe ist,  $\psi_P^T$  aus dem Kristallbau zu berechnen und  $\Delta\varphi$  experimentell zu messen.

Die Berechnung von  $\psi_P^T$  aus den Indizes der beteiligten Ebenen ist elementar und läßt sich am schnellsten auf einem Schnitt durch die beiden Polrichtungen ablesen. Man findet z. B. für das bereits vorhin besprochene Treffen zweier Pyramidenwürfelreflexe (042), (024) im Rhombendodekaederpol (022) aus dem Schnitt Abb. 13

$$\cos \psi_{042}^{022} = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

demnach

$$\psi_{042}^{022} = 18^\circ 26' 05,8''$$

und für das zweite Beispiel, das Treffen der (331)-Reflexe im Oktaederpol:

$$\cos \psi_{133}^{111} = \frac{7}{\sqrt{3 \cdot 19}}$$

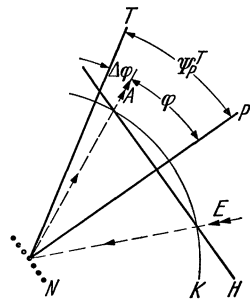


Abb. 24. Zur Kompensationsmethode.



also 
$$\psi_{331}^{111} = \arccos \frac{7}{\sqrt{57}} = 22^\circ 00' 06,3''.$$

Zu diesen vom Kristallbau exakt gegebenen Winkeln ist also der gemessene kleine Abweichungswinkel  $\Delta\varphi$  zu addieren und die BRAGGSche Gleichung anzuwenden:

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{2}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} \cdot \cos(\psi_{PT} + \Delta\varphi).$$

Die Einfachheit, in der die trigonometrischen Funktionen des Vergleichswinkels gegeben sind, gibt einer Reihenentwicklung für  $\lambda/a$  eine besonders einfache Gestalt. In der Entwicklung

$$\cos(\psi_{PT} + \Delta\varphi) = \cos\psi_{PT} - \sin\psi_{PT}\Delta\varphi - \frac{\cos\psi_{PT}}{2!}\Delta\varphi^2 + \frac{\sin\psi_{PT}}{3!}\Delta\varphi^3 + \dots$$

sind ja  $\sin\psi_{PT}$  und  $\cos\psi_{PT}$  einfache Funktionen ganzer Zahlen.

So gilt im ersten betrachteten Beispiel

$$\sin\psi_{042}^{022} = \frac{1}{\sqrt{10}} \quad \text{und} \quad \cos\psi_{042}^{022} = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

also die Reihe:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{a} &= \frac{2}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2}} \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}} \cos\left(\arccos \frac{3}{\sqrt{10}} + \Delta\varphi\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{50}} \left\{ 3 - \Delta\varphi - \frac{3}{2}\Delta\varphi^2 + \frac{1}{6}\Delta\varphi^3 + \frac{1}{8}\Delta\varphi^4 - \dots \right\} \end{aligned}$$

Praktisch kann man im Bereich der  $\Delta\varphi$  bis zu einem Bogengrad nach dem Glied mit  $\Delta\varphi^3$  abbrechen, wenn 6 Stellen ermittelt werden sollen.

Die Aufgabe,  $\Delta\varphi$  zu messen, bedeutet wegen seiner Kleinheit nur eine einfache Streckenmessung. Man liest z. B. auf der in  $D=200$  mm vom bestrahlten Kristallpunkt aufgenommenen Abb. 20 den Abstand der  $\{420\}$ -Bögen im Scheitel zu  $(5,5 \pm 0,1)$  mm ab. Aus dieser dem doppelten Abstand eines Bogens

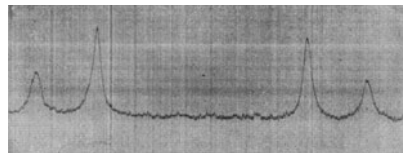


Abb. 25. Zur Ausmessung des Restwinkels in der Kompensationsmethode. (VAN BERGEN.) Auf die Hälfte verkleinert.

vom Treffpunkt entsprechenden Strecke folgt  $\Delta\varphi = 47,4' \pm 1,5'$ . So weit reicht, bei sehr vorsichtigem Urteil, die Beobachtung mit dem Auge, die die Lage des Maximums der Schwärzung in der Linie nicht auf weniger als  $0,1$  mm festzulegen vermag. Das registrierende Mikrophotometer, das den ganzen Schwärzungsberg eingehend abbildet, kommt hier auf  $0,01$  mm. VAN BERGEN (19) hat damit kürzlich die hier betrachtete Begegnung ausgemessen; Abb. 25 zeigt, wie in solcher Photometerkurve die beiden Dubletts einander gegenüberreten. Er findet aus dem Abstand der beiden mittleren Maxima den Restwinkel zu:

$$\Delta\varphi = 47' 26,7'' \pm 7''.$$

Damit wird der BRAGGSche Winkel

$$\varphi = 17^\circ 38' 39'' \pm 7''.$$

Als Mittelwert von 13 auf 20° C reduzierten Beobachtungen findet VAN BERGEN:

$$\lambda/a = 0,426\ 162 \pm 0,000\ 005.$$

Nimmt man WENNERLÖFs (22) Wert für CuK $\alpha$  an, das als Normale gilt:

$$\lambda = 1537,395\ \text{XE},$$

so folgt für die Gitterkonstante des Kupfers bei 20° C

$$a = 3607,53 \pm 0,04\ \text{XE},$$

wobei noch die Brechungskorrektion mit + 0,095 XE berücksichtigt ist.

Man erreicht also auf dem neuen Weg Präzisionsmessung. Einige andere Werte der letzten Zeit sind [vgl. VI, S. 552]

OWEN und YATES (1933) . . . . . 3607,7<sub>5</sub> ± 0,2 XE (18° C)

NEUBURGER (Zusammenfassung 1933) . . . 3608,0 ± 0,5

STRAUMANIS und MELLIS (1935) . . . . . 3607,5 ± 0,5<sup>1</sup>

Abb. 26 veranschaulicht noch einmal das Wesen der Meßmethode als Null- oder Kompensationsmethode, bei der der BRAGGSche Winkel

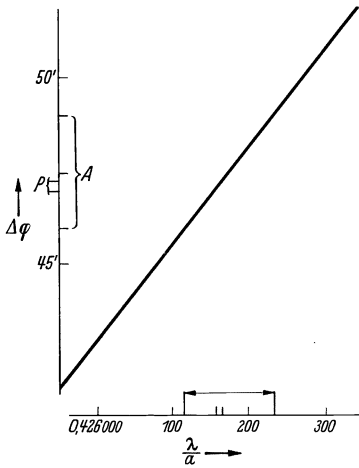


Abb. 26.

bis auf einen kleinen Rest gegen den Winkel im Kristall ausgewogen wird, indem sie in dem Bereich, über den die Beobachtungen von  $\Delta\varphi$  streuen, den Verlauf von  $\Delta\varphi$  mit  $\lambda/a$  gibt. (*A* Fehlerspanne für Ablesung mit dem Auge, *P* für Beobachtung mit dem registrierenden Mikrophotometer.) Solch graphische Darstellung ist während des praktischen Messens sehr brauchbar, um Fehlerstreuung, Temperatureinfluß u. dgl. zu beurteilen. Man sieht, wie die Messung sich nur noch um die Stellen von der vierten Dezimale an dreht.

Die hier angestellten Überlegungen beruhen auf den Beziehungen im Reflexsystem, haben also nichts damit zu tun, auf welchem Wege man die Reflexe erzeugt. Während die Gitterquellen das System vollständig geben, hat Zustrahlung von außen den Vorzug, viel kontrastreicher zu arbeiten, da der Untergrund fehlt. Man muß natürlich Fälle wählen, die für sämtliche beteiligten Reflexe die Zustrahlung von außen erlauben und wird sich auf geradzählige Koinzidenzen beschränken, um von einer Zustrahlrichtung zur anderen durch Drehen um eine Achse übergehen zu können. Die erste Bedingung — man muß in Abb. 21 sowohl  $E_1$  wie  $E_2$  von außen auf den Kristall geben können, — beschränkt die Winkel  $\varphi$

<sup>1</sup> Zwischen 0,3 und 0,8 XE.

für massive Kristalle auf Werte unter  $45^\circ$ . Das bedeutet keinen Nachteil, da man ohnehin wegen hoher Wellenlängenempfindlichkeit enge Kegel — hohe Indizes — aufsuchen wird. Die schon erwähnte Beobachtung von VAN BERGEN an den Scheiteln von (420) ist so durchgeführt. Der austretende Strahl war eng vor dem Kristall durch einen Spalt von 0,05 bzw. 0,1 mm Breite definiert, wie dies SIEGBAHN und LARSSON in ihren bekannten Präzisionsmessungen getan haben. Das Verfahren kommt der Umkehr des SIEGBAHNSchen „Umlegeverfahrens“ im Röntgenspektrometer systematisch ganz nahe — nur ist bei jenem der Winkel nicht im Kristallbau gegeben, sondern wird willkürlich durch Schwenken des Kristalls gegen den Strahl hergestellt und an einem Präzisionskreis abgelesen. Hier hat man nicht die Möglichkeit, diesen Winkel *willkürlich* so einzustellen, daß ein kleines, gut meßbares  $\Delta\varphi$  resultiert, da man an die Ebenenlagen im Kristall gebunden ist. Dafür ist der Winkel von vornherein bekannt, ein Präzisionsteilkreis für große Winkel wird nicht angewandt, und die große Zahl der Schnitte erlaubt praktisch stets, enge Annäherungen zu finden.

*Messung an der Aufnahme allein.* Bei diesen Messungen ist noch nötig,  $\Delta\varphi$  zu beobachten, es bleibt also noch immer eine Messung außerhalb der Platte vorzunehmen, nämlich den Abstand  $D$  vom Kristall zu beobachten. Das ist praktisch kein Nachteil mehr, weil der Restwinkel so klein ist, daß  $D$  längst genau genug beobachtet werden kann. Grundsätzlich aber — und für etwaige größere  $\Delta\varphi$  und weitere Steigerung der Genauigkeit auch praktisch — ist natürlich das Ideal, die Verhältniszahl, auf die es ankommt, völlig durch Längenmessung *einer* Art, also auf der Platte allein, zu ermitteln. Man möchte die außen liegende Länge, die in den gewohnten Methoden vom Spektrometerarm oder vom Radius der DEBYE-SCHERRER-Kammer gegeben ist, ganz vermeiden. Das vollständige Reflexsystem erlaubt einen solchen Weg. Man kann von der mehrfachen Periodizität des Raumgitters noch ein zweites Mal Gebrauch machen. Wir fassen noch einen zweiten Abstand auf der Platte ins Auge, der sich mit  $\lambda/a$  entgegengesetzt ändert wie der erste. In der Aufnahme Abb. 20 möge außer dem schon behandelten Scheitelabstand (042) und (024) noch der Abstand von (133) und ( $\bar{1}$ 33) in der [1 $\bar{1}$ 0]-Zone (auf der vertikalen Mittellinie) benutzt werden. Da jeder Reflex sich mit fallender Wellenlänge nach der konvexen Seite verlagert, wird der erste Abstand sich verkleinern, der zweite vergrößern. Das Verhältnis der beiden Abstände ist also eine Funktion von  $\lambda/a$ , die ein sehr empfindliches Mittel zur Messung von  $\lambda/a$  bedeutet, da diese beiden die wellenlängenempfindlichsten Reflexe des Systems sind. Zu ihrem Gebrauch bedarf man nur noch der Platte selbst.

Das rechnerische Verfahren ist nach dem vorher entwickelten selbstverständlich und ebenso einfach zu handhaben. Man trägt schließlich wiederum die beobachtete Größe, jetzt das auf der Aufnahme abzulesende Streckenverhältnis als  $f(\lambda/a)$  auf. In Abb. 27 ist das Verhältnis des

Abstandes der Scheitel von (331) vom Oktaederpol zu dem Abstand der Scheitel von (220) (in der Druckwiedergabe Abb. 22 ist nur einer oben sichtbar) als  $f(\lambda/a)$  aufgetragen. Hier ist man sehr nahe an der Koinzidenz der (331) (Schnitt mit der Abszissenachse).

Aus dem bekannten Ausdehnungskoeffizienten des Cu folgt, daß  $\lambda/a$  schon bei  $130^\circ\text{C}$  so weit verkleinert ist, daß das Dreieck der (331) Bögen auf den Treffpunkt zusammenschrumpft. Aus der wirklichen

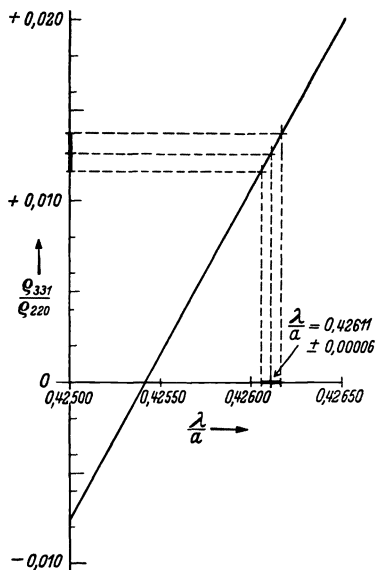


Abb. 27. Zur Messung von  $\lambda/a$  aus Streckenverhältnissen auf der Aufnahme.

Lage der hochempfindlichen Bögen folgt, daß die Temperatur in dem von den Kathodenstrahlen bombardierten Kristallteil, in dem sie entstehen, nicht um mehr als  $20^\circ$  über die Zimmertemperatur hinausging.

Man könnte daran denken, die Genauigkeit noch weiter zu treiben, indem man etwas über die Koinzidenz hinausliegende Fälle benutzt und den mit dem Vorrücken der Bögen sehr rasch wachsenden, also sehr wellenlängenempfindlichen Abstand der Schnittpunkte als  $f(\lambda/a)$  gebraucht. So häufig indes derartige Zweiecke in den Bildern sind, so führt doch dieser naheliegende Gedanke praktisch nicht über die Scheitelbeobachtung hinaus. In so flachen Schnitten wächst die Unsicherheit über die Lage des Maximums mit der Länge, auf der die beiden Linien einander durchdringen, also

genau im selben Maß wie die Wellenlängenempfindlichkeit (Dispersion in Winkleinheiten). Da hier auch die Linienstruktur eingreift, ist es klarer, die beiden getrennt vor sich zu sehen und quer durchzuphotometrieren. RENNINGER hat in einer eben erschienenen Arbeit (23) einen ähnlichen Fall zur Gitterkonstantenbestimmung am Diamanten mit Cu-Strahlung benutzt und ist der oben angeführten Größenordnung der Genauigkeit nahegekommen. (Die Unsicherheit ist bei ihm etwa 2—3mal so groß. Das Verfahren gehört in die oben geschilderte Klasse, in der nur Verhältnisse ermittelt werden, also die Apparatkonstante des Abstandes vom Kristall nicht eingeht.) Ohne Zweifel wird man sie bei genauerer Ausmessung erreichen können. Ob allerdings, wie RENNINGER annimmt, damit weiterzukommen ist, als mit der Beobachtung quer zu den Linien, dürfte zweifelhaft sein und dies scheint durch die bei RENNINGER angegebenen Winkelgenauigkeiten bestätigt zu werden.

**15. Mehrfachreflexe.** Die bisher lediglich nach ihrer Lage betrachteten Schnittpunkte bedeuten zugleich die Einleitung eigenartiger Vorgänge.

Auf der Kugel bezeichnen die leeren Flächen die Richtungen, in denen ein Strahl geradeaus durch den Kristall fortläuft und allein bleibt, die einfachen Kurvenpunkte die Richtungen, in denen ihm eine Reflexionsrichtung zugehört, die man als Gegenüber auf demselben Kreis, mittels eines Großkreises durch seinen Pol, findet. In den Schnittpunkten aber hat man auf *jedem* der sich schneidenden Kreise ein solches Gegenüber und so spaltet die Bewegung nun in drei Strahlen auf.

Das hat zur Folge, daß in einem Reflexionsversuch, bei dem man in der Absicht, nur eine Netzebene zu benutzen, einen solchen Punkt passiert, der reflektierte Strahl plötzlich geschwächt erscheint, da eine zweite Netzebene mitarbeitet und ein zweiter reflektierter Strahl mit Energie beschickt werden muß. In dem mit einer Netzebene entworfenen Spektrum entstehen so die von WAGNER (24) und BERG (25) beobachteten „Aufhellungslinien“ [vgl. auch (26)]. Diese Erscheinung führt bereits vor Augen, daß die Beziehungen im Reflexsystem nicht allein für geometrische Fragen von Bedeutung sind, daß auch Intensitätsfragen nicht behandelt werden können, ohne die Mannigfaltigkeit des Reflexsystems zu beachten.

Gegenüber einem Schnittpunkt findet sich nun auf dem Reflexkreis vielfach wieder ein Schnittpunkt und so spalten die durch Reflexion entstandenen Strahlen weiter auf, wobei aber verschiedene Wege wieder zusammenführen. Abb. 28 erläutert, wieso aus einer Einfallsrichtung vier gleichberechtigte Strahlen entstehen können, bei denen es dann bleibt, indem sie über die verschiedensten Netzebenen weg einander immer wieder gegenseitig entstehen lassen. Hier ist als Einfallspunkt ein Schnittpunkt benutzt, in dem sogar drei Kreise sich treffen [Dreier-schnitt, hier (200), (022), (222)].

Die dynamische Theorie der Röntgeninterferenzen (v. LAUE, EWALD) hat stets mit Sorgfalt darauf hingewiesen, daß grundsätzlich mit dem Gedanken zu beginnen sei, daß jeder Strahlrichtung im Kristallinneren eine unendlich große Zahl von Partnern zugehöre und daß die Hervorhebung eines oder mehrerer „reflektierter“ nur eine Intensitätsfrage sei. Die Intensität wird im Schema der EWALDSchen Konstruktion danach beurteilt, wie nah die — durch Dispersion modifizierte — Ausbreitungskugel an die Gitterpunkte herankommt, die die einzelnen Reflexionen repräsentieren. Ein Mehrfachreflex ist dann dadurch gegeben, daß die Ausbreitungskugel an verschiedenen Stellen eng an Gitterpunkten vorbeipassiert.

In der Darstellung des ganzen Reflexsystems auf der Kugel um den Ursprung, bei der man sich nicht an eine einzelne Strahlrichtung

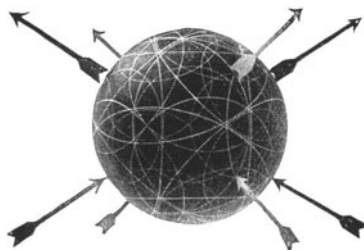


Abb. 28.  
Aufspalten und Wiederausfinden  
bei Mehrfachreflex.

bindet, sieht man, daß die Mehrfachreflexe nicht Angelegenheit einzelner Richtungen, sondern durch die Schnitte der Hilfsebenen bestimmt sind. Deren Lage auf der Kugel ändert sich freilich mit deren Radius, so daß die Richtung, in der man den Mehrfachreflex findet, stetig mit der Wellenlänge sich verschiebt. Die Mehrfachreflexe selbst und die Beziehungen zwischen ihnen sind aber einfach eine Angelegenheit des Hilfsebenensystems, d. h. der Kristallsymmetrie. Die Wellenlänge spielt für die Beziehungen nur insofern eine Rolle, als sie klein genug sein muß, um den betreffenden Ebenenschnitt überhaupt mit der Kugel zu erreichen,

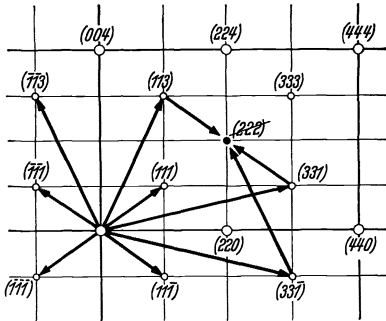


Abb. 29. Beziehungen von Reflexen im Diamantgitter.

also den Schnitt erscheinen zu lassen, oder in einer bestimmten Klasse von Fällen gerade den bestimmten Wert haben muß, der die Kugel durch eine bestimmte Kante oder Ecke des Systems hindurchführt.

Die Aufspaltung und Wiedervereinigung von Strahlen ist also aus der Symmetrie des Hilfsebenensystems herzuleiten. Wenn ein Strahl auf dem Umweg über mehrere Reflexionen in die ursprüngliche Richtung zurückkehrt, so ist die geometrische Summe der ihm zugeführten

Impulse Null. Das Polygon der beteiligten Impulspeile führt auf den Nullpunkt zurück. Man vermag also manche Frage schon einfach mit dem System der Impulse allein, dem reziproken Gitter, zu erledigen. Drei Pfeile im Impulsgitter des Kristalls bilden immer dann einen geschlossenen Zug, wenn sie Translationsvektoren des Gitters sind. Gehört ein Pfeil indes der Basis an, so kann seine geometrische Addition zu einem zweiten auf einen Punkt führen, der nicht Endpunkt eines dritten erlaubten Vektors ist. Dann hat in den beiden Kreisen der Reflexe 1 und 2 ihr Schnittpunkt als Gegenüber nur einen einfachen Kurvenpunkt, die Aufspaltung führt nicht weiter.

Wir erläutern an einem Fall, den RENNIGER kürzlich mit Fragen von weitreichender Bedeutung verknüpft hat. Abb. 29 zeigt den Flächen-diagonalschnitt (Abb. 14 entsprechend) durch das reziproke Gitter des Diamants. Es ist ein Gitter mit Basis: die Wiederholung von  $(111)$  z. B. führt nicht auf einen besetzten Gitterpunkt, da der Reflex  $(222)$  verboten ist. In dieser Richtung kann erst  $(444)$  als Translationspfeil gelten. Die Abb. 29 zeigt, daß die Addition zweier an sich erlaubter, aber der Basis angehörender Reflexe, wie  $(331) + (\bar{1}\bar{1}\bar{1})$  oder  $(113) + (1\bar{1}\bar{1})$  oder  $(33\bar{1}) + (\bar{1}\bar{1}3)$  auf den Punkt  $(222)$  führt, der selbst nicht Endpunkt eines erlaubten Vektors vom Nullpunkt her ist. Es ist daher nicht möglich, die Folge  $(331) + (\bar{1}\bar{1}\bar{1})$  mit  $(222)$  fortzusetzen oder im Reflexsystem haben die Schnittpunkte von  $(331)$  mit  $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$  in den

beiden Kreisen keinen Schnittpunkt sich gegenüber, denn  $(222)$ , das ihn bilden könnte, ist verboten. Abb. 30 zeigt das von RENNINGER für Cu-K $\alpha$  an Diamant gezeichnete Reflexsystem. Da die Gitterkonstante des Diamanten mit  $a = 3,56$  AE der des Kupfers mit  $a = 3,61$  AE sehr nahesteht, stehen sich auch die Systeme sehr nahe: man erkennt

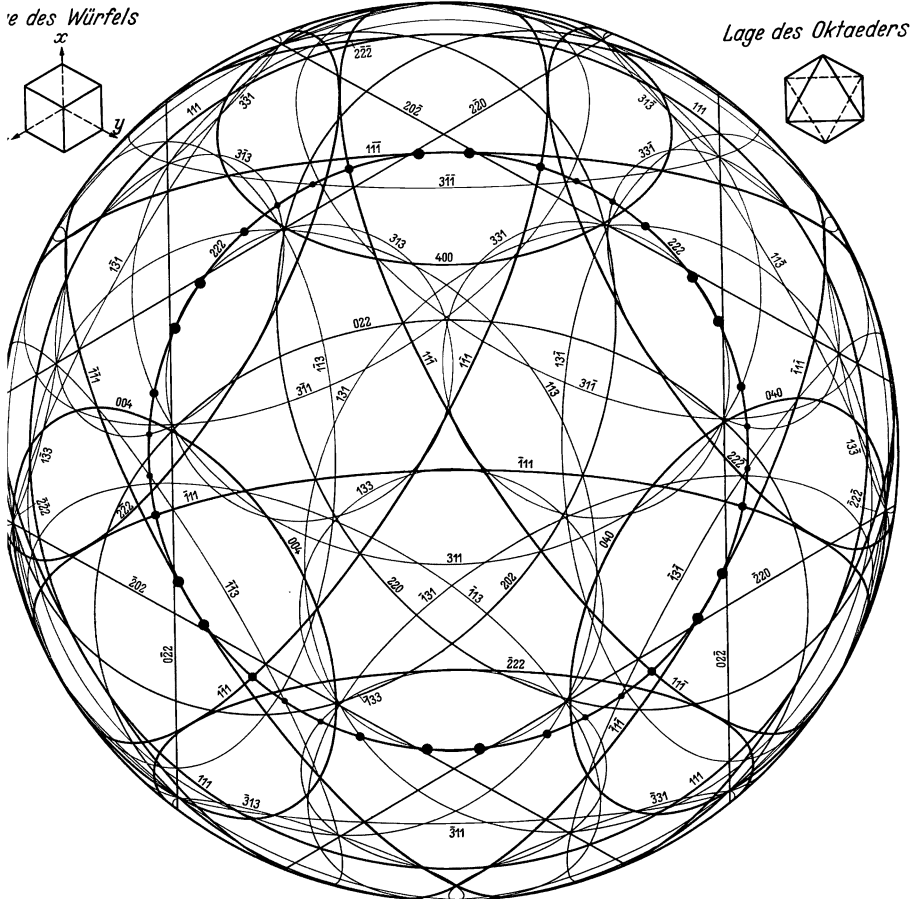


Abb. 30. Vollständiges Reflexsystem des Diamanten für Cu-K $\alpha$  (RENNINGER).

z. B. in der Mitte dieser Ansicht vom Oktaederpol das oben besprochene, in Abb. 5 und 22 photographierte Dreieck der  $\{111\}$ -Reflexe mit den durchquerenden  $\{331\}$ -Bögen, die hier, da  $\lambda/\alpha$  ein wenig größer ist, noch ein wenig weiter vom Mittelpunkt entfernt bleiben als dort. Wegen der Auslöschungsbedingungen fehlen noch einige Reflexe mehr als im flächenzentrierten Gitter.  $(222)$ , das zu diesen verbotenen gehört, ist indes ausdrücklich noch eingetragen, und auf dem den Mittelpunkt umgebenden Kreis sind eine Reihe von Schnitten mit anderen

Reflexen durch dicke Punkte hervorgehoben. Es sind die, die den oben besprochenen Fällen entsprechen. Nimmt man  $(222)$  weg, wie es sich im strengen Diamantgitter gehört, so fallen die Schnittpunkte weg und damit liegen nun z. B. Schnitten von  $(33\bar{1})$  mit  $(\bar{1}\bar{1}\bar{3})$  nur noch einfache Kurvenpunkte gegenüber.

**16. Umwegreflexe; Einfluß auf Intensitätsfragen.** An diesem Beispiel des Diamantgitters hat RENNINGER in der erwähnten, soeben erschienenen Arbeit eine sehr wichtige praktische Wirkung der hintereinander geschalteten Reflexe aufgedeckt. Er zeigt, daß sie ganz erheblich in Intensitätsbeobachtungen eingreifen können, wie man sie zur Beurteilung von Ladungsverteilungen in Kristallen anstellt. Es handelt sich um das Gegenspiel zu den Aufhellungslinien: während dort durch die Möglichkeit der mehrfachen Wege Energie an erwarteter Stelle ausfiel, tritt hier im Gegenteil vermöge von Mehrfachreflexen Intensität an Stellen auf, wo sie durch unmittelbaren Reflex nicht hinzugelangen vermag.

Beispiele sind in dem schon bisher Betrachteten gegeben: die Hintereinanderschaltung von  $(33\bar{1}) + (\bar{1}\bar{1}\bar{1})$  gibt an den Kristall insgesamt einen Impuls ab, wie er unmittelbar bei der Reflexion  $(222)$  aufgenommen werden würde. Ein Strahl also, der so auf den Kristall eingeschossen wird, daß er nacheinander  $(33\bar{1})$  und  $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$  durchmacht, kommt in die Richtung, die er durch die verbotene Reflexion an  $(222)$  erhalten haben würde. Die Richtung, auf der diese Verkettung für die gerade vorliegende Wellenlänge möglich ist, findet man auf der dazugehörigen Kugel als Schnitt von  $(222)$  mit  $(33\bar{1})$ ; gegenüber auf dem Kreis für  $(222)$  liegt die Richtung, in der der Strahl über  $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$  wieder herauskommt. Die stark bezeichneten Punkte in Abb. 31 bezeichnen die Richtungen, in der solche Umwegreflexion möglich ist. Dreht man den Kristall, während er auf den BRAGGSchen Winkel für  $(222)$  eingestellt ist, um die Normale zur Oktaederfläche, so wandern die Fälle der Scheinreflexion an  $(222)$  nacheinander durch und eine Registrierung der reflektierten Intensität während eines Umlaufs ergibt die Abb. 31, in der jedes Maximum einem der Punkte auf dem Kreis in Abb. 30 entspricht.

Das praktische Interesse an diesem Vorgang hängt im Beispiel des Diamants daran, daß der verbotene  $(222)$ -Reflex in der Tat mit sicher nachweisbarer Intensität auftritt, daß also die streuenden Ladungen nicht in Kugelsymmetrie um die Atomkerne konzentriert sein können. So ergab sich die Möglichkeit, hier eine besondere Ladungsanhäufung längs der Verbindungslinien von Atom zu Atom im Spiele zu sehen. Diese Linien sind im Diamantgitter tetraedrisch verteilt, wie es seit KEKULÉ allgemein für die Kohlenstoffbindungen angenommen wird, so daß eine Messung der Ladungsverteilung auf ihnen eine Angelegenheit von sehr weit reichendem Interesse ist.



Die hierzu nötige Intensitätsmessung an dem ohnehin schwachen (222)-Reflex wird durch die Möglichkeit der Scheinreflexe sehr gefährdet. Anfänglich machte sich dies durch starke Streuung der beobachteten Werte geltend, und als RENNINGER auf die Natur dieser Erscheinung aufmerksam geworden war und die Stellungen mit Umwegreflexen vermied, erhielt er für den Strukturfaktor der (222)-Reflexion, den man mit der erwähnten tetraedrischen Ladungsverteilung in Zusammenhang bringt, die Hälfte des früher angenommenen Wertes.

Wie bedenklich das wirken kann, geht daraus hervor, daß RENNINGER bei Anwendung der kürzerwelligen Molybdänstrahlung, mit der man zuerst

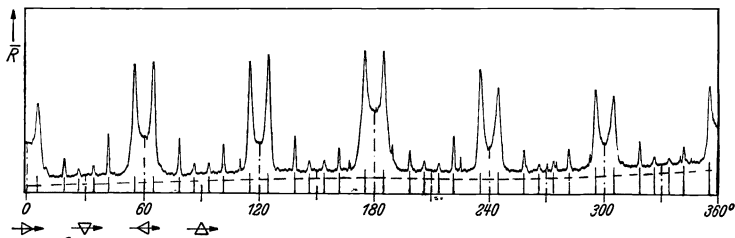


Abb. 31. Intensität der (222)-Reflexion am Diamant als Funktion des Azimuts. (RENNINGER.)

auf endliche Intensität des (222) gekommen war, eine so dichte Folge von Umwegmaximis findet, daß „ein kontinuierlicher Untergrund der Kurve, der das normale (222)-Reflexionsvermögen bezeichnen würde, nirgends mehr erkennbar ist“! Demnach geht er so weit, zu sagen, daß mit Mo-Strahlung überhaupt nicht sicher entscheidbar sei, ob ein eigentlicher (222)-Reflex existiere oder nicht. Daß die Messungen mit Cu-Strahlung, bei der die Kugel des Reflexsystems noch so leer ist, daß störungsfreie Bereiche eingestellt werden können, ihn dann doch noch ergibt, wird jetzt von RENNINGER erst als eigentlicher, nach Aufdeckung der Täuschungsmöglichkeiten überraschender Beweis seiner Existenz angesehen.

Die Arbeit bringt ferner den Versuch, die relative Bedeutung von Auslöschungs- und Umwegerscheinungen mit Hilfe vereinfachter theoretischer Ansätze zu beurteilen.

### III. Die Struktur der Gitterquellen-Interferenzen.

#### A. Experimentelle Ergebnisse.

17. Umfang des beobachteten Auftretens. a) *Die untersuchten Stoffe.* Es war vorauszusehen, daß mittlere Atomgewichte die meiste Aussicht boten, die Erscheinung zu finden. Leichte Atome können sie überhaupt nicht ergeben, weil auch ihre härtesten Eigenstrahlen, die K-Serienlinien, zu große Wellenlängen haben, um noch ins Gitter zu passen. Die ersten Möglichkeiten liegen in der Gegend des Cl; so kann in NaCl,

dessen größter Netzebenenabstand  $3,2 \text{ \AA}$  ist, Na mit  $= 11,9 \text{ \AA}$  noch keinen, Cl mit  $4,7 \text{ \AA}$  aber schon zwei Reflexe [(111) und (200)] ergeben. Nach großen Atomgewichten zu aber werden die Aussichten wieder ungünstig, weil die Höhe der Eigenlinien über dem Untergrund herabgeht. Vor allem nimmt die Erhebung der Linien über das weiße Spektrum bei Kathodenstrahlanregung mit wachsender Ordnungszahl ab. Demnach bot jene mittlere Gegend etwa von der Eisengruppe aufwärts die besten Aussichten, zum Teil aus denselben Gründen, aus denen

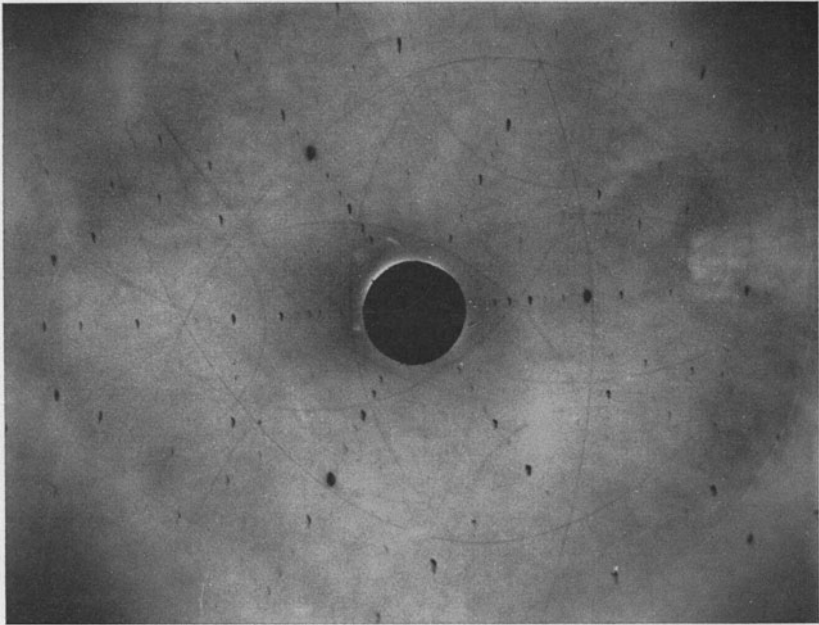


Abb. 32. Magnetit; Übersichtsaufnahme (wie Abb. 7). (BORRMANN.)

BARKLA in seinen klassischen Versuchen die Röntgenspektren der Elemente gerade in dieser Gegend entdeckt hat.

Die Versuche gelangen zuerst an Cu, bei dem wegen guter Wärmeleitfähigkeit und hohen Schmelzpunktes am wenigsten eine Herabsetzung der Intensität durch Erwärmung unter der Wirkung der Kathodenstrahlen zu fürchten war. Cu blieb auch das bevorzugte, am genauesten untersuchte Material. BORRMANN prüfte systematisch eine Reihe von Stoffen, die aussichtsreich schienen, mit Röntgenstrahlen und fand den Effekt bei den folgenden, die hier nach wachsender Ordnungszahl des aktiven — die Röntgenlinien liefernden — Elements geordnet sind:

Cr, Fe,  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  (Magnetit),  $\text{FeS}_2$  (Pyrit), Cu, Zn, ZnS (Zinkblende), KBr,  $\text{SrCO}_3$  (Strontianit), Ag.

Zur Kathodenstrahlanregung sind bisher Cu, Zn, Cu<sub>2</sub>O (Cuprit), und — als einzige Beobachtung der Interferenzen mit L-Strahlen — W angewendet [VOGES (21)].

Es sind also Elemente des Bereiches von  $Z = 24$  bis  $Z = 47$ , die bisher als Quellen im Kristall positive Ergebnisse geliefert haben. Dazu kommt das Element der Ordnungszahl 74, dessen L-Strahlung in den gleichen Wellenbereich fällt wie die K-Strahlung der anderen.

*b. Vollständigkeit des Systems.* Wir ordnen wieder nach steigendem Atomgewicht. Magnetit zeigt (800), das als Kreis links auf Abb. 32 erscheint und schon in dieser starken Krümmung zeigt, daß es an der oberen Grenze der überhaupt möglichen Reflexe liegt. Ebenso sind in Cu auch die höchsten Reflexe (331) und (420) vorhanden und viel benutzt (Abb. 22 u. 20), bei Zn (30 $\bar{3}$ 2), das nach Konstruktion (Abb. 23) und Aussehen wiederum der höchst mögliche ist. Hier ist demnach das Reflexsystem überall vollständig in der Beobachtung wiedergegeben.

Was bei höheren Atomgewichten, also weiter fallenden Wellenlängen hinzutritt, ist von höherer Reflexordnung und damit in der Intensität immer stärker benachteiligt gegenüber den zuerst aufgetretenen Reflexen. Da zugleich diese schwächeren höheren Ordnungen in gewaltiger Fülle durcheinander laufen, wird die Aussicht, sie einzeln abgezeichnet zu sehen, immer geringer. So zeigen sich nicht mehr die stark gekrümmten oder gar in ganzen Kreisen verlaufenden Spuren, die den gerade eben erst möglichen Reflexen zukommen, sondern schon bei Silber — wie BORRMANN (20) beobachtet hat — nur noch langgestreckte, schwach gekrümmte Bögen, bis schließlich bei  $\lambda/a$  unter 0,1 nur die ganz flachen Hyperbeln bleiben, die in den DETERMANNschen Aufnahmen zu sehen sind.

**18. Zeichnung.** Auch wenn erst wenige Reflexe vorhanden sind, besteht natürlich der allgemeine Untergrund, der von der nach allen Seiten aus dem angeregten Fleck des Kristalls nach vorne laufende Strahlung gebildet wird. Dieser Untergrund erschwert natürlich den Nachweis der Reflexe, da sie sich als Zusatz zu einer schon beträchtlichen Intensität geltend machen müssen. Aber es wäre verkehrt, dies einfach als Nachteil gegenüber den Methoden der Zustrahlung von außen anzusehen, wie das auf den ersten Blick nahe liegt und auch gelegentlich im Schrifttum geäußert worden ist. Der Untergrund gehört vielmehr zur ganzen Erscheinung als ein notwendiger Teil, an dem Züge zu beobachten sind, die man nicht entbehren möchte. Denn nur, wenn dieser unmittelbar nach vorn gehende Anteil der Bewegung vorhanden ist, können sich Extinktionslinien zeigen, nur dann sind zwischen ihr und den erst durch Reflexion nach vorne gesteuerten Anteilen Interferenzen möglich.

Auf den Platten treten neben dunklen Bögen, die eine Erhöhung der Intensität bedeuten, auch hell gezeichnete auf, die zeigen, daß hier gerade in den Richtungen, die der BRAGGSchen Bedingung gehorchen,

an der nach vorn gerichteten Strahlung etwas fehlt. Diese Erscheinung, die Extinktion, die bedeutet, daß hier die durch Reflexion in eine andere Richtung gesteuerte Energie ausfällt, ist von Versuchen mit Außenquellen wohlbekannt. Sie kommt in den Gitterquellen-Aufnahmen regelmäßig da zu Stande, wo die Wege aus dem Kristall heraus für die in der Tiefe entstandene Strahlung lang werden. Das ist stets am Rand der Fall, wo die Strahlung aus dem angeregten Fleck die Kristalloberfläche sehr schräg durchsetzt und schließlich streifend verlassen muß, wie Abb. 33 vor Augen führt, und es ist stärker der Fall bei Anregung mit Röntgenstrahlen wie bei der mit Kathodenstrahlen, denn bei der ersten

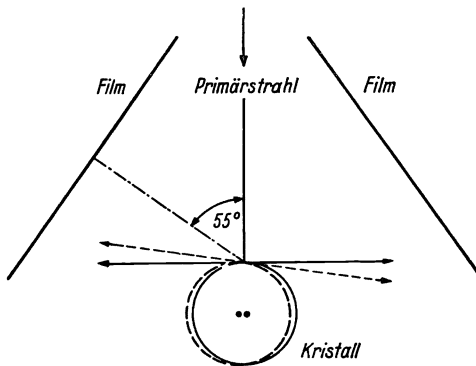


Abb. 33.

greift die Anregung weit tiefer. Die Tiefe der mitarbeitenden Quellen ist hier — da die anregende Strahlung weit härter ist als die Eigenstrahlung — praktisch durch die Reichweite der letzteren bestimmt, das sind im Fall des Cu etwa  $20 \mu$ . Die Kathodenstrahlen erreichen nur ein oder wenige  $\mu$ . Daher spielt dort das Hellwerden eine weit geringere Rolle. Erst Strahlen, die unter  $6^\circ$  und weniger

gegen die Oberfläche austreten, werden durchweg hell (VIII). Für Röntgenstrahlung liegt dieser Grenzwinkel schon bei etwa  $17^\circ$  (VII). Das zeigt, daß wirklich die Tiefenlage der Quellen maßgebend ist.

Bögen, die von der Mitte zum Rand durchlaufen, zeigen unterweg einen Umschlag von dunkel zu hell, oder, da sie für gröbere Betrachtung ein Stück weit zu verschwinden scheinen, eine „Nullstelle“. Die Abb. 7, 32, 34, 35 führen dies vor Augen, besonders zeigt Abb. 35, wie auch dies wieder von der Neigung gegen die Oberfläche abhängt. Der Kristall (Kupfereinkristallkugel) wird zunächst genau am Würfelpol angeregt, während zwei Filme rechts und links den benachbarten Oktaederpolen gegenüberstehen (Abb. 33). Man erhält links Aufnahme 34. Wird die Kristallkugel mit sich selbst parallel zur Seite gerückt (punktierte Lage), so wird sie etwas außerhalb des Würfelpols getroffen (punktierte Tangentialebene), so daß die Neigung gegen die Oberfläche an korrespondierenden Punkten rechts und links verschieden ist. Man findet, Abb. 35, daß die Nullstellen auf den Bögen um denselben Winkel verschoben sind, wie Anregepunkt und Tangentialebene. Zugleich zeigen die Bilder, daß nicht etwa alle Linien zugleich hell werden. Der obengenannte Grenzwinkel bezeichnet das Gebiet, in dem nur noch helle vorhanden sind (die letzten umschlagenden sind hier die starken I I I-Bögen).

In den Aufnahmen mit sehr harter Bremsstrahlung (Abb. 18) bilden die Extinktionslinien (hier dunkel wiedergegeben) den schärfsten Anteil der Zeichnung, was geometrisch leicht verständlich ist.

### 19. Linienbreite; Mosaikeinfluß.

Die beobachtete Linienbreite ist zunächst, wie eingangs besprochen, von der Breite des Brennflecks gegeben. Diese wurde bald auf wenige zehntel Millimeter gedrückt, so daß die Winkelgrößen der eigentlichen, von Wellenlängenspanne der Linie und Totalreflexionsbreite des Kristalls bestimmten Linienstruktur erreichbar wurden. Vor diesen vermag natürlich, wie von den Ausstrahlungsmethoden geläufig, Mosaikstruktur störend einzugreifen.

Sie machte sich auch bei Gitterquellen im gleichen Sinn geltend wie dort; abnorme Gesamtintensität [vgl. (II), Abb. 3 und 4] und abnorme Breite gehen Hand in Hand. BORRMANN (VII) hat ihren Einfluß systematisch untersucht, indem er z. B. einen Kupferkristall durch geeignetes Schmirgeln oberflächlich störte und dann durch Ätzen Schritt um Schritt abtrug. Dem

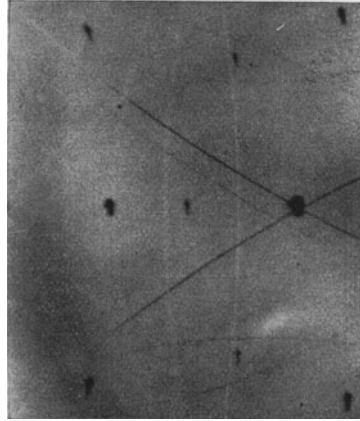


Abb. 34. Anregung im Würfelpol selbst, linker Film. Kristall aufgeraut.

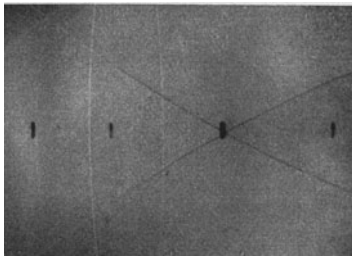


Abb. 35a.

Abb. 35a und b. Anregung etwas rechts vom Würfelpol (Abb. 33). a der linke, b der rechte Film. Kristall ungestört.

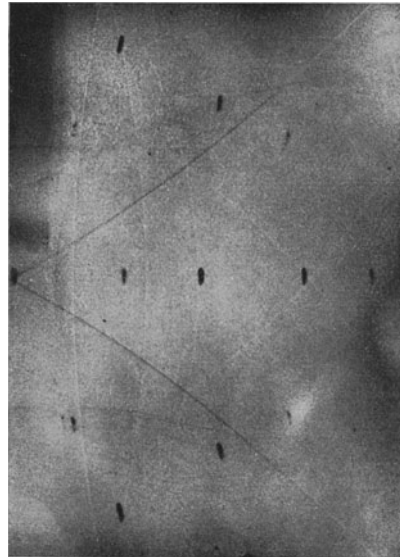


Abb. 35b.

anfänglichen DEBYE-SCHERRER-Bild folgen auf diesem Weg in die Tiefe zunächst (0,08 mm)

vergrößerte LAUE-Flecke und während diese weiterhin mit Abnahme der Störung bis zur Grenze am ungestörten Kristall herabgingen, tauchten die Eigenstrahlungsbögen auf, wurden stärker und von

etwa 0,17—0,2 mm wieder schwächer. Abb. 7 und Abb. 34 sind an solchen, bis zu optimalen Tiefe abgeätzten „aufgerauten“ Kristallen beobachtet, während unter der letzteren Abb. 35 die schwächeren und schärferen Linien des ungestörten Kristalls zeigt. Es ist — wegen der Aussichten für theoretische Überlegungen, die spezielle Oberflächenbedingungen ins Spiel bringen — bemerkenswert, daß die Lage der Umschlagstellen durch das Aufrauen nicht merklich beeinflußt wird.

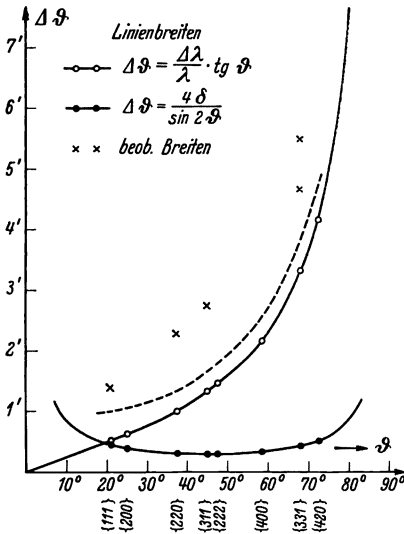


Abb. 36. Zum Aufbau der Linienbreite. (Voges.)

Die Mosaikwirkung kann also durchaus brauchbar sein, um an einem Kristall die Bögen ein erstes Mal aufzuspüren oder gegebene möglichst deutlich vorzuführen.

Bei sorgfältigem Suchen an gut behandeltem Material kommt man andererseits sogar bei dem überaus weichen Kupfer auf Kristallstellen, deren Bilder der theoretischen Breite so nahekommen, als nur zu erwarten ist. Schon frühzeitig wurde beobachtet (II), daß die schärfsten Bögen, in 70 cm Abstand aufgenommen, nur 0,2 mm breit erschienen, was 1' Winkelbreite entspricht. Halbwertbreite und Totalreflexionsbreite ergaben hier schon Winkelöffnungen von je einer halben Minute.

VOGES ist dem systematisch nachgegangen (VIII), Abb. 36 verfolgt die an Photometerkurven beobachteten Linienbreiten und die theoretischen Komponenten der Breite durch die Reflexionsordnungen. Die experimentellen Werte liegen in etwa konstantem Abstand über denen, die von dem endlichen Wellenlängenumfang der Spektrallinie bestimmt sind, der in den höheren Ordnungen mit wachsender Dispersion immer breiter abgebildet wird. Schon in den Aufnahmen selbst sieht man überall diese Abstufung der Breite mit der Ordnung des Reflexes. Dieser Anteil ist überall größer als der von der Totalreflexion herrührende, obwohl jener — um 20'' — in dem elektronenreichen Kupfer erheblich höher ist, als in den bekannten Beispielen von Diamant oder Steinsalz. In dem Überschuß des experimentellen über den theoretischen Wert ist noch die Brennfleckbreite und der Einfluß von Mosaikfehlern enthalten. Da die erste bereits einen konstanten Wert von der Größe des beobachteten Zusatzes liefert, kann ein etwaiger Beitrag von Mosaikwirkung nur einen kleinen Bruchteil der Linienbreite ausmachen, vor allem bei den höheren Ordnungen. Die gute Reproduzierbarkeit dieser und der weiter unten zu betrachtenden Feinstrukturen, die sich einstellt, wenn sorgfältig gewählte Kristall-

stellen benutzt werden, bestätigt, daß man über die Zufälligkeiten, die eine von Punkt zu Punkt wechselnde Mosaikstruktur in die Bilder hineintrüge, mit Sicherheit hinauszukommen vermag.

Die Behandlung des Materials ist wichtig. Cu, das nach HAUSSER und SCHOLZ (28) im Graphittiegel gezüchtet ist, soll bei der Entstehung und beim Transport möglichst wenig erschüttert werden. Die für die Präzisionsbeobachtung bestimmten Stücke wurden rein chemisch, durch Angriff von Salpetersäure, abgeschnitten.

Bis vor einiger Zeit galt die Ansicht, daß manche Stoffe notwendig Mosaik bildeten. Dem ausgezeichneten Bau des Diamanten wurde etwa Steinsalz als „typischer Mosaikkristall“ gegenübergestellt. Theoretische Versuche, die eine „Hyperstruktur“ (ein Abbrechen des idealen Gitters nach einer Reihe von Atomabständen) als notwendig hinstellten, korrespondierten damit. Diese Meinung ist auch noch den Gitterquellenversuchen entgegengehalten worden, in Überlegungen, die zeigen wollten, daß sie gegenüber den Beobachtungsweisen, die die Strahlen von außen auf den Kristall senden, nichts Neues ergeben könnten [SEEMANN (29)]. In diesem Punkt wurde angenommen, daß ein kohärentes Zusammenwirken der von einer Gitterquelle nach verschiedenen Richtungen ausgehenden Bewegungen auszuschließen sei, weil es sich um einen typischen Mosaikkristall handele, in dem kein ungestörter Bereich zu finden sei, dessen Größe für diesen Zweck ausreiche. Wir wissen indessen schon seit RENNINGERS (30) eindrucksvollen Versuchen an dem früheren „typischen Mosaikkristall“ Steinsalz, daß diese Vorstellung nicht zutrifft. EWALD und RENNINGER (31) haben besonders betont, wie bedenklich es ist, den Begriff Mosaik ohne quantitative Kenntnis des einzelnen Objekts anzuwenden.

Der Zustand des sorgfältig behandelten Cu-Kristalls entspricht offenbar dem, den RENNINGER am künstlichen vorsichtig behandelten Steinsalzkristall fand: Er ist aus Blöcken („Kristalliten“) zusammengesetzt, deren Gitter dem Idealbau sehr nahekommt und die gegeneinander um Minuten verkantet sind. Die Ausdehnung der Kristalliten fanden BORRMANN (VII, S. 674) und VAN BERGEN (19) in den Zehnteln bis zu einem Millimeter.

**20. Feinstruktur der Abbildung (Helldunkellinien).** Es zeigt sich bald, daß außer den einfach dunklen und einfach hellen Bögen, die man nach dem Vergleich mit Außenstrahlung ohne weiteres als Wirkung von Reflexion und Extinktion deutet, in den Gitterquellenaufnahmen eigenartige Bögen auftreten, deren eine Seite dunkler, deren andere heller als der Untergrund ist. Wir nannten diese Feinstrukturen „Helldunkellinien“. Sie haben nichts mit dem Bau der Spektrallinie zu tun, sondern stammen vom Vorgang im Kristall. Stets ist die helle Seite, die mit verminderter Intensität, die konvexe, kurzweilige Seite des Bogens, also die Außenseite des Reflexkegels. Die Helldunkelwirkung zeigt sich in allen Abstufungen.

An (111) des Cu kann sie so stark sein, daß sie bei geringem Auflösungsvermögen das  $\alpha$ -Dublet völlig zudeckt. Bei ganz schwacher Äußerung erscheint sie nur noch als ungewöhnlich steiler Abstieg der kurzwelligen Seite einer dunklen Linie. Am stärksten und häufigsten wird sie an den

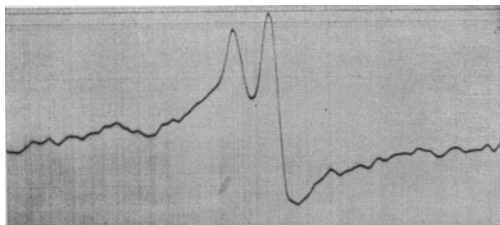


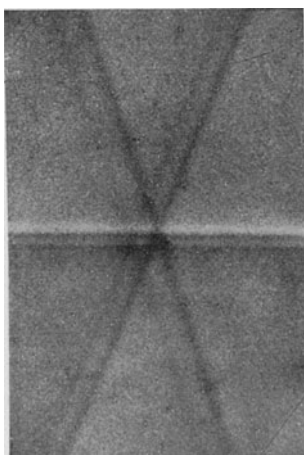
Abb. 37. Helldunkeleffekt, symmetrischer BRAGG-Fall, Netzebene parallel Oberfläche, Reflex (200) bei Anregung am Pol von (100). [VOGES (VIII).]

am niedrigsten indizierten Reflexen beobachtet; erst allmählich gelang es Schritt um Schritt Fälle an immer höheren aufzufinden. Mit Röntgenanregung und mit Kathodenanregung im BRAGG-Fall (s. 22) ist sie nur bei den niedersten Reflexen beobachtet, im LAUE-Fall auch bei den höchsten,

falls die reflektierende Netzebene zur Oberfläche senkrecht steht (VOGES).

Da jeder Deutungsversuch sich auf Interferenzüberlegungen aufbauen muß, ist augenscheinlich wichtig, die exakte Lage der Feinstruktur zu

wissen. Auf den ersten Blick könnte man daran denken, daß neben dem normalen dunklen Reflex eine Absorptionslinie auftauche. Hier können wieder die Koinzidenzbeziehungen zur Lagebestimmung dienen. Wie oben ausgeführt, sind die Schnitte von Linien grundsätzlich Sache der Kristallstruktur — nur ihre Lage hängt von der



(220) (311)  
Abb. 38.

(111) Wellenlänge ab. Sie sind gegeben durch die Schnittgeraden der Hilfsebenen. In einer solchen können sich auch drei Ebenen schneiden (die Spitzen der drei  $\rho$ -Pfeile liegen dann auf einem Kreis mit dem Ursprung) — dann treffen sich auf der Kugel und auf der Aufnahme drei Kurven in einem Punkt. Solche „Dreierschnitte“, die nicht selten sind (sie hängen an einfachen Beziehungen zwischen den not-

wendig einer Zone angehörenden Ebenen), sind hier sehr nützlich. Zwei normale dunkle Reflexe bilden ein Fadenkreuz, das den Ort festlegt, wo der dritte hindurchgehen hat, wenn er normal ist. Bei Helldunkellinien findet man stets das in Abb. 38 vor Augen geführte Bild: Der Schnittpunkt des Fadenkreuzes trifft nicht die dunkle Linie, sondern den Übergang oder sogar den hellen Bereich. Dieser letztere begleitet also nicht einseitig die normale Reflexionslinie; die Interferenzerscheinung des Helldunkeleffektes nimmt vielmehr das Gebiet ein, auf dem sich bei normaler Außenreflexion die dunkle Linie zu zeigen hätte.



Diese Lage ist selbstverständlich in den besonderen Fällen, in denen die Helldunkelstruktur im Verlauf eines *Strukturwechsels* längs eines Bogens auftritt. Der Umschlag von hell zu dunkel, den die aus dem Gebiet streifenden Austritts zur Mitte laufenden Bögen zeigen, ist in allen gut beobachtbaren, nicht mosaikverdächtigen, Fällen keine „Nullstelle“ — die Linie bleibt vielmehr erhalten, zeigt aber Helldunkelstruktur. Die von der Mitte kommende Linie wird, auch wenn sie anfänglich rein dunkel war, durch einen an ihrem Rand auftretenden hellen Saum allmählich völlig aufgezehrt. Auch dieser Übergang ist also durch primitive Überlegungen über die Tiefe der einzelnen Quellen und die Änderung der Absorptionsstrecke mit der Neigung gegen die Oberfläche nicht zu erschöpfen. Solch einfache Intensitätssummierung könnte nur eine einfache Linie ergeben, die als Ganzes durch einen Punkt des Verschwindens von hell zu dunkel übergeht. Hier ist ohne Interferenzüberlegungen nicht auszukommen. Das zeigt sich noch mehr darin, daß der Strukturwechsel mit dem Übergang in dem einen Sinn nicht erschöpft zu sein braucht: im Verlauf vom Rande her zur Mitte kann der Wechsel hell-helldunkel-dunkel noch durch einen erneuten Übergang zu helldunkel fortgesetzt werden und der gleiche Wechsel läßt sich an festgehaltener Stelle des Reflexsystems verfolgen, wenn man die Neigung der Oberfläche ändert (VIII, S. 714).

**21. Intensitätsstufen im Untergrund.** Schon beim einfachen Anblick von Aufnahmen wie Abb. 5 fällt auf, daß sie in verschiedenen dunkel getönte Felder zerfallen, die durch starke Reflexbogen von-

einander getrennt sind. Besonders deutlich treten sie an Kreuzungen hervor, da der Kontrast zwischen den Scheitelwinkeln der doppelte ist wie an der Einzelkurve (Abb. 39). Diese Intensitätsstufen des Untergrundes liegen stets in gleichem Sinn: Das dunkle Feld ist auf der konkaven Seite des Bogens. Sie schließen also dem Sinn nach an einen etwaigen Helldunkeleffekt an, treten aber auch ohne ihn auf. Abb. 40 zeigt die Photometerkurve einer Stufe mit Helldunkelwirkung. Starke Stufen verhindern, wie man sieht, ein sicheres Urteil über die wahre Intensität

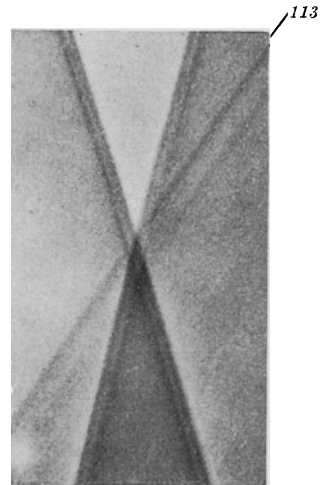


Abb. 39. Intensitätsstufen im Untergrund. Cu (21).

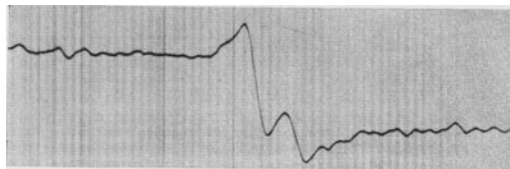


Abb. 40. Helldunkeleffekt und Intensitätsstufe. Symmetrischer LAUE-Fall, Netzebene senkrecht zur Oberfläche, (002)-Reflex bei Anregung am Pol von (100).

einer Linie. Es ist noch nicht geklärt, wie sie zu Stande kommen. Die seltsame Einseitigkeit und die große Entfernung von der Linie, über die sich diese Wirkung erstreckt, machen sie auffallend und interessant. Die oben angeführte Regel über ihren Sinn hat zur Folge, daß zwischen einem Bogen und seinem Partner von der anderen Seite der Netzebene, die einander die konvexen Seiten zukehren, ein helleres Gebiet eingeschlossen ist. Solche zwischen komplementäre Linien eingeschlossene hellere — oder auch dunklere — Streifen kennt man von Elektroneninterferenzen. Es sind die „KIKUCHI-Bänder“, die eigenartigerweise auch in Fällen, wo die Linienzeichnung aus Symmetriegründen schwach ist, bestehen, dann um so auffallender erscheinen, und theoretisch ebenfalls noch nicht geklärt sind [v. LAUE (39)]. Man darf vermuten, daß die beiden Phänomene auf analoge Ursachen zurückgehen.

## B. Theoretische Überlegungen.

22. Zur Systematik der Strahlengänge. Es ist üblich, die Einzelfälle nach der Richtung von Ein- und Austritt aus dem Kristallkörper in zwei Klassen zu ordnen:

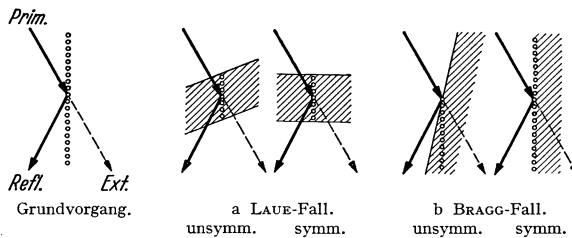


Abb. 41. Zur Systematik der Strahlengänge im Kristallkörper.

a) LAUE-Fall (bei LAUE; „Fall I“). Die beiden Strahlen verlaufen auf verschiedenen Seiten des Kristallkörpers („innere Reflexion“). Spezialfall: Die Oberflächen stehen senkrecht zur Netzebene („symmetrischer LAUE-Fall“).

b) BRAGG-Fall (bei LAUE: „Fall II“). Die beiden Strahlen verlaufen auf derselben Seite des Kristallkörpers. Spezialfall: Die Oberfläche ist der reflektierenden Netzebene parallel („symmetrischer BRAGG-Fall“).

Der Unterschied ist nicht etwa bloß formal; geht man der dauernden Wechselwirkung zwischen den Wellenfeldern nach, so wird von entscheidender Bedeutung, ob beide in den Kristallkörper hinein vordringen oder ob die eine der beiden Bewegungen wieder hinauszielt und demgemäß dauernd Energie nach außen führt. Nur im letzten Fall kommt es zu der einfachen Erschöpfung des einfallenden Strahls durch diese Zurücksteuerung des Energieflusses, zur reinen Form der Extinktion, während im ersteren die Wechselwirkungen der in die Tiefe wandernden

Bewegungen sich fortspinnen und — ideales Gitter und ungedämpfte Welle vorausgesetzt — zum Hin- und Herwandern der Energie zwischen ihnen führen können (EWALDs „Pendellösung“), so daß bei bestimmten Tiefen wieder rein die einfallende Bewegung vorhanden wäre.

Den beiden vorigen Fällen entsprechend gibt es zwei Verfahren, die die Strahlung einer Außenquelle in weiter Öffnung auf den Kristall senden und so Reflexe an verschiedenen Netzebenen zugleich erhalten („Weitwinkelverfahren“).

a) RUTHERFORD-ANDRADE-Verfahren [1914 (32)]. LAUE-Fall. Quelle und Film auf verschiedenen Seiten des Kristalls (Abb. 41a). Unter dem Interferenzwinkel werden einfallende Strahlen im Durchgang geschwächt, ergeben helle Spuren auf dem Film; die dabei reflektierte Intensität verstärkt an anderen Stellen den durch die direkte Strahlung gegebenen Untergrund — dunkle Spuren. Extinktions- und Reflexionslinien bilden zwei Paare. In jedem von ihnen hängt der Linienabstand vom Abstand Quelle-Kristall ab und sollte verschwinden, wenn die Quelle eng an den Kristall heranrückt oder in ihn hineinfällt. Hier überlagern sich also Extinktions- und Reflexionslinie. Im symmetrischen LAUE-Fall — wie in der Abbildung gezeichnet — sollten Energiegewinn und -verlust auf beiden Seiten gleich groß sein, die Linien also verschwinden. Im unsymmetrischen LAUE-Fall (Netzebene geneigt) sind die Wege durch den Kristallkörper an den korrespondierenden Punkten verschieden lang, in einen Paar wird die Reflexion, im anderen die Extinktion stärker, beim Zusammenrücken wird auf der einen Seite der Überschuß, auf der anderen der Verlust überwiegen: man behält eine helle und eine dunkle Linie, die komplementär liegen, nämlich der Reflexion an den beiden Seiten der Netzebene entsprechend (VII, VIII). Was hier durch ungleiche Länge der Wege zustande kommt, ähnelt im Aussehen also dem, was an den KIKUCHISchen Elektronen-Interferenzen dadurch entsteht, daß im Elektronenbündel die Intensität mit wachsender Neigung gegen die Einfallrichtung abnimmt.

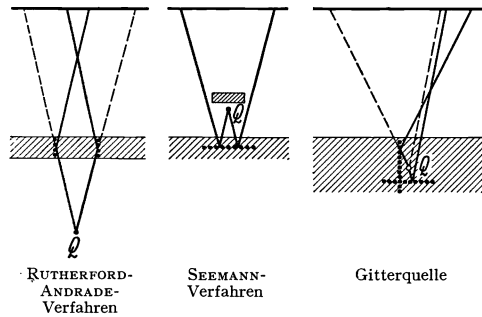


Abb. 42. Vergleich der geometrischen Züge der Verfahren mit Außenquelle und der Vorgänge mit Gitterquelle.

b) SEEMANNsche Anordnung [1917, 1930 (33)]. BRAGG-Fall. Quelle und Film auf der gleichen Seite des Kristalls (Abb. 41b). Da die Quelle in Richtung zum Film abgeschirmt werden kann, ergeben sich sehr kontrastreiche Aufnahmen. Wegen des endlichen Abstandes ergeben sich verwickelte, von SEEMANN eingehend besprochene Bilder aus Kurven höheren Grades, die mit Änderung des Abstandes durcheinanderrücken. SEEMANN

bemerkt bereits, daß ein nahes Herangehen der Quelle an die Kristallfläche die Kurven zu solchen zweiten Grades vereinfachen sollte.

Die Methoden mit Außenquelle ergeben um so reichhaltigere Bilder, je größer der Kegel der Einfallrichtungen wird. Der günstigste Fall würde erreicht, wenn man die Quelle unmittelbar an den Kristall rückte; dann ständen alle Einfallrichtungen aus einem Halbraum zur Verfügung. In diesem Grenzfall ergäbe die RUTHERFORD-ANDRADE-Methode die LAUE-Fälle in Reflexion und Extinktion, die BRAGG-Fälle in Extinktion; die SEEMANN-Methode ergäbe, was dort fehlt: die BRAGG-Fälle in Reflexion. Grundsätzlich erhielt man also durch enges Heranrücken

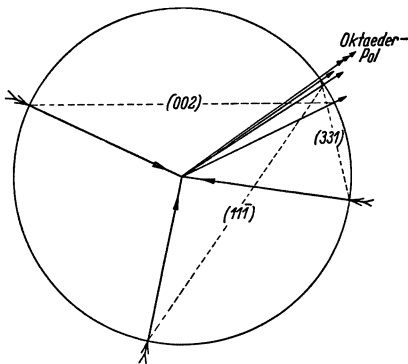


Abb. 43.

einer sehr kleinen Quelle an den Kristall und Aufstellen von Filmen auf beiden Seiten bereits eine sehr große Annäherung an das vollständige System, wenn man die beiden Bilder in eines zusammenzeichnete.

Quellen, die im Kristall selbst liegen, senden ihre Strahlen nach allen Richtungen gleichförmig durch das Gitter und geben das vollständige System. Abb. 43 führt vor Augen, wie auf engstem Raum — es sind nur die in Abb. 5 und 22 nahe unter dem Oktaederpol durchlaufenden Re-

flexe gezeichnet — Strahlen aus den verschiedensten Richtungen zusammenkommen. Hier ist  $(002)$  symmetrischer BRAGG-Fall,  $(331)$  und  $(11\bar{1})$  sind LAUE-Fälle, der erstere steht dem symmetrischen nahe. So ist Vollständigkeit aller Einfallrichtungen nötig, um auch in engem Gebiet das System vollständig zu erhalten — etwa alle Koinzidenzen zu beobachten. Quelle und Spiegel fallen zusammen, und da die Ausdehnung der Quelle gegen die Beobachtungsabstände zu vernachlässigen ist, hat man praktisch eine Punktquelle, die Kreiskegel liefert, das reine homozentrische System der BRAGGSchen Richtungen, dessen Konstruktion in Teil II behandelt wurde.

**23. Reflexion und Extinktion.** Die Intensität einer Gitterquellenlinie ist stets Ergebnis von Reflexion und Extinktion zugleich. Man kann sie indes natürlich nicht einfach durch Intensitätssummierung erhalten. Die Teilvorgänge stammen ja nicht wie unter der Außenquelle von verschiedenen Orten im Kristall. Man hat das Ergebnis eines einheitlichen Vorgangs im Kristalliten nahe der Quelle.

Das empfindlichste Anzeigemittel sind hier die symmetrischen LAUE-Fälle. Sie stellen eine Nullmethode vor; hat man reine Intensitätssummierung, so verschwindet die Linie (22).

Regt man am Würfelpol der Kristallkugel an, so liegt von den Würfelnetzebenen eine der Oberfläche parallel, die anderen stehen senkrecht

auf ihr. Die eine gibt also symmetrischen BRAGG-Fall, die anderen symmetrische LAUE-Fälle. Abb. 33 zeigt an, wie Strahl und Filme stehen, wenn am Würfelpol angeregt und der um den Oktaederpol gelegene Teil des Reflexsystems aufgenommen wird. So sind die Bilder 5, 22, 34, 35 erhalten.

Der BRAGG-Fall-Reflex ist als (002) gezählt, die LAUE-Fälle heißen hier (020) und (200). Auf sie kommt es an. Im Kathodenstrahlenbild (Abb. 5, 22), das mit sehr feiner Blende aufgenommen ist, stehen sie als kräftige Helldunkellinien, im Röntgenstrahlenbild des ungestörten Kristalls (Abb. 35) äußerst schwach, im Bild des Kristalls, der durch Aufrauhren soweit zu Mosaik gemacht ist, daß die reinen Reflexlinien möglichst intensiv herauskommen (Abb. 34), fehlen sie gänzlich. In der Tat muß, wenn das Kristallgefüge in genügend kleine Einzelschollen zerrissen ist, auch die innerhalb des Gefüges liegende Quelle den Nachbarschollen gegenüber als „Außenquelle“ wirken. Es kann keine Kohärenz der Sekundärbewegungen mehr erwartet werden, man hat einfach Intensitäten zu summieren — Fall des „idealen Mosaiks“ — und das gibt hier Null. Ist aber der Kristall in gutem Zustande, so erhält man eine kräftige Interferenzerscheinung. Abb. 40, die schon die Intensitätsstufe im Untergrund veranschaulicht, zeigt solch symmetrischen LAUE-Fall — „(200)“ des eben betrachteten Beispiels. Aus Symmetriegründen muß natürlich im symmetrischen LAUE-Fall der Energieüberschuß über den Untergrund *im ganzen* verschwinden. Allein dies braucht nicht Punkt um Punkt zu geschehen, wie die primitive Intensitätsüberlagerung ergeben würde, sondern ist auch zu erfüllen, wenn verstärkte und verringerte Intensitäten nebeneinander auftreten. Da andererseits eine hier auftretende Linie nur eine solche in sich kompensierte Helldunkelstruktur sein *kann*, liegt hier das empfindlichste Mittel, diese spezifische Interferenzerscheinung der Gitterquelle nachzuweisen.

Die Wirkung der Extinktion auf den ungleichen Strahlwegen *unsymmetrischer* Fälle haben BORRMANN (VII, § II) und VOGES (VIII, § 6) eingehender betrachtet.

Der LAUE-Fall bedeutet, daß das Material von hinten durchstrahlt wird, die Quelle muß in endlicher Tiefe liegen, reine Oberflächenquellen könnten aus dem Liniensystem nur die BRAGG-Fälle (ein SEEMANN-Diagramm) zeigen. Nun dringen die hier verwandten Kathodenstrahlen in Kupfer nur bis zu einer mittleren Tiefe von  $1\ \mu$ , und hier entstehen auch die K-Linien, deren Interferenzen wir beobachten, denn man weiß, daß sie zu  $\frac{7}{8}$  ihrer Intensität unmittelbar durch den Elektroneneinschlag ins Atom, nur zu  $\frac{1}{8}$  durch Fluoreszenz aus der weißen Strahlung entstehen [BEATTY, STODDARD (34)]. Vor diesen Quellen liegt also nur  $\frac{1}{1000}$  mm Materialdicke und das genügt, um einen so starken Anteil der Intensität umzusteuern, daß die LAUE-Fälle mindestens eben so intensiv erscheinen wie die BRAGG-Fälle, bei denen der Strahl zunächst in die Tiefe läuft und dort einer praktisch unbegrenzten Zahl von Netzebenen

begegnet. Das ist eine einfache Demonstration für die Stärke der dynamischen Umsteuerung an den Netzebenen, die zuerst DARWIN erkannte (II, § 4).

In der Tat ist hier die mittlere Extinktionstiefe, aus dem Brechungsindex berechnet, nur  $1,15 \mu$ . (Die reine Absorption ergibt eine mittlere Eindringtiefe von  $22 \mu$ .)

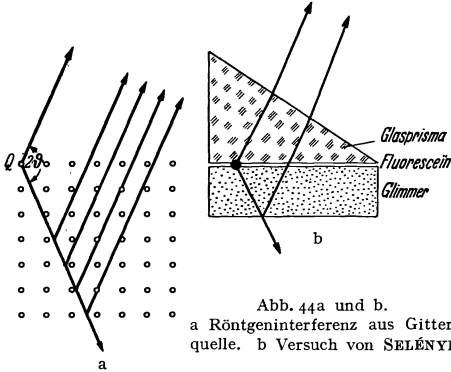


Abb. 44a und b.  
a Röntgeninterferenz aus Gitterquelle. b Versuch von SELÉNYI.

**24. Elementare Deutung der Feinstruktur.** Abb. 44a zeigt zunächst den Vorgang, den man bei der elementaren Behandlung der Röntgeninterferenzen zu betrachten pflegt: Ein Primärstrahl (von links oben) durchsetzt den Kristall, an den Netzebenen werden Sekundärbewegungen abgespalten. Nur die Phasenbeziehung dieser Sekundärbewegungen

untereinander kommt für die gewohnte Überlegung ins Spiel. Sie besteht auf Grund der Tatsache, daß sie alle aus *einem* Primärstrahl stammen. Von der Phasenbeziehung zu diesem selbst ist nicht die Rede — sie spielt für das Ergebnis keine Rolle und bleibt daher experimentell unbekannt. Das neue Element ist, daß nun die Quelle der Primärbewegung

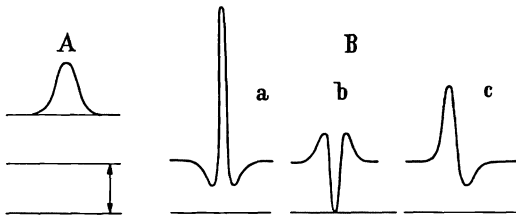


Abb. 45. Zur Überlagerung von Primärbewegung und Reflex.

selbst im Gitter sitzt und diese Bewegung nach allen Seiten, auch in Richtung der Sekundärwellen, sendet. Was bei der Überlagerung der beiden an dieser Stelle herauskommt, wird von der Phasenbeziehung zwischen ihnen bestimmt sein. Diese ist definiert, denn jede solche Quelle

sitzt in einem Gitterpunkt und hat also genau dieselben Lagenbeziehungen zu den streuenden, die Sekundärwellen liefernden Nachbaratomen wie eine andere. Um zu übersehen, was bei der Überlagerung zu erwarten ist, muß man sich erinnern, daß innerhalb des scharfen Interferenzmaximums der Sekundärwellen die Phase eine Änderung um  $2\pi$  durchmacht. Gewöhnlich spricht man davon nicht, weil man sich nur für die Intensitätsverteilung interessiert, es pflegt auch gewöhnlich gar kein Anhaltspunkt da zu sein, an dem man die Phase und ihre Verteilung abmessen könnte. Hier aber wird die Primärbewegung überlagert. In dem einfachsten Fall, den wir zur Entwicklung des Grundsätzlichen in der Figur angenommen haben — wenn die Quelle frei nach außen strahlen kann —, wird die Phase der Primärbewegung vom Winkel praktisch

unabhängig sein (Kugelwelle). Abb. 45 deutet übereinander das vom Reflex gelieferte Maximum und den winkelunabhängigen Primärbeitrag, den Untergrund, an. Bestände keine feste Phasenbeziehung zwischen den beiden, so wären die beiden Intensitätskurven einfach zu addieren, man fände auf dem dunklen Untergrund eine dunklere Linie. Besteht Phasenbeziehung, so wird die Phasendifferenz zwischen den Teilnehmern die Spanne  $2\pi$  durchlaufen, es gibt mindestens einen Punkt, wo sie übereinstimmen und einen, wo sie einander entgegenarbeiten, also ein Maximum und ein Minimum: eine Feinstruktur, die teils erhöhte Schwärzung, teils Aufhellung dem Untergrund gegenüber bringt, muß sich zeigen. Rechts sind die Ergebnisse für die drei bezeichnenden Fälle angedeutet, daß die Phasen in der Mitte des Maximums übereinstimmen, entgegen sind, um  $\pi/2$  verschoben sind. Der letzte Fall gibt die grösste Struktur, die am ehesten zu erkennen sein muß, es ist eine Helldunkellinie. Sie entstand aus dem Reflexmaximum und nimmt also dessen Gebiet ein, wie man experimentell mit dem Dreierschnitt findet (20).

Demnach besteht Kohärenz über den Winkel  $2\theta$ . Am weitesten führen, wie oben ausgeführt, die symmetrischen LAUE-Fälle. Hier hat VOGES die Helldunkelstruktur kräftig bis zu (331) und (420) bekommen. Das letztere heißt, daß von einer elementaren Röntgenlichtquelle aus eine zusammenhängende Wellenbewegung sich über einen Winkel von mindestens  $144^\circ$  ausbreitet.

Der Versuch hat, so aufgefaßt, einen lichtoptischen Vorgänger, der von SELÉNYI (35) stammt und mit korrespondierendem Strahlenverlauf in Abb. 40 b aufgezeichnet ist. Hier interferiert die von einer dünnen Schicht von Lichtquellen unmittelbar nach oben gehende Strahlung mit der an der Unterseite des dünnen Glimmerblättchens reflektierten. Da der optische Spiegel unter allen Winkeln reflektiert, erhält man ein ausgedehntes Streifensystem. Das beweist die Kohärenz über so große Winkel im optischen Gebiet. Der Verf. hat immer den Eindruck gehabt, daß dieser Versuch von 1911, der in klassisch einfacher Form von einer der wichtigsten Eigenschaften einer Lichtquelle Auskunft gibt, in jeder etwas eingehenderen Darstellung der Optik angeführt werden sollte.

Wenn unser Schluß über die Grundzüge des Vorgangs zutrifft — und dem Verf. scheint es nicht möglich, ihm auszuweichen —, so gibt uns LAUES Entdeckung der Röntgeninterferenzen, die die beiden großen Forschungsgebiete der Röntgenspektren und der Gitterstrukturen erschlossen hat, noch über eine Frage anderer Art Auskunft: über die Struktur des Feldes der einzelnen atomistischen Lichtquelle. Das Gitter hat dabei eine neue Funktion: es lokalisiert die Lichtquelle auf einen Bruchteil der Wellenlänge genau, eine Aufgabe, die im optischen Analogon besonderer experimenteller Vorrichtung bedarf.

**25. v. LAUES Anwendung der dynamischen Theorie: Die Einführung des optischen Reziprozitätssatzes.** Der Frage, wie nun die schon so hoch entwickelte „dynamische“ Theorie der Interferenz-Wechselwirkungen

im Gitter den Fall der Gitterquelle anzugreifen habe, hat v. LAUE selbst sich sogleich angenommen (36, 37, 38).

Die größte Schwierigkeit einer Behandlung der Gitterquellenvorgänge scheint zunächst darin zu liegen, daß die Bewegung so nahe an der Quelle als Kugelwelle behandelt werden muß. Früher wurde alles mit ebenen Wellen gerechnet, wie es für Fernquellen zulässig war. Mit gewölbten Wellenflächen und einer mit  $1/r$  fallenden Amplitude scheint eine gewaltige Verwicklung der Rechnung — Übergang vom FRAUNHOFER- zum FRESNEL-Fall — notwendig zu werden.

v. LAUE zeigte durch eine vor allen Einzelheiten der dynamischen Theorie liegende Überlegung, daß dieser Eindruck unrichtig ist. In der MAXWELLSchen Theorie des Lichtes gilt ein (am eingehendsten von LORENTZ 1905 bewiesener) Reziprozitätssatz, der besagt, daß sich die Amplitude einer Welle nicht ändert, wenn man Quelle und Aufpunkt vertauscht. Das von einer Quelle  $Q$  in einem anderen Punkte  $P$  erzeugte Wellenfeld findet sich am bisherigen Ort der Quelle, wenn man sie selbst nach  $P$  rückt. Das heißt hier: die Ergebnisse, die man auf Grund der dynamischen Theorie für das von einer fernen Außenquelle irgendwo im Gitter erzeugte Feld erhielt, gelten ebenso für das Feld, das eine an dem bisherigen Beobachtungspunkt im Gitter liegende Quelle außerhalb des Kristalls, am Ort der bisherigen Quelle, erregt. Lag die Quelle fern genug, um im Kristall ebene Wellen zu ergeben, so stehen die dafür berechneten Ergebnisse ohne weiteres zur Verfügung, um die Intensität anzugeben, die eine Gitterquelle auf einem eben so fernen Film entstehen läßt. Ein ferner Auffänger bedeutet dieselbe Vereinfachung wie eine ferne Quelle. Da die Abstände, in denen man den Film aufstellt, stets sehr groß sind gegen die Kohärenzlänge, ist das Kugelwellenproblem überwunden.

Durch diese schlagende Überlegung — deren Voraussetzungen dieselben sind wie die der Streuungstheorie überhaupt, nämlich klassischer Elektromagnetismus und linearer Zusammenhang von Feld und Verschiebung — hat v. LAUE sofort den gesamten bisher entwickelten Apparat der dynamischen Theorie zur Verfügung. Die Aufgabe, mit ihr die Erregung anzugeben, die eine ferne Quelle inmitten der Netzebenen des Gitters ergibt, ist ihrer Natur nach dieselbe, der man vor dem Einzelspiegel begegnet, wo hinein- und zurücklaufende Bewegung die Knoten und Bäuche stehender Wellen bilden, die WIENER photographiert hat. v. LAUE entwickelt die Lage der Maxima und Minima, die sich aus dem verwickelten Wechselspiel zwischen den vielen schwach wirkenden Teilsiegeln ergeben, und findet, daß in dem engen Winkelgebiet des vollen Zusammenwirkens, der Totalreflexion, die Lage sich schnell verschiebt, so daß etwa im symmetrischen BRAGG-Fall die Atome der äußersten Netzebenen an der einen Grenze dieses Gebiets gerade ein Maximum der Erregung bekommen, an der anderen ein Minimum. Nach dem Reziprozitätssatz umgekehrt, heißt das, daß diese Atome der obersten Netz-



ebenen als Gitterquellen in der einen Grenzrichtung maximal ausstrahlen werden, nach der anderen gar nicht. Abb. 46 stellt den gesamten Intensitätsverlauf als Funktion des Einfallswinkels  $\varphi$  dar: ein Anstieg führt aus dem Untergrund zu dem erwähnten Maximum, dann stürzt im Totalreflexionsgebiet die Intensität zur Null und steigt jenseits wieder zum normalen Untergrund an. Wir haben also eine Helldunkellinie,

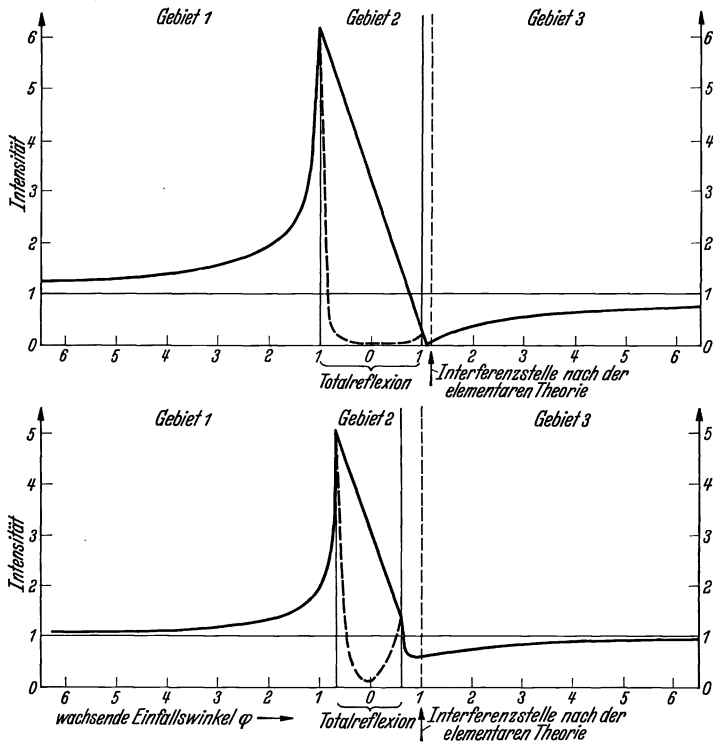


Abb. 46. Beispiel eines nach dem Reziprozitätssatz berechneten Intensitätsverlaufs nach v. LAUE.  $\text{CuK}\alpha$  in  $\text{Cu}$ , (200), symmetrischer BRAGG-Fall. Oben ist die elektrische Schwingung senkrecht zur Ebene der beiden Strahlen angenommen, unten parallel zu ihr.

die das Gebiet der normalen Reflexion einer von außen kommenden Bewegung einnimmt. Liegt die Quelle tiefer, so setzt in dem mittleren Gebiet, das beim Außenreflex die Totalreflexion zeigt, Extinktion ein und vermindert die Intensität, wobei aber das Maximum der einen Grenze nicht aufgehoben, sondern nur sehr eng zusammengedrängt wird (punktierter Verlauf). Das Ganze ist höchst befriedigend. Die vollständigeren Behandlung, die ja in ihrem Wesen dieselbe Überlagerung vorstellt, die oben elementar betrachtet wurde, bestätigt das elementare Ergebnis, verschärft es und bringt dabei weitere Züge zu Tage, die dem Experiment entsprechen: die helle Seite liegt *außen* am Kegel (große  $\varphi$ ), mit tieferer Quellenlage drängt die helle Seite die dunkle mehr und mehr

zurück, wie wir es oben für immer stärkere Neigung der Strahlen, längeren Strahlweg schilderten.

Qualitativ steht es also ausgezeichnet; der Umstand, daß Lage und Zusammenhang der Erscheinungen richtig dargestellt werden, ist der stärkste Hinweis dafür, daß der Grundgedanke zutrifft. In der LAUEschen Anwendung des klassischen Elektromagnetismus ist die Winkelkohärenz als Eigenschaft des klassischen HERTZschen Dipolfeldes eingeschlossen. Wir hoben sie oben hervor, weil die quantenhafte scharfe Gerichtetheit der einzelnen Energieübertragung, die dem klassischen Bilde widerspricht, im Röntgengebiet noch ungleich schärfer hervortritt als im optischen. So schien es wesentlich, darauf zu achten, daß in den Interferenzerscheinungen von einer Einschränkung auf enge Bündel wiederum nichts zu verspüren ist.

Daneben stehen ungeklärte Erscheinungen. Vor allem sind die Intensitätsstufen des Untergrundes unverständlich. LAUE nimmt an, daß hier eine mathematische Verbesserung in der Anwendung der dynamischen Theorie, eine bessere Näherung, nötig sein werde, und vermutet das gleiche für die Tatsache, daß die Theorie den Helligkeitsumschlag längs der Linien zwar für den BRAGG-Fall, nicht aber für den LAUE-Fall ergibt (39). Insbesondere hebt er hervor, daß noch nicht auf die an der Körperoberfläche herrschenden Grenzbedingungen geachtet ist, die z. B. bei geringer Eindringtiefe, bei Zurücktreten der Wirkungen des Inneren, zum Hervortreten der Kreuzgitterwirkungen des Oberflächennetzes zu führen haben. An Elektronenbeugungsaufnahmen weist er auf Erscheinungen hin, die geradezu eine Unterdrückung von Raumgitterwirkungen durch Flächengitterwirkung anzuzeigen scheinen (40). Diese selbst aber erinnert dort in den Bedingungen ihres Auftretens an die Anomalien, die WOOD an optischen Gittern beobachtet hat und die ebenfalls theoretisch noch nicht bewältigt sind. Demnach ist von mathematischer Arbeit auf dem Gebiet der klassischen dynamischen Theorie noch wesentliche Klärung zu erwarten.

**26. Grenzen der klassischen Behandlungsweise.** Man kann sich andererseits nicht des Eindrucks erwehren, daß dieser selbst hier physikalische Grenzen gesetzt sein müssen. Rein elektrodynamische Gründe führen dazu, daß ihre Annahme ungedämpfter harmonischer Wellenzüge, auf die sich das ganze Gitter bereits voll eingeschungen hat, hier nicht mehr ausreichen kann. Die mit  $\lambda^2$  proportionale Kohärenzlänge der klassischen Elektronendämpfung, die im Optischen noch nach Metern geht, fällt für  $\lambda = 1 \text{ \AA E}$  auf  $0,27 \mu$ , für  $\lambda = 0,1 \text{ \AA E}$  auf  $26,8 \text{ \AA E}$ . Das heißt, sie passiert gerade in der in den Versuchen vorkommenden Gegend die mit  $1/\lambda$  proportionale Extinktionstiefe, die die dynamische Theorie mit ungedämpften Wellen berechnet und die hier etwa  $1 \mu$  beträgt. Je kürzer die Wellenlänge, desto kleiner wird der tatsächlich zugleich von der Primärwelle erfaßte Bereich im Kristallkörper, während der Bereich kohärenter Zusammenarbeit, wie

man ihn mit ungedämpfter Welle berechnet, ansteigen sollte. Die Aufnahme der Bewegungsgröße durch das Gitter wird also Sache eines immer kleineren Bereichs und, da man sich über den meisten Eigenfrequenzen befindet, einer immer kleineren Zahl praktisch frei wirkender Elektronen. Eine Umbildung in Richtung auf die Impulsaufnahme durch ein Einzelelektron setzt ein und es ist befriedigend, daß dies vermöge Herabgehens der Kohärenz geschieht. So zeigen sich auch rein physikalische Gründe, um Abweichungen zwischen einfacher Gittertheorie und Beobachtung als möglich einzusehen.

