# H. A. LORENTZ

# COLLECTED PAPERS

VOLUME V

Springer-Science+Business Media, B.V.
1937

H. A. LORENTZ
COLLECTED PAPERS

H. A. LORENTZ

# COLLECTED PAPERS

VOLUME V

Springer-Science+Business Media, B.V.
1937

ISBN 978-94-015-2214-4 ISBN 978-94-015-3445-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-94-015-3445-1

CONTENTS

# *PREFACE*

*This volume in its first part reproduces the treatises and papers wherein Professor H. A. Lorentz developed the electromagnetic theory of phenomena in moving systems up to the point achieved in the relativity theory of uniform translations. We have not included the article in the Encyclopaedie der mathematischen Wissenschaften, Vol. V, number 14, nor the book "Theory of Electrons", for reasons given previously. The second part of the volume contains the work on the theory of gravitation.*

*In the early development of the theory the author lays stress on the hypothesis of the stagnant ether, and he so firmly believes in the validity of his formula for the ponderomotive force on electric charges, that he is even prepared to abandon the momentum conservation law (see p. 28). It was Max Abraham who in 1903 reconciled Lorentz's formula for the force with the conservation law by interpreting the term at fault as the representation of electromagnetic momentum per unit volume of the field, thus meeting the criticism of Henri Poincaré. This interpretation was readily taken over by Lorentz.*

*Again, referring to the transformation formula for the time variable, Professor Lorentz preferred to think of "local time" as a mathematical auxiliary. Admitting and even stressing the impossibility of discriminating experimentally between local time and absolute time, he never relinquished the belief that the latter words might have a meaning after all.*

*The prerelativistic paper on gravitation gives a model based on electrodynamics. In this paper Lorentz clears the way for the conception of gravitational action travelling with the velocity of light. As soon as Albert Einstein's theory of generalised relativity appeared to account for gravitation, he put it in the form of Hamilton's principle.*

*It must be admitted that not only Woldemar Voigt as early as 1887, but also Sir Joseph Larmor in 1900 anticipated the transformation formulae which are known under Lorentz's name. This name was* *attached to them by Poincaré, and it will be granted that, if they became generally known, this was largely due to the clear exposition of the theory by Lorentz, so that the name given to the transformations by Poincaré seems to be justified.*

*P. ZEEMAN.*
*A. D. FOKKER.*

# VERSUCH EINER THEORIE DER ELECTRISCHEN UND OPTISCHEN ERSCHEINUNGEN IN BEWEGTEN KÖRPERN [1]

INHALT



## EINLEITUNG

§ 1. Die Frage, ob der Aether an der Bewegung ponderabler Körper theilnehme oder nicht, hat noch immer keine alle Physiker befriedigende Beantwortung gefunden. Für die Entscheidung können in erster Linie die Aberration des Lichtes und die damit zusammenhängenden Erscheinungen herangezogen werden, doch hat sich bis jetzt keine der beiden streitigen Theorieen, weder die von FRESNEL, noch die von STOKES, allen Beobachtungen gegenüber voll und ganz bewährt, und so kann man bei der Wahl zwischen beiden Ansichten nur davon ausgehen, dass man die hüben und drüben noch verbleibenden Schwierigkeiten gegen einander abwägt. Auf diese Weise wurde ich schon vor längerer Zeit zu der Meinung geführt, dass man mit der Auffassung FRESNEL's, also mit der Annahme eines unbeweglichen Aethers, auf dem richtigen Wege sei. Zwar lässt sich gegen die Ansicht des Herrn STOKES kaum mehr als das eine Bedenken erheben, dass seine Voraussetzungen über die in der Nähe der Erde stattfindende Aetherbewe-

[1] E. J. Brill, Leiden, 1895, unveränderter Abdruck B. G. Teubner, Leipzig, 1906.

gung sich widersprechen [1]), aber dieses Bedenken fällt schwer ins Gewicht und ich sehe gar nicht, wie dasselbe zu beseitigen wäre.

Der FRESNEL'schen Theorie erwachsen Schwierigkeiten durch den bekannten Interferenzversuch des Hrn. MICHELSON [2]) und wie Einige meinen, auch durch die Experimente, mittelst welcher Hr. DES COUDRES einen Einfluss der Erdbewegung auf die Induction zweier Stromkreise vergebens nachzuweisen suchte [3]). Die Resultate des amerikanischen Forschers lassen indess eine Deutung durch eine Hülfshypothese zu, und was Hr. DES COUDRES gefunden hat, erklärt sich sogar ganz ungezwungen ohne eine solche.

Mit den Beobachtungen des Hrn. FIZEAU [4]) über die Drehung der Polarisationsebene in Glassäulen hat es eine eigene Bewandtniss. Auf den ersten Blick spricht das Ergebniss entschieden gegen die STOKES'sche Auffassung. Als ich aber die FRESNEL'sche Theorie weiter zu entwickeln suchte, und es mit der Erklärung der FIZEAU'schen Versuche nicht recht von statten gehen wollte, vermuthete ich allmählich, dass das Ergebniss derselben durch Beobachtungsfehler zustandegekommen sei, oder doch wenigstens nicht den theoretischen Betrachtungen entsprochen habe, welche den Ausgangspunkt für die Experimente bildeten. Wie Hr. FIZEAU die Güte hatte, meinem Collegen, Hrn. VAN DE SANDE BAKHUIJZEN, auf dessen Anfrage mitzutheilen, sieht er seine Beobachtungen gegenwärtig selbst nicht als entscheidend an.

Im weiteren Verlaufe dieser Arbeit werde ich auf einige der hier berührten Fragen ausführlicher zurückkommen. Hier was es mir nur darum zu thun, den Standpunkt, den ich eingenommen habe, vorläufig zu rechtfertigen.

Es lassen sich zu Gunsten der FRESNEL'schen Theorie verschiedene wohlbekannte Gründe anführen. Vor allem die Unmöglichkeit, den Aether zwischen feste oder flüssige Wände einzusperren. Soviel wir wissen, verhält sich ein luftleerer Raum, bei der Bewegung ponderabler Körper, in mechanischer Hinsicht wie ein wirkliches Vacuum. Wenn man sieht, wie das Quecksilber eines Baro-

---

[1]) LORENTZ, Arch. néerl. **21**, 103, 1887 (Collected Papers, **4**, 153); LODGE, Phil. Trans. **184**, 727, 1893; LORENTZ, Versl. Akad. Wet. Amsterdam **1**, 97, 1892 (Collected Papers, **4**, 224).

[2]) Amer. Journal of Science. **22**, 120, 1881; **34**, 333, 1887.
Phil. Mag. **24**, 449, 1887.

[3]) Wied. Ann. **38**, 71, 1889.

[4]) Ann. de chim. et de phys. **58**, 129, 1860; Pogg. Ann. **114**, 554, 1861.

meters bei Neigung der Röhre bis zu deren Gipfel steigt, oder wie leicht sich eine geschlossene metallene Hülle zusammendrücken lässt, so kann man sich der Vorstellung nicht erwehren, dass die festen und flüssigen Körper den Aether ungehindert durchlassen. Man wird ja schwerlich annehmen, es könne dieses Medium eine Compression erleiden, ohne derselben einen Widerstand entgegenzusetzen.

Dass *durchsichtige* Körper sich bewegen können, ohne dem Aether, den sie enthalten, ihre volle Geschwindigkeit mitzutheilen, beweist FIZEAU's berühmter Interferenzversuch mit strömendem Wasser[1]). Dieses Experiment, das später von den Herren MICHELSON und MORLEY[2]) in grösserem Maassstabe wiederholt worden ist, könnte unmöglich den beobachteten Erfolg haben, wenn *Alles*, was sich in einer der Röhren befindet, eine gemeinsame Geschwindigkeit hätte. Fraglich bleibt nach demselben nur noch das Verhalten undurchsichtiger Stoffe und sehr ausgedehnter Körper.

Zu bemerken ist übrigens, dass man sich die Durchdringlichkeit eines Körpers für den Aether auf zweierlei Weise vorstellen kann. Einmal könnte diese Eigenschaft den einzelnen Atomen fehlen und dennoch, wenn dieselben im Vergleich mit den Zwischenräumen äusserst klein sind, einer grösseren Masse zukommen; zweitens aber lässt sich annehmen — und diese Hypothese werde ich im Folgenden zu Grunde legen —, dass die ponderable Materie *absolut* durchdringlich ist, dass nämlich an der Stelle eines Atoms zugleich auch der Aether besteht, was begreiflich wäre, wenn man in den Atomen örtliche Modificationen des Aethers erblicken dürfte.

Es liegt nicht in meiner Absicht, auf derartige Speculationen näher einzugehen oder Vermuthungen über die Natur des Aethers auszusprechen. Ich wünsche nur, mich von vorgefassten Meinungen über diesen Stoff möglichst frei zu halten und demselben z.B. keine von den Eigenschaften der gewöhnlichen Flüssigkeiten und Gase zuzuschreiben. Sollte es sich ergeben, dass eine Darstellung der Erscheinungen am besten unter der Voraussetzung absoluter Durchdringlichkeit gelänge, dann müsste man sich zu einer solchen Annahme einstweilen schon verstehen und es der weiteren

---

[1]) Ann. de chim. et de phys. **57**, 385, 1859; Pogg. Ann. **3**, 457, 1853.

[2]) Amer. Journal of Science, **31**, 377, 1886.

Forschung überlassen, uns, womöglich, ein tieferes Verständniss zu erschliessen.

Dass von *absoluter* Ruhe des Aethers nicht die Rede sein kann, versteht sich wohl von selbst; der Ausdruck würde sogar nicht einmal Sinn haben. Wenn ich der Kürze wegen sage, der Aether ruhe, so ist damit nur gemeint, dass sich der eine Theil dieses Mediums nicht gegen den anderen verschiebe und dass alle wahrnehmbaren Bewegungen der Himmelskörper relative Bewegungen in Bezug auf den Aether seien.

§ 2. Seitdem die Anschauungen MAXWELL's sich immer mehr Bahn gebrochen haben, ist die Frage nach dem Verhalten des Aethers auch für die Electricitätslehre von hoher Wichtigkeit geworden. Es kann ja, streng genommen, kein einziger Versuch, bei dem sich ein geladener Körper oder ein Stromleiter bewegt, gründlich behandelt werden, wenn man sich nicht zugleich über Ruhe oder Bewegung des Aethers ausspricht. Bei jeder electrischen Erscheinung entsteht die Frage, ob ein Einfluss der Erdbewegung zu erwarten sei, und was die Folgen dieser letzteren bei den optischen Erscheinungen betrifft, so ist von der electromagnetischen Lichttheorie zu verlangen, dass sie von den bereits festgestellten Thatsachen Rechenschaft gebe. Die Aberrationstheorie gehört nämlich nicht zu jenen Theilen der Optik, zu deren Behandlung die allgemeinen Principien der Wellenlehre ausreichen. Sobald ein Fernrohr ins Spiel kommt, kann man nicht umhin, für die Linsen den FRESNEL'schen Fortführungscoefficienten anzuwenden, dessen Werth doch eben nur aus speciellen Annahmen über die Natur der Lichtschwingungen abzuleiten ist.

Dass die electromagnetische Lichttheorie nun aber wirklich zu dem von FRESNEL angenommenen Coefficienten führt, wurde vor zwei Jahren von mir dargelegt [1]). Seitdem habe ich die Theorie erheblich vereinfacht und sie auch auf die Vorgänge bei der Reflexion und Brechung, sowie auf doppeltbrechende Körper ausgedehnt [2]). Es möge mir deshalb gestattet sein, jetzt auf die Sache zurückzukommen.

Um zu den Grundgleichungen für die electrischen Erscheinungen in bewegten Körpern zu gelangen, habe ich mich einer Auf-

[1]) Arch. néerl. **25**, 363, 1892 (Collected Papers, **2**, 164).

[2]) Vorläufige Mittheilungen hierüber erschienen in Versl. Akad. Wet. Amsterdam, **1**, 28 und 149, 1892–93, (Collected Papers, **4**, 215 und 232).

fassung angeschlossen, die in den letzten Jahren von mehreren Physikern vertreten worden ist; ich habe nämlich angenommen, dass sich in allen Körpern kleine, electrisch geladene Massentheilchen befinden und dass alle electrischen Vorgänge auf der Lagerung und Bewegung dieser „Ionen" beruhen. Was die Electrolyte betrifft, so ist diese Auffassung allgemein als die einzig mögliche anerkannt, und die Herren GIESE [1]), SCHUSTER [2]), ARRHENIUS [3]), ELSTER und GEITEL [4]) haben die Meinung vertheidigt, dass man es auch bei der Electricitätsleitung in Gasen mit einer Convection durch Ionen zu thun habe. Wie mir scheint, steht nichts der Annahme im Wege, dass auch die Molecüle ponderabler dielectrischer Körper solche Theilchen enthalten, die an bestimmte Gleichgewichtslagen gebunden sind und nur durch äussere electrische Kräfte daraus verschoben werden; hierin bestände dann eben die „dielectrische Polarisation" derartiger Körper.

Die periodisch wechselnden Polarisationen, welche nach der MAXWELL'schen Theorie einen Lichtstrahl bilden, werden bei dieser Auffassung zu Vibrationen der Ionen. Bekanntlich wurde von vielen Forschern, die sich auf den Boden der älteren Lichttheorie stellten, ein Mitschwingen der ponderablen Materie als die Ursache der Farbenzerstreuung betrachtet, und diese Erklärung lässt sich der Hauptsache nach in die electromagnetische Lichttheorie aufnehmen, wozu es nur nöthig ist, den Ionen eine gewisse Masse zuzuschreiben. Ich habe das in einer früheren Abhandlung gezeigt [5]), in welcher ich die Bewegungsgleichungen freilich noch aus Fernwirkungen ableitete, und nicht, was ich jetzt für viel einfacher erachte, aus MAXWELL'schen Begriffen. Später ist VON HELMHOLTZ [6]) in seiner electromagnetischen Theorie der Farbenzerstreuung von demselben Gesichtspunkt ausgegangen [7]).

---

[1]) Wied. Ann. **17**, 538, 1882.

[2]) Proc. Royal Soc. **37**, 317, 1884.

[3]) Wied. Ann. **32**, 565, 1887; **33**, 638, 1888.

[4]) Wiener Sitzungsberichte. **97**, 1255, 1888.

[5]) Verhandelingen K. Akad. Wet. Amsterdam. **18**, 1878 (Collected Papers, **2**, 1). Wied. Ann. **9**, 641, 1880.

[6]) Wied. Ann. **48**, 389, 1893.

[7]) Auch Hr. KOLÁČEK (Wied. Ann. **32**, 224 und 429, 1887) hat, obgleich in anderer Weise, eine Erklärung der Dispersion aus den electrischen Schwingungen in den Molecülen versucht.

Zu erwähnen ist auch noch die Theorie des Hrn. GOLDHAMMER (Wied. Ann. **47**, 93, 1892).

Hr. GIESE [1]) hat auf verschiedene Fälle die Hypothese angewandt, dass auch in metallischen Leitern die Electricität an Ionen gebunden sei; aber das Bild, welches er von den Vorgängen in diesen Körpern entwirft, ist in *einem* Punkte wesentlich verschieden von den Vorstellungen, die man von der Leitung in Electrolyten hat. Während die Theilchen eines gelösten Salzes, wie oft sie auch immer von den Wassermolecülen aufgehalten werden mögen, schliesslich über grosse Strecken wandern können, dürften die Ionen in einem Kupferdrahte wohl schwerlich eine so grosse Beweglichkeit besitzen. Man kann sich jedoch an einem Hin- und Hergehen über moleculare Distanzen genügen lassen, wenn man nur annimmt, dass häufig ein Ion seine Ladung an ein andres abtrete, oder dass zwei entgegengesetzt geladene Ionen, falls sie sich begegnen, oder nachdem sie mit einander „verbunden" sind, ihre Ladungen gegen einander austauschen. Jedenfalls müssen solche Vorgänge an der Grenze zweier Körper stattfinden, wenn ein Strom von dem einen zum anderen übergeht. Werden z.B. aus einer Salzlösung $n$ positiv geladene Kupferatome an einer Kupferplatte abgeschieden, und man will auch in dieser letzteren alle Electricität an Ionen binden, so hat man anzunehmen, dass die Ladungen auf $n$ Atome in der Platte übergehen, oder dass $\frac{1}{2}n$ der niedergeschlagenen Theilchen ihre Ladungen austauschen mit $\frac{1}{2}n$ negativ geladenen Kupferatomen, die sich schon in der Electrode befanden.

Ist somit die Annahme dieses Ueberganges oder Austausches der Ionenladungen — eines freilich noch sehr dunklen Vorganges — die unerlässliche Ergänzung jeder Theorie, welche eine Fortführung der Electricität durch Ionen voraussetzt, so besteht ein anhaltender electrischer Strom auch nie in einer Convection *allein*, wenigstens dann nicht, wenn die Mittelpunkte zweier sich berührender oder mit einander verbundener Theilchen in einiger Entfernung $l$ von einander liegen. Die Electricitätsbewegung geschieht dann ohne Convection über eine Strecke von der Ordnung $l$, und nur wenn diese sehr klein ist im Verhältniss zu den Strecken über welche eine Convection stattfindet, hat man es im Ganzen fast nur mit dieser letzteren Erscheinung zu thun.

Hr. GIESE ist der Meinung, dass in den Metallen eine wirkliche

[1]) GIESE, Wied. Ann. **37**, 576, 1889.

Convection gar nicht im Spiele sei. Da es aber nicht möglich scheint, das „Ueberspringen" der Ladungen in die Theorie aufzunehmen, so wolle man entschuldigen, dass ich meinerseits von einem solchen Vorgange gänzlich absehe und mir einen Strom in einem Metalldraht einfach als eine Bewegung geladener Theilchen denke.

Weitere Forschung wird darüber zu entscheiden haben, ob die Ergebnisse der Theorie bei einer anderen Auffassung bestehen bleiben.

§ 3. Die Ionentheorie war für meinen Zweck sehr geeignet, weil sie es ermöglicht, die Durchdringlichkeit für den Aether in ziemlich befriedigender Weise in die Gleichungen einzuführen. Natürlich zerfallen diese in zwei Gruppen. Erstens ist auszudrücken, wie der Zustand des Aethers durch Ladung, Lage und Bewegung der Ionen bestimmt wird; sodann ist, zweitens, anzugeben, mit welchen Kräften der Aether auf die geladenen Theilchen wirkt. In meiner bereits citirten Abhandlung [1]) habe ich die Formeln mittelst des D'ALEMBERT'schen Princips aus einigen Annahmen abgeleitet und also einen Weg gewählt, der mit MAXWELL's Anwendung der LAGRANGE'schen Gleichungen viele Aehnlichkeit hat. Jetzt ziehe ich es der Kürze wegen vor, die Grundgleichungen selbst als Hypothesen hinzustellen.

Die Formeln für den Aether stimmen, was dem Raum zwischen den Ionen betrifft, mit den bekannten Gleichungen der MAXWELL'schen Theorie überein und drücken im allgemeinen aus, dass sich jede Veränderung, welche ein Ion im Aether hervorruft, mit der Geschwindigkeit des Lichtes fortpflanzt. Die Kraft aber, die der Aether auf ein geladenes Theilchen ausübt, betrachten wir als abhängig von dem Zustande, in welchem jenes Medium an der Stelle, wo das Theilchen ist, sich befindet. Das angenommene Grundgesetz unterscheidet sich also in einem wesentlichen Punkte von den Gesetzen, die WEBER und CLAUSIUS aufgestellt haben. Der Einfluss, den ein Theilchen $B$ in Folge der Nähe eines zweiten $A$ erleidet, hängt zwar von der Bewegung dieses letzteren ab, jedoch nicht von dessen *augenblicklicher* Bewegung. Maassgebend ist vielmehr die Bewegung, welche dieses $A$ einige Zeit früher hatte, und das angenommene Gesetz entspricht also der

[1]) Arch. néerl. **25**, 363, 1892 (Collected Papers, **2**, 164).

Forderung, welche GAUSS im Jahre 1845 in seinem bekannten Brief an WEBER [1]) an die Theorie der Electrodynamik stellte.

Ueberhaupt liegt in den Annahmen, die ich einführe, in gewissem Sinne eine Rückkehr zu der älteren Electricitätstheorie. Der Kern der MAXWELL'schen Anschauungen geht damit nicht verloren, aber es ist nicht zu leugnen, dass man mit der Annahme von Ionen nicht mehr weit entfernt ist von den electrischen Theilchen, mit denen man früher operirte. In gewissen einfachen Fällen tritt dies besonders hervor. Da wir das Wesen einer electrischen Ladung in einer Anhäufung positiv oder negativ geladener Theilchen sehen, und unsere Grundformeln für ruhende Ionen das COULOMB'sche Gesetz ergeben, so lässt sich z.B. die ganze Electrostatik nun wieder auf die frühere Form bringen.

---

[1]) GAUSS, Werke, **5**, 629.

## EINIGE DEFINITIONEN UND MATHEMATISCHE BEZEICHNUNGEN

§ 4. *a.* Wir wollen sagen, dass einer Rotation in einer Ebene eine bestimmte Richtung der Normale *entspreche*, und zwar soll das die Richtung nach derjenigen Seite sein, auf der sich ein Beobachter befinden muss, damit für ihn die Rotation in einer der Uhrzeigerbewegung entgegengesetzten Richtung verlaufe.

*b.* Die zu einander senkrechten Coordinatenaxen $OX$, $OY$, $OZ$ wählen wir so, dass die Richtung von $OZ$ einer Drehung um einen rechten Winkel von $OX$ nach $OY$ entspricht.

*c.* Einen Raum, eine Fläche und eine Linie bezeichnen wir durchgängig mit den Buchstaben $\tau$, $\sigma$ und $s$, unendlich kleine Theile mit $d\tau$, $d\sigma$ und $ds$.

Die Normale zu einer Fläche wird mit $n$ angedeutet und immer nach einer bestimmten Seite, der „positiven", gezogen. Bei einer Linie wird eine bestimmte Richtung „positiv" genannt, und zwar beachten wir, wenn es sich um die Randlinie $s$ einer Fläche $\sigma$ handelt, folgende Regel: Ist $P$ ein fester Punkt von $\sigma$, ganz nahe an $s$, und durchläuft ein zweiter Punkt $Q$ den nächstliegenden Theil von $s$ in der positiven Richtung, so soll die Rotation von $PQ$ der Richtung der Normale zu $\sigma$ entsprechen.

Bei einer geschlossenen Fläche soll die *Aussenseite* die positive sein.

*d.* Vectoren bezeichnen wir in der Regel mit deutschen Buchstaben; dieselben dienen mitunter auch dazu, lediglich die Grösse anzugeben. Unter $\mathfrak{A}_l$ verstehen wir die Componente des Vectors $\mathfrak{A}$ nach der Richtung $l$; unter $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ also die Componenten nach den Axenrichtungen.

Für einen Vector mit den Componenten $X$, $Y$, $Z$ schreiben wir gelegentlich auch $(X, Y, Z)$.

*e.* Ist $\varphi$ eine scalare Grösse, so verstehen wir unter $\dot{\varphi}$ den Differentialquotienten nach der Zeit $t$. Das Zeichen $\dot{\mathfrak{A}}$ bedeutet einen

Vector mit den Componenten: $\dot{\mathfrak{A}}_x$, $\dot{\mathfrak{A}}_y$, $\dot{\mathfrak{A}}_z$, oder $\partial\mathfrak{A}_x/\partial t$, u.s.w.

*f*. Den Ausdruck

$$\int \mathfrak{A}_n d\sigma$$

nennen wir das „Integral des Vectors $\mathfrak{A}$ über die Fläche $\sigma$", und die Grösse

$$\int \mathfrak{A}_s ds$$

das „Linienintegral für die Linie $s$."

*g*. Ist ein Vector $\mathfrak{A}$ in jedem Punkte des Raumes gegeben, so hat überall

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}$$

einen bestimmten, von der Wahl des Coordinatensystems unabhängigen Werth. Wir nennen diese Grösse die *Divergenz* des Vectors $\mathfrak{A}$ und bezeichnen sie mit

$$\operatorname{div} \mathfrak{A}.$$

Für jeden durch eine Fläche $\sigma$ begrenzten Raum gilt die Beziehung

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{A}\, d\tau = \int \mathfrak{A}_n d\sigma,$$

wenn, wie bereits gesagt, die Normale $n$ nach aussen gezogen wird.

*h*. Die Grössen

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}$$

lassen sich als die Componenten eines Vectors $\mathfrak{B}$ auffassen, der, unabhängig von dem gewählten Coordinatensystem, durch die Vertheilung von $\mathfrak{A}$ bestimmt ist. Wir nennen diesen neuen Vector die *Rotation* von $\mathfrak{A}$ und bezeichnen denselben mit

$$\operatorname{rot} \mathfrak{A},$$

und seine Componenten gelegentlich mit

$$[\operatorname{rot} \mathfrak{A}]_l.$$

Ist $s$ die Randlinie einer Fläche $\sigma$, so hat man

$$\int \mathfrak{A}_s ds = \int \mathfrak{B}_n d\sigma \tag{1}$$

Weiter findet man leicht

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = 0,$$

und für die Componenten des Vectors $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{A}$

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathfrak{A} - \Delta \mathfrak{A}_x, \text{ u.s.w.}$$

Das Zeichen $\Delta$ hat hier, wie in allen unseren Formeln, die Bedeutung

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

*i.* Sind $m$ und $n$ scalare Grössen, so legen wir den Ausdrücken

$$-\mathfrak{A}, \quad m\mathfrak{A}, \quad m\mathfrak{A} \pm n\mathfrak{B}$$

die bekannten Bedeutungen bei.

*j.* Unter $[\mathfrak{A}.\mathfrak{B}]$ verstehen wir das sogenannte „Vectorproduct", einen Vector nämlich, dessen Grösse durch den Inhalt des über $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beschriebenen Parallelogramms gegeben wird, und dessen Richtung senkrecht auf der durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gelegten Ebene steht, und zwar so, dass sie einer Rotation um weniger als 180° entspricht, durch welche die Richtung von $\mathfrak{A}$ in die Richtung von $\mathfrak{B}$ übergeführt wird.

Für die Componenten lässt sich schreiben $[\mathfrak{A}.\mathfrak{B}]_l$; die Componenten nach den Axenrichtungen sind

$$\mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_y, \quad \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_z, \quad \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_x,$$

und es ist

$$[\mathfrak{B}.\mathfrak{A}] = -[\mathfrak{A}.\mathfrak{B}].$$

*k.* Der Vortheil der oben eingeführten Bezeichnungen besteht hauptsächlich darin, dass sich jetzt drei Gleichungen wie

$$\mathfrak{A}_x = \mathfrak{B}_x, \quad \mathfrak{A}_y = \mathfrak{B}_y, \quad \mathfrak{A}_z = \mathfrak{B}_z$$

in die eine Formel

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$$

zusammenfassen lassen. Jedoch werden wir bei der Untersuchung specieller Bewegungszustände oft die drei einzelnen Gleichungen benutzen. Haben diese dieselbe Gestalt, sodass sie durch cyclische

Vertauschung der Buchstaben in einander übergehen, so können wir uns darauf beschränken, nur die erste Gleichung niederzuschreiben und die beiden anderen durch ein „u.s.w." anzudeuten.

*l.* Wir werden häufig Körper mit molecularem Gefüge zu betrachten haben. Es kommen dann Functionen vor, deren Werth in den einzelnen Molecülen und in den Zwischenräumen *rasch* wechselt, und zwar oft in höchst unregelmässiger Weise, da ja die Molecüle selbst nicht immer regelmässig angeordnet und orientirt sind. In diesen Fällen empfiehlt es sich, mit *Mittelwerthen* zu rechnen, welche wir folgendermaassen definiren:

Man beschreibe um einen Punkt $P$ als Mittelpunkt eine Kugel vom Inhalt $I$ und berechne für dieselbe, wenn $\varphi$ die zu betrachtende Grösse ist, das Integral $\int \varphi d\tau$. Wir nennen dann

$$\frac{1}{I}\int \varphi d\tau, \tag{2}$$

wofür wir $\bar{\varphi}$ schreiben wollen, den „Mittelwerth von $\varphi$ im Punkte $P$".

Gibt man, wo immer auch $P$ liegen möge, der Kugel stets dieselbe Grösse, so kann $\bar{\varphi}$ offenbar nur noch von $t$ und den Coordinaten $x$, $y$, $z$ des Punktes $P$ abhängen. Es ist klar, dass auch $\bar{\varphi}$ noch „rasche" Veränderungen von Punkt zu Punkt zeigen wird, so lange die Kugel nur wenige Molecüle umfasst, dass aber bei fortwährender Vergrösserung derselben jene Veränderungen immer mehr zurücktreten werden. Man denke sich nun ein für alle Mal einen bestimmten Radius $R$ gewählt, der gerade so gross ist, dass — mit Rücksicht auf den bei den Beobachtungen erreichbaren Genauigkeitsgrad — von den raschen Veränderungen in $\bar{\varphi}$ abgesehen werden darf. Es bleiben dann nur noch die langsameren Veränderungen von Punkt zu Punkt, die unseren Sinnen zugänglich sind, übrig, und diese gehen in allen wirklich untersuchten Fällen sogar so langsam vor sich, dass sie in Räumen, die erheblich grösser sind als die Kugel $I$, noch kaum hervortreten. In diesen Fällen wird $\bar{\varphi}$ auch dann noch durch den Ausdruck (2) gegeben, wenn man diesen nicht auf die genannte Kugel, sondern auf einen beliebig gestalteten grösseren Raum anwendet.

Natürlich ist, sobald $\varphi$ selbst keine raschen Veränderungen zeigt, überall $\bar{\varphi} = \varphi$.

Weiter findet man leicht

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} = \overline{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}, \text{ u. s. w.}$$

*m.* Unter dem Mittelwerth eines Vectors $\mathfrak{A}$ verstehen wir einen Vector — er möge $\overline{\mathfrak{A}}$ heissen —, dessen Componenten die Mittelwerthe von $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ sind. Demnach haben wir

$$\dot{\overline{\mathfrak{A}}} = \overline{\dot{\mathfrak{A}}}, \ \operatorname{div} \overline{\mathfrak{A}} = \overline{\operatorname{div} \mathfrak{A}}, \ \operatorname{rot} \overline{\mathfrak{A}} = \overline{\operatorname{rot} \mathfrak{A}}.$$

ABSCHNITT I

## DIE GRUNDGLEICHUNGEN FÜR EIN SYSTEM IN DEN AETHER EINGELAGERTER IONEN

### *Die Gleichungen für den Aether*

§ 5. Bei der Aufstellung der Bewegungsgleichungen werden wir alle Grössen in electromagnetischem Maass ausdrücken und vorläufig ein Coordinatensystem zu Grunde legen, das im Aether ruht. Nach MAXWELL kann nun in diesem Medium zweierlei Abweichung vom Gleichgewichtszustande bestehen. Die Abweichung der *ersten* Art, welche u.A. in der Nähe jedes geladenen Körpers angetroffen wird, nennen wir die *dielectrische Verschiebung*; sie ist eine Vectorgrösse und möge die Bezeichnung $\mathfrak{d}$ [1]) erhalten. Sie ist im „reinen" Aether, also in den Räumen zwischen den Ionen, *solenoidal* vertheilt, d.h. es ist daselbst

$$\operatorname{div} \mathfrak{d} = 0 \tag{3}$$

Wir wollen nun voraussetzen, dass sich auch in dem von einem Ion eingenommenen Raum der Aether befinde und dass auch dort eine dielectrische Verschiebung stattfinden könne, dass also die von *einem* Ion hervorgerufene dielectrische Verschiebung sich über das Innere der übrigen Ionen erstrecke.

Die Ladung eines Ions werden wir als über einen gewissen *Raum* vertheilt ansehen; die räumliche Dichtigkeit möge $\rho$ heissen, und wir wollen annehmen, dass diese Function beim Uebergang aus dem Inneren eines Theilchens in den reinen Aether *stetig* in 0 übergehe. In dieser Voraussetzung, die uns den Vortheil bietet, dass keine Discontinuitäten zu berücksichtigen sind, liegt indess keine wesentliche Einschränkung. Es lassen sich ja die

---

1) Einen Nachweis der benutzten Bezeichnungen findet man am Schluss der Abhandlung (Seite 138).

Vertheilung einer Ladung über eine Fläche und eine Discontinuität von $\rho$ als Grenzfälle behandeln von Zuständen, bei welchen jene Voraussetzung zutrifft.

In den zu betrachtenden Fällen ist $\rho$ nur im Inneren einer sehr grossen Anzahl von kleinen und gänzlich von einander getrennten Räumen von Null verschieden. Wir können jedoch mit dem allgemeineren Falle anfangen, dass in beliebig grossen Räumen eine electrische Dichtigkeit besteht. Da wir uns die electrischen Ladungen immer an ponderable Materie gebunden denken, so würde das einer continuirlichen Vertheilung dieser Materie entsprechen.

Ponderable Materie, welche *nicht* geladen ist, kommt für uns nur insofern in Betracht, als sie auf die Ionen Molecularkräfte ausübt. Was die electrischen Erscheinungen betrifft, so hat sie gar keinen Einfluss und geschieht alles so, als ob der von ihr eingenommene Raum nur den Aether enthielte.

Wo $\rho$ von Null verschieden ist, gilt nicht mehr die Gleichung (3). Nach einem bekannten Satze aus MAXWELL's Theorie ist für jede geschlossene Fläche $\sigma$, wenn $E$ die gesammte Ladung im Inneren darstellt,

$$\int \mathfrak{d}_n \, d\sigma = E = \int \rho d\tau,$$

oder

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{d} \, d\tau = \int \rho d\tau,$$

sodass überall

$$\operatorname{div} \mathfrak{d} = \rho \tag{I}$$

sein muss.

Bewegt sich die ponderable Materie, so besteht — da sie die Ladung mit sich fortführt — an einem bestimmten Punkte des Raumes jedesmal wieder ein anderes $\rho$, und ist, wenn man es mit von einander getrennten Ionen zu thun that, die Dichtigkeit bald hier, bald dort von Null verschieden. Fortwährend hat sich aber der Zustand des Aethers der Gleichung (I) zu fügen.

§ 6. Die Aenderung von $\mathfrak{d}$, welche mit der Zeit an einem bestimmten Punkt des Raumes stattfindet, constituirt einen electrischen Strom, den MAXWELL'schen *Verschiebungsstrom*, der sich durch $\dot{\mathfrak{d}}$ darstellen lässt. Wir nehmen an, dass derselbe auch im

Inneren der geladenen Materie bestehe. Ausserdem aber findet man dort einen *Convectionsstrom* $\mathfrak{C}$. Diesen betrachte ich, wenn $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit der ponderablen Materie ist, als in Grösse und Richtung durch

$$\mathfrak{C} = \rho\mathfrak{v}$$

gegeben, und setze für den Gesammtstrom

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{C} + \dot{\mathfrak{d}} = \rho\mathfrak{v} + \dot{\mathfrak{d}} \tag{4}$$

In der geladenen Materie soll $\mathfrak{v}$ sich nur continuirlich von Punkt zu Punkt ändern [1]). Ausserdem soll während der Bewegung die Ladung jedes Massenelementes unverändert bleiben. Es muss also $\rho\omega$ constant sein, wenn $\omega$ das — vielleicht veränderliche — Volumen des Elementes ist.

Aus dieser Voraussetzung leitet man für den Gesammtstrom die Eigenschaft der solenoidalen Vertheilung ab, welche ausgedrückt wird durch

$$\operatorname{div} \mathfrak{S} = 0 \tag{5}$$

§ 7. Die *zweite* Abweichung vom Gleichgewichtszustande des Aethers wird durch die *magnetische Kraft* $\mathfrak{H}$ bestimmt. Dieselbe hängt von der augenblicklichen Stromvertheilung ab und genügt den Bedingungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0, \tag{II}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi\mathfrak{S}, \tag{III}$$

deren Gültigkeit wir auch für das Innere der ponderablen Materie voraussetzen [2]).

Endlich nehmen wir noch, sowohl für das Innere der Ionen [3]) als auch für die Zwischenräume, die Beziehung an, durch welche in der MAXWELL'schen Theorie die dielectrische Verschiebung mit der zeitlichen Aenderung der magnetischen Kraft verknüpft ist. Diese Relation lautet

$$-4\pi V^2 \operatorname{rot} \mathfrak{d} = \dot{\mathfrak{H}}, \tag{IV}$$

wenn man mit $V$ das Verhältniss der electromagnetischen und

---

[1]) Dadurch ist natürlich nicht ausgeschlossen, dass von einander getrennte Ionen oft sehr verschiedene Geschwindigkeiten haben können.

[2]) Die Berechtigung hierzu liegt in der Gleichung (5).

[3]) Von speciellen *magnetischen* Eigenschaften der ponderablen Materie — welche übrigens gerade durch die Ionenbewegungen zu erklären wären — sehen wir ab. Demgemäss brauchen wir nicht zwischen der magnetischen Kraft und der magnetischen Induction zu unterscheiden.

electrostatischen Electricitätseinheiten, oder die Lichtgeschwindigkeit im Aether, bezeichnet.

Wir haben jetzt sämmtliche Gleichungen für den Aether niedergeschrieben. Sind $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{H}$ für $t = 0$ überall gegeben, kennt man für alle späteren Augenblicke die Bewegung der geladenen Materie und fügt man noch die Bedingung hinzu, dass in unendlicher Entfernung $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{H}$ verschwinden, so sind diese Vectoren eindeutig bestimmt.

Wo $\rho = 0$ ist, gehen die Gleichungen in die Formeln für den reinen Aether über, aus welchen sich bekanntlich ergibt, dass die durch $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{H}$ dargestellten Veränderungen sich mit der Geschwindigkeit des Lichtes ausbreiten.

Da die Gleichungen linear sind, so lassen sich verschiedene Lösungen durch Addition zu einer allgemeineren zusammensetzen. Es sei z.B. die Bewegung von $n$ Ionen gegeben, und es seien $n$ Werthsysteme von $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{H}$ gefunden, welche den Zustand des Aethers bestimmen für den Fall, dass nur je eines der Ionen besteht und die übrigen weggelassen sind. Man erhält dann durch Superposition einen Zustand des Aethers, der mit den Bewegungen sämmtlicher $n$ Ionen verträglich ist. In diesem Sinne dürfen wir sagen, dass jedes Ion den Zustand des Aethers gerade so beeinflusse, als ob die anderen nicht vorhanden wären.

§ 8. Ist die ponderable Materie in Ruhe und $\mathfrak{d}$ unabhängig von der Zeit, so verschwinden $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{H}$, während $\mathfrak{d}$ bestimmt wird durch

$$\operatorname{div} \mathfrak{d} = \rho \tag{I}$$

und

$$\operatorname{rot} \mathfrak{d} = 0.$$

Diese letzte Gleichung besagt, dass $\mathfrak{d}_x$, $\mathfrak{d}_y$, $\mathfrak{d}_z$ als die partiellen Differentialquotienten einer einzigen Function, welche wir $-\omega/4\pi$ nennen wollen, betrachtet werden können. Wir setzen also

$$\mathfrak{d}_x = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\omega}{\partial x}, \text{ u.s.w.} \tag{6}$$

und leiten aus (I) ab

$$\Delta\omega = -4\pi\rho. \tag{7}$$

Nachdem man hieraus $\omega$ bestimmt hat, lassen sich $\mathfrak{d}_x$, $\mathfrak{d}_y$, $\mathfrak{d}_z$ aus (6) berechnen.

### *Der erste Theil der auf die ponderable Materie wirkenden Kraft*

§ 9. Nach der älteren Electrostatik, deren Schlussfolgerungen mit der Erfahrung übereinstimmen, erhält man die Componenten der Kraft, welche in dem zuletzt betrachteten Fall auf ein Volumelement wirkt, wenn man zunächst mittelst der POISSON'schen Gleichung die „Potentialfunction" bestimmt und dann die Abgeleiteten derselben mit $-V^2 \rho d\tau$ multiplicirt [1]). Da nun unsere Formel (7) mit der POISSON'schen Gleichung übereinstimmt, muss die Potentialfunction mit $\omega$ zusammenfallen; wir haben demnach als Werthe der Kraftcomponenten anzunehmen

$$-V^2\rho \frac{\partial \omega}{\partial x} d\tau, \text{ u.s.w.} \tag{8}$$

Soll nun, wie die MAXWELL'sche Theorie behauptet, die Kraft durch den Zustand des Aethers hervorgerufen werden, so ist es wahrscheinlich, dass sie von der dielectrischen Verschiebung in dem betrachteten Volumelemente abhängt. In der That lässt sich, wenn man (6) berücksichtigt, für (8) schreiben

$$4\pi V^2 \mathfrak{d}_x \rho d\tau, \text{ u.s.w.}$$

Demgemäss werde ich annehmen, dass in *allen* Fällen, wo in dem Elemente $d\tau$ eine dielectrische Verschiebung besteht, der Aether auf die daselbst befindliche ponderable Materie eine Kraft mit den genannten Componenten ausübe, eine Kraft [2]) also, welche sich für die Einheit der Ladung darstellen lässt durch

$$\mathfrak{E}_1 = 4\pi V^2 \mathfrak{d}.$$

§ 10. Es seien zwei *ruhende* Ionen mit den Ladungen $e$ und $e'$ gegeben, deren Dimensionen sehr klein sind im Verhältniss zu der Entfernung $r$. Um die Kraft zu finden, welche auf das erstere wirkt, hat man es in Raumelemente zu zerlegen, auf jedes derselben obigen Satz anzuwenden und dann zu integriren. Dabei darf man $\mathfrak{d}$ betrachten als zusammengesetzt aus den dielectrischen Verschiebungen, welche von dem ersten und dem zweiten Theil-

---

[1]) Der Factor $V^2$ muss hinzugefügt werden, weil wir uns des electromagnetischen Maasssystems bedienen.

[2]) Da diese Kraft die einzige ist, welche bei den electrostatischen Erscheinungen besteht, so kann sie füglich die *electrostatische* Kraft genannt werden, obgleich sie im allgemeinen auch von der Bewegung der Ionen abhängt.

chen herrühren. Man findet leicht, dass der erste Theil von $\mathfrak{d}$ nichts zu der Gesammtkraft beiträgt. Der zweite Theil hat innerhalb des ersten Ions überall die Richtung von $r$ und die Grösse $e'/4\pi r^2$; mithin wird $e$ von $e'$ abgestossen mit einer Kraft

$$V^2 \frac{ee'}{r^2} .$$

Da dies mit dem COULOMB'schen Gesetze übereinstimmt, so ist klar, dass die Ionentheorie, was die gewöhnlichen Probleme der Electrostatik betrifft, auf die frühere Behandlungsweise zurückführt.

*Electrische Ströme in ponderablen Leitern*

§ 11. In einem ponderablen Leiter, der von einem Strom durchflossen wird, und in dem sich also nach unserer Auffassung unzählige Ionen bewegen, ändern sich $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{H}$ in unregelmässiger Weise von Punkt zu Punkt. Aus den Gleichungen (II) und (III) folgt aber

$$\operatorname{div} \overline{\mathfrak{H}} = 0,$$
$$\operatorname{rot} \overline{\mathfrak{H}} = 4\pi \overline{\mathfrak{S}};$$

da nun in messbarer Entfernung vom Leiter $\overline{\mathfrak{H}}$ mit $\mathfrak{H}$ zusammenfällt, so wird die Wirkung nach aussen nur durch den mittleren Strom $\overline{\mathfrak{S}}$ bestimmt. Dieser ist es, von welchem in der gewöhnlichen Theorie, die von den molecularen Vorgängen Abstand nimmt, die Rede ist.

Der Gleichung (4) zufolge hat man

$$\overline{\mathfrak{S}} = \overline{\rho\mathfrak{v}} + \dot{\overline{\mathfrak{d}}} .$$

Ist nun der Strömungszustand stationär, so sind die der Beobachtung zugänglichen Grössen, also auch alle Mittelwerthe, unabhängig von der Zeit. Es wird dann

$$\overline{\mathfrak{S}} = \overline{\rho\mathfrak{v}},$$

d.h. nur die Convectionsströme bedingen die Wirkung nach aussen.

Nach der § 4 gegebenen Definition sind die Componenten von $\overline{\rho\mathfrak{v}}$

$$\frac{1}{I}\int \rho \mathfrak{v}_x \, d\tau, \text{ u.s.w.,}$$

oder, wenn nur in den Ionen $\rho$ von Null verschieden ist, und jedes Ion sich ohne Rotation verschiebt,

$$\frac{1}{I}\Sigma\, e\, \mathfrak{v}_x, \text{ u.s.w.,}$$

wo $e$ die Ladung eines Ions ist, und die Summe sich auf alle in der Kugel $I$ enthaltene geladene Theilchen bezieht. Man sieht leicht, dass das Resultat sich in die Formel

$$\overline{\mathfrak{S}} = \frac{1}{I}\Sigma\, e\, \mathfrak{v}$$

zusammenfassen lässt, und dass diese auch gültig bleibt, wenn man unter $I$ nicht gerade eine Kugel versteht, sondern einen *beliebigen* Raum, dessen Dimensionen, obgleich sehr klein, dennoch viel grösser sind als der mittlere Abstand der Ionen. Natürlich muss sich dann auch die Summe über den gewählten Raum erstrecken.

Besteht in einem Leitungsdrahte mit dem Querschnitte $\omega$ ein Strom, so können wir für $I$ den zwischen zwei um $ds$ [1]) von einander entfernten Querschnitten befindlichen Theil nehmen. Da nun die Stromstärke $i$ bestimmt wird durch

$$i = \omega\overline{\mathfrak{S}},$$

und $I = \omega ds$, so erhalten wir

$$\Sigma\, e\mathfrak{v} = i ds,$$

wo $ids$ als ein Vector in der Richtung des Stromes zu betrachten ist.

### *Der zweite Theil der auf die ponderable Materie wirkenden Kraft*

§ 12. Ein Stromelement wie das soeben betrachtete befinde sich in einem durch äussere Ursachen hervorgebrachten magne-

[1]) Dieses Zeichen bedeutet hier nicht ein unendlich Kleines im strengen Sinne des Wortes, sondern eine Strecke, die zwar sehr klein gegen die Dimensionen des Leiters, aber dennoch viel grösser als die Entfernung der Molecüle ist.

tischen Felde. Nach einem bekannten Gesetze erleidet es eine electrodynamische Kraft

$$[i ds . \mathfrak{H}],$$

wofür wir jetzt auch schreiben können

$$[\Sigma e \mathfrak{v} . \mathfrak{H}],$$

oder

$$\Sigma \{e [\mathfrak{v} . \mathfrak{H}]\}.$$

Diese Wirkung resultirt nach unserer Auffassung aus all den Kräften, welche durch den Aether auf die Ionen des Stromelementes ausgeübt werden. Es liegt also nahe, für die auf ein einzelnes Ion wirkende Kraft anzunehmen

$$e [\mathfrak{v} . \mathfrak{H}],$$

eine Hypothese, welche wir noch dahin erweitern wollen, dass wir *ganz allgemein* eine auf die ponderable Materie des Volumelementes $d\tau$ wirkende Kraft

$$\rho d\tau [\mathfrak{v} . \mathfrak{H}]$$

voraussetzen. Für die Einheit der Ladung wäre das

$$\mathfrak{E}_2 = [\mathfrak{v} . \mathfrak{H}]$$ [1].

Indem wir diesen Vector mit dem früher (§ 9) betrachteten $\mathfrak{E}_1$ zusammensetzen, erhalten wir für die ganze, auf die Einheit der Ladung ausgeübte Kraft, wir wollen sagen, für die *electrische Kraft*,

$$\mathfrak{E} = 4\pi V^2 \mathfrak{d} + [\mathfrak{v} . \mathfrak{H}] \qquad \text{(V)}$$

Wir unterlassen es, das hierin ausgesprochene Gesetz in Worten auszudrücken. Indem wir dasselbe zu einem allgemeinen Grundgesetz erheben, haben wir das System der Bewegungsgleichungen (I)—(V) vervollständigt, da die electrische Kraft, in Verbindung mit etwaigen anderen Kräften, die Bewegung der Ionen bestimmt.

Was diese letztere betrifft, so wollen wir noch die Voraussetzung einführen, dass die Ionen niemals rotiren [2].

---

[1]) Will man einen gewöhnlichen electrischen Strom nicht als einen Convectionsstrom betrachten, so muss man diese Formel durch die Annahme begründen, dass ein Körper, in dem eine Convection stattfindet, dieselben electrodynamischen Wirkungen erfahre wie ein entsprechender Stromleiter.

In der früher publicirten Ableitung der Bewegungsgleichungen (Arch. néerl. **25**, 363, 1892. Collected Papers, **2**, 164), habe ich die hierfür nothwendigen Bedingungen erörtert.

*Die Erhaltung der Energie*

§ 13. Um unsere Hypothesen zu rechtfertigen, ist es nothwendig, die Uebereinstimmung derselben mit dem Energiegesetze nachzuweisen. Wir betrachten ein beliebiges System Ionen enthaltender, ponderabler Körper, um welches sich ringsherum bis auf unendliche Entfernung hin, nur der Aether befindet, und legen um dasselbe eine beliebige geschlossene Fläche $\sigma$. Während eines Zeitelementes $dt$ ist nun die Arbeit der aus $\mathfrak{E}$ entspringenden, die ponderable Materie afficirenden Kräfte

$$4\pi\, V^2\, dt \int \rho\, (\mathfrak{d}_x \mathfrak{v}_x + \mathfrak{d}_y \mathfrak{v}_y + \mathfrak{d}_z \mathfrak{v}_z)\, d\tau,$$

wobei zu bemerken ist, dass die aus $\mathfrak{E}_2$ abzuleitenden Kräfte keine Arbeit leisten, da sie immer senkrecht zur Bewegungsrichtung stehen. Ist weiter $dA$ die Arbeit der sonst noch auf die Materie wirkenden Kräfte, und $L$ die gewöhnliche mechanische Energie dieser Materie, so ist

$$dA = dL - 4\pi\, V^2\, dt \int \rho\, (\mathfrak{d}_x \mathfrak{v}_x + \mathfrak{d}_y \mathfrak{v}_y + \mathfrak{d}_z \mathfrak{v}_z)\, d\tau. \tag{9}$$

Das Integral bezieht sich auf den mit ponderabler Materie erfüllten Raum; wir können es sich aber ebenso gut über den ganzen von $\sigma$ eingeschlossenen Raum erstrecken lassen. Alle weiteren Raumintegrale in diesem § sind in letzterem Sinne aufzufassen.

Man ersetze in (9), nach (4) und (III),

$$4\pi\, \rho \mathfrak{v}_x, \text{ u.s.w.}$$

durch

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} - 4\pi \frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial t}, \text{ u.s.w.}, \tag{10}$$

und forme die Theile des Integrals, welche Differentialquotienten von $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$ enthalten, durch partielle Integration um.

Unter Berücksichtigung der Gleichung (IV) wird man finden

$$dA = d\,(L + U) + V^2\, dt \int [\mathfrak{d}.\mathfrak{H}]_n\, d\sigma, \tag{11}$$

wo

$$U = 2\pi\, V^2 \int \mathfrak{d}^2\, d\tau + \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{H}^2\, d\tau \tag{12}$$

ist.

Zunächst soll jetzt angenommen werden, dass die electrischen Bewegungen auf einen gewissen endlichen Raum beschränkt seien, und dass die Fläche $\sigma$ gänzlich ausserhalb dieses Raumes liege. Es wird dann an der Fläche $\mathfrak{d} = 0$, $\mathfrak{H} = 0$, und

$$dA = d\,(L + U).$$

Somit besteht wirklich eine Grösse $L + U$, deren Zuwachs der Arbeit der äusseren Kräfte gleich ist, und welcher demnach die Bezeichnung „Energie" zukommt. Sie setzt sich zusammen aus der gewöhnlichen mechanischen Energie $L$ und der „electrischen" Energie $U$, für welche letztere wir den von MAXWELL angegebenen Werth wiederfinden.

### *Der* POYNTING'*sche Satz*

§ 14. Auch wenn wir die zuletzt über $\sigma$ gemachte Voraussetzung fallen lassen, gestattet die Formel (11) eine einfache Deutung. Mit MAXWELL nehmen wir nicht nur an, dass die electrische Energie den Werth (12) habe, sondern auch, dass sie wirklich über den Raum vertheilt sei, wie die Formel es ausdrückt, d.h. dass sie für die Volumeinheit

$$2\pi\, V^2\, \mathfrak{d}^2 + \frac{1}{8\pi}\, \mathfrak{H}^2$$

betrage.

In der Gleichung (11) bedeutet dann $L + U$ die gesammte Energie innerhalb der Fläche $\sigma$, und es liegt also die Auffassung nahe, dass eine Quantität Energie

$$V^2\, dt \int [\mathfrak{d}.\mathfrak{H}]_n\, d\sigma$$

durch die Fläche hin nach aussen gewandert sei. Am einfachsten ist es, für den auf die Zeit- und Flächeneinheit bezogenen „Energiestrom" zu setzen

$$V^2\, [\mathfrak{d}.\mathfrak{H}]_n \tag{13}$$

In dieser Weise gelangen wir zu dem bekannten, zuerst von Hrn. POYNTING ausgesprochenen Theorem. Auf die subtile, mit demselben zusammenhängende Frage nach der Localisirung der Energie soll hier nicht eingegangen werden. Wir können uns damit begnügen, dass die gesammte, in einem beliebigen Raum befindliche Energie — der „electrische" Antheil nach der Formel (12) berechnet — sich immer so ändert, *als ob* die Energie in der durch (13) bestimmten Weise wandere.

*Spannungen im Aether*

§ 15. Die durch unsere Formel (V) bestimmten Kräfte bedingen nicht nur die Bewegung der Ionen in den ponderablen Körpern, sondern können sich unter Umständen auch zu einer Wirkung vereinigen, welche die Körper selbst in Bewegung zu setzen strebt. In dieser Weise entstehen alle „ponderomotorischen" Kräfte, also z.B. die gewöhnlichen electrostatischen und electrodynamischen, sowie auch der Druck, den Lichtstrahlen auf einen Körper ausüben.

Wir wollen den Körper als starr betrachten und durch einfache Addition aller Kräfte, welche der Aether in der Richtung der $x$-Axe auf die Ionen ausübt, die gesammte Kraft $\Xi$ in dieser Richtung berechnen. Diese Untersuchung soll sich an das zu Anfang des § 13 Gesagte anschliessen.

Man erhält sofort

$$\Xi = 4\pi\, V^2 \int \mathfrak{d}_x\, \rho d\tau + \int \rho\, [\mathfrak{v}.\mathfrak{H}]_x\, d\tau =$$

$$= 4\pi\, V^2 \int \mathfrak{d}_x\, \rho d\tau + \int \rho\, (\mathfrak{v}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{v}_z \mathfrak{H}_y)\, d\tau,$$

wo die Integrale sich nur über den ponderablen Körper zu erstrecken brauchen, aber wie im § 13 für den ganzen, von $\sigma$ umschlossenen Raum genommen werden sollen.

Zunächst wird nun, indem man $4\pi\, \rho \mathfrak{v}_x$, u.s.w. durch die Ausdrücke (10), und, auf Grund von (1), $\rho$ durch

$$\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial z}$$

ersetzt,

$$\Xi = 4\pi\, V^2 \int \mathfrak{d}_x \left( \frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial z} \right) d\tau + \\ + \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \mathfrak{H}_z \left( \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} \right) - \mathfrak{H}_y \left( \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} \right) \right\} d\tau + \\ + \int \left( \mathfrak{H}_y \frac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial t} - \mathfrak{H}_z \frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial t} \right) d\tau \qquad (14)$$

Weiter ergibt eine partielle Integration und Anwendung von (IV) und (II), wenn man die Richtungsconstanten der Normale zu $\sigma$ mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bezeichnet,

$$\int \mathfrak{d}_x \frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial y} d\tau = \int \beta\, \mathfrak{d}_x \mathfrak{d}_y\, d\sigma - \int \mathfrak{d}_y \frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial y} d\tau = \\ = \int \beta\, \mathfrak{d}_x \mathfrak{d}_y\, d\sigma - \int \mathfrak{d}_y \frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial x} d\tau - \frac{1}{4\pi\, V^2} \int \mathfrak{d}_y \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} d\tau,$$

$$\int \mathfrak{d}_x \frac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial z} d\tau = \int \gamma\, \mathfrak{d}_x \mathfrak{d}_z\, d\sigma - \int \mathfrak{d}_z \frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial z} d\tau = \\ = \int \gamma\, \mathfrak{d}_x \mathfrak{d}_z\, d\sigma - \int \mathfrak{d}_z \frac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial x} d\tau + \frac{1}{4\pi\, V^2} \int \mathfrak{d}_z \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} d\tau,$$

$$\int \left( \mathfrak{H}_y \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} + \mathfrak{H}_z \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} \right) d\tau = \int (\beta\, \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_y + \gamma\, \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_z)\, d\sigma - \\ - \int \mathfrak{H}_x \left( \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z} \right) d\tau = \int (\beta\, \mathfrak{H}_x\, \mathfrak{H}_y + \gamma\, \mathfrak{H}_x\, \mathfrak{H}_z)\, d\sigma + \\ + \int \mathfrak{H}_x \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} d\tau.$$

Substituirt man diese Werthe in (14), so ergeben sich mehrere Glieder, die sich vollständig integriren lassen, und es wird schliesslich nach leichter Umformung

$$\Xi = 2\pi\, V^2 \int (2 \mathfrak{d}_x \mathfrak{d}_n - \alpha \mathfrak{d}^2)\, d\sigma + \frac{1}{8\pi} \int (2\, \mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_n - \alpha \mathfrak{H}^2)\, d\sigma + \\ + \frac{d}{dt} \int (\mathfrak{H}_y \mathfrak{d}_z - \mathfrak{H}_z \mathfrak{d}_y)\, d\tau. \qquad (15)$$

Zwei ähnliche Gleichungen dienen zur Bestimmung der anderen Componenten H und Z der ponderomotorischen Wirkung.

