Deutsches Reich

Reichsamt für Wetterdienst

Wissenschaftliche Abhandlungen

Band I

Nr. 6

Formeln und Tabellen der zugeordneten Kugelfunktionen 1. Art von n = 1 bis n = 20

von

R. und L. Egersdörfer

I. Teil: Formeln

1936

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Deutsches Reich

Reichsamt für Wetterdienst

Wissenschaftliche Abhandlungen

Band I

Nr. 6

Formeln und Tabellen der zugeordneten Kugelfunktionen 1. Art von n = 1 bis n = 20

von

R. und L. Egersdörfer

I. Teil: Formeln

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1936

ISBN 978-3-662-35888-7 ISBN 978-3-662-36718-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-36718-6

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
A. Einleitung	3
B. Die Darstellung einer willkürlichen Funktion auf der Kugel nach Kugelfunktionen 1. Art	4
C. Die Aufbereitung der Kugelfunktionen zur numerischen Berechnung	5
1. Die gewöhnlichen (Legendre'schen) Kugelfunktionen	5
2. Die Gewinnung der Ableitungen $P_n^{(j)}$ (x) aus den Legendre'schen Funktionen P_n (x)	7
3. Die Gewinnung der trigonometrischen Polynome $P_n^{(j)}$ (cos t)	8
4. Die Gewinnung der zugeordneten Kugelfunktionen 1. Art P_n^j (cos t)	11
5. Die trigonometrischen Polynome R_n^j (cos t) . .	14
D. Zusammenfassung	15
Anlagen:	
1. Koeffizientenschema der $a_{n,k}$. (Zu C, 1)	17
2. Zusammenstellung d. Legendre,schen Kugelfunktionen $P_n(x) = P_n^0(x)$ und ihrer Ableitungen $P_n^{(j)}(x)$. (Zu C, 2)	18
Anhang: Tabelle der ungeraden Fakultäten (2n—1)!!	25
3. Die trigonometrischen Polynome für $\cos^j$ t und $\sin^j$ t für j = 1, 2, ... , 21. (Zu C, 3)	25
4. Zusammenstellung der Kugelfunktionen $P_n^{(0)}$ (cos t) und ihrer Ableitungen $P_n^{(j)}$ (cos t). (Zu C, 3) . .	27
5. Übersicht der zur Gewinnung der Koeffizienten $d_{n,j;k}$ in P_n^j (cos t) zu verwendenden Schemata. (Zu C, 4)	35
6. Zusammenstellung der zugeordneten Kugelfunktionen 1. Art P_n^j (cos t) in Vielfachen des Winkels t. (Zu C, 4)	37
7. a) Übersicht der Größen $s_{n,j} = q_n^j \cdot D_{n,j}$. (Zu C, 5)	48
b) Übersicht der zur Berechnung der $s_{n,j}$ notwendigen Transzendenten und Radikale. (Zu C, 5) . .	54
c) Übersicht der ausgerechneten Koeffizienten $s_{n,j}$. (Zu C. 5)	57
8. Zusammenstellung der Polynome R_n^j (cos t) mit ausgerechneten Koeffizienten $r_{n,j;k}$. (Zu C, 5) . . .	59

A. Einleitung.

Jede willkürliche Funktion f (t, w) auf der Einheitskugel (r = 1) kann nach einem Satze der Pot.-Theorie nach den gewöhnlichen und zugeordneten Kugelfunktionen 1. Art P_n^j (cos t) unter gewissen Voraussetzungen entwickelt werden. Dazu ist die Kenntnis dieser Funktionen und für die praktische Anwendung ihre Darbietung in rechnerischer oder zeichnerischer Form notwendig.

Den umfangreichen Tabellen des zweiten Teils geht zunächst eine ebenfalls recht ausführlich gehaltene Formelsammlung voraus. Jhre Ausführlichkeit ist begründet in zwei Tatsachen. Die Aufstellung der Kugelfunktionen 1. Art ist, obwohl die zugrunde liegenden Formeln an sich leicht übersehbar sind, für den praktischen Rechner doch recht mühsam und erfordert den Einsatz aller nur denkbaren Kontrollen. Es wird daher die Wiedergabe aller Zwischenstufen, die auch für andere, hier nicht gemeinte Zwecke selbständige Bedeutung haben, von wissenschaftlichem Werte sein. Anderseits sind die in der Literatur bereits vorhandenen Formelsammlungen nicht übereinstimmend gehalten. Die in ihnen enthaltenen Formeln unterscheiden sich von Autor zu Autor durch gewisse konstante Faktoren. Ohne deren Kenntnis ist der Gebrauch der auf ihnen aufgebauten Tabellen sehr schwierig, manchmal geradezu irreführend. Es wurde deshalb auf die klare Herausarbeitung dieser Faktoren und ihre jedesmalige Anführung besonderer Wert gelegt. Es erübrigt noch hinzuzufügen, daß die später erscheinenden Tabellen durch den Hinweis auf die ihnen zugrunde liegenden Formeln in zahlenmäßiger Auswertung leicht nachprüfbar werden, was bei dem Umfang der beabsichtigten Darstellung ein nicht zu unterschätzender Vorteil ist.

Die Formelsammlung ist im Hinblick auf gewisse Zwecke der Geophysik gegenüber bereits vorhandenen Sammlungen und Tabellen von J. H. Tallquist[1]) und Ad. Schmidt[2]), die nur bis n = 8 reichen, auf n = 20 erweitert worden. Dies bedeutet, wenn auf der als Kugel angenommenen Erde unter t der Polabstand und unter w die geographische Länge verstanden wird, daß noch Gebilde erfaßt werden können, deren West-Osterstreckung 360 : 20 : 2 = 9 Grad und deren Nord-Südausdehnung 180 : 20 : 2 = 4.5 Grad beträgt. Man wird also z. B. bei einer Luftdruckkarte der Erde damit an die Dimensionen auch der kleineren Hoch- und Tiefdruckgebiete herankommen können.

Die Ziffernzahl der tabellierten Funktionswerte im Werke von Tallquist wechselt zwischen 8 und 11; bei Ad. Schmidt sind bei den Kugelfunktionen 1. Art, sowie gewissen Ableitungen derselben meist zehnstellige Dezimalbrüche verwendet worden. Die Logarithmen dieser Funktionswerte sind allerdings nur vierstellig gegeben.

Die im Teil II folgenden Tabellen wurden zunächst auf 14 Stellen berechnet, weil die zu ihrer Herstellung verwendete Brunsviga-Dupla-Rechenmaschine eine solche Ausnutzung ohne weiteres erlaubte, da sie im Einstell- und Resultatwerk mit 15 Stellen arbeitet. Soweit in der Formelsammlung des Teiles I rationale Brüche bezw. ganze Zahlen auftreten, sind diese selbstverständlich ohne Rücksicht auf die Ziffernanzahl jedesmal vollständig angeführt worden.

Da die für die Praxis allein in Frage kommenden zugeordneten Kugelfunktionen ihrer Herleitung nach transzendente Zahlenwerte, praktisch gesprochen, unendliche Dezimalbrüche liefern, wurde für die endgültigen Tabellen die strenge theoretische Definition beibehalten. Diese erforderte zwar ein – an der Gesamtheit gemessen — unerhebliches Mehr an Rechenarbeit für die Formelsammlung, liefert aber, ebenso wie das Tabellenwerk von Ad. Schmidt, gegenüber Tallquist bequemere Zahlenwerte in Bezug auf die Größenordnung. Da bei Ad. Schmidt trotz der sorgfältigen Verwendung möglichst rationaler Faktoren endliche Dezimalbrüche nur ganz vereinzelt und nur bei den einfachsten Kugelfunktionen noch aufschimmern, dürfte der Verzicht auf rationale Faktoren leicht durch den Vorteil des Festhaltens an der durch die strenge Theorie vorgeschriebenen Form der Kugelfunktionen aufgewogen werden.

[1]) Tallquist, Acta Soc. Scient. Fenn. T. 33, Nr. 9.

[2]) Ad. Schmidt, Abhandl. d. Preuß. Meteorol. Inst. Bd. III, Nr. 2. Archiv d. Erdmagn. Heft 5. Berlin 1925.

B. Die Darstellung einer willkürlichen Funktion auf der Kugel nach Kugelfunktionen 1. Art.

Die Formel für die Entwicklung einer willkürlichen Funktion f (t, w) nach den gewöhnlichen und zugeordneten Kugelfunktionen 1. Art lautet:

$$\text{I. } f(t, w) = \sum_0^\infty{}_n\, a_n P_n(\cos t) + \sum_0^\infty{}_n \sum_0^n{}_j\, a_n^j \cos(nw) P_n^j(\cos t) + b_n^j \sin(nw) P_n^j(\cos t),$$

wobei gilt:

$$\text{II. } \begin{matrix} a_n^j \\ b_n^j \end{matrix} = \frac{(2n+1)\,(n-j)!}{2\pi\,(n+j)!} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} f(t', w')\, P_n^j(\cos t')\, \sin t' \begin{matrix} \cos(nw') \\ \sin(nw') \end{matrix} dt'\, dw' \text{ und } a_n = \tfrac{1}{2} a_n^0;$$

$$\text{mit } j = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots n$$
$$\text{und } n = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots \infty$$

Die an f (t, w) zu stellenden Voraussetzungen über die Entwickelbarkeit werden hier als nicht zur Sache gehörig übergangen.

Setzt man nun:

$$(1)\quad q_n^j = \sqrt{\frac{(2n+1)\,(n-j)!}{2\pi\,(n+j)!}} \quad \text{(nur die positive Wurzel wird gebraucht)}$$

und (2) $q_n^j P_n^j(\cos t) = R_n^j(\cos t)$, so geht II über in

$$\text{III. } \begin{matrix} a_n^j \\ b_n^j \end{matrix} = q_n^j \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} f(t', w')\, R_n^j(\cos t'),\ \sin t' \begin{matrix} \cos(nw') \\ \sin(nw') \end{matrix} dt'\, dw'.$$

Durch die Vereinigung des in III. noch übrig gebliebenen q_n^j mit den ungestrichenen P_n^j (cos t) in I. erhält man die nur mehr die Funktion R_n^j (cos t) aufweisende Darstellung:

$$\begin{aligned} \text{IV. } f(t, w) = &\sum_0^\infty{}_n \cos(nw)\, R_n^0(\cos t) \cdot \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} f(t', w')\, R_n^0(\cos t')\, \sin t'\, dt' \cos(nw')\, dw' \\ &+ \sum_0^\infty{}_n \sum_0^n{}_j \cos(nw)\, R_n^j(\cos t) \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} f(t', w')\, R_n^j(\cos t')\, \sin t'\, dt' \cos(nw')\, dw' \\ &+ \sum_0^\infty{}_n \sum_0^n{}_j \sin(nw)\, R_n^j(\cos t) \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} f(t', w')\, R_n^j(\cos t')\, \sin t'\, dt' \sin(nw')\, dw'. \end{aligned}$$

Liegen also die Tabellen für R_n^j (cos t) vor, so erhält man die Funktion f (t, w) nach IV (abgesehen von der Summenbildung) durch Multiplikation der Ausdrücke cos (nw) R_n^0 (cos t), cos (nw) R_n^j (cos t) und sin (nw) R_n^j (cos t) mit Doppelintegralen, in welchen dieselben R_n^j (cos t) unter Ersetzung von t durch t′ noch mit sin t′ multipliziert auftreten.

Wir setzen dementsprechend noch:

(3) $R_n^j(\cos t) \sin t = Q_n^j(\cos t)$

und erhalten endgültig:

$$\begin{aligned} \text{V. } f(t, w) = &\sum_0^\infty{}_n \cos(nw)\, R_n^0(\cos t) \cdot \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} f(t', w')\, Q_n^0(\cos t')\, dt' \cos(nw')\, dw' \\ &+ \sum_0^\infty{}_n \sum_0^n{}_j \cos(nw)\, R_n^j(\cos t) \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} f(t', w')\, Q_n^j(\cos t')\, dt' \cos(nw')\, dw' \\ &+ \sum_0^\infty{}_n \sum_0^n{}_j \sin(nw)\, R_n^j(\cos t) \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} f(t', w')\, Q_n^j(\cos t')\, dt' \sin(nw')\, dw'. \end{aligned}$$

Dies ist die für die wirkliche Auswertung von f (t, w) bequemste Darstellung, zu der allerdings zwei Tabellen für jedes Argumentpaar n, j benötigt werden, nämlich eine für R_n^j (cos t) und eine für Q_n^j (cos t). Die verkleinernde Wirkung des Faktors q_n^j läßt sich leicht aus seiner Definition ablesen. Nach (1) fällt q_n^j von (4) $q_n^0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi\,(2n+1)}$, das von n = 3 ab den Wert 1 überschreitet, auf (5) $q_n^n = q_n^0 \cdot \sqrt{1/(2n)!}$ ab. Dem Absinken von q_n^j entspricht nun, wie der Anlage 6 zu entnehmen ist oder aus den entsprechenden Formeln für P_n^j (cos t) abgelesen werden kann, ein schnelles Ansteigen der Koeffizienten $D_{n,j}$ in P_n^j (cos t) mit ansteigendem j. Es wird also im Ganzen die Größenordnung der R_n^j (cos t) ausgeglichen. Man kann deshalb mit Recht von einer normalisierenden Wirkung der Faktoren q_n^j sprechen.

C. Die Aufbereitung der Kugelfunktionen zur numerischen Berechnung.

Die Gewinnung der Q und R in Formel V. beruht auf der Definition der P_n^j (cos t), die in der Literatur (²) als die eigentlichen zugeordneten Kugelfunktionen 1. Art bezeichnet werden. Wir bringen von diesen Definitionen und dem zugehörigen Formelapparat nur soviel, als für die nachfolgende Darstellung und die Auswertung notwendig war.

Die Aufbereitung vollzieht sich in verschiedenen Schritten.

1. Die gewöhnlichen (Legendre'schen) Kugelfunktionen.

Für die gewöhnlichen Kugelfunktionen nach Legendre lautet die Definition, die nur für den Bereich des Arguments x zwischen — 1 und + 1 gilt:

$$(6) \quad P_n(x) = (1 : 2^n) \sum_{0}^{2k \leq n} {}_k \, (-1)^k \, a_{n,k} \, x^{n-2k} \text{ für } |x| \leq 1$$

mit

$$(7) \quad a_{n,k} = \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!\,(n-k)!\,k!}.$$

Für diese nach Potenzen mit jeweils geraden oder ungeraden Exponenten fortschreitenden Polynome in x gilt die Rekursionsformel:

$$(8) \quad P_n = \frac{2n-1}{n} x P_{n-1} - \frac{n-1}{n} P_{n-2};\; n = 2, 3, 4, \ldots$$

Weitere Kontrollen sind gegeben durch:

$$(9) \quad P_n(1) = 1;$$

$$(10\,a) \quad P_n(0) = 0; \text{ für } n = 2u+1.$$

$$(10\,b) \quad P_n(0) = (-1)^u \frac{n!}{2^n (u!)^2} \text{ für } n = 2u,$$

Die Koeffizienten $a_{n,k}$ der P_n laufen wegen der in ihnen steckenden Fakultäten rasch zu sehr großen Werten auf. Anstelle des für die erste Berechnung wenig geeigneten Rekursionsverfahrens nach (8) wurde deshalb das folgende gesetzt:

Man geht aus von dem in Anlage 1 nach (6) bezw. (7) aufgestellten Koeffizientenschema der $a_{n,k}$. Alle seine Glieder können durch Multiplikation mit echten oder unechten Brüchen gegenseitig auseinander abgeleitet werden, sind aber nach bekannten Sätzen der Zahlentheorie ganze Zahlen. Für die multiplikative Ableitung der Koeffizienten der ersten (längsten) Spalte im Schema der Anlage 1 gilt:

$$(11\,a) \quad a_{n+1,0} = \frac{2\,(2n+1)}{n+1} \cdot a_{n,0},$$

wobei

$$(11\,b) \quad a_{n,0} = \frac{(2n)!}{n!\,n!} \text{ mit } a_{0,0} = 1.$$

Besonders einfach schreitet man in der Diagonalrichtung nach rechts unten vor, weil hier die Koeffizienten symmetrisch angeordnet sind und

$$(12) \quad a_{n+1,k+1} = \frac{n-2k}{k+1} a_{n,k};$$

wegen dieser Symmetrie braucht nur der stark umrandete Teil der Anlage wirklich berechnet zu werden. Eine Kontrolle der so errechneten Werte ergibt sich durch das Fortschreiten in der Wagrechten, z. B. von rechts nach links durch:

$$(13) \quad a_{n,\,k} = \frac{2\,(2n-2k-1)\,(k+1)}{(n-2k)\,(n-2k-1)} \cdot a_{n,\,k+1}.$$

Die Koeffizienten $a_{n,\,k}$ werden durch dieses Verfahren zunächst als Produkte von Primzahlpotenzen erhalten. Die auftretenden Primzahlen können dabei nach (7) die Zahl $2n$ **nicht** überschreiten.

Auf Grund der vorstehenden Bemerkung ergibt sich z. B. das Polynom $P_{20}(x)$ in der Gestalt der Tabelle 1.

Tabelle 1.

$$(14) \quad P_{20}(x) = 1 : 2^{18} \text{ mal}$$

k	(Primzahlen) 2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	x^{n-2k}	$q = a_{n,\,k-1} : a_{n,\,k}$
10	–	–	–	–	1	1	1	1	–	–	–	–	x^0	
9	1	1	1	1	1	1	1	1	–	–	–	–	x^2	2·3·5·7
8	–	2	1	1	1	1	1	1	1	–	–	–	x^4	3·23 : 2
7	3	1	2	1	1	1	1	1	1	–	–	–	x^6	8·5 : 3
6	1	4	2	1	1	1	1	1	1	–	–	–	x^8	27 : 4
5	2	3	1	1	1	1	1	1	1	1	–	–	x^{10}	2·29 : 15
4	1	2	2	1	–	1	1	1	1	1	1	–	x^{12}	5·31 : 66
3	3	3	2	–	1	–	1	1	1	1	1	–	x^{14}	4·3. 11 : 91
2	–	3	2	1	1	–	1	1	1	1	1	–	x^{16}	7 : 8
1	1	1	2	1	1	–	–	1	1	1	1	1	x^{18}	2·37 : 153
0	–	2	1	1	1	1	–	–	1	1	1	1	x^{20}	3·13 : 190

Darin liefern alle Primzahlpotenzen einer Zeile, miteinander multipliziert, den Koeffizienten der rechts stehenden Potenz x^{n-2k}. Es hat also z. B. x^0 den Koeffizienten $11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$. Dabei konnte noch die Potenz 2^2 vor dem endgültigen Anschreiben in der obigen Form (14) gekürzt werden, sodaß der gemeinsame Faktor $1 : 2^{18}$ lautet und nicht, wie nach (6) zu erwarten wäre, $1 : 2^{20}$. Ähnliches tritt bei allen anderen $P_n(x)$ auf.

Für die Ausrechnung der Koeffizienten stellt man sich vorteilhaft die am rechten Rande vermerkten Quotienten

$$(14\,a) \quad q = a_{n,\,k-1} : a_{n,\,k}$$

der von unten nach oben aufeinander folgenden Koeffizienten auf. Die Ausrechnung kann dann gemäß der Formel

$$(14\,b) \quad a_{n,\,k-1} = q \cdot a_{n,\,k}$$

von oben her beginnend mit der anfangs genannten Rechenmaschine in einem Zuge, d. h. unter möglichster Vermeidung jeder Neueinstellung im Einstellwerk vollzogen werden.

Die vorher genannte Beziehung (9) liefert eine notwendige, aber keine hinreichende Kontrolle. Sie kann in der auch anderweitig nützlichen Gestalt:

$$(9\,a) \quad 2^n = \sum_{0}^{2k \leqq n} {}_k \, (-1)^k \, a_{n,\,k} \quad \text{für } k \leqq 0, 1, 2, \ldots, \frac{n}{2}$$

$$\text{bezw. } (9\,b) \quad 2^{n'} = \sum_{0}^{2k \leqq n} {}_k \, (-1)^k \, a'_{n,\,k}$$

geschrieben werden, wobei in (9 b) die Striche Kürzungen mit Potenzen von 2 andeuten.

Die abschließende Kontrolle kann jetzt, da man die Zusammensetzung der Koeffizienten aus Primzahlen kennt, mühelos nach (8) erfolgen. Sie wurde vollständig von einem von uns durchgeführt. Die endgültigen Ergebnisse sind in der Anlage 2 mitenthalten; die Kugelfunktionen dieses Abschnittes sind dort mit $P_n^{(0)}(x)$ bezeichnet und stehen mithin am Beginn jedes Unterabschnittes. Die gemeinsamen Faktoren jedes Polynoms blieben dabei unausgerechnet. Sie beschränken sich auf gewisse Potenzen der Primzahl 2.

2. Die Gewinnung der Ableitungen $P_n^{(j)}(x)$ aus den Legendre'schen Funktionen $P_n(x)$.

Besonders wertvoll wird das in (14) angezeigte Schema für die Aufstellung der Ableitungen $P_n^{(j)}(x)$. Aus (6) folgt für diese Ableitungen:

$$(15)\quad P_n^{(j)}(x) = 1 : 2^n \sum_{0}^{2k \leq n} {}_k\, (-1)^k a_{n,}{}^j{}_k\, x^{n-j-2k}$$

mit

$$(15\,a)\quad a^j_{n,\,k} = a_{n,\,k} \cdot \frac{(n-2k)!}{(n-j-2k)!},$$

woraus wegen (7) sich ergibt:

$$(15\,b)\quad a^j_{n,\,k} = \frac{(2n-2k)!}{(n-k)!\; k!\; (n-j-2k)!}$$

In sinngemäßer Fortsetzung des Verfahrens aus dem vorangehenden Abschnitt ließen sich der Anlage 1 entsprechend, deren Koeffizienten jetzt mit $a^0_{n,\,k}$ zu bezeichnen sind, weitere Schemata für die $a^j_{n,\,k}$ aufstellen und nach dem in (14) geschilderten Vorgehen auswerten. Von einer vollständigen Durchführung dieser sehr umfangreichen Arbeit wurde abgesehen, vielmehr nur Stichproben veranstaltet. Auch die Berechnung der $a^j_{n,\,k}$ aus den ausgerechneten $a_{n,\,k}$ der Anlage 2 wird wegen der immer mehr anwachsenden ganzen Zahlen recht mühevoll. Es kommt noch hinzu, daß sich immer mehr Faktoren aus einem Polynom herausstellen lassen. Deswegen schreibt man statt (15) vorteilhafter:

$$(16)\quad P_n^j(x) = B_{n,\,j} \sum_{0}^{2k \leq n-j} {}_k\, (-1)^k b_{n,\,j;\,k}\, x^{n-j-2k}$$

Der Bruch $B_{n,\,j}$ enthält im Nenner eine Potenz von 2; der Zähler ist ein Primzahlprodukt und bildet den größten gemeinschaftlichen Teiler aller $a_{n,}{}^j{}_k$. Seine Aufsuchung nach dem klassischen Verfahren wäre mühsam, und vor allem lassen sich keine allgemein gültigen Formeln für die $B_{n,\,j}$ aufstellen. Nur für einige Spezialfälle bekommt man aus (15 b) leicht übersehbare Werte. So ist z. B.:

$$(16\,a)\quad P_n^n(x) = (2n-1)!!;\ \text{wobei } n = j,\ k = 0;$$

$$(16\,b)\quad P_n^{n-1}(x) = (2n-1)!!\,x;\ \text{wobei } n-1 = j,\ k = 1;$$

$$(16\,c)\quad P_n^{n-2}(x) = (2n-3)!! : 2 \cdot [(2n-1)\,x^2 - 1].$$

Dabei gilt $(17\,a)\quad (2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-3)\,(2n-1)$.

Man wendet deshalb für die Gewinnung der Form (16) das Schema aus (14) an und erhält aus ihm durch Ableitung nach x z. B. für $P_{20}{}^{(1)}(x)$ ohne lange Rechnung das neue Schema der Tabelle 2:

Tabelle 2.

(17)

	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	
$P_{20}^{(1)}(x) =$	2	1	1	1	1	1	1	1	–	–	–	–	x^1
	2	2	1	1	1	1	1	1	1	–	–	–	x^3
$1 : 2^{18}$ mal	4	2	2	1	1	1	1	1	1	–	–	–	x^5
	4	4	2	1	1	1	1	1	1	–	–	–	x^7
	3	3	2	1	1	1	1	1	1	1	–	–	x^9
	3	3	2	1	–	1	1	1	1	1	1	–	x^{11}
	4	3	2	1	1	–	1	1	1	1	1	–	x^{13}
	4	3	2	1	1	–	1	1	1	1	1	–	x^{15}
	2	3	2	1	1	–	–	1	1	1	1	1	x^{17}
	2	2	2	1	1	1	–	–	1	1	1	1	x^{19}

Aus ihm läßt sich unmittelbar ablesen, daß die Faktoren 2^2, 3, 5 und 7 herausgehoben werden können, sodaß das gesuchte $P_{20}{}^{(1)}(x)$ nach Tabelle 3 endgültig lautet:

Tabelle 3.

(18) $P_{20}^{(1)}(x) = \frac{7!!}{2^{16}}$ mal

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	
–	–	–	–	1	1	1	1	–	–	–	–	x^1
–	1	–	–	1	1	1	1	1	–	–	–	x^3
2	1	1	–	1	1	1	1	1	–	–	–	x^5
2	3	1	–	1	1	1	1	1	–	–	–	x^7
1	2	1	–	1	1	1	1	1	1	–	–	x^9
1	2	1	–	–	1	1	1	1	1	1	–	x^{11}
2	2	1	–	1	–	1	1	1	1	1	–	x^{13}
2	2	1	–	1	–	1	1	1	1	1	–	x^{15}
–	2	1	–	1	–	–	1	1	1	1	1	x^{17}
–	1	1	–	1	1	–	–	1	1	1	1	x^{19}

Bei dem Faktor $B_{20,1}$ wurde dabei die schon in (17 a) erwähnte Schreibweise $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ verwendet. Aus den Spalten 11 und 19 von (18) läßt sich sofort überblicken, daß das nachfolgende $P_{20}^{(2)}(x)$ mindestens die weiteren gemeinsamen Faktoren 11 und 19 erhält. Die Ausrechnung erfolgt im übrigen wie bei (14) mit Hilfe der hier nicht mehr angeschriebenen Quotienten q zweier aufeinander folgender Koeffizienten.

Auf diese Weise wurden alle gesuchten Ableitungen in der Gestalt (16), also mit gemeinsamem Faktor $B_{n,j}$ und teilerfremden $b_{n,j;k}$ relativ mühelos gewonnen.

Die streng durchgeführte Nachprüfung erfolgte so, daß das übliche Ableitungsverfahren an den Funktionen mit den ausgerechneten Koeffizienten $b_{n,j;k}$ wiederholt wurde. Da der jedem Polynom zustehende gemeinsame Faktor $B_{n,j}$ schon bekannt war, konnte er mitgeprüft werden, was zugleich die Rechnung außerordentlich erleichterte. Das Verfahren wird besonders übersichtlich, wenn man eine einzelne Potenz x^{n-j-2k} durch alle Ableitungen hindurch verfolgt, d. h. bei festgehaltenem n und k von j zu j + 1 übergeht.

Überdies wurde die von Tallquist erwähnte, zu (8) analoge Rekursionsformel:

$$(19) \quad P_{n+1}^{(j+1)}(x) = (2j+1)\, P_n^{(j)}(x) + 2x\, P_n^{(j+1)}(x) - P_{n-1}^{(j+1)}(x)$$

nochmals zur Nachprüfung herangezogen. Wegen der bereits bekannten gemeinsamen Faktoren $B_{n,j}$ ist sie sehr leicht anwendbar.

Die Ergebnisse dieses Abschnittes machen den Hauptinhalt der Anlage 2 aus. Wie bei den $P_n(x)$ wurde für die $B_{n,j}$ die unausgerechnete Form beibehalten. Eine Liste der darin häufig auftretenden ungeraden Fakultäten ist am Schlusse dieser Anlage noch beigefügt.

3. Die Gewinnung der trigonometrischen Polynome $P_n^{(j)}(\cos t)$.

Für die praktische Anwendung der Kugelfunktionen wird das nach (6) auf den Bereich zwischen − 1 und + 1 einschließlich dieser Grenzen beschränkte Argument x durch den cosinus des Polabstandes t ersetzt. Darnach ist in den Polynomen der Anlage 2 für jede Potenz von x die entsprechende Potenz von cos t einzufügen. Für die formelmäßige Weiterverarbeitung der so entstehenden $P_n^{(j)}(\cos t)$ ist es aber vorteilhaft, wie dies auch bei Tallquist und anderen Autoren geschah, die Potenzen der cos t durch die cos der Vielfachen des Winkels t zu ersetzen.

Bekantnlich gilt

für gerade Potenzen

$$(20\,a) \quad \begin{aligned} 2^{2k-1}\cos^{2k} t &= \binom{2k-1}{k-1} + \sum_{1}^{k}{}_i \binom{2k}{k-i} \cos(2i)\, t; \\ 2^{2k-1}\sin^{2k} t &= \binom{2k-1}{k-1} + \sum_{1}^{k}{}_i (-1)^i \binom{2k}{k-i} \cos(2i)\, t; \end{aligned}$$

für ungerade Potenzen

$$(20\,b)\qquad \begin{aligned} 2^{2k}\cos^{2k+1} t &= \sum_0^k {}_i \binom{2k+1}{k-i} \cos(2i+1)\,t;\\ 2^{2k}\sin^{2k+1} t &= \sum_0^k {}_i (-1)^i \binom{2k+1}{k-i} \sin(2i+1)\,t; \end{aligned}$$

die in (20) auftretenden Binomialkoeffizienten, die wie die $b_{n,\,j;\,k}$ unter sich teilerfremd sind, berechnet man entweder unmittelbar oder auf Grund der nachfolgenden Rekursionsformeln, die auf den bekannten Eigenschaften der Binomialkoeffizienten beruhen. Mit ihrer Hilfe ist die Berechnung äußerst einfach.

Es gilt für den Übergang von einer geraden (2k) zu einer ungeraden (2k + 1) Potenz:

$$(21\,a)\qquad \binom{2k+1}{k} = 2\binom{2k-1}{k-1} + \binom{2k}{k-1},$$

$$(21\,b)\qquad \binom{2k+1}{k-i} = \binom{2k}{k-i} + \binom{2k}{k-i-1} \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots, k-1;$$

$$(21\,c)\qquad \binom{2k+1}{k-k} = \binom{2k}{k-k} = 1;$$

und für den Übergang von einer ungeraden (2k + 1) zu einer geraden [2 (k + 1)] Potenz:

$$(22\,a)\qquad \binom{2(k+1)-1}{(k+1)-1} = \binom{2k+1}{k},$$

$$(22\,b)\qquad \binom{2(k+1)}{k+1-i} = \binom{2k+1}{k+1-i} + \binom{2k+1}{k-i} \quad \text{für } i = 1, 2, \ldots, k-1, k;$$

$$(22\,c)\qquad \binom{2(k+1)}{k+1-k+1} = \binom{2k+1}{k+1-k+1} = 1.$$

Recht bequem sind auch die weiteren, aus t = 0 hervorgehenden Kontrollen zu (20). Sie lauten

für cos t = 1

bei geraden Potenzen: $(23\,a)\ 2^{2k-1} = \binom{2k-1}{k-1} + \sum_1^k {}_i \binom{2k}{k-i};$

bei ungeraden Potenzen: $(23\,b)\ 2^{2k} = \sum_0^k {}_i \binom{2k+1}{k-i};$

und für sin t = 0

bei geraden Potenzen: $(24)\ 0 = \binom{2k-1}{k-1} + \sum_1^k {}_i (-1)^i \binom{2k}{k-i},$

Bei ungeraden Potenzen ergibt sich keine Kontrolle.

In der Anlage 3 sind die trigonometrischen Polynome für alle Potenzen von cos t und sin t bis $2k+1=21$ übersichtlich zusammengestellt; für gerade Exponenten unterscheiden sich die Polynome für sin und cos nur durch das wechselnde Vorzeichen, für ungerade Exponenten tritt außerdem noch bei den Polynomen für $\sin^{2j+1} t$ der sin selbst ein.

Die Überführung von (16) in die in der Einleitung zu diesem Abschnitt geforderte Gestalt

$$(25)\qquad P_n^{(j)}(\cos t) = C_{n,\,j} \sum^{2k\leqq n-j} {}_k\, c_{n,\,j;\,k} \cos(n-j-2k)\,t,$$

worin wieder $C_{n,\,j}$ einen Bruch mit gleichem Primzahlprodukt wie in $B_{n,\,j}$ als Zähler, einer nun geänderten Potenz von 2 als Nenner, die $c_{n,\,j;\,k}$ jedoch ganze, unter sich teilerfremde Zahlen bedeuten, beruht unter Anwendung der Formeln aus (20), also aus Anlage 3 auf den folgenden Vorschriften, bei denen, wie vorher begründet, zwischen gerader und ungerader Differenz n — j unterschieden werden muß.

1. Fall: n — j = 2 G.

Dann gilt:

$$(26\,a)\qquad c_{n,\,j;\,k} = \sum_0^k {}_s (-1)^s\, 2^{2s}\, b_{n,\,j;\,s} \binom{n-j-2s}{k-s} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots G-1;$$

aber für k = G:

$$(26\,b)\quad c_{n,j;G} = \sum_0^{G-1} {}_s\, (-1)^s\, 2^{2s}\, b_{n,j;s} \binom{2G-1-2s}{G-1-s} + (-1)^G\, 2^{2G-1}\, b_{n,j;G}.$$

2. Fall: $n - j = 2\,G + 1$.

Hier genügt die einzige Formel:

$$(27)\quad c_{n,j;k} = \sum_0^{k} {}_s\, (-1)^s\, 2^{2s}\, b_{n,j;s} \binom{n-j-2s}{k-s} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \ldots, G-1, G.$$

Nach der obigen Bemerkung ist auf Grund von (20):

$$(28)\quad C_{n,j} = B_{n,j} : 2^{n-j-1}.$$

Die $c_{n,j;k}$ sind sämtlich positiv und besonders bei großen n, um eine bis zwei Zehnerpotenzen kleiner als die $b_{n,j;k}$, die zudem mit wechselndem Vorzeichen versehen sind. Ein Beweis dafür, daß die $c_{n,0;k}$ positiv ausfallen, läßt sich aus den Formeln (26) und (27) nicht erbringen; doch zeigen wenigstens die späteren Formeln (35) auf dem Wege der Induktion von $j-1$ zu j, daß alle folgenden $c_{n,j;k}$ positiv sind.

Die Nachprüfung der nach (26) und (27) gewonnenen Koeffizienten gliedert sich in zwei Abschnitte:

a) Kontrolle der $P_n^{(0)}(\cos t)$ in sich und durch Übergang von n auf $n+1$;

b) Ableitung von $P_n^{(j)}(\cos t)$ aus $P_n^{(j-1)}(\cos t)$ mittels Ableitung nach cos t, entsprechend der früheren Differentiation nach x.

a) Kontrolle der $P_n^{(0)}(\cos t)$: Schreibt man die Rekursionsformel (8) unter Benutzung der Bezeichnungen aus (16) in der Gestalt:

$$(29)\quad B_{n,0}\, b_{n,0;k} = \frac{2n-1}{n} B_{n-1,0}\, b_{n-1,0;k} - \frac{n-1}{n} B_{n-2,0}\, b_{n-2,0;k-1},$$

wobei für $k = 0$ das negative Glied rechts wegfällt und setzt man in (8) für $P^{(0)}(x)$ ($h = n, n-1, n-2$) die Form $P_n^{(0)}(\cos t)$ aus (25) ein, so erhält man wegen der Multiplikation des mittleren Gliedes in (8) mit cos t aus (29) die Beziehungen:

$$(30)\quad C_{n,0}\, c_{n,0;0} = \frac{2n-1}{2n} C_{n-1,0}\, c_{n-1,0;0} \quad \text{für } k = 0;$$

$$(31)\quad C_{n,0}\, c_{n,0;k} = \frac{2n-1}{2n} C_{n-1,0} (c_{n-1,0;k} + c_{n-1,0;k-1}) - \frac{n-1}{n} C_{n-2,0}\, c_{n-2,0;k-1} \quad \text{für } k = 1, 2 \ldots \leqq \ldots \frac{n}{2}.$$

Für $k = \frac{n}{2}$ (gerades n) fällt darin $c_{n-1,0;k}$ weg; für $k = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$ (ungerades n) ist darin $c_{n-1,0;k}$ zu verdoppeln.

$C_{h,0}$ besteht nur aus negativen Potenzen von 2. Die Kontrolle nach (30) und (31) ist also nicht schwierig, wenngleich die auftretenden rationalen Brüche vor der Verarbeitung an der Rechenmaschine durch Erweitern oder Kürzen erst schmiegsam gemacht werden müssen.

Die Beziehung (9) ergibt überdies noch die überaus elegante Probe:

$$(32)\quad \sum_0^{2k \leqq n} {}_k\, c_{n,0;k} = 1 : C_{n,0} = 2^{n''},$$

wo n″ eine ganze positive Zahl bedeutet.

An die auf Grund von (30), (31) und (32) wohl ausreichend gesicherte Kontrolle der $P_n^{(0)}(\cos t)$ kann nun die Nachberechnung der $P_n^{(j)}(\cos t)$ angeschlossen werden.

b) Kontrolle der $P_n^{(j)}(\cos t)$):

Für die Ableitung nach cos t gilt bekanntlich bei ganzzahligem m:

$$(33)\quad \frac{d \cos m\,t}{d \cos t} = \frac{d \cos m\,t}{d\,t} : \frac{d\,t}{d \cos t} = m \cdot \frac{\sin m\,t}{\sin t}.$$

Entwickelt man das Ergebnis von (33) in eine (abbrechende) Reihe der cos der Vielfachen des Winkels t, so erhält man unter Unterscheidung gerader und ungerader Vielfacher die Formeln:

$$(34\,a)\quad \frac{d \cos (2m+1)\,t}{d \cos t} = (2m+1)\,[2 \cos 2m\,t + 2 \cos 2\,(m-1)\,t + \ldots\ldots + 2 \cos 2\,t + 1];$$

und

$$(34\,b)\quad \frac{d \cos 2m\,t}{d \cos t} = 4\,m\,[\cos (2m-1)\,t + \cos (2m-3)\,t + \ldots\ldots + \cos 3\,t + \cos t];$$

je nachdem also, ob n — j gerade oder ungerade ausfällt, erhält man durch Einarbeitung von (34) in ein $P_n^{(j)}$ (cos t) die Formeln:

I. für n — j = 2 G mit der Abkürzung $c_{n,\,j-1;\,k} = C_k$.

(35 a) $c_{n,\,j;\,k} = \sum_0^k{}_s\; 2 \cdot (2G - 2s + 1)\, C_s$ für $k = 0,1, \ldots, G - 1$.

Nur für das konstante Glied in (25), wo also k = G gilt, hat man

(35 b) $c_{n,\,j;\,G} = \sum_0^k{}_s\; 1 \cdot (2G - 2s + 1)\, C_s$;

II. für n − j = 2 G+1 mit der gleichen Abkürzung wie unter I:

(35 c) $c_{n,\,j;\,k} = \sum_0^k{}_s\; 2 \cdot (2G - 2s + 2)\, C_s$ für $h = 0, 1, 2 \ldots G$.

Bei den rasch fördernden Kontrollen nach (35) von $P_n^{(j-1)}$ (cos t) zu $P_n^{(j)}$ muß noch der Übergang von $C_{n,\,j-1}$ zu $C_{n,\,j}$ mittels der Identität

(36) $C_{n,j} = C_{n,\,j-1} \cdot \dfrac{C_{n,j}}{C_{n,\,j-1}}$

berücksichtigt werden. Bei der Durchrechnung nach (35) konnte die Brunsviga-Dupla wegen ihres zweiten Resultatwerkes besonders vorteilhaft verwendet werden.

Alle Ergebnisse dieses Abschnittes 3 in der Gestalt der Formel (25) sind in der Anlage 4 zusammengestellt, die, genau wie die Anlage 2, die $C_{n,\,j}$ unausgerechnet, die $c_{n,\,j;\,k}$ aber ausgerechnet enthält.

4. Die Gewinnung der zugeordneten Kugelfunktionen 1. Art P_n^j (cos t).

Sie sind gegeben durch:

(37) $P_n^j (\cos t) = \sin^j t \cdot P_n^{(j)} (\cos t)$.

Entnimmt man den Formeln (20), bezw. der Anlage 3 die trigonometrischen Polynome für $\sin^j t$ und der Anlage 4 diejenigen für $P_n^{(j)}$ (cos t), so kann man das Produkt der in (37) auf der rechten Seite stehenden trigonometrischen Polynome wieder in ein solches verwandeln. Die Grundlage hierfür ist gegeben in den bekannten Identitäten (38), in denen die p und q ganze positive Zahlen darstellen.

Es ist:

(38 a) $2 \sin p\, t \cdot \cos q\, t = \sin (p + q)\, t + \sin (p - q)\, t$,

b) $2 \cos p\, t \cdot \sin q\, t = \sin (p + q)\, t - \sin (p - q)\, t$,

c) $2 \cos p\, t \cdot \cos q\, t = \cos (p + q)\, t + \cos (p - q)\, t$,

d) $2 \sin p\, t \cdot \sin q\, t = \cos (p - q)\, t - \cos (p + q)\, t$.

Stets kann durch Vertauschung der Fall $p \geqq q$ erreicht werden.

Im Anschluß an die Unterscheidung gerader und ungerader n—j in (25), die in (26) und (27) erläutert wurde, sind für die Gewinnung von P_n^j (cos t) vier Fälle zu beachten, je nachdem n—j und j gerade oder ungerade ausfallen. Um diesen vier Fällen gerecht zu werden, muß für P_n^j (cos t) eine etwas allgemeinere Form gewählt werden, nämlich:

(39) $P_n^j (\cos t) = D_{n,\,j} \sum_0^{2k \leqq n}{}_k\; d_{n,\,j;\,k} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} \begin{pmatrix}2k\\ 2k+1\end{pmatrix} t$;

die Zuordnung der in (39) steckenden vier Formen, (sin 2 k t, cos 2k t, sin (2k+1) und cos (2k+1) t zu den vier möglichen Zusammenstellungen gerader und ungerader n − j und j ergibt sich auf Grund von (37), (38) und den Anlagen 3 und 4 folgendermaßen:

I. für $n - j = 2\,G$, $j = 2\,v$, also $n = 2\,(G+v) = 2\,u$ ist:

$\cos (2\,G - 2\,k)\, t \cdot \cos 2\,i\, t = \cos 2\,(G - k + i)\, t + \cos 2\,(G - k - i)\, t$,

d. h. es stehen gerade Vielfache des Winkels in der cos-Funktion und es ist:

(40 a) $P_{2u}^{2v} (\cos t) = D_{2u,\,2v} \sum_0^u{}_k\; d_{2u,\,2v;\,k} \cos 2k\, t$;

II. für $n-j = 2G+1$, $j = 2v+1$, also $n = 2(G+v+1) = 2(u+1)$ ist:

$\cos(2G+1-2k)\,t \cdot \sin(2i+1)\,t = \sin 2(G-k+i+1)\,t \pm \sin 2(G-k-i+1)\,t$,

d. h. es stehen gerade Vielfache des Winkels in der sin-Funktion und es ist:

$$(40\,\mathrm{b})\quad P^{2v+1}_{2(u+1)}(\cos t) = D_{2(u+1);2v+1}\sum_{1}^{n+1}{}^{k}\, d_{2(u+1),\,2v+1;\,k}\sin 2k\,t$$

III. für $n-j = 2G$, $j = 2v+1$, also $n = 2(G+v)+1 = 2u+1$ ist:

$\cos(2G-2k)\,t \cdot \sin(2i+1)\,t = \sin\bigl(2(G-k+i)+1\bigr)\,t \pm \sin\bigl(2(G-k-i)-1\bigr)\,t$,

d. h. es stehen ungerade Vielfache des Winkels t in der sin-Funktion und es ist:

$$(40\,\mathrm{c})\quad P^{2v+1}_{2u+1}(\cos t) = D_{2u+1,\,2v+1}\sum_{0}^{n}{}^{k}\, d_{2u+1,\,2v+1;\,k}\sin(2k+1)\,t\,;$$

IV. für $n-j = 2G+1$, $j = 2v$, also $n = 2u+1$, ist:

$\cos(2G+1-2k)\,t \cdot \cos 2i\,t = \cos\bigl(2(G-k+i)+1\bigr)\,t + \cos\bigl(2(G-k-i)+1\bigr)\,t$,

d. h. es stehen ungerade Vielfache des Winkels t in der cos-Funktion und es ist:

$$(40\,\mathrm{d})\quad P^{2v}_{2u+1}(\cos t) = D_{2u+1,\,2v}\sum_{0}^{n}{}^{k}\, d_{2u+1,\,2v;\,k}\cos(2k+1)\,t$$

In allen vier Formeln wurde, da es nur auf die Feststellung der geraden und ungeraden Vielfachen ankam, statt des komplizierteren Arguments das einfache Argument $2k$ bezw. $2k+1$ am Schlusse eingesetzt.

Nach diesen Darlegungen sind also innerhalb eines bestimmten $P_n^j(\cos t)$ nur gerade oder ungerade Vielfache von t zu erwarten. Außerdem wechseln sin-Reihen mit cos-Reihen ab. Die in den Reihen auftretenden Koeffizienten $d_{n,\,j;\,k}$ haben unregelmäßig wechselnde Vorzeichen. Stets ist jedoch $d_{n,\,j,\,0}$ positiv. Es erwies sich aus diesem Grunde als vorteilhaft, die Vielfachen von t nicht von n ab wie in (25), sondern von Null bezw. 1 ab zu zählen. Darnach beginnt also die Reihe (40 b) gleich mit sin 2 t. Zum Unterschiede gegen (25) laufen in (40) die Vielfachen von t, unabhängig von j, jedesmal bis $k = u$ durch, was im Summenzeichen vor der Reihe besonders zu beachten ist. Es wird also stets sin n t bezw. cos n t erreicht. Der Grund hiefür liegt darin, daß sich in $\sin^j t$ und $P_n^{(j)}(\cos t)$ die höchsten Vielfachen von t, nämlich j und $(n-j)$ beim Multiplizieren zu $j+(n-j) = n$ ergänzen. Aus dem gleichen Grunde ist dann auch die Anzahl k der Koeffizienten $d_{n,\,j;\,k}$ für jedes j gleichbleibend und hängt nur von n ab. Der einheitlichen Schreibweise zuliebe wurde in (40 b) und (40 c) trotz der rechts auftretenden sin-Polynome auf der linken Seite das Argument cos t beibehalten, weil Unklarheiten daraus nicht zu befürchten sind.

An diese Festlegung der allgemeinen Gestalt von $P_n^j(\cos t)$ nach (37) schließt sich die eigentliche Berechnung der $d_{n,\,j;\,k}$. Schreibt man allgemein nach (20)

$$\sin^j t = \frac{1}{2^{j-1}}\sum_{0}^{2i\leqq j}{}^{i}\, j_{v-i}\,\frac{\cos}{\sin}\left(\begin{matrix}2i\\2i+1\end{matrix}\right) t,\ \text{mit}\ j_{v-i} = (-1)^i\binom{j}{v-i},$$

so erhält (37) die Form:

$$(41)\quad D_{n,\,j}\sum_{0}^{2k\leqq n}{}^{k}\, d_{n,\,j;\,k}\,\frac{\cos}{\sin}\left(\begin{matrix}2k\\2k+1\end{matrix}\right) t = \frac{1}{2^{j-1}}\sum_{0}^{2i\leqq j}{}^{i}\, j_{v-i}\,\frac{\cos}{\sin}\left(\begin{matrix}2i\\2i+1\end{matrix}\right) t\ .\ C_{n,\,j}\sum_{0}^{h\leqq n-j}{}^{h}\, c_{n,\,j;\,h}\cos(n-j-2h)\,t.$$

Daraus folgt zunächst:

$$(42)\quad D_{n,\,j} = C_{n,\,j} : 2^{j-1},$$

d. h. der Nenner des Bruches $D_{n,\,j}$ ist wieder eine Potenz von 2, weil es derjenige von $C_{n,\,j}$ nach (28) auch ist. Der Zähler ist ein Primzahlprodukt, genau wie in $C_{n,\,j}$.

Die ausführlichen Vorschriften für die Gewinnung der $d_{n,\,j;\,k}$ aus den Produkten der j_{v-i} in die $c_{n,\,j;\,h}$ sind in der Anlage 5 enthalten. Diese umfaßt nach den vier möglichen Fällen vier Schemata in allgemeinster Form. So trivial an sich die Aufstellung solcher Schemata ist, so umfassend ist der praktische Nutzen gerade für den Rechner, der nicht nur ein Polynom, sondern viele, durchweg ähnlich gebaute, gewinnen will. Besonderer Wert wurde in der praktischen Anwendung auch auf gewisse Kontrollen innerhalb des Schemas gelegt, die sich auf die j_{v-i}, also auf Binomialkoeffizienten und ihre bekannten Eigenschaften beziehen. An allen Schematas ist wesentlich, daß die unter dem Strich auftretenden Koeffizienten nur vom Index j abhängen. Ihre Ausdehnung nach rechts und unten läuft mit n gegen Unendlich. Für ein bestimmtes Paar von Indizes n und j $(n \geqq j)$ wird die Matrix der ersten $u \geqq \frac{n}{2}$ Zeilen und der ersten $\frac{n-j}{2}$ Spalten benutzt. Praktisch gesprochen nimmt man soviel Spalten als C vorhanden sind und soviel Zeilen als $d_{n,\,j;\,k}$ gebraucht werden. In der Anlage 5 ist außerdem wieder die Abkürzung aus (35), jedoch diesmal mit j statt $j-1$, und, wie bereits oben erwähnt, entgegengesetzt gezählten C_h, also in genauer Bezeichnung (43) $c_{n,\,j;\,h} = C_{\frac{n-j}{2}-h} = C'_h$

verwendet. Der Einfachheit halber wird im Folgenden jedoch statt C'_h wieder C_h geschrieben.

Für die praktische Anwendung der Schemata sei nur ein Beispiel herausgegriffen: Es ergibt sich für $n = 2u$ und den ungeraden Index $j = 7$ aus dem Schema für P_{2u}^{2h+1} die folgende Multiplikationstafel (Tabelle 4):

Tabelle 4.