#### Literaturverzeichnis.

Die ersten Arbeiten sind mit den römischen Ziffern angeführt, die in ihnen selbst gebraucht werden.

- I. KOSSEL, W., V. LOECK u. H. VOGES: *Z. Physik* **94**, 139 (1935).
- II. — u. H. VOGES: *Ann. Physik* (5) **23**, 677 (1935).
- III. BORRMANN, G.: *Naturwiss.* **23**, 591 (1935).
- IV. KOSSEL, W.: *Götting. Nachr., Math.-naturwiss. Kl.* **1**, 229 (1935).
- V. — *Ann. Physik* (5) **25**, 512 (1936).
- VI. — *Ann. Physik* (5) **26**, 533 (1936).
- VII. BORRMANN, G.: *Ann. Physik* (5) **27**, 669 (1936).
- VIII. VOGES, H.: *Ann. Physik* (5) **27**, 694 (1936).
9. KOSSEL, W.: *Z. Physik* **23**, 278 (1924).
10. CLARK, G. L. and W. DUANE: *Proc. nat. Acad. Sci. U.S.A.* **8**, 90 (1922); **9**, 126 (1923).
11. ARMSTRONG, ALICE H., W. DUANE and R. J. HAVIGHURST: *Proc. nat. Acad. Sci. U.S.A.* **11**, 218 (1925). — ALLISON, S. K.: *Proc. nat. Acad. Sci. U.S.A.* **12**, 143 (1926).
12. WEBER, A. P.: *Z. Physik* **33**, 767 (1925).
13. KULENKAMPFF, H.: *Physik. Z.* **26**, 657 (1925).
14. SEEMANN, H.: *Z. Physik* **35**, 732 (1926).
15. BRILLOUIN, L.: *Die Quantenstatistik*. Berlin 1931. — SOMMERFELD, A. u. H. BETHE: *Handbuch der Physik*, Bd. 24, 2. — MOTT, N. F. and H. JONES: *The Theory of the Properties of Metals and Alloys*, bes. Kap. V. Oxford 1936.
16. DUANE, W.: *Proc. nat. Acad. Sci. U.S.A.* **9**, 158 (1923).
17. KIKUCHI, S.: *Proc. imp. Acad. Sci. Tokyo* **4**, 271, 275, 354, 475 (1928). — *Jap. J. Physics* **5**, 83 (1929). — *Physik. Z.* **31**, 777 (1930).
18. DETERMANN, H.: *Schr. naturforsch. Ges. Danzig*. Im Erscheinen.
19. BERGEN, H. VAN: *Diplomarbeit Danzig 1937*. Erscheint in *Ann. Physik. Vorl. Mitt.: Naturwiss.* **25**, 415 (1937).
20. u. 21. Noch unveröffentlichte, für diesen Aufsatz zur Verfügung gestellte Beobachtungen der Herren G. BORRMANN und H. VOGES.
22. WENNERLÖF: *Ark. Mat., Astr. o. Fys. (A)* **22**, Nr 8 (1930).
23. RENNINGER, M.: *Z. Physik* **106**, 141 (1937).
24. WAGNER, E.: *Physik. Z.* **21**, 632 (1920).
25. BERG, O.: *Wiss. Veröff. Siemens-Konz.* **5**, 89 (1926).
26. WEIGLE, J. u. H. MÜHSAM: *Helvet. phys. Acta* **10**, 139 (1937).
27. LAUE, M. V.: *Erg. exakt. Naturwiss.* **10**, 133 (1931).
28. HAUSSER, K. W. u. P. SCHOLZ: *Wiss. Veröff. Siemens-Konz.* **5**, 144 (1927).

29. SEEMANN, H.: Z. techn. Physik **1935**.
30. RENNINGER, M.: Z. Kristallogr. **89**, 344 (1934).
31. EWALD, P. P. and M. RENNINGER: Internat. Conf. on Physics **2**, 57. Cambridge 1935.
32. RUTHERFORD, E. and E. N. DA C. ANDRADE: Philosophic. Mag. **28**, 263 (1914).
33. SEEMANN, H.: Ann. Physik **53**, 462 (1917); **7**, 633 (1930).
34. STODDARD, K. B.: Physic. Rev. **46**, 837 (1934).
35. SELÉNYI, P.: Ann. Physik (4) **35**, 444 (1911).
36. LAUE, M. v.: Naturwiss. **23**, 373 (1935).
37. — Ann. Physik (5) **23**, 705 (1935).
38. — Die Interferenzen von Röntgen- und Elektronenstrahlen. 5 Vorträge. Berlin 1935.
39. — Ann. Physik (5) **28**, 528 (1937).
40. — Physik. Z. **37**, 544 (1936).
41. FINBAK, CHR. u. O. HASSEL: Norsk. geol. Tidsskr. **16**, 1. Dez. 1936. — Nature (Lond.) **139**, 194 (1937). — Avh. Norsk. Videnskaps-Akad. Oslo **1**, Nr 2 (1937).

# The Study of Surface Structure by Electron Diffraction.

by **G. I. FINCH** and **H. WILMAN**, Imperial College, London.

With 71 Figures.

Contents.		Page
I. Historical . . . . .		353
II. The Scattering of Fast Electrons . . . . .		355
III. Technique . . . . .		364
The Camera . . . . .		364
Preparation of Specimens . . . . .		368
IV. The Interpretation of Electron-Diffraction Patterns . . . . .		369
Single-Crystal Transmission . . . . .		369
Reflection from Single Crystals . . . . .		384
Transmission through Polycrystalline Films . . . . .		396
Reflection from Polycrystalline Surfaces . . . . .		401
V. Anomalous Diffractions . . . . .		404
VI. Estimation of Crystal Size . . . . .		414
VII. The Effect of Crystal Size on Lattice Dimensions . . . . .		418
VIII. The Structure of Metal Films and Surfaces . . . . .		419
IX. The Structure of Polish . . . . .		423
X. Conclusion . . . . .		428
References . . . . .		429

## I. Historical.

The first experiments on the scattering of an electron beam by a metallic surface appear to have been carried out by CAMPBELL SWINTON (*I, 1*) in 1899. Although his apparatus comprised the essential features for observing preferential scattering directions, CAMPBELL SWINTON obtained only diffuse scattering phenomena, largely owing, no doubt, to the unsuitable nature of his reflecting surface, a polycrystalline platinum disc. The results of the many observations made during the ensuing twenty years on the scattering of electrons by matter were all in accordance with classical or quantum mechanics, and it was not until 1921 that DAVISSON and KUNSMAN (*I, 2*) were able to record directions of preferential scattering of an electron beam which, however, they attempted to explain in terms of pure particle mechanics. Although L. DE BROGLIE (*I, 3*) had formulated his theory of the association of guiding wave systems with moving particles in 1924, and although ELSÄSSER (*I, 4*) had suggested that the interaction between a beam of electrons and a single crystal should afford a crucial test of the theory, it appears to have been rather the stimulus of an accidental observation which led DAVISSON and GERMER to study the scattering of slow electrons from the surface of a nickel single crystal, and in March 1927 they submitted a preliminary summary (*I, 5*) of their results, followed

by a more complete account (*I, 6*) in December 1927, which in the main supported DE BROGLIE's wave theory.

Meanwhile THOMSON and REID, unaware of DAVISSON and GERMER's experiments, had been studying the scattering of fast electrons by thin films, and in May 1927 they communicated an account (*I, 7*) of the diffraction of cathode rays by a thin film of celluloid, illustrated by a photographic record of the distribution of the scattered electrons. It is of interest to note that here again, although THOMSON was acquainted with DE BROGLIE's theory (*I, 8*), it was not so much this as certain anomalous results relating to the scattering of electrons in helium observed by DYMOND (*I, 9*) and THOMSON's (*I, 10*) own experiments on the scattering of positive rays in gases, which afforded the main stimulus to the carrying out of his experiments (*I, 11*). Shortly afterwards THOMSON (*I, 12*) published the results of further experiments on the diffraction of fast electron beams by thin metal films, which quantitatively confirmed DE BROGLIE's relationship.

The next progress to be recorded was due to KIKUCHI and NISHIKAWA (*I, 13*), who transmitted electron beams through thin crystals of mica and obtained spot patterns and secondary scattering phenomena ("KIKUCHI lines"), which appeared similar in origin to those observed by RUTHERFORD and ANDRADE (*I, 14*) in 1914 in the scattering of  $\gamma$ -rays. This was followed by the obtaining of the first reflection patterns with fast electrons from a single-crystal face (calcite, mica, topaz and zincblende cleavage faces, and a natural face of quartz) by NISHIKAWA and KIKUCHI (*I, 15*), and by MUTO and YAMAGUTI'S (*I, 16*) experiments on the diffraction of electrons by crystalline powders supported on thin amorphous films. The next great advance in technique, which may be regarded as opening up the field of surface structure research by electron diffraction, was made when MATUKAWA and SHINOHARA (*I, 17*) on the one hand, and THOMSON (*I, 18*) on the other, independently discovered that polycrystalline surfaces yielded coherent electron-diffraction patterns when grazed by the electron beam, a fact which was correctly interpreted by THOMSON as being due in effect to transmission through crystalline projections above the mean level of the surface. THOMSON (*I, 18*) also seems to have been the first to recognise the potentialities of electron diffraction as a means of studying surface structure problems.

In spite of intensive studies of the diffraction of slow electrons on the lines initiated by DAVISSON and GERMER, this technique, unlike that of fast electrons and largely owing to the complexity of the resulting phenomena, has so far failed to prove of much significance in the study of surface structure, and in what follows no further reference will be made to the diffraction of slow electrons.

Another step of historical importance was taken by WIERL (*I, 19*) when he demonstrated the superiority of the electron beam over  $X$ -rays for the study of molecular structure in gases. Recent summaries of this

branch of the application of electron diffraction, which will not be further discussed in this paper, have been given by BROCKWAY (*I*, 20) and GLASSTONE (*I*, 21).

## II. The Scattering of Fast Electrons.

Owing to the efficiency of scattering of electrons by matter, the method of electron diffraction is pre-eminently suitable for the study of the structure of thin films and surfaces, as distinct from that of the underlying bulk material. The intensity of the scattering effects is due, in the main, to the interaction of the intense localised electrostatic fields surrounding the atomic nuclei with the beam electrons which, being themselves charged, are strongly deflected. Thus crystalline films of only a few atoms thickness give strong diffracted rays, and even fast electrons moving at half the speed of light are deflected and lose energy so quickly in repeated collisions with the atoms that in the reflection method at nearly grazing incidence they can only yield coherent diffraction effects from the surface layers extending to a depth of the order of 20 Å (*II*, 1).

The DE BROGLIE relation,  $\lambda = h/mv$ , states only the wavelength  $\lambda$  associated with a material particle of mass  $m$  and velocity  $v$ ;  $h$  being PLANCK'S constant. In 1926, however, SCHRÖDINGER (*II*, 2) derived from DE BROGLIE'S law a wave equation, valid for phenomena of atomic dimensions, for the motion of a particle in terms of its total and potential energies, *i. e.*

$$\nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - V) \psi = 0,$$

where  $\psi$  is a function of the space co-ordinates, ( $x y z$ ), and  $|\psi|^2$  represents the probability of occurrence of the particle at any point in space; and  $m$ ,  $E$  and  $V$  are the mass and the total and potential energies of the particle respectively. Thus, with a beam of electrons of uniform velocity elastically scattered by atomic aggregations,  $E$  is the constant initial and final energy of the electrons determined by the accelerating potential, and  $V$  represents the space distribution of electrostatic potential through which the electrons move, while  $|\psi|^2$  gives the distribution of electrons in space, *i. e.* in both the incident and diffracted beams.

About this time HEISENBERG (*II*, 3) was building up a new atomic mechanics on the principle of using only observable quantities as a basis for calculation, the mathematical relations between these magnitudes being so chosen that the fundamental laws of the quantum theory followed as a necessary consequence of the operations of calculation. BORN, HEISENBERG and JORDAN (*II*, 4) showed that these rules of calculation formed part of the already known matrix mathematics, and it has since been pointed out by DIRAC (*II*, 5) that the SCHRÖDINGER and HEISENBERG kinds of atomic mechanics are mathematically equivalent in describing uniformly both the wave and particle properties of matter.

Either of the two methods of calculation can be used in dealing with any given problem, according to which is the more convenient.

It was shown by STERN and GERLACH (*II*, 6) in 1924 that an atom with an S-orbital electron possesses a magnetic moment,  $\frac{e h}{4 \pi m c}$ , and GOUDSMIT and UHLENBECK (*II*, 7) found in 1925 that they could explain the fine structure of their spectra by assuming that the electrons had such a magnetic moment and an angular momentum,  $\frac{1}{2} \cdot h/2\pi$ . The idea of such a quantised electron spin seems to have been first put forward in 1921 by COMPTON (*II*, 8) who also pointed out its bearing on the natural unit of magnetism, and it has since been used extensively to explain the fine structure of spectra and the anomalous ZEEEMAN effect. The electron is thus assumed to have four degrees of freedom, three translational and a fourth, the orientation of its magnetic moment. Although PAULI (*II*, 9) and DARWIN (*II*, 10) developed methods of calculation taking account of electron spin, DIRAC (*II*, 11) first obtained a satisfactory relativistic form of the SCHRÖDINGER equation, invariant with respect to a LORENTZ transformation, and from which the spin of the electron and the magnetic moment,  $\frac{e h}{4 \pi m c}$ , and also the since confirmed existence of positive electrons or "positrons" follow as a necessary consequence of the theory of relativity. DIRAC's equations have been re-expressed and extended by DARWIN (*II*, 12).

In consequence of the arbitrary orientation of the magnetic moment of the electron, *i. e.* independent of the direction of the wave front, it would seem theoretically possible to obtain "polarised" electron beams with a common orientation of the magnetic moment, analogous to a beam of polarised light. Thus DARWIN (*II*, 13) deduced that reflection from a plane grating can result in a polarised electron beam only if the grating has mixed electrical and magnetic properties, but not if it has either alone. FRENKEL (*II*, 14) concluded that no polarisation should occur on reflection at a surface of discontinuity, and FÖRSTER (*II*, 15) has extended this to the case of a potential barrier. The main theoretical basis for the possibility of demonstrating experimentally polarisation properties of free electrons is supplied by the calculations of MOTT (*II*, 16) who, using the DIRAC relativistic wave equation for the motion of the electrons, calculated the intensity of scattering when an electron encounters in turn the fields of two nuclei. MOTT concluded that an appreciable asymmetry in the scattered beams should occur if the following conditions were fulfilled:— (a) electron velocity comparable with that of light, (b) scattering nuclei of large atomic number, and (c) large angles of scattering from both nuclei, comparable with 90°. In the particular case of two 90° scatterings by gold nuclei, MOTT estimated the ratio of the number of electrons scattered twice in the same sense to the number scattered one way and back again in the plane of the primary and first



scattered beams to be  $(1 + d/2)/(1 - d/2)$ , where  $d$  is the percentage polarisation whose variation with the electron voltage was calculated. The calculated maximum value of  $d$  was 15 per cent. for about 130 KV. electrons, the corresponding intensity ratio being 1.15.

MOTT (II, 17) has also examined the influence of radiative effects on the electron scattering, and concluded that in the case of large-angle scattering of fast electrons this cannot cause more than about 2 or 3 per cent. alteration to the above results. SAUTER (II, 18) has also estimated the intensity distribution for electron beams scattered twice by atoms and concluded that the electron shells of the scattering atoms do not seriously alter the polarisation effect for a  $90^\circ$  scattering of electrons with energies greater than those of the atomic electrons; and his results agree with MOTT's for the special case of a Coulombian atomic field treated by MOTT. The effect of the extra-nuclear electrons on the polarisation caused by double scattering has also been estimated to be negligible by SMITH (II, 19). According to WEISSKOPF (II, 20), partially polarised diffracted beams can arise from scattering by a single crystal, namely those beams which undergo successive reflections from two net-plane systems owing to the symmetry of the crystal and the fulfilment of BRAGG's law successively for these planes, but DAVID (II, 21) estimates that the amount of this polarisation is so small as to be virtually unobservable. Finally, according to recent work by WINTER (II, 22), who investigated the scattering of a plane monochromatic DIRAC wave by a sphere of constant potential, double scattering of electrons should not give rise to any polarisation, except at small distances from the scattering atom.

The many experiments carried out to test the polarisability of electrons have, in the main, led to results which must be regarded as negative, even when the most favourable conditions indicated by MOTT were fulfilled, in that in most cases a doubtful 1 to 2 per cent. or less asymmetry in the second scattering was observed, *i. e.* about an eighth of that predicted by MOTT; while experimental effects, such as X-ray scattering, often caused considerable apparent asymmetry, of the order of 10 per cent., which had to be allowed for carefully in order to test for a true residual asymmetry ascribable to polarisation. Thus some early observations (II, 23, 24) appeared to indicate an asymmetry of a few per cent. in a direction other than that which should have been caused by polarisation. Presumably instrumental effects explain the divergent results obtained by different experimenters using similar scattering arrangements. While with two scatterings at small BRAGG angles from two successive gold foils RUPP (II, 24) claimed to have found definite asymmetry, THOMSON (II, 25), KIRCHNER (II, 26), TRILLAT (II, 27), and MYERS, BYRNE and COX (II, 28) could observe no such effect. With the arrangement of one  $90^\circ$  scattering at a gold foil, followed by passage through a second gold foil to obtain DEBYE-SCHERRER rings, RUPP and SZILARD (II, 29)

reported a strong asymmetry in the final ring pattern, which rotated in accordance with the LARMOR precession when a longitudinal magnetic field was applied between the two scatterers and was extinguished by a transverse magnetic field of appropriate strength in the plane of scattering, and reversed by one twice as strong. On the other hand, KIRCHNER (II, 30) and THOMSON (II, 31) could detect no appreciable asymmetry with a similar arrangement. Finally, careful experiments by DYMOND (II, 32), THOMSON (II, 33) and RICHTER (II, 34) with two 90° scatterings by gold films and electrons up to 160, 150 and 120 KV. respectively, showed no appreciable asymmetry of scattering in the 0° and 180° positions, although RUPP (II, 35) claimed to have observed an asymmetrical distribution after double scattering at 90° in Tl vapour or by Au films.

The general failure to observe polarisation effects of the degree predicted by MOTT's theory appears to be in agreement with WINTER's theoretical result. It seems clear, at least, that no marked disturbing effect due to polarisation is to be expected in normal types of diffraction patterns from thin films and surfaces.

The intensity of scattering of fast electrons by atoms has been calculated by MOTT (II, 36) using SCHRÖDINGER's wave equation, and assuming in an analogous way to BORN's first approximation that the amplitude of the incident wave inside the atom is much greater than that of the scattered waves, *i. e.* that the wave scattered by one part of the atom will not be scattered again by another part. It appears that this approximation is sufficiently justified for electrons of above a few hundred volts energy scattered by light atoms, and for electrons of about 10 KV. and over with atoms of atomic number more than 50 (II, 37, 38). The resultant intensity of elastic scattering of a plane electron wave at a single atom was found to be

$$I(\theta) = \left(\frac{e^2}{2m v^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{Z-F}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}\right)^2 = \left(\frac{e^2 m}{2 \hbar^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{Z-F}{\sin^2 \frac{\theta}{2} / \lambda^2}\right)^2 = \left(\frac{e^2 m}{2 \hbar^2}\right)^2 \cdot \{F_e(\theta)\}^2,$$

where  $I(\theta)$  is the intensity of scattering in a direction deviating by  $\theta$  from the incident direction,  $Z$  is the nuclear charge, and  $F_e(\theta) = \frac{Z-F}{\left(\sin \frac{\theta}{2} / \lambda\right)^2}$ , which can be regarded as an electronic atom-form factor

analogous to the  $F$  of X-ray scattering.  $F$  represents the ratio of the atomic scattering amplitude to that of a single electron for X-rays, and its maximum value, at  $\theta=0$ , is  $Z$ . We may note that  $F_e(\theta)$  is not dimensionless like  $F$ , and that it has been shown to remain finite at  $\theta=0$ . It will be seen that this relation is similar to RUTHERFORD's (II, 39)  $\text{cosec}^4 \frac{\theta}{2}$  law for scattering of  $\alpha$ -particles by heavy nuclei, the  $F$  term being a correction for the effect of the atomic electron shells.

It is important to note that the efficiency of scattering of fast electrons is of the order of a million times that of X-rays; thus, if  $A$  and  $A'$  are

the amplitudes of the incident and scattered waves respectively, we have at distance,  $R$ , from the atom ( $R$  and  $\lambda$  measured in A.)

$$\left(\frac{A'}{A}\right)_{\text{electrons}} = \frac{1}{R} \cdot \frac{e^2 m}{2 \hbar^2} \cdot F_e = \frac{1}{R} \cdot 2 \cdot 38 \cdot 10^{-10} (Z - F) \cdot \left(\frac{\lambda \cdot 10^8}{\sin \frac{\theta}{2}}\right)^2,$$

whilst

$$\left(\frac{A'}{A}\right)_{X\text{-rays}} = \frac{1}{R} \cdot \frac{e^2}{m c^2} \cdot F = \frac{1}{R} \cdot 2 \cdot 82 \cdot 10^{-13} \cdot F.$$

Furthermore, the efficiency of generation of an electron beam is much greater than that of a similarly defined beam of X-rays. For example, with a current of 0.5 mA. in a cold cathode discharge chamber, the effective beam current in the electron diffraction camera may easily attain as much as 10  $\mu$ A., *i. e.* two per cent. of the input; whilst according to EVE and DAY (II, 40) not more than about 0.005 per cent. of the energy supplied to an X-ray tube appears as X-rays, and of this only a small fraction passes the diaphragm system in structure analysis.

MOTT (II, 41) compared his theoretical atom-form factors with values for gold obtained experimentally by THOMSON (II, 42) from patterns of the HULL-DEBYE-SCHERRER type yielded by sputtered gold films with transmitted electrons and found good agreement after applying a correction for the heat motion of the atoms in the gold crystals. Close agreement was also obtained (II, 43) with DYMOND's experiments on the scattering of slow electrons in helium. MARK and WIERL (II, 44) determined experimentally the scattering curves for aluminium, silver and gold from the ring patterns from thin films formed by condensation from the vapour and also found agreement with MOTT's formula.

For very fast electrons MOTT (II, 45, 50) has used the DIRAC relativistic wave equation and obtained for scattering by a static nuclear COULOMB field

$$I(\theta) = \left(\frac{Z e^2}{2 m v^2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \text{cosec}^4 \frac{\theta}{2},$$

valid for small  $\theta$  and any value of  $Z$ , while for large angles and small  $Z$ ,

$$I(\theta) = \left(\frac{Z e^2}{2 m v^2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \cdot \text{cosec}^4 \frac{\theta}{2}.$$

BULLARD and MASSEY (II, 46) have shown that for fast electrons

$$I(\theta) \doteq \left(\frac{Z e^2}{2 m v^2}\right)^2 \cdot \text{cosec}^4 \frac{\theta}{2} \left\{ 1 - 6 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \left(\frac{\text{cosec} \frac{\theta}{2}}{v/c}\right)^{3/2} \cdot Z^{1/2} \right\}.$$

The electronic atom-form factor  $F_e$  can be calculated directly from the X-ray atom-form factor,  $F$ , taking for the latter experimental values or those calculated by the self-consistent field method of HARTREE (II, 47) or by the statistical method of THOMAS (II, 48) and FERMI (II, 49) in which the atomic electrons are treated as a degenerate gas. Various  $F$  values for atoms with  $Z < 40$  have so far been calculated by the more accurate though laborious HARTREE method, but the THOMAS-FERMI

method has been found to give results in good agreement with various experimentally obtained  $F$  curves for the heavier atoms although, being a statistical method, it diverges somewhat from the HARTREE and experimental values for atoms with relatively few electrons. MOTT and MASSEY (II, 50) give a table of  $I(\theta) = \frac{e^4}{4m^2v^4} (Z-F)^2 \cdot \text{cosec}^4 \frac{\theta}{2}$  for electrons, calculated from the HARTREE fields, for elements from Li to A, and a table of  $I(\theta)/Z^{2/3}$ , calculated from the THOMAS-FERMI fields from which the  $I(\theta)$  values for any heavier atom can be constructed by multiplying by  $Z^{2/3}$ .  $F$  values have also been tabulated by W. L. BRAGG (II, 51) for most of the elements.

The intensity of inelastic, *i. e.* incoherent, scattering of electrons follows an entirely different course from that of  $X$ -rays, since it falls off rapidly from its maximum value at  $\theta=0$ , whereas the  $X$ -ray inelastic scattering increases from zero, slowly at first, with  $\sin \frac{\theta}{2}/\lambda$  to a maximum value proportional to  $Z$ . Thus the intensity of inelastic scattering of  $X$ -rays by an atom has been shown by COMPTON and ALLISON (II, 52) to be proportional to  $Z - \sum_n f_n^2$ , where  $f_n$  is the atom-form factor contribution of the  $n^{\text{th}}$  electron of the atom; and they have tabulated values of  $\sum_n f_n^2$  for several elements, chiefly between H and Ca, calculated from JAMES and BRINDLEY'S (II, 51)  $f_n$  values based on HARTREE'S theory. HEISENBERG (II, 53) has given a method of calculating the intensity of inelastic  $X$ -ray scattering based on the THOMAS-FERMI atom, and MORSE (II, 54) has shown that the procedure can be modified to give the intensity of inelastic scattering  $I$  of electrons by an atom. According to this method the intensities at distance  $R$  from the atom for electrons and for  $X$ -rays are:—

$$I(\theta)_{\text{electrons}} = \left( \frac{0.116}{R} \right)^2 \cdot \frac{1}{Z^{5/3}} \cdot \frac{G(v)}{v^4},$$

and

$$I(\theta)_{X\text{-rays}} = \left( \frac{2.81 \cdot 10^{-5}}{R} \right)^2 \cdot \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \cdot Z \cdot G(v);$$

where  $v = \frac{4\pi}{\lambda} b \sin \frac{\theta}{2}$ , in which  $b = \frac{0.176}{Z^{2/3}}$  A., and  $R$  is also to be measured in A. The numerical calculation of the function  $G(v)$  was carried out by BEWILOGUA (II, 55) and is also tabulated in a convenient summary by DEBYE (II, 56). Owing to the arbitrary phase change resulting from inelastic collisions we must simply multiply the intensities scattered by one atom by the number of atoms  $N$ , in order to find the total intensity of inelastic scattering from the material.

In dealing with the intensity of elastic scattering of electrons by a single crystal, we may consider first the expressions used for  $X$ -rays. Thus if we have as single crystal a parallelepiped with  $M_1, M_2, M_3$  lattice points on rows parallel to the axes  $a, b, c$  and so set up that the incident

beam makes angles  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  with these axes, then the intensity  $I$  scattered in a direction making angles  $\alpha, \beta, \gamma$  with  $a, b, c$  is given, at distance  $R$  from the crystal, by

$$I = \frac{S^2}{R^2} \cdot \frac{\sin^2 M_1 h \pi}{\sin^2 h \pi} \cdot \frac{\sin^2 M_2 k \pi}{\sin^2 k \pi} \cdot \frac{\sin^2 M_3 l \pi}{\sin^2 l \pi} = \frac{S^2}{R^2} \cdot f,$$

where  $f$  is the LAUE interference function, and

$$h = \frac{a}{\lambda} (\cos \alpha - \cos \alpha_0), \quad k = \frac{b}{\lambda} (\cos \beta - \cos \beta_0) \quad \text{and} \quad l = \frac{c}{\lambda} (\cos \gamma - \cos \gamma_0);$$

while  $S^2$  is the structure factor given by

$$S^2 = \left[ \sum_{\mathbf{i}}^n \Psi_n \cos 2\pi \left( \frac{hx}{a} + \frac{ky}{b} + \frac{lz}{c} \right) \right]^2 + \left[ \sum_{\mathbf{i}}^n \Psi_n \sin 2\pi \left( \frac{hx}{a} + \frac{ky}{b} + \frac{lz}{c} \right) \right]^2,$$

the  $n^{\text{th}}$  atom in the unit cell having co-ordinates  $[[xyz]]$  and scattering amplitude  $\Psi_n$ . From this relation it follows that the main maxima occur near the positions where  $h, k$  and  $l$  are simultaneously integers.

For  $X$ -ray reflection by a crystal face, the total intensity within the region of a diffraction maximum while the crystal is oscillated through the neighbouring settings, *i. e.* the "integrated reflection" for the whole region of a diffraction with LAUE numbers  $hkl$  is then found to be

$$Q_{hkl} = \frac{1}{2\mu} \left\{ (N \cdot S)^2 \cdot \frac{\lambda^3}{\sin \theta} \cdot \frac{1 + \cos^2 \theta}{2} \right\} = \frac{Q}{2\mu},$$

where  $\mu$  is the linear absorption coefficient of  $X$ -rays in the crystal,  $N$  is the number of unit cells per cc.,  $S^2$  is the structure factor,  $\theta$  is the angle of deviation of the beam, and the third factor inside the braces is the polarisation factor.

With an  $X$ -ray intensity  $I_0$  per  $\text{cm}^2$  diffracted by a volume  $V$  of crystalline powder, the total amount of radiation  $P$  diffracted along a

cone of semi-angle  $\theta$  is given by  $\frac{P}{I_0} = Q \cdot \frac{\phi \cos \frac{\theta}{2}}{2} \cdot V$ , where  $\phi$  is the

number of equivalent planes giving rise to the diffraction ring. Owing to the very efficient nuclear scattering, the diffraction of electrons is, however, much more complex than that of  $X$ -rays, but for the comparison of theoretical intensities of the various rings of a powder pattern, if no abnormalities arise owing to crystal shape or size or orientation, the intensities calculated from the  $X$ -ray formula, neglecting the factor for polarisation, will serve as a rough approximation; or rather, when only the relative intensities are required, it will suffice to take the intensity at a point on a ring as proportional to  $\frac{S^2 \phi}{\sin^2 \theta}$  or  $S^2 \phi d_{hkl}^2$ . That this is often a good approximation for normal random powder patterns is shown by the fact that both THOMSON and MARK and WIERL, as already stated, found close agreement between  $F_e(\theta)$  calculated from MOTT's formula and that obtained experimentally from ring intensities. Considerable deviation probably occurs with crystals in random array

only when the pattern contains a ring or rings of much greater intensity than the rest, for in such cases "multiple scattering" effects may very substantially alter the intensities, or where the shape or size of the crystals gives rise to anomalous diffraction phenomena and the appearance of forbidden and "extra" diffractions. By "multiple scattering" is meant here the effect of strong diffracted beams acting as new primary beams which are scattered again by the same or neighbouring crystals (II, 57). The expression,  $I = \frac{S^2}{R^2} \cdot f$ , for the intensity of scattering from a single crystal yielded by the simple kinematical treatment, only applies for infinite camera length; for fast electrons of about 50 KV. energy, owing to the short wavelength, about 0.05 Å., it is not strictly true for a crystal breadth normal to the beam of more than about 150 Å. with a camera length of 50 cms. The intensities of the diffractions from larger crystals may therefore be less than those given by the above intensity expression, according to the number of FRESNEL zones into which the crystal can be divided.

For a more rigid calculation of electronic scattering by a crystal we must take account of the repeated scattering and interaction of diffracted beams inside the crystal, rather than assume a single scattering followed by reinforcement of the secondary beams, *i. e.* it is necessary to form a "dynamical" rather than the above "kinematical" picture of diffraction. Such a dynamical theory has been developed for X-rays by DARWIN (II, 58) and EWALD (II, 59) and expressed geometrically by LAUE (II, 60). The analogous dynamical theory for electron scattering has been given by BETHE (II, 61) who uses SCHRÖDINGER's wave equation and takes the potential distribution in the lattice as  $V(r)$ , so that

$$\nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2 m e}{\hbar^2} (E + V) \psi = 0,$$

and expands  $V(r)$  as a FOURIER series, taking

$$\frac{8\pi^2 m e}{\hbar^2} \cdot V(r) = U(r) = \sum_{\mathbf{g}} v_{\mathbf{g}} \cdot e^{2\pi i (\mathbf{g}, \mathbf{r})},$$

where  $\mathbf{r}$  is the position vector of a given point and  $\mathbf{g}$  is any lattice-point vector in the EWALD reciprocal lattice. The SCHRÖDINGER equation then describes the whole stationary plane-wave system in dynamic equilibrium inside the crystal. To solve this equation BETHE develops  $\psi$  as a similar FOURIER series to that of the potential and finds the relations between the coefficients from the boundary conditions and expression for the incident wave. BETHE had to assume, for simplification, that apart from the primary beam only one strong diffracted beam appeared at one time, a severe limitation of the theory, and LAUE (II, 62) has shown that the potential at the boundary of the crystal does not fall abruptly to zero as BETHE assumed, but decreases in a more complex way. According to BETHE's theory, as with the dynamic theory of X-ray scattering,

there exists a definite region of angle of incidence over which total reflection occurs ("Anregungsfehler").

MORSE (II, 63) has used an expansion for the potential at a point  $(x y z)$  in a crystal in the form

$$V(xyz) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h_1 A_{x h_1} \cdot e^{2\pi i \frac{h_1 x}{a_1}} + \sum_{-\infty}^{+\infty} h_2 A_{y h_2} \cdot e^{2\pi i \frac{h_2 y}{a_2}} + \sum_{-\infty}^{+\infty} h_3 A_{z h_3} \cdot e^{2\pi i \frac{h_3 z}{a_3}},$$

where  $h_1, h_2, h_3$  are the MILLER indices of the net plane and  $a_1, a_2, a_3$  are the axial lengths in three perpendicular directions of co-ordinates  $x, y, z$ . He showed that there are finite Eigenfunktionen as solutions of SCHRÖDINGER's equation only within certain regions of energy level and calculated the form of the scattered intensity distribution. The numerical calculations of MORSE for the case of diffraction of slow electrons by a (III) face of a nickel single crystal agreed in general with the experimental results of DAVISSON and GERMER (II, 64), who used slow electrons and found that the positions of the lower orders of the diffraction maxima deviated somewhat from those to be expected from BRAGG's law.

The dynamic theory of BETHE has been applied by SHINOHARA (II, 65) to find the intensity variation across the bands and "KIKUCHI lines" obtained from thick single crystals and, although he assumed rather arbitrary boundary conditions, the calculated distribution had the form observed experimentally. HAYASI (II, 66), on the other hand, has obtained an approximate solution to the same problem for the case of a rhombic crystal, by treating it as a secondary scattering phenomenon and supposing that the primary spherical wave scattered by an atom  $O$  has an amplitude at a point  $Q$  proportional to an expression of the form  $\frac{e^{i k r_Q}}{r_Q} \cdot \cos \theta_Q$ , where  $\theta_Q$  is the angle of deviation from the incident beam and  $r_Q = OQ$ ; and that an atom at  $Q$  scatters this wave and sends out a secondary spherical wave of amplitude proportional to  $\frac{e^{i k r_{PQ}}}{r_{PQ}}$ , where  $r_{PQ} = PQ$ . The first expression for the non-uniformly scattered spherical wave was given by WENTZEL and SOMMERFELD (II, 67) for the distribution of  $K$ -photo-electrons emitted by the interaction of polarised  $X$ -rays with atoms. The intensity distribution deduced by HAYASI by summation of all such secondary scattered waves throughout the crystal, of assumed infinite extent, was also of the same form as that observed experimentally, in that a continuous background was indicated with band formation between the loci of directions making the BRAGG angle with any net plane.

The breadths of the diffractions and the theory of the refractive index of crystals for electrons have been discussed by KIKUCHI (II, 68) for the case of cubic crystals, using a method similar to BETHE's. The diffraction spots observed from a ZnS cleavage face were found to be about twenty times broader than expected from theory, but the calculated

variation of refractive index of the crystal with order of diffraction was similar to that found experimentally. BEECHING (*II*, 69) has compared the breaths of *III* diffractions of diamond with those expected from BETHE's theory and found that the 333 spot had a half-intensity breadth of 30', whereas the calculated value was only about 2'. These and other similar discrepancies are probably due to the small elastic penetration of the electron beam in the direction normal to the crystal surface, though it is possible that an adsorbed gas layer may also play a rôle.

Recently HARDING (*II*, 70) has developed a dynamical treatment of the diffraction of electrons, based on DARWIN's theory of *X*-ray scattering and analogous to the method of KRONIG and PENNEY (*II*, 71), for the interaction of an electron beam with a potential barrier, the calculation taking account of both gas adsorption and a possible variation of lattice constant near the crystal boundary. From a qualitative comparison of the results with those obtained experimentally by BEECHING, HARDING concludes that the general features of the experimental results may be accounted for by assuming that a few planes near the surface have a contracted spacing relative to that of the crystal interior, and that the magnitude of the effect suggests that these contracted planes are due to an adsorbed gas layer rather than to a contraction of the crystal itself near the surface.

### III. Technique.

The equipment used in the study of the structure of thin films and surfaces by the diffraction of electrons consists of the camera, in which are recorded the directions and intensities of the rays scattered on impact of a fine beam of electrons, moving at a uniform velocity, on the specimen; together with such subsidiary apparatus as is required for producing the beam and maintaining the necessary vacuum conditions.

**The Camera.** The electron source may be either a hot cathode (thermionic emission), or a cold cathode where the electron emission is the result of the bombardment of the cathode by positive ions formed by the passage of electrons through the gas at low pressure in the discharge chamber. Thus the FINCH (*III*, 1), KIKUCHI (*III*, 2), SHINOHARA (*III*, 3), THOMSON (*III*, 4) and TRENDELENBURG (*III*, 5) schools use in general the cold cathode, whilst AMINOFF (*III*, 6), GERMER (*III*, 7), KIRCHNER (*III*, 8), TRILLAT (*III*, 9) and YAMAGUTI (*III*, 10) prefer the hot filament type. The relative advantages of the two systems have been summarised by FINCH (*III*, 11) and KIRCHNER (*III*, 12). In illustration of the trend of modern electron-diffraction camera design it will suffice to describe briefly the more recent type of equipment now in use in our laboratories. In the design, high precision is aimed at together with economy and speed of operation, having due regard in matters of constructional detail to the somewhat limited workshop facilities of the average scientific laboratory. Thus, in preference to conical joints, wide use is



made of metal-to-metal surface, ground flat and lubricated with low-vapour-pressure grease. The accurate grinding of such surfaces calls for no special skill and is easily effected on a cast-iron surface plate with medium-grade "Carborundum" paste, a matt finish being aimed at. A suitable grease can be made from salt-free neutral white petroleum jelly ("Vaseline") thickened to the required consistency by digesting in vacuo with about 2 per cent. of shredded white crêpe rubber and agitating on a boiling saturated brine bath.

The general design of the camera (Fig. 1) has been described in detail previously (III, 1), but since then certain improvements have been made to which attention may be drawn. The anode diaphragm now consists of a perforated disc of nickel or platinum, firmly clamped in a massive wide-bore tube (III, 13). A small cobalt-steel magnet, held by a short arm attached through two ball-and-socket joints to an adjustable collar fitting immediately below the anode block, serves to deflect the electron beam into the axis of the instrument below the anode. A movable diaphragm system has now been incorporated, the diaphragms being carried on specimen carriers of normal

type. The upper diaphragm immediately below the fixed anode diaphragm consists of a thin brass plate with several perforations of various aperture sizes which can be rotated into the beam, according to the beam intensity and definition required. These perforations lie on a line at right angles to the axis of rotation of the carrier spindle and ending, for ease of location, in a V-shaped cut at the edge of the diaphragm plate, so that a simple rotation of the spindle suffices to bring the desired opening into the beam. Below the first diaphragm is situated a single coarse diaphragm, also mounted on a specimen carrier and sufficiently large not to interfere with the main beam, but which cuts out any scattering due to the first

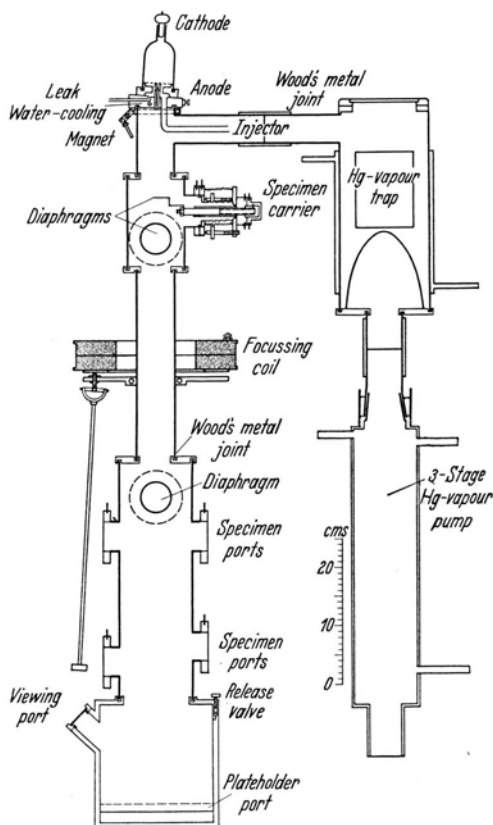


Fig. 1. Electron-diffraction camera.

movable diaphragm. A third, relatively coarse diaphragm, mounted on a carrier inserted in one of the ports immediately below the focussing coil is also sometimes used to cut out stray scattering. The diameters of the diaphragms, beginning, with the anode diaphragm, are approximately 0.03, 0.03 to 0.2, 0.5 and 0.5 mm. respectively.

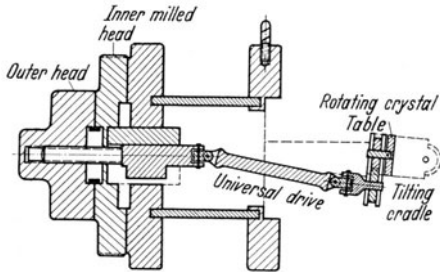


Fig. 2. Single-crystal carrier.

The focussing coil rests on three levelling screws in bushes let into the supporting plate and lies nearly midway between anode and screen. The screws are tipped with non-magnetic steel balls which work against a groove, cone and plate respectively on the lower side of the focussing coil. Two of the levelling screws have gimbaled extensions for convenience in adjustment while observing the screen.

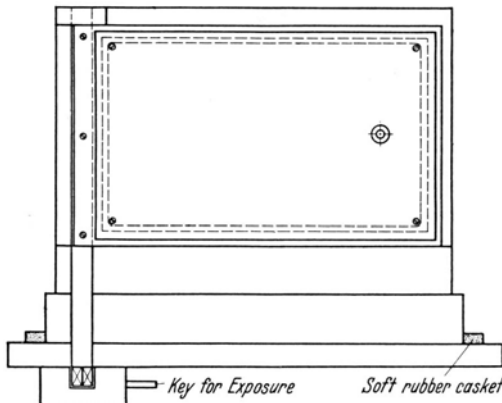


Fig. 3a. Light-proof plate holder (plan).

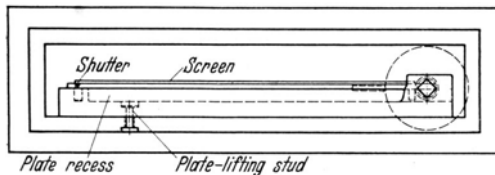


Fig. 3b. Light-proof plate holder (elevation).

“Plasticene” on the small table rotated by the inner milled head actuating a doubly universal-jointed shaft driving a cog wheel engaging with the table. Alignment of the crystal face in the axis of rotation of the cradle is effected by a plane-surfaced jig which is positioned by recesses cut in the cradle ends near the pivots.

The plate holder is shown in Fig. 3; it can be withdrawn from the camera in daylight. The fluorescent screen, zinc sulphide on an aluminium

of the diaphragms, beginning, with the anode diaphragm, are approximately 0.03, 0.03 to 0.2, 0.5 and 0.5 mm. respectively.

The focussing coil rests on three levelling screws in bushes let into the supporting plate and lies nearly midway between anode and screen. The screws are tipped with non-magnetic steel balls which work against

a groove, cone and plate respectively on the lower side of the focussing coil. Two of the levelling screws have gimbaled extensions for convenience in adjustment while observing the screen.

The specimen carriers are similar in principle to those previously described (III, 1). Their construction is such as to permit of sufficient exercise of all six degrees of freedom of the specimen. For single-crystal work a different type of specimen carrier is sometimes convenient, mainly where independent rotation in altitude and azimuth is desirable during exposure. Fig. 2 is self-explanatory and shows how rotation of the outer head varies the angle of inclination of the face of the crystal mounted in

plate, is screwed on to the plate-holder shutter. Some workers use a multiple-plate carrier, the plates being supported either on a rotatable polygonal drum (*III, 14*), or eccentrically mounted rotating disc (*III, 15*), or changed by sliding past the effective camera opening (*III, 16*).

The camera is constructed entirely of non-magnetic materials, machined parts being cut from rolled brass rod; the camera section is a bronze casting, and the tubing is of about  $1\frac{1}{2}$  mm. wall thickness. All joints are soft-soldered with the exception of that immediately below the focussing coil and the sleeve connection to the mercury vapour traps, which are made with WOOD'S metal or other easily fusible alloy. The camera-block castings generally contain pores, but these are easily sealed off by tapping the internal surfaces with a small ball-headed hammer. The interior of the specimen chamber and camera sections are sprayed with colloidal graphite in order to reduce reflection of light from the screen.

The leak is similar in principle to that previously described elsewhere (*III, 1*), except that the glass capillary has been replaced by a metre-length of small-bore copper tubing which is crushed flat with pliers until its resistance is such that, with a pressure of about 10 cms. Hg in the leak reservoir, the rate of leak of air into the discharge chamber is such that the potential drop from the cathode to the anode is approximately 50 KV. under normal working conditions, *i. e.* with a discharge current of about 0.5 mA. In addition to the injector action of the exhaust from the anode chamber, provision is made for preventing access of mercury vapour to the camera by a trap containing staggered tiers of tin foil. The trap is closed at the top by a glass inspection window sealed with picein into a brass ring, the lower surface of which is ground flat and greased to close the trap. The brass walls of the trap are nickel-plated internally and surrounded by a water-cooled jacket. A three-stage "LEYBOLD" mercury vapour pump, backed by a rotary oil pump through an intermediate 5-litre reservoir, to which the exhaust of the leak reservoir is connected by a three-way tap with one branch to the atmosphere, completes the evacuating system. In those cases where it is imperative to avoid all risk of possible contamination of the specimen by mercury, the pumping equipment consists of BURCH (*III, 17*) oil-diffusion pumps which can be isolated by means of large-bore metal stopcocks in order to avoid the loss of time which would otherwise result if the pumps had to be allowed to cool down before opening the diffraction camera (*III, 18*). On an average, about 5 to 8 minutes suffices for the time between recording of successive patterns, including breaking vacuum, changing plate and specimen, and re-evacuation. With the oil-vapour pump equipment this cycle may be completed in between 3 and 5 minutes.

The ports are all 5 cms. in diameter and are so situated that the effective camera lengths available are about 50, 25 and 20 cms. The specimen carriers can be replaced by different forms of accessory

apparatus, such as, for example, observation windows, consisting of glass discs piceined into recessed brass rings with flat ground surfaces, or filament heating (*III, 19*) and other devices.

A convenient and robust high-tension circuit is shown in Fig. 4. The rectifier, a PHILIPS "K 220", is run with a filament temperature corresponding to about 100 mA saturation current, which ensures a total useful life of some 3,000 hours. The saturated diode, a "K 120", serves as current-controlling device and is generally run at a saturation current of 0.5 mA.; it is water-cooled (*III, 1*) and so far no breakdown has occurred in any of these diodes, although one, installed in 1932, is still in use after an effective life of over 5,000 hours.

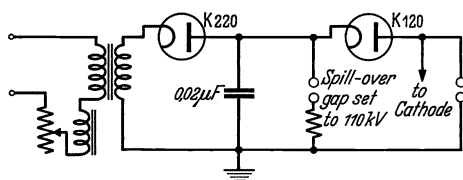


Fig. 4. High-tension circuit with constant current output.

The chief error in the determination of lattice constants by electron diffraction lies in the difficulty of accurately measuring the electron beam accelerating potential, and where high accuracy is required a special form of

plate holder embodying a comparison-shutter mechanism is used (*III, 1, 18*). The comparison shutter eliminates this error and that of the effective camera-length determination by referring the unknown lattice constants to those of some standard material (see Fig. 67), as in the case of the iron arc or spark spectrum in spectroscopy, or rock-salt or calcite in *X*-ray diffraction. In certain cases, the diffraction pattern of the material under examination can be obtained superimposed on that of the reference substance by using a composite specimen in which the one material is either directly superimposed on the other (*III, 20*), or both are mixed together, or where the two, supported on the same substrate, are deposited close together on either side of the dividing line flooded by the electron beam (*III, 18*).

**Preparation of Specimens.** A general outline of the technique for the preparation of specimens has been given previously (*III, 1*), to which may be added the following details. It is now known that it is not necessary to rely only on cleavage and natural faces for massive single-crystal surface structure investigation. Thus, good surfaces may be obtained in many cases by cutting and polishing in any crystallographic direction (diamond, quartz, sapphire, chrysoberyl, etc.), and by fracturing, particularly where polishing leads to the formation of a BEILBY layer (spinel, zircon, cassiterite, etc.) (*III, 21*). In some cases, for example calcite, the polish layer can be caused by gentle heating to recrystallise in strict orientation with the substrate (*III, 22*).

With regard to single-crystal transmission specimens, structures exhibiting good cleavage, such as the micas, brucite, etc. can be obtained in relatively large sheets, and FINCH and WILMAN (*III, 23*) have obtained

undistorted graphite and molybdenite flakes of quite remarkable thinness. Many other types of single crystals sufficiently thin for transmission purposes can be grown from solution, by electrodeposition, or by condensation from the vapour in the meshes of a fine gauze, or on a substrate which may be either inert, like collodion, or active, like rock-salt or other single-crystal surface, under suitable conditions (III, 24).

#### IV. The Interpretation of Electron-Diffraction Patterns.

**Single-Crystal Transmission.** The electron-diffraction pattern yielded by a single crystal forms the basis of all the other types of patterns. In the approximate treatment analogous to that used in X-ray diffraction, if we assume an incident plane wave to be scattered once coherently by each atom of a complex three-dimensional atomic lattice, the summation of the secondary spherical wavelets for all atoms of the lattice results in the expression,

$$I = \frac{S^2}{R^2} \cdot \frac{\sin^2 M_1 h \pi}{\sin^2 h \pi} \cdot \frac{\sin^2 M_2 k \pi}{\sin^2 k \pi} \cdot \frac{\sin^2 M_3 l \pi}{\sin^2 l \pi} = \frac{S^2}{R^2} \cdot f, \quad (1)$$

for the scattered intensity distribution. The LAUE interference function  $f$  shows that strong diffracted beams will normally appear only in directions close to those satisfying simultaneously the three LAUE conditions that  $h, k, l$  are integers, where

$$a (\cos \alpha - \cos \alpha_0) = h \lambda, \quad (2a)$$

$$b (\cos \beta - \cos \beta_0) = k \lambda, \quad (2b)$$

and 
$$c (\cos \gamma - \cos \gamma_0) = l \lambda. \quad (2c)$$

These equations express the fact that the path difference of wavelets scattered from successive atoms along a lattice row parallel to the  $a$  axis in the direction considered must be an integral number of wavelengths for reinforcement to occur, together with similar conditions for the  $b$  and  $c$  axes. The three factors in the expression  $f$  correspond to the fact that the intensity function for a row of  $M_1$  atoms of spacing  $a$  is

$$I = \frac{\Psi^2}{R^2} \cdot \frac{\sin^2 M_1 h \pi}{\sin^2 h \pi} = \frac{\Psi^2}{R^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{M_1 \delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad (3)$$

where  $\delta$  is the constant phase difference of wavelets scattered by two successive atoms of the row. Hence if each atom of this row is replaced by a lattice row of type  $b$ , a cross-grating lattice is formed whose intensity of scattering is

$$I = \frac{\Psi^2}{R^2} \cdot \frac{\sin^2 M_1 h \pi}{\sin^2 h \pi} \cdot \frac{\sin^2 M_2 k \pi}{\sin^2 k \pi}; \quad (4)$$

while if each atom of this is replaced by a lattice row of type  $c$ , a simple three-dimensional lattice is thereby built up for which the corresponding three-fold function  $f$  applies. Since any three non-coplanar lattice rows

define the lattice, we can construct the diffraction pattern to be expected at any given setting of the crystal by finding the directions which lie

simultaneously on the reinforcement zones, the so-called "LAUE zones", of any three conveniently situated atom rows of the lattice, as in Fig. 5, whence by comparison with the recorded single crystal spot pattern the latter can be indexed.

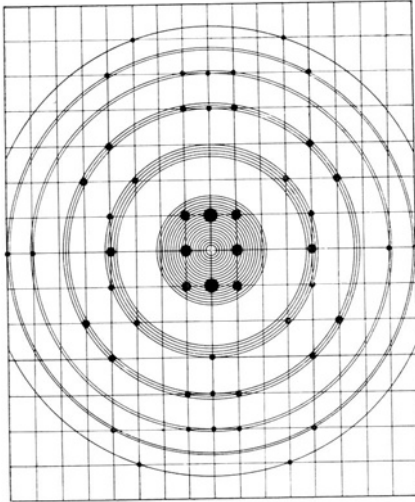


Fig. 5.

All directions satisfying (2a) lie along a set of cones of semi-apical angle  $\alpha$  round the lattice row  $a$ , and these cones intersect the screen or photographic plate in a set of curves. These are hyperbolae, ellipses or circles, according to the angle of inclination of the lattice row to the beam which is taken as normal to the screen, as is usual in

practice. The zero-order maximum ( $h=0$ ) always passes through the undeflected spot, *i. e.* the primary beam direction. The function (3)

has minima, as shown in Fig. 6, where  $h$  is a positive or negative integral multiple of  $1/M_1$ , main maxima at  $h=1, 2, 3$ , etc., and subsidiary maxima at intermediate  $h$  values close to  $3/2M_1, 5/2M_1, 7/2M_1, \dots, 1 - 3/2M_1, 1 + 3/2M_1, 1 + 5/2M_1, \dots$  etc.; but in general only the regions of the main maxima need be considered. These form zones whose limits can be regarded as directions of zero intensity nearest to the main maxima, *i. e.* directions whose  $h$  values

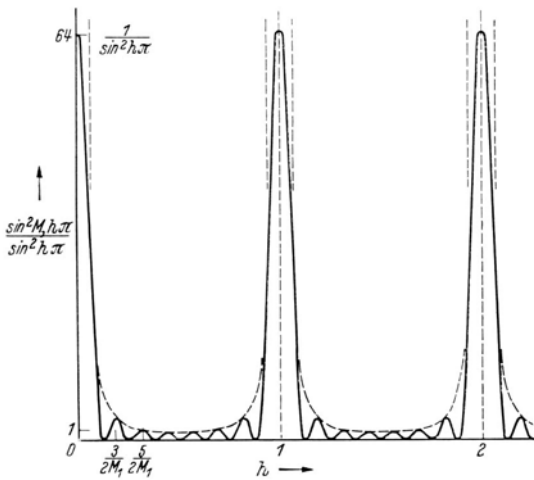


Fig. 6. Curve of  $\frac{\sin^2 M_1 \cdot h \pi}{\sin^2 h \pi}$  drawn for  $M_1 = 8$ .

differ by  $\pm 1/M_1$  from the directions of true maxima where  $h$  is an integer. It can readily be shown that, for the small angles of deviation concerned in the diffraction of fast electrons and when the lattice row

is inclined at an angle  $\theta$  to the setting normal to the beam, the reinforcement zones on the screen are, until  $\theta$  approaches  $90^\circ$ , approximately straight bands perpendicular to the projection of the lattice rows on the screen, with spacing  $\frac{\lambda L}{a \cos \theta}$  and width  $\frac{2 \lambda L}{M_1 a \cos \theta}$ , where  $L$  is the camera length. When the lattice row is parallel to the primary beam, the reinforcement zones are concentric circular bands round the undeflected spot of the pattern such that

$$\cos \alpha = 1 - \frac{M_1 h \lambda}{a}, \quad (5)$$

their radii being equal to  $L \cdot \left\{ \left( 1 - \frac{h \lambda}{a} \right)^2 - 1 \right\}^{1/2}$  which, in view of the small wavelength and hence small angles of scattering involved, reduces with sufficient accuracy to  $L \cdot \left( \frac{2 h \lambda}{a} \right)^{1/2}$ . The zero-order zone then extends from the undeflected spot to a radial distance approximately equal to

$$L \cdot \left( \frac{2 \lambda}{M_1 a} \right)^{1/2}, \text{ i. e. } L \cdot \left\{ \frac{2 \lambda (M_1 - 1)}{M_1 T} \right\}^{1/2}, \quad (5 a)$$

where  $T = (M_1 - 1) a$  is the length of the atom row and therefore the thickness of the crystal in the beam direction; and the  $h^{\text{th}}$  order zone has a radial extent approximately  $1/(M_1 h)^{1/2}$  times this. As we incline the lattice row out of this position the centre, or rather now the centres, of the circular bands move sideways, and the zones expand into more and more elongated ellipses; the zero-order zone becoming an ellipse passing through the undeflected spot, while zones with negative  $h$  values appear inside the zero-order zone. On further inclination, the ellipses open out into hyperbolae until, near the undeflected spot, the zones become approximately equidistant straight bands. For small inclinations of the lattice row to the beam, the reinforcement zones are still approximately circles whose centres are nearly coincident with the point of intersection of the lattice row with the screen, and their radii  $R$  are given fairly closely by the relation

$$R^2 = R_0^2 + L^2 \cdot \frac{2 h \lambda}{a}, \quad (6)$$

where  $R_0$  is the radius of the zero-order maximum.

The three LAUE conditions (2 a, b, c) can be shown to be equivalent to BRAGG's law,  $n \lambda = 2 d \sin \theta$ , according to which the primary beam can for a direction of true maximum with LAUE numbers  $h k l$  be regarded as reflected at grazing angle  $\theta$  by the parallel net-plane group of spacing  $d$ , whose MILLER indices are  $h k l$  or their primes  $h/n, k/n, l/n$ , in the latter case the diffraction being said to be of the  $n^{\text{th}}$  order. Thus the LAUE conditions (2 a, b, c) can be expressed vectorially by the equations,

$$a \cdot (s - s_0) = h \lambda, \quad (7 a)$$

$$b \cdot (s - s_0) = k \lambda, \quad (7 b)$$

and  $c \cdot (s - s_0) = l \lambda, \quad (7 c)$

where  $s_0$  and  $s$  are unit vectors parallel to the incident and diffracted beams respectively. Now the axial vectors of the reciprocal lattice,  $a^*$ ,  $b^*$ ,  $c^*$ , are such that

$$\left. \begin{aligned} a \cdot a^* &= b \cdot b^* = c \cdot c^* = 1 \\ \text{and } a \cdot b^* &= a \cdot c^* = b \cdot c^* = b \cdot a^* = c \cdot a^* = c \cdot b^* = 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

so that  $a^* = \frac{b \wedge c}{a \cdot b \wedge c}$ , with expressions for  $b^*$  and  $c^*$  obtained by cyclic rotation, *i. e.*  $a^*$ ,  $b^*$ ,  $c^*$  have magnitudes  $\frac{bc \sin \alpha}{V}$ ,  $\frac{ca \sin \beta}{V}$ ,  $\frac{ab \sin \gamma}{V}$  and lie along the directions drawn from the origin perpendicular (in the positive sense) to the planes formed by  $bc$ ,  $ca$ ,  $ab$ . The angle  $\alpha^*$  between the axes  $b^*$  and  $c^*$  of the reciprocal lattice is given by

$$\cos \alpha^* = (\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha) / \sin \beta \sin \gamma, \quad (9)$$

the other two angles  $\beta^*$  and  $\gamma^*$  being obtained from this by cyclic rotation. It can be readily shown that the radius vector  $h$  given by

$$h = h a^* + k b^* + l c^*, \quad (10)$$

from the origin to any point with co-ordinates  $[[hkl]]$  in the reciprocal lattice, is parallel to the normal of the net planes with MILLER indices  $\left(\frac{h}{n} \frac{k}{n} \frac{l}{n}\right)$  in the crystal lattice, and its length is equal to  $\frac{1}{d/n}$  where  $d$  is the  $\left(\frac{h}{n} \frac{k}{n} \frac{l}{n}\right)$  net-plane spacing, and  $n$  is the highest common factor of  $hkl$ . Further, any vector  $r$  can be represented by the expression

$$r = (r \cdot a) a^* + (r \cdot b) b^* + (r \cdot c) c^*. \quad (11)$$

Hence we have

$$\begin{aligned} (s - s_0) &= \{(s - s_0) \cdot a\} a^* + \{(s - s_0) \cdot b\} b^* + \{(s - s_0) \cdot c\} c^* \\ &= h \lambda a^* + k \lambda b^* + l \lambda c^*, \quad \text{by equations (7a, b, c);} \end{aligned}$$

$$i. e. \quad s - s_0 = \lambda h \quad (12)$$

This relation is expressed by the vector triangle of Fig. 7, whence it follows that for the principal maxima the incident and diffracted directions make equal angles  $\theta$  with the net-plane, such that

$$n \lambda = 2d \sin \theta. \quad (13)$$

The conditions for the main diffracted beams to appear can be represented in yet another way. From Fig. 7 it will be seen that the LAUE conditions (2a, b, c) are satisfied simultaneously for all diffractions with LAUE numbers  $hkl$  such that the corresponding points  $[[hkl]]$  in the reciprocal lattice lie on a sphere with centre  $A$  and radius  $AO$ , where  $\vec{AO}$  is parallel to  $s_0$  and is of magnitude  $1/\lambda$ . The directions of the diffracted beams are thus constructed by joining up the point  $A$  to all  $[[hkl]]$  points on the sphere. In this way a geometrical picture of the diffraction of the crystal is obtained by means of the reciprocal lattice. The construction can be extended to show the intensity distribution of the diffracted beams, as represented by the equation (1), if we consider this expression to be a



three-fold function of the coordinates  $[[hkl]]$  of points in the space of the reciprocal lattice; whence the intensity of diffraction in any given direction is given by the value of this function associated with the end point of the parallel radius vector of the sphere of reflection. To a first approximation we can normally consider this to be equivalent to assuming the points of the reciprocal lattice, *i. e.* points with integral  $hkl$  values, to be replaced by parallelepipedal regions of sides  $2/M_1$ ,  $2/M_2$ ,  $2/M_3$ , units parallel to  $a$ ,  $b$ ,  $c$  respectively, whose areas of intersection with the sphere of reflection give the size, shape and intensities of the diffractions appearing at any crystal setting with respect to the primary beam. The form of these intensity regions round the reciprocal lattice points has been shown by LAUE (IV, 1) to be mainly related to the external shape of the crystal rather than to its size, and his

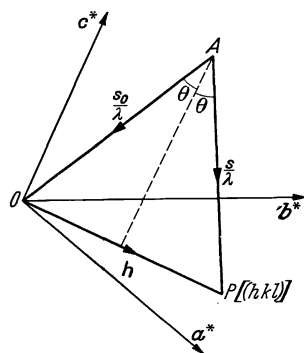


Fig. 7.

detailed investigation has an important bearing on the nature of the origin of certain anomalous diffractions described below. In the special case of a thin crystal, the points of the reciprocal lattice are elongated into a series of rods normal to the plane of the flake and approximately of length  $2/T$ , where  $T$ , the thickness of the crystal flake, equals  $(M_1 - 1)a$ ; while for a true cross-grating lattice with axes  $a$ ,  $b$  the reciprocal lattice becomes a series of straight lines passing through the points in the  $ab$  plane of the reciprocal lattice constructed from  $a$ ,  $b$  and any other axis in space.

The "sphere of reflection" (EWALD's Ausbreitungskugel)

is, in the case of the diffraction of fast electrons, of large radius compared with the lattice-point spacings in the reciprocal lattice and can to a first approximation be treated as a plane, when considering the position of the diffraction spots close to the undeflected spot.

The single-crystal diffraction pattern of spots immediately surrounding the undeflected spot is thus practically equivalent to a section of the reciprocal lattice by a plane normal to the beam, enlarged in the ratio  $\lambda L : 1$ . BURGERS (IV, 2) has utilised this fact to construct a simple model for demonstrating the geometrical features of electron

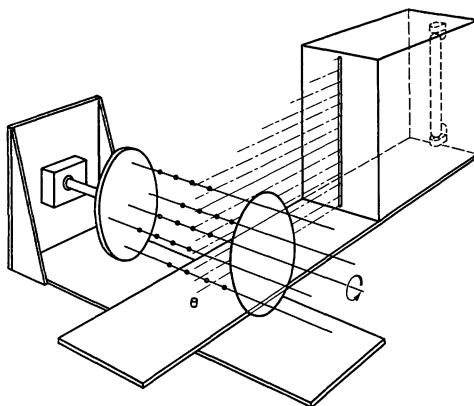


Fig. 8. BURGER'S reciprocal lattice model.

diffraction effects. His apparatus (Fig. 8) consists of a rotatable model of the reciprocal lattice considered, which is mounted in a plane region of illumination normal to the observer, who thus sees a pattern consisting of those reciprocal lattice points lying in that plane. This pattern can be photographed and the equivalent of a rotating crystal or polycrystalline specimen can be represented by rotation of the model during exposure of the photographic plate.

Since KIKUCHI's early experiments with mica, it has been shown generally that single-crystal spot patterns are qualitatively in accord with the above considerations. Thus the thinnest obtainable single-crystal flakes, which are only a few atoms thick ( $\ll 10^{-6}$  cm.) yield strong electron-diffraction patterns (Figs. 9 and 10) which approximate closely to that of a single cross-grating sheet of atoms. Signs of LAUE-zone spot intensification are usually detectable, however, and with slightly thicker crystals these are well defined (Fig. 11) and become narrower with increasing crystal thickness (Fig. 12), until relatively few spots lie on these zones (Fig. 13). At certain settings of the thicker crystals no spots appear. Fig. 12 shows three sets of circular LAUE zones simultaneously clearly distinguishable, any one of which together with the regions of the cross-grating zone intersections determines the intensity distribution of the spot pattern; thus Fig. 12 illustrates the fact that any three non-coplanar atom rows can be taken as axes for defining the lattice and determining its interference effects. With increasing crystal thickness, but long before the third LAUE condition corresponding to the atom row in the beam direction becomes rigid, prominent secondary scattering effects develop in the form of bands and pairs of black and white parallel lines, the so-called "KIKUCHI lines", until finally inelastic scattering causes an almost general blackening of the photographic plate. KIRCHNER (*IV*, 3) and DARBYSHIRE (*IV*, 4) have recorded diffraction patterns from mica flakes of measured thicknesses, which show that the circular LAUE zones are still fairly broad even up to the stage where the coherent pattern becomes submerged in the diffuse background at a thickness of the order of  $10^{-4}$  cms. They have found that the extent of the zero-order maximum is greater than that given by the expression (5a) derived from the simple kinematical theory of scattering.

In some of the pseudo-cross-grating type of spot patterns obtained from thin crystals diffuse bands appear along the main spot rows. They sometimes occur faintly, for example, in spot patterns from graphite, cadmium iodide, the hydrocarbons, stearic acid, phthalimide etc., and Fig. 14 from a phthalimide flake shows this effect particularly well. Another effect, as yet little understood and which does not appear to have been observed before, is the appearance of broad bands or areas of diffuse blackening in patterns of pseudo-cross-grating type obtained from certain thin organic crystals such as the long-chain aliphatic hydrocarbons, stearic and palmitic acids, anthracene, etc., illustrated by

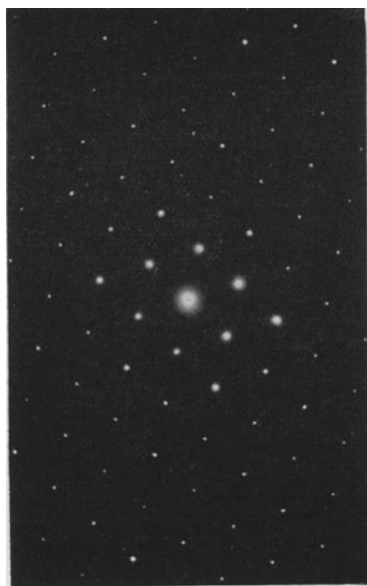


Fig. 9. Graphite.

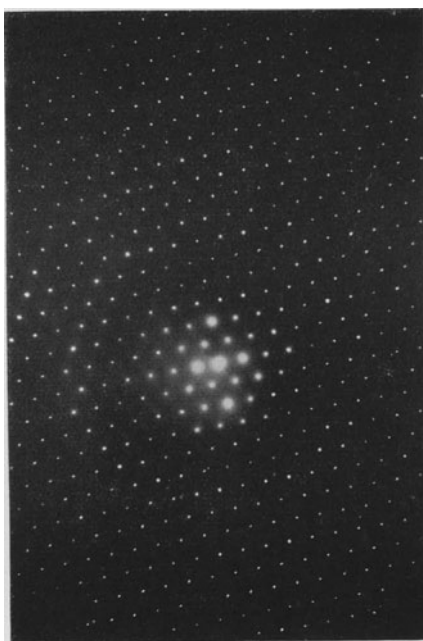


Fig. 10. Transmission through thin mica.

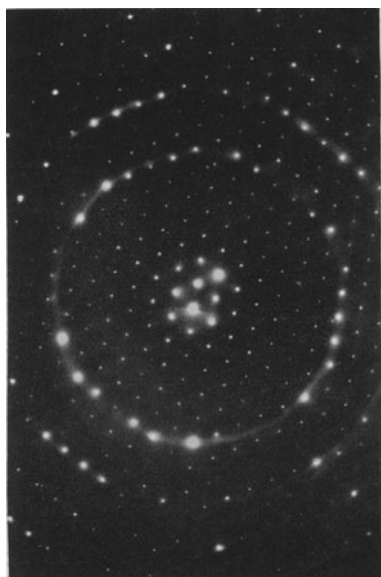


Fig. 11. Transmission through thicker mica.

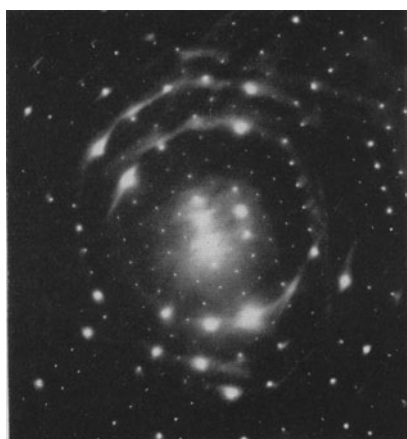


Fig. 12. Mica transmission with three sets of well-defined LAUE zones.

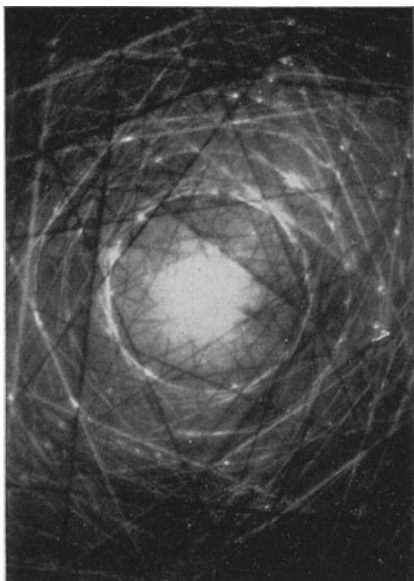
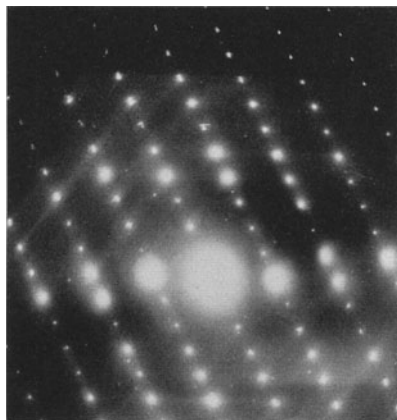
Fig. 13. Transmission through thick mica (ca.  $10^3$  A.).

Fig. 14. Phthalimide.

Figs. 15 and 16 obtained from anthracene. We have found that the positions of these areas correspond to the arrangement and separation of the carbon atoms in the molecules.

By rotation (*IV*, 5) of the crystal during exposure, patterns

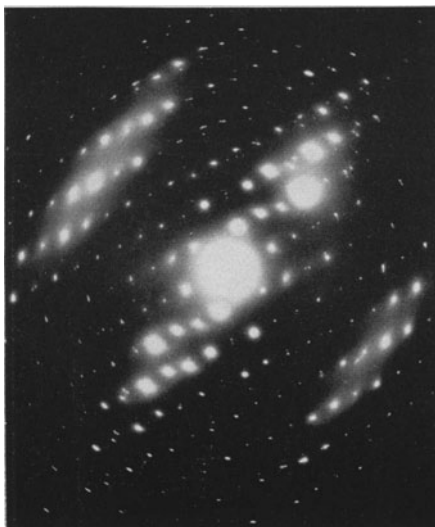


Fig. 15. Anthracene.

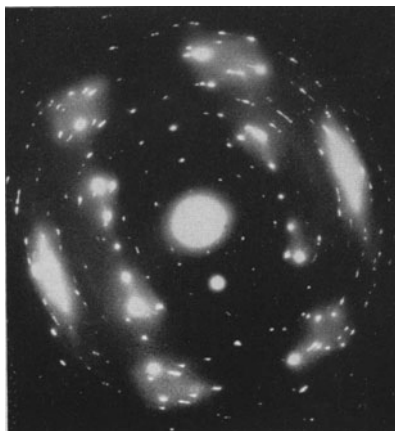


Fig. 16. Anthracene.

consisting of rows of  $hkl$  diffraction spots are often obtained, such as Fig. 17 from anthracene, which are analogous to the rotation or oscillation

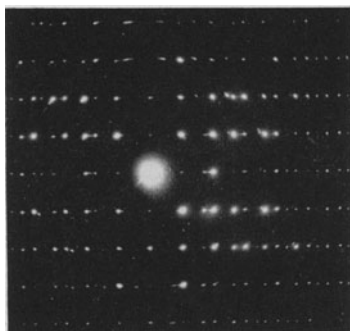


Fig. 17. Rotation-transmission pattern from anthracene.

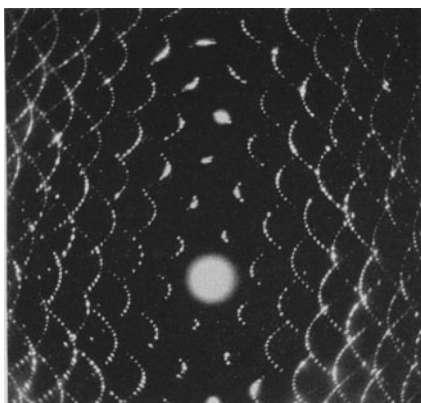


Fig. 18. Rotation-transmission pattern from mica.

types of *X*-ray patterns. In general, however, the rows of spots are of hyperbolic form (Fig. 18) rather than the layer-line type of diagrams obtained with *X*-rays. FINCH and WILMAN (*IV*, 5) have shown that the asymptotes of the hyperbolae enclose an angle equal to twice that between the plane of the crystal

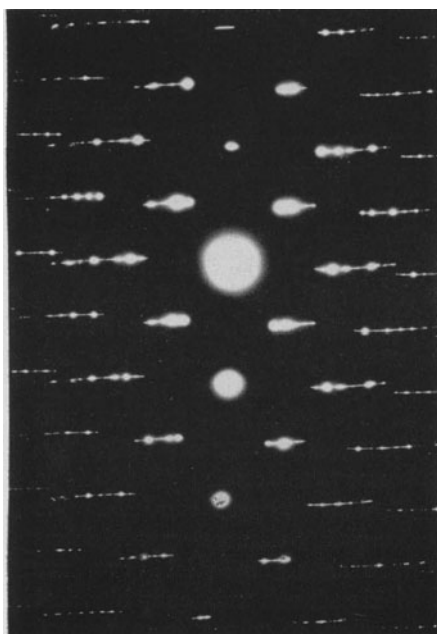


Fig. 19. Curved molybdenite crystal: axis of curvature normal to beam.

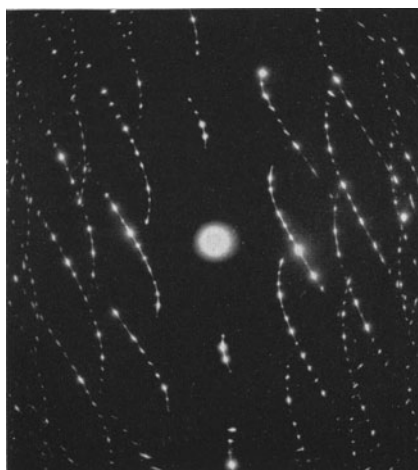


Fig. 20. Rotation-transmission pattern from very thin undistorted molybdenite flake inclined at  $70^\circ$  to axis of rotation.

film and the rotation axis when the latter is normal to the beam; thus the hyperbolae become more and more acute, the less inclined the rotation

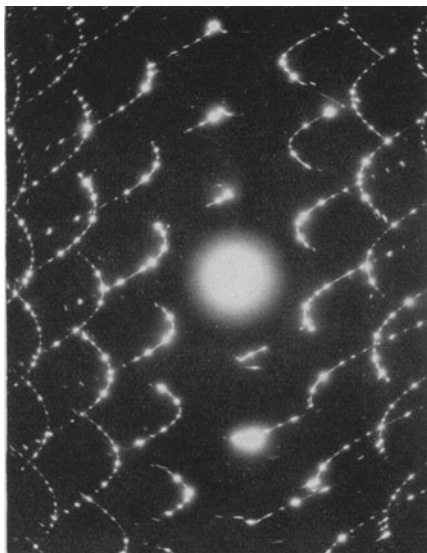


Fig. 21. Rotation-transmission pattern from undistorted molybdenite flake: cleavage plane inclined at  $28^\circ$  to axis of crystal normal to beam.

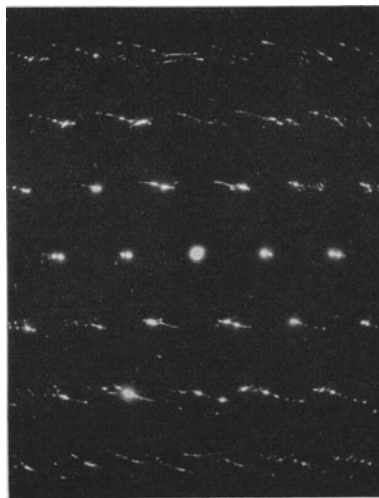


Fig. 22. Transmission through distorted molybdenite flakes.

axis is to the film, and become straight lines (Fig. 19) when parallelism is attained, while at steep angles the curves become ellipses and finally

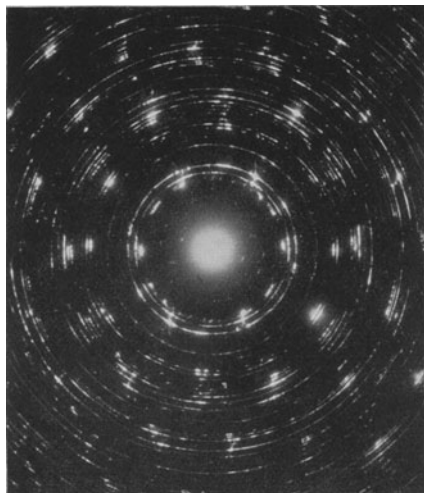


Fig. 23. Transmission through distorted molybdenite flakes.

circles when the rotation axis is normal to the crystal film (see Fig. 52). With the thinnest crystals continuous diffraction lines similar to those which would be yielded by rotation of a true cross-grating join up the spots of each family along the corresponding loci, as in Figs. 19, 20 and 21, and intermediate "extra" diffraction spots, the origin of which is discussed below, can often be observed. Stationary crystal flakes with simple uniaxial curvature yield patterns practically identical in form to those from rotated undistorted crystals while, with more complex distortion, patterns such as Fig. 22 are obtained, or even rudimentary ring patterns (Fig. 23). The genesis of a ring pattern by variation of the crystal orientation by rotation over a

more continuous range has been shown very clearly by FINCH and WILMAN (IV, 6).

It was shown by KIKUCHI (IV, 7) that the black and white lines in the patterns from the thicker crystals can be most simply regarded as the result of multiple scattering causing the equivalent of a diffuse beam inside the crystal, followed by selective reflection of rays inclined at the BRAGG angle to each type of net-plane group of the crystal. This may be illustrated diagrammatically by Fig. 24. The intensity of the diffuse scattering inside the crystal decreases with increasing deviation from the primary direction. Thus the intensity  $I_1$  of the beam inclined at the BRAGG angle  $\theta$  to the net plane  $CP$ , on the same side of  $CP$  as the primary beam is greater than that  $I_2$  of the beam inclined at  $\theta$  to the net plane on the side opposite to the primary beam. These two beams would have met the screen at the points  $B$  and  $A$  respectively, but after reflection at the parallel plane group represented by  $CP$  they meet the screen at  $A$  and  $B$  respectively; hence there is a net decrease in intensity at  $B$  proportional to  $(I_1 - I_2)$  and an equal net increase at  $A$ . All such selectively reflected beams lie on the cone of semi-apical angle  $(90 - \theta)^\circ$  round the normal to the net-plane, and the corresponding reflected beams also lie on the same cone. The two halves of this cone meet the screen in the two practically straight arms of a very obtuse hyperbola symmetrically disposed on opposite sides of the line of intersection of the net-plane with the screen. Along the line on the same side as the undeflected spot  $O$ , absorption from the general background intensity occurs, while along the line on the opposite side to  $O$  there is enhanced intensity of scattering, the separation of the line pair being approximately  $n\lambda L/d$  for planes normal, or nearly so, to the screen. The whole pattern of such line pairs at any given crystal setting with respect to the primary beam is characteristic of the symmetry and structure of the crystal, since the median of a line pair and the crystal position together define the direction of the corresponding net-plane, while the line-pair separation defines the net-plane spacing, and the intensity of each line with respect to that of the neighbouring background is a measure of the reflecting power of the net-plane group, *i. e.* it depends on the related structure factor.

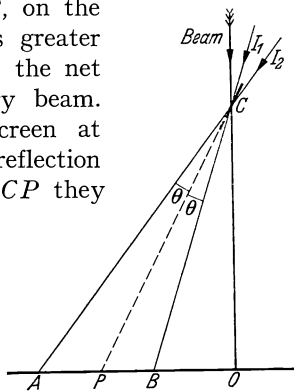


Fig. 24.

Indexed mica transmission line patterns have been published by KIKUCHI (IV, 7), SHINOHARA and MATUKAWA (IV, 8) and KIRCHNER (IV, 9), and others from graphite by FINCH and WILMAN (IV, 6), and the relative intensities found were roughly of the order to be expected from the normal structure factor. A general method applicable for the

complete indexing of KIKUCHI-line patterns has been developed by FINCH, QUARRELL and WILMAN (*IV*, 10). Thus, referring to Fig. 25, let the crystal setting be such that the primary beam, assumed normal to the screen, makes a grazing angle  $\psi$  with the  $(uvw)$  plane  $OX_1X_2Y_1Y_2$ ; and suppose, further, that a direction  $OY_1$  in  $(uvw)$ , at azimuth  $\varphi$  with respect to a convenient origin direction  $OY_2$  in the  $(uvw)$  plane, lies in or near the plane of incidence of the beam on  $(uvw)$ . Let  $(UVW)$  and  $(\lambda\mu\nu)$  be the direction cosines of the normals to  $(uvw)$  and any plane  $(hkl)$  with respect to three orthogonal right-handed axes  $OX_3Y_3Z_3$ , conveniently situated with respect to the crystal axes, and let the

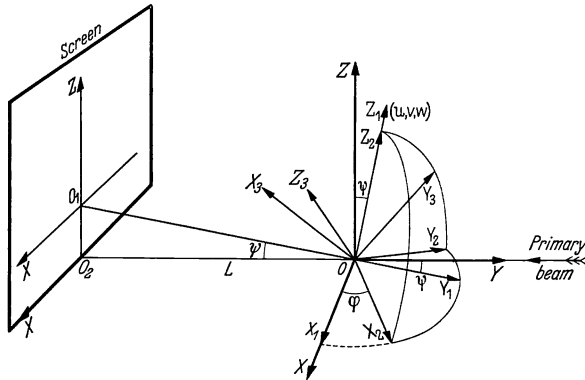


Fig. 25.

direction  $OY_2$  of zero azimuth in the  $(uvw)$  plane be taken as that lying also in the plane normal to  $(uvw)$  which contains the axis  $OY_3$ . If we take as origin of co-ordinates in the diffraction pattern the point  $O_1$ , where the  $\varphi$ -azimuthal direction in  $(uvw)$  meets the screen, with co-ordinate axes  $O_1X$  lying in the  $(uvw)$  plane (positive direction to the left as in Fig. 25) and  $O_1Z$  perpendicular to  $O_1X$ , then the equation of the  $n^{\text{th}}$  order KIKUCHI-line pair due to any net-plane with MILLER indices  $(hkl)$  and spacing  $d$  is, with sufficient accuracy,

$$C_2 z = -A_2 x + \left( B_2 L \pm \frac{n \lambda L}{2d} \right), \quad (\text{I4})$$

where

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= A_3 \cos \varphi - B_3 \sin \varphi, \\ B_2 &= A_3 \sin \varphi + B_3 \cos \varphi, \\ C_2 &= C_3; \end{aligned} \right\} \quad (\text{I4a})$$

and

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= (\lambda W - \nu U) / (1 - V^2)^{1/2}, \\ B_3 &= \{-\lambda UV + \mu (1 - V^2) - \nu VW\} / (1 - V^2)^{1/2}, \\ C_3 &= \lambda U + \mu V + \nu W; \end{aligned} \right\} \quad (\text{I4b})$$



and to a first approximation, for planes nearly normal to the screen,  $n\lambda L/d$  is the line-pair separation. We may note that

$$\sum \lambda^2 = \sum U^2 = \sum A_3^2 = \sum A_2^2 = 1. \quad (15)$$

If the crystal setting and lattice constants are known, equation (14) can be evaluated, and the indexing of the KIKUCHI lines follows from their slopes and their intercepts on the  $z$  axis, and conversely. The angle  $\varphi$  is here taken as the angle through which the crystal must be rotated in a positive sense, *i. e.* the sense of a right-handed screw rotation, about the positive direction of the  $(uvw)$  normal, to bring the crystal from the setting with  $OY_2$  in the plane of incidence of the beam on  $(uvw)$  into the position considered.

The axes  $OX_3 Y_3 Z_3$  can be conveniently taken so that the crystal  $b$  axis lies along  $OY_3$  and the  $a$  axis lies in the plane  $OX_3 Y_3$  on the positive side of  $X_3$ , whence the values of the direction cosines  $(\lambda\mu\nu)$  of the normal to any net-plane  $(hkl)$  for a triclinic crystal with respect to  $OX_3 Y_3 Z_3$  are as follows:

$$\lambda = (h/a + k \cos \gamma/b) \cdot d/\sin \gamma,$$

$$\mu = k d/b,$$

and

$$\nu = \{ a b l \sin^2 \gamma + b c h (\cos \alpha \cos \gamma - \cos \beta) + a c k (\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha) \} \cdot d/V \sin \gamma,$$

where

$$d = V/\{\Sigma a^2 b^2 l^2 \sin^2 \gamma + \Sigma 2 a^2 b c k l (\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha)\}^{1/2}$$

and

$$V = a b c (1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)^{1/2},$$

*i. e.*  $d$  is the net-plane spacing and  $V$  is the volume of the unit cell. As an example, we have for a cubic crystal,

$$\lambda = h d/a, \quad \mu = k d/a \quad \text{and} \quad \nu = l d/a,$$

where  $d = a/\sqrt{\Sigma h^2}$ . Hence in equation (IV, 14) we have  $d = a/\sqrt{\Sigma h^2}$ ,  $A_2$ ,  $B_2$  and  $C_2$  given by (14a) and

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= (h w - l u)/\sqrt{\Sigma h^2} \cdot \sqrt{u^2 + w^2}, \\ B_3 &= \{-h u v + k (u^2 + w^2) - l v w\}/\sqrt{\Sigma h^2} \cdot \sqrt{\Sigma u^2} \cdot \sqrt{u^2 + w^2} \\ C_3 &= (h u + k v + l w)/\sqrt{\Sigma h^2} \cdot \sqrt{\Sigma u^2}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

The above method can be supplemented by more direct geometrical constructions in the case of the simpler crystal settings, or by use of zone-axis relations for more complex patterns, and the connection of a line with one or more of the envelopes discussed below often provides another direct clue to the indices.

Analogous line patterns can be produced with  $X$ -rays; thus sharp line patterns were obtained by LINNIK (IV, 11) from quartz using

a divergent monochromatic  $X$ -ray beam, and from copper by KOSSEL and co-workers (*IV*, 12) who generated the  $X$ -rays in a single crystal anticathode. The intensity of the lines in the latter case has been discussed by LAUE (*IV*, 13).