Nebenbei ist zu bemerken, dass Ξ, H und Z verschwinden müssen, sobald der Raum $\tau$ keine ponderable Materie enthält. Dann wäre also

$$2\pi V^2 \int (2\mathfrak{d}_x\mathfrak{d}_n - \alpha\mathfrak{d}^2)\, d\sigma + \frac{1}{8\pi}\int (2\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_n - \alpha\mathfrak{H}^2)\, d\sigma =$$
$$= -\frac{d}{dt}\int (\mathfrak{H}_y\mathfrak{d}_z - \mathfrak{H}_z\mathfrak{d}_y)\, d\tau, \text{ u.s.w.} \qquad (16)$$

§ 16. In einigen Fällen wird das in (15) übriggebliebene Raumintegral unabhängig von $t$, und fällt das letzte Glied fort, nämlich sobald man es mit einem stationären Zustande, sei es mit einer electrischen Ladung, sei es mit einem System constanter Ströme, zu thun hat. Es lässt sich dann, wenigstens was die resultirende *Kraft* betrifft, die ponderomotorische Wirkung (Ξ, H, Z) durch Integration über eine beliebige, den Körper einschliessende Fläche berechnen, und es liegt nahe, dieses so aufzufassen, dass man, wie MAXWELL es that, dem Aether einen gewissen Spannungszustand zuschreibt und die Spannungen als Ursache der ponderomotorischen Wirkungen betrachtet [1]). Versteht man gewohnterweise unter $(X_n, Y_n, Z_n)$ die auf die Flächeneinheit bezogene Kraft, die der Aether an der durch $n$ angegebenen Seite eines Elementes $d\sigma$ auf den gegenüberliegenden Aether ausübt, so wäre nach (15) zu setzen

$$X_n = 2\pi V^2 (2\mathfrak{d}_x\mathfrak{d}_n - \alpha\mathfrak{d}^2) + \frac{1}{8\pi}(2\mathfrak{H}_x\mathfrak{H}_n - \alpha\mathfrak{H}^2), \text{ u.s.w.} \qquad (17)$$

Es ist leicht, hieraus die Werthe von $X_x$, $X_y$, $X_z$, $Y_x$, u.s.w. abzuleiten; man erhält dann gerade das System von Spannungen, welches MAXWELL angegeben hat.

§ 17. Da in (15) das Glied mit dem Raumintegrale in der Regel nicht verschwindet, so führt die Annahme der Spannungen (17) im allgemeinen nicht zu den von uns statuirten Wirkungen. Wollte man nun die Gleichung (V) als Grundlage für die Berechnung der ponderomotorischen Kräfte fallen lassen und sich an die

[1]) Auch bezüglich des resultirenden Kräftepaares ist die ponderomotorische Wirkung auf einen starren Körper dem System der Spannungen (17) auf einer beliebigen, den Körper umschliessenden Fläche $\sigma$ äquivalent. Wollten wir auch die ponderomotorischen Wirkungen auf biegsame oder flüssige Körper betrachten, so hätten wir auf Volumelemente zurückzugehen. Doch das würde uns zu weit führen.

Spannungen halten, so wäre die Sache mit den Formeln (I)—(IV) und (17) doch keineswegs abgethan. Man würde nicht einmal denselben Werth für $\Xi$ herausbekommen, wenn man die Gleichung

$$\Xi = 2\pi V^2 \int (2\mathfrak{d}_x \mathfrak{d}_n - \alpha \mathfrak{d}^2)\, d\sigma + \frac{1}{8\pi} \int (2\mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_n - \alpha \mathfrak{H}^2)\, d\sigma$$

bald auf die eine, bald auf die andere, den betrachteten Körper umschliessende Fläche anwendete. Es hängt dies damit zusammen, dass die Spannungen (17) den Aether selbst nicht in Ruhe lassen würden.

Wir haben oben für einen von ponderabler Materie freien Raum die Formeln (16) gefunden. Dass diese, so lange der Aether ruht, richtig sind, ist wohl nicht zu bezweifeln, da bei der Ableitung nur allgemein angenommene Gleichungen ins Spiel kommen. Aus den Formeln

$$\operatorname{div} \mathfrak{d} = 0$$

und

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi \dot{\mathfrak{d}}$$

ergibt sich nämlich, dass die rechte Seite der Gleichung (14) für den freien Aether gleich Null ist; die Anwendung von (IV) und (II) führt dann weiter zu der ersten der Formeln (16).

In diesen stehen nun links die Kräfte, welche sich aus den Spannungen an der Oberfläche $\sigma$ ergeben, und die Formeln besagen also, dass der betrachtete Aethertheil unter dem Einflusse dieser Kräfte *nicht* in Ruhe bleiben kann. Wer die Gleichungen (17) für allgemein gültig hält, muss schliessen, dass in allen Fällen, wo der POYNTING'sche Energiestrom mit der Zeit veränderlich ist [1]), der Aether als Ganzes in Bewegung geräth. Es wäre dann weiter die Art der entstehenden Aetherströmungen zu erforschen und unter Berücksichtigung derselben die Frage nach den ponderomotorischen Wirkungen aufs neue in Angriff zu nehmen.

Die Grundzüge einer Theorie der genannten Aetherströmungen wurden noch von HERMANN VON HELMHOLTZ' Meisterhand entworfen in einer [2]) der letzten Arbeiten, die es ihm vergönnt war, zu vollenden.

---

[1]) Abgesehen von dem Factor $-V^2$ stehen nämlich auf der rechten Seite der Gleichungen (16) unter dem Integralzeichen die Componenten des Energiestromes.

[2]) Berl. Sitzungsberichte, 1893. Wied. Ann. **53**, 135, 1894.

Hier kann auf die eben berührten Fragen nicht eingegangen werden, da die Grundannahme, von der wir ausgegangen sind, eine andere Auffassung mit sich bringt. In der That, weshalb sollten wir, da wir doch einmal angenommen haben, dass der Aether sich nicht bewege, je von einer auf dieses Medium wirkenden Kraft reden? Das Einfachste wäre wohl, anzunehmen, dass auf ein Volumelement des Aethers, als Ganzes betrachtet, nie eine Kraft wirke, oder selbst den Begriff der Kraft auf ein solches Element, dass doch nie von der Stelle rückt, nicht einmal anzuwenden. Freilich verstiesse diese Auffassung gegen den Satz von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung —, da wir ja Grund haben zu sagen, dass der Aether Kräfte auf die ponderable Materie *ausübe* —; aber, soviel ich sehe, zwingt nichts dazu, jenen Satz zu einem unbeschränkt gültigen Fundamentalgesetze zu erheben.

Haben wir uns einmal für die so eben geschilderte Betrachtungsweise entschieden, so müssen wir auch von vornherein darauf verzichten, die durch (V) bedingten ponderomotorischen Wirkungen auf Aetherspannungen zurückzuführen. Das wären ja Kräfte zwischen dem einen und dem anderen Theil des Aethers, und solche dürfen wir, wollen wir consequent sein, nicht mehr annehmen.

Trotzdem werden wir zu Erleichterung der Rechnung die Gleichung (15) anwenden können, und es wird auch kein Missverständniss verursachen, wenn wir uns der Kürze halber so ausdrücken, als ob die Elemente der beiden ersten Integrale wirkliche Spannungen im Aether bedeuteten.

Aus diesen jetzt bloss fingirten „Spannungen" lassen sich dann, wie wir sahen, die Wechselwirkung zwischen geladenen Körpern und die electrodynamischen Wirkungen unmittelbar ableiten. Es empfiehlt sich gleichfalls, mit denselben zu operiren, wenn die Erscheinungen periodisch sind und man nur die Mittelwerthe der ponderomotorischen Kräfte während einer vollen Periode zu kennen wünscht; das letzte Glied von (15) trägt nämlich nichts zu diesen Werthen bei.

Man gelangt auf diese Weise leicht zu MAXWELL's Satz über den durch eine Lichtbewegung erzeugten Druck.

### *Die Umkehrbarkeit der Bewegungen und das Spiegelbild einer Bewegung*

§ 18. Behufs späterer Anwendung schalten wir hier noch folgende Betrachtungen ein.

Es sei ein System sich bewegender Ionen gegeben, und in demselben seien $\rho_1$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{d}_1$ und $\mathfrak{H}_1$ die verschiedenen, in Betracht kommenden Grössen. Wir können die entsprechenden Grössen für ein zweites System mit $\rho_2$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{d}_2$ und $\mathfrak{H}_2$ bezeichnen und wollen uns denken, dass in einem beliebigen Punkte diese Grössen zur Zeit $+t$ übereinstimmen mit den Grössen $\rho_1$, $-\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{d}_1$ und $-\mathfrak{H}_1$ zur Zeit $-t$.

Man sieht leicht ein, dass, was $\rho_2$ und $\mathfrak{v}_2$ betrifft, dieser Bedingung durch eine wirkliche Bewegung von Ionen genügt werden kann, und zwar muss hierzu das System dieser Ionen vollkommen mit dem ersten System übereinstimmen; es müssen dieselben Configurationen mit denselben Zwischenzeiten nach einander eintreten, wie in jenem ersten Systeme, nur in entgegengesetzter Reihenfolge; mit anderen Worten: man erhält die Bewegungen der Ionen im zweiten Systeme, wenn man die zuerst gegebenen Bewegungen rückläufig macht.

Da weiter $\mathfrak{d}_2$ und $\mathfrak{H}_2$ den Bedingungen (I), (II), (III) und (IV) genügen, so ist der durch diese Vectoren bestimmte Zustand des Aethers mit der Bewegung der Ionen verträglich.

Endlich folgt aus der Gleichung (V), dass in dem zweiten Systeme zur Zeit $+t$ die durch den Aether auf die Ionen ausgeübten Kräfte dieselbe Richtung und Grösse haben, wie die entsprechenden Kräfte im ersten System zur Zeit $-t$. Sind nun auch die im übrigen noch auf die Ionen wirkenden Kräfte in den beiden Fällen — und in den genannten Augenblicken — dieselben, so darf man schliessen, dass der zweite Bewegungszustand in jeder Hinsicht realisirbar ist.

Mittelst ähnlicher Betrachtungen lässt sich auch die Möglichkeit einer Bewegung darthun, welche das „Spiegelbild" einer gegebenen in Bezug auf eine feste Ebene ist.

Wir nennen $P_2$ das Spiegelbild eines Punktes $P_1$ und bezeichnen die für zwei Systeme — und zwar für das erste in $P_1$ und für das zweite in $P_2$ — geltenden Grössen mit $\rho_1$, $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{H}_1$ und $\rho_2$, $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{H}_2$. Dabei soll fortwährend $\rho_2 = \rho_1$ sein, und es sollen die Vectoren $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{H}_2$ die Spiegelbilder der Vectoren $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{d}_1$ und $-\mathfrak{H}_1$ sein.

Dass nun der zweite Bewegungszustand füglich das „Spiegelbild" des ersten heissen kann, bedarf wohl keiner Erläuterung. Sind die Kräfte nicht-electrischen Ursprungs derart, dass die Vectoren, durch die sie in den beiden Fällen dargestellt werden können, sich wie Gegenstände und deren Spiegelbilder verhalten, so wird die zweite Bewegung möglich sein, sobald die erste es ist.

## ABSCHNITT II

## ELECTRISCHE ERSCHEINUNGEN IN PONDERABLEN KÖRPERN, WELCHE SICH MIT EINER CONSTANTEN GESCHWINDIGKEIT DURCH DEN RUHENDEN AETHER VERSCHIEBEN

### *Umformung der Grundgleichungen*

§ 19. Von jetzt ab soll angenommen werden, dass die zu betrachtenden Körper sich mit einer unveränderlichen Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{p}$ fortbewegen, unter welcher wir in fast allen Anwendungen die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bewegung um die Sonne zu verstehen haben werden. Zwar wäre es interessant, die Theorie zunächst für ruhende Körper weiter zu entwickeln, allein der Kürze halber wollen wir uns sogleich dem allgemeineren Fall zuwenden. Es kann übrigens immer noch $\mathfrak{p} = 0$ gesetzt werden.

Am einfachsten wird die Behandlung der sich jetzt darbietenden Probleme, wenn man statt des oben angewandten Coordinatensystems ein anderes einführt, das mit der ponderablen Materie fest verbunden ist und also an deren Verschiebung theilnimmt.

Während die Coordinaten eines Punktes in Bezug auf das feste System $x$, $y$, $z$ hiessen, mögen die, welche sich auf das bewegliche System beziehen, und welche ich die *relativen* Coordinaten nenne, einstweilen mit $(x)$, $(y)$, $(z)$ bezeichnet werden. Bis jetzt wurden alle variablen Grössen als Functionen von $x$, $y$, $z$, $t$ angesehen; weiterhin sollen $\mathfrak{d}_x$, $\mathfrak{d}_y$, u.s.w. als Functionen von $(x)$, $(y)$, $(z)$ und $t$ betrachtet werden.

Unter einem *festen* Punkte verstehen wir jetzt einen Punkt der in Bezug auf die neuen Axen eine unveränderliche Lage hat; ebenso soll mit der *Ruhe* oder der *Bewegung* eines körperlichen Theilchens die *relative* Ruhe oder die *relative* Bewegung in Bezug auf die ponderable Materie gemeint sein. Mit Ionen, welche sich in diesem Sinne des Wortes bewegen, werden wir es zu thun haben, sobald die sich verschiebende Materie der Sitz electrischer Bewegungen ist.

Durch $\mathfrak{v}$ soll nicht mehr die wirkliche Geschwindigkeit, sondern die Geschwindigkeit der soeben genannten relativen Bewegung dargestellt werden. Die wirkliche Geschwindigkeit ist somit

$$\mathfrak{p} + \mathfrak{v},$$

und ist hierdurch $\mathfrak{v}$ in den Gleichungen (4) und (V) zu ersetzen.

Ausserdem hat man statt der Differentialquotienten nach $x$, $y$, $z$ und $t$ solche nach $(x)$, $(y)$, $(z)$ und $t$ einzuführen.

Die erstgenannten Differentialquotienten bezeichne ich mit

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_1,$$

die letztgenannten dagegen mit

$$\frac{\partial}{\partial (x)}, \frac{\partial}{\partial (y)}, \frac{\partial}{\partial (z)}, \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_2.$$

Es ist nun, in Anwendung auf eine beliebige Function,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial (x)}, \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial (y)}, \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial (z)},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_1 = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_2 - \mathfrak{p}_x \frac{\partial}{\partial (x)} - \mathfrak{p}_y \frac{\partial}{\partial (y)} - \mathfrak{p}_z \frac{\partial}{\partial (z)}.$$

Hieraus folgt, dass für div $\mathfrak{A}$ der Ausdruck

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial (x)} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial (y)} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial (z)},$$

und für die Componenten von rot $\mathfrak{A}$

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial (y)} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial (z)}, \text{ u.s.w.}$$

geschrieben werden darf. Die Ausdrücke div $\mathfrak{A}$ und rot $\mathfrak{A}$ haben also noch immer die § 4, $g$ und $h$ festgesetzte Bedeutung, wenn man, nachdem man die alten Coordinaten ein für alle Mal verlassen hat, die neuen zur Vereinfachung nicht mehr mit $(x)$, $(y)$, $(z)$, sondern mit $x$, $y$, $z$ andeutet.

Wir wollen auch, nachdem wir zu den neuen Coordinaten übergegangen sind, für eine Differentiation nach der Zeit bei constanten relativen Coordinaten, statt $(\partial/\partial t)_2$ das Zeichen $\partial/\partial t$ benutzen, sodass

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_1 = \frac{\partial}{\partial t} - \mathfrak{p}_x \frac{\partial}{\partial x} - \mathfrak{p}_y \frac{\partial}{\partial y} - \mathfrak{p}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{18}$$

wird.

Die Differentialquotienten nach der Zeit, welche in den Grundgleichungen (I)—(V) vorkommen, sind sämmtlich von der durch $(\partial/\partial t)_1$ angedeuteten Art. Wir werden dieses Zeichen als Abkürzung für den längeren Ausdruck (18) beibehalten.

Dagegen soll ein Punkt über einem Buchstaben fernerhin — wie $\partial/\partial t$ — eine Differentiation nach der Zeit bei constanten relativen Coordinaten anzeigen. Es dürfen also die Glieder $\dot{\mathfrak{d}}$ und $\dot{\mathfrak{H}}$ in (4) und (IV) nicht unverändert gelassen werden. Unter $\dot{\mathfrak{d}}$ z.B. war ein Vector zu verstehen mit den Componenten

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial t}\right)_1, \text{ u.s.w.},$$

oder

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathfrak{p}_x \frac{\partial}{\partial x} - \mathfrak{p}_y \frac{\partial}{\partial y} - \mathfrak{p}_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \mathfrak{d}_x, \text{ u.s.w.}$$

Wir können für diesen Vector passend schreiben

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t}\right)_1,$$

während

$$\dot{\mathfrak{d}} \text{ oder } \frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t}$$

den Vector mit den Componenten

$$\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial t}, \text{ u.s.w.}$$

bedeuten wird.

Bezogen auf das mit der ponderablen Materie verbundene Axensystem, werden schliesslich die Grundgleichungen

$$\operatorname{div} \mathfrak{d} = \rho, \tag{I$_a$}$$

$$\mathfrak{S} = \rho\,(\mathfrak{p} + \mathfrak{v}) + \left(\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t}\right)_1, \tag{4$_a$}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0, \tag{II$_a$}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi\, \mathfrak{S}, \tag{III$_a$}$$

$$-4\pi V^2 \operatorname{rot} \mathfrak{d} = \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right)_1, \tag{IV$_a$}$$

$$\mathfrak{E} = 4\pi V^2 \mathfrak{d} + [\mathfrak{p}.\mathfrak{H}] + [\mathfrak{v}.\mathfrak{H}] \tag{V$_a$}$$

§ 20. Für gewisse Zwecke ist eine andere Form einiger Gleichungen geeigneter.

Die erste der drei in (IV$_a$) zusammengefassten Beziehungen lautet nämlich

$$-4\pi V^2\left(\frac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial y}-\frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial z}\right)=\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t}-\mathfrak{p}_x\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x}-\mathfrak{p}_y\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y}-\mathfrak{p}_z\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z},$$

wo sich, der Gleichung (II$_a$) zufolge, für die drei letzten Glieder schreiben lässt

$$\left(\mathfrak{p}_x\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial y}-\mathfrak{p}_y\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y}\right)-\left(\mathfrak{p}_z\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z}-\mathfrak{p}_x\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z}\right),$$

was nichts anderes ist als die erste Componente von

$$\operatorname{rot} [\mathfrak{p}.\mathfrak{H}].$$

Demzufolge erhält man statt (IV$_a$)

$$\operatorname{rot} \{4\pi V^2 \mathfrak{d} + [\mathfrak{p}.\mathfrak{H}]\} = -\dot{\mathfrak{H}}.$$

Es lässt sich weiter der Strom $\mathfrak{S}$ ganz eliminiren. Die erste der Gleichungen (III$_a$) wird, wenn man (4$_a$) und (I$_a$) beachtet,

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y}-\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}=4\pi\rho\,(\mathfrak{p}_x+\mathfrak{v}_x)+4\pi\left(\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial t}-\mathfrak{p}_x\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial x}-\mathfrak{p}_y\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial y}-\right.$$

$$\left.-\mathfrak{p}_z\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial z}\right)=4\pi\rho\mathfrak{v}_x+4\pi\left\{\left(\mathfrak{p}_x\frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial y}-\mathfrak{p}_y\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial y}\right)-\left(\mathfrak{p}_z\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial z}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\mathfrak{p}_x\frac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial z}\right)\right\}+4\pi\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial t}.$$

Hieraus folgt, wenn man einen neuen Vector $\mathfrak{H}'$ mittelst der Gleichung

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - 4\pi\,[\mathfrak{p}.\mathfrak{d}],$$

definirt,

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H}' = 4\pi\rho\mathfrak{v} + 4\pi\,\dot{\mathfrak{d}}.$$

Führen wir nun noch für die auf *ruhende* Ionen wirkende electrische Kraft das Zeichen $\mathfrak{F}$ ein, so erhalten wir folgende Reihe von Formeln

$$\operatorname{div} \mathfrak{d} = \rho, \tag{I$_b$}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0, \tag{II$_b$}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H}' = 4\pi\, \rho \mathfrak{v} + 4\pi\, \dot{\mathfrak{d}}, \tag{III$_b$}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{F} = -\, \dot{\mathfrak{H}}, \tag{IV$_b$}$$

$$\mathfrak{F} = 4\pi\, V^2\, \mathfrak{d} + [\mathfrak{p}.\mathfrak{H}], \tag{V$_b$}$$

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - 4\pi\, [\mathfrak{p}.\mathfrak{d}], \tag{VI$_b$}$$

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{F} + [\mathfrak{v}.\mathfrak{H}]. \tag{VII$_b$}$$

§ 21. Aus den Gleichungen (I$_a$)—(V$_a$) (§ 19) lassen sich auch Formeln ableiten, deren jede nur eine der Grössen $\mathfrak{d}_x$, $\mathfrak{d}_y$, $\mathfrak{d}_z$, $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$ enthält.

Zunächst folgt aus (IV$_a$)

$$-\, 4\pi\, V^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{d} = \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right)_1 = \left(\frac{\partial \operatorname{rot} \mathfrak{H}}{\partial t}\right)_1.$$

Beachtet man hier das § 4, *h* Gesagte, sowie die Relationen (I$_a$), (III$_a$) und (4$_a$), so gelangt man zu den drei Formeln

$$V^2\, \Delta\, \mathfrak{d}_x - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{d}_x}{\partial t^2}\right)_1 = V^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_1 \{\rho\, (\mathfrak{p}_x + \mathfrak{v}_x)\}, \text{ u.s.w.} \tag{A}$$

In ähnlicher Weise findet man

$$V^2\, \Delta\, \mathfrak{H}_x - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_x}{\partial t^2}\right)_1 = 4\pi\, V^2 \left[\frac{\partial}{\partial z} \{\rho\, (\mathfrak{p}_y + \mathfrak{v}_y)\} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial y} \{\rho\, (\mathfrak{p}_z + \mathfrak{v}_z)\}\right], \text{ u.s.w.} \tag{B}$$

Die letzten Glieder dieser sechs Gleichungen sind vollständig bekannt, sobald man weiss, wie sich die Ionen bewegen.

### *Anwendung auf die Electrostatik*

§ 22. Wir wollen berechnen, mit welchen Kräften die Ionen auf einander wirken, wenn sie alle in Bezug auf die ponderable Materie ruhen. In diesem Falle entsteht ein Zustand, wobei in jedem Punkte $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{H}$ unabhängig von der Zeit sind. Es wird

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_1 = -\left(\mathfrak{p}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{p}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{p}_z \frac{\partial}{\partial z}\right), \tag{19}$$

und es reduciren sich die Gleichungen (A) und (B), wenn man der Kürze halber die Operation

$$\Delta - \frac{1}{V^2}\left(\mathfrak{p}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{p}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{p}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2$$

durch $\Delta'$ angibt, auf

$$\Delta' \mathfrak{d}_x = \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}\left(\mathfrak{p}_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + \mathfrak{p}_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \mathfrak{p}_z \frac{\partial \rho}{\partial z}\right), \text{ u.s.w.,} \qquad \text{(A')}$$

und

$$\Delta' \mathfrak{H}_x = 4\pi\left(\mathfrak{p}_y \frac{\partial \rho}{\partial z} - \mathfrak{p}_z \frac{\partial \rho}{\partial y}\right), \text{ u.s.w.} \qquad \text{(B')}$$

Um diese Bedingungen zu erfüllen, bestimme man eine Function $\omega$ durch

$$\Delta' \omega = \rho$$

und setze

$$\mathfrak{d}_x = \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}\left(\mathfrak{p}_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + \mathfrak{p}_y \frac{\partial \omega}{\partial y} + \mathfrak{p}_z \frac{\partial \omega}{\partial z}\right), \text{ u.s.w.,} \qquad (20)$$

$$\mathfrak{H}_x = 4\pi\left(\mathfrak{p}_y \frac{\partial \omega}{\partial z} - \mathfrak{p}_z \frac{\partial \omega}{\partial y}\right), \text{ u.s.w.,} \qquad (21)$$

Werthe, welche auch wirklich den Grundgleichungen ($I_a$)—($IV_a$) genügen.

Aus ($V_a$) folgt nun weiter

$$\mathfrak{E}_x = 4\pi\,(V^2 - \mathfrak{p}^2)\frac{\partial \omega}{\partial x}, \text{ u.s.w.,} \qquad (22)$$

wodurch die gesuchten Kräfte gefunden sind.

Unbeschadet der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die Translation in der Richtung der $x$-Axe geschehe. Es wird dann $\mathfrak{p}_y = \mathfrak{p}_z = 0$, $\mathfrak{p}_x = \mathfrak{p}$, und die Formel zur Bestimmung von $\omega$ verwandelt sich in

$$\left(1 - \frac{\mathfrak{p}^2}{V^2}\right)\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = \rho. \qquad (23)$$

§ 23. Um die Bedeutung der vorstehenden Formeln klarzulegen, wollen wir das betrachtete System $S_1$ mit einem zweiten $S_2$ vergleichen. Letzteres soll sich *nicht* verschieben und aus $S_1$ entstehen durch Vergrösserung aller Dimensionen, welche die Richtung der $x$-Axe haben (also auch der betreffenden Dimensionen der Ionen), im Verhältniss von $\sqrt{V^2 - \mathfrak{p}^2}$ zu $V$, oder: zwischen den Coordinaten $x$, $y$, $z$ eines Punktes von $S_1$ und den Coordinaten $x'$, $y'$, $z'$ des demselben entsprechenden Punktes von $S_2$ lassen wir die Beziehungen

$$x = x' \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{p}^2}{V^2}}, \quad y = y', \quad z = z' \tag{24}$$

bestehen.

Ausserdem sollen die einander entsprechenden Volumelemente, und also auch die Ionen, in $S_1$ und $S_2$ gleiche Ladungen haben.

Versieht man alle Grössen, welche sich auf das zweite System beziehen, zur Unterscheidung mit einem Strich, so ist

$$\rho' = \rho \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{p}^2}{V^2}},$$

und

$$\frac{\partial^2 \omega'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \omega'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \omega'}{\partial z'^2} = \rho' = \rho \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{p}^2}{V^2}}.$$

Da sich nun die Gleichung (23) in der Gestalt

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z'^2} = \rho$$

schreiben lässt, so wird

$$\omega = \frac{\omega'}{\sqrt{1 - \mathfrak{p}^2/V^2}},$$

und da in dem zweiten System

$$\mathfrak{E}'_x = 4\pi\, V^2 \frac{\partial \omega'}{\partial x'}, \text{ u.s.w.}$$

ist,

$$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}'_x, \quad \mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}'_y \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{p}^2}{V^2}}, \quad \mathfrak{E}_z = \mathfrak{E}'_z \sqrt{1 - \frac{\mathfrak{p}^2}{V^2}}.$$

Dieselben Beziehungen, wie zwischen den Componenten von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$, bestehen auch, da die Ladungen in $S_1$ und $S_2$ gleich sind, zwischen den in beiden Fällen auf ein Ion wirkenden Kraftcomponenten.

Ist in dem zweiten System an gewissen Stellen $\mathfrak{E}' = 0$, so verschwindet $\mathfrak{E}$ an den correspondirenden Stellen des ersten Systems.

§ 24. Verschiedene Folgerungen aus diesem Satze liegen auf der Hand. Aus der gewöhnlichen Electrostatik weiss man z.B., dass ein Ueberschuss positiver (oder negativer) Ionen sich so über einen Conductor, und zwar über dessen Oberfläche $\Sigma'$, vertheilen kann, dass im Innern keine electrische Kraft wirkt. Nimmt man nun diese Vertheilung für das System $S_2$ und leitet daraus durch die oben besprochene Transformation ein System $S_1$ ab, so besteht auch in diesem ein Ueberschuss positiver Ionen nur an einer gewissen Oberfläche $\Sigma$, während in allen inneren Punkten die electrische Kraft $\mathfrak{E}$ verschwindet. An der Thatsache, dass eine electrische Ladung ihren Sitz an der *Oberfläche* eines Leiters hat, wird durch die Translation der ponderablen Materie also nichts geändert.

Aehnliche Betrachtungen gelten für zwei oder mehr Körper. Steht einem Conductor $C$ ein geladener Körper $K$ gegenüber, so existirt nach einem bekannten Satze immer eine gewisse Ladung an der Oberfläche von $C$, welche zusammen mit $K$ auf Ionen im Innern des Conductors keine Wirkung ausübt. Dieser Satz bleibt bestehen, wenn die ponderable Materie sich bewegt, und man wird auch dann noch annehmen dürfen, dass sich, unter dem Einflusse von $K$, auf $C$ von selbst eine „inducirte" Ladung bilde, welche die Wirkung von $K$ auf innere Punkte gerade aufhebt.

Da nach (22) die Componenten von $\mathfrak{E}$ den Differentialquotienten von $\omega$ proportional sind, so können wir auch sagen, dass die inducirende und die inducirte Ladung zusammen an allen Punkten von $C$ ein constantes $\omega$ hervorrufen. Daraus folgt dann mittelst der Gleichungen (20), (21) und ($\mathrm{V}_a$), dass auch ein bewegtes Ion im Inneren von $C$ keine Kraftwirkung von den beiden Ladungen erfährt.

Schliesslich ist zu bemerken, dass nach unseren Formeln die Vertheilung einer Ladung über einen gegebenen Conductor, sowie die Anziehung oder Abstossung geladener Körper durch die Bewegung der Erde verändert werden müssen. Doch beschränkt sich dieser Einfluss auf Glieder *zweiter* Ordnung, wenn man nämlich den Bruch $\mathfrak{p}/V$ eine Grösse *erster* Ordnung, und somit den Bruch $\mathfrak{p}^2/V^2$ eine Grösse *zweiter* Ordnung nennt.

Da $\mathfrak{p}/V = 1/10000$ ist, so darf man, abgesehen von einzelnen sehr speciellen Fällen, nicht hoffen, bei electrischen oder optischen Erscheinungen einen Einfluss der Erdbewegung zu constatiren, der von $\mathfrak{p}^2/V^2$ abhinge. Das Einzige also, was bei geladenen, in Bezug auf die Erde ruhenden Körpern vielleicht zu beobachten wäre, ist die magnetische Kraft (21). Auf den ersten Blick könnte man eine derselben entsprechende Wirkung auf Stromelemente erwarten. Wir werden im § 26 auf diese Frage zurückkommen.

*Werthe von* $\mathfrak{d}$ *und* $\mathfrak{H}$ *bei einem stationären Strome*

§ 25. Unter Zugrundelegung der Gleichungen (A) und (B) nehmen wir das im § 11 behandelte Problem wieder auf. Wir betrachten, wie dort, die Mittelwerthe und berücksichtigen, dass für dieselben bei stationären Zuständen die Vereinfachung (19) gestattet ist; ausserdem nehmen wir zunächst an, dass der Stromleiter keine merkliche Ladung besitze, sodass $\bar{\rho} = 0$ ist.

Es liegt nahe, den Vector $\overline{\rho\mathfrak{v}}$ als „Strom" aufzufassen. Wir denken uns denselben solenoidal vertheilt und bezeichnen ihn mit $\overline{\mathfrak{S}}$, wobei es freilich vorläufig unentschieden bleibt, ob dies nun auch der Mittelwerth des in $(4_a)$ vorkommenden Vectors ist.

Wir leiten nun aus (A) und (B) ab

$$V^2\,\Delta'\bar{\mathfrak{d}}_x = -\left(\mathfrak{p}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{p}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{p}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\overline{\mathfrak{S}}_x,\ \text{u.s.w.},$$

$$\Delta'\,\overline{\mathfrak{H}}_x = 4\pi\left(\frac{\partial\overline{\mathfrak{S}}_y}{\partial z} - \frac{\partial\overline{\mathfrak{S}}_z}{\partial y}\right),\ \text{u.s.w.}$$

Bestimmt man also drei Hülfsgrössen $\chi_x, \chi_y, \chi_z$ [1]) mittelst der Gleichungen

$$\Delta'\,\chi_x = \overline{\mathfrak{S}}_x,\ \Delta'\,\chi_y = \overline{\mathfrak{S}}_y,\ \Delta'\,\chi_z = \overline{\mathfrak{S}}_z,$$

so wird überall

$$\bar{\mathfrak{d}}_x = -\frac{1}{V^2}\left(\mathfrak{p}_x\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{p}_y\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{p}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\chi_x,\ \text{u.s.w.}, \tag{25}$$

$$\overline{\mathfrak{H}}_x = 4\pi\left(\frac{\partial\chi_y}{\partial z} - \frac{\partial\chi_z}{\partial y}\right),\ \text{u.s.w.}, \tag{26}$$

---

[1]) Diese Grössen unterscheiden sich, wenn $\mathfrak{p} = 0$, nur durch einen constanten Factor von den Componenten des Vectorpotentials.

und nach ($V_a$) die electrische Kraft, welche auf ruhende Ionen wirkt,

$$\overline{\mathfrak{E}}_x = -4\pi \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{p}_x \chi_x + \mathfrak{p}_y \chi_y + \mathfrak{p}_z \chi_z), \text{ u.s.w.} \tag{27}$$

Auf den ersten Blick scheint es daher, als ob ein von einem Strom durchflossener Leiter auf ruhende Ionen mit einer Kraft erster Ordnung wirke. Bei näherer Ueberlegung findet man aber, dass die Kraft (27) von einer anderen gerade compensirt wird.

Die Werthe (27) stimmen nämlich vollkommen mit den Ausdrücken (22) überein, wenn man darin

$$\omega = -\frac{\mathfrak{p}_x \chi_x + \mathfrak{p}_y \chi_y + \mathfrak{p}_z \chi_z}{V^2 - \mathfrak{p}^2} \tag{28}$$

setzt. Dieses $\omega$ würde nach § 22 zu einer electrischen Ladung gehören, deren Dichte

$$\rho = \Delta' \omega,$$

oder nach den mitgetheilten Formeln

$$\rho = -\frac{\mathfrak{p}_x \overline{\mathfrak{S}}_x + \mathfrak{p}_y \overline{\mathfrak{S}}_y + \mathfrak{p}_z \overline{\mathfrak{S}}_z}{V^2 - \mathfrak{p}^2} \tag{29}$$

ist.

Denken wir uns für einen Augenblick, dass der Strom nicht bestehe, wohl aber eine Ladung mit dieser mittleren Dichtigkeit $\rho$. Dieselbe würde natürlich nur in dem Leiter bestehen, und der Gesammtbetrag wäre Null, wie aus (29) und

$$\Delta\, \overline{\mathfrak{S}} = 0$$

folgt. Offenbar würde nun diese Ionenvertheilung, sich selbst überlassen, gänzlich verschwinden. Wir können das auch so ausdrücken, dass die Ladung, vermöge ihrer Wirkung auf ruhende Ionen, diese in Bewegung setze, und dass dadurch schliesslich neben ihr noch eine andere Ladung $A$ mit der mittleren Dichtigkeit $-\rho$, oder

$$\frac{\mathfrak{p}_x \overline{\mathfrak{S}}_x + \mathfrak{p}_y \overline{\mathfrak{S}}_y + \mathfrak{p}_z \overline{\mathfrak{S}}_z}{V^2 - \mathfrak{p}^2}$$

auftrete. Da nun der Strom, den wir anfänglich betrachteten, gerade so auf ruhende Ionen wirkt, wie die Ladung (29), so wird er nach kurzer Zeit ebenso die Ladung $A$ hervorrufen; diese hebt dann seine Wirkungen auf ruhende Ionen auf, und zwar nicht bloss in äusseren Punkten, sondern auch, wenigstens was die Mittelwerthe der Kräfte betrifft, im Innern des Stromleiters.

Ich will diese Ladung $A$ die *Compensationsladung* nennen. Ist sie einmal entstanden, so kann der Stromleiter keine Electricitätsbewegung in einem benachbarten Körper hervorrufen. Ein stationärer Strom in einem sich mit der Erde bewegenden Draht übt also auf einen Stromkreis, der ebenso in Bezug auf die Erde ruht, ungeachtet der Edbewegung keine Inductionswirkung aus [1]).

Zu bemerken ist nun noch, dass in dem schliesslich eintretenden Zustande des Systems $\rho$ und $\mathfrak{d}$ gewisse Werthe, von der Ordnung $\mathfrak{p}$ haben. Unter Vernachlässigung der Grössen zweiter Ordnung folgt dann wirklich aus ($4_a$)

$$\overline{\mathfrak{S}} = \overline{\rho\mathfrak{v}}.$$

### *Wirkung zwischen einem geladenen Körper K und einem Stromleiter*

§ 26. Nach dem Vorhergehenden haben wir anzunehmen, dass in dem Stromleiter neben dem Strome $\overline{\mathfrak{S}}$ die Compensationsladung $A$ bestehe und ausserdem (an der Oberfläche des Leiters) die durch $K$ hervorgerufene Influenzladung $B$. Zur Vereinfachung stellen wir uns vor, das $\overline{\mathfrak{S}}$, $A$ und $B$ neben einander als von einander unabhängige Ionensysteme bestehen [2]). Jedes der vier

---

[1]) Es möge daran erinnert werden, dass Hr. BUDDE (Wied. Ann. **10**, 553, 1880), unter Zugrundelegung des CLAUSIUS'schen Gesetzes, zu denselben Schlüssen gelangt ist, die ich hier gezogen habe. Sein Werth für die Dichtigkeit der Compensationsladung stimmt sogar vollkommen mit dem oben gefundenen überein, wenn man in diesem $\mathfrak{p}^2$ vernachlässigt.

[2]) Diese Vorstellungsweise ist indessen keine nothwendige. Damit die im Texte mitgetheilten Betrachtungen richtig seien, braucht nicht angenommen zu werden, dass die Ionen, welche die Ladungen $A$ und $B$ bilden, in Ruhe bleiben und der daneben bestehenden Strömung gänzlich entzogen seien. Man kann sich ebenso gut denken dass *alle* Ionen sich bewegen, und zwar, ähnlich wie in Electrolyten, in höchst unregelmässiger Weise. Dabei ist sehr gut ein constanter, von Null verschiedener Mittelwerth $\overline{\rho}$ möglich; dieser constituirt dann die mit $A$ und $B$ bezeichneten Ladungen (d. h. $\overline{\rho}$ setzt sich aus zwei Summanden $\overline{\rho}_A$ und $\overline{\rho}_B$ zusammen), während der Strom $\overline{\mathfrak{S}}$ durch $\overline{\rho\mathfrak{v}}$ bestimmt wird.

Ersetzt man nun in (A) und (B) alle Glieder durch die Mittelwerthe, so sieht man leicht, dass jeder der Vectoren $\overline{\mathfrak{d}}$ und $\overline{\mathfrak{H}}$ aus zwei Theilen besteht, deren einer nur von $\overline{\rho}$ und der andere nur von $\overline{\rho\mathfrak{v}}$ abhängt. Da nun die Wirkungen nach aussen durch jene Vectoren bestimmt werden, so müssen sie gerade so sein, als ob die Ladung und der Strom gar nicht mit einander zusammenhingen.

Aehnliches gilt von den auf den Stromleiter *ausgeübten* Wirkungen. Sind nämlich

Systeme $\overline{\mathfrak{S}}$, $A$, $B$ und $K$ zwingt nun dem Aether einen besonderen Zustand auf und wirkt demzufolge auf jedes der übrigen. Wir wollen, um diese Wirkungen kurz anzudeuten, für die, welche z.B. $\overline{\mathfrak{S}}$ auf $K$ ausübt, $(\overline{\mathfrak{S}}, K)$ setzen, wobei zu bemerken ist, dass vielleicht $(\overline{\mathfrak{S}}, K)$ und $(K, \overline{\mathfrak{S}})$ nicht gleich und entgegengesetzt sind, und dass auch Wirkungen wie $(\overline{\mathfrak{S}}, \overline{\mathfrak{S}})$ bestehen können, nämlich Kräfte, welche auf eines der Ionensysteme infolge der Zustandsveränderungen im Aether, die es selbst verursacht, wirken.

In leichtverständlicher Symbolik lässt sich nun für die Gesammtwirkung auf $K$ schreiben

$$(K, K) + (B, K) + (\overline{\mathfrak{S}}, K) + (A, K),$$

was sich aber, da nach § 25

$$(\overline{\mathfrak{S}}, K) + (A, K) = 0$$

ist, auf die beiden ersten Glieder reducirt und also unabhängig vom Strom wird.

Die Kräfte dagegen, welche den Stromleiter angreifen, lassen sich durch einen aus 12 Gliedern bestehenden Ausdruck darstellen, da die Wirkung von $K$, $\overline{\mathfrak{S}}$, $A$ und $B$, jedesmal auf $\overline{\mathfrak{S}}$, $A$ und $B$, in Betracht kommt. Es ist nun

$$(K, \overline{\mathfrak{S}}) + (B, \overline{\mathfrak{S}}) = 0,\ (K, A) + (B, A) = 0,$$
$$(\overline{\mathfrak{S}}, A) + (A, A) = 0,\ (\overline{\mathfrak{S}}, B) + (A, B) = 0,$$

sodass von dem erwähnten Ausdruck nur übrig bleibt

$$(K, B) + (B, B) + (A, \overline{\mathfrak{S}}) + (\overline{\mathfrak{S}}, \overline{\mathfrak{S}}). \tag{30}$$

Die durch die beiden ersten Glieder dargestellten Kräfte würden auch bestehen, wenn $\overline{\mathfrak{S}} = 0$, und die beiden letzten Glieder

---

$\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{H}$ die durch äussere Ursachen im Aether hervorgebrachten Veränderungen, so ist nach ($V_a$) die auf ein Volumelement wirkende Kraft

$$4\pi V^2 \rho \mathfrak{d} d\tau + \rho\, [\mathfrak{p}.\mathfrak{H}] d\tau + \rho\, [\mathfrak{v}.\mathfrak{H}] d\tau.$$

Die Wirkung, welche ein wahrnehmbarer Theil des Körpers erleidet, lässt sich also in der Weise berechnen, dass man für die Volumeinheit setzt

$$4\pi V^2 \overline{\rho} \mathfrak{d} + \overline{\rho}\, [\mathfrak{p}.\mathfrak{H}] + [\overline{\rho \mathfrak{v}}.\mathfrak{H}],$$

was wieder in zwei Theile, mit $\overline{\rho}$ und $\overline{\rho \mathfrak{v}}$, zerfällt.

Streng genommen wäre übrigens noch eine *dritte* Ladung zu berücksichtigen gewesen. Der Strom kann nicht bestehen ohne ein Potentialgefälle, und dieses nicht ohne electrische Ladungen der Theile des Leiters. Diese Ladungen spielen indess bei der behandelten Frage keine wesentliche Rolle und konnten um so mehr ausser Acht gelassen werden, als man sich dieselben verschwindend klein denken kann, wenn man nur eine sehr hohe Leitungsfähigkeit voraussetzt.

sind unabhängig von dem geladenen Körper $K$. Eine von $K$ auf den Stromleiter als solchen ausgeübte Wirkung existirt also nicht.

Uebrigens ist in jedem der vier Glieder (30) der von $\mathfrak{p}$ abhängige Theil eine Grösse zweiter Ordnung. Wir wissen das schon von $(K, B) + (B, B)$, da dieses eine electrostatische Wirkung bedeutet. $(A, \overline{\mathfrak{S}})$ und $(\overline{\mathfrak{S}}, \overline{\mathfrak{S}})$ aber stellen Kräfte dar, die auf einen Strom wirken, in welchem die mittlere electrische Dichtigkeit Null ist. Wie man aus ($\mathrm{V}_a$) ersieht, werden derartige Kräfte bestimmt durch den Werth von $\mathfrak{H}$, welcher zum *wirkenden* System gehört. Insofern nun das zu $\overline{\mathfrak{S}}$ gehörige $\mathfrak{H}$ abhängig von $\mathfrak{p}$ ist, ist es zweiter Ordnung (§ 25), und die Compensationsladung $A$ bringt infolge ihrer Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ nur eine magnetische Kraft zweiter Ordnung hervor, da ja ihre Dichtigkeit schon den Factor $\mathfrak{p}/V$ enthält.

### *Electrodynamische Wirkungen*

§ 27. Die Frage, inwiefern diese Wirkungen durch die Erdbewegung beeinflusst werden, ist jetzt leicht zu beantworten. Bezeichnen wir die Ströme in zwei Leitern mit $\overline{\mathfrak{S}}$ und $\overline{\mathfrak{S}}'$, und die dazu gehörenden Compensationsladungen mit $A$ und $A'$, so ist die auf den zweiten Leiter ausgeübte Wirkung

$$(\overline{\mathfrak{S}}, \overline{\mathfrak{S}}') + (A, \overline{\mathfrak{S}}') + (\overline{\mathfrak{S}}, A') + (A, A'),$$

worin sich aber die beiden letzten Glieder aufheben. Dass $(A, \overline{\mathfrak{S}}')$ und der von $\mathfrak{p}$ abhängige Theil in $(\overline{\mathfrak{S}}, \overline{\mathfrak{S}}')$ von der Ordnung $\mathfrak{p}^2/V^2$ sind, folgt aus Betrachtungen wie den oben mitgetheilten.

### *Induction in einem linearen Stromleiter*

§ 28. Ein geschlossener secundärer Draht $B$ werde aus der Lage $B_1$ in die Lage $B_2$ verschoben, während ein primärer Leiter $A$ gleichzeitig aus der Position $A_1$ in $A_2$ übergeht und die Intensität des primären Stromes von $i_1$ zu $i_2$ wächst. Zu Anfang und Ende der Zeit $T$, in welcher diese Vorgänge sich vollziehen, sollen die beiden Leiter ruhen und der primäre Strom constant sein; wirken auf $B$ sonst keine electromotorische Kräfte, so ist dieser Draht schliesslich wieder, wie anfangs, stromlos. Wir wollen die Electricitätsmenge bestimmen, welche in der Zeit $T$ durch einen

Querschnitt des Drahtes hindurchgegangen ist, und zwar werden wir dabei *nur an den Convectionsstrom* denken.

Nach Ablauf des ganzen Vorganges hat die Oberfläche von $B$ nirgends eine electrische Ladung. Daraus folgt, dass die hindurchgeströmte Electricitätsmenge für alle Querschnitte dieselbe ist, und dass der Leiter in unendlich dünne Stromröhren zerlegt werden kann, dergestalt, dass in jeder derselben gleichfalls durch alle Querschnitte dieselbe Electricitätsmenge fliesst.

Wir betrachten näher eine dieser Röhren und nennen $ds$ ein Element ihrer Länge, $\omega$ einen senkrechten Querschnitt, $Ndt$ die Zahl der positiven Ionen, welche denselben während der Zeit $dt$ in der als positiv angenommenen Richtung $s$ passiren, $N'\,dt$ die Zahl der negativen Ionen, welche in entgegengesetzter Richtung sich bewegen, $e$ die Ladung eines positiven und $-e'$ die Ladung eines negativen Ions. Der Gesammtstrom durch $\omega$ ist sodann

$$i = \int (Ne + N'e')\,dt \tag{31}$$

Es seien weiter $\mathfrak{E}_s$ und $\mathfrak{E}'_s$ die in der Richtung von $ds$ wirkenden electrischen Kräfte, welche für ein positives oder ein negatives Ion in Betracht kommen. Dem OHM'schen Gesetze gemäss soll angenommen werden, dass die Fortbewegung der Ionen durch diese Kräfte so bestimmt werde, dass $N$ und $N'$ den Mittelwerthen derselben proportional seien; dieses, sowie die Proportionalität mit $\omega$, drücken wir aus durch

$$N = p\,\overline{\mathfrak{E}_s}\,\omega, \quad N' = q\,\overline{\mathfrak{E}'_s}\,\omega,$$

worin $p$ und $q$ constante Factoren sind.

Es ist nun nöthig, zwischen der Geschwindigkeit des betrachteten Leiterelementes und der relativen Geschwindigkeit eines Ions *in* dem Drahte zu unterscheiden. Erstere heisse $\mathfrak{v}$ und letztere $\mathfrak{w}$. Aus ($\mathrm{V}_a$) ergibt sich dann

$$\mathfrak{E} = 4\pi\,V^2\,\mathfrak{d} + [\mathfrak{p}.\mathfrak{H}] + [\mathfrak{v}.\mathfrak{H}] + [\mathfrak{w}.\mathfrak{H}].$$

Die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ hat aber die Richtung von $ds$; man hat demzufolge $[\mathfrak{w}.\mathfrak{H}]_s = 0$, und für positive wie für negative Ionen

$$\mathfrak{E}_s = \mathfrak{E}'_s = 4\pi\,V^2\,\mathfrak{d}_s + [\mathfrak{p}.\mathfrak{H}]_s + [\mathrm{v}.\mathfrak{H}]_s.$$

Schliesslich verwandelt sich die Gleichung (31) in

$$i = c\omega \int \left\{ 4\pi V^2 \overline{\mathfrak{d}}_s + [\mathfrak{p}.\overline{\mathfrak{H}}]_s + [\mathfrak{v}.\overline{\mathfrak{H}}]_s \right\} dt,$$

$$c = pe + qe'.$$

Man dividire durch $c\omega$, multiplicire mit $ds$ und integrire über den ganzen Stromfaden. Erwägt man dabei, dass $i$ überall in demselben den gleichen Werth hat, und setzt

$$\int \frac{ds}{c\omega} = \frac{1}{C},$$

so wird man finden

$$i = C \int \left\{ 4\pi V^2 \int \overline{\mathfrak{d}}_s \, ds + \int [\mathfrak{p}.\overline{\mathfrak{H}}]_s \, ds + \int [\mathfrak{v}.\overline{\mathfrak{H}}]_s \, ds \right\} dt. \quad (32)$$

§ 29. Die folgende Betrachtung soll dazu dienen, aus dieser Formel das bekannte Grundgesetz der Induction abzuleiten. Man denke sich eine Fläche $\sigma$, auf welcher der Stromfaden bei seiner Bewegung fortwährend liegt, und fasse das Integral

$$\int \overline{\mathfrak{H}}_n \, d\sigma = P, \quad (33)$$

für den durch den Faden abgeschnittenen Theil, ins Auge.

Diese Grösse, welche man gewöhnlich „die Zahl der von $s$ umfassten magnetischen Kraftlinien" nennt, ändert sich mit der Zeit, und zwar aus zwei Ursachen. Einmal variirt in jedem Punkte $\mathfrak{H}$, und zweitens ändert sich das Integrationsgebiet.

Während der Zeit $dt$ bringt die erste Ursache folgenden Zuwachs von $P$ hervor

$$dt \int \dot{\overline{\mathfrak{H}}}_n \, d\sigma.$$

Was aber die zweite Veränderung betrifft, so ist zu beachten, dass jedes Element $ds$ ein unendlich kleines Parallelogramm auf der Fläche beschreibt, und dass der Werth des Oberflächenintegrals $\int \overline{\mathfrak{H}}_n \, d\sigma$ für dieses Parallelogramm, mit dem passend gewählten Zeichen, in $dP$ eingehen wird. Dieser Werth wird bestimmt durch den Inhalt des Parallelepipeds, das zu Seiten hat $ds$, $\mathfrak{H}$ und die Strecke $\mathfrak{v}dt$ in der Richtung von $\mathfrak{v}$. Man wird für denselben finden

$$-\,dt\,[\mathfrak{v}.\overline{\mathfrak{H}}]_s \, ds,$$

und für den ganzen Zuwachs von (33)

$$dP = dt\int \dot{\overline{\mathfrak{H}}}_n \, d\sigma - dt\int [\mathfrak{v}.\overline{\mathfrak{H}}]_s \, ds,$$

oder, wenn man die Beziehungen ($\mathrm{IV}_b$) und ($\mathrm{V}_b$), sowie den in (1) (§ 4, *h*) ausgesprochenen Satz berücksichtigt,

$$-dt\int \left\{ 4\pi \, V^2 \, \overline{\mathfrak{d}}_s + [\mathfrak{p}.\overline{\mathfrak{H}}]_s \right\} ds - dt\int [\mathfrak{v}.\overline{\mathfrak{H}}]_s \, ds.$$

Demzufolge verwandelt sich (32) in

$$i = - C\int dP = C\,(P_1 - P_2),$$

wo sich $P_1$ und $P_2$ auf den Anfang und das Ende der betrachteten Zeit beziehen.

Die Grösse $P$ hängt von den verschiedenen Theilen von $\mathfrak{H}$ ab. Da aber weder zu Anfang noch zu Ende der Zeit $T$ ein inducirter Strom existirt, so begeht man keinen Fehler, wenn man in (33) für $\mathfrak{H}$ lediglich die von dem primären Strom erzeugte magnetische Kraft einsetzt. Der Strich über dem Buchstaben kann dabei wegfallen, und wenn der inducirte Draht sehr dünn ist, darf man bei allen Stromfäden mit demselben $P$ rechnen. Ist dann schliesslich $C_1$ die Summe aller Zahlen $C$ (d.h. die Leitungsfähigkeit des inducirten Stromkreises), so wird der Integralstrom, den wir zu berechnen wünschten,

$$I = C_1\,(P_1 - P_2),$$

was mit einem bekannten Satze übereinstimmt.

Die Erdbewegung wurde bei der gegebenen Ableitung nie aus dem Auge verloren; folglich lässt die Formel einen Schluss über den Einfluss dieser Bewegung auf die Inductionserscheinungen zu. Es kommen hierbei nur Grössen *zweiter* Ordnung in Betracht. Das $\mathfrak{H}$, welches zur Bestimmung der Grösse $P$ dienen soll setzt sich nämlich zusammen aus dem durch (26) bestimmten Vector und der magnetischen Kraft, welche durch die Compensationsladung erzeugt wird. Letztere magnetische Kraft ist von der Ordnung $\mathfrak{p}^2/V^2$, und da in die zur Bestimmung von $\chi_x$, $\chi_y$, $\chi_z$ dienenden Gleichungen (§ 25) auch nur das Quadrat von $\mathfrak{p}$ eingeht, so unterscheiden sich die Werthe (26) nur um Grössen zweiter Ordnung von den bei ruhender Erde geltenden Ausdrücken

Mit dem Nachweise, dass bei den Inductionserscheinungen kein Einfluss erster Ordnung zu erwarten ist, haben wir die Erklärung für das negative Resultat des Hrn. DES COUDRES gewonnen [1]).

---

[1]) Eigentlich hätten wir nun noch, unter Berücksichtigung der Erdbewegung, die Wirkung des Inductionsstromes auf eine Galvanometernadel zu betrachten. Bei den Versuchen des Hrn. DES COUDRES (Wied. Ann. **38**, 71, 1889) befand sich aber eine Inductionsrolle zwischen zwei hintereinander geschalteten primären Rollen, welche so vom Strom durchflossen wurden, dass sich ihre Wirkungen gerade compensirten. Da nun, welchen Einfluss die Translation übrigens auch haben mag, das Galvanometer in Ruhe bleiben muss, wenn $I$ verschwindet, so dürfen wir aus der Theorie folgern, dass, abgesehen von Grössen zweiter Ordnung, die Compensation durch die Erdbewegung nicht gestört wird.

## ABSCHNITT III

### UNTERSUCHUNG DER SCHWINGUNGEN, WELCHE VON OSCILLIRENDEN IONEN ERREGT WERDEN

#### *Allgemeine Formeln*

§ 30. Sobald die Bewegung der Ionen gegeben ist, stehen in den Gleichungen ($A$) und ($B$) (§ 21) auf der rechten Seite bekannte Functionen von $x$, $y$, $z$ und $t$; in Bezug auf die letzte Variable sind dies periodische Functionen, wenn die Ionen Schwingungen mit constanter Amplitude und einer gemeinsamen Oscillationsdauer $T$ ausführen. Man sieht leicht, dass in diesem Falle den Gleichungen genügt wird durch Werthe von $\mathfrak{d}_x$, $\mathfrak{d}_y$, $\mathfrak{d}_z$, $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$, welche ebenfalls die Periode $T$ haben. Daher der wichtige und fast selbstverständliche Satz:

Finden in einer Lichtquelle Ionenschwingungen von der Periode $T$ statt, so zeigen $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{H}$ in jedem Punkte, der an der Translation der Quelle theilnimmt, dieselbe Periodicität.

Die Auflösung der Gleichungen führt zu ziemlich complicirten Ausdrücken. Zur Vereinfachung empfiehlt es sich, zunächst die Componenten des Vector $\mathfrak{H}'$ (§ 20) zu berechnen.