2u =	8	10	12	14	16	18	20	
	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
$d_{2u,\,7;\,1} =$	35 − 21	− 35 + 7	+ 21 − 1	− 7	+ 1			. . . sin 2 t
$d_{2u,\,7;\,2} =$	− 21 + 7	+ 35 − 1	− 35	+ 21	− 7	+ 1		. . . sin 4 t
$d_{2u,\,7;\,3} =$	+ 7 − 1	− 21	+ 35	− 35	+ 21	− 7	+ 1	. . . sin 6 t
$d_{2u,\,7;\,4} =$	− 1	+ 7	− 21	+ 35	− 35	+ 21	− 7	. . . sin 8 t
$d_{2u,\,7;\,5} =$		− 1	+ 7	− 21	+ 35	− 35	+ 21	. . . sin 10 t
$d_{2u,\,7;\,6} =$			− 1	+ 7	− 21	+ 35	− 35	. . . sin 12 t
$d_{2u,\,7;\,7} =$				− 1	+ 7	− 21	+ 35	. . . sin 14 t
$d_{2u,\,7;\,8} =$					− 1	+ 7	− 21	. . . sin 16 t
$d_{2u,\,7;\,9} =$						− 1	+ 7	. . . sin 18 t
$d_{2u,\,7;\,10} =$							− 1	. . . sin 20 t

Darnach wäre also z. B.

$d_{12,\,7;\,1} = 14\,C_0 - 28\,C_1 + 20\,C_2,$

$d_{16,\,7;\,1} = 14\,C_0 - 28\,C_1 + 20\,C_2 - 7\,C_3 + 1\,C_4$

und $d_{18,\,7;\,1} = d_{20,\,7;\,1} = d_{22,\,7;\,1} = \;\dots\dots\dots\; = d_{16,\,7;\,1}$

oder $d_{14,\,7;\,5} = -1\,C_1 + 7\,C_2 - 21\,C_3$

oder $d_{20,\,7;\,7} = -1\,C_3 + 7\,C_4 - 21\,C_5 + 35\,C_6$ usw.

Es ist also das Aggregat jeweils nur bis zu dem Index $n = 2u$ zu erstrecken.

Man erkennt in dem obigen Schema noch den in der Anlage 5 hervorgehobenen streng symmetrischen Aufbau aus einem Hauptteil, der sich nach rechts und schräg unten beliebig fortsetzen läßt, wobei jeweils von C_{v+1} an (nur für $j = 2v+1$ gültig), eine und dieselbe Spalte um eine Zeile tiefer angesetzt wird, und einem ebenfalls symmetrischen Nebenteil, der nur von C_0 bis C_v bezw. $d_{n.\,j;\,h}$ reicht, der aus den zweiten Summanden im Schema besteht.

Für die vorliegende Arbeit wurden die Schemata aus Kontrollgründen durch wirkliches Ausmultiplizieren der rechten Seite des Ansatzes (41) in allen Fällen nachgeprüft. Die Auswertung der $d_{n,\,j;\,k;}$ geschah dann durch die Rechenmaschine.

Wie bei den P_n^j (cos t) wurde nunmehr auch bei den zugeordneten Kugelfunktionen P_n^j (cos t) eine weitere Kontrolle durchgeführt, die in der Herleitung der Funktion P_n^{j+1} (cos t) aus P_n^j (cos t) durch Ableitung besteht. Der Wert dieser Kontrolle liegt darin, daß ganz andere Operationen als jene durch (41) bedingten zum gleichen Ergebnis führen müssen. Da die P_n^0 (cos t) mit den $P_n^{(0)}$ (cos t) identisch sind und diese bereits im vorigen Abschnitt durch Induktion mittels der Formeln (31) und (32) nachgeprüft wurden, ist also nur die Rekursionsformel von j zu j+1 aufzustellen.

Es gilt genau nach Definition:

$$P_n^{j+1}(\cos t) = \sin^{j+1} t \cdot P_n^{(j+1)}(\cos t) = \sin^{j+1} t \cdot d\,\frac{P_n^{(j)}(\cos t)}{d\cos t} = \sin^{j+1} t \cdot d\,\frac{(P_n^j(\cos t) : \sin^j t}{d\cos t}\;;$$

nach Ausführung der Differentiation ergibt sich:

$$(44)\quad P_n^{j+1}(\cos t) = d\,\frac{P_n^j(\cos t)}{d\cos t}\cdot \sin t + j\cdot P_n^j\cdot\frac{\cos t}{\sin t}\;;$$

die Umwandlung der rechten Seite von (44) in trigonometrische Polynome führt, in allen 4 Fällen gerader und ungerader n und j nach elementarer, nur für $j = 2h$ etwas mühsamerer Rechnung zu folgenden Ergebnissen, wobei die Abkürzungen

(45) $d_{n,\,j;\,k} = d_k$; $\cos k\,t = c_k$, $\sin kt = s_k$, benutzt werden.

Es entsteht aus den d_k

I. von P_{2u}^{2v} das Polynom P_{2u}^{2v+1} in der Gestalt:

(46 a) $P_{2u}^{2v+1} = D_{2u,\,2v+1} \cdot \sum_1^u {}_k\ [2k\, d_{2k} + 2v\,(2d_0 + 2d_2 + \,.\,.\, 2d_{2k-2} + 2d_k)]\ s_{2k};$

II. von P_{2u}^{2v+1} das Polynom $P_{2u}^{2(v+1)}$ in der Gestalt:

(46 b) $P_{2u}^{2(v+1)} = D_{2u,\,2(v+1)} \cdot \sum_0^u {}_k [-2k\, d_{2k} + (2v+1) \cdot (d_{2k} + 2d_{2k+2} + \ldots + 2d_{2u-2} + 2d_{2u})] \cdot c_{2k};$

(worin $d_0 = 0$ besonders zu beachten ist!)

III. von P^{2v}_{2u+1} das Polynom P^{2v+1}_{2u+1} in der Gestalt:

(46 c) $P^{2v+1}_{2u+1} = D_{2u+1,\,2v+1} \sum_1^u {}_k\ [(2k+1)\, d_{2k+1} + 2v\,(2d_1 + 2d_3 + \ldots + 2d_{2k-1} + 2d_{2k+1})]\ s_{2k+1};$

IV. endlich von P^{2v+1}_{2u+1} das Polynom $P^{2(v+1)}_{2u+1}$ in der Gestalt:

(46 d) $P^{2(v+1)}_{2u+1} = D_{2u+1,\,2(v+1)} \sum_1^u {}_k [-(2k+1)\, d_{2k+1} + (2v+1)\,(d_{2k+1} + 2d_{2k+3} + 2d_{2k+5} + \ldots$

$+ 2d_{2u-1} + 2d_{2u+1})]\ c_{2k+1}.$

Diese etwas verwickelt aussehenden, für die praktische Anwendung an der Dupla-Rechenmaschine aber äußerst bequemen Formeln gestatten eine ebenso wirksame wie schnelle Kontrolle, die sich auch auf die jedem Polynom gemeinsamen Faktoren $D_{n,\,j}$ erstreckt. Ihre Anwendung wurde ohne Ausnahme durchgeführt. Eine ausgezeichnete Schlußkontrolle ist dadurch gegeben, daß das Aggregat der $d_{n,\,n,\,h}$ in P_n^n (cos t) mit $\sin^n t$ übereinstimmen muß.

Die Ergebnisse, die eigentlichen zugeordneten Kugelfunktionen 1. Art P_n^j (cos t) sind in der Anlage 6 nach den bei den vorangehenden Anlagen geltenden Richtlinien zusammengestellt.

5. Die trigonometrischen Polynome R_n^j (cos t)

Im Abschnitt B über die Darstellung einer willkürlichen Funktion nach Kugelfunktionen 1. Art war in (1) der Faktor q_n^j eingeführt worden. Es erübrigt sich also noch, die zugeordneten Kugelfunktionen P_n^j (cos t) durch Multiplikation mit diesem q_n^j in die trigonometrischen Polynome R_n^j (cos t) umzuwandeln.

Nach den Ergebnissen über die P_n^j (cos t), die in (40) formelmäßig angeschrieben sind, hat man zu setzen:

$$(47)\quad R_n^j\,(\cos t) = \sum_0^{2k \leq n} {}_k\ r_{n,\,j;\,k} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \binom{2k}{2k+1}\, t,$$

wobei

$$(48)\quad r_{n,\,j;\,k} = q_n^j \cdot D_{n,\,j} \cdot d_{n,\,j;\,k} \text{ gilt.}$$

Wegen der Transzendenz von q_n^j sind die $r_{n,\,j;\,k}$ jetzt unendliche Dezimalbrüche, die in der Anlage 8 im Hinblick auf die für die Tabellen vorgesehene Stellenzahl von 10 bis 11 Ziffern auf 14 Dezimalen genau wiedergegeben sind.

Bei der Gewinnung der $r_{n,\,j;\,k}$ nach (48) mußte natürlich schrittweise vorgegangen werden. Zuerst wurden die Produkte

$$(49)\quad s_{n,\,j} = q_n^j \cdot D_{n,\,j}$$

aufgestellt und durch Erweitern bezw. Kürzen auf ihre einfachste Form gebracht. Man erhielt so z. B.

$$s_{18,\,2} = q_{18}^2 \cdot D_{18,2} = \sqrt{37 \cdot 16! : 2\pi \cdot 20! \cdot 5!! \cdot 3 \cdot 17 \cdot 29 : 2^{32}}$$
$$= 3\sqrt{5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 37 : \pi} : 2^{34} \text{ und}$$

$$s_{18,3} = q_{18}^3 \cdot D_{18,3} = \sqrt{37 \cdot 15! : 2\pi \cdot 21!} \cdot 3 \cdot 7!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{28}$$
$$= \sqrt{7!! \cdot 17 \cdot 19 \cdot 37 : \pi} : 2^{32}.$$

Wie man sieht, ist die zahlenmäßige Form dieser Größen mit vielfachen Produkten unter der Wurzel für eine Berechnung reichlich unbequem. Das Beispiel zeigt aber auch und es läßt sich allgemein leicht übersehen, daß zwei aufeinander folgende oder auch nur in den Indizes benachbarte Größen $s_{n,j}$ relativ einfache Quotienten bilden, bei denen man mit Radikalen von der Form $p \cdot \sqrt{z} : w$ auskommt. Für das obige Beispiel ergibt sich:

$$(50) \quad s_{18,3} = s_{18,2} \cdot 4 \sqrt{21} : 3.$$

Darauf fußend wurde eine vollständige Liste solcher Beziehungen wie in (50) von $s_{0,0}$ bis $s_{20,20}$ aufgestellt und daraus eine Aufstellung über die notwendigen Radikale gezogen. Nach deren Berechnung wurden dann in Ausführung der Beziehungen (50) durch schrittweises Multiplizieren sämtliche $s_{n,j}$ von $n = j = 0$ bis $n = j = 20$ zahlenmäßig ausgewertet. Zu ihrer Nachprüfung stand die aus der Definition (49) und aus Weiterverarbeitung von (16 a) bis zu den $D_{n,j}$ fließende Beziehung

$$(51) \quad s_{n+1,n+1} = s_{n,n} \cdot \sqrt{(2n+3) : (2n+2)} : 2$$

zur Verfügung, die insbesondere für die bei der Berechnung der $s_{n,j}$ erreichte Genauigkeit wertvolle Aufschlüsse gab. Nach (51) strebt nämlich der Quotient der beiden s dem Grenzwert 0.5 bei wachsendem n zu. Durch die fortdauernde annähernde Halbierung bleibt die für $s_{0,0}$ angenommene Genauigkeit einer bestimmten Dezimale noch für $s_{20,20}$ erhalten.

Die für die $r_{n,j;k}$ oben geforderte Genauigkeit von 14 Dezimalen bewirkt nach (48), daß die bis zur Größenordnung 10^{12} anwachsenden $d_{n,j;k}$ den Größen $s_{n,j}$ eine Genauigkeit bis zur Größenordnung 10^{-26} auferlegen. Wenn auch diese Genauigkeit nur bei $s_{20,20}$ auftritt, so sind doch Fälle, wo über 20 Dezimalen gebraucht werden, häufig. Mit Rücksicht hierauf und auf die technische Handhabung der Rechenmaschine, bei der stets in Gruppen zu 7 Ziffern gearbeitet wurde, war es zweckmäßig, von einer allzu ängstlichen Beschränkung auf die absolut notwendige Stellenzahl abzusehen und die Rechnung allgemein auf eine Genauigkeit von 4 Gruppen, also 28 Stellen nach dem Komma, einzurichten. Es wurde also entsprechend nach der üblichen Rechenregel, zwar nicht eine Stelle, sondern eine Gruppe mehr als notwendig berechnet. Im übrigen ist bei jeder der in Betracht kommenden Anlagen die verwendete Genauigkeitsschranke näher bezeichnet.

Die Anlage 7 a gibt neben den q_n^j und den $D_{n,j}$ die Beziehungen nach (50). Die Anlage 7b enthält die darnach notwendigen Transzendenten und Radikale. Jede Wurzel dieser Liste wurde durch Quadrieren daraufhin geprüft, ob auch die letzte der 28 Stellen noch richtig ist und gegebenenfalls Verbesserungen angebracht. Die Anlage 7 c endlich enthält die fertig berechneten $s_{n,j}$.

Eine allgemeine Rechenprobe für alle Zahlen der genannten Anlagen einschließlich der Anlage 8 wurde durch, teilweise mehrfache, Wiederholung durchgeführt.

Im Teil II: Tabellen, deren Berechnung noch in den Anfängen steckt, werden die auf der Anlage 8 fußenden Funktionswerte von Grad zu Grad erscheinen.

D. Zusammenfassung.

Die vorliegende Arbeit wurde mit Absicht nicht auf theoretische Weiterbildung der Kugelfunktionen, sondern auf die Durchdringung der Rechenarbeit mit möglichst vielen Kontrollformeln für den praktischen Rechner angelegt, um eine etwaige Erweiterung auf Kugelfunktionen noch höherer Indizes als $n = 20$ möglichst zu erleichtern.

Daß diese Möglichkeit nicht von der Hand zu weisen ist, begründen die in neuester Zeit wieder sehr zahlreich gewordenen Arbeiten auf dem Gebiete der harmonischen Analyse. Die Aufsuchung versteckter Perioden, die seit Weickmann, Stumpff, Pollak, Fuhrich, Brunt und vielen Anderen mächtigen Aufschwung genommen hat, wäre ohne die Anwendung von Vielfachen des Winkels bis $n = 72$, ja 90 und darüber hinaus, unmöglich gewesen.

Es liegt nahe, eine den Umständen entsprechende Entwicklung für die praktische Anwendung der Kugelfunktionen in der Geophysik, speziell in der Meteorologie zu erwarten.

Anlage 1. Koeffizientenschema der $a_{n,k} = \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!\,(n-k)!\,k!}$ für $k = 0, 1, 2 \ldots 10$ und $n = 0, 1, 2 \ldots 20$.

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	$\frac{0!}{0!\,0!}$										
1	$\frac{2!}{1!\,1!}$										
2	$\frac{4!}{2!\,2!}$	$\frac{2!}{0!\,1!\,1!}$									
3	$\frac{6!}{3!\,3!}$	$\frac{4!}{1!\,2!\,1!}$									
4	$\frac{8!}{4!\,4!}$	$\frac{6!}{2!\,3!\,1!}$	$\frac{4!}{0!\,2!\,2!}$								
5	$\frac{10!}{5!\,5!}$	$\frac{8!}{3!\,4!\,1!}$	$\frac{6!}{1!\,3!\,2!}$								
6	$\frac{12!}{6!\,6!}$	$\frac{10!}{4!\,5!\,1!}$	$\frac{8!}{2!\,4!\,2!}$	$\frac{6!}{0!\,3!\,3!}$							
7	$\frac{14!}{7!\,7!}$	$\frac{12!}{5!\,6!\,1!}$	$\frac{10!}{3!\,5!\,2!}$	$\frac{8!}{1!\,4!\,3!}$							
8	$\frac{16!}{8!\,8!}$	$\frac{14!}{6!\,7!\,1!}$	$\frac{12!}{4!\,6!\,2!}$	$\frac{10!}{2!\,5!\,3!}$	$\frac{8!}{0!\,4!\,4!}$						
9	$\frac{18!}{9!\,9!}$	$\frac{16!}{7!\,8!\,1!}$	$\frac{14!}{5!\,7!\,2!}$	$\frac{12!}{3!\,6!\,3!}$	$\frac{10!}{1!\,5!\,4!}$						
10	$\frac{20!}{10!\,10!}$	$\frac{18!}{8!\,9!\,1!}$	$\frac{16!}{6!\,8!\,2!}$	$\frac{14!}{4!\,7!\,3!}$	$\frac{12!}{2!\,6!\,4!}$	$\frac{10!}{0!\,5!\,5!}$					
11	$\frac{22!}{11!\,11!}$	$\frac{20!}{9!\,10!\,1!}$	$\frac{18!}{7!\,9!\,2!}$	$\frac{16!}{5!\,8!\,3!}$	$\frac{14!}{3!\,7!\,4!}$	$\frac{12!}{1!\,6!\,5!}$					
12	$\frac{24!}{12!\,12!}$	$\frac{22!}{10!\,11!\,1!}$	$\frac{20!}{8!\,10!\,2!}$	$\frac{18!}{6!\,9!\,3!}$	$\frac{16!}{4!\,8!\,4!}$	$\frac{14!}{2!\,7!\,5!}$	$\frac{12!}{0!\,6!\,6!}$				
13	$\frac{26!}{13!\,13!}$	$\frac{24!}{11!\,12!\,1!}$	$\frac{22!}{9!\,11!\,2!}$	$\frac{20!}{7!\,10!\,3!}$	$\frac{18!}{5!\,9!\,4!}$	$\frac{16!}{3!\,8!\,5!}$	$\frac{14!}{1!\,7!\,6!}$				
14	$\frac{28!}{14!\,14!}$	$\frac{26!}{12!\,13!\,1!}$	$\frac{24!}{10!\,12!\,2!}$	$\frac{22!}{8!\,11!\,3!}$	$\frac{20!}{6!\,10!\,4!}$	$\frac{18!}{4!\,9!\,5!}$	$\frac{16!}{2!\,8!\,6!}$	$\frac{14!}{0!\,7!\,7!}$			
15	$\frac{30!}{15!\,15!}$	$\frac{28!}{13!\,14!\,1!}$	$\frac{26!}{11!\,13!\,2!}$	$\frac{24!}{9!\,12!\,3!}$	$\frac{22!}{7!\,11!\,4!}$	$\frac{20!}{5!\,10!\,5!}$	$\frac{18!}{3!\,9!\,6!}$	$\frac{16!}{1!\,8!\,7!}$			
16	$\frac{32!}{16!\,16!}$	$\frac{30!}{14!\,15!\,1!}$	$\frac{28!}{12!\,14!\,2!}$	$\frac{26!}{10!\,13!\,3!}$	$\frac{24!}{8!\,12!\,4!}$	$\frac{22!}{6!\,11!\,5!}$	$\frac{20!}{4!\,10!\,6!}$	$\frac{18!}{2!\,9!\,7!}$	$\frac{16!}{0!\,8!\,8!}$		
17	$\frac{34!}{17!\,17!}$	$\frac{32!}{15!\,16!\,1!}$	$\frac{30!}{13!\,15!\,2!}$	$\frac{28!}{11!\,14!\,3!}$	$\frac{26!}{9!\,13!\,4!}$	$\frac{24!}{7!\,12!\,5!}$	$\frac{22!}{5!\,11!\,6!}$	$\frac{20!}{3!\,10!\,7!}$	$\frac{18!}{1!\,9!\,8!}$		
18	$\frac{36!}{18!\,18!}$	$\frac{34!}{16!\,17!\,1!}$	$\frac{32!}{14!\,16!\,2!}$	$\frac{30!}{12!\,15!\,3!}$	$\frac{28!}{10!\,14!\,4!}$	$\frac{26!}{8!\,13!\,5!}$	$\frac{24!}{6!\,12!\,6!}$	$\frac{22!}{4!\,11!\,7!}$	$\frac{20!}{2!\,10!\,8!}$	$\frac{18!}{0!\,9!\,9!}$	
19	$\frac{38!}{19!\,19!}$	$\frac{36!}{17!\,18!\,1!}$	$\frac{34!}{15!\,17!\,2!}$	$\frac{32!}{13!\,16!\,3!}$	$\frac{30!}{11!\,15!\,4!}$	$\frac{28!}{9!\,14!\,5!}$	$\frac{26!}{7!\,13!\,6!}$	$\frac{24!}{5!\,12!\,7!}$	$\frac{22!}{3!\,11!\,8!}$	$\frac{20!}{1!\,10!\,9!}$	
20	$\frac{40!}{20!\,20!}$	$\frac{38!}{18!\,19!\,1!}$	$\frac{36!}{16!\,18!\,2!}$	$\frac{34!}{14!\,17!\,3!}$	$\frac{32!}{12!\,16!\,4!}$	$\frac{30!}{10!\,15!\,5!}$	$\frac{28!}{8!\,14!\,6!}$	$\frac{26!}{6!\,13!\,7!}$	$\frac{24!}{4!\,12!\,8!}$	$\frac{22!}{2!\,11!\,9!}$	$\frac{20!}{0!\,10!\,10!}$

Anlage 2. Zusammenstellung der Legendre'schen Kugelfunktionen $P_n(x)$ [$= P_n^{(0)}(x)$] und ihrer Ableitungen $P_n^{(j)}(x)$.

[Es bedeutet: $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1)(2n+1)$;]

$$P_n^{(j)}(x) = B_{n,j} \sum_{0}^{2k \leqq n-j} {}^{k} (-1)^k b_{n,j;k} \cdot x^{n-j-2k} \quad \text{für } n = 0, 1, 2 \ldots 20 \text{ und } j = 0, 1, 2 \ldots n.$$

Aus drucktechnischen Gründen ist statt $P_n^{(j)}(x)$ in dieser Anlage überall $P_n(j; x)$ gesetzt worden.

$P_0(0; x) = 1;$

$P_1(0; x) = x;$
$P_1(1; x) = 1;$

$P_2(0; x) = 1 : 2\,(3x^2 - 1);$
$P_2(1; x) = 3x;$
$P_2(2; x) = 3!!;$

$P_3(0; x) = 1 : 2\,(5x^3 - 3x);$
$P_3(1; x) = 3!! : 2\,(5x^2 - 1);$
$P_3(2; x) = 5!!\,x;$
$P_3(3; x) = 5!!;$

$P_4(0; x) = 1 : 2^3\,(35x^4 - 30x^2 + 3);$
$P_4(1; x) = 5 : 2\,(7x^3 - 3x);$
$P_4(2; x) = 5!! : 2\,(7x^2 - 1);$
$P_4(3; x) = 7!!\,x;$
$P_4(4; x) = 7!!;$

$P_5(0; x) = 1 : 2^3\,(63x^5 - 70x^3 + 15x);$
$P_5(1; x) = 5!! : 2^3\,(21x^4 - 14x^2 + 1);$
$P_5(2; x) = 7!! : 2\,(3x^3 - x);$
$P_5(3; x) = 7!! : 2\,(9x^2 - 1);$
$P_5(4; x) = 9!!\,x;$
$P_5(5; x) = 9!!;$

$P_6(0; x) = 1 : 2^4\,(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5);$
$P_6(1; x) = 3 \cdot 7 : 2^3\,(33x^5 - 30x^3 + 5x);$
$P_6(2; x) = 7!! : 2^3\,(33x^4 - 18x^2 + 1);$
$P_6(3; x) = 7!! \cdot 3 : 2\,(11x^3 - 3x);$
$P_6(4; x) = 9!! : 2\,(11x^2 - 1);$
$P_6(5; x) = 11!!\,x;$
$P_6(6; x) = 11!!;$

$P_7(0; x) = 1 : 2^4\,(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x);$
$P_7(1; x) = 7 : 2^4\,(429x^6 - 495x^4 + 135x^2 - 5);$
$P_7(2; x) = 3^2 \cdot 7 : 2^3\,(143x^5 - 110x^3 + 15x);$
$P_7(3; x) = 7!! \cdot 3 : 2^3\,(143x^4 - 66x^2 + 3);$
$P_7(4; x) = 7!! \cdot 3 \cdot 11 : 2\,(13x^3 - 3x);$
$P_7(5; x) = 11!! : 2\,(13x^2 - 1);$
$P_7(6; x) = 13!!\,x;$
$P_7(7; x) = 13!!;$

$P_8(0; x) = 1 : 2^7\,(6435x^8 - 12\,012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35);$
$P_8(1; x) = 3^2 : 2^4\,(715x^7 - 1001x^5 + 385x^3 - 35x);$
$P_8(2; x) = 7!! \cdot 3 : 2^4\,(143x^6 - 143x^4 + 33x^2 - 1);$
$P_8(3; x) = 7!! \cdot 3 \cdot 11 : 2^3\,(39x^5 - 26x^3 + 3x);$
$P_8(4; x) = 11!! : 2^3\,(65x^4 - 26x^2 + 1);$
$P_8(5; x) = 13!! : 2\,(5x^3 - x);$
$P_8(6; x) = 13!! : 2\,(15x^2 - 1);$
$P_8(7; x) = 15!!\,x;$
$P_8(8; x) = 15!!;$

$P_9\ (0;\ x) = 1 : 2^7\ (12\,155\,x^9 - 25\,740\,x^7 + 18\,018\,x^5 - 4620\,x^3 + 315\,x);$

$P_9\ (1;\ x) = 5!! \cdot 3 : 2^7\ (2431\,x^8 - 4004\,x^6 + 2002\,x^4 - 308\,x^2 + 7);$

$P_9\ (2;\ x) = 5!! \cdot 3 \cdot 11 : 2^4\ (221\,x^7 - 273\,x^5 + 91\,x^3 - 7\,x);$

$P_9\ (3;\ x) = 7!! \cdot 3 \cdot 11 : 2^4\ (221\,x^6 - 195\,x^4 + 39\,x^2 - 1);$

$P_9\ (4;\ x) = 13!! : 2^3\ (17\,x^5 - 10\,x^3 + x);$

$P_9\ (5;\ x) = 13!! : 2^3\ (85\,x^4 - 30\,x^2 + 1);$

$P_9\ (6;\ x) = 13!! \cdot 5 : 2\ (17\,x^3 - 3\,x);$

$P_9\ (7;\ x) = 15!! : 2\ (17\,x^2 - 1);$

$P_9\ (8;\ x) = 17!!\,x;$

$P_9\ (9;\ x) = 17!!;$

$P_{10}\ (0;\ x) = 1 : 2^8\ (46\,189\,x^{10} - 109\,395\,x^8 + 90090\,x^6 - 30\,030\,x^4 + 3465\,x^2 - 63);$

$P_{10}\ (1;\ x) = 5 \cdot 11 : 2^7\ (4199\,x^9 - 7956\,x^7 + 4914\,x^5 - 1092\,x^3 + 63\,x);$

$P_{10}\ (2;\ x) = 5!! \cdot 3 \cdot 11 : 2^7\ (4199\,x^8 - 6188\,x^6 + 2730\,x^4 - 364\,x^2 + 7);$

$P_{10}\ (3;\ x) = 5!! \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 : 2^4\ (323\,x^7 - 357\,x^5 + 105\,x^3 - 7\,x);$

$P_{10}\ (4;\ x) = 7!! \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 : 2^4\ (323\,x^6 - 255\,x^4 + 45\,x^2 - 1);$

$P_{10}\ (5;\ x) = 13!! : 2^3\ (323\,x^5 - 170\,x^3 + 15\,x);$

$P_{10}\ (6;\ x) = 13!! \cdot 5 : 2^3\ (323\,x^4 - 102\,x^2 + 3);$

$P_{10}\ (7;\ x) = 13!! \cdot 5 \cdot 17 : 2\ (19\,x^3 - 3\,x);$

$P_{10}\ (8;\ x) = 17!! : 2\ (19\,x^2 - 1);$

$P_{10}\ (9;\ x) = 19!!\,x;$

$P_{10}\ (10;\ x) = 19!!;$

$P_{11}\ (0;\ x) = 1 : 2^8\ (88\,179\,x^{11} - 230\,945\,x^9 + 218\,790\,x^7 - 90\,090\,x^5 + 15\,015\,x^3 - 693\,x);$

$P_{11}\ (1;\ x) = 3 \cdot 11 : 2^8\ (29\,393\,x^{10} - 62\,985\,x^8 + 46\,410\,x^6 - 13\,650\,x^4 + 1365\,x^2 - 21);$

$P_{11}\ (2;\ x) = 5!! \cdot 11 \cdot 13 : 2^7\ (2261\,x^9 - 3876\,x^7 + 2142\,x^5 - 420\,x^3 + 21\,x);$

$P_{11}\ (3;\ x) = 7!! \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 : 2^7\ (969\,x^8 - 1292\,x^6 + 510\,x^4 - 60\,x^2 + 1);$

$P_{11}\ (4;\ x) = 13!! : 2^4\ (323\,x^7 - 323\,x^5 + 85\,x^3 - 5\,x);$

$P_{11}\ (5;\ x) = 13!! : 2^4\ (2261\,x^6 - 1615\,x^4 + 255\,x^2 - 5);$

$P_{11}\ (6;\ x) = 13!! \cdot 17 : 2^3\ (399\,x^5 - 190\,x^3 + 15\,x);$

$P_{11}\ (7;\ x) = 17!! : 2^3\ (133\,x^4 - 38\,x^2 + 1);$

$P_{11}\ (8;\ x) = 19!! : 2\ (7\,x^3 - x);$

$P_{11}\ (9;\ x) = 19!! : 2\ (21\,x^2 - 1);$

$P_{11}\ (10;\ x) = 21!!\,x;$

$P_{11}\ (11;\ x) = 21!!;$

$P_{12}\ (0;\ x) = 1 : 2^{10}\ (676\,039\,x^{12} - 1\,939\,938\,x^{10} + 2\,078\,505\,x^8 - 1\,021\,020\,x^6 + 225\,225\,x^4 - 18\,018\,x^2 + 231);$

$P_{12}\,(1;\,x) = 3 \cdot 13 : 2^8\,(52\,003\,x^{11} - 124\,355\,x^9 + 106\,590\,x^7 - 39\,270\,x^5 + 5775\,x^3 - 231\,x);$

$P_{12}\,(2;\,x) = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 : 2^8\,(7429\,x^{10} - 14\,535\,x^8 + 9690\,x^6 - 2550\,x^4 + 225\,x^2 - 3);$

$P_{12}\,(3;\,x) = 7!! \cdot 11 \cdot 13 : 2^7\,(7429\,x^9 - 11\,628\,x^7 + 5814\,x^5 - 1020\,x^3 + 45\,x);$

$P_{12}\,(4;\,x) = 13!! : 2^7\,(7429\,x^8 - 9044\,x^6 + 3230\,x^4 - 340\,x^2 + 5);$

$P_{12}\,(5;\,x) = 13!! \cdot 17 : 2^4\,(437\,x^7 - 399\,x^5 + 95\,x^3 - 5\,x);$

$P_{12}\,(6;\,x) = 13!! \cdot 17 : 2^4\,(3059\,x^6 - 1995\,x^4 + 285\,x^2 - 5);$

$P_{12}\,(7;\,x) = 13!! \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 : 2^3\,(161\,x^5 - 70\,x^3 + 5\,x);$

$P_{12}\,(8;\,x) = 19!! : 2^3\,(161\,x^4 - 42\,x^2 + 1);$

$P_{12}\,(9;\,x) = 19!! \cdot 7 : 2\,(23\,x^3 - 3\,x);$

$P_{12}\,(10;\,x) = 21!! : 2\,(23\,x^2 - 1);$

$P_{12}\,(11;\,x) = 23!!\,x;$

$P_{12}\,(12;\,x) = 23!!;$

$P_{13}\,(0;\,x) = 1 : 2^{10}\,(1\,300\,075\,x^{13} - 4\,056\,234\,x^{11} + 4\,849\,845\,x^9 - 2\,771\,340\,x^7 + 765\,765\,x^5$
$- 90\,090\,x^3 + 3003\,x);$

$P_{13}\,(1;\,x) = 7 \cdot 13 : 2^{10}\,(185\,725\,x^{12} - 490\,314\,x^{10} + 479\,655\,x^8 - 213\,180\,x^6 + 42\,075\,x^4 - 2\,970\,x^2$
$+ 33);$

$P_{13}\,(2;\,x) = 7!! \cdot 13 : 2^8\,(37\,145\,x^{11} - 81\,719\,x^9 + 63\,954\,x^7 - 21\,318\,x^5 + 2\,805\,x^3 - 99\,x);$

$P_{13}\,(3;\,x) = 7!! \cdot 11 \cdot 13 : 2^8\,(37\,145\,x^{10} - 66\,861\,x^8 + 40\,698\,x^6 - 9690\,x^4 + 765\,x^2 - 9);$

$P_{13}\,(4;\,x) = 7!! \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 : 2^7\,(10\,925\,x^9 - 15\,732\,x^7 + 7182\,x^5 - 1140\,x^3 + 45\,x);$

$P_{13}\,(5;\,x) = 13!! \cdot 17 : 2^7\,(10\,925\,x^8 - 12\,236\,x^6 + 3990\,x^4 - 380\,x^2 + 5);$

$P_{13}\,(6;\,x) = 13!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^4\,(575\,x^7 - 483\,x^5 + 105\,x^3 - 5\,x);$

$P_{13}\,(7;\,x) = 13!! \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 : 2^4\,(805\,x^6 - 483\,x^4 + 63\,x^2 - 1);$

$P_{13}\,(8;\,x) = 19!! \cdot 7 : 2^3\,(115\,x^5 - 46\,x^3 + 3\,x);$

$P_{13}\,(9;\,x) = 19!! \cdot 7 : 2^3\,(575\,x^4 - 138\,x^2 + 3);$

$P_{13}\,(10;\,x) = 19!! \cdot 7 \cdot 23 : 2\,(25\,x^3 - 3\,x);$

$P_{13}\,(11;\,x) = 23!! : 2\,(25\,x^2 - 1);$

$P_{13}\,(12;\,x) = 25!!\,x;$

$P_{13}\,(13;\,x) = 25;$

$P_{14}\,(0;\,x) = 1 : 2^{11}\,(5\,014\,575\,x^{14} - 16\,900\,975\,x^{12} + 22\,309\,287\,x^{10} - 14\,549\,535\,x^8 + 4\,849\,845\,x^6$
$- 765\,765\,x^4 + 45\,045\,x^2 - 429);$

$P_{14}\,(1;\,x) = 7!! : 2^{10}\,(334\,305\,x^{13} - 965\,770\,x^{11} + 1\,062\,347\,x^9 - 554\,268\,x^7 + 138\,567\,x^5 - 14\,586\,x^3$
$+ 429\,x);$

$P_{14}\,(2;\,x) = 7!! \cdot 13 : 2^{10}\,(334\,305\,x^{12} - 817\,190\,x^{10} + 735\,471\,x^8 - 298\,452\,x^6 + 53\,295\,x^4 - 3366\,x^2$
$+ 33);$

$P_{14}\,(3;\,x) = 7!! \cdot 13 \cdot 17 : 2^8\,(58\,995\,x^{11} - 120\,175\,x^9 + 86\,526\,x^7 - 26\,334\,x^5 + 3135\,x^3 - 99\,x);$

$P_{14}\,(4;\,x) = 13!! \cdot 17 : 2^8\,(6555\,x^{10} - 10\,925\,x^8 + 6118\,x^6 - 1330\,x^4 + 95\,x^2 - 1);$

$P_{14}\,(5;\,x) = 13!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^7\,(1725\,x^9 - 2300\,x^7 + 966\,x^5 - 140\,x^3 + 5\,x);$

$P_{14}(6; x) = 13!! \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 : 2^7 (3105 x^8 - 3220 x^6 + 966 x^4 - 84 x^2 + 1);$

$P_{14}(7; x) = 19!! : 2^4 (1035 x^7 - 805 x^5 + 161 x^3 - 7 x);$

$P_{14}(8; x) = 19!! \cdot 7 : 2^4 (1035 x^6 - 575 x^4 + 69 x^2 - 1);$

$P_{14}(9; x) = 19!! \cdot 7 \cdot 23 : 2^3 (135 x^5 - 50 x^3 + 3 x);$

$P_{14}(10; x) = 23!! : 2^3 (225 x^4 - 50 x^2 + 1);$

$P_{14}(11; x) = 25!! : 2 (9 x^3 - x);$

$P_{14}(12; x) = 25!! : 2 (27 x^2 - 1);$

$P_{14}(13; x) = 27!! x;$

$P_{14}(14; x) = 27!!;$

$P_{15}(0; x) = 1 : 2^{11} (9\,694\,845 x^{15} - 35\,102\,025 x^{13} + 50\,702\,925 x^{11} - 37\,182\,145 x^9 + 14\,549\,535 x^7 - 2\,909\,907 x^5 + 255\,255 x^3 - 6435 x);$

$P_{15}(1; x) = 5!! : 2^{11} (9\,694\,845 x^{14} - 30\,421\,755 x^{12} + 37\,182\,145 x^{10} - 22\,309\,287 x^8 + 6\,789\,783 x^6 - 969\,969 x^4 + 51\,051 x^2 - 429);$

$P_{15}(2; x) = 7!! \cdot 17 : 2^{10} (570\,285 x^{13} - 1\,533\,870 x^{11} + 1\,562\,275 x^9 - 749\,892 x^7 + 171\,171 x^5 - 16\,302 x^3 + 429 x);$

$P_{15}(3; x) = 7!! \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17 : 2^{10} (190\,095 x^{12} - 432\,630 x^{10} + 360\,525 x^8 - 134\,596 x^6 + 21\,945 x^4 - 1\,254 x^2 + 11);$

$P_{15}(4; x) = 9!! \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 : 2^8 (10\,005 x^{11} - 18\,975 x^9 + 12\,650 x^7 - 3542 x^5 + 385 x^3 - 11 x);$

$P_{15}(5; x) = 13!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^8 (10\,005 x^{10} - 15\,525 x^8 + 8050 x^6 - 1610 x^4 + 105 x^2 - 1);$

$P_{15}(6; x) = 13!! \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 : 2^7 (10\,005 x^9 - 12\,420 x^7 + 4830 x^5 - 644 x^3 + 21 x);$

$P_{15}(7; x) = 19!! : 2^7 (30\,015 x^8 - 28\,980 x^6 + 8050 x^4 - 644 x^2 + 7);$

$P_{15}(8; x) = 19!! \cdot 23 : 2^4 (1305 x^7 - 945 x^5 + 175 x^3 - 7 x);$

$P_{15}(9; x) = 19!! \cdot 7 \cdot 23 : 2^4 (1305 x^6 - 675 x^4 + 75 x^2 - 1);$

$P_{15}(10; x) = 23!! \cdot 5 : 2^3 (261 x^5 - 90 x^3 + 5 x);$

$P_{15}(11; x) = 25!! : 2^3 (261 x^4 - 54 x^2 + 1);$

$P_{15}(12; x) = 25!! \cdot 9 : 2 (29 x^3 - 3 x);$

$P_{15}(13; x) = 27!! : 2 (29 x^2 - 1);$

$P_{15}(14; x) = 29!! x;$

$P_{15}(15; x) = 29!!;$

$P_{16}(0; x) = 1 : 2^{15} (300\,540\,195 x^{16} - 1\,163\,381\,400 x^{14} + 1\,825\,305\,300 x^{12} - 1\,487\,285\,800 x^{10} + 669\,278\,610 x^8 - 162\,954\,792 x^6 + 19\,399\,380 x^4 - 875\,160 x^2 + 6435);$

$P_{16}(1; x) = 17 : 2^{11} (17\,678\,835 x^{15} - 59\,879\,925 x^{13} + 80\,528\,175 x^{11} - 54\,679\,625 x^9 + 19\,684\,665 x^7 - 3\,594\,591 x^5 + 285\,285 x^3 - 6435 x);$

$P_{16}(2; x) = 5!! \cdot 3 \cdot 17 : 2^{11} (5\,892\,945 x^{14} - 17\,298\,645 x^{12} + 19\,684\,665 x^{10} - 10\,935\,925 x^8 + 3\,062\,059 x^6 - 399\,399 x^4 + 19\,019 x^2 - 143);$

$P_{16}(3; x) = 7!! \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{10} (310\,155 x^{13} - 780\,390 x^{11} + 740\,025 x^9 - 328\,900 x^7 + 69\,069 x^5 - 6006 x^3 + 143 x);$

$P_{16}(4; x) = 7!! \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{10} (310\,155 x^{12} - 660\,330 x^{10} + 512\,325 x^8 - 177\,100 x^6 + 26\,565 x^4 - 1386 x^2 + 11);$

$P_{16}(5; x) = 9!! \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 : 2^8 (310\,155\,x^{11} - 550\,275\,x^9 + 341\,550\,x^7 - 88\,550\,x^5 + 8855\,x^3 - 231\,x);$

$P_{16}(6; x) = 13!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^8 (310\,155\,x^{10} - 450\,225\,x^8 + 217\,350\,x^6 - 40\,250\,x^4 + 2415\,x^2 - 21);$

$P_{16}(7; x) = 13!! \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^7 (13\,485\,x^9 - 15\,660\,x^7 + 5670\,x^5 - 700\,x^3 + 21\,x);$

$P_{16}(8; x) = 19!! \cdot 23 : 2^7 (40\,455\,x^8 - 36\,540\,x^6 + 9450\,x^4 - 700\,x^2 + 7);$

$P_{16}(9; x) = 19!! \cdot 5 \cdot 23 : 2^4 (8091\,x^7 - 5481\,x^5 + 945\,x^3 - 35\,x);$

$P_{16}(10; x) = 19!! \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 : 2^4 (8091\,x^6 - 3915\,x^4 + 405\,x^2 - 5);$

$P_{16}(11; x) = 23!! \cdot 5 \cdot 9 : 2^3 (899\,x^5 - 290\,x^3 + 15\,x);$

$P_{16}(12; x) = 25!! \cdot 9 : 2^3 (899\,x^4 - 174\,x^2 + 3);$

$P_{16}(13; x) = 25!! \cdot 9 \cdot 29 : 2 (31\,x^3 - 3\,x);$

$P_{16}(14; x) = 29!! : 2 (31\,x^2 - 1);$

$P_{16}(15; x) = 31!!\,x;$

$P_{16}(16; x) = 31!!;$

$P_{17}(0; x) = 1 : 2^{15} (583\,401\,555\,x^{17} - 2\,404\,321\,560\,x^{15} + 4\,071\,834\,900\,x^{13} - 3\,650\,610\,600\,x^{11} + 1\,859\,107\,250\,x^9 - 535\,422\,888\,x^7 + 81\,477\,396\,x^5 - 5\,542\,680\,x^3 + 109\,395\,x);$

$P_{17}(1; x) = 9 \cdot 17 : 2^{15} (64\,822\,395\,x^{16} - 235\,717\,800\,x^{14} + 345\,972\,900\,x^{12} - 262\,462\,200\,x^{10} + 109\,359\,250\,x^8 - 24\,496\,472\,x^6 + 2\,662\,660\,x^4 - 108\,680\,x^2 + 715);$

$P_{17}(2; x) = 9 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{11} (3\,411\,705\,x^{15} - 10\,855\,425\,x^{13} + 13\,656\,825\,x^{11} - 8\,633\,625\,x^9 + 2\,877\,875\,x^7 - 483\,483\,x^5 + 35\,035\,x^3 - 715\,x);$

$P_{17}(3; x) = 5!! \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{11} (10\,235\,115\,x^{14} - 28\,224\,105\,x^{12} + 30\,045\,015\,x^{10} - 15\,540\,525\,x^8 + 4\,029\,025\,x^6 - 483\,483\,x^4 + 21\,021\,x^2 - 143);$

$P_{17}(4; x) = 9!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{10} (3\,411\,705\,x^{13} - 8\,064\,030\,x^{11} + 7\,153\,575\,x^9 - 2\,960\,100\,x^7 + 575\,575\,x^5 - 46\,046\,x^3 + 1001\,x);$

$P_{17}(5; x) = 13!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{10} (310\,155\,x^{12} - 620\,310\,x^{10} + 450\,225\,x^8 - 144\,900\,x^6 + 20\,125\,x^4 - 966\,x^2 + 7);$

$P_{17}(6; x) = 13!! \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^8 (40\,455\,x^{11} - 67\,425\,x^9 + 39\,150\,x^7 - 9450\,x^5 + 875\,x^3 - 21\,x);$

$P_{17}(7; x) = 13!! \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^8 (148\,335\,x^{10} - 202\,275\,x^8 + 91\,350\,x^6 - 15\,750\,x^4 + 875\,x^2 - 7);$

$P_{17}(8; x) = 19!! \cdot 5 \cdot 23 : 2^7 (29\,667\,x^9 - 32\,364\,x^7 + 10\,962\,x^5 - 1260\,x^3 + 35\,x);$

$P_{17}(9; x) = 19!! \cdot 5 \cdot 23 : 2^7 (267\,003\,x^8 - 226\,548\,x^6 + 54\,810\,x^4 - 3780\,x^2 + 35);$

$P_{17}(10; x) = 19!! \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 23 : 2^4 (9889\,x^7 - 6293\,x^5 + 1015\,x^3 - 35\,x);$

$P_{17}(11; x) = 23!! \cdot 5 \cdot 9 : 2^4 (9889\,x^6 - 4495\,x^4 + 435\,x^2 - 5);$

$P_{17}(12; x) = 23!! \cdot 5 \cdot 9 \cdot 29 : 2^3 (1023\,x^5 - 310\,x^3 + 15\,x);$

$P_{17}(13; x) = 29!! : 2^3 (341\,x^4 - 62\,x^2 + 1);$

$P_{17}(14; x) = 31!! : 2 (11\,x^3 - x);$

$P_{17}(15; x) = 31!! : 2 (33\,x^2 - 1);$

$P_{17}(16; x) = 33!!\,x;$

$P_{17}(17; x) = 33!!;$

$P_{18}(0; x) = 1 : 2^{16} (2\,268\,783\,825\,x^{18} - 9\,917\,826\,435\,x^{16} + 18\,032\,411\,700\,x^{14} - 17\,644\,617\,900\,x^{12} + 10\,039\,179\,150\,x^{10} - 3\,346\,393\,050\,x^8 + 624\,660\,036\,x^6 - 58\,198\,140\,x^4 + 2\,078\,505\,x^2 - 12\,155);$

$$P_{18}(1;x) = 9 \cdot 19 : 2^{15} (119\,409\,675\,x^{17} - 463\,991\,880\,x^{15} + 738\,168\,900\,x^{13} - 619\,109\,400\,x^{11} + 293\,543\,250\,x^{9} - 78\,278\,200\,x^{7} + 10\,958\,948\,x^{5} - 680\,680\,x^{3} + 12\,155\,x);$$

$$P_{18}(2;x) = 5!! \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{15} (23\,881\,935\,x^{16} - 81\,880\,920\,x^{14} + 112\,896\,420\,x^{12} - 80\,120\,040\,x^{10} + 31\,081\,050\,x^{8} - 6\,446\,440\,x^{6} + 644\,644\,x^{4} - 24\,024\,x^{2} + 143);$$

$$P_{18}(3;x) = 7!! \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{11} (3\,411\,705\,x^{15} - 10\,235\,115\,x^{13} + 12\,096\,045\,x^{11} - 7\,153\,575\,x^{9} + 2\,220\,075\,x^{7} - 345\,345\,x^{5} + 23\,023\,x^{3} - 429\,x);$$

$$P_{18}(4;x) = 11!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{11} (1\,550\,775\,x^{14} - 4\,032\,015\,x^{12} + 4\,032\,015\,x^{10} - 1\,950\,975\,x^{8} + 470\,925\,x^{6} - 52\,325\,x^{4} + 2\,093\,x^{2} - 13);$$

$$P_{18}(5;x) = 11!! \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{10} (471\,975\,x^{13} - 1\,051\,830\,x^{11} + 876\,525\,x^{9} - 339\,300\,x^{7} + 61\,425\,x^{5} - 4550\,x^{3} + 91\,x);$$

$$P_{18}(6;x) = 13!! \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{10} (471\,975\,x^{12} - 890\,010\,x^{10} + 606\,825\,x^{8} - 182\,700\,x^{6} + 23\,625\,x^{4} - 1050\,x^{2} + 7);$$

$$P_{18}(7;x) = 19!! \cdot 5 \cdot 23 : 2^{8} (18\,879\,x^{11} - 29\,667\,x^{9} + 16\,182\,x^{7} - 3654\,x^{5} + 315\,x^{3} - 7\,x);$$

$$P_{18}(8;x) = 19!! \cdot 5 \cdot 23 : 2^{8} (207\,669\,x^{10} - 267\,003\,x^{8} + 113\,274\,x^{6} - 18\,270\,x^{4} + 945\,x^{2} - 7);$$

$$P_{18}(9;x) = 19!! \cdot 3 \cdot 5 \cdot 23 : 2^{7} (346\,115\,x^{9} - 356\,004\,x^{7} + 113\,274\,x^{5} - 12\,180\,x^{3} + 315\,x);$$

$$P_{18}(10;x) = 23!! \cdot 5 \cdot 9 : 2^{7} (49\,445\,x^{8} - 39\,556\,x^{6} + 8\,990\,x^{4} - 580\,x^{2} + 5);$$

$$P_{18}(11;x) = 23!! \cdot 5 \cdot 9 \cdot 29 : 2^{4} (1705\,x^{7} - 1023\,x^{5} + 155\,x^{3} - 5\,x);$$

$$P_{18}(12;x) = 25!! \cdot 9 \cdot 29 : 2^{4} (2387\,x^{6} - 1023\,x^{4} + 93\,x^{2} - 1);$$

$$P_{18}(13;x) = 31!! : 2^{3} (77\,x^{5} - 22\,x^{3} + x);$$

$$P_{18}(14;x) = 31!! : 2^{3} (385\,x^{4} - 66\,x^{2} + 1);$$

$$P_{18}(15;x) = 31!! \cdot 11 : 2 (35\,x^{3} - 3\,x);$$

$$P_{18}(16;x) = 33!! : 2 (35\,x^{2} - 1);$$

$$P_{18}(17;x) = 35!!\,x;$$

$$P_{18}(18;x) = 35!!;$$

$$P_{19}(0;x) = 1 : 2^{16} (4\,418\,157\,975\,x^{19} - 20\,419\,054\,425\,x^{17} + 39\,671\,305\,740\,x^{15} - 42\,075\,627\,300\,x^{13} + 26\,466\,926\,850\,x^{11} - 10\,039\,179\,150\,x^{9} + 2\,230\,928\,700\,x^{7} - 267\,711\,444\,x^{5} + 14\,549\,535\,x^{3} - 230\,945\,x);$$

$$P_{19}(1;x) = 5 \cdot 19 : 2^{16} (883\,631\,595\,x^{18} - 3\,653\,936\,055\,x^{16} + 6\,263\,890\,380\,x^{14} - 5\,757\,717\,420\,x^{12} + 3\,064\,591\,530\,x^{10} - 951\,080\,130\,x^{8} + 164\,384\,220\,x^{6} - 14\,090\,076\,x^{4} + 459\,459\,x^{2} - 2431);$$

$$P_{19}(2;x) = 7!! \cdot 3 \cdot 19 : 2^{15} (126\,233\,085\,x^{17} - 463\,991\,880\,x^{15} + 695\,987\,820\,x^{13} - 548\,354\,040\,x^{11} + 243\,221\,550\,x^{9} - 60\,386\,040\,x^{7} + 7\,827\,820\,x^{5} - 447\,304\,x^{3} + 7293\,x);$$

$$P_{19}(3;x) = 7!! \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{15} (11\,475\,735\,x^{16} - 37\,218\,600\,x^{14} + 48\,384\,180\,x^{12} - 32\,256\,120\,x^{10} + 11\,705\,850\,x^{8} - 2\,260\,440\,x^{6} + 209\,300\,x^{4} - 7176\,x^{2} + 39);$$

$$P_{19}(4;x) = 7!! \cdot 3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{11} (498\,945\,x^{15} - 1\,415\,925\,x^{13} + 1\,577\,745\,x^{11} - 876\,525\,x^{9} + 254\,475\,x^{7} - 36\,855\,x^{5} + 2275\,x^{3} - 39\,x);$$

$$P_{19}(5;x) = 11!! \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{11} (2\,494\,725\,x^{14} - 6\,135\,675\,x^{12} + 5\,785\,065\,x^{10} - 2\,629\,575\,x^{8} + 593\,775\,x^{6} - 61\,425\,x^{4} + 2275\,x^{2} - 13);$$

$$P_{19}(6;x) = 11!! \cdot 5^{2} \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{10} (698\,523\,x^{13} - 1\,472\,562\,x^{11} + 1\,157\,013\,x^{9} - 420\,732\,x^{7} + 71\,253\,x^{5} - 4914\,x^{3} + 91\,x);$$

$$P_{19}(7;x) = 13!! \cdot 5^{2} \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{10} (698\,523\,x^{12} - 1\,246\,014\,x^{10} + 801\,009\,x^{8} - 226\,548\,x^{6} + 27\,405\,x^{4} - 1134\,x^{2} + 7);$$