The above idea of the origin of the KIKUCHI lines is no more than a convenient approximation which affords a simple picture during their indexing. Thus it is found that the sharpness of the lines varies inversely with the line-pair separation while, when this is small, as it will be for planes of large spacing, the line pair takes the form of a band with diffuse edges, although the higher orders of diffraction from the same plane are successively sharper. The intensity across such a band is found to decrease across the BRAGG reflection position from a high value to zero and to become negative with respect to the background, absorption edges thus occurring beyond the positions of enhanced intensity. When a band passes symmetrically through the undeflected spot it practically disappears near that region but at larger distances it remains visible with considerable intensity. As already mentioned in *II*, the band formation has been investigated by SHINOHARA (*IV*, 14) from the standpoint of the dynamical theory and by HAYASI (*IV*, 15) who estimated the distribution of secondary scattering, while LICHTENFELD and SCHWARZ (*IV*, 16) have shown that somewhat similar bands can be produced by a diffuse beam of light passing through a lattice model of corresponding scale with respect to the wavelength. Various interaction effects occurring at the crossing of two or more KIKUCHI lines have been studied by SHINOHARA (*IV*, 17), KIKUCHI and NAKAGAWA (*IV*, 18) and by BEECHING (*IV*, 19). LAUE (*IV*, 22) regards the KIKUCHI lines as originating from initial incoherent scattering at atoms with loosely bound electrons, the energy loss being only a few electron volts and thus negligible compared with the high primary electron energies used ( $\sim 50$  KV.). FINCH, QUARRELL and WILMAN (*IV*, 10) have, indeed, shown that no broadening of the lines can be detected when the pattern is displaced by a magnetic field.

A notable feature of the KIKUCHI-line patterns is that the lines due to definite groups of planes, each defined as a reciprocal lattice row, form remarkable black and white parabolic or circular envelopes. These envelopes have been discussed in detail by FINCH, QUARRELL and WILMAN (*IV*, 10), SHINOHARA (*IV*, 21) and LAUE (*IV*, 22). Well-defined circles were first observed in a stibnite single-crystal reflection pattern by EMSLIE (*IV*, 23), who regarded them as one-dimensional diffraction effects from the main atom rows of the lattice when these are parallel, or nearly so, to the beam, a view which was supported and extended by TILLMAN (*IV*, 24). FINCH, QUARRELL and WILMAN (*IV*, 10) showed, however, that the circles and parabolae could be explained as KIKUCHI-line envelopes, and that under suitable conditions such apparent circles can often be resolved into true polygons, as in Fig. 26; a fact which is in

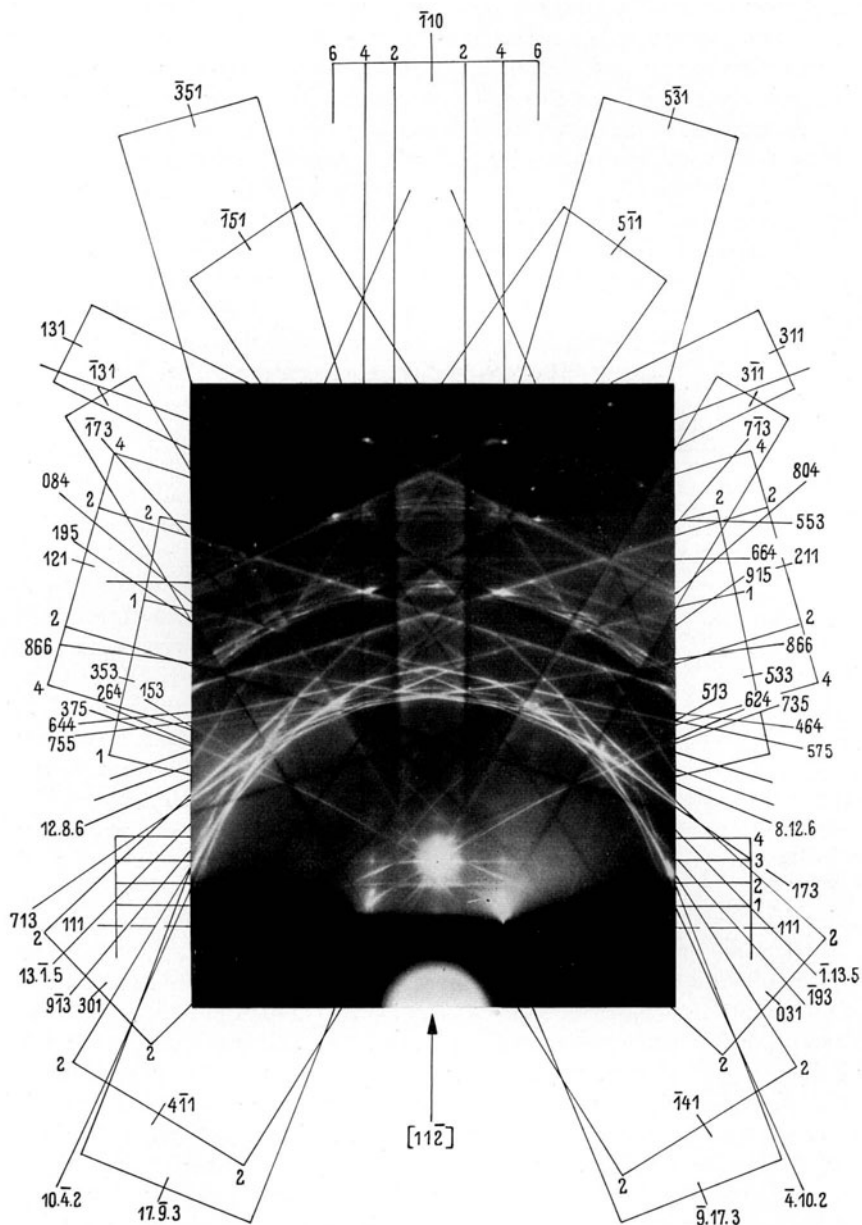


Fig. 26. Reflection pattern from a natural (111) diamond face,  $\varphi = 60^\circ$ ;  $L \cong 22$  cm.;  $E = 50$  KV.

agreement with the line-envelope interpretation but not with the one-dimensional diffraction view. SHINOHARA (IV, 21) has also arrived at

a similar conclusion and has shown generally that such limiting circular envelopes occur round the points of intersection of lattice rows with the screen, having exactly the same positions as the zones of reinforcement of these lattice rows for diffraction of beams initially parallel to the rows.

**Reflection from Single Crystals.** The above mechanism of the formation of single-crystal transmission patterns of spots and lines

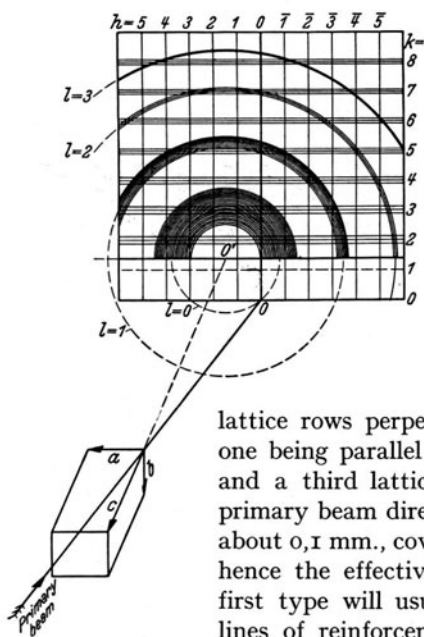


Fig. 27.

applies also to single-crystal reflection, but there are two additional factors which affect the form of the pattern, namely, the limited penetration of the electrons below the crystal surface and their refraction on entering and leaving the potential region of the crystal lattice at relatively small grazing angles. For the interpretation of the spot pattern it is usually simplest to consider the points of intersection of the LAUE zones of reinforcement from two of the more important lattice rows perpendicular, or nearly so, to the beam, one being parallel to the plane of the crystal surface; and a third lattice row approximately parallel to the primary beam direction as in Fig. 27. The beam width, about 0.1 mm., covers several hundred thousand atoms; hence the effective lengths of the lattice rows of the first type will usually greatly exceed 200 Å., and the lines of reinforcement will thus in general be sharp; while those due to the second type of lattice row normal to the beam will always be appreciably broadened, since the small angle of grazing incidence together with the limited penetration of the beam results in a shallow depth of crystal of the order of only 20 Å. being effective for coherent scattering. The third type of lattice row, parallel to the beam, is also always of limited effective extent, owing to the length of the path of the beam for coherent scattering being only of the order of 150 Å.; hence at least the innermost of the corresponding circular LAUE zones are never perfectly sharp. Fig. 27 is a diagrammatic illustration of the above conditions, and Fig. 28, obtained from a silicon carbide crystal, shows this type of spot pattern especially well. When the horizontal zones are very broad and the circular zones relatively sharp, as sometimes happens, a spot occurs with more or less strong intensity in the position of specular reflection in the plane of incidence over a practically continuous range of incidence angles. Similar spots occur at other parts of the zero-order circular zone, but in all cases the positions for maximum intensity correspond to those satisfying the

three LAUE conditions. Since the width of the  $h^{\text{th}}$  order circular zone is approximately equal to  $1/\sqrt{M_1}h$  times the radius of the zero-order zone, where  $M_1$  is the number of lattice points in the related lattice rows parallel to the beam, the zones with  $h > 1$  are nearly always fairly sharp, and hence the spots on these zones are also sharp. The extreme sharpness of the spots remote from the undeflected spot in Fig. 29, for example, is thus readily understood on these grounds.

When the crystal surface is rough, *i. e.* consists of many sub-microscopic projections integral with the atomic structure of the main mass of the crystal, as in any but the most perfect cleavage surfaces, the shortness of the atom rows in the projections will result in the formation of a more extensive spot pattern of rather diffuse circular spots, as in Fig. 30; and since the extent of the roughness may be expected to differ from crystal to crystal, we should expect the extent and form of the spot pattern likewise to vary appreciably with different crystals, even though of the same material. This is found to occur and, indeed, the two types of pattern — strong sharp spots on narrow circular zones, and diffuse spots of more uniform intensity on extensive circular zones — can often be observed in the same photograph, as in Figs. 30 and 31, indicating the presence of both rough and smooth areas on the same crystal surface. The change in the form of the spot pattern with further increase in roughness of the surface can be followed either by progressive etching or abrasion of the surface and examination in the diffraction camera. Thus a natural pyrites (001) face yielded the pattern Fig. 32, the vertically elongated spots testifying to the extreme smoothness of the surface, but after light abrasion of the surface with a fine-grade emery the pattern, Fig. 33, was obtained, showing more extensive and diffuse spots and a slightly more diffuse KIKUCHI-line pattern, which weakened after further abrasion while the spot zones became very prominent (Fig. 34). In a similar way a zinc-blende cleavage face initially yielding a strong pattern of bands with relatively few spots (Fig. 35), afforded on etching a pattern (Fig. 36) consisting almost entirely of strong, rather diffuse spots. THOMSON (*IV*, 25), KIRCHNER (*IV*, 26), RAETHER (*IV*, 27), TILLMAN (*IV*, 28), GERMER (*IV*, 29) and FINCH, QUARRELL and WILMAN (*IV*, 10) and their collaborators have made extensive studies of the effect of abrasion and etching on diffraction patterns from both metallic and ionic single crystals.

Besides the stationary crystal type of pattern it is often desirable to obtain rotation-reflection photographs analogous to the rotation patterns of X-ray technique, from which measurements of the position, form and intensity distribution of a considerable number of diffractions can be carried out simultaneously and without the complication due to KIKUCHI-line secondary scattering effects. In this case the crystal must be rotated during exposure of the plate, either in azimuth at constant angle of incidence to the primary beam, or with variation of the angle of incidence

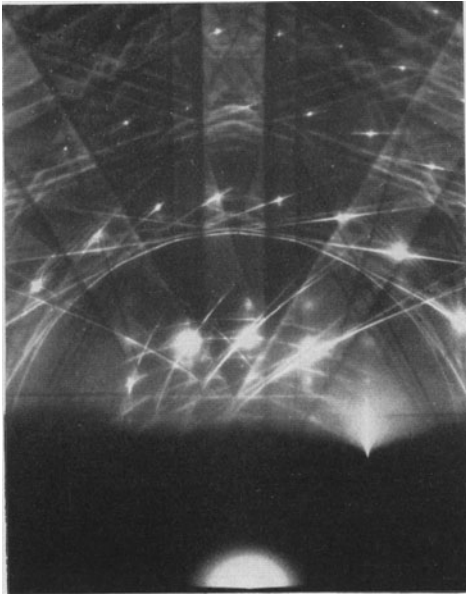


Fig. 28. Silicon carbide, (001) face, [110] azimuth.

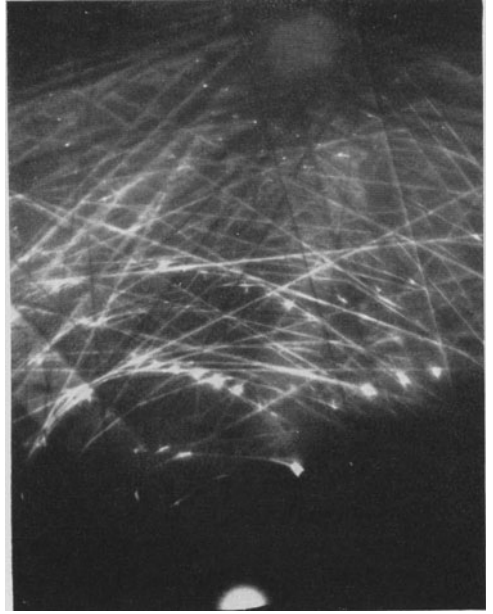


Fig. 29. Sapphire fracture.

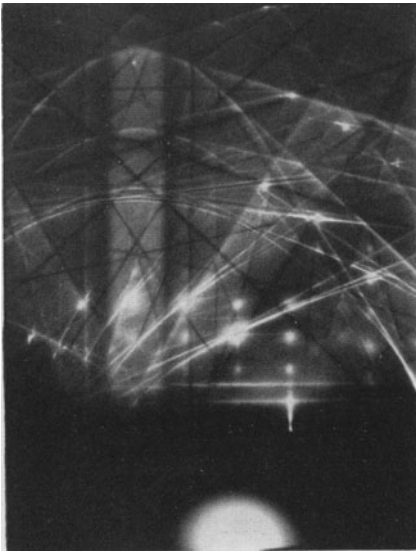


Fig. 30. Fluorspar (111) cleavage face.  $\varphi = 60^\circ$ .

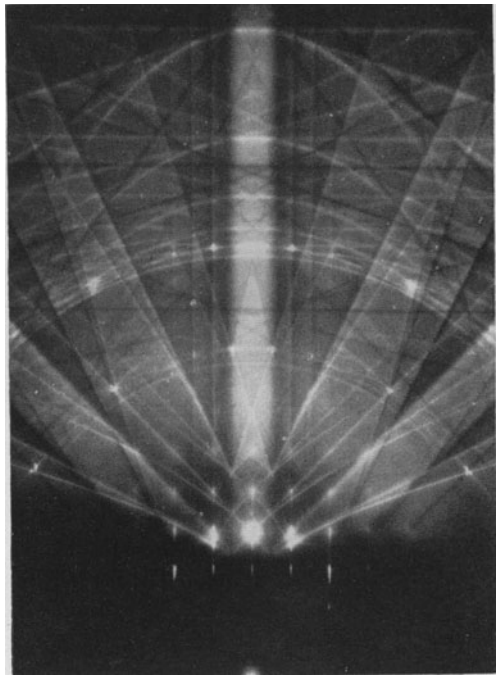


Fig. 31. Periclase, cube face, [100] azimuth.

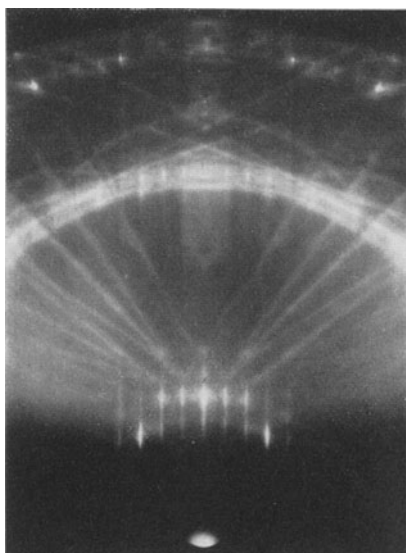


Fig. 32. Pyrites, natural cube face, [100] azimuth.

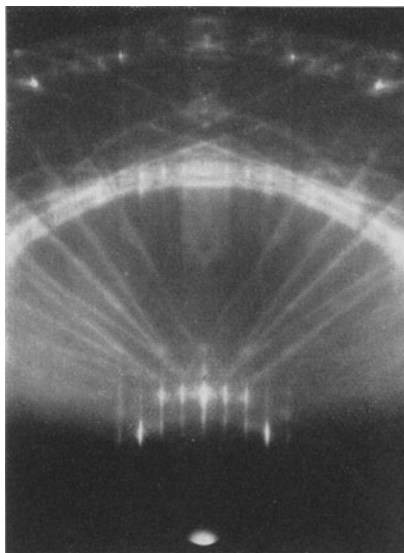


Fig. 33. Pyrites after light abrasion.

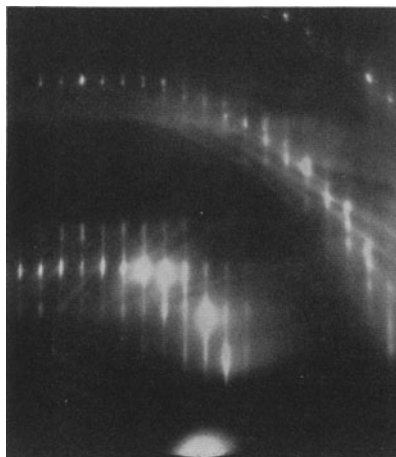


Fig. 34. Pyrites after further abrasion.

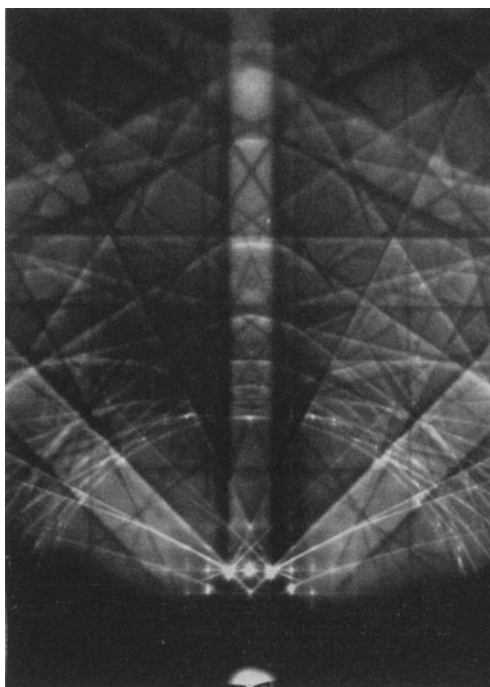


Fig. 35. Zinc-blende, (110) cleavage face.

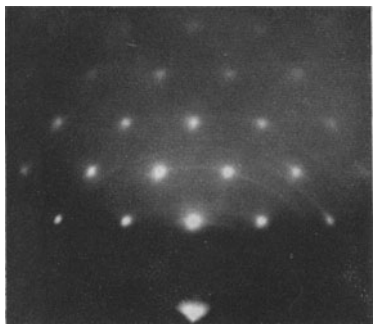


Fig. 36. Etched zinc-blende crystal, (110) cleavage face.

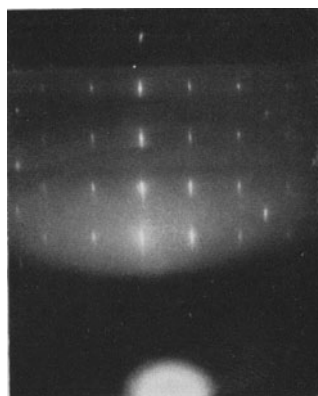


Fig. 37. Rotation-reflection pattern at constant angle of incidence from diamond (111) face.

at constant azimuth, using a specimen carrier of appropriate design (see III.) The first method yields, in general, a large number of diffractions in the region of the undeflected spot, and thus gives patterns suitable for the determination of the crystal lattice constants and structure-factor restrictions, or for indicating clearly the degree of smoothness of the crystal surface. Figs. 37 and 38, for example,



Fig. 38. Rotation-reflection pattern at constant azimuth, [110], from diamond (001) face.

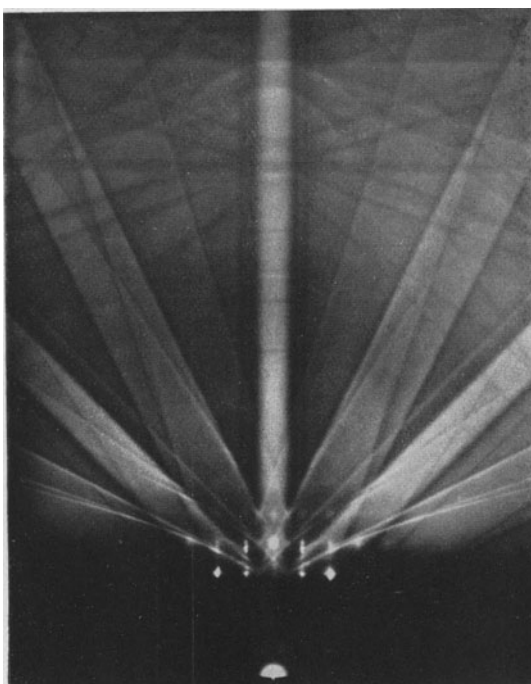


Fig. 39. Rocksalt, cube face, [100] azimuth.

show the broadness of the horizontal reinforcement zones and the sharpness of the vertical zones in a pattern from a particularly smooth



natural (111) and a polished (100) diamond face respectively. The second method, developed by YAMAGUTI (IV, 30), has been much used for the study of the effect of refraction on the positions of spots, more

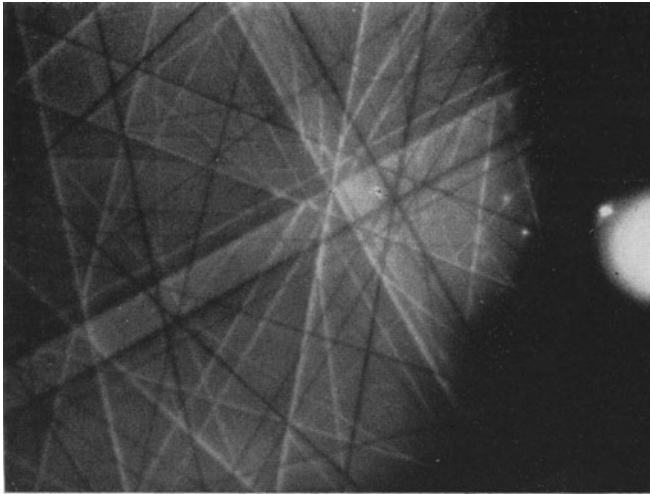


Fig. 41. Reflection from a rocksalt face cut in an arbitrary direction and lightly etched.

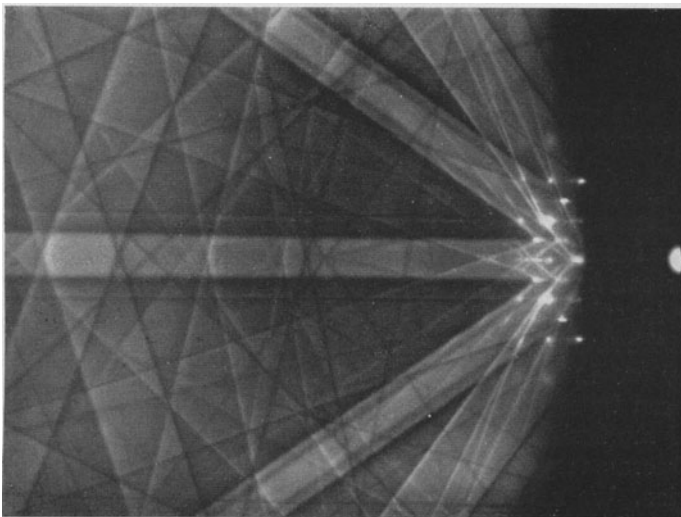


Fig. 40. Rocksalt, cube face, [110] azimuth.

especially of those lying in the plane of incidence, *i. e.* lying on the "equator layer line" of the pattern; but it is complicated by a broadening of the diffractions in a direction normal to the rotation axis, and thus along the layer lines, owing to the finite range of incidence angle ("Anregungsfehler") over which strong diffraction occurs. The

results obtained from a study of this latter type of pattern are outlined below in connection with the refraction effect.

The KIKUCHI-line patterns obtained by reflection are identical in form with those met with in transmission and discussed above. MEIBOM and RUPP (*IV*, 31) have shown, by means of photographs from NaCl, KCl, CaF<sub>2</sub>, diamond, calcite and quartz, that the main bands can be distinguished up to angles of deviation as large as 160° from the primary beam direction. Figs. 26, 30, 31, 35, 39 and 40, of which Fig. 26 has been indexed by the method already described, illustrate the changes in

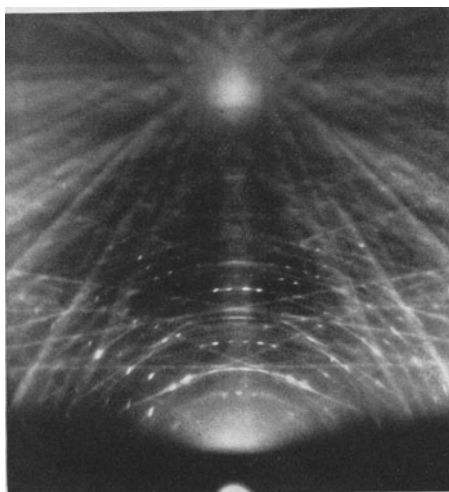


Fig. 42. Garnet, cut and polished facet.

the line pattern for crystals of the same type of space lattice (cubic) but with different atomic scattering powers and atomic arrangements. In Figs. 30, 31, 39 and 40, for example, it will be seen that only those KIKUCHI-line diffractions are present which have LAUE indices  $hkl$  all odd or all even, in accordance with the face-centred cubic structure of NaCl, MgO and CaF<sub>2</sub>. Similar patterns can be obtained from other faces, for example of NaCl, ground and polished with a fine grade emery, followed by light etching (Fig. 41). When the lines

with higher indices become stronger, owing to the greater scattering power of atoms of higher atomic number, the parabolic and circular envelopes become very noticeable. It is of interest to note, however, that diamond faces yield remarkably strong and clear patterns (Figs. 26 and 48) in spite of the low atomic number of carbon, and in these patterns the circular envelopes are clearly seen not to be fully developed, *i. e.* they are in fact polygons. An effect apparently not previously noticed can be seen in Figs. 26 and 28, namely that the absorption edges of the horizontal lines due to the planes parallel to the crystal surface become very prominent at a certain distance from the undeflected spot region. We have also observed this effect in patterns from calcite cleavage faces. When the crystal has a large unit cell there are many net planes of large spacing, and striking patterns of intersecting bands are obtained, such as Fig. 42 from a polished garnet facet, where the prominent main zone-axis region is that of a cube edge intersection with the plate, and the band system passing through it shows the four-fold cubic symmetry of this axis.

Another curious feature, for which no satisfactory explanation is so far forthcoming, consists in the formation of rows of elongated spots in between, and sometimes also superposed on, the main spots in certain single crystal reflection patterns such as have been obtained by KIRCHNER and LASSEN (*IV*, 32) from silver and by FINCH and WILMAN (*IV*, 6) from graphite.

Hitherto practically the only published KIKUCHI-line patterns are from ionic inorganic single-crystal cleavage or natural faces, but we have found that reflection patterns of sharp lines and bands of a similar character can also be obtained from crystals of layer-lattice structure, such as graphite (*IV*, 6, 33) and cadmium iodide, from the more complex ionic crystals such as potassium chromate and, further, from organic crystals such as cane sugar, ammonium oxalate and benzoic acid. In none of these cases have effects been obtained analogous to the diffuse zones which we have so frequently met with in diffraction by many thin organic crystals. STORKS and GERMER (*IV*, 34) have recently obtained banded effects in reflection patterns from lard, stearic acid and methyl stearate crystals deposited from solution in benzene, but these bands appear to be confined to the spot rows. Clear KIKUCHI-line patterns can also be obtained from metal crystals. Thus Fig. 43 was obtained from a copper crystal by Dr. FORDHAM in this laboratory, and a tin crystal cast on glass and slowly cooled yielded similar patterns. The difficulty hitherto experienced in securing KIKUCHI-line reflection patterns from metal crystals would seem to be largely a matter of obtaining good specimens. It is easy to see that a relatively slight distortion of the crystal would spread the lines and cause them to be lost in the background of general scattering.

The other factor characteristically affecting the single-crystal reflection pattern, namely the refraction of the electrons at the crystal boundary, may be said to cause primarily a shift of the diffraction pattern towards the shadow edge, such that the amount of shift of any point in

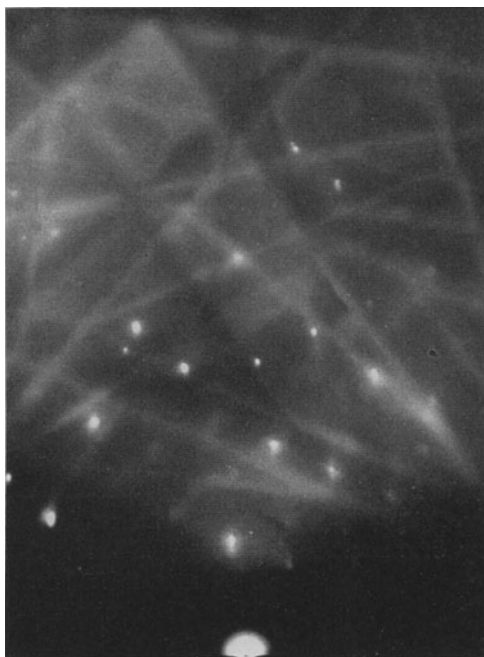


Fig. 43. Etched copper single crystal.

the pattern from its position if no refraction had occurred increases rapidly with its closeness to the shadow edge. Thus, when an electron initially accelerated through a potential  $E$  moves in an electrostatic field  $V$ , the SCHRÖDINGER equation becomes

$$\nabla^2 \psi + \frac{8\pi^2 m e}{h^2} (E + V) \psi = 0,$$

and the solution is

$$\lambda = h/\{2 m e (E + V)\}^{1/2}, \quad (17)$$

equivalent to de BROGLIE'S law. If we assume that the field outside the crystal is zero, while inside it has a mean value  $V_0$ , then the wavelength outside the crystal is

$$\lambda = h/(2 m e E)^{1/2}, \quad (18)$$

while inside the crystal

$$\lambda' = h/\{2 m e (E + V_0)\}^{1/2}, \quad (19)$$

whence the refractive index of the crystal, as was shown by BETHE (IV, 35), is

$$\mu = \lambda/\lambda' = (1 + V_0/E)^{1/2}. \quad (20)$$

The values so far obtained experimentally for the inner potentials of crystals by the diffraction of fast electrons are all positive and of the order of 10 volts, the least yet found being about 4 volts for pyrites and the highest, 21 volts for diamond. Experimental determinations of crystal potentials are of interest, not merely in relation to the effects produced in the diffraction pattern, but also as a basis for the calculation by SOMMERFELD'S equation of the work function  $\chi$  for the emission of electrons from a crystalline surface.

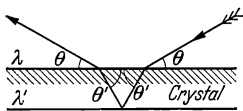


Fig. 44.

The positions of the diffraction maxima follow by combination of (20) with the LAUE conditions (2a, b, c) or BRAGG'S law (13). With the latter, for the special case of the diffractions in the plane of incidence from planes parallel to the surface, we must replace the external grazing angle  $\theta$  by  $\theta'$  inside the crystal (Fig. 44) where, from SNELL'S law,

$$\cos \theta/\cos \theta' = \mu = \lambda/\lambda', \quad (21)$$

so that

$$2 d \sin \theta' = n \lambda' = n \lambda/\mu \quad (22)$$

and, since

$$\lambda = h/m v \doteq (150/E)^{1/2} \quad (23)$$

if we neglect the relativity variation of  $m$ ,

$$\sin \theta' = (n/2 d \mu) \cdot (150/E)^{1/2} \quad (24)$$

whence

$$\sin^2 \theta = n^2 \lambda^2/4 d^2 - (\mu^2 - 1), \quad (25)$$

or

$$\sin^2 \theta = 150 n^2/4 E d^2 - (\mu^2 - 1). \quad (26)$$

Thus by (20)

$$V_0 = 150 n^2/4 d^2 - E \sin^2 \theta, \quad (27)$$

from which if  $E$ ,  $\theta$ ,  $d$  and  $n$  are known,  $V_0$  can be calculated. When the relativity change of  $m$  is considered,

$$\begin{aligned} \lambda &= h (1 - v^2/c^2)^{1/2} / m_0 v \\ &= (150/E)^{1/2} / (1 + e E / 600 m_0 c^2)^{1/2} \\ &= (150/E)^{1/2} / (1 + E \cdot 10^{-6})^{1/2}, \end{aligned} \tag{28}$$

whence

$$\sin^2 \theta = \{150 n^2 / 4 d^2 E (1 - E \cdot 10^{-6})\} - (\mu^2 - 1). \tag{29}$$

TILLMAN (IV, 28) has expressed this as

$$E_r \sin^2 \theta = (150 n^2 / 4 d^2) - V_0 E_r (1 - \sin^2 \theta') / E,$$

where

$$E_r = E (1 + E \cdot 10^{-6}).$$

Thus approximately, since  $\theta$  is small,

$$E_r \sin^2 \theta = (150 / 4 d^2) n^2 - V_0',$$

where

$$V_0' = V_0 \cdot E_r / E.$$

By plotting  $E \cdot \sin \theta$  against  $n^2$ , a straight line is obtained whose intercept on the  $E_r \sin \theta$  axis gives  $V_0'$  and whose slope gives the plane spacing  $d$ .

By (20),  $\mu$  depends on the electron speed, but the ratio of the angle  $\theta$  to that  $\Theta$  if there were no refractive index is given by

$$\sin^2 \theta = \sin^2 \Theta - (\mu^2 - 1) = \sin^2 \Theta - V_0 / E. \tag{30}$$

Therefore

$$\frac{\sin^2 \theta - \sin^2 \Theta}{\sin^2 \Theta} = \frac{V_0}{E} \cdot \left(\frac{z d}{n \lambda}\right)^2 = \frac{V_0 \cdot 4 d^2}{150 n^2}. \tag{31}$$

Thus the ratio  $\sin \theta : \sin \Theta$  is practically independent of the electron energy above about 100 volts, so that fast electrons are as useful as slow electrons for determining  $V_0$  experimentally, since the relative displacement of a diffraction is nearly the same.

From (30) we can derive the relation used by JENKINS (IV, 36), *i. e.*

$$z^2 = z_0^2 - 4 V_0 \cdot L^2 / E, \tag{32}$$

where  $z$  is the distance of a spot in the plane of incidence measured from the undeflected spot, and  $z_0$  is that which would have been found in the absence of refraction, taking  $z/2 L = \sin \theta$  and  $z_0/2 L = \sin \Theta$  in view of the smallness of these angles for fast electrons. The order of magnitude of the spot displacement is shown in Table I, calculated from  $V = 10$  volts,  $E = 45$  KV., and  $L = 28$  cms.

Table I.	
$z_0$ in cms.	$z$ in cms.
7	6.950
6	5.941
5	4.930
4	3.913
3	2.882
2	1.818
1	0.5506

A similar equation holds for the displacement of the KIKUCHI-line pattern, though in this case we have to consider only one refraction undergone by the electrons on emerging from the crystal. Thus, if the crystal surface is approximately normal to the screen, and if we take axes  $OX, OZ$  in the pattern, where  $OX$  lies in the shadow edge and

$OZ$  is normal to this in or near the plane of incidence of the primary beam, then the ordinate  $z_0$  of any point in the theoretical unrefracted KIKUCHI line pattern is decreased to  $z$  through refraction, in accordance with

$$z_0^2 = (1 + V_0/E) z^2 + V_0 (x^2 + L^2)/E,$$

*i. e.* 
$$z^2 = z_0^2 - V_0 \cdot L^2/E \quad (33)$$

when  $x \ll L$  and  $V_0 \ll E$ . The  $x$ -coordinate is unchanged. If the equation of a KIKUCHI line is  $z = mx + C$  for  $V_0 = 0$ , then for a finite value of  $V_0$  this becomes the hyperbola,

$$z_0^2 - m^2 x^2 - 2mCx + (V_0 L^2/E) + C^2 = 0, \quad (34)$$

which is rapidly asymptotic to  $z = mx + C$ . The effect of an inner potential  $V_0 = 10$  volts, when  $E = 45$  KV. and  $L = 28$  cms., is shown in Table 2. The refractive effect on the KIKUCHI lines is thus small except near the shadow edge, and is negligible in the case of transmission patterns where the angles made by the external crystal faces with the beam are large.

Table 2.

$z_0$ in cms.	$z$ in cms.
7	6.988
6	5.985
5	4.983
4	3.979
3	2.971
2	1.956
1	0.909
0.5	0.028
0.30	0.000

In spot patterns from good crystal faces a spot displacement of the type represented by equation (25) is actually observed, and in accordance with (27) only orders  $n$  of diffraction appear for which  $n > (V_0/E \cdot 2d/\lambda)^{1/2}$ . On the other hand, with rough crystal faces, where the electron beam is diffracted by passing through the crystalline projections, true transmission patterns are obtained, the spots being undisplaced. Patterns are often obtained, however, like Fig. 31, in which a continuous range of extension of spots occurs from the undisplaced positions inwards towards the shadow edge. This effect may perhaps be due to an intermediate degree of roughness of the crystal surface, combined with the fact that the potential at the crystal boundary decreases to zero gradually, rather than abruptly (*IV*, 37). If the beam is nearly parallel to the line of intersection of two crystal faces, simultaneous extension in two directions, *i. e.* normal to the respective shadow edges, may occur as in Fig. 45, obtained from a haematite crystal; an effect which illustrates YAMAGUTI's (*IV*, 30) explanation of the form of the spots obtained from zinc-blende.

Under certain circumstances a spot elongation may occur, which is much greater than that normally met with, although the extension is as a rule, but not always, in the usual direction, *i. e.* from the unrefracted position inwards towards the shadow edge. FINCH and WILLIAMS (*IV*, 39) obtained patterns such as Fig. 46 from macrocrystalline copper and cuprous oxide surfaces, and also from thin nickel layers electrodeposited on such surfaces. GERMER (*IV*, 40) has also obtained similar patterns from cuprous oxide. A notable feature of these patterns is that a single diffraction spot is often the starting point of several diffraction streaks (as many as five have been observed emanating from one spot) which lie in

apparently arbitrary directions, though most are normal, or nearly so, to the shadow edge cast by the surface of the disc. These streaks do not seem to be explicable in terms of strain in the crystal and, though they appear to be in part analogous to those in Fig. 45, the lengths of the streaks, for example 0.6 cm. at 3 cms. from the undeflected spot, suggests that refraction at smoothly irregular surfaces is not the whole cause of the streak formation. Fig. 47 obtained from a curved surface of rocksalt cleaved after bending under water, shows a very large extension of the spots, when the beam is normal to the axis of curvature, which join up into almost continuous lines. Hence it seems possible that some at least of the streaks in Fig. 46 may be due to crystal distortion.



Fig. 45. Haematite: beam grazing intersection of two natural faces.

The effect of refraction is not usually very noticeable in KIKUCHI-line patterns, though it has been used for the estimation of crystal inner potentials, mainly in the case of the lines due to the net-plane group parallel to the surface. With diamond, for which  $V_0 = 21$  volts, however, the curvature of the lines near the shadow edge is very marked, as for example in Fig. 48, where the mutually perpendicular bands at  $45^\circ$  to the shadow edge would otherwise intersect at  $90^\circ$  in a square region.



Fig. 46. Macrocrystalline copper.

The first reliable experimental determinations of refractive indices were made by YAMAGUTI (*IV*, 30), who let the beam graze cylindrically bent mica and molybdenite sheets, thus obtaining the equivalent of a rotation pattern showing many orders of diffraction from the cleavage plane. Since then many workers have assumed that an equation such as (25) holds for diffractions arising simultaneously from a stationary crystal by reflection, and have thus estimated the inner potentials of a number of crystals; but another method, developed by YAMAGUTI (*IV*, 30), in which the crystal is rotated so as to vary the angle of incidence at constant azimuth, thereby recording a large number of maxima in the one pattern, has been more successful and has been used in many

determinations of inner potential. From measurements of patterns of this type from molybdenite YAMAGUTI (*IV*, 41) first observed smaller

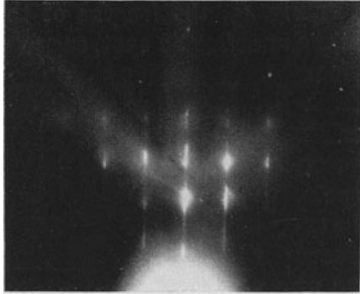


Fig. 47. Curved rocksalt cleavage plane.

apparent  $V_0$  values calculated from the lower orders of diffraction and found that they approached asymptotically a limiting value at high orders, an effect which he suggested might be due to an exponential decrease in the mean lattice potential near the surface. This result has been given a more general theoretical interpretation by LASCHKAREW (*IV*, 42), and has been studied further experimentally in the case of molybdenite (*IV*, 43), pyrites (*IV*, 44), zinc-blende (*IV*, 45), and vivianite (*IV*, 46). A simplified form of BETHE's dynamical theory was applied by KIKUCHI (*IV*, 47) to a study of the effect of

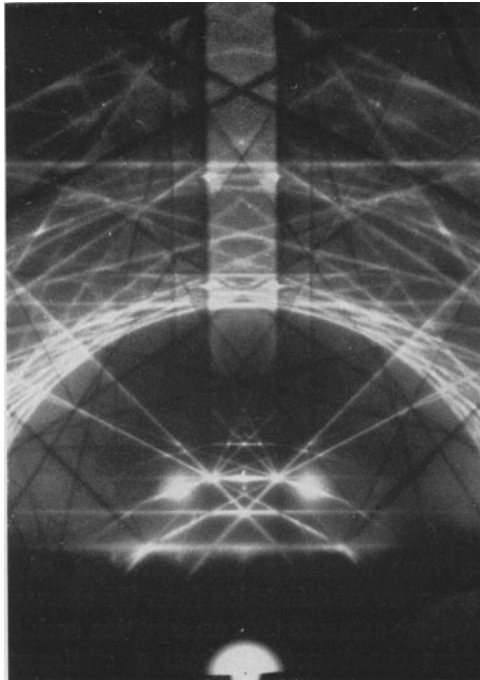


Fig. 48. Diamond, polished (110) face, [100] azimuth, showing refractive bending of Kikuchi lines near shadow edge.

refraction for cubic crystals, who concluded that such a variation of apparent refractive index with order number is in accordance with the dynamical theory of scattering.

**Transmission through Polycrystalline Films.** In considering the diffraction pattern, a polycrystalline specimen can be regarded as equivalent to a single crystal rotated through the same range of orientation as exists in the specimen. If there are many crystals with random distribution in the path of the primary beam a pattern of rings results, such as Fig. 49, analogous to the  $X$ -ray HULL-DEBYE-SCHERRER or "powder" pattern. It has been pointed out by THOMSON (*IV*, 48) and FINCH,

QUARRELL and WILMAN (*IV*, 10) that, owing to the small coherent penetration of even fast electrons, electron-diffraction patterns relatively



clear from diffuse background can only be obtained from specimens composed of very thin crystals; thus, for example, if the pattern Fig. 13 were rotated about the undeflected spot, the rings traced by the spots would for the most part be veiled by the strong background scattering. Unlike the *X*-ray powder pattern, its electron-diffraction prototype is therefore usually due to crystals each of which gives rise to a pseudo-cross-grating pattern of spots, such as Fig. 9, characteristic of the crystal setting. Any diffraction spot, however, only attains its maximum intensity at the position corresponding to reflection of the primary beam in the corresponding net plane at the BRAGG angle; hence BRAGG's law gives the angular radii,  $2\theta$ , of the maxima of the diffraction rings in the pattern, just as in the case of *X*-rays, and since these angles are small for fast electrons we have, to a close approximation,

$$d_{hkl} = \lambda L/R_{hkl}, \quad (36)$$

where  $L$  is the camera length and  $R_{hkl}$  the radius of the  $hkl$  diffraction ring. The diffractions are indexed and the lattice constants calculated as with the *X*-ray powder pattern and with similar restrictions imposed by decreasing crystal symmetry.

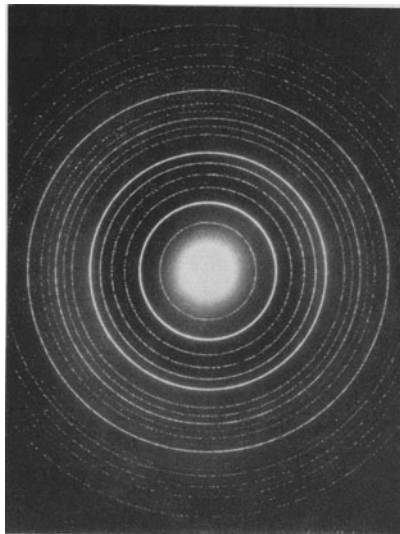


Fig. 49. Ammonium chloride.

In using HULL-DEBYE-SCHERRER ring patterns in connection with the determination of the crystal structure of a material, intensity measurements are of great value in *X*-rays, but the interpretation of the intensities in electron-diffraction patterns is not only complicated by the pseudo-cross-grating nature of the pattern and by multiple scattering or dynamic interaction effects, but also by the fact that the crystals in a thin film have usually at least one, more or less well-defined, preferred direction of orientation. The type of orientation most frequently met with is that where all the crystals tend to have a single degree of orientation, *i. e.* with net planes of a certain type all parallel, though with random distribution of the remaining possible orientations. This type of orientation is defined by stating either the indices of the net-planes which are parallel, or those of the lattice row normal to this plane. Such a lattice row may be called the orientation or "fibre" axis. In this case the specimen is equivalent to a single crystal which is thin in the direction of the orientation axis and rotated about this axis in the path of the beam. Thus any given diffraction  $hkl$  may be regarded as due to reflection

of the primary beam in the corresponding net-plane group when this takes up the setting in which it makes the BRAGG angle  $\theta$  to the beam. Clearly the  $hkl$  diffraction must lie on the corresponding ring position of the HULL-DEBYE-SCHERRER pattern at a point usually defined by an azimuthal angle  $\delta$ , (Fig. 50) measured from the projection of the orientation axis on the photographic plate, and given by

$$\cos \delta = \frac{(\pm \cos \beta) - \cos \alpha \sin \theta}{\sin \alpha \cos \theta}, \quad (37)$$

where  $\alpha$  is the inclination of the orientation axis to the beam,  $\beta$  is the angle between the  $(hkl)$ -plane normal and the lattice row  $[uvw]$  or equivalent plane normal defining the orientation axis, and  $\theta$  is the BRAGG angle. For fast electrons  $\theta$  is small, and

$$\cos \delta \doteq \pm \cos \beta / \sin \alpha, \quad (38)$$

the approximation being equivalent to supposing that the  $hkl$  diffraction arises when the  $(hkl)$

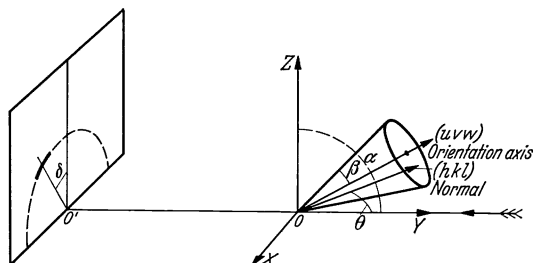


Fig. 50.

plane is parallel to the primary beam. Thus each net-plane in general gives rise to four spots or arcs lying on the  $hkl$ -ring position and if, owing to the crystal symmetry, several types of net-planes have the same spacing they will each give rise to such a set of arcs.

A much simpler and more graphic way of defining the positions of the diffractions is to use the fact that any diffraction  $hkl$  must lie at the intersection of the  $hkl$  ring with the corresponding  $l^{\text{th}}$  order layer line or "reinforcement zone" due to the lattice row parallel to the orientation or "rotation" axis  $[uvw]$ , where

$$l' = uh + vk + lw. \quad (39)$$

In the general case for electron diffraction, the layer lines are practically straight with spacing  $\lambda L/c' \cos \theta$  when the axis  $c' \equiv [uvw]$  makes an angle  $\theta$  with the setting normal to the beam, where  $c'$  is the lattice-point spacing along  $[uvw]$ ; and their breadths are roughly  $\lambda L/M_0 c' \cos \theta$ , if the crystals have the mean number of lattice points  $M_0$  in the  $[uvw]$  rows. The diffractions, as defined in position in the above way, also fall into other groups with simple index relationships, forming loci analogous to the "row lines" in X-ray rotation photographs. Thus the three LAUE conditions for diffraction can be represented by the conditions that the diffractions must lie at the intersections of the above layer lines due to the  $[uvw]$  lattice row  $c'$ , with the loci of diffraction maxima corresponding to any two other axes  $a'$ ,  $b'$  conveniently taken as two main lattice rows  $[u_1 v_1 w_1]$  and  $[u_2 v_2 w_2]$  in the plane normal to  $[uvw]$ . The  $h'k'$  cross-

grating reciprocal-lattice lines due to any one crystal form a set perpendicular to the plane  $a'b'$ , *i. e.* parallel to  $[uvw]$ , and the reinforcement directions are given by the intersection of these lines with the sphere of reflection. Hence the loci of the cross-grating reinforcement directions for all the crystals in the specimen can be obtained by rotating this reciprocal-lattice line system about the axis through the origin and parallel to the orientation axis, so that each  $h'k'$  line describes a cylinder whose intersection with the sphere of reflection, which is approximately a plane normal to the primary beam, is practically an ellipse, as in Fig. 51. Thus it will be seen that the  $h'k'$  loci on the photographic plate are sufficiently closely a set of ellipses whose major axes are parallel to the projection of the orientation axis on the screen, and the minor axes are the radii, normal to the latter, of the  $h'k'$  diffraction rings (indices with respect to  $a'b'c'$ ) corresponding to planes parallel to  $[uvw]$ , the ratio of major to minor axis in each ellipse being  $1/\sin \theta$ . Owing to the third LAUE condition for the  $c'$ , *i. e.*  $[uvw]$ , axis, the  $h'k'l'$  diffraction maxima appear only where these elliptic loci cross the  $[uvw]$  layer lines, all diffractions with the same  $h'$  and  $k'$  indices lying on the same elliptic locus. The relations between the  $h'k'l'$  indices and those  $hkl$  corresponding to the axes usually used are (39) and

$$\left. \begin{aligned} h' &= u_1 h + v_1 k + w_1 l, \\ \text{and } k' &= u_2 h + v_2 k + w_2 l. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

The layer lines and elliptic loci are strongly defined when the preferred orientation is closely followed, especially if  $[uvw]$  is a main lattice row. Thus cadmium iodide deposited in (001) orientation by condensation on to collodion gave the pattern, Fig. 52, where the layer lines correspond to  $l=0, 1, 2, 3, \dots$ , and the elliptic loci pass respectively through all the  $10l, 11l, 20l, 12l, 30l$ , etc. diffractions which can appear at the given inclination  $\theta$  of the specimen (IV, 9). Patterns of well-marked layer-line type are also obtained from organic substances, and

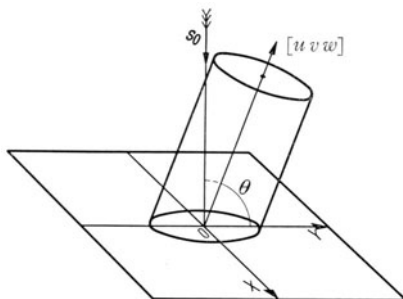


Fig. 51.

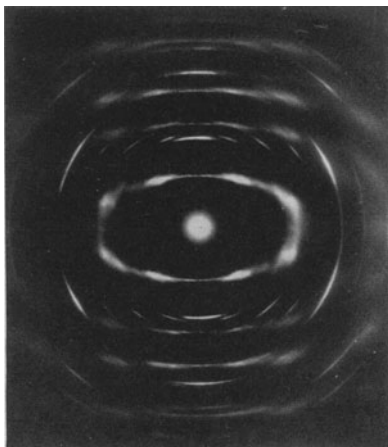


Fig. 52. Cadmium iodide, (001) orientation, film inclined to beam.

MOTZ and TRILLAT (*IV*, 49) have shown that with long-chain hydrocarbons the layer-line spacing corresponds to the alternate C—C distance along the chain, instead of to the true crystal-lattice translation.

This type of pattern, like the analogous X-ray rotation pattern, is useful in sorting out the diffractions into groups with related indices, whose spacings and relative intensities can be more conveniently studied than in random HULL-DEBYE-SCHERRER patterns. Besides the fact that the layer lines on a plane photographic plate normal to the beam are

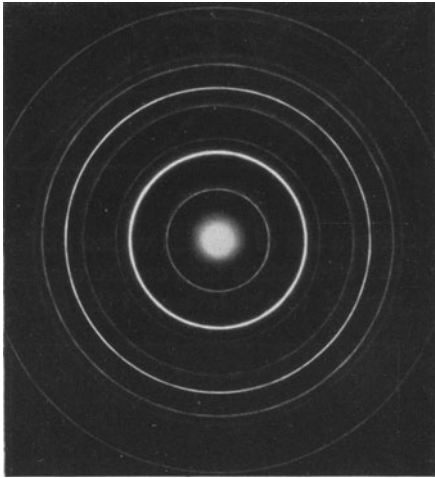


Fig. 53. Cadmium iodide, (001) orientation, beam normal to plane of specimen.

nearly parallel, an important feature of the electron-diffraction patterns, not met with in X-rays, is the appearance of strong complete rings (the limiting case for the ellipses,  $\theta = 90^\circ$ ) when the orientation axis is parallel to the electron beam; *i. e.* all rings with indices  $h'k'o$ , due to planes parallel to the beam, will appear with strong intensity, while all others will be weak or absent. This is another example of the pseudo-cross-grating type of pattern met with in electron diffraction, combined with the usual greater or lesser imperfection of orientation, and the ring formation can readily

be understood as equivalent to rotating a pattern such as Fig. 9 about the undeflected spot. That THOMSON (*IV*, 50), as long ago as 1928, had pointed out that the abnormal intensity distribution of such a complete ring pattern obtained from aluminium was due to orientation has sometimes been overlooked, with the result that abnormal crystal structures have been wrongly attributed to thin films of certain materials, a fact to which FINCH and QUARRELL have since drawn attention (*IV*, 51). Orientation can, however, usually be detected by inclining the specimen to the beam (see Figs. 52 and 53), thereby producing arcing of the rings (*IV*, 9, 10, 51); but with poorly defined orientation, especially with structures of a high order of symmetry, such as cubic, the many arcs formed on the rings tend to coalesce and thus obscure all such signs of orientation.

Transmission patterns have been used to study the growth and orientation of polycrystalline specimens with one degree of orientation, particularly by THOMSON (*IV*, 50), KIRCHNER (*IV*, 52), PRINS (*IV*, 53), TRILLAT (*IV*, 49, 54), FINCH (*IV*, 10) and their co-workers. It has been found that most substances, both inorganic and organic, when condensed

from the vapour, crystallised from solution, electrodeposited, cathodically sputtered, or deposited from colloidal solution or otherwise upon various solid substrates or liquid surfaces often take up characteristic preferred orientations of the above type.

Restriction of the second degree of freedom of orientation in a polycrystalline specimen is equivalent to a tendency to form a single-crystal mosaic, and if this orientation is followed closely the specimen yields a pattern of spots which is practically indistinguishable from that of a single crystal. More often the pattern shows, by the presence of diffractions belonging to zone axes other than parallel to the beam (*IV*, 55), or by arcing of the spots along the HULL-DEBYE-SCHERRER ring positions (*IV*, 51), that the specimens are really polycrystalline. The arced patterns yielded by beaten metal foils such as Au, Ag, Al, Cu, Pd, Pt, W, etc. are among the best known examples of this type of orientation. Other cases of special interest are the patterns, such as Fig. 54, yielded by electrodeposits of various metals on etched foils, which show that the deposited metal has followed the orientation of the substrate crystals very closely (*IV*, 56); and the metal films obtained by LASSEN and BRÜCK (*IV*, 57) by condensation upon a rocksalt cleavage face, which gave patterns of clearly polycrystalline type and with only one degree of orientation when the substrate was cool, though tending towards true single-crystal form, thick crystals yielding KIKUCHI lines (*IV*, 32), when the substrate temperature was suitably raised.

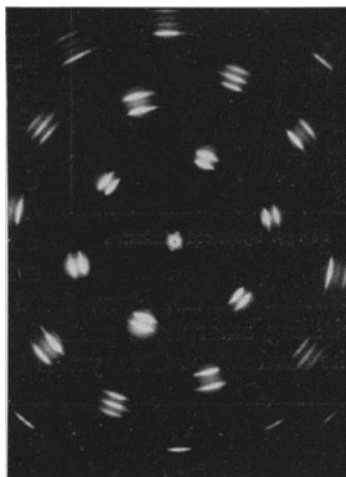


Fig. 54. Nickel electrodeposited on platinum in (110) orientation. The faint central pattern and some of the fainter outer diffractions are due to scattering of the nickel  $hkl$  beams by the underlying platinum.

**Reflection from Polycrystalline Surfaces.** The electron-diffraction ring patterns obtained at nearly grazing incidence from polycrystalline surfaces, must, as was early pointed out by THOMSON (*IV*, 58), be mainly due to transmission through the projecting crystals which the electron beam can traverse without appreciable energy loss; an argument which is substantiated by the fact that the ring positions usually show no marked displacement due to refraction. If the crystals have comparatively smooth surfaces of small curvature, however, the beam may enter and leave the crystals by parts of the surface inclined at only a small angle to the beam, so that the diffractions will be broadened owing to small penetration, and refraction will cause a displacement and further broadening of the rings near and towards the shadow edge. Such a

pattern from randomly distributed large crystals would roughly correspond to the rotation of, for example, Fig. 37 about the undeflected spot. No clear cases of ring patterns of this type have been met with, although KIRCHNER (*IV*, 59) and GERMER (*IV*, 40) suggest such an effect to explain the diffuseness of the reflection patterns from certain thin condensed metals and zinc sulphide layers respectively. The effect seems to be more clearly demonstrated by the drawing out of the arcs from the normal positions towards the shadow edge as in Fig. 55, yielded by an orientated sputtered platinum film.

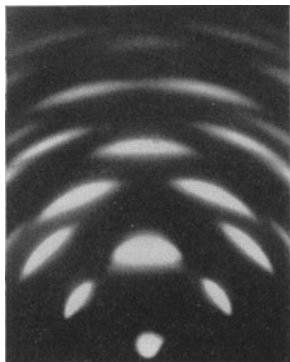


Fig. 55. Sputtered platinum.

The natural undisturbed orientation developed in most crystalline layers during deposition on inert substrates can often best be studied by the reflection method, using a smooth inactive plane substrate such as polished metals, glass, fused quartz, spinel or certain other crystals yielding amorphous polish layers. The orientation is nearly always of the kind where the crystals have one type of plane parallel to the substrate surface, but are otherwise at random. Hence arcing is most noticeable when the orientation axis is normal to the beam, as it will generally be in the reflection method.

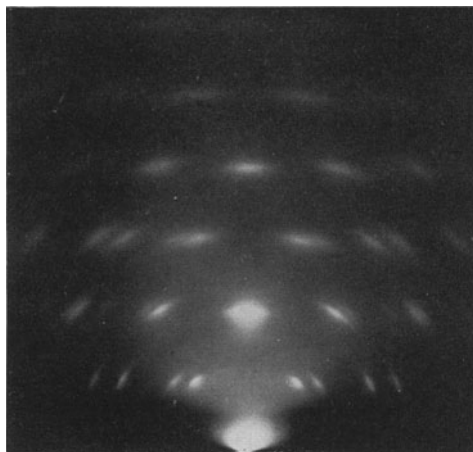


Fig. 56. Nickel, (110) orientation.

Further, the exactness of the orientation is likely to be decreased through the wrinkling which tends to occur if the thin films are removed from their substrate for examination by transmission (*IV*, 56), while the structure of layers too thick for transmission can also be followed at intervals by the reflection method, either during their formation,

for example, by electrodeposition, or while being thinned by etching.

The interpretation of the layer-line reflection patterns from specimens with one degree of orientation is similar to that of the corresponding transmission patterns described above, apart from the fact that rather more than half the pattern is cut off by the shadow of the main mass of the material. When the orientation is such that a plane ( $uvw$ ) is always

parallel to the substrate, the layer lines will be parallel to the shadow edge, and the orders of diffraction from  $uvw$  lie in the plane of incidence; hence the indices of the orientation are usually readily obtained. Fig. 56 will serve as an example of layer lines, and was yielded by a nickel surface which initially gave a ring pattern indicating a random distribution of the crystals; after acting as an electrode in a 2 N —  $H_2SO_4$  solution when an alternating potential of 12 volts was applied between the nickel and a carbon electrode, however, Fig. 56 was obtained, showing the re-arrangement of the crystals into strong (110), *i. e.* also [110], orientation.

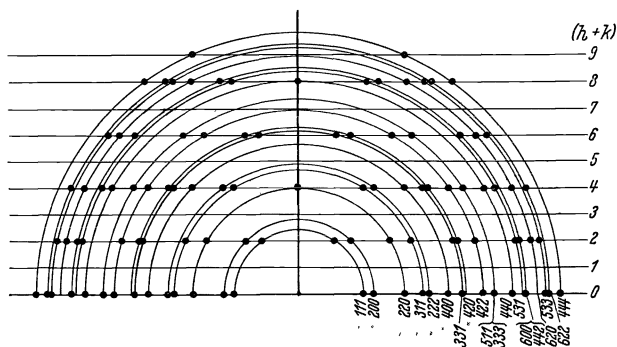


Fig. 57. F.-C. cubic; (110) parallel to surface.

The layer lines corresponding to  $l' = 0, 1, 2, 3, \dots$ , where  $l' = h + k$ , have the spacing

$$\frac{\lambda L}{T_{[110]}} = \frac{\lambda L}{a \sqrt{2}} = \frac{2 \sqrt{2} \cdot \lambda L}{4 a} = \frac{R_{220}}{4},$$

where  $R_{220}$  is the radius of the 220 ring. A diffraction spot or arc is formed at the intersection of any given layer line  $l'$  with a HULL-DEBYE-SCHERRER ring position if the indices of one or more of the diffractions  $hkl$  contributing to the ring satisfy the relation  $h + k = l'$  (Fig. 57).

Besides revealing a general tendency for the crystals to orientate in specimens prepared by condensation (*IV*, 10, 52, 61), sputtering (*IV*, 62), electrodeposition (*IV*, 10, 38, 56), evaporation of solutions (*IV*, 10, 33) and chemical attack (*IV*, 10, 63, 64) on massive substrates, the reflection method has shown that a strongly orientated recrystallisation often occurs on solidification of surfaces rendered momentarily liquid by polishing (*IV*, 60). Of special interest are the following further observations:— (a) several preferred orientations can exist in the same specimen (*IV*, 38, 56, 62); (b) alignment of orientation is often helped by using a heated substrate (*IV*, 10, 57, 61, 62); (c) the direction of the orientation axis in condensed layers depends on that of the incident vapour stream (*IV*, 61); (d) pseudomorphic effects may occur as well as orientation (*IV*, 61); (e) oxide films formed on liquid surfaces are very highly orientated (*IV*, 10, 51, 64); (f) long-chain hydrocarbon molecules stand

erect on surfaces on which they have been smeared or deposited from solution or the vapour state and thus give horizontal layer lines with superposed spots, the layer-line spacing corresponding to the alternate C—C spacing along the chain, and the spot arrangement to the distance between neighbouring hydrocarbon chains (*IV*, 65).

### V. Anomalous Diffractions.

The advances made in the last few years in the experimental technique of electron diffraction resulted in the recording of apparently anomalous diffractions which did not seem to be associated with the known structures under examination. Most of these anomalies have, however, since been satisfactorily interpreted and classified into groups according to the nature of their origin.

One of the earliest of these abnormal effects to be noticed was the appearance of certain so-called "extra" rings in patterns from polycrystalline materials, which were first thought to be diffractions with fractional-order indices similar to those reported as having been obtained with slow electrons (*V*, 1), though THOMSON (*V*, 2) pointed out that some of these might well have been due to KIKUCHI lines. The earlier diffractions of this type in patterns obtained with fast electrons have, however, since been definitely attributed to impurities. Thus the faint innermost ring, or rings, sometimes observed in transmission patterns from thin zinc-oxide films has been traced to an impurity, possibly a zinc silicate, in which the first skimmings from a freshly molten batch of zinc are usually rich (*V*, 3).

The patterns of sharp spots or rings, at first attributed by TRILLAT (*V*, 4), KIRCHNER (*V*, 5), TAYLOR-JONES (*V*, 6), and FINCH, QUARRELL and WILMAN (*V*, 7) to a crystalline structure in cellulose or its derivatives, were shown later by MARK, MOTZ and TRILLAT (*V*, 8) to be due to an adventitious contamination by hydrocarbons and greases, and to be the origin also of a similar group of "extra" rings sometimes observed in patterns from thin metal films. This ring system is very characteristic and varies but little with the length of chain of the hydrocarbons or their substituted compounds, such as the acids, alcohols or esters. Thus the "grease" pattern is always easily recognised and can be eliminated by washing the specimen with a suitable solvent. Other groups of "extra" rings occurring in transmission patterns from metals (*V*, 7) and peculiarly susceptible to change by heat treatment have since been traced by AYLMEYER, FINCH and FORDHAM (*V*, 9) to amalgamation and, although the patterns due to some predominant phases of these amalgam systems have been isolated and in some cases analysed, the variety and complexity of most amalgam patterns is such as to render it imperative to study metals prone to attack by mercury under such conditions as to preclude risk of contamination.



Another group of "extra" rings associated with a remarkable band system was found by FINCH, QUARRELL and WILMAN (*V*, 7) to occur particularly in patterns from face-centred cubic metals and were shown to be related to the normal rings characteristic of the metals. QUARRELL (*V*, 10) attributed these rings to a close-packed hexagonal modification of the metal formed during the initial stages of deposition, whether by electrodeposition or condensation from the vapour, followed by a gradual change with growth in film thickness through intermediate rhombohedral structures to the normal cubic form, the gradual transition from the one structure to the other giving rise to the band system. It is pointed out below, however, that this type of "extra" ring and band system almost certainly owes its origin to the criss-cross diffractions shown in Fig. 58 and which LAUE has, as we shall see, so convincingly connected with the nature of the external planes of the crystals and the general film shape. Nevertheless, it should not

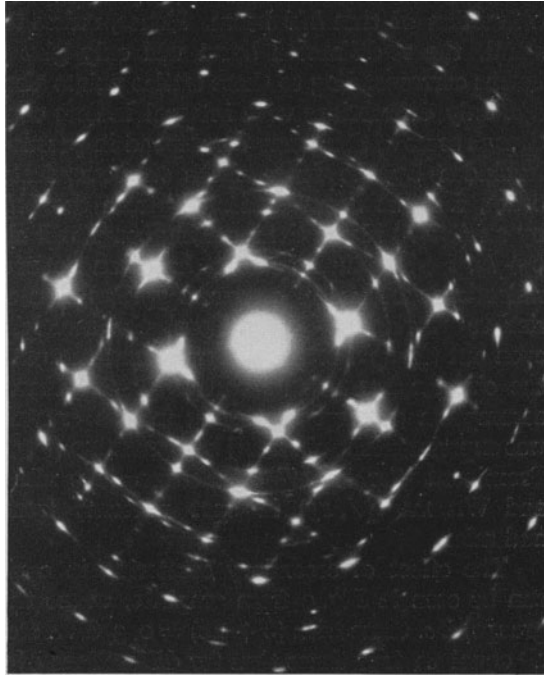


Fig. 58. Transmission through silver single-crystal film grown on rocksalt.

be overlooked that QUARRELL obtained, *inter alia*, a thin electrodeposited silver film which yielded a pattern characteristic of the close-packed hexagonal metal with lattice dimensions in accordance with the atomic diameter of silver, while with gold, nickel and cobalt a similar type of relatively intense pattern occurred, together with the normal pattern due to the cubic form. In connection with this we may also note that a hexagonal form of cobalt has previously been recognised by X-rays and that THOMSON (*V*, 11) and BÜSSEM and GROSS (*V*, 12) have identified a close-packed hexagonal modification of nickel in thin films formed by cathodic sputtering.

An important class of "extra" diffractions is the so-called "forbidden" type which, according to the kinematical theory, should normally be extinguished owing to structure-factor restrictions, but which nevertheless

appears, owing to the strong dynamic interaction of the electron waves inside the crystal. The formation of these "forbidden" diffractions can be pictured by supposing any beam corresponding to a spot in a single-crystal pattern, such as Fig. 9, to act as a new primary beam which is re-diffracted by the crystal. If the first diffraction has LAUE indices  $hkl$  the point  $[[hkl]]$  of the reciprocal lattice will lie on the EWALD sphere of reflection; but this is also the sphere of reflection for the secondary diffraction of that  $hkl$  beam. Hence, unless the crystal is exceptionally small, the re-diffracted beam will only give rise to further diffracted beams corresponding to those lattice points already lying on this sphere, *i. e.* only diffractions with integral indices can appear by this process, though some of these may correspond in position to diffractions normally forbidden by the form of the structure factor. If the  $hkl$  diffracted beam, *i. e.* the beam "reflected" from the  $(hkl)$  plane, is re-diffracted by an  $(h_1k_1l_1)$  plane, the resulting beam will clearly have indices  $h + h_1$ ,  $k + k_1$ ,  $l + l_1$ . Such an effect has been noticed by RAETHER (*V*, 13) in reflection spot patterns from a pyrites crystal. In addition to giving rise to "forbidden" diffractions, the multiple scattering will tend to even out the spot intensity throughout the pattern, and the breadths of the circular LAUE zones will be greater than those calculated on the assumption of single scattering from a crystal of known thickness, as was experimentally observed by KIRCHNER (*V*, 5) and DARBYSHIRE (*V*, 14). Prominent "forbidden" diffractions have also been obtained by FINCH and WILMAN (*V*, 15) in spot patterns from graphite, molybdenite, and mica.

The effect of secondary scattering in a single-crystal spot pattern can be seen in Fig. 9 from graphite, where the  $hko$  spots fall into two groups, *i. e.* those with  $(h + 2k) = 0, 3, 6, \dots$  etc. having a structure factor  $S^2$  equal to four times that for diffractions of the other group for which  $(h + 2k) \neq 0, 3, 6, \dots$  etc. In Fig. 9, however, all the spots have similar intensity apart from the circular zone intensification, an effect which seems to indicate very extensive interaction of the diffracted beams. The molybdenite  $hko$  diffractions show a similar effect, the  $S^2$  ratio between the two groups being 15:1; but in the  $hko$  cadmium iodide diffractions the structure factors of the two groups are  $(2\text{Cd} + 4\text{I})^2$  and  $(\text{Cd} - \text{I})^2$  respectively and, since the atomic numbers of Cd and I are 48 and 53, the former is about 3600 times the latter value, hence it is not surprising to find that the intensities of the two groups of  $hko$  diffractions still remain widely different. AMINOFF (*V*, 16) has also found that these two groups of  $hko$  spots are strong and weak respectively in patterns from brucite, where the intensity ratio should be about 50:1. A similar double or multiple scattering picture can be used for the qualitative interpretation of the intensity distribution in different orders due to the same net plane, and the appearance of the 222 diffraction from diamond (Fig. 26) can be explained in this way; on the other hand, it has long

been known to occur also with  $X$ -rays. The  $hko$  type of spots occurring in a diamond cube face, cube-edge azimuth rotation pattern are found to conform to the normal structure-factor restrictions, but the spots in Fig. 38, obtained at the cube-face diagonal azimuth, show a marked evenness of intensity distribution not to be expected according to the normal structure factor, while the  $2\bar{2}6$ ,  $2\bar{2}10$ ,  $2\bar{2}14$ ,  $4\bar{4}10$ ,  $6\bar{6}10$ , . . . etc. diffractions, which should be extinguished, have quite strong intensity. These differences from the expected intensity distribution can be attributed to strong secondary scattering.

The remarkable transmission patterns of the type first obtained by LASSEN (*V*, 17) from silver films grown on heated rocksalt cleavage faces contain diffractions to which integral indices cannot be assigned, although they are clearly related to the normal silver structure. LASSEN and BRÜCK (*V*, 18) found by means of reflection photographs that the silver lattice followed the orientation of the rocksalt, in spite of the difference be-

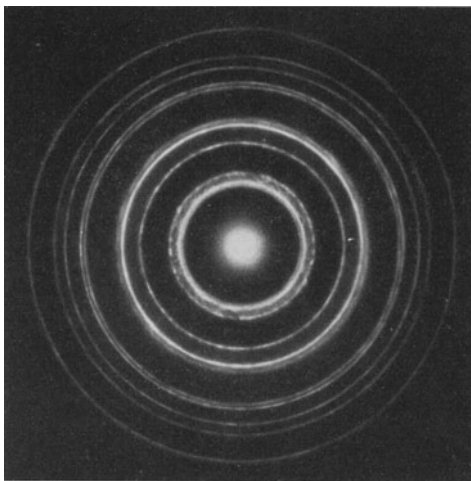


Fig. 59. Electrodeposited silver, showing band and "extra" ring system.

tween the lattice constants, about 4.08 and 5.63 Å, respectively, being such that the atomic arrangements in the planes in contact at the interface are far from fitting together in this orientation. We have recently observed a similar orientation and type of pattern not only on heated rocksalt but also on potassium bromide cleavage-face substrates (Fig. 58), although in the latter case the lattice-dimensional difference is even greater than that between rocksalt and silver. The streaks lying along the two main spot rows and passing through the 200 diffraction spots would give rise to a marked banded region in the case of a polycrystalline specimen, such as we have previously found with various electrodeposited metals, especially in patterns from silver films electrodeposited on to cadmium. In this case we had long ago observed that when the crystal size was so large that only a limited number of crystals were in the path of the beam, the bands showed a criss-cross line structure, as in Fig. 59, and strong spots occurred where the lines crossed the normal ring positions. Owing to this fact and to the appearance of similar though fainter streaks in patterns from cobalt electrodeposited on thinned copper foil, it would seem that in these cases the strong band formation is due, at least

in part, to the diffraction streaks associated with the abnormal type of pattern obtained by LASSEN and recently discussed by LAUE (*V*, 21).

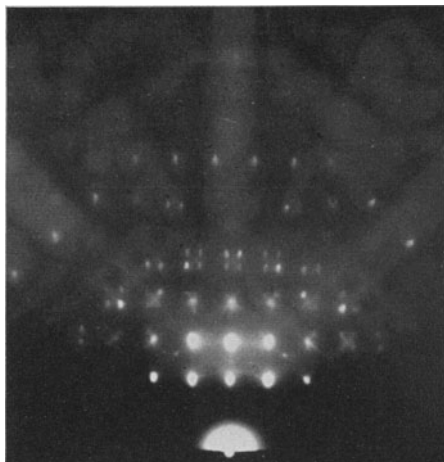


Fig. 60. Reflection from silver single-crystal film grown on rocksalt, (100) face, [100] azimuth.

the silver crystals were bounded by octahedral planes which gave rise to a cross-grating type of diffraction, represented in the reciprocal lattice

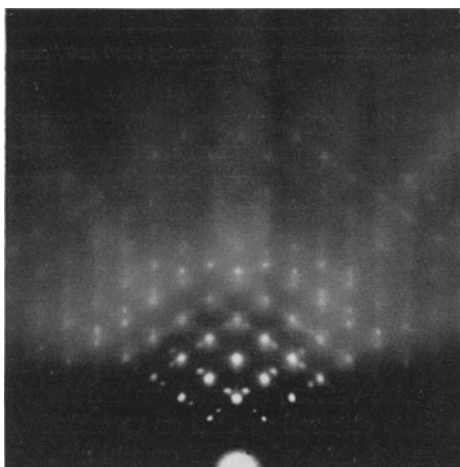


Fig. 61. Reflection from silver single-crystal film grown on rocksalt, (100) face, [110] azimuth.

construction by lattice lines parallel to the diagonals of the body-centred cubic unit of the reciprocal lattice. BRÜCK (*V*, 18), using the transmission method, has studied the orientation of Ag, Al, Au, Cu, Co, Ni, Pd, Cr and Fe condensed on to heated rocksalt cleavage faces and found that some of these face-centred cubic metals yielded patterns similar to those obtained by LASSEN from silver. A similar splitting-up of the spots into "satellites" has also been demonstrated by COCHRANE (*V*, 20) in some striking reflection patterns obtained from nickel and cobalt electrodeposited on to single crystals of copper. He suggested an interpretation of the spot positions and line diffractions on the basis of a repeated twinning on (111) planes.

KIRCHNER and LASSEN (*V*, 19) showed that abnormal diffraction spots appeared in reflection patterns from silver layers of about 300 Å. thickness vaporised on to rocksalt cleavage faces, while with films of about 1000 Å. thickness a normal type of spot pattern was obtained, together with a diffuse KIKUCHI-line pattern. Figs. 60 and 61, obtained by us on repeating the experiment show the type of spot pattern yielded by the thinner films. The positions of the spots in the patterns were found by KIRCHNER and LASSEN to be in agreement with the view that

the silver crystals were bounded by octahedral planes which gave rise to a cross-grating type of diffraction, represented in the reciprocal lattice construction by lattice lines parallel to the diagonals of the body-centred cubic unit of the reciprocal lattice. BRÜCK (*V*, 18), using the transmission method, has studied the orientation of Ag, Al, Au, Cu, Co, Ni, Pd, Cr and Fe condensed on to heated rocksalt cleavage faces and found that some of these face-centred cubic metals yielded patterns similar to those obtained by LASSEN from silver. A similar splitting-up of the spots into "satellites" has also been demonstrated by COCHRANE (*V*, 20) in some striking reflection patterns obtained from

LAUE (*V*, 21) has investigated the form of the "intensity regions" round the reciprocal-lattice points when the intensity of diffraction in any direction with indices  $hkl$  is represented as a function of the  $[[hkl]]$ -point coordinates in the reciprocal lattice. He deduced that the lattice points are surrounded by identical "intensity regions" in which the intensity function is greater than zero, and that the forms of these regions are almost wholly determined by the external shape of the crystal, are centrally symmetrical about the lattice points and have associated with them an extension or "prickle" in a direction normal to each type of boundary plane developed in the crystal, while enlargement of the crystal by a factor  $p$  in the direction of the  $(hkl)$  net-plane normal reduces the size of the reciprocal-lattice intensity region by a factor  $1/p$  in the  $[hkl]$  direction in the reciprocal lattice. Thus if the crystal is a plane disc the intensity region is broadened in a direction perpendicular to the disc. LAUE concludes that KIRCHNER and LASSEN'S assumption of an octahedral form of the silver crystals in their films and their reciprocal-lattice construction of the spot positions is correct, but that it is not necessary to assume any cross-grating action of the octahedral planes. The form of the reciprocal-lattice intensity regions for an octahedral crystal form has been calculated by LAUE and RIEWE (*V*, 21). COCHRANE'S nickel and cobalt patterns have also been ascribed by LAUE to a development of the (111) type of boundary plane (*V*, 21).

In the particular case where the crystal is in the form of a very thin sheet of large area, the diffraction pattern approaches to that which would be yielded by a pure cross-grating lattice. A true cross-grating would give  $hk$  diffractions at any setting, with positions varying continuously with inclination of the beam, as represented by the intersection of the EWALD sphere of reflection with continuous reciprocal-lattice lines. Such a lattice would naturally give diffractions in positions corresponding to quite unrestricted ranges of  $l$ -index values, and FINCH and WILMAN (*V*, 15) have, indeed, obtained patterns of this sort from exceptionally thin films of graphite, molybdenite, mica and cadmium iodide, which all yield continuous diffraction streaks if the crystals are bent, or rotated during exposure of the plate (Figs. 19, 20 and 21). We have found that similar two-dimensional streaks occur sometimes in patterns from very thin organic crystals. Furthermore, an easily cleaved layer-lattice crystal, such as mica, yields when powdered a pattern (Fig. 62) of circular bands swept out by two-dimensional streaks and with sharp

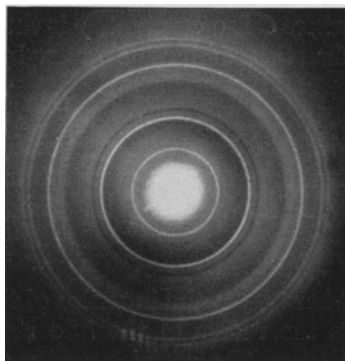


Fig. 62. Mica powder pattern.

inner edges corresponding to the  $hk0$  diffractions (*V*, 7, 27). Thus a large proportion of the crystal flakes in such specimens must be extremely thin. Similar bands have been obtained by BURGERS (*V*, 22) from silicates and from cadmium iodide by KIRCHNER (*V*, 5) and by FINCH and WILMAN (*V*, 15) who have shown that such pseudo-cross-grating powder patterns can be obtained with crystals of less than about 50 Å. in thickness.

LAUE (*V*, 21) has calculated the intensity distribution scattered by a random array of true cross-grating lattices to be

$$I_{hk} = \frac{C}{\sin \frac{\chi}{2} \cdot \left( \sin^2 \frac{\chi}{2} - \sin^2 \frac{\chi_0}{2} \right)^{1/2}}, \quad (1)$$

where  $C$  is a constant,  $\chi$  is the angle of deviation from the primary beam direction and  $\chi_0$  is given by

$$2 \sin \frac{\chi_0}{2} = \lambda |h a^* + k b^*| \quad (2)$$

if  $a^*$  and  $b^*$  are the reciprocal axes formed from the axes  $a$ ,  $b$  of the cross-grating with any other arbitrary, but most conveniently perpendicular, axis. For small angles of scattering (1) becomes

$$I_{hk} = \frac{C'}{R^2 \cdot (R^2 - R_0^2)^{1/2}}, \quad (3)$$

where  $I_{hk}$  is the intensity of the  $hk$  diffraction band at radius  $R$ , and  $R_0$  is the radius of the  $hk0$  ring corresponding to the three-dimensional lattice. The radial intensity distribution in the ring pattern due to the hexagonal cross-grating lattices of mica cleavage planes is thus similar to that shown by STEINHEIL (*V*, 27), and the band heads correspond in position with the  $hk0$  diffractions of the normal three-dimensional lattice. TRENDELENBURG (*V*, 23) found that in powder patterns from crystals with a single well-developed cleavage direction, such as graphite, kaolin etc., the diffractions from this plane were usually weak or absent, although with calcite the cleavage plane diffraction was present with about the expected intensity. Evidently, the layer-lattice crystal flakes are of such large extent in directions parallel to the cleavage plane that coherent diffraction is hardly possible, except by reflection at these faces when nearly parallel to the beam, while even then the lower orders will tend to be absent through refraction.

It was first noticed by FINCH and WILMAN (*V*, 15) that in patterns from polycrystalline graphite specimens the band and ring system just beyond the 100 diffraction could be resolved into a group of four well-marked rings, of which the innermost and third corresponded to the normal 100 and 101 graphite diffractions. It was found that these four rings were common to patterns from all graphite powders, irrespective of origin, and were therefore not due to impurities. Since these ring radii and the directions of arcing in orientated specimens corresponded closely to those of diffractions with indices  $10\frac{2}{3}$  and  $10\frac{4}{3}$ , a survey of reflection

and transmission graphite single-crystal patterns was carried out, resulting in complete confirmation of the structure previously assigned to graphite by  $X$ -rays. A clue to their origin was afforded by the discovery of continuous diffraction streaks in complex spot patterns from thin distorted flakes, which were intensified into strong spots where they crossed the normal HULL-DEBYE-SCHERRER ring positions, and also at intermediate points whose radial distances from the undeflected spot corresponded to those of diffractions with fractional indices or of diffractions with integral indices normally forbidden by structure-factor restrictions. FINCH and WILMAN showed that this phenomenon was confined to extremely thin flakes,  $< 50$  A., and ascribed the effect to the limitation of the lattice in the  $c$ -direction resulting in consecutive net-planes of a parallel group containing appreciably different numbers of atoms, so that the effective periodicity, or identity spacing, of these planes became a multiple of that characteristic of an infinite lattice; hence diffractions of corresponding sub-multiples of the normal integral indices would result ("fractional orders"). In order further to investigate the effect, similar patterns, such as Fig. 23, were obtained from very thin molybdenite flakes which were found to yield remarkably brilliant patterns of spots and streaks, with a quite surprising number of diffraction spots apparently occurring at definite positions and capable of being indexed with integral  $h$  and  $k$ , but fractional  $l$  indices; while, as with graphite, the forbidden diffractions III, II3, II5, . . . etc., occurred with considerable intensity.

Recently THOMSON (*V*, 24) suggested to us that the fractional-order diffractions obtained from very thin crystals might be due to the subsidiary maxima of the interference function, and on following up this suggestion it seems to afford a reasonable explanation of the origin of those diffractions which we have shown previously to be associated with crystal thinness. Thus, instead of considering an explanation in terms of an incompletely developed periodicity of net-plane systems, we start from the intensity of diffraction from a parallelepipedal crystal, given by equation IV (1) which applies for any crystal thickness, provided this is such that all the [001] lattice rows contain equal numbers  $M_3$  of atoms. Clearly for the flakes considered the numbers of atoms  $M_1$  and  $M_2$  in the  $a$ - and  $b$ -axial directions are large, since sharp  $ab$  cross-grating spots are observed, while the zones due to the short lattice rows in the direction  $c$  normal to the crystal flake will be broad, *i. e.* will have an intensity distribution varying with the  $l$  index in the way shown by Fig. 6, the subsidiary maxima having positions whose values (not integral) depend on the value of  $M_3$ . It can be shown (*V*, 25) that, although the maximum value of the function  $\sin^2 M_3 l \pi / \sin^2 l \pi$  is  $M_3^2$ , the ratio of the main to the nearest subsidiary maximum only rises to about 20, even when  $M_3$  becomes infinite, while for the thin films concerned here we can take the intensity of the nearest subsidiary maximum to be about

$1/15^{\text{th}}$  of that of the main maximum. Thus we should expect to observe diffractions corresponding in position to integral  $h$  and  $k$  indices but whose  $l$  indices differ from integers by approximately  $\pm 3/2 M_3$ , since the similar subsidiary maxima due to the  $a$  and  $b$  cross-grating zones will be indistinguishable from the main maxima, because  $M_1$  and  $M_2$  are so large. If we assume the observed fractional-order diffractions to arise in this way, it is possible to calculate  $M_3$  from the fractional  $l$  indices found, and hence to obtain the crystal thickness. Thus if the pairs of graphite diffractions  $10\frac{2}{3}$ ,  $10\frac{4}{3}$ ;  $10\frac{8}{3}$ ,  $10\frac{10}{3}$ ; ... etc., represent the subsidiary maxima on each side of the 101, 103, ... etc. diffractions we have  $3/2 M_3 = 1/3$ , whence  $M_3 = 4\frac{1}{2}$ . Thus the corresponding graphite flakes would appear to be about 4 unit cells thick. The presence of diffraction spots indexed as  $10\frac{3}{2}$ ,  $10\frac{5}{2}$ ,  $10\frac{7}{2}$ , ... etc., in graphite powder patterns indicates similarly the occurrence of flakes of other thicknesses in which  $M_3$  is about 4 and 6 respectively. Owing to the large axial ratio of graphite the diffractions with higher  $l$  index denominators from the thicker crystals are too close to the principal maxima to permit of measurement with sufficient accuracy for their identification. In the same way, the groups identified in Fig. 23 from molybdenite seem to show a preponderance of fractional-order diffractions with  $3/2 M_3 \doteq 1/5$ , *i. e.*  $M_3 \doteq 7$ , although many others appear which indicate the presence of flakes of both greater and lesser thicknesses.

The intensities of the pairs of subsidiary maxima according to the kinematical theory are given by the equation IV (1), and since  $f$  has approximately the same value, *i. e.*  $M_1^2 M_2^2 M_3^2 / 15$ , for all possible  $M_3$  values, the intensities of these satellites for different  $M_3$  values are proportional to  $S^2$ . In order to calculate  $S^2$  we have used the equivalent expression  $S_l^2 \cdot S_1^2$  where  $S_l^2$  is the structure factor for diffraction in the  $hkl$  direction by the pseudo-cross-grating unit parallel to the plane of the crystal flake, *i. e.* a single layer of the graphite or molybdenite layer lattice, and  $S_1^2$  is the factor taking into account the arrangement of these layers above each other. Thus, in the case of graphite, where the atomic coordinates in the unit cell are (000),  $(00\frac{1}{2})$ ,  $(\frac{1}{3} \frac{2}{3} u)$ ,  $(\frac{2}{3} \frac{1}{3} u + \frac{1}{2})$  with  $u \doteq 0$ ,

$$\begin{aligned} S_1^2 &= \bar{C}^2 \cdot \left[ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{h+2k}{3} \right) \right]^2 + \bar{C}^2 \left[ \sin^2 2\pi \left( \frac{h+2k}{3} \right) \right] \\ &= 2 \bar{C}^2 \cdot \left[ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{h+2k}{3} \right) \right], \end{aligned}$$

so that  $S_1^2/\bar{C}^2 = 4$  or 1 according to whether  $(h+2k)$  is equal or not to 0, 3, 6, ... etc. Also

$$\begin{aligned} S^2 &= S_1^2 \cdot \left[ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{2h+k}{2} + \frac{l}{2} \right) \right]^2 + S_1^2 \cdot \sin^2 \left( \frac{2h+k}{3} + \frac{l}{2} \right) \\ &= 2 S_1^2 \cdot \left[ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{2h+k}{3} + \frac{l}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Hence the variation of  $S^2$  for graphite diffractions  $10l$  type is given by the two full-line curves in Fig. 63 (which represents  $S^2/2 S_1^2$  for



molybdenite), when the two sets of  $(h + 2k)$  values in Fig. 63 are interchanged. These curves show the variation in relative intensity of the first subsidiary maxima with their  $l$  values, the latter being approximately an integer  $\pm 3/2 M_3$ . Thus the  $10(l - 3/2 M_3)$  diffraction would be expected to have a greater intensity than the  $10(l + 3/2 M_3)$  satellite when both lie on the same diffraction streak and thus come

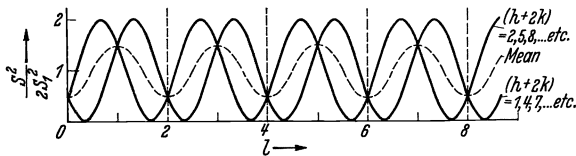


Fig. 63.

from the same crystal, while the converse would hold for the  $01(l \pm 3/2 M_3)$  diffractions. In the polycrystalline graphite ring pattern, however, the  $10l$  and  $01l$ , etc., diffractions will contribute to the same  $10l$  type of ring; hence we must take the average as shown by the dotted curve in Fig. 63. Accordingly the  $10\frac{2}{3}$  and  $10\frac{4}{3}$ , the  $10\frac{8}{3}$  and  $10\frac{10}{3}$  pairs of rings should have about equal intensity. The first pair are not easy to compare, owing to the presence of the underlying band and the strong neighbouring

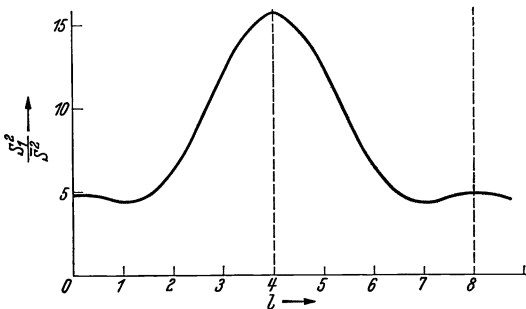


Fig. 64.