Nach (VI$_b$) ist

$$\mathfrak{H}'_x = \mathfrak{H}_x - 4\pi\,(\mathfrak{p}_y\mathfrak{d}_z - \mathfrak{p}_z\mathfrak{d}_y).$$

Demgemäss wollen wir die zweite und dritte der Gleichungen ($A$) mit $4\pi\,\mathfrak{p}_z$ resp. $-4\pi\,\mathfrak{p}_y$ multipliciren und sie dann zu der ersten der Gleichungen ($B$) addiren. Wir erhalten auf diese Weise, unter Berücksichtigung der Bedeutung von $(\partial/\partial t)$, (§ 19)

$$V^2\,\Delta\,\mathfrak{H}'_x - \left(\frac{\partial^2\mathfrak{H}'_x}{\partial t^2}\right)_1 = 4\pi\,V^2\left\{\frac{\partial(\rho\mathfrak{v}_y)}{\partial z} - \frac{\partial(\rho\mathfrak{v}_z)}{\partial y}\right\} +$$

$$+\,4\pi\,\mathfrak{p}_z\left\{\frac{\partial(\rho\mathfrak{v}_y)}{\partial t} - \mathfrak{p}_x\frac{\partial(\rho\mathfrak{v}_y)}{\partial x} - \mathfrak{p}_y\frac{\partial(\rho\mathfrak{v}_y)}{\partial y} - \mathfrak{p}_z\frac{\partial(\rho\mathfrak{v}_y)}{\partial z}\right\} -$$

$$-\,4\pi\,\mathfrak{p}_y\left\{\frac{\partial(\rho\mathfrak{v}_z)}{\partial t} - \mathfrak{p}_x\frac{\partial(\rho\mathfrak{v}_z)}{\partial x} - \mathfrak{p}_y\frac{\partial(\rho\mathfrak{v}_z)}{\partial y} - \mathfrak{p}_z\frac{\partial(\rho\mathfrak{v}_z)}{\partial z}\right\}.$$

§ 31. In der weiteren Rechnung sollen nun Grössen von der Ordnung $\mathfrak{p}^2/V^2$ weggelassen werden. *Erstens* vernachlässigen wir also auf der rechten Seite die Glieder mit *zwei* Factoren $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$ oder $\mathfrak{p}_z$, da sich auch ein im übrigen ähnliches Glied mit $V^2$ vorfindet; wir behalten also nur noch

$$4\pi\, V^2 \left\{ \frac{\partial(\rho\mathfrak{v}_y)}{\partial z} - \frac{\partial(\rho\mathfrak{v}_z)}{\partial y} \right\} + 4\pi \left\{ \mathfrak{p}_z \frac{\partial(\rho\mathfrak{v}_y)}{\partial t} - \mathfrak{p}_y \frac{\partial(\rho\mathfrak{v}_z)}{\partial t} \right\}.$$

*Zweitens* schreiben wir für die Operation, welche auf $\mathfrak{H}'_x$ anzuwenden ist,

$$V^2 \Delta - \left( \frac{\partial}{\partial t} - \mathfrak{p}_x \frac{\partial}{\partial x} - \mathfrak{p}_y \frac{\partial}{\partial y} - \mathfrak{p}_z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 = \left( V^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\mathfrak{p}_x \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \right) +$$

$$+ \left( V^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2\mathfrak{p}_y \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} \right) + \left( V^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\mathfrak{p}_z \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} =$$

$$= V^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\mathfrak{p}_x}{V^2} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + V^2 \left( \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\mathfrak{p}_y}{V^2} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 +$$

$$+ V^2 \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\mathfrak{p}_z}{V^2} \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Die Gestalt dieses Ausdruckes legt es nahe, statt $t$ eine neue unabhängige Variable

$$t' = t - \frac{\mathfrak{p}_x}{V^2} x - \frac{\mathfrak{p}_y}{V^2} y - \frac{\mathfrak{p}_z}{V^2} z \tag{34}$$

einzuführen und $\mathfrak{H}'_x$, sowie $\rho\mathfrak{v}_y$ und $\rho\mathfrak{v}_z$ als Functionen von $x$, $y$, $z$ und $t'$ zu betrachten. Wir bezeichnen die dieser Auffassung entsprechenden Differentialquotienten mit

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \right)', \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)', \left( \frac{\partial}{\partial z} \right)' \text{und } \frac{\partial}{\partial t'}$$

und legen dem Zeichen $\Delta'$ die Bedeutung

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)' + \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)' + \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)'$$

bei.

Es ist nun

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)' - \frac{\mathfrak{p}_x}{V^2} \frac{\partial}{\partial t'}, \text{ u.s.w.} \tag{35}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t'},$$

sodass man zur Bestimmung von $\mathfrak{H}'$ findet

$$V^2\Delta'\,\mathfrak{H}'_x-\frac{\partial^2\mathfrak{H}'_x}{\partial t'^2}=4\pi\,V^2\left[\left\{\frac{\partial(\rho\mathfrak{v}_y)}{\partial z}\right\}'-\left\{\frac{\partial(\rho\mathfrak{v}_z)}{\partial y}\right\}'\right],\text{ u.s.w.}$$

Eine Lösung dieser Gleichungen ist leicht anzugeben. Man denke sich nämlich drei Functionen $\psi_x$, $\psi_y$, $\psi_z$, welche den Bedingungen

$$V^2\,\Delta'\,\psi_x-\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t'^2}=4\pi\,V^2\,\rho\mathfrak{v}_x,\text{ u.s.w.} \tag{36}$$

genügen, und setze

$$\mathfrak{H}'_x=\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial z}\right)'-\left(\frac{\partial\psi_z}{\partial y}\right)',\text{ u.s.w.} \tag{37}$$

Nachdem hierdurch $\mathfrak{H}'$ gefunden ist, liefert uns die Gleichung ($\mathrm{III}_b$) den Werth von $\dot{\mathfrak{d}}$ und also auch, wofern man von additiven Constanten Abstand nimmt, den Werth von $\mathfrak{d}$. Aus ($\mathrm{VI}_b$) folgt dann weiter $\mathfrak{H}$; aus ($\mathrm{V}_b$) und ($\mathrm{VII}_b$) $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{E}$. Dass in dieser Weise wirklich *allen* Gleichungen genügt wird, lässt sich beweisen, soll aber hier der Kürze halber unerörtert bleiben.

Dagegen soll im nächsten Paragraphen der Werth von $\psi_x$ angegeben, und im § 33 die Lösung für einen speciellen Fall weiter entwickelt werden.

Es sei hier noch die Bemerkung vorausgeschickt, dass die Variable $t'$ als Zeit betrachtet werden kann, gerechnet von einem von der Lage des betreffenden Punktes abhängigen Augenblick an. Man kan daher diese Variable die *Ortszeit* dieses Punktes, im Gegensatz zu der *allgemeinen Zeit t*, nennen. Den Uebergang von der einen Zeit zur anderen vermittelt die Gleichung (34).

§ 32. Das Product $\rho\mathfrak{v}_x$ in der ersten der Gleichungen (36) ist, wie schon bemerkt wurde, eine bekannte Function von $x$, $y$, $z$ und $t'$. Wir setzen demgemäss

$$\rho\mathfrak{v}_x=f\,(x,y,z,t')$$

und haben dann in

$$\psi_x=-\int\frac{1}{r}f\left(\xi,\eta,\zeta,t'-\frac{r}{V}\right)d\tau \tag{38}$$

eine Lösung von (36) [1]. Man hat sich hierbei zwei Punkte vorzustellen, *erstens* den *festen* Punkt $(x, y, z)$, für welchen wir $\psi_x$ berechnen wollen und den wir $P$ nennen, *zweitens* einen *beweglichen* Punkt $Q$, welcher den ganzen Raum zu durchwandern hat, wo $\rho\mathfrak{v}_x$ von Null verschieden ist. Es stellt $r$ die Entfernung $QP$ dar, $t'$ die Ortszeit von $P$ in dem Augenblick, für den wir $\psi_x$ zu berechnen wünschen; weiter hat man unter $\xi, \eta, \zeta$ die Coordinaten von $Q$, und unter $d\tau$ ein Element des soeben erwähnten Raumes zu verstehen. Die Function $f\,(\xi, \eta, \zeta, t' - r/V)$ ist der Werth von $\rho\mathfrak{v}_x$ in diesem Elemente, und zwar, wenn die daselbst geltende Ortszeit $t' - r/V$ ist.

*Ein einziges leuchtendes Molecül*

§ 33. Zur Erregung der electrischen Schwingungen diene ein einziges Molecül mit oscillirenden Ionen; $Q_0$ sei ein beliebiger fester Punkt in demselben — der Kürze wegen sagen wir, „es befinde sich das Molecül in $Q_0$" —, und für $P$ werde ein Ort gewählt, dessen Entfernung von $Q_0$ sehr viel grösser ist als die Dimensionen des Molecüls. Zur Unterscheidung sei $Q_0P = r_0$.

Wir wollen nun die verschiedenen, in die Formel (38) eingehenden Distanzen $r$ alle durch $r_0$ ersetzen und überdies von den Differenzen der Ortszeiten an den verschiedenen Punkten des Molecüls absehen. Auf diese Weise wird

$$\psi_x = -\frac{1}{r_0}\int \rho\mathfrak{v}_x\, d\tau,$$

wo alle vorkommenden $\rho\mathfrak{v}_x$ sich auf *denselben* Zeitpunkt beziehen, und zwar auf den Augenblick, wo die Ortszeit von $Q_0$

$$t' - \frac{r_0}{V}$$

ist.

Da $\mathfrak{v}_x$ für alle Punkte eines Ions gleich ist, so verwandelt sich, wenn man für die Ladung eines solchen Theilchens $e$ schreibt, das letzte Integral in

$$\Sigma e\mathfrak{v}_x.$$

[1] Den Beweis hierfür findet man z.B. in meiner Abhandlung: La théorie électromagnétique de MAXWELL et son application aux corps mouvants, Arch. Néerl. **25**, 363, 1892 (Collected Papers, **2**, 164).

Die Summe erstreckt sich hier über alle Ionen des Molecüls.

Stellt nun weiter $\mathfrak{q}$ die Verschiebung eines Ions aus der Gleichgewichtslage dar, so ist

$$\mathfrak{v}_x = \frac{d\mathfrak{q}_x}{dt},$$

und

$$\Sigma e\mathfrak{v}_x = \frac{d}{dt}\Sigma e\mathfrak{q}_x.$$

Dies hat eine einfache Bedeutung. Man kann den Vector $\Sigma e\mathfrak{q}$ füglich das *electrische Moment* des Molecüls nennen und ihn mit $\mathfrak{m}$ bezeichnen. Es wird dann

$$\Sigma e\mathfrak{q}_x = \mathfrak{m}_x,$$

$$\psi_x = -\frac{1}{r_0}\frac{d\mathfrak{m}_x}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathfrak{m}_x}{r_0}\right);$$

nach dem Gesagten hat man hier den Werth des Differentialquotienten für den Augenblick zu nehmen, in welchem die in $Q_0$ geltende Ortszeit $t' - r_0/V$ ist. Offenbar kann man auch schreiben

$$\psi_x = -\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\mathfrak{m}_x}{r_0}\right),$$

worin $\mathfrak{m}_x$ die erste Componente des electrischen Momentes in eben jenem Augenblick bedeutet. Nachdem hierdurch und durch zwei Gleichungen von derselben Gestalt $\psi_x$, $\psi_y$, $\psi_z$ für den Punkt $(x, y, z)$ und für die daselbst geltende Ortszeit $t'$ gefunden sind, ist die Untersuchung der sich fortpflanzenden Schwingungen sehr einfach. Die Gleichungen (37) ergeben

$$\mathfrak{H}'_x = \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)'\left(\frac{\mathfrak{m}_z}{r_0}\right) - \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)'\left(\frac{\mathfrak{m}_y}{r_0}\right), \text{ u.s.w.,} \tag{39}$$

und ($\mathrm{III}_b$) verwandelt sich, weil wir den Werth von $\mathfrak{d}$ ausserhalb des Molecüls suchen, in

$$4\pi\dot{\mathfrak{d}} = \operatorname{rot} \mathfrak{H}',$$

oder, auf Grund von (35), in

$$4\pi\,\dot{\mathfrak{d}}_x = \left(\frac{\partial\mathfrak{H}'_z}{\partial y}\right)' - \left(\frac{\partial\mathfrak{H}'_y}{\partial z}\right)' - \frac{\mathfrak{p}_y}{V^2}\frac{\partial\mathfrak{H}'_z}{\partial t} + \frac{\mathfrak{p}_z}{V^2}\frac{\partial\mathfrak{H}'_y}{\partial t}, \text{ u.s.w.}$$

Bringt man die zwei letzten Glieder auf die Linke Seite, so erhält man dort, wie aus ($V_b$) hervorgeht, gerade $1/V^2\, \dot{\mathfrak{F}}_x$, oder

$$\frac{1}{V^2}\frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial t'};$$

man darf ja, da sich $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ nur um Grössen von der Ordnung $\mathfrak{p}$ von einander unterscheiden, das Vectorproduct in ($V_b$) durch $[\mathfrak{p}.\mathfrak{H}']$ ersetzen.

Aus

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial t'} = V^2\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{H}'_z}{\partial y}\right)' - \left(\frac{\partial \mathfrak{H}'_y}{\partial z}\right)'\right], \text{ u.s.w.}$$

ergibt sich nun $\mathfrak{F}$ durch Integration; Constanten lassen wir dabei fort, da es uns am Ende nur um Schwingungen zu thun ist.

Man substituire die Werthe (39) und setze

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)'\left(\frac{\mathfrak{m}_x}{r_0}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)'\left(\frac{\mathfrak{m}_y}{r_0}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)'\left(\frac{\mathfrak{m}_z}{r_0}\right) = S.$$

Es wird dann

$$\mathfrak{F}_x = V^2\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)' - \Delta'\left(\frac{\mathfrak{m}_x}{r_0}\right)\right\}, \text{ u.s.w.}, \tag{40}$$

und zwar beziehen sich hier noch immer $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{m}_z$ auf den oben angegebenen Augenblick.

Wie nun die übrigen in ($I_b$)—($VII_b$) vorkommenden Grössen bestimmt werden können, leuchtet sofort ein.

§ 34. Einige Worte noch über den bei obiger Rechnung begangenen Fehler. Dass in (38) der Factor $1/r$ durch $1/r_0$ ersetzt wurde, bedarf wohl keiner Rechtfertigung. Wir haben aber ausserdem nicht für die Function $f$ die Werthe von $\rho\mathfrak{v}_x$ zu den richtigen Zeiten genommen. Einmal haben wir in (38) $t' - r/V$ durch $t' - r_0/V$ ersetzt, also in der Zeit, wenn $l$ eine der Dimensionen des Molecüls ist, einen Fehler von der Ordnung $l/V$ begangen, zweitens wurde die Ungleichheit der Ortszeiten an den verschiedenen Stellen des Molecüls nicht in Betracht gezogen, und darin liegt nach (34) ein Fehler von der Ordnung $l\mathfrak{p}/V^2$. Doch man braucht sich selbst dann, wenn man Grössen von der Ordnung $\mathfrak{p}/V$ beibehalten will, um diesen zweiten Fehler nicht zu kümmern, wenn schon der erste vernachlässigt werden darf. Das ist nun in der That der Fall, wenn die Dimensionen des Molecüls sehr viel kleiner als die Wellenlänge $TV$ sind. Es ist dann auch $l/V$ erheblich kleiner als $T$, und es wird sich in der Zeit $l/V$ der Zustand im Molecül nicht merklich ändern.

§ 35. Die Formeln für die Fortpflanzung von *Schwingungen* erhält man, wenn man in die Gleichungen (39) und (40) für $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{m}_z$ goniometrische Functionen der Zeit einsetzt. Ist z.B.

$$\mathfrak{m}_y = 0,\ \mathfrak{m}_z = 0,$$

und, als Function der für die Lage des Molecüls geltenden Ortszeit,

$$\mathfrak{m}_x = a \cos 2\pi \frac{t'}{T}\,,\ (a \text{ constant}),$$

so ist in einem äusseren Punkte in der Entfernung $r$ und für die zu diesem gehörende Ortszeit $t'$

$$\mathfrak{H}'_x = 0,\ \mathfrak{H}'_y = \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)',\ \mathfrak{H}'_z = -\frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)',$$

$$\mathfrak{F}_x = -V^2\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)'\chi,\ \mathfrak{F}_y = V^2\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}\right)',\ \mathfrak{F}_z = V^2\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial z}\right)'.$$

$$\chi = \frac{a}{r} \cos \frac{2\pi}{T}\left(t' - \frac{r}{V}\right).$$

Wollen wir nun schliesslich einmal eine ruhende Lichtquelle betrachten, so haben wir einfach alle Accente fortzulassen. Die Formeln stimmen dann mit den Ausdrücken überein, durch welche HERTZ [1]) die Schwingungen in der Nähe seines Vibrators dargestellt hat.

### *Die Richtung der Wellennormale*

§ 36. Es sollen jetzt die Schwingungen in solchen Entfernungen vom leuchtenden Molecül untersucht werden, die erheblich grösser als die Wellenlänge sind. Zu beachten ist hierbei, dass in (39) und (40) $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{m}_z$ goniometrische Functionen von

$$t' - \frac{r}{V}$$

sind; wir wollen nämlich von jetzt ab $r$ statt $r_0$ schreiben. Die über die Länge dieser Linie gemachte Annahme berechtigt nun

[1]) Wied. Ann. **36**, 1, 1889.

dazu, bei allen Differentiationen nach $x$, $y$, $z$ nur die Veränderlichkeit des Argumentes jener goniometrischen Functionen zu berücksichtigen, aber Factoren wie $1/r$, oder $\cos(r, x)$, womit diese Functionen multiplicirt sind, als constant zu betrachten.

Für eine beliebige der Grössen $\mathfrak{H}'_x$, $\mathfrak{H}'_y$, $\mathfrak{H}'_z$, $\mathfrak{F}_x$, $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$ — wir wollen sie $\varphi$ nennen — findet man demzufolge einen Ausdruck von der Form

$$\varphi = A \cos \frac{2\pi}{T}\left(t' - \frac{r}{V} + B\right), \tag{41}$$

wo $A$ und $B$ zwar von der Länge und der Richtung der Linie $Q_0P$ — es ist $Q_0$ der Ort des Molecüls, und $P$ der betrachtete äussere Punkt — abhängen, aber, wenn $r$ nur gross genug ist, in einem Raume, der viele Wellenlängen umfasst, als constant betrachtet werden dürfen. Während $x$, $y$, $z$ die Coordinaten von $P$ sind, bezeichnen wir mit $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die Coordinaten von $Q_0$, und mit $b_x$, $b_y$, $b_z$ die Richtungsconstanten der Verbindungslinie $Q_0P$. Ersetzt man nun in der Formel (41) $r$ durch

$$b_x(x-\xi) + b_y(y-\eta) + b_z(z-\zeta),$$

und $t'$ durch den Werth (34), so ergibt sich

$$\varphi = A \cos \frac{2\pi}{T}\left\{t - \left(\frac{b_x}{V} + \frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}\right)x - \left(\frac{b_y}{V} + \frac{\mathfrak{p}_y}{V^2}\right)y - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{b_z}{V} + \frac{\mathfrak{p}_z}{V^2}\right)z + C\right\}, \tag{42}$$
$$C = B + \frac{1}{V}(b_x\xi + b_y\eta + b_z\zeta).$$

In einem nicht zu ausgedehnten Gebiete darf man auch $b_x$, $b_y$, $b_z$ als constant ansehen und also die Bewegung als ein System ebener Wellen betrachten. Die Richtungsconstanten $b'_x$, $b'_y$, $b'_z$ der Wellennormale sind offenbar aus der Bedingung

$$b'_x : b'_y : b'_z = \left(b_x + \frac{\mathfrak{p}_x}{V}\right) : \left(b_y + \frac{\mathfrak{p}_y}{V}\right) : \left(b_z + \frac{\mathfrak{p}_z}{V}\right) \tag{43}$$

zu bestimmen. Für $\mathfrak{p} = 0$ fallen $b'_x$, $b'_y$, $b'_z$ mit $b_x$, $b_y$, $b_z$ zusammen und stehen die Wellen senkrecht zu $Q_0P$. Dem ist nicht mehr so, wenn die Lichtquelle sich bewegt. Aus (43) folgt dann, dass die Wellen senkrecht zu der Linie stehen, die $P$ mit derjenigen Stelle verbindet, an welcher sich die Lichtquelle in dem Augenblick befand, als sie das Licht aussandte, das $P$ zur Zeit $t$ erreicht.

*Das Doppler'sche Gesetz*

§ 37. In einem Punkte, der sich mit dem leuchtenden Molecül verschiebt — und also auch für einen Beobachter, der an der Translation theilnimmt —, wechseln, wie wir sahen (§ 30), die Werthe von $\mathfrak{d}_x, \ldots \mathfrak{H}_x, \ldots$ so oft in der Zeiteinheit, wie es der wirklichen Schwingungszeit $T$ der Ionen entspricht.

Man kann aber auch untersuchen, mit welcher Frequenz diese Werthe in einem *ruhenden* Punkte das Zeichen wechseln. Diese Frequenz bedingt *die Schwingungsdauer für einen stillstehenden Beobachter*. Die Frage lässt sich sofort erledigen, wenn man statt $x, y, z$ neue Coordinaten $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ einführt, welche sich auf ein *ruhendes* Axensystem beziehen. Haben die beiden Systeme dieselben Axenrichtungen und zur Zeit $t = 0$ denselben Anfangspunkt, so ist

$$x = \mathbf{x} - \mathfrak{p}_x t, \quad y = \mathbf{y} - \mathfrak{p}_y t, \quad z = \mathbf{z} - \mathfrak{p}_z t, \tag{44}$$

und ergeben sich nach (42) für $\mathfrak{d}_x, \ldots \mathfrak{H}_x, \ldots$ Ausdrücke von der Form

$$A \cos \frac{2\pi}{T} \left\{ t + \frac{\mathfrak{p}_r}{V} t - \left( \frac{b_x}{V} + \frac{\mathfrak{p}_x}{V^2} \right) \mathbf{x} - \text{u.s.w.} \ldots . + C \right\},$$

worin

$$\mathfrak{p}_r = b_x \mathfrak{p}_x + b_y \mathfrak{p}_y + b_z \mathfrak{p}_z$$

die Componente von $\mathfrak{p}$ nach der Verbindungslinie $Q_0 P$ ist.

Die „beobachtete" Schwingungsdauer wird also

$$T' = \frac{T}{1 + \mathfrak{p}_r / V} = T \left( 1 - \frac{\mathfrak{p}_r}{V} \right),$$

was mit dem bekannten DOPPLER'schen Gesetze übereinstimmt[1]).

[1]) Die hier gegebene Ableitung lässt sich leicht so verallgemeinern, dass sie auf alle ähnlichen Fälle, z.B. auch auf tönende Körper, anwendbar wird. Ein beliebiger Körper $A$ verschiebe sich mit der constanten Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ in einem Medium, das entweder in Ruhe bleibe, oder in einen *stationären* Bewegungszustand gerathe. In diesem letzteren Falle (der den ersteren miteinschliesst) findet man in irgend einem Punkte $P$, *der mit dem Körper A fortschreitet*, immerfort denselben Bewegungszustand, und kann

Soll sich das Gesetz ergeben, wie es gewöhnlich angewandt wird, so muss natürlich noch angenommen werden, *dass die Translation nichts an der wirklichen Schwingungsdauer der leuchtenden Theilchen ändere.* Ich muss es unterlassen, von dieser Hypothese Rechenschaft zu geben, da wir von der Natur der Molecularkräfte, welche die Schwingungsdauer bestimmen, nichts wissen.

§ 38. Der Fall, dass die Lichtquelle ruht und der Beobachter fortschreitet, lässt eine ähnliche Behandlung zu. Sind nämlich, wie oben, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ die Coordinaten, bezogen auf ruhende Axen, so

---

man also sagen, es nehme die ganze Figur, welche die Vertheilung der Geschwindigkeiten in der Umgebung von $A$ darstellt, an der Translation $\mathfrak{p}$ theil.

Man denke sich nun weiter, dass die Theile des Körpers einfache Schwingungen von der Periode $T$ und constanter Amplitude ausführen. Es ist wohl ohne weiteres klar, dass dann, wenn seit dem Anfange dieser Bewegung eine genügend lange Zeit verstrichen ist, in dem soeben genannten Punkte $P$ die Abweichung vom Gleichgewichte, oder, besser gesagt, von dem stationären Strömungszustande, nothwendig die Periode $T$ haben muss. Führt man jetzt die Coordinaten $x$, $y$, $z$ in Bezug auf ein mit dem Körper fortschreitendes Axensystem (relative Coordinaten) ein, und beschränkt sich auf einen Raum, der so weit von $A$ entfernt und so klein ist, dass man von ebenen Wellen in demselben reden darf, so wird sich die genannte Abweichung darstellen lassen durch Ausdrücke von der Form

$$\varphi = A \cos \frac{2\pi}{T} \left\{ t - \frac{a_x x + a_y y + a_z z}{V} + p \right\} \tag{45}$$

Es sind hier $a_x$, $a_y$, $a_z$ die Richtungsconstanten der Wellennormale, während $V$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bedeutet.

Will man nun wissen, mit welcher Frequenz $\varphi$ in einem *ruhenden* Punkte das Zeichen wechselt, so hat man die Coordinaten $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ in Bezug auf ruhende Axen einzuführen. Durch Anwendung der Beziehungen (44) verwandelt sich (45) in

$$\varphi = A \cos \frac{2\pi}{T} \left\{ t + \frac{\mathfrak{p}_n}{V} t - \frac{a_x \mathbf{x} + a_y \mathbf{y} + a_z \mathbf{z}}{V} + p \right\},$$

wo

$$\mathfrak{p}_n = a_x \mathfrak{p}_x + a_y \mathfrak{p}_y + a_z \mathfrak{p}_z$$

die Componente von $\mathfrak{p}$ nach der Wellennormale ist.

Für die beobachtete Schwingungsdauer ergibt sich jetzt

$$T' = \frac{T}{1 + \mathfrak{p}_n / V} = T\left(1 - \frac{\mathfrak{p}_n}{V}\right).$$

Was wir oben ohne Beweis hingestellt haben, dass nämlich in dem Medium überall die Periode $T$ bestehe, ist nichts Anderes, als was PETZVAL, in seinen Angriffen gegen die DOPPLER'sche Theorie, das Gesetz von der Unveränderlichkeit der Schwingungsdauer nannte (Wiener Sitzungsberichte **8**, 134, 1852). Nur vergass derselbe zu bemerken, dass dies Gesetz nur dann Geltung habe, wenn man die Erscheinungen als abhängig von $t$ und den *relativen* Coordinaten betrachtet.

Der Beweis des Satzes ist übrigens leicht zu führen, wenn die Schwingungen unendlich klein sind, und man es also mit homogenen, linearen Differentialgleichungen zu thun hat.

Was die akustischen Erscheinungen betrifft, so wurde das Problem ausführlich behandelt von WAS (Het beginsel van DOPPLER in de geluidsleer, Leiden, Engels, 1881).

ist jetzt, in einem entfernten Punkte $P$, eine beliebige der Grössen $\mathfrak{d}_x, \ldots, \mathfrak{H}_x, \ldots$ darzustellen durch

$$A \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{b_x \mathbf{x} + b_y \mathbf{y} + b_z \mathbf{z}}{V} + C\right) \tag{46}$$

Die zur Wahrnehmung kommende Bewegung beschreibt man aber am passendsten mittelst eines Coordinatensystems, das an der Translation $\mathfrak{p}$ des Beobachters theilnimmt. Es sind da wieder die Beziehungen (44) anwendbar, und es verwandelt sich (46) in

$$A \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\mathfrak{p}_r}{V} t - \frac{b_x x + b_y y + b_z z}{V} + C\right),$$

woraus sich für die jetzt „beobachtete" Schwingungsdauer ergibt

$$T' = \frac{T}{1 - \mathfrak{p}_r / V} = T\left(1 + \frac{\mathfrak{p}_r}{V}\right).$$

## ABSCHNITT IV

### DIE BEWEGUNGSGLEICHUNGEN DES LICHTES FÜR PONDERABLE KÖRPER

*Gleichungen für den in ponderablen Körpern eingeschlossenen Aether*

§ 39. Wir wenden uns jetzt der Lichtbewegung in ponderablen, dielectrischen, vollkommen durchsichtigen Körpern zu. Es soll angenommen werden, dass sich diese mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ in beliebiger Richtung verschieben, und dass, wie bereits gesagt wurde, die Molecüle Ionen enthalten, welche an bestimmte Gleichgewichtslagen gebunden sind.

Für eines dieser Theilchen bezeichnen wir wieder die Ladung mit $e$, und die Verschiebung aus der Gleichgewichtslage mit $\mathfrak{q}$. Die Componenten $\mathfrak{q}_x$, $\mathfrak{q}_y$, $\mathfrak{q}_z$, sowie die Geschwindigkeiten $\dot{\mathfrak{q}}_x$, $\dot{\mathfrak{q}}_y$, $\dot{\mathfrak{q}}_z$ betrachten wir als unendlich klein; d.h. neben Grössen, welche nur eine dieser Componenten als Factor enthalten, vernachlässigen wir Glieder, in denen zwei derartige Factoren vorkommen.

Jeder der betrachteten Körper soll homogen sein. Damit indess die Fälle der Reflexion und Brechung nicht ausgeschlossen

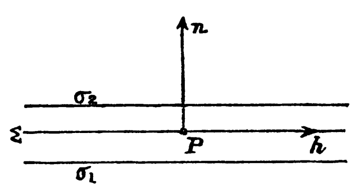


Fig. 1.

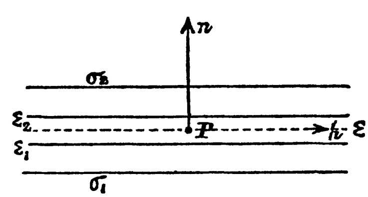


Fig. 2.

seien, denke man sich zwei verschiedene Körper, sei es nun, dass diese (Fig. 1) sich an einer Fläche $\Sigma$ scharf von einander abheben, oder in einer dünnen Grenzschicht, etwa zwischen den Flächen $\Sigma_1$ und $\Sigma_2$ (Fig. 2), stetig in einander übergehen. Ist in diesem letzteren Falle von der „Grenzfläche" die Rede, so soll damit z.B. eine Fläche $\Sigma$, auf halbem Wege zwischen $\Sigma_1$, und $\Sigma_2$, gemeint sein.

Wir werden immer mit Mittelwerthen rechnen, und zwar nicht nur mit den im § 4, *l* definirten, sondern hin und wieder auch mit anderen, welche in Betracht kommen, wenn die betreffende Grösse nur in einzelnen Punkten $Q$, etwa in je einem Punkte der verschiedenen Molecüle, besteht, oder aber, wenn man Anlass hat, nur die Werthe einer Function in derartigen Punkten ins Auge zu fassen. Einen solchen Mittelwerth *zweiter Art* unterscheiden wir von Mittelwerthen *erster Art* durch einen doppelten horizontalen Strich, folgen übrigens bei der Berechnung einer ähnlichen Regel wie bei diesen letzteren. Wir verstehen nämlich unter dem Werth von $\overline{\overline{\varphi}}$ in einem Punkte $P$ das arithmetische Mittel der Werthe von $\varphi$ in den Punkten $Q$, sofern diese letzteren innerhalb der im § 4, *l* genannten, um $P$ beschrieben Kugel $I$ liegen.

Zufolge der über den Radius $R$ gemachten Annahme (§ 4) sind aus den Mittelwerthen sowohl der zweiten, als auch der ersten Art alle „raschen" Veränderungen verschwunden; es ist jedoch, was die Geschwindigkeit der noch übriggebliebenen Veränderungen betrifft, zu unterscheiden zwischen dem Inneren der Körper und der Grenze. Bringt man in den Figuren 1 und 2 die Flächen $\sigma_1$ und $\sigma_2$ so an, dass in der ersten Figur beide um die Strecke $R$ von $\Sigma$ entfernt sind, während in der zweiten diese Entfernung einerseits zwischen $\Sigma_1$ und $\sigma_1$, andererseits zwischen $\Sigma_2$ und $\sigma_2$ besteht, so kommen bei der Berechnung von $\overline{\varphi}$ oder $\overline{\overline{\varphi}}$ in Punkten, die ausserhalb der Schicht $(\sigma_1, \sigma_2)$ liegen, nur die Werthe von $\varphi$ in je einem der Körper ins Spiel. Während sich nun die Mittelwerthe, wenn auch vollkommen stetig, von $\sigma_1$ zu $\sigma_2$ sehr beträchtlich ändern können, wollen wir annehmen, dass die Aenderungen von Punkt zu Punkt im Inneren der Körper viel langsamer vor sich gehen. Dem wird in den zu behandelnden Problemen in der That genügt, wenn nur die *Wellenlänge* $\lambda$ vielmal grösser als die Entfernung $a$ von $\sigma_1$ und $\sigma_2$ ist.

Wir wollen sogar voraussetzen, dass sich zwischen $\lambda$ und $a$ noch eine solche Strecke $l$ einschalten lasse, dass $\lambda/l$ und $l/a$ sehr gross werden. Der Zweck dieser Annahme wird bald deutlich werden.

Ist die Grenzfläche $\Sigma$ gekrümmt, so sollen ihre Krümmungsradien grösser als $\lambda$, oder doch wenigstens von derselben Ordnung sein.

§ 40. Es war bereits im § 33 von dem electrischen Momente eines Molecüls die Rede. Die dort gegebene Definition wollen wir auch jetzt beibehalten und in ähnlicher Weise den Vector

$$\frac{1}{I}\Sigma e\mathfrak{q}, \tag{47}$$

wo sich die Summe über alle Ionen im Inneren der Kugel $I$ erstreckt, das *Moment der Volumeinheit* nennen. Genauer sagen wir, es gebe (47) den Werth dieses Momentes im Mittelpunkte der Kugel an. Wählt man für diesen neuen Vector das Zeichen $\mathfrak{M}$, so ist

$$\mathfrak{M}_x = \frac{1}{I}\Sigma e\mathfrak{q}_x, \text{ u.s.w.} \tag{48}$$

Mit diesem $\mathfrak{M}$ hängt eine andere Grösse aufs engste zusammen. Bei der Verschiebung der Ionen aus den Gleichgewichtslagen wird nämlich irgend eine feststehende Fläche von einigen derselben durchsetzt, was man einen „Convectionsstrom durch die Fläche" nennen kann. Ist nun $d\sigma$ ein Flächenelement, dessen Mittelpunkt $P$, und dessen Normale $n$ ist, so wird die Ladung $\varepsilon$, welche durch dasselbe nach der durch $n$ bezeichneten Seite gegangen ist, von der Lage von $P$ abhängen, wenn man die Grösse $d\sigma$ und die Richtung von $n$ ein für alle Mal festsetzt. Es sei $d\sigma$ sehr klein im Verhältniss zu den molecularen Entfernungen, jedoch so gross, dass wir nicht die Fälle zu berücksichtigen brauchen, in denen ein Ion gerade die Randlinie trifft. Offenbar wird es nun einige Lagen von $P$ geben, bei welchen das Element gar keine Ionen auffängt, und andere, bei denen es den Weg $\mathfrak{q}$ eines Ions schneidet. Im ersteren Falle ist $\varepsilon = 0$, im letzteren gleich der positiv oder negativ gerechneten Ladung des Ions.

Da $\varepsilon$ von der Lage von $P$ abhängt, so können wir in gewöhnlicher Weise den Mittelwerth $\bar{\varepsilon}$ bilden; dieser ist nun, wie im nächsten § gezeigt werden soll,

$$\mathfrak{M}_n\, d\sigma.$$

§ 41. Die in der Formel

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{I}\int \varepsilon d\tau$$

enthaltene Regel lässt sich etwas anders ausdrücken. Man wähle nämlich für den Punkt $P$ unendlich viele, wir wollen sagen $k$, gleichmässig über die Kugel $I$ zerstreute Lagen, und nehme das arithmetische Mittel der für diese Lagen geltenden Werthe von $\varepsilon$, d.h. man setze

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{k} \Sigma\varepsilon. \tag{49}$$

Jedes Ion, das seine Gleichgewichtslage im Inneren von $I$ hat, wird nun bei seiner Verschiebung durch einige der dem Elemente $d\sigma$ zugetheilten Positionen hindurchgehen und also einige Glieder zu der Summe $\Sigma\varepsilon$ liefern. Man erhält die ganze Summe, wenn man zunächst die von einem bestimmten Ion herrührenden Glieder zu einander addirt, und dann über alle Ionen summirt.

Es sei $Q$ die Gleichgewichtslage des betrachteten Ions, und $Q'$ die neue Lage; mithin $QQ' = \mathfrak{q}$. Die Länge und die Richtung dieser Linie sind gegeben, und ebenso die Richtung und Grösse von $d\sigma$. Ob das Theilchen das Flächenelement trifft und für die gesuchte Summe den Beitrag $e$ liefert, das hängt nur noch von der relativen Lage von $P$ und $Q$ ab. Man kann daher, anstatt dem Punkte $P$ die $k$ Positionen in der Kugel $I$ zu geben, auch ebenso gut diesen Punkt an seinem Ort belassen und den Punkt $Q$ durch eine Kugel $I$ herumführen. Da nun $QQ'$ das jetzt festliegende Element $d\sigma$ trifft, wenn $Q$ in einem gewissen, leicht anzugebenden Cylinder vom Inhalte $\mathfrak{q}_n d\sigma$ liegt, so verhält sich die Zahl der „wirksamen" Positionen zu der ganzen Zahl $k$, wie der Inhalt dieses Cylinders zu dem Kugelinhalte $I$. Jene Zahl ist somit

$$\frac{k}{I} \mathfrak{q}_n d\sigma,$$

und die Summe $\Sigma\varepsilon$, soweit dieselbe von dem Ion $Q$ herrührt,

$$\frac{k}{I} e\mathfrak{q}_n d\sigma.$$

Es wird schliesslich in der Formel (49)

$$\Sigma\varepsilon = \frac{k}{I} \Sigma e\mathfrak{q}_n . d\sigma,$$

wo sich die Summe über alle Ionen der Kugel $I$ erstreckt, und

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{I} \Sigma e \mathfrak{q}_n . d\sigma,$$

oder nach (48)

$$\bar{\varepsilon} = \mathfrak{M}_n d\sigma.$$

§ 42. Den Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen mögen die Gleichungen ($I_b$)—($VII_b$) (§ 20) bilden. Zunächst bemerken wir, dass die erste derselben gleichbedeutend ist mit

$$\int \mathfrak{d}_n d\sigma = E,$$

für eine beliebige geschlossene Fläche ($n$ ist nach aussen zu ziehen), wenn $E$ die von dieser umfasste electrische Ladung ist. Besteht nun in einem Elemente $d\tau$ des inneren Raumes im Gleichgewichtszustande die Dichtigkeit $\rho_0$, und hat, für ein Element der Oberfläche, $\varepsilon$ die oben angegebene Bedeutung, so ist

$$E = \int \rho_0 d\tau - \Sigma\varepsilon,$$

wo sich die Summe auf sämmtliche Elemente $d\sigma$ bezieht.

Es wird demnach

$$\int \mathfrak{d}_n d\sigma + \Sigma\varepsilon = \int \rho_0 d\tau.$$

Aus der Definition der Mittelwerthe findet man jetzt leicht

$$\int \bar{\mathfrak{d}}_n d\sigma + \Sigma\bar{\varepsilon} = \int \bar{\rho}_0 d\tau.$$

Da nun

$$\bar{\rho}_0 = 0,$$

und

$$\bar{\varepsilon} = \mathfrak{M}_n d\sigma$$

ist, so ergibt sich schliesslich

$$\int (\bar{\mathfrak{d}}_n + \mathfrak{M}_n)\, d\sigma = 0.$$

Wir wollen nun einen neuen Vector $\mathfrak{D}$ definiren durch die Gleichung

$$\mathfrak{D} = \bar{\mathfrak{d}} + \mathfrak{M},$$

und denselben die *dielectrische Polarisation* nennen.

Dieser Vector, der für den freien Aether, wo $\mathfrak{M} = 0$, in $\mathfrak{d}$ übergeht, ist eben das, was MAXWELL „dielectric displacement" nennt. Seine Grundeigenschaft besteht nach Obigem darin, dass für jede geschlossene Fläche

$$\int \mathfrak{D}_n d\sigma = 0, \tag{50}$$

und also im Inneren jedes Körpers

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0 \tag{I$_c$}$$

ist.

§ 43. Zu einer wichtigen Grenzbedingung führt die Formel (50), wenn man sie auf eine Fläche anwendet, die theils im ersten, theils im zweiten Körper liegt. Rings um einen bestimmten Punkt $P$ der Grenzfläche $\Sigma$ (Fig. 1 und 2) lege man eine der Normale in $P$ parallele Cylinderfläche $C$, und wähle für die besagte Fläche die Oberfläche des aus der Schicht ($\sigma_1$, $\sigma_2$) herausgeschnittenen Raumes. Sind nun die Dimensionen der in $\sigma_1$ und $\sigma_2$ abgegrenzten Theile von der Ordnung $l$ (§ 39), so darf man diese Theile als gleiche und parallele, ebene Elemente betrachten, und, da dieselben sehr viel grösser sind als der zwischen $\sigma_1$ und $\sigma_2$ liegende Theil von $C$, von dem über diesen letzteren genommenen Integral

$$\int \mathfrak{D}_n d\sigma$$

Abstand nehmen. Man findet also, wenn man die in $\sigma_1$ und $\sigma_2$ geltenden Werthe durch die Indices 1 und 2 von einander unterscheidet, und sowohl an $\sigma_1$, als auch an $\sigma_2$ die Normale $n$ von dem ersten nach dem zweiten Körper zieht,

$$\mathfrak{D}_{n(1)} = \mathfrak{D}_{n(2)} \tag{51}$$

Hierzu ist noch Eins zu bemerken. In jedem Medium lassen sich $\mathfrak{D}_x$, $\mathfrak{D}_y$, $\mathfrak{D}_z$ als langsam (§ 39) veränderliche Functionen der Coordinaten darstellen, und man müsste, um $\mathfrak{D}_{n(1)}$ und $\mathfrak{D}_{n(2)}$ zu erhalten, in diese Functionen die Coordinaten eines Punktes von $\sigma_1$ oder $\sigma_2$ einsetzen. Statt dessen kann man aber auch ohne merklichen Fehler — wegen der kleinen Distanz der Flächen — die Coordinaten des in $\Sigma$ liegenden Punktes $P$ einführen. Es ist also erlaubt zu sagen, dass $\mathfrak{D}_{n(1)}$ und $\mathfrak{D}_{n(2)}$ die Werthe *an der*

*Grenzfläche* seien und dass obige Formel die *Continuität von* $\mathfrak{D}_n$ ausdrücke.

Aehnliche Formeln wie die Gleichungen ($I_c$) und (51) gehen aus ($II_b$) hervor; nämlich für das Innere eines Körpers

$$\operatorname{div} \overline{\mathfrak{H}} = 0,$$

und für die Grenzfläche

$$\overline{\mathfrak{H}}_{n(1)} = \overline{\mathfrak{H}}_{n(2)}.$$

§ 44. Aus der Grundgleichung ($III_b$) leiten wir ab

$$\operatorname{rot} \overline{\mathfrak{H}}' = 4\pi\, \overline{\rho \mathfrak{v}} + 4\pi \dot{\overline{\mathfrak{d}}},$$

oder, da vermöge der Definition

$$\overline{\rho \mathfrak{v}} = \frac{1}{I} \Sigma e \mathfrak{v} = \frac{1}{I} \Sigma e \dot{\mathfrak{q}} = \dot{\mathfrak{M}},$$

$$\operatorname{rot} \overline{\mathfrak{H}}' = 4\pi\, \dot{\mathfrak{D}}.$$

Diese Ableitung gilt für das Innere eines Körpers. Um zu der entsprechenden Grenzbedingung zu gelangen, beachte man zunächst, dass (§ 4, *h*) nach der Gleichung ($III_b$) für eine beliebige Fläche $\sigma$, mit der Randlinie $s$,

$$\int \mathfrak{H}'_s ds = 4\pi \int (\rho \mathfrak{v}_n + \dot{\mathfrak{d}}_n)\, d\sigma$$

ist, und also auch

$$\int \overline{\mathfrak{H}}'_s\, ds = 4\pi \int (\overline{\rho \mathfrak{v}}_n + \dot{\overline{\mathfrak{d}}}_n)\, d\sigma = 4\pi \int \dot{\mathfrak{D}}_n d\sigma \qquad (52)$$

Man lege nun durch den Punkt $P$ (Fig. 1 und 2) eine Ebene, welche die Normale der Grenzfläche und die *beliebige*, zu $\Sigma$ tangentiale Richtung $h$ enthält, und wähle als Fläche $\sigma$ den Theil dieser Ebene, der zwischen $\sigma_1$ und $\sigma_2$ liegt und von zwei jener Normale parallelen Linien begrenzt wird. Ist die Länge dieses Streifens in der Richtung $h$ von der Ordnung $l$ (§ 39), so darf man alle Grössen von der Ordnung $a$ vernachlässigen und erhält aus (52)

$$\overline{\mathfrak{H}}'_{h(1)} = \overline{\mathfrak{H}}'_{h(2)},$$

wo die Indices 1 und 2 dieselbe Bedeutung haben wie oben. Für die beiden Componenten von $\overline{\mathfrak{H}}'$ darf man hier die Werthe wieder im Punkte $P$ nehmen, und die Gleichung sagt also aus, *dass die tangentialen Componenten des Vectors* $\overline{\mathfrak{H}}'$ *stetig seien.*

§ 45. Die Gleichung ($IV_b$) lässt eine ähnliche Anwendung zu. Ich schicke die Bemerkung voraus, dass keine magnetischen Kräfte existiren, so lange die Ionen ruhen, und dass also $\mathfrak{H}$ von derselben Ordnung ist wie die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}$. In ($VII_b$) ist somit das letzte Glied zu vernachlässigen; es wird $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$, sodann nach ($IV_b$) für das Innere eines Körpers

$$\mathrm{rot}\,\overline{\mathfrak{E}} = -\dot{\overline{\mathfrak{H}}},$$

und für die Grenzfläche

$$\overline{\mathfrak{E}}_{h(1)} = \overline{\mathfrak{E}}_{h(2)}.$$

Zuletzt folgt noch aus ($V_b$) und ($VI_b$)

$$\overline{\mathfrak{E}} = 4\pi\, V^2\, \overline{\mathfrak{d}} + [\mathfrak{p}.\overline{\mathfrak{H}}], \tag{53}$$

und

$$\overline{\mathfrak{H}}' = \overline{\mathfrak{H}} - 4\pi\, [\mathfrak{p}.\overline{\mathfrak{d}}]. \tag{54}$$

*Bewegungsgleichungen für die Ionen*

§ 46. So weit war alles ziemlich einfach. Auf grosse Schwierigkeiten stösst man aber, wenn man nun auch die Bewegungsgleichungen für die schwingenden Ionen selbst bilden will. In diesen Gleichungen die Verhältnisse auszudrücken, auf welchen die Dispersion, die Doppelbrechung und die Circularpolarisation beruhen, würde einen Einblick in moleculare Vorgänge erfordern, wie wir ihn leider auch nicht entfernt gewonnen haben. Wir wollen uns darauf beschränken, aus einer sehr einfachen Voraussetzung die wahrscheinlichste Gestalt der gesuchten Beziehungen abzuleiten, und uns dann so gut wie möglich weiterzuhelfen suchen. Ein Vortheil ist es allerdings, dass wir bei dieser neuen Aufgabe nur das Innere der homogenen Körper zu betrachten haben, da, was die Grenzflächen betrifft, die bereits abgeleiteten Gleichungen alle nothwendigen Bedingungen in sich schliessen.

Die erwähnte Voraussetzung ist nun diese, dass jedes der einander vollkommen gleichen Molecüle nur ein einziges verschiebbares Ion enthalte, alle übrigen aber festliegen.

Es sei $m$ die Masse eines beweglichen Ions, $\mathfrak{K}$ die gesammte, auf dasselbe wirkende Kraft, $N$ die Anzahl der Molecüle in der Volumeinheit. Aus den Gleichungen

$$m\frac{d^2\mathfrak{q}_x}{dt^2} = \mathfrak{K}_x, \text{ u.s.w.}$$

folgt, wenn man die Mittelwerthe zweiter Art nimmt und mit $eN$ multiplicirt,

$$m\frac{\partial^2\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_x}{\partial t^2} = eN\overline{\overline{\mathfrak{K}}}_x, \text{ u.s.w.}$$

Was $\mathfrak{K}$ betrifft, so ist zunächst zu beachten, dass nach unserer Annahme die festliegenden Theile des Molecüls auf das Ion mit einer gewissen Kraft wirken, die eben durch die Verschiebung $\mathfrak{q}$ hervorgerufen wird. Es seien die Componenten dieser Kraft lineare, homogene Functionen von $\mathfrak{q}_x$, $\mathfrak{q}_y$, $\mathfrak{q}_z$, oder vielmehr, denn nur dieses ist für das Weitere von Belang, es seien die Mittelwerthe jener Componenten gegeben durch

$$\left.\begin{array}{l} -(s_{1.1}\overline{\overline{\mathfrak{q}}}_x + s_{1.2}\overline{\overline{\mathfrak{q}}}_y + s_{1.3}\overline{\overline{\mathfrak{q}}}_z), \\ -(s_{2.1}\overline{\overline{\mathfrak{q}}}_x + s_{2.2}\overline{\overline{\mathfrak{q}}}_y + s_{2.3}\overline{\overline{\mathfrak{q}}}_z), \\ -(s_{3.1}\overline{\overline{\mathfrak{q}}}_x + s_{3.2}\overline{\overline{\mathfrak{q}}}_y + s_{3.3}\overline{\overline{\mathfrak{q}}}_z), \end{array}\right\} \tag{55}$$

worin mit $s$ gewisse Constanten bezeichnet sind.

Wir nehmen von diesen Kräften noch an, dass sie durch die Translation $\mathfrak{p}$ nicht geändert werden, wenigstens nicht in Betreff der Grössen erster Ordnung.

§ 47. Infolge der electrischen Bewegungen übt nun ferner der Aether eine Wirkung auf das Ion aus. Diese lässt sich aus der Formel ($V_b$) ableiten, da, wie wir sahen (§ 45), $\mathfrak{E} = \mathfrak{F}$ ist. Wäre es gestattet, für die electrische Kraft $\mathfrak{E}$ überall den Mittelwerth $\overline{\mathfrak{E}}$ zu setzen, der in sämmtlichen Punkten eines Ions dieselbe Grösse und Richtung hat, so hätte man den Ausdrücken (55) nur die Glieder

$$e\overline{\mathfrak{E}}_x,\ e\overline{\mathfrak{E}}_y,\ e\overline{\mathfrak{E}}_z \tag{56}$$

hinzuzufügen.

Aber die Sache ist nicht ganz so einfach. Einmal bringt das schwingende Ion selbst einen Werth von $\mathfrak{E}$ hervor, der nicht in allen Punkten des Theilchens der gleiche ist, sodass man den demselben entsprechenden Theil von $\mathfrak{K}$ nur durch eine Integration über den vom Ion eingenommenen Raum finden könnte. Zweitens käme es, selbst wenn man hiervon absehen dürfte, bei der Berechnung von $\overline{\overline{\mathfrak{K}}}$ nicht auf den Mittelwerth $\overline{\mathfrak{E}}$, sondern auf den Mittelwerth $\overline{\overline{\mathfrak{E}}}$ an, und ist es nicht erlaubt, diese beiden mit einander zu verwechseln. Freilich stände dem nichts entgegen, insoweit die Ionenbewegungen, welche die electrische Kraft $\mathfrak{E}$ hervorrufen, in einer Entfernung vom betrachteten Punkte $P$ stattfinden, die viel grösser als die Distanz der Molecüle ist, doch rührt $\mathfrak{E}$ zum Theil auch von näher gelegenen Molecülen her — wir wollen sagen, von den Schwingungen innerhalb der um $P$ beschriebenen Kugel $I$ —, und ist bei der unregelmässigen Vertheilung der hierdurch im Aether erzeugten Zustände eine Ungleichheit von $\overline{\mathfrak{E}}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{E}}}$ sehr gut möglich.

Wenn wir nun, diesen Bemerkungen gemäss, um $\overline{\overline{\mathfrak{K}}}$ zu erhalten, zu den Ausdrücken (55) nicht nur die Werthe (56), sondern auch noch gewisse Zusatzglieder

$$\mathfrak{k}_x,\ \mathfrak{k}_y,\ \mathfrak{k}_z$$

addiren und also

$$m\frac{\partial^2\mathfrak{M}_x}{\partial t^2} = -eN(s_{1.1}\overline{\overline{\mathfrak{q}}}_x+s_{1.2}\overline{\overline{\mathfrak{q}}}_y+s_{1.3}\overline{\overline{\mathfrak{q}}}_z)+e^2N\overline{\overline{\mathfrak{E}}}_x+eN\mathfrak{k}_x, \text{ u.s.w.} \quad (57)$$

setzen, so lässt sich von den Grössen $\mathfrak{k}$ behaupten, dass sie nur von den Vorgängen innerhalb der Kugel $I$ abhängen. Ausserdem steht fest, dass auch diese Zusatzglieder nur bei Verschiebung der Ionen aus den Gleichgewichtslagen bestehen und — da die $\mathfrak{q}$ als unendlich klein betrachtet werden — lineaire, homogene Functionen der Grössen $\mathfrak{q}$, $\dot{\mathfrak{q}}$, u.s.w., oder vielmehr von deren Mittelwerthen, sein müssen. Den Gleichungen (48) zufolge sind also die $\mathfrak{k}$ auch homogene, lineare Functionen der Werthe, welche $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$, $\dot{\mathfrak{M}}_x$, u.s.w. in den verschiedenen Punkten des Kugelraumes $I$ haben. Schliesslich ist noch zu bedenken, dass sich alle diese Werthe durch Anwendung des TAYLOR'schen Satzes ausdrücken lassen in den Werthen, welche $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$, $\dot{\mathfrak{M}}_x$, u.s.w. und die Differentialquotienten nach $x$, $y$, $z$ in dem betrachteten Punkte $P$, dem Mittelpunkte der Kugel, annehmen. Alle diese Werthe können somit linear in die Ausdrücke für $\mathfrak{k}_x$, $\mathfrak{k}_y$, $\mathfrak{k}_z$ eingehen.

Inwiefern diese letzteren die Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{p}$ enthalten müssen, bleibt vorläufig unentschieden. Jedenfalls werden, da wir die Grössen zweiter Ordnung vernachlässigen, nur die ersten Potenzen von $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$, $\mathfrak{p}_z$ auftreten. Erwägt man nun noch, dass in den Formeln (57) die Grössen $eN\overline{\mathfrak{q}_x}$, u.s.w. durch $\mathfrak{M}_x$, u.s.w. ersetzt werden können, und denkt man sich diese Gleichungen nach $\overline{\mathfrak{E}}_x$, u.s.w. aufgelöst, so sieht man, dass diese Componenten der electrischen Kraft sich als lineare, homogene Functionen von $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$, und deren Derivirten nach $x$, $y$, $z$, $t$ darstellen lassen, und dass die Coefficienten in diesen Functionen die Geschwindigkeiten $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$, $\mathfrak{p}_z$ linear enthalten können.

Der Kürze halber mögen die Gleichungen, die sich aus einer vollständig entwickelten Theorie für $\overline{\mathfrak{E}}_x$, $\overline{\mathfrak{E}}_y$, $\overline{\mathfrak{E}}_z$ ergeben würden, zusammengefasst werden in die Formel

$$\overline{\mathfrak{E}} = F\,(\mathfrak{M}, \dot{\mathfrak{M}}, \ddot{\mathfrak{M}}, \ldots, \mathfrak{p}) \tag{58}$$

Bei jedem der Vectoren $\mathfrak{M}$, $\dot{\mathfrak{M}}$, $\ddot{\mathfrak{M}}$, .... ist hier auch an die Differentialquotienten seiner Componenten nach den Coordinaten zu denken.

Lassen wir nun endlich unsere vereinfachende Voraussetzung fallen und betrachten jedes Molecül als ein Gebilde von vielleicht sehr verwickelter Structur, das mehrere bewegliche Ionen enthält, so liegt es nahe anzunehmen, dass noch immer eine Beziehung wie die in (58) dargestellte obwalte. Unsere nächste Aufgabe soll es sein, diese Relation mittelst gewisser allgemeiner Betrachtungen soviel wie möglich zu vereinfachen.

### *Vereinfachung für durchsichtige Körper*

§ 48. Besteht in einem System von Ionen eine gewisse Bewegung, so ist, wie im § 18 nachgewiesen wurde, auch die umgekehrte Bewegung möglich, sobald bei dieser auch die Kräfte nicht electrischen Ursprungs für eine bestimmte Lage der Ionen dieselben sind, wie in dem ursprünglichen Falle. Hieraus folgt unmittelbar, dass sich alle Bewegungen in einem Körper, der neben Ionen auch noch ungeladene Massentheilchen enthält, rückläufig machen lassen, falls nur sämmtliche Molecularkräfte durch die Configurationen bestimmt sind und nicht etwa von den Geschwindigkeiten abhängen.

Bei der Umkehrung der Bewegungen erhalten alle Geschwindigkeiten die entgegengesetzte Richtung, also auch die Translation $\mathfrak{p}$. Weiter sieht man leicht — vgl. die Formeln der §§ 43 und 44 —, dass in dem neuen Zustande zur Zeit $t$ die Vectoren

$$\mathfrak{M},\ \overline{\mathfrak{H}} \text{ und } \overline{\mathfrak{E}}$$

dieselbe Richtung und Grösse haben, wie die Vectoren

$$\mathfrak{M},\ -\overline{\mathfrak{H}} \text{ und } \overline{\mathfrak{E}}$$

in dem ursprünglichen Zustande zur Zeit $-t$.