$P_{19}\,(8;\,x) = 19!! \cdot 3 \cdot 5 \cdot 23 : 2^8\,(232\,841\,x^{11} - 346\,115\,x^9 + 178\,002\,x^7 - 37\,758\,x^5 + 3\,045\,x^3 - 63\,x);$

$P_{19}\,(9;\,x) = 23!! \cdot 5 : 2^8\,(365\,893\,x^{10} - 445\,005\,x^8 + 178\,002\,x^6 - 26\,970\,x^4 + 1\,305\,x^2 - 9);$

$P_{19}\,(10;\,x) = 23!! \cdot 5 \cdot 29 : 2^7\,(63\,085\,x^9 - 61\,380\,x^7 + 18\,414\,x^5 - 1860\,x^3 + 45\,x);$

$P_{19}\,(11;\,x) = 25!! \cdot 9 \cdot 29 : 2^7\,(12\,617\,x^8 - 9548\,x^6 + 2046\,x^4 - 124\,x^2 + 1);$

$P_{19}\,(12;\,x) = 25!! \cdot 9 \cdot 29 \cdot 31 : 2^4\,(407\,x^7 - 231\,x^5 + 33\,x^3 - x);$

$P_{19}\,(13;\,x) = 25!! \cdot 9 \cdot 29 \cdot 31 : 2^4\,(2849\,x^6 - 1155\,x^4 + 99\,x^2 - 1);$

$P_{19}\,(14;\,x) = 31!! \cdot 11 : 2^3\,(259\,x^5 - 70\,x^3 + 3\,x);$

$P_{19}\,(15;\,x) = 31!! \cdot 11 : 2^3\,(1295\,x^4 - 210\,x^2 + 3);$

$P_{19}\,(16;\,x) = 31!! \cdot 11 \cdot 35 : 2\,(37\,x^3 - 3\,x);$

$P_{19}\,(17;\,x) = 35!! : 2\,(37\,x^2 - 1);$

$P_{19}\,(18;\,x) = 37!!\,x;$

$P_{19}\,(19;\,x) = 37!!;$

$P_{20}\,(0;\,x) = 1 : 2^{18}\,(34\,461\,632\,205\,x^{20} - 167\,890\,003\,050\,x^{18} + 347\,123\,925\,225\,x^{16} - 396\,713\,057\,400\,x^{14}$
$+ 273\,491\,577\,450\,x^{12} - 116\,454\,478\,140\,x^{10} + 30\,117\,537\,450\,x^8 - 4\,461\,857\,400\,x^6 +$
$334\,639\,305\,x^4 - 9\,699\,690\,x^2 + 46\,189);$

$P_{20}\,(1;\,x) = 7!! : 2^{16}\,(1\,641\,030\,105\,x^{19} - 7\,195\,285\,845\,x^{17} + 13\,223\,768\,580\,x^{15} - 13\,223\,768\,580\,x^{13}$
$+ 7\,814\,045\,070\,x^{11} - 2\,772\,725\,670\,x^9 + 573\,667\,380\,x^7 - 63\,740\,820\,x^5 + 3\,187\,041\,x^3$
$- 46\,189\,x);$

$P_{20}\,(2;\,x) = 7!! \cdot 11 \cdot 19 : 2^{16}\,(149\,184\,555\,x^{18} - 585\,262\,485\,x^{16} + 949\,074\,300\,x^{14} - 822\,531\,060\,x^{12}$
$+ 411\,265\,530\,x^{10} - 119\,399\,670\,x^8 + 19\,213\,740\,x^6 - 1\,524\,900\,x^4 + 457\,457\,x^2 - 221);$

$P_{20}\,(3;\,x) = 7!! \cdot 3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{15}\,(19\,458\,855\,x^{17} - 67\,856\,520\,x^{15} + 96\,282\,900\,x^{13} - 71\,524\,440\,x^{11}$
$+ 29\,801\,850\,x^9 - 6\,921\,720\,x^7 + 835\,380\,x^5 - 44\,200\,x^3 + 663\,x);$

$P_{20}\,(4;\,x) = 11!! \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{15}\,(6\,486\,285\,x^{16} - 19\,957\,800\,x^{14} + 24\,542\,700\,x^{12} - 15\,426\,840\,x^{10}$
$+ 5\,259\,150\,x^8 - 950\,040\,x^6 + 81\,900\,x^4 - 2600\,x^2 + 13);$

$P_{20}\,(5;\,x) = 11!! \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{11}\,(1\,297\,257\,x^{15} - 3\,492\,615\,x^{13} + 3\,681\,405\,x^{11} - 1\,928\,355\,x^9$
$+ 525\,915\,x^7 - 71\,253\,x^5 + 4095\,x^3 - 65\,x);$

$P_{20}\,(6;\,x) = 13!! \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 5 : 2^{11}\,(299\,367\,x^{14} - 698\,523\,x^{12} + 623\,007\,x^{10} - 267\,003\,x^8$
$+ 56\,637\,x^6 - 5\,481\,x^4 + 189\,x^2 - 1);$

$P_{20}\,(7;\,x) = 19!! \cdot 3 \cdot 23 \cdot 5 : 2^{10}\,(232\,841\,x^{13} - 465\,682\,x^{11} + 346\,115\,x^9 - 118\,668\,x^7 + 18\,879\,x^5 -$
$1218\,x^3 + 21\,x);$

$P_{20}\,(8;\,x) = 23!! \cdot 5 : 2^{10}\,(432\,419\,x^{12} - 731\,786\,x^{10} + 445\,005\,x^8 - 118\,666\,x^6 + 13\,485\,x^4 - 522\,x^2 + 3);$

$P_{20}\,(9;\,x) = 23!! \cdot 5 \cdot 29 : 2^8\,(44\,733\,x^{11} - 63\,085\,x^9 + 30\,690\,x^7 - 6138\,x^5 + 465\,x^3 - 9\,x);$

$P_{20}\,(10;\,x) = 23!! \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 : 2^8\,(164\,021\,x^{10} - 1\,89\,255\,x^8 + 71\,610\,x^6 - 10\,230\,x^4 + 465\,x^2 - 3);$

$P_{20}\,(11;\,x) = 25!! \cdot 3 \cdot 29 \cdot 31 : 2^7\,(5291\,x^9 - 4\,884\,x^7 + 1\,386\,x^5 - 132\,x^3 + 3\,x);$

$P_{20}\,(12;\,x) = 25!! \cdot 9 \cdot 29 \cdot 31 : 2^7\,(15\,873\,x^8 - 11\,396\,x^6 + 2310\,x^4 - 132\,x^2 + 1);$

$P_{20}\,(13;\,x) = 31!! \cdot 11 : 2^4\,(481\,x^7 - 259\,x^5 + 35\,x^3 - x);$

$P_{20}\,(14;\,x) = 31!! \cdot 11 : 2^4\,(3367\,x^6 - 1295\,x^4 + 105\,x^2 - 1);$

$P_{20}\,(15;\,x) = 31!! \cdot 11 \cdot 7 : 2^3\,(1443\,x^5 - 370\,x^3 + 15\,x);$

$P_{20}\,(16;\,x) = 35!! : 2^3\,(481\,x^4 - 74\,x^2 + 1);$

$P_{20}(17; x) = 37!! : 2\,(13\,x^3 - x);$

$P_{20}(18; x) = 37!! : 2\,(39\,x^2 - 1);$

$P_{20}(19; x) = 39!!\,x;$

$P_{20}(20; x) = 39!!;$

Die ungeraden Fakultäten $(2n + 1)!!$.

1!!	1
3!!	3
5!!	15
7!!	105
9!!	945
11!!	10 395
13!!	135 135
15!!	2 027 025
17!!	34 459 425
19!!	654 729 075
21!!	13 749 310 575
23!!	316 234 143 225
25!!	7 905 853 580 625
27!!	213 458 046 676 875
29!!	6 190 283 353 629 375
31!!	191 898 783 962 510 625
33!!	6 332 659 870 762 850 625
35!!	221 643 095 476 699 771 875
37!!	8 200 794 532 637 891 559 375
39!!	319 830 986 772 877 770 815 625

Anlage 3. Die trigonometrischen Polynome für $\cos^j t$ und $\sin^j t$ für $j = 1, 2 \ldots 21$.

$\cos^1 t = \cos t;$
$\sin^1 t = \sin t;$

$\cos^2 t = 1 : 2\,(1 + \cos 2\,t);$
$\sin^2 t = 1 : 2\,(1 - \cos 2\,t);$

$\cos^3 t = 1 : 2^2\,(3 \cos t + \cos 3\,t);$
$\sin^3 t = 1 : 2^2\,(3 \sin t - \sin 3\,t);$

$\cos^4 t = 1 : 2^3\,(3 + 4 \cos 2\,t + \cos 4\,t);$
$\sin^4 t = 1 : 2^3\,(3 - 4 \cos 2\,t + \cos 4\,t);$

$\cos^5 t = 1 : 2^4\,(10 \cos t + 5 \cos 3\,t + \cos 5\,t);$
$\sin^5 t = 1 : 2^4\,(10 \sin t - 5 \sin 3\,t + \sin 5\,t);$

$\cos^6 t = 1 : 2^5\,(10 + 15 \cos 2\,t + 6 \cos 4\,t + \cos 6\,t);$
$\sin^6 t = 1 : 2^5\,(10 - 15 \cos 2\,t + 6 \cos 4\,t - \cos 6\,t);$

$\cos^7 t = 1 : 2^6\,(35 \cos t + 21 \cos 3\,t + 7 \cos 5\,t + \cos 7\,t);$
$\sin^7 t = 1 : 2^6\,(35 \sin t - 21 \sin 3\,t + 7 \sin 5\,t - \sin 7\,t);$

$\cos^8 t = 1 : 2^7\,(35 + 56 \cos 2\,t + 28 \cos 4\,t + 8 \cos 6\,t + \cos 8\,t);$
$\sin^8 t = 1 : 2^7\,(35 - 56 \cos 2\,t + 28 \cos 4\,t - 8 \cos 6\,t + \cos 8\,t);$

$\cos^9 t = 1 : 2^8 (126 \cos t + 84 \cos 3 t + 36 \cos 5 t + 9 \cos 7 t + \cos 9 t);$
$\sin^9 t = 1 : 2^8 (126 \sin t - 84 \sin 3 t + 36 \sin 5 t - 9 \sin 7 t + \sin 9 t);$

$\cos^{10} t = 1 : 2^9 (126 + 210 \cos 2 t + 120 \cos 4 t + 45 \cos 6 t + 10 \cos 8 t + \cos 10 t);$
$\sin^{10} t = 1 : 2^9 (126 - 210 \cos 2 t + 120 \cos 4 t - 45 \cos 6 t + 10 \cos 8 t - \cos 10 t);$

$\cos^{11} t = 1 : 2^{10} (462 \cos t + 330 \cos 3 t + 165 \cos 5 t + 55 \cos 7 t + 11 \cos 9 t + \cos 11 t);$
$\sin^{11} t = 1 : 2^{10} (462 \sin t - 330 \sin 3 t + 165 \sin 5 t - 55 \sin 7 t + 11 \sin 9 t - \sin 11 t);$

$\cos^{12} t = 1 : 2^{11} (462 + 792 \cos 2 t + 495 \cos 4 t + 220 \cos 6 t + 66 \cos 8 t + 12 \cos 10 t + \cos 12 t);$
$\sin^{12} t = 1 : 2^{11} (462 - 792 \cos 2 t + 495 \cos 4 t - 220 \cos 6 t + 66 \cos 8 t - 12 \cos 10 t + \cos 12 t);$

$\cos^{13} t = 1 : 2^{12} (1716 \cos t + 1287 \cos 3 t + 715 \cos 5 t + 286 \cos 7 t + 78 \cos 9 t + 13 \cos 11 t + \cos 13 t);$
$\sin^{13} t = 1 : 2^{12} (1716 \sin t - 1287 \sin 3 t + 715 \sin 5 t - 286 \sin 7 t + 78 \sin 9 t - 13 \sin 11 t + \sin 13 t);$

$\cos^{14} t = 1 : 2^{13} (1716 + 3003 \cos 2 t + 2002 \cos 4 t + 1001 \cos 6 t + 364 \cos 8 t + 91 \cos 10 t + 14 \cos 12 t + \cos 14 t);$
$\sin^{14} t = 1 : 2^{13} (1716 - 3003 \cos 2 t + 2002 \cos 4 t - 1001 \cos 6 t + 364 \cos 8 t - 91 \cos 10 t + 14 \cos 12 t - \cos 14 t);$

$\cos^{15} t = 1 : 2^{14} (6435 \cos t + 5005 \cos 3 t + 3003 \cos 5 t + 1365 \cos 7 t + 455 \cos 9 t + 105 \cos 11 t + 15 \cos 13 t + \cos 15 t);$
$\sin^{15} t = 1 : 2^{14} (6435 \sin t - 5005 \sin 3 t + 3003 \sin 5 t - 1365 \sin 7 t + 455 \sin 9 t - 105 \sin 11 t + 15 \sin 13 t - \sin 15 t);$

$\cos^{16} t = 1 : 2^{15} (6435 + 11\,440 \cos 2 t + 8008 \cos 4 t + 4368 \cos 6 t + 1820 \cos 8 t + 560 \cos 10 t + 120 \cos 12 t + 16 \cos 14 t + \cos 16 t),$
$\sin^{16} t = 1 : 2^{15} (6435 - 11\,440 \cos 2 t + 8008 \cos 4 t - 4368 \cos 6 t + 1820 \cos 8 t - 560 \cos 10 t + 120 \cos 12 t - 16 \cos 14 t + \cos 16 t);$

$\cos^{17} t = 1 : 2^{16} (24\,310 \cos t + 19\,448 \cos 3 t + 12\,376 \cos 5 t + 6188 \cos 7 t + 2380 \cos 9 t + 680 \cos 11 t + 136 \cos 13 t + 17 \cos 15 t + \cos 17 t);$
$\sin^{17} t = 1 : 2^{16} (24\,310 \sin t - 19\,448 \sin 3 t + 12\,376 \sin 5 t - 6188 \sin 7 t + 2380 \sin 9 t - 680 \sin 11 t + 136 \sin 13 t - 17 \sin 15 t + \sin 17 t);$

$\cos^{18} t = 1 : 2^{17} (24\,310 + 43\,758 \cos 2 t + 31\,284 \cos 4 t + 18\,564 \cos 6 t + 8568 \cos 8 t + 3060 \cos 10 t + 816 \cos 12 t + 153 \cos 14 t + 18 \cos 16 t + \cos 18 t);$
$\sin^{18} t = 1 : 2^{17} (24\,310 - 43\,758 \cos 2 t + 31\,284 \cos 4 t - 18\,564 \cos 6 t + 8568 \cos 8 t - 3060 \cos 10 t + 816 \cos 12 t - 153 \cos 14 t + 18 \cos 16 t - \cos 18 t);$

$\cos^{19} t = 1 : 2^{18} (92\,378 \cos t + 75\,582 \cos 3 t + 50\,388 \cos 5 t + 27\,132 \cos 7 t + 11\,628 \cos 9 t + 3876 \cos 11 t + 969 \cos 13 t + 171 \cos 15 t + 19 \cos 17 t + \cos 19 t);$
$\sin^{19} t = 1 : 2^{18} (92\,378 \sin t - 75\,582 \sin 3 t + 50\,388 \sin 5 t - 27\,132 \sin 7 t + 11\,628 \sin 9 t - 3876 \sin 11 t + 969 \sin 13 t - 171 \sin 15 t + 19 \sin 17 t - \sin 19 t);$

$\cos^{20} t = 1 : 2^{19} (92\,378 + 167\,960 \cos 2 t + 125\,970 \cos 4 t + 77\,520 \cos 6 t + 38\,760 \cos 8 t + 15\,504 \cos 10 t + 4845 \cos 12 t + 1140 \cos 14 t + 190 \cos 16 t + 20 \cos 18 t + \cos 20 t);$
$\sin^{20} t = 1 : 2^{19} (92\,378 - 167\,960 \cos 2 t + 125\,970 \cos 4 t - 77\,520 \cos 6 t + 38\,760 \cos 8 t - 15\,504 \cos 10 t + 4845 \cos 12 t - 1140 \cos 14 t + 190 \cos 16 t - 20 \cos 18 t + \cos 20 t);$

$\cos^{21} t = 1 : 2^{20} (352\,716 \cos t + 293\,930 \cos 3 t + 203\,490 \cos 5 t + 116\,280 \cos 7 t + 54\,264 \cos 9 t + 20\,349 \cos 11 t + 5985 \cos 13 t + 1330 \cos 15 t + 210 \cos 17 t + 21 \cos 19 t + \cos 21 t);$
$\sin^{21} t = 1 : 2^{20} (352\,716 \sin t - 293\,930 \sin 3 t + 203\,490 \sin 5 t - 116\,280 \sin 7 t + 54\,264 \sin 9 t - 20\,349 \sin 11 t + 5985 \sin 13 t - 1330 \sin 15 t + 210 \sin 17 t - 21 \sin 19 t + \sin 21 t);$

Anlage 4. Zusammenstellung der Kugelfunktionen $P_n^{(0)}$ (cos t) und ihrer Ableitungen $P_n^{(j)}$ (cos t). (Darstellung in trigonometrischen Polynomen.)

$$P_n^{(j)}(\cos t) = C_{n,j} \sum_{0}^{2k \leqq n-j} {}^{k}\, c_{n,j;k} \cdot \cos(n-j-2k)\,t \quad \text{für } n = 0, 1, 2 \ldots . 20 \text{ und } j = 0, 1, 2 \ldots . n.$$

Aus drucktechnischen Gründen ist statt $P_n^{(j)}$ (cos t) in dieser Anlage stets P_n (j; cos t) gesetzt worden.

P_0 (0; cos t) = 1;

P_1 (0; cos t) = cos t;
P_1 (1; cos t) = 1;

P_2 (0; cos t) = $1 : 2^2$ (3 cos 2 t + 1);
P_2 (1; cos t) = 3 cos t;
P_2 (2; cos t) = 3;

P_3 (0; cos t) = $1 : 2^3$ (5 cos 3 t + 3 cos t);
P_3 (1; cos t) = $3 : 2^2$ (5 cos 2 t + 3);
P_3 (2; cos t) = 5!! cos t;
P_3 (3; cos t) = 5!!;

P_4 (0; cos t) = $1 : 2^6$ (35 cos 4 t + 20 cos 2 t + 9);
P_4 (1; cos t) = $5 : 2^3$ (7 cos 3 t + 9 cos t);
P_4 (2; cos t) = $5!! : 2^3$ (7 cos 2 t + 5);
P_4 (3; cos t) = 7!! cos t;
P_4 (4; cos t) = 7!!

P_5 (0; cos t) = $1 : 2^7$ (63 cos 5 t + 35 cos 3 t + 30 cos t);
P_5 (1; cos t) = $5!! : 2^6$ (21 cos 4 t + 28 cos 2 t + 15);
P_5 (2; cos t) = $7!! : 2^3$ (3 cos 3 t + 5 cos t);
P_5 (3; cos t) = $7!! : 2^2$ (9 cos 2 t + 7);
P_5 (4; cos t) = 9!! cos t;
P_5 (5; cos t) = 9!!;

P_6 (0; cos t) = $1 : 2^9$ (231 cos 6 t + 126 cos 4 t + 105 cos 2 t + 50);
P_6 (1; cos t) = $3 \cdot 7 : 2^7$ (33 cos 5 t + 45 cos 3 t + 50 cos t);
P_6 (2; cos t) = $7!! : 2^6$ (33 cos 4 t + 60 cos 2 t + 35);
P_6 (3; cos t) = $7!! \cdot 3 : 2^3$ (11 cos 3 t + 21 cos t);
P_6 (4; cos t) = $9!! : 2^2$ (11 cos 2 t + 9);
P_6 (5; cos t) = 11!! cos t;
P_6 (6; cos t) = 11!!;

P_7 (0; cos t) = $1 : 2^{10}$ (429 cos 7 t + 231 cos 5 t + 189 cos 3 t + 175 cos t);
P_7 (1; cos t) = $7 : 2^9$ (429 cos 6 t + 594 cos 4 t + 675 cos 2 t + 350);
P_7 (2; cos t) = $3^2 \cdot 7 : 2^7$ (143 cos 5 t + 275 cos 3 t + 350 cos t);
P_7 (3; cos t) = $7!! \cdot 3 : 2^6$ (143 cos 4 t + 308 cos 2 t + 189);
P_7 (4; cos t) = $7!! \cdot 3 \cdot 11 : 2^3$ (13 cos 3 t + 27 cos t);
P_7 (5; cos t) = $11!! : 2^2$ (13 cos 2 t + 11);
P_7 (6; cos t) = 13!! cos t;
P_7 (7; cos t) = 13!!;

P_8 (0; cos t) = $1 : 2^{14}$ (6435 cos 8 t + 3432 cos 6 t + 2772 cos 4 t + 2520 cos 2 t + 1225);
P_8 (1; cos t) = $3^2 : 2^{10}$ (715 cos 7 t + 1001 cos 5 t + 1155 cos 3 t + 1225 cos t);

$P_8\ (2;\ \cos t) = 7!! \cdot 3 : 2^9\ (143 \cos 6\, t + 286 \cos 4\, t + 385 \cos 2\, t + 210);$

$P_8\ (3;\ \cos t) = 7!! \cdot 3 \cdot 11 : 2^7\ (39 \cos 5\, t + 91 \cos 3\, t + 126 \cos t);$

$P_8\ (4;\ \cos t) = 11!! : 2^6\ (65 \cos 4\, t + 156 \cos 2\, t + 99);$

$P_8\ (5;\ \cos t) = 13!! : 2^3\ (5 \cos 3\, t + 11 \cos t);$

$P_8\ (6;\ \cos t) = 13!! : 2^2\ (15 \cos 2\, t + 13);$

$P_8\ (7;\ \cos t) = 15!! \cos t;$

$P_8\ (8;\ \cos t) = 15!!;$

$P_9\ (0;\ \cos t) = 1 : 2^{15}\ (12\,155 \cos 9\, t + 6435 \cos 7\, t + 5148 \cos 5\, t + 4620 \cos 3\, t + 4410 \cos t);$

$P_9\ (1;\ \cos t) = 5!! \cdot 3 : 2^{14}\ (2431 \cos 8\, t + 3432 \cos 6\, t + 4004 \cos 4\, t + 4312 \cos 2\, t + 2205);$

$P_9\ (2;\ \cos t) = 5!! \cdot 3 \cdot 11 : 2^{10}\ (221 \cos 7\, t + 455 \cos 5\, t + 637 \cos 3\, t + 735 \cos t);$

$P_9\ (3;\ \cos t) = 7!! \cdot 3 \cdot 11 : 2^9\ (221 \cos 6\, t = 546 \cos 4\, t + 819 \cos 2\, t + 462);$

$P_9\ (4;\ \cos t) = 13!! : 2^7\ (17 \cos 5\, t + 45 \cos 3\, t + 66 \cos t);$

$P_9\ (5;\ \cos t) = 13!! : 2^6\ (85 \cos 4\, t + 220 \cos 2\, t + 143);$

$P_9\ (6;\ \cos t) = 13!! \cdot 5 : 2^3\ (17 \cos 3\, t + 39 \cos t);$

$P_9\ (7;\ \cos t) = 15!! : 2^2\ (17 \cos 2\, t + 15);$

$P_9\ (8;\ \cos t) = 17!! \cos t;$

$P_9\ (9;\ \cos t) = 17!!;$

$P_{10}\ (0;\ \cos t) = 1 : 2^{17}\ (46\,189 \cos 10\, t + 24\,310 \cos 8\, t + 19\,305 \cos 6\, t + 17\,160 \cos 4\, t + 16\,170 \cos 2\, t + 7938);$

$P_{10}\ (1;\ \cos t) = 5 \cdot 11 : 2^{15}\ (4199 \cos 9\, t + 5967 \cos 7\, t + 7020 \cos 5\, t + 7644 \cos 3\, t + 7938 \cos t);$

$P_{10}\ (2;\ \cos t) = 5!! \cdot 3 \cdot 11 : 2^{14}\ (4199 \cos 8\, t + 8840 \cos 6\, t + 12\,740 \cos 4\, t + 15\,288 \cos 2\, t + 8085);$

$P_{10}\ (3;\ \cos t) = 5!! \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 : 2^{10}\ (323 \cos 7\, t + 833 \cos 5\, t + 1323 \cos 3\, t + 1617 \cos t);$

$P_{10}\ (4;\ \cos t) = 7!! \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 : 2^9\ (323 \cos 6\, t + 918 \cos 4\, t + 1485 \cos 2\, t + 858);$

$P_{10}\ (5;\ \cos t) = 13!! : 2^7\ (323 \cos 5\, t + 935 \cos 3\, t + 1430 \cos t);$

$P_{10}\ (6;\ \cos t) = 13!! \cdot 5 : 2^6\ (323 \cos 4\, t + 884 \cos 2\, t + 585);$

$P_{10}\ (7;\ \cos t) = 13!! \cdot 5 \cdot 17 : 2^3\ (19 \cos 3\, t + 45 \cos t);$

$P_{10}\ (8;\ \cos t) = 17!! : 2^2\ (19 \cos 2\, t + 17);$

$P_{10}\ (9;\ \cos t) = 19!!\ (\cos t);$

$P_{10}\ (10;\ \cos t) = 19!!;$

$P_{11}\ (0;\ \cos t) = 1 : 2^{18}\ (88\,179 \cos 11\, t + 46\,189 \cos 9\, t + 36\,465 \cos 7\, t + 32\,175 \cos 5\, t + 30\,030 \cos 3\, t + 29\,106 \cos t;$

$P_{11}\ (1;\ \cos t) = 3 \cdot 11 : 2^{17}\ (29\,393 \cos 10\, t + 41\,990 \cos 8\, t + 49\,725 \cos 6\, t + 54\,600 \cos 4\, t + 57\,330 \cos 2\, t + 29\,106);$

$P_{11}\ (2;\ \cos t) = 5!! \cdot 11 \cdot 13 : 2^{15}\ (2261 \cos 9\, t + 4845 \cos 7\, t + 7140 \cos 5\, t + 8820 \cos 3\, t + 9702 \cos t);$

$P_{11}\ (3;\ \cos t) = 7!! \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 : 2^{14}\ (969 \cos 8\, t + 2584 \cos 6\, t + 4284 \cos 4\, t + 5544 \cos 2\, t + 3003);$

$P_{11}\ (4;\ \cos t) = 13!! : 2^{10}\ (323 \cos 7\, t + 969 \cos 5\, t + 1683 \cos 3\, t + 2145 \cos t);$

$$P_{11}\,(5;\,\cos t) = 13!! : 2^{9}\,(2261 \cos 6\,t + 7106 \cos 4\,t + 12\,155 \cos 2\,t + 7150);$$

$$P_{11}\,(6;\,\cos t) = 13!! \cdot 17 : 2^{7}\,(399 \cos 5\,t + 1235 \cos 3\,t + 1950 \cos t);$$

$$P_{11}\,(7;\,\cos t) = 17!! : 2^{6}\,(133 \cos 4\,t + 380 \cos 2\,t + 255);$$

$$P_{11}\,(8;\,\cos t) = 19!! : 2^{3}\,(7 \cos 3\,t + 17 \cos t);$$

$$P_{11}\,(9;\,\cos t) = 19!! : 2^{2}\,(21 \cos 2\,t + 19);$$

$$P_{11}\,(10;\,\cos t) = 21!! \cos t;$$

$$P_{11}\,(11;\,\cos t) = 21!!;$$

$$P_{12}\,(0;\,\cos t) = 1 : 2^{21}\,(676\,039 \cos 12\,t + 352\,716 \cos 10\,t + 277\,134 \cos 8\,t + 243\,100 \cos 6\,t + 225\,225 \cos 4\,t + 216\,216 \cos 2\,t + 106\,722);$$

$$P_{12}\,(1;\,\cos t) = 3 \cdot 13 : 2^{18}\,(52\,003 \cos 11\,t + 74\,613 \cos 9\,t + 88\,825 \cos 7\,t + 98\,175 \cos 5\,t + 103\,950 \cos 3\,t + 106\,722 \cos t);$$

$$P_{12}\,(2;\,\cos t) = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 : 2^{17}\,(7429 \cos 10\,t + 16\,150 \cos 8\,t + 24\,225 \cos 6\,t + 30\,600 \cos 4\,t + 34\,650 \cos 2\,t + 18\,018);$$

$$P_{12}\,(3;\,\cos t) = 7!! \cdot 11 \cdot 13 : 2^{15}\; 7429 \cos 9\,t + 20\,349 \cos 7\,t + 34\,884 \cos 5\,t + 47\,124 \cos 3\,t + 54\,054 \cos t);$$

$$P_{12}\,(4;\,\cos t) = 13!! : 2^{14}\,(7429 \cos 8\,t + 23\,256 \cos 6\,t + 42636 \cos 4\,t + 58\,344 \cos 2\,t + 32\,175);$$

$$P_{12}\,(5;\,\cos t) = 13!! \cdot 17 : 2^{10}\,(437 \cos 7\,t + 1463 \cos 5\,t + 2717 \cos 3\,t + 3575 \cos t);$$

$$P_{12}\,(6;\,\cos t) = 13!! \cdot 17 : 2^{9}\,(3059 \cos 6\,t + 10\,374 \cos 4\,t + 18\,525 \cos 2\,t + 11\,050);$$

$$P_{12}\,(7;\,\cos t) = 13!! \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{7}\,(161 \cos 5\,t + 525 \cos 3\,t + 850 \cos t);$$

$$P_{12}\,(8;\,\cos t) = 19!! : 2^{6}\,(161 \cos 4\,t + 476 \cos 2\,t + 323);$$

$$P_{12}\,(9;\,\cos t) = 19!! \cdot 7 : 2^{3}\,(23 \cos 3\,t + 57 \cos t);$$

$$P_{12}\,(10;\,\cos t) = 21!! : 2^{2}\,(23 \cos t + 21);$$

$$P_{12}\,(11;\,\cos t) = 23!! \cos t;$$

$$P_{12}\,(12;\,\cos t) = 23!!;$$

$$P_{13}\,(0;\,\cos t) = 1 : 2^{22}\,(1\,300\,075 \cos 13\,t + 676\,039 \cos 11\,t + 529\,074 \cos 9\,t + 461\,890 \cos 7\,t + 425\,425 \cos 5\,t + 405\,405 \cos 3\,t + 396\,396 \cos t);$$

$$P_{13}\,(1;\,\cos t) = 7 \cdot 13 : 2^{21}\,(185\,725 \cos 12\,t + 267\,444 \cos 10\,t + 319\,770 \cos 8\,t + 355\,300 \cos 6\,t + 378\,675 \cos 4\,t + 392\,040 \cos 2\,t + 198\,198);$$

$$P_{13}\,(2;\,\cos t) = 7!! \cdot 13 : 2^{18}\,(37\,145 \cos 11\,t + 81\,719 \cos 9\,t + 124\,355 \cos 7\,t + 159\,885 \cos 5\,t + 185\,130 \cos 3\,t + 198\,198 \cos t);$$

$$P_{13}\,(3;\,\cos t) = 7!! \cdot 11 \cdot 13 : 2^{17}\,(37\,145 \cos 10\,t + 104\,006 \cos 8\,t + 183\,141 \cos 6\,t + 255\,816 \cos 4\,t + 306\,306 \cos 2\,t + 162\,162);$$

$$P_{13}\,(4;\,\cos t) = 7!! \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 : 2^{15}\,(10\,925 \cos 9\,t + 35\,397 \cos 7\,t + 67\,716 \cos 5\,t + 97\,812 \cos 3\,t + 115\,830 \cos t);$$

$$P_{13}\,(5;\,\cos t) = 13!! \cdot 17 : 2^{14}\,(10\,925 \cos 8\,t + 38\,456 \cos 6\,t + 76\,076 \cos 4\,t + 108\,680 \cos 2\,t + 60\,775);$$

$$P_{13}\,(6;\,\cos t) = 13!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{10}\,(575 \cos 7\,t + 2093 \cos 5\,t + 4095 \cos 3\,t + 5525 \cos t);$$

$$P_{13}\,(7;\,\cos t) = 13!! \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{9}\,(805 \cos 6\,t + 2898 \cos 4\,t + 5355 \cos 2\,t + 3230);$$

$$P_{13}\,(8;\,\cos t) = 19!! \cdot 7 : 2^{7}\,(115 \cos 5\,t + 391 \cos 3\,t + 646 \cos t);$$

$P_{13}\,(9;\ \cos t) = 19!! \cdot 7 : 2^6\,(575 \cos 4t + 1748 \cos 2t + 1197);$

$P_{13}\,(10;\ \cos t) = 19!! \cdot 7 \cdot 23 : 2^3\,(25 \cos 3t + 63 \cos t);$

$P_{13}\,(11;\ \cos t) = 23!! : 2^2\,(25 \cos 2t + 23);$

$P_{13}\,(12;\ \cos t) = 25!! \cos t;$

$P_{13}\,(13;\ \cos t) = 25!!;$

$P_{14}\,(0;\ \cos t) = 1 : 2^{24}\,(5\,014\,575 \cos 14t + 2\,600\,150 \cos 12t + 2\,028\,117 \cos 10t + 1\,763\,580 \cos 8t + 1\,616\,615 \cos 6t + 1\,531\,530 \cos 4t + 1\,486\,485 \cos 2t + 736\,164);$

$P_{14}\,(1;\ \cos t) = 7!! : 2^{22}\,(334\,305 \cos 13t + 483\,485 \cos 11t + 579\,462 \cos 9t + 646\,646 \cos 7t + 692\,835 \cos 5t + 722\,007 \cos 3t + 736\,164 \cos t);$

$P_{14}\,(2;\ \cos t) = 7!! \cdot 13 : 2^{21}\,(334\,305 \cos 12t + 742\,900 \cos 10t + 1\,144\,066 \cos 8t + 1\,492\,260 \cos 6t + 1\,758\,735 \cos 4t + 1\,925\,352 \cos 2t + 990\,990);$

$P_{14}\,(3;\ \cos t) = 7!! \cdot 13 \cdot 17 : 2^{18}\,(58\,995 \cos 11t + 168\,245 \cos 9t + 302\,841 \cos 7t + 434\,511 \cos 5t + 537\,966 \cos 3t + 594\,594 \cos t);$

$P_{14}\,(4;\ \cos t) = 13!! \cdot 17 : 2^{17}\,(6555 \cos 10t + 21\,850 \cos 8t + 43\,263 \cos 6t + 65\,208 \cos 4t + 81\,510 \cos 2t + 43\,758);$

$P_{14}\,(5;\ \cos t) = 13!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{15}\,(1725 \cos 9t + 6325 \cos 7t + 13\,156 \cos 5t + 20\,020 \cos 3t + 24\,310 \cos t);$

$P_{14}\,(6;\ \cos t) = 13!! \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{14}\,(3105 \cos 8t + 11\,960 \cos 6t + 25\,116 \cos 4t + 37\,128 \cos 2t + 20\,995);$

$P_{14}\,(7;\ \cos t) = 19!! : 2^{10}\,(1035 \cos 7t + 4025 \cos 5t + 8211 \cos 3t + 11\,305 \cos t);$

$P_{14}\,(8;\ \cos t) = 19!! \cdot 7 : 2^9\,(1035 \cos 6t + 3910 \cos 4t + 7429 \cos 2t + 4522);$

$P_{14}\,(9;\ \cos t) = 19!! \cdot 7 \cdot 23 : 2^7\,(135 \cos 5t + 475 \cos 3t + 798 \cos t);$

$P_{14}\,(10;\ \cos t) = 23!! : 2^6\,(225 \cos 4t + 700 \cos 2t + 483);$

$P_{14}\,(11;\ \cos t) = 25!! : 2^3\,(9 \cos 3t + 23 \cos t);$

$P_{14}\,(12;\ \cos t) = 25!! : 2^2\,(27 \cos 2t + 25);$

$P_{14}\,(13;\ \cos t) = 27!! \cos t;$

$P_{14}\,(14;\ \cos t) = 27!!;$

$P_{15}\,(0;\ \cos t) = 1 : 2^{25}\,(9\,694\,845 \cos 15t + 5\,014\,575 \cos 13t + 3\,900\,225 \cos 11t + 3\,380\,195 \cos 9t + 3\,086\,265 \cos 7t + 2\,909\,907 \cos 5t + 2\,807\,805 \cos 3t + 2\,760\,615 \cos t);$

$P_{15}\,(1;\ \cos t) = 5!! : 2^{24}\,(9\,694\,845 \cos 14t + 14\,040\,810 \cos 12t + 16\,900\,975 \cos 10t + 18\,929\,092 \cos 8t + 20\,369\,349 \cos 6t + 21\,339\,318 \cos 4t + 21\,900\,879 \cos 2t + 11\,042\,460);$

$P_{15}\,(2;\ \cos t) = 7!! \cdot 17 : 2^{22}\,(570\,285 \cos 13t + 1\,278\,225 \cos 11t + 1\,988\,350 \cos 9t + 2\,624\,622 \cos 7t + 3\,138\,135 \cos 5t + 3\,496\,779 \cos 3t + 3\,680\,820 \cos t);$

$P_{15}\,(3;\ \cos t) = 7!! \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17 : 2^{21}\,(190\,095 \cos 15t + 550\,620 \cos 10t + 1\,009\,470 \cos 8t + 1\,480\,556 \cos 6t + 1\,882\,881 \cos 4t + 2\,151\,864 \cos 2t + 1\,123\,122);$

$P_{15}\,(4;\ \cos t) = 9!! \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{18}\,(10\,005 \cos 11t + 34\,155 \cos 9t + 695\,575 \cos 7t + 108\,537 \cos 5t\ 141\,570 \cos 3t + 160\,446 \cos t);$

$P_{15}\,(5;\ \cos t) = 13!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{17}\,(10\,005 \cos 10t + 37\,950 \cos 8t + 82\,225 \cos 6t + 131\,560 \cos 4t + 170\,170 \cos 2t + 92\,378);$

P_{15} (6; cos t) = 13!! · 5 · 17 · 19 : 2^{15} (10 005 cos 9 t + 40 365 cos 7 t + 89 700 cos 5 t + 142 324 cos 3 t + 176 358 cos t);

P_{15} (7; cos t) = 19!! : 2^{14} (30 015 cos 8 t + 124 200 cos 6 t + 273 700 cos 4 t + 416 024 cos 2 t + 237 405);

P_{15} (8; cos t) = 19!! · 23 : 2^{10} (1305 cos 7 t + 5355 cos 5 t + 11 305 cos 3 t + 15 827 cos t);

P_{15} (9; cos t) = 19!! · 7 · 23 : 2^{9} (1305 cos 6 t + 5130 cos 4 t + 9975 cos 2 t + 6118);

P_{15} (10; cos t) = 23!! · 5 : 2^{7} (261 cos 5 t + 945 cos 3 t + 1610 cos t);

P_{15} (11; cos t) = 25!! : 2^{6} (261 cos 4 t + 828 cos 2 t + 575);

P_{15} (12; cos t) = 25!! · 9 : 2^{3} (29 cos 3 t + 75 cos t);

P_{15} (13; cos t) = 27!! : 2^{2} (29 cos 2 t + 27);

P_{15} (14; cos t) = 29!! cos t;

P_{15} (15; cos t) = 29!!;

P_{16} (0; cos t) = 1 : 2^{30} (300 540 195 cos 16 t + 155 117 520 cos 14 t + 120 349 800 cos 12 t + 104 006 000 cos 10 t + 94 645 460 cos 8 t + 88 884 432 cos 6 t + 85 357 277 cos 4 t + 83 431 920 cos 2 t + 41 409 225);

P_{16} (1; cos t) = 17 : 2^{25} (17 678 835 cos 15 t + 25 662 825 cos 13 t + 30'972 375 cos 11 t + 34 796 125 cos 9 t + 37 579 815 cos 7 t + 39 540 501 cos 5 t + 40 795 755 cos 3 t + 41 409 225 cos t);

P_{16} (2; cos t) = 5!! · 3 · 15 : 2^{24} (5 892 945 cos 14 t + 13 306 650 cos 12 t + 20 877 675 cos 10 t + 27 836 900 cos 8 t + 33 682 649 cos 6 t + 38 076 038 cos 4 t + 40 795 755 cos 2 t + 20 857 980);

P_{16} (3; cos t) = 7!! · 17 · 19 : 2^{22} (310 155 cos 13 t + 910 455 cos 11 t + 1 695 330 cos 9 t + 2 532 530 cos 7 t + 3 292 289 cos 5 t + 386 486 cos 3 t + 4 171 596 cos t);

P_{16} (4; cos t) = 7!! · 3 · 13 · 17 · 19 : 2^{21} (310 155 cos 12 t + 1 080 540 cos 10 t + 2 254 230 cos 8 t + 3 617 900 cos 6 t + 4 884 416 165 cos 4 t + 5 776 056 cos 2 t + 3 048 474);

P_{16} (5; cos t) = 9!! · 13 · 17 · 19 : 2^{18} (310 155 cos 11 t + 210 605 cos 9 t + 2 713 425 cos 7 t + 4 522 375 cos 5 t + 6 150 430 cos 3 t + 7 113 106 cos t);

P_{16} (6; cos t) = 13!! · 17 · 19 : 2^{17} (310 155 cos 10 t + 1 300 650 cos 8 t + 3 027 375 cos 6 t + 5 083 000 cos 4 t + 6 760 390 cos 2 t + 3 703 518 cos t);

P_{16} (7; cos t) = 13!! · 5 · 17 · 19 · 23 : 2^{15} (13 485 cos 9 t + 58 725 cos 7 t + 137 700 cos 5 t + 226 100 cos 3 t + 284 886 cos t);

P_{16} (8; cos t) = 19!! · 23 : 2^{14} (40 455 cos 8 t + 177 480 cos 6 t + 406 980 cos 4 t + 633 080 cos 2 t + 364 021);

P_{16} (9; cos t) = 19!! · 5 · 23 : 2^{10} (8091 cos 7 t + 34 713 cos 5 t + 75 411 cos 3 t + 107 065 cos t);

P_{16} (10; cos t) = 19!! · 5 · 7 · 23 : 2^{9} (8091 cos 6 t + 32 886 cos 4 t + 65 205 cos 2 t + 40 250);

P_{16} (11; cos t) = 23!! · 5 · 9 : 2^{7} (899 cos 5 t + 3335 cos 3 t + 5750 cos t);

P_{16} (12; cos t) = 25!! · 9 : 2^{6} (899 cos 4 t + 2900 cos 2 t + 2025);

P_{16} (13; cos t) = 25!! · 9 · 29 : 2^{3} (31 cos 3 t + 81 cos t);

P_{16} (14; cos t) = 29!! : 2^{2} (31 cos 2 t + 29);

P_{15} (15; cos t) = 31!! cos t;

P_{16} (16; cos t) = 31!!;

P_{17} (0; cos t) = 1 : 2^{31} (583 401 555 cos 17 t + 300 540 195 cos 15 t + 232 676 280 cos 13 t + 200 583 000 cos 11 t + 182 010 500 cos 9 t + 170 361 828 cos 7 t + 162 954 792 cos 5 t + 158 520 648 cos 3 t + 156 434 850 cos t);

P_{17} (1; cos t) = 3!! · 3 · 17 : 2^{30} (64 822 395 cos 16 t + 94 287 120 cos 14 t + 114 057 000 cos 12 t + 128 478 000 cos 10 t + 139 184 500 cos 8 t + 146 978 832 cos 6 t + 152 304 152 cos 4 t + 155 412 400 cos 2 t + 78 217 425 cos t);

P_{17} (2; cos t) = 3!! · 3 · 17 · 19 : 2^{25} (3 411 705 cos 15 t + 7 753 875 cos 13 t + 12 256 125 cos 11 t + 16 482 375 cos 9 t + 20 145 125 cos 7 t + 23 046 023 cos 5 t + 25 050 025 cos 3 t + 26 072 475 cos t);

P_{17} (3; cos t) = 5!! · 3 · 17 · 19 : 2^{24} (10 235 115 cos 14 t + 30 395 190 cos 12 t + 57 358 665 cos 10 t + 87 026 940 cos 8 t + 115 230 115 cos 6 t + 138 276 138 cos 4 t + 153 306 153 cos 2 t + 79 260 324);

P_{17} (4; cos t) = 9!! · 17 · 19 : 2^{22} (3 411 705 cos 13 t + 12 096 145 cos 11 t + 25 752 870 cos 9 t + 42 329 430 cos 7 t + 58 790 875 cos 5 t + 71 960 031 cos 3 t + 79 260 324 cos t);

P_{17} (5; cos t) = 13!! · 17 · 19 : 2^{21} (310 155 cos 12 t + 1 240 620 cos 10 t + 2 861 430 cos 8 t + 4 933 500 cos 6 t + 6 989 125 cos 4 t + 8 498 776 cos 2 t + 4 526 522);

P_{17} (6; cos t) = 13!! · 17 · 19 · 23 : 2^{18} (40 455 cos 11 t + 175 305 cos 9 t + 424 125 cos 7 t + 745 875 cos 5 t + 1 049 750 cos 3 t + 1 234 506 cos t);

P_{17} (7; cos t) = 13!! · 3 · 17 · 19 · 23 : 2^{17} (148 335 cos 10 t + 674 250 cos 8 t + 1 663 875 cos 6 t + 2 907 000 cos 4 t + 3 956 750 cos 2 t + 2 184 126);

P_{17} (8; cos t) = 19!! · 5 · 23 : 2^{15} (29 667 cos 9 t + 137 547 cos 7 t + 337 212 cos 5 t + 569 772 cos 3 t + 728 042 cos t);

P_{17} (9; cos t) = 19!! · 5 · 23 : 2^{14} (267 003 cos 8 t + 1 229 832 cos 6 t + 2 915 892 cos 4 t + 4 625 208 cos 2 t + 2 676 625);

P_{17} (10; cos t) = 19!! · 5 · 23 · 27 : 2^{10} (9889 cos 7 t + 44 051 cos 5 t + 98 049 cos 3 t + 140 875 cos t);

P_{17} (11; cos t) = 23!! · 5 · 9 : 2^{9} (9889 cos 6 t + 41 354 cos 4 t + 83 375 cos 2 t + 51 750);

P_{17} (12; cos t) = 23!! · 5 · 9 · 29 : 2^{7} (1023 cos 5 t + 3875 cos 3 t + 6 750 cos t);

P_{17} (13; cos t) = 29!! : 2^{6} (341 cos 4 t + 1116 cos 2 t + 783);

P_{17} (14; cos t) = 31!! : 2^{3} (11 cos 3 t + 29 cos t);

P_{17} (15; cos t) = 31!! : 2^{2} (33 cos 2 t + 31);

P_{17} (16; cos t) = 33!! cos t;

P_{17} (17; cos t) = 33!!;

P_{18} (0; cos t) = 1 : 2^{33} (2 268 783 825 cos 18 t + 1 166 803 110 cos 16 t + 901 620 585 cos 14 t + 775 587 600 cos 12 t + 702 040 500 cos 10 t + 655 237 800 cos 8 t + 624 660 036 cos 6 t + 605 260 656 cos 4 t + 594 452 430 cos 2 t + 295 488 050);

P_{18} (1; cos t) = 3!! · 3 · 19 : 2^{31} (119 409 675 cos 17 t + 173 996 955 cos 15 t + 210 905 400 cos 13 t + 238 119 000 cos 11 t + 258 646 500 cos 9 t + 273 973 700 cos 7 t + 284 932 648 cos 5 t + 292 011 720 cos 3 t + 295 488 050 cos t);

P_{18} (2; cos t) = 5!! · 3 · 17 · 19 : 2^{30} (23 881 935 cos 16 t + 54 587 280 cos 14 t + 86 843 400 cos 12 t + 117 658 800 cos 10 t + 145 044 900 cos 8 t + 167 607 440 cos 6 t + 184 368 184 cos 4 t + 194 674 480 cos 2 t + 99 075 405);

P_{18} (3; cos t) = 7!! · 3 · 17 · 19 : 2^{25} (3 411 705 cos 15 t + 10 235 115 cos 13 t + 19 539 765 cos 11 t + 30 045 015 cos 9 t + 40 405 365 cos 7 t + 49 384 335 cos 5 t + 55 968 913 cos 3 t + 59 445 243 cos t);

P_{18} (4; cos t) = 11!! · 17 · 19 : 2^{24} (1 550 775 cos 14 t + 5 582 790 cos 12 t + 12 096 045 cos 10 t + 20 290 140 cos 8 t + 28 860 975 cos 6 t + 36 343 450 cos 4 t + 41 431 533 cos 2 t + 21 616 452);

P_{18} (5; cos t) = 11!! · 17 · 19 · 23 : 2^{22} (471 975 cos 13 t + 1 928 355 cos 11 t + 4 557 930 cos 9 t + 8 086 650 cos 7 t + 11 851 125 cos 5 t + 15 011 425 cos 3 t + 16 812 796 cos t);