$100$  and  $101$  rings, but the  $10\frac{8}{3}$  and  $10\frac{10}{3}$  rings on either side of the  $103$  diffraction in the arced graphite patterns do appear with approximately equal intensity. The  $10\frac{5}{3}$  and  $10\frac{7}{3}$  are not observed, in accordance with the small intensity of the  $102$  diffraction. The displacement of the nearest subsidiary maxima from the positions with  $l$  equal to an integer  $\pm 3/2 M_3$  is found to be negligible for  $M_3 = 4$  or  $5$ .

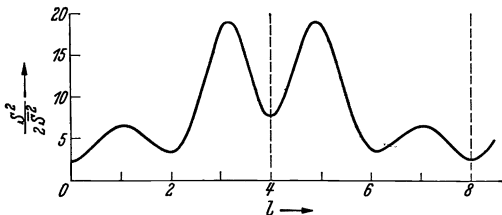


Fig. 65.

In the case of molybdenite, where the atom coordinates are  $2\text{Mo}$  at  $(000)$ ;  $(\frac{1}{3} \frac{2}{3} \frac{1}{2})$  and  $4\text{S}$  at  $(00 \frac{3}{8})$ ;  $(\frac{1}{3} \frac{2}{3} \frac{1}{8})$ ;  $(\frac{1}{3} \frac{2}{3} \frac{5}{8})$ ;  $(00 \frac{5}{8})$ , we have for a single molecular layer,

$$S_1^2 = \bar{M}o^2 + 4\bar{S}^2 \cdot \cos^2 2\pi \left(\frac{l}{8}\right) + 4\bar{M}o \cdot \bar{S} \cos 2\pi \left(\frac{h+2k}{3}\right) \cos 2\pi \left(\frac{l}{8}\right),$$

and

$$S^2 = 2 S_1^2 \cdot \left[ 1 + \cos 2\pi \left(\frac{h+2k}{3} + \frac{l}{2}\right) \right].$$

For the purpose of an approximate estimate we can put  $\bar{M}o = 2.5 \bar{S}$ , since the atomic numbers of  $Mo$  and  $S$  are 42 and 16 respectively. Then, if  $(h + 2k) \neq 0, 3, 6, \dots$  etc., as in the  $10l$  diffractions,

$$S_1^2 \doteq \bar{S}^2 \cdot \left[ 6 + 4 \cos^2 2\pi \frac{l}{8} - 5 \cos 2\pi \frac{l}{8} \right],$$

the variation of this expression with  $l$  being shown in Fig. 64. The complete structure factor  $S^2$  is obtained by multiplying the ordinates of this curve by the corresponding ordinates of the curve in Fig. 63, *i. e.*  $\left[ 1 + \cos 2\pi \left( \frac{h+2k}{3} + \frac{l}{2} \right) \right]$ . For a ring pattern the mean must be used as above, giving the curve, Fig. 65, for the relative ring intensities for

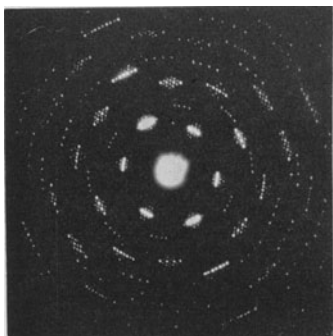


Fig. 66. Abnormal transmission pattern from n-hexadecyl alcohol.

any pair of fractional order diffractions near a normal main diffraction. The ring pattern is not fully formed in Fig. 23, but both the relative intensities of the normal diffractions and those of the pairs of fractional-order diffractions appear to be in agreement with the estimated relative values, after allowing for the continuous radial decrease in intensity. Thus the  $103$  diffraction is the strongest and its associated satellites are also the most prominent, while corresponding pairs of satellites have similar intensities. We conclude, therefore, that the above interpretation of the origin of the fractional-index diffractions is in satisfactory agreement with the observed positions, and qualitatively so in respect of the intensities, both in the case of graphite and of molybdenite. The appearance of the forbidden diffractions  $111, 113, 115, \dots$  etc. must of course be interpreted, as hitherto, as a secondary scattering effect.

A remarkable single-crystal pattern obtained in this laboratory is shown in Fig. 66. It was obtained from a thin film of n-hexadecyl alcohol, a long-chain compound, which normally yields rings or single-crystal patterns in general agreement with the known structure of the crystalline product. At the moment, the cause of the splitting up of the diffractions into the remarkable spot constellations is unknown, but LAUE (*V*, 26) suggests provisionally that it may be due to a kind of polymerisation in the crystal characterised by a slight atomic displacement, so that the new unit cell embraces a relatively large number of normal cells.

## VI. Estimation of Crystal Size.

The sharpness of an electron-diffraction pattern is usually independent of the crystal thickness. Thus, for a line grating of length  $T$  parallel to the beam, the half-breadth  $B$  defined as the angular distance between

the two points on the diffraction with intensities half that at the maximum between them, is given with sufficient accuracy, except for very small values of  $T$ , by

$$B = (2 \cdot 8 \lambda / \pi T)^{1/2} = 0.944 (\lambda / T)^{1/2}. \quad (1)$$

Since  $T$  is restricted to approximately 150 Å. by the depth of coherent penetration of the electron beam,  $B$  has a minimum of  $1.7 \cdot 10^2$  radians ( $\lambda = 0.05$  Å.), corresponding to a width of 8.5 mms. with a camera length of 50 cms. Such a resolving power is negligible compared with that of even a very much shorter grating when normal to the beam. In discussing the effect of crystal size on the definition of the electron-diffraction powder pattern, therefore, we can confine our attention to the effects of atom rows steeply inclined to the beam.

For a line grating of length  $T$  normal to the beam, the intensity  $I$  at a point at an angular distance  $\varepsilon$  from the maximum intensity  $I_{\max}$  for small angles of diffraction is given approximately by

$$I/I_{\max} = \sin^2 \varphi / \varphi^2,$$

where  $\varphi = \pi T \varepsilon / \lambda$

If  $I/I_{\max} = 1/2$ , then  $\varphi = 1.40$  radians,  
and  $\varepsilon = 0.445 \lambda / T$ .

Thus for the half-breadth,  $B = 2 \varepsilon$ , we have

$$B = 0.89 \lambda / T \text{ radians.} \quad (2)$$

This equation is also valid for a row of line gratings ( $VI, x$ ) and may therefore be used to calculate from the half-breadth of the  $hkl$  diffractions the length of a crystal in a direction normal to the  $(hkl)$  planes, provided that the section of the crystal normal to the electron beam is a rectangle with one side in an  $(hkl)$  plane or, more generally, a parallelogram one side of which is normal to the  $(hkl)$  planes.

A similar method may be used to obtain an approximate solution in the case of a diffraction ring due to a random array of cross-gratings. Assuming that each cross-grating is a parallelogram with sides  $T_a$  and  $T_b$  enclosing an angle  $\alpha$ , and taking lattice translations of length  $a$  and  $b$  along the sides of the parallelogram to define the diffraction  $(hk)$ , then approximately

$$(T_a^2 \cos^2 \omega_a + T_b^2 \cos^2 \omega_b) / \cos^2 (\omega_a - \psi_a) = 1.59 \lambda^2 / B^2, \quad (3)$$

where

$$\tan \omega_a = T_a \left( \frac{1}{T_b \sin \alpha} - \frac{1}{T_a \sin \alpha} \right),$$

and

$$\tan \psi_a = \left( \frac{ak}{bh} - \cos \alpha \right) / \sin \alpha.$$

with a similar expression for  $\tan \omega_b$ .

For a rectangular cross-grating this reduces to

$$\frac{bh}{T_a} + \frac{ak}{T_b} = \frac{1.12 B}{\lambda} (a^2 k^2 + b^2 h^2)^{1/2} \quad (4)$$

which is equivalent to equation (2) if  $k = 0$ .

For a hexagonal cross-grating with  $a = b$ , and  $T_a = T_b = T$ ,

$$T = \frac{1.54 \lambda}{B} \cdot \frac{h + k}{(h^2 + h k + k^2)^{1/2}}. \quad (5)$$

If  $n$  diffractions of equal intensity and half-breadths  $B_1, B_2, \dots, B_n$  coincide, then

$$B = n^{1/2} / (\mathbb{1}/B_1^2 + \mathbb{1}/B_2^2 + \dots + \mathbb{1}/B_n^2)^{1/2}. \quad (6)$$

SCHERRER'S (VI, 2) treatment of resolving power for a crystal of cubic system and shape leads to

$$B = 2 (\log_e 2/\pi)^{1/2} \cdot \frac{\lambda}{T} \cdot \frac{\mathbb{1}}{\cos 2\theta} = \frac{0.94 \lambda}{T \cos 2\theta}. \quad (7)$$

The general solution involves integration of the interference functions which replace the points of the reciprocal lattice for finite crystals and has been derived by LAUE (VI, 3) for parallelepipedal crystals. If the crystal axes are taken as parallel to the edges of the parallelepiped, then

$$B = \frac{3.6 \pi}{\cos 2\theta} \cdot \frac{\mathbb{1}}{2k} \cdot \left\{ \sum \left( \frac{\alpha^* G}{M_1} \right)^2 \right\}^{1/2}, \quad (8)$$

where

$$G = \frac{\sum h \alpha^*}{|\sum h \alpha^*|}, \quad \text{and} \quad k = 2\pi/\lambda,$$

and  $M_1$  = the number of lattice points along the  $a$  axis. For an orthorhombic lattice this becomes

$$B = \frac{0.9 \lambda}{\cos 2\theta} \cdot \left\{ \frac{\sum (h/M_1 a)^2}{\sum (h/a)^2} \right\}^{1/2}; \quad (9)$$

and in the case of a rectangular cross-grating reduces to

$$\frac{h^2}{T_a^2} + \frac{k^2}{T_b^2} = \frac{1.23 B^2}{\lambda^2} \left( \frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right). \quad (10)$$

BRILL (VI, 4) has applied LAUE'S method to the case of electron diffraction and obtained the equation

$$B = \frac{0.525}{\omega} \cdot \lambda \cdot \left\{ \sum \left( \frac{\alpha^* G}{M_1} \right)^2 \right\}^{1/2}.$$

Since, however, the constant  $\omega$  must be assumed to have the value 0.55 as for X-rays, BRILL'S equation offers no advantages over that of LAUE. MARK (VI, 5) has shown that with crystals of varying size the above equations give the average crystal length, if the distribution in size is Gaussian. In view of the experimental conditions, the more complicated formulae for X-rays taking into account the beam divergence and absorption are unduly elaborate for electron-diffraction purposes.

In actual experiment, even an infinite crystal gives diffractions of finite angular breadth  $b$ , *i. e.* the apparatus constant. Then, if the observed half-breadth of a diffraction from a given crystal is  $B'$ , it is usually assumed that

$$B = B' - b. \quad (11)$$

THOMSON, STUART and MURISON (*VI*, 6) have, however, suggested the relationship

$$B^2 = (B')^2 - b^2, \quad (12)$$

which is to be preferred theoretically if the edges of the diffraction are not sharp.

In addition to limited resolving power, other factors may lead to ring broadening. Thus tolerance effects give rise to a one-sided broadening proportional to the ring diameter. In agreement with INFELD's prediction (*VI*, 7), SCHOBITZ (*VI*, 8) found a decrease in ring-breadth with increasing accelerating potential, though KIRCHNER (*VI*, 9), working over a narrower range of voltages, was unable to confirm this. Finally, polychromatism in the beam must also result in a ring broadening proportional to the ring diameter.

The following table gives some values of  $T$  calculated by equation (2) from the linear half-breadth of the diffraction ring, assuming a camera length of 50 cms. and a wavelength of 0.05 Å.

Such a table is sufficiently accurate for most purposes.

It is also useful to remember that the ratio of the ring diameter to the total breadth of a diffraction is equal to the number of planes in each crystal taking part in the diffraction. The chief experimental difficulty lies in the measurement of the apparatus constant  $b$ , since this may vary according to the amount of the electron beam cut off by the thicker parts of the specimen or passing through interstices without being diffracted.

The significance of ring-breadth in reflection patterns merits special consideration. The case of etched single crystals cannot be discussed here and reference must be made to papers by THOMSON (*VI*, 10) and LAUE (*VI*, 11). With polycrystalline specimens the ring-breadth gives the length of such portions of the projections as have a thickness less than about 150 Å. Thus with conical projections the resolution depends on the cone angle and may give no indication of the true crystal size, but only of the texture of the surface. Thus large columnar crystals may give broad diffractions if the surface projections are blunt. Moreover, when the cone angle approaches 180°, refraction effects may occur which cause broadening of the inner rings as may be seen in Fig. 55. In spite of the breadth of such diffractions the true crystal size may be large.

From the above it will be realised that, with reflection specimens, particle-size estimations can only give a minimum value, whilst even with transmission specimens the results are liable to many inaccuracies, and can only be regarded as approximate average values for such crystals as are thin enough to transmit electrons. It must also be remembered that with clear patterns virtually free from background and showing no orientation the diffracting crystals cannot be much larger than about

Table 3.

Half-breadth mm.	$T$ in Å.
0.05	440
0.1	220
0.15	150
0.2	110
0.3	75
0.4	55
0.5	44
0.7	31
1.0	22
2.0	11
5.0	4

150 Å. in the direction of the beam, and the appearance of very sharp rings merely indicates the presence of plate-like or needle-shaped crystals. The above methods should therefore only be applied to obtain approximate values of crystal sizes; absolute values should be treated with extreme caution, especially for crystals larger than 100 Å.

### VII. The Effect of Crystal Size on Lattice Dimensions.

In introducing the comparison-shutter method for measuring lattice constants independently of camera length and beam velocity, FINCH and QUARRELL (*VII, 1*) suggested the use of zinc oxide as a convenient reference standard. On referring the zinc-oxide lattice constants to gold, however, FINCH and WILMAN (*VII, 2*) found serious discrepancies between the corresponding X-ray and electron-diffraction values, and COSSLETT (*VII, 3*) observed that these differences were not constant but varied with the age of the specimen. GNAN (*VII, 4*), PICKUP (*VII, 5*), RIEDMILLER (*VII, 6*) and COSSLETT (*VII, 7*) have since reported similar anomalies in the lattice constants of small crystals of other materials. FINCH (*VII, 8*) suggested that such abnormal lattice dimensions might be due to crystal size, in accordance with the LENNARD-JONES (*VII, 9*) theory which predicts a lattice contraction or expansion in very small crystals of ionic and homopolar compounds respectively with decreasing crystal size.

In following up this question FINCH and FORDHAM (*VII, 10*) referred, by electron diffraction, the lattice constants of small crystals of gold and

the halides of lithium, sodium and potassium to the C—C distance in the hexagonal layer of graphite (Fig. 67). The constants of graphite in terms of  $a_{\text{Au}} = 4.070$  Å. were found to be  $a = 2.458$  Å.;  $c = 6.701$  Å. and  $c/a = 2.726$  (*VII, 11*). Owing to the nature of the crystal form and interatomic binding in the hexagon layers, the C—C distance can be taken as independent of the crystal size, and a recent X-ray determination by TRZEBIATOWSKI (*VII, 12*) of the lattice constants of graphite, in giving  $a = 2.456_3$  Å.;  $c = 6.695_6$  Å. and  $c/a = 2.726$ , *i. e.* in close agreement with FINCH, FORDHAM and WILMAN's results, not only shows that the graphite  $c$  spacing

is also independent of crystal thickness, but that the lattice constants of gold determined by electron diffraction and X-rays are likewise in agree-

Table 4.

Substance	$a$ by electron diffraction Å.	Excess over X-ray value of $a$ Å.
LiF	4.024	(0.004)
LiCl	5.132	— 0.011
LiBr	5.491	(0.002)
LiI	6.014	0.014
NaF	4.437	0.018
NaCl	5.664	0.036
NaBr	5.958	(0.004)
NaI	6.464	(0.002)
KF	5.352	—
KCl	6.314	0.037
KBr	6.625	0.039
KI	7.072	0.020
Au	4.067	(— 0.003)
ZnO	$\left\{ \begin{array}{l} a = 3.258 \\ c = 5.239 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0.015 \\ 0.044 \end{array} \right.$

ment. Thus, in addition to graphite, gold can also be relied upon as a reference standard in electron diffraction. With the alkali halides, however, in several cases relatively large differences were found between the electron-diffraction and *X*-ray values, and these are set forth in Table 4, after recalculation on the basis of TRZEBIATOWSKI's values.

The differences in parentheses are not considered significant. Thus, with the one possible exception of LiCl, in those cases where the lattice constants obtained by *X*-ray and electron diffraction do not agree, the difference is such as to indicate an expansion of the crystal lattice with small crystal size, as opposed to the contraction predicted by LENNARD-JONES. Such an expansion was observed with six of the alkali halides and amounted in some cases to as much as 0.6 per cent.; it has not yet been accounted for theoretically.

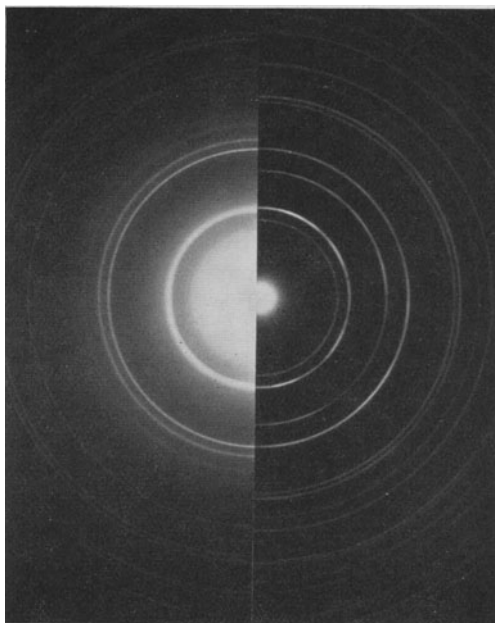


Fig. 67. Comparison-shutter pattern of graphite (L.) and gold (R.).

### VIII. The Structure of Metal Films and Surfaces.

The mode of preparation of a metal film may have a profound effect on both the size and arrangement of the crystals. In beaten or rolled foils the crystals are generally more or less highly orientated, in the case of face-centred cubic metals with (100) planes parallel to the surface. A second direction of orientation is often in evidence, as if the original crystals in yielding to the crushing strain had, whilst changing their external shape, continued to resist the breaking up of the individual crystals. BURGERS and PLOOS VAN AMSTEL (*VIII, 1*) have found that rolled tungsten is orientated with (100) planes parallel to the surface and (110) planes pointing in the direction of extrusion.

The lattice distortion sometimes postulated to explain the unusually broad *X*-ray spectra obtained from cold-worked metals has so far not been observed by electron diffraction in beaten foils; the constancy of the lattice dimensions of gold in thin films, whether prepared by electro-deposition, condensation or by beating, is remarkable (*VIII, 2*).

In the case of metallic films formed by condensation of the vapour, the nature and temperature of the substrate exerts as a rule a preponderating influence on both the crystal size and orientation. With a cool inert substrate like cellulose, polished fused quartz or glass, the crystal size is generally small and orientation weak or absent; but if the substrate is maintained at a suitable temperature during condensation, a remarkable variety of orientations may occur, no doubt as a result of the increased mobility of the condensing atoms and freshly formed crystallites over the surface. The direction of the axis of orientation in thin condensed films generally points towards the source, provided the evaporation has been carried out in a good vacuum (*VIII*, 3). If the suitably heated substrate is active, like, for example, a cleavage face of rocksalt, metallic films giving typical cross-grating patterns can be obtained (*VIII*, 4). It is unlikely that such films are true single crystals; since the orientation of the metallic film follows that of the rocksalt substrate and both have very different lattice dimensions, it is more probable that the film is a mosaic; thus we have found recently that silver also follows the orientation of potassium bromide when vaporised on to a warm cleavage face, although the lattice constants are so widely different. Nevertheless, KIRCHNER and LASSEN (*VIII*, 5) have obtained KIKUCHI-line patterns by reflection from silver films formed in this manner, a fact which indicates accurate alignment of the mosaic crystals.

In very thin layers, a metal condensed from the vapour may not only follow the crystal size and orientation of the substrate but also form crystals pseudomorphic in the interfacial directions with the substrate. Thus aluminium vaporised on to platinum has been observed to crystallise in the tetragonal system with basal dimensions characteristic of the platinum, but with a *c*-axial length corresponding to the length of side of the unit cube of aluminium (*VIII*, 6). COCHRANE (*VIII*, 7) has also observed a similar phenomenon in the case of nickel electrodeposited on a copper single crystal.

Cathodically sputtered metal films have, like those formed by condensation, universally proved to be crystalline. Hence the abnormal resistance of thin metallic films cannot, as has been suggested by ZAHN and KRAMER (*VIII*, 8), be reasonably attributed to their supposed amorphous condition. If precautions are taken to keep the substrate cool, the crystals are generally randomly disposed, and FINCH and THOMSON and their collaborators (*VIII*, 9) have shown that platinum films deposited under such conditions possess a high catalytic activity, whilst platinum sputtered on to substrates which are sufficiently heated to bring about well-marked orientation is generally inert. Films sputtered from a cathode consisting of gold and platinum wires twisted together consisted of mixtures of crystals of the two metals and no signs of alloying could be detected (*VIII*, 10). It seems that when the crystals are formed in the sputtered film the gold or platinum atoms strongly



prefer to attach themselves to nuclei of the same metal. The gas in the sputtering vessel exerts a profound influence on the nature of the sputtered film. FINCH and IKIN (*VIII, 9*) found that platinum and other metals, such as palladium, gold, silver, copper and nickel (*VIII, 10*), when sputtered in purified argon, all exhibited normal structure, with or without orientation, according to the temperature of the receiver, and in no case were signs of compound formation observed. Nevertheless, if such a platinum film were heated in the diffraction camera by radiation from a hot platinum filament, the diffraction pattern first faded and later, if the filament temperature were sufficiently high, again became visible. The resulting film was sometimes sufficiently thick to show interference colours, even if the initial film had been very thin; thus the reappearance of the diffraction pattern may be ascribed to platinum evaporated from the filament. Since, however, the evaporated film was not affected by further heating, it seems that the fading of the diffraction pattern from the original sputtered films was due to the collapse of crystalline projections, probably as the result of the escape of absorbed gas; a view which is confirmed by the fact that such collapsed films when removed from the substrate by a weak hydrofluoric acid bath and then examined by transmission gave good sharp patterns and were therefore crystalline (*VIII, 11*). With other gases more direct evidence of gas absorption is afforded by the "clean-up" occurring during sputtering and by the formation of definite compounds, some of which have been identified from the structure deduced from their patterns (*VIII, 9*).

TRILLAT and HIRSCH (*VIII, 12*) found that the crystal orientation in gold leaf was increased by heating in vacuo between 350° and 500° whereupon a hexagonal modification was produced to disappear again at 600°. On the other hand, PRESTON and BIRCUMSHAW (*VIII, 13*) could obtain no increase in crystal size by heating gold in vacuo or in an inert gas, and FINCH and FORDHAM (*VIII, 10*) have confirmed this also for palladium and platinum. Thus with pure gold films formed by condensation, no change took place in the absence of mercury vapour up to 550° at which temperature even the thickest film collapsed. On the other hand, on heating in air or oxygen, both orientation and crystal growth occurred. It would seem that, in vacuo, gold only recrystallises at temperatures too high for films thin enough for transmission to remain intact. Thus FINCH and FORDHAM (*VIII, 10*) observed that gold deposited by evaporation on to zinc oxide migrated at temperatures above 550° from the zinc oxide threads which are thin enough for diffraction to the thicker opaque portions of the specimen. Also gold films which contained traces of mercury invariably gave a characteristic gold amalgam pattern on heating above 550°, owing to the retraction of the pure gold constituent into massive crystalline aggregates inaccessible to the electron beam. On the other hand, heat treatment produces crystal growth in aluminium leaf, and presumably in this and in the case of gold heated

in air the disruption of the metal film during heating is prevented by the surface oxide layers.

AYLMER, FINCH and FORDHAM (*VIII*, 14) have found that films of gold, silver, copper and palladium attacked by mercury have structures which vary with the degree of amalgamation in such a manner as to preclude an explanation in terms of a mere expansion or contraction of a limited number of phases. In spite of the numerous structures observed, no band systems appear in the diffraction patterns, except in the case of palladium, a fact which suggests that equilibrium may be attained throughout the foil with great rapidity. Heat treatment invariably yielded the same crystalline amalgam, either by a process similar to fusion as in the case of gold, or by evaporation as with silver. Even after such heat treatment, however, the patterns obtained do not agree with the structures, deduced by *X*-rays, of carefully annealed specimens of known composition. Similar amalgam patterns have been obtained by PRESTON and BIRCUMSHAW (*VIII*, 13).

THOMSON (*VIII*, 15) showed that silver electrodeposited on to an etched copper single-crystal face rigidly followed the orientation of the copper crystals. FINCH and SUN (*VIII*, 16) found that bath composition and temperature and the current density were the main factors in determining the nature of the orientation in the case of metals electrodeposited on to an inert substrate such as a polished metal surface, but that a crystalline substrate in many cases profoundly influenced both the crystal size and orientation in the initial deposit layers; although the effect decreased with increasing deposit thickness until, finally, the orientation and crystal size were typical of the bath conditions and current density. For good powers of adhesion, ability of the deposit crystals to follow the substrate crystal size and orientation, at least in its initial layers, appeared to be a *sine qua non*. FINCH and SUN also found that iron electrodeposited on to gold exhibits exceptionally good adhesion and ascribed this to the remarkable way in which the body-centred cubic structure, iron, orientates on the face-centred cubic metal, gold. They found that, although substrate and deposit crystals continued to possess in common one degree of orientation, in that cube faces were in contact, the respective cube faces normal to the specimen plane were not parallel but inclined at  $45^\circ$  to each other, with the result that (110) and (100) planes normal to the specimen film in substrate and deposit respectively were parallel to each other. This is clearly a case of substrate influence complied with by the deposit in such a manner as to lead to as strain-free an arrangement in the substrate-deposit interface as possible. Thus in this arrangement the atoms of the two structures fit together so well that in the transmission pattern from such a composite film it is not until the eleventh ring that an iron diffraction, the 123 ring, is obtained free from a gold ring. This means that the cube faces of the iron crystals fit closely on to those of the gold substrate when cube

corner atoms of iron bisect gold cube edges. When given already one common direction, *i. e.* (100), of orientation, it is clear that no other arrangement will enable the two structures to fit together so accurately without lattice distortion. It may therefore be concluded that the arrangement of substrate and deposit is in this case also the most strain-free.

FINCH and SUN (*VIII, 16*) were unable to detect any signs of alloying during deposition, not even in the first few layers of atoms. On the other hand, they found that chemical displacement from solution of one metal by another invariably resulted in alloying. Thus platinum displaced by copper or silver yielded alloy films with structures which, although face-centred cubic, had lattice dimensions intermediate between those of the pure metals.

A recent micrographic and electron-diffraction study by FINCH and WILLIAMS (*VIII, 17*) of nickel electrodeposits has brought out clearly the unreliability of microscopic evidence as to the structure of such electrodeposits when subjected to surface examination by the microscope. Thus the micrographic evidence by itself suggested that the nickel deposited on to large copper crystals was composed of similarly large crystals growing columnarly on the crystals of the copper substrate, but electron diffraction showed that the nickel deposit developed in fact into small crystals enclosed in a network of pseudo-single-crystal boundaries, and the orientation of which depended on the conditions of deposition alone.

### IX. The Structure of Polish.

One of the fields in which electron diffraction has proved conspicuously successful is the study and elucidation of the nature of the structural changes involved in the mechanical working of surfaces. A micrographical study of the surface changes produced by polishing had led BEILBY (*IX, 1*) to the view that polish resulted from a flowing of the material, whereby the surface became coated with an amorphous layer, the so-called BEILBY layer. His experiments had demonstrated, in the clearest possible manner, that polishing does not consist in a levelling of the surface by a mere wearing away of projections, but that the polish layer is built up by a transfer of material from one part of the surface to another. On the other hand, it cannot be claimed that BEILBY's results justified his further conclusions as to the state of the flowing material and final polish layer, supposed by him to be vitreous, *i. e.* amorphous.

A fresh impetus to the study of polish was afforded by THOMSON (*IX, 2*) and FRENCH (*IX, 3*), when they showed that a polished metallic surface grazed by an electron beam gave rise to a pattern of diffuse halos (Fig. 68) of a type consistent with diffraction by the liquid metal, a fact which was accordingly interpreted as testifying to the amorphous nature

of the polish layer. This evidence, however, was shown to be inconclusive by KIRCHNER (*IX, 4*), who found that thin metal films, formed in such a manner as greatly to limit the height to which crystals project above the region opaque to the electron beam, could give rise to halo patterns indistinguishable from those afforded by polished metal surfaces, although the sharp diffraction phenomena observed in transmission proved them to be crystalline. These results led KIRCHNER to attribute the diffuse halo patterns afforded by mechanically polished metallic surfaces to a broadening of the diffractions as a result of poor resolving power due to a reduction, by the act of polishing, in the size of the crystals accessible to the beam. Thus, according to this view, polishing smooths the surface but leaves it crystalline, the halo pattern being formed by transmission through crystalline projections so unusually short as to afford but poor resolution.

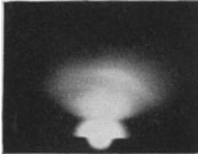


Fig. 68.  
Halo pattern from polished cassiterite, characteristic of amorphous surfaces.

If the polish layer were amorphous, as supposed by THOMSON, the beam should enter and leave through the same surface; unfortunately, owing to the diffuseness of the halos, the inner potential refractive effect is too small to enable a decision to be made in favour of one or the other hypothesis. No less inconclusive are the experiments of HOPKINS (*IX, 5*) and LEES (*IX, 6*) who, in attempting to measure the thickness of the polish layer, resorted to processes of progressive etching; their results will bear equally well either KIRCHNER's or THOMSON's interpretation of the origin of the halo pattern from a polished metallic surface and its eventual displacement by sharp rings.

It may here be emphasised that at this stage it had been established beyond dispute that (*a*) amorphous surfaces like glass, silica and mercury, (*b*) polished metallic and (*c*) certain crystalline metallic surfaces could all yield halo patterns. The fact that some metallic surfaces which were undoubtedly crystalline gave rise to halo patterns appeared to invalidate THOMSON's interpretation of (*b*) in terms of (*a*); but it is also clear that, in view of (*a*) KIRCHNER's interpretation of (*b*) in terms of (*c*) was equally untenable without further support. Thus, up to this point, the evidence could only be regarded as such as to leave in doubt the issue as to whether the metallic polish layer is crystalline or amorphous.

So far, however, we have omitted mention of the fresh light which FINCH, QUARRELL and ROEBUCK (*IX, 7*) brought to bear on the subject when they found that the polish layer on metals had the property, characteristic of a liquid and not exhibited by the corresponding crystalline surface, of dissolving to saturation crystals of a foreign metal at room temperature. The demonstration of these remarkable solvent powers of the metallic polish layer made it difficult to resist the conclusion that the layer is amorphous, *i. e.* glass-like. The obvious corollary,

that the surface flow is likewise one of material rendered amorphous by the action of polishing, received independent support from BOWDEN and RIDLER's (*IX, 8*) experiments, by which it was shown that the mean temperature of the polish layer during its formation quickly rose to a limit equal to the melting-point of the metal and was independent of any further increase in the vigour of the polishing action. Considered in conjunction with BEILBY's demonstrations of surface flow, particularly by the re-exposure by etching of scratches eliminated by polishing, this striking result strongly suggested that the flow occurring during polishing must be one of liquified, *i. e.* amorphous material, rather than that of a crystalline detritus.

FINCH, QUARRELL and WILMAN (*IX, 9*) have shown that, whilst a hand-polished steel surface gave a sharp-ringed  $\alpha$ -iron pattern after a single light stroke with a fine grade emery paper, several such abrasions were necessary to produce this result when similar steel surfaces had previously been subjected as component surfaces in an internal combustion engine to the vigorous polishing action of a prolonged period of "running-in". These facts suggest that the depth of the BEILBY layer increases with the vigour and time of polishing; they do not seem to fit in with KIRCHNER's view, for otherwise the "run-in" surface should have responded to scratching as easily as did the hand-polished specimen.

In the light of these facts and considerations, it may be concluded that the metallic BEILBY layer is amorphous, and is formed by a surface flow of amorphous, viscous or liquid material produced by the action of polishing. Furthermore, it now seems justifiable to regard the halo pattern obtained from a mechanically worked, *i. e.* polished, burnished or hammered metallic surface, as evidence of an amorphous layer (*IX, 10*).

It is now well known that natural and cleavage faces of single crystals yield at grazing incidence characteristic KIKUCHI-line patterns, though such faces are generally relatively rough, being indeed seldom even microscopically smooth. When GERMER (*IX, 11*) found that the quite exceptionally smooth and beautifully developed basal planes of single crystals of silicon carbide only gave diffuse rings, he attributed this halo pattern to the extreme smoothness of the carbide crystal face, and inclined further to the view that a gas layer might possibly also play a contributory rôle when adsorbed on such a smooth surface. FINCH and WILMAN (*IX, 12*), however, were able to put a very different interpretation upon this result. Thus, like GERMER, they invariably obtained halo patterns from undamaged single crystals of silicon carbide; but it was also found that after gentle rubbing with a fine abrasive (moist rouge and alumina) softer than the carbide but harder than silica, or after an etching treatment (hydrofluoric acid or caustic potash solution) capable of attacking silica but not the carbide, and none of which treatments had any visible effect on either the appearance or smoothness of the surfaces, the crystals afforded remarkably clear and brilliant

KIKUCHI-line patterns typical of reflection from a single-crystal surface (Fig. 28). Finally, progressive oxidation of such carbide crystal surfaces led to the formation of composite halo and single-crystal patterns, in which the KIKUCHI lines showed more or less faintly through the diffuse background of general scattering which always accompanies the halo pattern (Fig. 69) until, after sufficient oxidation, the halo pattern prevailed alone. These results show that the halo patterns yielded by untreated silicon carbide crystals are due to an amorphous skin, probably of silica, formed by surface oxidation, no doubt on cooling of the charge in the course of manufacture.

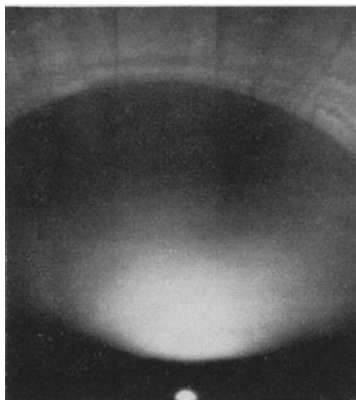


Fig. 69. Silicon carbide after heating in air.

It will be recalled that in many of his experiments BEILBY had observed the phenomenon of surface flow on non-metals, such as calcite, and had, in fact, come to the conclusion that the polish layer is amorphous, not only on metals, but also on non-metals. Indeed, the phenomenon of surface flow is particularly easily demonstrated with calcite. Although this fact does not justify BEILBY's further conclusions as to the state of the surface flow and final polish layer, it came nevertheless as a great surprise when RAETHER (IX, 10) and later,

HOPKINS (IX, 13) showed conclusively that the polish layer on the calcite cleavage face is of single-crystal structure integral with that of the underlying crystal. Since the occurrence of surface flow proves that the polishing of calcite is not simply a matter of attrition, the question still remained open as to whether the structure of the final polish layer on the calcite cleavage face is due to a recrystallisation of the surface-flowed amorphous material in orientation with the substrate, or to a similarly ordered deposition of crystalline fragments or sheets transferred from one part of the surface to another. FINCH (IX, 14), however, found that, although the polish layer was crystalline on the cleavage face of calcite, it became less and less crystalline, the more inclined the polished surface was to a cleavage plane, until, on surfaces remote in direction from all cleavage planes, the polish layer was wholly amorphous. Thus these results showed that the surface flow was one of amorphous material which, when the polishing action had ceased, immediately recrystallised if the polished surface was a cleavage plane, but tended to remain amorphous on surfaces steeply inclined to any such plane. Further experiments showed that whether the BEILBY layer recrystallised or not depended upon forces exerted by the underlying crystal surface. Thus the amorphous BEILBY layer formed by polishing on a calcite surface steeply inclined to all

cleavage planes was found to recrystallise when heated, and the diffraction patterns changed in such a way as to show that recrystallisation proceeded from inside the BEILBY layer towards the outer surface.

Recently FINCH and WILMAN (*IX, 15*) have examined a wide variety of polished non-metallic single-crystal surfaces with results which enable such substances to be classified according to whether the polish layer spontaneously recrystallises or remains amorphous on cessation of the polishing action. Thus they found that, whilst polished plane surfaces, cut in quite arbitrary directions from many types of single crystals [quartz, diamond (Fig. 48), natural and synthetic sapphires, almandine and demantoid garnets (Fig. 42), topaz, chrysoberyl, epidote, olivine, sphene, andalusite, etc.] yield electron-diffraction patterns of spots and lines and thus provide irrefutable evidence of the crystalline structure of the polish layer on such surfaces, other crystals, notably white beryl, zircon, tourmaline and cassiterite (Fig. 68) give halo patterns. From other polished crystal facets (brown beryl, moonstone, orthoclase and cordierite) composite patterns were obtained in which the single crystal pattern shows faintly through that due to the amorphous layer. Spinel, both synthetic and natural, yielded according

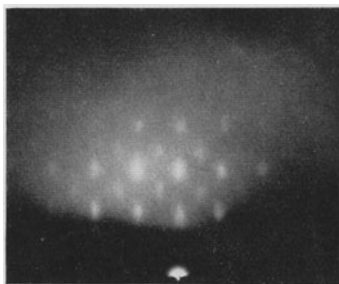


Fig. 70. Spinel, rough polish.

to the degree of polish either halo patterns or halos and spots (Fig. 70) only faintly distinguishable through the general background scattering. In some cases the structure of the polish layer appeared to be determined, as with calcite, by the crystallographic nature of the facet examined. Thus one facet of a blue kyanite yielded a halo pattern through which single crystal spots were faintly distinguishable, whilst other facets of the same specimen gave clear single crystal patterns. No surface flow could be detected in the case of the diamond, though in the case of all the other crystals it was strikingly in evidence. Thus the diamond appears to stand in a class by itself, in that in this case polishing consists in a levelling of the surface by the smoothing out of protuberances which are simply rubbed away. In all other cases it seems clear that the formation of the polish layer proceeds in accordance with BEILBY'S view and is the result of a surface flow. That the layer is, however, often crystalline may be ascribed to a ready and spontaneous re-ordering of the molecules, disarranged by the act of polishing, in more or less strict orientation with those of the crystal matrix, whilst the amorphous nature of the polished surfaces of other crystal facets is evidence of the reluctance of the flowed layer to recrystallise; a reluctance which appears to be determined in some cases by the nature of the mineral, in others by the crystallographic directions of the polished facet.

An important result of these experiments is that the study of the diffraction of electrons by single crystals need no longer be confined to the often imperfect natural or cleavage faces. Any desired type of face can be exposed for this purpose by grinding and polishing, followed by etching or suitable heat treatment in those cases where the polish layer happens to be amorphous. Good single-crystal patterns have also been obtained from all over the curved surface of a short-focus plano-convex

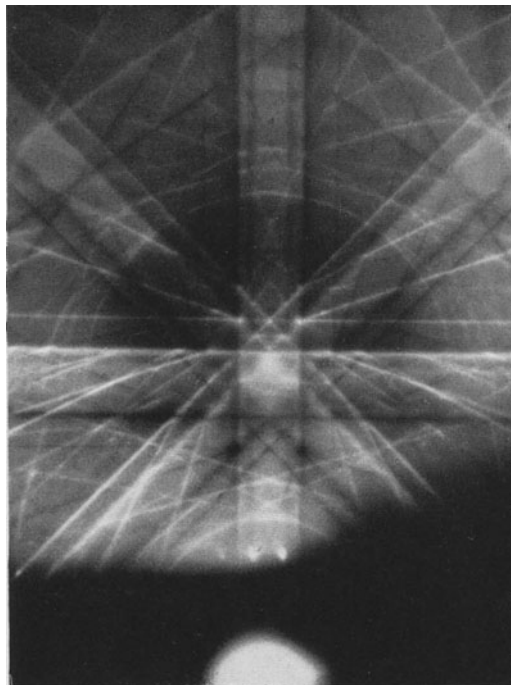


Fig. 71. Spinel fracture.

quartz lens and from the conchoidal fracture surfaces of quartz, spinel (Fig. 71), corundum (Fig. 29) and other crystals (*IX, 16*).

The bearing of these results on wear in the internal combustion engine have been discussed by FINCH (*IX, 16*).

### X. Conclusion.

It has not been possible, in the space at our disposal, to discuss more than a few of the many and wide fields of surface structure study into which high-speed electron diffraction is entering. Already, at the tenth anniversary of G. P. THOMSON'S first experiments in 1927, the new technique is being successfully applied to such varied surface problems



as thermionic and photoelectric emission, conduction of electricity in thin films, surface catalysis, electrodeposition, crystal growth, the colloidal state, corrosion, wear and lubrication; and is, in fact, affording for the first time a direct insight into the small-scale structure and properties of surfaces.

In conclusion, we wish to thank the Department of Scientific and Industrial Research, the Government Grant Committee of the Royal Society, Messrs. FERRANTI, Imperial Chemical Industries, E. G. ACHESON, the Westinghouse Brake and Signal Company and Viscount WAKEFIELD for grants and apparatus.

### References.

#### I.

- I, 1.* CAMPBELL SWINTON, A. C.: Proc. roy. Soc. Lond. A **64**, 377 (1899).  
*I, 2.* DAVISSON, C. J. and C. H. KUNSMAN: Science (N.Y.) **64**, 522 (1921). — Physic. Rev. **22**, 242 (1923).  
*I, 3.* BROGLIE, L. DE: Diss. Paris 1924. — Philosophic. Mag. **47**, 446 (1924). — Ann. Physique **3**, 22 (1925).  
*I, 4.* ELSÄSSER, W.: Naturwiss. **13**, 711 (1925).  
*I, 5.* DAVISSON, C. J. and L. H. GERMER: Nature (Lond.) **119**, 558 (1927).  
*I, 6.* — — Physic. Rev. **30**, 705 (1927).  
*I, 7.* THOMSON, G. P. and A. REID: Nature (Lond.) **119**, 890 (1927).  
*I, 8.* — Philosophic. Mag. **50**, 163 (1925).  
*I, 9.* DYMOND, E. G.: Nature (Lond.) **118**, 336 (1926).  
*I, 10.* THOMSON, G. P.: Proc. Cambridge philos. Soc. **23**, 419 (1926).  
*I, 11.* Private communication from Professor G. P. THOMSON.  
*I, 12.* THOMSON, G. P.: Nature (Lond.) **120**, 802 (1927); **122**, 279 (1928). — Proc. roy. Soc. Lond. A **117**, 600 (1928); **119**, 651 (1928).  
*I, 13.* KIKUCHI, S.: Proc. imp. Jap. Acad. **4**, 271, 275, 354, 471 (1928). — Jap. J. Physics **5**, 83 (1928). — NISHIKAWA, S. and S. KIKUCHI: Nature (Lond.) **121**, 1019 (1928).  
*I, 14.* RUTHERFORD and E. N. DA C. ANDRADE: Philosophic. Mag. **28**, 263 (1914).  
*I, 15.* NISHIKAWA, S. and S. KIKUCHI: Proc. imp. Jap. Acad. **4**, 475 (1928). — Nature (Lond.) **122**, 726 (1928).  
*I, 16.* MUTO, T. and T. YAMAGUTI: Proc. imp. Jap. Acad. **5**, 122 (1929).  
*I, 17.* MATUKAWA, K. and K. SHINOHARA: Proc. Jap. physic.-math. Soc. **12**, 171 (1930).  
*I, 18.* THOMSON, G. P.: Proc. roy. Soc. Lond. A **128**, 649 (1930).  
*I, 19.* WIERL, R.: Ann. Physik **8**, 521 (1931).  
*I, 20.* BROCKWAY, L. O.: Rev. mod. Physics **8**, 231 (1936).  
*I, 21.* GLASSTONE, S.: Ann. Rep. chem. Soc. **33**, 65 (1936).

#### II.

- II, 1.* THOMSON, G. P.: Philosophic. Mag. **18**, 640 (1934). — FINCH, G. I. and H. WILMAN: Trans. Faraday Soc. **33**, 335 (1937).  
*II, 2.* SCHRÖDINGER, E.: Physic. Rev. **28**, 1049 (1926). — Ann. Physik **78**, 361 (1926). — Collected Papers on Wave Mechanics, p. 2, 77.  
*II, 3.* HEISENBERG, W.: Z. Physik **33**, 879 (1925).

- II, 4. BORN, M., W. HEISENBERG and P. JORDAN: *Z. Physik* **35**, 557 (1926).  
 II, 5. DIRAC, P. A. M.: *The Principles of Quantum Mechanics*, 2<sup>nd</sup> Ed., p. 118. Oxford: Clarendon Press 1935.  
 II, 6. STERN, O. and W. GERLACH: *Ann. Physik* **74**, 673 (1924).  
 II, 7. GOUDSMIT, S. and G. E. UHLENBECK: *Physica* **5**, 266 (1925). — *Nature* (Lond.) **117**, 264 (1926). — *Z. Physik* **35**, 618 (1926).  
 II, 8. COMPTON, A. K.: *J. Franklin Inst.* **192**, 145 (1921).  
 II, 9. PAULI, W.: *Z. Physik* **43**, 601 (1927).  
 II, 10. DARWIN, C. G.: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **116**, 227 (1927).  
 II, 11. DIRAC, P. A. M.: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **114**, 710 (1927); **117**, 618 (1928); **126**, 360 (1930).  
 II, 12. DARWIN, C. G.: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **118**, 654 (1928); **120**, 621 (1928).  
 II, 13. — *Proc. roy. Soc. Lond. A* **120**, 61 (1928).  
 II, 14. FRENKEL, J.: *C. r. Acad. Sci. Paris* **188**, 153 (1929).  
 II, 15. FÖRSTER, T.: *Z. Physik* **85**, 514 (1933).  
 II, 16. MOTT, N. F.: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **124**, 425 (1929); **135**, 429 (1932).  
 II, 17. — *Proc. Cambridge philos. Soc.* **27**, 255 (1931).  
 II, 18. SAUTER, F.: *Ann. Physik* **18**, 61 (1933).  
 II, 19. SMITH, R. A.: *Proc. Cambridge philos. Soc.* **30**, 520 (1934).  
 II, 20. WEISSKOPF, V.: *Z. Physik* **93**, 561 (1935).  
 II, 21. DAVID, E.: *Z. Physik* **105**, 747 (1937).  
 II, 22. WINTER, J.: *C. r. Acad. Sci. Paris* **202**, 1265, 1416 (1936).  
 II, 23. COX, R. T., C. G. McILWRAITH and R. KURRELMMEYER: *Proc. nat. Acad. Sci. U.S.A.* **14**, 544 (1928).  
 II, 24. RUPP, E.: *Z. Physik* **61**, 158 (1930). — *Naturwiss.* **18**, 207 (1930).  
 II, 25. THOMSON, G. P.: *Nature* (Lond.) **126**, 842 (1930).  
 II, 26. KIRCHNER, F.: *Physik. Z.* **31**, 772 (1930); **31**, 1025 (1930). — *Ann. Physik* **11**, 741 (1931).  
 II, 27. TRILLAT, J. J., J. THIBAUD and T. v. HIRSCH: *J. Physique* **3**, 314 (1932).  
 II, 28. MYERS, F. E., J. F. BYRNE and R. T. COX: *Physic. Rev.* **46**, 777 (1934).  
 II, 29. RUPP, E.: *Naturwiss.* **19**, 109 (1931). — RUPP, E. and L. SZILARD: *Naturwiss.* **19**, 422 (1931). — *Physik. Z.* **33**, 937 (1932). — RUPP, E.: *Z. Physik* **79**, 1, 642 (1932).  
 II, 30. KIRCHNER, F.: *Physik. Z.* **31**, 1025 (1930). — *Ann. Physik* **11**, 741 (1931).  
 II, 31. THOMSON, G. P.: *Nature* (Lond.) **132**, 1006 (1933).  
 II, 32. DYMOND, E. G.: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **136**, 638 (1932); **145**, 657 (1934).  
 II, 33. THOMSON, G. P.: *Philosophic. Mag.* **17**, 1058 (1934).  
 II, 34. RICHTER, H.: *Ann. Physik* **28**, 533 (1937).  
 II, 35. RUPP, E.: *Z. Physik* **88**, 242 (1934); **90**, 166 (1934).  
 II, 36. MOTT, N. F.: *Proc. Cambridge philos. Soc.* **25**, 306 (1929). — *Proc. roy. Soc. Lond. A* **124**, 425 (1929); **127**, 658 (1930).  
 II, 37. BORN, M.: *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-physik. Klasse* **1926**, 146. — *Z. Physik* **38**, 803 (1926).  
 II, 38. MOTT, N. F. and H. S. W. MASSEY: *Theory of Atomic Collisions*. Oxford: Clarendon Press 1933.  
 II, 39. RUTHERFORD: *Philosophic. Mag.* **21**, 669 (1911).  
 II, 40. EVE, A. S. and F. H. DAY: *Philosophic. Mag.* **23**, 683 (1912).  
 II, 41. MOTT, N. F.: *Nature* (Lond.) **124**, 986 (1929).

- II, 42.* THOMSON, G. P.: Proc. roy. Soc. Lond. A **125**, 352 (1929).  
*II, 43.* MOTT, N. F.: Proc. Cambridge philos. Soc. **25**, 306 (1929).  
*II, 44.* MARK, H. and R. WIERL: Z. Physik **60**, 741 (1930).  
*II, 45.* MOTT, N. F.: Proc. roy. Soc. Lond. A **135**, 429 (1932).  
*II, 46.* BULLARD, E. C. and H. S. W. MASSEY: Proc. Cambridge philos. Soc. **26**, 556 (1930).  
*II, 47.* HARTREE, D. R.: Proc. Cambridge philos. Soc. **24**, 89, 111, 426 (1927).  
*II, 48.* THOMAS, L. H.: Proc. Cambridge philos. Soc. **23**, 542 (1926).  
*II, 49.* FERMI, E.: Z. Physik **48**, 73 (1928); **49**, 550 (1928).  
*II, 50.* MOTT, N. F. and H. S. W. MASSEY: Theory of Atomic Collisions, p. 124, 126. Oxford: Clarendon Press 1933.  
*II, 51.* BRAGG, W. L.: The Crystalline State, Vol. I, p. 328. London: Bell 1933. — JAMES, R. W. and G. W. BRINDLEY: Z. Kristallogr. **78**, 470 (1931). — PAULING, L. and J. SHERMAN: Z. Kristallogr. **81**, 28 (1932).  
*II, 52.* COMPTON, A. H. and S. K. ALLISON: X-Rays in Theory and Experiment, p. 780. London: Macmillan 1935.  
*II, 53.* HEISENBERG, W.: Physik. Z. **32**, 737 (1931).  
*II, 54.* MORSE, P. A. M.: Physik. Z. **33**, 443 (1932).  
*II, 55.* BEWLOGUA, L.: Physik. Z. **32**, 740 (1931); **33**, 688 (1932).  
*II, 56.* DEBYE, P.: Erg. techn. Röntgenkde **3**, 11 (1933).  
*II, 57.* KIRCHNER, F.: Z. Physik **76**, 576 (1932). — RAETHER, H.: Z. Physik **78**, 527 (1932). — BEECHING, R.: Philosophic. Mag. **20**, 841 (1935). — FINCH, G. I. and C. H. SUN: Trans. Faraday Soc. **32**, 852 (1936).  
*II, 58.* DARWIN, C. G.: Philosophic. Mag. **27**, 315, 675 (1914); **43**, 800 (1922).  
*II, 59.* EWALD, P. P.: Ann. Physik **49**, 1, 117 (1916); **54**, 519 (1917). — Physik. Z. **21**, 617 (1920); **26**, 29 (1925). — Z. Physik **2**, 232 (1920); **30**, 1 (1924).  
*II, 60.* LAUE, M. v.: Erg. exakt. Naturwiss. **10**, 133 (1931).  
*II, 61.* BETHE, H.: Ann. Physik **87**, 55 (1928).  
*II, 62.* LAUE, M. v.: Ann. Physik **4**, 1121 (1930). — Ber. Berl. Akad. **1930**, 26.  
*II, 63.* MORSE, P. M.: Physic. Rev. **35**, 1310 (1930).  
*II, 64.* DAVISSON, C. J. and L. H. GERMER: Proc. nat. Acad. Washington **14**, 317, 619 (1928).  
*II, 65.* SHINOHARA, K.: Sci. Pap. Inst. physic.-chem. Res. Tokyo **18**, 223 (1932).  
*II, 66.* HAYASI, T.: Sci. Rep. Tohoku **23**, 491 (1934).  
*II, 67.* WENTZEL, G.: Z. Physik **40**, 574 (1926); **41**, 828 (1927). — SOMMERFELD, A.: Atombau und Spektrallinien. Wellenmechanik, Erg.-Bd., p. 210—213. Braunschweig 1929.  
*II, 68.* KIKUCHI, S.: Sci. Pap. Inst. physic.-chem. Res. Tokyo **24**, 225 (1935).  
*II, 69.* BEECHING, R.: Philosophic. Mag. **20**, 841 (1935).  
*II, 70.* HARDING, J. W.: Philosophic. Mag. **23**, 271 (1937).  
*II, 71.* KRONIG, R. DE L. and W. G. PENNEY: Proc. roy. Soc. Lond. A **130**, 499 (1931).

### III.

- III, 1.* FINCH, G. I. and A. G. QUARRELL: Proc. roy. Soc. Lond. A **141**, 399 (1933). — Proc. physic. Soc. Lond. **46**, 148 (1934). — FINCH, G. I., A. G. QUARRELL and H. WILMAN: Trans. Faraday Soc. **31**, 1050 (1935).  
*III, 2.* KIKUCHI, S.: Jap. J. Physics **5**, 83 (1928).  
*III, 3.* MATUKAWA, K. and K. SHINOHARA: Proc. imp. Jap. Acad. **5**, 122 (1929). — Sci. Pap. Inst. physic.-chem. Res. Tokyo **424**, 21 (1933).

- III, 4. THOMSON, G. P.: Proc. roy. Soc. Lond. A **117**, 600 (1928). — Trans. Faraday Soc. **31**, 1049 (1935). — THOMSON, G. P. and C. G. FRASER: Proc. roy. Soc. Lond. A **128**, 641 (1930).  
 III, 5. TRENDELENBURG, F. and O. WIELAND: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. **13**, 41 (1934).  
 III, 6. AMINOFF, G. and B. BROOMÉ: Z. Kristallogr. **91**, 77 (1935).  
 III, 7. GERMER, L. H.: Rev. Sci. Instr. **6**, 138 (1935). — Bell Lab. Rec. **14**, 210 (1936).  
 III, 8. KIRCHNER, F.: Ann. Physik **11**, 741 (1931).  
 III, 9. TRILLAT, J. J.: Kolloid-Z. **69**, 378 (1934).  
 III, 10. YAMAGUTI, T.: Proc. physic.-math. Soc. Jap. **16**, 95 (1934).  
 III, 11. FINCH, G. I.: Physic. Soc. Rep. Progr. Physics **3**, 258 (1935).  
 III, 12. KIRCHNER, F.: Internat. Ass. Test. Mat. Congr., Rep. **A**, 74 (1937).  
 III, 13. FINCH, G. I. and H. WILMAN: Trans. Faraday Soc. **32**, 1539 (1936).  
 III, 14. LÁSZLÓ, H. DE: Proc. roy. Soc. Lond. A **146**, 672 (1934).  
 III, 15. TRILLAT, J. J.: Trans. Faraday Soc. **29**, 996 (1933). — BROCKWAY, L. O.: Rev. mod. Physics **8**, 231 (1936).  
 III, 16. THOMSON, G. P. and C. G. FRASER: *loc. cit.*  
 III, 17. BURCH, C. R.: Proc. roy. Soc. Lond. A **123**, 271 (1929).  
 III, 18. FINCH, G. I. and S. FORDHAM: Proc. physic. Soc. Lond. **48**, 85 (1936). — AYLMEYER, A. E., G. I. FINCH and S. FORDHAM: Trans. Faraday Soc. **32**, 864 (1936).  
 III, 19. QUARRELL, A. G.: Proc. physic. Soc. Lond. **45**, 279 (1937).  
 III, 20. EISENHUT, O. and E. KAUPP: Z. Elektrochem. **37**, 466 (1931).  
 III, 21. FINCH, G. I.: Nature (Lond.) **138**, 1010 (1936).  
 III, 22. — Sci. Progress **31**, 609 (1937).  
 III, 23. — and H. WILMAN: Proc. roy. Soc. Lond. A **155**, 345 (1936). — Trans. Faraday Soc. **32**, 1539 (1936).  
 III, 24. LASSEN, H. and L. BRÜCK: Ann. Physik **23**, 18 (1935). — KIRCHNER, F. and H. LASSEN: Ann. Physik **24**, 113 (1935). — COCHRANE, W.: Proc. physic. Soc. **48**, 723 (1936).

## IV.

- IV, 1. LAUE, M. VON: Ann. Physik **26**, 55 (1936).  
 IV, 2. BURGERS, W. G. u. J. J. PLOOS VAN AMSTEL: Z. Kristallogr. **95**, 54 (1936).  
 IV, 3. KIRCHNER, F.: Ann. Physik **11**, 741 (1931); **13**, 38 (1932).  
 IV, 4. DARBYSHIRE, J. A.: Z. Kristallogr. **86**, 313 (1933).  
 IV, 5. FINCH, G. I. and H. WILMAN: Trans. Faraday Soc. **32**, 1539 (1936).  
 IV, 6. — Proc. roy. Soc. Lond. A **155**, 345 (1936).  
 IV, 7. KIKUCHI, S.: Proc. imp. Acad. Tokyo **4**, 354 (1928). — Jap. J. Physics **5**, 83 (1928).  
 IV, 8. SHINOHARA, K. and K. MATUKAWA: Sci. Pap. Inst. physic.-chem. Res. Tokyo **21**, 21 (1933).  
 IV, 9. KIRCHNER, F.: Erg. exakt. Naturwiss. **11**, 64 (1932).  
 IV, 10. FINCH, G. I., A. G. QUARRELL and H. WILMAN: Trans. Faraday Soc. **31**, 1050 (1935).  
 IV, 11. LINNICK, W.: Nature (Lond.) **124**, 946 (1929).  
 IV, 12. KOSSEL, W., V. LOECK and H. VOSGES: Z. Physik **94**, 139 (1935).  
 IV, 13. LAUE, M. VON: Ann. Physik **23**, 705 (1935); **28**, 528 (1937).  
 IV, 14. SHINOHARA, K.: Sci. Pap. Inst. physic.-chem. Res. Tokyo **18**, 223 (1932).  
 IV, 15. HAYASI, T.: Sci. Rep. Tohoku **23**, 491 (1934).  
 IV, 16. LICHTENFELD, A. and K. SCHWARZ: Naturwiss. **24**, 172 (1936).

- IV, 17.* SHINOHARA, K.: Sci. Pap. Inst. physic.-chem. Res. Tokyo, **18**, 39 (1932). — Physic. Rev. **47**, 730 (1935).  
*IV, 18.* KIKUCHI, S. and S. NAKAGAWA: Sci. Pap. Inst. physic.-chem. Res. Tokyo **21**, 256 (1933).  
*IV, 19.* BEECHING, R.: Philosophic. Mag. **20**, 84 (1935).  
*IV, 20.* LAUE, M. VON: Ann. Physik **25**, 569 (1936).  
*IV, 21.* SHINOHARA, K.: Physic. Rev. **47**, 730 (1935).  
*IV, 22.* LAUE, M. VON: Physik. Z. **37**, 544 (1936).  
*IV, 23.* EMSLIE, A. G.: Physic. Rev. **45**, 43 (1934).  
*IV, 24.* TILLMAN, J. R.: Philosophic. Mag. **19**, 485 (1935).  
*IV, 25.* THOMSON, G. P.: Proc. roy. Soc. Lond. A **133**, 1 (1931).  
*IV, 26.* KIRCHNER, F. and H. RAETHER: Physik. Z. **33**, 510 (1932).  
*IV, 27.* RAETHER, H.: Z. Physik **78**, 527 (1932).  
*IV, 28.* TILLMAN, J. R.: Philosophic. Mag. **18**, 656 (1934).  
*IV, 29.* GERMER, L. H.: Physic. Rev. **44**, 1012 (1933); **50**, 659 (1936).  
*IV, 30.* YAMAGUTI, T.: Proc. physic.-math. Soc. Jap. **12**, 203 (1930); **14**, 57 (1932).  
*IV, 31.* MEIBOM, R. VON and E. RUPP: Z. Physik **82**, 690 (1933).  
*IV, 32.* KIRCHNER, F. and H. LASSEN: Ann. Physik **24**, 113 (1935).  
*IV, 33.* AMINOFF, G. and B. BROOMÉ: Z. Kristallogr. **89**, 80 (1934).  
*IV, 34.* STORKS, K. H. and L. H. GERMER: J. chem. Physics **5**, 131 (1937).  
*IV, 35.* BETHE, H.: Naturwiss. **15**, 787 (1927); **16**, 333 (1927).  
*IV, 36.* JENKINS, R. O.: Philosophic. Mag. **17**, 457 (1934).  
*IV, 37.* LAUE, M. VON: Ann. Physik **4**, 1121 (1930).  
*IV, 38.* YAMAGUTI, T.: Proc. physic.-math. Soc. Jap. **1**, 443 (1935).  
*IV, 39.* FINCH, G. I. and A. L. WILLIAMS: Trans. Faraday Soc. **33**, 564 (1935).  
*IV, 40.* GERMER, L. H.: Physic. Rev. **49**, 163 (1936).  
*IV, 41.* YAMAGUTI, T.: Proc. physic.-math. Soc. Jap. **16**, 95 (1934).  
*IV, 42.* LASCHKAREW, W. D.: Z. Physik **86**, 797 (1933); **89**, 820 (1934). — Trans. Faraday Soc. **31**, 1081 (1935).  
*IV, 43.* KIKUCHI, S. and S. NAKAGAWA: Z. Physik **88**, 757 (1934).  
*IV, 44.* YAMAGUTI, T.: Proc. physic.-math. Soc. Jap. **17**, 58 (1935).  
*IV, 45.* MIYAKE, S.: Sci. Pap. Inst. physic.-chem. Res. Tokyo **26**, 216 (1935).  
*IV, 46.* YAMAGUTI, T.: Proc. physic.-math. Soc. Jap. **18**, 372 (1936).  
*IV, 47.* KIKUCHI, S.: Sci. Pap. Inst. physic.-chem. Res. Tokyo **26**, 225 (1935).  
*IV, 48.* THOMSON, G. P.: Philosophic. Mag. **18**, 640 (1934).  
*IV, 49.* MOTZ, H. and J. J. TRILLAT: Z. Kristallogr. **91**, 248 (1935).  
*IV, 50.* THOMSON, G. P.: Proc. roy. Soc. Lond. A **119**, 651 (1928).  
*IV, 51.* FINCH, G. I. and A. G. QUARRELL: Proc. physic. Soc. Lond. **46**, 148 (1934).  
*IV, 52.* KIRCHNER, F.: Z. Physik **76**, 576 (1932).  
*IV, 53.* PRINS, J. A.: Z. Kristallogr. **86**, 301 (1933).  
*IV, 54.* TRILLAT, J. J.: Trans. Faraday Soc. **29**, 995 (1933).  
*IV, 55.* DARBYSHIRE, J. A. and E. R. COOPER: Proc. roy. Soc. Lond. A **152**, 104 (1935).  
*IV, 56.* FINCH, G. I. and C. H. SUN: Trans. Faraday Soc. **32**, 852 (1936).  
*IV, 57.* LASSEN, H.: Physik. Z. **35**, 172 (1934). — LASSEN, H. and L. BRÜCK: Ann. Physik **22**, 65 (1935). — BRÜCK, L.: Ann. Physik **26**, 233 (1936).  
*IV, 58.* THOMSON, G. P.: Proc. roy. Soc. Lond. A **128**, 649 (1930).  
*IV, 59.* KIRCHNER, F.: Ann. Physik **28**, 21 (1937).  
*IV, 60.* FINCH, G. I.: Sci. Progress **31**, 609 (1937).  
*IV, 61.* — and A. G. QUARRELL: Proc. roy. Soc. Lond. A **141**, 398 (1933). — DIXIT, K. R.: Philosophic. Mag. **16**, 1049 (1933). — BURGERS, W. G. and C. J. DIPPEL: Physica **1**, 549 (1934). — BEECHING, R.: Philosophic. Mag. **22**, 938 (1936).

- IV*, 62. FINCH, G. I., C. A. MURISON, N. STUART and G. P. THOMSON: Proc. roy. Soc. Lond. A **141**, 4 14 (1933). — MURISON, C. A., N. STUART and G. P. THOMSON: Proc. phys. Soc. Lond. **45**, 381 (1933). — FINCH, G. I. and A. W. IKIN: Proc. roy. Soc. Lond. A **145**, 551 (1934).
- IV*, 63. YAMAGUTI, T.: Proc. phys.-math. Soc. Jap. **17**, 443 (1935). — BURGERS, W. G. and J. J. PLOOS VAN AMSTEL: Physica **3**, 1057 (1936). — FINCH, G. I. and S. FORDHAM: J. Soc. chem. Ind. **56**, 632 (1937).
- IV*, 64. JENKINS, R. O.: Proc. phys. Soc. Lond. **47**, 109 (1935). — DARBYSHIRE, J. A.: Trans. Faraday Soc. **27**, 675 (1931). — DARBYSHIRE, J. A. and E. R. COOPER: Trans. Faraday Soc. **30**, 1038 (1934).
- IV*, 65. THOMSON, G. P. and C. A. MURISON: Nature (Lond.) **131**, 237 (1933). — NELSON, H. R.: Physic. Rev. **44**, 717 (1933). — MURISON, C. A.: Philosophic. Mag. **17**, 201 (1934). — ANDREW, L.: Trans. Faraday Soc. **32**, 607 (1936).

## V.

- V*, 1. RUPP, E.: Ann. Physik **13**, 101 (1933).
- V*, 2. THOMSON, G. P.: Nature (Lond.) **126**, 56 (1930).
- V*, 3. FINCH, G. I.: Proc. phys. Soc. Lond. **47**, 123 (1935).
- V*, 4. TRILLAT, J. J.: C. r. Acad. Sci. Paris **198**, 1025 (1934).
- V*, 5. KIRCHNER, F.: Naturwiss. **22**, 463 (1931). — Erg. exakt. Naturwiss. **11**, 64 (1932).
- V*, 6. TAYLOR-JONES, F.: Philosophic. Mag. **16**, 793, 953 (1933); **18**, 291 (1934).
- V*, 7. FINCH, G. I., A. G. QUARRELL and H. WILMAN: Trans. Faraday Soc. **31**, 1051 (1935).
- V*, 8. MARK, H., H. MOTZ and J. J. TRILLAT: Naturwiss. **20**, 319 (1935).
- V*, 9. AYLMEYER, A. E., G. I. FINCH and S. FORDHAM: Trans. Faraday Soc. **32**, 864 (1936).
- V*, 10. QUARRELL, A. G.: Proc. phys. Soc. Lond. **49**, 279 (1937).
- V*, 11. THOMSON, G. P.: Proc. roy. Soc. Lond. A **125**, 352 (1929).
- V*, 12. BÜSSEM, W. and F. GROSS: Z. Physik **86**, 135 (1933).
- V*, 13. RAETHER, H.: Z. Physik **78**, 527 (1932).
- V*, 14. DARBYSHIRE, J. A.: Z. Kristallogr. **86**, 313 (1933).
- V*, 15. FINCH, G. I. and H. WILMAN: Proc. roy. Soc. Lond. A **155**, 345 (1936). — Trans. Faraday Soc. **32**, 1539 (1936).
- V*, 16. AMINOFF, G.: Ark. Kem., Min., Geol. **11**, 10 (1933).
- V*, 17. LASSEN, H.: Physik. Z. **35**, 172 (1934).
- V*, 18. — and L. BRÜCK: Ann. Physik **22**, 65 (1935). — BRÜCK, L.: Ann. Physik **26**, 233 (1936).
- V*, 19. KIRCHNER, F. and H. LASSEN: Ann. Physik **24**, 173 (1935).
- V*, 20. COCHRANE, W.: Proc. phys. Soc. Lond. **47**, 723 (1936).
- V*, 21. LAUE, M. VON: Ann. Physik **26**, 55 (1936); **29**, 211 (1937). — LAUE, M. VON and K. H. RIEWE: Z. Kristallogr. **95**, 408 (1936).
- V*, 22. BURGERS, W. G.: Z. Kristallogr. **94**, 301 (1936).
- V*, 23. TRENDELENBURG, F.: Naturwiss. **20**, 655 (1932); **21**, 173 (1933). — TRENDELENBURG, F., E. FRANZ. and O. WIELAND: Z. techn. Physik **14**, 489 (1933). — TRENDELENBURG, F. and O. WIELAND: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. **13**, 31, 41 (1934).
- V*, 24. Private communication from Professor G. P. THOMSON.
- V*, 25. PRESTON, T.: The Theory of Light. London: Macmillan 1931.
- V*, 26. Private communication from Professor M. VON LAUE.
- V*, 27. STEINHEIL, A.: Z. Physik **89**, 50 (1934).

## VI.

- VI, 1. RANDALL, J. T., H. P. ROOKSBY and B. S. COOPER: *Z. Kristallogr.* **75**, 234 (1931); obtain the same formula by a similar method, but there are errors in their calculations.
- VI, 2. SCHERRER, P.: *Nachr. Götting. Ges.* **1918**, 98; cf. R. A. ZSIGMONDY: *Kolloidchemie*, 3<sup>rd</sup> Ed. Leipzig 1920.
- VI, 3. LAUE, M. VON: *Z. Kristallogr.* **64**, 115 (1926).
- VI, 4. BRILL, R.: *Z. Kristallogr.* **87**, 275 (1934).
- VI, 5. MARK, H.: *Trans. Faraday Soc.* **25**, 387 (1929).
- VI, 6. THOMSON, G. P., N. STUART and C. A. MURISON: *Proc. physic. Soc. Lond.* **45**, 381 (1933).
- VI, 7. INFELD, L.: *Bull. internat. Acad. Polon.* **1931**, 201.
- VI, 8. SCHOBITZ, E.: *Physik. Z.* **32**, 37 (1931).
- VI, 9. KIRCHNER, F.: *Ann. Physik* **11**, 741 (1931).
- VI, 10. THOMSON, G. P.: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **133**, 1 (1930).
- VI, 11. LAUE, M. VON: *Z. Kristallogr.* **84**, 1 (1933).

## VII.

- VII, 1. FINCH, G. I. and A. G. QUARRELL: *Proc. physic. Soc. Lond.* **46**, 148 (1934).
- VII, 2. — and H. WILMAN: *J. chem. Soc. Lond.* **1934**, 751.
- VII, 3. COSSLETT, V. E.: *Nature (Lond.)* **136**, 988 (1935).
- VII, 4. GNAN, J.: *Ann. Physik* **20**, 361 (1934).
- VII, 5. PICKUP, E.: *Nature (Lond.)* **137**, 1072 (1936).
- VII, 6. RIEDMILLER, R.: *Z. Physik* **102**, 408 (1936).
- VII, 7. COSSLETT, V. E.: *Proc. physic. Soc. Lond.* **49**, 121 (1937).
- VII, 8. FINCH, G. I.: *Intern. Conf. of Physics* **2**, 123 (1934).
- VII, 9. LENNARD-JONES, J. E.: *Z. Kristallogr.* **75**, 215 (1930).
- VII, 10. FINCH, G. I. and S. FORDHAM: *Proc. physic. Soc. Lond.* **48**, 85 (1936).
- VII, 11. — and H. WILMAN: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **155**, 345 (1936).
- VII, 12. TRZEBIATOWSKI, W.: *Roczn. Chem. (poln.)* **17**, 73 (1937).

## VIII.

- VIII, 1. BURGERS, W. G. and J. J. PLOOS VAN AMSTEL: *Physica* **3**, 1064 (1936).
- VIII, 2. FINCH, G. I. and S. FORDHAM: *Proc. physic. Soc. Lond.* **48**, 85 (1936).
- VIII, 3. BURGERS, W. G. and C. J. DIPPPEL: *Physica* **1**, 549 (1934). — BEECHING, R.: *Philosophic. Mag.* **22**, 938 (1936).
- VIII, 4. LASSEN, H. and L. BRÜCK: *Ann. Physik* **22**, 65 (1935).
- VIII, 5. KIRCHNER, F. and H. LASSEN: *Ann. Physik* **24**, 113 (1935).
- VIII, 6. FINCH, G. I. and A. G. QUARRELL: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **141**, 398 (1933).
- VIII, 7. COCHRANE, W.: *Proc. physic. Soc. Lond.* **48**, 723 (1936).
- VIII, 8. ZAHN, H. and W. KRAMER: *Z. Physik* **86**, 413 (1933).
- VIII, 9. FINCH, G. I., C. A. MURISON, N. STUART and G. P. THOMSON: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **141**, 414 (1933). — FINCH, G. I. and A. W. IKIN: *Proc. roy. Soc. Lond. A* **145**, 551 (1934).
- VIII, 10. — and S. FORDHAM: *J. Soc. chem. Ind.* **56**, 632 (1937).
- VIII, 11. — *Proc. physic. Soc. Lond.* **49** (1937) in the press.
- VIII, 12. TRILLAT, J. J. and T. v. HIRSCH: *Z. Physik* **75**, 784 (1932).
- VIII, 13. PRESTON, G. D. and L. L. BIRCUMSHAW: *Philosophic. Mag.* **21**, 713 (1936).
- VIII, 14. AYLMEER, A. E., G. I. FINCH and S. FORDHAM: *Trans. Faraday Soc.* **32**, 864 (1936).

- VIII, 15. THOMSON, G. P.: Proc. roy. Soc. Lond. A 113, 1 (1931).  
VIII, 16. FINCH, G. I. and C. H. SUN: Trans. Faraday Soc. 32, 852 (1936).  
VIII, 17. — and A. L. WILLIAMS: Trans. Faraday Soc. 33, 564 (1937).

## IX.

- IX, 1. BEILBY, G.: Aggregation and Flow of Solids. London: Macmillan 1921.  
IX, 2. THOMSON, G. P.: Proc. roy. Soc. Lond. A 128, 649 (1930).  
IX, 3. FRENCH, R. C.: Proc. roy. Soc. Lond. A 140, 637 (1933).  
IX, 4. KIRCHNER, F.: Trans. Faraday Soc. 31, 1114 (1935).  
IX, 5. HOPKINS, H. G.: Trans. Faraday Soc. 31, 1095 (1935).  
IX, 6. LEES, C. S.: Trans. Faraday Soc. 31, 1102 (1935).  
IX, 7. FINCH, G. I., A. G. QUARRELL and J. S. ROEBUCK: Proc. roy. Soc. Lond. A 145, 676 (1934).  
IX, 8. BOWDEN, F. P. and K. E. W. RIDLER: Proc. roy. Soc. Lond. A 154, 640 (1936).  
IX, 9. FINCH, G. I., A. G. QUARRELL and H. WILMAN: Trans. Faraday Soc. 31, 1051 (1935).  
IX, 10. RAETHER, H.: Z. Physik 86, 82 (1933).  
IX, 11. GERMER, L. H.: Physic. Rev. 49, 163 (1936).  
IX, 12. FINCH, G. I. and H. WILMAN: Trans. Faraday Soc. 33, 337 (1937).  
IX, 13. HOPKINS, H. G.: Philosophic. Mag. 21, 820 (1936).  
IX, 14. FINCH, G. I.: Trans. Faraday Soc. 33, 425 (1937).  
IX, 15. — Nature (Lond.) 138, 1010 (1936).  
IX, 16. — Sci. Progress 31, 609 (1937).



# Das kontinuierliche Spektrum der Sterne.

Von **H. KIENLE**, Göttingen.

Mit 17 Abbildungen.

<b>Inhaltsverzeichnis.</b>		Seite
1. Problemstellung . . . . .		437
I. Die empirischen Grundlagen . . . . .		438
2. Photometrie des kontinuierlichen Spektrums . . . . .		438
3. Relative spektrale Energieverteilung im Bereich $3600 < \lambda < 7000$ . . . . .		439
4. Absolute Energieverteilung und Nullpunkt des Gradientensystems . . . . .		443
5. Das Verhalten im U.V. . . . . .		446
6. Das Verhalten im Infrarot . . . . .		448
7. Linienverschmierung und Randverdunkelung . . . . .		451
8. Unterschiede zwischen Riesen und Zwergen . . . . .		454
II. Theorie des kontinuierlichen Sternspektrums . . . . .		455
9. Sternatmosphären . . . . .		455
10. Der kontinuierliche Absorptionskoeffizient . . . . .		457
11. Das theoretische Spektrum. Farbtemperaturen und effektive Temperatur . . . . .		460
12. Schluß . . . . .		463
Literaturverzeichnis . . . . .		463

**1. Problemstellung.** Das der Beobachtung von der Erde aus zugängliche Spektrum der Sterne unterliegt einem doppelten Integrationsprozeß. Einmal wird integriert über alle Tiefen, aus denen überhaupt Strahlung nach außen dringt; wie diese Integration sich auf die spektrale Verteilung der schließlich austretenden Strahlung auswirkt, darüber kann nur die Theorie der Sternatmosphären Aufschluß geben. Da alle Sterne für die Beobachtung punktförmige Objekte sind, ist die Strahlung außerdem integriert über alle Richtungen, vom radialen Austritt in der Mitte der scheinbaren Sternscheibe bis zum tangentialen am Rande. Nur bei der Sonne, wo wir die Scheibe in einzelnen Punkten abtasten können, ist in der „Randverdunkelung“ die Wirkung dieser Integration der empirischen Bestimmung zugänglich; hier können wir das Spektrum der zentralen Sonnenscheibe vergleichen mit dem über die ganze Scheibe integrierten. In ihrer Abhängigkeit von der Wellenlänge ermöglicht die Randverdunkelung auch gewisse Aussagen über die Auswirkung der ersten Integration, da die Richtungsverteilung der Strahlung mitbestimmt wird durch den Höhenaufbau der Atmosphäre.

Zu dieser in der Natur der Sache liegenden Unbestimmtheit der Zuordnung des beobachteten Spektrums zu bestimmten Schichten im Stern kommt die durch die instrumentellen Verhältnisse bestimmte Schwierigkeit, das ungestörte Kontinuum zwischen den vor allen bei den

späten Spektraltypen sehr gehäuft Absorptionslinien zu erfassen. In den meist mit verhältnismäßig kleinen Dispersionen aufgenommenen Sternspektren tritt ein großer Teil der Absorptionslinien nicht sichtbar in Erscheinung; sie werden mehr oder weniger verschmiert und drücken die scheinbare Intensität des Kontinuums herab. Sind diese Linien nicht in allen Teilen des Spektrums gleich häufig und intensiv, dann wird eine verzerrte Intensitätsverteilung im Kontinuum gemessen. Auch dieser Verschmierungeffekt ist bisher nur bei der Sonne an Spektren großer Dispersion quantitativ untersucht worden.

Schließlich wird die Sternstrahlung noch ganz erheblich in ihrer spektralen Verteilung verändert beim Durchgang durch die Erdatmosphäre. Der „astronomische“ Bereich des Spektrums wird auf der kurzwelligen Seite ziemlich scharf knapp unterhalb 290  $m\mu$  abgeschnitten; im Rot und Infrarot machen sich breite Banden des Sauerstoffs und Wasserdampfes störend bemerkbar. Nimmt man noch hinzu die fast ausschließliche bisherige Beschränkung auf photographische Beobachtungsmethoden, so ergibt sich folgende Gesamtlage:

Beobachtet wird die durch instrumentelle und atmosphärische Einflüsse verzerrte relative Energieverteilung  $I_B(\lambda)$  in einem Spektralbereich, dessen Grenzen bei den bisherigen Untersuchungen mit ganz wenigen Ausnahmen zwischen 300  $m\mu$  und 700  $m\mu$  liegen. Aus dieser beobachteten scheinbaren spektralen Energieverteilung ist die wahre  $I(\lambda)$  abzuleiten, so wie sie extraterrestrisch von einem Instrument mit unendlich hohem Auflösungsvermögen erfaßt würde. Das kann auf rein empirischem Weg geschehen. Aufgabe der Theorie ist es dann, den Zusammenhang herzustellen zunächst zwischen  $I(\lambda)$  und der effektiven Temperatur  $T_e$ , diese definiert als die Temperatur eines Schwarzen Körpers der gleichen Gesamtstrahlung wie der Stern; weiterhin ganz allgemein mit den Parametern, die den Aufbau der Sternatmosphäre bestimmen, der Temperatur  $T$ , dem Absorptionskoeffizienten  $\kappa$  und der chemischen Zusammensetzung der Sternmaterie.

## I. Die empirischen Grundlagen.

**2. Photometrie des kontinuierlichen Spektrums.** Die quantitative Photometrie mit Spaltspektrographen begegnet der Schwierigkeit, daß nur mit relativ großen Spiegelteleskopen Sterne bis zur 4. oder 5. Größe in erträglichen Belichtungszeiten aufgenommen werden können, wenn man nicht von vornherein durch einen weit geöffneten Spalt den ganzen Vorteil der Spaltanordnung — möglichst geringe Beeinflussung des Kontinuums durch verschmierte Absorptionslinien — illusorisch machen will. Es existiert bisher nur ein einziger Versuch in dieser Richtung, der mit dem 72''-Spiegel der Viktoria-Sternwarte gemacht worden ist und sich auf die Sonne und 6 der hellsten Sterne beschränkt [H. H. PLASKETT (1)]. Alle übrigen Untersuchungen des kontinuierlichen Spektrums sind mit spaltlosen Spektrographenanordnungen angestellt worden.

Dabei kommen entweder einfache Objektivprismenkammern mit 15 bis 20 cm Öffnung zur Verwendung [SAMPSON (2), JENSEN (3), Göttingen (4), BARBIER-CHALONGE (5)] oder, zur Erhöhung der Lichtstärke, Verbindungen von spaltlosen Spektrographen mit Spiegeln größerer Öffnung [Lick Observatory (6) Greenwich (7)]. Die Dispersionen erreichen im günstigsten Fall 30 Å/mm bei  $\lambda$  4000; meist sind sie kleiner und sinken im Rot bis auf mehrere hundert Å/mm.

Die Gewinnung einer einwandfreien photometrischen Skala spielt bei Untersuchungen der vorliegenden Art eine ausschlaggebende Rolle. SAMPSON stützt sich auf ein von ihm aufgestelltes Schwärzungsgesetz, in das die Variation der Belichtungszeit eingeht und das keine unmittelbare Ableitung der individuellen Intensitäts-Schwärzungskurven der einzelnen Platte ermöglicht. Es ist daher fraglich, ob die von ihm gefundenen, teilweise recht erheblichen Abweichungen der scheinbaren Intensitätsverteilung von der eines Schwarzen Körpers reell sind. Andere (CH'ING SUNG YÜ, BARBIER-CHALONGE-VASSY) benutzen in irgendeiner Form die Variation der Öffnung als photometrisches Prinzip, wobei die Schwärzungsmarken nicht immer mit dem gleichen Instrument aufgenommen werden wie die Sternspektren. In Greenwich z. B. werden die zur Ableitung der Schwärzungskurve benutzten Lampenspektren mit Hilfe eines Spektrographen aufkopiert, der mit einem dreifachen Stufenspalt ausgerüstet ist. Zur Eichung dieser Stufen werden aber Lampenaufnahmen benutzt, die mit dem gleichen Spiegel wie die Sterne unter Vorsetzung eines Paralleldrahtgitters gewonnen sind. Die Skalen der von JENSEN (Kiel) und in Göttingen durchgeführten spektral-photometrischen Untersuchungen beruhen ganz auf der Verwendung eines mit dem Prisma gekreuzten Paralleldrahtgitters; die Schwärzungskurve ergibt sich unmittelbar aus den mit vorgesetztem Gitter gemachten Aufnahmen der Sternspektren in ihrer vollen Abhängigkeit von der Wellenlänge.

### 3. Relative spektrale Energieverteilung im Bereich $3600 < \lambda < 7000$ .

Da man von astronomischer Seite fast immer von der Voraussetzung ausgegangen ist, daß es möglich sei, die Energieverteilung in Sternspektren formal durch eine Farbtemperatur zu kennzeichnen, und da in diesem Fall für 2 Sterne, die durch die Indizes 1 und 2 unterschieden werden mögen, die Beziehungen gelten:

$$\begin{aligned}\Delta m &= m_1 - m_2 = -2,5 \log I_1(\lambda)/I_2(\lambda) \\ G &= \Delta \Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = 0,921 d \Delta m / d \lambda \\ \Phi &= \frac{c_2}{T} (1 - e^{-c_2/\lambda_m T})^{-1}\end{aligned}$$

hat man sich vielfach darauf beschränkt, aus den Beobachtungen nur relative Gradienten  $G$  in bezug auf einen Vergleichssterne abzuleiten und daraus unter Annahme einer bestimmten Temperatur für den Vergleichssterne Temperaturen. So ist z. B. SAMPSON verfahren, der die

Sterne seines Programms alle mit Polaris verglichen hat und als Ergebnisse nur die durch graphische Ausgleichung der  $\Delta m$  gewonnenen Gradienten mitteilt bzw. die Temperaturen, die sich daraus unter Einführung einer bestimmten Temperatur für Capella ergeben.

Auch die Greenwicher Beobachter beschränken sich auf die Ableitung eines Systems von Gradienten relativ zu einer Gruppe von 9 A o-Sternen.

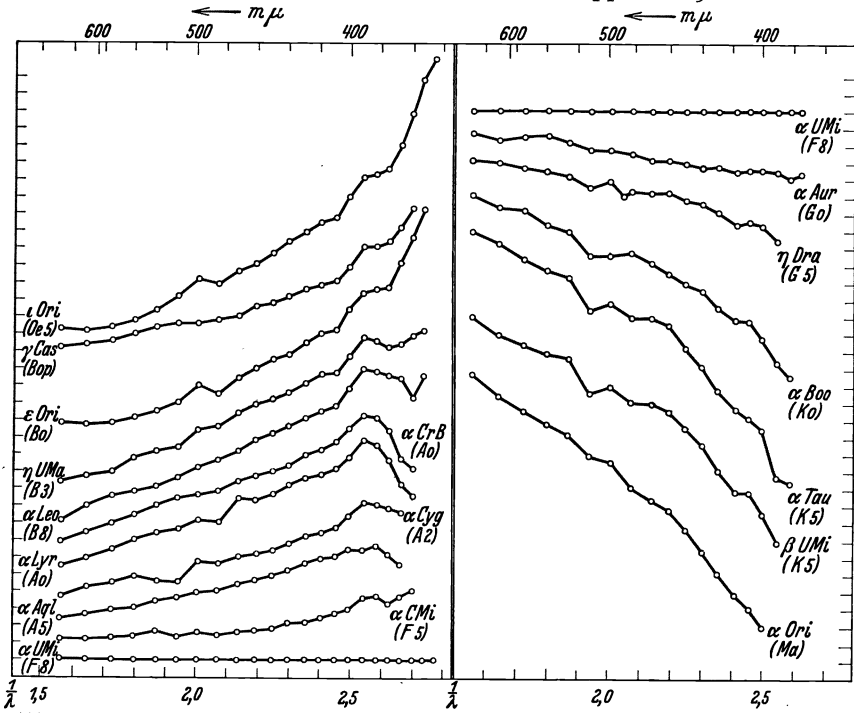


Abb. 1. Relative Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum von 16 Sternen, bezogen auf  $\alpha$  Umi. (JENSEN.) Einheit der Ordinaten 0,2. Abszissen in  $10^4 \text{ cm}^{-1}$ .

Dabei sind nicht zu allen Zeiten und für alle Spektraltypen die gleichen Meßstellen im Spektrum benutzt worden. Der größte Teil des Programms beruht auf Messungen im Rot an 8 Stellen zwischen  $\lambda$  6082 und  $\lambda$  6486, die zu einem Mittel, gültig für  $\overline{1/\lambda} = 1,58 \cdot 10^4 \text{ cm}^{-1}$ , zusammengefaßt sind, und im Blau bei den B- und A-Sternen an 8 Punkten zwischen  $\lambda$  4139 und  $\lambda$  4509 (Mittel entsprechend  $\overline{1/\lambda} = 2,34$ ), bei den F- und G-Sternen dagegen an 6 Punkten zwischen  $\lambda$  4509 und  $\lambda$  4798 (Mittel entsprechend  $\overline{1/\lambda} = 2,13$ ). Unter Verwendung der Mittelwerte ergibt sich der Gradient dann aus:

$$G = 0,921 \frac{\Delta m_B - \Delta m_R}{1/\lambda_B - 1/\lambda_R}.$$

Im Grunde werden also nur Farbenindizes aus den Spektren abgeleitet, allerdings mit dem Vorteil gegenüber der sonst üblichen Art

der Farbenindexmessung, daß hier die effektiven Wellenlängen, die den gemessenen Intensitäten zuzuordnen sind, eindeutig festliegen, und daß die Messung im Spektrum an Stellen erfolgt, die möglichst frei vom Einfluß der Absorptionslinien sind.