Offenbar sind es die *durchsichtigen* Körper, und zwar nur diese [1]), in welchen die Lichtbewegungen in dem angedeuteten Sinne umkehrbar sind, wobei noch ausdrücklich hervorgehoben werden mag, dass die circularpolarisirenden Stoffe keine Ausnahme von dieser Regel bilden [2]).

Wir wollen nun sehen, welche Vereinfachung der Gleichung (58) sich aus der Umkehrbarkeit ergibt; es sollen dabei die Glieder ohne und mit $\mathfrak{p}$ gesondert betrachtet werden.

§ 49. Ist $\mathfrak{p} = 0$, so müssen sich $\overline{\mathfrak{E}}_x$, $\overline{\mathfrak{E}}_y$, $\overline{\mathfrak{E}}_z$ als homogene, lineare Functionen von den Grössen $\mathfrak{M}_x$, $\dot{\mathfrak{M}}_x$, $\ddot{\mathfrak{M}}_x$, u.s.w. und deren Differentialquotienten nach den Coordinaten ausdrücken lassen; die hierzu dienenden Beziehungen müssen ungeändert bleiben, wenn man zu der umgekehrten Bewegung übergeht. Bei dieser Bewegung haben nun (zur Zeit $t$) $\overline{\mathfrak{E}}_x$, $\overline{\mathfrak{E}}_y$, $\overline{\mathfrak{E}}_z$ und ebenso die Componenten $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$, sowie deren Differentialquotienten nach den Coordinaten dieselben Werthe und dieselben Vorzeichen wie bei der ursprünglichen Bewegung (zur Zeit $-t$). Gleiches gilt auch von allen *geraden* Differentialquotienten nach der Zeit. Die *ungeraden* Differentialquotienten nach $t$ haben dagegen bei den beiden Bewegungen zwar dieselbe Grösse, aber entgegengesetzte Zeichen, und es können diese Derivirten daher nicht in den Beziehungen zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ vorkommen. Um dies anzudeuten, ersetzen wir (58) für ruhende Körper durch

$$\overline{\mathfrak{E}} = F_1(\mathfrak{M}, \ddot{\mathfrak{M}}, \ldots .) \tag{59}$$

Lässt man jetzt wieder die Translation zu, so hat man zu $F_1$ noch einen Vector zu addiren, dessen Componenten lineare und homogene Functionen von $\mathfrak{M}$, $\dot{\mathfrak{M}}$, $\ddot{\mathfrak{M}}$,.. sind und in jedem Gliede

---

[1]) Kehrte man die Bewegungen in einem *absorbirenden* Medium um, so würde sich ein Zustand ergeben, bei dem die Amplitude in der Fortpflanzungsrichtung wüchse.

[2]) Die *magnetische* Drehung der Polarisationsebene bleibt von unseren Betrachtungen ausgeschlossen.

einen der Factoren $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$, $\mathfrak{p}_z$ enthalten; auch dieser neue Vector muss bei dem Uebergange zur umgekehrten Bewegung unverändert bleiben. Da hierbei die Componenten $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$, $\mathfrak{p}_z$ das entgegengesetzte Zeichen erhalten, so können sie nur mit solchen Grössen multiplicirt sein, die gleichfalls das Zeichen wechseln, d.h. also mit ungeraden Differentialquotienten nach der Zeit. Die Gleichung (58) nimmt demgemäss im allgemeinen die Gestalt

$$\overline{\mathfrak{E}} = F_1\,(\mathfrak{M}, \ddot{\mathfrak{M}}, \ldots.) + F_2\,(\dot{\mathfrak{M}}, \dddot{\mathfrak{M}}, \ldots, \mathfrak{p}) \tag{60}$$

an.

Eine weitere Vereinfachung erzielen wir dadurch, dass wir uns an eine bestimmte Art homogenen Lichtes halten, also an goniometrische Functionen der Zeit mit einer bestimmten Periode $T$. Es ist dann

$$\ddot{\mathfrak{M}} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \mathfrak{M},\ \dddot{\mathfrak{M}} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \dot{\mathfrak{M}}, \text{ u.s.w.} \tag{61}$$

Indem man so in (60) alle geraden Differentialquotienten in $\mathfrak{M}$ und alle ungeraden in $\dot{\mathfrak{M}}$ ausdrückt, wird

$$\overline{\mathfrak{E}} = F_1\,(\mathfrak{M}) + F_2\,(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p}) \tag{62}$$

Die Componenten von $F_1$ sind jetzt lineare und homogene Functionen von $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ und deren Differentialquotienten nach $x$, $y$, $z$, während $F_2$ in ähnlicher Weise von $\dot{\mathfrak{M}}$ abhängt. Die Coefficienten dieser Functionen können freilich von der Schwingungsdauer $T$ abhängen, da wir die Werthe (61) in (60) eingeführt haben.

### *Die Dispersion des Lichtes*

§ 50. Man kann eine Erklärung der Farbenzerstreuung auf zweierlei Weise versuchen, indem man entweder, wie CAUCHY es that, die Veränderung der Gleichgewichtsstörung von Ort zu Ort, oder die Veränderung mit der Zeit als maassgebend betrachtet. Es ist in dem einen Falle die Wellenlänge, in dem anderen die Schwingungsdauer, was die Fortpflanzungsgeschwindigkeit *unmittelbar* bedingt, obgleich am Ende Beides auf dasselbe hinauskommt.

Wollten wir den erstgenannten Weg einschlagen und also gleichsam die von CAUCHY gegebene Erklärung — der mathematischen Form nach — in unserer Theorie reproduciren, so hätten wir einfach anzunehmen, dass die in (59) zusammengefassten Gleichungen wohl Differentialquotienten nach $x$, $y$, $z$, nicht aber solche nach $t$ enthalten, und dass namentlich, wegen der Kleinheit von $m$, das erste Glied in (57) verschwinde. Es ist klar, dass sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit der Wellenlänge ändern muss, sobald Glieder mit z.B. $\mathfrak{M}_x$ und $\partial^2\mathfrak{M}_x/\partial y^2$ neben einander stehen. Es gewinnt nämlich die letztere Grösse der ersteren gegenüber einen um so grösseren Einfluss, je kleiner die Wellenlänge ist.

Die gerade entgegengesetzte Annahme wäre, dass *nur* Differentialquotienten nach $t$, keine aber nach $x$, $y$, $z$ in der Formel (59) vorkommen. Insofern nun die einzige Grösse der ersteren Art, deren Einführung sich als nothwendig erwiesen hat, das Glied

$$m\frac{\partial^2\mathfrak{M}_x}{\partial t^2}$$

in der Gleichung (57) ist, können wir sagen, dass die zweitgenannte Auffassung die Erscheinung auf die *Masse* der mitschwingenden Ionen zurückführe.

Dass diese Erklärung nun wirklich *gelingt*, wurde schon von v. HELMHOLTZ und früher auch von mir nachgewiesen. Die neue Gestalt, die ich der Theorie jetzt gebe, macht in dieser Hinsicht keinen Unterschied.

Wie man weiss, sind es hauptsächlich die Erscheinungen der anomalen Dispersion, welche zu Gunsten der Annahme mitschwingender Massen sprechen. Was andererseits die Differentialquotienten nach $x$, $y$, $z$ betrifft, so fragt es sich, ob die Glieder, in denen sie vorkommen, auch gross genug sind, um einen nennenswerthen Einfluss auszuüben. Leider lässt sich hierüber schwerlich urtheilen. Wie wir sahen, können die genannten Glieder nur davon herrühren, dass das electrische Moment $\mathfrak{M}$ nicht in allen Punkten der Kugel $I$ dieselbe Grösse und Richtung hat. Da der Radius viel kleiner als die Wellenlänge ist, so sind die Differenzen sicherlich sehr geringfügig, und wird man daher keinen Anstand nehmen, dieselben zu vernachlässigen, wenn es sich um eine Wirkung auf entfernte Punkte handelt. Allein es wäre voreilig, zu behaupten, dass nicht auch diese kleinen Aenderungen von $\mathfrak{M}$ einen Einfluss auf die Erscheinungen im Inneren der Kugel haben können. Die Drehung der Polarisationsebene, auf die wir noch zurückkommen werden, und die wohl nicht ohne Zuhülfenahme der Differentialquotienten nach $x$, $y$, $z$ zu verstehen ist, muss uns schon davon abhalten, einen Einfluss derartiger Glieder auf die Dispersion von vornherein zu verneinen.

Mit mehr Recht kann man *aus den Erscheinungen* auf die Unerheblichkeit dieses Einflusses schliessen. Behält man nämlich in den Gleichungen (59) die Differentialquotienten nach $x$, $y$, $z$ bei und vereinfacht dann die Formeln, soweit es auf Grund der bekannten Symmetrieverhältnisse der Krystalle geschehen kann, so wird man zu Gesetzen für die Lichtbewegung geführt, die verwickelter als die thatsächlich geltenden sind und in diese nur übergehen durch eine weitere Vereinfachung der Formeln, für welche kein Grund anzugeben ist. Beispielsweise würden nach jenen Gesetzen die regulären Krystalle nicht isotrop sein, sondern eine eigenthümliche Art Doppelbrechung zeigen müssen [1].

Das Gesagte möge es rechtfertigen, dass wir, während vorläufig die circularpolarisirenden Medien ausgeschlossen bleiben, für die übrigen durchsichtigen Körper annehmen, dass die Beziehung (62) keine Differentialquotienten nach $x$, $y$, $z$ enthalte. Wir setzen also

$$\left.\begin{aligned}\overline{\mathfrak{E}}_x &= \sigma_{1.1}\,\mathfrak{M}_x + \sigma_{1.2}\,\mathfrak{M}_y + \sigma_{1.3}\,\mathfrak{M}_z + (\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p})_x,\\ \overline{\mathfrak{E}}_y &= \sigma_{2.1}\,\mathfrak{M}_x + \sigma_{2.2}\,\mathfrak{M}_y + \sigma_{2.3}\,\mathfrak{M}_z + (\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p})_y,\\ \overline{\mathfrak{E}}_z &= \sigma_{3.1}\,\mathfrak{M}_x + \sigma_{3.2}\,\mathfrak{M}_y + \sigma_{3.3}\,\mathfrak{M}_z + (\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p})_z,\end{aligned}\right\} \quad (63)$$

und verstehen hier unter $(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p})_x$, $(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p})_y$, $(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p})_z$ Ausdrücke, die sowohl in Bezug auf $\dot{\mathfrak{M}}_x$, $\dot{\mathfrak{M}}_y$, $\dot{\mathfrak{M}}_z$, als auch auf $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$, $\mathfrak{p}_z$ linear und homogen sind. Die Coefficienten in diesen Ausdrücken, sowie die Factoren $\sigma$ sind als Functionen von $T$ anzusehen.

Ich werde jetzt nachweisen, dass für eine sehr allgemeine Klasse von Körpern die Glieder $(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p})_x$, u.s.w. verschwinden; zugleich erreichen wir dabei noch eine Vereinfachung der von $\mathfrak{p}$ unabhängigen Glieder.

### *Körper mit drei zu einander senkrechten Symmetrieebenen*

§ 51. Es sei $A$ irgend ein Körper, und $A'$ ein zweiter Körper, der das Spiegelbild des ersten in Bezug auf eine gewisse Ebene $E$

[1] Vgl. meine früheren Betrachtungen: Verhandelingen Akad. Wet. Amsterdam, **18**, 68–77; Wied. Ann. **9**, 656, 1878 (Collected Papers, **2**, 70–87) und Proc. Acad. Amsterdam. **24**, 333, 1921 (Collected Papers, **3**, 314–320).

ist, und zwar bis in die kleinsten Züge, also auch in der Anordnung der kleinsten Theilchen. Hängen die Molecularkräfte in solcher Weise von den Configurationen ab, dass die Vectoren, durch welche sie in $A$ und $A'$ dargestellt werden, sich wie Gegenstände und deren Spiegelbilder verhalten, so können sich (§ 18) in den beiden Körpern Ionenbewegungen und damit verbundene Zustandsveränderungen des Aethers so abspielen, dass auch was diese Erscheinungen betrifft das eine System immerfort das Spiegelbild des anderen ist. Bei dem Uebergange vom ersten System zum zweiten verwandeln sich dann die Vectoren $\overline{\mathfrak{E}}$, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{p}$ in ihre Spiegelbilder.

Es kann nun der innere Bau des Körpers $A$ derart sein, dass, bei geeigneter Wahl der Ebene $E$, $A$ und $A'$ in Bezug auf *dasselbe* Coordinatensystem dieselben Eigenschaften haben, dass sich also die Erscheinungen in $A$ und $A'$ durch *dieselben* Gleichungen, ohne Veränderung einer Constante oder eines Zeichens, darstellen lassen. In diesem Falle nennt man $E$ eine *Symmetrieebene*. Die Körper, die wir jetzt ins Auge fassen und auf welche wir uns vorläufig beschränken, sind die, für welche es drei derartige, zu einander senkrechte Symmetrieebenen gibt.

Wir ertheilen den Coordinatenebenen die Richtung der Symmetrieebenen und betrachten zunächst das Spiegelbild in Bezug auf die $y\,z$-Ebene. Bei dem Uebergange zu diesem Bilde wechseln $\overline{\mathfrak{E}}_x$, $\mathfrak{M}_x$ und $\mathfrak{p}_x$ das Zeichen, während die übrigen Componenten von $\overline{\mathfrak{E}}$, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{p}$ gänzlich unverändert bleiben. Die Formeln (63) müssen jedoch ihre Gültigkeit behalten. Es ist das nur möglich, wenn, nachdem $(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p})_x$, u.s.w. als Functionen von $\dot{\mathfrak{M}}_x$, $\dot{\mathfrak{M}}_y$, $\dot{\mathfrak{M}}_z$, $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$, $\mathfrak{p}_z$ dargestellt sind, der Index $x$ in jedem Gliede der ersten Formel einmal, und in jedem Gliede der zweiten und dritten entweder gar nicht, oder zweimal vorkommt. Zu einem ähnlichen Schluss gelangt man auch hinsichtlich der Indices $y$ und $z$. Betrachtet man überdies noch die Spiegelbilder in Bezug auf die $z\,x$- und die $x\,y$-Ebene, so findet man, dass kein einziges Glied wie $(\mathfrak{M}, \mathfrak{p})_x$ zulässig ist, und dass, von den neun Coefficienten $\sigma$, nur $\sigma_{1.1}$, $\sigma_{2.2}$ und $\sigma_{3.3}$ von Null verschieden sein können.

Man erhält also

$$\overline{\mathfrak{E}}_x = \sigma_{1.1}\,\mathfrak{M}_x,\ \overline{\mathfrak{E}}_y = \sigma_{2.2}\,\mathfrak{M}_y,\ \overline{\mathfrak{E}}_z = \sigma_{3.3}\,\mathfrak{M}_z, \tag{64}$$

oder

$$\frac{4\pi V^2}{\sigma_{1.1}} \overline{\mathfrak{E}}_x = 4\pi V^2 \mathfrak{M}_x, \text{ u.s.w.}$$

Addirt man nun diese Formeln zu den drei in (53) zusammengefassten und setzt

$$1 + \frac{4\pi V^2}{\sigma_{1.1}} = \varkappa_1, \quad 1 + \frac{4\pi V^2}{\sigma_{2.2}} = \varkappa_2, \quad 1 + \frac{4\pi V^2}{\sigma_{3.3}} = \varkappa_3,$$

so wird

$$\varkappa_1 \overline{\mathfrak{E}}_x = 4\pi V^2 \mathfrak{D}_x + [\mathfrak{p}.\overline{\mathfrak{H}}]_x, \text{ u.s.w.},$$

worin, für eine bestimmte Lichtart, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$ Constanten sind.

*Zusammenfassung der Gleichungen*

§ 52. Unter Weglassung der Striche über den Buchstaben — da ja weiterhin *nur* von Mittelwerthen die Rede sein wird — fassen wir jetzt die Bewegungsgleichungen folgendermaassen zusammen.

Im Inneren jedes Körpers ist

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0, \tag{I$_c$}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0, \tag{II$_c$}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H}' = 4\pi\dot{\mathfrak{D}}, \tag{III$_c$}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{H}}, \tag{IV$_c$}$$

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_1 \mathfrak{E}_x = 4\pi V^2 \mathfrak{D}_x + [\mathfrak{p}.\mathfrak{H}]_x, \ \varkappa_2 \mathfrak{E}_y = 4\pi V^2 \mathfrak{D}_y + [\mathfrak{p}.\mathfrak{H}]_y, \\ \varkappa_3 \mathfrak{E}_z = 4\pi V^2 \mathfrak{D}_z + [\mathfrak{p}.\mathfrak{H}]_z, \end{aligned}\right\} \tag{V$_c$}$$

und

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - \frac{1}{V^2}[\mathfrak{p}.\mathfrak{E}], \tag{VI$_c$}$$

da man, mit Vernachlässigung von Grössen zweiter Ordnung, in der Gleichung (54), vermöge der Beziehung (53), $4\pi\mathfrak{F}$ durch $\mathfrak{E}/V^2$ ersetzen darf.

An der Grenzfläche gelten die Bedingungen

$$\mathfrak{D}_{n(1)} = \mathfrak{D}_{n(2)}, \ \mathfrak{H}_{n(1)} = \mathfrak{H}_{n(2)}, \ \mathfrak{E}_{h(1)} = \mathfrak{E}_{h(2)}, \ \mathfrak{H}'_{h(1)} = \mathfrak{H}'_{h(2)} \tag{VIII$_c$}$$

Besteht keine Translation, so fällt $\mathfrak{H}'$ mit $\mathfrak{H}$ zusammen; es gehen dann die Gleichungen (III$_c$) und (V$_c$) über in

$$\mathrm{rot}\ \mathfrak{H} = 4\pi\dot{\mathfrak{D}}, \tag{III$'_c$}$$

$$\varkappa_1 \mathfrak{E}_x = 4\pi\, V^2\, \mathfrak{D}_x, \text{ u.s.w.} \tag{V$'_c$}$$

und die letzte der Grenzbedingungen ($\mathrm{VIII}_c$) in

$$\mathfrak{H}_{h(1)} = \mathfrak{H}_{h(2)}.$$

Es ergeben sich also für diesen Fall die bekannten Bewegungsgleichungen und Grenzbedingungen der electromagnetischen Lichttheorie. Aus den Formeln ($\mathrm{I}_c$), ($\mathrm{II}_c$), ($\mathrm{III}'_c$), ($\mathrm{IV}_c$) und ($\mathrm{V}'_c$) leitet man, wenn $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ von einander verschieden sind, die Gesetze der Lichtbewegung in zweiaxigen Krystallen, und wenn zwei dieser Grössen denselben Werth haben, die Gesetze für einaxige Krystalle ab, während die Annahme $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3$ auf isotrope Körper zurückführt. Da übrigens $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$ von der Schwingungsdauer abhängen, so ist auch die Erklärung der Dispersion des Lichtes in den Formeln enthalten.

Auch der Fall des reinen Aethers ist nicht ausgeschlossen. Da in diesem keine electrischen Momente $\mathfrak{M}$ bestehen, so hat man nach (64) $\sigma_{1.1} = \sigma_{2.2} = \sigma_{3.3} = \infty$, und also $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = 1$ zu setzen. Die Gleichungen ($\mathrm{V}_c$) und ($\mathrm{V}'_c$) verwandeln sich dadurch in

$$\mathfrak{E} = 4\pi\, V^2\, \mathfrak{D} + [\mathfrak{p}.\mathfrak{H}],$$

$$\mathfrak{E} = 4\pi\, V^2\, \mathfrak{D}.$$

Man sieht leicht, dass die Gleichungen, die man auf diese Weise für den Aether erhält, mit den Formeln (I)—(V), oder ($\mathrm{I}_b$)—($\mathrm{VII}_b$) übereinstimmen.

Selbstredend ist, was das Innere des reinen Aethers betrifft, der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Grössen immer derselbe, die ponderable Materie möge sich bewegen oder nicht.

### *Circularpolarisirende Medien*

§ 53. Körper, welche die Polarisationsebene drehen, wurden im Obigen ausgeschlossen. Eine gründliche Theorie für dieselben aufzustellen, ist bis jetzt nicht thunlich; dennoch mögen einige allgemeine Betrachtungen, wie unser Zweck sie erfordert, hier Platz finden.

Da die Drehung der Polarisationsebene gerade damit zusammenhängt, dass das Medium nicht in allen Eigenschaften mit seinem Spiegelbilde übereinstimmt, so ist das im § 51 Gesagte nicht mehr anwendbar. Nichtsdestoweniger wird alles ziemlich einfach, wenn man sich auf *isotrope* Medien beschränkt.

Nimmt man an, dass in die Beziehung zwischen $\overline{\mathfrak{E}}$ und $\mathfrak{M}$ keine Differentialquotienten nach $x$, $y$, $z$ eingehen, so hat man unter dem $F_1(\mathfrak{M})$ der Gleichung (62) einen Vector zu verstehen, der schon durch $\mathfrak{M}$ völlig bestimmt ist, und zwar erfordert die Isotropie, dass die aus $\mathfrak{M}$ und $F_1(\mathfrak{M})$ bestehende Figur in beliebiger Weise gedreht werden kann, ohne dass $F_1(\mathfrak{M})$ aufhört, zu $\mathfrak{M}$ zu passen. Wählt man nun die Richtung von $\mathfrak{M}$ selbst für die Drehungsaxe, so bleibt $\mathfrak{M}$ immer derselbe Vector; es muss dann also auch $F_1(\mathfrak{M})$ unverändert bleiben, was nur möglich ist, wenn dieser Vector die Richtung von $\mathfrak{M}$ hat. Mit Rücksicht auf den linearen Character der gesuchten Relation ist folglich zu setzen

$$F_1(\mathfrak{M}) = \sigma\mathfrak{M}, \tag{65}$$

worin $\sigma$ eine scalare Constante ist.

Der zweite in (62) vorkommende Vector $F_2(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p})$ hat folgende Eigenschaften. Erstens sind seine Componenten homogene, lineare Functionen von $\dot{\mathfrak{M}}_x$, $\dot{\mathfrak{M}}_y$, $\dot{\mathfrak{M}}_z$, und ebenso von $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$, $\mathfrak{p}_z$. Zweitens muss nach einer beliebigen Drehung der aus den drei Vectoren $\dot{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{p}$ und $F_2(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p})$ bestehenden Figur, noch immer $F_2(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p})$ zu $\dot{\mathfrak{M}}$ und $\mathfrak{p}$ passen. Man leitet hieraus ab [1])

$$F_2(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p}) = k\,[\dot{\mathfrak{M}}\,.\,\mathfrak{p}], \tag{66}$$

---

[1]) Zerlegt man $\mathfrak{p}$ in zwei Componenten $\mathfrak{p}_1$ and $\mathfrak{p}_2$, so folgt aus der zuerst genannten Eigenschaft von $F_2(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p})$

$$F_2(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p}) = F_2(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p}_1) + F_2(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p}_2).$$

Man nehme an, dass $\mathfrak{p}_1$ in die Richtung von $\dot{\mathfrak{M}}$ falle, und $\mathfrak{p}_2$ senkrecht darauf stehe. Dreht man nun die aus $\dot{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{p}_1$ und $F_2(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p}_1)$ bestehende Figur um eine mit $\dot{\mathfrak{M}}$ zusammenfallende Axe, so bleiben $\dot{\mathfrak{M}}$ und $\mathfrak{p}_1$ wie sie sind, und es darf sich also auch $F_2(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p}_1)$ nicht ändern. Dieser Vector muss folglich die Richtung von $\dot{\mathfrak{M}}$ und $\mathfrak{p}_1$ haben. Dass

$$F_2(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p}_1) = 0 \tag{67}$$

ist, zeigt man dann weiter mittelst einer Drehung von 180° um eine Axe, die senkrecht zu $\dot{\mathfrak{M}}$ und $\mathfrak{p}_1$ steht. Bei dieser Drehung würde der Vector $F_2(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p}_1)$ die entgegengesetzte Richtung erhalten; er dürfte sich aber nicht ändern, weil die *beiden* Vectoren $\dot{\mathfrak{M}}$ und $\mathfrak{p}_1$ das Zeichen wechseln.

Um die Richtung von $F_2(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p}_2)$ zu ermitteln, drehe man die Figur, welche dieser Vector mit $\dot{\mathfrak{M}}$ und $\mathfrak{p}_2$ bildet, um eine Axe, die senkrecht zu der Ebene $(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p}_2)$ oder $(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p})$ steht, und zwar um 180°. Dabei gehen $\dot{\mathfrak{M}}$ und $\mathfrak{p}_2$ in $-\dot{\mathfrak{M}}$ und $-\mathfrak{p}_2$ über; der worin $k$ eine positive oder negative Constante ist, die übrigens, wie oben $\sigma$, noch von der Schwingungszeit $T$ abhängen kann.

§ 54. Die Voraussetzung, dass in (62) keine Differentialquotienten nach $x$, $y$, $z$ vorkommen, hat uns zu der Gleichung (65) geführt, aus welcher eine Drehung der Polarisationsebene *nicht* hervorgeht. Es ist daher, wie schon früher angedeutet wurde, nöthig, wenigstens in dem Ausdrucke $F_1(\mathfrak{M})$ Derivirte nach den Coordinaten anzunehmen. Das Einfachste ist, dem zweiten Gliede von (65) noch einen Vector $\mathfrak{N}$ hinzuzufügen, dessen Componenten linear und homogen von den *ersten* Differentialquotienten von $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ abhängen. Grösse und Richtung von $\mathfrak{N}$ werden nun wieder durch die Isotropie näher bestimmt. Denkt man sich nämlich in jedem Punkte des Raumes eine Linie, welche den Vector $\mathfrak{M}$ darstellt, und ausserdem im betrachteten Punkte den Vector $\mathfrak{N}$, so muss nach einer beliebigen Drehung dieser ganzen Figur $\mathfrak{N}$ noch immer zu den Vectoren $\mathfrak{M}$ passen. Verträglich hiermit ist nur die Annahme [1])

---

Vector $F_2(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p}_2)$ darf sich daher nicht ändern, was nur möglich ist, wenn er die Richtung der Axe hat.

Es steht somit der Vector $F_2(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p}_2)$ — und also nach (67) auch der Vector $F_2(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p})$ — senkrecht zu der Ebene $(\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p})$; seine Grösse ist den Werthen von $\dot{\mathfrak{M}}$ und $\mathfrak{p}_2$ proportional. Beides haben wir in (66) ausgedrückt.

[1]) Nach einer Drehung der erwähnten Figur wollen wir, wie uns das wirklich freisteht, bei der Zerlegung der Vectoren und der Bildung der Differentialquotienten wieder die *ursprünglichen* Coordinatenaxen anwenden. Zunächst finde nun eine Drehung von 180° um die $x$-Axe statt. Es bleibt dabei $\mathfrak{N}_x$ unverändert; folglich können in dem Ausdrucke für diese Componente nur diejenigen Differentialquotienten von $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ vorkommen, welche das Zeichen *nicht* wechseln. Das sind

$$\frac{\partial \mathfrak{M}_x}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{M}_y}{\partial y}, \frac{\partial \mathfrak{M}_y}{\partial z}, \frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial y}, \frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial z}.$$

Beachtet man weiter, dass bei einer Drehung von 180° um die $y$- oder die $z$-Axe $\mathfrak{N}_x$ die entgegengesetzte Richtung annimmt, und dass also diejenigen Differentialquotienten ausgeschlossen sind, welche bei einer dieser Drehungen dasselbe Zeichen behalten, so findet man, dass $\mathfrak{N}_x$ von der Form

$$j \frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial y} + j' \frac{\partial \mathfrak{M}_y}{\partial z}$$

sein muss.

Schliesslich denke man sich noch eine Drehung von 90° um die $x$-Axe, wodurch $OY$ in $OZ$ übergeführt wird. Nach dieser Rotation haben $\partial \mathfrak{M}_z/\partial y$ und $\partial \mathfrak{M}_y/\partial z$ die Werthe, welche früher $-\partial \mathfrak{M}_y/\partial z$ und $-\partial \mathfrak{M}_z/\partial y$ hatten; da sich aber $\mathfrak{N}_x$ nicht geändert hat, so muss $j' = -j$ sein. Aus $\mathfrak{N}_x$ findet man $\mathfrak{N}_y$ und $\mathfrak{N}_z$ durch Vertauschung der Buchstaben.

$$\mathfrak{N} = j \text{ rot } \mathfrak{M},$$

worin $j$ eine gewisse Constante ist, und wollen wir also für ruhende Körper (65) zu

$$F_1 (\mathfrak{M}) = \sigma \mathfrak{M} + j \text{ rot } \mathfrak{M}$$

ergänzen.

Man könnte nun auch noch in das Glied $F_2 (\dot{\mathfrak{M}}, \mathfrak{p})$ Differentialquotienten nach $x, y, z$ einführen; wir werden das aber unterlassen, da das bereits Gesagte für unseren Zweck ausreicht. Nach demselben haben wir, wenn wir von jetzt ab den Strich über $\mathfrak{E}$ weglassen, für isotrope, circularpolarisirende Medien zu setzen

$$\mathfrak{E} = \sigma \mathfrak{M} + j \text{ rot } \mathfrak{M} + k [\dot{\mathfrak{M}}.\mathfrak{p}] \tag{68}$$

§ 55. Es ist nicht ohne Interesse, noch einen Augenblick das Spiegelbild einer Bewegung, für welche die gefundene Gleichung gilt, zu betrachten. Die für diese neue Bewegung geltenden Vectoren, welche $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{M}'$, $\dot{\mathfrak{M}}'$ und $\mathfrak{p}'$ heissen mögen, sind die Spiegelbilder der Vectoren $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{M}$, $\dot{\mathfrak{M}}$ und $\mathfrak{p}$. Daraus folgt, dass die Spiegelbilder von rot $\mathfrak{M}$ und $[\dot{\mathfrak{M}}.\mathfrak{p}]$ nicht mit rot $\mathfrak{M}'$ und $[\dot{\mathfrak{M}}'.\mathfrak{p}']$, sondern mit — rot $\mathfrak{M}'$ und — $[\dot{\mathfrak{M}}'.\mathfrak{p}']$ zusammenfallen. Da nun die in (68) ausgedrückte lineare Relation zwischen vier Vectoren auch dann bestehen bleibt, wenn man jeden derselben durch sein Spiegelbild ersetzt, so muss

$$\mathfrak{E}' = \sigma \mathfrak{M}' - j \text{ rot } \mathfrak{M}' - k [\dot{\mathfrak{M}}'.\mathfrak{p}']$$

sein. Man ersieht hieraus, dass die Vorgänge, welche in dem Spiegelbilde des betrachteten Körpers stattfinden können, nicht mehr der Beziehung (68) genügen, sondern einer Relation, in der die Glieder mit $j$ und $k$ andere Vorzeichen haben. So bestätigt es sich, dass diese Glieder durchaus damit zusammenhängen, dass der Körper und sein Spiegelbild verschiedene Eigenschaften haben; wir dürfen erwarten, dass denselben wirklich eine Drehung der Polarisationsebene entsprechen wird.

Das Nähere hierüber verschiebe ich auf später. Hier sei nur noch bemerkt, dass die Grösse $j$ rot $\mathfrak{M}$, von der wir die natürliche Drehung der Polarisationsebene abhängig machen werden, viele Aehnlichkeit hat mit den Gliedern, die von verschiedenen Physikern in den Bewegungsgleichungen des Lichtes angenommen worden sind, um die Circularpolarisation zu erklären. In der That halte ich, in Ermangelung einer Theorie, welche der Erscheinung tiefer auf den Grund geht, die Einführung des Gliedes $j$ rot $\mathfrak{M}$ für nicht besser und nicht schlechter als die Hypothesen jener Physiker.

Das letzte Glied in (68) hat eine eigenthümliche Bedeutung. Demselben entspräche nämlich eine Drehung der Polarisationsebene, welche in einem Körper, der von seinem Spiegelbilde verschieden ist, durch die Bewegung der Erde hervorgerufen würde[1]).

---

[1]) Die folgende Betrachtung dürfte wohl geeignet sein, die Existenz der electrischen Kraft $k\,[\dot{\mathfrak{M}}.\mathfrak{p}]$, von der im Texte nur die Möglichkeit dargethan wurde, auch einigermaassen wahrscheinlich zu machen. Da ein Molecül einer circularpolarisirenden Substanz eine gewissermaassen „schraubenförmige" Structur haben muss, so dürften die Theilchen, aus denen es besteht, dergestalt mit einander verbunden sein, dass die Verschiebung eines derselben eine kreisförmige Bewegung eines oder mehrerer anderen hervorruft. Es möge sich z.B. ein positives Ion $A$ der Geraden $G$ entlang bewegen und dadurch das Moment $\mathfrak{M}$ hervorrufen, sodass die Geschwindigkeit proportional $\dot{\mathfrak{M}}$ ist, und es möge diese Bewegung begleitet sein von einem Umlaufe einiger anderen, ebenfalls positiven Ionen $B$ in einem Kreise, der $G$ zur Axe hat. Zwischen den Geschwindigkeiten von $A$ und $B$ bestehe hierbei ein constantes Verhältniss. Die Bewegung der Theilchen $B$ constituirt dann einen kreisförmigen electrischen Strom, der $\dot{\mathfrak{M}}$ proportional ist, und dieser erzeugt in dem Molecül und in seiner Nähe eine „locale" magnetische Kraft, welche bei $A$ mit der Linie $G$, also auch mit $\dot{\mathfrak{M}}$, zusammenfällt und $\dot{\mathfrak{M}}$ proportional ist. Combinirt man nun, dem letzten Gliede der Grundgleichung (V) gemäss, diese magnetische Kraft mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$, so erhält man eine electrische Kraft wie $k\,[\dot{\mathfrak{M}}.\,\mathfrak{p}]$.

## ABSCHNITT V

### ANWENDUNG AUF DIE OPTISCHEN ERSCHEINUNGEN

*Zurückführung auf ein ruhendes System*

§ 56. Die Bestimmung des Einflusses, den eine Bewegung der ponderablen Körper auf die Lichterscheinungen ausüben kann, gelingt in sehr einfacher Weise, wenn man, wie es in diesem Abschnitte stets geschehen soll, die Circularpolarisation bei Seite lässt.

Wir wollen nämlich, wie wir das schon früher (§ 31) thaten, und unter fortwährender Vernachlässigung von Grössen zweiter Ordnung, an die Stelle von $t$ die „Ortszeit"

$$t' = t - \frac{1}{V^2}(\mathfrak{p}_x x + \mathfrak{p}_y y + \mathfrak{p}_z z)$$

als unabhängige Variable einführen; ausserdem wollen wir, statt $\mathfrak{D}$, einen neuen Vector $\mathfrak{D}'$ betrachten, den wir durch die Formel

$$4\pi V^2 \mathfrak{D}' = 4\pi V^2 \mathfrak{D} + [\mathfrak{p}.\mathfrak{H}] \qquad \text{(IX)}$$

definiren.

Wird irgend eine Grösse als Function von $x$, $y$, $z$ und $t'$ betrachtet, so bezeichnen wir, wie früher (§ 31), die partiellen Differentialquotienten mit

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)', \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)', \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)', \frac{\partial}{\partial t'}.$$

Es soll weiter, dieser Schreibweise gemäss, unter

$$\mathrm{div}' \mathfrak{A}$$

der Ausdruck

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x}\right)' + \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y}\right)' + \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}\right)',$$

und unter

$$\text{rot}' \mathfrak{A}$$

ein Vector mit den Componenten

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y}\right)' - \left(\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}\right)' \text{ u.s.w.}$$

verstanden werden.

Die Einführung von $t'$ und $\mathfrak{D}'$ gewährt den Vortheil, dass, wie ich jetzt zeigen werde, die Gleichungen ($\mathrm{I}_c$)—($\mathrm{V}_c$) dieselbe Gestalt annehmen, wie die für $\mathfrak{p} = 0$ geltenden Formeln.

§ 57. Zunächst erhält man, unter Berücksichtigung der Formeln (35),

$$\text{div } \mathfrak{D} = \text{div}' \, \mathfrak{D} - \frac{1}{V^2} (\mathfrak{p}_x \dot{\mathfrak{D}}_x + \mathfrak{p}_y \dot{\mathfrak{D}}_y + \mathfrak{p}_z \dot{\mathfrak{D}}_z),$$

oder nach ($\mathrm{III}_c$), wenn man in den mit $\mathfrak{p}_x$, $\mathfrak{p}_y$, $\mathfrak{p}_z$ multiplicirten Gliedern $\mathfrak{H}'$ durch $\mathfrak{H}$ und div durch div$'$ ersetzt,

$$\text{div } \mathfrak{D} = \text{div}' \, \mathfrak{D} - \frac{1}{4\pi V^2} \{\mathfrak{p}_x [\text{rot } \mathfrak{H}]_x + \mathfrak{p}_y [\text{rot } \mathfrak{H}]_y + \mathfrak{p}_z [\text{rot } \mathfrak{H}]_z\} =$$

$$= \text{div}' \, \mathfrak{D} + \frac{1}{4\pi V^2} \text{div } [\mathfrak{p} . \mathfrak{H}] = \text{div}' \, \mathfrak{D}'.$$

Die Gleichung ($\mathrm{I}_c$) wird somit

$$\text{div}' \, \mathfrak{D}' = 0. \tag{$\mathrm{I}_d$}$$

In ähnlicher Weise ist

$$\text{div } \mathfrak{H} = \text{div}' \, \mathfrak{H} - \frac{1}{V^2} (\mathfrak{p}_x \dot{\mathfrak{H}}_x + \mathfrak{p}_y \dot{\mathfrak{H}}_y + \mathfrak{p}_z \dot{\mathfrak{H}}_z),$$

d.h., nach ($\mathrm{IV}_c$),

$$\text{div } \mathfrak{H} = \text{div}' \, \mathfrak{H} + \frac{1}{V^2} \{\mathfrak{p}_x [\text{rot } \mathfrak{E}]_x + \mathfrak{p}_y [\text{rot } \mathfrak{E}]_y + \mathfrak{p}_z [\text{rot } \mathfrak{E}]_z\} =$$

$$= \text{div}' \, \mathfrak{H} - \frac{1}{V^2} \text{div } [\mathfrak{p} . \mathfrak{E}] = \text{div}' \, \mathfrak{H}',$$

sodass sich für ($\mathrm{II}_c$) schreiben lässt

$$\text{div}' \, \mathfrak{H}' = 0. \tag{$\mathrm{II}_d$}$$

Wenden wir uns jetzt der Formel ($\mathrm{III}_c$) zu. In diese sind drei

Gleichungen zusammengefasst, und zwar steht in der ersten derselben links der Ausdruck

$$\frac{\partial \mathfrak{H}'_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}'_y}{\partial z}.$$

Hierfür lässt sich, mit Rücksicht auf (35), schreiben

$$[\mathrm{rot}'\, \mathfrak{H}']_x - \frac{1}{V^2}\left\{\mathfrak{p}_y \frac{\partial \mathfrak{H}'_z}{\partial t'} - \mathfrak{p}_z \frac{\partial \mathfrak{H}'_y}{\partial t'}\right\},$$

und also für die Gleichung selbst

$$[\mathrm{rot}'\, \mathfrak{H}']_x = 4\pi \frac{\partial \mathfrak{D}_x}{\partial t'} + \frac{1}{V^2}\frac{\partial}{\partial t'}\{\mathfrak{p}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{p}_z \mathfrak{H}_y\} = 4\pi \frac{\partial \mathfrak{D}'_x}{\partial t'}.$$

Die beiden anderen Gleichungen lassen eine ähnliche Umformung zu, und es wird demnach

$$\mathrm{rot}'\, \mathfrak{H}' = 4\pi \frac{\partial \mathfrak{D}'}{\partial t'}. \qquad (\mathrm{III}_d)$$

Was ferner die erste der Gleichungen ($\mathrm{IV}_c$) betrifft, so geht diese, da

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} = [\mathrm{rot}'\, \mathfrak{E}]_x - \frac{1}{V^2}\left\{\mathfrak{p}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t'} - \mathfrak{p}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t'}\right\}$$

ist, über in

$$[\mathrm{rot}'\, \mathfrak{E}]_x = -\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t'} + \frac{1}{V^2}\frac{\partial}{\partial t'}\{\mathfrak{p}_y \mathfrak{E}_z - \mathfrak{p}_z \mathfrak{E}_y\} = -\frac{\partial \mathfrak{H}'_x}{\partial t'},$$

sodass ($\mathrm{IV}_c$) gleichbedeutend ist mit

$$\mathrm{rot}'\, \mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{H}'}{\partial t'}. \qquad (\mathrm{IV}_d)$$

Schliesslich folgt aus ($\mathrm{V}_c$)

$$\varkappa_1 \mathfrak{E}_x = 4\pi\, V^2\, \mathfrak{D}'_x,\ \varkappa_2 \mathfrak{E}_y = 4\pi\, V^2\, \mathfrak{D}'_y,\ \varkappa_3 \mathfrak{E}_z = 4\pi\, V^2\, \mathfrak{D}'_z. \qquad (\mathrm{V}_d)$$

§ 58. Um auch in die *Grenzbedingungen* die neuen Variablen einzuführen, fassen wir die Normale $n$ für den betrachteten Punkt ins Auge, und ausserdem zwei zu einander und zu $n$ senkrechte Richtungen $h$ und $k$. Es soll dabei die Richtung $n$ einer Rotation über einen rechten Winkel von $h$ nach $k$ entsprechen. Aus (IX) (§ 56) folgt sodann

$$4\pi\, V^2\, \mathfrak{D}'_n = 4\pi\, V^2\, \mathfrak{D}_n + [\mathfrak{p}.\mathfrak{H}]_n = 4\pi\, V^2\, \mathfrak{D}_n + [\mathfrak{p}.\mathfrak{H}']_n =$$
$$= 4\pi\, V^2\, \mathfrak{D}_n + \mathfrak{p}_h\, \mathfrak{H}'_k - \mathfrak{p}_k\, \mathfrak{H}'_h.$$

Da nun $\mathfrak{D}_n$, $\mathfrak{H}'_k$ und $\mathfrak{H}'_h$ stetig sind, so muss auch $\mathfrak{D}'_n$ es sein.

In ähnlicher Weise schliessen wir aus der Continuität von $\mathfrak{H}_n$, $\mathfrak{E}_h$ und $\mathfrak{E}_k$, mittelst der aus ($\mathrm{VI}_c$) abzuleitenden Beziehung

$$\mathfrak{H}'_n = \mathfrak{H}_n - \frac{1}{V^2}\,[\mathfrak{p}.\mathfrak{E}]_n = \mathfrak{H}_n - \frac{1}{V^2}\,[\mathfrak{p}_h\mathfrak{E}_k - \mathfrak{p}_k\mathfrak{E}_h],$$

auf die Continuität von $\mathfrak{H}'_n$.

Beachtet man auch die übrigen Gleichungen ($\mathrm{VIII}_c$), so erhellt, dass sämmtliche Grenzbedingungen enthalten sind in den Formeln

$$\mathfrak{D}'_{n(1)} = \mathfrak{D}'_{n(2)},\ \mathfrak{E}_{h(1)} = \mathfrak{E}_{h(2)},\ \mathfrak{H}'_{(1)} = \mathfrak{H}'_{(2)}, \qquad (\mathrm{VIII}_d)$$

worin jetzt $h$ jede beliebige Richtung in der Grenzfläche sein kann.

§ 59. Die Gleichungen ($\mathrm{I}_d$)—($\mathrm{V}_d$) und ($\mathrm{VIII}_d$) unterscheiden sich von den Gleichungen, welche nach § 52 für ruhende Körper gelten, nur dadurch, dass

$$t',\ \mathfrak{D}' \text{ und } \mathfrak{H}'$$

an die Stelle von

$$t,\ \mathfrak{D} \text{ und } \mathfrak{H}$$

getreten sind.

Diese Uebereinstimmung eröffnet uns einen Weg, Probleme über den Einfluss der Erdbewegung auf die optischen Erscheinungen sehr einfach zu behandeln.

*Ist nämlich für ein System ruhender Körper ein Bewegungszustand bekannt, bei dem*

$$\mathfrak{D}_x,\ \mathfrak{D}_y,\ \mathfrak{D}_z,\ \mathfrak{E}_x,\ \mathfrak{E}_y,\ \mathfrak{E}_z,\ \mathfrak{H}_x,\ \mathfrak{H}_y,\ \mathfrak{H}_z \qquad (69)$$

*gewisse Functionen von $x$, $y$, $z$ und $t$ sind, so kann in demselben System, falls es sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ verschiebt, ein Bewegungszustand bestehen, bei welchem*

$$\mathfrak{D}'_x,\ \mathfrak{D}'_y,\ \mathfrak{D}'_z,\ \mathfrak{E}_x,\ \mathfrak{E}_y,\ \mathfrak{E}_z,\ \mathfrak{H}'_x,\ \mathfrak{H}'_y,\ \mathfrak{H}'_z \qquad (70)$$

*eben dieselben Functionen von $x$, $y$, $z$ und $t'$ [d.h. $t - 1/V^2\,(\mathfrak{p}_x x + \mathfrak{p}_y y + \mathfrak{p}_z z)$] sind.*

Obgleich wir in den vorstehenden Betrachtungen den Coordinatenaxen die Richtungen der Symmetrieaxen gegeben haben, gilt der gefundene Satz für jedes rechtwinklige Coordinatensystem. Man wird das leicht erkennen, wenn man bedenkt, dass sich für die Ortszeit $t'$ auch schreiben lässt

$$t - \frac{\mathfrak{p}_r r}{V^2},$$

wo $r$ die vom Coordinatenursprunge nach dem Punkte $(x, y, z)$ gezogene Linie bedeutet, und dass mithin $t'$ unabhängig von der *Richtung* der Coordinatenaxen ist.

Es mag übrigens daran erinnert werden, dass man bei dem beweglichen System unter $x, y, z$ immer die Coordinaten in Bezug auf Axen, die an der Translation theilnehmen, zu verstehen hat.

Sind die Grössen (70) als Functionen von $x, y, z$ und $t'$, also auch als Functionen von $x, y, z$ und $t$, bekannt geworden, so lassen sich $\mathfrak{D}_x, \mathfrak{D}_y, \mathfrak{D}_z, \mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_z$ aus den Gleichungen (IX) und ($VI_c$) berechnen.

## *Verschiedene Anwendungen*

§ 60. Wir wollen die beiden Bewegungszustände — im ruhenden und im bewegten System von Körpern —, von welchen soeben die Rede war, *correspondirende* Zustände nennen. Es sollen dieselben jetzt eingehender mit einander verglichen werden.

*a.* Sind in dem ruhenden System die Grössen (69) periodische Functionen von $t$ mit der Periode $T$, so haben in dem anderen System die Grössen (70) dieselbe Periode in Bezug auf $t'$, also auch in Bezug auf $t$, wenn man $x, y, z$ constant lässt. Bei der Deutung dieses Ergebnisses ist zu beachten, dass im Falle einer Translation *zwei* Perioden unterschieden werden müssen (vergl. §§ 37 und 38), die man füglich die *absolute* und die *relative* Periode nennen kann. Mit der absoluten hat man es zu thun, wenn man die zeitlichen Veränderungen in einem Punkte betrachtet, der eine feste Lage gegen den Aether hat, mit der relativen dagegen, wenn man einen Punkt ins Auge fasst, der sich mit der ponderablen Materie verschiebt. Das oben Gefundene lässt sich nun folgendermaassen ausdrücken:

*Soll ein Schwingungszustand im bewegten System mit einem Zu-*

*stande im ruhenden System correspondiren, so muss die relative Schwingungsdauer im erstgenannten Falle der Schwingungszeit im zweitgenannten Falle gleichkommen.*

*b.* Es möge in dem ruhenden System an irgend einer Stelle keine Lichtbewegung stattfinden, d.h. es mögen daselbst $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ verschwinden. An der entsprechenden Stelle der bewegten Körper ist alsdann $\mathfrak{D}' = 0$, $\mathfrak{E} = 0$, $\mathfrak{H}' = 0$, somit auch $\mathfrak{D} = 0$, $\mathfrak{H} = 0$, *sodass dort die Lichtbewegung gleichfalls fehlt.*

Es folgt hieraus unmittelbar, *dass eine Fläche, die in einem ruhenden Körper die Begrenzung eines von Licht erfüllten Raumes bildet, dieselbe Bedeutung haben kann, wenn sich der Körper verschiebt.*

In einem ruhenden, homogenen Medium sind z.B. seitlich durch cylindrische Flächen begrenzte Lichtbündel möglich, vorausgesetzt nur, dass die Dimensionen der Querschnitte viel grösser als die Wellenlänge sind. *Nach unserem Satze können auch in einem bewegten System derartige Bündel bestehen.*

Die beschreibenden Linien der erwähnten cylindrischen Flächen nennen wir *Lichtstrahlen*, und im Falle einer Translation: *relative* Lichtstrahlen. Die Cylinder hat man sich nämlich als mit der ponderablen Materie fest verbunden zu denken; dieselben bilden somit die Bahnen für die Fortpflanzung des Lichtes, relativ zu jener Materie.

*c.* Es falle in dem ruhenden System ein cylindrisches Lichtbündel auf eine ebene Grenzfläche und werde dabei gespiegelt und gebrochen, — der Allgemeinheit halber wollen wir sagen: doppelt gebrochen. Die neuen Lichtbündel haben ebenfalls eine cylindrische Begrenzung. Wendet man nun das unter *a* und *b* Gesagte auf den correspondirenden Fall für das bewegte System an, so gelangt man zu dem Satze:

*In dem bewegten System werden relative Lichtstrahlen von der relativen Schwingungsdauer T nach denselben Gesetzen gespiegelt und gebrochen, wie Strahlen von der Schwingungsdauer T im ruhenden System.*

*d.* Es werde im ruhenden System ein beliebig gestalteter, durchsichtiger Körper von einem cylindrischen Lichtbündel getroffen, und es entstehe dadurch irgend eine Interferenz- oder Diffractionserscheinung. *Treten hierbei dunkle Streifen auf, so müssen sich diese bei dem correspondirenden Zustande des bewegten Systems an genau denselben Stellen zeigen.*

Ein extremer Fall einer Diffractionserscheinung ist die Vereinigung alles Lichtes in einem Brennpunkt. *Nach obigem wird durch die Translation nichts geändert an den Gesetzen, nach welchen ein Lichtbündel von bestimmter cylindrischer Begrenzung durch ein Fernrohrobjectiv concentrirt wird.*

*e.* Während bei correspondirenden Zuständen die *seitliche Begrenzung* der Lichtbündel dieselbe ist, haben die *Wellennormalen* verschiedene Richtungen. Gesetzt z.B., dass sich in dem ruhenden System ebene Wellen, deren Normale die Richtung $(b_x, b_y, b_z)$ hat, mit der Geschwindigkeit $W$ fortpflanzen, und dass also hier die Abweichung vom Gleichgewichte eine Function von

$$t - \frac{b_x x + b_y y + b_z z}{W}$$

ist, so treten für das bewegte System ähnliche Functionen von

$$t' - \frac{b_x x + b_y y + b_z z}{W} = t - \left\{ \left( \frac{b_x}{W} + \frac{\mathfrak{p}_x}{V^2} \right) x + \left( \frac{b_y}{W} + \frac{\mathfrak{p}_y}{V^2} \right) y + \right. \\ \left. + \left( \frac{b_z}{W} + \frac{\mathfrak{p}_z}{V^2} \right) z \right\}$$

auf. Die Richtungsconstanten $b'_x, b'_y, b'_z$ der Wellennormale werden also für dieses System bestimmt durch die Bedingung

$$b'_x : b'_y : b'_z = \left( b_x + \frac{W\mathfrak{p}_x}{V^2} \right) : \left( b_y + \frac{W\mathfrak{p}_y}{V^2} \right) : \left( b_z + \frac{W\mathfrak{p}_z}{V^2} \right),$$

oder, falls es sich um eine Fortpflanzung im reinen Aether handelt, durch

$$b'_x : b'_y : b'_z = \left( b_x + \frac{\mathfrak{p}_x}{V} \right) : \left( b_y + \frac{\mathfrak{p}_y}{V} \right) : \left( b_z + \frac{\mathfrak{p}_z}{V} \right).$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich umgekehrt

$$b_x : b_y : b_z = \left( b'_x - \frac{\mathfrak{p}_x}{V} \right) : \left( b'_y - \frac{\mathfrak{p}_y}{V} \right) : \left( b'_z - \frac{\mathfrak{p}_z}{V} \right). \tag{71}$$

*Die Aberration des Lichtes*

§ 61. Es seien $b'_x, b'_y, b'_z$ die Richtungsconstanten der von einem ruhenden Himmelskörper nach der Erde gezogenen Linie, also auch die Richtungsconstanten der Normale zu den in der Nähe der Erde anlangenden ebene Wellen. Wenn wir dann, um den weiteren Verlauf der Fortpflanzung zu untersuchen, die Lichtbewegung auf ein Coordinatensystem beziehen, das an der Bewegung der Erde theilnimmt, so bleiben natürlich die Richtungsconstanten der Wellennormale $b'_x$, $b'_y$, $b'_z$, während als relative Schwingungsdauer $T'$ (§ 37) die nach dem DOPPLER'schen Gesetze modificirte ins Spiel kommt. Wie wir sahen, wird nun die Bewegung, was die seitliche Begrenzung eines durch ein Diaphragma ausgeschnittenen Lichtbündels, die Concentration durch Linsen, und den Durchgang durch sonstige durchsichtige Körper betrifft, correspondiren mit einer Bewegung in einem ruhenden System, bei der die Schwingungszeit $T'$ ist, und die Normale zu den einfallenden Wellen die durch (71) bestimmten Richtungsconstanten $b_x$, $b_y$, $b_z$ hat.

*Alle Erscheinungen gehen mithin gerade so vor sich, als ob die Erde ruhte, die Schwingungsdauer $T'$ wäre, und der Himmelskörper, von der Erde aus gesehen, sich nicht in der Richtung ($-b'_x$, $-b'_y$, $-b'_z$), sondern in der Richtung ($-b_x$, $-b_y$, $-b_z$) befände.*

In diesem letzteren besteht nun eben die *Aberration*. Dass die Grösse und Richtung, welche wir für dieselbe finden, auch wirklich der bekannten, mit den Beobachtungen übereinstimmenden Regel entsprechen, ergibt sich sofort aus der Gleichung (71). Man erhält nämlich einen Vector von der Richtung ($b_x$, $b_y$, $b_z$), wenn man einen Vector von der Richtung ($b'_x$, $b'_y$, $b'_z$), dessen Länge die Geschwindigkeit des Lichtes darstellt, mit einem zweiten zusammensetzt, welcher der Erdgeschwindigkeit $\mathfrak{p}$ gleich und entgegengesetzt ist.

Uebrigens liegt in unserem Satze auch die Erklärung dafür, dass sich bei der Beobachtung mit Linsensystemen immer die durch die soeben erwähnte Regel bestimmte Aberration herausstellt [1]), ebenso die Erklärung für den bekannten ARAGO'schen

---

[1]) Dass dies auch bei der Beobachtung mit einem Spiegeltelescop der Fall ist, würde ebenfalls ohne weiteres aus unserem Satze folgen, *wenn der Spiegel aus einem durchsichtigen Material bestände.* Was aber die wirklichen, aus *Metall* verfertigten Spiegel betrifft, so kann man bemerken, dass die *Richtung*, in welcher Lichtstrahlen reflectirt werden, und die *Lage des Vereinigungspunktes* nur von der Krümmung, nicht aber von der stofflichen Natur des Spiegels abhängen können. Zur Bestimmung dieser Lage lässt sich auch, wie es von verschiedenen Physikern geschehen ist, das HUYGENS'sche Princip anwenden. (vgl. meine Abhandlung in den Arch. néerl. **21** (Collected Papers, **4**, 153)).

Versuch [1]) mit einem Prisma, und für das von BOSCOVICH vorgeschlagene und von AIRY [2]) ausgeführte Experiment, bei welchem der Tubus eines Fernrohrs mit Wasser gefüllt war.

*Beobachtungen mit Sonnenlicht*

§ 62. Die Bahn der Erde weicht so wenig von einem Kreise ab, dass man, wenn es sich um Sonnenstrahlen handelt, die Geschwindigkeitscomponente $\mathfrak{p}_r$, von welcher die Aenderung der Schwingungszeit abhängt (§ 37), vernachlässigen darf. Versuche mit diesen Strahlen müssen demnach so ausfallen, als ob die Erde ruhte, die Sonne sich in der durch die Aberration veränderten Richtung befände *und dabei Lichtarten von derselben Schwingungsdauer aussendete, wie in Wirklichkeit* [3]).

Hieraus folgt unmittelbar, dass man in der für eine bestimmte FRAUNHOFER'sche Linie gemessenen Ablenkung bei der Brechung in einem Prisma, oder der Diffraction durch ein Gitter, *keinen Einfluss der Erdbewegung* verspüren wird, dass es also keinen Unterschied machen kann, ob die Richtung des auf das Prisma oder das Gitter fallenden Lichtes diesen oder jenen Winkel mit der Translation der Erde bildet. Was die Gitterspectra betrifft, so wurde dieses Resultat durch die sorgfältigen Versuche des Hrn. MASCART [4]) bestätigt. Dieser Physiker hat überdies durch besondere Experimente [5]) nachgewiesen, dass bei den genannten Spectra die Ablenkung für eine bestimmte FRAUNHOFER'sche Linie vollkommen übereinstimmt mit der Ablenkung für die entsprechenden Strahlen einer terrestrischen Lichtquelle [6]).