P_{18} (6; cos t) = 13!! · 17 · 19 · 23 : 2^{21} (471 975 cos 12 t + 2 103 660 cos 10 t + 5 259 150 cos 8 t + 9 613 500 cos 6 t + 14 171 625 cos 4 t + 17 635 800 cos 2 t + 9 464 546);

P_{18} (7; cos t) = 19!! · 5 · 23 : 2^{18} (18 879 cos 11 t + 89 001 cos 9 t + 229 245 cos 7 t + 421 515 cos 5 t + 610 470 cos 3 t + 728 042 cos t);

P_{18} (8; cos t) = 19!! · 5 · 23 : 2^{17} (207 669 cos 10 t + 1 008 678 cos 8 t + 2 613 393 cos 6 t + 4720 968 cos 4 t + 6 552 378 cos 2 t + 3 640 210);

P_{18} (9; cos t) = 19!! · 3 · 5 · 23 : 2^{15} (346 115 cos 9 t + 1 691 019 cos 7 t + 4 304 412 cos 5 t + 7 451 724 cos 3 t + 9 635 850 cos t);

P_{18} (10; cos t) = 23!! · 5 · 9 : 2^{14} (49 445 cos 8 t + 237 336 cos 6 t + 578 956 cos 4 t + 933 800 cos 2 t + 543 375);

P_{18} (11; cos t) = 23!! · 5 · 9 · 29 : 2^{10} (1705 cos 7 t + 7843 cos 5 t + 17 825 cos 3 t + 25 875 cos t);

P_{18} (12; cos t) = 25!! · 9 · 29 : 2^{9} (2387 cos 6 t + 10 230 cos 4 t + 20 925 cos 2 t + 13 050);

P_{18} (13; cos t) = 31!! : 2^{7} (77 cos 5 t + 297 cos 3 t + 522 cos t);

P_{18} (14; cos t) = 31!! : 2^{6} (385 cos 4 t + 1276 cos 2 t + 899);

P_{18} (15; cos t) = 31!! · 11 : 2^{3} (35 cos 3 t + 93 cos t);

P_{18} (16; cos t) = 33!! : 2^{2} (35 cos 2 t + 33);

P_{18} (17; cos t) = 35!! cos t;

P_{18} (18; cos t) = 35!!;

P_{19} (0; cos t) = 1 : 2^{34} (4 418 157 975 cos 19 t + 2 268 783 825 cos 17 t + 1 750 204 665 cos 15 t + 1 502 700 975 cos 13 t + 1 357 278 300 cos 11 t + 1 263 672 900 cos 9 t + 1 201 269 300 cos 7 t + 1 160 082 924 cos 5 t + 1 134 863 730 cos 3 t + 1 122 854 590 cos t);

P_{19} (1; cos t) = 5 · 19 : 2^{33} (883 631 595 cos 18 t + 1 289 624 490 cos 16 t + 1 565 972 595 cos 14 t + 1 771 605 360 cos 12 t + 1 928 763 900 cos 10 t + 2 048 480 280 cos 8 t + 2 136 994 860 cos 6 t + 2 198 051 856 cos 4 t + 2 233 889 658 cos 2 t + 1 122 854 590);

P_{19} (2; cos t) = 7!! · 3 · 19 : 2^{31} (126 233 085 cos 17 t + 289 994 925 cos 15 t + 463 991 880 cos 13 t + 632 716 200 cos 11 t + 785 792 700 cos 9 t + 915 854 940 cos 7 t + 1 017 616 600 cos 5 t + 1 087 396 024 cos 3 t + 1 122 854 590 cos t);

P_{19} (3; cos t) = 7!! · 3 · 11 · 17 · 19 : 2^{30} (11 475 735 cos 16 t + 34 737 360 cos 14 t + 66 993 480 cos 12 t + 104 212 080 cos 10 t + 142 030 980 cos 8 t + 176 314 320 cos 6 t + 203 523 320 cos 4 t + 220 968 176 cos 2 t + 113 486 373);

P_{19} (4; cos t) = 7!! · 3 · 11 · 17 · 19 · 23 : 2^{25} (498 945 cos 15 t + 1 820 475 cos 13 t + 4 005 045 cos 11 t + 6 836 895 cos 9 t + 9 924 525 cos 7 t + 12 799 215 cos 5 t + 15 011 425 cos 3 t + 16 212 339 cos t);

P_{19} (5; cos t) = 11!! · 17 · 19 · 23 : 2^{24} (2 494 725 cos 14 t + 10 383 450 cos 12 t + 25 068 615 cos 10 t + 45 579 300 cos 8 t + 68 736 525 cos 6 t + 90 068 550 cos 4 t + 105 079 975 cos 2 t + 55 242 044);

P_{19} (6; cos t) = 11!! · 5 · 17 · 19 · 23 · 5 : 2^{22} (698 523 cos 13 t + 3 190 551 cos 11 t + 8 204 274 cos 9 t + 15 496 962 cos 7 t + 23 745 345 cos 5 t + 30 950 829 cos 3 t + 35 154 028 cos t);

$$P_{19}\,(7;\cos t) = 13!! \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 5 : 2^{21}\,(698\,523 \cos 12\,t + 3\,398\,220 \cos 10\,t + 9\,078\,102 \cos 8\,t + 17\,422\,620 \cos 6\,t + 26\,555\,445 \cos 4\,t + 33\,697\,944 \cos 2\,t + 18\,201\,050);$$

$$P_{19}\,(8;\cos t) = 19!! \cdot 3 \cdot 23 \cdot 5 : 2^{18}\,(232\,841 \cos 11\,t + 1\,176\,791 \cos 9\,t + 3\,194\,147 \cos 7\,t + 6\,097\,917 \cos 5\,t + 9\,048\,522 \cos 3\,t + 10\,920\,630 \cos t);$$

$$P_{19}\,(9;\cos t) = 23!! \cdot 5 \cdot 2^{17}\,(365\,893 \cos 10\,t + 1\,878\,910 \cos 8\,t + 5\,073\,057 \cos 6\,t + 9\,428\,712 \cos 4\,t + 13\,306\,650 \cos 2\,t + 7\,433\,370);$$

$$P_{19}\,(10;\cos t) = 23!! \cdot 5 \cdot 29 : 2^{15}\,(63\,085 \cos 9\,t + 322\,245 \cos 7\,t + 847\,044 \cos 5\,t + 1\,497\,300 \cos 3\,t + 1\,956\,150 \cos t);$$

$$P_{19}\,(11;\cos t) = 25!! \cdot 9 \cdot 29 : 2^{14}\,(12\,617 \cos 8\,t + 62\,744 \cos 6\,t + 156\,860 \cos 4\,t + 256\,680 \cos 2\,t + 150\,075);$$

$$P_{19}\,(12;\cos t) = 25!! \cdot 9 \cdot 29 \cdot 31 : 2^{10}\,(407 \cos 7\,t + 1925 \cos 5\,t + 4455 \cos 3\,t + 6525 \cos t);$$

$$P_{19}\,(13;\cos t) = 25!! \cdot 9 \cdot 29 \cdot 31 : 2^{9}\,(2849 \cos 6\,t + 12\,474 \cos 4\,t + 25\,839 \cos 2\,t + 16\,182);$$

$$P_{19}\,(14;\cos t) = 31!! \cdot 11 : 2^{7}\,(259 \cos 5\,t + 1015 \cos 3\,t + 1798 \cos t);$$

$$P_{19}\,(15;\cos t) = 31!! \cdot 11 : 2^{6}\,(1295 \cos 4\,t + 4340 \cos 2\,t + 3069);$$

$$P_{19}\,(16;\cos t) = 31!! \cdot 11 \cdot 35 : 2^{3}\,(37 \cos 3\,t + 99 \cos t);$$

$$P_{19}\,(17;\cos t) = 35!! : 2^{2}\,(37 \cos 2\,t + 35);$$

$$P_{19}\,(18;\cos t) = 37!! \cos t;$$

$$P_{19}\,(19;\cos t) = 37!!;$$

$$P_{20}\,(0;\cos t) = 1 : 2^{37}\,(34\,461\,632\,205 \cos 20\,t + 17\,672\,631\,900 \cos 18\,t + 13\,612\,702\,950 \cos 16\,t + 11\,668\,031\,100 \cos 14\,t + 10\,518\,906\,825 \cos 12\,t + 9\,772\,403\,760 \cos 10\,t + 9\,266\,934\,600 \cos 8\,t + 8\,923\,714\,800 \cos 6\,t + 8\,700\,621\,930 \cos 4\,t + 8\,574\,525\,960 \cos 2\,t + 4\,266\,847\,442);$$

$$P_{20}\,(1;\cos t) = 7!! : 2^{34}\,(1\,641\,030\,105 \cos 19\,t + 2\,398\,428\,615 \cos 17\,t + 2\,917\,007\,775 \cos 15\,t + 3\,305\,942\,145 \cos 13\,t + 3\,606\,482\,340 \cos 11\,t + 3\,839\,158\,620 \cos 9\,t + 4\,015\,671\,660 \cos 7\,t + 4\,143\,153\,300 \cos 5\,t + 4\,226\,016\,366 \cos 3\,t + 4\,266\,847\,442 \cos t);$$

$$P_{20}\,(2;\cos t) = 7!! \cdot 11 \cdot 19 : 2^{33}\,(149\,184\,555 \cos 18\,t + 344\,272\,050 \cos 16\,t + 553\,626\,675 \cos 14\,t + 759\,259\,440 \cos 12\,t + 949\,074\,300 \cos 10\,t + 1\,114\,396\,920 \cos 8\,t + 1\,248\,893\,100 \cos 6\,t + 1\,348\,011\,600 \cos 4\,t + 1\,408\,672\,122 \cos 2\,t + 714\,543\,830);$$

$$P_{20}\,(3;\cos t) = 7!! \cdot 3 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{31}\,(19\,458\,855 \cos 17\,t + 59\,374\,455 \cos 15\,t + 115\,539\,480 \cos 13\,t + 181\,562\,040 \cos 11\,t + 250\,335\,540 \cos 9\,t + 314\,938\,260 \cos 7\,t + 369\,237\,960 \cos 5\,t + 408\,310\,760 \cos 3\,t + 428\,726\,298 \cos t);$$

$$P_{20}\,(4;\cos t) = 11!! \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{30}\,(6\,486\,285 \cos 16\,t + 23\,949\,360 \cos 14\,t + 53\,400\,600 \cos 12\,t + 92\,561\,040 \cos 10\,t + 136\,737\,900 \cos 8\,t + 179\,964\,720 \cos 6\,t + 216\,164\,520 \cos 4\,t + 240\,182\,800 \cos 2\,t + 124\,294\,599);$$

$$P_{20}\,(5;\cos t) = 11!! \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{25}\,(1\,297\,257 \cos 15\,t + 5\,488\,395 \cos 13\,t + 13\,498\,485 \cos 11\,t + 25\,068\,615 \cos 9\,t + 38\,742\,405 \cos 7\,t + 52\,239\,759 \cos 5\,t + 63\,047\,985 \cos 3\,t + 69\,052\,555 \cos t);$$

$$P_{20}\,(6;\cos t) = 13!! \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{24}\,(299\,367 \cos 14\,t + 1\,397\,046 \cos 12\,t + 3\,681\,405 \cos 10\,t + 7\,152\,444 \cos 8\,t + 11\,324\,703 \cos 6\,t + 15\,343\,146 \cos 4\,t + 18\,253\,053 \cos 2\,t + 9\,657\,700);$$

$$P_{20}\,(7;\cos t) = 19!! \cdot 3 \cdot 23 \cdot 5 : 2^{22}\,(232\,841 \cos 13\,t + 1\,164\,205 \cos 11\,t + 3\,209\,430 \cos 9\,t + 6\,388\,294 \cos 7\,t + 10\,163\,195 \cos 5\,t + 13\,572\,783 \cos 3\,t + 15\,600\,900 \cos t);$$

$$P_{20}\,(8;\cos t) = 23!! \cdot 5 : 2^{21}\,(432\,419 \cos 12\,t + 2\,261\,884 \cos 10\,t + 6\,388\,294 \cos 8\,t + 12\,776\,588 \cos 6\,t + 20\,036\,013 \cos 4\,t + 25\,852\,920 \cos 2\,t + 14\,040\,810);$$

P_{20} (9; cos t) = 23!! · 5 · 29 : 2^{18} (44 733 cos 11 t + 239 723 cos 9 t + 680 295 cos 7 t + 1 341 153 cos 5 t + 2 032 050 cos 3 t + 2 477 790 cos t);

P_{20} (10; cos t) = 23!! · 3 · 5 · 29 : 2^{17} (164 021 cos 10 t + 883 190 cos 8 t + 2 470 545 cos 6 t + 4 705 800 cos 4 t + 6 737 850 cos 2 t + 3 781 890);

P_{20} (11; cos t) = 25!! · 3 · 29 · 31 : 2^{15} (5291 cos 9 t + 28 083 cos 7 t + 75 900 cos 5 t + 136 620 cos 3 t + 180 090 cos t);

P_{20} (12; cos t) = 25!! · 9 · 29 · 31 : 2^{14} (15 873 cos 8 t + 81 400 cos 6 t + 207 900 cos 4 t + 344 520 cos 2 t + 202 275);

P_{20} (13; cos t) = 31!! · 11 : 2^{10} (481 cos 7 t + 2331 cos 5 t + 5481 cos 3 t + 8091 cos t);

P_{20} (14; cos t) = 31!! · 11 : 2^{9} (3367 cos 6 t + 15 022 cos 4 t + 31 465 cos 2 t + 19 778);

P_{20} (15; cos t) = 31!! · 11 · 7 : 2^{7} (1443 cos 5 t + 5735 cos 3 t + 10 230 cos t);

P_{20} (16; cos t) = 35!! : 2^{6} (481 cos 4 t + 1628 cos 2 t + 1155);

P_{20} (17; cos t) = 37!! : 2^{3} (13 cos 3 t + 35 cos t);

P_{20} (18; cos t) = 37!! : 2^{2} (39 cos 2 t + 37);

P_{20} (19; cos t) = 39!! cos t;

P_{20} (20; cos t) = 39!!.

Anlage 5. Übersicht der zur Gewinnung der Koeffizienten $d_{n,\,j;\,k}$ in P_n^j (cos t) zu verwendenden Schemata.

Die Anlage umfaßt den Ansätzen (40 a) bis (40 d) entsprechend vier Schemata, die als Multiplikationsvorschriften dienen sollen. Die Koeffizienten im Schema hängen allein von dem Index j ab. Lediglich in die Ausdehnung nach rechts unten geht auch der Index n ein.

Jedes Schema zerfällt in einen Haupt- und einen Nebenteil, die beide symmetrisch gebaut sind. Der Hauptteil ist dadurch kenntlich gemacht, daß in dem Ausdruck j_{v-i} für j ein großer Buchstabe verwendet wird. Seine zahlenmäßige Bedeutung wird dadurch nicht geändert.

Es gilt demnach:

$$(20\text{ c})\quad J_{v-i} = j_{v-i} = (-1)^i \binom{j}{v-i}$$

$$(43)\quad C_h = c_{n,\,j;\,h}.$$

Für ein bestimmtes Wertepaar n, j, werden der Matrix des Schemas die ersten u-Zeilen und G-Spalten ($n-j = 2\,G$, bezw. $2\,G + 1$) entnommen. Der links angeschriebene Koeffizient $d_{n,\,j;\,k}$ entsteht dann als Summe der Produkte der C und der aus j gebildeten Koeffizienten seiner Zeile.

Fall I. $n = 2\,u;\quad j = 2\,v.$

n =	j	$j+2$	$j+4$	. .	$2j-4$	$2j-2$	$2j$	$2j+2$	$2j+4$	. .
	C_0	C_1	C_2	. .	C_{v-2}	C_{v-1}	C_v	C_{v+1}	C_{v+2}	. .
$d_{n,\,j;\,0}$ =	J_v	J_{v-1}	J_{v-2}	. .	J_2	J_1	J_0	.	.	. .
$d_{n,\,j;\,1}$ =	$J_{v-1} + j_{v-1}$	$J_v + j_{v-2}$	$J_{v-1} + j_{v-3}$	. .	$J_3 + j_1$	$J_2 + J_0$	J_1	J_0	.	. .
$d_{n,\,j;\,2}$ =	$J_{v-2} + j_{v-2}$	$J_{v-1} + j_{v-3}$	$J_v + j_{v-4}$	. .	$J_4 + j_0$	J_3	J_2	J_1	J_0	. .
. =	.	.	.	. .	.	.	.	.	.	. .
. =	.	.	.	. .	.	.	.	.	.	. .
$d_{n,\,j;\,v-2}$ =	$J_2 + j_2$	$J_3 + j_1$	$J_4 + j_0$	. .	J_v	J_{v-1}	J_{v-2}	J_{v-3}	J_{v-4}	. .
$d_{n,\,j;\,v-1}$ =	$J_1 + j_1$	$J_2 + j_0$	J_3	. .	J_{v-1}	J_v	J_{v-1}	J_{v-2}	J_{v-3}	. .
$d_{n,\,j;\,v}$ =	$J_0 + j_0$	J_1	J_2	. .	J_{v-2}	J_{v-1}	J_v	J_{v-1}	J_{v-2}	. .
$d_{n,\,j;\,v+1}$ =	.	J_0	J_1	. .	J_{v-3}	J_{v-2}	J_{v-1}	J_v	J_{v-1}	. .
$d_{n,\,j;\,v+2}$ =	.	.	J_0	. .	J_{v-4}	J_{v-3}	J_{v-2}	J_{v-1}	J_v	. .
. =	.	.	.	. .	.	.	.	.	.	. .
. =	.	.	.	. .	.	.	.	.	.	. .

Fall II. $n = 2u;\ j = 2v + 1.$

$n =$	$j+1$	$j+3$	$j+5$	. .	$2j-4$	$2j-2$	$2j$	$2j+2$	$2j+4$	. .
	C_0	C_1	C_2	. .	C_{v-2}	C_{v-1}	C_v	C_{v+1}	C_{v+2}	. .
$d_{n,\,j;\,1} =$	$J_v + j_{v-1}$	$-J_v + j_{v-2}$	$-J_{v-1} + j_{v-3}$	. .	$-J_3 + j_1$	$-J_2 + j_0$	$-J_1$	$-J_0$	.	. .
$d_{n,\,j;\,2} =$	$J_{v-1} + j_{v-2}$	$+J_v + j_{v-3}$	$-J_v + j_{v-4}$	. .	$-J_4 + j_0$	$-J_3$	$-J_2$	$-J_1$	$-J_0$	. .
$d_{n,\,j;\,3} =$	$J_{v-2} + j_{v-3}$	$+J_{v-1} + j_{v-4}$	$+J_v + j_{v-5}$	. .	$-J_5$	$-J_4$	$-J_3$	$-J_2$	$-J_1$	. .
. =	.	.	.	. .	.	.	.	.	.	. .
. =	.	.	.	. .	.	.	.	.	.	. .
$d_{n,\,j;\,v-2} =$	$J_3 + j_2$	$+J_4 + j_1$	$+J_5 + j_0$	. .	$-J_v$	$-J_{v-1}$	$-J_{v-2}$	$-J_{v-3}$	$-J_{v-4}$	. .
$d_{n,\,j;\,v-1} =$	$J_2 + j_1$	$+J_3 + j_0$	$+J_4$	. .	$+J_v$	$-J_v$	$-J_{v-1}$	$-J_{v-2}$	$-J_{v-3}$	. .
$d_{n,\,j;\,v} =$	$J_1 + j_0$	$+J_2$	$+J_3$	. .	$+J_{v-1}$	$+J_v$	$-J_v$	$-J_{v-1}$	$-J_{v-2}$	. .
$d_{n,\,j;\,v+1} =$	J_0	$+J_1$	$+J_2$	. .	$+J_{v-2}$	$+J_{v-1}$	$+J_v$	$-J_v$	$-J_{v-1}$	. .
$d_{n,\,j;\,v+2} =$	.	$+J_0$	$+J_1$	. .	$+J_{v-3}$	$+J_{v-2}$	$+J_{v-1}$	$+J_v$	$-J_v$	. .
. =	.	.	.	. .	.	.	.	.	.	. .
. =	.	.	.	. .	.	.	.	.	.	. .

Fall III. $n = 2u + 1;\ j = 2v + 1.$

$n =$	j	$j+2$	$j+4$	. .	$2j-5$	$2j-3$	$2j-1$	$2j+1$	$2j+3$	. .
	C_0	C_1	C_2	. .	C_{v-2}	C_{v-1}	C_v	C_{v+1}	C_{v+2}	. .
$d_{n,\,j;\,0} =$	$J_v + j_v$	$-J_v + j_{v-1}$	$-J_{v-1} + j_{v-2}$	. .	$-J_3 + j_2$	$-J_2 + j_1$	$-J_1 + j_0$	$-J_0$	.	. .
$d_{n,\,j;\,1} =$	$J_{v-1} + j_{v-1}$	$+J_v + j_{v-2}$	$-J_v + j_{v-3}$	. .	$-J_4 + j_1$	$-J_3 + j_0$	$-J_2$	$-J_1$	$-J_0$	. .
$d_{n,\,j;\,2} =$	$J_{v-2} + j_{v-2}$	$+J_{v-1} + j_{v-3}$	$+J_v + J_{v-4}$	. .	$-J_5 + j_0$	$-J_4$	$-J_3$	$-J_2$	$-J_1$	. .
. =	.	.	.	. .	.	.	.	.	.	. .
. =	.	.	.	. .	.	.	.	.	.	. .
$d_{n,\,j;\,v-2} =$	$J_2 + j_2$	$+J_3 + j_1$	$+J_4 + j_0$	. .	$+J_v$	$-J_v$	$-J_{v-1}$	$-J_{v-2}$	$-J_{v-3}$	. .
$d_{n,\,j;\,v-1} =$	$J_1 + j_1$	$+J_2 + j_0$	$+J_3$	. .	$+J_{v-1}$	$+J_v$	$-J_v$	$-J_{v-1}$	$-J_{v-2}$	. .
$d_{n,\,j;\,v} =$	$J_0 + j_0$	$+J_1$	$+J_2$	. .	$+J_{v-2}$	$+J_{v-1}$	$+J_v$	$-J_v$	$-J_{v-1}$	. .
$d_{n,\,j;\,v+1} =$	.	$+J_0$	$+J_1$	. .	$+J_{v-3}$	$+J_{v-2}$	$+J_{v-1}$	$+J_v$	$-J_v$	. .
$d_{n,\,j;\,v+2} =$	.	.	$+J_0$	. .	$+J_{v-4}$	$+J_{v-3}$	$+J_{v-2}$	$+J_{v-1}$	$+J_v$	. .
. =	.	.	.	. .	.	.	.	.	.	. .
. =	.	.	.	. .	.	.	.	.	.	. .

Fall IV. $n = 2u + 1;\ j = 2v.$

$n =$	$j+1$	$j+3$	$j+5$	. .	$2j-3$	$2j-1$	$2j+1$	$2j+3$	$2j+5$	. .
	C_0	C_1	C_2	. .	C_{v-2}	C_{v-1}	C_v	C_{v+1}	C_{v+2}	. .
$d_{n,\,j;\,0} =$	$J_v + j_{v-1}$	$J_{v-1} + j_{v-2}$	$J_{v-2} + J_{v-3}$	. .	$J_2 + j_1$	$J_1 + j_0$	J_0	.	.	. .
$d_{n,\,j;\,1} =$	$J_{v-1} + j_{v-2}$	$J_v + j_{v-3}$	$J_{v-1} + j_{v-4}$	. .	$J_3 + j_0$	J_2	J_1	J_0	.	. .
$d_{n,\,j;\,2} =$	$J_{v-2} + j_{v-3}$	$J_{v-1} + J_{v-4}$	$J_v + j_{v-5}$	. .	J_5	J_3	J_2	J_1	J_0	. .
$d_{n,\,j;\,3} =$	$J_{v-3} + J_{v-4}$	$J_{v-2} + j_{v-5}$	$J_{v-1} + j_{v-6}$	. .	J_4	J_4	J_3	J_2	J_1	. .
. =	.	.	.	. .	.	.	.	.	.	. .
. =	.	.	.	. .	.	.	.	.	.	. .
. =	.	.	.	. .	.	.	.	.	.	. .
$d_{n,\,j;\,v-2} =$	$J_2 + j_1$	$J_3 + j_0$	J_4	. .	J_v	J_{v-1}	J_{v-2}	J_{v-3}	J_{v-4}	. .
$d_{n,\,j;\,v-1} =$	$J_1 + J_0$	J_2	J_3	. .	J_{v-1}	J_v	J_{v-1}	J_{v-2}	J_{v-3}	. .
$d_{n,\,j;\,v} =$	J_0	J_1	J_2	. .	J_{v-2}	J_{v-1}	J_v	J_{v-1}	J_{v-2}	. .
$d_{n,\,j;\,v+1} =$	.	J_0	J_1	. .	J_{v-3}	J_{v-2}	J_{v-1}	J_v	J_{v-1}	. .
$d_{n,\,j;\,v+2} =$	.	.	J_0	. .	J_{v-4}	J_{v-3}	J_{v-2}	J_{v-1}	J_v	. .
. =	.	.	.	. .	.	.	.	.	.	. .
. =	.	.	.	. .	.	.	.	.	.	. .

Anlage 6. Zusammenstellung der zugeordneten Kugelfunktionen 1. Art P_n^j (cos t) in Vielfachen des Winkels t.

$$P_n^j (\cos t) = D_{n,j} \cdot \sum_{0}^{2k \leqq n} {}^{k}\, d_{n,j;k} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \begin{pmatrix} 2k \\ 2k+1 \end{pmatrix} t$$

Aus drucktechnischen Gründen ist statt P_n^j (cos t) in diesem Anhang überall P (n, j) gesetzt worden.

$P(0; 0) = 1;$

$P(1; 0) = \cos t;$

$P(1; 1) = \sin t;$

$P(2; 0) = 1 : 2^2 \cdot (1 + 3 \cos 2 t);$

$P(2; 1) = 3 : 2 \cdot \sin 2 t;$

$P(2; 2) = 3 : 2 \cdot (1 - \cos 2 t);$

$P(3; 0) = 1 : 2^3 \cdot (3 \cos t + 5 \cos 3 t);$

$P(3; 1) = 3!! : 2^3 \cdot (1 \sin t + 5 \sin 3 t);$

$P(3; 2) = 5!! : 2^2 \cdot (\cos t - \cos 3 t);$

$P(3; 3) = 5!! : 2^2 \cdot (3 \sin t - \sin 3 t);$

$P(4; 0) = 1 : 2^6 \cdot (9 + 20 \cos 2 t + 35 \cos 4 t);$

$P(4; 1) = 5 : 2^4 \cdot (2 \sin 2 t + 7 \sin 4 t);$

$P(4; 2) = 5!! : 2^4 \cdot (3 + 4 \cos 2 t - 7 \cos 4 t);$

$P(4; 3) = 7!! : 2^3 \cdot (2 \sin 2 t - \sin 4 t);$

$P(4; 4) = 7!! : 2^3 \cdot (3 - 4 \cos 2 t + 1 \cos 4 t);$

$P(5; 0) = 1 : 2^7 (30 \cos t + 35 \cos 3 t + 63 \cos 5 t);$

$P(5; 1) = 5!! : 2^7 (2 \sin t + 7 \sin 3 t + 21 \sin 5 t);$

$P(5; 2) = 7!! : 2^5 (2 \cos t + 1 \cos 3 t - 3 \cos 5 t);$

$P(5; 3) = 7!! : 2^5 (6 \sin t + 13 \sin 3 t - 9 \sin 5 t);$

$P(5; 4) = 9!! : 2^4 (2 \cos t - 3 \cos 3 t + 1 \cos 5 t);$

$P(5; 5) = 9!! : 2^4 (10 \sin t - 5 \sin 3 t + 1 \sin 5 t);$

$P(6; 0) = 1 : 2^9 (50 + 105 \cos 2 t + 126 \cos 4 t + 231 \cos 6 t);$

$P(6; 1) = 3 \cdot 7 : 2^8 (5 \sin 2 t + 12 \sin 4 t + 33 \sin 6 t);$

$P(6; 2) = 7!! : 2^8 (10 + 17 \cos 2 t + 6 \cos 4 t - 33 \cos 6 t);$

$P(6; 3) = 7!! \cdot 3 : 2^6 (9 \sin 2 t + 12 \sin 4 t - 11 \sin 6 t);$

$P(6; 4) = 9!! : 2^6 (10 + 5 \cos 2 t - 26 \cos 4 t + 11 \cos 6 t);$

$P(6; 5) = 11!! : 2^5 (5 \sin 2 t - 4 \sin 4 t + 1 \sin 6 t);$

$P(6; 6) = 11!! : 2^5 (10 - 15 \cos 2 t + 6 \cos 4 t - 1 \cos 6 t);$

$P(7; 0) = 1 : 2^{10} (175 \cos t + 189 \cos 3 t + 231 \cos 5 t + 429 \cos 7 t);$

$P(7;1) = 7 : 2^{10} (25 \sin t + 81 \sin 3t + 165 \sin 5t + 429 \sin 7t);$

$P(7;2) = 3^2 \cdot 7 : 2^9 (75 \cos t + 57 \cos 3t + 11 \cos 5t - 143 \cos 7t);$

$P(7;3) = 7!! \cdot 3 : 2^9 (45 \sin t + 117 \sin 3t + 121 \sin 5t - 143 \sin 7t);$

$P(7;4) = 7!! \cdot 3 \cdot 11 : 2^7 (15 \cos t - 3 \cos 3t - 25 \cos 5t + 13 \cos 7t);$

$P(7;5) = 11!! : 2^7 (25 \sin t + 33 \sin 3t - 43 \sin 5t + 13 \sin 7t);$

$P(7;6) = 13!! : 2^6 (5 \cos t - 9 \cos 3t + 5 \cos 5t - 1 \cos 7t);$

$P(7;7) = 13!! : 2^6 (35 \sin t - 21 \sin 3t + 7 \sin 5t - 1 \sin 7t);$

$P(8;0) = 1 : 2^{14} (1225 + 2520 \cos 2t + 2772 \cos 4t + 3432 \cos 6t + 6435 \cos 8t;$

$P(8;1) = 3^2 : 2^{11} (70 \sin 2t + 154 \sin 4t + 286 \sin 6t + 715 \sin 8t);$

$P(8;2) = 7!! \cdot 3 : 2^{11} (35 + 64 \cos 2t + 44 \cos 4t - 143 \cos 8t);$

$P(8;3) = 7!! \cdot 3 \cdot 11 : 2^{10} (18 \sin 2t + 30 \sin 4t + 26 \sin 6t - 39 \sin 8t);$

$P(8;4) = 11!! : 2^{10} (35 + 40 \cos 2t - 36 \cos 4t - 104 \cos 6t + 65 \cos 8t);$

$P(8;5) = 13!! : 2^8 (10 \sin 2t + 6 \sin 4t - 14 \sin 6t + 5 \sin 8t);$

$P(8;6) = 13!! : 2^8 (35 - \text{Null} \cos 2t - 84 \cos 4t + 64 \cos 6t - 15 \cos 8t);$

$P(8;7) = 15!! : 2^7 (14 \sin 2t - 14 \sin 4t + 6 \sin 6t - 1 \sin 8t);$

$P(8;8) = 15!! : 2^7 (35 - 56 \cos 2t + 28 \cos 4t - 8 \cos 6t + 1 \cos 8t);$

$P(9;0) = 1 : 2^{15} (4410 \cos t + 4620 \cos 3t + 5148 \cos 5t + 6435 \cos 7t + 12\,155 \cos 9t);$

$P(9;1) = 5!! \cdot 3 : 2^{15} (98 \sin t + 308 \sin 3t + 572 \sin 5t + 1001 \sin 7t + 2431 \sin 9t);$

$P(9;2) = 5!! \cdot 3 \cdot 11 : 2^{12} (98 \cos t + 84 \cos 3t + 52 \cos 5t - 13 \cos 7t - 221 \cos 9t);$

$P(9;3) = 7!! \cdot 3 \cdot 11 : 2^{12} (42 \sin t + 116 \sin 3t + 156 \sin 5t + 117 \sin 7t - 221 \sin 9t);$

$P(9;4) = 13!! : 2^{11} (14 \cos t + 4 \cos 3t - 12 \cos 5t - 23 \cos 7t + 17 \cos 9t);$

$P(9;5) = 13!! : 2^{11} (70 \sin t + 140 \sin 3t + 36 \sin 5t - 205 \sin 7t + 85 \sin 9t);$

$P(9;6) = 13!! \cdot 5 : 2^9 (42 \cos t - 28 \cos 3t - 60 \cos 5t + 63 \cos 7t - 17 \cos 9t);$

$P(9;7) = 15!! : 2^9 (98 \sin t + 84 \sin 3t - 164 \sin 5t + 89 \sin 7t - 17 \sin 9t);$

$P(9;8) = 17!! : 2^8 (14 \cos t - 28 \cos 3t + 20 \cos 5t - 7 \cos 7t + 1 \cos 9t);$

$P(9;9) = 17!! : 2^8 (126 \sin t - 84 \sin 3t + 36 \sin 5t - 9 \sin 7t + 1 \sin 9t);$

$P(10;0) = 1 : 2^{17} (7938 + 16\,170 \cos 2t + 17\,160 \cos 4t + 19\,305 \cos 6t + 24\,310 \cos 8t + 46\,189 \cos 10t);$

$P(10;1) = 5 \cdot 11 : 2^{16} (294 \sin 2t + 624 \sin 4t + 1053 \sin 6t + 1768 \sin 8t + 4199 \sin 10t);$

$P(10;2) = 5!! \cdot 3 \cdot 11 \cdot 2^{16} (882 + 1666 \cos 2t + 1352 \cos 4t + 741 \cos 6t - 442 \cos 8t - 4199 \cos 10t);$

$P(10;3) = 5!! \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 : 2^{13} (98 \sin 2t + 176 \sin 4t + 207 \sin 6t + 136 \sin 8t - 323 \sin 10t);$

$P(10;4) = 7!! \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 : 2^{13} (126 + 182 \cos 2t - 8 \cos 4t - 249 \cos 6t - 374 \cos 8t + 323 \cos 10t);$

$P(10{:}\,5) = 13!! : 2^{12} (350 \sin 2t + 400 \sin 4t - 15 \sin 6t - 680 \sin 8t + 323 \sin 10t);$

$P(10; 6) = 13!! \cdot 5 : 2^{12} (378 + 266 \cos 2t - 664 \cos 4t - 711 \cos 6t + 1054 \cos 8t - 323 \cos 10t);$

$P(10; 7) = 13!! \cdot 5 \cdot 17 : 2^{10} (98 \sin 2t + 16 \sin 4t - 129 \sin 6t + 88 \sin 8t - 19 \sin 10t);$

$P(10; 8) = 17!! : 2^{10} (126 - 42 \cos 2t - 264 \cos 4t + 279 \cos 6t - 118 \cos 8t + 19 \cos 10t);$

$P(10; 9) = 19!! : 2^{9} (42 \sin 2t - 48 \sin 4t + 27 \sin 6t - 8 \sin 8t + 1 \sin 10t);$

$P(10; 10) = 19!! : 2^{9} (126 - 210 \cos 2t + 120 \cos 4t - 45 \cos 6t + 10 \cos 8t - 1 \cos 10t);$

$P(11; 0) = 1 : 2^{18} (29\,106 \cos t + 30\,030 \cos 3t + 32\,175 \cos 5t + 36\,465 \cos 7t + 46\,189 \cos 9t + 88\,179 \cos 11t);$

$P(11; 1) = 3 \cdot 11 : 2^{18} (882 \sin t + 2730 \sin 3t + 4875 \sin 5t + 7735 \sin 7t + 12\,597 \sin 9t + 29\,393 \sin 11t);$

$P(11; 2) = 5!! \cdot 11 \cdot 13 : 2^{17} (882 \cos t + 798 \cos 3t + 615 \cos 5t + 289 \cos 7t - 323 \cos 9t - 2261 \cos 11t);$

$P(11; 3) = 7!! \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 : 2^{17} (126 \sin t + 358 \sin 3t + 525 \sin 5t + 561 \sin 7t + 323 \sin 9t - 969 \sin 11t);$

$P(11; 4) = 13!! : 2^{14} (210 \cos t + 110 \cos 3t - 65 \cos 5t - 255 \cos 7t - 323 \cos 9t + 323 \cos 11t);$

$P(11; 5) = 13!! : 2^{14} (1050 \sin t + 2450 \sin 3t + 1975 \sin 5t - 765 \sin 7t - 4199 \sin 9t + 2261 \sin 11t);$

$P(11; 6) = 13!! \cdot 17 : 2^{13} (630 \cos t - 70 \cos 3t - 795 \cos 5t - 525 \cos 7t + 1159 \cos 9t - 399 \cos 11t);$

$P(11; 7) = 17!! : 2^{13} (294 \sin t + 462 \sin 3t - 135 \sin 5t - 643 \sin 7t + 551 \sin 9t - 133 \sin 11t);$

$P(11; 8) = 19!! : 2^{11} (42 \cos t - 42 \cos 3t - 45 \cos 5t + 77 \cos 7t - 39 \cos 9t + 7 \cos 11t);$

$P(11; 9) = 19!! : 2^{11} (378 \sin t + 210 \sin 3t - 585 \sin 5t + 435 \sin 7t - 151 \sin 9t + 21 \sin 11t);$

$P(11; 10) = 21!! : 2^{10} (42 \cos t - 90 \cos 3t + 75 \cos 5t - 35 \cos 7t + 9 \cos 9t - 1 \cos 11t);$

$P(11; 11) = 21!! : 2^{10} (462 \sin t - 330 \sin 3t + 165 \sin 5t - 55 \sin 7t + 11 \sin 9t - 1 \sin 11t);$

$P(12; 0) = 1 : 2^{21} (106\,722 + 216\,216 \cos 2t + 225\,225 \cos 4t + 243\,100 \cos 6t + 277\,134 \cos 8t + 352\,716 \cos 10t + 676\,039 \cos 12t);$

$P(12; 1) = 3 \cdot 13 : 2^{19} (2772 \sin 2t + 5775 \sin 4t + 9350 \sin 6t + 14\,212 \sin 8t + 22\,610 \sin 10t + 52\,003 \sin 12t);$

$P(12; 2) = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 : 2^{19} (1386 + 2664 \cos 2t + 2325 \cos 4t + 1700 \cos 6t + 646 \cos 8t - 1292 \cos 10t - 7492 \cos 12t);$

$P(12; 3) = 7!! \cdot 11 \cdot 13 : 2^{18} (1620 \sin 2t + 3015 \sin 4t + 3910 \sin 6t + 3876 \sin 8t + 1938 \sin 10t - 7429 \sin 12t);$

$P(12; 4) = 13!! : 2^{18} (2310 + 3720 \cos 2t + 1195 \cos 4t - 2380 \cos 6t - 5814 \cos 8t - 6460 \cos 10t + 7429 \cos 12t);$

$P(12; 5) = 13!! \cdot 17 : 2^{15} (300 \sin 2t + 425 \sin 4t + 250 \sin 6t - 228 \sin 8t - 722 \sin 10t + 437 \sin 12t);$

$P(12; 6) = 13!! \cdot 17 : 2^{15} (2310 + 2520 \cos 2t - 2205 \cos 4t - 5380 \cos 6t - 2166 \cos 8t + 7980 \cos 10t - 3059 \cos 12t);$

$P(12; 7) = 13!! \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{14} (420 \sin 2t + 315 \sin 4t - 290 \sin 6t - 556 \sin 8t + 602 \sin 10t - 161 \sin 12t);$

$P(12;8) = 19!! : 2^{14} (462 + 168 \cos 2t - 945 \cos 4t - 380 \cos 6t + 1346 \cos 8t - 812 \cos 10t$ $161 \cos 12t);$

$P(12;9) = 19!! \cdot 7 : 2^{12} (324 \sin 2t - 45 \sin 4t - 370 \sin 6t + 372 \sin 8t - 150 \sin 10t +$ $23 \sin 12t);$

$P(12;10) = 21!! : 2^{12} (462 - 264 \cos 2t - 825 \cos 4t + 1100 \cos 6t - 638 \cos 8t + 188 \cos 10t$ $- 23 \cos 12t);$

$P(12;11) = 23!! : 2^{11} (132 \sin 2t - 165 \sin 4t + 110 \sin 6t - 44 \sin 8t + 10 \sin 10t - 1 \sin 12t);$

$P(12;12) = 23!! : 2^{11} (462 - 792 \cos 2t + 495 \cos 4t - 220 \cos 6t + 66 \cos 8t - 12 \cos 10t$ $+ 1 \cos 12t);$

$P(13;0) = 1 : 2^{22} (396\,396 \cos t + 405\,405 \cos 3t + 425\,425 \cos 5t + 461\,890 \cos 7t + 529\,074$ $\cos 9t + 676\,039 \cos 11t + 1\,300\,075 \cos 13t);$

$P(13;1) = 7 \cdot 13 : 2^{22} (4356 \sin t + 13\,365 \sin 3t + 23\,375 \sin 5t + 35\,530 \sin 7t + 52\,326$ $\sin 9t + 81\,719 \sin 11t + 185\,725 \sin 13t);$

$P(13;2) = 7!! \cdot 13 : 2^{20} (13\,068 \cos t + 12\,177 \cos 3t + 10\,285 \cos 5t + 7106 \cos 7t + 1938$ $\cos 9t - 7429 \cos 11t - 37\,145 \cos 13t);$

$P(13;3) = 7!! \cdot 11 \cdot 13 : 2^{20} (3564 \sin t + 10\,287 \sin 3t + 15\,725 \sin 5t + 18\,734 \sin 7t + 17\,442$ $\sin 9t + 7429 \sin 11t - 37\,145 \sin 13t);$

$P(13;4) = 7!! \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 : 2^{19} (5940 \cos t + 3915 \cos 3t + 215 \cos 5t - 4370 \cos 7t - 8322$ $\cos 9t - 8303 \cos 11t + 10\,925 \cos 13t);$

$P(13;5) = 13!! \cdot 17 : 2^{19} (3300 \sin t + 8325 \sin 3t + 8975 \sin 5t + 3610 \sin 7t - 6954 \sin 9t$ $- 16\,169 \sin 11t + 10\,925 \sin 13t);$

$P(13;6) = 13!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{16} (660 \cos t + 135 \cos 3t - 565 \cos 5t - 850 \cos 7t - 162 \cos 9t +$ $1357 \cos 11t - 575 \cos 13t);$

$P(13;7) = 13!! \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{16} (924 \sin t + 1827 \sin 3t + 665 \sin 5t - 1653 \sin 7t - 1974 \sin$ $9t + 2737 \sin 11t - 805 \sin 13t);$

$P(13;8) = 19!! \cdot 7 : 2^{15} (396 \cos t - 171 \cos 3t - 535 \cos 5t - 14 \cos 7t + 738 \cos 9t - 529$ $\cos 11t + 115 \cos 13t);$

$P(13;9) = 19!! \cdot 7 : 2^{15} (3564 \sin t + 4455 \sin 3t - 3355 \sin 5t - 5170 \sin 7t + 7362 \sin 9t$ $- 3427 \sin 11t + 575 \sin 13t);$

$P(13;10) = 19!! \cdot 7 \cdot 23 : 2^{13} (396 \cos t - 495 \cos 3t - 275 \cos 5t + 770 \cos 7t - 558 \cos 9t +$ $187 \cos 11t - 25 \cos 13t);$

$P(13;11) = 23!! : 2^{13} (1452 \sin t + 495 \sin 3t - 2035 \sin 5t + 1870 \sin 7t - 894 \sin 9t + 229$ $\sin 11t - 25 \sin 13t);$

$P(13;12) = 25!! : 2^{12} (132 \cos t - 297 \cos 3t + 275 \cos 5t - 154 \cos 7t + 54 \cos 9t - 11 \cos 11t$ $+ 1 \cos 13t);$

$P(13;13) = 25!! : 2^{12} (1716 \sin t - 1287 \sin 3t + 715 \sin 5t - 286 \sin 7t + 78 \sin 9t - 13 \sin$ $11t + 1 \sin 13t);$

$P(14;0) = 1 : 2^{24} (736\,164 + 1\,486\,485 \cos 2t + 1\,531\,530 \cos 4t + 1\,616\,615 \cos 6t + 1\,763\,580$ $\cos 8t + 2\,028\,117 \cos 10t + 2\,600\,150 \cos 12t + 5\,014\,575 \cos 14t);$

$P(14;1) = 7!! : 2^{23} (14\,157 \sin 2t + 29\,172 \sin 4t + 46\,189 \sin 6t + 67\,184 \sin 8t + 96\,577 \sin 10t$ $+ 148\,580 \sin 12t + 334\,305 \sin 14t);$

$P(14;2) = 7!! \cdot 13 : 2^{23} (56\,628 + 109\,989 \cos 2t + 99\,858 \cos 4t + 81\,719 \cos 6t + 52\,972 \cos$ $8t + 7429 \cos 10t - 74\,290 \cos 12t - 334\,305 \cos 14t);$

$P\,(14;\,3) = 7!! \cdot 13 \cdot 17 : 2^{21}$ (9801 sin 2 t + 18 612 sin 4 t + 25 289 sin 6 t + 28 272 sin 8 t + 24 909 sin 10 t + 8740 sin 12 t — 58 995 sin 14 t);

$P\,(14;\,4) = 13!! \cdot 17 : 2^{21}$ (1716 + 2937 cos 2 t + 1522 cos 4 t — 589 cos 6 t — 2964 cos 8 t — 4807 cos 10 t — 4370 cos 12 t + 6555 cos 14 t);

$P\,(14;\,5) = 13!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{20}$ (825 sin 2 t + 1300 sin 4 t + 1145 sin 6 t + 240 sin 8 t — 1219 sin 10 t — 2300 sin 12 t + 1725 sin 14 t);

$P\,(14;\,6) = 13!! \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{20}$ (1716 + 2277 cos 2 t — 558 cos 4 t — 3337 cos 6 t — 3732 cos 8 t + 69 cos 10 t + 6670 cos 12 t — 3105 cos 14 t);

$P\,(14;\,7) = 19!! : 2^{17}$ (1617 sin 2 t + 1764 sin 4 t + 49 sin 6 t — 2128 sin 8 t — 1771 sin 10 t + 3220 sin 12 t — 1035 sin 14 t);

$P\,(14;\,8) = 19!! \cdot 7 : 2^{17}$ (1716 + 1353 cos 2 t — 2574 cos 4 t — 3421 cos 6 t + 1132 cos 8 t + 5129 cos 10 t — 4370 cos 12 t + 1035 cos 14 t);

$P\,(14;\,9) = 19!! \cdot 7 \cdot 23 : 2^{16}$ (891 sin 2 t + 396 sin 4 t — 869 sin 6 t — 624 sin 8 t + 1383 sin 10 t — 740 sin 12 t + 135 sin 14 t);

$P\,(14;\,10) = 23!! : 2^{16}$ (1716 + 165 cos 2 t — 3630 cos 4 t + 55 cos 6 t + 4460 cos 8 t — 4091 cos 10 t + 1550 cos 12 t — 225 cos 14 t);

$P\,(14;\,11) = 25!! : 2^{14}$ (363 sin 2 t — 132 sin 4 t — 341 sin 6 t + 464 sin 8 t — 265 sin 10 t + 76 sin 12 t — 9 sin 14 t);

$P\,(14;\,12) = 25!! : 2^{14}$ (1716 — 1287 cos 2 t — 2574 cos 4 t + 4147 cos 6 t — 2964 cos 8 t + 1209 cos 10 t — 274 cos 12 t + 27 cos 14 t);

$P\,(14;\,13) = 27!! : 2^{13}$ (429 sin 2 t — 572 sin 4 t + 429 sin 6 t — 208 sin 8 t + 65 sin 10 t — 12 sin 12 t + 1 sin 14 t);

$P\,(14;\,14) = 27!! : 2^{13}$ (1716 — 3003 cos 2 t + 2002 cos 4 t — 1001 cos 6 t + 364 cos 8 t — 91 cos 10 t + 14 cos 12 t — 1 cos 14 t);

$P\,(15;\,0) = 1 : 2^{25}$ (2 760 615 cos t + 2 807 805 cos 3 t + 2 909 907 cos 5 t + 3 086 265 cos 7 t + 3 380 195 cos 9 t + 3 900 225 cos 11 t + 5 014 575 cos 13 t + 9 694 845 cos 15 t);

$P\,(15;\,1) = 5!! : 2^{25}$ (184 041 sin t + 561 561 sin 3 t + 969 969 sin 5 t + 1 440 257 sin 7 t + 2 028 117 sin 9 t + 2 860 165 sin 11 t + 4 345 965 sin 13 t + 9 694 845 sin 15 t);

$P\,(15;\,2) = 7!! \cdot 17 : 2^{24}$ (184 041 cos t + 174 603 cos 3 t + 154 869 cos 5 t + 122 759 cos 7 t + 73 853 cos 9 t — 2 185 cos 11 t — 137 655 cos 13 t — 570 285 cos 15 t);

$P\,(15;\,3) = 7!! \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17 : 2^{24}$ (14 157 sin t + 41 261 sin 3 t + 64 581 sin 5 t + 80 997 sin 7 t + 86 089 sin 9 t + 72 105 sin 11 t + 19 665 sin 13 t — 190 095 sin 15 t);

$P\,(15;\,4) = 9!! \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{22}$ (4719 cos t + 3509 cos 3 t + 1243 cos 5 t — 1743 cos 7 t — 4853 cos 9 t — 7015 cos 11 t — 5865 cos 13 t + 10 005 cos 15 t);

$P\,(15;\,5) = 13!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{22}$ (2145 sin t + 5665 sin 3 t + 7001 sin 5 t + 5145 sin 7 t — 115 sin 9 t — 7475 sin 11 t — 12 075 sin 13 t + 10 005 sin 15 t);

$P\,(15;\,6) = 13!! \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{21}$ (9009 cos t + 3619 cos 3 t — 4515 cos 5 t — 10 689 cos 7 t — 9499 cos 9 t + 2415 cos 11 t + 19 665 cos 13 t — 10 005 cos 15 t);

$P\,(15;\,7) = 19!! : 2^{21}$ (21 021 sin t + 46 893 sin 3 t + 33 957 sin 5 t — 13 867 sin 7 t — 57 799 sin 9 t — 34 615 sin 11 t + 85 905 sin 13 t — 30 015 sin 15 t);

$P\,(15;\,8) = 19!! \cdot 23 : 2^{18}$ (3003 cos t — 231 cos 3 t — 3465 cos 5 t — 2779 cos 7 t + 2247 cos 9 t + 5005 cos 11 t — 5085 cos 13 t + 1305 cos 15 t);

$P\,(15;\,9) = 19!! \cdot 7 \cdot 23 : 2^{18}$ (3861 sin t + 6501 sin 3 t — 99 sin 5 t — 7539 sin 7 t — 2479 sin 9 t + 10 785 sin 11 t — 6615 sin 13 t + 1305 sin 15 t);