Vollständige Darstellungen der Energieverteilung relativ zu Polaris für eine Auswahl von 16 Sternen aller Spektralklassen teilt JENSEN (3) mit. Er kommt zu dem Schluß, daß es nicht möglich sei, die beobachteten

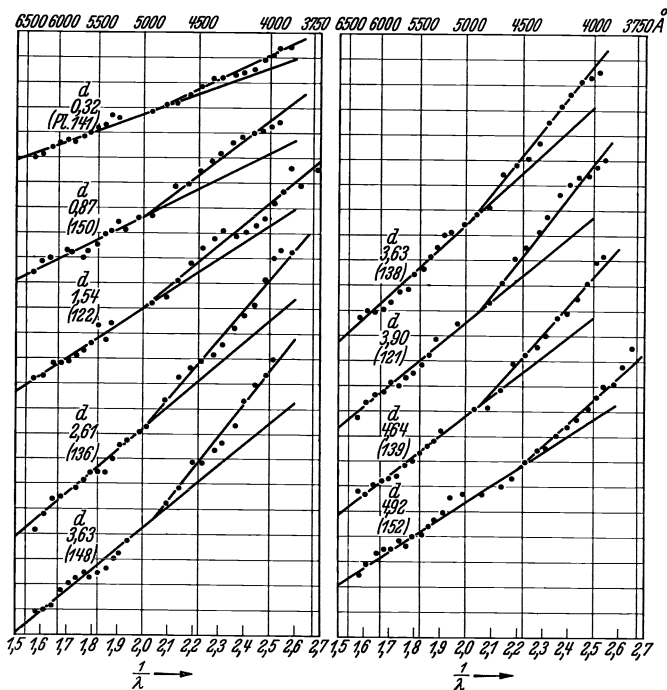


Abb. 2. Relative Energieverteilung im Spektrum von  $\delta$  Cephei gegen  $\epsilon$  Cephei (A 8) in verschiedenen Phasen. (W BECKER.) Einheit der Ordinaten  $0,1$ .

$\Delta m$  linear in  $1/\lambda$  darzustellen, und daß es daher keinen Sinn habe, aus den Beobachtungen Farbtemperaturen abzuleiten. Formal kann man zwar aus Teilstücken des gesamten Wellenlängenbereiches Gradientensysteme ableiten; diese sind dann aber um so weiter in bezug auf die Spektralreihe, d. h. führen auf eine um so weitere Temperaturskala, je kürzer die mittlere Wellenlänge ist, auf die sie sich beziehen. Der scheinbare Widerspruch zwischen den seinerzeit von WILSING aus dem visuellen, von ROSENBERG aus dem photographischen Spektralbereich abgeleiteten Temperaturskalen wird damit auf wirkliche Abweichungen der beobachteten spektralen Energieverteilung von der eines Schwarzen Körpers zurückgeführt. Wir geben in Abb. 1 eine Darstellung dieser Beobachtungen JENSENS wieder, aus der die Krümmung der Kurven zu erkennen ist.

Das gleiche Verhalten wie bei JENSEN findet man in den spektral-photometrischen Untersuchungen an  $\delta$  Cephei-Sternen von W. BECKER, H. BRÜCK und W. STROHMEIER (8). Es muß allerdings dahingestellt bleiben, ob die von den Verfassern bevorzugte Darstellung durch

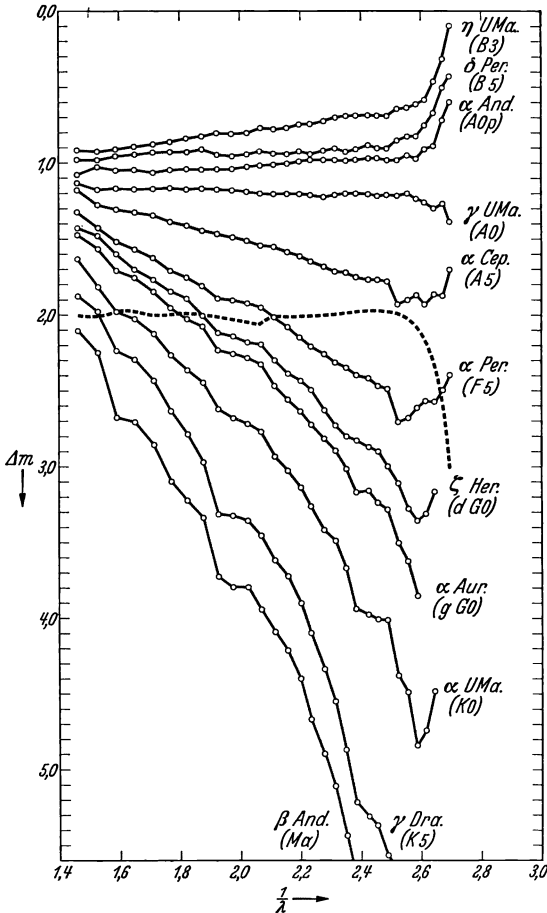


Abb. 3. Relative Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum von 11 Sternen, bezogen auf das Mittel von 9 A0-Sternen (Göttingen).

2 Gradienten mit einer deutlichen Unstetigkeit im Spektrum bei  $\lambda 4750$  den Beobachtungen besser entspricht als die Auffassung, daß es sich um eine monoton gekrümmte Energiekurve handelt. Man vergleiche zur Beurteilung Abb. 2.

Im Rahmen des Göttinger spektralphotometrischen Programms wurden zunächst relative Energieverteilungen gegen das Mittel von 9 A0-Sternen in dem Bereich  $3600 < \lambda < 6700$  abgeleitet. Das Bezugssystem ist also ähnlich definiert wie das von Greenwich; nur sind die an beiden Orten gewählten Fundamentalsterne bloß zur Hälfte gemeinsam. Der Verlauf der Spektren aber wird in Göttingen vollständig erfaßt durch eng liegende äquidistante Meßpunkte. Die mittleren relativen Energiekurven für einzelne Spektralklassen zeigt an einigen Beispielen Abb. 3.

Wenn überhaupt, dann ist eine in  $1/\lambda$  lineare Darstellung der relativen Energieverteilung nur für das Gebiet oberhalb  $\lambda 4000$  möglich. Im Bereich kürzerer Wellenlängen machen sich Abweichungen bemerkbar, für die man die Bezeichnung „Depression im Ultraviolett“ geprägt hat. Daß in den Abbildungen bei den früheren Typen die Abweichung scheinbar nach der Seite der größeren Intensitäten geht, rührt natürlich davon her, daß nur Relativwerte aufgetragen sind. In Abb. 3 ist daher noch das aus dem absoluten Anschluß (vgl. Nr. 4) gewonnene Bezugsniveau

(Energieverteilung der A<sub>0</sub>-Sterne relativ zu einer Schwarzen Strahlung der Temperatur 14500°) eingetragen. Relativ zu diesem zeigen alle Kurven die Depression, die mit fortschreitendem Spektraltyp bei immer längeren Wellen schon einsetzt.

Es besteht kaum ein Zweifel, daß eine der wesentlichsten Ursachen dieser Abweichungen die mangelnde Auflösung der Absorptionslinien und -banden ist. Die Untersuchungen von H. H. PLASKETT (1), die allerdings nicht über  $\lambda$  3900 hinausgehen, zeigen, daß im Sonnenspektrum keine Abweichung auftritt, wenn man bei großer Dispersion an Stellen mißt, die sicher von Absorptionslinien frei sind, während in den mit kleinerer Dispersion und weitem Spalt gewonnenen Spektren von  $\alpha$  Aurigae und  $\beta$  Geminorum auch bei ihm die Depression schon in der Gegend von  $\lambda$  4700 einsetzt.

**4. Absolute Energieverteilung und Nullpunkt des Gradientensystems.** In Greenwich sowohl wie in Göttingen ist versucht worden,

die zunächst nur durch ein Netz gegenseitiger Verbindungen relativ zu einer Gruppe von A<sub>0</sub>-Sternen festgelegten Energieverteilungen durch Anschluß ausgewählter Sterne an eine Lichtquelle bekannter wahrer Energieverteilung in absolute zu verwandeln. In diesen Vergleich zwischen Stern und Laboratoriumslichtquelle gehen eine Reihe von Zwischengliedern ein, deren Bestimmung mehr oder weniger große Schwierigkeiten bereitet. Der große Unterschied in der Farbtemperatur der zur Verfügung stehenden Lampen gegenüber den A-Sternen, die für den absoluten Anschluß gewählt werden, weil man bei ihnen noch am ehesten hoffen kann, das ungestörte Kontinuum zu erfassen, macht die Einführung von Farbfiltern notwendig, um die Intensitätsverteilung im Spektrum der Lampe ungefähr der der A-Sterne anzugleichen. In Greenwich werden die Filter Wratten 78 und 78 A verwendet, in Göttingen eine Kombination aus den Schott-Filtern UG 3 (1 mm) + BG 11 (3 mm). Eine Vorstellung von der damit erzielbaren Angleichung der Schwärzungsverteilung in Lampen- und Sternaufnahmen vermittelt Abb. 4. Die spektrale Durchlässigkeit der Filter muß mit hoher Genauigkeit bestimmt werden; denn die Absolutwerte, die im Rot bis auf 0,01 absinken, müssen auf 1% bekannt sein, wenn die Gradienten um nicht mehr als 0,01 verfälscht werden sollen. Die Eichungen werden in Greenwich photographisch durchgeführt unter Zwischenschaltung gut geeichter neutraler Drahtgitter, in Göttingen mit Hilfe von Photozellen unter Anschluß an rotierende Sektoren.

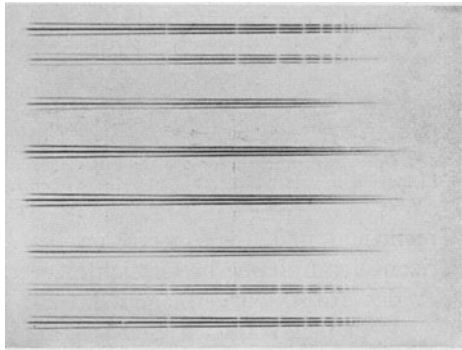


Abb. 4. Spektren von  $\alpha$  Lyrae (oben und unten) und künstlichem Stern (Mitte) (Göttingen). Verkl. des Originals auf  $\frac{1}{6}$ .

Um einen künstlichen Vergleichssterne bekannter Energieverteilung zu erzeugen, kann man zwischen zwei grundsätzlich verschiedenen optischen Anordnungen wählen. Entweder bringt man die Lampe selbst in eine Entfernung, die sehr groß ist gegenüber der Brennweite des Aufnahmeinstrumentes (Abb. 5), und läßt von ihr eine Blende passender Größe ausleuchten —

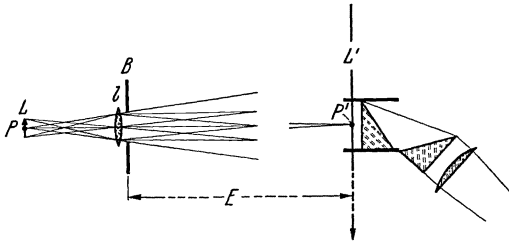


Abb. 5. Optische Anordnung für den absoluten Anschluß mit Lichtquelle in großer Entfernung vom Spektralapparat.

mit oder ohne Zwischenschaltung einer Kondensorlinse — oder aber man führt einen Kollimator unmittelbar vor der Prismenkamera ein (Abb. 6), in dessen Brennpunkt sich ein kleines, von der Lampe beleuchtetes Diaphragma befindet. Im ersten Fall

(Greenwich) muß die Absorption bzw. Streuung des Lichtes auf dem horizontalen Luftweg berücksichtigt werden; im zweiten Fall (Göttingen) geht das Reflexionsvermögen des für die Abbildung benutzten Hohlspiegels in den Vergleichssterne — Lampe ein.

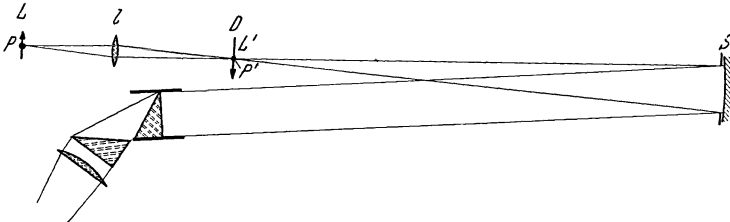


Abb. 6. Optische Anordnung für den absoluten Anschluß mit Spiegelkollimator.

Als Lichtquelle bekannter Energieverteilung wurde in Greenwich zuerst ein Kodak-Azetylenbrenner verwendet; später ist man auch dort wie in Göttingen zu den bequemeren Wolfram-Bandlampen übergegangen, deren Farbtemperatur für eine bestimmte Strombelastung durch Anschluß an den Schwarzen Körper (durch das National Physical Laboratory bzw. die Phys.-Techn. Reichsanstalt) ermittelt wurde.

Ein recht unsicheres Zwischenglied ist die Extinktion in der Erdatmosphäre. Bei der geringen Höhenlage der beiden Sternwarten ist die Wirkung der unteren Schichten der Erdatmosphäre starken Schwankungen von Abend zu Abend ausgesetzt. Die Bestimmung individueller Abendwerte des Transmissionskoeffizienten in seiner Abhängigkeit von der Wellenlänge ist kaum mit hinreichender Genauigkeit möglich. Man kann sich nur durch Mitbeobachtung von Extinktions-Sternpaaren gegen starke Abweichungen von der mittleren Extinktion sichern, und ist im übrigen darauf beschränkt, die Endwerte mit Hilfe



der aus zahlreichen Beobachtungen abgeleiteten mittleren Extinktion zu verbessern.

Nach Anbringung aller Zwischenglieder erscheint als Ergebnis der Beobachtung zunächst die Energieverteilung im extraterrestrischen Sternspektrum, bezogen auf einen Schwarzen Körper vorgegebener Temperatur. In Greenwich beschränkt man sich entsprechend der allgemeinen Gepflogenheit, nur mit Gradienten und Farbtemperaturen zu rechnen, darauf, diese Energieverteilung durch einen relativen Gradienten zu kennzeichnen, der aus den Messungen in 4 schmalen Gebieten im Spektrum (mit 4 Meßpunkten in jedem Gebiet) abgeleitet wird nach der Formel:

$$\Delta\Phi = 0,921 \frac{\frac{1}{3} (2 \Delta m_{IV} + \Delta m_V) - \frac{1}{2} (\Delta m_I + \Delta m_{II})}{\frac{1}{3} (2/\lambda_{IV} + 1/\lambda_V) - \frac{1}{2} (1/\lambda_I + 1/\lambda_{II})}$$

$1/\lambda_I = 2,237$ ;  $1/\lambda_{II} = 2,090$ ;  $1/\lambda_{IV} = 1,730$ ;  $1/\lambda_V = 1,557$ . Mit dem aus dem relativen Anschluß bekannten Gradienten  $\Phi_* - \Phi_{A_0}$  des Sternes gegen das Mittel der 9 A 0-Sterne und dem Wert  $\Phi_L = c_2/T_L$  für die Lampe ergibt sich dann die den Nullpunkt des Systems der Farbtemperaturen kennzeichnende Größe:

$$\Phi_0 = \frac{c_2}{T_0} (1 - e^{-c_2/\lambda_m T_0})^{-1}$$

Die Greenwicher Endwerte sind:

a) Anschluß an den Azetylenbrenner (1932) mit der 1934 verbesserten Farbtemperatur der Flamme:

$$\Phi_0 = 1,07 \pm 0,06 \text{ (m.F.)}$$

b) Anschluß an die Bandlampe (1933):

$$\Phi_0 = 0,91 \pm 0,06$$

Als Mittelwert wird angenommen

$$\Phi_0 = 1,0 \text{ entsprechend } T_0 = 18000^\circ$$

und gültig für den Wellenlängenbereich  $4429 < \lambda < 6486$ . Die Zuverlässigkeit dieses Wertes wird folgendermaßen beurteilt: "Apart from the possibility of a systematic error, which has so far escaped detection, it is very improbable that this value can be as much as 0.15 in error."

In Göttingen wird die Reduktion so durchgeführt, daß zuletzt die vollständige Energieverteilung des Mittels der 9 A 0-Sterne erscheint, bezogen auf einen fiktiven Schwarzen Körper der Temperatur  $c_2/5,00$ . Abb. 7 zeigt das Ergebnis der bisher bearbeiteten Beobachtungen.

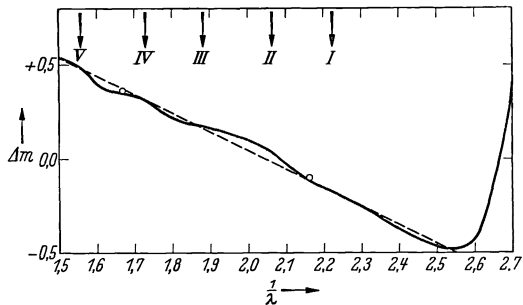


Abb. 7. Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum eines mittleren A 0-Sternes relativ zu einem Schwarzen Körper der Temperatur  $c_2/5,00$  (Göttingen).

Entnimmt man aus der Kurve die  $\Delta m$ -Werte an den in Greenwich gemessenen Stellen und bildet  $\Delta\Phi$  nach der gleichen Formel wie oben, so erhält man für  $\Phi_0$  den Wert:

$$\Phi_0 = 1,15 \pm 0,08,$$

der völlig übereinstimmt mit dem durch lineare Ausgleichung aus der ganzen Kurve im Bereich  $1,50 < 1/\lambda < 2,50$  erhaltenen Wert:

$$\Phi'_0 = 1,12 \pm 0,08.$$

Der angegebene mittlere Fehler von  $\pm 0,08$  umfaßt alle Unsicherheiten der Eichung; die Darstellung durch eine Gerade ist mit einem nur die innere Genauigkeit kennzeichnenden Fehler von  $\pm 0,02$  möglich.

Nach Maßgabe der angegebenen Unsicherheiten sind die in Greenwich und Göttingen gefundenen Werte für den Nullpunkt des Systems der Farbtemperaturen gerade noch miteinander verträglich. Die Göttinger Beobachtungen sprechen zwar für einen etwas niedrigeren Wert für die Farbtemperatur der A 0-Sterne ( $T_0 = 14500^\circ$ ), beide Werte liegen aber entschieden über dem früher angesetzten Wert von RUSSELL ( $11200^\circ$ ), ziemlich sicher auch noch über dem von BRILL ( $13500^\circ$ ).

Abb. 7 läßt eine leichte Abweichung der Kurve der Energieverteilung von der ausgleichenden Geraden in dem Gebiet  $1,5 < 1/\lambda < 2,5$  erkennen, die auch in den Greenwicher Beobachtungen angedeutet ist. Man entnimmt einer kleinen Tabelle der ersten Greenwicher Arbeit (S. 34) die Zahlen in der 2. Spalte der folgenden Übersicht. In der 3. Spalte

Tabelle 1.

$1/\lambda$	$\delta m_{Gr}$	$\delta m_{G\delta}$
1,557	+ ,012	+ ,010
1,730	- ,013	- ,009
1,884	- ,004	+ ,008
2,090	+ ,013	+ ,016
2,237	- ,001	- ,024

stehen die entsprechenden Göttinger Werte. Beide Reihen zeigen den gleichen Verlauf, der wohl als reell angesehen werden darf.

Unterhalb  $\lambda 4000$  tritt klar die an die Balmergrenze gebundene Abweichung zutage. Die vorliegenden Beobachtungen reichen indessen nicht aus, die rein instrumentellen Einflüsse so weit zu eliminieren, daß man ein Urteil darüber gewinnen könnte,

wie weit bei idealer spektraler Auflösung das echte kontinuierliche Absorptionsspektrum in das Gebiet diesseits der eigentlichen Seriengrenze ( $1/\lambda = 2,74$ ) hereinreicht.

**5. Das Verhalten im U.V.** Über das Verhalten der Sternspektren unterhalb  $\lambda 4000$  konnte man erst zu brauchbaren Aussagen gelangen, wenn man ein wesentliches Stück über die Balmergrenze hinauskam. Das verminderte Reflexionsvermögen des Silbers setzte dem ersten Vorstoß in dieser Richtung von CH'ING SUNG YÜ (6) eine Grenze. KIENLE (4) hat 1931 einen Versuch mit einem kleinen Objektiv-Quarzspektrographen in größerer Höhe (3600 m) gemacht, der aber nicht bis zu einem absoluten Anschluß geführt werden konnte. Hier setzen mit Erfolg die Arbeiten von BARBIER und CHALONGE (5) mit ihren Mitarbeitern ein, die, ebenfalls mit einem reinen Quarzspektrographen,

auf dem Jungfrauoch einen wirklichen Anschluß an den Schwarzen Körper versuchten, unter Zwischenschaltung eines geeichten Wasserstoffkontinuums als Lichtquelle.

Aus den Beobachtungen werden 3 Größen abgeleitet, die das Verhalten der Spektren zwischen  $3000 < \lambda < 5000$  kennzeichnen: die Gradienten  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  zu beiden Seiten der Balmergrenze und der Intensitätssprung  $D$  an der Grenze selbst. Die  $\Phi_1$ , die sich auf den Bereich  $3700 < \lambda < 5000$  beziehen, sind merklich größer als die in Greenwich und Göttingen für  $4400 < \lambda < 6500$  gefundenen Werte und führen für das Mittel der A-o-Sterne auf  $\Phi_0 = 1,32$ ; dabei ist formal die kleine Reduktion auf die Greenwicher mittlere Wellenlänge angebracht. Es ist vorerst nicht möglich aufzuklären, ob hier noch systematische Fehler in den absoluten Eichungen vorliegen und welche Rolle die Verschiedenheit der Wellenlängenbereiche selbst spielt. Die oben aus den Göttinger absoluten Beobachtungen abgeleitete Abweichung der Energiekurve von dem linearen Verlauf liegt im umgekehrten Sinn; ihre Berücksichtigung würde den Widerspruch vergrößern.

Für die Differenz  $\Phi_1 - \Phi_2$  finden die französischen Autoren folgende Werte:

Tabelle 2.

Typus	B 0—B 2	B 3—B 8	A 0 + A 2	A 5	F 5
Anzahl . . . . .	9	9	9	5	2
$\Phi_1 - \Phi_2$ . . . . .	+ ,33	+ ,27	0,00	+ ,13	+ ,43

Für die A-Sterne wäre also im Mittel  $\Phi_1 = \Phi_2$ , für alle anderen Typen dagegen  $\Phi_1 > \Phi_2$ , d. h. der Verlauf des Kontinuums unterhalb  $\lambda 3700$  entspräche einer höheren scheinbaren Farbtemperatur als oberhalb. Bei der Sonne hat BRILL (vgl. Abb. 10, S. 450) im Gegensatz hierzu aus den Mt. Wilson-Messungen im U.V. merklich niedrigere Farbtemperaturen gefunden als im Bereich oberhalb  $\lambda 4000$ . Da anderweitige Beobachtungen nicht vorliegen, kann die für die theoretische Deutung der Sternspektren so wichtige Frage vorerst nicht eindeutig beantwortet werden. BOOTHROYD und WILLIAMS (9), die mit aluminisierten Spiegeln und Quarzoptik Aufnahmen gemacht haben, beschränken sich leider darauf, unter der Annahme  $\Phi_1 = \Phi_2$  (darauf läuft ihre „Extrapolation der Energiekurve unter Annahme konstanter Balmerabsorption“ hinaus) einfach aus Messungen bei  $\lambda 3100$  und  $\lambda 4250$  den Gradienten und daraus die Farbtemperatur zu bestimmen. Diese Beobachtungen können daher ebensowenig einen Beitrag zu der Frage liefern wie die älteren von YÜ und KARPOV, die keine sichere Ableitung der  $\Phi_2$  ermöglichen.

Für den Intensitätssprung an der Balmergrenze dagegen können die Beobachtungen von YÜ und KARPOV zum Vergleich herangezogen werden. Auch dabei stellen sich ganz erhebliche systematische Unterschiede heraus, deren Ursache vorerst nicht geklärt werden kann. Die

Werte für  $D$  von ARNULF, BARBIER, CHALONGE und CANAVAGGIA sind (in Größenklassen ausgedrückt):

Tabelle 3.

Typus	B 0—B 2	B 3—B 8	B 9—A 2	A 5	F 5
Anzahl . . . . .	9	9	10	5	2
$D$ . . . . .	0,13	0,55	1,16	1,00	0,65

Zwischen diesen und den Werten von YÜ und KARPOV gelten die Beziehungen:

$$\frac{3}{4} D_K = D = \frac{4}{3} D_{YÜ}.$$

Die Werte der französischen Autoren liegen also in der Mitte zwischen den beiden älteren Reihen. KIENLE hatte für 2 A-Sterne in guter Übereinstimmung mit der Tabelle  $D = 1,08$  gefunden.

Wegen der Verschmierung der höheren Glieder der Balmerreihe unterhalb  $\lambda 4000$  gehen in die Bestimmung von  $D$  die  $\Phi_1$  ein, mit deren Hilfe die Energiekurve von der Seite der längeren Wellen bis an die Seriegrenze extrapoliert werden muß. Systematische Fehler in den  $\Phi_1$  bewirken daher auch Fehler in  $D$ , die vom Spektraltyp abhängen dürften infolge der verschiedenen Länge des überbrückten Kurvenstückes.

**6. Das Verhalten im Infrarot.** Im nahen Infrarot haben MORGAN und WOOTEN (10) die Sterne  $\alpha$  Lyrae (A 0) und  $\alpha$  Aquilae (A 5) mit  $\beta$  Ursae minoris (K 5), sowie  $\alpha$  Aurigae (G 0) mit  $\alpha$  Tauri (K 5) verglichen durch Spektralaufnahmen auf Kodak-Emulsionen P und Q. Die Dispersion ist sehr klein (rund 1000 Å/mm); die Beobachtungen geben daher nur 2 Meßpunkte bei den mittleren Wellenlängen  $\lambda 8700$  und  $\lambda 10000$ . Aus der Kombination dieser Punkte mit den Messungen von JENSEN ziehen die Verfasser den Schluß, daß die bei JENSEN bereits angedeutete Krümmung der relativen Energiekurven sich nach dem Infrarot fortsetze. Ein absoluter Anschluß ist nicht versucht worden; die Frage nach dem wahren Verlauf des Kontinuums bleibt daher offen.

Die photoelektrischen Messungen von HALL (11) an Gitterspektren von  $\epsilon$  und  $\zeta$  Persei zwischen  $\lambda 4800$  und  $\lambda 10500$  (Dispersion 480 Å/mm) können zusammen mit den Messungen von KIENLE ( $3600 < \lambda < 6500$ ) und Mrs. RUDNICK ( $4000 < \lambda < 7500$ ) durch einen Gradienten von 0,6 dargestellt werden, der über den ganzen Bereich von  $\lambda 3700$  bis  $\lambda 10500$  konstant ist. Auch hier aber ist wegen des relativen Charakters der Messungen ein Schluß auf den Verlauf des Einzelkontinuums nicht möglich.

Die von ABBOT (12) in den Jahren 1923 und 1928 auf Mt. Wilson durchgeführten Radiometermessungen stellen die bisher nicht wiederholten einzigen Versuche dar, Sternspektren über die Grenze von  $1 \mu$  hinaus messend zu verfolgen. Abb. 8 zeigt, daß die beobachteten absoluten Intensitätsverteilungen recht wenig denen eines Schwarzen Körpers

gleichen. ABBOT betont indessen selbst: "much improvement is needed before the spectral energy-curves of any of the stars can be regarded as well determined. ... It is highly desirable to obtain as much as tenfold

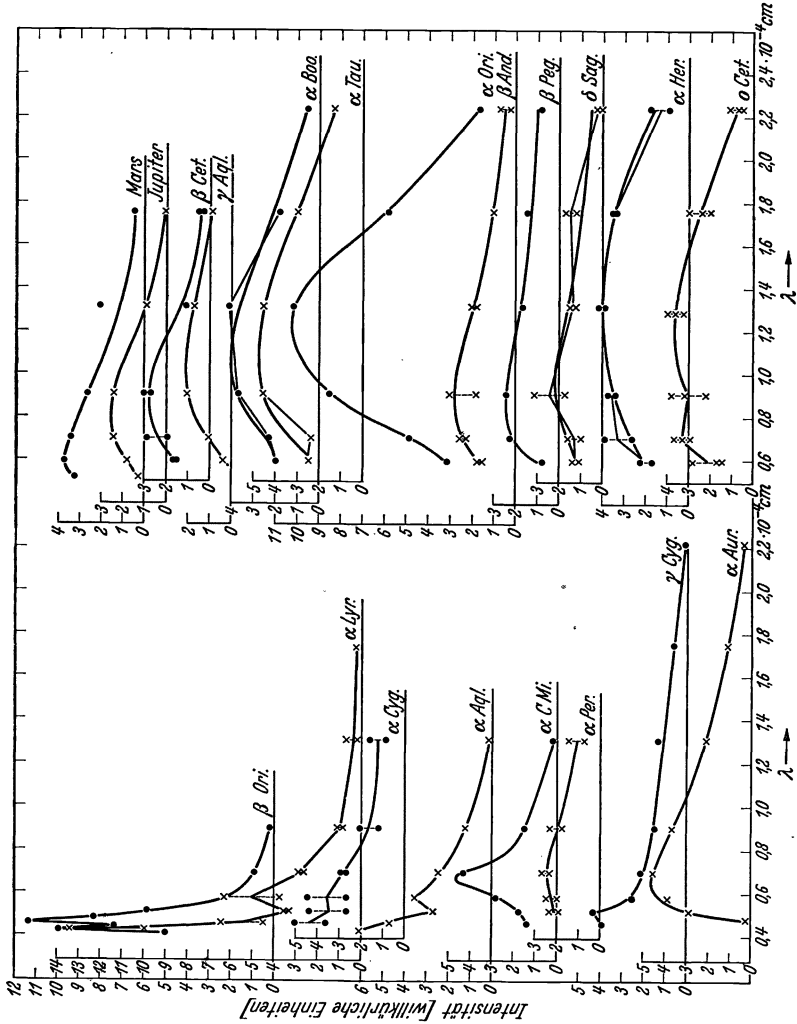


Abb. 8. Absolute Energieverteilung in Sternspektren nach Radiometermessungen ABBOTS.

greater sensitiveness than was available in 1928, without increased accidental disturbance".

So bleiben wir in unserer Kenntnis des Verlaufs des kontinuierlichen Spektrums für größere Bereiche vorläufig auf einen einzigen Stern beschränkt, die Sonne. Die Zusammenfassung dieser Kenntnisse veranschaulichen die Abb. 9 und 10, die Arbeiten von BRILL entnommen sind. Man erkennt zunächst die grundsätzliche Abweichung der Form

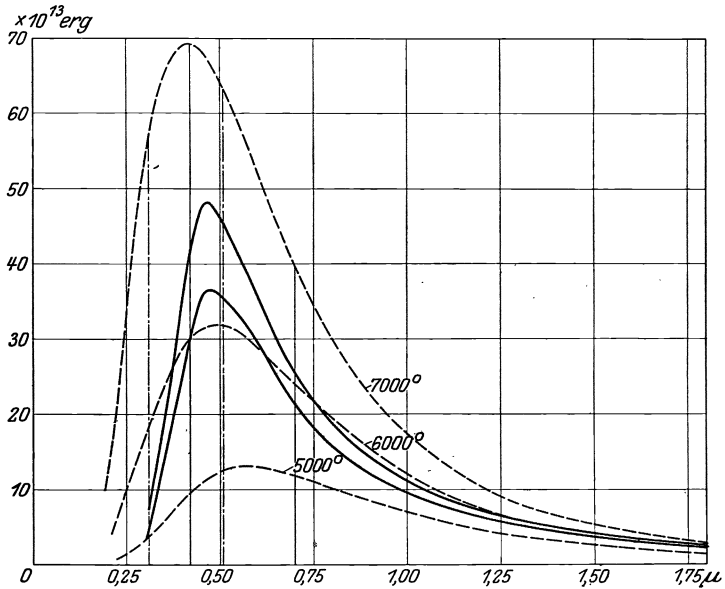


Abb. 9. Energieverteilung der mittleren und zentralen Sonnenstrahlung (untere bzw. obere ausgezogene Kurve), verglichen mit Schwarzen Strahlungen verschiedener Temperatur. (BRILL.)

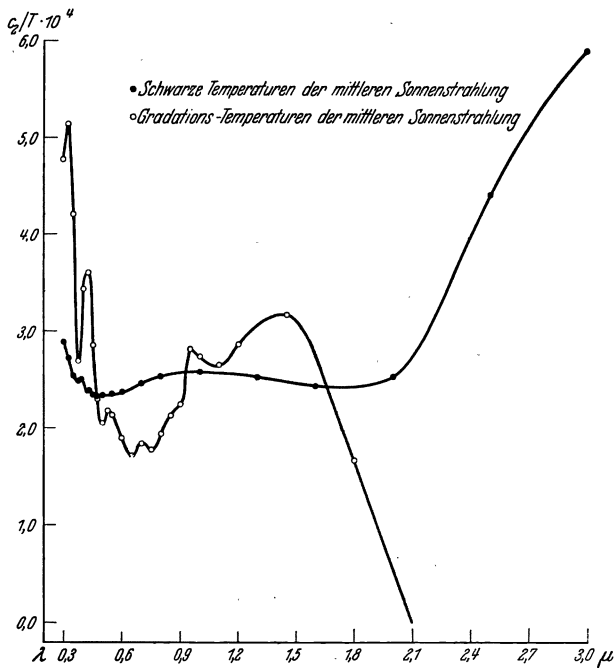


Abb. 10. Schwarze Temperatur und Gradationstemperatur der mittleren Sonnenstrahlung. (BRILL.)

der Energiekurve von einer PLANCKSchen Kurve und damit die Unmöglichkeit, durch einen einzigen Parameter, eine „Temperatur“, den Charakter der Sonnenstrahlung zu beschreiben. Wird formal eine „Schwarze Temperatur“ in der üblichen Weise aus den Absolutwerten der Energie berechnet, dann erhält man für verschiedene Wellenlängen verschiedene Werte. Diese Abhängigkeit der „Temperatur“ von der Wellenlänge wird besonders auffallend, wenn man in Anlehnung an das bei den Sternen geübte Verfahren den Gradienten in kleinen Wellenlängenbereichen der Berechnung einer Farbtemperatur („Gradationstemperatur“) zugrunde legt. Der unruhige Verlauf der Kurve, die  $c_2/\lambda T$  in Abhängigkeit von  $\lambda$  darstellt, spiegelt stark vergrößert die noch durch ungenügende spektrale Auflösung verfälschte Energieverteilung  $I_B(\lambda)$  wieder.

7. **Linienverschmierung und Randverdunkelung.** Den Einfluß der nicht aufgelösten Absorptionslinien auf das scheinbare Kontinuum zu bestimmen, hat MULDER (13) bei der Sonne versucht. Unterlage

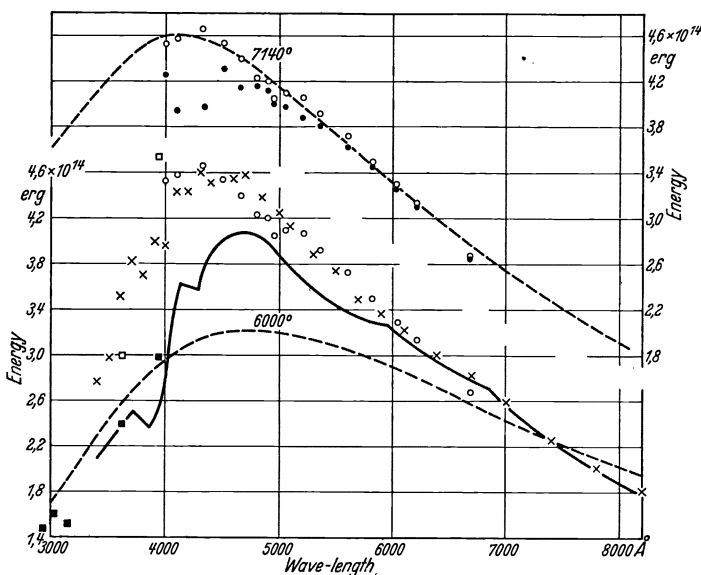


Abb. II. Ableitung der Energieverteilung im Sonnenspektrum durch Korrektur der Messungen von PLASKETT (●, ○), FABRY (■, □) und ABBOT (—, ×). (Nach MULDER.) — — — PLANCKSche Kurven.

bildet eine Photometrie der FRAUNHOFERSchen Linien in Sonnenspektren großer Dispersion. Die Totalabsorptionen dieser an Zahl und Intensität in verschiedenen Wellenlängenbereichen verschiedenen Linien werden in der Weise gewonnen, daß zunächst eine Reihe ausgewählter Linien exakt photometriert und mit deren Hilfe dann eine Kalibrierung der ROWLANDSchen Intensitätsskala vorgenommen wird. Die abschnittsweise Summierung über alle Absorptionen ergibt dann die Beträge, um die das Kontinuum durch die Wirkung der nicht aufgelösten Absorptions-

linien gedrückt ist. In der folgenden Tabelle sind diese Beträge in Prozenten des wahren Kontinuums für einige Stellen im Spektrum zusammengestellt.

Tabelle 4.

Wellenlängenbereich	3549-3646	4242-4348	5150-5736	5842-5950	7333-8002
Mittlere Wellenlänge . .	3600	4300	5200	5900	7700
Totalabsorption . . . .	35,4 %	23,5 %	11,8 %	3,0 %	0,9 %

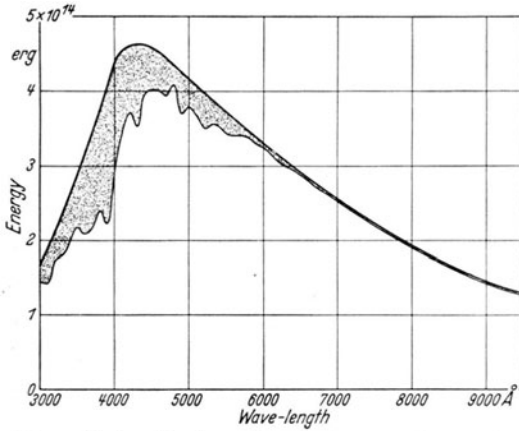


Abb. 12. Absolute Energieverteilung im Spektrum der zentralen Sonnenscheibe und Totalabsorption der umkehrenden Schicht. (MULDERS.)

befreien können. Stärker noch macht er sich bei den älteren Beobachtungen von ABBOT und von FABRY geltend.

Tabelle 5. Absolute Intensitätsverteilung im kontinuierlichen Spektrum der zentralen Sonnenscheibe.

$\lambda$	$I$	$\lambda$	$I$	$\lambda$	$I$	$\lambda$	$I$
0,30	1,70	0,56	3,63	0,85	1,67	1,70	0,35
35	2,90	58	3,47	0,90	1,43	1,80	0,30
40	4,40	60	3,31	0,95	1,28	1,90	0,26
42	4,60	62	3,16	1,00	1,17	2,00	0,22
44	4,61	64	3,00	1,10	0,97	2,10	0,16
46	4,52	66	2,85	1,20	0,82	2,20	0,12
48	4,35	68	2,71	1,30	0,68	2,30	0,10
50	4,16	70	2,56	1,40	0,55		
52	3,98	75	2,20	1,50	0,46		
54	3,80	80	1,90	1,60	0,40		

Einheit in  $I$ :  $10^{14}$  erg.

beider Funktionen nach den Reduktionen von MULDERS zeigt Abb. 12, den zahlenmäßigen Verlauf von  $I(\lambda)$  die Tabelle 5.

Aus dem Gang in diesen Zahlen erkennt man deutlich die starke Beeinflussung des Gradienten der Energiekurve durch die mit abnehmender Wellenlänge zunehmende Depression. MULDERS hat auch noch in den an Spektren relativ großer Dispersion durchgeführten Messungen von H. H. PLASKETT den systematischen Einfluß der nicht aufgelösten Linien nachweisen und die Messungen von diesem Effekt bei den älteren Beobachtungen von ABBOT und von FABRY geltend. Abb. 11 zeigt die Wirkung der von MULDERS vorgenommenen Verbesserungen dieser Messungen, durch die ein recht guter Angleich der Energiekurve an eine PLANCK'sche Kurve erzielt wird.

Es ist also bei der Sonne möglich, von der beobachteten Intensitätsverteilung  $I_B(\lambda)$  zu der des ungestörten Kontinuums  $I(\lambda)$  der zentralen Sonnenscheibe überzugehen. Den Unterschied



WESSELINK (14) hat die Ergebnisse von MULDERs benutzt zu einem Versuch, die Beobachtungen JENSENs an Sternspektren zu verbessern. Macht man die mit einem hohen Grade der Annäherung gültige Annahme, daß der Unterschied zwischen  $I(\lambda)$  und  $I_B(\lambda)$  bei dem von JENSEN gewählten Bezugsstern  $\alpha$  Ursae minoris (cF8) der gleiche sei wie bei der Sonne (dGo), dann kann man alle Beobachtungen wegen des Verschmierungseffektes im Spektrum des Vergleichsstern verbessern, so daß in den Kurven der relativen Energieverteilung nur noch die Wirkung der Absorptionslinien der Sterne selbst sich bemerkbar macht. Das Ergebnis zeigt Abb. 13. Für die früheren Typen ist eine merkliche Annäherung an den in  $1/\lambda$  linearen Verlauf erzielt worden; für die spätem bleibt die Krümmung und die wachsende Depression im U.V. erhalten, ganz wie das die Abb. 3 für die auf die A o-Sterne bezogenen Göttinger Beobachtungen zeigt, wenn die Depression bei den A-Sternen berücksichtigt wird. Ob aber die Annahme WESSELINKs zutrifft,

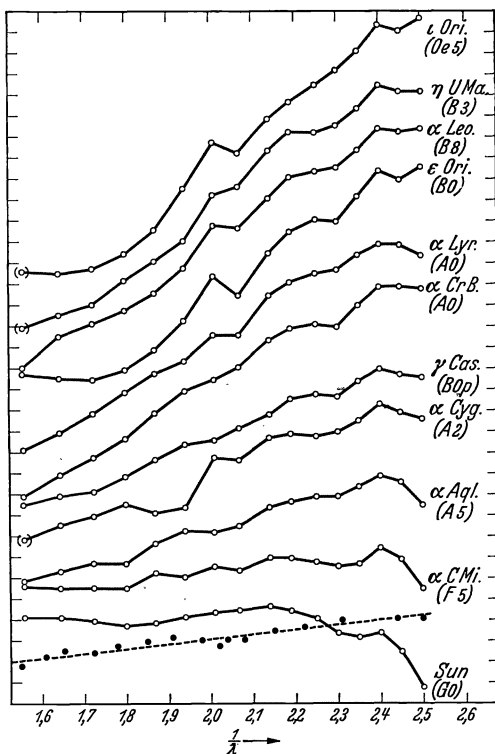
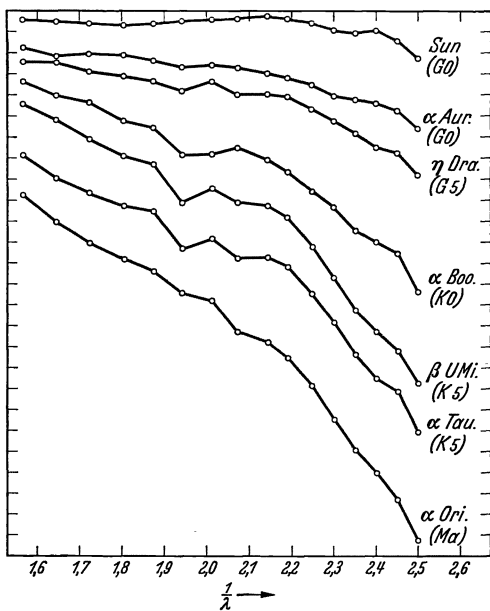


Abb. 13. Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum von 16 Sternen, bezogen auf das wegen Linienverschmierung korrigierte Spektrum von  $\alpha$  Umi. (JENSEN-WESSELINK.)

daß bei den frühen Typen  $I_B(\lambda) \equiv I(\lambda)$  sei, und man daher aus dem Ergebnis der Reduktion den Schluß ziehen darf, daß die Energieverteilung für diese Sterne einer Schwarzen Strahlung in dem Gebiet zwischen  $0,40 \mu$  und  $0,64 \mu$  entspreche, muß dahingestellt bleiben, solange nicht entsprechende Untersuchungen über den Einfluß der Absorptionslinien wie bei der Sonne auch bei diesen Typen vorliegen. Allerdings scheinen die neben den Wasserstofflinien vorhandenen zahlreichen Linien der Metalle bei den Typen B bis Fo so schwach zu sein, daß sie auch in ihrer Gesamtheit keine stark mit der Wellenlänge variierende Depression des Kontinuums bewirken können.

Die Randverdunkelung, die nur bei der Sonne unmittelbarer empirischer Prüfung zugänglich ist, nimmt mit abnehmender Wellenlänge zu. Dadurch wird bewirkt, daß das über die ganze Scheibe gemittelte Sonnenspektrum einer niedrigeren Temperatur zugeordnet werden muß als das Spektrum der zentralen Scheibe (vgl. Abb. 9). Prinzipiell ist es zwar bei Bedeckungsveränderlichen möglich, aus der Lichtkurve Aussagen über die Randverdunkelung zu machen; praktisch aber reicht die heute mögliche Genauigkeit solcher Beobachtungen nicht aus, um ähnliche Untersuchungen wie bei der Sonne über den Unterschied zwischen dem Spektrum der Mitte und dem des Randes bzw. der integrierten Scheibe anzustellen.

**8. Unterschiede zwischen Riesen und Zwergen.** Es ist schon früh festgestellt worden, daß Riesen und Zwerge des gleichen Spektraltypus verschiedene Farbtemperatur haben. So sind z. B. die Farbtemperaturen von Capella (gGo) und Sonne (dGo) in der üblichen Skala etwa  $5500^\circ$  und  $6000^\circ$ . In Abb. 3 ist neben Capella ( $\alpha$  Aur) noch der in seinem Spektrum völlig mit der Sonne identische Stern  $\zeta$  Herculis aufgenommen. Der Unterschied im Verlauf der beiden Spektren tritt klar zutage. Er läßt sich im übrigen nicht einfach durch einen relativen Gradienten darstellen, wie die nebenstehende kleine Zusammenstellung der  $\Delta m$  ( $\zeta$  Her —  $\alpha$  Aur) zeigt.

Tabelle 6.  
 $\Delta m$  ( $\zeta$  Her —  $\alpha$  Aur).

$x/\lambda$	$\Delta m$ -const	$x/\lambda$	$\Delta m$ -const
1,5	+ ,000	2,1	+ ,085
1,6	,035	2,2	,140
1,7	,010	2,3	,115
1,8	,060	2,4	,245
1,9	,020	2,5	,260
2,0	,040	2,6	,415

Indessen fehlt es bis heute an eingehenden spektralphotometrischen Untersuchungen genügend vieler Sterne, um den Unterschied im ganzen Verlauf des kontinuierlichen Spektrums für die einzelnen Spektralklassen auch nur qualitativ angeben zu können. Fast alle Unter-

suchungen über „Leuchtkrafteffekte“ müssen sich in Ermangelung anderen Materials auf Farbenindizes stützen, in denen Wirkungen des eigentlichen Kontinuums vermischt sind mit den Einflüssen der Absorptionslinien und -banden. Auch in den auf Spektren kleiner Dispersion beruhenden spektralphotometrischen Untersuchungen an späten Typen, für die oben das Beispiel  $\zeta$  Her —  $\alpha$  Aur gegeben wurde, sind diese Einflüsse keines-

wegs getrennt (vgl. Nr. 7). Vielleicht ist das der Grund dafür, daß bei den Spektraltypen F bis M wenigstens dem Vorzeichen nach Übereinstimmung herrscht zwischen den Ergebnissen aus Farbenindizes und Spektren, während bei den frühen Typen (B- und A-Sternen) noch ein offenkundiger Widerspruch besteht (vgl. W. BECKER: Handbuch der Astrophysik, Bd. 7, S. 462).

Bei den späten Typen finden alle Beobachter eine mit wachsender Leuchtkraft abnehmende scheinbare Farbtemperatur, ähnlich wie in unserem Beispiel. Bei den frühen Typen dagegen finden die einen (E. T. R. WILLIAMS, GERASIMOVIČ, aus Spektren) den gleichen Sinn des Leuchtkrafteffekts wie bei den späten Typen, andere dagegen (STICKER, W. BECKER, aus Farbenindizes) eine Umkehrung. Man wird weiteres Beobachtungsmaterial abwarten müssen, vor allem an Spektren nicht zu kleiner Dispersion, in weiten Wellenlängenbereichen und verbunden mit einer Analyse des Linienspektrums, um die Frage entscheiden zu können. Zudem wird es in Verbindung damit einer sorgfältigen Diskussion des Einflusses der interstellaren Absorption bedürfen, die nach allen bisherigen Erfahrungen einem  $1/\lambda$ -Gesetz zu folgen scheint, um wahre Verschiedenheiten der Farbtemperatur zu trennen von „Verfärbungen“ durch das interstellare Medium. Fälle wie  $\zeta$  Persei werden dann erst ihre endgültige Aufklärung finden.

## II. Theorie des kontinuierlichen Sternspektrums.

9. **Sternatmosphären.** Die Theorie einer geschichteten Atmosphäre im Strahlungsgleichgewicht liefert für die Intensität der unter dem Winkel  $\vartheta$  gegen die Normale aus der Oberfläche ( $\tau = 0$ ) austretenden Strahlung den Ausdruck

$$I_{\nu}(0, \vartheta) d\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} d\nu \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau \frac{\kappa_{\nu}}{\bar{\kappa}} \sec \vartheta}}{\frac{h\nu}{e^{hT} - 1}} \frac{\kappa_{\nu}}{\bar{\kappa}} \sec \vartheta d\tau. \quad (1)$$

Darin ist  $\kappa_{\nu}$  der Absorptionskoeffizient für die Frequenz  $\nu$ ,  $\bar{\kappa}$  sein Mittelwert (über alle Frequenzen) und  $\tau$  die optische Tiefe, definiert durch

$$d\tau = -\kappa_{\nu} \rho dr. \quad (2)$$

Führt man statt der Temperatur  $T$  die Strahlungsdichte ein gemäß

$$\frac{4\pi}{c} B(\tau) = \frac{4\sigma}{c} T^4, \quad (3)$$

so ergibt sich die den Aufbau der Atmosphäre beherrschende Temperaturverteilung mit der Höhe als Lösung der Integralgleichung

$$B(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} B(t) K(|t - \tau|) dt; \quad K(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-s}}{s} ds. \quad (4)$$

In vielen Anwendungen hat man sich mit der ersten Näherung der Lösung begnügt, die  $B(\tau)$  als lineare Funktion der optischen Tiefe ergibt:

$$B(\tau) = \frac{1}{2} \frac{F}{\pi} \left( 1 + \frac{3}{2} \tau \right). \quad (5)$$

Darin ist  $F$  der Nettostrom, der die effektive Temperatur  $T_e$  bestimmt:

$$F = \sigma T_e^4. \quad (6)$$

Mit (3) und (6) geht (5) über in die oft benutzte Beziehung

$$T^4 = \frac{1}{2} T_e^4 \left( 1 + \frac{3}{2} \tau \right) = T_0^4 \left( 1 + \frac{3}{2} \tau \right), \quad (7)$$

wo  $T$  die Temperatur in der optischen Tiefe  $\tau$  und dementsprechend  $T_0$  die Temperatur an der Oberfläche (Grenztemperatur) bedeutet.

Höhere Näherungen sind in verschiedener Form gerechnet worden; sie ergeben nur in der Nähe der Oberfläche merkliche Abweichungen von der linearen Näherung. Es scheint indessen nach einem Versuch von UNSÖLD und MAUE (15) nicht, als ob die Benützung höherer Näherungen die Berechnung der Intensitätsverteilung der austretenden Strahlung merklich beeinflusse. Wir verzichten daher auf ihre Wiedergabe.

Da die optische Tiefe durch den Absorptionskoeffizienten  $\kappa_\nu$  bestimmt ist, tragen zu der Strahlung  $I_\nu$  offenbar um so tiefere Schichten des Sternes bei, je kleiner  $\kappa_\nu$  im Verhältnis zu  $\bar{\kappa}$  ist, d. h. die im Frequenzintervall  $d\nu$  austretende Strahlung entspricht scheinbar einer um so höheren Temperatur, verglichen mit der effektiven Temperatur. Von dieser Vorstellung aus hat man versucht, aus der beobachteten Energieverteilung im Sonnenspektrum die Frequenzabhängigkeit des kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten der Sonnenatmosphäre zu berechnen. Das ist auf zwei verschiedene Weisen möglich. Man vergleicht das Spektrum der zentralen Sonnenscheibe entweder unmittelbar mit dem eines Schwarzen Körpers der Temperatur  $T_e$  (und zwar die absoluten Energien) oder aber mit dem Spektrum des Sonnenrandes (wobei nur Intensitätsverhältnisse für die einzelnen Wellenlängen nötig sind).

Die auf beiden Wegen gefundenen Werte (15) für  $\kappa_\nu/\bar{\kappa}$  sind in befriedigender Übereinstimmung und zeigen einen nur geringen Gang mit der Wellenlänge. Die Methode bleibt als Ganzes aber unbefriedigend, da sie ja nur auf eine „astronomische“ (d. h. in diesem Fall rein empirische) Bestimmung des Absorptionskoeffizienten hinausläuft, während wir wünschen müssen, mit einem aus quantentheoretischen Überlegungen gefolgerten „physikalischen“ Absorptionskoeffizienten die Intensitätsverteilung im Sonnenspektrum darzustellen. Überdies bleibt die Methode auf die Sonne beschränkt und vermag uns keine Auskunft zu geben über das Verhalten von Sternatmosphären anderer effektiver Temperatur.

MCCREA (16) hat in seinem Aufsatz über „Model Stellar Atmospheres“ den Versuch gemacht „to work out the behaviour of stellar atmospheres from physical data alone“. In der Folge haben dann BIERMANN (17), UNSÖLD (18) und PANNEKOEK (19) der Frage ziemlich parallel laufende Untersuchungen gewidmet, die eine an den Beobachtungen quantitativ

prüfbare Theorie anstrebten. UNSÖLD hat zunächst reine Wasserstoffatmosphären behandelt, die einer exakten Berechnung weitgehend zugänglich sind; ist aber zu dem Schluß gekommen, daß selbst bei hohen Temperaturen (für spätere Typen als F kommt die Theorie auf keinen Fall in Frage) die übrigen Bestandteile der Sternatmosphären eine nicht zu vernachlässigende Rolle spielen. MCCREAs Modellatmosphäre besteht aus Wasserstoff und einem wasserstoffähnlichen hypothetischen Element, dessen Ionisationspotential (5 Volt) einem Mittelwert für die Metalle entspricht, in verschiedenem Mischungsverhältnis. BIERMANN und PANNEKOEK haben die „RUSSELL-Mischung“ zugrunde gelegt, PANNEKOEK allerdings mit extrem hohem Wasserstoffgehalt (H:Metalle = 1000:1 in Atomzahlen); UNSÖLD in seiner letzten Arbeit eine von der RUSSELL-Mischung nicht sehr abweichende Zusammensetzung, die in der Hauptsache gekennzeichnet ist durch das Verhältnis Wasserstoff:(Sauerstoff + Metalle) = 14:1 in Atomzahlen, bzw. 1:2 in Masse, und die relative Häufigkeit der Metalle entsprechend der Zusammensetzung des Erdkörpers.

Die Unsicherheit der „Wasserstoff-Häufigkeit“ ist die eine Schwierigkeit, der die allgemeine Theorie begegnet; denn das Mischungsverhältnis der Elemente bestimmt die Gewichte für die Mittelung der atomaren Absorptionskoeffizienten. Die andere große Schwierigkeit bereitet die Berechnung der atomaren Absorptionskoeffizienten der nichtwasserstoffähnlichen Elemente, die nur mit gewissen Vernachlässigungen möglich ist.

Zum Vergleich mit der Beobachtung gehen MCCREA und BIERMANN davon aus, daß die Strahlung der Frequenz  $\nu$  aufgefaßt werden kann als Strahlung einer Schicht der optischen Tiefe  $\tau = \bar{\kappa}/\kappa_\nu$ , d. h. als Schwarze Strahlung der Temperatur  $T_\nu$ , wo

$$T_\nu^4 = \frac{1}{2} T_e^4 \left( 1 + \frac{\bar{\kappa}}{\kappa_\nu} \right). \quad (8)$$

PANNEKOEK und UNSÖLD berechnen unmittelbar die Intensitätsverteilung relativ zu der eines Schwarzen Körpers der Grenztemperatur nach den Formeln:

$$H_0(\nu) = \frac{E_0(\nu)}{2 + \sqrt{3}} \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} C_e \frac{\bar{\kappa}}{\kappa_\nu} \right) \quad \text{PANNEKOEK} \quad (9)$$

$$I(\nu) = I_{\nu,0} \left( 1 + C_0 \frac{\bar{\kappa}}{\kappa_\nu} \right), \quad \text{UNSÖLD} \quad (10)$$

wo

$$C = \frac{1}{4} \frac{c_2}{\lambda T} \left( 1 - e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \right)^{-1}. \quad (11)$$

$E_0(\nu)$  bzw.  $I_{\nu,0}$  ist die Intensität der Schwarzen Strahlung der Grenztemperatur  $T_0$ ,  $H_0(\nu)$  bzw.  $I(\nu)$  die beobachtete Intensität im kontinuierlichen Spektrum;  $\bar{\kappa}/\kappa_\nu$  wird jeweils unabhängig von der Tiefe angesehen. Bei UNSÖLD ist  $C$  mit  $T_0$ , bei PANNEKOEK mit  $T_e$  zu berechnen.

**10. Der kontinuierliche Absorptionskoeffizient.** Die kontinuierliche Absorption setzt sich aus verschiedenen Anteilen zusammen. Die Hauptrolle spielt die photoelektrische Ionisation (diskret-kontinuierliche Übergänge); dazu kommen die kontinuierlich-kontinuierlichen Über-

gänge. Bei hohen Temperaturen und niedrigen Drucken macht sich in zunehmendem Maße die THOMSON-Streuung an freien Elektronen bemerkbar. Für streng wasserstoffähnliche Elemente ist der Absorptionskoeffizient pro Atom im  $n^{\text{ten}}$  Quantenzustand nach KRAMERS:

$$a_n = \frac{Z^2}{n^2} \cdot \frac{64 \pi^4}{3 \sqrt{3}} \cdot \frac{m e^{10}}{c h^6 n^3} \cdot \frac{Z^2}{\nu^3} \cdot g \quad (I)$$

und die Anzahl der Atome in diesem Zustand (pro Atom im Grundzustand) ist

$$N_n = n^2 e^{-(u_1 - u_n)} \quad (2)$$

mit

$$u = \frac{h \nu}{k T} \quad \text{und} \quad u_n = \frac{R h c}{k T} \cdot \frac{Z^2}{n^2}. \quad (3)$$

Der Korrektionsfaktor  $g$  wird im allgemeinen gleich 1 gesetzt.

Um die Abweichungen der Atomfelder vom COULOMBSchen zu berücksichtigen, führt UNSÖLD an Stelle von  $Z$  eine effektive Kernladungszahl  $Z + s$  ein und setzt bei den numerischen Rechnungen (durch Probieren)  $s = 1,5$ . Für Absorption durch neutrale Atome ist  $Z = 1$ , für Absorption durch einfach ionisierte  $Z = 2$  und für nichtwasserstoffähnliche Atome ist  $u_1$  als die Ionisierungsarbeit/ $k T$  zu betrachten.

Um den Absorptionskoeffizienten  $\kappa_\nu$  für die Frequenz  $\nu$  zu erhalten, muß über alle Grenzkontinua summiert werden, deren Kantenfrequenz kleiner als  $\nu$  ist, und über den kontinuierlich-kontinuierlichen Absorptionskoeffizienten. Für Wasserstoff erhält UNSÖLD schließlich

$$\kappa'_\nu = (1 - e^{-u}) \cdot \kappa_\nu = \frac{64 \pi^4}{3 \sqrt{3}} \cdot \frac{m e^{10}}{c h^3 m_H k^3} \cdot \frac{e^{-u_1}}{T^3} \cdot \frac{1}{u^3} \left\{ \sum_{u_n < u}^{n=4} \frac{e^{u_n}}{n^3} + \frac{e^{u_1}}{2 u_1} \right\} \quad (4)$$

als Absorptionskoeffizient pro Gramm. Dabei ist die Summe der diskret-kontinuierlichen Übergänge von  $n = 5$  ab durch ein Integral approximiert, in das die kontinuierlich-kontinuierlichen Übergänge durch Erstreckung der Grenze bis  $-\infty$  mit einbezogen sind. Der Faktor  $(1 - e^{-u})$  trägt der erzwungenen Reemission Rechnung.

Im Fall der anderen Elemente hat BIERMANN versucht, alle stärkeren Absorptionskanten (Na, Mg, Si, Fe) einzeln zu berücksichtigen, während PANNEKOEK und UNSÖLD von vornherein diese Kanten verschmieren, d. h. die Summen durch Integrale ersetzen, „da — auch nach Ausweis der Beobachtungen — keine einzelne Absorptionskante auch nur annähernd so deutlich hervortritt, wie die des Wasserstoffs bei  $\lambda 3647$ “ (UNSÖLD). JAHN (20) hat in einer eingehenden Untersuchung speziell für die Verhältnisse auf der Sonne gezeigt, daß die Überlagerung der aus Schichten mit verschiedenen Temperaturen kommenden Strahlungen ausgesprochen verschmierend auf die Kanten wirkt.

Die entsprechende Formel für  $\kappa'_\nu$  lautet nach UNSÖLD dann:

$$\kappa'_\nu = \frac{16 \pi^2}{3 \sqrt{3}} \cdot \frac{e^6 (Z + s)^2}{c h k^2} \cdot \frac{e^{-u_1}}{T^2} \cdot \frac{e^u - 1}{u^3} = C \frac{e^u - 1}{u^3}. \quad (5)$$

Für die Streuung an freien Elektronen gilt (ebenfalls pro Gramm)

$$s = \frac{8 \pi}{3} \left( \frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \frac{L}{\mu_0} N_e, \quad (6)$$

wo mit  $\mu_0$  das mittlere Molekulargewicht nichtionisierter Sternmaterie bezeichnet ist. UNSÖLD setzt  $\mu_0 = 2,80$  und erhält damit

$$s = 0,143 N_e. \tag{7}$$

Das ROSSELAND-Mittel  $\bar{\kappa}$  über den Absorptionskoeffizienten berechnet sich mit Hilfe der von B. STRÖMGREN (21) gegebenen Tabellen zu:

$$\frac{1}{\bar{\kappa}} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu (1 - e^{-u})} G(u) du}{\int_0^\infty G(u) du}; \quad G(u) = \frac{u^4 \cdot e^{-u}}{(1 - e^{-u})^2}. \tag{8}$$

Berechnet man diesen Mittelwert mit (5), so wird einfach  $\bar{\kappa} = 1,15 \cdot C$ , also

$$\frac{\kappa'_\nu}{\bar{\kappa}} = \frac{e^u - 1}{1,15 u^3}, \tag{9}$$

d. h. unter den gemachten Annahmen ist für die Elemente außer Wasserstoff  $\kappa'_\nu/\bar{\kappa}$  nur eine Funktion von  $u = h\nu/kT$ . UNSÖLD betrachtet die durch (9) gegebene Frequenzabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten als zu groß und schwächt sie rein empirisch ab, um ungefähr in Übereinstimmung zu kommen mit den Verhältnissen bei der Sonne. Darauf beruht wohl ein Teil der Unterschiede zwischen seinen zahlenmäßigen Ergebnissen und denen PANNEKOEKs bei niedrigen Temperaturen. Bei PANNEKOEK fehlt der Beitrag (6), der sich neben dem verschiedenen Wasserstoffgehalt bei hohen Temperaturen bemerkbar macht.

Die endgültigen Absorptionskoeffizienten der Sternatmosphäre ergeben sich durch Mittelung über die einzelnen Bestandteile nach Maßgabe ihrer relativen Häufigkeit, wobei noch die Ionisationsverhältnisse nach der SAHASCHEN Formel berücksichtigt werden müssen. Wir übergehen die Einzelrechnungen und stellen nur in Tabelle 7 die von UNSÖLD und PANNEKOEK gefundenen Werte für  $\log \kappa'_\nu/\bar{\kappa}$  in Abhängigkeit von  $\lambda$  und  $T$  zusammen.

Tabelle 7.

$T$	25200	16800	12600	10080	8400	7200	6300	5600	5040
.7 <sup>-</sup>	,58	,54	,51	,60	,51	,03	,02	] ,26	] ,41
.7 <sup>+</sup>	,25	,10 ,16	,06	,18	,05	,04	,02		
10	,30 ,59	,15 ,25	,02	,14 ,40	,05 ,47	,07 ,30	,02 ,03	] ,01	] ,09
10	,46 ,82	,27 ,50	,09 ,10	,02 ,13	,00 ,23	,10 ,26	,09 ,14		
10	I,01	,70	,31	,08	,00	,14	,20	] ,14	] ,09
10	,66	,46	,26	,16	,09	,07	,09	] ,07	] ,09
16	,85	,64	,44	,22	,21	,04	,07		

Die linke Reihe jeder Spalte gibt jeweils die Werte von UNSÖLD, die rechte die von PANNEKOEK. Negative Werte sind kursiv gedruckt. UNSÖLD gibt für  $T < 6300$  die Absorptionskoeffizienten nicht explizit, da sie in diesem Gebiet [vgl. (9)] nur noch von  $u$  abhängen. Die praktische Unabhängigkeit seiner  $\kappa'_\nu/\bar{\kappa}$  von der Frequenz in den Spalten 7200

und 6300 bleibt auch für die niedrigeren Temperaturen erhalten, ist aber bei UNSÖLD eine Folge der erwähnten empirischen Abänderung des nach Formel (9) errechneten Verlaufes. Das muß im Auge behalten werden, wenn man die Theorie mit der Beobachtung vergleicht.

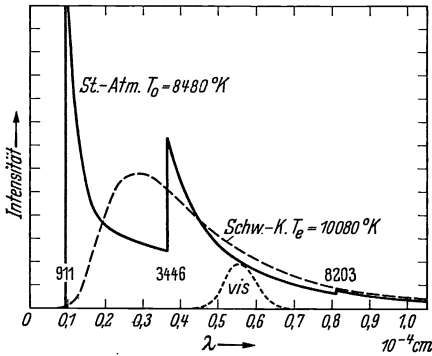


Abb. 14. Theoretische Energieverteilung im Spektrum eines A-Sternes. (PANNEKOEK.)

lung zwischen  $\lambda$  5500 und  $\lambda$  8000 sehr nahe einer Schwarzen Strahlung der Temperatur  $T_e = T_0 \sqrt[4]{2}$  entspricht. Unterhalb  $\lambda$  5000 setzt eine starke Überhöhung der Energiekurve ein, d. h. die der beobachteten Strahlung entsprechende Farbtemperatur liegt mit Annäherung an die Balmer-

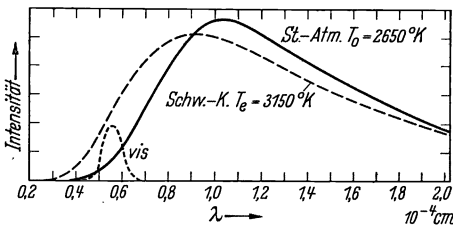


Abb. 15. Theoretische Energieverteilung im Spektrum eines M-Sternes. (PANNEKOEK.)

### 11. Das theoretische Spektrum. Farbtemperatur und effektive Temperatur.

Mit den in 9. und 10. gegebenen Unterlagen lassen sich nun unmittelbar die theoretischen kontinuierlichen Spektren für Atmosphären vorgegebener effektiven Temperaturen berechnen. Zur Veranschaulichung geben wir zunächst zwei Figuren nach PANNEKOEK, die etwa einem A- und einem M-Stern entsprechen (Abb. 14 und 15). Man erkennt daraus sehr gut, daß bei den A-Sternen die beobachtete Strahlung

zwischen  $\lambda$  5500 und  $\lambda$  8000 sehr nahe einer Schwarzen Strahlung der Temperatur  $T_e = T_0 \sqrt[4]{2}$  entspricht. Unterhalb  $\lambda$  5000 setzt eine starke Überhöhung der Energiekurve ein, d. h. die der beobachteten Strahlung entsprechende Farbtemperatur liegt mit Annäherung an die Balmer-

grenze in zunehmendem Maße über der effektiven Temperatur.

Dagegen entspricht die Strahlung unmittelbar jenseits der Balmergrenze (bis an die Grenze des beobachtbaren Bereiches  $\lambda$  3000) der Intensität und dem Gradienten nach einer merklich niedrigeren als der effektiven Temperatur. Dieser Verlauf des kontinuierlichen Spek-

trums früher Typen ist übrigens bereits aus den von MCCREA gegebenen Figuren zu ersehen, in denen zum Vergleich die damals allein bekannten Beobachtungen von YÜ eingezeichnet sind.

Im Spektrum der Atmosphären niedrigerer Temperatur (Abb. 15) tritt gegenüber der Schwarzen Strahlung der effektiven Temperatur im ganzen eine Verschiebung des Energiemaximums nach längeren Wellen ein. Im normalen bisherigen Beobachtungsbereich ( $\lambda < 1 \mu$ ) entspricht das Spektrum einer niedrigeren als der effektiven Temperatur.

UNSÖLDs Ergebnisse, die wir in Abb. 16 und 17 wiedergeben, lassen deutlich erkennen, mit welcher Annäherung man die theoretischen Spektren formal durch Gradienten (d. h. Farbtemperaturen) kennzeichnen kann. Nur entsprechen diese Gradienten eben im allgemeinen nicht der



effektiven Temperatur der Sternatmosphäre. Zum Vergleich mit den vorliegenden Beobachtungen geben sowohl UNSÖLD wie PANNEKOEK die Gradienten  $\Phi = c^2/T \cdot (1 - e^{-c_2/\lambda T})^{-1}$  der theoretischen Spektren für zwei

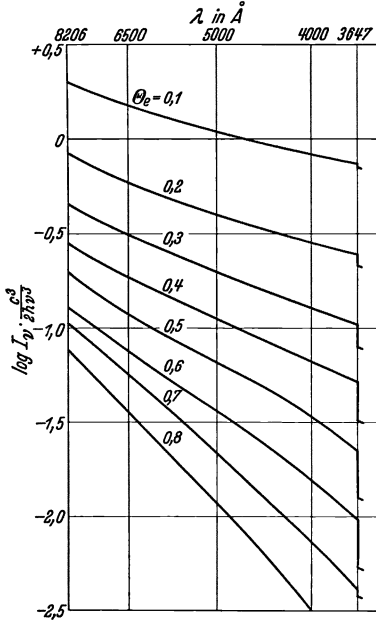


Abb. 16. Theoretische Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum für Temperaturen über 6300°. (UNSÖLD.)

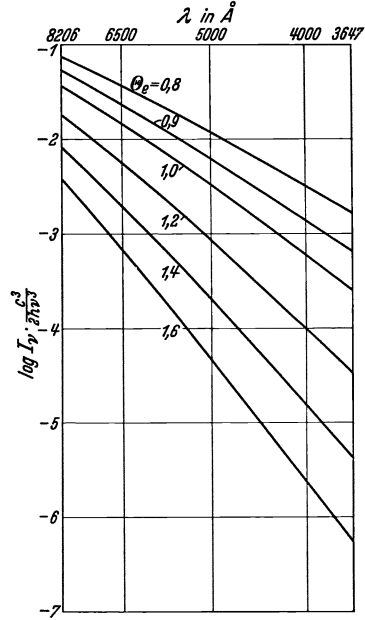


Abb. 17. Theoretische Energieverteilung im kontinuierlichen Spektrum für Temperaturen unter 6300°. (UNSÖLD.)

Wellenlängenbereiche. Wir stellen in Tabelle 8 die Differenzen  $\Delta\Phi = \Phi - \Phi_e$  nach den Rechnungen beider Autoren zusammen. PANNEKOEK hat die Gradienten für die Bereiche 4000—5000 und 5000—6000 abgeleitet, UNSÖLD für 4000—5000 und 5000—6500.

Tabelle 8.

$\frac{5040}{T_e}$ $\theta_e$	$T_e$	PANNEKOEK			UNSÖLD		
		$\Delta\Phi$		$\Phi_r - \Phi_b$	$\Delta\Phi$		$\Phi_r - \Phi_b$
		5500	4500		5750	4500	
0,2	25 200	+ ,02	,00	+ ,11	— ,05	— ,10	+ ,16
,3	16 800	— ,03	— ,10	+ ,15	— ,15	— ,08	+ ,03
,4	12 600	— ,24	— ,38	+ ,20	— ,22	— ,18	+ ,04
,5	10 080	— ,47	— ,61	+ ,20	— ,30	— ,15	— ,08
,6	8 400	— ,63	— ,70	+ ,11	— ,20	— ,05	— ,10
,7	7 200	— ,50	— ,31	— ,16	— ,01	+ ,14	— ,11
,8	6 300	+ ,08	+ ,41	— ,31	+ ,14	+ ,33	— ,17
,9	5 600	+ ,43	+ ,76	— ,32	+ ,22	+ ,47	— ,24
1,0	5 040	+ ,70	+ ,98	— ,27	+ ,40	+ ,56	— ,15
1,2	4 200				+ ,70	+ ,82	— ,12
1,4	3 600				+ ,87	+ 1,23	— ,36
1,6	3 150				+ 1,22	+ 1,41	— ,19

Leider fehlen die entsprechenden Rechnungen für  $\lambda < 3647$ , so daß ein quantitativer Vergleich mit den neueren Beobachtungen im U.V. nicht möglich ist. Indessen hat BARBIER (22) darauf hingewiesen, daß hier schon qualitativ bei den frühen Typen ein unüberbrückbarer Widerspruch zwischen Beobachtung und Theorie besteht. Die Theorie liefert in jedem Fall (wie in Abb. 14) für  $\lambda < 3647$  einen größeren Gradienten  $\Phi_2$  als für  $\lambda > 3647$  ( $\Phi_1$ ), während aus den bisher vorliegenden Beobachtungen (Tabelle 2) ebenso unzweideutig  $\Phi_1 > \Phi_2$  folgt. Wenn die Ergebnisse der Beobachtung ernst genommen werden müssen und nicht ganz erheblich durch systematische Fehler entstellt sind, dann muß die Theorie in der vorliegenden Form in irgendeinem wesentlichen Punkt abgeändert werden.

Befriedigend erklärt die Theorie, nach Ausweis der Spalten  $\Phi_r - \Phi_b$  der Tabelle 8, daß die beobachteten Gradienten im kurzwelligen Gebiet ( $\Phi_b$ ) eine weitere Farbtemperaturskala ergeben als im langwelligen ( $\Phi_r$ ). Daß dieser Gang der Gradienten mit der Wellenlänge in den Beobachtungen größer ist (vgl. JENSEN bzw. die Unterschiede der Skalen von WILSING und ROSENBERG) als in der Theorie, braucht man nicht schwer zu nehmen, solange die Beobachtungen bei den späten Typen nicht vom Einfluß der Absorptionslinien befreit sind. Wie das Beispiel der Sonne zeigt, wirkt diese Korrektur in dem Sinne, daß der Unterschied  $\Phi_r - \Phi_b$  verkleinert wird.

Ebenso wird verständlich, daß die absoluten Anschlüsse an den Schwarzen Körper in Greenwich und Göttingen auf einen so niedrigen Wert für  $\Phi_0$  geführt haben. Denn bei einer effektiven Temperatur von rund  $10000^\circ$  ( $\Phi_e^{5250} = 1,51$ ) hat man nach PANNEKOEK  $\Phi_0 = 1,00$ , nach UNSÖLD  $\Phi_0 = 1,28$  zu erwarten. Wie man sieht, sind die Unterschiede in den beiden theoretischen Werten zur Zeit noch mindestens ebenso groß wie die der beiden besten empirischen Bestimmungen. Aus der Theorie UNSÖLDs folgen im ganzen höhere effektive Temperaturen als aus der PANNEKOEKs. Leitet man aus Abb. 7 die Gradienten getrennt für  $1,5 < 1/\lambda < 2,0$  ( $\Phi_r$ ) und  $2,0 < 1/\lambda < 2,5$  ( $\Phi_b$ ) ab, so findet man als Differenz  $\Phi_b - \Phi_r = +0,22$ . Danach würden jedenfalls bei den frühen Spektralklassen die Zahlenwerte PANNEKOEKs den Beobachtungen besser entsprechen als die UNSÖLDs, die eine zu geringe Krümmung der Energiekurve ergeben.

Eine letzte Prüfung der Theorie wird ermöglicht durch den Intensitätssprung an der Balmergrenze. UNSÖLD gibt die in der Zeile *a* der

Tabelle 9.

$T_e$	25200	16800	12600	10080	8400	7200	6300	
$D_{th}$	<i>a</i>	0,15	0,30	0,52	0,62	0,65	0,10	0,00
	<i>b</i>	0,10	0,25	0,45	0,78	0,68	0,12	0,00
	<i>c</i>	0,18	0,40	0,72	1,00	1,08	0,25	0,00
	<i>d</i>	0,15	0,32	0,62	1,08	1,12	0,35	0,02
$D_B$		0,13	0,55	1,16	1,00	0,65		
Sp	B0—B2	B3—B8		B9—A2	A5	F5		

Tabelle 9 aufgeführten Werte für  $D_{\text{th}} = 2,5 \log \frac{I_{3647^+}}{I_{3647^-}}$ , die mit den Beobachtungen  $D_{\text{B}}$  in Tabelle 3 zu vergleichen sind.

Die theoretischen effektiven Temperaturen  $T_e$  und die Spektralgruppen Sp dürften sich ungefähr in der Zuordnung der Tabelle entsprechen. Danach ergibt die Theorie den Intensitätssprung an der Balmergrenze merklich zu klein. BURKHARDT (23) hat UNSÖLDs Rechnungen mit einer höheren Näherung für den Strahlungsstrom und unter Einführung auch eines erhöhten Wertes für den Wasserstoffgehalt (50:1) wiederholt (Zeilen *b, c, d* der Zusammenstellung) mit dem Ergebnis, daß die zweite Näherung die Werte für  $D_{\text{th}}$  erniedrigt (*b* gegen *a* für H-Gehalt 13:1, *d* gegen *c* für H-Gehalt 50:1) und daß nur eine merkliche Erhöhung des H-Gehaltes (*c, d*) die theoretischen Werte auf die Größe der empirischen bringt.

Angesichts der geringen Prüfungsmöglichkeiten, die infolge der Spärlichkeit des Beobachtungsmaterials und der Mängel der Theorie noch bestehen, dürfte es sich erübrigen, auf Feinheiten einzugehen, die die „Leuchtkrafteffekte“ betreffen.

**12. Schluß.** Es läßt sich nicht verhehlen, daß unser empirisches und theoretisches Wissen über die kontinuierlichen Spektren der Sterne noch recht spärlich ist. In gewisser Hinsicht ist die Theorie heute schon weiter als die Beobachtung, so daß die bisherigen Prüfungsmöglichkeiten nicht sehr groß sind. Der Vergleich zwischen Beobachtung und Theorie deckt neben erfreulichen Übereinstimmungen doch auch ernste Widersprüche auf, von denen nicht eindeutig zu entscheiden ist, ob sie der Beobachtung oder der Theorie zur Last zu legen sind. Es wird in der nächsten Zeit vor allem einer starken Vermehrung und Verbesserung der Beobachtungen bedürfen, um systematisch einwandfreie Aussagen über den Verlauf des kontinuierlichen Spektrums in einem möglichst weiten Wellenlängenbereich für eine Diskussion bereitzustellen. Daneben würden die Theoretiker zu untersuchen haben, welchen Einfluß auf ihre Rechnungen die Idealisierungen haben, die gemacht werden mußten, und ob nicht Modellatmosphären anderer als der bisher behandelten Art (Abweichungen vom Strahlungsgleichgewicht, Turbulenz) den wahren Verhältnissen näherkommen.

#### Literaturverzeichnis.

In dem Bericht wird bewußt auf die Ableitung von Formeln verzichtet, die bereits in die allgemeine Literatur übergegangen sind.

Für alle Arbeiten bis Ende 1934 und für Einzelheiten sind daher die einschlägigen Artikel des Handbuchs der Astrophysik zu Rate zu ziehen:

Zu Kap. I.

BRILL, A.: Spektralphotometrie, Bd. 2, I. 1929.

— Die Temperaturen der Fixsterne, Bd. 5, I. 1932.

- BERNHEIMER, W. E.: Strahlung und Temperatur der Sonne, Bd. 4. 1929 u. Bd. 7. 1936.  
 BRÜCK, H.: Spektralphotometrie, Bd. 7. 1936.  
 BECKER, W.: Die Temperaturen der Fixsterne, Bd. 7. 1936.  
 Außerdem A. BRILL: Sterntemperaturen. Erg. exakt. Naturwiss. 3 (1924).

## Zu Kap. II.

- MILNE, E. A.: Thermodynamics of the Stars, Bd. 3, I. 1930.  
 PANNEKOEK, A.: Die Ionisation in den Atmosphären der Himmelskörper, Bd. 3, I. 1930.  
 STRÖMGREN, B.: Thermodynamik der Sterne und Pulsationstheorie. Die Ionisation in den Atmosphären der Himmelskörper, Bd. 7. 1936.  
 Außerdem S. ROSSELAND: Theoretical Astrophysics. Oxford 1936.

Das folgende Verzeichnis enthält nur Arbeiten, auf die im Text Bezug genommen ist.

1. PLASKETT, H. H.: Publ. Dom. Astrophysic. Obs. Victoria 2, Nr 12 (1923).
2. SAMPSON, R. A.: Monthly Not. 83, 174 (1923); 85, 212 (1925); 90, 636 (1930).
3. JENSEN, H.: Astr. Nachr. 248, 217 (1933).
4. KIENLE, H.: Veröff. Univ.-Sternw. Göttingen 11 (1930); 12 (1930); 25 (1932). — Trans. I. A. U. 5, 260 (1935).
5. CHALONGE, D. et E. VASSY: Rev. Opt. 13, 113 (1934). — BARBIER, D., D. CHALONGE et E. VASSY: Rev. Opt. 13, 199 (1934); J. Physique 6, 137 (1935). — ARNULF, A., D. BARBIER, D. CHALONGE et R. CANAVAGGIA: J. Obs. 19, 149 (1936); vgl. dazu H. KIENLE: V. J. S. Astr. Ges. 72, 68 (1936). — BARBIER, D., D. CHALONGE, H. KIENLE u. J. WEMPE: Z. Astrophys. 12, 178 (1936). — BARBIER, D.: Z. Astrophys. 13, 351 (1937).
6. CH'ING-SUNG YÜ: Lick Obs. Bull. 12, 161 (1926); 15, 1 (1930). — KARPOV, B. G.: Lick Obs. Bull. 16, 159 (1934).
7. Greenwich Observations of Colour Temperatures of stars 1926—1932; vgl. dazu H. KIENLE: V. J. S. Astr. Ges. 67, 397 (1932). — BRILL, A.: Z. Astrophys. 6, 203 (1933). — GREAVES, W. M. H., C. DAVIDSON and E. MARTIN: Monthly Not. 94, 488 (1934).
8. BRÜCK, H. u. W. STROHMEIER: Z. Astrophys. 13, 13 (1936). — BECKER, W.: Z. Astrophys. 13, 69 (1936). — BECKER, W. u. W. STROHMEIER: Z. Astrophys. 13, 317 (1937).
9. BOOTHROYD, S. L. and R. C. WILLIAMS: Ap. J. 80, 1 (1934).
10. MORGAN, W. W. and B. A. WOOTEN: Ap. J. 80, 229 (1934).
11. HALL, J. S.: Ap. J. 85, 145 (1937). — KIENLE, H.: Monthly Not. 88, 700 (1928). — RUDNICK, JESSIE: Ap. J. 83, 394 (1936).
12. ABBOT, C. G.: Ap. J. 60, 87 (1926); 69, 293 (1929).
13. MULDER, G. F. W.: Diss. Utrecht. 1934. — Z. Astrophys. 11, 132 (1935).
14. WESSELINK, A. J.: Bull. Astr. Inst. Neth. 7, 239 (1935).
15. UNSÖLD, A. u. A. W. MAUE: Z. Astrophys. 5, 1 (1932).
16. MCCREA, W. H.: Monthly Not. 91, 836 (1931).
17. BIERMANN, L.: Veröff. Univ.-Sternw. Göttingen 34 u. 37 (1933).
18. UNSÖLD, A.: Z. Astrophys. 8, 32, 225 (1934).
19. PANNEKOEK, A.: Monthly Not. 95, 529 (1935). — Publ. Amsterd. 1935, Nr 4. — Ap. J. 84, 481 (1936).
20. JAHN, W.: Astr. Nachr. 253, 377 (1934).
21. STRÖMGREN, B.: Z. Astrophys. 4, 118 (1932).
22. BARBIER, D.: Z. Astrophys. 13, 351 (1937).
23. BURKHARDT, G.: Z. Astrophys. 13, 56 (1936).

# Die Theorie des Sterninnern und die Entwicklung der Sterne.

Von **BENGT STRÖMGREN**, Chicago.

Mit 7 Abbildungen.

## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
1. Vorbemerkungen . . . . .	466
I. Die Analyse des inneren Aufbaus der Sterne . . . . .	466
2. Allgemeines über das Sterninnere . . . . .	466
3. Gasförmige Sterne im Strahlungsgleichgewicht . . . . .	474
4. Die Parameter des Sternaufbaus . . . . .	475
5. Ionisation im Sterninnern. Mittleres Molekulargewicht der Sternmaterie . . . . .	478
6. Die Opazität der Sternmaterie . . . . .	483
7. Sternmodelle . . . . .	488
8. Homologie-Transformationen . . . . .	492
9. Die Masse-Leuchtkraft-Beziehung . . . . .	497
10. Temperatur, Dichte und Druck im Sterninnern . . . . .	497
11. Der Aufbau der äußeren Teile des Sterninnern . . . . .	498
12. Konvektion im Sterninnern . . . . .	499
13. Extrem massige Sterne . . . . .	501
14. Stabilität gasförmiger Sterne . . . . .	502
15. Weiße Zwerge. Entartung im Sterninnern . . . . .	505
II. Die chemische Zusammensetzung des Sterninnern . . . . .	509
16. Die chemische Zusammensetzung der Sterne. Der Satz von VOGT und RUSSELL . . . . .	509
17. Die chemische Zusammensetzung der Sterne. Die Masse-Leuchtkraft-Beziehung . . . . .	513
III. Energieerzeugung und Elementumwandlung in den Sternen. Sternentwicklung . . . . .	520
18. Energieerzeugung und Elementumwandlung im Sterninnern	520
19. Probleme der Sternentwicklung . . . . .	529
Literaturverzeichnis . . . . .	532

### Bezeichnungen, die in mehreren Abschnitten gebraucht werden.

$h$ PLANCKSche Konstante	$M$ Sternmasse	
$c$ Lichtgeschwindigkeit	$R$ Sternradius	
$e$ Elementarladung	$L$ Leuchtkraft	
$k$ BOLTZMANNsche Konstante	$r$ Entfernung vom Sternzentrum	
$G$ Gravitationskonstante	$M_r$ Masse innerhalb der Kugel mit dem Radius $r$ um das Sternzentrum	
$m_e$ Elektronenmasse	$L_r$ Netto-Strahlungsstrom nach außen durch die Kugel mit dem Radius $r$ um das Sternzentrum	
$m_H$ Protonenmasse (genähert auch Atomgewichtseinheit)	$\kappa$ Opazität	
$\mu$ Mittleres Molekulargewicht	$\varepsilon$ Energieerzeugung pro Zeiteinheit und Masseneinheit	
$P$ Gesamtdruck	$Z$ Kernladung	
$p_G$ Gasdruck	$A$ Atomgewicht	
$p_R$ Strahlungsdruck	$M_\odot$ Sonnenmasse	
$T$ Absolute Temperatur	$R$ Sonnenradius	
$\rho$ Dichte		
$\beta$ Verhältnis des Gasdrucks zum Gesamtdruck		

**1. Vorbemerkungen.** Über den inneren Aufbau und die Entwicklung der Sterne sowie über die Energiequellen der Sterne haben in den Ergebnissen der exakten Naturwissenschaften VOGT (77) und FREUNDLICH (28) berichtet. Während des seit dem Erscheinen dieser beiden Übersichtsartikel verlaufenen Zeitraums von 10 Jahren sind innerhalb des in Frage kommenden Zweiges der Astrophysik wichtige Fortschritte erzielt worden.

Die Entwicklung der Quantenmechanik ist für die Physik der Sternmaterie von großer Bedeutung gewesen. Erst durch die Quantenmechanik wurde das volle Verständnis des Aufbaus der weißen Zwergsterne ermöglicht, und auch für die Lösung anderer Probleme des Sternaufbaus ist diese wesentlich gewesen.

Die während der letzten Jahre geschehene Entwicklung der Kernphysik ist für die Theorie des Sterninnern und der Sternentwicklung von größter Wichtigkeit. Während eines langen Zeitraums wurde durch die lückenhafte Kenntnis wichtiger Züge der Kernprozesse den Untersuchungen über das Sterninnere eine bestimmte wohldefinierte Grenze gesetzt. Jetzt ist es möglich, das Problem der Energieerzeugung und des Elementaufbaus im Sterninnern mit Hilfe einer — wenn auch nicht vollkommen entwickelten — Kernphysik in Angriff zu nehmen.

Untersuchungen auf anderen Gebieten der Astronomie haben während der letzten 10 Jahre die Einstellung gegenüber gewissen Problemen des Sternaufbaus und der Sternentwicklung geändert. Vor allem haben die Untersuchungen über die Kinematik und Dynamik des Systems der extragalaktischen Nebel (Ausdehnung des Universums) sowie auch Untersuchungen über das Milchstraßensystem und über Doppelsternsysteme allmählich zu einer ausgesprochenen Bevorzugung der sog. intermediären Zeitskala (Entwicklung innerhalb Zeiträumen von der Größenordnung  $10^{11}$  Jahren) geführt.