---

[1]) ARAGO, Œuvres complètes, **1**, 107; BIOT, Traité élémentaire d'astronomie physique, **5**, 364.

[2]) Proc. Royal Soc. **20**, 35, 1871. **21**, 121, 1873.
Phil. Mag. **43**, 310, 1872.

[3]) Wir sehen hier ab von der Rotation der Sonne und den Bewegungen an ihrer Oberfläche, welche bekanntlich eine dem DOPPLER'schen Gesetze entsprechende Verschiebung der Spectrallinien verursachen. Bei den gleich zu erwähnenden Versuchen wurde mit dem Lichte der *ganzen Sonnenscheibe* gearbeitet.

[4]) Ann. de l'école normale, **1**, 166, 190, 1872.

[5]) L.c., 170 und 189.

[6]) Bei den Versuchen mit Sonnenlicht kamen natürlich metallene Spiegel in Anwendung. Man sieht aber leicht ein ,dass dies nichts an unseren Betrachtungen ändert (vgl. die Anm. 1 zu p. 88).

### *Bewegte Lichtquellen*

§ 63. Oben, im § 61, wurde der Himmelskörper als ruhend vorausgesetzt. Indessen gelangt man auch für einen sich bewegenden Körper zu einem einfachen Resultat. Wir wissen bereits (§ 36), dass die Normale zu den die Erde erreichenden Wellen auf den Ort $P$ hinweist, wo sich die Lichtquelle befand in dem Augenblicke, da sie das Licht aussandte. Die Bewegung der Erde bewirkt nun, dass man den Stern nicht an dieser Stelle $P$, sondern in einer anderen Lage $P'$ beobachtet, und zwar lässt sich die Verschiebung von $P$ nach $P'$ aus der gewöhnlichen Regel für die Aberration herleiten. Nach den Betrachtungen des § 61 liegt der Beweis auf der Hand.

Schliesslich zeigt eine einfache Figur, *dass $P'$ mit dem wahren Orte zur Beobachtungszeit zusammenfällt, sobald die Geschwindigkeit der Lichtquelle in Grösse und Richtung mit jener der Erde übereinstimmt.*

### *Versuche mit irdischen Lichtquellen*

§ 64. Aus dem zuletzt gewonnenen Resultate folgt unmittelbar, dass man einen entfernten terrestrischen Gegenstand immer in der Richtung sehen wird, wo er sich wirklich befindet. Wir sahen auch schon, dass bei einer mit der Erde verbundenen Lichtquelle kein Unterschied zwischen der wahren und der beobachteten Schwingungszeit besteht.

*Ueberhaupt wird nach unserer Theorie die Bewegung der Erde nie einen Einfluss erster Ordnung auf Versuche mit terrestrischen Lichtquellen haben.*

Um diesen Satz zu begründen, wollen wir zunächst, unter Anwendung des Superpositionsprincips (§ 7), aus den Formeln des § 33 andere ableiten, welche für ein beliebiges System leuchtender Molecüle gelten. Wir nehmen dabei an, dass diese die gemeinschaftliche Translation $\mathfrak{p}$ haben, und wählen die durch (43) bestimmte Ortszeit $t'$ und die relativen Coordinaten (§ 19) als unabhängige Variablen.

Es seien

$$(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), \quad (\xi_2, \eta_2, \zeta_2), \text{ u.s.w.}$$

die Orte der Molecüle, und

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{m}_{x(1)} = f_1(t'),\ \mathfrak{m}_{y(1)} = g_1(t'),\ \mathfrak{m}_{z(1)} = h_1(t'), \\ \mathfrak{m}_{x(2)} = f_2(t'),\ \mathfrak{m}_{y(2)} = g_2(t'),\ \mathfrak{m}_{z(2)} = h_2(t'), \\ \text{u.s.w.,} \end{array}\right\} \tag{72}$$

oder

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{m}_{x(1)} = f_1\left(t - \frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}\xi_1 - \frac{\mathfrak{p}_y}{V^2}\eta_1 - \frac{\mathfrak{p}_z}{V^2}\zeta_1\right),\ \text{u.s.w.,} \\ \mathfrak{m}_{x(2)} = f_2\left(t - \frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}\xi_2 - \frac{\mathfrak{p}_y}{V^2}\eta_2 - \frac{\mathfrak{p}_z}{V^2}\zeta_2\right),\ \text{u.s.w.,} \\ \text{u.s.w.} \end{array}\right\} \tag{73}$$

die in denselben bestehenden electrischen Momente.

Der Zustand, den ein einzelnes Molecül in dem Punkte $(x, y, z)$ des Aethers hervorruft, wird bestimmt durch die Gleichungen (39) und (40). Die letztere wollen wir, um später den Satz des § 59 bequemer anwenden zu können, noch dadurch umformen, dass wir auch für den Aether die Bezeichnungen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ einführen. Für dieses Medium ist, wie wir wissen, $\mathfrak{D}$ gleichbedeutend mit $\mathfrak{d}$, und also, nach (IX) (§ 56), $4\pi V^2 \mathfrak{D}'$ gleichbedeutend mit

$$4\pi V^2 \mathfrak{d} + [\mathfrak{p}.\mathfrak{H}].$$

Vermöge der Gleichung ($V_b$) dürfen wir also in (40) $\mathfrak{F}$ durch $4\pi V^2 \mathfrak{D}'$ ersetzen.

Bezeichnen wir nun weiter durch $\Sigma$ eine Summe von Gliedern, deren jedes von einem der leuchtenden Molecüle herrührt, so erhalten wir aus (39) und (40) folgende Formeln für den durch die Ionenschwingungen (72) in dem Aether hervorgerufenen Zustand:

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{H}'_x = \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)'\left\{\Sigma\left(\frac{\mathfrak{m}_z}{r}\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial t'}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)'\left\{\Sigma\left(\frac{\mathfrak{m}_y}{r}\right)\right\},\ \text{u.s.w.,} \\ 4\pi\mathfrak{D}'_x = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)' - \Delta'\left\{\Sigma\left(\frac{\mathfrak{m}_x}{r}\right)\right\},\ \text{u.s.w.,} \\ S = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)'\left\{\Sigma\left(\frac{\mathfrak{m}_x}{r}\right)\right\} + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)'\left\{\Sigma\left(\frac{\mathfrak{m}_y}{r}\right)\right\} + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)'\left\{\Sigma\left(\frac{\mathfrak{m}_z}{r}\right)\right\}. \end{array}\right\} \tag{74}$$

Hierin bedeutet $r$ die Entfernung des Punktes $(x, y, z)$ von dem Orte $(\xi, \eta, \zeta)$ eines der leuchtenden Molecüle, während $\mathfrak{m}_x, \mathfrak{m}_y, \mathfrak{m}_z$ die Momente dieses Molecüls zur Ortszeit $t' - r/V$ darstellen. Die beiden ersten Glieder der Summe

$$\Sigma\left(\frac{\mathfrak{m}_x}{r}\right)$$

sind z.B.

$$\frac{1}{r_1} f_1\left(t' - \frac{r_1}{V}\right) \text{und} \frac{1}{r_2} f_2\left(t' - \frac{r_2}{V}\right),$$

wenn $r_1$ und $r_2$ die Abstände zwischen $(x, y, z)$ und den beiden ersten Molecülen sind.

§ 65. Aus den vorstehenden Formeln ergeben sich sofort andere, welche für eine *ruhende* Lichtquelle gelten, wenn man einfach alle Accente streicht. Bestehen in diesem Fall in den leuchtenden Molecülen die Momente

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{m}_{x(1)} = f_1(t),\ \mathfrak{m}_{y(1)} = g_1(t),\ \mathfrak{m}_{z(1)} = h_1(t), \\ \mathfrak{m}_{x(2)} = f_2(t),\ \mathfrak{m}_{y(2)} = g_2(t),\ \mathfrak{m}_{z(2)} = h_2(t), \\ \text{u.s.w.,} \end{array}\right\} \quad (75)$$

so hat man in dem Aether

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{H}_x = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\Sigma\left(\frac{\mathfrak{m}_z}{r}\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\Sigma\left(\frac{\mathfrak{m}_y}{r}\right)\right\}, \text{ u.s.w.,} \\ 4\pi\,\mathfrak{D}_x = \frac{\partial S}{\partial x} - \Delta\left\{\Sigma\left(\frac{\mathfrak{m}_x}{r}\right)\right\}, \text{ u.s.w.,} \\ S = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\Sigma\left(\frac{\mathfrak{m}_x}{r}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\Sigma\left(\frac{\mathfrak{m}_y}{r}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\Sigma\left(\frac{\mathfrak{m}_z}{r}\right)\right\}, \end{array}\right\} \quad (76)$$

worin jetzt $\mathfrak{m}_x, \mathfrak{m}_y, \mathfrak{m}_z$ die Momente eines Molecüls zur Zeit $t - r/V$ bedeuten, sodass z.B. die zwei ersten Glieder der Summe

$$\Sigma\left(\frac{\mathfrak{m}_x}{r}\right)$$

die Werthe

$$\frac{1}{r_1} f_1\left(t - \frac{r_1}{V}\right) \text{und} \frac{1}{r_2} f_2\left(t - \frac{r_2}{V}\right)$$

haben.

Natürlich sind jetzt $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $x$, $y$, $z$ die auf *ruhende* Axen bezogenen Coordinaten.

§ 66. Es sollen die beiden in den §§ 64 und 65 betrachteten Fälle (*mit* und *ohne* Translation) mit einander verglichen werden. Dabei denken wir uns, dass in den beiden Fällen die räumliche Anordnung der leuchtenden Molecüle dieselbe sei, dass also alle $\xi$, $\eta$, $\zeta$ dieselben Werthe haben; wir nehmen dieses letztere auch für $x$, $y$, $z$ an, was darauf hinauskommt, dass wir den Zustand des Aethers in einem Punkte betrachten, der eine bestimmte Lage in Bezug auf die Lichtquelle hat. Endlich verstehen wir unter $f_1$, $g_1$, $h_1$, $f_2$, u.s.w. in beiden Fällen dieselben Functionszeichen.

Ein Blick auf die Formeln (74) und (76) lässt nun erkennen, dass wir es hier mit *correspondirenden* Zuständen zu thun haben, auf welche der Satz des § 59 anwendbar ist. Fällt also das Licht auf einen undurchsichtigen Schirm mit einer Oeffnung, so wird die Abgrenzung von Licht und Schatten, oder die Lage dunkler Diffractionsstreifen hinter demselben, in beiden Fällen dieselbe sein. Ebenso wenig wird sich ein Unterschied in der räumlichen Vertheilung von Licht und Dunkel zeigen, wenn die Strahlen an einem beliebigen durchsichtigen Körper gespiegelt oder gebrochen werden, eine Linse dieselben concentrirt, oder irgend eine Interferenzerscheinung auftritt. Kurz, alle optischen Versuche werden in beiden Fällen zu genau demselben Ergebniss führen.

Freilich sind die in der Lichtquelle selbst vorhandenen Bewegungen, die diese correspondirenden Zustände hervorbringen, nicht ganz dieselben. In dem einen Falle werden sie durch (73), und in dem anderen Falle durch (75) bestimmt. Setzt man

$$f_1\left(t - \frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}\xi_1 - \frac{\mathfrak{p}_y}{V^2}\eta_1 - \frac{\mathfrak{p}_z}{V^2}\zeta_1\right) = f_1'(t), \text{ u.s.w.},$$

so darf man also auch sagen:

Eine sich verschiebende Lichtquelle, in welcher die durch

$$\left.\begin{array}{c} \mathfrak{m}_{x(1)} = f_1'(t),\ \mathfrak{m}_{y(1)} = g_1'(t),\ \mathfrak{m}_{z(1)} = h_1'(t), \\ \text{u.s.w.} \end{array}\right\} \qquad (77)$$

dargestellten Ionenbewegungen stattfinden, bringt dieselben Erscheinungen hervor, wie eine ruhende Lichtquelle, für welche die Formeln

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{m}_{x(1)} &= f_1'\left(t + \frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}\xi_1 + \frac{\mathfrak{p}_y}{V^2}\eta_1 + \frac{\mathfrak{p}_z}{V^2}\zeta_1\right), \\ \mathfrak{m}_{y(1)} &= g_1'\left(t + \frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}\xi_1 + \frac{\mathfrak{p}_y}{V^2}\eta_1 + \frac{\mathfrak{p}_z}{V^2}\zeta_1\right), \\ &\text{u.s.w.}\end{aligned}\right\} \quad (78)$$

gelten.

Handelt es sich um Schwingungen, so reducirt sich der Unterschied zwischen (77) und (78) auf eine *Veränderung der Phasen,* und zwar wird diese für ein beliebiges Molecül durch

$$\frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}\xi + \frac{\mathfrak{p}_y}{V^2}\eta + \frac{\mathfrak{p}_z}{V^2}\zeta$$

bestimmt, ist demnach *für die verschiedenen Molecüle nicht gleich.*

Es ist nun zu beachten, dass die Molecüle einer Lichtquelle, z.B. einer Flamme, als gänzlich unabhängig von einander betrachtet werden müssen, sodass, wie man es gewöhnlich ausdrückt, die von zweien dieser Theilchen ausgesandten Strahlen nicht mit einander interferiren können. Daraus folgt, dass beliebige Aenderungen in den Phasen der einzelnen Molecüle keinen Einfluss auf die wahrnehmbaren Erscheinungen haben können. Die ruhende Lichtquelle mit den Bewegungen (78) wird nichts anderes ergeben als eine ebenfalls ruhende Quelle mit den Bewegungen (77), und so dürfen wir behaupten:

*Ertheilt man einer Lichtquelle eine Translation, ohne etwas an den Schwingungen ihrer Ionen zu ändern, so bleiben die wahrnehmbaren Erscheinungen in fest mit derselben verbundenen Körpern so, wie sie waren.*

§ 67. Zahlreiche Versuche haben bewiesen, dass bei Benutzung irdischer Lichtquellen die Erscheinungen in der That unabhängig von der Orientirung der Apparate in Bezug auf die Bewegungsrichtung der Erde sind. Es gehören hierher die Beobachtungen von Respighi [1]), Hoek [2]), Ketteler [3]) und Mascart [4]) über die Brechung, ebenso die Experimente der drei zuletzt genannten

[1]) Mem. di Bologna. **2**, 279. (Citirt in Ketteler, Astron. Undulationstheorie, p. 66).
[2]) Astr. Nachr. **73**, 193.
[3]) Astron. Undulationstheorie, p. 66, 1873. Pogg. Ann. **144**, 370, 1872.
[4]) Ann. de l'école normale. **3**, 376, 1874.

Physiker über Interferenzerscheinungen[1]). Hrn. KETTELER verdankt man auch eine Untersuchung über die innere Reflexion und die Refraction bei Kalkspathprismen [2]), und Hrn. MASCART eine Arbeit [3]) über die Interferenzstreifen, die sich bei Kalkspathplatten im polarisirten Lichte zeigen.

*Die Mitführung der Lichtwellen durch die ponderable Materie*

§ 68. In einem ruhenden, isotropen oder anisotropen Körper pflanze sich ein Bündel ebener Wellen fort, bei welchem sich die Componenten von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{H}$ durch Ausdrücke von der Form

$$A \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{b_x x + b_y y + b_z z}{W} + B\right) \tag{79}$$

darstellen lassen; es ist alsdann $W$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Diese Grösse kann von $b_x$, $b_y$, $b_z$ und $T$ abhängen. Nachdem man dem Körper eine Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ ertheilt hat, kann, wie wir sahen (§ 59), in demselben ein Bewegungszustand bestehen, für welchen Ausdrücke wie

$$\mathrm{A} \cos \frac{2\pi}{T}\left(t' - \frac{b_x x + b_y y + b_z z}{W} + B\right),$$

oder

$$A \cos \frac{2\pi}{T}\left\{t - \frac{\mathfrak{p}_x x + \mathfrak{p}_y y + \mathfrak{p}_z z}{V^2} - \frac{b_x x + b_y y + b_z z}{W} + B\right\} \tag{80}$$

gelten. Die Richtungsconstanten $b_x$, $b_y$, $b_z$ der Wellennormale sind jetzt den Grössen

$$\frac{b_x}{W} + \frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}, \ \frac{b_y}{W} + \frac{\mathfrak{p}_y}{V^2}, \ \frac{b_z}{W} + \frac{\mathfrak{p}_z}{V^2}$$

proportional. Setzen wir demgemäss

$$\frac{b_x}{W} + \frac{\mathfrak{p}_x}{V^2} = \frac{b'_x}{W'}, \ \frac{b_y}{W} + \frac{\mathfrak{p}_y}{V^2} = \frac{b'_y}{W'}, \frac{b_z}{W} + \frac{\mathfrak{p}_z}{V^2} = \frac{b'_z}{W'}, \tag{81}$$

---

1) Arch. néerl. **3**, 180, 1868.
Astr. Undulationstheorie, p. 67. Pogg. Ann. **144**, 372, 1872.
Ann. de l'école normale. **3**, 390, 1874.

2) Astr. Undulationstheorie, pp. 158 und 166. Pogg. Ann. **147**, 410 und 419, 1872.

3) Ann. de l'école normale. **1**, 191, 1872.

so wird (80)

$$A \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{b'_x x + b'_y y + b'_z z}{W'} + B\right),$$

woraus man ersieht, dass $W'$ die Geschwindigkeit ist, mit der sich Wellen von der *relativen* Schwingungsdauer $T$ nach der Richtung $(b'_x, b'_y, b'_z)$ in dem bewegten Körper fortpflanzen.

Aus (81) findet man

$$\frac{1}{W'^2} = \frac{1}{W^2} + 2\frac{b_x \mathfrak{p}_x + b_y \mathfrak{p}_y + b_z \mathfrak{p}_z}{W\, V^2},$$

und hierfür lässt sich auch, unter Vernachlässigung von Grössen zweiter Ordnung, schreiben

$$\frac{1}{W'^2} = \frac{1}{W^2} + 2\frac{b'_x \mathfrak{p}_x + b'_y \mathfrak{p}_y + b'_z \mathfrak{p}_z}{W V^2} = \frac{1}{W^2} + 2\frac{\mathfrak{p}_n}{W V^2}.$$

Es ist hier $\mathfrak{p}_n$ die Componente der Geschwindigkeit nach der Richtung der Wellennormale, auf welche sich $W'$ bezieht. Schliesslich wird

$$W' = W - \mathfrak{p}_n \frac{W^2}{V^2}. \tag{82}$$

§ 69. So lange war die Untersuchung allgemein. Es soll jetzt angenommen werden, der Körper sei isotrop. Die Geschwindigkeit $W$ ist dann unabhängig von der Richtung der Wellen, und auch das Verhältniss

$$\frac{V}{W} = N,$$

der absolute Brechungsindex des ruhenden Körpers, hängt nur noch von $T$ ab.

Bei der Deutung der Formel (82), die jetzt übergeht in

$$W' = W - \frac{\mathfrak{p}_n}{N^2}, \tag{83}$$

ist daran zu erinnern, dass wir der Beschreibung der Erscheinungen fortwährend ein Coordinatensystem zu Grunde gelegt haben, das sich mit der ponderablen Materie verschiebt. Es ist also (83) die Geschwindigkeit der Lichtwellen, *relativ zu dieser*

*Materie*. Wünscht man die relative Geschwindigkeit $W''$ *in Beziehung auf den Aether* zu kennen, so hat man die Geschwindigkeit (83), welche die Richtung der Wellennormale hat, zusammenzusetzen mit der in eben diese Richtung fallenden Componente $\mathfrak{p}_n$ der Translationsgeschwindigkeit. Man erhält hierdurch

$$W'' = W + \left(1 - \frac{1}{N^2}\right)\mathfrak{p}_n, \tag{84}$$

was mit der bekannten Annahme FRESNEL's übereinstimmt.

Es möge zu diesem Resultate noch zweierlei bemerkt werden. *Erstens* gilt die gegebene Ableitung für jeden Werth von $T$, also *für jede Lichtart*, und *zweitens* ist das so zu verstehen, dass die Substitution der Werthe von $N$ und $W$, welche in dem ruhenden Körper zu einem bestimmten $T$ gehören, den Werth von $W''$ für die *relative* Schwingungsdauer $T$ liefert [1]).

§ 70. Ist der betrachtete Körper doppelbrechend, so darf nicht vergessen werden, dass sich $W$ und $W'$ in der Gleichung (82) auf *verschiedene* Richtungen der Wellennormale beziehen, nämlich $W$ auf die Richtung $(b_x, b_y, b_z)$, und $W'$ auf die Richtung $(b'_x, b'_y, b'_z)$. Ueber die Frage, wie sich *für eine gegebene Richtung der Wellen* die Geschwindigkeiten im ruhenden und im bewegten Körper von einander unterscheiden, gibt die Gleichung nicht unmittelbar Aufschluss. Zu einem einfachen Satze führt indessen die Einführung der *Lichtstrahlen*.

In einem ruhenden doppelbrechenden Körper gehört zu jeder Richtung der Wellennormale (sobald man eine der beiden möglichen Schwingungsrichtungen gewählt hat) eine bestimmte Richtung für die Lichtstrahlen, d.h. für die beschreibenden Linien einer cylindrischen Grenzfläche eines Lichtbündels. Für die Punkte einer solchen Linie ist nun, wenn $c_x$, $c_y$, $c_z$ die Richtungsconstanten sind, und $s$ die Entfernung von einem festen Punkte $(x_0, y_0, z_0)$ der Linie bedeutet,

$$x = x_0 + c_x s, \quad y = y_0 + c_y s, \quad z = z_0 + c_z s. \tag{85}$$

[1]) Eine Ableitung der Gleichung (84) aus der electromagnetischen Lichttheorie wurde auch von Hrn. R. REIFF publicirt (Wied. Ann. **50**, 361, 1893). Schon lange vor mir hat sich auch Hr. J. J. THOMSON mit dem Gegenstande beschäftigt (Phil. Mag. **9**, 284, 1880; Recent Researches in Electricity and Magnetism, p. 543), ohne jedoch zu dem FRESNEL'schen Coefficienten zu gelangen.

Dadurch verwandelt sich, wenn man

$$\frac{W}{b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z} = U$$

setzt und unter $B'$ eine neue Constante versteht, der Ausdruck (79) in

$$A \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{s}{U} + B'\right).$$

Die Grösse $U$ ist das, was man gewöhnlich die *Geschwindigkeit des Lichtstrahls* nennt.

Geht man jetzt zu der correspondirenden Bewegung in dem fortschreitenden Körper über, so *bleibt* (§ 60, *b*) die betrachtete Linie ein Lichtstrahl, und man erhält zur Bestimmung der Abweichungen vom Gleichgewichte in den verschiedenen Punkten desselben Ausdrücke wie

$$A \cos \frac{2\pi}{T}\left(t' - \frac{s}{U} + B'\right),$$

oder, nach (34) und (85),

$$A \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\mathfrak{p}_s s}{V^2} - \frac{s}{U} + B''\right), \tag{86}$$

worin $\mathfrak{p}_s$ die Componente von $\mathfrak{p}$ in der Richtung des Lichtstrahles ist, während die neue Constante $B''$ den Werth

$$B' - \frac{\mathfrak{p}_x x_0 + \mathfrak{p}_y y_0 + \mathfrak{p}_z z_0}{V^2}$$

hat.

Der Ausdruck (86) geht über in

$$A \cos \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{s}{U'} + B''\right),$$

und es ist mithin $U'$ *die Geschwindigkeit des Lichtstrahls in dem bewegten Körper*, wenn man

$$\frac{1}{U'} = \frac{1}{U} + \frac{\mathfrak{p}_s}{V^2}$$

setzt.

Hieraus folgern wir

$$U' = U - \mathfrak{p}_s \frac{U^2}{V^2}, \tag{87}$$

eine der Gestalt nach mit (82) übereinstimmende Formel, in der sich jetzt $U$ und $U'$ auf *Lichtstrahlen von derselben Richtung* beziehen.

§ 71. Die Formel (84) hat eine schöne Bestätigung gefunden durch die zuerst von Hrn. FIZEAU ausgeführten und später von den Herren MICHELSON und MORLEY [1]) wiederholten Versuche über die Fortpflanzung des Lichtes in strömendem Wasser. Die Anordnung derselben dürfte wohl zur Genüge bekannt sein, sodass wir uns darauf beschränken können, die Ergebnisse noch etwas eingehender, als es gewöhnlich geschieht, mit der Theorie zu vergleichen.

Um die Formel (82) anzuwenden, hat man zunächst aus den Versuchsbedingungen die relative Periode abzuleiten, und sodann aus der Dispersionsformel für ruhendes Wasser den dieser Periode entsprechenden Brechungsexponenten $N$. Der auf diese Weise berechnete Werth von $V/N$ ist dann schliesslich in (82) für $W$ zu substituiren. Was nun aber jene relative Periode betrifft, so ist eine nähere Betrachtung erforderlich.

Bekanntlich kamen bei den Experimenten zwei neben einander liegende, mit Glasplatten verschlossene Röhren in Anwendung, durch welche das Wasser mit derselben Geschwindigkeit, aber in entgegengesetzter Richtung floss; da die zur Ein- und Ausführung des Stromes dienenden Ansatzröhren sich ganz nahe an den Enden befanden, so darf man annehmen, dass an allen Stellen, wenigstens in dem mittleren Theile des Querschnitts, dieselbe Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ bestanden habe [2]). Die beiden Lichtbündel, die mit einander interferiren sollten, durchliefen den Apparat nun so, dass sich das eine in den *beiden* Röhren in der Richtung des Wasserstromes, und das andere stets in entgegengesetzter Richtung fortpflanzte.

Wir fassen jetzt einen festen Punkt $P$ im Innern einer der Röhren ins Auge. Die Bedingungen, unter denen sich das Licht

[1]) Amer. Journal of Science, **31**, 377, 1886.

[2]) In den weiteren Formeln dieses Paragraphen bedeutet $\mathfrak{p}$ einfach die *Grösse* der Geschwindigkeit.

von der Quelle zu diesem Punkte fortpflanzt, bleiben offenbar — wenn der Wasserstrom stationär ist — fortwährend dieselben, und zwar gilt das für die *beiden* Wege, auf welchen die Strahlen den Punkt $P$ erreichen können. Impulse, die mit gewissen Zwischenzeiten von der Quelle ausgehen, werden mit denselben Zwischenzeiten in $P$ anlangen, und wenn $T$ die Schwingungszeit der Lichtquelle ist, so ist dieses auch die *absolute* Schwingungsdauer in $P$.

Daraus folgt dann für die auf das Wasser bezogene *relative* Schwingungsdauer

$$\left(1 \pm \frac{\mathfrak{p}}{W'}\right) T, \tag{88}$$

worin eben $W'$ die gesuchte Geschwindigkeit der Wellen ist, während, wie auch in den weitern Formeln, das obere oder das untere Zeichen anzuwenden ist, je nachdem sich das betrachtete Lichtbündel in der Richtung der Wasserbewegung, oder in der entgegengesetzten fortpflanzt.

Wir vernachlässigen stets Grössen zweiter Ordnung und dürfen somit statt (88) auch setzen

$$\left(1 \pm \frac{\mathfrak{p}}{W}\right) T. \tag{89}$$

Unter dem $W$ in der Gleichung (82) — und auch in diesem Ausdrucke (89) selbst — ist nun der Werth zu verstehen, der in dem ruhenden Körper zu der Periode (89) gehört. Der entsprechende Brechungsexponent ist

$$n \pm \frac{W}{\mathfrak{p}} T \frac{dn}{dT},$$

falls man den Brechungsexponenten für die Periode $T$ durch $n$ bezeichnet; es ist demnach zu substituiren

$$W \frac{V}{n \mp \frac{\mathfrak{p}}{W} T \frac{dn}{dT}} = \frac{V}{n} \mp \frac{\mathfrak{p}}{n^2} \frac{V}{W} T \frac{dn}{dT},$$

oder, wenn man in dem letzten Gliede $W$ durch $V/n$ ersetzt,

$$W = \frac{V}{n} \mp \frac{\mathfrak{p}}{n} T \frac{dn}{dT}.$$

Weiter ist in (82)

$$\mathfrak{p}_n = \pm \mathfrak{p},$$

sodass man findet

$$W' = \frac{V}{n} \mp \frac{\mathfrak{p}}{n^2} \mp \frac{\mathfrak{p}}{n} T \frac{dn}{dT},$$

und für die relative Geschwindigkeit in Bezug auf den Aether, also auch in Bezug auf die Schliessplatten der Röhren,

$$W' = \frac{V}{n} \pm \mathfrak{p}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \mp \frac{\mathfrak{p}}{n} T \frac{dn}{dT}. \qquad (90)$$

§ 72. Die genannten Physiker haben ihre Beobachtungen nicht mit dieser Formel verglichen, sondern mit einer anderen, in der das letzte Glied fehlt; es zeigte sich dabei eine sehr befriedigende Uebereinstimmung. Setzt man nämlich

$$W'' = \frac{V}{n} \pm \mathfrak{p}\varepsilon,$$

so lässt sich der Coefficient $\varepsilon$ aus den Versuchen ableiten. Während nun die Herrn MICHELSON und MORLEY auf diese Weise fanden

$$\varepsilon = 0{,}434,$$

„with a possible error of $\pm$ 0,02", hat $1 - 1/n^2$ für $D$-Licht den Werth 0,438.

Nach unserer Theorie sollte

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} T \frac{dn}{dT}$$

sein, oder, wenn man $n$ als Function der Wellenlänge $\lambda$ in Luft betrachtet,

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n} \lambda \frac{dn}{d\lambda}.$$

Dies wird für die FRAUNHOFER'sche Linie $D$

$$0{,}451.$$

Die Formel (90) entfernt sich also etwas weiter von den Beobachtungen als die einfachere Gleichung

$$W'' = \frac{V}{n} \pm \mathfrak{p}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right); \qquad (91)$$

indessen sind die Beobachtungen wohl nicht so genau gewesen, dass man auf diesen Umstand Gewicht legen dürfte.

Sollte es gelingen, was zwar schwierig, aber nicht unmöglich scheint, experimentell zwischen den Gleichungen (90) und (91) zu entscheiden, und sollte sich dabei die erstere bewähren, so hätte man gleichsam die DOPPLER'sche Veränderung der Schwingungsdauer für eine künstlich erzeugte Geschwindigkeit beobachtet. Es ist ja nur unter Berücksichtigung dieser Veränderung, dass wir die Gleichung (90) abgeleitet haben.

§ 73. Eine wie wichtige Rolle die Formel (84) in der Theorie der Aberration und der damit zusammenhängenden Erscheinungen spielt, braucht hier wohl kaum in Erinnerung gebracht zu werden. FRESNEL gründete seine Erklärung des ARAGO'schen Prismenversuchs auf den Werth $1 - 1/N^2$ des Fortführungscoefficienten. Spätere Forscher haben die Gleichung auf viele andere Fälle angewandt und aus derselben abgeleitet, dass die Bewegung der Erde bei den meisten Versuchen mit irdischen Lichtquellen ohne Einfluss ist, und dass Versuche mit dem Lichte eines Himmelskörpers so ausfallen müssen, als ob die durch die Aberration veränderte Richtung die wirkliche wäre. Wie einfach sich die theoretischen Betrachtungen gestalten, wenn man nicht die Richtung der Wellen, sondern *den Gang der Lichtstrahlen* ins Auge fasst, habe ich, nach dem Beispiele des Hrn. VELTMANN [1]) in meiner Abhandlung vom Jahre 1887 dargethan [2]). Ich beschränkte mich damals auf isotrope Körper, da es mir noch nicht bekannt war, wie das FRESNEL'sche Gesetz für Krystalle zu erweitern sei. Jetzt, da es sich gezeigt hat, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Lichtstrahlen in diesen Körpern dem einfachen, in der Formel (87) ausgedrückten Gesetze gehorchen, ist est leicht nachzuweisen, *dass auch die doppelte Brechung der Strahlen unabhängig von der Erdbewegung ist* [3]). Man kann zu diesem Zwecke von einem einfachen, aus dem HUYGENS'schen Princip folgenden Satz ausgehen, den ich mir erlaube, hier noch kurz anzuführen.

Es seien $A$ und $B$ zwei beliebige, etwa in verschiedenen, an einander grenzenden Medien liegende Punkte. Von dem einen

[1]) Pogg. Ann. **150**, 497, 1873.

[2]) Arch. néerl. **21**, 103, 1887 (Collected Papers, **4**, 153).

[3]) Eine Ableitung dieses Satzes aus der Formel (87) habe ich in den Versl. Akad. Wet. Amsterdam, 149, 1893, publicirt (Collected Papers, **4**, 232).

zum anderen kann im allgemeinen nur eine beschränkte Anzahl von Lichtstrahlen gehen. Bildet man nun für einen solchen Strahl, sowie für andere wenig davon abweichende Wege zwischen $A$ und $B$, das Integral

$$\int \frac{ds}{U},$$

in dem $U$ die Geschwindigkeit für einen dem Linienelemente $ds$ folgenden Lichtstrahl bedeutet, so ist nach dem besagten Satze das Integral für den Lichtstrahl ein Minimum.

Ich will hier jedoch weder auf diese Betrachtungen, noch auf weitere Anwendungen der Formeln (82) und (87) näher eingehen, da wir die Frage nach dem Einfluss der Erdbewegung in verschiedenen Fällen bereits oben in viel einfacherer Weise erledigt haben.

### *Nähere Betrachtung von Lichtbündeln mit ebenen Wellen*

§ 74. In den Anwendungen des allgemeinen, im § 59 gefundenen Satzes habe ich mich immer möglichst kurz gefasst und bin nicht mehr ins einzelne gegangen, als es gerade nothwendig war. Zur weiteren Erläuterung scheint es jedoch angemessen, an einigen Beispielen zu zeigen, wie sich auch alle Einzelheiten der Lichtbewegungen aus jenem Satze ergeben.

Wir betrachten zunächst ein Lichtbündel mit ebenen Wellen, das sich im Aether fortpflanzt, nachdem es durch eine weitere Oeffnung in einem undurchsichtigen, mit der Erde verbundenen Schirme hindurchgegangen ist. Für einen Augenblick sehen wir noch von der Bewegung der Erde ab.

Es seien:

$l, m, n$ die Richtungsconstanten der Wellennormale,

$q$ eine Constante,

$f, g, h$ die Richtungsconstanten der dielectrischen Verschiebung,

$a$ die „Amplitude" dieser letzteren.

Es lässt sich sodann die Lichtbewegung darstellen durch die Gleichungen

$$\mathfrak{d}_x = af \cos \psi, \quad \mathfrak{d}_y = ag \cos \psi, \quad \mathfrak{d}_z = ah \cos \psi, \tag{92}$$

$$\mathfrak{H}_x = 4\pi a V(mh - ng) \cos \psi, \quad \mathfrak{H}_y = 4\pi a V(nf - lh) \cos \psi,$$
$$\mathfrak{H}_z = 4\pi a V(lg - mf) \cos \psi, \quad (93)$$

$$\psi = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{lx + my + nz}{V} + q\right),$$

mit der Bedingung

$$lf + mg + nh = 0. \quad (95)$$

Man sieht leicht, dass diese Werthe allen Bewegungsgleichungen genügen. Die Vectoren $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{H}$ stehen senkrecht auf einander und auf der Wellennormale; die Richtung der Lichtstrahlen (§ 60, *b*) fällt mit letzterer zusammen.

§ 75. Bewegt sich die Erde, so ist nach dem Satze des § 59 ein Zustand möglich, der, auf ein bewegliches Coordinatensystem bezogen, dargestellt wird durch

$$\mathfrak{d}'_x = af \cos \psi', \quad \mathfrak{d}'_y = ag \cos \psi', \quad \mathfrak{d}'_z = ah \cos \psi', \quad (96)$$

$$\mathfrak{H}'_x = 4\pi a V(mh - ng) \cos \psi', \quad \mathfrak{H}'_y = 4\pi a V(nf - lh) \cos \psi',$$
$$\mathfrak{H}'_z = 4\pi a V(lg - mf) \cos \psi', \quad (97)$$

$$\psi' = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\mathfrak{p}_x x + \mathfrak{p}_y y + \mathfrak{p}_z z}{V^2} - \frac{lx + my + nz}{V} + q\right). \quad (98)$$

Unter $\mathfrak{d}'$ ist hier der durch (IX) (§ 56) definirte Vector $\mathfrak{D}'$ für den reinen Aether zu verstehen.

Während die Lichtstrahlen, welche die seitliche Begrenzung des Bündels bestimmen, noch immer die Richtung $(l, m, n)$ haben, weicht die Wellennormale von derselben ab. Ihre Richtungsconstanten $l', m', n'$ genügen, wie man aus (98) ersieht, den Bedingungen

$$l' : m' : n' = \left(l + \frac{\mathfrak{p}_x}{V}\right) : \left(m + \frac{\mathfrak{p}_y}{V}\right) : \left(n + \frac{\mathfrak{p}_z}{V}\right).$$

Wir werden wieder alle Grössen zweiter Ordnung vernachlässigen. Dann wird, indem wir die Componente von $\mathfrak{p}$ in der Richtung der Strahlen durch $\mathfrak{p}_s$ bezeichnen,

$$l'\left(1 + \frac{\mathfrak{p}_s}{V}\right) = l + \frac{\mathfrak{p}_x}{V}, \text{ u.s.w.}, \quad (99)$$

wodurch sich (98) verwandelt in

$$\psi' = \frac{2\pi}{T}\left\{t - \left(1 + \frac{\mathfrak{p}_s}{V}\right)\frac{l'x + m'y + n'z}{V} + q\right\}.$$

Während jetzt $T$ die *relative* Schwingungsdauer ist, findet man für die *absolute* (§§ 60 und 37)

$$T' = T\left(1 - \frac{\mathfrak{p}_s}{V}\right).$$

Zur Bestimmung von $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{H}$ können die Formeln (IX) (§ 56) und ($VI_b$) (§ 20) dienen, welche wir durch

$$4\pi V^2\mathfrak{d} = 4\pi V^2\mathfrak{d}' - [\mathfrak{p}.\mathfrak{H}']$$

und

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' + 4\pi[\mathfrak{p}.\mathfrak{d}']$$

ersetzen dürfen.

Es ergibt sich

$$\mathfrak{d}_x = a\left\{f - \frac{\mathfrak{p}_y}{V}(lg - mf) + \frac{\mathfrak{p}_z}{V}(nf - lh)\right\}\cos\psi', \text{u.s.w.}, \quad (100)$$

$$\mathfrak{H}_x = 4\pi a\{V(mh - ng) + (\mathfrak{p}_y h - \mathfrak{p}_z g)\}\cos\psi', \text{u.s.w.}, \quad (101)$$

oder, wenn man nach (99)

$$\frac{\mathfrak{p}_x}{V} = l'\left(1 + \frac{\mathfrak{p}_s}{V}\right) - l, \text{ u.s.w.}$$

setzt und (95) berücksichtigt,

$$\mathfrak{d}_x = a\left(1 + \frac{\mathfrak{p}_s}{V}\right)\{-m'(lg - mf) + n'(nf - lh)\}\cos\psi', \text{u.sw.}, \quad (102)$$

$$\mathfrak{H}_x = 4\pi a\,V\left(1 + \frac{\mathfrak{p}_s}{V}\right)(m'h - n'g)\cos\psi', \text{ u.s.w.}$$

Man ersieht hieraus, das $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{H}$ beide senkrecht zur Wellennormale stehen, wie es auch nicht anders zu erwarten war. Ueberdieś stehen die beiden Vectoren senkrecht auf einander, was man am einfachsten erkennt, wenn man (100) durch

$$\mathfrak{d}_x = a\left\{f - \frac{\mathfrak{p}_y}{V}(l'g - m'f) + \frac{\mathfrak{p}_z}{V}(n'f - l'h)\right\}\cos\psi', \text{ u.s.w.}$$

ersetzt.

Wir können nun weiter schliessen, dass der in dem POYNTING'-schen Theorem vorkommende Vector $[\mathfrak{d}.\mathfrak{H}]$ mit der Wellennormale zusammenfällt. Man überzeugt sich leicht, dass er die Richtung hat, in der die Wellen sich fortpflanzen, und findet für seine Grösse

$$4\pi a^2(V + 2\mathfrak{p}_s) \cos^2 \psi'.$$

Der Energiestrom durch eine den Wellen parallele Ebene beträgt also für die Flächen- und Zeiteinheit

$$4\pi a^2 V^2(V + 2\mathfrak{p}_s) \cos^2 \psi'. \tag{103}$$

§ 76. Aus einem Lichtbündel wie dem oben betrachteten können durch Brechung oder Spiegelung an ebenen Grenzflächen andere derselben Art entstehen. Wir betrachten hier nur solche, die sich wiederum im Aether fortpflanzen, und stellen für den Fall, dass die Erde ruht, eines der Bündel, welche aus der im § 74 betrachteten einfallenden Bewegung hervorgehen, durch folgende Formeln dar

$$\mathfrak{d}_{x(1)} = a_1 f_1 \cos \psi_1, \quad \mathfrak{d}_{y(1)} = a_1 g_1 \cos \psi_1, \quad \mathfrak{d}_{z(1)} = a_1 h_1 \cos \psi_1,$$

$$\mathfrak{H}_{x(1)} = 4\pi a_1 V(m_1 h_1 - n_1 g_1) \cos \psi_1, \quad \text{u.s.w.},$$

$$\psi_1 = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{l_1 x + m_1 y + n_1 z}{V} + q_1\right).$$

§ 77. Mit dieser Bewegung wird nun diejenige correspondiren, welche, falls die Erde mitsammt dem reflectirenden oder brechenden Körper sich bewegt, aus dem durch (96)—(98) dargestellten Lichte hervorgeht. Für diesen neuen Bewegungszustand dürfen wir mithin schreiben

$$\mathfrak{d}'_{x(1)} = a_1 f_1 \cos \psi'_1, \quad \mathfrak{d}'_{y(1)} = a_1 g_1 \cos \psi'_1, \quad \mathfrak{d}'_{z(1)} = a_1 h_1 \cos \psi'_1,$$

$$\mathfrak{H}'_{x(1)} = 4\pi a_1 V(m_1 h_1 - n_1 g_1) \cos \psi'_1, \quad \text{u.s.w.},$$

$$\psi'_1 = \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\mathfrak{p}_x x + \mathfrak{p}_y y + \mathfrak{p}_z z}{V^2} - \frac{l_1 x + m_1 y + n_1 z}{V} + q_1\right),$$

woraus dann wieder folgt — vergl. (100) und (101) —

$$\mathfrak{d}_{x(1)} = a_1 \left\{f_1 - \frac{\mathfrak{p}_y}{V}(l_1 g_1 - m_1 f_1) + \frac{\mathfrak{p}_z}{V}(n_1 f_1 - l_1 h_1)\right\} \cos \psi'_1, \text{ u.s.w.},$$

$$\mathfrak{H}_{x(1)} = 4\pi a_1 \{V(m_1 h_1 - n_1 g_1) + (\mathfrak{p}_y h_1 - \mathfrak{p}_z g_1)\} \cos \psi'_1, \text{ u.s.w.}$$

In diesen Gleichungen bestimmen $l_1$, $m_1$, $n_1$ die Richtung der Strahlen, die wir auch durch $s_1$ bezeichnen wollen.

§ 78. Bei der Spiegelung oder Brechung wird nun im allgemeinen die *absolute* Periode geändert, während, wie sich fast von selbst versteht und auch in unseren Formeln ausgedrückt wird, die *relative* Periode für alle in Betracht kommenden Lichtbündel dieselbe ist. Die absolute Periode der einfallenden Bewegung ist (§ 75)

$$T\left(1 - \frac{\mathfrak{p}_s}{V}\right).$$

Desgleichen wird dieselbe für das im vorhergehenden Paragraphen betrachtete Bündel

$$T\left(1 - \frac{\mathfrak{p}_{s1}}{V}\right).$$

Sie hat sich mithin im Verhältniss von

$$1 \text{ zu } 1 + \frac{\mathfrak{p}_s - \mathfrak{p}_{s1}}{V}$$

geändert.

Fallen z.B. Strahlen senkrecht auf eine Platte, die in der Richtung ihrer Normale mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ zurückweicht, so ist für das einfallende Licht $\mathfrak{p}_s = \mathfrak{p}$, und für das reflectirte $\mathfrak{p}_{s1} = -\mathfrak{p}$. Die Veränderung der absoluten Schwingungsdauer bei der Reflexion wird sonach durch die Verhältnisszahl $1 + 2\mathfrak{p}/V$ bestimmt.

Auch in dem Verhältniss zwischen den Amplituden des einfallenden und des gespiegelten oder gebrochenen Lichtes zeigt sich ein Einfluss der Erdbewegung. Die Amplitude der dielectrischen Verschiebung $\mathfrak{d}$ ist nämlich bei den in den §§ 74, 75, 76 und 77 betrachteten Bewegungszuständen

$$a, \quad a\left(1 + \frac{\mathfrak{p}_s}{V}\right), \quad a_1, \quad a_1\left(1 + \frac{\mathfrak{p}_{s1}}{V}\right).$$

Das soeben erwähnte Verhältniss ist

$$\frac{a_1}{a},$$

falls die Erde ruht, und

$$\frac{a_1}{a}\left(1+\frac{\mathfrak{p}_{s1}-\mathfrak{p}_s}{V}\right),$$

wenn sie sich bewegt.

In dem oben behandelten Fall, dass die Strahlen senkrecht auf eine zurückweichende Platte fallen, wird der letztere Ausdruck

$$\frac{a_1}{a}\left(1-\frac{2\mathfrak{p}}{V}\right);$$

das reflectirte Licht wird also durch die Bewegung der Platte geschwächt. Natürlich würde die entgegengesetzte Bewegung es verstärken.

Es entsteht nun die wichtige Frage, ob diese Intensitätsveränderungen mit dem Gesetze von der Erhaltung der Energie verträglich sind. Um hierüber zu entscheiden, hat man zu berücksichtigen, das der Aether, infolge der Lichtbewegung, mit gewissen Kräften auf den spiegelnden oder brechenden Körper wirkt (§ 17), und dass die Kräfte eine Arbeit leisten, sobald sich der Körper mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ verschiebt.

Man denke sich nun einen durchsichtigen, von ebenen Flächen begrenzten und rings vom Aether umgebenen Körper $K$, auf den ein System ebener Wellen fällt, und von dem also wieder reflectirte und gebrochene Lichtbündel ausgehen. Man lege um denselben eine *feststehende*, geschlossene Fläche $\sigma$, und berechne für ein Zeitintervall, das der *relativen* Periode $T$ gleich ist,

1°. die Energiemenge $A$, die durch $\sigma$ mehr ein- als auswandert,

2°. den Zuwachs $B$ der innerhalb der Fläche befindlichen electrischen Energie, und

3°. die Arbeit $C$ der obengenannten Kräfte.

Zur Vereinfachung nehme man dabei an, dass die Amplituden constant seien, und dass der Körper fortwährend in derselben Weise von den Strahlen getroffen werde, was der Fall ist, wenn die Lichtquelle, oder das zur Abgrenzung eines Bündels Sonnenlicht dienende Diaphragma an der Translation von $K$ theilnimmt. Nach Ablauf der Zeit $T$ hat dann die Energie in diesem Körper selbst wieder den anfänglichen Werth, und es würde sich sogar die in $\sigma$ enthaltene Energie gar nicht geändert haben, wenn sich auch die Fläche mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ verschoben hätte.

Bei der Berechnung von $B$ kommt demnach nur die Energie in gewissen, in der unmittelbaren Nähe von $\sigma$ liegenden Raumtheilen in Betracht.

Man wird schliesslich finden

$$A = B + C, \tag{104}$$

womit dann bewiesen ist, dass wir bei unseren Entwicklungen immer mit dem Energiegesetze in Uebereinstimmung geblieben sind.

Ich will mich mit der Verification der Gleichung (104) jedoch nicht aufhalten, da es vorzuziehen sein dürfte, die Frage allgemeiner zu behandeln.

*Die Erhaltung der Energie in einem allgemeineren Falle*

§ 79. Ein beliebiger durchsichtiger Körper $K$ werde von einer homogenen Lichtbewegung, deren Intensität constant bleibt, getroffen; in dem Körper und in dem Aether in dessen Nähe entsteht dann eine bestimmte Bewegung.

Dabei sind, wenn zunächst die Erde als ruhend gedacht wird, die Componenten von $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{H}$ im Aether gewisse Functionen von $x, y, z, t$, und zwar, was die letzte Variable betrifft, goniometrische Functionen mit der Periode $T$. Während einer vollen Periode, etwa in dem Zeitintervall von $t_0 - T$ bis $t_0$, müssen gleiche Quantitäten Energie durch eine beliebige, den Körper umschliessende Fläche $\sigma$ aus- und einwandern, was sich nach dem POYNTING-schen Theorem ausdrücken lässt durch

$$\int_{t_0-T}^{t_0} dt \int [\mathfrak{d} . \mathfrak{H}]_n \, d\sigma = 0. \tag{105}$$

Indem wir annehmen, dass diese Bedingung erfüllt sei, wollen wir zeigen, dass auch der mit dem obigen correspondirende Bewegungszustand, der im Falle einer Translation $\mathfrak{p}$ bestehen kann, dem Energiegesetze genügt.

Ersetzt man in den Functionen, welche bei ruhender Erde für $\mathfrak{d}_x$, $\mathfrak{H}_x$, u.s.w. gelten, die Zeit $t$ durch die „Ortszeit" $t'$ (§ 31) und versteht in jenen Functionen unter $x, y, z$ die Coordinaten in Bezug auf ein bewegliches System, so erhält man die Werthe von $\mathfrak{d}'_x$, $\mathfrak{H}'_x$, u.s.w. für den neuen Zustand. Aus (105) folgt also unmittelbar, dass

$$\int\limits_{t_0-T}^{t_0} dt \int [\mathfrak{d}'.\mathfrak{H}']_n \, d\sigma = 0 \tag{106}$$

ist, vorausgesetzt, dass man für $\sigma$ eine Fläche wählt, die an der Bewegung des Körpers theilnimmt.

§ 80. Es soll nun aber die Wanderung der Energie durch eine *feststehende* Fläche $\sigma$ betrachtet werden. Der auf die Einheit derselben bezogene Energiestrom ist

$$V^2[\mathfrak{d}.\mathfrak{H}]_n,$$

oder, wie man aus den Formeln (IX) und ($VI_b$) (§§ 56 und 20), unter fortwährender Vernachlässigung der Grössen zweiter Ordnung, findet

$$V^2[\mathfrak{d}'.\mathfrak{H}']_n + 4\pi V^2 \{\mathfrak{p}_n \mathfrak{d}^2 - \mathfrak{d}_n(\mathfrak{p}_x\mathfrak{d}_x + \mathfrak{p}_y\mathfrak{d}_y + \mathfrak{p}_z\mathfrak{d}_z)\} +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\{\mathfrak{p}_n\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{H}_n(\mathfrak{p}_x\mathfrak{H}_x + \mathfrak{p}_y\mathfrak{H}_y + \mathfrak{p}_z\mathfrak{H}_z)\}. \tag{107}$$

Wollen wir hieraus die Energie berechnen, welche zwischen den Zeiten $t_0 - T$ und $t_0$ mehr aus- als einströmt, so haben wir zunächst über die Fläche $\sigma$, und sodann, indem wir letztere festhalten, nach der Zeit zu integriren. Was die beiden letzten Glieder betrifft, so könnte man freilich ebenso gut an eine Fläche denken, die mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ fortschreitet.

§ 81. Um auch die Integration des ersten Gliedes in der Weise einzurichten, dass man es dabei mit einer solchen beweglichen Fläche zu thun hat, setzen wir zunächst für den Zuwachs, den das Integral $V^2\int[\mathfrak{d}'.\mathfrak{H}']_n \, d\sigma$, bei bestimmtem $t$, erleidet, wenn man die Fläche $\sigma$ in der Richtung von $\mathfrak{p}$ um die unendlich kleine Strecke $\varepsilon$ verschiebt, das Zeichen

$$\chi\varepsilon,$$

worin natürlich $\chi$ eine ganz bestimmte Function von $t$ ist. Wir denken uns weiter eine Fläche $\sigma_0$, welche zur Zeit $t_0$ mit $\sigma$ zusammenfällt, aber mit der Erde verbunden ist. Zur Zeit $t$ hat dann die „Entfernung" von $\sigma_0$ und $\sigma$ den Werth $\mathfrak{p}\ (t_0 - t)$, der als unendlich klein zu betrachten ist, und beträgt unser Integral für die feststehende Fläche $\sigma$

$$\mathfrak{p}\chi(t_0 - t)$$

mehr als für $\sigma_0$. Das Zeitintegral, um das es sich schliesslich handelt, ist also um

$$\mathfrak{p} \int\limits_{t_0-T}^{t_0} \chi(t_0 - t)\, dt \tag{108}$$

grösser als das für $\sigma_0$ genommene Zeitintegral, und, da letzteres nach (106) verschwindet, hat man es nur mit dem Werth (108) zu thun.

Uebrigens braucht man hier in $\chi$ die Grössen mit $\mathfrak{p}$ nicht zu berücksichtigen und darf also, da bei dieser Vernachlässigung

$$V^2 \int [\mathfrak{d}' \,.\, \mathfrak{H}']_n\, d\sigma$$

der Energiestrom ist, unter

$$\chi\varepsilon$$

die für die Zeiteinheit, und unter

$$\chi\varepsilon dt$$

die für das Element $dt$ berechnete Differenz der Energieströme durch zwei festliegende, um die Strecke $\varepsilon$ von einander entfernte Flächen verstehen.

Es soll nun $Q\varepsilon$ die Energie sein, die, zur Zeit $t$, von unserer Fläche $\sigma$ in ihrer feststehenden Lage mehr umschlossen wird, als wenn diese Fläche um $\varepsilon$ in der Richtung von $\mathfrak{p}$ verschoben wäre; man erkennt dann sofort, dass

$$\chi\varepsilon dt = \frac{dQ}{dt}\, \varepsilon dt,$$

$$\chi = \frac{dQ}{dt}$$

sein muss.

Hierdurch, und weiter durch partielle Integration, verwandelt sich (108) in

$$\mathfrak{p} \int\limits_{t_0-T}^{t_0} \frac{dQ}{dt}\, (t_0 - t) dt = -\, \mathfrak{p} T Q_{t=t_0-T} + \mathfrak{p} \int\limits_{t_0-T}^{t_0} Q dt,$$

oder

$$-\, \mathfrak{p} T Q_{t=t_0} + \mathfrak{p} \int\limits_{t_0-T}^{t_0} Q dt,$$

da, bis auf Grössen von der Ordnung $\mathfrak{p}$, $Q$ nach Ablauf der Zeit $T$ wieder den anfänglichen Werth hat.

§ 82. Bis jetzt war nur vom ersten Gliede in (107) die Rede. Bezeichnen wir die beiden anderen Glieder durch $A$, so haben wir in

$$-\mathfrak{p}TQ_{t=t_0}+\mathfrak{p}\int_{t_0-T}^{t_0}Qdt+\int_{t_0-T}^{t_0}dt\int Ad\sigma$$

den vollständigen Werth der durch $\sigma$ nach aussen gewanderten Energie. Addiren wir dann dazu die Vermehrung der Energie im Innern von $\sigma$, und die Arbeit der Kräfte, mit welchen der Aether auf den ponderablen Körper wirkt, so müssen wir, soll sich das Energiegesetz bewähren, offenbar Null erhalten.

Die Zunahme der Energie in einer vollen Periode $T$ wäre Null, wenn sich die Fläche $\sigma$ mit dem Körper $K$ über die Strecke $\mathfrak{p}\,T$ verschoben und dabei etwa die Lage $\sigma''$ angenommen hätte; sie besteht also factisch in der Energiemenge, welche, zur Zeit $t_0$, in $\sigma$ mehr enthalten ist als in $\sigma''$. Diese ist nun, wie aus der für $Q\varepsilon$ gegebenen Definition hervorgeht, gerade

$$\mathfrak{p}TQ_{t=t_0}.$$

Die obenerwähnte Arbeit lässt sich, wie wir sogleich sehen werden, darstellen durch einen Ausdruck von der Form

$$\int_{t_0-T}^{t_0}dt\int Sd\sigma;$$

das Energiegesetz erfordert also, dass

$$\mathfrak{p}\int_{t_0-T}^{t_0}Qdt+\int_{t_0-T}^{t_0}dt\int Ad\sigma+\int_{t_0-T}^{t_0}dt\int Sd\sigma=0$$

sei.

Gelingt es nun noch, $Q$ darzustellen als ein Integral über $\sigma$, etwa in der Form

$$Q=\int qd\sigma,$$

und zu zeigen, dass

$$\mathfrak{p}q+A+S=0 \tag{109}$$

ist, so haben wir unser Ziel erreicht.