$P\,(15;\,10) = 23!! \cdot 5 : 2^{17}\,(2145 \cos t - 1485 \cos 3t - 2739 \cos 5t + 1295 \cos 7t + 3285 \cos 9t - 3905 \cos 11t + 1665 \cos 13t - 261 \cos 15t);$

$P\,(15;\,11) = 25!! : 2^{17}\,(4719 \sin t + 4719 \sin 3t - 5577 \sin 5t - 3913 \sin 7t + 9347 \sin 9t - 6397 \sin 11t + 2043 \sin 13t - 261 \sin 15t);$

$P\,(15;\,12) = 25!! \cdot 9 : 2^{15}\,(1287 \cos t - 1859 \cos 3t - 429 \cos 5t + 2457 \cos 7t - 2301 \cos 9t + 1089 \cos 11t - 273 \cos 13t + 29 \cos 15t);$

$P\,(15;\,13) = 27!! : 2^{15}\,(5577 \sin t + 1001 \sin 3t - 7007 \sin 5t + 7553 \sin 7t - 4459 \sin 9t + 1589 \sin 11t - 323 \sin 13t + 29 \sin 15t);$

$P\,(15;\,14) = 29!! : 2^{14}\,(429 \cos t - 1001 \cos 3t + 1001 \cos 5t - 637 \cos 7t + 273 \cos 9t - 77 \cos 11t + 13 \cos 13t - 1 \cos 15t);$

$P\,(15;\,15) = 29!! : 2^{14}\,(6435 \sin t - 5005 \sin 3t + 3003 \sin 5t - 1365 \sin 7t + 455 \sin 9t - 105 \sin 11t + 15 \sin 13t - 1 \sin 15t);$

$P\,(16;\,0) = 1 : 2^{30}\,(41\,409\,225 + 83\,431\,920 \cos 2t + 85\,357\,272 \cos 4t + 88\,884\,432 \cos 6t + 94\,645\,460 \cos 8t + 104\,006\,000 \cos 10t + 120\,349\,800 \cos 12t + 155\,117\,520 \cos 14t + 300\,540\,195 \cos 16t);$

$P\,(16;\,1) = 17 : 2^{26}\,(613\,470 \sin 2t + 1\,255\,254 \sin 4t + 1\,960\,686 \sin 6t + 2\,783\,690 \sin 8t + 3\,823\,750 \sin 10t + 5\,309\,550 \sin 12t + 7\,983\,990 \sin 14t + 17\,678\,835 \sin 16t);$

$P\,(16;\,2) = 5!! \cdot 3 \cdot 17 : 2^{26}\,(920\,205 + 1\,799\,512 \cos 2t + 1\,673\,672 \cos 4t + 1\,452\,360 \cos 6t + 1\,113\,476 \cos 8t + 611\,800 \cos 10t - 157\,320 \cos 12t - 1\,520\,760 \cos 14t - 5\,892\,945 \cos 16t);$

$P\,(16;\,3) = 7!! \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{25}\,(40\,898 \sin 2t + 78\,650 \sin 54t + 109\,746 \sin 6t + 129\,766 \sin 8t + 132\,250 \sin 10t + 105\,570 \sin 12t + 20\,010 \sin 14t - 310\,155 \sin 16t);$

$P\,(16;\,4) = 7!! \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{25}\,(70\,785 + 125\,840 \cos 2t + 80\,344 \cos 4t + 10\,416 \cos 6t - 74\,060 \cos 8t - 156\,400 \cos 10t - 207\,000 \cos 12t - 160\,080 \cos 14t + 310\,155 \cos 16t);$

$P\,(16;\,5) = 9!! \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{23}\,(110\,110 \sin 2t + 184\,646 \sin 4t + 193\,326 \sin 6t + 117\,530 \sin 8t - 40\,250 \sin 10t - 238\,050 \sin 12t - 340\,170 \sin 14t + 310\,155 \sin 16t);$

$P\,(16;\,6) = 13!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{23}\,(135\,135 + 200\,200 \cos 2t + 19\,096 \cos 4t - 191\,016 \cos 6t - 312\,340 \cos 8t - 225\,400 \cos 10t + 124\,200 \cos 12t + 560\,280 \cos 14t - 310\,155 \cos 16t);$

$P\,(16;\,7) = 13!! \cdot 5 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{22}\,(14\,014 \sin 2t + 18\,326 \sin 4t + 8526 \sin 6t - 10\,486 \sin 8t - 23\,450 \sin 10t - 9810 \sin 12t + 35\,670 \sin 14t - 13\,485 \sin 16t);$

$P\,(16;\,8) = 19!! \cdot 23 : 2^{22}\,(45\,045 + 48\,048 \cos 2t - 42\,504 \cos 4t - 97\,776 \cos 6t - 48\,188 \cos 8t + 81\,200 \cos 10t + 119\,880 \cos 12t - 146\,160 \cos 14t + 40\,455 \cos 16t);$

$P\,(16;\,9) = 19!! \cdot 5 \cdot 23 : 2^{19}\,(30\,030 \sin 2t + 24\,486 \sin 4t - 13\,986 \sin 6t - 38\,150 \sin 8t - 1610 \sin 10t + 54\,270 \sin 12t - 38\,106 \sin 14t + 8091 \sin 16t);$

$P\,(16;\,10) = 19!! \cdot 7 \cdot 23 \cdot 5 : 2^{19}\,(32\,175 + 17\,160 \cos 2t - 58\,344 \cos 4t - 45\,864 \cos 6t + 52\,780 \cos 8t + 62\,600 \cos 10t - 100\,440 \cos 12t + 48\,024 \cos 14t - 8091 \cos 16t);$

$P\,(16;\,11) = 23!! \cdot 5 \cdot 9 : 2^{18}\,(15\,730 \sin 2t + 3146 \sin 4t - 16\,926 \sin 6t - 2730 \sin 8t + 22\,410 \sin 10t - 18\,510 \sin 12t + 6\,554 \sin 14t - 899 \sin 16t);$

$P\,(16;\,12) = 25!! \cdot 9 : 2^{18}\,(19\,305 - 2288 \cos 2t - 40\,040 \cos 4t + 13\,104 \cos 6t + 40\,404 \cos 8t - 52\,080 \cos 10t + 28\,584 \cos 12t - 7888 \cos 14t + 889 \cos 16t);$

$P\,(16;\,13) = 25!! \cdot 9 \cdot 29 : 2^{16}\,(3718 \sin 2t - 2002 \sin 4t - 2730 \sin 6t + 4914 \sin 8t - 3570 \sin 10t + 1446 \sin 12t - 322 \sin 14t + 31 \sin 16t);$

$P\,(16;\,14) = 29!! : 2^{16}\,(6435 - 5720 \cos 2\,t - 8008 \cos 4\,t + 15\,288 \cos 6\,t - 12\,740 \cos 8\,t + 6440 \cos 10\,t - 2040 \cos 12\,t + 376 \cos 14\,t - 31 \cos 16\,t);$

$P\,(16;\,15) = 31!! : 2^{15}\,(1430 \sin 2\,t - 2002 \sin 4\,t + 1638 \sin 6\,t - 910 \sin 8\,t + 350 \sin 10\,t - 90 \sin 12\,t + 14 \sin 14\,t - 1 \sin 16\,t);$

$P\,(16;\,16) = 31!! : 2^{15}\,(6435 - 11\,440 \cos 2\,t + 8008 \cos 4\,t - 4368 \cos 6\,t + 1820 \cos 8\,t - 560 \cos 10\,t + 120 \cos 12\,t - 16 \cos 14\,t + 1 \cos 16\,t);$

$P\,(17;\,0) = 1 : 2^{31}\,(156\,434\,850 \cos t + 158\,520\,648 \cos 3\,t + 162\,954\,792 \cos 5\,t + 170\,361\,828 \cos 7\,t + 182\,010\,500 \cos 9\,t + 200\,583\,000 \cos 11\,t + 232\,676\,280 \cos 13\,t + 300\,540\,195 \cos 15\,t + 583\,401\,555 \cos 17\,t);$

$P\,(17;\,1) = 9 \cdot 17 : 2^{31}\,(1\,022\,450 \sin t + 3\,108\,248 \sin 3\,t + 5\,325\,320 \sin 5\,t + 7\,794\,332 \sin 7\,t + 10\,706\,500 \sin 9\,t + 14\,421\,000 \sin 11\,t + 19\,769\,880 \sin 13\,t + 29\,464\,725 \sin 15\,t + 64\,822\,395 \sin 17\,t);$

$P\,(17;\,2) = 9 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{27}\,(1\,022\,450 \cos t + 981\,552 \cos 3\,t + 896\,896 \cos 5\,t + 761\,852 \cos 7\,t + 563\,500 \cos 9\,t + 276\,000 \cos 11\,t - 160\,080 \cos 13\,t - 930\,465 \cos 15\,t - 3\,411\,705 \cos 17\,t);$

$P\,(17;\,3) = 5!! \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{27}\,(613\,470 \sin t + 1\,799\,512 \sin 3\,t + 2\,858\,856 \sin 5\,t + 3\,692\,052 \sin 7\,t + 4\,169\,900 \sin 9\,t + 4\,098\,600 \sin 11\,t + 3\,121\,560 \sin 13\,t + 310\,155 \sin 15\,t - 10\,235\,115 \sin 17\,t);$

$P\,(17;\,4) = 9!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{26}\,(1\,431\,430 \cos t + 1\,145\,144 \cos 3\,t + 600\,600 \cos 5\,t - 142\,324 \cos 7\,t - 982\,100 \cos 9\,t - 1\,752\,600 \cos 11\,t - 2\,161\,080 \cos 13\,t - 1\,550\,775 \cos 15\,t + 3\,411\,705 \cos 17\,t);$

$P\,(17;\,5) = 13!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{26}\,(50\,050 \sin t + 136\,136 \sin 3\,t + 181\,944 \sin 5\,t + 166\,796 \sin 7\,t + 80\,500 \sin 9\,t - 69\,000 \sin 11\,t - 240\,120 \sin 13\,t - 310\,155 \sin 15\,t + 310\,155 \sin 17\,t);$

$P\,(17;\,6) = 13!! \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{24}\,(30\,030 \cos t + 16\,016 \cos 3\,t - 6\,720 \cos 5\,t - 28\,476 \cos 7\,t - 37\,100 \cos 9\,t - 21\,600 \cos 11\,t + 20\,880 \cos 13\,t + 67\,425 \cos 15\,t - 40\,455 \cos 17\,t);$

$P\,(17;\,7) = 13!! \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{24}\,(70\,070 \sin t + 168\,168 \sin 3\,t + 159\,544 \sin 5\,t + 33\,908 \sin 7\,t - 142\,100 \sin 9\,t - 227\,400 \sin 11\,t - 59\,160 \sin 13\,t + 364\,095 \sin 15\,t - 148\,335 \sin 17\,t);$

$P\,(17;\,8) = 19!! \cdot 5 \cdot 23 : 2^{23}\,(50\,050 \cos t + 8008 \cos 3\,t - 43\,736 \cos 5\,t - 59\,612 \cos 7\,t - 14\,140 \cos 9\,t + 62\,040 \cos 11\,t + 67\,512 \cos 13\,t - 99\,789 \cos 15\,t + 29\,667 \cos 17\,t);$

$P\,(17;\,9) = 19!! \cdot 5 \cdot 23 : 2^{23}\,(450\,450 \sin t + 888\,888 \sin 3\,t + 360\,360 \sin 5\,t - 665\,028 \sin 7\,t - 965\,020 \sin 9\,t + 227\,880 \sin 11\,t + 1\,459\,512 \sin 13\,t - 1\,173\,195 \sin 15\,t + 267\,003 \sin 17\,t);$

$P\,(17;\,10) = 19!! \cdot 5 \cdot 23 \cdot 27 : 2^{20}\,(50\,050 \cos t - 16\,016 \cos 3\,t - 64\,064 \cos 5\,t - 21\,476 \cos 7\,t + 65\,100 \cos 9\,t + 44\,000 \cos 11\,t - 102\,544 \cos 13\,t + 54\,839 \cos 15\,t - 9\,889 \cos 17\,t);$

$P\,(17;\,11) = 23!! \cdot 5 \cdot 9 : 2^{20}\,(78\,650 \sin t + 113\,256 \sin 3\,t - 40\,040 \sin 5\,t - 137\,956 \sin 7\,t + 29\,540 \sin 9\,t + 170\,840 \sin 11\,t - 172\,376 \sin 13\,t + 67\,425 \sin 15\,t - 9889 \sin 17\,t);$

$P\,(17;\,12) = 23!! \cdot 5 \cdot 9 \cdot 29 : 2^{19}\,(21\,450 \cos t - 19\,448 \cos 3\,t - 24\,024 \cos 5\,t + 22\,932 \cos 7\,t + 22\,260 \cos 9\,t - 43\,560 \cos 11\,t + 27\,768 \cos 13\,t - 8401 \cos 15\,t + 1023 \cos 17\,t);$

$P\,(17;\,13) = 29!! : 2^{19}\,(18\,590 \sin t + 14\,872 \sin 3\,t - 24\,024 \sin 5\,t - 6188 \sin 7\,t + 32\,620 \sin 9\,t - 29\,720 \sin 11\,t + 13\,656 \sin 13\,t - 3317 \sin 15\,t + 341 \sin 17\,t);$

$P\,(17;\,14) = 31!! : 2^{17}\,(1430 \cos t - 2288 \cos 3\,t + \mathrm{Null} \cos 5\,t + 2548 \cos 7\,t - 2940 \cos 9\,t + 1760 \cos 11\,t - 624 \cos 13\,t + 125 \cos 15\,t - 11 \cos 17\,t);$

$P\,(17;\,15) = 31!! : 2^{17}\,(21\,450 \sin t + 1144 \sin 3\,t\,t - 24\,024 \sin 5\,t + 29\,484 \sin 7\,t - 20\,300 \sin 9\,t + 9000 \sin 11\,t - 2568 \sin 13\,t + 433 \sin 15\,t - 33 \sin 17\,t);$

$P\,(17;\,16) = 33!! : 2^{16}\,(1430 \cos t - 3432 \cos 3\,t + 3640 \cos 5\,t - 2548 \cos 7\,t + 1260 \cos 9\,t - 440 \cos 11\,t + 104 \cos 13\,t - 15 \cos 15\,t + 1 \cos 17\,t);$

$P\,(17;\,17) = 33!! : 2^{16}\,(24\,310 \sin t - 19\,448 \sin 3\,t + 12\,376 \sin 5\,t - 6188 \sin 7\,t + 2380 \sin 9\,t - 680 \sin 11\,t + 136 \sin 13\,t - 17 \sin 15\,t + 1 \sin 17\,t);$

$P\,(18;\,0) = 1 : 2^{33}\,(295\,488\,050 + 594\,452\,430 \cos 2\,t + 605\,260\,656 \cos 4\,t + 624\,660\,036 \cos 6\,t + 655\,237\,800 \cos 8\,t + 702\,040\,500 \cos 10\,t + 775\,587\,600 \cos 12\,t + 901\,620\,585 \cos 14\,t + 1\,166\,803\,110 \cos 16\,t + 2\,268\,783\,825 \cos 18\,t);$

$P\,(18;\,1) = 9 \cdot 19 : 2^{32}\,(3\,476\,330 \sin 2\,t + 7\,079\,072 \sin 4\,t + 10\,958\,948 \sin 6\,t + 15\,327\,200 \sin 8\,t + 20\,527\,500 \sin 10\,t + 27\,213\,600 \sin 12\,t + 36\,908\,445 \sin 14\,t + 54\,587\,280 \sin 16\,t + 119\,409\,675 \sin 18\,t);$

$P\,(18;\,2) = 5!! \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{32}\,(3\,476\,330 + 6\,829\,966 \cos 2\,t + 6\,454\,448 \cos 4\,t + 5\,801\,796 \cos 6\,t + 4\,823\,560 \cos 8\,t + 3\,429\,300 \cos 10\,t + 1\,440\,720 \cos 12\,t - 1\,550\,775 \cos 14\,t - 6\,823\,410 \cos 16\,t - 23\,881\,935 \cos 18\,t);$

$P\,(18;\,3) = 7!! \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{28}\,(368\,082 \sin 2\,t + 713\,856 \sin 4\,t + 1\,013\,012 \sin 6\,t + 1\,236\,480 \sin 8\,t + 1\,345\,500 \sin 10\,t + 1\,280\,640 \sin 12\,t + 930\,465 \sin 14\,t + \text{Null} \sin 16\,t - 3\,411\,705 \sin 18\,t);$

$P\,(18;\,4) = 11!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{28}\,(316\,030 + 576\,290 \cos 2\,t + 413\,712 \cos 4\,t + 159\,068 \cos 6\,t - 161\,000 \cos 8\,t - 503\,700 \cos 10\,t - 800\,400 \cos 12\,t - 930\,465 \cos 14\,t - 620\,310 \cos 16\,t + 1\,550\,775 \cos 18\,t);$

$P\,(18;\,5) = 11!! \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{27}\,(130\,130 \sin 2\,t + 227\,136 \sin 4\,t + 261\,716 \sin 6\,t + 212\,800 \sin 8\,t + 73\,500 \sin 10\,t - 139\,200 \sin 12\,t - 364\,095 \sin 14\,t - 431\,520 \sin 16\,t + 471\,975 \sin 18\,t),$

$P\,(18;\,6) = 13!! \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{27}\,(170\,170 + 270\,270 \cos 2\,t + 82\,992 \cos 4\,t - 155\,932 \cos 6\,t - 348\,600 \cos 8\,t - 384\,300 \cos 10\,t - 174\,000 \cos 12\,t + 283\,185 \cos 14\,t + 728\,190 \cos 16\,t - 471\,975 \cos 18\,t);$

$P\,(18;\,7) = 19!! \cdot 5 \cdot 23 : 2^{25}\,(14\,014 \sin 2\,t + 20\,384 \sin 4\,t + 14\,700 \sin 6\,t - 1568 \sin 8\,t - 19\,740 \sin 10\,t - 25\,056 \sin 12\,t - 2697 \sin 14\,t + 43\,152 \sin 16\,t - 18\,879 \sin 18\,t);$

$P\,(18;\,8) = 19!! \cdot 5 \cdot 23 : 2^{25}\,(170\,170 + 214\,214 \cos 2\,t - 80\,080 \cos 4\,t - 332\,332 \cos 6\,t - 323\,512 \cos 8\,t + 10\,500 \cos 10\,t + 427\,344 \cos 12\,t + 358\,701 \cos 14\,t - 652\,674 \cos 16\,t + 207\,669 \cos 18\,t);$

$P\,(18;\,9) = 19!! \cdot 3 \cdot 5 \cdot 23 : 2^{24}\,(810\,810 \sin 2\,t + 864\,864 \sin 4\,t + 36\,036 \sin 6\,t - 937\,440 \sin 8\,t - 905\,940 \sin 10\,t + 515\,040 \sin 12\,t + 1\,545\,381 \sin 14\,t - 1\,424\,016 \sin 16\,t + 346\,115 \sin 18\,t);$

$P\,(18;\,10) = 23!! \cdot 5 \cdot 9 : 2^{24}\,(121\,550 + 101\,530 \cos 2\,t - 167\,024 \cos 4\,t - 244\,244 \cos 6\,t + 7000 \cos 8\,t + 295\,100 \cos 10\,t + 109\,040 \cos 12\,t - 430\,621 \cos 14\,t + 257\,114 \cos 16\,t - 49\,445 \cos 18\,t);$

$P\,(18;\,11) = 23!! \cdot 5 \cdot 9 \cdot 29 : 2^{21}\,(15\,730 \sin 2\,t + 9152 \sin 4\,t - 12\,012 \sin 6\,t - 15\,680 \sin 8\,t + 9820 \sin 10\,t + 20\,160 \sin 12\,t - 25\,327 \sin 14\,t + 10\,912 \sin 16\,t - 1705 \sin 18\,t);$

$P\,(18;\,12) = 25!! \cdot 9 \cdot 29 : 2^{21}\,(24\,310 + 7722 \cos 2\,t - 48\,048 \cos 4\,t - 20\,020 \cos 6\,t + 51\,576 \cos 8\,t + 19\,740 \cos 10\,t - 74\,960 \cos 12\,t + 55\,707 \cos 14\,t - 18\,414 \cos 16\,t + 2387 \cos 18\,t);$

$P\,(18;\,13) = 31!! : 2^{20}\,(3718 \sin 2\,t + \text{Null} \sin 4\,t - 4004 \sin 6\,t + 896 \sin 8\,t + 4340 \sin 10\,t - 5120 \sin 12\,t + 2667 \sin 14\,t - 704 \sin 16\,t + 77 \sin 18\,t);$

$P\,(18;\,14) = 31!! : 2^{20}\,(24\,310 - 7150 \cos 2\,t - 48\,048 \cos 4\,t + 28\,028 \cos 6\,t + 37\,240 \cos 8\,t - 67\,060 \cos 10\,t + 47\,920 \cos 12\,t - 18\,969 \cos 14\,t + 4114 \cos 16\,t - 385 \cos 18\,t);$

P (18; 15) = 31!! · 11 : 2^{18} (12 870 sin 2 t — 8736 sin 4 t — 6916 sin 6 t + 16 800 sin 8 t — 14 700 sin 10 t + 7520 sin 12 t — 2373 sin 14 t + 432 sin 16 t — 35 sin 18 t);

P (18; 16) = 33!! : 2^{18} (24 310 — 24 310 cos 2 t — 24 752 cos 4 t + 55 692 cos 6 t — 52 360 cos 8 t + 30 940 cos 10 t — 12 240 cos 12 t + 3179 cos 14 t — 494 cos 16 t + 35 cos 18 t);

P (18; 17) = 35!! : 2^{17} (4862 sin 2 t — 7072 sin 4 t + 6188 sin 6 t — 3808 sin 8 t + 1700 sin 10 t — 544 sin 12 t + 119 sin 14 t — 16 sin 16 t + 1 sin 18 t);

P (18; 18) = 35!! : 2^{17} (24 310 — 43 758 cos 2 t + 31 824 cos 4 t — 18 564 cos 6 t + 8568 cos 8 t — 3060 cos 10 t + 816 cos 12 t — 153 cos 14 t + 18 cos 16 t — 1 cos 18 t);

P (19; 0) = 1 : 2^{34} (1 122 854 590 cos t + 1 134 863 730 cos 3 t + 1 160 082 924 cos 5 t + 1 201 269 300 cos 7 t + 1 263 672 900 cos 9 t + 1 357 278 300 cos 11 t + 1 502 700 975 cos 13 t + 1 750 204 665 cos 15 t + 2 268 783 825 cos 17 t + 4 418 157 975 cos 19 t);

P (19; 1) = 5 · 19 : 2^{34} (11 819 522 sin t + 35 837 802 sin 3 t + 61 056 996 sin 5 t + 88 514 580 sin 7 t + 119 716 380 sin 9 t + 157 158 540 sin 11 t + 205 632 765 sin 13 t + 276 348 105 sin 15 t + 405 992 895 sin 17 t + 883 631 595 sin 19 t);

P (19; 2) = 7!! · 3 · 19 : 2^{33} (35 458 566 cos t + 34 320 858 cos 3 t + 31 982 236 cos 5 t + 28 300 580 cos 7 t + 23 014 260 cos 9 t + 15 647 820 cos 11 t + 5 272 635 cos 13 t — 10 235 115 cos 15 t — 37 528 755 cos 17 t — 126 233 085 cos 19 t);

P (19; 3) = 7!! · 3 · 11 · 17 · 19 : 2^{33} (568 854 sin t + 1 676 142 sin 3 t + 2 689 804 sin 5 t + 3 538 780 sin 7 t + 4 135 860 sin 9 t + 4 362 180 sin 11 t + 4 032 015 sin 13 t + 2 791 395 sin 15 t — 310 155 sin 17 t — 11 475 735 sin 19 t);

P (19; 4) = 7!! · 3 · 11 · 17 · 19 · 23 : 2^{29} (189 618 cos t + 159 198 cos 3 t + 100 724 cos 5 t + 19 180 cos 7 t — 77 220 cos 9 t — 175 740 cos 11 t — 256 215 cos 13 t — 283 185 cos 15 t — 175 305 cos 17 t + 498 945 cos 19 t);

P (19; 5) = 11!! · 17 · 19 · 23 : 2^{29} (316 030 sin t + 877 110 sin 3 t + 1 232 348 sin 5 t + 1 269 100 sin 7 t + 915 300 sin 9 t + 165 300 sin 11 t — 876 525 sin 13 t — 1 901 385 sin 15 t — 2 090 175 sin 17 t + 2 494 725 sin 19 t);

P (19; 6) = 11!! · 17 · 19 · 23 · 25 : 2^{28} (442 442 cos t + 276 822 cos 3 t — 4732 cos 5 t — 309 316 cos 7 t — 514 836 cos 9 t — 494 508 cos 11 t — 159 123 cos 13 t + 461 187 cos 15 t + 1 000 587 cos 17 t — 698 523 cos 19 t);

P (19; 7) = 13!! · 17 · 19 · 23 · 25 : 2^{28} (238 238 sin t + 600 054 sin 3 t + 659 932 sin 5 t + 350 252 sin 7 t — 219 996 sin 9 t — 747 852 sin 11 t — 790 221 sin 13 t + 40 455 sin 15 t + 1 491 441 sin 17 t — 698 523 sin 19 t);

P (19; 8) = 19!! · 3 · 5 · 23 : 2^{26} (306 306 cos t + 99 918 cos 3 t — 186 732 cos 5 t — 359 604 cos 7 t — 261 828 cos 9 t + 99 876 cos 11 t + 455 793 cos 13 t + 299 367 cos 15 t — 685 937 cos 17 t + 232 841 cos 19 t);

P (19; 9) = 23!! · 5 : 2^{26} (393 822 sin t + 857 142 sin 3 t + 581 724 sin 5 t — 268 884 sin 7 t — 956 124 sin 9 t — 647 628 sin 11 t + 676 947 sin 13 t + 1 335 015 sin 15 t — 1 414 127 sin 17 t + 365 893 sin 19 t);

P (19; 10) = 23!! · 5 · 29 : 2^{25} (218 790 cos t — 12 870 cos 3 t — 241 956 cos 5 t — 207 900 cos 7 t + 98 100 cos 9 t + 321 420 cos 11 t + 42 315 cos 13 t — 463 419 cos 15 t + 308 605 cos 17 t — 63 085 cos 19 t);

P (19; 11) = 25!! · 9 · 29 : 2^{25} (53 482 sin t + 93 522 sin 3 t + 10 868 sin 5 t — 94 556 sin 7 t — 66 996 sin 9 t + 85 180 sin 11 t + 99 665 sin 13 t — 160 611 sin 15 t + 76 043 sin 17 t — 12 617 sin 19 t);

P (19; 12) = 25!! · 9 · 29 · 31 : 2^{22} (4862 cos t — 2 574 cos 3 t — 6 292 cos 5 t + 308 cos 7 t + 7236 cos 9 t + 220 cos 11 t — 9425 cos 13 t + 8217 cos 15 t — 2959 cos 17 t + 407 cos 19 t);

P (19; 13) = 25!! · 9 · 29 · 31 : 2^{22} (63 206 sin t + 78 078 sin 3 t — 52 052 sin 5 t — 90 244 sin 7 t + 63 252 sin 9 t + 90 020 sin 11 t — 145 385 sin 13 t + 85 899 sin 15 t — 24 563 sin 17 t + 2849 sin 19 t);

P (19; 14) = 31!! · 11 : 2^{21} (14 586 cos t — 15 834 cos 3 t — 13 468 cos 5 t + 20 188 cos 7 t + 7308 cos 9 t — 29 260 cos 11 t + 25 285 cos 13 t — 11 157 cos 15 t + 2611 cos 17 t — 259 cos 19 t);

P (19; 15) = 31!! · 11 : 2^{21} (218 790 sin t + 139 230 sin 3 t — 290 836 sin 5 t + 11 900 sin 7 t + 321 300 sin 9 t — 373 660 sin 11 t + 221 255 sin 13 t — 77 013 sin 15 t + 15 085 sin 17 t — 1295 sin 19 t);

P (19; 16) = 31!! · 11 · 35 : 2^{19} (14 586 cos t — 25 194 cos 3 t + 4420 cos 5 t + 23 324 cos 7 t — 32 436 cos 9 t + 23 188 cos 11 t —10 387 cos 13 t + 2955 cos 15 t — 493 cos 17 t + 37 cos 19 t);

P (19; 17) = 35!! : 2^{19} (82 654 sin t — 3978 sin 3 t — 82 212 sin 5 t + 112 812 sin 7 t — 87 516 sin 9 t + 45 492 sin 11 t — 16 269 sin 13 t + 3879 sin 15 t — 559 sin 17 t + 37 sin 19 t);

P (19; 18) = 37!! : 2^{18} (4862 cos t — 11 934 cos 3 t + 13 260 cos 5 t — 9996 cos 7 t + 5508 cos 9 t — 2244 cos 11 t + 663 cos 13 t — 135 cos 15 t + 17 cos17 t — 1 cos 19 t);

P (19; 19) = 37!! : 2^{18} (92 378 sin t — 75 582 sin 3 t + 50 388 sin 5 t — 27 132 sin 7 t + 11 628 sin 9 t — 3876 sin 11 t + 969 sin 13 t — 171 sin 15 t + 19 sin 17 t — 1 sin 19 t);

P (20; 0) = 1 : 2^{37} (4 266 847 442 + 8 574 525 960 cos 2 t + 8 700 621 930 cos 4 t + 8 923 714 800 cos 6 t + 9 266 934 600 cos 8 t + 9 772 403 760 cos 10 t + 10 518 906 825 cos 12 t + 11 668 031 100 cos 14 t + 13 612 702 950 cos 16 t + 17 672 631 900 cos 18 t + 34 461 632 205 cos 20 t);

P (20; 1) = 7!! : 2^{35} (40 831 076 sin 2 t + 82 863 066 sin 4 t + 127 481 640 sin 6 t + 176 513 040 sin 8 t + 232 676 280 sin 10 t + 300 540 195 sin 12 t + 388 934 370 sin 14 t + 518 579 160 sin 16 t + 757 398 510 sin 18 t + 1 641 030 105 sin 20 t);

P (20; 2) = 7!! · 11 · 19 : 2^{35} (20 415 538 + 40 244 984 cos 2 t + 38 457 978 cos 4 t + 35 377 680 cos 6 t + 30 826 440 cos 8 t + 24 492 240 cos 10 t + 15 817 905 cos 12 t + 3 721 860 cos 14 t — 14 267 130 cos 16 t — 45 902 940 cos 18 t — 149 184 555 cos 20 t);

P (20; 3) = 7!! · 3 · 11 · 19 · 23 : 2^{34} (1 758 276 sin 2 t + 3 430 362 sin 4 t + 4 923 880 sin 6 t + 6 132 240 sin 8 t + 6 921 720 sin 10 t + 7 106 595 sin 12 t + 6 391 890 sin 14 t + 4 207 320 sin 16 t — 997 890 sin 18 t — 19 458 855 sin 20 t);

P (20; 4) = 11!! · 17 · 19 · 23 : 2^{34} (1 200 914 + 2 229 448 cos 2 t + 1 724 138 cos 4 t + 922 480 cos 6 t — 110 520 cos 8 t — 1 273 680 cos 10 t — 2 413 815 cos 12 t — 3 290 340 cos 14 t — 3 479 130 cos 16 t — 1 995 780 cos 18 t + 6 486 285 cos 20 t);

P (20; 5) = 11!! · 5 · 17 · 19 · 23 : 2^{30} (287 300 sin 2 t + 515 450 sin 4 t + 630 760 sin 6 t + 591 120 sin 8 t + 373 752 sin 10 t — 13 485 sin 12 t — 512 430 sin 14 t — 970 920 sin 16 t — 997 890 sin 18 t + 1 297 257 sin 20 t);

P (20; 6) = 13!! · 17 · 19 · 23 · 25 : 2^{30} (92 378 + 153 816 cos 2 t + 69 186 cos 4 t — 45 488 cos 6 t — 154 008 cos 8 t — 212 976 cos 10 t — 180 699 cos 12 t — 32 364 cos 14 t + 210 366 cos 16 t + 399 156 cos 18 t — 299 367 cos 20 t);

P (20; 7) = 19!! · 3 · 5 · 23 : 2^{29} (129 948 sin 2 t + 202 566 sin 4 t + 179 928 sin 6 t + 60 144 sin 8 t — 112 056 sin 10 t — 245 427 sin 12 t — 221 154 sin 14 t + 50 344 sin 16 t + 465 682 sin 18 t — 232 841 sin 20 t);

P (20; 8) = 23!! · 5 : 2^{29} (277 134 + 387 192 cos 2 t — 23 946 cos 4 t — 444 912 cos 6 t — 599 496 cos 8 t — 318 768 cos 10 t + 299 367 cos 12 t + 787 524 cos 14 t + 400 954 cos 16 t — 1 197 468 cos 18 t + 432 419 cos 20 t);

P (20; 9) = 23!! · 5 · 29 : 2^{27} (71 604 sin 2 t + 89 154 sin 4 t + 34 632 sin 6 t — 55 728 sin 8 t — 105 192 sin 10 t — 48 081 sin 12 t + 90 954 sin 14 t + 133 176 sin 16 t — 162 874 sin 18 t + 44 733 sin 20 t);

P (20; 10) = 23!! · 3 · 5 · 29 : 2^{27} (277 134 + 291 720 cos 2 t — 261 690 cos 4 t — 583 440 cos 6 t — 302 280 cos 8 t + 382 512 cos 10 t + 684 015 cos 12 t — 61 380 cos 14 t — 1 019 590 cos 16 t + 757 020 cos 18 t — 164 021 cos 20 t);

P (20; 11) = 25!! · 3 · 29 · 31 : 2^{26} (29 172 sin 2 t + 24 882 sin 4 t — 10 296 sin 6 t — 35 376 sin 8 t — 12 648 sin 10 t + 35 895 sin 12 t + 26 730 sin 14 t — 57 992 sin 16 t + 30 118 sin 18 t — 5291 sin 20 t);

P (20; 12) = 25!! · 9 · 29 · 31 : 2^{26} (92 378 + 58 344 cos 2 t — 153 582 cos 4 t — 153 296 cos 6 t + 87 912 cos 8 t + 211 824 cos 10 t — 59 155 cos 12 t — 269 940 cos 14 t + 278 718 cos 16 t — 109 076 cos 18 t + 15 873 cos 20 t);

P (20; 13) = 31!! · 11 : 2^{23} (11 492 sin 2 t + 4394 sin 4 t — 10 712 sin 6 t — 7536 sin 8 t + 11 448 sin 10 t + 7675 sin 12 t — 18 910 sin 14 t + 12 696 sin 16 t — 3 922 sin 18 t + 481 sin 20 t);

P (20; 14) = 31!! · 11 : 2^{23} (92 378 + 12 376 cos 2 t — 188 734 cos 4 t — 24 752 cos 6 t + 208 488 cos 8 t — 17 136 cos 10 t — 24 335 cos 12 t + 259 540 cos 14 t — 127 554 cos 16 t + 32 116 cos 18 t — 3367 cos 20 t);

P (20; 15) = 31!! · 11 · 7 : 2^{22} (198 900 sin 2 t — 33 150 sin 4 t — 203 320 sin 6 t + 110 160 sin 8 t + 170 136 sin 10 t — 286 705 sin 12 t + 197 610 sin 14 t — 75 720 sin 16 t + 15 910 sin 18 t — 1443 sin 20 t);

P (20; 16) = 35!! : 2^{22} (92 378 — 40 664 cos 2 t — 171 054 cos 4 t + 137 904 cos 6 t + 90 984 cos 8 t — 243 984 cos 10 t + 215 373 cos 12 t — 109 332 cos 14 t + 33 982 cos 16 t — 6068 cos cos 18 t + 481 cos 20 t);

P (20; 17) = 37!! : 2^{20} (15 028 sin 2 t — 11 934 sin 4 t — 5304 sin 6 t + 18 768 sin 8 t — 19 176 sin 10 t + 11 679 sin 12 t — 4662 sin 14 t + 1208 sin 16 t — 186 sin 18 t + 13 sin 20 t);

P (20; 18) = 37!! : 2^{20} (92 378 — 100 776 cos 2 t — 75 582 cos 4 t + 201 552 cos 6 t — 209 304 cos 8 t + 139 536 cos 10 t — 64 923 cos 12 t + 21 204 cos 14 t — 4674 cos 16 t + 628 cos 18 t — 39 cos 20 t);

P (20; 19) = 39!! : 2^{19} (16 796 sin 2 t — 25 194 sin 4 t + 23 256 sin 6 t — 15 504 sin 8 t + 7752 sin 10 t — 2907 sin 12 t + 798 sin 14 t — 152 sin 16 t + 18 sin 18 t — 1 sin 20 t);

P (20; 20) = 39!! : 2^{19} (92 378 — 167 960 cos 2 t + 125 970 cos 4 t — 77 520 cos 6 t + 38 760 cos 8 t — 15 504 cos 10 t + 4845 cos 12 t — 1140 cos 14 t + 190 cos 16 t — 20 cos 18 t + 1 cos 20 t);

Anlage 7a. Übersicht der Größen $s_{n,j} = q_n^j \cdot D_{n,j}$.

Aus drucktechnischen Gründen werden noch folgende Abkürzungen eingeführt:

$q_n^j = s_{0,0} \cdot p_n^j$ mit $s_{0,0} = \sqrt{1 : 2\pi}$ und $p_n^j = \sqrt{(2n+1)\ (n-j)! : (n+j)!}$

n	j	p_n^j	$D_{n,j}$	$s_{n,j}$
0	0	$\sqrt{1 \cdot 0! : 0!}$	1	$s_{0,0} = s_{0,0}$
1	0	$\sqrt{3 \cdot 1! : 1!}$	1	$s_{1,0} = s_{0,0} \cdot \sqrt{3}$
1	1	$\sqrt{3 \cdot 0! : 2!}$	1	$s_{1,1} = s_{1,0} \cdot \sqrt{2} : 2$
2	0	$\sqrt{5 \cdot 2! : 2!}$	$1 : 2^2$	$s_{2,0} = s_{0,0} \cdot \sqrt{5} : 4$
2	1	$\sqrt{5 \cdot 1! : 3!}$	$3 : 2$	$s_{2,1} = s_{2,0} \cdot \sqrt{6}$
2	2	$\sqrt{5 \cdot 0! : 4!}$	$3 : 2$	$s_{2,2} = s_{2,1} : 2$
3	0	$\sqrt{7 \cdot 3! : 3!}$	$1 : 2^3$	$s_{3,0} = s_{0,0} \cdot \sqrt{7} : 2^3$
3	1	$\sqrt{7 \cdot 2! : 4!}$	$3 : 2^3$	$s_{3,1} = s_{3,0} \cdot \sqrt{3} : 2$
3	2	$\sqrt{7 \cdot 1! : 5!}$	$5!! : 2^2$	$s_{3,2} = s_{3,1} \cdot \sqrt{10}$
3	3	$\sqrt{7 \cdot 0! : 6!}$	$5!! : 2^2$	$s_{3,3} = s_{3,0} \cdot \sqrt{5} : 2$
4	0	$\sqrt{9 \cdot 4! : 4!}$	$1 : 2^6$	$s_{4,0} = s_{0,0} \cdot 3 : 2^6$
4	1	$\sqrt{9 \cdot 3! : 5!}$	$5 : 2^4$	$s_{4,1} = s_{2,0} \cdot 3 : 2^3$
4	2	$\sqrt{9 \cdot 2! : 6!}$	$5!! : 2^4$	$s_{4,2} = s_{4,0} \cdot \sqrt{10}$
4	3	$\sqrt{9 \cdot 1! : 7!}$	$7!! : 2^3$	$s_{4,3} = s_{4,1} \cdot \sqrt{7}$
4	4	$\sqrt{9 \cdot 0! : 8!}$	$7!! : 2^3$	$s_{4,4} = s_{4,3} \cdot \sqrt{2} : 2^2$
5	0	$\sqrt{11 \cdot 5! : 5!}$	$1 : 2^7$	$s_{5,0} = s_{0,0} \cdot \sqrt{11} : 2^7$
5	1	$\sqrt{11 \cdot 4! : 6!}$	$5!! : 2^7$	$s_{5,1} = s_{5,0} \cdot \sqrt{30} : 2$
5	2	$\sqrt{11 \cdot 3! : 7!}$	$7!! : 2^5$	$s_{5,2} = s_{3,2} \cdot \sqrt{11} : 2^3$
5	3	$\sqrt{11 \cdot 2! : 8!}$	$7!! : 2^5$	$s_{5,3} = s_{5,0} \cdot \sqrt{35} : 2$
5	4	$\sqrt{11 \cdot 1! : 9!}$	$9!! : 2^4$	$s_{5,4} = s_{5,3} \cdot 3\sqrt{2}$
5	5	$\sqrt{11 \cdot 0! : 10!}$	$9!! : 2^4$	$s_{5,5} = s_{5,0} \cdot 3\sqrt{7} : 2$
6	0	$\sqrt{13 \cdot 6! : 6!}$	$1 : 2^9$	$s_{6,0} = s_{0,0} \cdot \sqrt{13} : 2^9$
6	1	$\sqrt{13 \cdot 5! : 7!}$	$3 \cdot 7 : 2^8$	$s_{6,1} = s_{3,1} \cdot \sqrt{26} : 2^5$
6	2	$\sqrt{13 \cdot 4! : 8!}$	$7!! : 2^8$	$s_{6,2} = s_{6,1} \cdot \sqrt{10} : 2^2$
6	3	$\sqrt{13 \cdot 3! : 9!}$	$3 \cdot 7!! : 2^6$	$s_{6,3} = s_{6,2} \cdot 2$
6	4	$\sqrt{13 \cdot 2! : 10!}$	$9!! : 2^6$	$s_{6,4} = s_{6,0} \cdot 3\sqrt{14} : 2$
6	5	$\sqrt{13 \cdot 1! : 11!}$	$11!! : 2^5$	$s_{6,5} = s_{6,4} \cdot \sqrt{22}$
6	6	$\sqrt{13 \cdot 0! : 12!}$	$11!! : 2^5$	$s_{6,6} = s_{6,5} \cdot \sqrt{3} : 6$
7	0	$\sqrt{15 \cdot 7! : 7!}$	$1 : 2^{10}$	$s_{7,0} = s_{2,2} \cdot \sqrt{2} : 2^8$
7	1	$\sqrt{15 \cdot 6! : 8!}$	$7 : 2^{10}$	$s_{7,1} = s_{3,2} : 2^8$
7	2	$\sqrt{15 \cdot 5! : 9!}$	$3^2 \cdot 7 : 2^9$	$s_{7,2} = s_{7,1} \cdot \sqrt{6}$
7	3	$\sqrt{15 \cdot 4! : 10!}$	$3 \cdot 7!! : 2^9$	$s_{7,3} = s_{7,1} \cdot \sqrt{3}$
7	4	$\sqrt{15 \cdot 3! : 11!}$	$3 \cdot 7!! \cdot 11 : 2^7$	$s_{7,4} = s_{5,2} \cdot \sqrt{3} : 2^4$

n	j	p_n^j	$D_{n,j}$	$s_{n,j}$
7	5	$\sqrt{15 \cdot 2! : 12!}$	$11!! : 2^7$	$s_{7,5} = s_{7,4} : 2$
7	6	$\sqrt{15 \cdot 1! : 13!}$	$13!! : 2^6$	$s_{7,6} = s_{7,5} \cdot \sqrt{26}$
7	7	$\sqrt{15 \cdot 0! : 14!}$	$13!! : 2^6$	$s_{7,7} = s_{7,6} \cdot \sqrt{14} : 14$
8	0	$\sqrt{17 \cdot 8! : 8!}$	$1 : 2^{14}$	$s_{8,0} = s_{0,0} \cdot \sqrt{17} : 2^{14}$
8	1	$\sqrt{17 \cdot 7! : 9!}$	$3^2 : 2^{11}$	$s_{8,1} = s_{8,0} \cdot 6 \cdot \sqrt{2}$
8	2	$\sqrt{17 \cdot 6! : 10!}$	$3 \cdot 7!! : 2^{11}$	$s_{8,2} = s_{8,0} \cdot 6 \cdot \sqrt{35}$
8	3	$\sqrt{17 \cdot 5! : 11!}$	$3 \cdot 7!! \cdot 11 : 2^{10}$	$s_{8,3} = s_{8,2} \cdot \sqrt{66} : 3$
8	4	$\sqrt{17 \cdot 4! : 12!}$	$11!! : 2^{10}$	$s_{8,4} = s_{8,3} \cdot \sqrt{15} : 10$
8	5	$\sqrt{17 \cdot 3! : 13!}$	$13!! : 2^8$	$s_{8,5} = s_{8,4} \cdot 2 \cdot \sqrt{13}$
8	6	$\sqrt{17 \cdot 2! : 14!}$	$13!! : 2^8$	$s_{8,6} = s_{8,5} \cdot \sqrt{42} : 42$
8	7	$\sqrt{17 \cdot 1! : 15!}$	$15!! : 2^7$	$s_{8,7} = s_{8,6} \cdot \sqrt{30}$
8	8	$\sqrt{17 \cdot 0! : 16!}$	$15!! : 2^7$	$s_{8,8} = s_{8,7} : 2^2$
9	0	$\sqrt{19 \cdot 9! : 9!}$	$1 : 2^{15}$	$s_{9,0} = s_{0,0} \cdot \sqrt{19} : 2^{15}$
9	1	$\sqrt{19 \cdot 8! : 10!}$	$3 \cdot 5!! : 2^{15}$	$s_{9,1} = s_{9,0} \cdot 3 \cdot \sqrt{10} : 2$
9	2	$\sqrt{19 \cdot 7! : 11!}$	$3 \cdot 5!! \cdot 11 : 2^{12}$	$s_{9,2} = s_{9,1} \cdot 2 \cdot \sqrt{22}$
9	3	$\sqrt{19 \cdot 6! : 12!}$	$3 \cdot 7!! \cdot 11 : 2^{12}$	$s_{9,3} = s_{9,2} \cdot \sqrt{21} : 6$
9	4	$\sqrt{19 \cdot 5! : 13!}$	$13!! : 2^{11}$	$s_{9,4} = s_{9,3} \cdot \sqrt{78}$
9	5	$\sqrt{19 \cdot 4! : 14!}$	$13!! : 2^{11}$	$s_{9,5} = s_{9,4} \cdot \sqrt{70} : 70$
9	6	$\sqrt{19 \cdot 3! : 15!}$	$5 \cdot 13!! : 2^9$	$s_{9,6} = s_{9,5} \cdot 2 \cdot \sqrt{15} : 3$
9	7	$\sqrt{19 \cdot 2! : 16!}$	$15!! : 2^9$	$s_{9,7} = s_{9,5} \cdot \sqrt{5} : 2$
9	8	$\sqrt{19 \cdot 1! : 17!}$	$17!! : 2^8$	$s_{9,8} = s_{9,7} \cdot \sqrt{34}$
9	9	$\sqrt{19 \cdot 0! : 18!}$	$17!! : 2^8$	$s_{9,9} = s_{9,8} \cdot \sqrt{2} : 6$
10	0	$\sqrt{21 \cdot 10! : 10!}$	$1 : 2^{17}$	$s_{10,0} = s_{3,1} : 2^{13}$
10	1	$\sqrt{21 \cdot 9! : 11!}$	$5 \cdot 11 : 2^{16}$	$s_{10,1} = s_{5,2} : 2^{10}$
10	2	$\sqrt{21 \cdot 8! : 12!}$	$3 \cdot 5!! \cdot 11 : 2^{16}$	$s_{10,2} = s_{10,1} \cdot \sqrt{3} : 2$
10	3	$\sqrt{21 \cdot 7! : 13!}$	$3 \cdot 5!! \cdot 11 \cdot 13 : 2^{13}$	$s_{10,3} = s_{10,2} \cdot 2 \cdot \sqrt{26}$
10	4	$\sqrt{21 \cdot 6! : 14!}$	$3 \cdot 7!! \cdot 11 \cdot 13 : 2^{13}$	$s_{10,4} = s_{10,3} \cdot \sqrt{2} : 2$
10	5	$\sqrt{21 \cdot 5! : 15!}$	$13!! : 2^{12}$	$s_{10,5} = s_{6,5} : 2^7$
10	6	$\sqrt{21 \cdot 4! : 16!}$	$5 \cdot 13!! : 2^{12}$	$s_{10,6} = s_{10,5} \cdot \sqrt{5} : 2^2$
10	7	$\sqrt{21 \cdot 3! : 17!}$	$5 \cdot 13!! \cdot 17 : 2^{10}$	$s_{10,7} = s_{10,6} \cdot 2 \cdot \sqrt{17}$
10	8	$\sqrt{21 \cdot 2! : 18!}$	$17!! : 2^{10}$	$s_{10,8} = s_{8,3} \cdot \sqrt{13} : 2^5$
10	9	$\sqrt{21 \cdot 1! : 19!}$	$19!! : 2^9$	$s_{10,9} = s_{10,8} \cdot \sqrt{38}$
10	10	$\sqrt{21 \cdot 0! : 20!}$	$19!! : 2^9$	$s_{10,10} = s_{10,9} \cdot \sqrt{5} : 10$
11	0	$\sqrt{23 \cdot 11! : 11!}$	$1 : 2^{18}$	$s_{11,0} = s_{0,0} \cdot \sqrt{23} : 2^{18}$
11	1	$\sqrt{23 \cdot 10! : 12!}$	$3 \cdot 11 : 2^{18}$	$s_{11,1} = s_{11,0} \cdot \sqrt{33} : 2$
11	2	$\sqrt{23 \cdot 9! : 13!}$	$5!! \cdot 11 \cdot 13 : 2^{17}$	$s_{11,2} = s_{11,1} \cdot \sqrt{130}$
11	3	$\sqrt{23 \cdot 8! : 14!}$	$3 \cdot 7!! \cdot 11 \cdot 13 : 2^{17}$	$s_{11,3} = s_{11,2} \cdot \sqrt{14} : 2$
11	4	$\sqrt{23 \cdot 7! : 15!}$	$13!! : 2^{14}$	$s_{11,4} = s_{11,3} \cdot 2 \cdot \sqrt{30} : 5$