Die Fortschritte, über die im folgenden berichtet werden soll, beziehen sich in der Hauptsache auf die folgenden Probleme: Analyse des Aufbaus von Sternmodellen, Stabilität von Sternmodellen, Weiße Zwerge, Chemische Zusammensetzung der Sterne, Energieerzeugung und Elementaufbau im Sterninnern, Sternentwicklung und Zeitskala.

Im 15. Band der Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften hat HUND (36) über Materie unter sehr hohen Drucken und Temperaturen berichtet. Der enge Zusammenhang zwischen dem dort behandelten Gebiet der Physik und dem im folgenden Darzustellenden liegt auf der Hand.

## **I. Die Analyse des inneren Aufbaus der Sterne.**

**2. Allgemeines über das Sterninnere.** Die Sterne können als im allgemeinen kugelsymmetrische Gebilde in mechanischem Gleichgewicht beschrieben werden. (Schnell rotierende, merklich abgeplattete Sterne und oszillierende Sterne gehören zu den Ausnahmen und können zunächst

außer acht gelassen werden). Für derartige Gebilde gelten überall die folgenden beiden Grundgleichungen:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho \quad (1)$$

und

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (2)$$

Die erste Grundgleichung ist ein Ausdruck für die Bedingung, daß überall im Stern mechanisches Gleichgewicht vorhanden ist, so daß der Gradient des Gesamtdrucks  $P$  überall gleich dem Produkt aus der Schwerebeschleunigung und der Dichte  $\rho$  der Sternmaterie ist. Die zweite Grundgleichung drückt einfach aus, daß die Masse einer elementaren Kugelschale gleich  $4\pi r^2 dr \cdot \rho$  ist.

Aus diesen beiden Grundgleichungen — die naturgemäß von Anfang an die Grundlage für das Studium massiger kugelsymmetrischer Gebilde ausgemacht haben — lassen sich bereits wichtige Aussagen über das Sterninnere ableiten. [Vgl. EDDINGTON (17), MILNE (51) und CHANDRASEKHAR (11)].

Aus den Grundgleichungen (1) und (2) erhält man durch Elimination der Dichte  $\rho$  die Gleichung

$$\frac{dP}{dM_r} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4}. \quad (3)$$

Da der Gesamtdruck auf der Oberfläche des Sterns praktisch verschwindet, folgt aus (3) unmittelbar

$$P = \int_r^R \frac{GM_r}{4\pi r^4} dM_r, \quad (4)$$

und insbesondere für den Gesamtdruck im Zentrum  $P_c$ :

$$P_c = \int_0^R \frac{GM_r}{4\pi r^4} dM_r. \quad (5)$$

Aus diesem Ausdruck kann man unmittelbar eine *untere Grenze für den Gesamtdruck  $P_c$  im Zentrum* ableiten. Da überall  $r \leq R$ , folgt aus (5)

$$P_c > \frac{G}{8\pi} \frac{M^2}{R^4}, \quad (6)$$

wo  $M$  und  $R$  die Gesamtmasse bzw. den Radius des Sterns bedeuten. Setzt man die numerischen Werte in diese Gleichung ein, findet man

$$P_c > 4,5 \cdot 10^8 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \left(\frac{R_\odot}{R}\right)^4 \text{ Atm}, \quad (7)$$

wo  $M_\odot$  die Sonnenmasse ( $2,0 \cdot 10^{33}$  g) und  $R_\odot$  den Sonnenradius ( $7,0 \cdot 10^{10}$  cm) bedeuten. Im Zentrum der Sonne ist also der Gesamtdruck, ganz unabhängig von den Eigenschaften der Sonnenmaterie, höher als  $4,5 \cdot 10^8$  Atm. Für den weißen Zwergstern Sirius B hat man gemäß Beobachtungen  $M = 0,97 M_\odot$  und  $R = 0,020 R_\odot$ . Es folgt,

daß im Zentrum dieses Sterns der Gesamtdruck sicher größer als  $2,6 \cdot 10^{15}$  Atm ist.

Auf ebenso allgemeiner Grundlage kann man eine *untere Grenze für einen mittleren Gesamtdruck*  $\bar{P}$  ableiten. Es sei der mittlere Gesamtdruck  $\bar{P}$  definiert durch

$$\bar{P} = \frac{1}{M} \int_0^R P dM_r. \quad (8)$$

Aus (8) erhält man durch partielle Integration, da  $M_r$  im Zentrum und  $P$  auf der Oberfläche gleich Null ist, unmittelbar

$$\bar{P} = - \frac{1}{M} \int_0^R M_r dP. \quad (9)$$

Setzt man in (9) die aus den Grundgleichungen (1) und (2) abgeleitete Gleichung (3) ein, so findet man:

$$\bar{P} = \frac{1}{M} \int_0^R \frac{G M_r^2}{4 \pi r^4} dM_r. \quad (10)$$

Da überall  $r \leq R$ , folgt aus (10) wieder unmittelbar eine untere Grenze:

$$\bar{P} > \frac{G}{12 \pi} \frac{M^2}{R^4}, \quad (11)$$

oder

$$\bar{P} > 3,0 \cdot 10^8 \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^2 \left( \frac{R_\odot}{R} \right)^4, \quad (12)$$

also zwei Drittel des unteren Grenzwerts für den Gesamtdruck im Zentrum.

Es ist also ganz allgemein klar, daß im Sterninnern sehr hohe Drucke herrschen. Die Bedeutung dieser Tatsache geht in klarer Weise durch Betrachtung des von HUND gegebenen Zustandsdiagramms der Materie hervor [Abb. 4, S. 204 in (36)].

Für die Sonne mit  $P_c > 4,5 \cdot 10^8$  Atm und  $\bar{P} > 3,0 \cdot 10^8$  folgt aus dem Zustandsdiagramm, daß die Materie jedenfalls im größten Teil des Sterns als Elektronengas beschrieben werden kann. Ob das Elektronengas nichtentartet oder entartet ist, kann mit Hilfe der Kenntnis des Drucks allein nicht entschieden werden, hierfür muß auch die Temperatur bekannt sein.

Für Sirius B mit  $P_c > 2,6 \cdot 10^{15}$  Atm und  $\bar{P} > 1,8 \cdot 10^{15}$  Atm folgt ebenfalls, daß die Materie als Elektronengas zu beschreiben ist. Der Gesamtdruck ist hier so hoch, daß Temperaturen jedenfalls über etwa  $4 \cdot 10^8$  Grad erforderlich sind, wenn das Elektronengas nicht entartet sein soll.

Für Riesensterne mit sehr großem Radius und sehr geringer Dichte sind die unteren Grenzen für den Druck erheblich niedriger als für die Sonne. Die Kenntnis der Temperatur ist hier zur Entscheidung zwischen den



Möglichkeiten [vgl. Abb. 4, S. 204 in (36)] Kondensat, Atomgas und Elektronengas erforderlich. Bereits die Oberflächentemperatur ist jedoch im allgemeinen so hoch, daß die Möglichkeit Kondensat ausgeschlossen werden kann.

Für *ideal gasförmige Sterne* kann mit Hilfe der Grundgleichungen eine *untere Grenze der mittleren Temperatur* abgeleitet werden. Die Zustandsgleichung für den Gasdruck  $p_G$  sei

$$p_G = \frac{k}{m_H} \frac{\rho}{\mu} T, \quad (13)$$

wo  $\mu$  das mittlere Molekulargewicht des idealen Gases bezeichnet. Indem in (13) das Verhältnis  $\beta$  zwischen dem Gasdruck  $p_G$  und dem Gesamtdruck  $P$ , der gleich der Summe des Gasdrucks  $p_G$  und des Strahlungsdrucks  $p_R$  ist,

$$P = p_G + p_R \quad (14)$$

$$p_G = \beta P \quad (15)$$

$$p_R = \frac{1}{3} a T^4 = (1 - \beta) P, \quad (16)$$

eingeführt wird, erhält man

$$P = \frac{k}{m_H} \frac{\rho}{\mu \beta} T. \quad (17)$$

Die mittlere Temperatur sei definiert durch [vgl. (9)]

$$\bar{T} = \frac{1}{M} \int_0^R T dM_r. \quad (18)$$

Aus (17) und (18) folgt

$$\bar{T} = \frac{1}{M} \int_0^R \frac{m_H}{k} \mu \beta \frac{P}{\rho} dM_r, \quad (19)$$

und hieraus mit Hilfe der Grundgleichung (2)

$$\bar{T} = \frac{1}{M} \int_0^R 4\pi \frac{m_H}{k} \mu \beta P r^2 dr. \quad (20)$$

Es sei der Minimumwert von  $\mu\beta$  im Stern gleich  $(\mu\beta)_{\min}$ . Es folgt dann

$$\bar{T} \cong \frac{1}{M} \frac{4}{3} \pi \frac{m_H}{k} (\mu\beta)_{\min} \int_0^R P dr^3. \quad (21)$$

Aus (21) folgt durch partielle Integration, da  $P$  auf der Oberfläche,  $r$  im Zentrum gleich Null ist:

$$\bar{T} \cong - \frac{1}{M} \frac{4}{3} \pi \frac{m_H}{k} (\mu\beta)_{\min} \int_0^R r^3 dP. \quad (22)$$

Führt man die aus den Grundgleichungen (1) und (2) abgeleitete Gleichung (3) in (22) ein, so erhält man

$$\bar{T} \cong \frac{1}{M} \frac{4}{3} \pi \frac{m_H}{k} (\mu\beta)_{\min} \int_0^R \frac{G M_r}{4\pi r} dM_r. \quad (23)$$

Da überall  $r \leq R$ , so folgt aus (23)

$$\bar{T} > \frac{1}{6} \frac{m_H}{k} (\mu \beta)_{\min} \frac{G M}{R}. \quad (24)$$

Setzt man numerische Werte ein, erhält man

$$\bar{T} > 3,8 \cdot 10^6 (\mu \beta)_{\min} \frac{M}{M_\odot} \frac{R_\odot}{R}. \quad (25)$$

Um diese Ungleichung auswerten zu können, muß man einen numerischen Wert für  $(\mu \beta)_{\min}$  substituieren können. Was das mittlere Molekulargewicht betrifft, so wird dieses durch Ionisation der Materie herabgesetzt. Der kleinstmögliche Wert ist  $1/2$  (ionisierter Wasserstoff, vgl. S. 479). Für Sterne kleiner und mäßiger Masse kann man, wie unten gezeigt werden soll, allgemein schließen, daß der Strahlungsdruck nur einen relativ kleinen Bruchteil des Gesamtdrucks ausmacht, so daß  $\beta$  ungefähr gleich 1 ist. Als Minimumswert für  $\mu \beta$  darf somit für diese Sterne etwa  $1/2$  angesetzt werden. Für die Sonne folgt dann beispielsweise aus (25), daß die mittlere Temperatur größer als  $1,9 \cdot 10^6$  Grad ist. Wollte man die Ungleichung (25) auf den weißen Zwerg Sirius B anwenden, so würde man als untere Grenze der mittleren Temperatur etwa  $10^8$  Grad erhalten. Es sei aber in diesem Zusammenhang betont, daß (25) nur für einen ideal gasförmigen Stern gültig ist. Wie sich zeigen wird (vgl. S. 505), ist aber in Sirius B das Elektronengas zum weit größten Teil entartet.

Auf ganz allgemeiner Grundlage lassen sich, wie EDDINGTON (20) gezeigt hat, *obere Grenzen des Gesamtdrucks und der Temperatur* ableiten. Aus den Grundgleichungen (1) und (2) folgt, wie wir gesehen haben, der Ausdruck (5) für den Gesamtdruck im Zentrum des Sterns. Aus diesem Ausdruck läßt sich eine obere Grenze des Gesamtdrucks in Abhängigkeit von dem Maximumswert der Dichte  $\rho$  innerhalb des Sterns ableiten. Es sei dieser Maximumswert gleich  $\rho_0$ . Es braucht nicht vorausgesetzt werden, daß der Höchstwert der Dichte im Zentrum des Sterns erreicht wird. Dann gilt überall im Stern [vgl. wegen dieser Form des Beweises CHANDRASEKHAR (11)]

$$M_r < \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 \quad (26)$$

d. h.

$$4 \pi r^4 > \frac{3^{4/3}}{(4 \pi)^{1/3}} M_r^{4/3} \cdot \rho_0^{-4/3}. \quad (27)$$

Aus (5) folgt dann unmittelbar

$$P_c < \frac{1}{3} \left( \frac{4}{3} \pi \right)^{1/3} G \rho_0^{4/3} \int_0^R M_r^{-1/3} dM_r \quad (28)$$

oder

$$P_c < \frac{1}{2} \left( \frac{4}{3} \pi \right)^{1/3} G M^{2/3} \cdot \rho_0^{4/3}. \quad (29)$$

Nennt man den Gesamtdruck in demjenigen Punkt des Sterns, wo der Maximumwert der Dichte  $\varrho_0$  erreicht wird,  $P_0$ , so folgt, da der Gesamtdruck immer seinen Maximumwert im Zentrum erreicht

$$P_0 < \frac{1}{2} \left( \frac{4}{3} \pi \right)^{1/3} G M^{2/3} \cdot \varrho_0^{4/3} \quad (30)$$

oder

$$P_0 < 1,0 \cdot 10^9 \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{2/3} \cdot \varrho_0^{4/3} \text{ Atm.} \quad (31)$$

Diese aus den Grundgleichungen (1) und (2) folgende Ungleichung kombiniert EDDINGTON nun mit einer ganz allgemein gültigen physikalischen Ungleichung zwischen Gesamtdruck und Dichte. Allgemein gilt zwischen Gesamtdruck, Dichte und Temperatur die Zustandsgleichung. Gemäß dieser entspricht jeder Dichte  $\varrho$  ein *Minimumswert* des Gesamtdrucks, nämlich der Gesamtdruck für  $T = 0$ . Für höhere Werte der Dichte ist dieser Minimumsdruck infolge der Entartung der Materie bei  $T = 0$  beträchtlich [vgl. hierzu Abb. 5, S. 208 in (36)].

Für die Existenz des Sterns mit der maximalen Dichte  $\varrho_0$  ist es nun eine notwendige Bedingung, daß der der Dichte  $\varrho_0$  entsprechende *Minimumswert* des Gesamtdrucks kleiner ist als der durch (30) gegebene *Maximumswert* des Gesamtdrucks.

Im Gebiet der nichtrelativistischen Entartung wächst der,  $\varrho_0$  entsprechende Gesamtdruck bei  $T = 0$  wie  $\varrho_0^{5/3}$ , d. h. schneller als der durch (30) gegebene Maximumswert. Es ist klar, daß a priori die Möglichkeit besteht, daß man den Wert von  $\varrho_0$  so hoch wählen kann, daß der betreffende Stern nicht existenzfähig ist. Um diese Möglichkeit näher zu untersuchen, muß man sowohl den Maximumswert von  $P_0$  nach (30) sowie den Minimumswert nach der Zustandsgleichung für  $T = 0$  als Funktion von  $\varrho_0$  berechnen. Die Berechnung hat für verschiedene Werte der Sternmasse  $M$  zu erfolgen.

Der Gesamtdruck für  $T = 0$  als Funktion der Dichte ist von STONER (66) und ausführlicher von CHANDRASEKHAR (9) tabuliert worden. EDDINGTON hat mit Hilfe der Tabellen von STONER die oben skizzierten Berechnungen durchgeführt und gefunden, daß für Sternmassen kleiner als  $1,74 \mu^{-2} M_\odot$  immer eine obere Grenze der Dichte und des Gesamtdrucks abgeleitet werden kann.

Den soeben skizzierten Gedankengang illustriert die Abb. 1. Die beiden Kurven zeigen schematisch den Verlauf des Maximumswerts von  $P_0$  nach (30) und des Minimumswerts von  $P_0$  nach der Zustandsgleichung. Für  $M\mu^2 = 1$  schneiden sich die beiden Kurven bei  $\varrho_0 = 4 \cdot 10^6 \text{ g cm}^{-3}$ . Bei noch größeren Werten von  $\varrho_0$  ist der Minimumswert größer als der Maximumswert, Sterne mit so großen  $\varrho_0$ -Werten sind also nicht existenzfähig. Die der oberen Grenze von  $\varrho_0$  entsprechende obere Grenze des Druckes  $P_0$  ist im betrachteten Fall  $4 \cdot 10^{17} \text{ Atm.}$  Setzt man voraus, daß die größte Dichte im Zentrum erreicht wird, ist dies ein Maximumswert des Gesamtdrucks im ganzen Stern.

Es sei noch bemerkt, daß für nichtentartete Sternmaterie der zu einer Dichte  $\rho$  gehörige wirkliche Gesamtdruck weit oberhalb der soeben benutzten unteren Grenze des Gesamtdruckes ( $P$  für  $T=0$ ) liegen kann.

EDDINGTON hat durch die folgende Überlegung auch eine obere Grenze der Temperatur abgeleitet. Es sei angenommen, daß die größte Dichte im Zentrum des Sterns erreicht wird. Der Strahlungsdruck  $p_R = \frac{1}{3} a T^4$  muß hier kleiner sein als die Differenz des Maximumwerts des Gesamtdruckes nach (30) und des Minimumwerts des Gasdrucks nach der

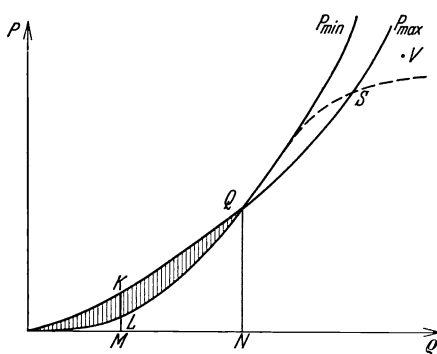


Abb. 1. Minimaler und maximaler Druck als Funktion der Dichte. [A. S. EDDINGTON: Monthly Not. 93, 321 (1933)].

Zustandsgleichung (für  $T=0$ ). Eine obere Grenze für  $\frac{1}{3} a T^4$  ist deshalb durch die größte vertikale Differenz zwischen den beiden Kurven in Abb. 1 gegeben. Auf diese Weise findet EDDINGTON beispielsweise für  $M \mu^2 = 1$ , daß die Temperatur kleiner als  $1,4 \cdot 10^9$  Grad sein muß.

Ein Blick auf die Abb. 4, S. 204 in (36) zeigt sofort, daß die angeführten oberen Grenzen des Gesamtdruckes und der Temperatur genügen, um zu zeigen, daß die Sternmaterie, wenn auch unter

hohen Drucken und Temperaturen, durchaus als normal und mit Hilfe sicher bekannter physikalischer Gesetze beschreibbar anzusprechen ist. Wichtig ist auch die Feststellung, daß der maximale Gesamtdruck weit unterhalb demjenigen ( $10^{23}$  Atm.) liegt, bei dem infolge Umwandlung der Materie in Neutronen eine starke Überkompressibilität eintritt (vgl. hierzu S. 492).

Es sei betont, daß es Sterne gibt, für die auf dem dargestellten Wege keine obere Grenze der Dichte abgeleitet werden kann. Die Bedeutung der angeführten Überlegungen liegt vielmehr darin, daß sie zeigen, daß es Sterne gibt, in denen weder Gesamtdruck noch Temperatur extreme Werte annehmen. Man kann daraus weiter schließen, daß die Energieerzeugung, die wir in diesen Sternen beobachten, unter keineswegs extremen physikalischen Bedingungen stattfindet.

Es geht bereits aus dem schon Dargestellten hervor, daß das Verhältnis  $1-\beta$  von Strahlungsdruck und Gesamtdruck eine für die Verhältnisse im Sterninnern wichtige Größe ist. Es ist, wie CHANDRASEKHAR (11) gezeigt hat, möglich, auf sehr allgemeiner Grundlage eine obere Grenze für den relativen Strahlungsdruck abzuleiten.

Aus der Gleichung (16), die  $(1-\beta)$  definiert, folgt

$$T = \left(\frac{3}{a}\right)^{1/4} (1-\beta)^{1/4} P^{1/4}. \quad (32)$$

Für ein nichtentartetes Gas gilt die Zustandsgleichung (13) für  $p_c$  bzw. die mit dieser völlig äquivalenten Gleichung (17) für  $P$ . Ganz allgemein gilt

$$P \cong \frac{k}{m_H} \frac{\rho}{\mu \beta} T, \tag{33}$$

denn im Fall der Entartung ist der Druck größer als der nach (17) berechnete [vgl. hierzu (36), Ziffer 6 und Abb. 5, S. 208]. Aus (32) und (33) folgt durch Elimination von  $T$  allgemein

$$P \cong \left(\frac{k}{m_H}\right)^{4/3} \left(\frac{3}{a}\right)^{1/3} \left(\frac{\rho}{\mu \beta}\right)^{4/3} (1-\beta)^{1/3}. \tag{34}$$

Vergleicht man (30) und (34), so sieht man, daß in demjenigen Punkt des Sterns, wo der Maximumwert der Dichte erreicht wird, die folgende Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi\right)^{1/3} G M^{2/3} > \left(\frac{k}{m_H}\right)^{4/3} \left(\frac{3}{a}\right)^{1/3} \left(\frac{1}{\mu}\right)^{4/3} \left(\frac{1-\beta}{\beta^4}\right)^{1/3}. \tag{35}$$

Da in dem in Frage kommenden Intervall  $0 < 1-\beta < 1$  die Größe  $(1-\beta)/\beta^4$  monoton mit  $1-\beta$  zunimmt, so folgt aus (35) eine obere Grenze für  $1-\beta$ . Um diese bequem ausdrücken zu können, definiert man  $1-\beta^*$  durch die Gleichung

$$\frac{1-\beta^*}{\beta^{*4}} = \frac{1}{18} \pi a G^3 \left(\frac{m_H}{k}\right)^4 \mu^4 M^2, \tag{36}$$

oder unter Einführung numerischer Werte

$$\frac{1-\beta^*}{\beta^{*4}} = 0,034 \cdot \mu^4 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2. \tag{37}$$

Dann ist im Punkt, wo die größte Dichte erreicht wird,

$$1-\beta < 1-\beta^*. \tag{38}$$

Allgemein wird man annehmen dürfen, daß die größte Dichte im Zentrum des Sterns erreicht wird. Dann gilt

$$1-\beta_c < 1-\beta^*, \tag{39}$$

wenn  $1-\beta_c$  den relativen Strahlungsdruck im Zentrum bezeichnet. Die folgende, von CHANDRASEKHAR gegebene Tabelle zeigt  $1-\beta^*$  als Funktion von  $M \mu^2$ .

Es ist ersichtlich, daß für Sterne mittlerer und kleiner Masse der relative Strahlungsdruck im Zentrum  $1-\beta_c$  klein ist.

Wenn man nur die hier gemachten, sehr allgemeinen Annahmen über das Sterninnere machen will, muß man sich mit der abgeleiteten Feststellung über den relativen Strahlungsdruck begnügen. Es sei jedoch erwähnt, daß eine ausführlichere Analyse des Sterninnern lehrt, daß  $1-\beta$  im allgemeinen außer in den äußeren Schichten gegen das Zentrum hin zunimmt, so daß die abgeleitete obere Grenze jedenfalls im größten Teil des Sterns gültig ist.

Tabelle 1.

$1-\beta^*$	$\frac{M}{M_\odot} \mu^2$	$1-\beta^*$	$\frac{M}{M_\odot} \mu^2$
0,025	0,91	0,5	15,4
0,05	1,35	0,6	26,4
0,1	2,13	0,7	50,7
0,2	3,81	0,8	122
0,3	6,10	0,9	518
0,4	9,58	1,0	$\infty$
0,5	15,43		

Die Tatsache, daß der relative Strahlungsdruck für die Mehrzahl der Sterne klein ist, bedeutet eine gewisse Vereinfachung in der Diskussion des inneren Aufbaus der Sterne. Die Grundgleichung (1) gibt die Änderung des *Gesamt*druckes  $P$ , so daß, wenn eine Zustandsgleichung für  $p_G$  gegeben ist, diese durch Einführung des Faktors  $\beta$  in eine Zustandsgleichung für  $P$  umzuformen ist [vgl. z. B. (17)]. Wenn der relative Strahlungsdruck klein ist, kann man aber oft mit genügender Genauigkeit  $\beta = 1$  setzen, oder jedenfalls mit einem für den ganzen Stern konstanten mittleren Wert von  $\beta$  rechnen [vgl. hierzu insbesondere Ziffer 8].

Die hier dargestellten Überlegungen gestatten, in einfacher Weise auf sehr allgemeiner Grundlage einen Einblick in die physikalischen Verhältnisse im Sterninnern zu gewinnen. Es ist aber klar, daß man, um zu genaueren Aussagen gelangen zu können, die Grundgleichungen (1) und (2) durch eine *Weggleichung* zwischen  $P$  und  $\rho$  ergänzen muß. Im wichtigsten Fall des Strahlungsgleichgewichts gelangt man zu dieser durch Aufstellung einer Gleichung für den Temperaturgradienten, indem man diese Gleichung mit der Zustandsgleichung kombiniert. Im Falle des konvektiven Gleichgewichts ergibt sich die Weggleichung aus der adiabatischen Beziehung zwischen Druck- und Dichtegradient, bei nicht vernachlässigbarem Strahlungsdruck in Verbindung mit der Zustandsgleichung.

In den folgenden Ziffern soll zunächst über die Ergebnisse der Diskussion von Sternen in Strahlungsgleichgewicht berichtet werden.

**3. Gasförmige Sterne im Strahlungsgleichgewicht.** In dem S. 466 erwähnten Bericht von VOGT findet man eine ausführliche Ableitung der folgenden EDDINGTONSchen Grundgleichung, die den Temperaturgradienten ergibt in einem Gebiet eines kugelsymmetrischen Sterns, in dem Strahlungsgleichgewicht herrscht [vgl. auch EDDINGTON (17)]:

$$\frac{d(T^4)}{dr} = -\frac{3}{ac} \kappa \rho \frac{L_r}{4\pi r^2}. \quad (40)$$

Der Temperaturgradient ist nach dieser Gleichung proportional dem Netto-Strahlungsstrom  $L_r/4\pi r^2$  nach außen pro Flächeneinheit am betrachteten Ort, und ferner proportional der Opazität der Sternmaterie  $\kappa$ .

Die Bedingung für die Gültigkeit von (40) ist die Abwesenheit von energietransportierenden Konvektionsströmen.

Wenn merkliche Leitung durch freie Elektronen oder andere Partikeln vorhanden ist, gilt (40) formal immer noch, nur mit einem entsprechend modifizierten Wert von  $\kappa$ . Jedoch gilt, daß im allgemeinen im Sterninnern der Energietransport durch materielle Leitung gegen den Energietransport durch Strahlung vernachlässigt werden kann [vgl. hierzu (36), Ziffer 14].

Die Bedingung für das Auftreten von Konvektionsströmen soll in Ziffer 12 näher besprochen werden. Hier sei nur erwähnt, daß in den äußersten Atmosphärenschichten immer Strahlungsgleichgewicht

vorhanden ist. Wenn man nach innen geht, tritt im allgemeinen dort, wo Wasserstoff anfängt, stärker ionisiert zu werden, eine Konvektionszone auf [vgl. UNSÖLD (76)], die aber für die Analyse des Sterninnern belanglos ist. Wenn eine Tiefe erreicht wird, in der der Wasserstoff praktisch vollkommen ionisiert ist, ist wieder Strahlungsgleichgewicht vorhanden. Wenn man weiter nach innen geht, mag eine ähnliche Konvektionszone dort auftreten, wo Helium ionisiert wird. Diese ist für das Sterninnere im allgemeinen wohl auch belanglos. Wenn man durch ein Gebiet im Strahlungsgleichgewicht immer weiter nach innen geht, wird fortwährend Strahlungsgleichgewicht vorhanden sein, jedenfalls bis ein beträchtlicher Teil der ganzen Sternmasse passiert worden ist (d. h. sich weiter vom Zentrum befindet als der betrachtete Punkt). Ein großer äußerer Teil des Sterns wird sich also im Strahlungsgleichgewicht befinden [vgl. hierzu COWLING (16)].

Wenn man noch näher an das Zentrum geht, können Konvektionsströme auftreten. Man vergleiche hierzu Ziffer 12.

Die äußersten Schichten eines Sterns sind immer ideal gasförmig. Es ist deshalb angemessen, beim Studium des Sterninnern folgendermaßen zu verfahren. Als Zustandsgleichung wird diejenige des idealen Gases angesetzt:

$$p_G = \frac{k}{m_H} \frac{\rho}{\mu} T \quad (41)$$

oder

$$P = \frac{k}{m_H} \frac{\rho}{\mu \beta} T. \quad (42)$$

Mit Hilfe der Grundgleichungen (1), (2), (40) und (41) werden die physikalischen Zustandsgrößen als Funktionen des Abstands vom Zentrum für immer tiefere Schichten des Sterns ermittelt. Mit Hilfe der so ermittelten Zustandsgrößen kann man fortwährend kontrollieren, ob die Bedingungen für die Gültigkeit der Gleichungen (40) und (41) erfüllt sind. Es sei hier vorweggenommen, daß sich in wichtigen Fällen die Gültigkeit dieser Gleichungen bis zum Zentrum ergibt.

Es geht aus dem Dargestellten hervor, daß der Theorie ideal gasförmiger Sterne im Strahlungsgleichgewicht in der Theorie des Sterninnern eine zentrale Stellung zukommt. Jene Theorie soll in den folgenden Ziffern besprochen werden.

**4. Die Parameter des Sternaufbaus.** Zwecks einer genaueren Erörterung der in der vorigen Ziffer skizzierten Gedankengänge seien die Grundgleichungen für ideal gasförmige Sterngebiete im Strahlungsgleichgewicht nochmals zusammengestellt:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2} \rho, \quad (43)$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (44)$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4} \frac{\kappa \rho}{ac} \frac{L_r}{T^3 4\pi r^2} \quad (45)$$

und

$$P = \frac{k}{m_H} \frac{\varrho}{\mu \beta} T, \quad (46)$$

mit [vgl. (14), (15) und (16)]

$$\frac{1 - \beta}{\beta} = \frac{a}{3} \frac{m_H}{k} \mu \frac{T^3}{\varrho}. \quad (47)$$

Die physikalischen Zustandsgrößen  $P$ ,  $\varrho$  und  $T$  sind gemäß diesen Gleichungen zusammen mit  $M_r$  als Funktionen der unabhängigen Veränderlichen  $r$  zu ermitteln. [Der relative Strahlungsdruck ist nach (47) aus  $T$  und  $\varrho$  berechenbar]. Hierfür sind vier Gleichungen vorhanden. In diesen Gleichungen treten aber neben den bereits erwähnten Größen noch die folgenden auf: Das mittlere Molekulargewicht  $\mu$ , die Opazität  $\kappa$  und der Netto-Strahlungsstrom  $L_r$  nach außen durch die Kugelfläche mit dem Radius  $r$ . Damit das vorgegebene Problem lösbar sein soll, müssen also diese Größen als Funktionen von  $P$ ,  $\varrho$ ,  $T$ ,  $M_r$  sowie  $r$  berechenbar sein.

Es soll für einen Augenblick vorausgesetzt werden, daß letzteres der Fall ist. Da die Grundgleichungen (43), (44) und (45) Differentialgleichungen erster Ordnung sind, müssen für einen gegebenen  $r$ -Wert die Werte von  $P$ ,  $M_r$  und  $T$  bekannt sein. Auf der *Oberfläche*, d. h. für  $r = R$  gilt nun mit einer für die Analyse des Sterninnern genügenden Genauigkeit, daß  $P = 0$  und  $T = 0$ , während  $M_r = M$ , der Sternmasse, ist. Unter der soeben gemachten Voraussetzung kann das Problem der Ermittlung des Sternaufbaus also gewissermaßen durch Integration von der Oberfläche nach innen gelöst werden. Es ist unmittelbar ersichtlich, daß der Sternradius  $R$  und die Sternmasse  $M$  Parameter des Sternaufbaus sind.

Die Berechnung des mittleren Molekulargewichts  $\mu$  in der Zustandsgleichung (46) des idealen Gases kann als Funktion der Temperatur und der Dichte durchgeführt werden. Hierbei muß die *chemische Zusammensetzung*, d. h. das Mischungsverhältnis der Elemente, bekannt sein. Die Berechnung läuft im wesentlichen auf eine Berechnung des Ionisationszustandes der Sternmaterie hinaus. Hierüber wird in Ziffer 5 näher berichtet.

Die Opazität der Sternmaterie kann ebenfalls als Funktion der Temperatur und Dichte berechnet werden. Auch hier gilt, daß die chemische Zusammensetzung bei der Berechnung bekannt sein muß. Das Problem der Berechnung der Opazität wird in Ziffer 6 erörtert.

Es geht hervor, daß in bezug auf das mittlere Molekulargewicht und die Opazität die oben gemachte Voraussetzung zutrifft.

Was den Netto-Strahlungsstrom  $L_r$  nach außen durch die Kugelfläche mit dem Radius  $r$  betrifft, so gilt zunächst, daß  $L_r$  auf der Oberfläche, d. h. für  $r = R$ , gleich  $L$ , der gesamten Ausstrahlung oder der Leuchtkraft des Sterns ist. Um  $L_r$  als Funktion von  $r$  berechnen zu können, muß man die Verteilung der Energiequellen im Sterninnern



kennen. Es sei die Energieerzeugung<sup>1</sup> pro Zeiteinheit und Masseneinheit der Sternmaterie gleich  $\varepsilon$ . Allgemein ist  $\varepsilon$  eine Funktion der Entfernung  $r$  vom Sternzentrum. Der Netto-Strahlungsstrom  $L_r$  ist dann gemäß dem Energiesatz durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$L_r = \int_0^r 4\pi r^2 \rho \cdot \varepsilon \cdot dr. \quad (48)$$

Dementsprechend gilt

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon, \quad (49)$$

und es ist ferner, wie erwähnt,  $L_r = L$  für  $r = R$ .

Es ist somit klar, daß eine vollständige Analyse des Sterninnern nur möglich ist, wenn die Energieerzeugung  $\varepsilon$  pro Masseneinheit als Funktion der übrigen Veränderlichen des Problems berechenbar ist, d. h. die *Verteilung der Energiequellen* im Stern spielt wesentlich hinein.

Aus den in (28) sowie in Ziffer 18 dieses Berichtes erwähnten Untersuchungen über die Energieerzeugung im Sterninnern geht hervor, daß die Energieerzeugung praktisch ausschließlich subatomaren Ursprungs sein muß, d. h. durch Kernprozesse bewirkt wird. Mit einer in Ziffer 18 näher zu besprechenden Ausnahme gilt, daß die Energieerzeugung durch Kernprozesse nur von den physikalischen Zustandsgrößen, etwa  $\rho$  und  $T$ , sowie von der chemischen Zusammensetzung abhängt.

Wir wollen annehmen, daß letzteres der Fall ist, daß also

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, T, \text{chemische Zusammensetzung}). \quad (50)$$

Die Lage ist dann die folgende. Bei gegebenen Werten der Sternmasse  $M$ , des Sternradius  $R$  und der Leuchtkraft  $L$  sowie gegebener chemischen Zusammensetzung sind die Werte der Zustandsgrößen  $P$ ,  $\rho$  und  $T$ , sowie der Größen  $M_r$  und  $L_r$  durch die Gleichungen (43) bis (50) in Verbindung mit den *Oberflächenbedingungen*  $P = 0$ ,  $\rho = 0$ ,  $T = 0$  sowie  $M_r = M$  und  $L_r = L$  bei  $r = R$  für den ganzen Stern festgelegt.

Hieraus ergibt sich unmittelbar die wichtige Feststellung, daß die Parameter  $M$ ,  $R$ ,  $L$  und chemische Zusammensetzung nicht willkürlich gewählt werden können. Während nämlich a priori die physikalischen Zustandsgrößen nicht beschränkt sind, muß man in bezug auf  $M_r$  und  $L_r$  fordern, daß diese im Zentrum des Sterns, d. h. für  $r = 0$ , gleich Null sind. Die Wahl der Parameter  $M$ ,  $R$ ,  $L$  und chemische Zusammensetzung hat also so zu erfolgen, daß die beiden *Zentrumsbedingungen*  $M_r = 0$  und  $L_r = 0$  für  $r = 0$  erfüllt sind.

Es folgt, daß unter der gemachten Annahme der Gültigkeit von (50) der folgende Satz von VOGT (77) und RUSSELL (58) besteht: *Radius, Leuchtkraft sowie der ganze innere Aufbau eines Sterns sind durch die Masse des Sterns und die chemische Zusammensetzung gegeben.* Denn bei

<sup>1</sup> Wir folgen hier dem gewöhnlichen Sprachgebrauch. Der Ausdruck Energieverlust pro Zeiteinheit und Masseneinheit würde den Sachverhalt besser decken (vgl. hierzu S. 520).

gegebener Masse und chemischer Zusammensetzung sind  $R$  und  $L$  so zu wählen, daß die beiden Zentrumsbedingungen erfüllt sind.

Der Satz von VOGT und RUSSELL ist hier unter Bezugnahme auf die für ideal gasförmige Sternmaterie im Strahlungsgleichgewicht gültigen Gleichungen abgeleitet worden. Es sei aber ausdrücklich betont, daß der Satz auch dann gültig bleibt, wenn die Zustandsgleichung eine andere Form hat, oder wenn Konvektion vorhanden ist. Dies folgt aus der Tatsache, daß, obwohl die Form der Weggleichung eine andere wird, jedoch keine neuen Veränderlichen in das Problem hineinspielen.

Damit eine Analyse, wie die in dieser Ziffer skizzierte, wirklich numerisch vollständig durchführbar sein soll, müssen das mittlere Molekulargewicht  $\mu$ , die Opazität  $\kappa$  sowie die Energieerzeugung  $\varepsilon$  numerisch als Funktionen von  $\rho$  und  $T$  vorliegen. In den folgenden beiden Ziffern soll über die numerische Berechnung von  $\mu$  bzw.  $\kappa$  als Funktion von  $\rho$  und  $T$  bei gegebener chemischer Zusammensetzung der Sternmaterie berichtet werden.

**5. Ionisation im Sterninnern. Mittleres Molekulargewicht der Sternmaterie.** In einem weiten Druck- und Temperaturbereich verhält sich die Sternmaterie wie ein ideales Gas. Diese für die Theorie des Sterninnern außerordentlich wichtige Tatsache wurde bereits 1924 von EDDINGTON erkannt [vgl. (17)]. Die starke Ionisation der Atome im betreffenden Zustandsbereich bewirkt, daß die elementaren Partikeln praktisch alle sehr klein sind, außerordentlich viel kleiner als neutrale Atome. Selbst bei Dichten 100-mal größer als die des Wassers und mehr sind deshalb die effektiven Partikelvolumina so relativ klein, daß die entsprechenden Abweichungen von der idealen Zustandsgleichung nicht wesentlich sind [vgl. (78), Ziffer 8].

Die explizite Berechnung der Zustandsgleichung läuft unter diesen Umständen auf eine Berechnung der Gesamtzahl  $N$  der Partikeln pro Volumeneinheit hinaus. Es gilt:

$$p_G = N \cdot k T. \quad (51)$$

Es sei ein Gemisch von Elementen gegeben, in dem die Menge des Elements  $E$  pro Gramm  $x_E$  Gramm beträgt. Der mittlere Ionisationsgrad des Elements  $E$  sei dadurch charakterisiert, daß pro  $m_H$  Gramm des Elements  $n_E$  vom betrachteten Element herrührende Partikeln, Atomreste und freie Elektronen, vorhanden sind. Dann ist

$$N = \frac{\rho}{m_H} \sum x_E n_E, \quad (52)$$

wo die Summe über alle Elemente zu erstrecken ist. Aus (51) und (52) folgt

$$p_G = \frac{k}{m_H} \rho T \cdot \sum x_E n_E \quad (53)$$

oder

$$p_G = \frac{k}{m_H} \frac{\rho}{\mu} T, \quad (54)$$

indem man das *mittlere Molekulargewicht*  $\mu$  durch

$$\mu = \frac{1}{\sum x_E n_E} \quad (55)$$

definiert.

Zur Berechnung des mittleren Molekulargewichts hat man also die den mittleren Ionisationsgrad der verschiedenen Elemente charakterisierenden Größen  $n_E$  zu berechnen. Zur Erläuterung sei noch bemerkt, daß bei vollständiger Ionisation eines Elements der Kernladung  $Z$  und des Atomgewichts  $A$  die Größe  $n_E = (Z + 1)/A$  ist, für Wasserstoff also gleich 2 und für die schwereren Elemente etwa gleich  $1/2$ .

Die Berechnung des Ionisationszustandes eines gegebenen Elements als Funktion des Druckes und der Temperatur kann nach bekannten Methoden der statistischen Mechanik erfolgen [vgl. hierzu insbesondere EDDINGTON (17), ROSSELAND (56) und FOWLER (27)]. In der untenstehenden Darstellung der Anwendung dieser Methoden auf das speziell vorliegende Problem folgen wir B. STRÖMGRÉN (69) [vgl. auch FOWLER (27), S. 644 f.].

Es soll vorausgesetzt werden, daß die Temperatur und der Druck solche Werte haben, daß die Materie schon sehr weitgehend ionisiert ist. Außer für die dichtesten Sterne haben Temperatur und Druck in der Tat im größten Teil des Sterns derartige Werte. Unter diesen Umständen sind die elektrischen Felder, in denen sich die gebundenen Elektronen befinden, praktisch gleich den betreffenden COULOMB-Feldern der Atomkerne (Kernladung  $Z$ ). Die zusätzlichen Felder der wenigen gebundenen Elektronen können vernachlässigt werden. Für die Bindungsenergien  $\chi$  der Elektronen in den verschiedenen stationären Zuständen kann dann der einfache COULOMB-Feld-Ausdruck angesetzt werden:

$$\left. \begin{aligned} \chi_K &= \frac{2 \pi^2 e^4 m_e}{h} Z^2, & \text{Bindungsenergie der } K\text{-Elektronen, } n = 1 \\ \chi_L &= \frac{1}{4} \frac{2 \pi^2 e^4 m_e}{h} Z^2, & \text{Bindungsenergie der } L\text{-Elektronen, } n = 2 \\ \chi_M &= \frac{1}{9} \frac{2 \pi^2 e^4 m_e}{h} Z^2, & \text{Bindungsenergie der } M\text{-Elektronen, } n = 3 \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Zwischen der Bindungsenergie etwa eines angeregten  $L$ -Elektrons und eines nichtangeregten (zwei  $K$ -Elektronen vorhanden) braucht man in der betrachteten Näherung nicht zu unterscheiden.

Wir betrachten jetzt eine Elektronenkonfiguration um einen Atomkern der Kernladung  $Z$ , die  $n_K$  Elektronen in der  $K$ -Schale enthält ( $n_K = 0, 1$  oder  $2$ ),  $n_L$  Elektronen in der  $L$ -Schale ( $n_L = 0, 1, 2, \dots, 8$ ),  $n_M$  Elektronen in der  $M$ -Schale usw. Die Anzahlen der Partikeln pro Volumeneinheit in den durch  $(n_K, n_L, n_M \dots)$  charakterisierten Konfigurationen verhalten sich nach der statistischen Mechanik wie die Größen

$$q(n_K, n_L, \dots) = q(n_K, K) e^{\left(\frac{x_K}{kT} - \frac{\psi}{kT}\right)n_K} \cdot q(n_L, L) e^{\left(\frac{x_L}{kT} - \frac{\psi}{kT}\right)n_L} \dots, \quad (57)$$

wo  $q(n_K, K)$ ,  $q(n_L, L)$  usw. die  $n_K$   $K$ -Elektronen,  $n_L$   $L$ -Elektronen usw. entsprechenden statistischen Gewichte sind, und wo ferner das

Ionisierungspotential  $\psi$  durch die folgende Gleichung als Funktion von Dichte und Temperatur definiert ist:

$$e^{\frac{\psi}{kT}} = \frac{2 (2 \pi m_e)^{3/2}}{h^3} \frac{(kT)^{3/2}}{N_e}. \quad (58)$$

Hier ist  $N_e$  die Zahl der freien Elektronen pro Volumeneinheit.

Um nun die durchschnittliche Anzahl der  $K$ -Elektronen pro Atomkern des betrachteten Elements zu ermitteln, kann man folgendermaßen verfahren. Die Anzahlen der Konfigurationen mit 0, 1 bzw. 2  $K$ -Elektronen verhalten sich, wie aus (57) folgt, wie

$$\left. \begin{array}{l} q(0, K) \\ q(1, K) z_K \\ q(2, K) z_K^2 \end{array} \right\} \quad (59)$$

wo zur Abkürzung

$$z_K = e^{\frac{z_K}{kT} - \frac{\psi}{kT}} \quad (60)$$

gesetzt worden ist. Die durchschnittliche Anzahl der  $K$ -Elektronen pro Atom ergibt sich hieraus zu

$$N_K = \frac{0 \cdot q(0, K) + 1 \cdot q(1, K) z_K + 2 \cdot q(2, K) z_K^2}{q(0, K) + q(1, K) z_K + q(2, K) z_K^2}. \quad (61)$$

Für die durchschnittliche Anzahl der  $L$ -Elektronen,  $M$ -Elektronen usw. gelten ganz ähnliche Gleichungen. In diese sind nun die folgenden, leicht zu verifizierenden Ausdrücke für die statistischen Gewichte  $q(n_K, K)$ ,  $q(n_L, L)$  usw. einzusetzen:

$$\left. \begin{array}{l} q(n_K, K) = \binom{2}{n_K} \\ q(n_L, L) = \binom{8}{n_L} \\ q(n_M, M) = \binom{18}{n_M} \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} \quad (62)$$

Die dann auftretenden Summen können unmittelbar ausgewertet werden. Für die durchschnittliche Anzahl der  $L$ -Elektronen pro Atomkern findet man beispielsweise

$$N_L = \frac{\sum_{i=0}^8 i \binom{8}{i} z_L^i}{\sum_{i=0}^8 \binom{8}{i} z_L^i} = \frac{8 z_L (1 + z_L)^7}{(1 + z_L)^8} = 8 \frac{z_L}{1 + z_L}. \quad (63)$$

Allgemein ergibt sich für die durchschnittliche Zahl der Elektronen pro Atomkern in einer Elektronenschale der Hauptquantenzahl  $n$ :

$$N_n = 2 n^2 \frac{e^{\frac{z_n}{kT} - \frac{\psi}{kT}}}{1 + e^{\frac{z_n}{kT} - \frac{\psi}{kT}}}. \quad (64)$$

Für Sternmaterie einer gegebenen chemischen Zusammensetzung verläuft nun die Berechnung der  $n_E$  für gegebene Werte von  $T$  und  $\psi/kT$  wie folgt. Für jedes Element wird nach (56) und (64) die Anzahl der pro Atomkern in den verschiedenen Elektronenschalen gebundenen Elektronen und sodann die Gesamtzahl der gebundenen Elektronen ermittelt. Wird letztere Anzahl von der Anzahl  $Z$  der Elektronen pro Atomkern subtrahiert, erhält man die Anzahl der freien Elektronen pro Atomkern und daraus unmittelbar  $n_E$  für das betrachtete Element.

Tabelle 2.

Element	Relative Masse $x_E$	$Z$	$A$	$x_K/kT$ für $T = 10^7$ Grad
O	8/16	8	16	1
Na, Mg	4/16	12	24	2
Si	1/16	14	28	3
K, Ca	1/16	20	40	6
Fe	2/16	26	56	10

Das folgende numerische Beispiel möge die Verhältnisse erläutern. Die gegebene Elementmischung ist die sog. RUSSELL-Mischung (vgl. Tabelle 2).

Die untenstehende Übersicht zeigt den Gang der Berechnung der  $n_E$  und von  $\sum x_E n_E$ . Nur die Elektronen der  $K$ -,  $L$ - und  $M$ -Schalen sind berücksichtigt (vgl. unten).

Tabelle 3.

Element	Elektronenschale	$N_n$	Zahl der geb. El.	Zahl der freien El.	Zahl der freien Partikeln pro Atomkern der Masse $A m_H$	$n_E =$ Zahl der freien Partikeln pro Masse $m_H$	$x_E n_E$
O	$K$	0,04					
	$L$	0,07	0,24	7,76	8,76	0,548	0,274
	$M$	0,13					
Na, Mg	$K$	0,09					
	$L$	0,09	0,3	11,7	12,7	0,53	0,132
	$M$	0,15					
Si	$K$	0,24					
	$L$	0,11	0,5	13,5	14,5	0,52	0,032
	$M$	0,17					
K, Ca	$K$	1,46					
	$L$	0,23	1,9	18,1	19,1	0,48	0,030
	$M$	0,23					
Fe	$K$	1,99					
	$L$	0,61	3,0	23,0	24,0	0,43	0,054
	$M$	0,36					

$$T = 10^7 \text{ Grad}, \quad \frac{\psi}{kT} = 5. \quad n = \sum x_E n_E = 0,52$$

Das mittlere Molekulargewicht berechnet sich im betrachteten Fall zu  $\mu = 1,92$ .

Die folgende Tabelle 4 ist ein Auszug aus einer von B. STRÖMGREN (69) berechneten Tabelle der Werte von  $n = \sum x_E n_E$  für die RUSSELL-Mischung.

Tabelle 4.

$\log T$	$\frac{\psi}{kT} = 3$	5	7	9
6,4			0,49	0,51
6,8		0,51	0,53	0,54
7,2	0,46	0,53	0,54	0,54
7,6	0,47	0,53	0,54	0,54

$n$  der freien Partikel pro  $m_H$  Gramm der RUSSELL-Mischung bewirken.

Zwecks einer späteren Anwendung (vgl. S. 514) soll ein Ausdruck für das mittlere Molekulargewicht  $\mu$  einer Elementenmischung ermittelt werden, die pro Gramm  $X$  Gramm Wasserstoff und  $1-X$  Gramm der RUSSELL-Mischung enthält. Aus (55) ergibt sich für diesen Fall, indem für Wasserstoff vollständige Ionisation vorausgesetzt werden darf ( $n_H = 2$ )

$$\mu = \frac{1}{2X + n(1-X)}, \quad (65)$$

wo  $n$  die oben tabulierte Partikelzahl pro  $m_H$  Gramm der RUSSELL-Mischung bedeutet. Für reinen Wasserstoff ist  $\mu = 1/2$ .

Was die Berechnung des für die Ermittlung des Ionisierungspotentials  $\psi/kT$  erforderliche Anzahl  $N_e$  der freien Elektronen pro Volumeneinheit betrifft, so genügt meistens die folgende Näherung. Man rechnet mit einem freien Elektron pro  $m_H$  Gramm Wasserstoff und einem freien Elektron pro  $2 m_H$  Gramm der RUSSELL-Mischung:

$$N_e = \frac{\rho}{m_H} \left( X + \frac{1}{2} (1-X) \right) = \frac{\rho}{m_H} \frac{1+X}{2}. \quad (66)$$

Wenn die Dichte so hoch oder die Temperatur so niedrig ist, daß ein beträchtlicher Teil der Elektronen gebunden ist, wird die Lage komplizierter. Es muß dann der Einfluß der gebundenen Elektronen auf das elektrische Feld und somit auf die Bindungsenergie berücksichtigt werden. Ferner bedarf es zur korrekten Berücksichtigung der jetzt nicht mehr sehr kleinen Zahl der Elektronen, die in den höheren Schalen gebunden sind, einer Diskussion der sog. ausgeschlossenen Volumina [vgl. (27)]. Obwohl derartigen Berechnungen keine prinzipiellen Schwierigkeiten im Wege stehen, sind sie bis jetzt noch nicht in größerem Maßstab ausgeführt worden. Dieses ist bei der Diskussion von Sternen, die dichter sind als etwa die Sonne, zu berücksichtigen.

BIERMANN (6) hat die Ionisation in dem Übergangsgebiet mittlerer Temperatur zwischen den relativ schwach ionisierten Sternatmosphären und dem hochionisierten Sterninnern untersucht.

Die soeben besprochenen Überlegungen beziehen sich auf normale Sternmaterie. Entartete Materie hoher Dichte und hohen Gesamtdrucks kann als durch Atomzerquetschung ionisiert beschrieben werden. Man vergleiche hierzu (36), Ziffer 5. Auf die Eigenschaften derartiger Materie kommen wir in Ziffer 15 zurück.

**6. Die Opazität der Sternmaterie.** Die Opazität der Sternmaterie ist, wie wir S. 476 gesehen haben, eine bei der Untersuchung von Sternen im Strahlungsgleichgewicht wesentliche Größe. Zunächst sei bemerkt, daß die Opazität als ein gewisser Mittelwert des Massenabsorptionskoeffizienten über alle Frequenzen definiert ist. Gemäß Gleichung (40) ist bei gegebenem Temperaturgradienten der Netto-Strahlungsstrom proportional der reziproken Opazität. Dieser Netto-Strahlungsstrom ist naturgemäß ein Integral über die Netto-Strahlungsströme in den verschiedenen Frequenzen des Spektrums. Indem man den Netto-Strahlungsstrom in jeder Frequenz für sich als Funktion des Temperaturgradienten und des Absorptionskoeffizienten in der betreffenden Frequenz ermittelt, über alle Frequenzen integriert und die so erhaltene Gleichung mit (40) identifiziert, gelangt man zu der folgenden Gleichung für die Opazität:

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa_{\nu} (1 - e^{-h\nu/kT})} \frac{\partial B_{\nu}(T)}{\partial T} d\nu}{\int_0^{\infty} \frac{\partial B_{\nu}(T)}{\partial T} d\nu}. \quad (67)$$

Diese von ROSSELAND (55) abgeleitete Gleichung definiert die Opazität  $\kappa$  als einen gewissen gewichteten harmonischen Mittelwert des Absorptionskoeffizienten  $\kappa_{\nu}$ , das ROSSELAND-Mittel [vgl. hierzu (55) und (17)]. In der obigen Gleichung bedeutet  $B_{\nu}(T)$  die PLANCK-Intensität als Funktion der Frequenz und der Temperatur. Der Ausdruck (67) zeigt, daß für jede Temperatur der Absorptionskoeffizient in einem gewissen von dieser abhängigen Spektralbereich maßgebend ist. Mit steigender Temperatur verschiebt sich der Spektralbereich gegen immer höhere Frequenzen.

Der Faktor  $1 - e^{-h\nu/kT}$  des Absorptionskoeffizienten rührt daher, daß nur der durch diesen Faktor gegebene Teil der Absorptionen einen Einfluß auf das Strahlungsfeld hat. Dem restlichen Teil entspricht induzierte Emission, die genau dieselbe Richtung hat wie die Strahlung des betrachteten Strahlungsfelds und wie die absorbierte Strahlung [vgl. (55) und (56)].

Der Mechanismus der Absorption von Strahlung in einem idealen hochionisierten Gas ist der folgende. Es finden Übergänge der in den hochionisierten Atomresten gebundenen Elektronen nach stationären Zuständen statt, wo die Elektronen frei sind, *Photoionisation*. Ferner finden Übergänge der freien Elektronen nach stationären Zuständen größerer Energie (d. h. höherer Geschwindigkeit) statt. Die Photoionisationsprozesse liefern den weitaus größten Beitrag zur Opazität.

Die in Frage kommenden Elektronenübergänge finden in Feldern statt, die, wie wir in Ziffer 5 gesehen haben, mit guter Näherung als COULOMB-Felder der betreffenden Atomkerne beschrieben werden können.

Für COULOMB-Felder können die für die Berechnung des Absorptionskoeffizienten erforderlichen Übergangswahrscheinlichkeiten streng nach der Quantenmechanik berechnet werden [vgl. SUGIURA (72), GAUNT (29) sowie eine Reihe anderer in (69) angeführten Arbeiten]. Aus den Übergangswahrscheinlichkeiten und der nach der statistischen Mechanik berechenbaren Verteilung der Elektronen über die stationären Zustände (vgl. Ziffer 5) kann der Absorptionskoeffizient bei gegebener Temperatur und Dichte als Funktion der Frequenz berechnet, und sodann die Opazität gemäß (67) ermittelt werden.

EDDINGTON hat als erster die Opazität hochionisierter Sternmaterie berechnet, indem er sich auf die korrespondenzmäßige KRAMERSsche Theorie der Absorption von Röntgenstrahlung stützte [vgl. hierzu (17) und (55)]. EDDINGTON (21) und B. STRÖMGREN (69) haben Opazitätsberechnungen auf Grund der soeben erwähnten quantenmechanischen Überlegungen durchgeführt und die Berechnung auch in anderer Hinsicht genauer gestaltet. EDDINGTON berechnet zunächst den Emissionskoeffizienten und sodann mit Hilfe der KIRCHHOFFSchen Beziehung den Absorptionskoeffizienten. B. STRÖMGREN berechnet direkt den Absorptionskoeffizienten, und zwar für den speziellen Fall der S. 481 erwähnten RUSSELL-Mischung. Die Resultate von EDDINGTON und B. STRÖMGREN stimmen nahe überein.

Es sei eine gewisse Elementenmischung gegeben. Bei gegebener Temperatur und Dichte sind die Elektronen in bestimmter, nach der statistischen Mechanik berechenbarer Verteilung als K-Elektronen, L-Elektronen usw. der verschiedenen Elemente sowie als freie Elektronen vorhanden (vgl. Ziffer 6). Jedem stationären Zustand eines jeden Elementes (Kernladung  $Z$ ) entspricht ein gewisses Absorptionskontinuum, dessen langwellige Grenze  $\nu_{gr}$  in bekannter Weise durch die Bindungsenergie  $\chi_n(Z)$  des betreffenden Zustands gegeben ist:

$$h\nu_{gr} = \chi_n(Z). \quad (68)$$

Für jede Frequenz ist zu ermitteln, welche Absorptionskontinua wesentlich zu den Absorptionskoeffizienten beitragen. Jeder der Beiträge zum Absorptionskoeffizienten berechnet sich als Produkt eines Absorptionskoeffizienten, pro Elektron in dem betrachteten Zustand gerechnet, und der Anzahl der in diesem Zustand pro Gramm Materie vorhandenen Elektronen.

Bei der Durchführung der soeben skizzierten Berechnung des Absorptionskoeffizienten in einem idealen hochionisierten Gas dürfen die Felder der wenigen gebundenen Elektronen vernachlässigt werden (vgl. S. 479). Die Bindungsenergien  $\chi_n(Z)$  sind dann durch (56) gegeben. Ferner hat man in diesem Fall für den partiellen Absorptionskoeffizienten pro Elektron im betrachteten Zustand der Hauptquantenzahl  $n$ :

$$\alpha(\nu; Z, n) = \frac{64 \pi^4 m_e e^{10}}{3 \sqrt{3} c h^6} Z^4 \cdot g \cdot \frac{1}{n^5} \cdot \frac{1}{\nu^3}, \quad (\text{für } \nu > \nu_{gr}). \quad (69)$$



Hier ist  $g$  ein von  $n$  und  $\nu$  abhängiger Korrektionsfaktor, der für die in Betracht kommenden Werte von  $n$  und  $\nu$  nahe gleich 1 ist. Die folgende Übersichtstabelle 5 gibt  $g$  als Funktion von  $n$  und  $\nu/\nu_{gr}$ , dem Verhältnis der Frequenz  $\nu$  zu der betreffenden Grundfrequenz  $\nu_{gr}$ .

Für sehr hohe Werte von  $\nu/\nu_{gr}$  geht  $g$  gegen Null. Wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, sind nur die Werte von  $g$  für nicht sehr große Werte von  $\nu/\nu_{gr}$  von Bedeutung.

Wegen des Faktors  $\nu^3$  im Nenner in (69) nehmen die partiellen Absorptionskoeffizienten von der Grenzfrequenz mit wachsender Frequenz schnell ab. Mit wachsender Frequenz nimmt

der totale Absorptionskoeffizient ab, bis eine Absorptionskante erreicht wird. Hier wächst er sprungweise und nimmt bis zur nächsten Absorptionskante wieder ab, usw. Der Beitrag einer gegebenen Kante ist deshalb im allgemeinen nur in einem ziemlich eng begrenzten Wellenlängenbereich auf der kurzwelligen Seite der Kante von Bedeutung.

Um die Opazität bei gegebener Elementenmischung für gegebene Werte der Temperatur und des Druckes [oder des Ionisierungspotentials  $\psi$ , vgl. (58), Ziffer 5] numerisch zu berechnen, kann man zunächst die Zahl der gebundenen Elektronen in den verschiedenen Elektronenschalen nach (64), Ziffer 5, ermitteln (vgl. die Übersichtstabelle S. 481). Sodann sind die Elektronenzahlen mit den betreffenden partiellen Absorptionskoeffizienten (69) zu multiplizieren. Ordnet man nun die Absorptionskanten nach der Grundfrequenz  $\nu_{gr}$ , so kann man unmittelbar den Absorptionskoeffizienten als Funktion der Frequenz ermitteln. Bei den niedrigsten Frequenzen sind auch die oben erwähnten frei—frei Übergänge zu berücksichtigen. Die Opazität ergibt sich sodann nach (67). Die numerische Berechnung des Opazitätsintegrals kann durch passende Tabulierung sehr erleichtert werden [vgl. (69)].

Abb. 2 zeigt den Verlauf des Absorptionskoeffizienten mit der Frequenz und die Opazität für den speziellen Fall der RUSSELL-Mischung bei  $T = 1,4 \cdot 10^7$  Grad und  $\psi/kT = 3$ .

Die nebenstehende Tabelle ist ein Auszug aus einer in (69) gegebenen Tabelle der Opazität für die RUSSELL-Mischung.

Tabelle 5.

$\frac{\nu}{\nu_{gr}}$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
1,0	0,80	0,88	0,9	1,0
1,5	0,89	0,94		
2,0	0,94	0,97		
3	0,98	1,02		
4	1,00	1,04		
5	0,99	1,05		

Tabelle 6.

$T$	$\frac{\psi}{kT} = \infty$	6	4	3	2
$2 \cdot 10^6$	0,06				
4	0,00	0,06			
6	0,08	0,14	0,35	0,56	0,79
8	0,25	0,30	0,50	0,68	0,93
10	0,33	0,38	0,58	0,76	0,99
20	0,41	0,44	0,60	0,79	1,03

$$\kappa = 3,9 \cdot 10^{25} \cdot \frac{\rho}{T^{3,5}} \cdot \frac{1}{\tau}. \text{ Die Tabelle gibt } \log \tau.$$

Aus der Tabelle geht hervor, daß sich die Opazität bei niedriger Temperatur und niedrigem Druck nahe wie  $\rho T^{-3,5}$  verhält [vgl. hierzu (36),

Ziffer 13]. Mit wachsender Dichte wächst der Faktor  $\tau$  im Nenner, von EDDINGTON Guillotinefaktor genannt [vgl. (21)]. Dieser Effekt beruht darauf, daß bei sehr geringer Dichte  $\rho$  der Bruchteil der gebundenen Elektronen proportional der Dichte ist, woraus Proportionalität des Massenabsorptionskoeffizienten mit  $\rho$  folgt. Mit immer wachsender Dichte tritt allmählich wegen der begrenzten Anzahl der Elektronenplätze in den Elektronenschalen ein Sättigungseffekt auf, der bewirkt,

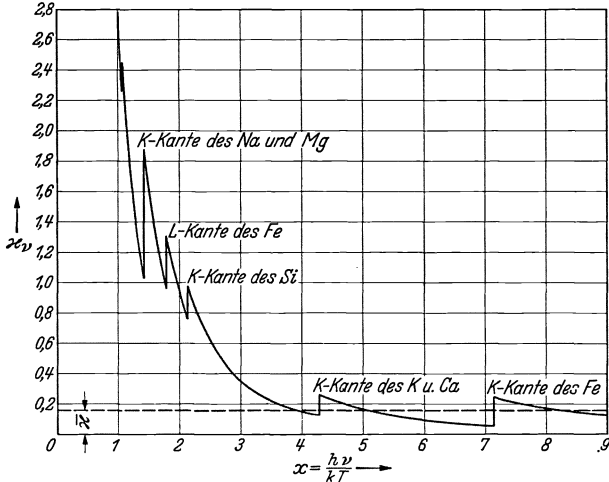


Abb. 2. Verlauf des Absorptionskoeffizienten mit der Frequenz für die RUSSELL-Mischung bei  $T = 1.4 \cdot 10^6$  Grad und  $\psi/kT = 3$ . Die Einheit des Absorptionskoeffizienten ist  $[25,59] \rho T^{-3,5}$ . In dieser Einheit ist die Opazität  $\kappa$  gleich  $1/\tau$ . Für die Opazität ist hauptsächlich der Frequenzbereich zwischen  $x = 2$  und  $x = 8$  maßgebend.

daß der Bruchteil der gebundenen Elektronen und somit auch der Massenabsorptionskoeffizient langsamer als  $\rho$  wächst. Mit wachsender Temperatur wächst der Guillotinefaktor  $\tau$  ebenfalls. Dieses Verhalten kann man folgendermaßen interpretieren. Wenn die Temperatur wächst, so verschiebt sich der für die Opazität maßgebende Frequenzbereich nach höheren Frequenzen. Die partiellen Absorptionskoeffizienten nehmen hierbei wie oben dargestellt wie  $\nu^{-3}$  ab, dieses wird aber in einem gewissen Temperaturbereich dadurch kompensiert, daß neue Absorptionskanten wirksam werden. Wenn aber die Frequenz bereits so groß geworden ist, daß alle Absorptionskoeffizienten der betreffenden Elemente wirksam sind, so bedeutet eine weitere Zunahme der Frequenz nur eine Abnahme des Absorptionskoeffizienten. Dies äußert sich in der Zunahme des Guillotinefaktors mit der Temperatur.

Die Opazität hängt von der Elementenmischung ab. Wie EDDINGTON gezeigt hat, ist sie annähernd proportional dem Mittelwert der Größe  $Z^2/A$  für die Elementenmischung. Die Zunahme des Faktors  $\tau$  mit der Temperatur setzt bei um so höherer Temperatur ein, je höher die mittlere Kernladung der Elementenmischung ist.

Die folgende Tabelle zeigt die Übereinstimmung der von EDDINGTON und B. STRÖMGREN auf verschiedenen Wegen erhaltenen Opazitäten für niedrige Temperaturen. Bei höheren Temperaturen ist wegen des Auftretens des oben erwähnten Temperatureffekts ein etwas größerer Unterschied vorhanden.

Wasserstoff und Helium tragen im Sterninnern wegen ihrer geringen Kernladung zur Opazität praktisch nicht bei. Dies beruht teils auf dem niedrigen Wert von  $Z^2/A$ , teils darauf, daß der Guillotiefaktor  $\tau$  wegen der geringen Kernladung schon bei relativ niedrigen Temperaturen groß ist.

Hieraus folgt, daß die Opazität einer Mischung von Wasserstoff, Helium und schweren Elementen relativ leicht berechnet werden kann. Beispielsweise ergibt sich die Opazität der S. 482 betrachteten Mischung von  $X$  Gramm Wasserstoff und  $1 - X$  Gramm der RUSSELL-Mischung zu

Tabelle 7.

$\frac{\psi}{kT}$	log $\tau$ EDDINGTON	log $\tau$ STRÖMGREN
7	0,03	0,02
6	0,08	0,06
5	0,16	0,13
4	0,32	0,27
3	0,54	0,47
2	0,83	0,74

$$T = 4 \cdot 10^6$$

$$\kappa = 3,9 \cdot 10^{25} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot (1 - X^2) \cdot \frac{\rho}{T^{3,5}}. \quad (70)$$

Durch Multiplikation mit  $(1 - X)$  ist die Opazität auf die Masse der absorbierenden Mischung reduziert worden. Durch den zusätzlichen Faktor  $1 + X$  ist die Vergrößerung der Zahl der freien Elektronen durch das Vorhandensein des ionisierten Wasserstoffs berücksichtigt worden [vgl. Gleichung (66)].

Bei hohen Temperaturen ist die Opazität gemäß der Gleichung (70) relativ niedrig. Wenn die Opazität von der Größenordnung 1 oder kleiner ist, muß die Streuung der freien Elektronen berücksichtigt werden. In dem Fall, daß die durch (70) gegebene Opazität vernachlässigbar ist, ist die durch Streuung bewirkte Opazität durch

$$\sigma = 0,20 (1 + X) \quad (71)$$

gegeben. Durch die Streuung der freien Elektronen ist gewissermaßen eine obere Grenze der Durchsichtigkeit eines idealen hochionisierten Gases gegeben.

Wenn die Opazität gemäß (70) und die Streuung gemäß (71) von der gleichen Größenordnung sind, erhält man, wie numerische Berechnungen gezeigt haben, die resultierende Opazität sehr nahe als Summe des größten der beiden Beiträge und des mit 1,5 multiplizierten kleinsten Beitrags.

Die Opazität entarteter Sternmaterie ist relativ sehr klein. Dieses ist unmittelbar verständlich, wenn man bedenkt, daß die Absorptionsübergänge durch die Besetzung der stationären Zustände stark behindert werden.

In entarteten Gebieten ist, wie KOTHARI (38) gezeigt hat, der Energietransport durch Leitung größer als der Energietransport durch Strahlung,

so daß die effektive Opazität (vgl. S. 474) in (40) noch niedriger als die Strahlungs-Opazität ist [vgl. hierzu (36), Ziffer 13 und 14].

Aus (40) folgt sodann, daß der Temperaturgradient in entarteten Gebieten der Sterne relativ sehr klein ist. Es ist in diesem Zusammenhang von Bedeutung, daß die Zustandsgleichung entarteter Materie die Temperatur nicht mehr enthält. Es genügt deshalb im allgemeinen bei der Untersuchung entarteter Sterngebiete, wenn man in der Diskussion die effektive Opazität gleich Null setzt, und folglich das Gebiet als isotherm betrachtet. Im Übergangsbereich einsetzender Entartung bedeutet die Abnahme der Opazität, daß die Temperatur relativ langsam zunimmt, was das Einsetzen der Entartung beschleunigt.

**7. Sternmodelle.** Es geht aus der Darstellung in Ziffer 5 und 6 hervor, daß im allgemeinen das mittlere Molekulargewicht  $\mu$  und die Opazität  $\kappa$  bei gegebener chemischer Zusammensetzung als mit genügender Genauigkeit bekannte Funktionen von Temperatur und Druck anzusehen sind.

Wäre die Energieerzeugung  $\varepsilon$  pro Gramm Sternmaterie eine ebenso gut bekannte Funktion der Zustandsgrößen, so könnte man in der Tat das in Ziffer 4 skizzierte Programm der Analyse des Sterninnern restlos durchführen.

Die gegenwärtige Lage ist die, daß bereits bedeutungsvolle Ansätze zum qualitativen Verständnis des Mechanismus der Energieerzeugung vorliegen (vgl. Ziffer 18). Eine zuverlässige quantitative Theorie der Variation von  $\varepsilon$  mit  $\rho$  und  $T$  konnte jedoch bis jetzt noch nicht entwickelt werden.

Andererseits ist es schon seit längerer Zeit bekannt, daß wichtige Eigenschaften des Sterninnern ohne eine genaue Kenntnis der Verteilung der Energiequellen im Stern abgeleitet werden können. Zu dieser Erkenntnis gelangte man durch die Untersuchung verschiedener *Sternmodelle*. Man macht für die Energieerzeugung  $\varepsilon$  oder für den Netto-Strahlungsstrom  $L_r$  (vgl. S. 474) einen formalen Ansatz und führt die Analyse des Sterninnern mit diesem durch. Es ergibt sich das Resultat, daß wichtige Eigenschaften den Sternmodellen mit sehr verschiedenen Ansätzen über die Verteilung der Energiequellen gemeinsam sind.

Zur Charakterisierung eines Sternmodells hat man folgendes zu spezifizieren: 1. Die Zustandsgleichung, einschließlich der Abhängigkeit des mittleren Molekulargewichts von den Zustandsgrößen. 2. Die Opazität als Funktion der Zustandsgrößen. 3. Die Energieerzeugung oder den Netto-Strahlungsstrom als Funktion der übrigen Größen des Problems (vgl. hierzu Ziffer 4):

$$\left. \begin{aligned} P &= P(\rho, T) \\ \kappa &= \kappa(\rho, T) \\ \varepsilon &= \varepsilon(\rho, T) \\ L_r &= L_r(r). \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

bzw.

Bei dieser Spezifizierung wird im allgemeinen auch in bezug auf die Zustandsgleichung und die Opazität eine gewisse Schematisierung eingeführt, um die Analyse zu erleichtern. Zum Beispiel wird im allgemeinen in der Zustandsgleichung mit einem durch den ganzen Stern hindurch konstanten mittleren Molekulargewicht gerechnet. Ferner wird oft für die Opazität der Ansatz

$$\kappa = \kappa_0 \rho T^{-3,5} \quad (73)$$

gemacht, wo  $\kappa_0$  als durch den ganzen Stern konstant vorausgesetzt wird, d. h. es wird in (70) mit einem durch den ganzen Stern hindurch konstanten Mittelwert des Guillotinefaktors  $\tau$  gerechnet. Ein mitunter benutzter, etwas allgemeinerer Ansatz für die Opazität ist folgender

$$\kappa = \kappa_0 \rho^n T^{-s}. \quad (74)$$

Die mit derartigen Schematisierungen erreichbare Genauigkeit ist im allgemeinen ausreichend.

Nachdem ein Sternmodell spezifiziert ist, ist die Untersuchung der Eigenschaften des Modells eine rein mathematische Aufgabe.

Bei der Lösung dieser mathematischen Aufgabe ist zunächst auf die Frage der Erfüllung der in Ziffer 4 diskutierten beiden Zentrumsbedingungen  $M_r = 0$  und  $L_r = 0$  für  $r = 0$  zu achten. Für eine gegebene Sternmasse müssen der Radius  $R$  und die Leuchtkraft  $L$  so gewählt werden, daß die Zentrumsbedingungen erfüllt sind. Bei der Interpretation der so aus der Analyse erhaltenen  $R$ - und  $L$ -Werte als Funktion des Massenwertes ist auf folgendes zu achten. Da die Spezifizierung der Energieerzeugung nicht auf physikalischer Grundlage erfolgt ist, kann das aus der einen Zentrumsbedingung erhaltene Resultat nichts Physikalisches lehren. Man erhält aus der Analyse nur *eine* Beziehung zwischen  $M$ ,  $R$  und  $L$ , die physikalischen Inhalt hat, statt zwei in dem Fall einer vollständigen Analyse mit einer Energieerzeugung, die auf physikalischer Grundlage abgeleitet worden ist. Ein Beispiel möge diesen Sachverhalt klarer machen. Es sei die Energieerzeugung durch eine Gleichung

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \rho^\alpha T^\nu \quad (75)$$

spezifiziert, wo  $\varepsilon_0$  eine für den Stern konstante Größe bedeutet. Die eine Zentrumsbedingung kann dann durch Variation der Konstanten  $\varepsilon_0$  erfüllt werden, lehrt also nichts über den Zusammenhang zwischen  $M$ ,  $R$  und  $L$ . Hätte dagegen eine physikalische Diskussion die Gleichung (75) ergeben, so wäre physikalisch auch ein ganz bestimmter Wert von  $\varepsilon_0$  gegeben, und es hätten sich aus den Zentrumsbedingungen *zwei* Gleichungen zwischen den Größen  $M$ ,  $R$  und  $L$  ergeben.

Es geht hervor, daß bei der Analyse eines Sternmodells zunächst die oben erwähnte Beziehung physikalischen Inhalts zwischen Masse, Radius und Leuchtkraft zu ermitteln ist. Dies ist die sog. *Masse-Leuchtkraft-Beziehung* für das betrachtete Sternmodell.

Sodann ist für das Sternmodell der *Verlauf der Zustandsgrößen Druck, Temperatur und Dichte sowie der Restmasse  $M_r$* , mit der Entfernung vom Zentrum zu ermitteln.

Es sei bemerkt, daß die Lösung der erwähnten Aufgaben im allgemeinen mit Hilfe numerischer Methoden zu erfolgen hat.

Das bekannteste Sternmodell ist das EDDINGTONSche Sternmodell. Dieses ist folgendermaßen charakterisiert:

$$\left. \begin{aligned} p_G &= \frac{k}{m_H} \frac{\rho}{\mu} T, \quad (\mu = \text{const}) \\ \kappa \frac{L_r}{M_r} &= \text{const} \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Die Zustandsgleichung ist die eines idealen Gases mit konstantem mittlerem Molekulargewicht. Die Charakterisierung der Verteilung der Energiequellen ist eine indirekte. Die durch (76) spezifizierte Verteilung hängt von dem Gang der Opazität mit der Entfernung vom Zentrum ab. Da im allgemeinen gemäß (70) eine Abnahme der Opazität gegen das Zentrum erfolgt, bedeutet (76), daß eine gewisse Zunahme der mittleren Energieerzeugung in der Richtung gegen das Zentrum vorausgesetzt wird.

Im EDDINGTONSchen Sternmodell ist, wie man unmittelbar aus (76) und den Grundgleichungen des Problems ableitet, der relative Strahlungsdruck  $\tau - \beta$  durch den Stern hindurch konstant. Dies führt zu der folgenden einfachen Weggleichung

$$\left. \begin{aligned} \frac{T^4}{P} &= \text{const} \\ \frac{\rho^{4/3}}{P} &= \text{const} \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Aus (77) folgt, daß das EDDINGTONSche Sternmodell als eine EMDEN-Polytrope des Polytropenindex  $n = 3$  beschrieben werden kann.

Über die Eigenschaften des EDDINGTONSchen Modells, insbesondere über die Form der Masse-Leuchtkraft-Beziehung für dieses Modell, vergleiche man den Bericht von VOGT (78) [vgl. auch EDDINGTON (17) und MILNE (47)].

Nachträglich ergibt sich (vgl. hierzu S. 478), daß für normale Sterne die Drucke und Temperaturen für das EDDINGTONSche Modell tatsächlich solche sind, daß die Sternmaterie als ideales Gas zu betrachten ist. Ferner ergibt sich, daß überall im Sterninnern Strahlungsgleichgewicht vorhanden ist (vgl. hierzu Ziffer 12).

Die Untersuchungen über das EDDINGTONSche Modell sind durch eine große Anzahl Untersuchungen anderer Modelle ergänzt worden. Ehe die hierdurch erhaltenen Resultate besprochen werden, soll über eine von MILNE (48) angeregte Diskussion über die Berechtigung des bei der mathematischen Analyse des EDDINGTONSchen Modells benutzten Verfahrens berichtet werden.

Wie S. 476 dargestellt, kann man die Analyse des Sterninnern als eine schrittweise Integration der Zustandsgrößen von der Sternoberfläche bis zum Sternzentrum durchführen. Hierbei ist bei gegebener Masse, gegebenem Radius und gegebener chemischer Zusammensetzung durch richtige Wahl der Leuchtkraft  $L$  dafür zu sorgen, daß die Zentrumsbedingung  $M_r = 0$  für  $r = 0$  erfüllt ist. Wird die Leuchtkraft in Übereinstimmung mit der für das betrachtete Modell gültigen EDDINGTONSchen Masse-Leuchtkraft-Beziehung gewählt, so wird die Zentrumsbedingung erfüllt.

Die Fragestellung von MILNE ist nun die, was geschieht, wenn der Wert von  $L$  von dem gerade erwähnten verschieden gewählt wird. Zunächst scheint die Lage die zu sein, daß ein größerer  $L$ -Wert zu einer positiven Restmasse  $M_r$  im Zentrum führt, ein kleinerer  $L$ -Wert zu einer negativen Restmasse  $M_r$ , d. h. zu einer Konfiguration, wo die Masse vor Erreichung des Zentrums verbraucht ist, so daß in der Tat nur die durch die EDDINGTONSche Masse-Leuchtkraft-Beziehung gegebene Luminosität  $L_0$  möglich wäre. Dieser Schluß beruht aber zunächst auf der Gültigkeit der Zustandsgleichung (76) des idealen Gases bis zum Sternzentrum. Für normale Sterne bleibt nun in der Tat für  $L < L_0$  die Zustandsgleichung bis zu dem Punkt gültig, wo die Restmasse (schon für  $r > 0$ ) gleich Null wird (für die weißen Zwerge ist dies nicht der Fall, vgl. Ziffer 15). Die Lösungen mit  $L < L_0$  scheidet also aus. Für die  $L > L_0$  entsprechenden Lösungen wächst jedoch die Dichte zu solchen Werten, daß (außer für sehr massige Sterne, vgl. S. 509) Entartung der Sternmaterie eintritt. Das Problem ist somit, ob das Eintreten der Entartung die Verhältnisse in dem Sinn ändern kann, daß die Restmasse bei Erreichung des Zentrums gleich Null werden kann.

Das letztgenannte Problem ist in einer größeren Anzahl von Arbeiten verschiedener Verfasser untersucht worden. Auf die mathematische Diskussion soll hier nicht eingegangen werden [man vergleiche etwa (70) und die dort angeführten Originalarbeiten von MILNE, EDDINGTON, FOWLER, COWLING, B. STRÖMGREN, RUSSELL, VOGT, HOPF, BIERMANN, CHANDRASEKHAR u. a.]. Die Resultate lassen sich folgendermaßen zusammenfassen.

Um der für  $L > L_0$  bei der Gültigkeit der idealen Zustandsgleichung auftretenden positiven Restmasse zu entgehen, muß eine Abweichung von der Zustandsgleichung im Sinne der *Überkompressibilität* auftreten. Entartung bewirkt nun eine Inkompressibilität [vgl. (36)], die die Restmasse noch vergrößert. Die Begleiterscheinung der starken Verminderung der Opazität bei Entartung (vgl. S. 487) bewirkt allerdings durch die daraus folgende starke Verminderung des relativen Strahlungsdrucks wieder eine Erhöhung der Kompressibilität. Für normale Sterne genügt diese Erhöhung jedoch nicht, um den Sachverhalt zu ändern. (Es ist in diesem Zusammenhang von Bedeutung, daß für sehr massige Sterne mit hohem relativem Strahlungsdruck in ideal gasförmigem Zustand,

für die man den größten Einfluß der Verminderung des relativen Strahlungsdrucks erwarten könnte, Entartung gar nicht eintreten kann, vgl. S. 509.)

Die erst bei sehr hohem Gesamtdruck auftretende Überkompressibilität infolge Neutronenbildung kann kaum für das Problem wesentlich sein. Für Sterne kleiner und mittlerer Masse kann man, wie wir gesehen haben, leicht allgemein zeigen, daß die hierfür erforderlichen extremen Drucke nicht erreicht werden können.

Das Resultat der Diskussion ist also, daß für normale Sterne die Lösungen mit  $L \neq L_0$  nicht existieren. Es sei hier noch bemerkt, daß gewisse Schwierigkeiten, die man bei der physikalischen Diskussion der Energieerzeugung in den Modellen mit  $L = L_0$  begegnete (vgl. hierzu Ziffer 18), einen Antrieb zu der angeführten Diskussion bedeuteten. Es ist unmittelbar klar, daß für die Energieerzeugung in den hypothetischen überkompressiblen Kernen hoher Dichte und Temperatur ein anderes Verhalten berechnet wird als für diejenige in Gebieten normaler Sterntemperatur und Dichte.

Es wurde bereits erwähnt, daß neben dem durch die Gleichungen (76) definierten EDDINGTONSchen Sternmodell eine Reihe anderer Modelle untersucht worden sind. Es seien erwähnt die Modelle, in denen die Absorption durch den Ansatz  $\kappa_0 \rho^n T^{-s}$  und die Energieerzeugung durch einen Ansatz  $\epsilon_0 \rho^\alpha T^\nu$  dargestellt werden [vgl. BIERMANN (4), MILNE (49), ROSSELAND (57), COWLING (14) und CHANDRASEKHAR (12)] sowie das zuerst von EDDINGTON (17) untersuchte Punktquellenmodell mit  $L_r = L$  für  $r \neq 0$ , in der die Konzentration der Energiequellen gegen das Zentrum die größtmögliche ist. Ferner Verallgemeinerungen des EDDINGTONSchen Modells, durch Ansätze  $\kappa L_r/M_r = \text{const} \cdot \rho^\alpha T^\nu$  definiert [vgl. CHANDRASEKHAR (12)].

Durch diese Untersuchungen hat man Einsicht in die folgenden Probleme gewonnen: 1. Die Abhängigkeit der Masse-Leuchtkraft-Beziehung von der Verteilung der Energiequellen im Sterninnern. 2. Die Abhängigkeit der Druck- Dichté- und Temperaturverteilung von der Verteilung der Energiequellen. 3. Das Auftreten von Konvektionsbereichen in Sternmodellen in Abhängigkeit von der Verteilung der Energiequellen.

Diese Ergebnisse sollen in Ziffer 9, 10, 11 und 12 besprochen werden, nachdem zunächst in Ziffer 8 über allgemeine Transformationseigenschaften wichtiger Sternmodell-Lösungen berichtet worden ist.

**8. Homologie-Transformationen.** Die Untersuchungen von Sternmodellen beruhen, wie erwähnt, im allgemeinen auf numerischen Berechnungen. Die zu variierenden Parameter eines Sternmodells sind (vgl. S. 477) die Masse  $M$ , der Radius  $R$ , die Leuchtkraft  $L$  und die chemische Zusammensetzung, d. h. das mittlere Molekulargewicht  $\mu$ . Von diesen Parametern wird gewöhnlich  $L$  so angepaßt, daß die Zentrumsbedingung erfüllt ist. Mit drei freien Parametern,  $M$ ,  $R$  und  $\mu$ , scheint die erforderliche Rechenarbeit zunächst sehr groß. Für wichtige Stern-



modelle existieren jedoch einfache Homologie-Transformationen, mit deren Hilfe die Zahl der durch numerische Integration zu berechnenden Lösungen beträchtlich reduziert werden kann. Die Homologie-Transformationen zeigen außerdem in einfacher Weise wichtige Eigenschaften der in Frage kommenden Sternmodelle [vgl. hierzu BIERMANN (4) und COWLING (14)].

Im folgenden sollen zur Erläuterung dieses Sachverhalts für zwei wichtige Sternmodelle die möglichen Homologie-Transformationen abgeleitet werden.

Zunächst soll ein Sternmodell betrachtet werden, in dem die Energieerzeugung  $\varepsilon$  pro Gramm durch den Stern hindurch konstant gleich  $\varepsilon_0$  ist. Durch dieses Sternmodell wird ein wichtiger Grenzfall beschrieben, indem man annehmen darf, daß in den wirklichen Sternen die Energieerzeugung  $\varepsilon$  gegen das Sternzentrum zunimmt. Die Konzentration der Energiequellen gegen das Zentrum ist also in diesem Modell sicher *kleiner* als in der Wirklichkeit. Der entgegengesetzte Grenzfall ist das bereits erwähnte Punktquellenmodell mit  $L_r = L$  für  $r \neq 0$ , in der die Konzentration der Energiequellen die *größtmögliche* ist [ $\varepsilon = 0$  für  $r \neq 0$ , vgl. (49)]. Für die Opazität soll der Ansatz  $\kappa = \kappa_0 \varrho T^{-3.5}$  benutzt werden.

Wir betrachten ein Sternmodell, in dem die ideale Zustandsgleichung gültig ist. Ferner setzen wir voraus, daß der relative Strahlungsdruck  $1 - \beta$  so klein ist, daß für jeden Stern mit genügender Genauigkeit mit einem durch den ganzen Stern hindurch konstanten  $\beta$ -Wert gerechnet werden kann. Nur für die massigsten Sterne trifft diese Voraussetzung nicht zu (vgl. S. 509). In dem vorliegenden Zusammenhang bedeutet dies, daß drei Homologie-Transformationen (statt allgemeiner zwei) möglich sind, so daß die Lösungen für alle Werte der freien Parameter  $M$ ,  $R$  und  $\mu$  aus einer einzigen gewonnen werden können.

Die Grundgleichungen (1), (2), (40) und (42) nehmen für das betrachtete Sternmodell die folgende Form an:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= -\frac{GM_r}{r^2} \varrho \\ \frac{dM_r}{dr} &= 4\pi r^2 \varrho \\ P &= \frac{k}{m_H} \frac{\varrho}{\mu \beta} T \\ \frac{dT}{dr} &= -\frac{3}{4ac} \kappa_0 \varrho^2 T^{-6.5} \frac{\varepsilon_0 \int_0^r \varrho r^2 dr}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

Die Randbedingungen des Problems sind:  $M_r = M$ ,  $P = 0$ ,  $\varrho = 0$ ,  $T = 0$  für  $r = R$ , und  $M_r = 0$  für  $r = 0$ . Die Parameter des Problems sind, wie aus (78) und den Randbedingungen hervorgeht:  $M$ ,  $R$ ,  $\mu \beta$  und  $\kappa_0 \varepsilon_0$ . Es sei, durch Variation des Parameters  $\kappa_0 \varepsilon_0$ , für irgendeinen Satz von Werten von  $M$ ,  $R$  und  $\mu \beta$  eine Lösung von (78), die die Randbedingungen erfüllt, ermittelt worden. Es soll untersucht werden, ob

aus diesen Lösungen durch Homologie-Transformationen Lösungen, die anderen Werten von  $M$ ,  $R$  und  $\mu\beta$  entsprechen, hervorgehen.