§ 83. Aus der für $Q\varepsilon$ gegebenen Definition leiten wir ab, dass unter $q\varepsilon d\sigma$ der Energieinhalt des Raumes zu verstehen ist, den das Element $d\sigma$ bei der Verschiebung $\varepsilon$ durchläuft, und zwar hat man, je nachdem die Verschiebung nach der Innen-, oder der Aussenseite von $\sigma$ stattfindet, das positive, oder das negative Vorzeichen anzuwenden. Man hat also

$$q\varepsilon d\sigma = -\varepsilon \cos(\mathfrak{p}, n)\left(2\pi V^2 \mathfrak{d}^2 + \frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2\right)d\sigma,$$

und

$$\mathfrak{p}q = -\mathfrak{p}_n\left(2\pi V^2 \mathfrak{d}^2 + \frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}^2\right).$$

Was zweitens die Arbeit betrifft, so brauchen wir uns um das letzte Glied in der Gleichung (15) und den analogen Formeln nicht zu kümmern [1]). Nur die „Spannungen" kommen in Betracht, und es ist

$$Sd\sigma dt$$

die Arbeit der auf $d\sigma$ entfallenden Spannung. Die Componenten dieser Spannung sind

$$\left\{2\pi V^2(2\mathfrak{d}_x \mathfrak{d}_n - \alpha\mathfrak{d}^2) + \frac{1}{8\pi}(2\mathfrak{H}_x \mathfrak{H}_n - \alpha\mathfrak{H}^2)\right\}d\sigma, \quad \text{u.s.w.},$$

woraus folgt

$$S = 2\pi V^2\{2\mathfrak{d}_n(\mathfrak{p}_x\mathfrak{d}_x + \mathfrak{p}_y\mathfrak{d}_y + \mathfrak{p}_z\mathfrak{d}_z) - \mathfrak{p}_n\mathfrak{d}^2\} +$$
$$+ \frac{1}{8\pi}\{2\mathfrak{H}_n(\mathfrak{p}_x\mathfrak{H}_x + \mathfrak{p}_y\mathfrak{H}_y + \mathfrak{p}_z\mathfrak{H}_z) - \mathfrak{p}_n\mathfrak{H}^2\}.$$

Schliesslich bedeutet $A$ die Summe der beiden letzten Glieder in (107).

Die angegebenen Werthe genügen nun wirklich der Bedingung (109).

---

[1]) Um nämlich die Arbeit zu berechnen, kann man den Weg $\mathfrak{p}\,T$ mit dem Mittelwerthe der in seiner Richtung wirkenden Kraft multipliciren. Dieser Mittelwerth wäre für das letzte Glied in (15) Null, wenn sich die Fläche $\sigma$ mit dem Körper verschöbe, woraus folgt, dass er in Wirklichkeit eine Grösse von der Ordnung $\mathfrak{p}$ ist.

ABSCHNITT VI

## VERSUCHE, DEREN ERGEBNISSE SICH NICHT OHNE WEITERES ERKLÄREN LASSEN

### *Die Drehung der Polarisationsebene*

§ 84. Als Bewegungsgleichungen des Lichtes für einen isotropen Körper, der *nicht* dieselben Eigenschaften hat, wie sein Spiegelbild, haben wir nach den Betrachtungen des vierten Abschnittes anzunehmen:

$$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0, \tag{I$_e$}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0, \tag{II$_e$}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H}' = 4\pi\dot{\mathfrak{D}}, \tag{III$_e$}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{H}}, \tag{IV$_e$}$$

$$\mathfrak{E} = 4\pi V^2 \mathfrak{d} + [\mathfrak{p} . \mathfrak{H}], \tag{V$_e$}$$

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - 4\pi [\mathfrak{p} . \mathfrak{d}], \tag{VI$_e$}$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{d} + \mathfrak{M}, \tag{X}$$

$$\mathfrak{E} = \sigma\mathfrak{M} + j \operatorname{rot} \mathfrak{M} + k [\dot{\mathfrak{M}} . \mathfrak{p}], \tag{XI}$$

worin unter $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ Mittelwerthe zu verstehen sind.

Wir wollen nun voraussetzen, dass die Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ die Richtung der $x$-Axe habe, und die Fortpflanzung von ebenen Wellen untersuchen, deren Normale gleichfalls mit dieser Axe zusammenfällt.

§ 85. Um eine solchen Wellen entsprechende particulare Lösung der Gleichungen zu finden, setzen wir

$$\mathfrak{H}_x = 0, \quad \mathfrak{H}_y = a\, e^{nt-mx}, \quad \mathfrak{H}_z = \nu\mathfrak{H}_y,$$

worin $a$, $\nu$, $n$ und $m$ Constanten sind. Es ist hierdurch bereits die Bedingung (II$_e$) erfüllt.

Der Gleichung ($IV_e$) genügen wir jetzt, indem wir setzen

$$\mathfrak{E}_x = 0, \quad \mathfrak{E}_y = \frac{n}{m}\,\mathfrak{H}_z, \quad \mathfrak{E}_z = -\frac{n}{m}\,\mathfrak{H}_y,$$

und es folgt dann aus ($V_e$), ($VI_e$) und ($III_e$) der Reihe nach

$$\mathfrak{d}_x = 0, \quad 4\pi V^2 \mathfrak{d}_y = \left(\frac{n}{m} + \mathfrak{p}_x\right)\mathfrak{H}_z, \quad 4\pi V^2 \mathfrak{d}_z = -\left(\frac{n}{m} + \mathfrak{p}_x\right)\mathfrak{H}_y,$$

$$\mathfrak{H}'_x = 0, \quad \mathfrak{H}'_y = \left(1 - \frac{n}{m}\frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}\right)\mathfrak{H}_y, \quad \mathfrak{H}'_z = \left(1 - \frac{n}{m}\frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}\right)\mathfrak{H}_z.$$

$$\mathfrak{D}_x = 0, \quad 4\pi\,\mathfrak{D}_y = \left(\frac{m}{n} - \frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}\right)\mathfrak{H}_z, \quad 4\pi\,\mathfrak{D}_z = -\left(\frac{m}{n} - \frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}\right)\mathfrak{H}_y,$$

welche letzteren Werthe sich auch mit der Bedingung ($I_e$) vertragen.

Schliesslich leiten wir aus (X) ab

$$\mathfrak{M}_x = 0, \quad 4\pi V^2\,\mathfrak{M}_y = \left(V^2\frac{m}{n} - \frac{n}{m} - 2\mathfrak{p}_x\right)\mathfrak{H}_z,$$

$$4\pi V^2\,\mathfrak{M}_z = -\left(V^2\frac{m}{n} - \frac{n}{m} - 2\mathfrak{p}_x\right)\mathfrak{H}_y,$$

und haben dann nur noch der Bedingung (XI) zu genügen.

Die erste der hierin zusammengefassten Beziehungen ergibt nichts Neues, während die zweite und dritte lauten:

$$\mathfrak{E}_y = \sigma\mathfrak{M}_y - j\frac{\partial\mathfrak{M}_z}{\partial x} + k_z\,\dot{\mathfrak{M}}_z\mathfrak{p}_x, \tag{110}$$

und

$$\mathfrak{E}_z = \sigma\mathfrak{M}_z + j\frac{\partial\mathfrak{M}_y}{\partial x} - k\dot{\mathfrak{M}}_y\,\mathfrak{p}_x \tag{111}$$

Da nun nach den mitgetheilten Formeln

$$\mathfrak{E}_y = -\nu\mathfrak{E}_z \text{ und } \mathfrak{M}_y = -\nu\mathfrak{M}_z$$

ist, so lässt sich für (110) und (111) schreiben

$$\nu(\mathfrak{E}_z - \sigma\mathfrak{M}_z) = j\frac{\partial\mathfrak{M}_z}{\partial x} - k\dot{\mathfrak{M}}_z\,\mathfrak{p}_x,$$

und

$$\mathfrak{E}_z - \sigma \mathfrak{M}_z = -\nu \left( j \frac{\partial \mathfrak{M}_z}{\partial x} - k \dot{\mathfrak{M}}_z \mathfrak{p}_x \right).$$

Zunächst findet man also

$$\nu^2 = -1, \quad \nu = \pm i,$$

und dann weiter

$$4\pi V^2 \frac{n}{m} = \{\sigma \pm i(jm + kn\mathfrak{p}_x)\} \left( V^2 \frac{m}{n} - \frac{n}{m} - 2\mathfrak{p}_x \right). \quad (112)$$

Sind nun $\sigma$, $j$, $k$ und $n$ gegeben, so lässt sich aus dieser Gleichung $m$ bestimmen, und zwar erhält man *zwei* Werthe, je nachdem man das obere, oder das untere Zeichen anwendet.

§ 86. Wir setzen

$$n = in', \quad m = im';$$

die Gleichung (112) verwandelt sich dadurch in

$$4\pi V^2 \frac{n'}{m'} = \{\sigma \mp (jm' + kn'\mathfrak{p}_x)\} \left( V^2 \frac{m'}{n'} - \frac{n'}{m'} - 2\mathfrak{p}_x \right), \quad (113)$$

woraus sich für $m'$ zwei *reelle* Werthe ergeben, die wir durch $m_1'$, und $m_2'$ bezeichnen wollen.

Für $\nu = +i$, $m' = m_1'$, wird nun

$$\mathfrak{H}_y = ae^{i(n't - m'_1 x)}, \quad \mathfrak{H}_z = iae^{i(n't - m'_1 x)},$$

und für $\nu = -i$, $m' = m_2'$,

$$\mathfrak{H}_y = ae^{i(n't - m'_2 x)}, \quad \mathfrak{H}_z = -iae^{i(n't - m'_2 x)}.$$

Nimmt man nun schliesslich die *reellen* Theile, so gelangt man zu folgenden beiden particularen Lösungen

$$\mathfrak{H}_y = a \cos (n't - m_1' x), \quad \mathfrak{H}_z = -a \sin (n't - m_1' x), \quad (114)$$

$$\mathfrak{H}_y = a \cos (n't - m_2' x), \quad \mathfrak{H}_z = a \sin (n't - m_2' x), \quad (115)$$

welche offenbar zwei entgegengesetzt circular polarisirte Lichtbündel mit den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten $n'/m_1'$ und $n'/m_2'$ darstellen.

Die Zusammensetzung dieser Bewegungszustände führt in bekannter Weise zu einem Bündel linear polarisirten Lichtes, dessen

Schwingungsrichtung gedreht wird. Addition der Werthe (114) und (115) ergibt nämlich die Lösung

$$\mathfrak{H}_y = 2a \cos \tfrac{1}{2} (m_1' - m_2')\, x \cos \{n't - \tfrac{1}{2} (m_1' + m_2')\, x\},$$

$$\mathfrak{H}_z = 2a \sin \tfrac{1}{2} (m_1' - m_2')\, x \cos \{n't - \tfrac{1}{2} (m_1' + m_2')\, x\}.$$

Die auf die Längeneinheit bezogene Drehung $\omega$ der Polarisationsebene beträgt demnach

$$\omega = \tfrac{1}{2} (m_1' - m_2').$$

§ 87. Ersetzt man in der Gleichung (113) $\mp j$ durch $\alpha$, und $\mp k\mathfrak{p}_x$ durch $\beta$, so wird

$$4\pi V^2 \frac{n'}{m'} = (\sigma + \alpha m' + \beta n') \left( V^2 \frac{m'}{n'} - \frac{n'}{m'} - 2\mathfrak{p}_x \right).$$

Da die Glieder mit $\alpha$, $\beta$ und $\mathfrak{p}_x$ jedenfalls sehr klein sind, so lässt sich der hieraus folgende Werth von $m'$ durch eine nach den Potenzen von $\alpha$, $\beta$ und $\mathfrak{p}_x$ fortschreitende Reihe darstellen. Das erste, von diesen Grössen unabhängige Glied hat den Werth

$$m_0' = n' \sqrt{\frac{4\pi}{\sigma} + \frac{1}{V^2}},$$

und man findet dann weiter

$$m' = m_0' + \frac{n'}{V^2} \mathfrak{p}_x - \frac{2\pi}{\sigma^2} n'^2 \alpha - \frac{2\pi}{\sigma^2} \frac{n'^3}{m_0'} \beta - \frac{2\pi}{\sigma^2 V^2} \frac{n'^3}{m_0'} \alpha \mathfrak{p}_x +$$
$$+ A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\alpha^2 \mathfrak{p}_x,$$

wo wir die drei letzten Glieder nicht näher berechnet und alle höheren Potenzen von $\alpha$ und $\beta$, sowie alle Glieder, welche $\mathfrak{p}_x^2$ enthalten, vernachlässigt haben. Zu diesen letzteren gehören auch die Glieder mit $\beta^2$ und $\beta\mathfrak{p}_x$, da $\beta = \mp k\mathfrak{p}_x$ ist.

Man erhält nun $m_1'$, oder $m_2'$, je nachdem man $\alpha = -j$, $\beta = -k\mathfrak{p}_x$, oder $\alpha = +j$, $\beta = +k\mathfrak{p}_x$ setzt. Die gesuchte Drehung der Polarisationsebene wird somit

$$\omega = \frac{2\pi}{\sigma^2} n'^2 \left( 1 + \frac{n'}{m_0'} \frac{\mathfrak{p}_x}{V^2} \right) j + \frac{2\pi}{\sigma^2} \frac{n'^3}{m_0'} \mathfrak{p}_x k,$$

oder, wenn man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $n'/m'_0$ durch $W$ bezeichnet,

$$\omega = \frac{2\pi}{\sigma^2} n'^2 \left(1 + \frac{W\mathfrak{p}_x}{V^2}\right) j + \frac{2\pi}{\sigma^2} n'^2 W\mathfrak{p}_x k.$$

Die natürliche Drehung der Polarisationsebene im ruhenden Körper wäre hiernach

$$\frac{2\pi}{\sigma^2} n'^2 j; \tag{116}$$

dürfte man $\sigma$ und $j$ als constant betrachten, so wäre sie, wie aus der Bedeutung von $n'$ hervorgeht, dem Quadrat der Schwingungszeit umgekehrt proportional. Bekanntlich weichen alle Körper mehr oder weniger von diesem Gesetze ab; wir wissen aber schon, dass sich $\sigma$ mit der Schwingungsdauer ändert, und es dürfte $j$ wohl gleichfalls von derselben abhängen.

Die Translation hat nun nach unserer Gleichung zweierlei Einfluss. Einmal ändert sie die bereits bestehende Drehung in dem Verhältnisse

$$1 + \frac{W\mathfrak{p}_x}{V^2}, \tag{117}$$

und ferner bewirkt sie noch eine Drehung

$$\frac{2\pi}{\sigma^2} n'^2 W\mathfrak{p}_x k. \tag{118}$$

Eine Beziehung zwischen diesem Werthe und (116) vermag die Theorie nicht anzugeben; vielleicht besteht eine solche gar nicht, und können Fälle vorkommen, in denen $j$ sehr klein ist. während $k$ dennoch einen merklichen Werth hat.

Es braucht übrigens wohl kaum bemerkt zu werden, dass die durch (118) dargestellte Erscheinung insofern der magnetischen Drehung der Polarisationsebene ähnlich ist, als auch sie nur durch einen *äusseren* Einfluss, nämlich durch die Translation, entsteht, und am stärksten hervortritt, wenn dieser Einfluss die Richtung der Lichtstrahlen hat.

§ 88. Versuche über die Drehung der Polarisationsebene bei verschiedener Orientirung der Apparate hat meines Wissens nur

Hr. MASCART[1]) vorgenommen. Derselbe vermochte beim Quarz keine Veränderung der Drehung zu constatiren, wenn die Lichtstrahlen einmal die Richtung der Erdbewegung, und zum anderen die entgegengesetzte hatten. Aus den Beobachtungen war zu schliessen, dass die Veränderung jedenfalls nicht den 20 000$^{\text{sten}}$ Theil der Rotation betrug, und dass also bei einer bestimmten Richtung der Lichtstrahlen die Drehung durch die Erdbewegung um weniger als 1/40 000 geändert wurde.

In Ermangelung einer für anisotrope Körper geltenden Theorie dürfen wir vielleicht die oben mitgetheilten Formeln auch auf den Quarz anwenden. Da nun der Brechungsexponent 1,55 ist, und $\mathfrak{p}_x/V = 1/10\,000$, so wird der Werth des zweiten Gliedes in (117) 0,000064. Die hierdurch bedingte Veränderung der Drehung hätte Hrn. MASCART nicht entgehen können, und es ist somit sein negatives Resultat nur durch die Annahme zu erklären, dass, in der Formel für $\omega$, $k$ einen mit $\jmath/V^2$ vergleichbaren Werth und das entgegengesetzte Vorzeichen wie $\jmath$ habe.

Ob nun, für Quarz und andere Körper, die beiden $\mathfrak{p}_x$ enthaltenden Glieder in jener Formel sich völlig aufheben, oder ob am Ende ein nachweisbarer Einfluss der Erdbewegung übrig bleibt, werden weitere Untersuchungen zu entscheiden haben.

### *Der Interferenzversuch* MICHELSON'*s*

§ 89. Wie zuerst von MAXWELL bemerkt wurde und aus einer sehr einfachen Rechnung folgt, muss sich die Zeit, die ein Lichtstrahl braucht, um zwischen zwei Punkten $A$ und $B$ hin und zurück zu gehen, ändern, sobald diese Punkte, ohne den Aether mit sich fortzuführen, eine gemeinschaftliche Verschiebung erleiden. Die Veränderung ist zwar eine Grösse zweiter Ordnung; sie ist jedoch gross genug, um mittelst einer empfindlichen Interferenzmethode nachgewiesen werden zu können.

Der Versuch wurde im Jahre 1881 von Hrn. MICHELSON ausgeführt [2]). Sein Apparat, eine Art Interferentialrefractor, hatte zwei gleich lange, horizontale, zu einander senkrechte Arme $P$ und $Q$, und von den beiden mit einander interferirenden Lichtbündeln ging das eine längs dem Arme $P$ und das andere längs

[1]) Ann. de l'école normale, **1**, 210, 1872.
[2]) Amer. Journal of Science, **22**, 120, 1881.

dem Arme $Q$ hin und zurück. Das ganze Instrument, die Lichtquelle und die Beobachtungsvorrichtung miteinbegriffen, liess sich um eine verticale Axe drehen, und es kommen besonders die beiden Lagen in Betracht, bei denen der Arm $P$, oder der Arm $Q$ so gut wie möglich die Richtung der Erdbewegung hatte. Es wurde nun, auf Grund der FRESNEL'-schen Theorie, eine Verschiebung der Interferenzstreifen bei der Rotation aus der einen jener „Hauptlagen" in die andere erwartet.

Von dieser durch die Aenderung der Fortpflanzungszeiten bedingten Verschiebung — wir wollen dieselbe der Kürze halber die MAXWELL'sche Verschiebung nennen — wurde aber keine Spur gefunden, und so meinte Hr. MICHELSON denn schliessen zu dürfen, dass der Aether bei der Bewegung der Erde nicht in Ruhe bleibe, eine Folgerung freilich, deren Richtigkeit bald in Frage gestellt wurde. Durch ein Versehen hatte nämlich Hr. MICHELSON die nach der Theorie zu erwartende Veränderung der Phasendifferenzen auf das Doppelte des richtigen Werthes veranschlagt; verbessert man diesen Fehler, so gelangt man zu Verschiebungen, die durch Beobachtungsfehler gerade noch verdeckt werden konnten.

In Gemeinschaft mit Hrn. MORLEY hat dann später Hr. MICHELSON die Untersuchung wieder aufgenommen [1]), wobei er, zur Erhöhung der Empfindlichkeit, jedes Lichtbündel durch einige Spiegel hin und her reflectiren liess. Dieser Kunstgriff gewährte denselben Vortheil, als wenn die Arme des früheren Apparates beträchtlich verlängert worden wären. Die Spiegel wurden von einer schweren, auf Quecksilber schwimmenden, und also leicht drehbaren Steinplatte getragen. Im ganzen hatte jetzt jedes Bündel einen Weg von 22 Metern zu durchlaufen, und war nach der FRESNEL'schen Theorie, beim Uebergange von der einen Hauptlage zur anderen, eine Verschiebung von 0,4 der Streifendistanz zu erwarten. Nichtsdestoweniger ergaben sich bei der Rotation nur Verschiebungen von höchstens 0,02 der Streifendistanz; dieselben dürften wohl von Beobachtungsfehlern herrühren.

Darf man nun auf Grund dieses Resultates annehmen, dass der Aether an der Bewegung der Erde theilnehme, und also die STOKES'sche Aberrationstheorie die richtige sei? Die Schwierig-

[1]) Amer. Journal of Science, **34**, 333, 1887; Phil. Mag., **24**, 449, 1887.

keiten, auf welche diese Theorie bei der Erklärung der Aberration stösst, scheinen mir zu gross zu sein, als dass ich dieser Meinung sein könnte, und nicht vielmehr versuchen sollte, den Widerspruch zwischen der FRESNEL'schen Theorie und dem MICHELSON'schen Ergebniss zu beseitigen. In der That gelingt das mittelst einer Hypothese, welche ich schon vor einiger Zeit ausgesprochen habe [1]), und zu der, wie ich später erfahren, auch Hr. FITZGERALD [2]) gelangt ist. Worin dieselbe besteht, soll der nächste § zeigen.

§ 90. Zur Vereinfachung wollen wir annehmen, dass man mit einem Instrumente wie dem bei den ersten Versuchen benutzten arbeite, und dass bei der einen Hauptlage der Arm $P$ genau in die Richtung der Erdbewegung falle. Es sei $\mathfrak{p}$ die Geschwindigkeit dieser Bewegung, und $L$ die Länge jedes Armes, mithin $2L$ der Weg der Lichtstrahlen. Nach der Theorie [3]) bewirkt dann die Translation, dass die Zeit, in der das eine Lichtbündel an $P$ entlang hin und zurück geht, um

$$L \cdot \frac{\mathfrak{p}^2}{V^3}$$

länger ist als die Zeit, in der das andere Bündel seinen Weg vollendet. Eben diese Differenz würde auch bestehen, wenn, ohne dass die Translation einen Einfluss hätte, der Arm $P$ um

$$L \cdot \frac{\mathfrak{p}^2}{2V^2}$$

länger wäre als der Arm $Q$. Aehnliches gilt von der zweiten Hauptlage.

---

[1]) Versl. Akad. Wet. Amsterdam, **1**, 74, 1892–1893 (Collected Papers, **4**, 219).

[2]) Wie Hr. FITZGERALD mir freundlichst mittheilte, hat er seine Hypothese schon seit längerer Zeit in seinen Vorlesungen behandelt. In der Literatur habe ich dieselbe nur bei Hrn. LODGE, in der Abhandlung „Aberration problems" (Phil. Trans, **184**, 727, 1893) erwähnt gefunden.

Ich erlaube mir, hier noch hinzuzufügen, dass diese Abhandlung, ausser manchen theoretischen Betrachtungen, die Beschreibung sehr interessanter Experimente enthält, bei welchen zwei senkrecht auf derselben Axe befestigte Stahlscheiben (Durchmesser 1 Yard) mit grosser Geschwindigkeit rotirt wurden. Mittelst eines gewissen Interferenzverfahrens wurde untersucht, ob der zwischen den Scheiben befindliche Aether mitrotire; das Resultat war negativ, obgleich die Zahl der Umdrehungen in der Secunde auf 20 oder mehr gesteigert wurde. Hr. LODGE schliesst, dass die Scheiben dem Aether nicht den 800sten Theil ihrer Geschwindigkeit mitgetheilt haben.

[3]) Vgl. LORENTZ, Arch. néerl. **21**, 168, 1887 (Collected Papers, **4**, 153).

Wir sehen also, dass die von der Theorie erwarteten Phasendifferenzen auch dadurch entstehen könnten, dass bei der Rotation des Apparates bald der eine, bald der andere Arm die grössere Länge hätte. Daraus folgt, dass dieselben durch entgegengesetzte Veränderungen der Dimensionen compensirt werden können.

Nimmt man an, dass der in der Richtung der Erdbewegung liegende Arm um

$$L \cdot \frac{\mathfrak{p}^2}{2V^2}$$

kürzer sei als der andere, und zugleich die Translation den Einfluss habe, der sich aus der FRESNEL'schen Theorie ergibt, so ist das Resultat des MICHELSON'schen Versuches vollständig erklärt.

Man hätte sich sonach vorzustellen, dass die Bewegung eines festen Körpers, etwa eines Messingstabes, oder der bei den späteren Versuchen benutzten Steinplatte, durch den ruhenden Aether hindurch einen Einfluss auf die Dimensionen habe, der, je nach der Orientirung des Körpers in Bezug auf die Richtung der Bewegung, verschieden ist. Würden z.B. die der Bewegungsrichtung parallelen Dimensionen im Verhältniss von 1 zu $1 + \delta$, und die zu derselben senkrechten im Verhältniss von 1 zu $1 + \varepsilon$ geändert, so müsste

$$\varepsilon - \delta = \frac{\mathfrak{p}^2}{2V^2} \tag{119}$$

sein.

Es bliebe hierbei der Werth einer der Grössen $\delta$ und $\varepsilon$ unbestimmt. Es könnte $\varepsilon = 0$, $\delta = -\mathfrak{p}^2/2V^2$ sein, aber auch $\varepsilon = \mathfrak{p}^2/2V^2$, $\delta = 0$, oder $\varepsilon = \mathfrak{p}^2/4V^2$, und $\delta = -\mathfrak{p}^2/4V^2$.

§ 91. So befremdend die Hypothese auch auf den ersten Blick erscheinen mag, man wird dennoch zugeben müssen, dass sie gar nicht so fern liegt, sobald man annimmt, dass auch die Molecularkräfte, ähnlich wie wir es gegenwärtig von den electrischen und magnetischen Kräften bestimmt behaupten können, durch den Aether vermittelt werden. Ist dem so, so wird die Translation die Wirkung zwischen zwei Molecülen oder Atomen höchstwahrscheinlich in ähnlicher Weise ändern, wie die Anziehung oder Abstossung zwischen geladenen Theilchen. Da nun die Gestalt und die Dimensionen eines festen Körpers in letzter Instanz durch die Intensität der Molecularwirkungen bedingt werden, so kann dann auch eine Aenderung der Dimensionen nicht ausbleiben.

In theoretischer Hinsicht wäre also nichts gegen die Hypothese einzuwenden. Was die experimentelle Prüfung derselben betrifft, so ist zunächst zu bemerken, dass die in Rede stehenden Verlängerungen und Verkürzungen ausserordentlich klein sind. Es ist $\mathfrak{p}^2/V^2 = 10^{-8}$, und somit würde, falls man $\varepsilon = 0$ setzt, die Verkürzung des einen Durchmessers der Erde etwa 6,5 cm betragen. Die Länge eines Meterstabes aber änderte sich, wenn man ihn aus der einen Hauptlage in die andere überführte, um $^1/_{200}$ Mikron. Wollte man so kleine Grössen wahrnehmen, so könnte man sich wohl nur von einer Interferenzmethode Erfolg versprechen. Man hätte also mit zwei zu einander senkrechten Stäben zu arbeiten und von zwei mit einander interferirenden Lichtbündeln das eine an dem ersten und das andere an dem zweiten Stabe entlang hin- und hergehen zu lassen. Hierdurch gelangte man aber wieder zu dem MICHELSON'schen Versuch und würde bei der Rotation gar keine Verschiebung der Streifen wahrnehmen. Umgekehrt wie wir es früher ausdrückten, könnte man jetzt sagen, dass die aus den Längenänderungen hervorgehende Verschiebung durch die MAXWELL'sche Verschiebung compensirt werde.

§ 92. Es ist beachtenswerth, dass man gerade zu den oben vorausgesetzten Veränderungen der Dimensionen geführt wird, wenn man *erstens*, ohne die Molecularbewegung zu berücksichtigen, annimmt, dass in einem sich selbst überlassenen festen Körper die auf ein beliebiges Molecül wirkenden Kräfte, Anziehungen oder Abstossungen, einander das Gleichgewicht halten, und *zweitens* — wozu freilich kein Grund vorliegt — auf diese Molecularkräfte das Gesetz anwendet, das wir im § 23 für die electrostatischen Wirkungen abgeleitet haben. Versteht man nämlich jetzt unter $S_1$ und $S_2$ nicht, wie in jenem Paragraphen, zwei Systeme geladener Theilchen, sondern zwei Systeme von Molecülen, — das zweite ruhend und das erste mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ in der Richtung der $x$-Axe —, zwischen deren Dimensionen die früher angegebene Beziehung besteht, und nimmt man an, dass in beiden Systemen die $x$-Componenten der Kräfte dieselben seien, die

$y$- und $z$-Componenten sich aber durch die im § 23 angegebenen Factoren von einander unterscheiden, so ist es klar, dass sich die Kräfte in $S_1$ aufheben werden, sobald dies in $S_2$ geschieht. Ist demnach $S_2$ der Gleichgewichtszustand eines ruhenden festen Körpers, so haben in $S_1$ die Molecüle gerade diejenigen Lagen, in denen sie unter dem Einflusse der Translation verharren können. Die Verschiebung würde diese Lagerung natürlich von selbst herbeiführen und also nach (24) eine Verkürzung in der Bewegungsrichtung im Verhältniss von 1 zu

$$\sqrt{1-\frac{\mathfrak{p}^2}{V^2}}$$

bewirken. Dieses führt zu den Werthen

$$\delta=-\frac{\mathfrak{p}^2}{2V^2}, \quad \varepsilon=0,$$

was mit (119) übereinstimmt.

In Wirklichkeit befinden sich die Molecüle eines Körpers nicht in Ruhe, sondern es besteht in jedem „Gleichgewichtszustande" eine stationäre Bewegung. Inwiefern dieser Umstand bei der betrachteten Erscheinung von Einfluss ist, möge dahingestellt bleiben; jedenfalls lassen die Versuche der Hrn. MICHELSON und MORLEY wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler einen ziemlich weiten Spielraum für die Werthe von $\delta$ und $\varepsilon$.

### *Die Polarisationsversuche* FIZEAU's

§ 93. Beim schiefen Durchgange eines polarisirten Lichtbündels durch eine Glasplatte ändert sich im allgemeinen das Azimuth der Polarisation, und zwar ist diese Erscheinung abhängig von der Natur der Platte, sodass eine Vergrösserung oder Verkleinerung ihres Brechungsexponenten eine Drehung der Polarisationsebene des austretenden Lichtes zur Folge hat. Diese Thatsache war der Ausgangspunkt für die im Jahre 1859 von Hrn. FIZEAU [1]) mit Glassäulen ausgeführten Versuche, deren Resultat in hohem Maasse unsere Beachtung verdient. Der benutzte Apparat bestand aus einem polarisirenden Prisma, einer Anzahl

[1]) Ann. de chim. et de phys. **58**, 129, 1860; Pogg. Ann. **114**, 554, 1861.

hinter einander gestellter Glassäulen und einem Analysator. Zur Zeit der Sonnenwende, meistens um die Mittagsstunde, wurde die Vorrichtung zuerst mit dem Polarisator nach Osten, und dem Analysator nach Westen gekehrt, und dann in die entgegengesetzte Richtung gebracht, während jedesmal ein Bündel Sonnenstrahlen mittelst zweckmässig gestellter Spiegel hindurchgeschickt wurde. Obgleich sich in den Einstellungen des Analysators mancherlei Unregelmässigkeiten zeigten, schien doch im ganzen eine constante Differenz zwischen den für die beiden Lagen erhaltenen Ablesungen zu bestehen.

Als ich die gegenwärtige Theorie entwickelte, hoffte ich anfangs, diese Differenzen erklären zu können, sah mich jedoch alsbald in meiner Erwartung getäuscht. Sind die von mir aufgestellten Gleichungen richtig, so kann ein Einfluss, wie der von Hrn. FIZEAU erwartete, nicht bestehen. Den Beweis hierfür soll der nächste Paragraph erbringen.

§ 94. Da mit weissem Licht gearbeitet wurde und die Drehung der Polarisationsebene in den Glassäulen nicht für alle Farben dieselbe ist, so war es nöthig, die hieraus entspringende Dispersion zu compensiren. Es dienten dazu circularpolarisirende Flüssigkeiten, Citronenöl oder Terpentin, bisweilen auch dünne, senkrecht zur Axe geschliffene Quarzplatten. Zur Vereinfachung wollen wir indess annehmen, dass das Licht homogen sei, und dass also keine derartigen Stoffe im Apparat vorhanden sind. Der Satz, den wir im § 59 abgeleitet haben, ist dann ohne weiteres anwendbar, da er für jedes beliebige System einfach- oder doppelbrechender Körper gilt.

Es soll nun ein idealer Versuch bei ruhender Erde mit einem wirklichen Versuche verglichen werden, bei dem der Apparat in Bezug auf die Erdbewegung in beliebiger Weise orientirt ist. Im ersteren Falle soll der Polarisator Strahlen von der Richtung $s$ und der Schwingungsdauer $T$ empfangen; den Analysator denke man sich dabei so gestellt, dass er kein Licht durchlässt. Im zweitgenannten Falle soll der „correspondirende" Bewegungszustand (§ 59) bestehen. Dazu muss das einfallende Licht die relative Schwingungsdauer $T$ (§ 60, *a*), und noch immer die Strahlenrichtung $s$ (§ 60, *b*) haben. Hinter dem Analysator wird es wieder dunkel sein (§ 60, *b*), und man darf also schliessen:

Welche Richtung auch die Erdbewegung haben mag, ob vom

Polarisator zum Analysator hin, oder umgekehrt, immer wird bei der vorausgesetzten Stellung des Analysators das Licht ausgelöscht werden, sofern nur an der relativen Schwingungsdauer und an der Richtung der Strahlen in Bezug auf den Apparat nichts geändert wird.

Diesen Bedingungen würden nun die Versuche offenbar entsprochen haben, wenn die Sonne homogenes Licht ausgestrahlt hätte. Die relative Schwingungsdauer wäre dann so gewesen, wie es das DOPPLER'sche Gesetz verlangt, und zwar bei jeder Stellung des Apparates. Was die Richtung der Strahlen in Beziehung auf die Glassäulen betrifft, so ist sie bei den verschiedenen Ablesungen wohl nicht genau dieselbe gewesen; einen Fehler hat das aber nicht herbeiführen können, da ein Einfluss einer kleinen Richtungsveränderung des einfallenden Lichtes dem Beobachter schwerlich entgangen wäre.

§ 95. Die Erscheinung, welche Hr. FIZEAU erwartet hatte und wirklich beobachtet zu haben glaubte, hätte auch bei Anwendung homogenen Lichtes eintreten müssen. Wir stossen hier somit auf einen Widerspruch, den ich nicht zu lösen vermag. Eine Fehlerquelle, von der bestimmt behauptet werden könnte, dass sie die Differenzen in den Analysatorstellungen verursacht habe, konnte ich nicht entdecken. Die eingeschalteten circularpolarisirenden Stoffe hatten wohl eine viel zu geringe Dicke, um den im § 87 betrachteten Einfluss der Erdbewegung hervortreten zu lassen. Ebenso wenig ist an eine Wirkung des Erdmagnetismus zu denken. Das einzige wäre vielleicht noch, dass die beiden östlich und westlich vom Apparate aufgestellten Spiegel nicht immer Licht von derselben Beschaffenheit empfangen hätten. Um nämlich die Sonnenstrahlen bald nach dem einen, bald nach dem anderen Spiegel zu reflectiren, musste der Heliostat verschiedene Stellungen haben; zwischen den Winkeln, unter welchen er das Licht in beiden Fällen zurückwarf, bestand eine vom Stande der Sonne abhängige Differenz, und bekanntlich hat das von einer Metallfläche reflectirte Licht nicht bei allen Einfallsrichtungen dieselbe Zusammensetzung. Da die gegenseitige Stellung der Spiegel mir nicht bekannt war, so habe ich den Einfluss dieses Fehlers nicht berechnen können; es war nur möglich, denselben ganz oberflächlich zu schätzen, indem ich über jene Stellung eine geeignete Annahme machte und die gewöhnlichen Formeln für die Metallreflexion anwandte. Auf diese Weise führte die Rechnung allerdings zu einer Verschiedenheit in den Analysatorstellungen bei den beiden Lagen des Apparates, die aber entschieden kleiner war als die von Hrn. FIZEAU beobachteten Differenzen. Zu bemerken ist übrigens, dass bei einer der Versuchsreihen der Heliostatenspiegel durch ein totalreflectirendes Prisma ersetzt wurde und dass dieses ohne Einfluss auf die Ergebnisse gewesen zu sein scheint.

Alles zusammengenommen, drängt sich uns die Frage auf, ob es nicht möglich wäre, die Theorie den Beobachtungen anzupassen, ohne dass sie aufhörte, von den übrigen in dieser Arbeit behandelten Erscheinungen Rechenschaft zu geben. Mir hat das nicht gelingen wollen, und muss ich also die ganze Frage offen lassen, in der Hoffnung, dass vielleicht Andere die noch bestehhenden Schwierigkeiten überwinden werden.

Dass die Verbesserung der Theorie aber nicht so ganz leicht sein wird, und dass sich bei den Versuchen FIZEAU's die Erscheinungen jedenfalls nicht so zugetragen haben, wie sie derselbe in seinen einleitenden Betrachtungen gedeutet hat, das möchte ich nun schliesslich noch darthun.

Es wird genügen, zu diesem Zwecke eine einzelne Glasplatte zu betrachten. Zerlegt man die Translationsgeschwindigkeit in zwei Componenten, die senkrecht zur Platte, resp. derselben parallel sind, so werden, falls man von Grössen zweiter Ordnung absieht, die Wirkungen dieser Componenten neben einander bestehen. Das Problem lässt sich somit auf zwei einfachere Fälle zurückführen. Es ist nun möglich, ohne specielle Annahmen über die Natur der Lichtschwingungen, nachzuweisen, dass eine Translation senkrecht zur Platte den von Hrn. FIZEAU erwarteten Einfluss *nicht* haben kann; wir werden das aus gewissen allgemeinen Betrachtungen ableiten. Was die andere Richtung der Translation betrifft, so können wir nicht so bestimmt sprechen; es lässt sich nur zeigen, dass sich die bewegte Platte gewiss nicht so verhält, wie eine ruhende von etwas anderem Brechungsexponenten.

§ 96. Wir betrachten zwei isotrope, durch eine Ebene von einander getrennte Medien, deren ponderable Theile entweder ruhen, oder sich mit einer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$, in einer zur Grenzfläche senkrechten Richtung, verschieben. Wird von dieser Fläche ein Theil, dessen Dimensionen erheblich grösser als die Wellenlänge sind, von ebenen Wellen getroffen, die seitlich von einem an der Translation theilnehmenden Cylinder begrenzt sind, so geben die Spiegelung und Brechung zu zwei ähnlichen Lichtbündeln Anlass. Jede Theorie der Aberration hat nun anzunehmen, dass, unabhängig von der Translation, die beschreibenden Linien der cylindrischen Grenzflächen, die *relativen Lichtstrahlen*, den gewöhnlichen Gesetzen der Reflexion und Brechung unterliegen.

Demgemäss können wir uns ein für alle Mal *vier* Cylinder: 1, 2, 3, 4, wie die obengenannten, — wir wollen sagen „vier *Lichtbahnen*" —, denken, von denen 1 und 2 in dem ersten, 3 und 4 in dem zweiten Medium liegen, und die folgendermaassen zusammengehören. Aus einer einfallenden Bewegung in 1 soll eine reflectirte in 2, und eine durchgelassene in 4 entstehen, während auch ein einfallendes Bündel in 3 zu Bewegungen in 2 und 4 Veranlassung gibt. Umgekehrt werden dann einfallende Schwingungen in 2 oder 4 Bewegungen in den Bahnen 1 und 3 erregen.

Zur Vereinfachung nehmen wir noch an [1]), dass der vom Licht getroffene Theil der Grenzfläche zwei zu einander senkrechte Symmetrieaxen habe, deren eine in der Einfallsebene der Strahlen liegt. Die aus den vier Lichtbahnen bestehende Figur hat dann zwei durch je eine dieser Axen und die Normale der Grenzfläche gehende Symmetrieebenen. Die mit der Einfallsebene zusammenfallende möge die *erste*, die andere die *zweite* Symmetrieebene heissen.

§ 97. Von den das Licht constituirenden Abweichungen vom Gleichgewichtszustande soll angenommen werden, dass sie zu den *Vectorgrössen* gehören. Kommen mehrere derartige Grössen in Betracht, wie z.B. in der electromagnetischen Lichttheorie die dielectrische Polarisation, die electrische Kraft, die magnetische Kraft, oder gar die früheren Vectoren $\mathfrak{D}'$ und $\mathfrak{H}'$, so haben wir uns vorzustellen, dass für einen bestimmten Körper, bei gegebener Strahlenrichtung, relativer Schwingungszeit und Translation, diese Vectoren sämmtlich durch einen derselben bestimmt seien. Es wird deshalb genügen, *einen* der Vectoren zur Be-

---

[1]) Wir können diese Annahme nachträglich fallen lassen, da ja das Verhältniss der Intensitäten der Lichtbündel unabhängig von der Grösse und Gestalt der Querschnitte ist.

trachtung auszuwählen. Wir nennen diesen den *Lichtvector* und führen folgende Voraussetzungen ein, in denen theils eine Hypothese über die Natur der Körper und des Lichtes, theils eine Beschränkung in der Wahl des Lichtvectors liegt.

1°. Besteht in einem System von Körpern ein Bewegungszustand, bei dem die Componenten des Lichtvectors gewisse Functionen der relativen Coordinaten und der Zeit $t$ sind, so stellen auch die Functionen, die sich ergeben, wenn man $t$ durch $-t$ ersetzt, Werthe der Componenten dar, welche einer möglichen Bewegung entsprechen. Nur hat man bei dieser Umkehrung der Bewegungen auch die Geschwindigkeit $\mathfrak{p}$ umzukehren.

2°. Man gelangt gleichfalls zu einer möglichen Bewegung, wenn man das Spiegelbild einer beliebigen, gegebenen Bewegung in Bezug auf eine ruhende Ebene nimmt, und zwar in der Weise, dass man sowohl die Translationsgeschwindigkeit, als auch sämmtliche Lichtvectoren durch die Spiegelbilder ersetzt.

Haben wir es mit dem reinen Aether zu thun, so entsprechen wir diesen Voraussetzungen, wenn wir die dielectrische Verschiebung als Lichtvector wählen.

§ 98. In einem *polarisirten* Lichtbündel ist der Lichtvector an allen Stellen einer bestimmten Geraden parallel; er lässt sich in drei zu einander senkrechte Componenten zerlegen, deren erste die Richtung des Strahles hat, während die zweite in der Einfallsebene liegt und die dritte senkrecht auf derselben steht. Da nun die Eigenschaften eines polarisirten Bündels, ausser von der Intensität und Schwingungsdauer, nur noch von *einer* Grösse — etwa dem Azimuthe des Polarisators — abhängen, so müssen die Verhältnisse zwischen den genannten Componenten ganz bestimmte Werthe haben, sobald das Verhältniss zwischen der zweiten und dritten gegeben ist; dieses *eine* Verhältniss muss aber jeden beliebigen Werth erhalten können. Es lässt sich dies auch so ausdrücken: Zerlegt man den Lichtvector in zwei Componenten, deren eine die Richtung des Strahls hat, während die andere senkrecht zu demselben steht, so lässt sich letztere beliebig um den Strahl herumdrehen, und ist bei jeder Richtung derselben das Verhältniss zwischen beiden bestimmt.

Der Bewegungszustand ist somit völlig bekannt, sobald die Natur des Körpers, die Translation, die relative Periode, die Strahlenrichtung und endlich die Richtung und Grösse der „transversalen" Componente des Lichtvectors gegeben sind. Wo im weiteren von dem Lichtvector die Rede ist, werden wir darunter nur jene transversale Componente verstehen.

Steht nun dieser Vector in dem einfallenden Lichte senkrecht zur Einfallsebene, so muss er auch in dem reflectirten und durchgelassenen Bündel dieselbe Richtung haben; gleicherweise muss der Lichtvector in diesen Bündeln der Einfallsebene parallel sein, sobald der Lichtvector des einfallenden Lichtes in dieser Ebene liegt. Um diese Sätze zu begründen, hat man nur das Spiegelbild des ganzen Bewegungszustandes in Bezug auf die erste Symmetrieebene zu betrachten. Es habe z.B. der Lichtvector der einfallenden Wellen die erste der obengenannten Richtungen. Bei dem Uebergange zum Spiegelbilde erhält dieser Vector die entgegengesetzte Richtung, oder, wie man auch sagen kann, die entgegengesetzte Phase; der Lichtvector der beiden anderen Lichtbündel muss sich dann in derselben Weise ändern, woraus sich die Richtigkeit der obigen Behauptung unmittelbar ergibt.

Das Problem ist jetzt auf die beiden Hauptfälle zurückgeführt, dass die Lichtvectoren überall senkrecht zur Einfallsebene stehen, oder überall in derselben liegen. Bei der weiteren Untersuchung ist stets an einen dieser Fälle zu denken; sie gilt indessen für den einen Fall so gut wie für den anderen.

Bei jeder Lichtbahn nennen wir eine bestimmte Richtung des Lichtvectors positiv, und zwar soll diese Richtung in dem ersten Hauptfall für alle Lichtbahnen dieselbe sein, während in dem zweiten Hauptfall die für 2 und 4 gewählten positiven Richtungen die Spiegelbilder der für 1 und 3 angenommenen in Bezug auf die zweite Symmetrieebene sind.

Um schliesslich die Schwingungen bequem darstellen zu können, fassen wir zwei Punkte $P$ und $Q$ ins Auge, welche diesseit und jenseit der Grenzfläche, in unveränderlicher Entfernung von derselben, auf der Schnittlinie der beiden Symmetrieebenen liegen.

Es gehöre $P$ dem Raume an, in dem sich 1 und 2 überdecken. Ebenso liege $Q$ gleichzeitig in 3 und 4. Es sollen immer nur die Werthe der Lichtvectoren in $P$ und $Q$ angegeben werden.

§ 99. Hat der Lichtvector in einer einfallenden Bewegung den Werth

$$q \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + r\right),$$

so wird er für ein daraus entstehendes, reflectirtes oder durchgelassenes Bündel dargestellt werden können durch

$$aq \cos\left(2\pi\frac{t}{T} + r - b\right),$$

worin $a$ und $b$ gewisse Constanten sind. Um die verschiedenen Fälle von einander zu unterscheiden, wollen wir jeder dieser Grössen zwei Indices anhängen, deren erster sich auf die Bahn des einfallenden Lichtes, und deren zweiter sich auf das daraus entstehende Bündel bezieht; ausserdem beziehen sich die *ohne* Strich gelassenen $a$ und $b$ auf den Fall, dass die Translation nach der Seite des einfallenden Lichtes gerichtet ist, während die *mit* einem Strich versehenen Buchstaben für eine gleiche und entgegengesetzte Verschiebung gelten.

Es bestehe nun, während das System nach der Seite des ersten Mediums fortschreitet, in der Lichtbahn 1 eine einfallende Bewegung, bei welcher der Lichtvector den Werth

$$\cos 2\pi\frac{t}{T}$$

hat. Daraus entstehen in 2 und 4 die durch

$$a_{1.2} \cos\left(2\pi\frac{t}{T} - b_{1.2}\right)$$

und

$$a_{1.4} \cos\left(2\pi\frac{t}{T} - b_{1.4}\right)$$

dargestellten Lichtbündel.

Sodann denken wir uns diesen Bewegungszustand umgekehrt. Erstens nehmen wir also an, dass die Translation von dem ersten Medium abgewandt sei und zweitens ersetzen wir $t$ durch $-t$. Wir finden dann, dass in 1 der Lichtvector

$$\cos 2\pi\frac{t}{T}$$

entsteht, wenn in den Bahnen 2 und 4 die einfallenden Bewegungen

$$a_{1.2} \cos\left(2\pi\frac{t}{T} + b_{1.2}\right) \tag{120}$$

und

$$a_{1.4} \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + b_{1.4}\right) \tag{121}$$

bestehen.

Da aber der Lichtvector, den die Bewegung (120) in der ersten Bahn hervorbringt, den Werth

$$a_{1.2}\, a'_{2.1} \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + b_{1.2} - b'_{2.1}\right)$$

hat, und ebenso der aus (121) entstehende Lichtvector durch den Ausdruck

$$a_{1.4}\, a_{4.1} \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + b_{1.4} - b_{4.1}\right)$$

darzustellen ist, so muss

$$a_{1.2}\, a'_{2.1} \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + b_{1.2} - b'_{2.1}\right) + a_{1.4} a_{4.1} \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + b_{1.4} - b_{4.1}\right) =$$
$$= \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

sein. Daraus folgt

$$a_{1.2}\, a'_{2.1} \cos (b_{1.2} - b'_{2.1}) + a_{1.4}\, a_{4.1} \cos (b_{1.4} - b_{4.1}) = 1, \tag{122}$$

und

$$a_{1.2}\, a'_{2.1} \sin (b_{1.2} - b'_{2.1}) + a_{1.4}\, a_{4.1} \sin (b_{1.4} - b_{4.1}) = 0. \tag{123}$$

§ 100. Zu einer einfachen Beziehung führt nun folgende Bemerkung. Geht man von einem Zustande aus, bei dem das einfallende Licht der Bahn 1 folgt, und nimmt man das Spiegelbild in Bezug auf die zweite Symmetrieebene (§ 96), so gelangt man zu einem Zustande, bei welchem das Licht in 2 einfällt. Es muss folglich

$$a_{2.1} = a_{1.2}, \quad b_{2.1} = b_{1.2} \tag{124}$$

sein, und gleicherweise

$$a'_{2.1} = a'_{1.2}, \quad b'_{2.1} = b'_{1.2}. \tag{125}$$

Für die in (123) eingehende Differenz $b_{1.2} - b'_{2.1}$ darf man also setzen $b_{1.2} - b'_{1.2}$, was offenbar von der Ordnung $\mathfrak{p}/V$ ist, da sich die Grössen $b_{1.2}$ und $b'_{1.2}$ nur dadurch von einander unterscheiden, dass sie sich auf verschiedene Translationsrichtungen beziehen.

Nach (123) muss nun auch sin $(b_{1.4} - b_{4.1})$ von der Ordnung $\mathfrak{p}/V$ sein. Da man weiter, ohne etwas an der Sache zu ändern, $b_{4.1}$ um ein gerades Vielfaches von $\pi$ vergrössern oder verkleinern kann, und auch um ein ungerades Vielfaches von $\pi$, wenn man nur zugleich das Vorzeichen von $a_{4.1}$ umkehrt, so darf man annehmen, dass auch der Winkel $b_{1.4} - b_{4.1}$ selbst von der Ordnung $\mathfrak{p}/V$ sei. Die beiden Cosinus in (122) differiren dann von der Einheit nur um Grössen zweiter Ordnung, sodass wir setzen dürfen

$$a_{1.2}\, a'_{2.1} + a_{1.4}\, a_{4.1} = 1.$$

In derselben Weise ist

$$a'_{1.2}\, a_{2.1} + a'_{1.4}\, a'_{4.1} = 1,$$

und unter Beachtung von (124) und (125) finden wir also

$$a_{1.4}\, a_{4.1} = a'_{1.4}\, a'_{4.1}\,.$$

Gesetzt nun, es werde, ähnlich wie bei den FIZEAU'schen Versuchen, eine planparallele Glasplatte, auf deren beiden Seiten sich der Aether befindet, in schiefer Richtung von einem Lichtbündel getroffen, dessen Lichtvector eine der oben unterschiedenen Richtungen hat, das also entweder in der Einfallsebene, oder senkrecht zu derselben polarisirt ist. Das Verhältniss, in dem die Amplitude bei dem Eintritt in das Glas verringert wird, lässt sich dann, je nach der Translationsrichtung, durch $a_{1.4}$ oder $a'_{1.4}$ darstellen, und ebenso, wie man leicht sieht, das entsprechende Verhältniss bei dem Austritt aus der Platte durch $a_{4.1}$ oder $a'_{4.1}$. Im ganzen ändert sich also die Amplitude im Verhältniss von 1 zu $a_{1.4}\, a_{4.1}$ oder $a'_{1.4}\, a'_{4.1}$. Da nun diese Producte denselben Werth haben, so ändert die Umkehrung der Translation nichts an der Intensität des austretenden Lichtes, die also bis auf Grössen zweiter Ordnung dieselbe sein muss, wie wenn die Platte stillstände. Dies gilt für die beiden Hauptlagen der Polarisationsebene; folglich muss, wenn die einfallenden Strahlen in beliebiger Weise linear polarisirt sind, die Schwingungsrichtung des durchgelassenen Lichtes unabhängig von der Translation sein.

Hierbei ist zu bemerken, dass sowohl für die in der Einfallsebene, als auch für die senkrecht zur Einfallsebene polarisirte

Componente der FRESNEL'sche Fortführungscoefficient anzunehmen ist. Beide pflanzen sich daher mit derselben Geschwindigkeit fort, wodurch eine Phasendifferenz zwischen denselben und eine elliptische Polarisation des durchgelassenen Lichtes ausgeschlossen sind.

§ 101. Ist die Richtung der Translation nicht, wie es in dem letzten Paragraphen angenommen wurde, senkrecht zur Grenzfläche, sondern derselben parallel, so muss noch unterschieden werden, ob sie in der Einfallsebene liegt, oder senkrecht auf derselben steht. Wir wollen nur den ersten Fall betrachten und uns überdies auf in der Einfallsebene polarisirtes Licht beschränken.

Zunächst sei daran erinnert, wie man für solches Licht und für ruhende Körper zu dem Werth der reflectirten Amplitude gelangt. Wählt man die Grenzfläche zur $yz$-, und die Einfallsebene zur $xz$-Ebene, und stellt man sich auf den Boden der electromagnetischen Lichttheorie, so ist $\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_z = 0$, und auch $\mathfrak{H}_y = 0$ zu setzen, während die Grenzbedingungen in der Continuität von $\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{H}_x$ und $\mathfrak{H}_z$ bestehen. Da nun in jedem der beiden Medien nach der Gleichung ($\mathrm{IV}_c$) (§ 52)

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z}, \text{ und } \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}$$

ist, so ist die Continuität von $\mathfrak{H}_x$ und $\mathfrak{H}_z$ gleichbedeutend mit der Continuität von $\partial \mathfrak{E}_y/\partial z$ und $\partial \mathfrak{E}_y/\partial x$. Der erste dieser Differentialquotienten wird aber stetig sein, sobald $\mathfrak{E}_y$ selbst es ist, und man hat es also am Ende nur noch mit $\mathfrak{E}_y$ und $\partial \mathfrak{E}_y/\partial x$ zu thun.

In der That — und diese Bemerkung gilt für jede Lichttheorie — ergibt sich die bekannte FRESNEL'sche Formel, sobald man annimmt, dass diese oder jene bei den Schwingungen in Betracht kommende Grösse, und gleichzeitig ihr Differentialquotient nach der Normale zur Grenzfläche, stetig sei.

Bei ebenen Wellen kommt eine Differentiation nach $x$ auf dasselbe hinaus, als ob man nach $t$ differenzirte und dann mit einem von der Richtung und der Geschwindigkeit der Wellen abhängigen Factor $m$ multiplicirte. Bezeichnen wir nun für das einfallende, reflectirte und durchgelassene Licht die Werthe der soeben erwähnten Grösse in der unmittelbaren Nähe der Grenzfläche durch

$$\varphi_1(t), \quad \varphi_1'(t) \text{ und } \varphi_2(t),$$

und die Werthe von $m$ mit

$$m_1, \quad m_1' \text{ und } m_2,$$

so erhalten wir als Grenzbedingungen

$$\varphi_1(t) + \varphi_1'(t) = \varphi_2(t)$$

und

$$m_1 \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t} + m_1' \frac{\partial \varphi_1'(t)}{\partial t} = m_2 \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial t}.$$

Die letzte Formel führt — sofern man von additiven Constanten absieht — auf

$$m_1 \varphi_1(t) + m_1' \varphi_1'(t) = m_2 \varphi_2(t),$$

und es ergibt sich dann weiter durch Elimination von $\varphi_2(t)$

$$\varphi_1'(t) = \frac{m_1 - m_2}{m_2 - m_1'} \varphi_1(t).$$

Dass nun, bei festgehaltener Richtung des einfallenden Lichtes, die Amplitude des reflectirten Bündels von dem Brechungsexponenten des zweiten Körpers abhängt, rührt daher, dass, wie man leicht erkennen wird, $m_2$ sich mit diesem Exponenten ändert.

Im nächsten Paragraphen soll nun aber gezeigt werden, dass dieses $m_2$, so lange die Richtung der einfallenden relativen Stralen dieselbe bleibt, von einer Translation in der Richtung der $z$-Axe nicht berührt wird. Dürften wir also annehmen, dass auch bei einer sich verschiebenden Platte die Grenzbedingungen in der Continuität einer gewissen Grösse $\varphi$ und ihres Differentialquotienten $\partial\varphi/\partial x$ bestehen, so hätten wir wenigstens für in der Einfallsebene polarisirtes Licht die Unmöglichkeit der von Hrn. FIZEAU gesuchten Erscheinung dargethan. In Wirklichkeit ist jene Annahme über die Grenzbedingungen ohne nähere Untersuchungen allerdings nicht zulässig; das Angeführte zeigt aber immerhin, dass die bewegte Platte keineswegs wie eine ruhende von etwa anderem Brechungsexponenten wirkt.

§ 102. Es seien, in Bezug auf die oben eingeführten Axen,

$$\cos\alpha, \quad 0, \ \sin\alpha$$

die Richtungsconstanten der auf die Platte fallenden relativen Strahlen. Unter Vernachlässigung von Grössen zweiter Ordnung erhalten wir hieraus durch Anwendung des Grundgesetzes der Aberration die Richtung der Wellennormale; wir haben nämlich eine Geschwindigkeit $V$ in der Richtung der Strahlen mit der Translationsgeschwindigkeit $\mathfrak{p}$ zusammenzusetzen. Ist nun letztere der $z$-Axe parallel, so werden die Richtungsconstanten der Wellennormale

$$\cos\alpha', \quad 0, \quad \sin\alpha',$$

worin

$$\alpha' = \alpha + \frac{\mathfrak{p}_z}{V}\cos\alpha$$

ist.