n	j	p_n^j	$D_{n,j}$	$s_{n,j}$
11	5	$\sqrt{23 \cdot 6! : 16!}$	$13!! : 2^{14}$	$s_{11,5} = s_{11,4} \cdot \sqrt{7} : 28$
11	6	$\sqrt{23 \cdot 5! : 17!}$	$13!! \cdot 17 : 2^{13}$	$s_{11,6} = s_{11,5} \cdot \sqrt{102} : 3$
11	7	$\sqrt{23 \cdot 4! : 18!}$	$17!! : 2^{13}$	$s_{11,7} = s_{11,2} \cdot \sqrt{17} : 2$
11	8	$\sqrt{23 \cdot 3! : 19!}$	$19!! : 2^{11}$	$s_{11,8} = s_{11,7} \cdot 2 . \sqrt{19}$
11	9	$\sqrt{23 \cdot 2! : 20!}$	$19!! : 2^{11}$	$s_{11,9} = s_{11,8} \cdot \sqrt{15} : 30$
11	10	$\sqrt{23 \cdot 1! : 21!}$	$21!! : 2^{10}$	$s_{11,10} = s_{11,9} \cdot \sqrt{42}$
11	11	$\sqrt{23 \cdot 0! : 22!}$	$21!! : 2^{10}$	$s_{11,11} = s_{11,10} \cdot \sqrt{22} : 22$
12	0	$\sqrt{25 \cdot 12! : 12!}$	$1 : 2^{21}$	$s_{12,0} = s_{0,0} \cdot 10 : 2^{22}$
12	1	$\sqrt{25 \cdot 11! : 13!}$	$3 \cdot 13 : 2^{19}$	$s_{12,1} = s_{12,0} \cdot 2 \cdot \sqrt{39}$
12	2	$\sqrt{25 \cdot 10! : 14!}$	$3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 : 2^{19}$	$s_{12,2} = s_{12,1} \cdot \sqrt{154} : 2$
12	3	$\sqrt{25 \cdot 9! : 15!}$	$7!! \cdot 11 \cdot 13 : 2^{18}$	$s_{12,3} = s_{12,2} \cdot \sqrt{6} : 3$
12	4	$\sqrt{25 \cdot 8! : 16!}$	$13!! : 2^{18}$	$s_{12,4} = s_{12,3} \cdot 3 : 2^2$
12	5	$\sqrt{25 \cdot 7! : 17!}$	$13!! \cdot 17 : 2^{15}$	$s_{12,5} = s_{12,4} \cdot 2 \cdot \sqrt{34}$
12	6	$\sqrt{25 \cdot 6! : 18!}$	$13!! \cdot 17 : 2^{15}$	$s_{12,6} = s_{12,5} \cdot \sqrt{14} : 42$
12	7	$\sqrt{25 \cdot 5! : 19!}$	$3 \cdot 13!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{14}$	$s_{12,7} = s_{12,6} \cdot \sqrt{114}$
12	8	$\sqrt{25 \cdot 4! : 20!}$	$19!! : 2^{14}$	$s_{12,8} = s_{12,7} : 2$
12	9	$\sqrt{25 \cdot 3! : 21!}$	$7 \cdot 19!! : 2^{12}$	$s_{12,9} = s_{12,8} \cdot 5 \cdot \sqrt{21} : 3$
12	10	$\sqrt{25 \cdot 2! : 22!}$	$21!! : 2^{12}$	$s_{12,10} = s_{12,9} \cdot \sqrt{66} : 22$
12	11	$\sqrt{25 \cdot 1! : 23!}$	$23!! \cdot 2^{11}$	$s_{12,11} = s_{12,10} \cdot \sqrt{46}$
12	12	$\sqrt{25 \cdot 0! : 24!}$	$23!! \cdot 2^{11}$	$s_{12,12} = s_{12,11} \cdot \sqrt{6} : 12$
13	0	$\sqrt{27 \cdot 13! : 13!}$	$1 : 2^{22}$	$s_{13,0} = s_{1,0} \cdot 3 : 2^{22}$
13	1	$\sqrt{27 \cdot 12! : 14!}$	$7 \cdot 13 : 2^{22}$	$s_{13,1} = s_{6,1} \cdot 3 : 2^{14}$
13	2	$\sqrt{27 \cdot 11! : 15!}$	$7!! \cdot 13 : 2^{20}$	$s_{13,2} = s_{13,1} \cdot 2 \cdot \sqrt{5}$
13	3	$\sqrt{27 \cdot 10! : 16!}$	$7!! \cdot 11 \cdot 13 : 2^{20}$	$s_{13,3} = s_{13,2} \cdot \sqrt{11} : 2^2$
13	4	$\sqrt{27 \cdot 9! : 17!}$	$7!! \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 : 2^{19}$	$s_{13,4} = s_{8,5} \cdot \sqrt{6} : 2^{11}$
13	5	$\sqrt{27 \cdot 8! : 18!}$	$13!! \cdot 17 : 2^{19}$	$s_{13,5} = s_{13,4} \cdot \sqrt{2} : 2$
13	6	$\sqrt{27 \cdot 7! : 19!}$	$13!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{16}$	$s_{13,6} = s_{13,10} \cdot 3 : 2^4$
13	7	$\sqrt{27 \cdot 6! : 20!}$	$5 \cdot 13!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{16}$	$s_{13,7} = s_{9,9} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} : 2^7$
13	8	$\sqrt{27 \cdot 5! : 21!}$	$7 \cdot 19!! : 2^{15}$	$s_{13,8} = s_{13,7} \cdot \sqrt{14}$
13	9	$\sqrt{27 \cdot 4! : 22!}$	$7 \cdot 19!! : 2^{15}$	$s_{13,9} = s_{12,10} \cdot 3 : 20$
13	10	$\sqrt{27 \cdot 3! : 23!}$	$7 \cdot 19!! \cdot 23 : 2^{13}$	$s_{13,10} = s_{13,9} \cdot 2 \cdot \sqrt{23}$
13	11	$\sqrt{27 \cdot 2! : 24!}$	$23!! : 2^{13}$	$s_{13,11} = s_{13,10} \cdot \sqrt{2} : 2^2$
13	12	$\sqrt{27 \cdot 1! : 25!}$	$25!! : 2^{12}$	$s_{13,11} = s_{13,10} \cdot 5 : 2$
13	13	$\sqrt{27 \cdot 0! : 26!}$	$25!! : 2^{12}$	$s_{13,13} = s_{13,12} \cdot \sqrt{26} : 26$
14	0	$\sqrt{29 \cdot 14! : 14!}$	$1 : 2^{24}$	$s_{14,0} = s_{0,0} \cdot \sqrt{29} : 2^{24}$
14	1	$\sqrt{29 \cdot 13! : 15!}$	$7!! : 2^{23}$	$s_{14,1} = s_{14,0} \cdot \sqrt{210}$
14	2	$\sqrt{29 \cdot 12! : 16!}$	$7!! \cdot 13 : 2^{23}$	$s_{14,2} = s_{14,1} \cdot \sqrt{13} : 2^2$
14	3	$\sqrt{29 \cdot 11! : 17!}$	$7!! \cdot 13 \cdot 17 : 2^{21}$	$s_{14,3} = s_{14,2} \cdot 2 \cdot \sqrt{51} : 3$

n	j	p_n^j	$D_{n,j}$	$s_{n,j}$
14	4	$\sqrt{29 \cdot 10! : 18!}$	$13!! \cdot 17 : 2^{21}$	$s_{14,4} = s_{14,3} \cdot 3 \cdot \sqrt{22} : 2$
14	5	$\sqrt{29 \cdot 9! : 19!}$	$13!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{20}$	$s_{14,5} = s_{14,4} \cdot \sqrt{190} : 5$
14	6	$\sqrt{29 \cdot 8! : 20!}$	$5 \cdot 13!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{20}$	$s_{14,6} = s_{14,5} \cdot \sqrt{5} : 6$
14	7	$\sqrt{29 \cdot 7! : 21!}$	$19!! : 2^{17}$	$s_{14,7} = s_{14,6} \cdot 2 \cdot \sqrt{42} : 7$
14	8	$\sqrt{29 \cdot 6! : 22!}$	$7 \cdot 19!! : 2^{17}$	$s_{14,8} = s_{44,3} \cdot \sqrt{57}$
14	9	$\sqrt{29 \cdot 5! : 23!}$	$7 \cdot 19!! \cdot 23 : 2^{16}$	$s_{14,9} = s_{14,8} \cdot \sqrt{138} : 3$
14	10	$\sqrt{29 \cdot 4! : 24!}$	$23!! : 2^{16}$	$s_{14,10} = s_{14,9} \cdot \sqrt{30} : 20$
14	11	$\sqrt{29 \cdot 3! : 25!}$	$25!! : 2^{14}$	$s_{14,11} = s_{14,10} \cdot 10$
14	12	$\sqrt{29 \cdot 2! : 26!}$	$25!! : 2^{14}$	$s_{14,12} = s_{14,11} \cdot \sqrt{78} : 78$
14	13	$\sqrt{29 \cdot 1! : 27!}$	$27!! : 2^{13}$	$s_{14,13} = s_{14,12} \cdot 3\sqrt{6}$
14	14	$\sqrt{29 \cdot 0! : 28!}$	$27!! : 2^{12}$	$s_{14,14} = s_{14,3} \cdot \sqrt{7} : 14$
15	0	$\sqrt{31 \cdot 15! : 15!}$	$1 : 2^{25}$	$s_{15,0} = s_{0,0} \cdot \sqrt{31} : 2^{25}$
15	1	$\sqrt{31 \cdot 14! : 16!}$	$5!! : 2^{25}$	$s_{15,1} = s_{15,0} \cdot \sqrt{15} : 2^2$
15	2	$\sqrt{31 \cdot 13! : 17!}$	$7!! \cdot 17 : 2^{24}$	$s_{15,2} = s_{15,1} \cdot \sqrt{238}$
15	3	$\sqrt{31 \cdot 12! : 18!}$	$3 \cdot 7!! \cdot 13 \cdot 17 : 2^{24}$	$s_{15,3} = s_{15,2} \cdot \sqrt{26} : 2$
15	4	$\sqrt{31 \cdot 11! : 19!}$	$9!! \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{22}$	$s_{15,4} = s_{15,3} \cdot 2 \cdot \sqrt{57}$
15	5	$\sqrt{31 \cdot 10! : 20!}$	$13!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{22}$	$s_{15,5} = s_{15,4} \cdot \sqrt{55} : 10$
15	6	$\sqrt{31 \cdot 9! : 21!}$	$5 \cdot 13!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{21}$	$s_{15,6} = s_{15,5} \cdot \sqrt{210} : 21$
15	7	$\sqrt{31 \cdot 8! : 22!}$	$19!! : 2^{21}$	$s_{15,7} = s_{15,6} \cdot \sqrt{22} : 22$
15	8	$\sqrt{31 \cdot 7! : 23!}$	$19!! \cdot 23 : 2^{18}$	$s_{15,8} = s_{15,7} \cdot 2 \cdot \sqrt{46}$
15	9	$\sqrt{31 \cdot 6! : 24!}$	$7 \cdot 19!! \cdot 23 : 2^{18}$	$s_{15,9} = s_{15,8} \cdot \sqrt{42} : 12$
15	10	$\sqrt{31 \cdot 5! : 25!}$	$5 \cdot 23!! : 2^{17}$	$s_{15,10} = s_{15,9} \cdot \sqrt{6}$
15	11	$\sqrt{31 \cdot 4! : 26!}$	$25!! : 2^{17}$	$s_{15,11} = s_{15,10} \cdot \sqrt{130} : 26$
15	12	$\sqrt{31 \cdot 3! : 27!}$	$9 \cdot 25!! : 2^{15}$	$s_{15,12} = s_{15,11} \cdot 2 \cdot \sqrt{3}$
15	13	$\sqrt{31 \cdot 2! : 28!}$	$27!! : 2^{15}$	$s_{15,13} = s_{15,11} \cdot 3 \cdot \sqrt{7} : 7$
15	14	$\sqrt{31 \cdot 1! : 29!}$	$29!! : 2^{14}$	$s_{15,14} = s_{15,13} \cdot \sqrt{58}$
15	15	$\sqrt{31 \cdot 0! : 30!}$	$29!! : 2^{14}$	$s_{15,15} = s_{15,14} \cdot \sqrt{30} : 30$
16	0	$\sqrt{33 \cdot 16! : 16!}$	$1 : 2^{30}$	$s_{16,0} = s_{5,0} \cdot \sqrt{3} : 2^{23}$
16	1	$\sqrt{33 \cdot 15! : 17!}$	$17 : 2^{26}$	$s_{16,1} = s_{16,0} \cdot 4 \cdot \sqrt{17}$
16	2	$\sqrt{33 \cdot 14! : 18!}$	$3 \cdot 5!! \cdot 17 : 2^{26}$	$s_{16,2} = s_{16,1} \cdot \sqrt{30} : 2$
16	3	$\sqrt{33 \cdot 13! : 19!}$	$3 \cdot 7!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{25}$	$s_{16,3} = s_{16,2} \cdot \sqrt{266}$
16	4	$\sqrt{33 \cdot 12! : 20!}$	$3 \cdot 7!! \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{25}$	$s_{16,4} = s_{16,3} \cdot \sqrt{65} : 10$
16	5	$\sqrt{33 \cdot 11! : 21!}$	$9!! \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{23}$	$s_{16,5} = s_{16,4} \cdot 2\sqrt{7} : 7$
16	6	$\sqrt{33 \cdot 10! : 22!}$	$13!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{23}$	$s_{16,6} = s_{16,5} \cdot \sqrt{2} : 2$
16	7	$\sqrt{33 \cdot 9! : 23!}$	$5 \cdot 13!! \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{22}$	$s_{16,7} = s_{16,6} \cdot \sqrt{230}$
16	8	$\sqrt{33 \cdot 8! : 24!}$	$19!! \cdot 23 : 2^{22}$	$s_{16,8} = s_{16,7} \cdot \sqrt{6} : 12$
16	9	$\sqrt{33 \cdot 7! : 25!}$	$5 \cdot 19!! \cdot 23 : 2^{19}$	$s_{16,9} = s_{16,8} \cdot 2\sqrt{2}$
16	10	$\sqrt{33 \cdot 6! : 26!}$	$5 \cdot 7 \cdot 19!! \cdot 23 : 2^{19}$	$s_{16,10} = s_{16,9} \cdot \sqrt{182} : 26$
16	11	$\sqrt{33 \cdot 5! : 27!}$	$5 \cdot 9 \cdot 23!! : 2^{18}$	$s_{16,11} = s_{16,10} \cdot 3\sqrt{2}$

n	j	p_n^j	$D_{n,j}$	$s_{n,j}$
16	12	$\sqrt{33 \cdot 4! : 28!}$	$9 \cdot 25!! : 2^{18}$	$s_{16,12} = s_{16,11} \cdot \sqrt{35} : 14$
16	13	$\sqrt{33 \cdot 3! : 29!}$	$9 \cdot 25!! \cdot 29 : 2^{16}$	$s_{16,13} = s_{16,12} \cdot 2\sqrt{29}$
16	14	$\sqrt{33 \cdot 2! : 30!}$	$29!! : 2^{16}$	$s_{16,14} = s_{16,13} \cdot \sqrt{10} : 10$
16	15	$\sqrt{33 \cdot 1! : 31!}$	$31!! : 2^{15}$	$s_{61,15} = s_{16,14} \cdot \sqrt{62}$
16	16	$\sqrt{33 \cdot 0! : 32!}$	$31!! : 2^{15}$	$s_{16,16} = s_{16,15} \cdot \sqrt{2} : 2^3$
17	0	$\sqrt{35 \cdot 17! : 17!}$	$1 : 2^{31}$	$s_{17,0} = s_{3,3} : 2^{27}$
17	1	$\sqrt{35 \cdot 16! : 18!}$	$9 \cdot 17 : 2^{31}$	$s_{17,1} = s_{17,0} \cdot 3 \cdot \sqrt{34} : 2$
17	2	$\sqrt{35 \cdot 15! : 19!}$	$9 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{27}$	$s_{17,2} = s_{17,1} \cdot 4 \cdot \sqrt{19}$
17	3	$\sqrt{35 \cdot 14! : 20!}$	$3 \cdot 5!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{27}$	$s_{17,3} = s_{17,2} \cdot \sqrt{3} : 6$
17	4	$\sqrt{35 \cdot 13! : 21!}$	$9!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{26}$	$s_{17,4} = s_{17,2} \cdot \sqrt{2} : 2$
17	5	$\sqrt{35 \cdot 12! : 22!}$	$13!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{26}$	$s_{17,5} = s_{17,4} \cdot \sqrt{286} : 2$
17	6	$\sqrt{35 \cdot 11! : 23!}$	$13!! \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{24}$	$s_{17,6} = s_{17,5} \cdot 2\sqrt{69} : 3$
17	7	$\sqrt{35 \cdot 10! : 24!}$	$3 \cdot 13!! \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{24}$	$s_{17,7} = s_{17,6} \cdot \sqrt{66} : 44$
17	8	$\sqrt{35 \cdot 9! : 25!}$	$5 \cdot 19!! \cdot 23 : 2^{23}$	$s_{17,8} = s_{17,7} \cdot \sqrt{10}$
17	9	$\sqrt{35 \cdot 8! : 26!}$	$5 \cdot 19!! \cdot 23 : 2^{23}$	$s_{17,9} = s_{17,8} \cdot \sqrt{26} : 78$
17	10	$\sqrt{35 \cdot 7! : 27!}$	$5 \cdot 19!! \cdot 23 \cdot 27 : 2^{20}$	$s_{17,10} = s_{17,9} \cdot 6 \cdot \sqrt{6}$
17	11	$\sqrt{35 \cdot 6! : 28!}$	$5 \cdot 9 \cdot 23!! : 2^{20}$	$s_{17,11} = s_{17,10} : 2$
17	12	$\sqrt{35 \cdot 5! : 29!}$	$5 \cdot 9 \cdot 23!! \cdot 29 : 2^{19}$	$s_{17,12} = s_{17,11} \cdot \sqrt{174} : 3$
17	13	$\sqrt{35 \cdot 4! : 30!}$	$29!! : 2^{19}$	$s_{17,13} = s_{17,12} \cdot \sqrt{6} : 2$
17	14	$\sqrt{35 \cdot 3! : 31!}$	$31!! : 2^{17}$	$s_{17,14} = s_{17,13} \cdot 2\sqrt{31}$
17	15	$\sqrt{35 \cdot 2! : 32!}$	$31!! : 2^{17}$	$s_{17,15} = s_{17,14} \cdot \sqrt{6} : 24$
17	16	$\sqrt{35 \cdot 1! : 33!}$	$33!! : 2^{16}$	$s_{17,16} = s_{17,14} \cdot \sqrt{11} : 2^2$
17	17	$\sqrt{35 \cdot 0! : 34!}$	$33!! : 2^{16}$	$s_{17,17} = s_{17,16} \cdot \sqrt{34} : 34$
18	0	$\sqrt{37 \cdot 18! : 18!}$	$1 : 2^{33}$	$s_{18,0} = s_{0,0} \cdot \sqrt{37} : 2^{33}$
18	1	$\sqrt{37 \cdot 17! : 19!}$	$9 \cdot 19 : 2^{32}$	$s_{18,1} = s_{18,0} \cdot 3 \cdot \sqrt{38}$
18	2	$\sqrt{37 \cdot 16! : 20!}$	$3 \cdot 5!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{32}$	$s_{18,2} = s_{18,1} \cdot \sqrt{85} : 2$
18	3	$\sqrt{37 \cdot 15! : 21!}$	$3 \cdot 7!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{28}$	$s_{18,3} = s_{18,2} \cdot 4 \cdot \sqrt{21} : 3$
18	4	$\sqrt{37 \cdot 14! : 22!}$	$11!! \cdot 17 \cdot 19 : 2^{28}$	$s_{18,4} = s_{18,3} : \sqrt{330} : 10$
18	5	$\sqrt{37 \cdot 13! : 23!}$	$11!! \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{27}$	$s_{18,5} = s_{18,4} \cdot \sqrt{322} : 7$
18	6	$\sqrt{37 \cdot 12! : 24!}$	$13!! \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{27}$	$s_{18,6} = s_{18,5} \cdot \sqrt{78} : 12$
18	7	$\sqrt{37 \cdot 11! : 25!}$	$5 \cdot 19!! \cdot 23 : 2^{25}$	$s_{18,7} = s_{18,6} \cdot 10 \cdot \sqrt{3}$
18	8	$\sqrt{37 \cdot 10! : 26!}$	$5 \cdot 19!! \cdot 23 : 2^{25}$	$s_{18,8} = s_{18,5} \cdot 5 \cdot \sqrt{11} : 22$
18	9	$\sqrt{37 \cdot 9! : 27!}$	$5!! \cdot 19!! \cdot 23 : 2^{24}$	$s_{18,9} = s_{18,8} \cdot \sqrt{30} : 15$
18	10	$\sqrt{37 \cdot 8! : 28!}$	$3 \cdot 5!! \cdot 23!! : 2^{24}$	$s_{18,10} = s_{18,9} \cdot 3 \cdot \sqrt{7} : 2$
18	11	$\sqrt{37 \cdot 7! : 29!}$	$3 \cdot 5!! \cdot 23!! \cdot 29 : 2^{21}$	$s_{18,11} = s_{18,10} \cdot 2\sqrt{58}$
18	12	$\sqrt{37 \cdot 6! : 30!}$	$9 \cdot 25!! \cdot 29 : 2^{21}$	$s_{18,12} = s_{18,18} \cdot \sqrt{58}$
18	13	$\sqrt{37 \cdot 5! : 31!}$	$31!! : 2^{20}$	$s_{18,13} = s_{18,12} \cdot \sqrt{186}$
18	14	$\sqrt{37 \cdot 4! : 32!}$	$31!! : 2^{20}$	$s_{18,14} = s_{18,13} \cdot \sqrt{10} : 40$
18	15	$\sqrt{37 \cdot 3! : 33!}$	$11 \cdot 31!! : 2^{18}$	$s_{18,15} = s_{18,14} \cdot 2 \cdot \sqrt{33} : 3$

n	j	p_n^j	$D_{n,j}$	$s_{n,j}$
18	16	$\sqrt{37 \cdot 2! : 34!}$	$33!! : 2^{18}$	$s_{18,16} = s_{18,15} \cdot \sqrt{102} : 34$
18	17	$\sqrt{37 \cdot 1! : 35!}$	$35!! : 2^{17}$	$s_{18,17} = s_{18,16} \cdot \sqrt{70}$
18	18	$\sqrt{37 \cdot 0! : 34!}$	$35!! : 2^{17}$	$s_{18,18} = s_{18,17} : 6$
19	0	$\sqrt{39 \cdot 19! : 19!}$	$1 : 2^{34}$	$s_{19,0} = s_{0,0} \cdot \sqrt{39} : 2^{34}$
19	1	$\sqrt{39 \cdot 18! : 20!}$	$5 \cdot 19 : 2^{34}$	$s_{19,1} = s_{19,0} \cdot \sqrt{95} : 2$
19	2	$\sqrt{39 \cdot 17! : 21!}$	$3 \cdot 7!! \cdot 19 : 2^{33}$	$s_{19,2} = s_{19,1} \cdot \sqrt{42}$
19	3	$\sqrt{39 \cdot 16! : 22!}$	$3 \cdot 7!! \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 : 2^{33}$	$s_{19,3} = s_{19,2} \cdot \sqrt{374} : 2$
19	4	$\sqrt{39 \cdot 15! : 23!}$	$3 \cdot 7!! \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{29}$	$s_{19,4} = s_{19,3} \cdot 4 \cdot \sqrt{23}$
19	5	$\sqrt{39 \cdot 14! : 24!}$	$11!! \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{29}$	$s_{19,5} = s_{19,4} \cdot \sqrt{10} : 20$
19	6	$\sqrt{39 \cdot 13! : 25!}$	$11!! \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 25 : 2^{28}$	$s_{19,6} = s_{19,4} \cdot \sqrt{35} : 14$
19	7	$\sqrt{39 \cdot 12! : 26!}$	$13!! \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 25 : 2^{28}$	$s_{19,7} = s_{19,6} \cdot \sqrt{2} : 2$
19	8	$\sqrt{39 \cdot 11! : 27!}$	$5!! \cdot 19!! \cdot 23 : 2^{26}$	$s_{19,8} = s_{19,7} \cdot 2$
19	9	$\sqrt{39 \cdot 10! : 28!}$	$5 \cdot 23!! : 2^{26}$	$s_{19,9} = s_{19,8} \cdot \sqrt{77} : 22$
19	10	$\sqrt{39 \cdot 9! : 29!}$	$5 \cdot 23!! \cdot 29 : 2^{25}$	$s_{19,10} = s_{19,9} \cdot \sqrt{290} : 5$
19	11	$\sqrt{39 \cdot 8! : 30!}$	$9 \cdot 25!! \cdot 29 : 2^{25}$	$s_{19,11} = s_{19,10} \cdot \sqrt{30} : 2$
19	12	$\sqrt{39 \cdot 7! : 31!}$	$9 \cdot 25!! \cdot 29 \cdot 31 : 2^{22}$	$s_{19,12} = s_{19,11} \cdot 2 \cdot \sqrt{62}$
19	13	$\sqrt{39 \cdot 6! : 32!}$	$9 \cdot 25!! \cdot 29 \cdot 31 : 2^{22}$	$s_{19,13} = s_{19,12} \cdot \sqrt{14} : 56$
19	14	$\sqrt{39 \cdot 5! : 33!}$	$11 \cdot 31!! : 2^{21}$	$s_{19,14} = s_{19,13} \cdot \sqrt{22}$
19	15	$\sqrt{39 \cdot 4! : 34!}$	$11 \cdot 31!! : 2^{21}$	$s_{19,15} = s_{19,14} \cdot \sqrt{170} : 170$
19	16	$\sqrt{39 \cdot 3! : 35!}$	$11 \cdot 31!! \cdot 35 : 2^{19}$	$s_{19,16} = s_{19,15} \cdot 2 \cdot \sqrt{35}$
19	17	$\sqrt{39 \cdot 2! : 36!}$	$35!! : 2^{19}$	$s_{19,17} = s_{19,16} \cdot \sqrt{3} : 6$
19	18	$\sqrt{39 \cdot 1! : 37!}$	$37!! : 2^{18}$	$s_{19,18} = s_{19,17} \cdot \sqrt{74}$
19	19	$\sqrt{39 \cdot 0! : 38!}$	$37!! : 2^{18}$	$s_{19,19} = s_{19,18} \cdot \sqrt{38} : 38$
20	0	$\sqrt{41 \cdot 20! : 20!}$	$1 : 2^{37}$	$s_{20,0} = s_{0,0} \cdot \sqrt{41} : 2^{37}$
20	1	$\sqrt{41 \cdot 19! : 21!}$	$7!! : 2^{35}$	$s_{20,1} = s_{20,0} \cdot 2 \cdot \sqrt{105}$
20	2	$\sqrt{41 \cdot 18! : 22!}$	$7!! \cdot 11 \cdot 19 : 2^{35}$	$s_{20,2} = s_{20,1} \cdot \sqrt{418} : 2$
20	3	$\sqrt{41 \cdot 17! : 23!}$	$3 \cdot 7!! \cdot 11 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{34}$	$s_{20,3} = s_{20,2} \cdot \sqrt{46}$
20	4	$\sqrt{41 \cdot 16! : 24!}$	$11!! \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{34}$	$s_{20,4} = s_{20,3} \cdot \sqrt{102} : 4$
20	5	$\sqrt{41 \cdot 15! : 25!}$	$5 \cdot 11!! \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 : 2^{30}$	$s_{20,5} = s_{20,4} \cdot 4$
20	6	$\sqrt{41 \cdot 14! : 26!}$	$13!! \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 25 : 2^{30}$	$s_{20,6} = s_{20,5} \cdot \sqrt{390} : 6$
20	7	$\sqrt{41 \cdot 13! : 27!}$	$5!! \cdot 19!! \cdot 23 : 2^{29}$	$s_{20,7} = s_{20,6} \cdot \sqrt{42} : 7$
20	8	$\sqrt{41 \cdot 12! : 28!}$	$5 \cdot 23!! : 2^{29}$	$s_{20,8} = s_{20,7} \cdot \sqrt{91} : 26$
20	9	$\sqrt{41 \cdot 11! : 29!}$	$5 \cdot 23!! \cdot 29 : 2^{27}$	$s_{20,9} = s_{20,8} \cdot 2 \sqrt{87} : 3$
20	10	$\sqrt{41 \cdot 10! : 30!}$	$5!! \cdot 23!! \cdot 29 : 2^{27}$	$s_{20,10} = s_{20,9} \cdot \sqrt{330} : 110$
20	11	$\sqrt{41 \cdot 9! : 31!}$	$3 \cdot 25!! \cdot 29 \cdot 31 : 2^{26}$	$s_{20,11} = s_{20,10} \cdot \sqrt{310}$
20	12	$\sqrt{41 \cdot 8! : 32!}$	$9 \cdot 25!! \cdot 29 \cdot 31 : 2^{26}$	$s_{20,12} = s_{20,11} \cdot \sqrt{2} : 2^3$
20	13	$\sqrt{41 \cdot 7! : 33!}$	$11 \cdot 31!! : 2^{23}$	$s_{20,13} = s_{20,12} \cdot 2 \sqrt{66}$
20	14	$\sqrt{41 \cdot 6! : 34!}$	$11 \cdot 31!! : 2^{23}$	$s_{20,14} = s_{20,13} \cdot \sqrt{238} : 238$
20	15	$\sqrt{41 \cdot 5! : 35!}$	$7 \cdot 11 \cdot 31!! : 2^{22}$	$s_{20,15} = s_{20,14} \cdot \sqrt{210} : 15$

n	j	p_n^j	$D_{n,j}$	$s_{n,j}$
20	16	$\sqrt{41 \cdot 4! : 36!}$	$35!! : 2^{22}$	$s_{20,16} = s_{20,15} \cdot \sqrt{5} : 2$
20	17	$\sqrt{41 \cdot 3! : 37!}$	$37!! : 2^{20}$	$s_{20,17} = s_{20,16} \cdot 2\sqrt{37}$
20	18	$\sqrt{41 \cdot 2! : 38!}$	$37!! : 2^{20}$	$s_{20,18} = s_{20,17} \cdot \sqrt{114} : 114$
20	19	$\sqrt{41 \cdot 1! : 39!}$	$39!! : 2^{19}$	$s_{20,19} = s_{20,18} \cdot \sqrt{78}$
20	20	$\sqrt{41 \cdot 0! : 40!}$	$39!! : 2^{19}$	$s_{20,20} = s_{20,19} \cdot \sqrt{10} : 20$

Anlage 7 b. Übersicht der zur Berechnung der $s_{n,j}$ notwendigen Transzendenten und Radikale.

π = 3. 1415926 5358979 3238462 6433832 7950288

$4 : \pi$ = 1. 2732395 4473516 2686151 0701069 8011490 *)

$1 : 2\pi$ = 0. 1591549 4309189 5335768 8837633 7251436

$\sqrt{1 : 2\pi} = s_{0,0}$ = 0. 3989422 8040143 2677939 9460599 3438186

$s_{0,0} : 2^2$	= 0. 0997355 7010035 8169484 9865150
$s_{0,0} : 2^3$	= 0. 0498677 8505017 9084742 4932575
$s_{0,0} : 2^6$	= 0. 0062334 7313127 2385592 8116572
$s_{0,0} : 2^7$	= 0. 0031167 3656563 6192796 4058286
$s_{0,0} : 2^9$	= 0. 0007791 8414140 9048199 1014571
$s_{0,0} : 2^{14}$	= 0. 0000243 4950441 9032756 2219205
$s_{0,0} : 2^{15}$	= 0. 0000121 7475220 9516378 1109603
$s_{0,0} : 2^{18}$	= 0. 0000015 2184402 6189547 2638700
$s_{0,0} : 2^{22}$	= 0. 0000000 9511525 1636846 7039919
$s_{0,0} : 2^{24}$	= 0. 0000000 2377881 2909211 6759980
$s_{0,0} : 2^{25}$	= 0. 0000000 1188940 6454605 8379990
$s_{0,0} : 2^{33}$	= 0. 0000000 0004644 2993963 3040547
$s_{0,0} : 2^{34}$	= 0. 0000000 0002322 1496981 6520274
$s_{0,0} : 2^{37}$	= 0. 0000000 0000290 2687122 7065034

Radikale:

$\sqrt{2}$	= 1. 4142135 6237309 5048801 6887242
$\sqrt{2} : 2$	= 0. 7071067 8118654 7524400 8443621
$\sqrt{2} : 4$	= 0. 3535533 9059327 3762200 4221811
$\sqrt{2} : 8$	= 0. 1767766 9529663 6881100 2110905
$\sqrt{2} : 2^8$	= 0. 0055242 7172801 9902534 3815966
$\sqrt{2} : 6$	= 0. 2357022 6039551 5841466 9481207
$2 \cdot \sqrt{2}$	= 2. 8284271 2474619 0097603 3774484
$3 \cdot \sqrt{2}$	= 4. 2426406 8711928 5146405 0661726
$6 \cdot \sqrt{2}$	= 8. 4852813 7423857 0292810 1323452
$\sqrt{3}$	= 1. 7320508 0756887 7293527 4463415
$\sqrt{3} : 2$	= 0. 8660254 0378443 8646763 7231708
$\sqrt{3} : 6$	= 0. 2886751 3459481 2882254 5743903
$\sqrt{3} : 16$	= 0. 1082531 7547305 4830845 4653963
$3 \cdot \sqrt{3} : 2^7$	= 0. 0405949 4080239 5561567 0495236
$\sqrt{3} : 2^{23}$	= 0. 0000002 0647654 6236142 7895459
$10 \cdot \sqrt{3}$	=17. 3205080 7568877 2935274 4634150
$\sqrt{5}$	= 2. 2360679 7749978 9696409 1736687
$\sqrt{5} : 2$	= 1. 1180339 8874989 4848204 5868344
$\sqrt{5} : 4$	= 0. 5590169 9437494 7424102 2934172
$\sqrt{5} : 6$	= 0. 3726779 9624996 4949401 5289448
$\sqrt{5} : 10$	= 0. 2236067 9774997 8969640 9173669
$2 \cdot \sqrt{5}$	= 4. 4721359 5499957 9392818 3473374
$\sqrt{6}$	= 2. 4494897 4278317 8098197 2840749
$\sqrt{6} : 2$	= 1. 2247448 7139158 9049098 6420375
$\sqrt{6} : 3$	= 0. 8164965 8092772 6032732 4280250

*) Vgl. hierzu: Siebenstellige Trigonometrische Tafeln für Berechnungen mit der Rechenmaschine von H. Brandenburg, Leipzig, 1923; (herausgegeben v. Verbande Deutscher Rechenmaschinenfabrikanten) S. 335.

Es muß dort die Gruppe 0717069 in 0701069 wie oben verbessert werden.

$\sqrt{6}:12$	= 0. 2041241 4523193 1508183 1070062
$\sqrt{6}:24$	= 0. 1020620 7261596 5754091 5535031
$\sqrt{6}:2^{11}$	= 0. 0011960 3991346 8348680 7603926
$3\cdot\sqrt{6}$	= 7. 3484692 2834953 4294591 8522247
$6\cdot\sqrt{6}$	=14. 6969384 5669906 8589183 7044494
$\sqrt{7}$	= 2. 6457513 1106459 0590501 6157536
$3\cdot\sqrt{7}:2$	= 3. 9686269 6659688 5885752 4236304
$\sqrt{7}:7$	= 0. 3779644 7300922 7227214 5165362
$\sqrt{7}:14$	= 0. 1889822 3650461 3613607 2582681
$\sqrt{7}:28$	= 0. 0944911 1825230 6806803 6291341
$2\sqrt{7}:7$	= 0. 7559289 4601845 4454429 0330724
$3\sqrt{7}:7$	= 1. 1338934 1902768 1681643 5496086
$\sqrt{10}$	= 3. 1622776 6016837 9331998 8935443
$3\sqrt{10}:2$	= 4. 7434164 9025256 8997998 3403165
$\sqrt{10}:4$	= 0. 7905694 1504209 4832999 7233861
$\sqrt{10}:10$	= 0. 3162277 6601683 7933199 8893544
$\sqrt{10}:20$	= 0. 1581138 8300841 8966599 9446772
$\sqrt{10}:40$	= 0. 0790569 4150420 9483299 9723386
$\sqrt{11}$	= 3. 3166247 9035539 9849114 9327367
$\sqrt{11}:4$	= 0. 8291561 9758884 9962278 7331842
$\sqrt{11}:8$	= 0. 4145780 9879442 4981139 3665921
$5\sqrt{11}:22$	= 0. 7537783 6144440 9056617 0301674
$\sqrt{13}$	= 3. 6055512 7546398 9293119 2212675
$\sqrt{13}:4$	= 0. 9013878 1886599 7323279 8053169
$\sqrt{13}:32$	= 0. 1126734 7735824 9665409 9756646
$2\cdot\sqrt{13}$	= 7. 2111025 5092797 8586238 4425350
$\sqrt{14}$	= 3. 7416573 8677394 1385583 7487323
$\sqrt{14}:2$	= 1. 8708286 9338697 0692791 8743662
$3\sqrt{14}:2$	= 5. 6124860 8016091 2078375 6230985
$\sqrt{14}:14$	= 0. 2672612 4191242 4384684 5534809
$\sqrt{14}:42$	= 0. 0890870 8063747 4794894 8511603
$\sqrt{14}:56$	= 0. 0668153 1047810 6096171 1383702
$\sqrt{15}$	= 3. 8729833 4620741 6885179 2653998
$\sqrt{15}:4$	= 0. 9682458 3655185 4221294 8163500
$\sqrt{15}:10$	= 0. 3872983 3462074 1688517 9265400
$\sqrt{15}:30$	= 0. 1290994 4487358 0562839 3088467
$2\sqrt{15}:3$	= 2. 5819888 9747161 1256786 1769332
$\sqrt{17}$	= 4. 1231056 2561766 0549821 4098560
$\sqrt{17}:2$	= 2. 0615528 1280883 0274910 7049280
$2\cdot\sqrt{17}$	= 8. 2462112 5123532 1099642 8197120
$4\cdot\sqrt{17}$	=16. 4924225 0247064 2199285 6394240
$\sqrt{19}$	= 4. 3588989 4354067 3552236 9819839
$2\cdot\sqrt{19}$	= 8. 7177978 8708134 7104473 9639678
$4\cdot\sqrt{19}$	=17. 4355957 7416269 4208947 9279356
$\sqrt{21}$	= 4. 5825756 9495584 0006588 0471937
$\sqrt{21}:6$	= 0. 7637626 1582597 3334431 3411990
$2\cdot\sqrt{21}:3$	= 3. 0550504 6330389 3337725 3647960
$4\cdot\sqrt{21}:3$	= 6. 1101009 2660778 6675450 7295920
$\sqrt{22}$	= 4. 6904157 5982342 9554565 6301135
$3\sqrt{22}:2$	= 7. 0356236 3973514 4331848 4451703
$2\sqrt{22}$	= 9. 3808315 1964685 9109131 2602270
$\sqrt{22}:22$	= 0. 2132007 1635561 0434298 4377324
$\sqrt{23}$	= 4. 7958315 2331271 9541597 4380642
$2\cdot\sqrt{23}$	= 9. 5916630 4662543 9083194 8761284
$4\cdot\sqrt{23}$	=19. 1833260 9325087 8166389 7522568
$\sqrt{26}$	= 5. 0990195 1359278 4830028 2241090
$2\cdot\sqrt{26}$	=10. 1980390 2718556 9660056 4482180
$\sqrt{26}:2$	= 2. 5495097 5679639 2415014 1120545
$\sqrt{26}:26$	= 0. 1961161 3513818 4031924 1624657
$\sqrt{26}:78$	= 0. 0653720 4504606 1343974 7208219
$\sqrt{26}:32$	= 0. 1593443 5979977 4525938 3820034
$\sqrt{29}$	= 5. 3851648 0713450 4031250 7104915
$2\cdot\sqrt{29}$	=10. 7703296 1426900 8062501 4209830
$\sqrt{30}$	= 5. 4772255 7505166 1134569 6978280
$2\cdot\sqrt{30}:5$	= 2. 1908902 3002066 4453827 8791312
$\sqrt{30}:2$	= 2. 7386127 8752583 0567284 8489140
$\sqrt{30}:15$	= 0. 3651483 7167011 0742304 6465219
$\sqrt{30}:20$	= 0. 2738612 7875258 3056728 4848914
$\sqrt{30}:30$	= 0. 1825741 8583505 5371152 3232609
$\sqrt{31}$	= 5. 5677643 6283002 1922119 4712989
$2\cdot\sqrt{31}$	=11. 1355287 2566004 3844238 9425978
$\sqrt{33}$	= 5. 7445626 4653802 8659850 6114682
$\sqrt{33}:2$	= 2. 8722813 2326901 4329925 3057341
$2\sqrt{33}:3$	= 3. 8297084 3102535 2439900 4076455
$\sqrt{34}$	= 5. 8309518 9484530 0470874 1528775
$2\cdot\sqrt{34}$	=11. 6619037 8969060 0941748 3057550
$3\cdot\sqrt{34}:2$	= 8. 7464278 4226795 0706311 2293163
$\sqrt{34}:34$	= 0. 1714985 8514250 8837378 6515552
$\sqrt{35}$	= 5. 9160797 8309961 6042567 3282916
$2\sqrt{35}$	=11. 8321595 6619923 2085134 6565832

$6\sqrt{35}$	$=35.\ 4964786\ 9859769\ 6255403\ 9697496$
$\sqrt{35}:2$	$=2.\ 9580398\ 9154980\ 8021283\ 6641458$
$\sqrt{35}:14$	$=0.\ 4225771\ 2736425\ 8288754\ 8091637$
$\sqrt{37}$	$=6.\ 0827625\ 3029821\ 9688999\ 6842452$
$2\sqrt{37}$	$=12.\ 1655250\ 6059643\ 9377999\ 3684904$
$\sqrt{38}$	$=6.\ 1644140\ 0296897\ 6450250\ 1923815$
$3\sqrt{38}$	$=18.\ 4932420\ 0890692\ 9350750\ 5771445$
$\sqrt{38}:38$	$=0.\ 1622214\ 2113076\ 2538164\ 4787469$
$\sqrt{39}$	$=6.\ 2449979\ 9839839\ 8205846\ 8931209$
$2\sqrt{39}$	$=12.\ 4899959\ 9679679\ 6411693\ 7862418$
$\sqrt{39}:39$	$=0.\ 1601281\ 5380508\ 7133483\ 2536698$
$\sqrt{41}$	$=6.\ 4031242\ 3743284\ 8686488\ 2176746$
$\sqrt{42}$	$=6.\ 4807406\ 9840786\ 0230965\ 9674361$
$\sqrt{42}:7$	$=0.\ 9258200\ 9977255\ 1461566\ 5667766$
$2\sqrt{42}:7$	$=1.\ 8516401\ 9954510\ 2923133\ 1335532$
$\sqrt{42}:12$	$=0.\ 5400617\ 2486732\ 1685913\ 8306197$
$\sqrt{42}:42$	$=0.\ 1543033\ 4996209\ 1910261\ 0944628$
$\sqrt{46}$	$=6.\ 7823299\ 8312526\ 8139064\ 5563266$
$2\sqrt{46}$	$=13.\ 5646599\ 6625053\ 6278129\ 1126532$
$\sqrt{51}$	$=7.\ 1414284\ 2854284\ 9997999\ 3998114$
$2\sqrt{51}$	$=14.\ 2828568\ 5708569\ 9995998\ 7996228$
$2\sqrt{51}:3$	$=4.\ 7609522\ 8569523\ 3331999\ 5998743$
$\sqrt{55}$	$=7.\ 4161984\ 8709566\ 2948711\ 3974408$
$\sqrt{55}:10$	$=0.\ 7416198\ 4870956\ 6294871\ 1397441$
$\sqrt{57}$	$=7.\ 5498344\ 3527074\ 9697236\ 6848070$
$2\sqrt{57}$	$=15.\ 0996688\ 7054149\ 9394473\ 3696140$
$\sqrt{58}$	$=7.\ 6157731\ 0586390\ 8285661\ 4110272$
$2\sqrt{58}$	$=15.\ 2315462\ 1172781\ 6571322\ 8220544$
$\sqrt{62}$	$=7.\ 8740078\ 7401181\ 1019685\ 0344488$
$2\sqrt{62}$	$=15.\ 7480157\ 4802362\ 2039370\ 0688976$
$\sqrt{65}$	$=8.\ 0622577\ 4829854\ 9652366\ 6132303$
$\sqrt{65}:10$	$=0.\ 8062257\ 7482985\ 4965236\ 6613230$
$\sqrt{66}$	$=8.\ 1240384\ 0463596\ 0360459\ 8835683$
$2\sqrt{66}$	$=16.\ 2480768\ 0927192\ 0720919\ 7671366$
$\sqrt{66}:3$	$=2.\ 7080128\ 0154532\ 0120153\ 2945228$
$\sqrt{66}:22$	$=0.\ 3692744\ 7293799\ 8198202\ 7219804$
$\sqrt{66}:44$	$=0.\ 1846372\ 3646899\ 9099101\ 3609902$

$\sqrt{69}$	$=8.\ 3066238\ 6291807\ 4852584\ 2627449$
$2\sqrt{69}$	$=16.\ 6132477\ 2583614\ 9705168\ 5254898$
$2\sqrt{69}:3$	$=5.\ 5377492\ 4194538\ 3235056\ 1751633$
$\sqrt{70}$	$=8.\ 3666002\ 6534075\ 5479781\ 7202579$
$\sqrt{70}:70$	$=0.\ 1195228\ 6093343\ 9363996\ 8817180$
$\sqrt{74}$	$=8.\ 6023252\ 6704262\ 6771729\ 4735351$
$\sqrt{77}$	$=8.\ 7749643\ 8739212\ 2060406\ 3883074$
$\sqrt{77}:22$	$=0.\ 3988620\ 1760873\ 2820927\ 5631049$
$\sqrt{78}$	$=8.\ 8317608\ 6632784\ 6854764\ 0427270$
$\sqrt{78}:12$	$=0.\ 7359800\ 7219398\ 7237897\ 0035606$
$\sqrt{78}:78$	$=0.\ 1132277\ 0341445\ 9575061\ 0774709$
$\sqrt{85}$	$=9.\ 2195444\ 5729288\ 7310002\ 2742817$
$\sqrt{85}:2$	$=4.\ 6097722\ 2864644\ 3655001\ 1371409$
$\sqrt{87}$	$=9.\ 3273790\ 5308881\ 5045554\ 4755423$
$2\sqrt{87}$	$=18.\ 6547581\ 0617763\ 0091108\ 9510846$
$2\sqrt{87}:3$	$=6.\ 2182527\ 0205921\ 0030369\ 6503615$
$\sqrt{91}$	$=9.\ 5393920\ 1416945\ 6491526\ 2158602$
$\sqrt{91}:26$	$=0.\ 3668996\ 9285267\ 1403520\ 2390715$
$\sqrt{95}$	$=9.\ 7467943\ 4480896\ 3906838\ 4131999$
$\sqrt{95}:2$	$=4.\ 8733971\ 7240448\ 1953419\ 2066000$
$\sqrt{102}$	$=10.\ 0995049\ 3836207\ 7953363\ 3859171$
$\sqrt{102}:3$	$=3.\ 3665016\ 4612069\ 2651121\ 1286390$
$\sqrt{102}:4$	$=2.\ 5248762\ 3459051\ 9488340\ 8464793$
$\sqrt{102}:34$	$=0.\ 2970442\ 6289300\ 2292745\ 9819387$
$\sqrt{105}$	$=10.\ 2469507\ 6595959\ 8383221\ 0386805$
$2\sqrt{105}$	$=20.\ 4939015\ 3191919\ 6766442\ 0773610$
$\sqrt{114}$	$=10.\ 6770782\ 5203131\ 1210811\ 5239656$
$\sqrt{114}:114$	$=0.\ 0936585\ 8115816\ 9396586\ 0659997$
$\sqrt{130}$	$=11.\ 4017542\ 5099137\ 9791360\ 4902557$
$\sqrt{130}:26$	$=0.\ 4385290\ 0965351\ 4607360\ 0188560$
$\sqrt{138}$	$=11.\ 7473401\ 2447073\ 0586968\ 5063660$
$\sqrt{138}:3$	$=3.\ 9157800\ 4149024\ 3528989\ 5021220$
$\sqrt{154}$	$=12.\ 4096736\ 4599085\ 6596133\ 2419555$
$\sqrt{154}:2$	$=6.\ 2048368\ 2299542\ 8298066\ 6209778$

$\sqrt{170}$ = 13. 0384048 1040529 7429165 9431149
$\sqrt{170}:170$ = 0. 0766964 9888473 7043700 9761360

$\sqrt{174}$ = 13. 1909059 5827291 9170936 8077327
$\sqrt{174}:3$ = 4. 3969686 5275763 9723645 6025776

$\sqrt{182}$ = 13. 4907375 6323204 1465550 3056115
$\sqrt{182}:26$ = 0. 5188745 2166277 0825598 0886774

$\sqrt{186}$ = 13. 6381816 9698585 5892758 5975519

$\sqrt{190}$ = 13. 7840487 5209022 1767955 9125529
$\sqrt{190}:5$ = 2. 7568097 5041804 4353591 1825106

$\sqrt{210}$ = 14. 4913767 4618943 8573718 6641572
$\sqrt{210}:15$ = 0. 9660917 8307929 5904914 5776105
$\sqrt{210}:21$ = 0. 6900655 5934235 4217796 1268646

$\sqrt{230}$ = 15. 1657508 8810310 1108513 6508726

$\sqrt{238}$ = 15. 4272486 2054151 2489078 7805371
$\sqrt{238}:238$ = 0. 0648203 7235521 6439029 7427754

$\sqrt{266}$ = 16. 3095064 3030009 0476125 7678877

$\sqrt{286}$ = 16. 9115345 2528776 2898172 5179228
$\sqrt{286}:2$ = 8. 4557672 6264388 1449086 2589614

$\sqrt{290}$ = 17. 0293863 6592640 1166133 3218239
$\sqrt{290}:5$ = 3. 4058772 7318528 0233226 6643648

$\sqrt{310}$ = 17. 6068168 6165900 9145769 2281765

$\sqrt{322}$ = 17. 9443584 4492636 0754743 4548937
$\sqrt{322}:7$ = 2. 5634797 7784662 2964963 3506991

$\sqrt{330}$ = 18. 1659021 2458494 9992535 1968583
$\sqrt{330}:10$ = 1. 8165902 1245849 4999253 5196858
$\sqrt{330}:110$ = 0. 1651445 6476895 4090841 2290623

$\sqrt{374}$ = 19. 3390796 0581371 6180324 3393283
$\sqrt{374}:2$ = 9. 6695398 0290685 8090162 1696642

$\sqrt{390}$ = 19. 7484176 5813149 9017438 4610437
$\sqrt{390}:6$ = 3. 2914029 4302191 6502906 4101740

$\sqrt{418}$ = 20. 4450483 0026087 2702363 1425080
$\sqrt{418}:2$ = 10. 2225241 5013043 6351181 5712540

Anlage 7 c.

Übersicht der ausgerechneten Koeffizienten $s_{n,j}$.