Indem wir die transformierten Größen mit einem Strich bezeichnen, machen wir den folgenden Transformationsansatz, der, wie man sieht, den Randbedingungen des Problems genügt:

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= t^{n_1} \cdot r; & \bar{R} &= t^{n_1} \cdot R \\ \bar{P} &= t^{n_2} \cdot P \\ \bar{M}_r &= t^{n_3} \cdot M_r; & \bar{M} &= t^{n_3} \cdot M \\ \bar{\varrho} &= t^{n_4} \cdot \varrho \\ \bar{\mu}\beta &= t^{n_5} \cdot \mu\beta \\ \bar{T} &= t^{n_6} \cdot T \\ \bar{\varkappa}_0 \varepsilon_0 &= t^{n_7} \cdot \varkappa_0 \varepsilon_0. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Hier sind  $t$  sowie die Exponenten  $n_1, n_2, \dots, n_7$  Konstanten. Die Exponenten sind so zu bestimmen, daß die transformierten Größen wieder den Gleichungen (78) genügen. Aus der ersten Gleichung (78) ergibt sich so

$$t^{(n_2 - n_1)} = t^{(n_3 - 2n_1 + n_4)} \quad (80)$$

oder

$$n_2 - n_1 = n_3 - 2n_1 + n_4. \quad (81)$$

In ähnlicher Weise ergibt sich aus den übrigen Gleichungen (78)

$$\left. \begin{aligned} n_3 - n_1 &= 2n_1 + n_4 \\ n_2 &= n_4 - n_5 + n_6 \\ n_6 - n_1 &= n_7 + 3n_4 - 6,5n_6 + n_1. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Es ergeben sich somit vier Gleichungen zwischen den sieben Exponenten  $n$ . Drei von diesen können also frei gewählt werden. Wir wählen  $n_1, n_3$  und  $n_5$ , um durch die Transformation (79) dem Radius, der Masse und dem reduzierten mittleren Molekulargewicht beliebige Werte geben zu können. Die übrigen Exponenten sind also durch  $n_1, n_3$  und  $n_5$  auszudrücken:

$$\left. \begin{aligned} n_2 &= -4n_1 + 2n_3 \\ n_4 &= -3n_1 + n_3 \\ n_6 &= -n_1 + n_3 + n_5 \\ n_7 &= -0,5n_1 + 4,5n_3 + 7,5n_5. \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

Indem man  $(n_1, n_3, n_5)$  nacheinander die Werte  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  und  $(0, 0, 1)$  beilegt, erhält man somit aus (79) die folgenden drei voneinander unabhängigen Homologie-Transformationen:

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= t_R \cdot r \\ \bar{P} &= t_R^{-4} \cdot P \\ \bar{M}_r &= M_r \\ \bar{\varrho} &= t_R^{-3} \cdot \varrho \\ \bar{\mu}\beta &= \mu\beta \\ \bar{T} &= t_R^{-1} \cdot T \\ \bar{\varkappa}_0 \varepsilon_0 &= t_R^{-0,5} \cdot \varkappa_0 \varepsilon_0 \\ \bar{R} &= t_R \cdot R \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= r \\ \bar{P} &= t_M^2 \cdot P \\ \bar{M}_r &= t_M \cdot M_r \\ \bar{\varrho} &= t_M \cdot \varrho \\ \bar{\mu}\beta &= \mu\beta \\ \bar{T} &= t_M \cdot T \\ \bar{\varkappa}_0 \varepsilon_0 &= t_M^{4,5} \cdot \varkappa_0 \varepsilon_0 \\ \bar{M} &= t_M \cdot M \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{r} &= r \\ \bar{P} &= P \\ \bar{M}_r &= M_r \\ \bar{\varrho} &= \varrho \\ \bar{\mu}\beta &= t_{\mu\beta} \cdot \mu\beta \\ \bar{T} &= t_{\mu\beta} \cdot T \\ \bar{\varkappa}_0 \varepsilon_0 &= t_{\mu\beta}^{7,5} \cdot \varkappa_0 \varepsilon_0 \\ \bar{\mu}\beta &= t_{\mu\beta} \cdot \mu\beta. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Hier ist zur größeren Deutlichkeit die Konstante  $t$  für die drei verschiedenen Transformationen mit verschiedenen Symbolen bezeichnet.

Die Transformation (84) ist die LANESche Transformation, die unter allgemeineren Umständen gültig ist.

Als ein Beispiel der Anwendung der Transformationen (84), (85) und (86) betrachten wir die Abhängigkeit der Temperatur in homologen Punkten von  $M$ ,  $R$  und  $\mu\beta$ . Aus (84), (85) und (86) folgt unmittelbar die Proportionalität von  $T$  mit  $\frac{M}{R} \mu\beta$ . Hieraus folgt speziell die Proportionalität der Temperatur im Sternzentrum mit  $\frac{M}{R} \mu\beta$ .

Hätten wir keine Annahmen über  $\beta$  gemacht, so wäre im Gleichungssystem (78) noch eine Gleichung vorhanden, und es beständen zwischen den sieben Exponenten  $n$  fünf Bedingungsgleichungen, so daß nur noch zwei von den Exponenten frei gewählt werden könnten. Es wären dann nur zwei unabhängige Homologie-Transformationen möglich. Um die Lösungen für alle Parameterwerte zu erhalten, genügt dann nicht mehr die numerische Berechnung für *einen* Satz von Parameterwerten, sondern es muß einer der Parameter, z. B.  $M$  variiert werden.

Es soll nun noch die Transformationsgleichung für die Leuchtkraft  $L$  abgeleitet werden. Die Leuchtkraft ist für das betrachtete Modell durch die folgende Gleichung gegeben:

$$L = \varepsilon_0 \int_0^R 4\pi r^2 \varrho dr. \quad (87)$$

Aus diesem Ausdruck und aus den Transformationsgleichungen (84), (85) und (86) ergibt sich, daß  $L$  folgendermaßen transformiert wird:

$$\varkappa_0 \bar{L} = \varkappa_0 L \cdot \left(\frac{\bar{R}}{R}\right)^{-0,5} \left(\frac{\bar{M}}{M}\right)^{5,5} \left(\frac{\bar{\mu}\bar{\beta}}{\mu\beta}\right)^{7,5}. \quad (88)$$

Es gilt also allgemein die folgende Beziehung zwischen  $L$ ,  $R$ ,  $M$ ,  $\mu\beta$  und  $\varkappa_0$ , die Masse-Leuchtkraft-Beziehung für das betrachtete Modell:

$$L = \text{const} \cdot \frac{1}{\varkappa_0} R^{-0,5} M^{5,5} \mu^{7,5} \beta^{7,5}. \quad (89)$$

Die Konstante ergibt sich aus den numerischen Integrationen für *einen* Satz von Werten  $M$ ,  $R$ ,  $\mu\beta$  (bei denen  $\varkappa_0 L$  zu variieren ist, bis die Zentrumsbedingung erfüllt ist).

In bezug auf die Auswertung von (89) sei bemerkt, daß gemäß Voraussetzung  $\varkappa_0$  und  $\mu\beta$  durch den Stern hindurch konstant sind. Von Stern zu Stern sind  $\varkappa_0$  und  $\mu\beta$  jedoch im allgemeinen verschieden. Bei der Benutzung von (89) zur Berechnung der Leuchtkraft aus Masse und Radius hat man deshalb einen passenden Mittelwert von  $\varkappa_0$  (d. h. einen passenden Mittelwert des Guillotinefaktors  $\tau$ , vgl. S. 486) sowie einen passenden Mittelwert von  $\mu\beta$  für den betreffenden Stern gemäß den in Ziffer 5 und 6 besprochenen Berechnungen und in Übereinstimmung mit den Temperatur- und Dichtewerten für das betrachtete Modell zu ermitteln. Diese Berechnung hat in Übereinstimmung mit der angenommenen chemischen Zusammensetzung zu erfolgen (man vergleiche

hierzu auch Ziffer 17). Ein im allgemeinen genügend genauer Wert von  $\beta$  wird durch Benutzung der für das EDDINGTONSche Sternmodell gültigen Beziehung zwischen  $M$ ,  $\mu$  und  $\beta$  erhalten.

Es soll sodann das Punktquellenmodell in genau derselben Weise wie soeben das Modell mit  $\varepsilon = \varepsilon_0$  diskutiert werden. Die Grundgleichungen sind:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= -\frac{GM_r}{r^2} \varrho \\ \frac{dM_r}{dr} &= 4\pi r^2 \varrho \\ P &= \frac{k}{m_H} \frac{\varrho}{\mu \beta} T \\ \frac{dT}{dr} &= -\frac{3}{4ac} \kappa_0 \varrho^2 T^{-6,5} \frac{L}{4\pi r^2} \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

Die Randbedingungen sind dieselben wie vorher. Der Transformationsansatz ist (79) mit der Ausnahme, daß  $\kappa_0 \varepsilon_0$  durch  $\kappa_0 L$  zu ersetzen ist:

$$\overline{\kappa_0 L} = t^{n_7} \cdot \kappa_0 L. \quad (91)$$

Die Gleichungen (81) und (82) für die Exponenten gelten unverändert, mit Ausnahme der letzten, statt der jetzt gilt:

$$n_6 - n_1 = n_7 + 2n_4 - 6,5n_6 - 2n_1. \quad (92)$$

Die Gleichungen (83) gelten unverändert, mit Ausnahme der letzten, die jetzt

$$n_7 = -0,5n_1 + 5,5n_3 + 7,5n_5 \quad (93)$$

lautet.

Es ergeben sich somit wieder die Transformationsgleichungen (84), (85) und (86), indem nur die Gleichungen für  $\kappa_0 \varepsilon_0$  durch die folgenden für  $\kappa_0 L$  zu ersetzen sind:

$$\overline{\kappa_0 L} = t_R^{0,5} \cdot \kappa_0 L \quad (94); \quad \overline{\kappa_0 L} = t_M^{5,5} \cdot \kappa_0 L \quad (95); \quad \overline{\kappa_0 L} = t_{\mu\beta}^{7,5} \cdot \kappa_0 L. \quad (96)$$

Die Masse-Leuchtkraft-Beziehung ergibt sich für das Punktquellenmodell unmittelbar aus diesen Gleichungen:

$$L = \text{const} \cdot \frac{1}{\kappa_0} R^{-0,5} M^{5,5} \mu^{7,5} \beta^{7,5}. \quad (97)$$

Die Form der Masse-Leuchtkraft-Beziehung ist somit für das Punktquellenmodell dieselbe wie für das Modell mit  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . Nur die Konstante ist verschieden. Nach den numerischen Integrationen für die beiden Modelle ist *die Konstante* für das Punktquellenmodell *0,3-mal kleiner* als für das Modell mit  $\varepsilon = \varepsilon_0$  [vgl. BIERMANN (4)].

Bei dem Vergleich von (89) und (97) ist noch zu berücksichtigen, daß die Mittelwerte von  $\kappa_0$ ,  $\mu$  und  $\beta$  für die etwas verschiedenen Temperaturen und Drucke der beiden Modelle zu berechnen sind, und deshalb etwas verschieden ausfallen werden. Die Unterschiede sind jedoch sehr klein. Wenn merklich, wirken sie in der entgegengesetzten Richtung wie der Unterschied der Konstanten in (89) und (97) [vgl. (69)].

**9. Die Masse-Leuchtkraft-Beziehung.** Indem man berücksichtigt, daß die beiden in Ziffer 8 diskutierten Modelle Grenzfälle der möglichen Verteilung der Energiequellen darstellen, so sieht man, daß die durch die Unkenntnis der Verteilung der Energiequellen herrührende Unsicherheit der Masse-Leuchtkraft-Beziehung relativ gering ist. Die Gleichungen (89) und (97) ergeben bzw. eine obere und eine untere Grenze für die Leuchtkraft bei *beliebiger* Verteilung der Energiequellen. Benutzt man in der Masse-Leuchtkraft-Beziehung in der Form (89) oder (97) eine Konstante gleich dem geometrischen Mittelwert der beiden für die extremen Modelle sich ergebenden Konstanten, so ist der Fehler der berechneten Leuchtkraft, da das Verhältnis der beiden Konstanten 0,3 ist, sicher kleiner als etwa 80%, oder in Größenklassen ausgedrückt, kleiner als etwa *eine halbe Größenklasse*.

Diese in anderer Weise zuerst von EDDINGTON nachgewiesene Unempfindlichkeit der Masse-Leuchtkraft-Beziehung gegenüber der Verteilung der Energiequellen [vgl. hierzu auch EDDINGTON (17) und VOGT (78)] ist naturgemäß von großer Bedeutung, wie unter anderem aus der Diskussion in Ziffer 17 hervorgehen wird. Es sei hier bemerkt, daß dieselbe Unempfindlichkeit auch bei den in Ziffer 8 nicht berücksichtigten Fällen hohen relativen Strahlungsdruckes besteht [vgl. EDDINGTON (17) und BIERMANN (4)].

Es geht aus (89) bzw. (97) hervor, daß die Masse-Leuchtkraft-Beziehung eine Beziehung zwischen der Masse, der Leuchtkraft und dem Radius ist, in die noch die von der chemischen Zusammensetzung abhängigen Größen mittleres Molekulargewicht  $\mu$  und Konstante des Opazitätsgesetzes  $\kappa_0$  eingehen.

Die Abhängigkeit der Leuchtkraft von dem Radius ist nicht ausgeprägt ( $L \propto R^{-0,5}$ ), während die Leuchtkraft stark mit der Masse zunimmt. Hierdurch erklärt sich der Name Masse-Leuchtkraft-Beziehung. Es ist jedoch bei der Diskussion der Abhängigkeit der Leuchtkraft vom Radius zu berücksichtigen, daß mit wachsendem Radius die Temperaturen und Dichten abnehmen [vgl. die LANESche Transformation (84)], was eine unter Umständen beträchtliche Abnahme des Guillotinefaktors  $\tau$  und folglich eine beträchtliche Zunahme von  $\kappa_0$  bewirkt. Dieser indirekte Einfluß des Radius auf die Leuchtkraft wirkt im selben Sinn wie die soeben erwähnte direkte und ist unter Umständen stärker ausgeprägt.

Die Anwendung der Masse-Leuchtkraft-Beziehung bei der Diskussion des vorhandenen Beobachtungsmaterials von Massen, Radien und Leuchtkräften soll in Ziffer 17 besprochen werden.

**10. Temperatur, Dichte und Druck im Sterninnern.** Das EDDINGTONsche Sternmodell kann, wie S. 490 erwähnt, als EMDENSche Polytrope des Polytropenindex 3 beschrieben werden. Der Verlauf der Zustandsgrößen und der Restmasse mit der Entfernung vom Zentrum wird mit Hilfe der EMDEN-Funktionen für  $n = 3$  beschrieben [vgl. EMDEN (24)]

und EDDINGTON (17)]. Zur Erläuterung zeigt Tabelle 8 den Verlauf von Gesamtdruck  $P$ , Dichte  $\rho$ , Temperatur  $T$  und Restmasse  $M_r$ , mit der Entfernung vom Zentrum für das EDDINGTONSche Sternmodell.

Die numerischen Werte des Gesamtdrucks, der Dichte und der Temperatur im Sternzentrum sowie des relativen Strahlungsdrucks, alle Größen nach dem EDDINGTONSchen Sternmodell, sind in der folgenden Tabelle für einige typische Sterne gegeben [vgl. wegen einer ausführlicheren Zusammenstellung M. SCHWARZSCHILD (60)]. Die Berechnung dieser Werte fußt auf beobachteten Massen, Radien und Leuchtkräften. Aus diesen

Tabelle 8.

$6,90 \frac{r}{R}$	$\frac{P}{P_c}$	$\frac{\rho}{\rho_c}$	$\frac{T}{T_c}$	$\frac{M_r}{M}$
0	1,00	1,00	1,00	0,00
1	0,53	0,63	0,86	0,13
2	0,12	0,20	0,58	0,52
3	0,017	0,05	0,36	0,82
4	0,0019	0,0092	0,21	0,95
5	0,00015	0,0014	0,11	1,00
6	0,000004	0,000086	0,04	1,00
6,90	0	0	0	1

kann man, wie in Ziffer 17 näher ausgeführt, das von der chemischen Zusammensetzung abhängige mittlere Molekulargewicht bestimmen, und so die numerische Berechnung durchführen.

Je nach dem benutzten Modell ergibt sich ein verschiedener Verlauf der Zustandsgrößen mit der Entfernung vom Zentrum, sowie verschiedene numerische Werte für das Zentrum. Die Größenordnung bleibt aber

Tabelle 9.

Stern	$\frac{M}{M_\odot}$	$\frac{R}{R_\odot}$	Abs. Größenklasse	$P_c$ in Atm.	$\rho_c$ gcm <sup>-3</sup>	$T_c$ Grad	$1-\beta$
Sonne . . .	1,0	1,0	+ 4,7	$1 \cdot 10^{11}$	76	$19 \cdot 10^6$	0,003
Sirius A . .	2,4	1,7	+ 0,8	$1 \cdot 10^{11}$	41	26	0,011
Capella A . .	4,2	13	- 0,4	$8 \cdot 10^7$	0,16	6	0,046
U Oph h . .	5,4	3,2	- 2,0	$3 \cdot 10^{10}$	12	25	0,031
Y Cyg h . .	17	5,9	- 5,3	$3 \cdot 10^{10}$	6,5	32	0,084

dieselbe, so daß die auf Grund des EDDINGTONSchen Modells berechneten Werte, wenn es auf einen allgemeinen Eindruck ankommt, durchaus genügen.

Eine Diskussion des Zusammenhangs der abgeleiteten Temperaturen und Dichten im Sterninnern mit der Energieerzeugung findet man in Ziffer 18.

**11. Der Aufbau der äußeren Teile des Sterninnern.** Aus der Tabelle 8, Ziffer 10, geht hervor, daß man bei dem EDDINGTONSchen Sternmodell ziemlich weit gegen das Zentrum gehen kann, bevor die Restmasse merklich unter die Totalmasse sinkt. Dies gilt ganz allgemein für alle Sternmodelle. Es liegt deshalb nahe, eine Theorie derjenigen äußeren Teile der Sterne zu entwickeln, für die noch mit

genügender Genauigkeit  $M_r = M$  gesetzt werden kann ( $M_r/M$  etwa größer als 0,9 oder 0,95). Es darf angenommen werden, daß in diesen Gebieten keine merkliche Energieerzeugung stattfindet, so daß auch  $L_r = L$  gesetzt werden darf.

Es sei angenommen, daß der relative Strahlungsdruck  $1 - \beta$  klein ist. Ferner sei die Opazität durch den Ansatz

$$\kappa = \kappa_0 \varrho T^{-s} \quad (98)$$

gegeben. Schließlich sei die Gültigkeit der idealen Zustandsgleichung vorausgesetzt. Es gelten dann mit sehr guter Näherung (für  $s = 3$  genau) die folgenden Gleichungen für die Temperatur  $T$  und die Dichte  $\varrho$ :

$$T - T_0 = \frac{1}{4} \frac{m_H}{k} \mu \beta \frac{GM}{R} \left( \frac{R}{r} - 1 \right) \quad (99)$$

und

$$\varrho = \left( \frac{\alpha}{3} \frac{m_H}{k} \mu \beta \frac{4 \pi G c M}{\kappa_0 L} \right)^{1/2} T^{\frac{3+s}{2}}. \quad (100)$$

Hier ist  $T_0$  die Oberflächentemperatur, die allgemein neben  $T$  vernachlässigt werden darf. Der Aufbau ist gemäß (100) durch eine EMDEN-Polytrope des Polytropenindex  $n = (3 + s)/2$  beschrieben. Für  $s = 3,5$  [vgl. (70)] ist  $n = 3,25$ . Diese Gleichungen lassen sich leicht aus den Grundgleichungen mit  $M_r = M$  und  $L_r = L$  ableiten [vgl. hierzu MILNE (46), EDDINGTON (18), B. STRÖMGREN (68), SIEDENTOPF (61)]. Der Temperatur- und der Dichtegradient nehmen nach (99) und (100) mit wachsender Schwerebeschleunigung auf der Oberfläche des Sterns zu.

Die Änderung der Restmasse  $M_r$  kann mit Hilfe von (99) und (100) als Funktion von  $r$  dargestellt werden. Der Gültigkeitsbereich dieser Gleichungen kann somit leicht festgestellt werden.

Ausführlichere und allgemeinere Untersuchungen über den hier betrachteten Teil der Sterne haben CHANDRASEKHAR (10) und VOGT (79) angestellt. CHANDRASEKHAR hat für dieses Gebiet eine allgemeingültige Beziehung zwischen dem relativen Strahlungsdruck und der Entfernung vom Zentrum abgeleitet.

**12. Konvektion im Sterninnern.** Es wurde bereits S. 490 erwähnt, daß im EDDINGTONSchen Sternmodell gemäß den errechneten Druck- und Temperaturgradienten überall Strahlungsgleichgewicht vorhanden ist. Für gewisse andere Sternmodelle ist die Lage verschieden, indem Gebiete in konvektivem Gleichgewicht vorhanden sind.

Die Bedingung für das Auftreten von Konvektion im Sterninnern ist die folgende: Der nach den Gleichungen des Strahlungsgleichgewichts berechnete Temperaturgradient soll größer sein als der konvektivem (adiabatischem) Gleichgewicht entsprechende. Wäre unter diesen Umständen in einem Augenblick Strahlungsgleichgewicht vorhanden, so würde ein aufsteigendes, sich adiabatisch ausdehnendes Massenelement beständig wärmer als seine Umgebung sein und einen fortgesetzten Auftrieb erfahren, während in derselben Weise ein absteigendes Massenelement weiter nach innen getrieben werden würde, d. h. die Schichtung

wäre instabil [vgl. wegen dieser auf K. SCHWARZSCHILD zurückgehenden Überlegung EDDINGTON (17), S. 98, und ROSSELAND (56), S. 78].

Bei verschwindend kleinem relativem Strahlungsdruck  $1-\beta$  ist die Bedingung für das Nichtauftreten von Konvektion für normale Sternmaterie

$$\frac{1}{T} \left| \frac{(dT)_R}{dr} \right| < \frac{2}{5} \frac{1}{P} \left| \frac{dP}{dr} \right|, \quad (101)$$

wo  $(dT)_R/dr$  der gemäß der Grundgleichung (40) berechnete Temperaturgradient im Strahlungsgleichgewicht ist. Bei nicht verschwindendem Strahlungsdruck ist die Form der Bedingung verwickelter [vgl. hierzu BIERMANN (5) und SIEDENTOPF (62) sowie (70)].

Durch Substitution der Grundgleichungen (1) und (40) in (101) erhält man:

$$\frac{\kappa L_r}{4\pi G c M_r} < \frac{8}{5} \frac{a}{3} \frac{T^4}{P}. \quad (102)$$

Durch abermalige Benutzung der Grundgleichungen (1) und (40) kann man die Bedingung für das Nichtauftreten der Konvektion in einem Punkte, außerhalb dessen Strahlungsgleichgewicht herrscht (vgl. hierzu S. 474), in der folgenden Form schreiben:

$$\frac{\kappa L_r}{M_r} < \frac{8}{5} \left( \frac{\kappa L_r}{M_r} \right), \quad (103)$$

wo der Mittelwert von  $\kappa L_r/M_r$  als Druck-Mittelwert definiert ist:

$$\left( \frac{\kappa L_r}{M_r} \right) = \frac{\int_0^r \frac{\kappa L_r}{M_r} dP}{\int_0^r dP}. \quad (104)$$

Bei nicht vernachlässigbarem Strahlungsdruck ist der Zahlenfaktor in (103) kleiner. Er nimmt mit wachsendem  $1-\beta$  immer ab, bis für  $1-\beta=1$  der Wert 1 erreicht wird.

Im EDDINGTONSchen Sternmodell, in dem gemäß Voraussetzung  $\kappa L_r/M_r$  durch den Stern hindurch konstant ist, ist der Mittelwert dieser Größe überall gleich der Größe selbst. Es ist folglich in diesem Modell immer Strahlungsgleichgewicht vorhanden. Dasselbe gilt, wie aus (103) hervorgeht, für alle solche Sternmodelle, für die  $\kappa L_r/M_r$  gegen das Zentrum hin beständig abnimmt. Dieses ist z. B. der Fall für das Sternmodell  $\kappa = \kappa_0 \rho T^{-3.5}$  und  $\varepsilon = \varepsilon_0$  (vgl. S. 489).

Wenn dagegen eine starke Konzentration der Energieerzeugung gegen das Zentrum vorhanden ist, wird man wegen des entsprechenden starken Anwachsens der Größe  $\kappa L_r/M_r$  bei Annäherung an das Zentrum Konvektion erwarten. Konvektion wird desto eher einsetzen, je höher das relative Strahlungsgleichgewicht ist.

Für das Punktquellenmodell setzt bei einem gewissen Punkt immer konvektives Gleichgewicht ein. ROSSELAND (57) hat ein Sternmodell



mit konstantem Absorptionskoeffizienten und hohem relativem Strahlungsdruck untersucht und gezeigt, daß für dieses schon bei ziemlich geringer Konzentration der Energiequellen gegen das Zentrum ( $\varepsilon \propto T^3$ ) Konvektion auftritt. COWLING (14) hat Sternmodelle mit verschwindendem Strahlungsdruck untersucht, die durch  $\kappa = \text{const}$  bzw.  $\kappa = \kappa_0 \rho T^{-3.5}$  sowie  $\varepsilon \propto T^\nu$  charakterisiert waren. Es zeigte sich, daß für  $\kappa = \kappa_0$  Konvektion für  $\nu$  größer als ein gewisser kritischer Wert zwischen 3 und 4 eintritt, während für  $\kappa = \kappa_0 \rho T^{-3.5}$  der entsprechende kritische Wert von  $\nu$  zwischen 7 und 8 liegt, einem mäßig hohen Grad der Konzentration der Energiequellen gegen das Zentrum entsprechend. Für höhere Strahlungsdrucke erhält man durch die Untersuchungen von CHANDRASEKHAR über die S. 492 erwähnten Sternmodelle einen Einblick in die Konvektionsverhältnisse.

Allgemein gilt, daß die physikalisch zu erwartende Konzentration der Energieerzeugung gegen das Zentrum so stark ist (vgl. Ziffer 18), daß man immer mit dem Vorkommen einer Konvektionszone, jedenfalls in der Nähe des Sternzentrums, rechnen kann.

In einem Konvektionsgebiet gilt nicht mehr die Grundgleichung (40). Der Temperaturgradient ist hier durch die adiabatische Weggleichung [vgl. hierzu BIERMANN (5) und COWLING (15)]:

$$\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} = \gamma_A \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} \quad (105)$$

in Verbindung mit der Zustandsgleichung gegeben. Hier ist  $\gamma_A$  das effektive Verhältnis der spezifischen Wärmen. Für normale Sternmaterie ist bei verschwindendem relativem Strahlungsdruck  $\gamma_A$  gleich  $5/3$ . Mit wachsendem relativem Strahlungsdruck nähert sich  $\gamma_A$  dem Wert  $4/3$ , der für  $1 - \beta = 1$  erreicht wird [vgl. (17), (4) und (62)]. Bei verschwindendem Strahlungsdruck mit  $\gamma_A$  konstant gleich  $5/3$  ist der Aufbau des Konvektionsgebietes gemäß (105) polytrop, dem Polytropenindex  $n = 3/2$  entsprechend.

Für normale Sterne ist die Ausdehnung der Konvektionszone nach COWLING (15) so gering, daß der Aufbau des Sterns durch die Konvektion nicht wesentlich geändert wird. Insbesondere wird die Masse-Leuchtkraft-Beziehung durch das Auftreten der Konvektion numerisch nur wenig geändert.

Systematische Untersuchungen über passend gewählte Sternmodelle, etwa Punktquellenmodelle, mit konvektiven Kernen verschiedener Ausdehnung, liegen zur Zeit noch nicht vor.

**13. Extrem massige Sterne.** Es ist bereits wiederholt erwähnt worden, daß nur für sehr massige Sterne der relative Strahlungsdruck nicht sehr klein ist (vgl. z. B. Tabelle 9). Die wichtige Rolle, die der relative Strahlungsdruck bei der Beurteilung der Verhältnisse im Sterninnern spielt, wurde ebenfalls hervorgehoben.

Die massigsten bekannten Sterne sind die von TRÜMPLE (74) entdeckten sehr massigen weißen Sterne in offenen Sternhaufen. Die

Massen dieser Sterne wurden von TRÜMLER aus der Rotverschiebung der Linien in ihrem Spektrum abgeleitet. Die ohne Rotverschiebung zu erwartenden Wellenlängen konnten hierbei vorausgesagt werden, indem die relativen Geschwindigkeiten der Sterne innerhalb desselben offenen Sternhaufens sehr klein sind, so daß die Radialgeschwindigkeit der betreffenden Sterne gleich denen für weniger massige Sterne im Haufen gemessenen angenommen werden konnten. Die TRÜMLERSchen Massenwerte betragen mehrere Hundert Sonnenmassen.

CHANDRASEKHAR (10) hat darauf aufmerksam gemacht [vgl. auch CHANDRASEKHAR und BEER (13)], daß für diese massigsten Sterne das EDDINGTONSche Sternmodell versagen dürfte. Die beobachtete Leuchtkraft der allermassigsten Sterne ist erheblich geringer als nach der Masse-Leuchtkraft-Beziehung gemäß den Massen zu erwarten wäre. Bei dieser Überlegung ist zu berücksichtigen, daß die nach der Masse-Leuchtkraft-Beziehung vorausgesagte Leuchtkraft von der angenommenen chemischen Zusammensetzung abhängt. Jedoch ergibt selbst die in diesem Zusammenhang günstigste chemische Zusammensetzung eine erheblich zu große vorausgesagte Leuchtkraft (vgl. hierzu Ziffer 17).

Es ist nicht unwahrscheinlich, daß der Grund des Versagens des EDDINGTONSchen Modells in diesem extremen Fall in dem Vorhandensein einer ausgedehnten Konvektionszone im Innern der betreffenden Sterne zu suchen ist. Durch Untersuchung passender Sternmodelle läßt sich diese Vermutung prüfen.

**14. Stabilität gasförmiger Sterne.** Probleme des Aufbaus der Sterne bildeten den Gegenstand der Diskussion in den vorhergehenden Ziffern. Wenn der innere Aufbau eines Sternmodells ermittelt worden ist, erhebt sich die Frage, ob der betreffende Aufbau stabil ist.

Fälle *konvektiver Instabilität* sind bereits besprochen worden. Das Vorkommen auch ziemlich ausgedehnter Konvektionsgebiete im Sterninnern dürfte die Stabilität des Sterns als ganzen nicht gefährden, d. h. ein solcher Stern wird als normaler Stern konstanter Leuchtkraft, konstanten Spektrums und konstanten Radius beobachtet.

Es wurde bereits in einem frühen Stadium der Entwicklung der Theorie des Sterninnern von EDDINGTON erkannt, daß Sternmodelle gegenüber radialen Pulsationen instabil sein können [vgl. (17)]. Die Untersuchung der Bedingungen für *radiale Instabilität* bildet einen wichtigen Teil der Theorie des Sterninnern. Die Sternmodelle, die normale Sterne beschreiben, müssen radial stabil sein. Dagegen ist es sehr wahrscheinlich, daß eine Klasse veränderlicher Sterne [vgl. hierzu TEN BRUGGENCATE (8)], die Cepheiden, radial instabile pulsierende Sterne sind (EDDINGTONSche Pulsationstheorie der Cepheiden).

Auf die mathematische Theorie der radialen Stabilität der Sterne und die Pulsationstheorie der Cepheiden soll hier nicht näher eingegangen werden. Es sei auf die zusammenfassenden Darstellungen von EDDINGTON (17), MILNE (47) und B. STRÖMGREN (70) verwiesen, sowie auf die

dort angeführten Originalarbeiten von EDDINGTON, JEANS, VOGT, MILNE, ROSSELAND, COWLING u. a.

Die radiale Stabilität eines Sternmodells kann folgendermaßen untersucht werden. Es wird angenommen, daß eine infinitesimale radiale Pulsation des Sternmodells vorhanden ist. Sodann wird durch eine mathematische Analyse der Eigenschaften dieser Pulsationen deren Dämpfung festgestellt. Ist die Pulsation gedämpft, so ist das Sternmodell radial stabil.

EDDINGTON hat gezeigt, daß (normale Sternmaterie vorausgesetzt) in Gebieten, wo keine subatomare Energieerzeugung vorhanden ist, die Pulsationen gedämpft sind. Der Mechanismus der Dämpfung ist der, daß ein Massenelement in der Phase der größten Kompression, in der die Temperatur am höchsten ist, durch Strahlung Energie verliert, während es in der Phase der größten Expansion und niedrigsten Temperatur durch Strahlung Energie empfängt. Die Amplitude der Temperatur und der übrigen pulsierenden Größen nimmt somit zeitlich ab. Die Dämpfung ist allerdings sehr schwach. Pulsationen wie die der Cepheiden werden durch diesen Mechanismus erst nach Zehntausenden von Perioden merklich gedämpft.

Andererseits zeigte EDDINGTON, daß das Vorhandensein einer mit der Temperatur stark zunehmenden subatomaren Energieerzeugung in der entgegengesetzten Richtung des gerade beschriebenen Mechanismus wirkt, also die radiale Stabilität der Sternmodelle bedroht. In der Tat bewirkt eine mit der Temperatur zunehmende subatomare Energieerzeugung, daß der für die Temperatur maßgebende Teil des Energieinhalts eines Massenelements immer in der Phase der größten Kompression und der größten Temperatur einen Zuwachs erfährt, in der Phase größter Expansion und kleinster Temperatur dagegen eine Abnahme. Dieser Effekt wirkt in der Richtung der Zunahme der Pulsationsamplitude.

Nach den ersten Untersuchungen hatte es den Anschein, als ob selbst eine mäßige Temperaturempfindlichkeit der Energieerzeugung den Stern instabil machen würde. Da physikalisch eine starke Temperaturabhängigkeit der Energieerzeugung wahrscheinlich erschien, so bedeutete dies eine Schwierigkeit der Theorie des inneren Aufbaus normaler Sterne.

Nach Untersuchungen von COWLING (15) ist die Sachlage jedoch die, daß die Temperaturempfindlichkeit sogar sehr stark sein kann, ohne daß für normale Sternmaterie radiale Instabilität auftritt.

Bei starker Temperaturempfindlichkeit der Energieerzeugung sind die Energiequellen stark gegen das Zentrum konzentriert. Die äußeren Teile des Sterns wirken deshalb dämpfend auf die Pulsationen, während in der Nähe des Zentrums eine entgegengesetzte Wirkung vorhanden ist. Nun sind die Pulsationen durch den ganzen Stern hindurch gekoppelt, so daß, wie bereits EDDINGTON betont hat, die radiale Stabilität des Sterns von einem Stabilitätsintegral über den ganzen Stern abhängt.

Zu diesem Stabilitätsintegral tragen die äußeren und die zentralen Teile des Sterns in entgegengesetzter Richtung bei. Es kommt darauf an, welcher Einfluß der stärkste ist. COWLING hat nun gezeigt, daß für die Entscheidung dieser Frage der folgende Sachverhalt wesentlich ist. Verfolgt man für das betrachtete Sternmodell die Pulsationsamplitude vom Zentrum bis zur Oberfläche, so zeigt sich, daß die Pulsationsamplitude gegen die Oberfläche hin zunimmt. Dieses bedeutet eine Zunahme der dämpfenden Wirkung der äußeren Teile gegenüber der entgegengesetzten Wirkung der zentralen Teile im Vergleich mit dem Fall konstanter Pulsationsamplitude durch den Stern hindurch. Hierdurch wird in der Tat bewirkt, daß außer bei extrem hoher Temperaturempfindlichkeit radiale Stabilität des Sternmodells vorhanden ist. Nach COWLING muß die Energieerzeugung stärker als etwa die zwanzigste Potenz der Temperatur wachsen, um für normale Sternmaterie radiale Instabilität hervorzurufen. Bei den früheren Untersuchungen, nach denen die radiale Instabilität viel eher einsetzte, wurde die Pulsationsamplitude als durch den ganzen Stern hindurch konstant vorausgesetzt.

In den von COWLING untersuchten Sternmodellen tritt wegen der starken Konzentration der Energiequellen gegen das Zentrum Konvektion auf (vgl. Ziffer 12). Das Auftreten eines Konvektionsgebietes in der Nähe des Zentrums wurde von COWLING bei der Stabilitätsdiskussion berücksichtigt.

Sternmaterie, die ein oder mehrere Elemente größerer Häufigkeit enthält, bei denen eine Elektronenschale etwa halb ionisiert ist, unterscheidet sich in gewisser Hinsicht von normaler Sternmaterie. Das Verhältnis der spezifischen Wärmen ist hier kleiner als der normale Wert für monoatomare Gase ( $\mathcal{I} = 5/3$ ). Eine Wirkung dieses Effekts ist, daß Konvektion leichter eintritt (vgl. S. 500). Eine andere Wirkung ist die, daß radiale Instabilität eher auftritt. Es ist nicht unwahrscheinlich, daß die Pulsation der Cepheiden hiermit zusammenhängt. Die chemische Zusammensetzung sowie Temperatur und Druck im Sterninnern hätten dann für die Cepheiden kritische Werte. Systematische quantitative Untersuchungen dieser Möglichkeit liegen zur Zeit nicht vor.

Es sei noch ein in Verbindung mit der Theorie der radialen Instabilität wichtiger Sachverhalt erwähnt. Es ist möglich, daß die Abhängigkeit der Energieerzeugung von der Temperatur eine *verzögerte* ist, in dem Sinn, daß nach einer Steigerung der Temperatur die Energieerzeugung erst nach dem Verlauf einer gewissen Zeit entsprechend zunimmt. Diese Möglichkeit hat EDDINGTON diskutiert [vgl. (17) und (22)]. Wenn die Pulsationsperiode klein gegenüber der Verzögerung ist, so trägt die Temperaturempfindlichkeit der Energieerzeugung nicht mehr merklich zur radialen Instabilität bei. Es sei in diesem Zusammenhang angeführt, daß die Pulsationsperioden der Cepheiden zwischen Bruchteilen eines Tages und etwa 45 Tagen betragen. Für dichtere Sterne, wie die Sonne, ist die entsprechende Pulsationsperiode erheblich kürzer.

Abschließend sei hier noch die RUSSELLSche Bedingung für *säkulare Stabilität* erwähnt [vgl. hierzu (17)]. Die Energieerzeugung muß mindestens so stark mit Temperatur und Dichte zunehmen, daß bei einer infinitesimalen Kontraktion die Zunahme der Energieerzeugung stärker ist als die der Leuchtkraft. Wäre diese Bedingung nicht erfüllt, so würde sich der Stern dauernd zusammenziehen oder ausdehnen, und zwar größenordnungsmäßig nach der HELMHOLTZ-KELVINSchen Zeitskala (vgl. S. 520). Die Bedingung ist schon bei mäßiger Temperaturempfindlichkeit der Energieerzeugung erfüllt. Als Beispiel sei erwähnt, daß ein Stern mit radioaktiver Energieerzeugung säkular instabil wäre.

**15. Weiße Zwerge. Entartung im Sterninnern.** Die weißen Zwerge sind Sterne normaler Masse und relativ sehr kleinem Radius. Die Leuchtkraft ist viel kleiner als für normale Sterne derselben Masse. Diese Sterne fallen beobachtungsmäßig dadurch auf, daß sie weiße Sterne niedriger Leuchtkraft sind, während normale weiße Sterne hohe Leuchtkraft haben. Der Siriusbegleiter Sirius B ist ein typischer weißer Zwerg. Seine Masse beträgt 0,97 Sonnenmassen, der Radius  $\frac{1}{50}$  Sonnenradien und die Leuchtkraft  $\frac{1}{300}$  derjenigen der Sonne. Die mittlere Dichte ist folglich 120000-mal der mittleren Sonnendichte, also etwa  $170000 \text{ g cm}^{-3}$ .

Die starke Abweichung der weißen Zwerge von der Masse-Leuchtkraft-Beziehung hat EDDINGTON auf Abweichungen von der idealen Zustandsgleichung zurückgeführt, bereits bevor das Phänomen der Gasentartung entdeckt worden war. Kurz nach der Entwicklung der FERMI-Statistik zeigte FOWLER (26), daß die Materie im Innern der weißen Zwerge entartet sein müßte. Die Entartung beeinflußt naturgemäß den Aufbau in entscheidender Weise.

Ehe die Theorie der weißen Zwerge näher erörtert wird, soll ganz allgemein die Entartungsbedingung für Sternmaterie betrachtet werden. Die Entartungsbedingung lautet im Fall nichtrelativistischer Entartung folgendermaßen [vgl. hierzu (36)]. Entartung setzt ein, wenn

$$\frac{1}{\mu} \frac{\rho}{T^{3/2}} > \left( \frac{k}{m_H} \right)^{3/2} (20)^{3/2} \frac{\pi}{3} \frac{m_e^{3/2}}{h^3} m_H^{5/2} = 2,4 \cdot 10^{-8}. \quad (106)$$

Es sei vorweggenommen, daß in den weißen Zwergen Entartung bei relativ nicht sehr hoher Dichte einsetzt, bei der die Entartung in der Tat nichtrelativistisch ist [vgl. (36), Abb. 4, S. 204].

Ganz allgemein lautet die Entartungsbedingung, daß Entartung eintritt, wenn der nach der idealen Zustandsgleichung berechnete Druck

$$p_G = \frac{k}{m_H} \frac{\rho}{\mu} T \quad (\text{nichtentartetes Gas}) \quad (107)$$

kleiner ist, als der nach der Zustandsgleichung des entarteten Gases

$$\left. \begin{aligned} p_G &= \frac{8 \pi m_e^4 c^5}{3 h^3} f(x) \\ f(x) &= \frac{1}{8} [x(2x^2 - 3)(x^2 + 1)^{1/2} + 3 \sinh^{-1} x] \quad (\text{entartetes Gas}) \\ x &= \frac{h}{m_e c} \left( \frac{3}{8 \pi} \right)^{1/3} \left( \frac{1}{\mu m_H} \right)^{1/3} \rho^{1/3} \end{aligned} \right\} (108)$$

berechnete [vgl. (66) und (70)]. Nach diesem Kriterium kann die Dichte, bei der Entartung eintritt, als Funktion des relativen Strahlungsdruckes  $1-\beta$  berechnet werden. Abb. 3 zeigt das Resultat dieser Berechnung. Es geht hervor, daß oberhalb eines relativen Strahlungsdruckes von etwa 0,1 Entartung überhaupt nicht eintreten kann. Dieser von CHANDRA-

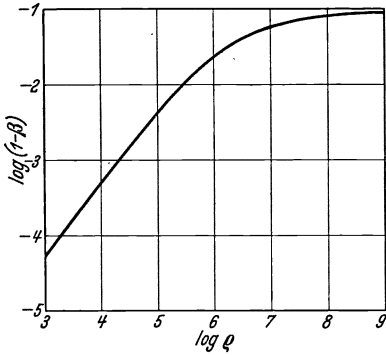


Abb. 3. Zusammenhang zwischen der Dichte, bei der Entartung eintritt, und dem relativen Strahlungsdruck  $1-\beta$  für  $\mu=1$ .

SEKHAR (11) angegebene Satz lautet genauer, daß Entartung nicht eintreten kann, wenn

$$\frac{1-\beta}{\beta} > \frac{\pi^4}{960}, \quad (109)$$

d. h. numerisch, wenn

$$1-\beta > 0,0921.$$

Die aus (106) für so hohe Werte von  $1-\beta$  abgeleiteten Entartungsdichten würden so hoch sein, daß die nur für nichtrelativistische Entartung gültige Gleichung nicht brauchbar wäre.

Es ist mit Hilfe der in Ziffer 11 besprochenen Theorie des äußeren

Teils des Sterninnern leicht zu zeigen, daß in den weißen Zwergen Entartung sehr bald eintritt, wenn man von der Oberfläche gegen das Zentrum geht [vgl. SIEDENTOPF (61)]. Die gemäß (106) für die Entartung maßgebende Größe  $\rho/(\mu T^{3/2})$  ist in dem äußeren Teil der Sterne nach (99) und (100) mit  $s=3,5$  dadurch charakterisiert, daß

$$\frac{1}{\mu} \frac{\rho}{T^{3/2}} \propto \mu^{1,25} M^{2,25} L^{-0,5} R^{-1,75} \left( \frac{R-r}{R} \right)^{1,75}. \quad (110)$$

Da in den weißen Zwergen sowohl  $L$  wie  $R$  sehr klein sind, wird diese Größe in der Tat schnell so groß, daß gemäß (106) Entartung eintritt.

Es seien zur Erläuterung die folgenden Zahlenwerte angeführt. Für Sirius B tritt Entartung ein in der relativen Tiefe unter der Oberfläche  $(R-r)/R = 0,04$ . Hier ist die Temperatur  $20 \cdot 10^6$  Grad und die Dichte  $3000 \text{ g cm}^{-3}$ . Der relative Strahlungsdruck ist  $1-\beta = 10^{-4}$ .

Bei nichtrelativistischer Entartung ist [vgl. (70)]

$$\left. \begin{aligned} \rho_G &= K_1 \left( \frac{\rho}{\mu} \right)^{5/3} \\ K_1 &= 9,9 \cdot 10^{12} \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

In dem nichtrelativistisch entarteten Teil eines weißen Zwergs gilt folglich, indem der relative Strahlungsdruck verschwindend klein ist,

$$P = \text{const} \cdot \rho^{5/3}. \quad (112)$$

Diese Weggleichung führt in Verbindung mit den Grundgleichungen (1) und (2) zu einem Aufbau nach einer EMDEN-Polytrope mit dem Polytropenindex  $n=3/2$ . Die Theorie der weißen Zwerge auf Grund der Zustandsgleichung (111) wurde von MILNE (48) entwickelt.

Für weiße Zwerge kleiner Masse ergibt sich, daß die zentralen Dichten unterhalb derjenigen Grenze liegen, bei der relativistische Entartung einsetzt, so daß für diese die von MILNE entwickelte Theorie genau gültig ist. Die Theorie der weißen Zwerge ist nach der allgemeingültigen Zustandsgleichung (108) für ein entartetes Gas von CHANDRASEKHAR (9) entwickelt worden.

Es soll hier nicht auf die mathematischen Entwicklungen der Theorie der weißen Zwerge eingegangen werden [man vergleiche hierzu die angeführten Arbeiten von MILNE und CHANDRASEKHAR sowie (70)]. Es sollen nur die wichtigsten Ergebnisse der Untersuchungen besprochen werden.

Die nichtentartete Zone ist bei den weißen Zwergen so wenig ausgedehnt, daß die weißen Zwerge zunächst als vollständig entartete Gebilde zu beschreiben sind. Wichtige Eigenschaften dieser Gebilde gehen aus der folgenden auf der Theorie von CHANDRASEKHAR beruhenden Tabelle hervor. Die Tabelle gibt zusammengehörnde Werte der Masse  $M$ , des Radius  $R$ , der mittleren Dichte  $\rho_m$ , der zentralen Dichte  $\rho_c$ , sowie des Verhältnisses  $\rho_c/\rho_m$ , das den Grad der Konzentration der Masse gegen das Sternzentrum mißt. Diese Größen sind als Funktionen eines Parameters  $1/\gamma_0^2$  gegeben, dessen mögliche Werte zwischen 0 und 1 liegen. Auf die Bedeutung des Parameters brauchen wir hier nicht einzugehen.

Tabelle 10.

$\frac{1}{\gamma_0^2}$	$M \mu^2$ (Einheit Sonnenmasse)	$R \mu$ (Einheit Sonnenradius)	$\rho_m \mu^{-1}$ (Einheit $g\text{ cm}^{-3}$ )	$\rho_c \mu^{-1}$ (Einheit $g\text{ cm}^{-3}$ )	$\frac{\rho_c}{\rho_m}$
0,00	5,7	0	$\infty$	$\infty$	54,2
0,02	5,3	0,0078	$1,6 \cdot 10^7$	$3,4 \cdot 10^8$	21,5
0,1	4,3	0,014	$2,1 \cdot 10^6$	$2,7 \cdot 10^7$	12,6
0,2	3,5	0,018	$8,0 \cdot 10^5$	$8,0 \cdot 10^6$	9,9
0,4	2,4	0,025	$2,3 \cdot 10^5$	$1,8 \cdot 10^6$	7,9
0,6	1,6	0,031	$7,7 \cdot 10^4$	$5,4 \cdot 10^5$	7,0
0,8	0,9	0,040	$1,9 \cdot 10^4$	$1,2 \cdot 10^5$	6,4
1,0	0	$\infty$	0	0	6,0

Zunächst sieht man, daß vollständig entartete weiße Zwerge nur mit Massen unterhalb einer gewissen *Grenzmasse*  $5,7 \mu^{-2}$  Sonnenmassen möglich sind. Sodann geht hervor, daß (für ein und dasselbe mittlere Molekulargewicht  $\mu$ ) zwischen Masse und Radius ein eindeutiger Zusammenhang besteht. Der Radius nimmt mit wachsender Masse ab. Die mittlere Dichte sowie die zentrale Dichte nehmen mit wachsender Masse zu.

Für größere Massen ist die Dichte im größten Teil des Sterns so hoch, daß relativistische Entartung vorhanden ist. Bei nichtrelativistischer Entartung ist, wie erwähnt  $P \propto \rho^{5/3}$ , und der Aufbau durch eine Polytrope des Index  $n = 3/2$  gegeben. Bei relativistischer Entartung ist  $P \propto \rho^{4/3}$

[vgl. (36)], der Polytropenindex also  $n = 3$ . Im Grenzfall sehr kleiner Masse ist der Aufbau folglich polytrop mit  $n = 3/2$ , im entgegengesetzten Grenzfall, in dem die Masse sehr nahe der Grenzmasse  $5,7 \mu^{-2}$  ist, ist der Aufbau ebenfalls polytrop, mit  $n = 3$ . Die Grenzwerte des Verhältnisses  $\rho_c/\rho_m$ , nämlich 6,0 und 54,2 entsprechen diesen beiden Fällen.

Die Temperatur im Innern der weißen Zwerge ist, wie MILNE (48) betont hat, von derselben Größenordnung wie in normalen Sternen. In dem oben betrachteten Beispiel des Siriusbegleiters war die Temperatur an der Grenzschicht, wo Entartung einsetzt,  $20 \cdot 10^6$  Grad. Nachdem Entartung eingetreten ist, ist die effektive Opazität sehr klein (vgl. S. 487), weshalb gemäß (40) die Temperatur im entarteten Gebiet nur noch sehr wenig zunimmt. Es sei hier noch hervorgehoben, daß der Aufbau des entarteten Kerns von der Temperaturverteilung unabhängig ist, da die Temperatur in die Zustandsgleichung nicht eingeht. Insbesondere folgt, daß der Aufbau der weißen Zwerge von der für die Temperaturverteilung maßgebenden Verteilung der Energiequellen im Stern [vgl. Gl. (49)] unabhängig ist.

Nachdem die Diskussion vollständig entarteter Kerne durchgeführt ist, hat eine Diskussion der Konfigurationen zu erfolgen, die aus entarteten Kernen, von nichtentarteten Hüllen verschiedener Dicke umgeben, bestehen. Eine solche Diskussion hat CHANDRASEKHAR (9) durchgeführt. Von den Ergebnissen seien die folgenden erwähnt. Betrachten wir den Fall konstanter Masse (und konstanten mittleren Molekulargewichts  $\mu$ ). Bei sehr kleiner Leuchtkraft ist fast der ganze Stern entartet. Mit zunehmender Leuchtkraft wächst die relative Dicke  $h/R$  der nichtentarteten Hülle. Der Radius der ganzen Konfiguration bleibt lange nahe unverändert, die mittlere Dichte also fortgesetzt sehr hoch. Erst bei relativ großer Leuchtkraft, für Konfigurationen der Sonnenmasse beträchtlich größer als die der Sonne, wächst der Radius etwas schneller; es verschwindet dann aber der entartete Kern, indem noch bei relativ sehr kleinem Radius ein Übergang zu einem normalen überall ideal gasförmigen Stern stattfindet. Nur in Sternen mit relativ sehr kleinem

Radius kann also Entartung eintreten. Aus dieser Diskussion geht nochmals hervor, daß die weißen Zwerge mit ihren für die Masse sehr kleinen Leuchtkräften sehr nahe vollkommen entartet sind.

Die nebenstehende Tabelle erläutert das soeben Dargestellte. Sie gibt für einen Stern mit Werten der Masse und des Radius, die sehr nahe denen des Siriusbegleiters entsprechen, zusammengehörende Werte der relativen Dicke  $h/R$

Tabelle II.

$\frac{h}{R}$	$\frac{R}{R_{\odot}}$	Abs. Größenklasse	$T_e$
0,02	0,0192	15,3 <sup>m</sup>	3600°
0,07	0,0196	9,6	13000
0,11	0,0200	7,5	21000
0,15	0,0203	6,0	30000
0,19	0,0207	5,0	37000
0,24	0,0213	4,1	46000

der nichtentarteten Hülle, des Sternradius und der Leuchtkraft, durch die absolute Größenklasse ausgedrückt (die absolute Größenklasse der



Sonne ist  $+4,7^m$ , die des Siriusbegleiters  $\text{II},0^m$  sowie der aus dem Radius und der Leuchtkraft abzuleitenden effektiven Temperatur  $T_e$  (Oberflächentemperatur).

Die Beziehung zwischen der Masse und dem Radius für völlig entartete Sterne entspricht der Masse-Leuchtkraft-Beziehung für ideal gasförmige Sterne. Allgemein gilt, daß die betreffende Beziehung eine Beziehung zwischen Masse, Radius und Leuchtkraft ist. Für ideal gasförmige Sterne ist diese dadurch charakterisiert, daß die Beziehung zwischen Masse und Leuchtkraft nur wenig vom Radius abhängt (vgl. S. 497). Für Sterne mit entartetem Kern hängt dagegen die Beziehung zwischen Masse und Radius nur sehr wenig, im Grenzfall praktisch vollkommener Entartung praktisch überhaupt nicht, von der Leuchtkraft ab.

Wenn der relative Strahlungsdruck  $1 - \beta$  größer als 0,0921 ist, so kann, wie S. 506 erwähnt, Entartung nicht eintreten. Für das EDDINGTONSche Sternmodell bedeutet dies, daß Entartung für Sterne mit Massen oberhalb der *Grenzmasse*  $6,6 \mu^{-2}$  Sonnenmassen überhaupt nicht vorkommen kann. Für andere Sternmodelle ergeben sich ähnliche Werte der Grenzmasse. Oberhalb der Grenzmasse  $5,7 \mu^{-2}$  Sonnenmassen sind, wie wir gesehen haben, vollkommen entartete Sterne nicht möglich. Im Massenbereich zwischen  $5,7 \mu^{-2}$  Sonnenmassen und  $6,6 \mu^{-2}$  Sonnenmassen sind Konfigurationen mit entartetem Kern und nichtentarteter Hülle möglich.

Wir werden auf die weißen Zwerge im Zusammenhang mit Problemen der Sternentwicklung in Ziffer 19 noch zurückkommen.

## II. Die chemische Zusammensetzung des Sterninnern.

**16. Die chemische Zusammensetzung der Sterne. Der Satz von VOGT und RUSSELL.** In Ziffer 4 wurde über den Satz von VOGT und RUSSELL berichtet, daß Radius und Leuchtkraft sowie der ganze innere Aufbau eines Sterns durch die Masse des Sterns und seine chemische Zusammensetzung gegeben sind. Es soll jetzt auf die Frage des Vergleichs der Konsequenzen dieses Satzes mit den Beobachtungen eingegangen werden.

Es sei für einen Augenblick vorausgesetzt, daß alle Sterne dieselbe chemische Zusammensetzung hätten. Dann wären Radius und Leuchtkraft nach dem Satz von VOGT und RUSSELL Funktionen der Masse allein. Auch die effektive Temperatur und die Spektralklasse wären Funktionen der Masse allein. Denn aus der Leuchtkraft  $L$  und dem Radius  $R$  folgt direkt die Ausstrahlung pro Oberflächeneinheit, und aus letzterer nach dem STEFANSchen Gesetz definitionsgemäß die effektive Temperatur  $T_e$ :

$$\sigma T_e^4 = \frac{L}{4\pi R^2} \quad (\text{II3})$$

$\sigma = 5,71 \cdot 10^{-5}$ , STEFANSche Konstante.

Ferner ist das Spektrum eine Funktion der effektiven Temperatur und der durch die Masse und den Radius gegebenen Schwerebeschleunigung auf der Oberfläche des Sterns.

Um die soeben abgeleiteten Konsequenzen der Annahme konstanter chemischer Zusammensetzung an den Beobachtungen zu prüfen, betrachten wir das HERTZSPRUNG-RUSSELL-Diagramm (H.-R.-Diagramm).

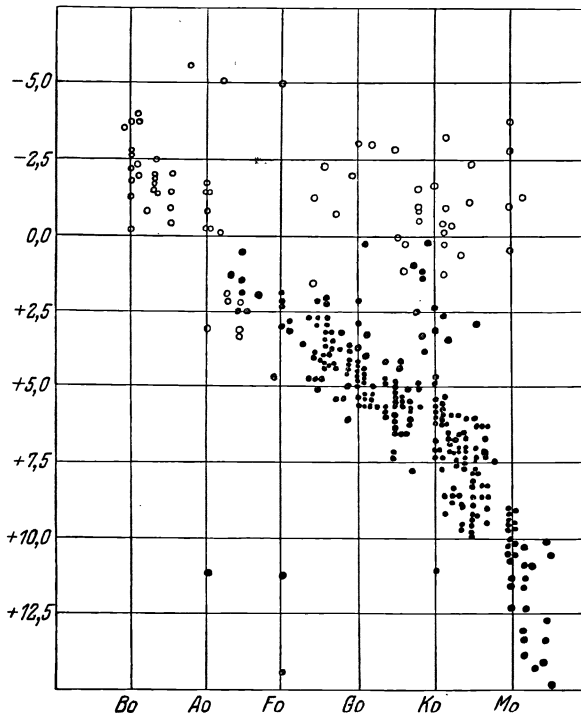


Abb. 4. HERTZSPRUNG-RUSSELL-Diagramm der Sterne näher als 20 parsec (schwarze Punkte) und heller als die dritte scheinbare Größenklasse (offene Kreise). (Nach RUSSELL-DUGAN-STEWART: Astronomy).

Dieses gibt ein Bild der Verteilung der Spektralklassen und der Leuchtkräfte der Sterne [vgl. hierzu HESS (35)], indem einem Stern ein Punkt im Diagramm zugeordnet wird, dessen Abszisse durch die Spektralklasse und dessen Ordinate durch die absolute Größenklasse gegeben ist (vgl. Abb. 4). Jedem Punkt im H.-R.-Diagramm entspricht ein bestimmter Wert der effektiven Temperatur (der in der Hauptsache durch die Spektralklasse gegeben ist) und des Radius, der sich gemäß (113) aus der Leuchtkraft und der effektiven Temperatur ergibt. Die Kurven konstanten Radius im H.-R.-Diagramm verlaufen von oben links schräg nach unten rechts. Der Radius nimmt von unten links nach oben rechts hin zu.

Abb. 4 gibt einen Eindruck der beobachteten Verteilung der Sterne im H.-R.-Diagramm. Die Mehrzahl der Sterne gehört der *Hauptreihe*

an, die sich von den A-Sternen der absoluten Größenklasse  $1^m$  bis zu den absolut schwachen M-Sternen erstreckt. Ein kleiner Teil fällt in die Fortsetzung der Hauptserie nach den B-Sternen. Ein anderer kleinerer Teil bildet den um die absolute Größenklasse  $0^m$  verlaufenden *Riesenast*. Zwischen der Hauptserie und dem Riesenast bemerkt man bei den Spektralklassen *G* und *K* die sog. Unterriesen. Die weißen Zwerge erscheinen im H.-R.-Diagramm unten links.

Die oben aus der Annahme konstanter chemischer Zusammensetzung abgeleiteten Konsequenzen lassen sich folgendermaßen ausdrücken: Im H.-R.-Diagramm müssen die Sterne eine eindimensionale Serie bilden. Der Parameter, der die Lage in der Serie festlegt, ist die Masse.

Würde man im H.-R.-Diagramm nur die Hauptserie berücksichtigen und außerdem von der Streuung der Sterne der Hauptserie absehen, so hätte man in der Tat Übereinstimmung mit dieser Voraussage. Die Streuung um die Hauptserie und namentlich das gleichzeitige Vorhandensein der Fortsetzung der Hauptserie nach den B-Sternen und des Riesenastes, sowie der Unterriesen, zeigen jedoch, daß die Voraussage durchaus nicht in Übereinstimmung mit den Beobachtungen ist.

Der Sachverhalt wird noch deutlicher, wenn man die (für Komponenten in Doppelsternsystemen) beobachteten Massen heranzieht. Die Radien der Sterne gleicher Masse streuen gemäß diesen Daten innerhalb eines ziemlich weiten Bereiches [vgl. das in (36) nach PILOWSKI angegebene Diagramm, Abb. 10, sowie unsere Abb. 6].

Der Schluß, den man aus dem Angeführten ziehen muß, ist, wie zuerst von RUSSELL (58) betont, der, daß die chemische Zusammensetzung der Sterne nicht von Stern zu Stern konstant ist, sondern in einer Weise variiert, die für den inneren Aufbau von wesentlicher Bedeutung ist.

Es entsteht somit die Frage, in welcher Hinsicht sich die chemischen Zusammensetzungen der Sterne unterscheiden. Diese Frage ist unter Berücksichtigung des in Ziffer 4 besprochenen Einflusses der chemischen Zusammensetzung auf den Aufbau zu diskutieren. Die chemische Zusammensetzung beeinflußt das mittlere Molekulargewicht, die Opazität und die Energieerzeugung im Sterninnern.

Einen Ausgangspunkt für die Diskussion der chemischen Zusammensetzung des Sterninnern hat man in den aus der Analyse der Sternspektren ermittelten chemischen Zusammensetzungen der *Sternatmosphären* [vgl. PAYNE (53) und KLÜBER (37)]. Die Zusammensetzung einer Sternatmosphäre unterscheidet sich wahrscheinlich von derjenigen im Sterninnern, indem eine Tendenz der Sedimentierung der schwereren Elemente gegen das Zentrum besteht. Diese Tendenz ist jedoch im Sterninnern wegen der starken Ionisation der Elemente nicht sehr ausgeprägt [vgl. hierzu (28), S. 36]. Es kommt hinzu, daß im allgemeinen im Sterninnern langsame ausgedehnte Mischungsströmungen vorhanden sind, die in der Rotation der Sterne ihre primäre Ursache haben [vgl. EDDINGTON (17)]. Es ist wahrscheinlich, daß Wasserstoff und Helium

in der Sternatmosphäre relativ etwas häufiger sind als im Sterninnern. Für die schwereren Elemente dürfte das Mischungsverhältnis im Sterninnern nicht sehr von demjenigen in der Atmosphäre verschieden sein.

Aus diesen Überlegungen in Verbindung mit den Beobachtungsergebnissen für die Sternatmosphären schließt man, daß im Sterninnern drei Gruppen von Elementen wesentlich sind: Wasserstoff, Helium und die schwereren Elemente zwischen Kohlenstoff und Eisen. Die noch schwereren Elemente dürften auch im Sterninnern nur in kleinen Mengen vorkommen. Für die folgenden Überlegungen hat dies nur insofern wesentliche Bedeutung, als es einen merklichen Einfluß der natürlich radioaktiven Elemente auf den Sternaufbau ausschließt.

Das Mischungsverhältnis der Elemente zwischen Kohlenstoff und Eisen ist für den Sternaufbau nicht sehr wesentlich. Die starke Ionisierung gleicht gewissermaßen die Unterschiede zwischen den Elementen aus, wie zuerst EDDINGTON gezeigt hat. Das mittlere Molekulargewicht  $\mu$  dieser Elemente in hochionisiertem Zustand ist für alle Elemente ungefähr gleich 2 (vgl. Ziffer 5). Die Wirkung der vorhandenen schwachen Zunahme von  $\mu$  mit der Atomnummer auf den Sternaufbau wird durch die Wirkung der schwachen Zunahme der Opazität mit der Atomnummer (vgl. Ziffer 6) sehr nahe kompensiert. Es erscheint als eine durchaus genügende Näherung, wenn man für das Mischungsverhältnis dieser Elemente das von RUSSELL (59) für die Sonnenatmosphäre ermittelte annimmt (RUSSELL-Mischung, vgl. S. 481).

Das Verhalten von Wasserstoff und Helium ist von dem der soeben diskutierten schweren Elemente verschieden. Für hochionisierten Wasserstoff ist das mittlere Molekulargewicht  $1/2$ , für hochionisiertes Helium  $4/3$  (vgl. Ziffer 5). Ferner ist für Wasserstoff und Helium die Opazität relativ sehr gering (vgl. Ziffer 6). Schließlich mögen die Wasserstoffkerne und die Heliumkerne eine andere Wirkung auf die Energieerzeugung haben als die schwereren Kerne.

Schließlich sei die Möglichkeit diskutiert, daß ein wenig häufiges Element den Aufbau merklich beeinflussen könnte. Wenig häufige Elemente können das mittlere Molekulargewicht nicht beeinflussen. Die einzigen Partikeln, die bei geringer Häufigkeit die effektive Opazität beeinflussen können, sind (wegen ihrer großen freien Weglänge) die Neutronen [vgl. FLÜGGE (25)]. Der Neutronengehalt im Sterninnern muß aber außerordentlich klein sein (vgl. S. 523), so klein, daß diese Wirkung zu vernachlässigen ist. Was die Energieerzeugung betrifft, so gilt, daß ein wenig häufiges Element, daß die Energieerzeugung merklich beeinflußt, im Sterninnern schnell verbraucht werden würde, wenn es nicht durch Elementumwandlung nachgeliefert würde (vgl. Ziffer 18). In einem solchen Fall wäre die Häufigkeit des betreffenden Elements aber als ein sekundärer Parameter anzusehen, der von derjenigen eines häufigen Elements als primären Parameter abhinge.

Zusammenfassend kann also behauptet werden, daß aus der beobachteten Verteilung der Sterne im H.-R.-Diagramm nach dem Satz von VOGT und RUSSELL auf Unterschiede in der chemischen Zusammensetzung der Sterne geschlossen werden kann. Die Unterschiede sind mit großer Wahrscheinlichkeit Unterschiede in der relativen Häufigkeit von 1. Wasserstoff, 2. Helium und 3. der Gruppe der schwereren Elemente zwischen Kohlenstoff und Eisen.

**17. Die chemische Zusammensetzung der Sterne. Die Masse-Leuchtkraft-Beziehung.** In Ziffer 9 haben wir gesehen, daß die Masse-Leuchtkraft-Beziehung eine Gleichung zwischen der Sternmasse  $M$ , dem Sternradius  $R$ , der Leuchtkraft  $L$ , sowie den von der chemischen Zusammensetzung abhängigen beiden Größen  $\mu$  und  $\kappa_0$ , dem mittleren Molekulargewicht und dem Koeffizienten im Opazitätsgesetz, darstellt.

Es ist unmittelbar klar, daß die Masse-Leuchtkraft-Beziehung für solche Sterne, für die beobachtete Werte der Masse, des Radius und der Leuchtkraft vorliegen, dazu verwendet werden kann, um Aufschlüsse über die chemische Zusammensetzung zu gewinnen. Ehe auf dieses Problem genauer eingegangen wird, sollen einige allgemeine Bemerkungen über die Verwendung der Masse-Leuchtkraft-Beziehung vorausgeschickt werden.

Als EDDINGTON zuerst die Masse-Leuchtkraft-Beziehung aufgestellt hatte, war die Sachlage die folgende [vgl. hierzu die Berichte (78) und (28)]. Es erschien wahrscheinlich, daß Wasserstoff und Helium nur einen kleinen Bruchteil der gesamten Sternmasse ausmachten. Infolgedessen wurde ein mittleres Molekulargewicht von etwa 2 angenommen, und diesem Wert erhebliches Vertrauen geschenkt. Die Masse-Leuchtkraft-Beziehung wurde sodann zunächst für eine Bestimmung von  $\kappa_0$  verwendet. Die Konstante  $\kappa_0$  wurde mit Hilfe der Beobachtungsdaten für Capella A bestimmt. Es zeigte sich sodann, daß dieser Wert von  $\kappa_0$  die Leuchtkräfte der übrigen Sterne mit zuverlässigen Massen ziemlich genau reproduzieren konnte. Der so ermittelte Wert von  $\kappa_0$  war allerdings etwa 40-mal größer als der theoretische aus der KRAMERSSchen Theorie der Absorption von Röntgenstrahlung abgeleitete (vgl. S. 484). Es schien aber damals, daß der theoretische Wert nicht genügend sicher war, um zu einer Revision der Grundlage der Berechnung von  $\kappa_0$  aus der Masse-Leuchtkraft-Beziehung zu zwingen.

Nachdem durch die Quantenmechanik eine Berechnung der Opazität der Sternmaterie ermöglicht worden war, die unbedingt Vertrauen verdiente, änderte sich die Lage allmählich. Es kam hinzu, daß es sich herausgestellt hatte, daß in den Sternatmosphären der Wasserstoff außerordentlich häufig war [vgl. MCCREA (44), RUSSELL (59) und UNSÖLD (75)]. Es erschien in der Tat nicht unwahrscheinlich, daß Wasserstoff einen beträchtlichen Teil der gesamten Sternmasse ausmache. Jedenfalls konnte nicht behauptet werden, daß das mittlere Molekulargewicht bestimmt sehr nahe gleich 2 sei.

EDDINGTON hatte bereits früher hervorgehoben [vgl. (17)], daß die Unstimmigkeit der physikalisch und astronomisch berechneten Werte der Opazität durch die Annahme eines beträchtlichen Wasserstoffgehalts im Sterninnern behoben werden konnte. In der soeben beschriebenen veränderten Lage erschien diese Annahme als die einzig mögliche. EDDINGTON (21) und B. STRÖMGREN (69) benutzten sodann die Masse-Leuchtkraft-Beziehung in der Weise, daß die Opazität gemäß den physikalischen Berechnungen angenommen, und das mittlere Molekulargewicht aus der Beziehung bestimmt wurde. Aus dem so ermittelten mittleren Molekulargewicht ergab sich der Wasserstoffgehalt (ein mittleres Molekulargewicht von etwa 2 entspricht dem Wasserstoffgehalt Null, ein mittleres Molekulargewicht  $1/2$  reinem Wasserstoff). Für die Sonne, Sirius A und Capella A fanden EDDINGTON und B. STRÖMGREN übereinstimmend ein mittleres Molekulargewicht gleich etwa 1 und Wasserstoffgehalte zwischen 30 und 40% der Sternmasse. Dieses bedeutet, daß für diese Sterne die Wasserstoffkerne im Sterninnern etwa 10-mal so zahlreich sind wie die Atomkerne aller schwereren Elemente zusammen.

Es soll jetzt auf das Problem der Bestimmung des Wasserstoffgehalts aus beobachteten Werten der Sternmasse, der Sternradien und der Leuchtkräfte mit Hilfe der Masse-Leuchtkraft-Beziehung näher eingegangen werden. Hierbei setzen wir zunächst voraus, daß der Heliumgehalt nicht sehr groß ist, so daß wir gemäß den Erörterungen der vorigen Ziffer die Sternmaterie als eine Mischung von Wasserstoff und der RUSSELL-Mischung annehmen dürfen.

Es sei ein Stern mit gegebenen beobachteten Werten der Masse  $M$  und des Radius  $R$  vorgelegt. Wir machen den hypothetischen Ansatz, daß jedes Gramm Sternmaterie  $X$  Gramm Wasserstoff und  $1 - X$  Gramm der RUSSELL-Mischung enthält. Dann kann das mittlere Molekulargewicht  $\mu$  nach Ziffer 5 [vgl. Gleichung (65)] und der Koeffizient  $\kappa_0$  des Opazitätsgesetzes nach Ziffer 6 [vgl. Gleichung (70)] als Funktion von Temperatur und Dichte berechnet werden. Die Größen  $\mu$  und  $\kappa_0$  variieren nur wenig durch den Stern hindurch. Mit Hilfe der Temperaturen und Dichten des EDDINGTONSchen Sternmodells werden für den betreffenden Stern passende Mittelwerte von  $\mu$  und  $\kappa_0$  sowie der Wert von  $\beta$  berechnet. (Es sei bemerkt, daß etwa nach dem Punktquellenmodell berechnete Werte dieser Größen sehr nahe dieselben sind). Mit Hilfe der Masse-Leuchtkraft-Beziehung [vgl. (97)] kann nun aus  $M, R, \mu, \beta$  und  $\kappa_0$  die Leuchtkraft  $L$  berechnet werden. Jedem angenommenen hypothetischen Wert des Wasserstoffgehaltes entspricht somit ein vorausgesagter Wert der Leuchtkraft  $L$ . Es ist sodann klar, daß der Wert des Wasserstoffgehalts variiert werden soll, bis Übereinstimmung zwischen dem vorausgesagten Wert der Leuchtkraft und dem beobachteten vorhanden ist.

Abb. 5 illustriert diesen Sachverhalt. Die Kurve zeigt die Differenz der beobachteten absoluten Größenklasse und der nach der Masse-Leuchtkraft-Beziehung vorausgesagten als Funktion des angenommenen

Wasserstoffgehalts. Der Abstand der gestrichelten Linien entspricht der von der Unkenntnis der Verteilung der Energiequellen herrührenden maximalen Unsicherheit (vgl. S. 497).

Für  $X = 0$  (kein Wasserstoff) ist die berechnete Größenklasse über 4 Größenklassen heller als die beobachtete. Mit zunehmendem  $X$  nimmt die berechnete Leuchtkraft zunächst ab, bis  $X$  etwas größer als 0,8. Dieses folgt aus der Abnahme des Molekulargewichts  $\mu$  [vgl. (97)]. Sodann erfolgt wieder eine Zunahme der berechneten Leuchtkraft. Das Molekulargewicht nimmt zwar immer noch ab, die Wirkung dieser Abnahme wird aber durch die aus der Abnahme des Gehalts an schwereren Elementen folgende Abnahme der Opazität mehr als kompensiert.

Es geht aus Abb. 5 hervor, daß das Problem zwei Lösungen hat, d. h. daß zwei verschiedene Wasserstoffgehalte Übereinstimmung zwischen berechneter und beobachteter Leuchtkraft ergeben. Die der Abb. 5 entsprechenden beiden Lösungen sind  $X = 33\%$  und  $X = 99,5\%$ .

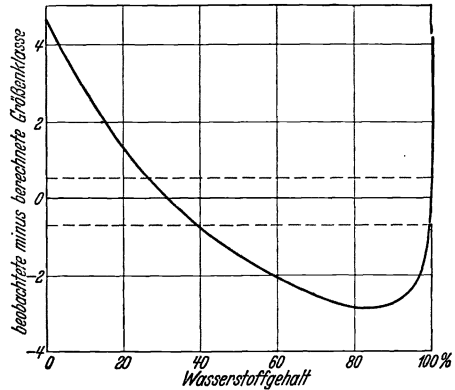


Abb. 5. Vorausgesagte Leuchtkraft der Sonne als Funktion des angenommenen Wasserstoffgehalts. [A. S. EDDINGTON: Monthly Not. 92, 476 (1932)].

Die letztgenannte Lösung entspricht einem Stern mit extrem hohem Wasserstoffgehalt. Es ist nicht wahrscheinlich, daß sie der Wirklichkeit entspricht. Aus den Überlegungen S. 511 geht hervor, daß der Wasserstoffgehalt in der Atmosphäre jedenfalls nicht kleiner sein kann als im Sterninnern. Die extreme Lösung führt also zu einem Wasserstoffgehalt der Sonnenatmosphäre von mindestens 99,5%, der nach der auf den Beobachtungen des Absorptionsspektrums gegründeten Analyse der chemischen Zusammensetzung unwahrscheinlich erscheint. Wir nehmen im folgenden bis auf weiteres an, daß die nicht extreme Lösung die richtige ist.

Wegen des Verlaufs der in Abb. 5 für die Sonne gezeigten Kurve für andere Sterne vergleiche man (69) und (70).

Auf Grund des vorhandenen zuverlässigen Materials von Massen, Radien und Leuchtkräften (40 Sterne) hat B. STRÖMGREN (69) nach dem dargestellten Verfahren die entsprechenden Wasserstoffgehalte berechnet. Bei der Diskussion dieser Werte erhebt sich zunächst die Frage, ob die Daten durch die Annahme einer konstanten chemischen Zusammensetzung dargestellt werden können, oder ob Änderungen der chemischen Zusammensetzung angezeigt sind.

Die Daten für die Sonne, Sirius A und Capella A können, wie erwähnt, durch einen Wasserstoffgehalt von etwa 35% dargestellt werden. Für

das ganze Material ergeben sich aber, wenn man es mit diesem Wasserstoffgehalt darzustellen versucht, Abweichungen (beobachtete minus berechnete Größenklasse) bis  $+3^m$  bzw.  $-4^m$ , also Abweichungen in der Leuchtkraft, die durch Faktoren bis etwa 50 charakterisiert sind, und zwar haben diese Abweichungen systematischen Charakter. Wenn auch die Möglichkeit systematischer Fehler im benutzten Beobachtungsmaterial

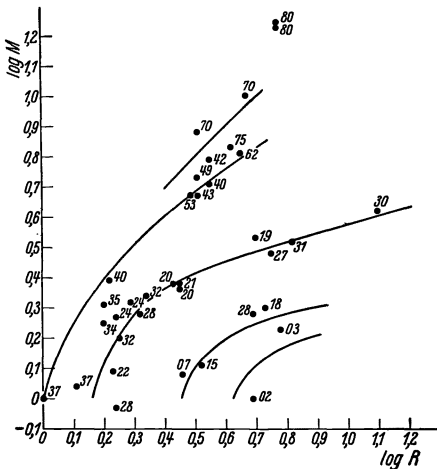


Abb. 6. Aus Masse, Radius und Leuchtkraft berechneter Wasserstoffgehalt  $X$  (in Einheiten von 0,01) als Funktion von  $\log R$  und  $\log M$ . Gemäß den ermittelten Werten von  $X$  sind Kurven konstanten Wasserstoffgehalts eingezeichnet worden. [B. STRÖMGREN: Z. Astrophysik 7, 237 (1933)].

vorliegt, so ist es kaum denkbar, daß sie so hohe Beträge erreichen könnten. Die Diskussion der beobachteten Massen, Radien und Leuchtkräfte gemäß der Masse-Leuchtkraft-Beziehung führt also zu demselben Resultat wie die in Ziffer 16 besprochene Diskussion auf Grund des Satzes von VOGT und RUSSELL. Die Sterne unterscheiden sich in bezug auf ihre chemische Zusammensetzung in einer für den inneren Aufbau wesentlichen Weise. Wir gehen jetzt dazu über, die Resultate der beiden Diskussionen miteinander zu verknüpfen.

Betrachten wir Sterne der gleichen Masse, etwa der Sonnenmasse. Die beobachteten Radien dieser Sterne streuen in einem ziemlich weiten Bereich, zwischen etwa 1 und 5 Sonnenradien. Nach dem Satz von VOGT und RUSSELL wurde hieraus geschlossen, daß die chemische Zusammensetzung dieser Sterne in systematischer Weise mit dem Radius variiert. Dieser Schluß kann nun mit Hilfe des Materials von Wasserstoffgehalten geprüft werden. Es ergibt sich in der Tat aus diesem Material folgendes. Für Sterne gleicher Masse *nimmt der Radius mit abnehmendem Wasserstoffgehalt zu*. Dies geht aus Abb. 6 hervor, in der berechnete Wasserstoffgehalte in einem  $\log M$ - $\log R$ -Diagramm dargestellt sind. Durch eine Ausgleichung der in Abb. 6 dargestellten Werte des Wasserstoffgehalts kann man den Zusammenhang zwischen Wasserstoffgehalt und Radius für verschiedene Werte der Masse ermitteln. Auf dieser Grundlage kann man sodann Kurven gleichen Wasserstoffgehalts und Kurven gleicher Masse im H.-R.-Diagramm berechnen [vgl. hierzu (69)]. In gewissen Gebieten des H.-R.-Diagramms fehlen allerdings zuverlässige Massen, so namentlich für die K- und M-Riesen, so daß die Kurven hier fehlen. Ferner ist die für die Berechnung des Wasserstoffgehalts erforderliche Theorie der Ionisation und der Opazität für dichte Sterne noch nicht entwickelt worden. Deshalb fehlen die Kurven auch im Gebiet



der dichten Sterne unten rechts im H.-R.-Diagramm. Die Kurven gleichen Wasserstoffgehalts und gleicher Masse zeigt Abb. 7.

Mit Hilfe dieser Kurven läßt sich jetzt die beobachtete statistische Verteilung der Sterne im H.-R.-Diagramm interpretieren, d. h. aus dieser Verteilung kann die entsprechende Verteilung der Massen und Wasserstoffgehalte abgeleitet werden. Die wichtigsten der auf diese Weise abgeleiteten Ergebnisse sind die folgenden. Die Hauptreihe bis zur Spektralklasse A, die, wie erwähnt, die große Mehrzahl aller Sterne enthält, wird von Sternen unterhalb der Masse 2,5 gebildet, deren Wasserstoffgehalte relativ wenig

um einen Mittelwert von 35% streuen, etwa im Bereich 25 bis 45%. Sterne kleiner Masse mit kleinem Wasserstoffgehalt sind relativ selten, sie kommen jedoch als Unterriesen der Spektralklassen G und K vor. Die Lücke zwischen den M-Riesen und den M-Zwergen der Hauptserie rührt daher, daß auch nicht die Sterne kleinsten Wasserstoffgehalts in dieses Gebiet hineinstreuen. Bei den massigen Sternen kommen Wasserstoffge-

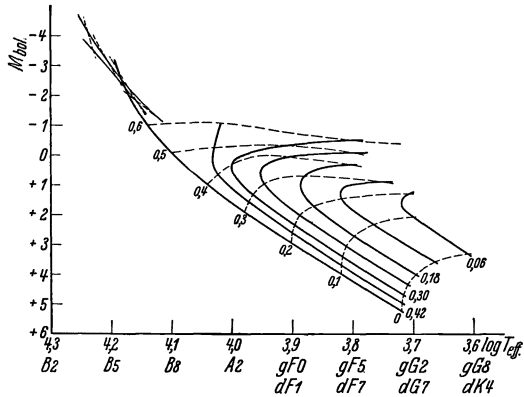


Abb. 7. Kurven konstanter Masse (gestrichelte Kurven,  $\log M = 0,1$  bis  $0,6$ ) und Kurven konstanten Wasserstoffgehalts (voll ausgezogene Kurven,  $X = 0,42, 0,36$  bis  $0,06$ ) im H.-R.-Diagramm. Oben links liegen die Kurven für  $\log M$  zwischen  $0,7$  und  $1,0$  und  $X$  zwischen  $0,4$  und  $0,7$  sehr dicht. [STRÖMGREN, B.: Z. Astrophysik 7, 244 (1933)].

halte bis nahe 100% vor. Die massigen Sterne mit Wasserstoffgehalten über 40% sind in einem kleinen Gebiet des H.-R.-Diagramms zusammengedrängt, wodurch die Fortsetzung der Hauptserie nach den B-Sternen zustande kommt. Der Riesenast wird durch Sterne etwa desselben Wasserstoffgehalts wie der der Sterne der Hauptserie gebildet. Die untere Begrenzung des Riesenastes im H.-R.-Diagramm kommt dadurch zustande, daß die kleinen Wasserstoffgehalte relativ selten sind, die obere dadurch, daß für größere Massen die Sterne größeren Wasserstoffgehalts als dem des Riesenastes über ein großes Gebiet des H.-R.-Diagramms streuen und dieses deshalb in nur geringer Dichte besetzen. Die Lücke des Riesenastes bei den F-Sternen dürfte mit einer relativen Seltenheit der Massen zwischen 2,5 und 4,5 zusammenhängen.

Mit Hilfe der Kurven in Abb. 7 ist eine Interpretation auch anderer stellarstatistischer Resultate möglich. KUIPER (40) hat die Kurven der Verteilung im H.-R.-Diagramm für Mitglieder offener Sternhaufen diskutiert und mit den in Abb. 7 gezeigten verglichen. Nach KUIPER ist der Wasserstoffgehalt für Sterne desselben Haufens sehr nahe konstant. Die charakteristischen Unterschiede in den H.-R.-Diagrammen verschiedener Haufen [vgl. TRÜMLER (73)] beruhen auf Unterschieden im

Wasserstoffgehalt. Beispielsweise wird der Wasserstoffgehalt für die Hyaden kleiner gefunden als für die Pleiaden. Durch direkte Bestimmung des mittleren Wasserstoffgehalts für Doppelsternkomponenten mit einigermaßen zuverlässig bekannten Massen in den Hyaden hat KUIPER (40) den Schluß bestätigt gefunden, daß der Wasserstoffgehalt der Hyadensterne relativ gering ist.

Im Zusammenhang mit der Diskussion in dieser Ziffer sei noch erwähnt, daß die bei den weißen Zwergen die Masse-Leuchtkraft-Beziehung ersetzende Masse-Radius-Beziehung (vgl. S. 507) zur Ermittlung des Wasserstoffgehalts benutzt werden kann [vgl. CHANDRASEKHAR (9)]. Die Beobachtungsdaten (namentlich die für die Bestimmung des Radius erforderliche effektive Temperatur) sind allerdings noch ziemlich ungenau, es erscheint aber ziemlich sicher, daß der Wasserstoffgehalt der weißen Zwerge relativ gering ist.

In Ziffer 16 sahen wir, daß bei der Diskussion der chemischen Zusammensetzung des Sterninnern drei Bestandteile zu berücksichtigen sind: Wasserstoff, Helium und die Gruppe der schwereren Elemente von Kohlenstoff bis Eisen (RUSSELL-Mischung). Es wurde in der dargestellten Diskussion zunächst vorausgesetzt, daß der Heliumgehalt zu vernachlässigen sei. Dies erscheint zunächst berechtigt, indem die Analyse der Sternatmosphären das Resultat ergeben hat, daß Wasserstoff erheblich häufiger ist als Helium. Allerdings ist zu berücksichtigen, daß die Ermittlung der Häufigkeit von Wasserstoff und von Helium in den Sternatmosphären aus verschiedenen Gründen (unter anderem wegen des hohen Anregungspotentials der beobachtbaren Linien dieser beiden Elemente) eine sehr schwierige Aufgabe darstellt.

Neuere Untersuchungen über Kernprozesse im Sterninnern haben es indessen wahrscheinlich gemacht, daß der Heliumgehalt im Sterninnern beträchtlich ist. Aus der in Ziffer 18 zu besprechenden v. WEIZÄCKERSchen Theorie der Elementumwandlungen im Sterninnern ergibt sich die Konsequenz, daß die Masse des Heliums im Sterninnern etwa 10-mal größer ist als die Masse aller schwereren Elemente zusammen. Es entsteht somit die Aufgabe, zu prüfen, ob diese Konsequenz mit der Masse-Leuchtkraft-Beziehung und den beobachteten Massen, Radien und Leuchtkräften verträglich ist.

Um diese Aufgabe anzugreifen [vgl. B. STRÖMGREN (71)], betrachten wir zunächst die S. 515 diskutierte Lösung des Wasserstoffproblems für die Sonne, für die der Wasserstoffgehalt 99,5% beträgt und der Anteil der RUSSELL-Mischung nur 0,5%. Gegen die Annahme dieser Lösung spricht, wie erwähnt, das nach den Untersuchungen der Sonnenatmosphäre unwahrscheinlich hohe Verhältnis zwischen Wasserstoff und schwereren Elementen. Ersetzen wir aber in dieser Mischung einen Teil des Wasserstoffs durch Helium, so ändert sich die Lage. Das Helium bewirkt, daß das mittlere Molekulargewicht größer wird. Hierdurch wird zunächst die vorausgesagte Leuchtkraft größer, der Gehalt an

absorbierenden schwereren Elementen muß deshalb vergrößert werden [vgl. Gleichung (97)], um wieder die vorausgesagte Leuchtkraft der Sonne gleich der beobachteten zu machen. Durch einen geeigneten Zusatz von Helium scheint es somit möglich, den Gehalt an schwereren Elementen mit den spektroskopischen Ergebnissen verträglich zu machen. Die betrachtete Lösung zeichnet sich dadurch aus, daß der Heliumgehalt in der Tat viel größer als der Gehalt an schwereren Elementen ist.

Diese Überlegung kann leicht durch quantitative Berechnungen vervollständigt werden. Es ist klar, daß das Problem der chemischen Zusammensetzung jetzt drei Un-

bekannte hat, den Wasserstoffgehalt  $Y$ , den Heliumgehalt  $Z$  und den Gehalt an schwereren Elementen (RUSSELL - Mischung)  $U$ , d. h. zwei unabhängige Un-

bekannte ( $Y + Z + U = 1$ ). Für diese Unbekannten ist nun eine Gleichung, die Masse-Leuchtkraft-Beziehung für den betrachteten Stern, gegeben. Aus dieser läßt sich etwa als Funktion des Helium-

gehaltes, der Wasserstoffgehalt, der Gehalt an RUSSELL-Mischung sowie das Verhältnis zwischen Helium und RUSSELL-Mischung ableiten. Das Resultat einer derartigen Berechnung für die Sonne zeigt Tabelle 12. Das Verhältnis zwischen Helium und RUSSELL-Mischung nimmt mit wachsendem Heliumgehalt zunächst zu und sodann ab. Die Berechnung zeigt, daß aus der Masse-Leuchtkraft-Beziehung eine obere Grenze dieses Verhältnisses abgeleitet werden kann. Sowie sich aus der Theorie der Elementumwandlung ein bestimmter Wert des Verhältnisses zwischen Helium und RUSSELL-Mischung ergibt (vgl. S. 526), ist die chemische Zusammensetzung festgelegt. Zum Beispiel ergibt sich mit dem Wert 10 für dieses Verhältnis die folgende Zusammensetzung: Wasserstoff rund 60%, Helium rund 40% und RUSSELL-Mischung 4%.

Für andere Sterne ergeben sich ähnliche Resultate. Für Capella A scheint die Zusammensetzung nahe dieselbe wie für die Sonne zu sein. Für die Unterriesen ergeben sich wieder relativ niedrige Wasserstoffgehalte. Der Zusammenhang zwischen Radius und Wasserstoffgehalt scheint qualitativ derselbe zu sein wie gemäß den Berechnungen nach der Wasserstoff-RUSSELLmischung-Hypothese. Es sei noch bemerkt, daß sich die Konstitution aus den Beobachtungen mit geringerer Genauigkeit ergibt als aus den Berechnungen nach der letzteren Hypothese.

Das Hauptresultat der gerade erörterten Diskussion ist, daß die Heliumhypothese mit den Beobachtungsdaten und der Masse-Leuchtkraft-Beziehung verträglich ist. Der Hauptunterschied in bezug auf den

Tabelle 12.

Helium- gehalt	Wasser- stoffgehalt	Gehalt an RUSSELL- Mischung	Verhältnis Helium RUSSELL- Mischung $\frac{Z}{U}$	Verhältnis RUSSELL- Mischung Wasserstoff $\frac{U}{Y}$
$Z$	$Y$	$U$		
0,1	0,9	0,01	12	0,01
0,2	0,8	0,01	16	0,02
0,3	0,7	0,02	12	0,03
0,4	0,6	0,04	10	0,07
0,5	0,4	0,08	6	0,2

Wasserstoffgehalt ist, daß nach der Heliumhypothese auch für die kleineren Massen große Wasserstoffgehalte möglich sind.