Die absolute Geschwindigkeit der Wellen ist $V$; die relative $V'$ aber wird gefunden, wenn man $V$ um die Componente von $\mathfrak{p}$ nach der Wellennormale vermindert. Werden unter $x, y, z$ relative Coordinaten verstanden, so gelten mithin für das einfallende Licht Ausdrücke von der Form

$$A\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\cos\alpha' + z\sin\alpha'}{V'} + B\right),$$

oder

$$A\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\cos\alpha + z\sin\alpha}{V} - \frac{\mathfrak{p}_z z}{V^2} + B\right). \tag{126}$$

Andererseits haben wir für das Glas den FRESNEL'schen Mitführungscoefficienten anzunehmen. Folglich ist, wenn wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im ruhenden Glase durch $W$, und die Richtungsconstanten der Wellennormale in der Platte durch

$$\cos\beta, \quad 0, \quad \sin\beta$$

bezeichnen, für die relative Geschwindigkeit der Wellen in Bezug auf das Glas, nach (82), zu setzen

$$W' = W - \mathfrak{p}_z \sin\beta\frac{W^2}{V^2}. \tag{127}$$

Für das Licht in der Platte gelten jetzt Ausdrücke von der Form

$$A'\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x\cos\beta + z\sin\beta}{W'} + B'\right), \tag{128}$$

und diese werden sich nur dann in allen Punkten der Grenzfläche den einfallenden Schwingungen anschliessen, wenn der Coefficient von $z$ derselbe ist wie in der Formel (126).

Wir haben demnach

$$\sin\beta = \left(W - \mathfrak{p}_z \sin\beta \frac{W^2}{V^2}\right)\left(\frac{\sin\alpha}{V} + \frac{\mathfrak{p}_z}{V^2}\right),$$

oder, wenn wir den Brechungswinkel in der ruhenden Platte $\beta_0$ nennen, sodass

$$\sin\beta_0 = \frac{W}{V}\sin\alpha$$

ist,

$$\sin\beta = \sin\beta_0 + \frac{W\mathfrak{p}_z}{V^2}\cos^2\beta_0 .$$

Hieraus folgt

$$\cos\beta = \cos\beta_0 - \frac{W\mathfrak{p}_z}{V^2}\sin\beta_0\cos\beta_0 . \qquad (129)$$

Aus (128) ergibt sich aber für den Factor, den wir oben $m_2$ genannt haben, der Werth

$$-\frac{\cos\beta}{W'},$$

und dieser ist, wie aus (127) und (129) hervorgeht, wirklich unabhängig von der Translation.

## ZUSAMMENSTELLUNG DER WICHTIGSTEN BEZEICHNUNGEN

$\rho$ Dichtigkeit einer electrischen Ladung.
$e$ Ladung eines Ions.
$m$ Masse eines Ions.
$V$ Geschwindigkeit des Lichtes im Aether.
$t$ Zeit.
$t'$ Ortszeit (§ 31).
$T$ Schwingungsdauer.
$\mathfrak{v}$ Geschwindigkeit eines Ions.
$\mathfrak{p}$ Translationsgeschwindigkeit der ponderablen Materie.
$\mathfrak{q}$ Verschiebung eines Ions aus der Gleichgewichtslage.
$\mathfrak{m}$ Electrisches Moment eines Molecüls.
$\mathfrak{M}$ Electrisches Moment der Volumeinheit der ponderablen Materie.
$\mathfrak{d}$ Dielectrische Verschiebung im Aether.
$\mathfrak{D}$ Dielectrische Polarisation in einem ponderablen Körper.
$\mathfrak{S}$ Electrischer Strom.
$\mathfrak{E}$ Electrische Kraft.
$\mathfrak{F}$ Electrische Kraft für ruhende Ionen.
$\mathfrak{H}$ Magnetische Kraft.

# THÉORIE SIMPLIFIÉE DES PHÉNOMÈNES ÉLECTRIQUES ET OPTIQUES DANS DES CORPS EN MOUVEMENT [1]

§ 1. Dans des recherches précédentes j'ai admis que tous les phénomènes électriques et optiques, présentés par des corps pondérables, sont produits par de petites particules chargées (*électrons*) qui, dans un diélectrique, sont liées à des positions d'équilibre fixes, mais qui peuvent se mouvoir librement dans les conducteurs, sauf une résistance comparable à un frottement. D'après cette manière de voir, un courant électrique ne serait autre chose qu'un mouvement progressif de ces électrons, et la polarisation diélectrique d'un milieu non-conducteur un écartement de leurs positions d'équilibre. J'ai supposé que les électrons peuvent se mouvoir sans entraîner l'éther, pour lequel ils sont parfaitement perméables; puis, tandis que j'admettais pour l'éther les équations électromagnétiques ordinaires, j'ai posé pour les électrons certaines relations auxquelles on est amené par des considérations très simples. J'ai obtenu ainsi un système d'équations qui suffit pour expliquer un grand nombre de phénomènes.

Dans le cours de cette étude certains artifices mathématiques m'ont permis d'arriver, par un court raisonnement, à des conclusions auxquelles sans eux je ne serais arrivé que par des développements beaucoup plus étendus. Je me propose maintenant de faire voir comment on peut simplifier encore davantage la théorie, en faisant subir immédiatement aux équations quelques transformations convenablement choisies.

§ 2. Je partirai des mêmes hypothèses que dans mon „Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern", et je ferai aussi usage des mêmes notations.

J'introduirai donc d'abord les vecteurs $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{H}$, que l'on appelle le déplacement diélectrique et la force magnétique; en outre je re-

[1]) Traduit de Versl. kon. Akad. Wet. Amsterdam, **7**, 507, 1899.

présenterai par $\rho$ la densité de la charge de la matière pondérable, par $\mathfrak{v}$ sa vitesse, et par $\mathfrak{E}$ la force agissant sur cette matière par unité de charge. Ce n'est que dans les électrons que la charge $\rho$ est différente de 0; pour plus de simplicité j'admettrai de nouveau qu'à la surface de l'électron elle passe sans discontinuité à la valeur 0 et, de plus, que pendant le mouvement chaque élément de la matière pondérable conserve sa charge.

Les équations fondamentales sont alors

$$\operatorname{div} \mathfrak{d} = \rho, \tag{I$_a$}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0, \tag{II$_a$}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 4\pi\rho\mathfrak{v} + 4\pi\dot{\mathfrak{d}}, \tag{III$_a$}$$

$$4\pi V^2 \operatorname{rot} \mathfrak{d} = -\dot{\mathfrak{H}}, \tag{IV$_a$}$$

$$\mathfrak{E} = 4\pi V^2\mathfrak{d} + [\mathfrak{v}.\mathfrak{H}] \tag{V$_a$}$$

où $V$ représente la vitesse de la lumière.

§ 3. Nous supposerons maintenant que les corps pondérables à considérer se déplacent en entier avec une vitesse constante $\mathfrak{p}$ à travers l'éther en repos, et nous représenterons par $\mathfrak{v}$ la vitesse relative que les électrons peuvent avoir par rapport à la matière pondérable.

Il est naturel d'introduire un système de coordonnées emporté avec la matière pondérable dans son mouvement avec la vitesse $\mathfrak{p}$. De ce chef, et admettant pour plus de simplicité que cette vitesse ait la direction de l'axe des $x$, de sorte que $\mathfrak{p}_y$ et $\mathfrak{p}_z$ sont nuls, on peut remplacer les équations (I$_a$) — (V$_a$) par

$$\operatorname{div} \mathfrak{d} = \rho, \tag{I$_b$}$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0, \tag{II$_b$}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z} &= 4\pi\rho(\mathfrak{p}_x + \mathfrak{v}_x) + 4\pi\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathfrak{p}_x \frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{d}_x, \\
\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x} &= 4\pi\rho\mathfrak{v}_y + 4\pi\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathfrak{p}_x \frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{d}_y, \\
\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial y} &= 4\pi\rho\mathfrak{v}_z + 4\pi\left(\frac{\partial}{\partial t} - \mathfrak{p}_x \frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{d}_z,
\end{aligned}\right\} \tag{III$_b$}$$

$$\left.\begin{aligned}
4\pi V^2\left(\frac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial y}-\frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial z}\right)&=-\left(\frac{\partial}{\partial t}-\mathfrak{p}_x\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{H}_x,\\
4\pi V^2\left(\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial z}-\frac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial x}\right)&=-\left(\frac{\partial}{\partial t}-\mathfrak{p}_x\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{H}_y,\\
4\pi V^2\left(\frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial x}-\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial y}\right)&=-\left(\frac{\partial}{\partial t}-\mathfrak{p}_x\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{H}_z,
\end{aligned}\right\}\qquad (\mathrm{IV}_{\mathfrak{b}})$$

$$\mathfrak{E}=4\pi V^2\mathfrak{d}+[\mathfrak{p}.\mathfrak{H}]+[\mathfrak{v}.\mathfrak{H}] \qquad (\mathrm{V}_{\mathfrak{b}})$$

Dans ces équations la signification du signe div est encore déterminée par l'équation

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{A}=\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x}+\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z},$$

où $\mathfrak{A}$ est un vecteur quelconque.

Ainsi que je l'ai déjà dit, $\mathfrak{v}$ est la vitesse relative par rapport au système de coordonnées mobile. Si $\mathfrak{v}=0$ nous parlons de „repos"; nous entendons donc par là un *repos relatif* par rapport au système de coordonnées.

Dans la plupart des applications $\mathfrak{p}$ sera la vitesse du mouvement annuel de la terre.

§ 4. Nous allons maintenant faire subir aux équations une nouvelle transformation en introduisant les variables indépendantes suivantes:

$$x'=\frac{V}{\sqrt{V^2-\mathfrak{p}_x^2}}\,x,\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=t-\frac{\mathfrak{p}_x}{V^2-\mathfrak{p}_x^2}\,x \qquad (1)$$

La dernière de ces grandeurs est le temps, calculé à partir d'un certain moment qui n'est pas le même pour tous les points de l'espace, mais dépend de l'endroit considéré. C'est pourquoi nous donnerons à $t'$ le nom de „temps local".

Posons pour abréger

$$\frac{V}{\sqrt{V^2-\mathfrak{p}_x^2}}=k;$$

nous aurons alors les relations

$$\frac{\partial}{\partial x}=k\frac{\partial}{\partial x'}-k^2\frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}\frac{\partial}{\partial t'},\quad \frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y'},\quad \frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z'},\quad \frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t'}.$$

L'expression

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x'} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y'} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z'}$$

sera représentée par

$$\operatorname{div}' \mathfrak{A}.$$

Ensuite, au lieu des vecteurs $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{H}$ nous en introduisons deux autres $\mathfrak{F}'$ et $\mathfrak{H}'$, déterminés par les équations

$$\mathfrak{F}'_x = 4\pi V^2 \mathfrak{d}_x, \quad \mathfrak{F}'_y = 4\pi k V^2 \mathfrak{d}_y - k \mathfrak{p}_x \mathfrak{H}_z, \quad \mathfrak{F}'_z = 4\pi k V^2 \mathfrak{d}_z + k \mathfrak{p}_x \mathfrak{H}_y,$$

$$\mathfrak{H}'_x = k \mathfrak{H}_x, \quad \mathfrak{H}'_y = k^2 \mathfrak{H}_y + 4\pi k^2 \mathfrak{p}_x \mathfrak{d}_z, \quad \mathfrak{H}'_z = k^2 \mathfrak{H}_z - 4\pi k^2 \mathfrak{p}_x \mathfrak{d}_y.$$

Après simplification et combinaison des équations $(\mathrm{I}_b)$—$(\mathrm{V}_b)$, on trouve alors

$$\operatorname{div}' \mathfrak{F}' = \frac{4\pi}{k} V^2 \rho - 4\pi k \mathfrak{p}_x \rho \mathfrak{v}_x, \tag{I$_c$}$$

$$\operatorname{div}' \mathfrak{H}' = 0, \tag{II$_c$}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{H}'_z}{\partial y'} - \frac{\partial \mathfrak{H}'_y}{\partial z'} &= 4\pi k^2 \rho \mathfrak{v}_x + \frac{k^2}{V^2} \frac{\partial \mathfrak{F}'_x}{\partial t'}, \\
\frac{\partial \mathfrak{H}'_x}{\partial z'} - \frac{\partial \mathfrak{H}'_z}{\partial x'} &= 4\pi k \rho \mathfrak{v}_y + \frac{k^2}{V^2} \frac{\partial \mathfrak{F}'_y}{\partial t'}, \\
\frac{\partial \mathfrak{H}'_y}{\partial x'} - \frac{\partial \mathfrak{H}'_x}{\partial y'} &= 4\pi k \rho \mathfrak{v}_z + \frac{k^2}{V^2} \frac{\partial \mathfrak{F}'_z}{\partial t'},
\end{aligned}\right\} \tag{III$_c$}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{F}'_z}{\partial y'} - \frac{\partial \mathfrak{F}'_y}{\partial z'} &= -\frac{\partial \mathfrak{H}'_x}{\partial t'}, \\
\frac{\partial \mathfrak{F}'_x}{\partial z'} - \frac{\partial \mathfrak{F}'_z}{\partial x'} &= -\frac{\partial \mathfrak{H}'_y}{\partial t'}, \\
\frac{\partial \mathfrak{F}'_y}{\partial x'} - \frac{\partial \mathfrak{F}'_x}{\partial y'} &= -\frac{\partial \mathfrak{H}'_z}{\partial t'}.
\end{aligned}\right\} \tag{IV$_c$}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{E}_x &= \mathfrak{F}'_x + k \frac{\mathfrak{p}_x}{V^2} (\mathfrak{v}_y \mathfrak{F}'_y + \mathfrak{v}_z \mathfrak{F}'_z) + (\mathfrak{v}_y \mathfrak{H}'_z - \mathfrak{v}_z \mathfrak{H}'_y), \\
\mathfrak{E}_y &= \frac{1}{k} \mathfrak{F}'_y - k \frac{\mathfrak{p}_x}{V^2} \mathfrak{v}_x \mathfrak{F}'_y + \left(\frac{1}{k} \mathfrak{v}_z \mathfrak{H}'_x - \mathfrak{v}_x \mathfrak{H}'_z\right), \\
\mathfrak{E}_z &= \frac{1}{k} \mathfrak{F}'_z - k \frac{\mathfrak{p}_x}{V^2} \mathfrak{v}_x \mathfrak{F}'_z + \left(\mathfrak{v}_x \mathfrak{H}'_y - \frac{1}{k} \mathfrak{v}_y \mathfrak{H}'_x\right).
\end{aligned}\right\} \tag{V$_c$}$$

Posant $\mathfrak{v} = 0$, on déduit des trois dernières équations que

$$\mathfrak{F}'_x, \ \frac{1}{k}\mathfrak{F}'_y, \ \frac{1}{k}\mathfrak{F}'_z$$

sont les composantes de la force électrique pour des électrons en repos.

§ 5. Nous allons d'abord appliquer les équations obtenues à des phénomènes électrostatiques. Dans ces phénomènes $\mathfrak{v} = 0$ et $\mathfrak{H}' = 0$, tandis que le vecteur $\mathfrak{F}'$ est indépendant du temps. Pour déterminer ce vecteur nous avons les équations

$$\frac{\partial \mathfrak{F}'_z}{\partial y'} - \frac{\partial \mathfrak{F}'_y}{\partial z'} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{F}'_x}{\partial z'} - \frac{\partial \mathfrak{F}'_z}{\partial x'} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{F}'_y}{\partial x'} - \frac{\partial \mathfrak{F}'_x}{\partial y'} = 0,$$

$$\text{div}'\, \mathfrak{F}' = \frac{4\pi}{k} V^2 \rho.$$

Des trois premières il résulte que $\mathfrak{F}'$ dépend d'un potentiel $\omega$, de sorte que

$$\mathfrak{F}'_x = -\frac{\partial \omega}{\partial x'}, \quad \mathfrak{F}'_y = -\frac{\partial \omega}{\partial y'}, \quad \mathfrak{F}'_z = -\frac{\partial \omega}{\partial z'},$$

et la quatrième donne, pour déterminer ce potentiel,

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z'^2} = -\frac{4\pi}{k} V^2 \rho. \tag{2}$$

Soit maintenant $S$ un système d'électrons qui n'ont pas d'autre mouvement que la vitesse de translation commune $\mathfrak{p}_x$; à ce système s'appliquent les équations précédentes. Imaginons un deuxième système $S_0$, *immobile*, que l'on déduit du système $S$ en rendant $k$ fois plus grandes les dimensions dans le sens de l'axe des $x$, tandis que les dimensions ne sont pas modifiées dans les directions perpendiculaires à cet axe. Si de plus nous posons que les éléments de volume correspondants de $S$ et $S_0$ aient des charges égales, la densité $\rho_0$ en un point $P_0$ de $S_0$ est $k$ fois plus petite que la densité au point correspondant $P$ de $S$, de sorte que

$$\rho_0 = \frac{1}{k} \rho.$$

Si $x, y, z$ sont les coordonnées de $P$, les grandeurs $x', y', z'$, déterminées par (1), peuvent être considérées comme les coordonnées de $P_0$.

Dans le système en repos les composantes de la force électrique que nous appellerons $\mathfrak{E}_0$, sont déterminées par un potentiel $\omega_0$; comme dans ce système $k = 1$, on a évidemment

$$\mathfrak{E}_{0x} = -\frac{\partial \omega_0}{\partial x'}, \quad \mathfrak{E}_{0y} = -\frac{\partial \omega_0}{\partial y'}, \quad \mathfrak{E}_{0z} = -\frac{\partial \omega_0}{\partial z'},$$

et le potentiel $\omega_0$ est lui-même déterminé par

$$\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial z'^2} = -4\pi V^2 \rho_0 = -\frac{4\pi}{k} V^2 \rho.$$

Cette équation, comparée avec (2), nous apprend qu'en des points correspondants

$$\omega = \omega_0$$

et par conséquent

$$\mathfrak{F}'_x = \mathfrak{E}_{0x}, \quad \mathfrak{F}'_y = \mathfrak{E}_{0y}, \quad \mathfrak{F}'_z = \mathfrak{E}_{0z}.$$

D'après ce qui a été dit à la fin du § 4, il résulte de là que

$$\mathfrak{E}_{0x}, \quad \frac{1}{k}\mathfrak{E}_{0y}, \quad \frac{1}{k}\mathfrak{E}_{0z}$$

sont les composantes de la force électrique agissant dans le système $S$.

Dans la direction de l'axe des $x$ on a la même force électrique que dans $S_0$, mais les composantes parallèles aux axes des $y$ et des $z$ sont $k$ fois plus petites dans le système $S$ que dans le système $S_0$.

À l'aide de ce résultat, que j'ai déjà déduit antérieurement, toute question d'électrostatique, relative à un système mobile, peut être ramenée à une question analogue relative à un système en repos; seulement, dans ce dernier on doit rendre les dimensions dans le sens du mouvement $k$ fois plus grandes que dans le premier système. À la distribution d'équilibre des électrons sur un conducteur $C$, qui se déplace avec la vitesse $\mathfrak{p}_x$, répond p. ex. une distribution d'équilibre sur un conducteur en repos $C_0$; la différence entre les deux distributions est donnée par nos formules. Je n'y insisterai pas maintenant, et je me contenterai de faire remarquer que, si la force électrique $\mathfrak{E}_0$ est perpendiculaire à la surface de $C_0$, d'après les considérations précédentes la force électrique dans le système mobile sera également perpendiculaire à la surface de $C$.

L'expression

$$k = \left(1 - \frac{V^2}{\mathfrak{p}_x^2}\right)^{-1/2}$$

n'excédant l'unité que d'une quantité du deuxième ordre — $\mathfrak{p}_x/V$ étant considéré comme du premier ordre — l'influence du mouvement terrestre sur les phénomènes électrostatiques n'est que du second ordre.

§ 6. Revenons maintenant aux équations générales $(\mathrm{I_c})$—$(\mathrm{V_c})$ et appliquons les aux phénomènes d'optique. Admettons donc que nous ayons un système de corps pondérables où existent des électrons pouvant osciller autour de positions d'équilibre déterminées, et supposons que dans ce système se propage un mouvement lumineux, consistant en de telles vibrations des électrons, accompagnées de vibrations électriques dans l'éther. Pour plus de simplicité nous nous figurerons que, s'il n'y a pas de mouvement lumineux, le système entier est au repos; nous ne considérons donc pas les mouvements moléculaires.

Nous commencerons par simplifier les équations en négligeant 1°. les termes du second ordre, ce qui rend $k = 1$, de sorte que la force électrique pour des électrons en repos devient $\mathfrak{F}'$, et 2°. le dernier terme de $(\mathrm{I_c})$ et les termes en $\mathfrak{v}_x$, $\mathfrak{v}_y$, $\mathfrak{v}_z$ dans $(\mathrm{V_c})$.

Pour justifier ces dernières simplifications j'aurai recours à certaines hypothèses.

*a.* Nous supposerons d'abord que, dans les vibrations lumineuses, les déplacements des électrons puissent être considérés comme infiniment petits, même par rapport à leurs dimensions, et que l'on puisse négliger tout ce qui est du second ordre par rapport à ces déplacements. Si les déplacements sont infiniment petits, il en est de même des vitesses, ainsi que de toutes les grandeurs qui n'interviennent que par suite des vibrations des électrons, p. ex. les valeurs de $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_z$. Nous pouvons donc laisser de côté, comme étant du deuxième ordre, les derniers termes des équations $(\mathrm{V_c})$.

*b.* Comparons maintenant entre eux les différents termes de l'équation ($I_c$). Par suite du déplacement, la densité $\rho$ en un point déterminé de l'espace est devenue autre que la densité primitive $\rho_0$. Nous avons déjà supposé que dans un électron la densité varie d'une manière continue de point en point, de sorte que nous pouvons admettre que les dérivées de la densité par rapport aux coordonnées seront de l'ordre $\rho_0/a$, $a$ représentant le diamètre d'un électron.

Si maintenant $\mathfrak{a}$ est le déplacement à partir de la position d'équilibre, on trouve facilement que

$$\rho = \rho_0 - \frac{\partial}{\partial x}(\rho_0 \mathfrak{a}_x) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho_0 \mathfrak{a}_y) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho_0 \mathfrak{a}_z).$$

Dans cette expression, ce sont les trois derniers termes qui nous intéressent. Si $c$ est l'amplitude des vibrations, ces termes sont de l'ordre $c\rho_0/a$, de sorte que dans le premier terme du second membre de ($I_c$) entrent des termes de l'ordre

$$\frac{V^2 c\rho_0}{a}. \tag{3}$$

Quant au dernier terme de ($I_c$), il est de l'ordre

$$\frac{\mathfrak{p}_x \rho_0 c}{T}, \tag{4}$$

$T$ étant la durée d'une vibration. Divisant (4) par (3) on trouve

$$\frac{\mathfrak{p}_x}{V} \cdot \frac{a}{VT}.$$

Nous pouvons donc négliger (4) par rapport à (3), parce que les dimensions des électrons sont beaucoup plus petites que la longueur d'onde.

*c*. Pour ce qui regarde enfin les termes en $\mathfrak{p}_x/V^2$ de ($V_c$), la chose est moins simple que pour les termes en $\mathfrak{H}'_x$, $\mathfrak{H}'_y$, $\mathfrak{H}'_z$ de ces mêmes équations.

En effet, il n'est pas permis de dire que les forces $\mathfrak{F}'_x$, $\mathfrak{F}'_y$, $\mathfrak{F}'_z$ sont nulles dans l'état de repos du système, et que par conséquent leurs valeurs pour un état vibratoire sont du même ordre de grandeur que les déplacements infiniment petits. A l'intérieur d'un électron il y a déjà un certain $\mathfrak{F}'$, même lorsque cet électron se trouve dans sa position d'équilibre. Si, en un point déterminé de l'espace, $\mathfrak{F}'_0$ est la force dans l'état de repos, ce n'est que la différence $\mathfrak{F}' - \mathfrak{F}'_0$ qui peut être regardée comme infiniment petite. On pourra donc, dans les termes dont il s'agit maintenant, remplacer $\mathfrak{F}_x$, $\mathfrak{F}_y$ et $\mathfrak{F}_z$ par $\mathfrak{F}_{0x}$, $\mathfrak{F}_{0y}$ et $\mathfrak{F}_{0z}$. Introduisons maintenant deux nouvelles hypothèses, savoir 1°. qu'un électron ne peut avoir qu'un mouvement de translation, et 2°. que les forces électriques agissant sur les différentes parties d'un électron dans la position d'équilibre ne donnent pas de résultante qui tende à produire une telle translation. Nous aurons alors pour l'électron entier, $d\tau$ étant un élément de volume,

$$\int \rho_0 \mathfrak{F}_{0y} d\tau = \int \rho_0 \mathfrak{F}_{0z} d\tau = 0. \tag{5}$$

Appliquons maintenant p. ex. la seconde des équations ($\mathrm{V_c}$) aux divers points d'un électron, chaque fois pour le même instant général $t$; l'intégrale

$$\int \rho \mathfrak{E}_y d\tau$$

donne alors la force totale que l'électron subit en vertu des actions électriques. Comme deuxième terme du second membre on trouve

$$-\frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}\int \rho \mathfrak{v}_x \mathfrak{F}'_y d\tau,$$

où l'on peut maintenant remplacer $\mathfrak{F}'_y$ par $\mathfrak{F}'_{0y}$ et $\rho$ par $\rho_0$. On obtient ainsi

$$-\frac{\mathfrak{p}_x}{V^2}\mathfrak{v}_x \int \rho_0 \mathfrak{F}'_{0y} d\tau,$$

ce qui disparaît en vertu de (5).

Les équations ($\mathrm{V_c}$) deviennent ainsi $\mathfrak{E} = \mathfrak{F}'$; c.à.d. que même pour des électrons en mouvement $\mathfrak{F}'$ peut être considéré comme la force électrique.

Si, comme nous le supposions, un électron ne peut avoir qu'un mouvement de translation, de sorte que $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{a}_z$ sont les mêmes en tous ses points, on peut écrire pour $\rho$, dans le premier terme après le signe d'égalité de l'équation ($\mathrm{I_c}$),

$$\rho_0 - \mathfrak{a}_x \frac{\partial \rho_0}{\partial x'} - \mathfrak{a}_y \frac{\partial \rho_0}{\partial y'} - \mathfrak{a}_z \frac{\partial \rho_0}{\partial z'},$$

puisque $\rho_0$ est indépendant de $t$.

§ 7. Si nous négligeons maintenant les divers termes dont il a été question plus haut, et que nous retranchons des équations celles que l'on obtient en posant $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{v} = 0$, nous obtenons les équations qui déterminent le vecteur $\mathfrak{H}'$ (qui n'existe pas dans l'état d'équilibre) et le vecteur $\mathfrak{F}' - \mathfrak{F}_0'$. Comme $\mathfrak{F}_0'$ est la force électrique dans l'état d'équilibre et que, comme nous venons de le dire, $\mathfrak{F}'$ est la force électrique pendant le mouvement, le vecteur $\mathfrak{F}' - \mathfrak{F}_0'$ sera l'excès de la force électrique pendant le mouvement sur la force électrique primitive, et il est clair que nous n'avons affaire qu'à *cette* force $\mathfrak{F}' - \mathfrak{F}_0'$, puisque les forces $\mathfrak{F}_0'$ sont incapables de produire un mouvement des électrons.

Remplaçant maintenant $\mathfrak{F}' - \mathfrak{F}_0'$ par $\mathfrak{F}'$, nous obtenons les équations suivantes:

$$\operatorname{div}' \mathfrak{F}' = -4\pi V^2 \left( \mathfrak{a}_x \frac{\partial \rho_0}{\partial x'} + \mathfrak{a}_y \frac{\partial \rho_0}{\partial y'} + \mathfrak{a}_z \frac{\partial \rho_0}{\partial z'} \right), \tag{$\mathrm{I_d}$}$$

$$\operatorname{div}' \mathfrak{H}' = 0, \tag{$\mathrm{II_d}$}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}_z'}{\partial y'} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y'}{\partial z'} = 4\pi\rho_0 \frac{\partial \mathfrak{a}_x}{\partial t'} + \frac{1}{V^2} \frac{\partial \mathfrak{F}_x'}{\partial t'}, \text{ etc.} \tag{$\mathrm{III_d}$}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_z'}{\partial y'} - \frac{\partial \mathfrak{F}_y'}{\partial z'} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_x'}{\partial t'}, \text{ etc.} \tag{$\mathrm{IV_d}$}$$

Nous admettrons en outre que les électrons sont si petits qu'il est permis de ne pas tenir compte de la différence des temps locaux en divers points d'un même électron, de sorte que le déplacement $\mathfrak{a}_x$ p. ex., qui doit être pour les divers points une même fonction du temps $t$, peut également être considéré comme la même fonction de $t'$ pour tous.

Les équations ($\mathrm{I_d}$)—($\mathrm{IV_d}$) ont maintenant tout à fait la même forme que celles relatives à un système sans translation; elles s'appliqueraient à un tel système si $t'$ était le temps général, $x'$, $y'$, $z'$ les coordonnées par rapport à des axes fixes, $\rho_0$ la densité, $\mathfrak{a}$ le déplacement, $\mathfrak{H}'$ la force magnétique et $\mathfrak{F}'$ l'excès de la force électrique pendant le mouvement sur celle qui existe à l'état d'équilibre.

Avant de tirer toutefois, de cette égalité de forme entre les équations des systèmes *avec* et *sans* translation, quelque conclusion relative aux états de mouvement possibles, nous devons songer qu'aux équations ($\mathrm{I_d}$)—($\mathrm{IV_d}$) doivent encore être ajoutées les équations de mouvement pour les électrons, et que nous avons à tenir compte, pour y arriver, non seulement des forces électriques mais encore d'autres forces que nous appellerons moléculaires. Dans la discussion de l'effet de ces forces, nous admettrons que les distances auxquelles elles agissent sont si petites qu'il est permis de négliger la différence entre les temps locaux de deux particules qui agissent l'une sur l'autre.

§ 8. Imaginons deux systèmes matériels, l'un $S$ avec, l'autre $S_0$ sans translation, mais identiques sous tous les autres rapports. Pour le premier nous introduisons le temps local $t'$, et pour le second nous représentons par $t'$ le temps général. Pour tous deux nous donnons à $\rho_0$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{F}'$ et $\mathfrak{H}'$ la signification mentionnée cidessus; nous aurons alors pour les deux systèmes les équations ($\mathrm{I_d}$)—($\mathrm{IV_d}$).

De plus nous nous figurons des mouvements tels que, si à l'instant général $t'$ il existe en un point ($x'$, $y'$, $z'$) de $S_0$ une certaine matière pondérable ou une certaine charge électrique, il existe au même point de $S$, et à l'instant local $t'$, précisément la même matière ou la même charge; cela entraîne naturellement qu'aux points ($x'$, $y'$, $z'$) des deux systèmes, et à des instants correspondants, il existe la même densité $\rho_0$, le même déplacement $\mathfrak{a}$, la même vitesse et la même accélération. Puisqu'une partie des variables dépendantes, dans les équations relatives à $S_0$ et $S$, dépend ainsi de la même manière des variables indépendantes, il est possible de satisfaire aux équations relatives à $S$ en faisant dépendre les autres variables dépendantes de $x'$, $y'$, $z'$, $t'$, de la même manière que pour $S_0$.

Si donc les grandeurs $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{a}_z$, considérées comme fonctions de $x'$, $y'$, $z'$ et $t'$, se rapportent à un état de mouvement réel dans $S_0$, et si nous prenons pour les $\mathfrak{a}_x$, $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{a}_z$ relatifs à $S$ les mêmes fonctions, la force électrique exprimée en fonction de $x'$, $y'$, $z'$ et $t'$ sera également la même dans les deux systèmes. Ce que nous venons de dire ci-dessus des systèmes $S$ et $S_0$ entraîne aussi que dans un très petit espace autour du point ($x'$, $y'$, $z'$), si petit que l'on puisse y négliger les différences entre les temps locaux, on trouve à des instants correspondants exactement la même distribution de la matière. Si nous admettons donc que la translation *ne* modifie *pas* les forces moléculaires, c.à.d. que dans les deux systèmes ces forces dépendent de la même manière de la distribution de la matière, un électron de $S$ ne subira pas seulement la même force électrique, mais encore la même force moléculaire que l'électron correspondant de $S_0$. En outre, comme les masses et les accélérations sont les mêmes dans les deux cas, il sera satisfait aux équations de mouvement des électrons dans $S$ dès qu'il en est ainsi dans $S_0$, de sorte qu'à chaque état de mouvement dans $S_0$ correspond, de la manière susdite, un état possible de mouvement dans $S$. Nous arrivons ainsi à la conclusion suivante:

S'il peut exister dans un corps ou un système de corps sans translation un état de mouvement où les déplacements des électrons et les composantes des vecteurs $\mathfrak{F}'$ et $\mathfrak{H}'$ sont des fonctions déterminées des coordonnées et du temps, dans le même corps, ou le même système, animé d'une translation, il peut exister un état de mouvement où les déplacements et les composantes de $\mathfrak{F}'$ et $\mathfrak{H}'$ sont les mêmes fonctions des coordonnées et du temps local. Telle est la proposition que j'ai déduite antérieurement en suivant une voie beaucoup plus longue, et par laquelle s'expliquent la plupart des phénomènes dont il est question dans la théorie de l'aberration.

§ 9. Pour arriver à cette proposition j'ai admis que les forces moléculaires ne s'exercent qu'à des distances extrêmement petites. Si la distance entre deux quantités de matière, agissant encore sensiblement l'une sur l'autre, était si grande que l'on ne pourrait pas négliger la différence de leurs temps locaux, la proposition ne serait plus vraie si les forces moléculaires n'étaient absolument pas modifiées par la translation. On reconnaît toutefois que la proposition serait encore exacte si ces forces étaient modifiées de telle façon que la force agissant entre les points matériels $(x'_1, y'_1, z'_1)$ et $(x'_2, y'_2, z'_2)$ ne dépendît pas des coordonnées *au même instant absolu*, mais des coordonnées *au même temps local*. S'il existait donc des phénomènes sur lesquels l'inégalité des temps locaux, pour des particules agissant l'une sur l'autre, pourrait avoir une influence sensible, et si néanmoins l'expérience prouvait que la proposition précédente est applicable à des états de mouvement correspondants, ce serait là une indication de l'existence d'une influence, comme celle dont nous venons de parler, de la translation sur les forces moléculaires, ce qui prouverait que ces forces sont transmises par l'éther. Il se peut que la rotation naturelle du plan de polarisation soit un phénomène de ce genre.

§ 10. Nous avons jusqu'ici négligé les termes de l'ordre $\mathfrak{p}_x/V^2$. On sait que ces termes interviennent dans l'expérience d'interférence de M. MICHELSON, où deux rayons lumineux interféraient après avoir parcouru dans un sens et dans l'autre des distances assez grandes, l'un parallèlement à la direction du mouvement terrestre, l'autre perpendiculairement à cette direction. Pour expliquer le résultat négatif de cette expérience, FITZGERALD et moi nous avons admis que par la translation les dimensions des solides qui portaient les instruments dont M. MICHELSON s'est servi étaient modifiées.

Récemment, M. LIÉNARD a émis l'opinion [1]) que ma théorie conduirait à un résultat positif de l'expérience, si cette dernière pouvait être faite dans de telles conditions, que les rayons traverseraient non pas l'air mais un diélectrique solide ou liquide.

Il est impossible de prévoir avec certitude ce que l'on observerait dans ce cas puisque, admettant l'hypothèse du changement des dimensions, l'on devrait admettre aussi une modification des positions relatives des molécules de la substance traversée par la radiation. De plus, le déplacement pourrait modifier les forces moléculaires, et cette influence pourrait très bien avoir une grandeur du deuxième ordre.

Les considérations suivantes pourront servir, non à prouver que l'expérience doit toujours donner un résultat négatif, mais à faire voir que tel pourrait fort bien être le cas, et à mettre en lumière ce que cela signifierait au point de vue théorique.

Je reviens à cet effet aux équations ($\mathrm{I}_c$)—($\mathrm{V}_c$) et je commence par y négliger, et pour les mêmes raisons, les termes omis au § 6. Par $\mathfrak{F}'$ et $\mathfrak{E}$ (force électrique) j'entends l'excès de ces vecteurs pendant le mouvement sur les mêmes grandeurs à l'état d'équilibre (§ 7). Puis je mets les équations sous la même forme que celles qui se rapportent à un système en repos, en introduisant, à la place de $x'$, $y'$, $z'$, $t'$, $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{a}$ et $\rho_0$, de nouvelles grandeurs qui se distinguent des anciennes par certains facteurs constants; pour l'uniformité des formules, j'affecterai toutes ces nouvelles grandeurs d'un double accent.

En désignant par $\varepsilon$ un facteur indéterminé, ne différant de

[1]) L'Éclairage Électrique, 1898.

l'unité que d'une quantité du deuxième ordre, nous poserons

$$x = \frac{\varepsilon}{k} x'', \quad y = \varepsilon y'', \quad z = \varepsilon z'', \tag{6}$$

$$\mathfrak{a}_x = \frac{\varepsilon}{k} \mathfrak{a}''_x, \quad \mathfrak{a}_y = \varepsilon \mathfrak{a}''_y, \quad \mathfrak{a}_z = \varepsilon \mathfrak{a}''_z, \tag{7}$$

$$\rho_0 = \frac{k}{\varepsilon^3} \rho''_0, \tag{8}$$

$$\mathfrak{F}'_x = \frac{1}{\varepsilon^2} \mathfrak{F}''_x, \quad \mathfrak{F}'_y = \frac{1}{\varepsilon^2} \mathfrak{F}''_y, \quad \mathfrak{F}'_z = \frac{1}{\varepsilon^2} \mathfrak{F}''_z,$$

$$\mathfrak{H}'_x = \frac{k}{\varepsilon^2} \mathfrak{H}''_x, \quad \mathfrak{H}'_y = \frac{k}{\varepsilon^2} \mathfrak{H}''_y, \quad \mathfrak{H}'_z = \frac{k}{\varepsilon^2} \mathfrak{H}''_z,$$

$$t' = k\varepsilon t'', \tag{9}$$

de sorte que $t''$ est un temps local modifié; les équations prennent alors la forme suivante:

$$\mathrm{div}'' \, \mathfrak{F}'' = 4\pi V^2 \left( -\mathfrak{a}''_x \frac{\partial \rho''_0}{\partial x''} - \mathfrak{a}''_y \frac{\partial \rho''_0}{\partial y''} - \mathfrak{a}''_z \frac{\partial \rho''_0}{\partial z''} \right), \tag{I$_e$}$$

$$\mathrm{div}'' \, \mathfrak{H}'' = 0, \tag{II$_e$}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{H}''_z}{\partial y''} - \frac{\partial \mathfrak{H}''_y}{\partial z''} = 4\pi \rho''_0 \frac{\partial \mathfrak{a}''_x}{\partial t''} + \frac{1}{V^2} \frac{\partial \mathfrak{F}''_x}{\partial t''}, \text{ etc.} \tag{III$_e$}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}''_z}{\partial y''} - \frac{\partial \mathfrak{F}''_y}{\partial z''} = -\frac{\partial \mathfrak{H}''_x}{\partial t''}, \text{ etc.} \tag{IV$_e$}$$

$$\mathfrak{E}_x = \frac{1}{\varepsilon^2} \mathfrak{F}''_x, \quad \mathfrak{E}_y = \frac{1}{k\varepsilon^2} \mathfrak{F}''_y, \quad \mathfrak{E}_z = \frac{1}{k\varepsilon^2} \mathfrak{F}''_z. \tag{V$_e$}$$

Les équations ($\mathrm{I}_e$)—($\mathrm{IV}_e$) peuvent évidemment s'appliquer aussi à un système en repos; $x''$, $y''$, $z''$ représentent alors les coordonnées, $t''$ le temps général, $\mathfrak{a}''$ le déplacement, $\rho''_0$ la densité, $\mathfrak{H}''$ la force magnétique et $\mathfrak{F}''$ la force électrique.

Soit maintenant $S_0$ un pareil système en repos, système réellement existant, et $S$ un deuxième système, animé d'une translation dans lequel les grandeurs $x''$, $y''$, $z''$, $\mathfrak{a}$, $\rho''$, $t''$ sont liées aux coordonnées, déplacements, densité et temps par les relations (6)—

(9). Nous supposons que dans l'état d'équilibre $\rho_0''$ dépend de $x''$, $y''$, $z''$ de la même façon dans les deux systèmes. Cela inclut que le système $S$ peut être déduit de $S_0$ par les dilatations indiquées par (6), et que dans ces dilatations la charge de chaque élément de volume n'est pas modifiée. Nous admettrons que, quand on imprime un mouvement de translation à un système $S_0$ primitivement en repos, ce système passe *de lui-même* à l'état $S$. Nous admettrons en outre que $S$ peut être déduit de cette façon de $S_0$, et qu'on obtient $S$ par le fait même d'une translation communiquée à $S_0$, non seulement pour ce qui regarde la position des électrons, mais encore au point de vue de la distribution de toute autre matière.

Quant aux mouvements des deux systèmes nous les supposerons tels qu'à des moments correspondants — c'est-à-dire pour les mêmes valeurs de $t''$ —, les configurations de $S_0$ et de $S$ aient toujours entre elles la même relation que nous venons d'indiquer pour les positions d'équilibre, c'est-à-dire qu'on obtienne toujours la configuration de $S$ en faisant subir à celle de $S_0$ les dilatations (6). Il s'ensuit que dans les deux systèmes $\mathfrak{a}_x''$, $\mathfrak{a}_y''$, $\mathfrak{a}_z''$ seront les mêmes fonctions de $x''$, $y''$, $z''$ et $t''$, et il sera possible de satisfaire aux équations en prenant également pour $\mathfrak{F}_x''$, $\mathfrak{H}_x''$ etc. les mêmes fonctions dans les deux cas.

C'est ainsi qu'en partant d'un état de mouvement réellement existant dans $S_0$ on obtient un état de mouvement fictif du système $S$. Reste à savoir quelles conditions doivent être remplies pour que ce mouvement puisse réellement avoir lieu dans $S$, c'est-à-dire dans un système que nous pouvons considérer comme *le même* que $S_0$, modifié seulement par la translation. Pour répondre à cette question, nous considérerons les composantes de la force qui agit sur un électron.

D'après ($V_e$) la force électrique dans $S$ suivant l'axe des $x$ est $1/\varepsilon^2$ fois plus grande que la force correspondante dans $S_0$, tandis que les autres composantes de la force électrique doivent être prises avec le facteur $1/k\varepsilon^2$. Quant aux forces moléculaires, nous allons supposer que les distances auxquelles elles sont sensibles soient si petites que l'on puisse introduire la simplification mentionnée au § 7, et ensuite que ces forces ne subissent pas de modification de l'ordre $\mathfrak{p}_x/V$. Il pourrait néanmoins exister une modification du second ordre, et je supposerai qu'il en est réellement ainsi. J'admettrai en effet que, si l'on a dans $S$ et $S_0$ *la même* matière pondérable, les composantes des forces moléculaires dans les deux systèmes se distinguent par le même facteur que les composantes des forces électriques. La même relation existe alors entre les forces totales, et l'état de mouvement imaginé dans $S$ pourra exister, si ce qui vient d'être admis pour les forces s'applique aussi aux produits des masses et des accélérations.

D'après nos hypothèses, les accélérations dans les directions des trois axes sont dans $S$ respectivement $1/k^3\varepsilon$, $1/k^2\varepsilon$, $1/k^2\varepsilon$ fois plus grandes que dans $S_0$. Par la considération des accélérations et des forces dans le sens de l'axe des $x$, on arrive donc à un rapport des masses égal à $k^3/\varepsilon$, et par la considération des autres composantes au rapport $k/\varepsilon$.

Si nous avions trouvé la même valeur, ce rapport aurait pu devenir égal à 1 pour une valeur déterminée de $\varepsilon$. A présent cela n'est possible que pour une des deux valeurs. Pour faire en sorte que le mouvement imaginé de $S$ puisse avoir lieu, et que, par conséquent, les phénomènes dans un corps en repos et dans un corps mobile se correspondent de la manière indiquée, nous devons donc admettre que les masses des électrons se modifient pendant que, par les dilatations (6), le système $S_0$ passe à l'état $S$, et ces modifications doivent être telles que des accélérations dans diverses directions doivent être multipliées par des masses inégales. Cette idée n'est pas tout à fait inadmissible, puisque la masse effective d'un électron peut dépendre de ce qui se passe dans l'éther, et pendant une translation la direction de celle-ci et une direction perpendiculaire ne sont pas équivalentes.

Si cette idée pouvait être admise on pourrait déduire, de la façon indiquée par nos formules, d'un état de mouvement sur une terre en repos, un état de mouvement qui serait possible dans le même système mais placé sur une terre en mouvement. Et c'est un point digne de remarque que les dilatations déterminées par (6) sont précisément celles que j'ai dû admettre pour expliquer l'expérience de M. MICHELSON. Remarquons encore que le facteur $\varepsilon$ doit avoir une valeur déterminée, que l'on ne pourrait toutefois arriver à connaître que par une connaissance plus approfondie des phénomènes.

Si toutes les hypothèses précédentes étaient exactes, l'expérience de M. MICHELSON devrait donner un résultat négatif, indépendamment de la substance traversée par les rayons lumineux, et même quand un des rayons traverse p. ex. l'air, l'autre du verre. Si l'on observait dans le cas $S_0$, c.à.d. la terre étant immobile, une certaine distribution d'ombre et de lumière (franges d'interférence) dans le système, on devrait observer dans le cas $S$ une distribution d'ombre et de lumière que l'on pourrait déduire de la précédente par les dilatations (6), à condition d'opérer dans le cas $S$ avec une lumière dont la durée de vibration serait $k\varepsilon$ fois aussi grande que pour $S_0$. La nécessité de cette dernière condition résulte de (9). Mais comme ce nombre $k\varepsilon$ serait le même dans toutes les positions de l'appareil, on arrive à cette conclusion que si l'on tournait l'appareil, en opérant continuellement avec *la même* espèce de lumière, les franges d'interférence coïncideraient constamment avec les mêmes parties du système pondérable (p. ex. avec les mêmes divisions d'un micromètre).

# THE ROTATION OF THE PLANE OF POLARIZATION IN MOVING MEDIA [1]

§ 1. In my „Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern" (Leiden, 1895) [2] I examined the propagation of light in transparent bodies having a constant translation with velocity $\mathfrak{p}$, the aether being supposed to remain at rest, and tried to find, in how far optical phenomena may be affected by this motion. In the case of the rotation of the plane of polarization in optically active substances, I had to leave the question undecided. Indeed, the relation between the electric force $\mathfrak{E}$ and the electric moment $\mathfrak{M}$, to which I was led by certain general principles (linear form of the equations, isotropy of structure and reversibility of the motions) does not only contain the coefficient $j$, which determines the rotation in the quiescent medium; there is besides a second coefficient $k$, which is multiplied by the velocity $p$, and whose ratio to $j$ I could not determine, because I wished to refrain from special hypotheses as to the mechanism of the phenomenon.

The equation in question is [3]

$$\mathfrak{E} = \sigma\mathfrak{M} + j \operatorname{Rot} \mathfrak{M} + k[\dot{\mathfrak{M}} \cdot \mathfrak{p}], \tag{1}$$

and the rotation for unit length was found to be [4]

$$\omega = \frac{2\pi}{\sigma^2} n'^2 j,$$

if the body is at rest, and

$$\omega = \frac{2\pi}{\sigma^2} n'^2 \left(1 + \frac{W\mathfrak{p}_x}{c^2}\right) j + \frac{2\pi}{\sigma^2} n'^2 W\mathfrak{p}_x k, \tag{2}$$

---

[1]) Versl. Akad. Amsterdam. **10**, 793, 1902. Proc. Acad. Amsterdam. **4**, 669, 1902.

[2]) Collected Papers, this volume, 1.

[3]) l.c., p. 80. $\sigma$ is the coefficient which determines the index of refraction (this volume, p. 79).

[4]) l.c., p. 118 (this volume, p. 118).

if it has a translation along the axis of $x$, the light travelling in the same direction. In these formulae $n'$ is the frequency, i. e. the number of vibrations in the time $2\pi$, for an observer, moving with the medium, $W$ the mean of the velocities of right-handed and left-handed circularly polarized rays in the medium at rest, and $c$ the velocity of light in the aether.

The two terms with $\mathfrak{p}_x$ would annul each other, if

$$k = -\frac{\dot{j}}{c^2}. \tag{3}$$

I saw however no reason to admit this relation.

§ 2. Mr. LARMOR has published [1]) some objections to my investigation. According to him we may infer from theory that a translation has *no* influence on the rotation. Mr. LARMOR believes the contradiction between our results to be due to an error on my side [2]), consisting in an oversight which he points out pp. 214 and 215 of his work.

A new examination of the problem has convinced me that LARMOR must be wrong in this assertion, the formula (2) following undoubtedly from my fundamental equations. I also found that the equations of LARMOR are the same as mine, if in these one puts $k = 0$, and that it is only in consequence of a mistake that his analysis does not lead him to an expression agreeing with the first term in (2). I shall now show that, whereas my equations leave room for a compensation, just because they contain the second coefficient $k$, LARMOR, treating only the particular case $k = 0$, ought to have arrived at a rotation, different for a moving and for a quiescent body.

§ 3. In my calculations I used the equations

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{Div}\,\mathfrak{D} = 0,\\
&\mathrm{Div}\,\mathfrak{H} = 0,\\
&\mathrm{Rot}\,\mathfrak{H}' = 4\pi\dot{\mathfrak{D}},\\
&\mathrm{Rot}\,\mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{H}},\\
&\mathfrak{E} = 4\pi c^2\mathfrak{d} + [\mathfrak{p}\,.\,\mathfrak{H}],\\
&\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} - 4\pi[\mathfrak{p}\,.\,\mathfrak{d}],\\
&\mathfrak{D} = \mathfrak{d} + \mathfrak{M},
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

to which is to be added the relation (1).

[1]) J. LARMOR, Aether and Matter, Cambridge, 1900.
[2]) J. LARMOR, l.c., p. 62.

The meaning of $\mathfrak{E}$ and $\mathfrak{M}$ has already been mentioned; $\mathfrak{H}$ is the magnetic force and the remaining vectors are defined by the equations themselves. The components of the vectors are regarded as functions of the time and of the coordinates $x$, $y$, $z$, referred to axes, fixed to the moving medium; the time-rates of variation for constant values of these coordinates are denoted by $\dot{\mathfrak{H}}$ and $\dot{\mathfrak{D}}$.

We may omit the first and second formulae, these being implied, in the cases to be considered, in the third and fourth equations. Moreover, just like LARMOR, we shall restrict the investigation to bodies, moving parallel to the axis of $x$, and traversed by rays of light of this same direction. Then, the only independent variables are $x$ and $t$, and the equations (4) become

$$\left.\begin{array}{ll}
-\dfrac{\partial \mathfrak{H}'_z}{\partial x} = 4\pi\dot{\mathfrak{D}}_y, & \dfrac{\partial \mathfrak{H}'_y}{\partial x} = 4\pi\dot{\mathfrak{D}}_z, \\
-\dfrac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} = -\dot{\mathfrak{H}}_y, & \dfrac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} = -\dot{\mathfrak{H}}_z, \\
\mathfrak{E}_y = 4\pi c^2\mathfrak{d}_y - \mathfrak{p}_x\mathfrak{H}_z, & \mathfrak{E}_z = 4\pi c^2\mathfrak{d}_z + \mathfrak{p}_x\mathfrak{H}_y, \\
\mathfrak{H}'_y = \mathfrak{H}_y + 4\pi\mathfrak{p}_x\mathfrak{d}_z, & \mathfrak{H}'_z = \mathfrak{H}_z - 4\pi\mathfrak{p}_x\mathfrak{d}_y, \\
\mathfrak{D}_y = \mathfrak{d}_y + \mathfrak{M}_y, & \mathfrak{D}_z = \mathfrak{d}_z + \mathfrak{M}_z.
\end{array}\right\} \quad (5)$$

§ 4. In LARMOR's equations [1]) the velocity of translation $\mathfrak{p}_x$ is represented by $v$, the sign $\delta/dt$ is used for those time-rates of variation, which I have indicated by a dot, and the sign $d/dt$ for the differential coefficients relating to a fixed point of space. Hence, in his notation,

$$\frac{\delta}{dt} = \frac{d}{dt} + v\frac{d}{dx}.$$

If now, we write $\dot{\varphi}$ instead of $\delta\varphi/dt$, and $\dot{\varphi} - v\,\partial\varphi/\partial x$ instead of $d\varphi/dt$ ($\varphi$ being any quantity, depending on place and time), and if besides we suppose the substance to be unmagnetizable, so that $\mu = 1$, the equations of LARMOR become

$$\left.\begin{array}{l}
-\dfrac{\partial\gamma}{\partial x} = 4\pi(\dot{g} + \dot{g}') - 4\pi v\dfrac{\partial(g + g')}{\partial x}, \\
\dfrac{\partial\beta}{\partial x} = 4\pi(\dot{h} + \dot{h}') - 4\pi v\dfrac{\partial(h + h')}{\partial x},
\end{array}\right\}$$

[1]) l.c., p. 212.

$$-\frac{\partial R}{\partial x} = -\dot{b}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\dot{c},$$

$$Q = 4\pi c^2 g - vc, \qquad R = 4\pi c^2 h + vb,$$
$$\beta = b - 4\pi v h', \qquad \gamma = c + 4\pi v g'.$$

These are the same as (5), as will be seen, if we replace

$$Q, \quad R, \quad g, \quad h, \quad g', \quad h'$$

by

$$\mathfrak{E}_y, \quad \mathfrak{E}_z, \quad \mathfrak{d}_y, \quad \mathfrak{d}_z, \quad \mathfrak{M}_y, \quad \mathfrak{M}_z$$

and

$$b, \quad c, \quad \beta + 4\pi v(h + h'), \quad \gamma - 4\pi v(g + g')$$

by

$$\mathfrak{H}_y, \quad \mathfrak{H}_z, \quad \mathfrak{H}'_y, \quad \mathfrak{H}'_z.$$

§ 5. As to the relation between electric polarization and electric force, this is given by LARMOR in the form [1])

$$g' = \frac{K-1}{4\pi c^2} Q + \frac{\varepsilon_2}{4\pi c^2} \frac{\partial R}{\partial x},$$

$$h' = \frac{K-1}{4\pi c^2} R - \frac{\varepsilon_2}{4\pi c^2} \frac{\partial Q}{\partial x},$$

or

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_y &= \frac{K-1}{4\pi c^2} \mathfrak{E}_y + \frac{\varepsilon_2}{4\pi c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}, \\ \mathfrak{M}_z &= \frac{K-1}{4\pi c^2} \mathfrak{E}_z - \frac{\varepsilon_2}{4\pi c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Now, in my formula (1) the rotational terms are very much smaller than the first term $\sigma\mathfrak{M}$. We may therefore, in those terms, replace $\mathfrak{M}$ by $\mathfrak{E}/\sigma$. Hence

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{\sigma} \mathfrak{E} - \frac{j}{\sigma^2} \operatorname{Rot} \mathfrak{E} - \frac{k}{\sigma^2} [\dot{\mathfrak{E}} \cdot \mathfrak{p}], \tag{7}$$

and, in the case under consideration,

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_y &= \frac{1}{\sigma} \mathfrak{E}_y + \frac{j}{\sigma^2} \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} - \frac{k}{\sigma^2} \mathfrak{p}_x \dot{\mathfrak{E}}_z, \\ \mathfrak{M}_z &= \frac{1}{\sigma} \mathfrak{E}_z - \frac{j}{\sigma^2} \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} + \frac{k}{\sigma^2} \mathfrak{p}_x \dot{\mathfrak{E}}_y. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

[1]) l.c., p. 211. As I shall not consider the magnetic rotation, I have put $\varepsilon_1 = 0$.

If this is compared with (6), it appears that the formulae of LARMOR agree with the particular case $k = 0$ of my theory, and that the coefficients we have introduced are related to each other as follows:

$$\frac{K-1}{4\pi c^2} = \frac{1}{\sigma}, \quad \frac{\varepsilon_2}{4\pi c^2} = \frac{j}{\sigma^2}. \tag{9}$$

§ 6. For $k = 0$ my formula (2) gives

$$\omega = \frac{2\pi}{\sigma^2} n'^2 \left(1 + \frac{W\mathfrak{p}_x}{c^2}\right) j, \tag{10}$$

a value depending on $\mathfrak{p}_x$. On the contrary, LARMOR's result does not contain the velocity of translation, but this is only so, because his calculation of the angle of rotation is not quite exact.