Die unterstrichene Ziffer ist die letzte, genau zu verbürgende.

n	j	Koeffizienten $s_{n,j}$.	n	j	Koeffizienten $s_{n,j}$.	n	j	Koeffizienten $s_{n,j}$.
0	0	0. 3989422 8040143 2677939 946059$\underline{9}$	5	0	0. 0103370 4575859 6146854 937090$\underline{6}$	7	4	0. 0162161 1183500 8134992 15467$\underline{5}$9
			5	1	0. 0283091 6569973 1057581 152603$\underline{7}$	7	5	0. 0081080 5591750 4067496 077338$\underline{0}$
1	0	0. 6909882 9894267 0958530 489292$\underline{0}$	5	2	0. 1497980 2453041 6367343 80941$\underline{0}$6	7	6	0. 0413431 3534065 4690968 28438$\underline{2}$7
1	1	0. 4886025 1190291 9921586 384622$\underline{8}$	5	3	0. 0305773 9371470 3149230 250544$\underline{8}$	7	7	0. 0110494 1769569 6815284 78224$\underline{9}$5
			5	4	0. 1297288 9468006 5079937 23740$\underline{7}$9			
2	0	0. 2230155 1451909 6389317 370796$\underline{6}$	5	5	0. 0410238 7855251 0631425 882422$\underline{9}$	8	0	0. 0001003 9557865 1116042 525192$\underline{8}$
2	1	0. 5462742 1529603 9535271 692853$\underline{0}$				8	1	0. 0008518 8473358 4218402 547249$\underline{8}$
2	2	0. 2731371 0764801 9767635 846426$\underline{4}$	6	0	0. 0028093 8837487 8707129 788804$\underline{1}$	8	2	0. 0035636 8951902 2730238 84045$\underline{5}$1
			6	1	0. 0182069 1757871 0355901 09620$\underline{5}$5	8	3	0. 0096505 1683824 6438093 45225$\underline{1}$4
3	0	0. 1319377 5767639 8503925 630346$\underline{7}$	6	2	0. 0143938 3217992 0679674 08696$\underline{5}$5	8	4	0. 0037376 2909968 2271072 27196$\underline{9}$0
3	1	0. 1142614 4986611 6434039 505174$\underline{2}$	6	3	0. 0287876 6435984 1359348 17393$\underline{1}$0	8	5	0. 0269524 2673514 1468886 8584$\underline{4}$67
3	2	0. 3613264 3033006 9256923 672519$\underline{2}$	6	4	0. 0157676 5314777 2629976 70246$\underline{3}$3	8	6	0. 0041588 4973484 0176361 80600$\underline{9}$7
3	3	0. 1475108 9748166 0877586 402569$\underline{4}$	6	5	0. 0739568 4881974 2250999 6168$\underline{0}$90	8	7	0. 0227789 5813046 3433402 2010$\underline{6}$00
			6	6	0. 0213495 0328724 7322561 7127$\underline{2}$28	8	8	0. 0056947 3953261 5858350 55026$\underline{5}$0
4	0	0. 0187004 1939381 7156778 434971$\underline{6}$						
4	1	0. 0836308 1794466 1145994 01404$\underline{8}$7	7	0	0. 0015088 8360165 3084298 211690$\underline{4}$	9	1	0. 0000530 6851454 3930421 613777$\underline{5}$
4	2	0. 0591359 1848484 7501130 79256$\underline{7}$1	7	1	0. 0014114 3136847 6833034 858095$\underline{8}$	9	0	0. 0002517 2606700 0887852 83906$\underline{5}$5
4	3	0. 2212663 4622249 1316379 6038$\underline{5}$40	7	2	0. 0034572 8665972 6426818 431310$\underline{3}$	9	2	0. 0023613 9982363 8665870 342$\underline{2}$495
4	4	0. 0782294 6693114 7016823 33006$\underline{5}$4	7	3	0. 0024446 7084159 8344275 729064$\underline{6}$	9	3	0. 0018035 4890631 3259546 500$\underline{2}$573

n	j	Koeffizienten $s_{n,j}$.
9	4	0. 0159285 1265128 5833836 0298110
9	5	0. 0019038 2140249 6166256 1995870
9	6	0. 0049156 4572401 3932962 9010300
9	7	0. 0021285 3703650 0207775 7633602
9	8	0. 0124113 9706622 9287020 7075920
9	9	0. 0029253 9434317 6516783 3995339
10	0	0. 0000139 4793089 1859916 2645880
10	1	0. 0001462 8713333 0484733 7341889
10	2	0. 0001266 8837371 1001054 6262084
10	3	0. 0012919 7297939 5459092 7588869
10	4	0. 0009135 6285484 0316765 9969229
10	5	0. 0005777 8788140 4236335 9345063
10	6	0. 0003229 9324484 8864773 1897217
10	7	0. 0026634 7052974 5713612 8096836
10	8	0. 0010873 5729046 9567191 1896388
10	9	0. 0067029 2050760 1004755 7220890
10	10	0. 0014988 1859027 7324243 2843601
11	0	0. 0000072 9850755 4364978 7074189
11	1	0. 0000209 6336693 6140338 5858043
11	2	0. 0002390 1915807 9230242 4064974
11	3	0. 0004471 6389920 3820114 0398710
11	4	0. 0009796 8701798 3594664 2760310
11	5	0. 0000925 7172186 6537668 6606872
11	6	0. 0003116 4285404 7925980 3981263
11	7	0. 0004927 5061765 3435556 3667054
11	8	0. 0042957 0029343 7149227 5581980
11	9	0. 0005545 7252322 6013094 3526018
11	10	0. 0035940 4072148 9561390 2621615
11	11	0. 0007662 5205643 2809456 7850217
12	0	0. 0000009 5115251 6368467 0399190
12	1	0. 0000118 7989112 1785352 7012622
12	2	0. 0000737 1278588 5630222 6216244
12	3	0. 0000601 8623764 6274618 3265256
12	4	0. 0000451 3967823 4705963 7448942
12	5	0. 0005264 1458467 0731814 1965817
12	6	0. 0000468 9673855 3304288 1825090
12	7	0. 0005007 2014729 8683551 7590229
12	8	0. 0002503 6007364 9341775 8795115
12	9	0. 0007648 6265899 5218450 4604105
12	10	0. 0002824 4425527 0415139 8281841
12	11	0. 0019156 3014108 2023641 9630646
12	12	0. 0003910 2636512 8892438 5276685
13	0	0. 0000004 9423334 5229151 9345263
13	1	0. 0000033 3378617 7742374 7377495
13	2	0. 0000149 0914503 1762292 5773648
13	3	0. 0000123 6201000 3836716 2110105
13	4	0. 0000322 3617814 0060609 9948250
13	5	0. 0000227 9442016 2374404 3065101
13	6	0. 0002810 2848567 6998295 6158175
13	7	0. 0001187 5621018 4913545 0292885
13	8	0. 0004443 4505106 3660537 3874670
13	9	0. 0000423 6663829 0562270 9742626
13	10	0. 0004063 6651890 1332496 4761712
13	11	0. 0001436 7226058 1151773 1471959
13	12	0. 0010159 1629725 3331241 1904280
13	13	0. 0001992 3757784 1217848 9489508
14	0	0. 0000001 2805282 6434122 3498926
14	1	0. 0000018 5566175 1271272 8669528
14	2	0. 0000016 7267089 8531469 4851388
14	3	0. 0000079 6350633 7579299 3518041
14	4	0. 0000560 2823344 3853559 1023209
14	5	0. 0001544 5918025 6713855 9383711
14	6	0. 0000575 6353780 0484266 5540160
14	7	0. 0001065 8696061 9410762 3393758
14	8	0. 0000601 2315437 2953045 7192658
14	9	0. 0002354 2904792 5046394 0314387
14	10	0. 0000644 7490012 0256366 2088498
14	11	0. 0006447 4900120 2563662 0884980
14	12	0. 0000730 0344868 4932918 2290175
14	13	0. 0005364 6359622 4623825 7890359
14	14	0. 0001013 8209021 7837402 7161390
15	0	0. 0000000 6619741 3553155 6235663
15	1	0. 0000000 6409537 0063344 2192862
15	2	0. 0000009 8881520 9392824 8629494
15	3	0. 0000025 2099402 4015674 7570999
15	4	0. 0000380 6617498 7250633 2593016
15	5	0. 0000282 3063093 4996691 3212869
15	6	0. 0000194 8098612 6746060 0314162
15	7	0. 0000041 5336019 7535968 6859709
15	8	0. 0000563 3891879 6934573 6852394
15	9	0. 0000304 2649366 2632457 8131751
15	10	0. 0000745 2938413 5475577 5711323
15	11	0. 0000326 8329701 5016467 9860506
15	12	0. 0001132 1826197 7745500 0857696
15	13	0. 0000370 5937539 7454245 8490382
15	14	0. 0002822 3579447 2046632 4724604
15	15	0. 0000515 2897038 9243935 3109797
16	0	0. 0000000 0213435 7506519 9010326
16	1	0. 0000000 3520072 5768845 9462118
16	2	0. 0000000 9640115 7720751 5321286
16	3	0. 0000015 7225530 1734970 3270032
16	4	0. 0000012 6759274 8871623 8635196
16	5	0. 0000009 5821005 0635162 0490774
16	6	0. 0000006 7755682 4605228 1547385
16	7	0. 0000102 7565801 4497055 9968658
16	8	0. 0000020 9750990 8904858 0212535
16	9	0. 0000059 3265392 0770410 6863321
16	10	0. 0000030 7830296 5330508 7329006
16	11	0. 0000130 6013340 7991162 5725115
16	12	0. 0000055 1891365 8542886 1673862
16	13	0. 0000594 4051921 5198163 2480278
16	14	0. 0000187 9674260 2303043 9031394
16	15	0. 0001480 0569925 6307426 9243777
16	16	0. 0000261 6395839 9597933 8480924
17	0	0. 0000000 0109904 1830611 6825162
17	1	0. 0000000 0961269 0067079 1568849
17	2	0. 0000001 6760297 8311901 0533122
17	3	0. 0000000 4838281 2322679 5409638
17	4	0. 0000001 1851320 2511407 0884844
17	5	0. 0000010 0212005 7987040 6929300
17	6	0. 0000055 4948959 1455998 0874437
17	7	0. 0000010 2464242 1979910 3213521
17	8	0. 0000032 4020384 0687891 9845651
17	9	0. 0000002 1181875 1431869 8494243
17	10	0. 0000031 1308715 3769028 8897171
17	11	0. 0000015 5654357 6884514 4448586
17	12	0. 0000068 4407331 4212461 0837176
17	13	0. 0000083 8224369 1009747 2776441
17	14	0. 0000933 4071540 6721713 4143581
17	15	0. 0000095 2654687 3867024 9514060
17	16	0. 0000773 9403266 6860360 8782911
17	17	0. 0000132 7296710 0839661 8986159
18	0	0. 0000000 0028250 1703474 8523141
18	1	0. 0000000 0522437 2370288 9074732
18	2	0. 0000000 2408316 6664665 6003766
18	3	0. 0000001 4715057 8953423 0441429
18	4	0. 0000002 6731230 1484389 3104726
18	5	0. 0000006 8524967 9224871 8118454
18	6	0. 0000005 0433010 8386827 7528154
18	7	0. 0000087 3525371 5127044 2453741
18	8	0. 0000005 1652638 0386430 7882594
18	9	0. 0000001 8860876 6722761 4290178
18	10	0. 0000007 4851783 7752532 3639707
18	11	0. 0000114 0108403 6030280 7703398
18	12	0. 0000039 3374771 6216210 5239484
18	13	0. 0000536 4916610 3859833 1128531
18	14	0. 0000042 4133898 6422465 0193742
18	15	0. 0000162 4309167 5138637 1042505
18	16	0. 0000048 2491719 3745018 3134999
18	17	0. 0000403 6815347 3434243 5374198
18	18	0. 0000067 2802557 8905707 2548831
19	0	0. 0000000 0014501 8202170 2313566
19	1	0. 0000000 0070673 1296403 5870015
19	2	0. 0000000 0458014 2275441 2749036
19	3	0. 0000000 4428786 8035355 7938706
19	4	0. 0000008 4958861 4497092 3062227
19	5	0. 0000001 3433175 4797878 0149154
19	6	0. 0000003 5901671 6155561 5114797
19	7	0. 0000002 5386315 4552923 4752472
19	8	0. 0000005 0772630 9105846 9504944
19	9	0. 0000002 0251274 0042993 2495686
19	10	0. 0000006 8973353 8842909 3593046
19	11	0. 0000018 8891308 9460635 7336787
19	12	0. 0000297 4663307 9474044 3394296
19	13	0. 0000019 8753052 4883359 5253553
19	14	0. 0000093 2234449 7043042 5293796
19	15	0. 0000007 1499118 4320596 2279444
19	16	0. 0000084 5988978 1307061 0538009
19	17	0. 0000024 4215982 1276097 9692274
19	18	0. 0000210 0825313 6719683 1330807
19	19	0. 0000034 0798867 9313466 7790774
20	0	0. 0000000 0001858 6266269 0862293
20	1	0. 0000000 0038090 5110764 6843685
20	2	0. 0000000 0389381 1693700 0947969
20	3	0. 0000000 2640911 5798825 9356957
20	4	0. 0000000 6667974 8857004 6276900
20	5	0. 0000002 6671899 5428018 5107600
20	6	0. 0000008 7787968 6511629 2186124
20	7	0. 0000008 1275865 8954492 7627212
20	8	0. 0000002 9820090 2333752 5031126
20	9	0. 0000018 5428856 6693351 0927626
20	10	0. 0000003 0622567 8302621 1668722
20	11	0. 0000053 9165943 6211557 7440518
20	12	0. 0000009 5311973 7298407 5379075
20	13	0. 0000154 8636270 0057600 8353947
20	14	0. 0000010 0383179 6645668 7194153
20	15	0. 0000009 6979365 0333107 2630643
20	16	0. 0000010 8426226 3146244 7039619
20	17	0. 0000131 9061973 4564651 1007599
20	18	0. 0000012 3541472 8936274 2388696
20	19	0. 0000019 1088745 6704411 4639034
20	20	0. 0000017 2516278 2847387 2841769

Anlage 8.

Zusammenstellung der Polynome R_n^j (cos t) mit ausgerechneten Koeffizienten $r_{n,\,j;\,k}$.

Aus drucktechnischen Gründen ist statt R_n^j (cos t) in dieser Anlage durchweg R (n; j) gesetzt worden.

R (0; 0) = 0. 3989422 8040143

R (1; 0) = + 0. 6909882 9894267 cos t

R (1; 1) = + 0. 4886025 1190292 sin t

R (2; 0) = + 0. 2230155 1451910
+ 0. 6690465 4355729 cos 2 t

R (2; 1) = + 0. 5462742 1529604 sin 2 t

R (2; 2) = + 0. 2731371 0764802
– 0. 2731371 0764802 cos 2 t

R (3; 0) = + 0. 3958132 7302920 cos t
+ 0. 6596887 8838199 cos 3 t

R (3; 1) = + 0. 1142614 4986612 sin t
+ 0. 5713072 4933058 sin 3 t

R (3; 2) = + 0. 3613264 3033007 cos t
– 0. 3613264 3033007 cos 3 t

R (3; 3) = + 0. 4425326 9244498 sin t
– 0. 1475108 9748166 sin 3 t

R (4; 0) = + 0. 1683037 7454435
+ 0. 3740083 8787634 cos 2 t
+ 0. 6545146 7878360 cos 4 t

R (4; 1) = + 0. 1672616 3588932 sin 2 t
+ 0. 5854157 2561263 sin 4 t

R (4; 2) = + 0. 1774077 5545454
+ 0. 2365436 7393939 cos 2 t
– 0. 4139514 2939393 cos 4 t

R (4; 3) = + 0. 4425326 9244498 sin 2 t
– 0. 2212663 4622249 sin 4 t

R (4; 4) = + 0. 2346884 0079344
– 0. 3129178 6772459 cos 2 t
+ 0. 0782294 6693115 cos 4 t

R (5; 0) = + 0. 3101113 7275788 cos t
+ 0. 3617966 0155087 cos 3 t
+ 0. 6512338 8279156 cos 5 t

R (5; 1) = + 0. 0566183 3139946 sin t
+ 0. 1981641 5989812 sin 3 t
+ 0. 5944924 7969435 sin 5 t

R (5; 2) = + 0. 2995960 4906083 cos t
+ 0. 1497980 2453042 cos 3 t
– 0. 4493940 7359125 cos 5 t

R (5; 3) = + 0. 1834643 6228822 sin t
+ 0. 3975061 1829114 sin 3 t
– 0. 2751965 4343233 sin 5 t

R (5; 4) = + 0. 2594577 8936013 cos t
– 0. 3891866 8404020 cos 3 t
+ 0. 1297288 9468007 cos 5 t

R (5; 5) = + 0. 4102387 8552511 sin t
– 0. 2051193 9276255 sin 3 t
+ 0. 0410238 7855251 sin 5 t

R (6; 0) = + 0. 1404694 1874394
+ 0. 2949857 7936226 cos 2 t
+ 0. 3539829 3523472 cos 4 t
+ 0. 6489687 1459698 cos 6 t

R (6; 1) = + 0. 0910345 8789355 sin 2 t
+ 0. 2184830 1094452 sin 4 t
+ 0. 6008282 8009744 sin 6 t

R (6; 2) = + 0. 1439383 2179921
+ 0. 2446951 4705865 cos 2 t
+ 0. 0863629 9307952 cos 4 t
– 0. 4749964 6193738 cos 6 t

R (6; 3) = + 0. 2590889 7923857 sin 2 t
+ 0. 3454519 7231810 sin 4 t
– 0. 3166643 0795825 sin 6 t

R (6; 4) = + 0. 1576765 3147773
+ 0. 0788382 6573886 cos 2 t
– 0. 4099589 8184209 cos 4 t
+ 0. 1734441 8462550 cos 6 t

R (6; 5) = + 0. 3697842 4409871 sin 2 t
– 0. 2958273 9527897 sin 4 t
+ 0. 0739568 4881974 sin 6 t

R (6; 6) = + 0. 2134950 3287247
– 0. 3202425 4930871 cos 2 t
+ 0. 1280970 1972348 cos 4 t
– 0. 0213495 0328725 cos 6 t

R (7; 0) = + 0. 2640546 3028929 cos t
+ 0. 2851790 0071243 cos 3 t
+ 0. 3485521 1198186 cos 5 t
+ 0. 6473110 6510917 cos 7 t

R (7; 1) = + 0. 0352857 8421192 sin t
+ 0. 1143259 4084662 sin 3 t
+ 0. 2328861 7579868 sin 5 t
+ 0. 6055040 5707656 sin 7 t

R (7; 2) = + 0. 2592964 9947948 cos t
+ 0. 1970653 3960441 cos 3 t
+ 0. 0380301 5325699 cos 5 t
– 0. 4943919 9234088 cos 7 t

R (7; 3) = + 0. 1100101 8787193 sin t
+ 0. 2860264 8846701 sin 3 t
+ 0. 2958051 7183340 sin 5 t
– 0. 3495879 3034856 sin 7 t

R (7; 4) = + 0. 2432416 7752512 cos t
– 0. 0486483 3550502 cos 3 t
– 0. 4054027 9587520 cos 5 t
+ 0. 2108094 5385511 cos 7 t

R (7; 5) = + 0. 2027013 9793760 sin t
+ 0. 2675658 4527763 sin 3 t
– 0. 3486464 0445267 sin 5 t
+ 0. 1054047 2692755 sin 7 t

R (7; 6) = + 0. 2067156 7670327 cos t
– 0. 3720882 1806589 cos 3 t
+ 0. 2067156 7670327 cos 5 t
– 0. 0413431 3534065 cos 7 t

R (7; 7) = + 0. 3867296 1934939 sin t
– 0. 2320377 7160963 sin 3 t
+ 0. 0773459 2386988 sin 5 t
– 0. 0110494 1769570 sin 7 t

R (8; 0) = + 0. 1229845 8384762
+ 0. 2529968 5820081 cos 2 t
+ 0. 2782965 4402089 cos 4 t
+ 0. 3445576 2593063 cos 6 t
+ 0. 6460455 4861993 cos 8 t

R (8; 1) = + 0. 0596319 3135090 sin 2 t
+ 0. 1311902 4897197 sin 4 t
+ 0. 2436390 3380509 sin 6 t
+ 0. 6090975 8451272 sin 8 t

R (8; 2) = + 0. 1247291 3316580
+ 0. 2280761 2921745 cos 2 t
+ 0. 1568023 3883700 cos 4 t
+ 0. 0000000 0000000 cos 6 t
– 0. 5096076 0122025 cos 8 t

R (8; 3) = + 0. 1737093 0308844 sin 2 t
+ 0. 2895155 0514739 sin 4 t
+ 0. 2509134 3779441 sin 6 t
– 0. 3763701 5669161 sin 8 t

R (8; 4) = + 0. 1308170 1848888
+ 0. 1495051 6398729 cos 2 t
– 0. 1345546 4758856 cos 4 t
– 0. 3887134 2636696 cos 6 t
+ 0. 2429458 9147935 cos 8 t

R (8; 5) = + 0. 2695242 6735141 sin 2 t
+ 0. 1617145 6041085 sin 4 t
– 0. 3773339 7429198 sin 6 t
+ 0. 1347621 3367571 sin 8 t

R (8; 6) = + 0. 1455597 4071941
+ 0. 0000000 0000000 cos 2 t
– 0. 3493433 7772657 cos 4 t
+ 0. 2661663 8302977 cos 6 t
– 0. 0623827 4602260 cos 8 t

R (8; 7) = + 0. 3189054 1382649 sin 2 t
– 0. 3189054 1382649 sin 4 t
+ 0. 1366737 4878278 sin 6 t
– 0. 0227789 5813046 sin 8 t

R (8; 8) = + 0. 1993158 8364156
– 0. 3189054 1382649 cos 2 t
+ 0. 1594527 0691324 cos 4 t
– 0. 0455579 1626093 cos 6 t
+ 0. 0056947 3953262 cos 8 t

R (9; 0) = + 0. 2340321 4913873 cos t
+ 0. 2451765 3719296 cos 3 t
+ 0. 2731967 1287215 cos 5 t
+ 0. 3414958 9109019 cos 7 t
+ 0. 6450477 9428147 cos 9 t

R (9; 1) =	+ 0. 0246691 5456609	sin		t
	+ 0. 0775316 2863627	sin	3	t
	+ 0. 1439873 1032451	sin	5	t
	+ 0. 2519777 9306789	sin	7	t
	+ 0. 6119460 6887916	sin	9	t
R (9; 2) =	+ 0. 2314171 8271659	cos		t
	+ 0. 1983575 8518565	cos	3	t
	+ 0. 1227927 9082921	cos	5	t
	– 0. 0306981 9770730	cos	7	t
	– 0. 5218693 6102415	cos	9	t
R (9; 3) =	+ 0. 0757490 5406516	sin		t
	+ 0. 2092116 7313234	sin	3	t
	+ 0. 2813536 2938487	sin	5	t
	+ 0. 2110152 2203865	sin	7	t
	– 0. 3985843 0829523	sin	9	t
R (9; 4) =	+ 0. 2229991 7711800	cos		t
	+ 0. 0637140 5060514	cos	3	t
	– 0. 1911421 5181543	cos	5	t
	– 0. 3663557 9097957	cos	7	t
	+ 0. 2707847 1507186	cos	9	t
R (9; 5) =	+ 0. 1332674 9817473	sin		t
	+ 0. 2665349 9634946	sin	3	t
	+ 0. 0685375 7048986	sin	5	t
	– 0. 3902833 8751171	sin	7	t
	+ 0. 1618248 1921217	sin	9	t
R (9; 6) =	+ 0. 2064571 2040859	cos		t
	– 0. 1376380 8027239	cos	3	t
	– 0. 2949387 4344084	cos	5	t
	+ 0. 3096856 8061288	cos	7	t
	– 0. 0835659 7730824	cos	9	t
R (9; 7) =	+ 0. 2085966 2957702	sin		t
	+ 0. 1787971 1106602	sin	3	t
	– 0. 3490800 7398603	sin	5	t
	+ 0. 1894397 9624852	sin	7	t
	– 0. 0361851 2962050	sin	9	t
R (9; 8) =	+ 0. 1737595 5892721	cos		t
	– 0. 3475191 1785442	cos	3	t
	+ 0. 2482279 4132459	cos	5	t
	– 0. 0868797 7946361	cos	7	t
	+ 0. 0124113 9706623	cos	9	t
R (9; 9) =	+ 0. 3685996 8724024	sin		t
	– 0. 2457331 2482683	sin	3	t
	+ 0. 1053141 9635435	sin	5	t
	– 0. 0263285 4908859	sin	7	t
	+ 0. 0029253 9434318	sin	9	t
R (10; 0) =	+ 0. 1107186 7541958			
	+ 0. 2255380 4252137	cos	2	t
	+ 0. 2393464 9410432	cos	4	t
	+ 0. 2692648 0586736	cos	6	t
	+ 0. 3390741 9998111	cos	8	t
	+ 0. 6442409 7996412	cos	10	t
R (10; 1) =	+ 0. 0430084 1719916	sin	2	t
	+ 0. 0912831 7119822	sin	4	t
	+ 0. 1540403 5139700	sin	6	t
	+ 0. 2586356 5172830	sin	8	t
	+ 0. 6142596 7285471	sin	10	t
R (10; 2) =	+ 0. 1117391 4561310			
	+ 0. 2110628 3060253	cos	2	t
	+ 0. 1712826 8125727	cos	4	t
	+ 0. 0938760 8491985	cos	6	t
	– 0. 0559962 6118026	cos	8	t
	– 0. 5319644 8121249	cos	10	t
R (10; 3) =	+ 0. 1266133 5198075	sin	2	t
	+ 0. 2273872 4437360	sin	4	t
	+ 0. 2674384 0673486	sin	6	t
	+ 0. 1757083 2519778	sin	8	t
	– 0. 4173072 7234473	sin	10	t
R (10; 4) =	+ 0. 1151089 1970988			
	+ 0. 1662684 3958094	cos	2	t
	– 0. 0073085 0283872	cos	4	t
	– 0. 2274771 5085524	cos	6	t
	– 0. 3416725 0771028	cos	8	t
	+ 0. 2950808 0211342	cos	10	t
R (10; 5) =	+ 0. 2022257 5849148	sin	2	t
	+ 0. 2311151 5256169	sin	4	t
	– 0. 0086668 1822106	sin	6	t
	– 0. 3928957 5935488	sin	8	t
	+ 0. 1866254 8569357	sin	10	t
R (10; 6) =	+ 0. 1220914 4655287			
	+ 0. 0859162 0312980	cos	2	t
	– 0. 2144675 1457965	cos	4	t
	– 0. 2296481 9708754	cos	6	t
	+ 0. 3404348 8007070	cos	8	t
	– 0. 1043268 1808618	cos	10	t
R (10; 7) =	+ 0. 2610201 1191508	sin	2	t
	+ 0. 0426155 2847593	sin	4	t
	– 0. 3435876 9833720	sin	6	t
	+ 0. 2343854 0661762	sin	8	t
	– 0. 0506059 4006517	sin	10	t
R (10; 8) =	+ 0. 1370070 1859917			
	– 0. 0456690 0619972	cos	2	t
	– 0. 2870623 2468397	cos	4	t
	+ 0. 3033726 8404101	cos	6	t
	– 0. 1283081 6027541	cos	8	t
	+ 0. 0206597 8851892	cos	10	t
R (10; 9) =	+ 0. 2815226 6131924	sin	2	t
	– 0. 3217401 8436485	sin	4	t
	+ 0. 1809788 5370523	sin	6	t
	– 0. 0536233 6406081	sin	8	t
	+ 0. 0067028 2050760	sin	10	t
R (10; 10) =	+ 0. 1888511 4237494			
	– 0. 3147519 0395824	cos	2	t
	+ 0. 1798582 3083328	cos	4	t
	– 0. 0674468 3656248	cos	6	t
	+ 0. 0149881 8590277	cos	8	t
	– 0. 0014988 1859028	cos	10	t
R (11; 0) =	+ 0. 2124303 6087734	cos		t
	+ 0. 2191741 8185758	cos	3	t
	+ 0. 2348294 8056169	cos	5	t
	+ 0. 2661400 7796992	cos	7	t
	+ 0. 3371107 6542856	cos	9	t
	+ 0. 6435750 9763635	cos	11	t
R (11; 1) =	+ 0. 0184896 8963768	sin		t
	+ 0. 0572299 9173566	sin	3	t
	+ 0. 1021964 1381368	sin	5	t
	+ 0. 1621516 4325105	sin	7	t
	+ 0. 2640755 3329456	sin	9	t
	+ 0. 6161762 4435397	sin	11	t
R (11; 2) =	+ 0. 2108148 9742588	cos		t
	+ 0. 1907372 8814723	cos	3	t
	+ 0. 1469967 8221873	cos	5	t
	+ 0. 0690765 3668490	cos	7	t
	– 0. 0772031 8805959	cos	9	t
	– 0. 5404223 1641714	cos	11	t
R (11; 3) =	+ 0. 0563426 5129968	sin		t
	+ 0. 1600846 7591497	sin	3	t
	+ 0. 2347610 4708201	sin	5	t
	+ 0. 2508589 4745334	sin	7	t
	+ 0. 1444339 3944283	sin	9	t
	– 0. 4333018 1832850	sin	11	t
R (11; 4) =	+ 0. 2057342 7377655	cos		t
	+ 0. 1077655 7197820	cos	3	t
	– 0. 0636796 5616893	cos	5	t
	– 0. 2498201 8958582	cos	7	t
	– 0. 3164389 0680870	cos	9	t
	+ 0. 3164389 0680870	cos	11	t
R (11; 5) =	+ 0. 0972003 0795986	sin		t
	+ 0. 2268007 1857302	sin	3	t
	+ 0. 1828291 5068641	sin	5	t
	– 0. 0708173 6722790	sin	7	t
	– 0. 3887086 6011759	sin	9	t
	+ 0. 2093046 6314024	sin	11	t
R (11; 6) =	+ 0. 1963349 9805019	cos		t
	– 0. 0218149 9978335	cos	3	t
	– 0. 2477560 6896810	cos	5	t
	– 0. 1636124 9837516	cos	7	t
	+ 0. 3611940 6784155	cos	9	t
	– 0. 1243454 9876512	cos	11	t
R (11; 7) =	+ 0. 1448686 8159011	sin		t
	+ 0. 2276507 8535589	sin	3	t
	– 0. 0665213 3338321	sin	5	t
	– 0. 3168386 4715116	sin	7	t
	+ 0. 2715055 9032704	sin	9	t
	– 0. 0655358 3214791	sin	11	t
R (11; 8) =	+ 0. 1804194 1232436	cos		t
	– 0. 1804194 1232436	cos	3	t
	– 0. 1933065 1320467	cos	5	t
	+ 0. 3307689 2259466	cos	7	t
	– 0. 1675323 1144405	cos	9	t
	+ 0. 0300699 0205406	cos	11	t
R (11; 9) =	+ 0. 2096284 1377943	sin		t
	+ 0. 1164602 2987746	sin	3	t
	– 0. 3244249 2608722	sin	5	t
	+ 0. 2412390 4760332	sin	7	t
	– 0. 0837404 5100713	sin	9	t
	+ 0. 0116460 2298775	sin	11	t
R (11; 10) =	+ 0. 1509497 1030256	cos		t
	– 0. 3234636 6493406	cos	3	t
	+ 0. 2695530 5411172	cos	5	t
	– 0. 1257914 2525213	cos	7	t
	+ 0. 0323463 6649341	cos	9	t
	– 0. 0035940 4072149	cos	11	t
R (11; 11) =	+ 0. 3540084 5007196	sin		t
	– 0. 2528631 7862283	sin	3	t
	+ 0. 1264315 8931141	sin	5	t
	– 0. 0421438 6310380	sin	7	t
	+ 0. 0084287 7262076	sin	9	t
	– 0. 0007662 5205643	sin	11	t
R (12; 0) =	+ 0. 1015088 9885188			
	+ 0. 2056543 9247912	cos	2	t
	+ 0. 2142233 2549909	cos	4	t
	+ 0. 2312251 7672917	cos	6	t
	+ 0. 2635967 0147126	cos	8	t
	+ 0. 3354867 1096342	cos	10	t
	+ 0. 6430161 9601322	cos	12	t

R (12;1) = + 0.0329310 5818959 sin 2 t
+ 0.0686063 7122831 sin 4 t
+ 0.1110769 8198869 sin 6 t
+ 0.1688370 1262281 sin 8 t
+ 0.2686043 3826357 sin 10 t
+ 0.6177899 7800620 sin 12 t

R (12;2) = + 0.1021659 2123748
+ 0.1963708 6159932 cos 2 t
+ 0.1713822 2718409 cos 4 t
+ 0.1253117 3600557 cos 6 t
+ 0.0476184 5968212 cos 8 t
– 0.0952369 1936423 cos 10 t
– 0.5476122 8634435 cos 12 t

R (12;3) = + 0.0975017 0498696 sin 2 t
+ 0.1814615 0650351 sin 4 t
+ 0.2353281 8919693 sin 6 t
+ 0.2332818 5711696 sin 8 t
+ 0.1166409 2855848 sin 10 t
– 0.4471235 5947417 sin 12 t

R (12;4) = + 0.1042726 5672217
+ 0.1679196 0303311 cos 2 t
+ 0.0539419 1549047 cos 4 t
– 0.1074324 3419860 cos 6 t
– 0.2624420 8925658 cos 8 t
– 0.2916023 2139620 cos 10 t
+ 0.3353426 6960563 cos 12 t

R (12;5) = + 0.1579243 7540122 sin 2 t
+ 0.2237261 9848506 sin 4 t
+ 0.1316036 4616768 sin 6 t
– 0.1200225 2530493 sin 8 t
– 0.3800713 3013227 sin 10 t
+ 0.2300431 7350111 sin 12 t

R (12;6) = + 0.1083314 6605813
+ 0.1181797 8115433 cos 2 t
– 0.1034073 0851004 cos 4 t
– 0.2523044 5341678 cos 6 t
– 0.1015783 3570646 cos 8 t
+ 0.3742359 7365537 cos 10 t
– 0.1434571 2323456 cos 12 t

R (12;7) = + 0.2103024 6186545 sin 2 t
+ 0.1577268 4639909 sin 4 t
– 0.1452088 4271662 sin 6 t
– 0.2784004 0189807 sin 8 t
+ 0.3014335 2867381 sin 10 t
– 0.0806159 4371509 sin 12 t

R (12;8) = + 0.1156663 5402600
+ 0.0420604 9237309 cos 2 t
– 0.2365902 6959863 cos 4 t
– 0.0951368 2798675 cos 6 t
+ 0.3369846 5913201 cos 8 t
– 0.2032923 7980327 cos 10 t
+ 0.0403079 7185754 cos 12 t

R (12;9) = + 0.2478155 0151445 sin 2 t
– 0.0344188 1965478 sin 4 t
– 0.2829991 8382823 sin 6 t
+ 0.2845289 0914622 sin 8 t
– 0.1147293 9884928 sin 10 t
+ 0.0175918 4115689 sin 12 t

R (12;10) = + 0.1304892 4593493
– 0.0745652 8339139 cos 2 t
– 0.2330165 1059809 cos 4 t
+ 0.3106886 8079746 cos 6 t
– 0.1801994 3486252 cos 8 t
+ 0.0530995 1999084 cos 10 t
– 0.0064962 1787122 cos 12 t

R (12;11) = + 0.2528631 7862283 sin 2 t
– 0.3160789 7327853 sin 4 t
+ 0.2107193 1551902 sin 6 t
– 0.0842877 2620761 sin 8 t
+ 0.0191563 0141082 sin 10 t
– 0.0019156 3014108 sin 12 t

R (12;12) = + 0.1806541 8068955
– 0.3096928 8118208 cos 2 t
+ 0.1935580 5073880 cos 4 t
– 0.0860258 0032836 cos 6 t
+ 0.0258077 4009851 cos 8 t
– 0.0046923 1638155 cos 10 t
+ 0.0003910 2636513 cos 12 t

R (13;0) = + 0.1959121 2111545 cos t
+ 0.2003646 6932262 cos 3 t
+ 0.2102592 2089411 cos 5 t
+ 0.2282814 3982789 cos 7 t
+ 0.2614860 1289377 cos 9 t
+ 0.3341210 1647537 cos 11 t
+ 0.6425404 1629879 cos 13 t

R (13;1) = + 0.0145219 7259025 sin t
+ 0.0445560 5226553 sin 3 t
+ 0.0779272 5190473 sin 5 t
+ 0.1184494 2289519 sin 7 t
+ 0.1744436 9553655 sin 9 t
+ 0.2724336 7265893 sin 11 t
+ 0.6191674 3786120 sin 13 t

R (13;2) = + 0.1948327 0727507 cos t
+ 0.1815486 5905177 cos 3 t
+ 0.1533405 5665168 cos 5 t
+ 0.1059443 8459570 cos 7 t
+ 0.0288939 2307156 cos 9 t
– 0.1107600 3844096 cos 11 t
– 0.5538001 9220481 cos 13 t

R (13;3) = + 0.0440582 0365367 sin t
+ 0.1271679 9690947 sin 3 t
+ 0.1943926 0731033 sin 5 t
+ 0.2315898 9541188 sin 7 t
+ 0.2156181 7848692 sin 9 t
+ 0.0918373 7231850 sin 11 t
– 0.4591868 6159251 sin 13 t

R (13;4) = + 0.1914828 9815196 cos t
+ 0.1262046 3741834 cos 3 t
+ 0.0069307 7830011 cos 5 t
– 0.1408720 9847206 cos 7 t
– 0.2682694 7448158 cos 9 t
– 0.2676569 8709692 cos 11 t
+ 0.3521802 4618016 cos 13 t

R (13;5) = + 0.0752215 8653584 sin t
+ 0.1897635 4785177 sin 3 t
+ 0.2045799 2095731 sin 5 t
+ 0.0822878 5678617 sin 7 t
– 0.1585123 9780915 sin 9 t
– 0.3685629 7960543 sin 11 t
+ 0.2490290 4027394 sin 13 t

R (13;6) = + 0.1854788 0054682 cos t
+ 0.0379388 4556639 cos 3 t
– 0.1587810 9440750 cos 5 t
– 0.2388742 1282545 cos 7 t
– 0.0455266 1467967 cos 9 t
+ 0.3813556 5506369 cos 11 t
– 0.1615913 7926427 cos 13 t

R (13;7) = + 0.1097307 3821086 sin t
+ 0.2169675 9600784 sin 3 t
+ 0.0789728 7977297 sin 5 t
– 0.1968977 9648659 sin 7 t
– 0.2344247 5890502 sin 9 t
+ 0.3250357 4727611 sin 11 t
– 0.0955987 4919886 sin 13 t

R (13;8) = + 0.1759606 4022121 cos t
– 0.0759830 0373189 cos 3 t
– 0.2377246 0231906 cos 5 t
– 0.0062208 3071489 cos 7 t
+ 0.3279266 4768498 cos 9 t
– 0.2350585 3201268 cos 11 t
+ 0.0510996 8087232 cos 13 t

R (13;9) = + 0.1509946 9886756 sin t
+ 0.1887433 7358445 sin 3 t
– 0.1421400 7146484 sin 5 t
– 0.2190355 1996221 sin 7 t
+ 0.3119031 9109512 sin 9 t
– 0.1451904 6942176 sin 11 t
+ 0.0243608 1701707 sin 13 t

R (13;10) = + 0.1609211 4148493 cos t
– 0.2011514 2685616 cos 3 t
– 0.1117507 9269787 cos 5 t
+ 0.3129022 1955403 cos 7 t
– 0.2267525 1754694 cos 9 t
+ 0.0759905 3903455 cos 11 t
– 0.0101591 6297253 cos 13 t

R (13;11) = + 0.2086121 2236383 sin t
+ 0.0711177 6898767 sin 3 t
– 0.2923730 5028264 sin 5 t
+ 0.2686671 2728675 sin 7 t
– 0.1284430 0095955 sin 9 t
+ 0.0329009 4767308 sin 11 t
– 0.0035918 0651453 sin 13 t

R (13;12) = + 0.1341009 5123744 cos t
– 0.3017271 4028424 cos 3 t
+ 0.2793769 8174467 cos 5 t
– 0.1564511 0977701 cos 7 t
+ 0.0548594 8005168 cos 9 t
– 0.0111750 7926979 cos 11 t
+ 0.0010159 1629725 cos 13 t

R (13;13) = + 0.3418916 8357553 sin t
– 0.2564187 6268165 sin 3 t
+ 0.1424548 6815647 sin 5 t
– 0.0569819 4726259 sin 7 t
+ 0.0155405 3107161 sin 9 t
– 0.0025900 8851194 sin 11 t
+ 0.0001992 3757784 sin 13 t

R (14;0) = + 0.0942678 8091905
+ 0.1903486 0570193 cos 2 t
+ 0.1961167 4526865 cos 4 t
+ 0.2070121 2000580 cos 6 t
+ 0.2258314 0364269 cos 8 t
+ 0.2597061 1418909 cos 10 t
+ 0.3329565 5665268 cos 12 t
+ 0.6421305 0211589 cos 14 t

R (14;1) = + 0.0262706 0341275 sin 2 t
+ 0.0541333 6460809 sin 4 t
+ 0.0857111 6062947 sin 6 t

+ 0. 1246707 7909741 sin 8 t
+ 0. 1792142 4495253 sin 10 t
+ 0. 2757142 2300389 sin 12 t
+ 0. 6203570 0175874 sin 14 t

R (14; 2) = + 0. 0947200 0764204
+ 0. 1839753 9945858 cos 2 t
+ 0. 1670295 7058556 cos 4 t
+ 0. 1366889 9315709 cos 6 t
+ 0. 0886047 2283701 cos 8 t
+ 0. 0124262 7210519 cos 10 t
− 0. 1242627 2105190 cos 12 t
− 0. 5591822 4473356 cos 14 t

R (14; 3) = + 0. 0780503 2561461 sin 2 t
+ 0. 1482167 7995503 sin 4 t
+ 0. 2013891 1177104 sin 6 t
+ 0. 2251442 5117604 sin 8 t
+ 0. 1983629 7936276 sin 10 t
+ 0. 0696010 4539044 sin 12 t
− 0. 4698070 5638549 sin 14 t

R (14; 4) = + 0. 0961444 4858965
+ 0. 1645549 2162460 cos 2 t
+ 0. 0852749 7130155 cos 4 t
− 0. 0330006 2949843 cos 6 t
− 0. 1660676 8392758 cos 8 t
− 0. 2693277 1816460 cos 10 t
− 0. 2448433 8014964 cos 12 t
+ 0. 3672650 7022446 cos 14 t

R (14; 5) = + 0. 1274288 2371179 sin 2 t
+ 0. 2007969 3433373 sin 4 t
+ 0. 1768557 6139314 sin 6 t
+ 0. 0370702 0326161 sin 8 t
− 0. 1882857 4073454 sin 10 t
− 0. 3552561 1459044 sin 12 t
+ 0. 2664420 8594283 sin 14 t

R (14; 6) = + 0. 0987790 3086563
+ 0. 1310721 7557170 cos 2 t
− 0. 0321204 5409267 cos 4 t
− 0. 1920895 2564022 cos 6 t
− 0. 2148271 2307141 cos 8 t
+ 0. 0039718 8410823 cos 10 t
+ 0. 3839487 9712923 cos 12 t
− 0. 1787347 8487050 cos 14 t

R (14; 7) = + 0. 1723511 1532159 sin 2 t
+ 0. 1880193 9853264 sin 4 t
+ 0. 0052227 6107035 sin 6 t
− 0. 2268170 5219811 sin 8 t
− 0. 1887655 0725698 sin 10 t
+ 0. 3432100 1319450 sin 12 t
− 0. 1103175 0424109 sin 14 t

R (14; 8) = + 0. 1031713 3290399
+ 0. 0813466 2786661 cos 2 t
− 0. 1547569 9935598 cos 4 t
− 0. 2056813 1110987 cos 6 t
+ 0. 0680594 1075018 cos 8 t
+ 0. 3083716 5877888 cos 10 t
− 0. 2627381 8460980 cos 12 t
+ 0. 0622274 6477601 cos 14 t

R (14; 9) = + 0. 2097672 8170122 sin 2 t
+ 0. 0932299 0297832 sin 4 t
− 0. 2045878 4264687 sin 6 t
− 0. 1469077 2590523 sin 8 t
+ 0. 3255983 7328034 sin 10 t
− 0. 1742174 9546453 sin 12 t
+ 0. 0317829 2146988 sin 14 t

R (14; 10) = + 0. 1106389 2860636
+ 0. 0106383 5851984 cos 2 t
− 0. 2340438 8743653 cos 4 t
+ 0. 0035461 1950661 cos 6 t
+ 0. 2875580 5453634 cos 8 t
− 0. 2637668 1639197 cos 10 t
+ 0. 0999360 9518640 cos 12 t
− 0. 0145068 5252706 cos 14 t

R (14; 11) = + 0. 2340438 8743653 sin 2 t
− 0. 0851068 6815874 sin 4 t
− 0. 2198594 0941007 sin 6 t
+ 0. 2991635 3655799 sin 8 t
− 0. 1708584 8531868 sin 10 t
+ 0. 0490009 2409139 sin 12 t
− 0. 0058027 4101082 sin 14 t

R (14; 12) = + 0. 1252739 1794334
− 0. 0939554 3845751 cos 2 t
− 0. 1879108 7691502 cos 4 t
+ 0. 3027453 0169642 cos 6 t
− 0. 2163822 2190214 cos 8 t
+ 0. 0882611 6946008 cos 10 t
− 0. 0200029 4493967 cos 12 t
+ 0. 0019710 9311449 cos 14 t

R (14; 13) = + 0. 2301428 8278036 sin 2 t
− 0. 3068571 7704048 sin 4 t
+ 0. 2301428 8278036 sin 6 t
− 0. 1115844 2801472 sin 8 t
+ 0. 0348701 3375460 sin 10 t
− 0. 0064375 6315470 sin 12 t
+ 0. 0005364 6359622 sin 14 t

R (14; 14) = + 0. 1739716 6681381
− 0. 3044504 1692417 cos 2 t
+ 0. 2029669 4461611 cos 4 t
− 0. 1014834 7230806 cos 6 t
+ 0. 0369030 8083929 cos 8 t
− 0. 0092257 7020982 cos 10 t
+ 0. 0014193 4926305 cos 12 t
− 0. 0001013 8209022 cos 14 t

R (15; 0) = + 0. 1827455 7281604 cos t
+ 0. 1858694 2876162 cos 3 t
+ 0. 1926283 1708022 cos 5 t
+ 0. 2043027 6053963 cos 7 t
+ 0. 2237601 6630531 cos 9 t
+ 0. 2581848 0727536 cos 11 t
+ 0. 3319518 9506832 cos 13 t
+ 0. 6417736 6379874 cos 15 t

R (15; 1) = + 0. 0117961 7600183 sin t
+ 0. 0359934 6010814 sin 3 t
+ 0. 0621705 2200497 sin 5 t
+ 0. 0923138 0540132 sin 7 t
+ 0. 1299929 0964676 sin 9 t
+ 0. 1833233 3411722 sin 11 t
+ 0. 2785562 3495734 sin 13 t
+ 0. 6213946 7798176 sin 15 t

R (15; 2) = + 0. 1819825 3995186 cos t
+ 0. 1726501 0200562 cos 3 t
+ 0. 1531368 2266346 cos 5 t
+ 0. 1213859 6628985 cos 7 t
+ 0. 0730269 6965929 cos 9 t
− 0. 0021605 6123252 cos 11 t
− 0. 1361153 5764897 cos 13 t
− 0. 5639064 8168859 cos 15 t

R (15; 3) = + 0. 0356897 1239799 sin t
+ 0. 1040187 3442491 sin 3 t
+ 0. 1628083 1506496 sin 5 t
+ 0. 2041929 5296320 sin 7 t
+ 0. 2170298 5453349 sin 9 t
+ 0. 1817762 7410165 sin 11 t
+ 0. 0495753 4748227 sin 13 t
− 0. 4792283 5899526 sin 15 t

R (15; 4) = + 0. 1796342 7976484 cos t
+ 0. 1335742 0803026 cos 3 t
+ 0. 0473162 5550915 cos 5 t
− 0. 0663493 4300278 cos 7 t
− 0. 1847351 4721313 cos 9 t
− 0. 2670342 1753556 cos 11 t
− 0. 2232581 1630022 cos 13 t
+ 0. 3808520 8074744 cos 15 t

R (15; 5) = + 0. 0605547 0335557 sin t
+ 0. 1599265 2424676 sin 3 t
+ 0. 1976426 4717591 sin 5 t
+ 0. 1452465 9616056 sin 7 t
− 0. 0032465 2255752 sin 9 t
− 0. 2110239 6623910 sin 11 t
− 0. 3408848 6854009 sin 13 t
+ 0. 2824474 6250464 sin 15 t

R (15; 6) = + 0. 1755042 0401586 cos t
+ 0. 0705016 8879269 cos 3 t
− 0. 0879566 5236226 cos 5 t
− 0. 2082322 6070879 cos 7 t
− 0. 1850498 8721796 cos 9 t
+ 0. 0470465 8149609 cos 11 t
+ 0. 3830935 9218246 cos 13 t
− 0. 1949072 6619809 cos 15 t

R (15; 7) = + 0. 0873077 8471240 sin t
+ 0. 1947635 1974305 sin 3 t
+ 0. 1410356 5222773 sin 5 t
− 0. 0575946 4585923 sin 7 t
− 0. 2400600 6605738 sin 9 t
− 0. 1437685 6323771 sin 11 t
+ 0. 3567944 0776933 sin 13 t
− 0. 1246631 0632904 sin 15 t

R (15; 8) = + 0. 1691857 7314719 cos t
− 0. 0130142 9024209 cos 3 t
− 0. 1952143 5363138 cos 5 t
− 0. 1565658 5533668 cos 7 t
+ 0. 1265935 5053671 cos 9 t
+ 0. 2819762 8857866 cos 11 t
− 0. 2864834 0208241 cos 13 t
+ 0. 0735222 8903000 cos 15 t

R (15; 9) = + 0. 1174466 9203142 sin t
+ 0. 1978026 3530077 sin 3 t
− 0. 0030122 2287260 sin 5 t
− 0. 2293853 3572259 sin 7 t
− 0. 0754272 7778967 sin 9 t
+ 0. 3281497 3415149 sin 11 t
− 0. 2012712 5557831 sin 13 t
+ 0. 0397065 7422974 sin 15 t