Es geht hervor, daß sich zwischen den diskutierten Annahmen Wasserstoff-RUSSELLmischung und Wasserstoff-Helium-RUSSELLmischung auf Grund der Masse-Leuchtkraft-Diskussion keine Entscheidung treffen läßt. Die Entscheidung muß vielmehr gemäß den fortzusetzenden Untersuchungen über die Kernprozesse im Sterninnern vorgenommen werden. Es sei noch erwähnt, daß die Möglichkeit einer Entscheidung zuungunsten der Heliumhypothese besteht, indem eine zuverlässige Bestimmung des Verhältnisses Helium gegen schwerere Elemente in den Sternatmosphären einen relativ kleinen Wert des Verhältnisses ergeben könnte.

### III. Energieerzeugung und Elementumwandlung in den Sternen. Sternentwicklung.

#### 18. Energieerzeugung und Elementumwandlung im Sterninnern.

Einen Ausgangspunkt für die Diskussion des Problems der Energieerzeugung im Sterninnern erhält man folgendermaßen. Durch Beobachtungen wird festgestellt, daß ein Stern sekundlich eine gewisse Energiemenge in den umgebenden Raum ausstrahlt. Aus dem Energiesatz folgt sodann, daß die gesamte im Stern enthaltene Energie sekundlich um diesen Betrag abnimmt. Es ist nun zu diskutieren, wie sich dieser Energieverlust auf die verschiedenen Energieformen im Stern verteilt.

Die Energieformen im Sterninnern sind: 1. Die den Bewegungen und Kräften zwischen den zunächst als unveränderlich betrachteten Elementarpartikeln Elektronen und Atomkernen entsprechenden Energien, d. h. Wärmeenergie, Ionisationsenergie und potentielle Gravitationsenergie. Zu dieser Gruppe rechnen wir auch die Strahlungsenergie. Die Gesamtenergie dieser Energieformen kann als Funktion der Temperatur- und Dichteverteilung im Stern berechnet werden. 2. Die den Kräften zwischen den die Atomkerne zusammensetzenden Protonen und Neutronen entsprechenden Kernenergien. Die Summe der Kernenergien kann als Funktion der chemischen Zusammensetzung berechnet werden. 3. Die den Ruhemassen der Elementarpartikeln, Elektronen, Protonen und Neutronen entsprechende Energie. Diese ergibt sich als Funktion der Partikelzahlen.

In den Diskussionen des vorigen Jahrhunderts über Sternentwicklung wurden nur die Energien der ersten Gruppe berücksichtigt. Die Gleichsetzung der Ausstrahlung mit der Abnahme der Energien der ersten Gruppe führte zu der sog. HELMHOLTZ-KELVINSchen Kontraktionshypothese. Wir wissen jetzt, daß, wenn überhaupt bei normalen Sternen eine Kontraktion stattfindet, diese so langsam verläuft, daß die Änderungen der Energien der ersten Gruppe klein gegen die Ausstrahlung ist. Dies folgt aus dem aus dem Alter der Erdkruste ( $2 \cdot 10^9$  Jahre)

sich ergebenden Minimalalter für die Sonne sowie aus Beobachtungen der Kleinheit der Periodenänderungen der Cepheiden [vgl. hierzu (17) sowie (28)]. Anders ausgedrückt, es ist die Zeitskala der HELMHOLTZ-KELVINSCHEN Kontraktionshypothese viel zu kurz (Größenordnung  $10^7$  Jahre für Sterne wie die Sonne).

Die gesamte Kernenergie (Gruppe 2) ändert sich durch Elementumwandlungen. Einen in diesem Zusammenhang genügend genauen Wert ihrer Änderung erhält man, indem man (gemäß den beobachteten Atommassen) einem freien Proton oder Neutron eine um  $0,008 m_H c^2 = 1,2 \cdot 10^{-5}$  erg größere Energie zuschreibt als jedem gebundenen Neutron oder Proton, d. h. für jeden Bindungsprozeß eines Protons oder Neutrons die Bindungsenergie gleich  $1,2 \cdot 10^{-5}$  erg setzt [vgl. hierzu wieder (17) und (28)].

Indem man zunächst von der Möglichkeit der Änderung der Energien der Gruppe 3 absieht, gelangt man so zu dem Schluß, daß die ausgestrahlte Energie gleich der Abnahme der Kernenergie ist, die durch Bindung von Protonen und Neutronen in Atomkernen zustande kommt. Da (vgl. unten) Neutronen als primäre Partikeln im Sterninnern nicht vorkommen, so bedeutet dies in anderen Worten, daß die Energieerzeugung im Sterninnern durch den Aufbau von Wasserstoff zu Helium und schwereren Elementen stattfindet. [Diese Hypothese wurde zuerst von EDDINGTON (23), HARKINS (31) und PERRIN (54) diskutiert.]

Durch Umwandlung des in der Sonne vorhandenen Wasserstoffs kann die Ausstrahlung der Sonne während eines Zeitraums der Größenordnung  $10^{11}$  Jahre gedeckt werden. Die Annahme, daß die Energieerzeugung durch Elementumwandlung erfolgt, führt zu der sog. *intermediären Zeitskala*.

Die gesamte Masse des Sterns nimmt ständig ab. Die sekundliche Abnahme berechnet sich direkt aus der Größe der Ausstrahlung. Durch die Umwandlung von Wasserstoff in Helium und schwerere Elemente kann die Masse höchstens im Verhältnis 1,008 : 1 abnehmen, bleibt also praktisch konstant.

Eine Zeitlang rechnete man ernstlich mit der Möglichkeit, daß die Energien der Gruppe 3 im Sterninnern merklich abnehmen könnten. Es wurde die Annahme diskutiert, daß die Energieerzeugung durch den Prozeß der Zusammenschmelzung und Zerstrahlung von Proton und Elektron stattfinde. Der Hauptgrund, warum diese physikalisch nicht zu begründende Annahme diskutiert wurde, war der, daß die intermediäre Zeitskala damals zu kurz erschien. Jetzt hat sich die Sachlage geändert, indem keine gültigen Argumente vorhanden sind, die zur Annahme der sog. langen Zeitskala zwingen könnten. Im Gegenteil sind die Resultate der stellarastrophysikalischen Untersuchungen der Kinematik und Dynamik des Systems der außergalaktischen Nebel, ferner die Untersuchungen über die Rotation der Milchstraße [vgl. EDDINGTON (19)], die Untersuchungen über offene Sternhaufen [vgl. ROSSELAND (56)] sowie Unter-

suchungen über Doppelsterne [vgl. KUIPER (39)] alle mit der intermediären Zeitskala verträglich.

Im folgenden soll von der Möglichkeit der merklichen Änderung der Energien der Gruppe 3 abgesehen werden. Es soll also angenommen werden, daß der Mechanismus der Energieerzeugung die Umwandlung von Wasserstoff in Helium und schwerere Elemente ist.

Wir stehen also vor dem folgenden physikalischen Problem. Die Umwandlungsgeschwindigkeit von Wasserstoff in Helium und schwerere Elemente ist als Funktion der chemischen Zusammensetzung und der Zustandsgrößen Temperatur und Dichte zu berechnen. Bei der Diskussion dieses Problems sind zunächst zwei Fälle zu unterscheiden. Bei niedrigen und mäßigen Temperaturen finden praktisch keine Kernprozesse statt, bei denen gebundene Protonen frei werden. Es handelt sich um einen einseitigen Aufbauprozeß, dessen Geschwindigkeit als Funktion der erwähnten Parameter zu berechnen ist. Bei hohen Temperaturen ( $10^{10}$  Grad und höher) spielen auch die Abbauprozesse eine Rolle. In der Tat stellt sich hier zwischen den Aufbau- und Abbauprozessen ein Gleichgewicht ein, so daß die chemische Zusammensetzung durch Temperatur und Dichte gegeben ist [vgl. hierzu STERNE (64)]. Die Umwandlungsgeschwindigkeit von Wasserstoff wird dann durch die Änderungsgeschwindigkeit der Zustandsgrößen Temperatur und Druck bestimmt. Es sei hervorgehoben, daß bei diesem Mechanismus der Energieerzeugung der Satz von VOGT und RUSSELL nicht mehr gilt (vgl. Ziffer 4).

Es soll im folgenden gemäß den in den vorhergehenden Ziffern besprochenen Untersuchungen bis auf weiteres angenommen werden, daß so hohe Temperaturen wie die für das merkliche Auftreten der betrachteten Abbauprozesse erforderlichen im Sterninnern nicht vorkommen.

Aus der GAMOWSchen Theorie der Kernumwandlungen, sowie auch direkt aus diesbezüglichen Laboratoriumsexperimenten, kann man schließen, daß im Sterninnern bei den dort herrschenden Temperaturen und Dichten Reaktionen zwischen den *leichtesten* Kernen vorkommen. Diese wurden auf Grund der GAMOWSchen Theorie zuerst von ATKINSON und HOUTERMANN (3) sowie von ATKINSON (2) diskutiert.

Die Eindringungswahrscheinlichkeit eines Protons in einen Kern nimmt äußerst schnell mit wachsender Kernladung ab. Schon für Kohlenstoff ( $Z = 6$ ), Stickstoff ( $Z = 7$ ) und Sauerstoff ( $Z = 8$ ) ist bei Sterntemperaturen die Eindringungswahrscheinlichkeit so gering, daß es unter Berücksichtigung der relativen Häufigkeit dieser Elemente kaum möglich erscheint, daß durch den Einfang von Protonen durch diese Elemente eine genügende Energieerzeugung erfolgen könnte. Aus der beobachteten außerordentlich geringen Häufigkeit der Elemente Li ( $Z = 3$ ), Be ( $Z = 4$ ) und B ( $Z = 5$ ) schließt man, daß die einzige Möglichkeit des Zustandekommens einer genügend großen Energieerzeugung durch Protoneneinfang die ist, daß durch eine oder eine Kette von Kernreaktionen eine Umwandlung von Wasserstoff in Helium stattfindet.

Ein Aufbau der schwereren Elemente im Sterninnern durch Protoneneinfang erscheint unmöglich. Hieraus darf nicht ohne weiteres geschlossen werden, daß im normalen Sterninnern andere Prozesse vorkommen müssen, durch die ein solcher Aufbau stattfindet. Die Hypothese, daß alle Elemente, auch die schwereren, im normalen Sterninnern durch Elementumwandlung entstehen, ist aber eine durchaus plausible und wahrscheinliche. Ausgehend von dieser *Aufbauhypothese* wird man nach Kernprozessen suchen, die einen Aufbau auch der Elemente höherer Kernladung im Sterninnern ermöglicht.

ATKINSON (2) hat zuerst versucht, eine zusammenhängende detaillierte Theorie der Energieerzeugung und des Elementaufbaus im Sterninnern durchzuführen. Die Kernphysik war aber, als dieser Versuch unternommen wurde, nur relativ wenig entwickelt. Trotzdem die Untersuchung zu wertvollen Erkenntnissen führte, kann sie in ihrer ursprünglichen Form nicht mehr aufrechterhalten werden.

Vor kurzem hat v. WEIZSÄCKER (80) das Problem mit Hilfe der heutigen Kernphysik in Angriff genommen. Wir folgen hier der Untersuchung von v. WEIZSÄCKER.

Die einzige Möglichkeit des Aufbaus der schwereren Elemente im Sterninnern scheint der Aufbau durch *Neutroneneinfang* zu sein. Neutronen mäßiger Geschwindigkeit können, wie Theorie und Experiment übereinstimmend zeigen, auch in schwere Kerne eindringen. [Es ist interessant, daß HARKINS bei seiner mutmaßlichen Einführung des Neutrons als Kernbaustein (32) teilweise durch diese Überlegung geleitet wurde.]

Nun ist die Lage die, daß der Neutroneninhalt der Sterne außerordentlich klein sein muß. Der Wirkungsquerschnitt für Neutroneneinfang ist für viele häufig vorkommende Kerne im Sterninnern so groß, daß die in einem gewissen Augenblick im Stern vorhandenen Neutronen innerhalb eines sehr kleinen Bruchteils einer Sekunde eingefangen werden. Ein fortgesetzter Aufbau der schwereren Elemente durch Neutroneneinfang ist also nur möglich, wenn im Sterninnern eine *Neutronenquelle* vorhanden ist, d. h., wenn eine oder mehrere Kernreaktionen im Sterninnern dauernd Neutronen produzieren.

V. WEIZSÄCKER hat die möglichen Reaktionen zwischen leichten Kernen in systematischer Weise untersucht. Mit Hilfe der heutigen Kernphysik kann im Prinzip die Möglichkeit eines spezifizierten Prozesses zwischen leichten Kernen beurteilt werden und der für die Häufigkeit des Prozesses maßgebende Wirkungsquerschnitt jedenfalls qualitativ abgeschätzt werden. In einigen Fällen fehlen jedoch die notwendigen Ausgangsdaten (Massendefekte), auch fehlt oft noch eine genauere Berechnung des Wirkungsquerschnittes. Hieraus folgt, daß eine rein deduktive physikalische Theorie der Reaktionen zwischen den leichten Kernen noch nicht eindeutig durchgeführt werden kann. Die oben besprochenen

allgemeinen Gesichtspunkte bezüglich der astrophysikalisch zu erwartenden Prozesse zwischen leichten Kernen sind deshalb von gewisser Bedeutung für die Diskussion.

Der natürliche Ausgangspunkt bei der Diskussion der Reaktionen der leichten Kerne im Sterninnern ist die Untersuchung der Reaktion zwischen dem Proton,  ${}^1_1\text{H}$ , und dem Heliumkern,  ${}^4_2\text{He}$ , die einzigen leichten Kerne, die in großer Menge im Sterninnern vorkommen. Hier stößt man jedoch gleich auf eine Schwierigkeit. Die durch die Reaktion zwischen  ${}^1_1\text{H}$  und  ${}^4_2\text{He}$  zu erwartenden Kerne der Masse 5 sind nicht nachgewiesen und vielleicht nicht existenzfähig [vgl. hierzu v. WEIZSÄCKER (80) und die dort S. 180 angeführte Literatur, sowie BOTHE und MAIER-LEIBNITZ (7)]. V. WEIZSÄCKER diskutiert infolgedessen die drei in Frage kommenden Möglichkeiten: 1. Das zunächst bei der betrachteten Reaktion gebildete  ${}^5_3\text{Li}$  ist stabil. 2.  ${}^5_3\text{Li}$  ist  $\beta^+$ -labil,  ${}^5_3\text{Li} = {}^5_2\text{He} + \beta^+$ , und das so gebildete  ${}^5_2\text{He}$  stabil. 3.  ${}^5_3\text{Li}$  ist als einheitlicher Kern nicht existenzfähig.

In den drei Fällen ergeben sich in vielen Hinsichten ähnliche Resultate. Es möge hier genügen, den von v. WEIZSÄCKER am ausführlichsten diskutierten Fall 2 zu betrachten. Es seien nur zuerst einige Bemerkungen dem Fall 3 gewidmet. Angenommen es sei  ${}^5_3\text{Li}$  so stark  $\alpha$ -instabil, daß es immer ganz kurz nach der Bildung in  ${}^1_1\text{H}$  und  ${}^4_2\text{He}$  zerfällt. Dann ergibt sich in der großen Mehrzahl der Fälle kein Resultat der Reaktion zwischen  ${}^1_1\text{H}$  und  ${}^4_2\text{He}$ . Nur in den relativ seltenen Fällen, wenn innerhalb einer sehr kurzen Zeit nach der Bildung von  ${}^5_3\text{Li}$  wieder ein Proton  ${}^1_1\text{H}$  eingefangen wird, ist der Prozeß nicht rückgängig, sondern es wird  ${}^6_4\text{Be}$  gebildet, das sodann wie im Fall 1 weiterreagiert. Im Fall 3 wäre noch nach v. WEIZSÄCKER der Prozeß der Vereinigung zweier Heliumkerne zu  ${}^8_4\text{Be}$  zu diskutieren.

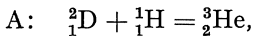
Im Fall 2 ist der erste Kernprozeß  ${}^4_2\text{He} + {}^1_1\text{H} = {}^5_3\text{Li}$ . Sodann erfolgt (a) ein  $\beta^+$ -Zerfall,  ${}^5_3\text{Li} = {}^5_2\text{He} + \beta^+$ , oder es wird (b) zunächst ein weiteres Proton eingefangen,  ${}^5_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} = {}^6_4\text{Be}$ . Im erstgenannten Fall (a) wird der nächste Prozeß in der großen Mehrzahl der Fälle  ${}^5_2\text{He} + {}^1_1\text{H} = {}^4_2\text{He} + {}^2_1\text{D}$  sein. In diesem Fall ergibt sich bereits ein geschlossener *Zyklus*. Einer der Ausgangskerne, der Heliumkern, erscheint wieder. Das Netto-Resultat des Zyklus ist die Bildung des schweren Wasserstoffkerns (Deuterons)  ${}^2_1\text{D}$  und eines Positrons aus zwei Protonen, d. h. die Entstehung eines Deuterons an Stelle von zwei Protonen und einem Elektron. Das Helium wirkt hierbei als Katalysator. Im Fall (b) ergeben sich die folgenden weiteren Möglichkeiten. Der Kern  ${}^6_4\text{Be}$  muß, da er zwei Protonen mehr als Neutronen enthält,  $\beta^+$ -labil sein. Entweder (ba) erfolgt der  $\beta^+$ -Zerfall,  ${}^6_4\text{Be} = {}^6_3\text{Li} + \beta^+$  oder (bb) es wird vorher ein Proton eingefangen,  ${}^6_4\text{Be} + {}^1_1\text{H} = {}^7_5\text{B}$ . Im Fall (ba) wird der nächste Prozeß  ${}^6_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} = {}^4_2\text{He} + {}^3_2\text{He}$ . In diesem Fall ist wieder ein Zyklus geschlossen, indem der Heliumkern wiederhergestellt worden ist. Das Netto-Resultat des Zyklus ist die Entstehung eines  ${}^3_2\text{He}$ -Kerns an Stelle



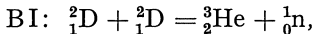
von drei Protonen und einem Elektron. Im Fall (bb) wird das stark  $\beta^+$ -labile  ${}^7_5\text{B}$   $\beta^+$ -zerfallen,  ${}^7_5\text{B} = {}^7_4\text{Be} + \beta^+$ . Der  $\beta^+$ -labile Kern  ${}^7_4\text{Be}$  kann entweder (bba)  $\beta^+$ -zerfallen,  ${}^7_4\text{Be} = {}^7_3\text{Li} + \beta^+$ , oder (bbb) ein Proton einfangen,  ${}^7_4\text{Be} + {}^1_1\text{H} = {}^8_5\text{B}$ . Im Fall (bba) wird in der Mehrzahl der Fälle der Prozeß  ${}^7_3\text{Li} + {}^1_1\text{H} = 2 {}^4_2\text{He}$  eintreten. Der Zyklus ist dann wieder geschlossen, indem  ${}^4_2\text{He}$  wiederhergestellt worden ist. Das Netto-Resultat ist hier die Entstehung eines weiteren Heliumkerns an Stelle von vier Protonen und zwei Elektronen. Den Fall (bbb) brauchen wir hier nicht weiter zu verfolgen. Fortgesetzter Protoneneinfang wird sehr bald nicht mehr in Frage kommen, weil die Ladung bereits ziemlich hoch ist, bei  $\beta^+$ -Zerfall ergeben sich ähnliche Netto-Resultate wie oben.

Es muß noch das weitere Schicksal der durch die Zyklen (a) bzw. (ba) gebildeten Kerne  ${}^2_1\text{D}$  und  ${}^3_2\text{He}$  verfolgt werden.  ${}^3_2\text{He}$  kann entweder durch  $\beta^+$ -Zerfall in  ${}^3_1\text{T}$  und sodann durch Protoneneinfang in Helium übergehen, oder durch Protoneneinfang über das stark  $\beta^+$ -labile  ${}^4_3\text{Li}$  Helium bilden.

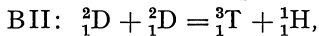
Für das Deuteron  ${}^2_1\text{D}$  kommen die folgenden Möglichkeiten in Betracht:



Weiterreaktion des  ${}^3_2\text{He}$  wie vorher (Bildung von  ${}^4_2\text{He}$ ),  
sowie



Weiterreaktion des  ${}^3_2\text{He}$  wie vorher (Bildung von  ${}^4_2\text{He}$ ),



Weiterreaktion des  ${}^3_1\text{T}$  wie vorher (Bildung von  ${}^4_2\text{He}$ ).

Für das Triton  ${}^3_1\text{T}$  kämen noch neben Protoneneinfang die Reaktionen Triton-Deuteron und Triton-Triton in Frage, bei denen Helium und Neutron bzw. Helium und zwei Neutronen gebildet werden.

Aus der angeführten Diskussion v. WEIZSÄCKERs wird somit das folgende Ergebnis erhalten. Als hauptsächliches Netto-Resultat der Reaktionen der leichten Kerne im Fall 2 kann man die *Bildung von Helium und Neutronen aus Wasserstoff ansehen*. Die *Masse* des gebildeten *Heliums* ist immer beträchtlich *größer* als die *Masse* der gebildeten *Neutronen*. *Helium* wirkt bei diesen Prozessen als *Katalysator*. Die *Geschwindigkeit*, mit der Helium und Neutronen gebildet werden, ist infolgedessen proportional dem Heliumgehalt.

Die durch die Reaktionen der leichten Kerne gebildeten Neutronen werden, wie wir gesehen haben, äußerst schnell von anderen Kernen eingefangen. Nach v. WEIZSÄCKER ist es trotz des starken Überwiegens der Anzahl der Wasserstoffkerne wahrscheinlich, daß der größere Teil der Neutronen von schwereren Kernen eingefangen wird, indem die Einfangsquerschnitte für die Neutronen bei diesen viel größer sind als bei Protonen. (v. WEIZSÄCKER bemerkt, daß der *Streuungsquerschnitt* Neutron-Proton so groß ist, daß die Neutronen äußerst schnell eine praktisch thermische Geschwindigkeitsverteilung erreichen. Für die geladenen

Kerne kommt die thermische Geschwindigkeitsverteilung äußerst schnell durch die Bremswirkung der freien Elektronen zustande.) Aus den gebildeten Neutronen entstehen also wesentlich schwerere Elemente.

Nach der Aufbauhypothese wird jederzeit die gesamte Masse der schwereren Elemente in einem Stern ungefähr gleich der Gesamtmasse der bis dahin durch die Reaktionen der leichten Kerne im Sterninnern gebildeten Neutronen sein. Es ist in diesem Zusammenhang wesentlich, das Verhältnis des durch diese Reaktionen gebildeten Heliums zu den gebildeten Neutronen zu betrachten.

Betrachten wir den für die Neutronenbildung günstigsten Fall (a), in dem der Zyklus zur alleinigen Bildung von Deuteronen  ${}^2_1\text{D}$  führt. Es kommt nun darauf an, ob die Deuteronen gemäß A oder B weiterreagieren. Der Wirkungsquerschnitt der Prozesse B ist etwa  $10^5$ mal größer als der des Prozesses A. Es ist nicht unwahrscheinlich, daß die relative Häufigkeit der Deuteronen im Sterninnern mehr als  $10^{-5}$ mal der Häufigkeit der Protonen beträgt. Wir machen wieder die für die Neutronenbildung günstigste Annahme, daß die Häufigkeit der Deuteronen in der Tat so groß ist, daß die Prozesse B überwiegen.

Die Prozesse BI und BII haben sehr nahe gleichen Wirkungsquerschnitt. Es ergibt sich folglich in dem für die Neutronenbildung günstigsten Fall (Überwiegen von a und sodann B), daß zwei Heliumkerne für jedes Neutron gebildet werden.

Die Masse des gebildeten Heliums beträgt hiernach mindestens das Achtfache der Masse der gebildeten Neutronen. Nach der Aufbauhypothese wird man also erwarten, daß *die Masse des Heliums eines Sterns mindestens das Achtfache der Masse der schwereren Elemente beträgt* (mindestens das Sechsfache bei Berücksichtigung der Masse des durch Neutroneneinfang weiter aufgebauten Ausgangsmaterials). Das Verhältnis Helium gegen schwerere Elemente kann sehr wohl beträchtlich höher sein.

Es ist nicht sehr wahrscheinlich, daß in der Diskussion Prozesse übersehen worden sind, die zu einem größeren Verhältnis zwischen eingefangenen Neutronen und neugebildetem Helium führen könnten.

Was die Aufbauhypothese betrifft, so ist diese, wie erwähnt, eine wahrscheinliche, jedoch nicht die einzig mögliche. Es ist natürlich denkbar, daß die schwereren Elemente, die jetzt in den normalen Sternen vorhanden sind, unter gänzlich verschiedenen Verhältnissen gebildet, bei der Entstehung dieser Sterne schon zum größten Teil vorhanden waren.

Wie in Ziffer 17 näher ausgeführt, ist die Annahme eines Heliumgehalts, der vielemal größer ist als der Gehalt an schwereren Elementen mit den Folgerungen aus der Theorie des Sterninnern verträglich. Eine definitive Entscheidung dürfte zukünftigen quantitativen Untersuchungen über Energieerzeugung und Elementumwandlung im Sterninnern vorbehalten sein.

Nach dem oben Entwickelten ist der wesentlichste Mechanismus der Energieerzeugung im Sterninnern die Umwandlung von Wasserstoff in Helium. Quantitative Untersuchungen über die Abhängigkeit der Energieerzeugung von der chemischen Zusammensetzung (d. h. im wesentlichen von dem Wasserstoffgehalt und dem Heliumgehalt) sowie von der Temperatur und der Dichte erscheinen bereits durchführbar. Es kommt hierbei auf eine Ermittlung der Wirkungsquerschnitte der Prozesse zwischen den leichten Kernen sowie der  $\beta^+$ -Zerfallszeiten an. Bei der quantitativen Berechnung ist das Resultat der oben erörterten Konkurrenz zwischen  $\beta^+$ -Zerfall und Protoneneinfang zu ermitteln.

Es ist bereits klar, daß die Energieerzeugung nach dem betrachteten Mechanismus sehr stark mit der Temperatur wächst [Quantitatives über den Einfluß des hierfür wesentlichen GAMOW-Faktors findet man bei ATKINSON und HOUTERMANS (3), ATKINSON (2), WILSON (81), STEENSHOLT (63), STERNE (65) sowie in (70).] Auch ist es klar, daß die nach der Theorie des Sterninnern berechneten Temperaturen jedenfalls die Größenordnung haben, bei denen die Umwandlungsgeschwindigkeit die für die erforderliche Energieerzeugung richtige Größe hat.

Es fragt sich demnächst, ob man die beobachteten Unterschiede der Energieerzeugung von Stern zu Stern qualitativ verstehen kann. Aus der Theorie des Sterninnern ergeben sich numerische Werte der Temperatur und Dichte im Zentrum der verschiedenen Sterne (vgl. Ziffer 10). Andererseits ist auch die gesamte Energieerzeugung gleich der Leuchtkraft gemäß Beobachtungen bekannt. Die Werte der zentralen Temperaturen und Dichten einerseits und der Energieerzeugung andererseits sind miteinander in Verbindung zu bringen. Hierbei stößt man, wie EDDINGTON (17) gezeigt hat, zunächst auf eine Schwierigkeit. Vergleicht man z. B. die Sonne und Capella A, so sieht man, daß die Energieerzeugung dort (in Capella A) die größte ist, wo die Temperatur und Dichte die kleinste ist. Durch Vergleich der Sonne mit Unterriesen erhält man ein ähnliches Resultat.

Nach Berücksichtigung der Unterschiede im Wasserstoffgehalt erscheinen die Verhältnisse weniger widerspruchsvoll. Zunächst wird als direkte Wirkung des Unterschiedes im mittleren Molekulargewicht die Abnahme der zentralen Temperatur mit dem Anwachsen des Radius weniger ausgeprägt (vgl. hierzu S. 495). Ferner tritt als neuer Parameter des Problems der Wasserstoffgehalt auf. M. SCHWARZSCHILD (60) hat die sich gemäß der Wasserstoff-RUSSELLmischung-Hypothese (vgl. S. 514) ergebende empirische Beziehung zwischen Sternmasse, Wasserstoffgehalt, Temperatur und Dichte festgestellt. Unter der Voraussetzung, daß die Energieerzeugung mit Temperatur und Dichte zunimmt, ergibt sich hieraus empirisch, daß die Energieerzeugung mit der Sternmasse zunimmt und mit abnehmendem Wasserstoffgehalt zunimmt.

Mit Rücksicht auf die Deutung des betrachteten Problems am ausichtsreichsten scheint die Wasserstoff-Helium-RUSSELLmischung-Hypo-

these zu sein. Die Zunahme der Energieerzeugung mit abnehmendem Wasserstoffgehalt kann nach dieser unmittelbar gedeutet werden. Mit abnehmendem Wasserstoffgehalt nimmt der Heliumgehalt zu, und wie wir oben gesehen haben, ist die Energieerzeugung proportional dem Heliumgehalt.

Ob sich die Daten nach der letzteren Hypothese vollständig deuten lassen, ist noch nicht klar. Es könnte zunächst scheinen, als ob die Unterschiede im Heliumgehalt nicht groß genug wären, um die in Frage kommenden Unterschiede der Energieerzeugung zu erklären. Es ist in diesem Zusammenhang jedoch zu berücksichtigen, daß die sich aus der Masse-Leuchtkraft-Beziehung ergebenden Heliumgehalte, wie S. 519 hervorgehoben, nicht sehr genau sind. Man könnte, um den Energieerzeugungsdaten gerecht zu werden, einen relativ sehr kleinen Heliumgehalt der Sonne und ähnlicher Sterne der Hauptserie und gleichzeitig einen größeren Heliumgehalt etwa für Capella A postulieren, ohne in ernste Widersprüche mit der Masse-Leuchtkraft-Beziehung zu geraten.

Schließlich sei noch im Zusammenhang mit dieser Diskussion der Energieerzeugung hervorgehoben, daß die zentralen Temperaturen und Dichten gegen Änderungen des Sternmodells relativ empfindlich sind. In der Nähe des Sternzentrums mögen Änderungen des mittleren Molekulargewichts  $\mu$  vorkommen, die auf die Zentrumswerte der Zustandsgrößen einen Einfluß haben können. Wie EDDINGTON (17) gezeigt hat, sind die Zentrumswerte gegenüber einer Abnahme von  $\mu$  gegen das Zentrum relativ unempfindlich, jedoch empfindlich gegenüber einer Zunahme. Jetzt scheint eine Zunahme von  $\mu$  gegen das Zentrum nicht unwahrscheinlich. Ein derartiger Einfluß mag sowohl von der Masse des Sterns wie von seiner chemischen Zusammensetzung abhängen.

Es sei noch ein Punkt der Theorie der Elementumwandlung diskutiert, dessen Wichtigkeit v. WEIZSÄCKER betont hat. Es ist bekannt, daß dann, wenn ein Element  ${}_{Z}^{n}\text{E}$  ein Proton einfängt, nicht das Element  ${}_{Z+1}^{n}\text{E}$  entsteht, sondern ein Abbau stattfindet, indem ein Heliumkern emittiert wird. Das bekannteste Beispiel ist der Prozeß  ${}_{3}^{7}\text{Li} + {}_{1}^{1}\text{H} = 2 {}_{2}^{4}\text{He}$ . Bei Neutroneneinfang ist die Lage ganz ähnlich. Hieraus ersieht man, daß ein fortgesetzter Aufbau der schwereren Elemente nur über den Umweg  $\beta$ -labiler Isotopen möglich ist. Hieraus ergibt sich die Forderung, daß die mittlere Zeit zwischen zwei Neutroneneinfängen durch denselben Kern nicht groß gegenüber den betreffenden  $\beta$ -Zerfallszeiten sind. Mit Rücksicht auf den Aufbau der natürlich radioaktiven Elemente über Blei und Wismut hinaus ist die Lage eine ähnliche. Es sei bemerkt, daß, wenn die soeben betrachteten Abbauprozesse in merklicher Anzahl stattfinden, sie den relativen Heliumgehalt noch vergrößern.

Der Neutronenaufbau muß nach der erwähnten Bedingung in der Tat so rasch erfolgen, daß er nur in einem sehr kleinen Teil der Sternmasse stattfinden kann (aus der Leuchtkraft kann man unmittelbar eine obere Grenze für die Gesamtzahl der Neutroneneinfänge pro Sekunde berechnen).

Durch Konvektion findet ein ständiger Materieaustausch zwischen diesem Kern und dem übrigen Stern statt.

Es bietet einige Schwierigkeit, diesen Schluß mit den Ergebnissen der Theorie des Aufbaues des Sterninnern zu vereinbaren. Allgemein ist die Temperaturänderung in der Nähe des Zentrums nicht groß genug, um Kernprozesse auf eine sehr kleine Kernmasse zu beschränken. Zwar ergeben sich für das Punktquellenmodell in Strahlungsgleichgewicht sehr geringe Dichten in der Umgebung des Zentrums, diese Dichteverteilung wird aber durch die Konvektion wesentlich modifiziert (vgl. Ziffer 12). Es ist jedoch möglich, daß genaue Untersuchungen der komplizierten Frage des Sternaufbaus in der unmittelbaren Umgebung des Zentrums (vgl. oben) den Widerspruch klären können.

In Ziffer 14 wurde der Zusammenhang zwischen der Temperaturempfindlichkeit der Energieerzeugung und der radialen Stabilität besprochen. Nach den dort erwähnten Untersuchungen scheint die radiale Stabilität selbst durch die sehr hohe Temperaturempfindlichkeit der in dieser Ziffer besprochenen Energieerzeugungsprozesse nicht unbedingt gefährdet. In diesem Zusammenhang ist auch, wie EDDINGTON (22) und v. WEIZSÄCKER betont haben, zu berücksichtigen, daß die Energieerzeugung nach dem hier betrachteten Mechanismus eine verzögerte ist (vgl. S. 504).

Abschließend sei noch erwähnt, daß es v. WEIZSÄCKER durch eine genauere Diskussion des Aufbaues der schwereren Elemente durch Neutroneneinfang gelungen ist, wesentliche Züge der beobachteten relativen Häufigkeit, unter anderem die HARKINSSche Regel, zu deuten. Man vergleiche hierzu (80).

**19. Probleme der Sternentwicklung.** Es geht aus dem bereits Dargestellten hervor, daß eine enge Beziehung zwischen den Problemen der Sternentwicklung und denen des Sternaufbaus besteht. Im folgenden soll kurz hierauf eingegangen werden. Hierbei beschränken wir uns in der Hauptsache auf eine bestimmte Theorie der Sternentwicklung. Es ist naturgemäß von größter Bedeutung, daß man sich klarmacht, daß diese Theorie nur eine unter mehreren möglichen ist.

Wenn wir die Gültigkeit des Satzes von VOGT und RUSSELL annehmen, daß der Aufbau eines Sterns durch seine Masse und chemische Zusammensetzung gegeben ist, so ergibt sich unmittelbar, daß Sternentwicklung nur möglich ist, wenn Änderungen entweder der Masse oder der chemischen Zusammensetzung oder dieser beiden Parameter stattfinden. Wir nehmen nun weiter an, daß die Sternmasse während der Entwicklung praktisch konstant bleibt (vgl. S. 521). Sodann haben wir die Sternentwicklung als Folge der Änderungen der chemischen Zusammensetzung zu betrachten.

Gemäß den Ausführungen der Ziffer 18 stellen wir uns vor, daß in den Sternen dauernd Wasserstoff in Helium und zu einem kleineren Teil in schwerere Elemente verwandelt wird. Die Vergrößerung des Heliumgehalts würde bei unverändertem Sternradius allmählich eine Steigerung

der Energieerzeugung bewirken (vgl. S. 528), so daß diese größer werden würde als die Ausstrahlung. Es folgt, daß der Sternradius so zunehmen muß, daß gerade eine solche Abnahme der zentralen Temperatur und Dichte erfolgt, daß Energieerzeugung und Ausstrahlung gleich groß bleiben. Es findet also parallel der Verwandlung von Wasserstoff in Helium und schwerere Elemente eine fortgesetzte Expansion des Sterns statt. Diese Konsequenz der betrachteten Theorie stimmt mit den Feststellungen der Ziffer 18 überein.

Wenn der Wasserstoff zum größten Teil in Helium und schwerere Elemente verwandelt worden ist, nimmt die subatomare Energieerzeugung schnell ab und kann die Ausstrahlung nicht mehr decken. Es erfolgt, indem in dieser Situation die Energien der Gruppe 1 (vgl. S. 520) abnehmen, eine schnelle Kontraktion des Sterns. Sterne kleiner und mittlerer Masse schließen so ihre Entwicklung als weiße Zwerge entarteter Materie ab (vgl. Ziffer 15). In den massigeren Sternen kann auch bei fortgesetzter Kontraktion keine Entartung eintreten (vgl. S. 506). Es ist anzunehmen [vgl. CHANDRASEKHAR (9) sowie die diesbezügliche Diskussion in (36)], daß bei diesen Sternen infolge fortgesetzter Kontraktion der Strahlungsdruck auf der Oberfläche so hoch wird, daß die Sternmaterie relativ sehr schnell in den interstellaren Raum getrieben wird. Wenn die Sternmasse hierdurch genügend abgenommen hat, mag sodann ein weißer Zwerg entstehen.

Die Geschwindigkeit der Entwicklung ist durch die Leuchtkraft gegeben. Aus dieser ergibt sich unmittelbar die sekundliche Änderung im Wasserstoffgehalt. Die Entwicklungsgeschwindigkeit ist folglich für große Massen mit großen Leuchtkräften viel größer als für kleine.

Es ist eine wichtige Frage, ob in diesem Bild als Anfangszustand ein Stern aus reinem Wasserstoff angenommen werden soll, oder ein Stern, der bereits merkliche Mengen von Helium und schwereren Elementen enthält (vgl. S. 520). Es ist bei der Beurteilung dieser Frage von Bedeutung, daß die Wasserstoff-Helium-RUSSELLmischung-Hypothese im Gegensatz zur Wasserstoff-RUSSELLmischung-Hypothese auch für die kleineren Massen der Hauptserie große Wasserstoffgehalte erlaubt. Ferner sei hierzu bemerkt, daß die Entwicklungsgeschwindigkeit der absolut hellsten Sterne so groß ist, daß ihr Alter nur noch von der Größenordnung  $10^7$  Jahre ist. Untersuchungen über die Menge und chemische Zusammensetzung der Materie im interstellaren Raum, sowie über die Möglichkeiten ihrer Kondensation zu Sternen [vgl. hierzu LINDBLAD (41)] sind in diesem Zusammenhang von Bedeutung.

In den Sternhaufen hat man es wahrscheinlich mit Sternen des gleichen Alters zu tun. Untersuchungen der chemischen Zusammensetzung sind hier besonders wichtig (vgl. hierzu S. 517) und können zur Entscheidung der Frage der Anfangs-Zusammensetzung beitragen. Nimmt man an, daß die Anfangs-Zusammensetzung der Haufensterne reiner Wasserstoff war, so ergibt sich aus dem beobachteten jetzigen Wasser-

stoffgehalt für jeden Stern das Alter. Das Kriterium für die Richtigkeit der Annahme wäre, daß man so gleiches Alter für die Haufensterne erhielte.

Ganz allgemein wird man erwarten, daß die Haufensterne, die durch gleiches Alter und gleichartige Entwicklungsgeschichte charakterisiert sind, eine einparametrische Schar bilden (der Parameter ist die Masse). Diese Erwartung stimmt mit der beobachteten sehr geringen Streuung der Haufensterne im H.-R.-Diagramm überein [vgl. z. B. die sehr genauen Farben-Helligkeits-Diagramme der Pleiaden von HERTZSPRUNG (34) und der Praesepe von HECKMANN u. HAFNER (33)].

Auf die Probleme der Novae sowie der Veränderlichen Sterne können wir hier nicht eingehen. [Man vergleiche hierzu etwa (1), (30), (43), (45) und (67) über Novae sowie (8) und (42) über Veränderliche Sterne.]

Abschließend seien neben der oben ausführlich besprochenen Theorie der Sternentwicklung zwei andere Theorien kurz erwähnt. Diese Theorien widersprechen teilweise den in diesem Bericht sonst vertretenen Standpunkten; angesichts der Unsicherheit, die noch der Diskussion über Sternentwicklung anhaftet, erscheint es aber nützlich, auch andere Möglichkeiten vor Augen zu behalten.

Einen Gedanken von MILNE (50) weiter entwickelnd, hat STERNE (64) die folgende Theorie der Sternentwicklung diskutiert. Es wird angenommen, daß die Sterne einen heißen Kern haben, in dem die Temperatur wenigstens etwa  $10^{10}$  Grad beträgt. In diesem ist statistisches Gleichgewicht der Atomkerne vorhanden (vgl. S. 522). Durch ständige Expansion des Sterns ändern sich die Zustandsgrößen im Zentrum und sodann wieder dieses statistische Gleichgewicht. In dieser Weise wird Wasserstoff in Helium und schwerere Elemente aufgebaut, wodurch die erforderliche Energieerzeugung stattfindet. Die Energieerzeugung ist proportional der Expansionsgeschwindigkeit. Letztere stellt sich folglich immer so ein, daß die Energieerzeugung die Ausstrahlung gerade deckt. Die Schwierigkeit, daß das Sternmodell infolge zu stark temperaturempfindlicher Energieerzeugung radial instabil wird, fällt hier fort. Dies war der Hauptgrund, der STERNE zu der besprochenen Annahme führte. Wie wir gesehen haben (vgl. S. 503 und 529) ist es nach den neueren Untersuchungen über radiale Stabilität wahrscheinlich, daß diese Schwierigkeit in der ausführlich besprochenen Theorie nicht besteht.

NERNST (52) nimmt an, daß die Materie sich in einem statistischen Gleichgewicht mit dem Lichtäther befindet, derart, daß Materie im Raum entsteht und in den Sternen verschwindet, und zwar letzteres ohne daß die der Masse entsprechende Energie als Strahlung erscheint. Hiernach ist eine Entwicklung, die durch starke Abnahme der Sternmasse während Zeiträumen der intermediären Zeitskala (vgl. S. 521) charakterisiert ist, möglich. NERNST hat die Beobachtungsdaten über Massen, Radien und Leuchtkräfte von diesem Gesichtspunkt aus

diskutiert. Eine Diskussion der kosmischen Höhenstrahlung ist ebenfalls innerhalb des Rahmens der NERNSTschen Theorie möglich.

Es dürfte aus dem in diesem Bericht Dargestellten hervorgehen, daß, wenn auch über manche Fragen einige Unsicherheit herrscht, die Theorie des Sternaufbaus und der Sternentwicklung schon zu zahlreichen gesicherten Ergebnissen geführt hat und daß die fundamentalen Fragestellungen auf diesem Gebiet bereits sicher erkannt worden sind.

#### Literaturverzeichnis.

1. AMBARZUMIAN, V. u. N. KOSIREV: (Novae) *Z. Astrophysik* **7**, 320 (1932).
2. ATKINSON, R. D'E.: (Energieerzeugung und Elementumwandlung im Sterninnern) *Astrophysic. J.* **73**, 250, 308 (1931).
3. — u. F. G. HOUTERMANS: (Energieerzeugung und Elementumwandlung im Sterninnern) *Z. Physik* **54**, 656 (1929).
4. BIERMANN, L.: (Sternmodelle) *Z. Astrophysik* **3**, 116 (1931).
5. — (Konvektion) *Z. Astrophysik* **5**, 117 (1932).
6. — (Ionisation bei mäßigen Temperaturen) *Astron. Nachr.* **259**, 221 (1936).
7. BOTHE, W. u. H. MAIER-LEIBNITZ: (Elemente der Masse 5) *Naturwiss.* **25**, 25 (1937).
8. BRUGGENCATE, P. TEN: Die veränderlichen Sterne. *Erg. exakt. Naturwiss.* **10**, 1 (1931).
9. CHANDRASEKHAR, S.: (Weiße Zwerge) *Monthly Not.* **95**, 207, 226, 676 (1935).
10. — (Äußerer Teil des Sterns; extrem massige Sterne) *Monthly Not.* **96**, 647 (1936).
11. — (Obere und untere Grenzen für Druck und Temperatur im Sterninnern) *Monthly Not.* **96**, 644 (1936). — *Astrophysic. J.* **85**, 372 (1937).
12. — (Sternmodelle) *Monthly Not.* **97**, 132 (1936). — *Z. Astrophysik.* Im Druck (1937).
13. — u. A. BEER: (Extrem massige Sterne) *Observatory* **59**, 168 (1936).
14. COWLING, T. G.: (Konvektion) *Monthly Not.* **94**, 768 (1934).
15. — (Radiale Stabilität; Konvektion) *Monthly Not.* **94**, 768 (1934); **96**, 42 (1935).
16. — (Konvektion) *Astron. Nachr.* **258**, 133 (1936).
17. EDDINGTON, A. S.: The internal constitution of the stars. Cambridge 1926. — Der innere Aufbau der Sterne. Berlin 1928.
18. — (Äußerer Teil des Sterns) *Monthly Not.* **91**, 109 (1930).
19. — The rotation of the Galaxy. Halley Lecture. Oxford 1930.
20. — (Obere Grenzen für Druck und Temperatur) *Monthly Not.* **91**, 444 (1931); **93**, 320 (1933).
21. — (Opazität der Sternmaterie, Wasserstoffgehalt) *Monthly Not.* **92**, 364 (1932); **92**, 471 (1932).
22. — New Pathways in Science. Cambridge 1935.
23. — (Umwandlung von Wasserstoff) *Brit. Assoc. Rep.* **1920**, 45.
24. EMDEN, R.: Gaskugeln. Leipzig und Berlin 1907.
25. FLÜGGE, S.: (Leitfähigkeit durch Neutronen) *Z. Astrophysik* **6**, 272 (1933).
26. FOWLER, R. H.: (Weiße Zwerge) *Monthly Not.* **87**, 114 (1926).
27. — *Statistical Mechanics*, 2<sup>nd</sup> Ed. Cambridge 1936.
28. FREUNDLICH, E.: Die Energiequellen der Sterne. *Erg. exakt. Naturwiss.* **6**, 27 (1927).



29. GAUNT, J. A.: (Opazität der Sternmaterie) Proc. roy. Soc. Lond. A **126**, 654 (1930).
30. GROTRIAN, W.: (Novae) Z. Astrophysik **2**, 78 (1931).
31. HARKINS, W. D. and E. D. WILSON: (Umwandlung von Wasserstoff) Philosophic. Mag. **30**, 723 (1915).
32. — (Neutronen) J. amer. chem. Soc. **42**, 1956 (1920).
33. HECKMANN, O. u. H. HAFNER: (Farben-Helligkeits-Diagramm der Praesepe) Naturwiss. **24**, 635 (1936).
34. HERTZSPRUNG, E.: (Farben-Helligkeits-Diagramm der Pleiaden) Monthly Not. **89**, 660 (1929).
35. HESS, R.: Die Statistik der Leuchtkräfte der Sterne. Erg. exakt. Naturwiss. **3**, 38 (1924).
36. HUND, F.: Materie unter sehr hohen Drucken und Temperaturen. Erg. exakt. Naturwiss. **15**, 189 (1936).
37. KLÜBER, H. v.: Das Vorkommen der chemischen Elemente im Kosmos. Leipzig 1931.
38. KOTHARI, D. S.: Philosophic. Mag. (7) **13**, 361 (1932). — Monthly Not. **93**, 61 (1932).
39. KUIPER, G. P.: (Zeitskala) Publ. astr. Soc. Pacific **47**, 201 (1935).
40. — (Wasserstoffgehalt in Sternhaufen) Bull. Harvard Coll. Obs. 1936, Nr 903, 1. — Astrophysic. J. Im Druck (1937).
41. LINDBLAD, B.: (Kondensation interstellarer Materie) Nature (Lond.) **135**, 133 (1935).
42. LUDENDORFF, H.: (Veränderliche Sterne) Handbuch der Astrophysik, Bd. 6. Berlin 1928. Bd. 7. Berlin 1936.
43. LUNDMARK, K.: (Novae) Lund Obs. Circ. **10**, 317 (1934).
44. MCCREA, W. H.: (Wasserstoff in den Sternatmosphären) Monthly Not. **89**, 483 (1929).
45. MENZEL, D. H. and C. H. PAYNE: (Novae) Proc. nat. Acad. Washington **19**, 641 (1933).
46. MILNE, E. A.: (Äußerer Teil des Sterns) Monthly Not. **85**, 768 (1925).
47. — Thermodynamics of the stars. Handbuch der Astrophysik, Bd. 3/1. Berlin 1930. — Theory of Pulsating Stars. Handbuch der Astrophysik, Bd. 3/2. Berlin 1930.
48. — (Sternmodell; weiße Zwerge) Monthly Not. **91**, 4 (1930). — Nature (Lond.) **128**, 999 (1931).
49. — (Sternmodelle) Z. Astrophysik **4**, 75 (1932).
50. — (Energieerzeugung im Sterninnern) Z. Astrophysik **5**, 337 (1932).
51. — (Untere Grenze für den Druck im Sterninnern) Monthly Not. **89**, 739 (1929); **96**, 179 (1936).
52. NERNST, W.: (Sternentwicklung) Z. Physik **97**, 511 (1935).
53. PAYNE, C. H.: Stellar Atmospheres. Harvard Mon. Nr 1. Cambridge Mass. 1925. — The Stars of High Luminosity. Harvard Mon. Nr 3. Cambridge Mass. 1930.
54. PERRIN, J.: (Umwandlung von Wasserstoff) Revue du Mois **21**, 113 (1920).
55. ROSSELAND, S.: (Opazität der Sternmaterie) Monthly Not. **84**, 525 (1924). — Handbuch der Astrophysik, Bd. 3/1. Berlin 1930.
56. — Astrophysik auf atomtheoretischer Grundlage. Berlin 1931.
57. — (Sternmodelle) Z. Astrophysik **4**, 255 (1932).
58. RUSSELL, H. N.: (Satz von VOGT und RUSSELL) RUSSELL-DUGAN-STEWART: Astronomy, Vol. 2, p. 910. Boston 1927.
59. — (Chemische Zusammensetzung der Sonnenatmosphäre) Astrophysic. J. **70**, 11 (1929).

60. SCHWARZSCHILD, M.: (Energieerzeugung im Sterninnern) *Z. Astrophysik* **13**, 126 (1937).
61. SIEDENTOPF, H.: (Weiße Zwerge) *Astron. Nachr.* **243**, 1 (1931).
62. — (Konvektion.) *Astron. Nachr.* **244**, 273 (1932).
63. STEENSHOLT, G.: (Energieerzeugung im Sterninnern) *Z. Astrophysik* **5**, 140 (1932).
64. STERNE, T. E.: (Statistisches Gleichgewicht der Atomkerne bei hoher Temperatur) *Monthly Not.* **93**, 736 (1933).
65. — (Energieerzeugung im Sterninnern) *Monthly Not.* **93**, 770 (1933).
66. STONER, E. C.: (Entartetes Elektronengas) *Monthly Not.* **92**, 651 (1932).
67. STRATTON, F. J. M.: (Novae) *Handbuch der Astrophysik*, Bd. 6. Berlin 1928. Bd. 7. Berlin 1936.
68. STRÖMGREN, B.: (Sternmodell) *Z. Astrophysik* **2**, 345 (1931).
69. — (Opazität der Sternmaterie; Wasserstoffgehalt) *Z. Astrophysik* **4**, 118 (1932); **7**, 222 (1933).
70. — Thermodynamik der Sterne und Pulsationstheorie. *Handbuch der Astrophysik*, Bd. 7. Berlin 1936.
71. — (Heliumgehalt der Sterne) *Astrophysic. J.* Im Druck (1937).
72. SUGIURA, Y.: (Absorption von Röntgenstrahlung) *Sci. Pap. Inst. physic.-chem. Res.* Nr 339 Tokyo (1931).
73. TRÜMPLER, R.: (Sternhaufen) *Publ. astr. Soc. Pacific* **40**, 265 (1928). — *Lick Obs. Bull.* **14**, 154 (1930).
74. — (Extrem massige Sterne) *Publ. astr. Soc. Pacific* **47**, 254 (1935).
75. UNSÖLD, A.: (Wasserstoff in den Sternatmosphären) *Z. Physik* **46**, 765 (1928). — *Z. Astrophysik* **3**, 81 (1931).
76. — (Konvektion) *Z. Astrophysik* **1**, 138 (1930).
77. VOGT, H.: (Satz von VOGT und RUSSELL) *Astron. Nachr.* **226**, 301 (1926).
78. — Der innere Aufbau und die Entwicklung der Sterne. *Erg. exakt. Naturwiss.* **6**, 1 (1927).\*
79. — (Äußerer Teil des Sterns) *Astron. Nachr.* **261**, 73 (1936).
80. WEIZSÄCKER, C. F. v.: (Energieerzeugung und Elementumwandlung in den Sternen) *Physik. Z.* **38**, 176 (1937).
81. WILSON, A. H.: (Energieerzeugung im Sterninnern) *Monthly Not.* **91**, 283 (1931).

# Inhalt der Bände 1—16.

(1922—1937.)

## I. Namenverzeichnis.

	Band	Seite
<b>Angenheister, G.</b> , Bodenschwingungen . . . . .	15	310—364
<b>Auerbach, Friedrich</b> , Die neuen Wandlungen der Theorie der elektrolytischen Dissoziation. . . . .	1	228—255
<b>Auwers, O. v.</b> , Ferromagnetismus . . . . .	16	133—182
<b>Backhaus, H.</b> , Nichtstationäre Schallvorgänge. . . . .	16	237—294
<b>Bartels, J.</b> , Die höchsten Atmosphärenschichten . . . . .	7	114—157
— Geophysikalischer Nachweis von Veränderungen der Sonnenstrahlung . . . . .	9	38—78
<b>Becker, Fr.</b> , Über interstellare Massen und die Absorption des Sternlichtes im Weltraum. . . . .	9	1—37
— Das lokale Sternsystem . . . . .	11	1—30
— und <b>W. Grotian</b> , Über die galaktischen Nebel und den Ursprung der Nebellinien . . . . .	7	8—91
<b>Benedicks, C.</b> , Jetziger Stand der grundlegenden Kenntnisse der Thermoelektrizität . . . . .	8	25—68
<b>Bjerrum, Niels</b> , Die elektrischen Kräfte zwischen den Ionen und ihre Wirkungen . . . . .	5	125—145
<b>Blaton, J.</b> , s. unter <b>A. Rubinowicz</b>		
<b>Bodenstein, Max</b> , Chemische Kinetik . . . . .	1	197—209
— Photochemie . . . . .	1	210—227
<b>Boegehold, H.</b> , Über die Entwicklung der Theorie der optischen Instrumente seit <b>ABBE</b> . . . . .	8	69—146
<b>Bonhoeffer, K. F.</b> , Über die Eigenschaften der freien Wasser- stoffatome . . . . .	6	201—230
<b>Born, Max</b> , Chemische Bindung und Quantenmechanik . . . . .	10	387—444
<b>Bothe, W.</b> , s. unter <b>R. Fleischmann</b>		
<b>Bottlinger, K. F.</b> , Die Rotation der Milchstraße . . . . .	11	31—63
<b>Braunbek, W.</b> , Zustandsgleichung und Zustandsbegrenzung des festen Körpers . . . . .	6	124—154
<b>Brill, A.</b> Die Strahlung der Sterne . . . . .	3	1—37
<b>Brodhun, E.</b> , Die Entwicklung der Photometrie in diesem Jahrhundert . . . . .	6	231—278
<b>Brüche, E.</b> , Freie Elektronen als Sonden des Baues der Molekeln — und <b>W. Henneberg</b> , Geometrische Elektronenoptik . . . . .	15	185—228 365—421
<b>ten Bruggencate, P.</b> , Die veränderlichen Sterne . . . . .	10	1—83
<b>v. Brunn, A.</b> , Der empirische Zeitbegriff . . . . .	4	70—85
<b>Cassel, H.</b> , Zur Kenntnis des adsorbierten Aggregatzustandes . . . . .	6	104—123
<b>Coehn, Alfred</b> , Kontaktpotential . . . . .	1	175—196
<b>Dehlinger, Ulrich</b> , Röntgenforschung in der Metallkunde. . . . .	10	325—386
<b>Eirich, F. und H. Mark</b> , Hochmolekulare Stoffe in Lösung . . . . .	15	1—43
<b>Estermann, I.</b> , Elektrische Dipolmomente von Molekülen . . . . .	8	258—306
<b>Eucken, A.</b> , Der <b>NERNSTSCHE</b> Wärmesatz . . . . .	1	120—162
<b>Falkenhagen, H.</b> , Struktur elektrolytischer Lösungen . . . . .	14	130—200
<b>Farkas, L.</b> , Über Para- und Orthowasserstoff . . . . .	12	163—218

	Band	Seite
<b>Finch, G. I. und H. Wilman, The Study of Surface Structure by Electron Diffraction</b> . . . . .	16	353—436
<b>Fleischmann, R. und W. Bothe, Künstliche Kern-<math>\gamma</math>-Strahlen, Neutronen, Positronen</b> . . . . .	13	1—56
— — Künstliche Kernumwandlung . . . . .	14	1—41
— — Langsame Neutronen . . . . .	16	1—46
<b>Franck, J., Neuere Erfahrungen über quantenhaften Energieaustausch bei Zusammenstößen von Atomen und Molekülen</b> . . . . .	2	106—123
<b>Frerichs, Rudolf, Das Wasserstoffisotop</b> . . . . .	13	257—309
<b>Freundlich, Erwin, Die Energiequellen der Sterne</b> . . . . .	6	27—43
<b>Freundlich, H., Die Orientierung von Molekülen an Grenzflächen</b> . . . . .	12	82—114
<b>Frumkin, A., Die Elektrokapillarkurve</b> . . . . .	7	235—275
<b>Geib, K. H., Atomreaktionen</b> . . . . .	15	44—105
<b>Geiger, H., Die Sekundäreffekte der kosmischen Ultrastrahlung</b> . . . . .	14	42—78
<b>Geiringer, Hilda und Willy Prager, Mechanik isotroper Körper im plastischen Zustand</b> . . . . .	13	310—363
<b>Gerlach, Walther, Magnetismus und Atombau</b> . . . . .	2	124—146
— Atomstrahlen . . . . .	3	182—198
<b>Grammel, R., Neuere Untersuchungen über kritische Zustände rasch umlaufender Wellen</b> . . . . .	1	92—119
<b>Grotian, W., s. unter F. Becker</b>		
<b>Gudden, B., Elektrizitätsleitung in kristallisierten Stoffen unter Ausschluß der Metalle</b> . . . . .	3	116—159
— Elektrische Leitfähigkeit elektronischer Halbleiter . . . . .	13	223—256
<b>Güntherschulze, A., Elektrische Ventile und Gleichrichter</b> . . . . .	3	277—315
<b>Guth, E. und H. Mark, Die Viskosität von Lösungen, besonders von Lösungen hochmolekularer Stoffe</b> . . . . .	12	115—162
<b>Halpern, O., s. unter Hans Thirring</b>		
<b>Hanle, W., Die magnetische Beeinflussung der Resonanzfluoreszenz</b> . . . . .	4	214—232
— und K. Larché, Die Lichtausbeute bei Stoßanregung . . . . .	10	285—324
<b>Heckmann, G., Die Gittertheorie der festen Körper</b> . . . . .	4	100—153
<b>Henneberg, W., s. unter E. Brüche</b>		
<b>Henning, F., Wärmestrahlung</b> . . . . .	1	163—174
— Erzeugung und Messung tiefer Temperaturen . . . . .	2	88—105
<b>Hertz, Paul, Statistische Mechanik</b> . . . . .	1	60—91
<b>Herzberg, Gerhard, Die Prädissoziation und verwandte Erscheinungen</b> . . . . .	10	207—284
<b>Hess, R., Die Statistik der Leuchtkräfte der Sterne</b> . . . . .	3	38—54
<b>Hettner, G., Neuere experimentelle und theoretische Untersuchungen über die Radiometerkräfte</b> . . . . .	7	209—234
<b>Hiedemann, E., Ultraschall</b> . . . . .	14	201—263
<b>v. Hippel, A., Der elektrische Durchschlag in Gasen und festen Isolatoren</b> . . . . .	14	79—129
<b>Hopmann, J., Die Bewegungen der Fixsterne</b> . . . . .	2	1—18
<b>Houtermans, F. G., Neuere Arbeiten über Quantentheorie des Atomkerns</b> . . . . .	9	123—221
<b>Hückel, E., Zur Theorie der Elektrolyse</b> . . . . .	3	199—276
<b>Hund, F., Molekelbau</b> . . . . .	8	147—184
— Materie unter sehr hohen Drucken und Temperaturen . . . . .	15	189—228
<b>Jeffreys, Harold, The origin of the solar system</b> . . . . .	7	1—7
<b>Johnsen, A., Fortschritte im Bereich der Kristallstruktur</b> . . . . .	1	270—297

	Band	Seite
Jordan, P., Die Lichtquantenhypothese. Entwicklung und gegenwärtiger Stand . . . . .	7	158—208
— Fortschritte der Theorie der Atomkerne . . . . .	16	47—103
Kallmann, H. und H. Mark, Der COMPTONSche Streuprozeß . . . . .	5	267—325
— H. Schüler, Hyperfeinstruktur und Atomkern . . . . .	11	134—175
Katz, J. R., Die Quellung I. Teil . . . . .	3	316—404
— Die Quellung II. Teil . . . . .	4	154—213
Kienle, Hans, Die astronomischen Prüfungen der allgemeinen Relativitätstheorie . . . . .	3	55—66
— Das kontinuierliche Spektrum der Sterne . . . . .	16	437—464
Kirchner, F., Elektroneninterferenzen und Röntgeninterferenzen . . . . .	11	64—133
— Elementumwandlung durch schnelle Wasserstoffkerne . . . . .	13	57—88
Kirsch, G., Atomzertrümmerung . . . . .	5	165—191
Kneser, H. O., Der aktive Stickstoff . . . . .	8	229—257
Kohl, K., Über ungedämpfte elektrische Ultrakurzwellen . . . . .	9	275—341
Kohlrausch, K. W. F., Der experimentelle Beweis für den statistischen Charakter des radioaktiven Zerfallsgesetzes . . . . .	5	192—212
Kohlschütter, Arnold, Spektroskopische Parallaxenforschung . . . . .	12	1—35
Kopfermann, Hans, Die Bestimmung von Kernmomenten mit Hilfe der Molekularstrahlmethode . . . . .	15	229—261
Kopff, A., Das Milchstraßensystem . . . . .	2	50—81
— Probleme der fundamentalen Positionsastronomie . . . . .	8	1—24
Kossel, W., Röntgeninterferenzen aus Gitterquellen . . . . .	16	295—352
Kratzer, A., Stand der Theorie der Bandenspektren . . . . .	1	315—334
Lanczos, Cornel, Die neue Feldtheorie Einsteins . . . . .	10	97—132
Landé, Alfred, Fortschritte beim ZEEMAN-Effekt . . . . .	2	147—162
Larché, K., s. unter W. Hanle		
Laski, G., Ultrarotforschung . . . . .	3	86—115
v. Laue, M., Röntgenstrahlenspektroskopie . . . . .	1	256—269
— Die dynamische Theorie der Röntgenstrahlinterferenzen in neuer Form . . . . .	10	133—158
Mark, H., s. unter H. Kallmann		
— s. unter F. Eirich		
— s. unter E. Guth		
— und F. Schossberger, Die Kristallstrukturbestimmung organischer Verbindungen . . . . .	16	183—236
Masing, G. und M. Polanyi, Kaltreckung und Verfestigung . . . . .	2	177—245
Meissner, W., Supraleitfähigkeit . . . . .	11	218—263
Meitner, Lise, Der Zusammenhang zwischen $\beta$ - und $\gamma$ -Strahlen . . . . .	3	160—181
Meyermann, B., Die Schwankungen unseres Zeitmaßes . . . . .	7	92—113
Minkowski, R. und H. Spöner, Über den Durchgang von Elektronen durch Atome . . . . .	3	67—85
Noddack, I. und W., Das Rhenium . . . . .	6	333—373
Orthmann, W., Kritische Arbeiten zur elektrostatischen Theorie der starken Elektrolyte . . . . .	6	155—200
Paneth, Fritz, Das periodische System der chemischen Elemente . . . . .	1	362—403
— Über das Element 72 (Hafnium) . . . . .	2	163—176
Pease, F. G., Interferometer Methods in Astronomy . . . . .	10	84—96
Peierls, R., Elektronentheorie der Metalle . . . . .	11	264—322
Pietsch, Erich, Gasabsorption unter dem Einfluß der elektrischen Entladung — clean up — und verwandte Erscheinungen . . . . .	5	213—266

	Band	Seite
<b>Polanyi, M.</b> , s. unter G. Masing		
<b>Prager, R.</b> , Die Fortschritte der Astronomie im Jahre 1921 . . . . .	1	1—25
— <b>Willy</b> , s. unter Hilda Geiringer		
<b>Prey, A.</b> , Die Theorie der Isostasie, ihre Entwicklung und ihre Ergebnisse . . . . .	4	30—69
<b>Pringsheim, Peter</b> , Lichtelektrische Wirkung und Photolumineszenz . . . . .	1	335—361
— Lichtelektrische Ionisierung von Gasen . . . . .	5	146—164
<b>Rubinowicz, A.</b> und <b>J. Blaton</b> , Die Quadrupolstrahlung. . . . .	11	176—217
<b>Rupp, E.</b> , Experimentelle Untersuchungen zur Elektronenbeugung . . . . .	9	79—122
<b>Sack, H.</b> , Dipolmoment und Molekularstruktur . . . . .	8	307—366
<b>Scheibe, Adolf</b> , Genaue Zeitmessung . . . . .	15	262—309
<b>Schiebold, E.</b> , Kristallstruktur der Silikate . . . . .	11	352—434
— Kristallstruktur der Silikate, II. Teil . . . . .	12	219—296
<b>Schmidt, Hermann</b> , Die Gesamtwärmestrahlung fester Körper	7	342—383
<b>Schnauder, G.</b> , Entwicklung und Stand der Parallaxenforschung . . . . .	2	19—49
<b>Schoenberg, Erich</b> , Über die Strahlung der Planeten . . . . .	5	1—46
<b>Schossberger, F.</b> s. unter H. Mark.		
<b>Schüler, H.</b> , s. unter H. Kallmann		
<b>Schwab, Georg-Maria</b> , Theoretische und experimentelle Fortschritte auf dem Gebiet der heterogenen Gasreaktionen	7	276—341
<b>Seliger, Paul</b> , Das photographische Meßverfahren — Photogrammetrie . . . . .	5	47—95
— Das photographische Meßverfahren — Photogrammetrie, II. Teil . . . . .	6	279—332
<b>Siegbahn, M.</b> , Messung langer Röntgenwellen mit optischen Gittern . . . . .	16	104—132
<b>Simon, F.</b> , Fünfundzwanzig Jahre NERNST'Scher Wärmesatz	9	222—274
<b>Smekal, Adolf</b> , Festigkeitseigenschaften spröder Körper . . . . .	15	106—188
<b>Sponer, H.</b> , Optische Bestimmung der Dissoziationswärme von Gasen . . . . .	6	75—103
— s. unter R. Minkowski		
<b>Steinhaus, W.</b> , Über unsere Kenntnis von der Natur der ferromagnetischen Erscheinungen und von den magnetischen Eigenschaften der Stoffe . . . . .	6	44—74
<b>Steinke, E. G.</b> , Die kosmische Ultrastrahlung . . . . .	13	89—147
<b>Stracke, G.</b> , Die kleinen Planeten . . . . .	4	1—29
<b>Strömgren, B.</b> , Die Theorie des Sterninnern und die Entwicklung der Sterne . . . . .	16	465—534
— <b>Elis</b> , Unsere Kenntnisse über die Bewegungsformen im Dreikörperproblem . . . . .	4	233—242
<b>Stuart, H. A.</b> , Kerr-Effekt, Lichtzerstreuung und Molekülbau	10	159—206
<b>Suhrmann, R.</b> , Über den äußeren Photoeffekt an adsorbierten Schichten . . . . .	13	148—222
<b>Thirring, Hans</b> , Die Relativitätstheorie . . . . .	1	26—59
— Die Grundgedanken der neueren Quantentheorie. Erster Teil: Die Entwicklung bis 1926 . . . . .	7	384—431
— und <b>O. Halpern</b> , Die Grundgedanken der neueren Quantentheorie. Zweiter Teil: Die Weiterentwicklung seit 1926	8	367—508
<b>Tomaschek, Rudolf</b> , Die Messungen der zeitlichen Änderungen der Schwerkraft . . . . .	12	36—81

	Band	Seite
Vogt, E., Magnetismus der metallischen Elemente . . . . .	II	323—351
— H., Der innere Aufbau und die Entwicklung der Sterne . . . . .	6	1—26
Wanach, B., Die Polhöhenchwankungen . . . . .	2	82—87
Wegener, Alfred, Ergebnisse der dynamischen Meteorologie . . . . .	5	96—124
Wehnelt, A., Die Oxydkathoden und ihre praktischen Anwendungen . . . . .	4	86—99
Wentzel, Gregor, Fortschritte der Atom- und Spektraltheorie . . . . .	I	298—314

## II. Sachverzeichnis.

Aggregatzustand, adsorbierter (H. Cassel) . . . . .	6	104—123
Astronomie, Fortschritte im Jahre 1921 (R. Prager) . . . . .	I	1—25
Atmosphärenschichten, höchste (J. Bartels) . . . . .	7	114—157
Atom- und Spektraltheorie, Fortschritte (Gregor Wentzel) . . . . .	I	298—314
Atombau und Magnetismus (W. Gerlach) . . . . .	2	124—146
Atome, Durchgang von Elektronen (R. Minkowski und H. Sponer) . . . . .	3	67—85
— und Moleküle, Quantenhafter Energieaustausch bei Zusammenstößen (J. Franck) . . . . .	2	106—123
Atomkern, Neuere Arbeiten über Quantentheorie des (F. G. Houtermans) . . . . .	9	123—221
— Hyperfeinstruktur und (H. Kallmann und H. Schüler) . . . . .	II	134—175
— Fortschritte der Theorie (P. Jordan) . . . . .	16	47—103
Atomreaktionen (K. H. Geib) . . . . .	15	44—105
Atomstrahlen (W. Gerlach) . . . . .	3	182—198
Atomzertrümmerung (G. Kirsch) . . . . .	5	165—191
Bandenspektren, Stand der Theorie (R. Kratzer) . . . . .	I	315—334
$\beta$ - und $\gamma$ -Strahlen, Zusammenhang (Lise Meitner) . . . . .	3	160—181
Bodenschwingungen (G. Angenheister) . . . . .	15	310—364
Chemische Bindung und Quantenmechanik (Max Born) . . . . .	10	387—404
Chemische Elemente, Periodisches System (Fritz Paneth) . . . . .	I	362—403
Chemische Kinetik (Max Bodenstein) . . . . .	I	197—209
Comptonischer Streuprozeß (H. Kallmann und H. Mark) . . . . .	5	267—325
Dipolmoment und Molekularstruktur (H. Sack) . . . . .	8	307—366
Dipolmomente, elektrische, von Molekülen (I. Estermann) . . . . .	8	258—306
Dissoziation, elektrolytische, neue Wandlungen der Theorie (F. Auerbach) . . . . .	I	228—255
Dissoziationswärme von Gasen, optische Bestimmung (H. Sponer) . . . . .	6	75—103
Dreikörperproblem, Bewegungsformen (Elis Strömgren) . . . . .	4	233—242
Druck, Materie unter sehr hohen Drucken und Temperaturen (F. Hund) . . . . .	15	189—228
Elektrizitätsleitung in kristallisierten Stoffen (Bernhard Gudden) . . . . .	3	116—159
Elektrokapillarkurve (A. Frumkin) . . . . .	7	235—275
Elektrolyse, Theorie (E. Hückel) . . . . .	3	199—276
Elektrolyte, starke, Kritische Arbeiten zu ihrer elektrostatischen Theorie (W. Orthmann) . . . . .	6	155—200
Elektrolytische Dissoziation, Neue Wandlungen der Theorie (F. Auerbach) . . . . .	I	228—255
— Lösungen, Struktur (H. Falkenhagen) . . . . .	14	130—200

	Band	Seite
<b>Elektronen, Durchgang durch Atome</b> (R. Minkowski und H. Sponer) . . . . .	3	67—85
— freie, als Sonden des Baues der Molekeln (E. Brüche)	8	185—228
<b>Elektronenbeugung, Experimentelle Untersuchungen</b> (E. Rupp) . . . . .	9	79—122
— The Study of Surface Structure by Electron Diffraction (G. I. Finch und H. Wilman) . . . . .	16	353—436
<b>Elektroneninterferenzen und Röntgeninterferenzen</b> (F. Kirchner) . . . . .	11	64—133
<b>Elektronenoptik, geometrische</b> (E. Brüche und W. Henneberg) . . . . .	15	365—421
<b>Elektronentheorie der Metalle</b> (R. Peierls) . . . . .	11	264—322
<b>Element 72 (Hafnium)</b> (Fritz Paneth) . . . . .	2	163—176
<b>Elemente, chemische, Periodisches System</b> (Fritz Paneth)	1	362—403
<b>Elementumwandlung durch schnelle Wasserstoffkerne</b> (F. Kirchner) . . . . .	13	57—88
<b>Entwicklung der Sterne und Theorie des Sterninnern</b> (B. Strömgren) . . . . .	16	465—534
<b>Feldtheorie, Einsteins neue</b> (Cornel Lanczos) . . . . .	10	97—132
<b>Ferromagnetische Erscheinungen und magnetische Eigenschaften der Stoffe</b> (W. Steinhaus) . . . . .	6	44—74
<b>Ferromagnetismus</b> (O. v. Auwers) . . . . .	16	133—182
<b>Fester Körper, Gittertheorie</b> (G. Heckmann) . . . . .	4	100—153
— Wärmestrahlung (Hermann Schmidt) . . . . .	7	342—383
— Zustandsgleichung und -begrenzung (W. Braunbek)	6	124—154
<b>Festigkeitseigenschaften spröder Körper</b> (Adolf Smekal)	15	106—188
<b>Fixsterne, Bewegungen</b> (J. Hopmann) . . . . .	2	1—18
<b><math>\gamma</math>-Strahlen, Kern-, künstliche</b> (R. Fleischmann und W. Bothe) . . . . .	13	1—56
<b>Gasabsorption unter Einfluß elektrischer Entladung</b> (Erich Pietsch) . . . . .	5	213—266
<b>Gasreaktionen, heterogene, theoretische und experimentelle Fortschritte</b> (Georg-Maria Schwab) . . . . .	7	276—341
<b>Gitterquellen, Röntgeninterferenzen aus</b> (W. Kossel) . . . . .	16	295—352
<b>Gittertheorie, Feste Körper</b> (G. Heckmann) . . . . .	4	100—153
<b>Gleichrichter und Ventile, elektrische</b> (Güntherschulze)	3	277—315
<b>Grenzflächen, Orientierung von Molekülen</b> (H. Freundlich)	12	82—114
<b>Hafnium (Element 72)</b> (Fritz Paneth) . . . . .	2	163—176
<b>Halbleiter, elektronischer, elektrische Leitfähigkeit</b> (B. Guden) . . . . .	13	223—256
<b>Hochmolekulare Lösungen, Viskosität</b> (E. Guth und H. Mark)	12	115—162
<b>Hochmolekulare Stoffe in Lösung</b> (F. Eirich und H. Mark)	15	1—43
<b>Hyperfeinstruktur und Atomkern</b> (H. Kallmann und H. Schüler) . . . . .	11	134—175
<b>Interferometer Methods in Astronomy</b> (F. G. Pease) . . . . .	10	84—96
<b>Interstellare Massen und die Absorption des Sternlichtes im Weltraum</b> (Fr. Becker) . . . . .	9	1—37
<b>Ionen, Elektrische Kräfte und Wirkungen</b> (Niels Bjerrum)	5	125—145
<b>Ionisierung, lichtelektrische, von Gasen</b> (Peter Pringsheim)	5	146—164
<b>Isostasie, Theorie und Entwicklung ihrer Ergebnisse</b> (A. Prey)	4	30—69
<b>Kaltreckung und Verfestigung</b> (G. Masing und M. Polanyi)	2	177—245
<b>Kern-<math>\gamma</math>-Strahlen, künstliche</b> (R. Fleischmann und W. Bothe)	13	1—56



	Band	Seite
<b>Kernmomente</b> , Bestimmung mit Hilfe der Molekularstrahl- methode (Hans Kopfermann) . . . . .	15	229—261
<b>Kernumwandlung</b> , Künstliche (R. Fleischmann und W. Bothe) . . . . .	14	1—41
<b>Kerr-Effekt</b> , Lichtzerstreuung und Molekülbau (H. A. Stuart)	10	159—206
<b>Kontaktpotential</b> (Alfred Coehn) . . . . .	1	175—196
<b>Kosmische Ultrastrahlung</b> (E. G. Steinke) . . . . .	13	89—147
— — Die Sekundäreffekte (H. Geiger) . . . . .	14	42—78
<b>Kristallisierte Stoffe</b> , Elektrizitätsleitung (Bernhard Gudden)	3	116—159
<b>Kristallstruktur</b> , Fortschritte (A. Johnsen) . . . . .	1	270—297
<b>Kristallstruktur</b> der Silikate (E. Schiebold) . . . . .	11	352—434
— — II. Teil (E. Schiebold) . . . . .	12	219—296
<b>Kristallstrukturbestimmung</b> organischer Verbindungen (H. Mark und F. Schossberger) . . . . .	16	183—236
<b>Kurzwellen</b> , Ultra-, ungedämpfte elektrische (K. Kohl) . . . .	9	275—341
<b>Lichtausbeute</b> bei Stoßanregung (W. Hanle und K. Larché)	10	285—324
<b>Lichtelektrische Ionisierung</b> der Gase (Peter Pringsheim)	5	146—164
— <b>Wirkung</b> und Photolumineszenz (Peter Pringsheim)	1	335—361
<b>Lichtquantenhypothese</b> , Entwicklung und gegenwärtiger Stand (P. Jordan) . . . . .	7	158—208
<b>Lichtzerstreuung</b> und Molekülbau, Kerr-Effekt (H. A. Stuart)	10	159—206
<b>Lösung</b> , Hochmolekulare Stoffe in (F. Eirich und H. Mark)	15	1—43
<b>Lösungen</b> , besonders hochmolekulare, Viskosität (E. Guth und H. Mark) . . . . .	12	115—162
— <b>Struktur</b> elektrolytischer (H. Falkenhagen) . . . . .	14	130—200
<b>Magnetische Eigenschaften</b> und ferromagnetische Erschei- nungen der Stoffe (W. Steinhaus) . . . . .	6	44—74
<b>Magnetismus</b> und Atombau (W. Gerlach) . . . . .	2	124—146
— der metallischen Elemente (E. Vogt) . . . . .	11	323—351
<b>Materie</b> unter sehr hohen Drucken und Temperaturen (F. Hund) . . . . .	15	189—228
<b>Mechanik</b> isotroper Körper im plastischen Zustand (Hilda Geiringer und Willy Prager) . . . . .	13	310—363
— statistische (Paul Hertz) . . . . .	1	60—91
<b>Messung langer Röntgenwellen</b> mit optischen Gittern (M. Sieg- bahn) . . . . .	16	104—132
<b>Metalle</b> , Elektronentheorie (R. Peierls) . . . . .	11	264—322
<b>Metallische Elemente</b> , Magnetismus (E. Vogt) . . . . .	11	323—351
<b>Metallkunde</b> , Röntgenforschung in der (Ulrich Dehlinger)	10	325—386
<b>Meteorologie</b> , dynamische, Ergebnisse (Alfred Wégener)	5	96—124
<b>Milchstraße</b> , Die Rotation der (K. F. Bottlinger) . . . . .	11	31—63
<b>Milchstraßensystem</b> (A. Kopff) . . . . .	2	50—81
<b>Molekelbau</b> (F. Hund) . . . . .	8	147—184
— Freie Elektronen als Sonden (E. Brüche) . . . . .	8	185—228
<b>Molekularstrahlmethode</b> , Zur Bestimmung von Kernmomen- ten (Hans Kopfermann) . . . . .	15	229—261
<b>Molekularstruktur</b> und Dipolmoment (H. Sack) . . . . .	8	307—366
<b>Molekülbau</b> und Lichtzerstreuung, Kerr-Effekt (H. A. Stuart)	10	159—206
<b>Moleküle</b> und Atome, Quantenhafter Energieaustausch bei Zusammenstößen (J. Franck) . . . . .	2	106—123
— Elektrische Dipolmomente (I. Estermann) . . . . .	8	258—306
— Orientierung an Grenzflächen (H. Freundlich) . . . . .	12	82—114

	Band	Seite
<b>Nebel, galaktische und Ursprung der Nebellinien</b> (Fr. Becker und W. Grotrian) . . . . .	7	8–91
<b>Nernstscher Wärmesatz</b> (A. Eucken) . . . . .	1	120–162
— — fünfundzwanzig Jahre (F. Simon) . . . . .	9	222–274
<b>Neutronen</b> (R. Fleischmann und W. Bothe) . . . . .	13	1–56
— langsame (R. Fleischmann und W. Bothe) . . . . .	16	1–46
<b>Nichtstationäre Schallvorgänge</b> (H. Backhaus) . . . . .	16	237–294
<b>Oberflächenstruktur, The Study of Surface Structure by electron Diffraction</b> (G. I. Finch und H. Wilman) . . . . .	16	353–436
<b>Optische Instrumente seit ABBE, ihre Theorie</b> (H. Boegehold) . . . . .	8	69–146
<b>Organische Verbindungen, Kristallstrukturbestimmung</b> (H. Mark und F. Schossberger) . . . . .	16	183–236
<b>Ortho- und Parawasserstoff</b> (L. Farkas) . . . . .	12	163–218
<b>Oxydkathoden, Praktische Anwendungen</b> (A. Wehnelt) . . . . .	4	86–99
<b>Parallaxenforschung, Entwicklung und Stand</b> (G. Schnauder) . . . . .	2	19–49
— spektroskopische (Arnold Kohlschütter) . . . . .	12	1–35
<b>Para- und Orthowasserstoff</b> (L. Farkas) . . . . .	12	163–218
<b>Periodisches System, chemische Elemente</b> (Fritz Paneth) . . . . .	1	362–403
<b>Photochemie</b> (M. Bodenstein) . . . . .	1	210–227
<b>Photoeffekt, äußerer, an adsorbierten Schichten</b> (R. Suhrmann) . . . . .	13	148–222
<b>Photographisches Meßverfahren</b> (Paul Seliger) . . . . .	5	47–95
— — II. Teil (Paul Seliger) . . . . .	6	279–332
<b>Photolumineszenz und lichtelektrische Wirkung</b> (Peter Pringsheim) . . . . .	1	335–361
<b>Photometrie, ihre Entwicklung in diesem Jahrhundert</b> (E. Brodhun) . . . . .	6	231–278
<b>Planeten, kleine</b> (G. Stracke) . . . . .	4	1–29
— Strahlung (Erich Schoenberg) . . . . .	5	1–46
<b>Plastischer Zustand, Mechanik isotroper Körper im</b> (Hilda Geiringer und Willy Prager) . . . . .	13	310–363
<b>Polhöschwankungen</b> (B. Wanach) . . . . .	2	82–87
<b>Positionsastronomie, fundamentale</b> (A. Kopff) . . . . .	8	1–24
<b>Positronen</b> (R. Fleischmann und W. Bothe) . . . . .	13	1–56
<b>Prädissoziation und verwandte Erscheinungen</b> (G. Herzberg) . . . . .	10	207–284
<b>Quadrupolstrahlung</b> (A. Rubinowicz und J. Blaton) . . . . .	11	176–217
<b>Quantenhafter Energieaustausch bei Zusammenstößen von Atomen und Molekülen</b> (J. Franck) . . . . .	2	106–123
<b>Quantenhypothese, Licht-, Entwicklung und gegenwärtiger Stand</b> (P. Jordan) . . . . .	7	158–208
<b>Quantenmechanik und chemische Bindung</b> (Max Born) . . . . .	10	387–444
<b>Quantentheorie des Atomkerns, Neuere Arbeiten</b> (F. G. Houtermans) . . . . .	9	123–221
— Grundgedanken I. Teil (Hans Thirring) . . . . .	7	384–431
— — II. Teil (O. Halpern und Hans Thirring) . . . . .	8	367–508
<b>Quellung, I. Teil</b> (J. R. Katz) . . . . .	3	316–404
— II. Teil (J. R. Katz) . . . . .	4	154–213
<b>Radioaktives Zerfallsgesetz, Experimenteller Beweis für statistischen Charakter</b> (K. W. F. Kohlrausch) . . . . .	5	192–212
<b>Radiometerkräfte, Neuere experimentelle und theoretische Untersuchungen</b> (G. Hettner) . . . . .	7	209–234
<b>Relativitätstheorie</b> (Hans Thirring) . . . . .	1	26–59
— allgemeine, Astronomische Prüfungen (Hans Kienle) . . . . .	3	55–66

	Band	Seite
<b>Resonanzfluoreszenz, Magnetische Beeinflussung</b> (W. Hanle)	4	214—232
<b>Rhenium</b> (I. und W. Noddack)	6	333—373
<b>Röntgenforschung in der Metallkunde</b> (Ulrich Dehlinger)	10	325—386
<b>Röntgeninterferenzen, Elektroneninterferenzen und</b> (F. Kirchner)	11	64—133
— aus Gitterquellen (W. Kossel)	16	295—352
<b>Röntgenstrahlenspektroskopie</b> (M. v. Laue)	1	256—269
<b>Röntgenstrahleninterferenzen, Die dynamische Theorie in neuer Form</b> (M. v. Laue)	10	133—158
<b>Röntgenwellen, Messung mit optischen Gittern</b> (M. Siegbahn)	16	104—132
<b>Schwerkraft, Messung der zeitlichen Änderungen</b> (Rudolf Tomaschek)	12	36—81
<b>Sekundäreffekte der kosmischen Ultrastrahlung</b> (H. Geiger)	14	42—78
<b>Silikate, Kristallstruktur</b> (E. Schiebold)	11	352—434
— — II. Teil (E. Schiebold)	12	219—296
<b>Solar system, The origin</b> (H. Jeffreys)	7	1—7
<b>Sonnenstrahlung, Veränderungen, geophysikalischer Nachweis</b> (J. Bartels)	9	38—78
<b>Spektral- und Atomtheorie</b> (Gregor Wentzel)	1	298—314
<b>Spektroskopische Parallaxenforschung</b> (Arnold Kohlschütter)	12	1—35
<b>Spektrum, kontinuierliches der Sterne</b> (H. Kienle)	16	437—464
<b>Sterne, Energiequellen</b> (E. Freundlich)	6	27—43
— Innerer Aufbau und Entwicklung (H. Vogt)	6	1—26
— kontinuierliches Spektrum der (H. Kienle)	16	437—464
— Statistik der Leuchtkräfte (R. Hess)	3	38—54
— Strahlung (A. Brill)	3	1—37
— veränderliche (P. ten Bruggencate)	10	1—83
<b>Sterninneres, Theorie des Sterninnern und Entwicklung der Sterne</b> (B. Strömgen)	16	465—534
<b>Sternlicht, Absorption im Weltraum und interstellare Massen</b> (Fr. Becker)	9	1—37
<b>Sternsystem, lokales</b> (Fr. Becker)	11	1—30
<b>Stickstoff, aktiver</b> (H. O. Kneser)	8	229—257
<b>Stoßanregung, Lichtausbeute</b> (W. Hanle und K. Larché)	10	285—324
<b>Streuprozeß, Comptonscher</b> (H. Kallmann und H. Mark)	5	267—325
<b>Supraleitfähigkeit</b> (W. Meissner)	11	218—263
<b>Surface Structure, Study by Electron Diffraction</b> (G. I. Finch und H. Wilman)	16	353—436
<b>Temperatur, Materie unter sehr hohen Drucken und Temperaturen</b> (F. Hund)	15	189—228
<b>Temperaturen, tiefe, Erzeugung und Messung</b> (F. Henning)	2	88—105
<b>Thermoelektrizität, Jetziger Stand der grundlegenden Kenntnisse</b> (C. Benedicks)	8	25—68
<b>Ultrakurzwellen, ungedämpfte elektrische</b> (K. Kohl)	9	275—341
<b>Ultrarotforschung</b> (G. Laski)	3	86—115
<b>Ultraschall</b> (E. Hiedemann)	14	201—263
<b>Ultrastrahlung, kosmische</b> (E. G. Steinke)	13	89—147
— Die Sekundäreffekte der kosmischen (H. Geiger)	14	42—78
<b>Ventile und Gleichrichter, elektrische</b> (Güntherschulze)	3	277—315
<b>Veränderliche Sterne</b> (P. ten Bruggencate)	10	1—83
<b>Verfestigung und Kaltreckung</b> (G. Masing und M. Polanyi)	2	177—245

	Band	Seite
<b>Viskosität von Lösungen, besonders hochmolekularer (E. Guth und H. Mark)</b> . . . . .	12	115—162
<b>Wärmesatz, NERNSTScher (A. Eucken)</b> . . . . .	1	120—162
— — <b>fünfundzwanzig Jahre (F. Simon)</b> . . . . .	9	222—274
<b>Wärmestrahlung (F. Henning)</b> . . . . .	1	163—174
— <b>fester Körper (Hermann Schmidt)</b> . . . . .	7	342—383
<b>Wasserstoff, Para-, Ortho- (L. Farkas)</b> . . . . .	12	163—218
<b>Wasserstoffatome, freie, ihre Eigenschaften (K. F. Bonhoeffer)</b> . . . . .	6	201—230
<b>Wasserstoffisotop (Rudolf Frerichs)</b> . . . . .	13	257—309
<b>Wasserstoffkerne, schnelle, Elementumwandlung (F. Kirchner)</b> . . . . .	13	57—88
<b>Wellen, Neuere Untersuchungen über kritische Zustände rasch umlaufender (R. Grammel)</b> . . . . .	1	92—119
<b>Zeemaneffekt, Fortschritte (A. Landé)</b> . . . . .	2	147—162
<b>Zeitbegriff, empirischer (A. v. Brunn)</b> . . . . .	4	70—85
<b>Zeitmaß, Schwankungen (B. Meyermann)</b> . . . . .	7	92—113
<b>Zeitmessung, Genaue (Adolf Scheibe)</b> . . . . .	15	262—309
<b>Zerfallsgesetz, radioaktives, Experimenteller Beweis für statistischen Charakter (K. W. F. Kohlrausch)</b> . . . . .	5	192—212
<b>Zustandsgleichung und -begrenzung des festen Körpers (W. Braunbek)</b> . . . . .	6	124—154