R (15; 10) = + 0. 1598655 2897060 cos t
− 0. 1106761 3544118 cos 3 t
− 0. 2041359 8314707 cos 5 t
+ 0. 0965155 5245544 cos 7 t
+ 0. 2448290 2688504 cos 9 t
− 0. 2910372 4504903 cos 11 t
+ 0. 1240914 2458557 cos 13 t
− 0. 0194521 6925936 cos 15 t

$$\begin{aligned} R\ (15;11) = &+ 0.1542324\,7861386 \sin t \\ &+ 0.1542324\,7861386 \sin 3t \\ &- 0.1822747\,4745275 \sin 5t \\ &- 0.1278897\,4121976 \sin 7t \\ &+ 0.3054907\,7719936 \sin 9t \\ &- 0.2090750\,5100506 \sin 11t \\ &+ 0.0667719\,7580168 \sin 13t \\ &- 0.0085303\,4052092 \sin 15t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\ (15;12) = &+ 0.1457119\,0316536 \cos t \\ &- 0.2104727\,4901663 \cos 3t \\ &- 0.0485706\,3438845 \cos 5t \\ &+ 0.2781772\,6967932 \cos 7t \\ &- 0.2605152\,2081079 \cos 9t \\ &+ 0.1232946\,8729376 \cos 11t \\ &- 0.0309085\,8551992 \cos 13t \\ &+ 0.0032833\,2959735 \cos 15t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\ (15;13) = &+ 0.2066801\,3659160 \sin t \\ &+ 0.0370964\,3477285 \sin 3t \\ &- 0.2596750\,4340996 \sin 5t \\ &+ 0.2799094\,6237697 \sin 7t \\ &- 0.1652477\,5489725 \sin 9t \\ &+ 0.0588873\,4750655 \sin 11t \\ &- 0.0119701\,7825338 \sin 13t \\ &+ 0.0010747\,2188653 \sin 15t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\ (15;14) = &+ 0.1210791\,5582851 \cos t \\ &- 0.2825180\,3026652 \cos 3t \\ &+ 0.2825180\,3026652 \cos 5t \\ &- 0.1797842\,0107869 \cos 7t \\ &+ 0.0770503\,7189087 \cos 9t \\ &- 0.0217321\,5617435 \cos 11t \\ &+ 0.0036690\,6532814 \cos 13t \\ &- 0.0002822\,3579447 \cos 15t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\ (15;15) = &+ 0.3315889\,2445478 \sin t \\ &- 0.2579024\,9679817 \sin 3t \\ &+ 0.1547414\,9807890 \sin 5t \\ &- 0.0703370\,4458132 \sin 7t \\ &+ 0.0234456\,8152711 \sin 9t \\ &- 0.0054105\,4189087 \sin 11t \\ &+ 0.0007729\,3455584 \sin 13t \\ &- 0.0000515\,2897039 \sin 15t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\ (16;0) = &+ 0.0883820\,9021792 \\ &+ 0.1780735\,4473536 \cos 2t \\ &+ 0.1821829\,3422925 \cos 4t \\ &+ 0.1897111\,5465195 \cos 6t \\ &+ 0.2020072\,4800902 \cos 8t \\ &+ 0.2219859\,8682311 \cos 10t \\ &+ 0.2568694\,9903817 \cos 12t \\ &+ 0.3310762\,4320475 \cos 14t \\ &+ 0.6414602\,2120920 \cos 16t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\ (16;1) = &+ 0.0215945\,8923741 \sin 2t \\ &+ 0.0441858\,5182425 \sin 4t \\ &+ 0.0690175\,7020482 \sin 6t \\ &+ 0.0979879\,0831548 \sin 8t \\ &+ 0.1345987\,7515862 \sin 10t \\ &+ 0.1869000\,1350598 \sin 12t \\ &+ 0.2810422\,4253121 \sin 14t \\ &+ 0.6223078\,2274768 \sin 16t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\ (16;2) = &+ 0.0887088\,2734042 \\ &+ 0.1734750\,4013238 \cos 2t \\ &+ 0.1613439\,1844480 \cos 4t \\ &+ 0.1400091\,8542730 \cos 6t \\ &+ 0.1073403\,7549427 \cos 8t \\ &+ 0.0589782\,2829356 \cos 10t \\ &- 0.0151658\,3013262 \cos 12t \\ &- 0.1466030\,2461541 \cos 14t \\ &- 0.5680867\,2038471 \cos 16t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\ (16;3) = &+ 0.0643020\,9733036 \sin 2t \\ &+ 0.1236578\,7948146 \sin 4t \\ &+ 0.1725487\,3034421 \sin 6t \\ &+ 0.2040252\,8148494 \sin 8t \\ &+ 0.2079307\,6365445 \sin 10t \\ &+ 0.1659829\,9220416 \sin 12t \\ &+ 0.0314608\,2858772 \sin 14t \\ &- 0.4876428\,4310961 \sin 16t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\ (16;4) = &+ 0.0897265\,5272888 \\ &+ 0.1595138\,7151801 \cos 2t \\ &+ 0.1018434\,7181534 \cos 4t \\ &+ 0.0132032\,4607225 \cos 6t \\ &- 0.0938779\,1898143 \cos 8t \\ &- 0.1982515\,0592352 \cos 10t \\ &- 0.2623916\,9901643 \cos 12t \\ &- 0.2029162\,4723937 \cos 14t \\ &+ 0.3931502\,2902628 \cos 16t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\ (16;5) = &+ 0.1055085\,0867544 \sin 2t \\ &+ 0.1769296\,5300958 \sin 4t \\ &+ 0.1852469\,1624909 \sin 6t \\ &+ 0.1126184\,2725115 \sin 8t \\ &- 0.0385679\,5453807 \sin 10t \\ &- 0.2281019\,0255370 \sin 12t \\ &- 0.3259543\,1292456 \sin 14t \\ &+ 0.2971936\,3825475 \sin 16t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\ (16;6) = &+ 0.0915616\,4149303 \\ &+ 0.1356468\,7628597 \cos 2t \\ &+ 0.0129386\,2512266 \cos 4t \\ &- 0.1294241\,9440879 \cos 6t \\ &- 0.2116280\,9859720 \cos 8t \\ &- 0.1527213\,0826602 \cos 10t \\ &+ 0.0841525\,5761597 \cos 12t \\ &+ 0.3796215\,3768982 \cos 14t \\ &- 0.2101476\,3693543 \cos 16t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\ (16;7) = &+ 0.1440030\,7141516 \sin 2t \\ &+ 0.1883117\,0877367 \sin 4t \\ &+ 0.0876102\,6023160 \sin 6t \\ &- 0.1077505\,4994002 \sin 8t \\ &- 0.2409641\,8043996 \sin 10t \\ &- 0.1008042\,0512222 \sin 12t \\ &+ 0.3665327\,2137711 \sin 14t \\ &- 0.1385672\,4832549 \sin 16t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\ (16;8) = &+ 0.0944823\,3384662 \\ &+ 0.1007811\,5610306 \cos 2t \\ &- 0.0891525\,6116809 \cos 4t \\ &- 0.2050861\,2885308 \cos 6t \\ &- 0.1010748\,0749031 \cos 8t \\ &+ 0.1703178\,0460307 \cos 10t \\ &+ 0.2514494\,8787951 \cos 12t \\ &- 0.3065720\,4828553 \cos 14t \\ &+ 0.0848547\,6336475 \cos 16t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\ (16;9) = &+ 0.1781575\,9724074 \sin 2t \\ &+ 0.1452669\,6390398 \sin 4t \\ &- 0.0829740\,9773589 \sin 6t \\ &- 0.2263307\,4707739 \sin 8t \\ &- 0.0095515\,7281244 \sin 10t \\ &+ 0.3219651\,2828021 \sin 12t \\ &- 0.2260697\,1030488 \sin 14t \\ &+ 0.0480011\,0287295 \sin 16t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\ (16;10) = &+ 0.0990443\,9790951 \\ &+ 0.0528236\,7888507 \cos 2t \\ &- 0.1796005\,0820924 \cos 4t \\ &- 0.1411832\,8720192 \cos 6t \\ &+ 0.1624728\,3051014 \cos 8t \\ &+ 0.1927017\,6562969 \cos 10t \\ &- 0.3091847\,4983780 \cos 12t \\ &+ 0.1478324\,2160703 \cos 14t \\ &- 0.0249065\,4929249 \cos 16t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\ (16;11) = &+ 0.2054358\,9850770 \sin 2t \\ &+ 0.0410871\,7970154 \sin 4t \\ &- 0.2210558\,1806366 \sin 6t \\ &- 0.0356541\,6420382 \sin 8t \\ &+ 0.2926775\,8967308 \sin 10t \\ &- 0.2417430\,6938192 \sin 12t \\ &+ 0.0855961\,1435597 \sin 14t \\ &- 0.0117410\,5993378 \sin 16t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\ (16;12) = &+ 0.1065426\,2817817 \\ &- 0.0126272\,7445075 \cos 2t \\ &- 0.2209773\,0288806 \cos 4t \\ &+ 0.0723198\,4458155 \cos 6t \\ &+ 0.2229861\,8745977 \cos 8t \\ &- 0.2874250\,2333691 \cos 10t \\ &+ 0.1577526\,2801579 \cos 12t \\ &- 0.0435331\,9093859 \cos 14t \\ &+ 0.0049615\,0337903 \cos 16t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\ (16;13) = &+ 0.2209998\,5044211 \sin 2t \\ &- 0.1189999\,1946883 \sin 4t \\ &- 0.1622726\,1745749 \sin 6t \\ &+ 0.2920907\,1142348 \sin 8t \\ &- 0.2122026\,5359826 \sin 10t \\ &+ 0.0859509\,9078518 \sin 12t \\ &- 0.0191398\,4718729 \sin 14t \\ &+ 0.0018426\,5609567 \sin 16t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\ (16;14) = &+ 0.1209570\,3864582 \\ &- 0.1075173\,6768517 \cos 2t \\ &- 0.1505243\,1475924 \cos 4t \\ &+ 0.2873646\,0090401 \cos 6t \\ &- 0.2394705\,0075334 \cos 8t \\ &+ 0.1210510\,2235883 \cos 10t \\ &- 0.0383453\,5490870 \cos 12t \\ &+ 0.0070675\,7521847 \cos 14t \\ &- 0.0005826\,9902067 \cos 16t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\ (16;15) = &+ 0.2116481\,4993652 \sin 2t \\ &- 0.2963074\,0991113 \sin 4t \\ &+ 0.2424333\,3538183 \sin 6t \\ &- 0.1346851\,8632324 \sin 8t \\ &+ 0.0518019\,9473971 \sin 10t \\ &- 0.0133205\,1293307 \sin 12t \\ &+ 0.0020720\,7978959 \sin 14t \\ &- 0.0001480\,0569926 \sin 16t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\ (16;16) = &+ 0.1683650\,7230141 \\ &- 0.2993156\,8409140 \cos 2t \\ &+ 0.2095209\,7886398 \cos 4t \\ &- 0.1142841\,7028944 \cos 6t \\ &+ 0.0476184\,0428727 \cos 8t \\ &- 0.0146518\,1670377 \cos 10t \\ &+ 0.0031396\,7500795 \cos 12t \\ &- 0.0004186\,2333439 \cos 14t \\ &+ 0.0000261\,6395840 \cos 16t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\ (17;0) = &+ 0.1719281\,4391546 \cos t \\ &+ 0.1742208\,2316766 \cos 3t \\ &+ 0.1790941\,3290662 \cos 5t \\ &+ 0.1872347\,7531147 \cos 7t \end{aligned}$$

+ 0. 2000371 5311055 cos 9 t
+ 0. 2204491 0750958 cos 11 t
+ 0. 2557209 6471111 cos 13 t
+ 0. 3303062 4608519 cos 15 t
+ 0. 6411827 1298889 cos 17 t

R (17; 1) = + 0. 0098284 9495908 sin t
+ 0. 0298786 2467562 sin 3 t
+ 0. 0511906 5066802 sin 5 t
+ 0. 0749244 9779592 sin 7 t
+ 0. 1029182 6620318 sin 9 t
+ 0. 1386246 0345735 sin 11 t
+ 0. 1900417 2910335 sin 13 t
+ 0. 2832352 6933672 sin 15 t
+ 0. 6231175 9254078 sin 17 t

R (17; 2) = + 0. 1713656 6517500 cos t
+ 0. 1645110 3856800 cos 3 t
+ 0. 1503224 4083603 cos 5 t
+ 0. 1276886 6423288 cos 7 t
+ 0. 0944442 7827876 cos 9 t
+ 0. 0462584 2201408 cos 11 t
– 0. 0268298 8476817 cos 13 t
– 0. 1559487 0521498 cos 15 t
– 0. 5718119 1912160 cos 17 t

R (17; 3) = + 0. 0296814 0387559 sin t
+ 0. 0870654 5136841 sin 3 t
+ 0. 1383194 9330557 sin 5 t
+ 0. 1786318 5900158 sin 7 t
+ 0. 2017514 8910434 sin 9 t
+ 0. 1983017 9458574 sin 11 t
+ 0. 1510298 5163398 sin 13 t
+ 0. 0150061 7115594 sin 15 t
– 0. 4952036 4814605 sin 17 t

R (17; 4) = + 0. 1696433 5347090 cos t
+ 0. 1357146 8277672 cos 3 t
+ 0. 0711790 2942835 cos 5 t
– 0. 0168672 7303423 cos 7 t
– 0. 1163918 1618645 cos 9 t
– 0. 2077062 3872149 cos 11 t
– 0. 2561165 1168335 cos 13 t
– 0. 1837873 1162463 cos 15 t
+ 0. 4043320 8557418 cos 17 t

R (17; 5) = + 0. 0501561 0890225 sin t
+ 0. 1364246 1621412 sin 3 t
+ 0. 1823297 3183039 sin 5 t
+ 0. 1671496 1719201 sin 7 t
+ 0. 0806706 6466796 sin 9 t
– 0. 0691462 8400111 sin 11 t
– 0. 2406290 6832385 sin 13 t
– 0. 3108125 4658497 sin 15 t
+ 0. 3108125 4658497 sin 17 t

R (17; 6) = + 0. 1666511 7243142 cos t
+ 0. 0888806 2529676 cos 3 t
– 0. 0372925 7005458 cos 5 t
– 0. 1580272 6560630 cos 7 t
– 0. 2058860 6384302 cos 9 t
– 0. 1198689 7517545 cos 11 t
+ 0. 1158733 4266960 cos 13 t
+ 0. 3741743 3570392 cos 15 t
– 0. 2245046 0142235 cos 17 t

R (17; 7) = + 0. 0717966 9450813 sin t
+ 0. 1723120 6681952 sin 3 t
+ 0. 1634755 5057236 sin 5 t
+ 0. 0347435 7524449 sin 7 t
– 0. 1456016 8816335 sin 9 t
– 0. 2330036 8675823 sin 11 t
– 0. 0606178 4568433 sin 13 t
+ 0. 3730671 8263078 sin 15 t
– 0. 1519903 3366439 sin 17 t

R (17; 8) = + 0. 1621722 0222643 cos t
+ 0. 0259475 5235623 cos 3 t
– 0. 1417135 5517633 cos 5 t
– 0. 1931550 3135109 cos 7 t
– 0. 0458164 8230733 cos 9 t
+ 0. 2010222 4627628 cos 11 t
+ 0. 2187526 4169252 cos 13 t
– 0. 3233367 0105840 cos 15 t
+ 0. 0961271 2734169 cos 17 t

R (17; 9) = + 0. 0954137 5658249 sin t
+ 0. 1882831 4632277 sin 3 t
+ 0. 0763310 0526599 sin 5 t
– 0. 1408654 0062723 sin 7 t
– 0. 2044093 3150678 sin 9 t
+ 0. 0482692 5707629 sin 11 t
+ 0. 3091520 0953983 sin 13 t
– 0. 2485047 0008611 sin 15 t
+ 0. 0565562 4208856 sin 17 t

R (17; 10) = + 0. 1558100 1204614 cos t
– 0. 0498592 0385476 cos 3 t
– 0. 1994368 1541906 cos 5 t
– 0. 0668566 5971434 cos 7 t
+ 0. 2026619 7371036 cos 9 t
+ 0. 1369758 3476584 cos 11 t
– 0. 3192284 0909609 cos 13 t
+ 0. 1707185 8642554 cos 15 t
– 0. 0307853 1886362 cos 17 t

R (17; 11) = + 0. 1224221 5232197 sin t
+ 0. 1762878 9934363 sin 3 t
– 0. 0623240 0481846 sin 5 t
– 0. 2147345 2569268 sin 7 t
+ 0. 0459802 9726117 sin 9 t
+ 0. 2659199 0467495 sin 11 t
– 0. 2683107 5560904 sin 13 t
+ 0. 1049499 5067144 sin 15 t
– 0. 0153926 5943181 sin 17 t

R (17; 12) = + 0. 1468053 7258986 cos t
– 0. 1331035 3781480 cos 3 t
– 0. 1644220 1730064 cos 5 t
+ 0. 1569482 8924152 cos 7 t
+ 0. 1523490 7197437 cos 9 t
– 0. 2981278 3356709 cos 11 t
+ 0. 1900462 2778905 cos 13 t
– 0. 0574970 5991270 cos 15 t
+ 0. 0070014 8700044 cos 17 t

R (17; 13) = + 0. 1558259 1021587 sin t
+ 0. 1246607 2817270 sin 3 t
– 0. 2013750 2243282 sin 5 t
– 0. 0518693 2395997 sin 7 t
+ 0. 2734287 8920074 sin 9 t
– 0. 2491202 8249681 sin 11 t
+ 0. 1144679 1984443 sin 13 t
– 0. 0278039 0232308 sin 15 t
+ 0. 0028583 4509863 sin 17 t

R (17; 14) = + 0. 1334772 2303161 cos t
– 0. 2135635 5685058 cos 3 t
+ 0. 0000000 0000000 cos 5 t
+ 0. 2378321 4285633 cos 7 t
– 0. 2744217 0329576 cos 9 t
+ 0. 1642796 5911583 cos 11 t
– 0. 0582446 0641379 cos 13 t
+ 0. 0116675 8942584 cos 15 t
– 0. 0010267 4786947 cos 17 t

R (17; 15) = + 0. 2043444 3044444 sin t
+ 0. 0108983 6962370 sin 3 t
– 0. 2288657 6209778 sin 5 t
+ 0. 2808807 0802910 sin 7 t
– 0. 1933889 0153950 sin 9 t
+ 0. 0857389 2186480 sin 11 t
– 0. 0244641 7237209 sin 13 t
+ 0. 0041249 9479638 sin 15 t
– 0. 0003143 7604684 sin 17 t

R (17; 16) = + 0. 1106734 6671361 cos t
– 0. 2656163 2011266 cos 3 t
+ 0. 2817142 7890737 cos 5 t
– 0. 1971999 9523516 cos 7 t
+ 0. 0975164 8116024 cos 9 t
– 0. 0340533 7437342 cos 11 t
+ 0. 0080489 7939735 cos 13 t
– 0. 0011609 1049000 cos 15 t
+ 0. 0000773 9403267 cos 17 t

R (17; 17) = + 0. 3226658 3022141 sin t
– 0. 2581326 3022141 sin 3 t
+ 0. 1642662 4083999 sin 5 t
– 0. 0821331 2042000 sin 7 t
+ 0. 0315896 6170000 sin 9 t
– 0. 0090256 1762857 sin 11 t
+ 0. 0018051 2352571 sin 13 t
– 0. 0002256 4044071 sin 15 t
+ 0. 0000132 7296710 sin 17 t

R (18; 0) = + 0. 0834758 7748147
+ 0. 1679338 2410976 cos 2 t
+ 0. 1709871 6636630 cos 4 t
+ 0. 1764675 2426266 cos 6 t
+ 0. 1851057 9468111 cos 8 t
+ 0. 1983276 3715834 cos 10 t
+ 0. 2191048 1819397 cos 12 t
+ 0. 2547093 5115049 cos 14 t
+ 0. 3296238 6619475 cos 16 t
+ 0. 6409352 9537868 cos 18 t

R (18; 1) = + 0. 0181616 4240201 sin 2 t
+ 0. 0369837 0816409 sin 4 t
+ 0. 0572536 2513863 sin 6 t
+ 0. 0800750 0019389 sin 8 t
+ 0. 1072433 0383111 sin 10 t
+ 0. 1421739 7993610 sin 12 t
+ 0. 1928234 6028833 sin 14 t
+ 0. 2851842 7740123 sin 16 t
+ 0. 6238406 0681519 sin 18 t

R (18; 2) = + 0. 0837210 3477138
+ 0. 1644872 0949200 cos 2 t
+ 0. 1554435 4691242 cos 4 t
+ 0. 1397256 2002239 cos 6 t
+ 0. 1161665 9939702 cos 8 t
+ 0. 0825884 0344314 cos 10 t
+ 0. 0346970 9987712 cos 12 t
– 0. 0373475 7278440 cos 14 t
– 0. 1643293 2025135 cos 16 t
– 0. 5751526 2087972 cos 18 t

R (18; 3) = + 0. 0541634 7940233 sin 2 t
+ 0. 1050443 2368937 sin 4 t

+ 0. 1490653 0228676 sin 6 t
+ 0. 1819487 4786433 sin 8 t
+ 0. 1979911 0398183 sin 10 t
+ 0. 1884469 1743091 sin 12 t
+ 0. 1369184 6344590 sin 14 t
+ 0. 0000000 0000000 sin 16 t
– 0. 5020343 6596829 sin 18 t

R (18; 4) = + 0. 0844787 0663811
+ 0. 1540494 0622244 cos 2 t
+ 0. 1105903 0687171 cos 4 t
+ 0. 0425208 3317252 cos 6 t
– 0. 0430372 8053899 cos 8 t
– 0. 1346452 0625769 cos 10 t
– 0. 2139567 6610810 cos 12 t
– 0. 2487247 4060067 cos 14 t
– 0. 1658164 9373378 cos 16 t
+ 0. 4145412 3433445 cos 18 t

R (18; 5) = + 0. 0891715 4075753 sin 2 t
+ 0. 1556448 7114042 sin 4 t
+ 0. 1793408 0504802 sin 6 t
+ 0. 1458211 3173905 sin 8 t
+ 0. 0503658 5142303 sin 10 t
– 0. 0953867 5534810 sin 12 t
– 0. 2494959 8195738 sin 14 t
– 0. 2956989 4157912 sin 16 t
+ 0. 3234207 1735216 sin 18 t

R (18; 6) = + 0. 0858218 5454419
+ 0. 1363052 9839371 cos 2 t
+ 0. 0418553 6435524 cos 4 t
– 0. 0786412 0246097 cos 6 t
– 0. 1758094 7578364 cos 8 t
– 0. 1938140 6065306 cos 10 t
– 0. 0877534 3885931 cos 12 t
+ 0. 1428187 2174352 cos 14 t
+ 0. 3672481 4162620 cos 16 t
– 0. 2380312 0290587 cos 18 t

R (18; 7) = + 0. 1224158 4556379 sin 2 t
+ 0. 1780594 1172915 sin 4 t
+ 0. 1284082 2961237 sin 6 t
– 0. 0136968 7782532 sin 8 t
– 0. 1724339 0833661 sin 10 t
– 0. 2188705 1708622 sin 12 t
– 0. 0235589 7926970 sin 14 t
+ 0. 3769436 6831516 sin 16 t
– 0. 1649128 5488788 sin 18 t

R (18; 8) = + 0. 0878972 9415036
+ 0. 1106471 8204810 cos 2 t
– 0. 0413634 3254135 cos 4 t
– 0. 1671024 8237158 cos 6 t
– 0. 1671024 8237158 cos 8 t
+ 0. 0054235 2699406 cos 10 t
+ 0. 2207344 4949986 cos 12 t
+ 0. 1852785 2917099 cos 14 t
– 0. 3371233 3879233 cos 16 t
+ 0. 1072665 1688847 cos 18 t

R (18; 9) = + 0. 1529258 7414648 sin 2 t
+ 0. 1631209 3242291 sin 4 t
+ 0. 0067967 0551762 sin 6 t
– 0. 1768094 0227659 sin 8 t
– 0. 1708682 2612482 sin 10 t
+ 0. 0971410 5921289 sin 12 t
+ 0. 2914724 0452679 sin 14 t
– 0. 2685819 0155348 sin 16 t
+ 0. 0652803 2329425 sin 18 t

R (18; 10) = + 0. 0909823 4317882
+ 0. 0759970 1606701 cos 2 t
– 0. 1250204 4333278 cos 4 t
– 0. 1828209 9076403 cos 6 t
+ 0. 0052396 2486427 cos 8 t
+ 0. 2208876 1392077 cos 10 t
+ 0. 0816183 8502854 cos 12 t
– 0. 3223274 9981083 cos 14 t
+ 0. 1924544 1533590 cos 16 t
– 0. 0370104 6448767 cos 18 t

R (18; 11) = + 0. 1793390 5188676 sin 2 t
+ 0. 1043427 2109775 sin 4 t
– 0. 1369498 2144080 sin 6 t
– 0. 1787689 9768495 sin 8 t
+ 0. 1119586 4523382 sin 10 t
+ 0. 2298458 5416637 sin 12 t
– 0. 2887552 5538054 sin 14 t
+ 0. 1244086 2900116 sin 16 t
– 0. 0194388 4828143 sin 18 t

R (18; 12) = + 0. 0956294 0698122
+ 0. 0303763 9986462 cos 2 t
– 0. 1890087 1026876 cos 4 t
– 0. 0787536 2927865 cos 6 t
+ 0. 2028869 7221157 cos 8 t
+ 0. 0776521 7991811 cos 10 t
– 0. 2948737 2880757 cos 12 t
+ 0. 2191372 8402726 cos 14 t
– 0. 0724360 3044641 cos 16 t
+ 0.0093898 5579861 cos 18 t

R (18; 13) = + 0. 1994675 9957415 sin 2 t
+ 0. 0000000 0000000 sin 4 t
– 0. 2148112 6107985 sin 6 t
+ 0. 0480696 5282906 sin 8 t
+ 0. 2328373 8089075 sin 10 t
– 0. 2746837 3045176 sin 12 t
+ 0. 1430823 2599899 sin 14 t
– 0. 0377690 1293712 sin 16 t
+ 0. 0041309 8579000 sin 18 t

R (18; 14) = + 0. 1031069 5075993
– 0. 0303255 7375292 cos 2 t
– 0. 2037878 5561963 cos 4 t
+ 0. 1188762 4911145 cos 6 t
+ 0. 1579474 6385437 cos 8 t
– 0. 2844241 9242949 cos 10 t
+ 0. 2032449 6422936 cos 12 t
– 0. 0804539 5923345 cos 14 t
+ 0. 0174488 6859014 cos 16 t
– 0. 0016329 1550977 cos 18 t

R (18; 15) = + 0. 2090485 8985903 sin 2 t
– 0. 1418996 4887401 sin 4 t
– 0. 1123372 2202526 sin 6 t
+ 0. 2728839 4014233 sin 8 t
– 0. 2387734 4762454 sin 10 t
+ 0. 1221480 4939704 sin 12 t
– 0. 0385448 5654510 sin 14 t
+ 0. 0070170 1560366 sin 16 t
– 0. 0005685 0820863 sin 18 t

R (18; 16) = + 0. 1172937 3697994
– 0. 1172937 3697994 cos 2 t
– 0. 1194263 5037958 cos 4 t
+ 0. 2687092 8835405 cos 6 t
– 0. 2526326 6426449 cos 8 t
+ 0. 1492829 3797447 cos 10 t
– 0. 0590569 8645144 cos 12 t
+ 0. 0153384 1175892 cos 14 t
– 0. 0023835 0909371 cos 16 t
+ 0. 0001688 7210178 cos 18 t

R (18; 17) = + 0. 1962699 6218784 sin 2 t
– 0. 2854835 8136413 sin 4 t
+ 0. 2497981 3369361 sin 6 t
– 0. 1537219 2842684 sin 8 t
+ 0. 0686258 6090484 sin 10 t
– 0. 0219602 7548955 sin 12 t
+ 0. 0048038 1026334 sin 14 t
– 0. 0006458 9045557 sin 16 t
+ 0. 0000403 6815347 sin 18 t

R (18; 18) = + 0. 1635583 0182320
– 0. 2944049 4328176 cos 2 t
+ 0. 2141126 8602310 cos 4 t
– 0. 1248990 6684681 cos 6 t
+ 0. 0576457 2316006 cos 8 t
– 0. 0205877 5827145 cos 10 t
+ 0. 0054900 6887239 cos 12 t
– 0. 0010293 8791357 cos 14 t
+ 0. 0001211 0446042 cos 16 t
– 0. 0000067 2802558 cos 18 t

R (19; 0) = + 0. 1628343 5394039 cos t
+ 0. 1645758 9783280 cos 3 t
+ 0. 1682331 4000687 cos 5 t
+ 0. 1742059 1420829 cos 7 t
+ 0. 1832555 7208924 cos 9 t
+ 0. 1968300 5891067 cos 11 t
+ 0. 2179189 9379395 cos 13 t
+ 0. 2538115 3394825 cos 15 t
+ 0. 3290149 5141440 cos 17 t
+ 0. 6407133 2643857 cos 19 t

R (19; 1) = + 0. 0083532 2610593 sin t
+ 0. 0253276 9626771 sin 3 t
+ 0. 0431508 8993759 sin 5 t
+ 0. 0625560 2387401 sin 7 t
+ 0. 0846073 1243814 sin 9 t
+ 0. 1110688 5871509 sin 11 t
+ 0. 1453271 1059150 sin 13 t
+ 0. 1953038 5450532 sin 15 t
+ 0. 2869278 8501399 sin 17 t
+ 0. 6244901 0267752 sin 19 t

R (19; 2) = + 0. 1624052 7716312 cos t
+ 0. 1571944 1265522 cos 3 t
+ 0. 1464831 9116674 cos 5 t
+ 0. 1296206 8287751 cos 7 t
+ 0. 1054085 8516400 cos 9 t
+ 0. 0716692 4190049 cos 11 t
+ 0. 0241494 1846647 cos 13 t
– 0. 0468782 8290550 cos 15 t
– 0. 1718870 3732018 cos 17 t
– 0. 5781654 8916787 cos 19 t

R (19; 3) = + 0. 0251933 3088338 sin t
+ 0. 0742327 5570452 sin 3 t
+ 0. 1191256 8459297 sin 5 t
+ 0. 1567250 2164616 sin 7 t
+ 0. 1831684 2189271 sin 9 t
+ 0. 1931916 5218647 sin 11 t
+ 0. 1785693 4823658 sin 13 t
+ 0. 1236249 3339455 sin 15 t
– 0. 0137361 0371051 sin 17 t
– 0. 5082358 3728872 sin 19 t

R (19; 4) =	+ 0.1610972 9390371	cos	t
	+ 0.1352528 0825071	cos	3 t
	+ 0.0855739 6360661	cos	5 t
	+ 0.0162951 0962605	cos	7 t
	– 0.0656052 3281147	cos	9 t
	– 0.1493067 0311172	cos	11 t
	– 0.2176773 4686337	cos	13 t
	– 0.2405907 5179636	cos	15 t
	– 0.1489371 3206441	cos	17 t
	+ 0.4238979 9126025	cos	19 t
R (19; 5) =	+ 0.0424528 6446877	sin	t
	+ 0.1178237 2545077	sin	3 t
	+ 0.1655434 6936166	sin	5 t
	+ 0.1704804 3001399	sin	7 t
	+ 0.1229538 5516650	sin	9 t
	+ 0.0222050 3906809	sin	11 t
	– 0.1177451 4137421	sin	13 t
	– 0.2554163 8359636	sin	15 t
	– 0.2807768 7558465	sin	17 t
	+ 0.3351207 8698814	sin	19 t
R (19; 6) =	+ 0.1588440 7392930	cos	t
	+ 0.0993837 2539961	cos	3 t
	– 0.0016988 6710085	cos	5 t
	– 0.1110496 1457437	cos	7 t
	– 0.1848347 3007866	cos	9 t
	– 0.1775366 3827265	cos	11 t
	– 0.0571278 1692482	cos	13 t
	+ 0.1655738 4227363	cos	15 t
	+ 0.3592274 5896794	cos	17 t
	– 0.2507814 3361913	cos	19 t
R (19; 7) =	+ 0.0604798 5021438	sin	t
	+ 0.1523316 0134210	sin	3 t
	+ 0.1675324 1931042	sin	5 t
	+ 0.0889160 7760847	sin	7 t
	– 0.0558488 7854902	sin	9 t
	– 0.1898520 6785871	sin	11 t
	– 0.2006079 9585397	sin	13 t
	+ 0.0102700 3391744	sin	15 t
	+ 0.3786219 1708957	sin	17 t
	– 0.1773292 5230777	sin	19 t
R (19; 8) =	+ 0.1555196 1483698	cos	t
	+ 0.0507309 9735324	cos	3 t
	– 0.0948087 4915195	cos	5 t
	– 0.1825804 1165970	cos	7 t
	– 0.1329369 6406057	cos	9 t
	+ 0.0507096 7284826	cos	11 t
	+ 0.2314180 9760628	cos	13 t
	+ 0.1519965 0197809	cos	15 t
	– 0.3482682 6128914	cos	17 t
	+ 0.1182195 0153851	cos	19 t
R (19; 9) =	+ 0.0797539 7230921	sin	t
	+ 0.1735821 7504286	sin	3 t
	+ 0.1178065 2118877	sin	5 t
	– 0.0544524 3559372	sin	7 t
	– 0.1936272 9106087	sin	9 t
	– 0.1311529 2080856	sin	11 t
	+ 0.1370903 9183388	sin	13 t
	+ 0.2703575 4564850	sin	15 t
	– 0.2863787 3353878	sin	17 t
	+ 0.0740979 9399255	sin	19 t
R (19; 10) =	+ 0.1509068 0096344	cos	t
	– 0.0088768 7064491	cos	3 t
	– 0.1668851 6812427	cos	5 t
	– 0.1433956 0272541	cos	7 t
	+ 0.0676628 6016049	cos	9 t
	+ 0.2216941 5405489	cos	11 t
	+ 0.0291860 7469614	cos	13 t
	– 0.3196356 2683704	cos	15 t
	+ 0.2128552 1875462	cos	17 t
	– 0.0435118 4029790	cos	19 t
R (19; 11) =	+ 0.1010228 4985053	sin	t
	+ 0.1766549 2995254	sin	3 t
	+ 0.0205287 0745626	sin	5 t
	– 0.1786080 6608704	sin	7 t
	– 0.1265496 2134150	sin	9 t
	+ 0.1608976 1696026	sin	11 t
	+ 0.1882585 2306109	sin	13 t
	– 0.3033802 2021136	sin	15 t
	+ 0.1436386 1806186	sin	17 t
	– 0.0238324 1644972	sin	19 t
R (19; 12) =	+ 0.1446281 3003240	cos	t
	– 0.0765678 3354656	cos	3 t
	– 0.1871658 1533605	cos	5 t
	+ 0.0091619 6298848	cos	7 t
	+ 0.2152466 3696307	cos	9 t
	+ 0.0065442 5927748	cos	11 t
	– 0.2803620 1677404	cos	13 t
	+ 0.2444280 8401404	cos	15 t
	– 0.0880202 8728216	cos	17 t
	+ 0.0121068 7966335	cos	19 t
R (19; 13) =	+ 0.1256238 5435578	sin	t
	+ 0.1551824 0832184	sin	3 t
	– 0.1034549 3888123	sin	5 t
	– 0.1793627 0468757	sin	7 t
	+ 0.1257152 8075992	sin	9 t
	+ 0.1789174 9785000	sin	11 t
	– 0.2889571 2536017	sin	13 t
	+ 0.1707268 8455696	sin	15 t
	– 0.0488197 1228271	sin	17 t
	+ 0.0056624 7446539	sin	19 t
R (19; 14) =	+ 0.1359757 1683387	cos	t
	– 0.1476100 0276618	cos	3 t
	– 0.1255533 3568618	cos	5 t
	+ 0.1881994 9070630	cos	7 t
	+ 0.0681276 9358439	cos	9 t
	– 0.2727717 9998348	cos	11 t
	+ 0.2357154 8060773	cos	13 t
	– 0.1040093 9755351	cos	15 t
	+ 0.0243406 4148178	cos	17 t
	– 0.0024144 8722473	cos	19 t
R (19; 15) =	+ 0.1564329 2121750	sin	t
	+ 0.0995482 2259296	sin	3 t
	– 0.2079451 7608306	sin	5 t
	+ 0.0085083 9509342	sin	7 t
	+ 0.2297266 6752221	sin	9 t
	– 0.2671636 0593323	sin	11 t
	+ 0.1581953 7448685	sin	13 t
	– 0.0550636 1607808	sin	15 t
	+ 0.0107856 4201548	sin	17 t
	– 0.0009259 1358370	sin	19 t
R (19; 16) =	+ 0.1233959 5235014	cos	t
	– 0.2131384 6315025	cos	3 t
	+ 0.0373927 1283338	cos	5 t
	+ 0.1973184 6925921	cos	7 t
	– 0.2744049 8494648	cos	9 t
	+ 0.1961679 2424895	cos	11 t
	– 0.0878728 7515844	cos	13 t
	+ 0.0249989 7430376	cos	15 t
	– 0.0041707 2566218	cos	17 t
	+ 0.0003130 1592191	cos	19 t
R (19; 17) =	+ 0.2018542 7786775	sin	t
	– 0.0097149 1176904	sin	3 t
	– 0.2007748 4322675	sin	5 t
	+ 0.2755049 3375780	sin	7 t
	– 0.2137280 5891880	sin	9 t
	+ 0.1110987 3458949	sin	11 t
	– 0.0397314 9813234	sin	13 t
	+ 0.0094731 3794673	sin	15 t
	– 0.0013651 6734009	sin	17 t
	+ 0.0000903 5991339	sin	19 t
R (19; 18) =	+ 0.1021421 2675073	cos	t
	– 0.2507124 9293361	cos	3 t
	+ 0.2785694 3659290	cos	5 t
	– 0.2099984 9835465	cos	7 t
	+ 0.1157134 5827705	cos	9 t
	– 0.0471425 2003880	cos	11 t
	+ 0.0139284 7182965	cos	13 t
	– 0.0028361 1417346	cos	15 t
	+ 0.0003571 4030332	cos	17 t
	– 0.0000210 0825314	cos	19 t
R (19; 19) =	+ 0.3148231 7821762	sin	t
	– 0.2575826 0035987	sin	3 t
	+ 0.1717217 3357325	sin	5 t
	– 0.0924655 4884713	sin	7 t
	+ 0.0396280 9236306	sin	9 t
	– 0.0132093 6412102	sin	11 t
	+ 0.0033023 4103025	sin	13 t
	– 0.0005827 6606416	sin	15 t
	+ 0.0000647 5178491	sin	17 t
	– 0.0000034 0798868	sin	19 t
R (20; 0) =	+ 0.0793047 6268658		
	+ 0.1593684 2262375	cos	2 t
	+ 0.1617120 7589763	cos	4 t
	+ 0.1658585 3938219	cos	6 t
	+ 0.1722377 1397381	cos	8 t
	+ 0.1816324 9837238	cos	10 t
	+ 0.1955072 0310916	cos	12 t
	+ 0.2168651 3286058	cos	14 t
	+ 0.2530093 2167068	cos	16 t
	+ 0.3284682 4216895	cos	18 t
	+ 0.6405130 7222945	cos	20 t
R (20; 1) =	+ 0.0155527 6552642	sin	2 t
	+ 0.0315629 6533303	sin	4 t
	+ 0.0485584 0820466	sin	6 t
	+ 0.0672347 1905261	sin	8 t
	+ 0.0886275 8420571	sin	10 t
	+ 0.1144772 9626571	sin	12 t
	+ 0.1481470 8928504	sin	14 t
	+ 0.1975294 5238005	sin	16 t
	+ 0.2884969 6334455	sin	18 t
	+ 0.6250767 5391321	sin	20 t
R (20; 2) =	+ 0.0794942 6059758		
	+ 0.1567063 8931197	cos	2 t
	+ 0.1497481 2445246	cos	4 t
	+ 0.1377540 2407998	cos	6 t
	+ 0.1200323 5254714	cos	8 t
	+ 0.0953681 7051691	cos	10 t
	+ 0.0615919 4345884	cos	12 t
	+ 0.0144922 2199031	cos	14 t
	– 0.0555535 1762954	cos	16 t
	+ 0.1787374 0454721	cos	18 t
	– 0.5808965 6477844	cos	20 t

$$\begin{aligned} R\,(20;3) = {} & + 0.0464345\,1449030 \sin 2t \\ & + 0.0905928\,2728989 \sin 4t \\ & + 0.1300353\,1709951 \sin 6t \\ & + 0.1619470\,3626619 \sin 8t \\ & + 0.1827965\,0500705 \sin 10t \\ & + 0.1876788\,9029036 \sin 12t \\ & + 0.1688041\,6318336 \sin 14t \\ & + 0.1111116\,0108272 \sin 16t \\ & - 0.0263533\,9256449 \sin 18t \\ & - 0.5138911\,5500755 \sin 20t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\,(20;4) = {} & + 0.0800766\,4391886 \\ & + 0.1486590\,3272975 \cos 2t \\ & + 0.1149650\,8883482 \cos 4t \\ & + 0.0615107\,3472561 \cos 6t \\ & - 0.0073694\,4584368 \cos 8t \\ & - 0.0849286\,6252419 \cos 10t \\ & - 0.1609525\,7798727 \cos 12t \\ & - 0.2193990\,4485416 \cos 14t \\ & - 0.2319875\,1464087 \cos 16t \\ & - 0.1330781\,0917383 \cos 18t \\ & + 0.4325038\,5481496 \cos 20t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\,(20;5) = {} & + 0.0766283\,6738647 \sin 2t \\ & + 0.1374803\,0619337 \sin 4t \\ & + 0.1682356\,7355618 \sin 6t \\ & + 0.1576629\,3257741 \sin 8t \\ & + 0.0996867\,5797921 \sin 10t \\ & - 0.0035967\,0565335 \sin 12t \\ & - 0.1366748\,1482718 \sin 14t \\ & - 0.2589628\,0704097 \sin 16t \\ & - 0.2661562\,1834767 \sin 18t \\ & + 0.3460030\,8385197 \sin 20t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\,(20;6) = {} & + 0.0810967\,6968057 \\ & + 0.1350319\,4186047 \cos 2t \\ & + 0.0607369\,8399099 \cos 4t \\ & - 0.0399329\,9118004 \cos 6t \\ & - 0.1352004\,9476028 \cos 8t \\ & - 0.1869673\,0411450 \cos 10t \\ & - 0.1586319\,8147296 \cos 12t \\ & - 0.0284116\,9817426 \cos 14t \\ & + 0.1846760\,3813271 \cos 16t \\ & + 0.3504109\,4414924 \cos 18t \\ & - 0.2628082\,0811193 \cos 20t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\,(20;7) = {} & + 0.1056163\,6221382 \sin 2t \\ & + 0.1646372\,7050978 \sin 4t \\ & + 0.1462380\,3998836 \sin 6t \\ & + 0.0488825\,5678416 \sin 8t \\ & - 0.0910744\,8428780 \sin 10t \\ & - 0.1994729\,1939122 \sin 12t \\ & - 0.1797448\,2846242 \sin 14t \\ & + 0.0409175\,2192640 \sin 16t \\ & + 0.3784870\,7781925 \sin 18t \\ & - 0.1892435\,3890962 \sin 20t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\,(20;8) = {} & + 0.0826416\,0886736 \\ & + 0.1154610\,0377641 \cos 2t \\ & - 0.0071407\,1880728 \cos 4t \\ & - 0.1326731\,5985911 \cos 6t \\ & - 0.1787702\,4814548 \cos 8t \\ & - 0.0950569\,0523513 \cos 10t \\ & + 0.0892715\,0952895 \cos 12t \\ & + 0.2348403\,6740949 \cos 14t \\ & + 0.1195648\,4459433 \cos 16t \\ & - 0.3570860\,3811579 \cos 18t \\ & + 0.1289477\,3598626 \cos 20t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\,(20;9) = {} & + 0.1327744\,7852951 \sin 2t \\ & + 0.1653172\,4287498 \sin 4t \\ & + 0.0642177\,2164172 \sin 6t \\ & - 0.1033357\,9324469 \sin 8t \\ & - 0.1950563\,2290761 \sin 10t \\ & - 0.0891560\,8457518 \sin 12t \\ & + 0.1686549\,6229503 \sin 14t \\ & + 0.2469467\,3415795 \sin 16t \\ & - 0.3020153\,9601161 \sin 18t \\ & + 0.0829478\,9045389 \sin 20t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\,(20;10) = {} & + 0.0848655\,4713072 \\ & + 0.0893321\,5487444 \cos 2t \\ & - 0.0801361\,9775501 \cos 4t \\ & - 0.1786643\,0974888 \cos 6t \\ & - 0.0925658\,9803732 \cos 8t \\ & + 0.1171349\,9665889 \cos 10t \\ & + 0.2094629\,5734417 \cos 12t \\ & - 0.0187961\,3213421 \cos 14t \\ & - 0.3122246\,3934057 \cos 16t \\ & + 0.2318189\,6298865 \cos 18t \\ & - 0.0502274\,4198087 \cos 20t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\,(20;11) = {} & + 0.1572854\,8907316 \sin 2t \\ & + 0.1341552\,7009182 \sin 4t \\ & - 0.0555125\,2555523 \sin 6t \\ & - 0.1907353\,4421542 \sin 8t \\ & - 0.0681937\,0854920 \sin 10t \\ & + 0.1935336\,1546281 \sin 12t \\ & + 0.1441190\,5672993 \sin 14t \\ & - 0.3126731\,1402478 \sin 16t \\ & + 0.1623859\,9889982 \sin 18t \\ & - 0.0285272\,7007700 \sin 20t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\,(20;12) = {} & + 0.0880472\,9509215 \\ & + 0.0556088\,1795294 \cos 2t \\ & - 0.1463820\,3549376 \cos 4t \\ & - 0.1461094\,4324890 \cos 6t \\ & + 0.0837906\,6234538 \cos 8t \\ & + 0.2018936\,3523350 \cos 10t \\ & - 0.0563817\,9805989 \cos 12t \\ & - 0.2572851\,4188633 \cos 14t \\ & + 0.2656516\,2694034 \cos 16t \\ & - 0.1039624\,8846556 \cos 18t \\ & + 0.0151288\,6959014 \cos 20t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\,(20;13) = {} & + 0.1779692\,8014906 \sin 2t \\ & + 0.0680470\,7770405 \sin 4t \\ & - 0.1658899\,1724302 \sin 6t \\ & - 0.1167052\,2930763 \sin 8t \\ & + 0.1772878\,8019026 \sin 10t \\ & + 0.1188578\,3372294 \sin 12t \\ & - 0.2928471\,1865809 \sin 14t \\ & + 0.1966148\,6083993 \sin 16t \\ & - 0.0607375\,1450963 \sin 18t \\ & + 0.0074489\,4045873 \sin 20t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\,(20;14) = {} & + 0.0927319\,7371053 \\ & + 0.0124234\,2231529 \cos 2t \\ & - 0.1894571\,9030812 \cos 4t \\ & - 0.0248468\,4463057 \cos 6t \\ & + 0.2092868\,8361906 \cos 8t \\ & - 0.0172016\,6166732 \cos 10t \\ & - 0.2442874\,8687271 \cos 12t \\ & + 0.2605345\,0450142 \cos 14t \\ & - 0.1280427\,6098934 \cos 16t \\ & + 0.0322390\,6198107 \cos 18t \\ & - 0.0033799\,0165931 \cos 20t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\,(20;15) = {} & + 0.1928919\,5705125 \sin 2t \\ & - 0.0321486\,5950854 \sin 4t \\ & - 0.1971784\,4498573 \sin 6t \\ & + 0.1068324\,6852070 \sin 8t \\ & + 0.1649968\,1249307 \sin 10t \\ & - 0.2780446\,8851875 \sin 12t \\ & + 0.1916409\,2324233 \sin 14t \\ & - 0.0734327\,7520322 \sin 16t \\ & + 0.0154294\,1697680 \sin 18t \\ & - 0.0013994\,1223743 \sin 20t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\,(20;16) = {} & + 0.1001619\,7934492 \\ & - 0.0440904\,4066858 \cos 2t \\ & - 0.1854673\,9716022 \cos 4t \\ & + 0.1495241\,0313692 \cos 6t \\ & + 0.0986505\,1775010 \cos 8t \\ & - 0.2645426\,4401147 \cos 10t \\ & + 0.2335208\,1640060 \cos 12t \\ & - 0.1185445\,6175431 \cos 14t \\ & + 0.0368454\,0022624 \cos 16t \\ & - 0.0065793\,0341277 \cos 18t \\ & + 0.0005215\,3014857 \cos 20t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\,(20;17) = {} & + 0.1982286\,3337104 \sin 2t \\ & - 0.1574168\,5591229 \sin 4t \\ & - 0.0699630\,4707213 \sin 6t \\ & + 0.2475615\,5117831 \sin 8t \\ & - 0.2529433\,2403001 \sin 10t \\ & + 0.1540532\,4787998 \sin 12t \\ & - 0.0614946\,6920254 \sin 14t \\ & + 0.0159342\,6863935 \sin 16t \\ & - 0.0021534\,5527063 \sin 18t \\ & + 0.0001714\,7805655 \sin 20t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\,(20;18) = {} & + 0.1141251\,4182968 \\ & - 0.1245001\,5472328 \cos 2t \\ & - 0.0933751\,1604246 \cos 4t \\ & + 0.2490003\,0944656 \cos 6t \\ & - 0.2585772\,4442528 \cos 8t \\ & + 0.1723848\,2961685 \cos 10t \\ & - 0.0802068\,3044673 \cos 12t \\ & + 0.0261957\,3391236 \cos 14t \\ & - 0.0057743\,2844305 \cos 16t \\ & + 0.0007758\,4044977 \cos 18t \\ & - 0.0000481\,8117443 \cos 20t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\,(20;19) = {} & + 0.1832592\,6572281 \sin 2t \\ & - 0.2748888\,9858421 \sin 4t \\ & + 0.2537435\,9869312 \sin 6t \\ & - 0.1691623\,9912875 \sin 8t \\ & + 0.0845811\,9956437 \sin 10t \\ & - 0.0317179\,4983664 \sin 12t \\ & + 0.0087068\,8819045 \sin 14t \\ & + 0.0016584\,5489342 \sin 16t \\ & + 0.0001963\,9597422 \sin 18t \\ & - 0.0000109\,1088746 \sin 20t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R\,(20;20) = {} & + 0.1593670\,8755388 \\ & - 0.2897583\,4100705 \cos 2t \\ & + 0.2173187\,5575529 \cos 4t \\ & - 0.1337346\,1892633 \cos 6t \\ & + 0.0668673\,0946316 \cos 8t \\ & - 0.0267469\,2378527 \cos 10t \\ & + 0.0083584\,1368290 \cos 12t \\ & - 0.0019666\,8557245 \cos 14t \\ & + 0.0003277\,8092874 \cos 16t \\ & - 0.0000345\,0325566 \cos 18t \\ & + 0.0000017\,2716278 \cos 20t \end{aligned}$$