As is well known, this angle may be expressed in the velocities of propagation of right- and left-handed circularly polarized rays. In doing this, we have first of all to assign to the period of vibration, taken with reference to a fixed point of the substance, a definite value $\tau$, the same for the two kinds of rays. If then, $V_1'$ and $V_2'$ are the velocities of propagation, taken relatively to the moving ponderable matter, we shall have

$$\omega = \frac{\pi}{\tau}\left(\frac{1}{V_1'} - \frac{1}{V_2'}\right). \tag{11}$$

For the velocity of one of the circularly polarized rays, LARMOR finds (p. 214)

$$V_1' = \frac{c}{K_1^{\frac{1}{2}}} - \frac{v}{K_1}, \tag{12}$$

where

$$K_1 = K + \frac{2\pi\varepsilon_2}{\lambda}, \tag{13}$$

$\lambda$ being the wave-length. By substituting this value in (12), putting at the same time

$$\lambda = V_1' \tau, \tag{14}$$

we might obtain an equation, by means of which $V_1'$ could be determined in function of $\tau$. We may however simplify by observing that $\varepsilon_2$ has a very small value and that in (13) $\lambda$ occurs only in a term, containing this factor $\varepsilon_2$. For this reason, it is allowed to substitute for $\lambda$ the value corresponding to $\varepsilon_2 = 0$. Thus, by (12), (13) and (14)

$$\lambda = \left(\frac{c}{K^{\frac{1}{2}}} - \frac{v}{K}\right)\tau. \tag{15}$$

Let us now put

$$\frac{c}{K_1^{\frac{1}{2}}} = U_1,$$

i. e., on account of (13), if we neglect the square of $\varepsilon_2$,

$$U_1 = \frac{c}{K^{\frac{1}{2}}}\left(1 - \frac{\pi\varepsilon_2}{K\lambda}\right); \tag{16}$$

then (12) takes the form

$$V_1' = U_1 - \frac{U_1^2}{c^2}v. \tag{17}$$

In order to obtain the velocity of the other circularly polarized ray, we have only to change the sign of $\varepsilon_2$, so that we may write

$$V_2' = U_2 - \frac{U_2^2}{c^2}v, \tag{18}$$

where

$$U_2 = \frac{c}{K^{\frac{1}{2}}}\left(1 + \frac{\pi\varepsilon_2}{K\lambda}\right). \tag{19}$$

It is to be remarked, that in this equation, as well as in (16), $\lambda$ has the value (15).

Now, if we neglect terms containing $v^2$, as we shall always do, the formulae (17) and (18) are the same as the two first equations, given by LARMOR on p. 215. Further, it is there pointed out that in the result for the angle of rotation the quantities depending on the last terms of (17) and (18) disappear. Indeed

$$\frac{1}{V_1'} = \frac{1}{U_1}\left(1 + \frac{U_1}{c^2}v\right) = \frac{1}{U_1} + \frac{v}{c^2},$$

$$\frac{1}{V_2'} = \frac{1}{U_2} + \frac{v}{c^2},$$

whence

$$\omega = \frac{\pi}{\tau}\left(\frac{1}{U_1} - \frac{1}{U_2}\right).$$

So far, I agree with LARMOR's calculation. But, in coming to this conclusion, he has overlooked that the value of $\omega$ still contains the velocity of translation. This is seen by referring to (16) and (19). Using these, we find

$$\frac{1}{U_1} = \frac{K^{\frac{1}{2}}}{c}\left(1 + \frac{\pi\varepsilon_2}{K\lambda}\right), \quad \frac{1}{U_2} = \frac{K^{\frac{1}{2}}}{c}\left(1 - \frac{\pi\varepsilon_2}{K\lambda}\right),$$

$$\frac{1}{U_1} - \frac{1}{U_2} = \frac{2\pi\varepsilon_2}{K^{\frac{1}{2}}c\lambda},$$

and, taking from (15)

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{K^{\frac{1}{2}}}{c\tau}\left(1 + \frac{v}{cK^{\frac{1}{2}}}\right),$$

$$\omega = \frac{2\pi^2\varepsilon_2}{c^2\tau^2}\left(1 + \frac{v}{cK^{\frac{1}{2}}}\right). \tag{20}$$

If the body were at rest, the velocities of the circularly polarized rays would be $c/K_1^{\frac{1}{2}}$ and $c/K_2^{\frac{1}{2}}$, if $K_2 = K - 2\pi\varepsilon_2/\lambda$. The mean of these values, up to the first power of $\varepsilon_2$, is

$$W = \frac{c}{K^{\frac{1}{2}}}.$$

If we also take into account the relation (9) and the value

$$n' = \frac{2\pi}{\tau}$$

of the frequency, we find that (20) does not differ from my result, expressed in the equation (10).

§ 7. In order to show that the rotation must be independent of the motion of the earth, LARMOR adduces also the general considerations that are to be found in Chapter X of his work; from these the proposition may really be inferred, though not without an auxiliary hypothesis. As is well known, the theory of optical phenomena in moving bodies is simplified very much by the introduction, instead of the time $t$, of the so-called "local" time $t'$ as an independent variable, the equation

$$t' = t - \frac{1}{c^2}(\mathfrak{p}_x x + \mathfrak{p}_y y + \mathfrak{p}_z z)$$

serving to define this quantity in terms of $t$ and the coordinates $x$, $y$, $z$ with respect to axes fixed in the body. By means of this contrivance the electric force, exerted by a small electrically polarized particle $P$ on an electron $Q$, situated at some distance, is made to be determined by equations of the same form, whether there be or not a common translation of $P$ and $Q$.

Let [1]) $\mathfrak{m}$ be the electric moment, varying with the time, of $P$, $x$, $y$, $z$ the coordinates of the kind just mentioned in the surrounding field, $r$ the distance to $P$; then for any point in the field, at its own local time $t'$, the components of the said electric force will be

$$c^2\left\{\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\mathfrak{m}_y}{r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(\frac{\mathfrak{m}_z}{r}\right)-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\mathfrak{m}_x}{r}\right)-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\mathfrak{m}_x}{r}\right)\right\},$$

etc.,

provided we take for $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{m}_z$ the values corresponding to the instant at which the local time in $P$ is $t' - r/c$, so that the numerators in the expressions $\mathfrak{m}_x/r$, $\mathfrak{m}_y/r$, $\mathfrak{m}_z/r$ depend on $t'$, $x$, $y$, $z$. The differations must be performed for a constant $t'$.

§ 8. We shall now suppose that a dielectric contains a very large number of particles, in which electric moments $\mathfrak{m}$ can be excited, that the sole interaction between these consists in the above mentioned electric forces, and that for each particle the connexion between its moment and the electric force is not altered by a translation. If then, in the absence of such a motion, $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{m}_z$ for the different particles of the body can be certain functions of the time $t$, we shall obtain a state that is possible in the moving body, by supposing these moments to be exactly the same functions of the local time $t'$. This follows at once from what has been said in the last §. It is also easily seen that in a point fixed to the ponderable matter, the time of vibration will be the same in the two states, and that, if the first of these states consists in a propagation of light with rotation of the

[1]) See my "Versuch", § 33. (This volume, pages 51-53).

plane of polarization, we shall have in the second state a similar propagation, the angle between the vibrations in any two points of the body being the same in the two cases. The rotation would therefore be independent of the translation, always provided we compare cases in which the frequency in a point of the body has a definite value.

§ 9. What precedes calls forth two questions. In the first place: can a substance, like the one we have supposed, really have the rotatory property? And, secondly, if this be so, is the picture we have formed of the substance, the only one that agrees with the phenomena, or are there others, equally satisfying?

The answer to the first question must undoubtedly be affirmative. Within the limits of the hypotheses of § 8 there is room for a large variety of optical properties, which may depend either on the form of the connexion between the electric force and the moment of a single particle, or on the relative position of the different particles, and a peculiar arrangement may very well produce a rotation of the plane of polarization. For this it is only necessary that the structure of the system should be asymmetric, i.e. that the system should not be in every respect equal to its reflected image. If, in such a case, we consider the electric interaction between neighbouring particles, we shall have to introduce into the equations certain terms of a rotational character. As a simple example of the required structure we may take a molecule containing 4 unequal particles situated at the angles of an asymmetric tetrahedron, and each of which may be electrically polarized.

As to the second question, it is clear that in real bodies there may very well be circumstances, differing from those we have supposed in § 8. We may e. g. conceive a movable electron, situated at one angle of the asymmetric tetrahedron, to be subject not only to the electric action of a moment, situated at one of the other angles, but also to a force of some other kind ("molecular" force), issuing from that angle. If, in such a case, the action between two elements of matter $A$ and $B$ were such that the action on $A$ at the local time $t'$ were determined by the state of $B$ *at the same local time*, what has been said about two corresponding states might still be true. But this need no longer be so, if the action on $A$ at the time $t$ depends on the state of $B$ *at that same instant.*

However this may be, it must certainly be deemed possible that after all the rotation is not altered by a uniform motion of the active substance; this possibility would however be excluded if we began by omitting in the equation (1) the term with $k$.

§ 10. The necessity of retaining this term may also be seen in the following way. In the fundamental equations (4) the coordinates are already taken relative to axes, moving with the medium, but the local time has not yet been introduced. We shall now do this, so that our independent variables become $x$, $y$, $z$ and $t'$. We shall distinguish by accents the differential coefficients with respect to $x$, $y$, $z$, for a constant $t'$ from the corresponding differential coefficients, taken for a constant $t$. We shall likewise denote by Div′ and Rot′ operations, in which the new differentiations occur in the same way as the original ones in the operations, represented by Div and Rot.

The formulae of transformation are

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)' - \frac{\mathfrak{p}_x}{c^2}\frac{\partial}{\partial t'}, \text{ etc.}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'},$$

and, if $\mathfrak{A}$ be any vector,

$$\text{Rot } \mathfrak{A} = \text{Rot}' \, \mathfrak{A} + \frac{1}{c^2}[\dot{\mathfrak{A}} \cdot \mathfrak{p}]. \tag{21}$$

Using these, and introducing instead of $\mathfrak{D}$ the new vector

$$\mathfrak{D}' = \mathfrak{D} + \frac{1}{4\pi c^2}[\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{H}], \tag{22}$$

we may write for the first four of the equations (4)

$$\begin{aligned} \text{Div}' \, \mathfrak{D}' &= 0, \\ \text{Div}' \, \mathfrak{H}' &= 0, \\ \text{Rot}' \, \mathfrak{H}' &= 4\pi\dot{\mathfrak{D}}', \\ \text{Rot}' \, \mathfrak{E} &= -\dot{\mathfrak{H}}'. \end{aligned}$$

These formulae have the same form as those which, for a body at rest, determine $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$ and $\mathfrak{H}$, as functions of $x$, $y$, $z$ and $t$; the rotation of the plane of polarization will therefore be independent of the translation, if the connexion between $\mathfrak{D}'$ and $\mathfrak{E}$ in one, and that between $\mathfrak{D}$ and $\mathfrak{E}$ in the other case correspond to each other in the same way. Now, if, according to (7), we put for the body at rest

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{\sigma}\,\mathfrak{E} - \frac{j}{\sigma^2}\,\mathrm{Rot}\,\dot{\mathfrak{E}},$$

or

$$\mathfrak{D} - \frac{1}{4\pi c^2}\,\mathfrak{E} = \frac{1}{\sigma}\,\mathfrak{E} - \frac{j}{\sigma}\;\mathrm{Rot}\,\dot{\mathfrak{E}},$$

the said agreement requires for the moving system

$$\mathfrak{D}' - \frac{1}{4\pi c^2}\,\mathfrak{E} = \frac{1}{\sigma}\,\mathfrak{E} - \frac{j}{\sigma^2}\,\mathrm{Rot}'\,\dot{\mathfrak{E}}.$$

But, for this system, by (22), joined to the $5^{\mathrm{th}}$ and $7^{\mathrm{th}}$ of the equations (4),

$$\mathfrak{D}' - \frac{1}{4\pi c^2}\,\mathfrak{E} = \mathfrak{M};$$

so that we find by using (21)

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{\sigma}\,\mathfrak{E} - \frac{j}{\sigma^2}\,\mathrm{Rot}\,\dot{\mathfrak{E}} + \frac{j}{c^2\sigma^2}\,[\dot{\mathfrak{E}}\,.\,\mathfrak{p}].$$

This is precisely the formula (7), if for $k$ we take the value (3).

# THE INTENSITY OF RADIATION AND THE MOTION OF THE EARTH [1]).

Many years ago FIZEAU [2]) remarked that, if the aether does not follow the earth in its annual motion, the radiation, emitted by a terrestrial source of light or heat $L$, might possibly have unequal intensities in different directions. Let $A$ be a point that is likewise fixed to the earth, and whose distance from $L$ we shall denote by $l$. Then, if $LA$ have the direction of the earth's velocity $v$, a vibration produced by $L$ will have to travel over a length

$$l \frac{c}{c - v}$$

($c$ velocity of light), before it reaches $A$. On the contrary, its course will be

$$l \frac{c}{c + v},$$

if $LA$ has the opposite direction. FIZEAU expected that the intensities received by $A$ in the two cases would be inversely as the squares of these expressions, so that there would be a difference which one might hope to detect by means of suitable experiments with a thermo-electric battery.

From our present views regarding electric and optical phenomena in moving bodies it may be inferred that the experiment, proposed by FIZEAU would have a negative result, the amount of heat which is imparted to an absorbing body being independent of the earth's motion.

It will suffice to consider a simple case, omitting all terms depending on the square of $v$. Let there be a single radiating

---

1) Proc. Acad. Amsterdam. **4**, 678, 1902.

2) Pogg. Annalen. **92**, 652, 1854.

particle in the origin of coordinates, and let it have an electric moment

$$\mathfrak{m}_y = a \cos nt,$$

in the direction of $OY$. In order to find the dielectric displacement $\mathfrak{d}$ and the magnetic force $\mathfrak{H}$ in the surrounding field, we may start from the formulae, I have developed in § 33 of my „Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern" [1]). Let the velocity $v$ of the earth be in the direction of $OX$, let $r$ be the distance to $O$,

$$t' = t - \frac{v}{c^2}x, \tag{1}$$

and

$$\psi = \frac{a}{r}\cos n\left(t' - \frac{r}{c}\right).$$

Then

$$\mathfrak{d}_x = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y},$$

$$\mathfrak{d}_y = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) + \frac{v}{4\pi c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t'\partial x},$$

$$\mathfrak{d}_z = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial y},$$

$$\mathfrak{H}_x = -\frac{\partial^2\psi}{\partial t'\partial z},$$

$$\mathfrak{H}_y = -v\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial y},$$

$$\mathfrak{H}_z = \frac{\partial^2\psi}{\partial t'\partial x} - v\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right).$$

The auxiliary quantity $\psi$ is to be regarded as a function of $x$, $y$, $z$, $t'$, and it is only after the differentiations have been performed, that the value (1) must be substituted.

We may further confine ourselves to values of $r$, very much larger than the wave-length $\lambda$. In this case we have only to retain the terms whose denominator has the first power of $r$, all other terms being, with respect to these, of the order $\lambda/r$

[1]) This volume, pages 51-53.

or $\lambda^2/r^2$. For points situated on the positive axis of $x$, we find

$$\mathfrak{d}_x = 0, \quad \mathfrak{d}_z = 0,$$

$$\mathfrak{d}_y = \frac{n^2}{4\pi c^2}\left(1 + \frac{v}{c}\right)\frac{a}{r}\cos n\left\{t - \left(1 + \frac{v}{c}\right)\frac{x}{c}\right\},$$

$$\mathfrak{H}_x = 0, \quad \mathfrak{H}_y = 0,$$

$$\mathfrak{H}_z = \frac{n^2}{c}\left(1 + \frac{v}{c}\right)\frac{a}{r}\cos n\left\{t - \left(1 + \frac{v}{c}\right)\frac{x}{c}\right\},$$

so that

$$\mathfrak{d}_y = \frac{1}{4\pi c}\mathfrak{H}_z .$$

The corresponding energy per unit of space is

$$2\pi c^2 \mathfrak{d}_y^2 + \frac{1}{8\pi}\mathfrak{H}_z^2 = \frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}_z^2, \tag{2}$$

and, according to Poynting's theorem, there is a flow of energy along $OX$

$$c^2 \mathfrak{d}_y \mathfrak{H}_z = \frac{c}{4\pi}\mathfrak{H}_z^2,$$

this quantity being the amount of energy per unit of time and unit of area, which traverses an element of surface, perpendicular to $OX$, and *not* moving with the earth.

In what follows we have only to attend to the mean values of the energy and its flow, taken for a full period or for a lapse of time, embracing a large number of periods. The mean value of (2) is

$$U = \frac{n^4}{8\pi c^2}\left(1 + \frac{2v}{c}\right)\frac{a^2}{r^2}, \tag{3}$$

and for that of the energy-current we may write

$$cU.$$

Since $v$ may be negative as well as positive, the above formulae apply not only to the vibrations, sent out in the direction of the earth's motion, but equally to those which go forth in opposite direction. The factor $1 + v/c$ in the expressions for

$\mathfrak{h}_y$ and $\mathfrak{H}_z$ is different in the two cases; it would however be rash, to conclude from this, without closer examination, that the difference will make itself felt in measurements on the heating of a body exposed to the rays.

Let there be, in any point of the positive axis $x$, and placed perpendicular to it, a disk of infinitely small area $\omega$, and composed of a perfectly black material, so that it reflects no part of the incident radiation. This disk will be supposed to be fixed to the earth, and we shall deduce the amount of heating from the law of conservation of energy, taking into account that the rays exert on the disk a certain normal pressure, the amount of which per unit area is given precisely by $U$ [1]).

Imagine a right cylinder $C$, having $\omega$ for its base and turned towards the source of heat, and suppose the face of it, that is opposite to $\omega$ — we shall call this $\omega'$ — to have a fixed position in space. Let $\theta$ be a lapse of time, consisting of a large number of periods, and consider, for this interval, the change of the amount of energy, contained within $C$. Let the cylinder be of so great a lenght $h$, that, if $v$ should be negative, the disk $\omega$ cannot reach the plane $\omega'$, before the end of the time $\theta$, and let $h$ at the same time be so small in comparison with the distance $r$, that terms which are of the order $h/r$ with respect to the quantities we are considering may be neglected. Then we need not trouble ourselves about the difference between the values of $U$ for $\omega$ and $\omega'$; neither will it be necessary to attend to the flow of energy through the cylindrical surface of $C$.

If, for the time $\theta$, $e_1$ is the amount of energy, by which the plane $\omega'$ is traversed, $e_2$ the increment of the energy, contained within the cylinder, and $e_3$ the work done by the pressure exerted on $\omega$, the absorption is evidently given by

$$e = e_1 - e_2 - e_3.$$

Now:

$$e_1 = cU\omega\theta,$$

and, the volume of the cylinder being increased by $v\omega\theta$,

$$e_2 = vU\omega\theta.$$

---

[1]) See e.g. my "Versuch", §§ 16 and 17 (This Volume, p. 26).

Finally we have, since the displacement of the disk is $v\theta$,

$$e_3 = vU\omega\theta.$$

The result is therefore

$$e = (c - 2v)U\omega\theta,$$

or, by (3), if we continue to neglect terms in $v^2$,

$$e = \frac{n^4 a^2}{8\pi c r^2}\omega\theta,$$

independent of the velocity of the earth.

# ELECTROMAGNETIC PHENOMENA IN A SYSTEM MOVING WITH ANY VELOCITY SMALLER THAN THAT OF LIGHT[1]

§ 1. The problem of determining the influence exerted on electric and optical phenomena by a translation, such as all systems have in virtue of the Earth's annual motion, admits of a comparatively simple solution, so long as only those terms need be taken into account, which are proportional to the first power of the ratio between the velocity of translation $w$ and the velocity of light $c$. Cases in which quantities of the second order, i.e. of the order $w^2/c^2$, may be perceptible, present more difficulties. The first example of this kind is MICHELSON's well known interference-experiment, the negative result of which has led FITZ GERALD and myself to the conclusion that the dimensions of solid bodies are slightly altered by their motion through the aether.

Some new experiments in which a second order effect was sought for have recently been published. RAYLEIGH[2] and BRACE[3] have examined the question whether the Earth's motion may cause a body to become doubly refracting; at first sight this might be expected, if the just mentioned change of dimensions is admitted. Both physicists have however come to a negative result.

In the second place TROUTON and NOBLE[4] have endeavoured to detect a turning couple acting on a charged condenser, whose plates make a certain angle with the direction of translation. The theory of electrons, unless it be modified by some new hypothesis, would undoubtedly require the existence of such a couple. In order to see this, it will suffice to consider a condenser

[1]) Proc. Royal Acad. Amsterdam. **6**, 809, 1904.
[2]) Phil. Mag. **4**, 678, 1902.
[3]) Phil. Mag. **7**, 317, 1904.
[4]) Transactions Royal Soc. London. **202**, 165, 1903.

with aether as dielectricum. It may be shown that in every electrostatic system, moving with a velocity $\mathfrak{w}$ [1]), there is a certain amount of "electromagnetic momentum". If we represent this, in direction and magnitude, by a vector $\mathfrak{G}$, the couple in question will be determined by the vector product [2])

$$[\mathfrak{G} \,.\, \mathfrak{w}]. \tag{1}$$

Now, if the axis of $z$ is chosen perpendicular to the condenser plates, the velocity $\mathfrak{w}$ having any direction we like, and if $U$ is the energy of the condenser, calculated in the ordinary way, the components of $\mathfrak{G}$ are given [3]) by the following formulae, which are exact up to the first order:

$$\mathfrak{G}_x = \frac{2U}{c^2}\mathfrak{w}_x, \quad \mathfrak{G}_y = \frac{2U}{c^2}\mathfrak{w}_y, \quad \mathfrak{G}_z = 0.$$

Substituting these values in (1), we get for the components of the couple, up to terms of the second order,

$$\frac{2U}{c^2}\mathfrak{w}_y \mathfrak{w}_z, \quad -\frac{2U}{c^2}\mathfrak{w}_x \mathfrak{w}_z, \quad 0.$$

These expressions show that the axis of the couple lies in the plane of the plates, perpendicular to the translation. If $\alpha$ is the angle between the velocity and the normal to the plates, the moment of the couple will be $Uw^2 \sin 2\alpha/c^2$; it tends to turn the condenser into such a position that the plates are parallel to the Earth's motion.

In the apparatus of TROUTON and NOBLE the condenser was fixed to the beam of a torsion-balance, sufficiently delicate to be deflected by a couple of the above order of magnitude. No effect could however be observed.

§ 2. The experiments of which I have spoken are not the only reason for which a new examination of the problems connected with the motion of the Earth is desirable. POINCARÉ [4]) has objected to the existing theory of electric and optical pheno-

[1]) A vector will be denoted by a German letter, its magnitude by the corresponding Latin letter.

[2]) See my article: Weiterbildung der MAXWELL'schen Theorie. Electronentheorie in the Mathem. Encyclopädie V 14, § 21, a. (This article will be quoted as M. E.)

[3]) M. E. § 56, c.

[4]) Rapports du Congrès de physique de 1900, Paris, 1, p. 22, 23.

mena in moving bodies that, in order to explain MICHELSON's negative result, the introduction of a new hypothesis has been required, and that the same necessity may occur each time new facts will be brought to light. Surely, this course of inventing special hypotheses for each new experimental result is somewhat artificial. It would be more satisfactory, if it were possible to show, by means of certain fundamental assumptions, and without neglecting terms of one order of magnitude or another, that many electromagnetic actions are entirely independent of the motion of the system. Some years ago, I have already sought to frame a theory of this kind [1]). I believe now to be able to treat the subject with a better result. The only restriction as regards the velocity will be that it be smaller than that of light.

§ 3. I shall start from the fundamental equations of the theory of electrons [2]). Let $\mathfrak{d}$ be the dielectric displacement in the aether, $\mathfrak{h}$ the magnetic force, $\rho$ the volume-density of the charge of an electron, $\mathfrak{v}$ the velocity of a point of such a particle, and $\mathfrak{f}$ the electric force, i. e. the force, reckoned per unit charge, which is exerted by the aether on a volume-element of an electron. Then if we use a fixed system of coordinates,

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{div} \mathfrak{d} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathfrak{h} = 0,\\
\operatorname{rot} \mathfrak{h} = \frac{1}{c}(\dot{\mathfrak{d}} + \rho\mathfrak{v}),\\
\operatorname{rot} \mathfrak{d} = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{h}},\\
\mathfrak{f} = \mathfrak{d} + \frac{1}{c}[\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{h}].
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

I shall now suppose that the system as a whole moves in the direction of $x$ with a constant velocity $w$, and I shall denote by $\mathfrak{u}$ any velocity a point of an electron may have in addition to this, so that

$$\mathfrak{v}_x = w + \mathfrak{u}_x, \quad \mathfrak{v}_y = \mathfrak{u}_y, \quad \mathfrak{v}_z = \mathfrak{u}_z.$$

---

[1]) Versl. Akad. Wet. Amsterdam. **7**, 507, 1899, (This volume, p. 139).

[2]) M. E., § 2.

If the equations (2) are at the same time referred to axes moving with the system, they become

$$\operatorname{div} \mathfrak{d} = \rho, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{h} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{h}_y}{\partial z} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{d}_x + \frac{1}{c}\rho(w + \mathfrak{u}_x),$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{h}_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{d}_y + \frac{1}{c}\rho\mathfrak{u}_y,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{h}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{h}_x}{\partial y} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{d}_z + \frac{1}{c}\rho\mathfrak{u}_z,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{h}_x,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{h}_y,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial y} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t} - w\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{h}_z,$$

$$\mathfrak{f}_x = \mathfrak{d}_x + \frac{1}{c}(\mathfrak{u}_y\mathfrak{h}_z - \mathfrak{u}_z\mathfrak{h}_y),$$

$$\mathfrak{f}_y = \mathfrak{d}_y - \frac{1}{c}w\mathfrak{h}_z + \frac{1}{c}(\mathfrak{u}_z\mathfrak{h}_x - \mathfrak{u}_x\mathfrak{h}_z),$$

$$\mathfrak{f}_z = \mathfrak{d}_z + \frac{1}{c}w\mathfrak{h}_y + \frac{1}{c}(\mathfrak{u}_x\mathfrak{h}_y - \mathfrak{u}_y\mathfrak{h}_x).$$

§ 4. We shall further transform these formulae by a change of variables. Putting

$$\frac{c^2}{c^2 - w^2} = k^2, \tag{3}$$

and understanding by $l$ another numerical quantity, to be determined further on, I take as new independent variables

$$x' = klx, \quad y' = ly, \quad z' = lz, \tag{4}$$

$$t' = \frac{l}{k}t - kl\frac{w}{c^2}x, \tag{5}$$

and I define two new vectors $\mathfrak{d}'$ and $\mathfrak{h}'$ by the formulae

$$\mathfrak{d}'_x = \frac{1}{l^2}\mathfrak{d}_x, \quad \mathfrak{d}'_y = \frac{k}{l^2}\left(\mathfrak{d}_y - \frac{w}{c}\mathfrak{h}_z\right), \quad \mathfrak{d}'_z = \frac{k}{l^2}\left(\mathfrak{d}_z + \frac{w}{c}\mathfrak{h}_y\right),$$

$$\mathfrak{h}'_x = \frac{1}{l^2}\mathfrak{h}_x, \quad \mathfrak{h}'_y = \frac{k}{l^2}\left(\mathfrak{h}_y + \frac{w}{c}\mathfrak{d}_z\right), \quad \mathfrak{h}'_z = \frac{k}{l^2}\left(\mathfrak{h}_z - \frac{w}{c}\mathfrak{d}_y\right),$$

for which, on account of (3), we may also write

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{d}_x = l^2\mathfrak{d}'_x, \quad \mathfrak{d}_y = kl^2\left(\mathfrak{d}'_y + \frac{w}{c}\mathfrak{h}'_z\right), \quad \mathfrak{d}_z = kl^2\left(\mathfrak{d}'_z - \frac{w}{c}\mathfrak{h}'_y\right) \\ \mathfrak{h}_x = l^2\mathfrak{h}'_x, \quad \mathfrak{h}_y = kl^2\left(\mathfrak{h}'_y - \frac{w}{c}\mathfrak{d}'_z\right), \quad \mathfrak{h}_z = kl^2\left(\mathfrak{h}'_z + \frac{w}{c}\mathfrak{d}'_y\right) \end{aligned}\right\}. \quad (6)$$

As to the coefficient $l$, it is to be considered as a function of $w$, whose value is 1 for $w = 0$, and which, for small values of $w$, differs from unity no more than by an amount of the second order.

The variable $t'$ may be called the "local time"; indeed, for $k = 1$, $l = 1$ it becomes identical with what I have formerly understood by this name.

If, finally, we put

$$\frac{1}{kl^3}\rho = \rho', \qquad (7)$$

$$k^2\mathfrak{u}_x = \mathfrak{u}'_x, \quad k\mathfrak{u}_y = \mathfrak{u}'_y, \quad k\mathfrak{u}_z = \mathfrak{u}'_z, \qquad (8)$$

these latter quantities being considered as the components of a new vector $\mathfrak{u}'$, the equations take the following form:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}' \mathfrak{d}' &= \left(1 - \frac{w\mathfrak{u}'_x}{c^2}\right)\rho', \quad \operatorname{div}' \mathfrak{h}' = 0, \\ \operatorname{rot}' \mathfrak{h}' &= \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \mathfrak{d}'}{\partial t'} + \rho'\mathfrak{u}'\right), \\ \operatorname{rot}' \mathfrak{d}' &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{h}'}{\partial t'}, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{f}_x &= l^2\mathfrak{d}'_x + l^2 \cdot \frac{1}{c}(\mathfrak{u}'_y\mathfrak{h}'_z - \mathfrak{u}'_z\mathfrak{h}'_y) + l^2 \cdot \frac{w}{c^2}(\mathfrak{u}'_y\mathfrak{d}'_y + \mathfrak{u}'_z\mathfrak{d}'_z),\\
\mathfrak{f}_y &= \frac{l^2}{k}\mathfrak{d}'_y + \frac{l^2}{k}\cdot\frac{1}{c}(\mathfrak{u}'_z\mathfrak{h}'_x - \mathfrak{u}'_x\mathfrak{h}'_z) - \frac{l^2}{k}\cdot\frac{w}{c^2}\mathfrak{u}'_x\mathfrak{d}'_y,\\
\mathfrak{f}_z &= \frac{l^2}{k}\mathfrak{d}'_z + \frac{l^2}{k}\cdot\frac{1}{c}(\mathfrak{u}'_x\mathfrak{h}'_y - \mathfrak{u}'_y\mathfrak{h}'_x) - \frac{l^2}{k}\cdot\frac{w}{c^2}\mathfrak{u}'_x\mathfrak{d}'_z.
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

The meaning of the symbols div′ and rot′ in (9) is similar to that of div and rot in (2); only, the differentations with respect to $x$, $y$, $z$ are to be replaced by the corresponding ones with respect to $x'$, $y'$, $z'$.

§ 5. The equations (9) lead to the conclusion that the vectors $\mathfrak{d}'$ and $\mathfrak{h}'$ may be represented by means of a scalar potential $\varphi'$ and a vector potential $\mathfrak{a}'$. These potentials satisfy the equations [1])

$$\Delta'\varphi' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi'}{\partial t'^2} = -\rho', \quad (11)$$

$$\Delta'\mathfrak{a}' - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{a}'}{\partial t'^2} = -\frac{1}{c}\rho'\mathfrak{u}' \quad (12)$$

and in terms of them $\mathfrak{d}'$ and $\mathfrak{h}'$ are given by

$$\mathfrak{d}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{a}'}{\partial t'} - \mathrm{grad}'\,\varphi' + \frac{w}{c}\mathrm{grad}'\,\mathfrak{a}'_x, \quad (13)$$

$$\mathfrak{h}' = \mathrm{rot}'\,\mathfrak{a}'. \quad (14)$$

The symbol $\Delta'$ is an abbreviation for

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2},$$

and grad′$\varphi'$ denotes a vector whose components are $\partial\varphi'/\partial x'$, $\partial\varphi'/\partial y'$, $\partial\varphi'/\partial z'$. The expression grad $\mathfrak{a}'_x$ has a similar meaning.

In order to obtain the solution of (11) and (12) in a simple form, we may take $x'$, $y'$, $z'$ as the coordinates of a point $P'$ in a space $S'$, and ascribe to this point, for each value of $t'$, the values of $\rho'$, $\mathfrak{u}'$, $\varphi'$, $\mathfrak{a}'$, belonging to the corresponding point

[1]) M. E., §§ 4 and 10.

$P(x, y, z)$ of the electromagnetic system. For a definite value $t'$ of the fourth independent variable, the potentials $\varphi'$ and $\mathfrak{a}'$ in the point $P$ of the system or in the corresponding point $P'$ of the space $S'$, are given by [1])

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi}\int\frac{[\rho']}{r'}dS' \tag{15}$$

$$\mathfrak{a}' = \frac{1}{4\pi c}\int\frac{[\rho'\mathfrak{u}']}{r'}dS'. \tag{16}$$

Here $dS'$ is an element of the space $S'$, $r'$ its distance from $P'$ and the brackets serve to denote the quantity $\rho'$ and the vector $\rho'\mathfrak{u}'$, such as they are in the element $dS'$, for the value $t' - r'/c$ of the fourth independent variable.

Instead of (15) and (16) we may also write, taking into account (4) and (7).

$$\varphi' = \frac{1}{4\pi}\int\frac{[\rho]}{r}dS, \tag{17}$$

$$\mathfrak{a}' = \frac{1}{4\pi c}\int\frac{[\rho\mathfrak{u}]}{r}dS, \tag{18}$$

the integrations now extending over the electromagnetic system itself. It should be kept in mind that in these formulae $r'$ does not denote the distance between the element $dS$ and the point $(x, y, z)$ for which the calculation is to be performed. If the element lies at the point $(x_1, y_1, z_1)$, we must take

$$r' = l\sqrt{k^2(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}.$$

It is also to be remembered that, if we wish to determine $\varphi'$ and $\mathfrak{a}'$ for the instant, at which the local time in $P$ is $t'$, we must take $\rho$ and $\rho\mathfrak{u}'$, such as they are in the element $dS$ at the instant at which the local time of that element is $t' - r'/c$.

§ 6. It will suffice for our purpose to consider two special cases. The first is that of an electrostatic system, i. e. a system having no other motion but the translation with the velocity $\mathfrak{w}$. In this case $\mathfrak{u}' = 0$, and therefore, by (12), $\mathfrak{a}' = 0$. Also, $\varphi'$

[1]) M. E., §§ 5 and 10.

is independent of $t'$, so that the equations (11), (13) and (14) reduce to

$$\left.\begin{aligned} \Delta'\varphi' &= -\rho', \\ \mathfrak{d}' = -\operatorname{grad}'\varphi', &\quad \mathfrak{h}' = 0. \end{aligned}\right\}. \tag{19}$$

After having determined the vector $\mathfrak{d}'$ by means of these equations, we know also the electric force acting on electrons that belong to the system. For these the formulae (10) become, since $\mathfrak{u}' = 0$,

$$\mathfrak{f}_x = l^2\,\mathfrak{d}'_x,\quad \mathfrak{f}_y = \frac{l^2}{k}\,\mathfrak{d}'_y,\quad \mathfrak{f}_z = \frac{l^2}{k}\,\mathfrak{d}'_z. \tag{20}$$

The result may be put in a simple form if we compare the moving system $\Sigma$ with which we are concerned, to another electrostatic system $\Sigma'$ which remains at rest and into which $\Sigma$ is changed, if the dimensions parallel to the axis of $x$ are multiplied by $kl$, and the dimensions which have the direction of $y$ or that of $z$, by $l$, a deformation for which $(kl, l, l)$ is an appropriate symbol. In this new system, which we may suppose to be placed in the above mentioned space $S'$, we shall give to the density the value $\rho'$, determined by (7), so that the charges of corresponding elements of volume and of corresponding electrons are the same in $\Sigma$ and $\Sigma'$. Then we shall obtain the forces acting on the electrons of the moving system $\Sigma$, if we first determine the corresponding forces in $\Sigma'$, and next multiply their components in the direction of the axis of $x$ by $l^2$, and their components perpendicular to that axis by $l^2/k$. This is conveniently expressed by the formula

$$\mathfrak{F}(\Sigma) = \left(l^2, \frac{l^2}{k}, \frac{l^2}{k}\right)\mathfrak{F}(\Sigma'). \tag{21}$$

It is further to be remarked that, after having found $\mathfrak{d}'$ by (19), we can easily calculate the electromagnetic momentum in the moving system, or rather its component in the direction of the motion. Indeed, the formula

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{c}\int [\mathfrak{d}.\mathfrak{h}]dS$$

shows that

$$\mathfrak{G}_x = \frac{1}{c}\int(\mathfrak{d}_y\mathfrak{h}_z - \mathfrak{d}_z\mathfrak{h}_y)dS.$$

Therefore, by (6), since $\mathfrak{h}' = 0$

$$\mathfrak{G}_x = \frac{k^2l^4w}{c^2}\int(\mathfrak{d}_y'^2 + \mathfrak{d}_z'^2)dS = \frac{klw}{c^2}\int(\mathfrak{d}_y'^2 + \mathfrak{d}_z'^2)dS'. \quad (22)$$

§ 7. Our second special case is that of a particle having an electric moment, i. e. a small space $S$, with a total charge $\int \rho dS = 0$, but with such a distribution of density, that the integrals $\int \rho x dS$, $\int \rho y dS$, $\int \rho z dS$ have values differing from 0.

Let $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ be the coordinates, taken relatively to a fixed point $A$ of the particle, which may be called its centre, and let the electric moment be defined as a vector $\mathfrak{p}$ whose components are

$$\mathfrak{p}_x = \int \rho \mathbf{x} dS, \quad \mathfrak{p}_y = \int \rho \mathbf{y} dS, \quad \mathfrak{p}_z = \int \rho \mathbf{z} dS \quad (23)$$

Then

$$\frac{d\mathfrak{p}_x}{dt} = \int \rho \mathfrak{u}_x \, dS, \quad \frac{d\mathfrak{p}_y}{dt} = \int \rho \mathfrak{u}_y \, dS, \quad \frac{d\mathfrak{p}_z}{dt} = \int \rho \mathfrak{u}_z \, dS. \quad (24)$$

Of course, if $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ are treated as infinitely small, $\mathfrak{u}_x$, $\mathfrak{u}_y$, $\mathfrak{u}_z$ must be so likewise. We shall neglect squares and products of these six quantities.

We shall now apply the equation (17) to the determination of the scalar potential $\varphi'$ for an exterior point $P(x, y, z)$, at finite distance from the polarized particle, and for the instant at which the local time of this point has some definite value $t'$. In doing so, we shall give the symbol $[\rho]$, which, in (17), relates to the instant at which the local time in $dS$ is $t' - r/c$, a slightly different meaning. Distinguishing by $r_0'$ the value of $r'$ for the centre $A$, we shall understand by $[\rho]$ the value of the density existing in the element $dS$ at the point $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, at the instant $t_0$ at which the local time of $A$ is $t' - r_0'/c$.

It may be seen from (5) that this instant precedes that for which we have to take the numerator in (17) by

$$k^2\frac{w}{c^2}\mathbf{x} + \frac{k}{l}\frac{r_0' - r'}{c} = k^2\frac{w}{c^2}\mathbf{x} + \frac{k}{l}\frac{1}{c}\left(\mathbf{x}\frac{\partial r'}{\partial x} + \mathbf{y}\frac{\partial r'}{\partial y} + \mathbf{z}\frac{\partial r'}{\partial z}\right)$$

units of time. In this last expression we may put for the differential coefficients their values at the point $A$.

In (17) we have now to replace $[\rho]$ by

$$[\rho] + k^2 \frac{w}{c^2} \mathbf{x} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}\right] + \frac{k}{l} \frac{1}{c} \left(\mathbf{x} \frac{\partial r'}{\partial x} + \mathbf{y} \frac{\partial r'}{\partial y} + \mathbf{z} \frac{\partial r'}{\partial z}\right) \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}\right], \tag{25}$$

where $[\partial\rho/\partial t]$ relates again to the time $t_0$. Now, the value of $t'$ for which the calculations are to be performed having been chosen, this time $t_0$ will be a function of the coordinates $x, y, z$ of the exterior point $P$. The value of $[\rho]$ will therefore depend on these coordinates in such a way that

$$\frac{\partial[\rho]}{\partial x} = -\frac{k}{l} \frac{1}{c} \frac{\partial r'}{\partial x} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}\right], \text{ etc.,}$$

by which (25) becomes

$$[\rho] + k^2 \frac{w}{c^2} \mathbf{x} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}\right] - \left(\mathbf{x} \frac{\partial[\rho]}{\partial x} + \mathbf{y} \frac{\partial[\rho]}{\partial y} + \mathbf{z} \frac{\partial[\rho]}{\partial z}\right).$$

Again, if henceforth we understand by $r'$ what has above been called $r'_0$, the factor $1/r'$ must be replaced by

$$\frac{1}{r'} - \mathbf{x} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r'}\right) - \mathbf{y} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r'}\right) - \mathbf{z} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r'}\right),$$

so that after all, in the integral (17), the element $dS$ is multiplied by

$$\frac{[\rho]}{r'} + k^2 \frac{w}{c^2} \frac{\mathbf{x}}{r'} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}\right] - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathbf{x}[\rho]}{r'} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mathbf{y}[\rho]}{r'} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\mathbf{z}[\rho]}{r'}.$$

This is simpler than the primitive form, because neither $r'$, nor the time for which the quantities enclosed in brackets are to be taken, depend on $x, y, z$. Using (23) and remembering that $\int \rho dS = 0$, we get

$$\varphi' = k^2 \frac{w}{4\pi c^2 r'} \left[\frac{\partial \mathfrak{p}_x}{\partial t}\right] - \frac{1}{4\pi} \left\{\frac{\partial}{\partial x} \frac{[\mathfrak{p}_x]}{r'} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{[\mathfrak{p}_y]}{r'} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{[\mathfrak{p}_z]}{r'}\right\},$$

a formula in which all the enclosed quantities are to be taken for the instant at which the local time of the centre of the particle is $t' - r'/c$.

We shall conclude these calculations by introducing a new vector $\mathfrak{p}'$, whose components are

$$\mathfrak{p}'_x = kl\mathfrak{p}_x, \quad \mathfrak{p}'_y = l\mathfrak{p}_y, \quad \mathfrak{p}'_z = l\mathfrak{p}_z, \tag{26}$$

passing at the same time to $x'$, $y'$, $z'$, $t'$ as independent variables. The final result is

$$\varphi' = \frac{w}{4\pi c^2 r'}\frac{\partial[\mathfrak{p}'_x]}{\partial t'} - \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\frac{[\mathfrak{p}'_x]}{r'} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{[\mathfrak{p}'_y]}{r'} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{[\mathfrak{p}'_z]}{r'}\right\}.$$

As to the formula (18) for the vector potential, its transformation is less complicate, because it contains the infinitely small vector $\mathfrak{u}'$. Having regard to (8), (24), (26) and (5), I find

$$\mathfrak{a}' = \frac{1}{4\pi c r'}\frac{\partial[\mathfrak{p}']}{\partial t'}.$$

The field produced by the polarized particle is now wholly determined. The formula (13) leads to

$$\mathfrak{d}' = -\frac{1}{4\pi c^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\frac{[\mathfrak{p}']}{r'} + \frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}'\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\frac{[\mathfrak{p}'_x]}{r'} + \frac{\partial}{\partial y'}\frac{[\mathfrak{p}'_y]}{r'} + \frac{\partial}{\partial z'}\frac{[\mathfrak{p}'_z]}{r'}\right\} \tag{27}$$

and the vector $\mathfrak{h}'$ is given by (14). We may further use the equations (20), instead of the original formulae (10), if we wish to consider the forces exerted by the polarized particle on a similar one placed at some distance. Indeed, in the second particle, as well as in the first, the velocities $\mathfrak{u}$ may be held to be infinitely small.

It is to be remarked that the formulae for a system without translation are implied in what precedes. For such a system the quantities with accents become identical to the corresponding ones without accents; also $k = 1$ and $l = 1$. The components of (27) are at the same time those of the electric force which is exerted by one polarized particle on another.

§ 8. Thus far we have only used the fundamental equations without any new assumptions. I shall now suppose *that the electrons, which I take to be spheres of radius $R$ in the state of rest, have their dimensions changed by the effect of a translation,* *the dimensions in the direction of motion becoming $kl$ times and those in perpendicular directions $l$ times smaller.*

In this deformation, which may be represented by $(1/kl, 1/l, 1/l)$ each element of volume is understood to preserve its charge.

Our assumption amounts to saying that in an electrostatic system $\Sigma$, moving with a velocity $w$, all electrons are flattened ellipsoids with their smaller axes in the direction of motion. If now, in order to apply the theorem of § 6, we subject the system to the deformation $(kl, l, l)$, we shall have again spherical electrons of radius $R$. Hence, if we alter the relative position of the centres of the electrons in $\Sigma$ by applying the deformation $(kl, l, l)$, and if, in the points thus obtained, we place the centres of electrons that remain at rest, we shall get a system, identical to the imaginary system $\Sigma'$, of which we have spoken in § 6. The forces in this system and those in $\Sigma$ will bear to each other the relation expressed by (21).

In the second place I shall suppose *that the forces between uncharged particles, as well as those between such particles and electrons, are influenced by a translation in quite the same way as the electric forces in an electrostatic system.* In other terms, whatever be the nature of the particles composing a ponderable body, so long as they do not move relatively to each other, we shall have between the forces acting in a system $(\Sigma')$ without, and the same system $(\Sigma)$ with a translation, the relation specified in (21), if, as regards the relative position of the particles, $\Sigma'$ is got from $\Sigma$ by the deformation $(kl, l, l)$, or $\Sigma$ from $\Sigma'$ by the deformation $(1/kl, 1/l, 1/l)$.

We see by this that, as soon as the resulting force is 0 for a particle in $\Sigma'$, the same must be true for the corresponding particle in $\Sigma$. Consequently, if, neglecting the effects of molecular motion, we suppose each particle of a solid body to be in equilibrium under the action of the attractions and repulsions exerted by its neighbours, and if we take for granted that there is but one configuration of equilibrium, we may draw the conclusion that the system $\Sigma'$, if the velocity $w$ is imparted to it, will *of itself* change into the system $\Sigma$. In other terms, the translation will *produce* the deformation $(1/kl, 1/l, 1/l)$.

The case of molecular motion will be considered in § 12.

It will easily be seen that the hypothesis that has formerly been made in connexion with MICHELSON's experiment, is implied in what has now been said. However, the present hypothesis is more general, because the only limitation imposed on the motion is that its velocity be smaller than that of light.

§ 9. We are now in a position to calculate the electromagnetic momentum of a single electron. For simplicity's sake I shall suppose the charge $e$ to be uniformly distributed over the surface, so long as the electron remains at rest. Then, a distribution of the same kind will exist in the system $\Sigma'$ with which we are concerned in the last integral of (22). Hence

$$\int (\mathfrak{d}_y'^2 + \mathfrak{d}_z'^2) dS' = \frac{2}{3}\int \mathfrak{d}'^2\, dS' = \frac{e^2}{6\pi}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{6\pi R},$$

and

$$\mathfrak{G}_x = \frac{e^2}{6\pi c^2 R}\, klw.$$

It must be observed that the product $kl$ is a function of $w$ and that, for reasons of symmetry, the vector $\mathfrak{G}$ has the direction of the translation. In general, representing by $\mathfrak{w}$ the velocity of this motion, we have the vector equation

$$\mathfrak{G} = \frac{e^2}{6\pi c^2 R}\, kl\mathfrak{w}. \tag{28}$$

Now, every change in the motion of a system will entail a corresponding change in the electromagnetic momentum and will therefore require a certain force, which is given in direction and magnitude by

$$\mathfrak{F} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt}. \tag{29}$$

Strictly speaking, the formula (28) may only be applied in the case of a uniform rectilinear translation. On account of this circumstance — though (29) is always true — the theory of rapidly varying motions of an electron becomes very complicated, the more so, because the hypothesis of § 8 would imply that the direction and amount of the deformation are continually changing. It is even hardly probable that the form of the electron will be determined solely by the velocity existing at the moment considered.

Nevertheless, provided the changes in the state of motion be sufficiently slow, we shall get a satisfactory approximation by using (28) at every instant. The application of (29) to such a *quasi-stationary* translation, as it has been called by ABRAHAM [1]) is a very simple matter. Let, at a certain instant, $\mathfrak{j}_1$ be the acceleration in the direction of the path, and $\mathfrak{j}_2$ the acceleration perpendicular to it. Then the force F will consist of two components, having the directions of these accelerations and which are given by

$$\mathfrak{F}_1 = m_1\mathfrak{j}_1 \text{ and } \mathfrak{F}_2 = m_2\mathfrak{j}_2,$$

if

$$m_1 = \frac{e^2}{6\pi c^2 R}\,\frac{d(klw)}{dw} \text{ and } m_2 = \frac{e^2}{6\pi c^2 R}\,kl. \tag{30}$$

Hence, in phenomena in which there is an acceleration in the direction of motion, the electron behaves as if it had a mass $m_1$, in those in which the acceleration is normal to the path, as if the mass were $m_2$. These quantities $m_1$ and $m_2$ may therefore properly be called the "longitudinal" and "transverse" electromagnetic masses of the electron. I shall suppose *that there is no other, no "true" or "material" mass.*

Since $k$ and $l$ differ from unity by quantities of the order $w^2/c^2$, we find for very small velocities

$$m_1 = m_2 = \frac{e^2}{6\pi c^2 R}.$$

This is the mass with which we are concerned, if there are small vibratory motions of the electrons in a system without translation. If, on the contrary, motions of this kind are going on in a body moving with the velocity $w$ in the direction of the axis of $x$, we shall have to reckon with the mass $m_1$, as given by (30), if we consider the vibrations parallel to that axis, and with the mass $m_2$, if we treat of those that are parallel to $OY$ or $OZ$. Therefore, in short terms, referring by the index $\Sigma$ to a moving system and by $\Sigma'$ to one that remains at rest,

$$m(\Sigma) = \left(\frac{d(klw)}{dw},\ kl,\ kl\right) m(\Sigma'). \tag{31}$$

[1]) Wied. Ann. **10**, 105, 1903.

§ 10. We can now proceed to examine the influence of the Earth's motion on optical phenomena in a system of transparent bodies. In discussing this problem we shall fix our attention on the variable electric moments in the particles or "atoms" of the system. To these moments we may apply what has been said in § 7. For the sake of simplicity we shall suppose that, in each particle, the charge is concentrated in a certain number of separate electrons, and that the "elastic" forces that act on one of these and, conjointly with the electric forces, determine its motion, have their origin within the bounds of the *same* atom.

I shall show that, if we start from any given state of motion in a system without translation, we may deduce from it a corresponding state that can exist in the same system after a translation has been imparted to it, the kind of correspondence being as specified in what follows.

*a.* Let $A'_1$, $A'_2$, $A'_3$, etc. be the centres of the particles in the system without translation ($\Sigma'$); neglecting molecular motions we shall take these points to remain at rest. The system of points $A_1$, $A_2$, $A_3$, etc., formed by the centres of the particles in the moving system $\Sigma$, is obtained from $A'_1$, $A'_2$, $A'_3$, etc. by means of a deformation $(1/kl,\ 1/l,\ 1/l)$. According to what has been said in § 8, the centres will of themselves take these positions $A_1$, $A_2$, $A_3$, etc. if originally,before there was a translation, they occupied the positions $A'_1$, $A'_2$, $A'_3$, etc.

We may conceive any point $P'$ in the space of the system $\Sigma'$ to be deplaced by the above deformation, so that a definite point $P$ of $\Sigma$ corresponds to it. For two corresponding points $P'$ and $P$ we shall define corresponding instants, the one belonging to $P'$, the other to $P$, by stating that the true time at the first instant is equal to the local time, as determined by (5) for the point $P$, at the second instant. By corresponding times for two corresponding *particles* we shall understand times that may be said to correspond, if we fix our attention on the *centres* $A'$ and $A$ of these particles.

*b.* As regards the interior state of the atoms, we shall assume that the configuration of a particle $A$ in $\Sigma$ at a certain time may be derived by means of the deformation $(1/kl,\ 1/l,\ 1/l)$ from the configuration of the corresponding particle in $\Sigma'$, such as it is at the corresponding instant. In so far as this assumption relates to the form of the electrons themselves, it is implied in the first hypothesis of § 8.

Obviously, if we start from a state really existing in the system $\Sigma'$, we have now completely defined a state of the moving system $\Sigma$. The question remains however, whether this state will likewise be a possible one.

In order to judge this, we may remark in the first place that the electric moments which we have supposed to exist in the moving system and which we shall denote by $\mathfrak{p}$, will be certain definite functions of the coordinates, $x$, $y$, $z$ of the centres $A$ of the particles, or, as we shall say, of the coordinates of the particles themselves, and of the time $t$. The equations which express the relations between $\mathfrak{p}$ on one hand and $x$, $y$, $z$, $t$ on the other, may be replaced by other equations, containing the vectors $\mathfrak{p}'$ defined by (26) and the quantities $x'$, $y'$, $z'$, $t'$ defined by (4) and (5). Now, by the above assumptions $a$ and $b$, if in a particle $A$ of the moving system, whose coordinates are $x$, $y$, $z$, we find an electric moment $\mathfrak{p}$ at the time $t$, or at the local time $t'$, the vector $\mathfrak{p}'$ given by (26) will be the moment which exists in the other system at the true time $t'$ in a particle whose coordinates are $x'$, $y'$, $z'$. It appears in this way that the equations between $\mathfrak{p}'$, $x'$, $y'$, $z'$, $t'$ are the same for both systems, the difference being only this, that for the system $\Sigma'$ without translation these symbols indicate the moment, the coordinates and the true time, whereas their meaning is different for the moving system, $\mathfrak{p}'$, $x'$, $y'$, $z'$, $t'$ being here related to the moment $\mathfrak{p}$, the coordinates $x$, $y$, $z$ and the general time $t$ in the manner expressed by (26), (4) and (5).

It has already been stated that the equation (27) applies to both systems. The vector $\mathfrak{d}'$ will therefore be the same in $\Sigma'$ and $\Sigma$, provided we always compare corresponding places and times. However, this vector has not the same meaning in the two cases. In $\Sigma'$ it represents the electric force, in $\Sigma$ it is related to this force in the way expressed by (20). We may therefore conclude that the electric forces acting, in $\Sigma$ and in $\Sigma'$, on corresponding particles at corresponding instants, bear to each other the relation determined by (21). In virtue of our assumption $b$, taken in connexion with the second hypothesis of § 8, the same relation will exist between the "elastic" forces; consequently, the formula (21) may also be regarded as indicating the relation between the total forces, acting on corresponding electrons, at corresponding instants.

It is clear that the state we have supposed to exist in the moving system will really be possible if, in $\Sigma$ and $\Sigma'$, the products of the mass $m$ and the acceleration of an electron are to each other in the same relation as the forces, i. e. if

$$m\mathfrak{j}(\Sigma) = \left(l^2, \frac{l^2}{k}, \frac{l^2}{k}\right) m\mathfrak{j}(\Sigma'). \tag{32}$$

Now, we have for the accelerations

$$\mathfrak{j}(\Sigma) = \left(\frac{l}{k^3}, \frac{l}{k^2}, \frac{l}{k^2}\right) \mathfrak{j}(\Sigma'), \tag{33}$$

as may be deduced from (4) and (5), and combining this with (32), we find for the masses

$$m(\Sigma) = (k^3 l, kl, kl) m(\Sigma').$$

If this is compared to (31), it appears that, whatever be the value of $l$, the condition is always satisfied, as regards the masses with which we have to reckon when we consider vibrations perpendicular to the translation. The only condition we have to impose on $l$ is therefore

$$\frac{d(klw)}{dw} = k^3 l.$$

But, on account of (3),

$$\frac{d(kw)}{dw} = k^3,$$

so that we must put

$$\frac{dl}{dw} = 0, \quad l = \text{const.}$$

The value of the constant must be unity, because we know already that, for $w = 0$, $l = 1$.

We are therefore led to suppose *that the influence of a translation on the dimensions (of the separate electrons and of a ponderable body as a whole) is confined to those that have the direction of the motion, these becoming k times smaller than they are in the state* *of rest*. If this hypothesis is added to those we have already made, we may be sure that two states, the one in the moving system, the other in the same system while at rest, corresponding as stated above, may both be possible. Moreover, this correspondence is not limited to the electric moments of the particles. In corresponding points that are situated either in the aether between the particles, or in that surrounding the ponderable bodies, we shall find at corresponding times the same vector $\mathfrak{d}'$ and, as is easily shown, the same vector $\mathfrak{h}'$. We may sum up by saying: If, in the system without translation, there is a state of motion in which, at a definite place, the components of $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{d}$ and $\mathfrak{h}$ are certain functions of the time, then the same system after it has been put in motion (and thereby deformed) can be the seat of a state of motion in which, at the corresponding place, the components of $\mathfrak{p}'$, $\mathfrak{d}'$ and $\mathfrak{h}'$ are the same functions of the local time.

There is one point which requires further consideration. The values of the masses $m_1$ and $m_2$ having been deduced from the theory of quasi-stationary motion, the question arises, whether we are justified in reckoning with them in the case of the rapid vibrations of light. Now it is found on closer examination that the motion of an electron may be treated as quasi-stationary if it changes very little during the time a light-wave takes to travel over a distance equal to the diameter. This condition is fulfilled in optical phenomena, because the diameter of an electron is extremely small in comparison with the wave-length.

§ 11. It is easily seen that the proposed theory can account for a large number of facts.

Let us take in the first place the case of a system without translation, in some parts of which we have continually $\mathfrak{p} = 0$, $\mathfrak{d} = 0$, $\mathfrak{h} = 0$. Then, in the corresponding state for the moving system, we shall have in corresponding parts (or, as we may say, in the same parts of the deformed system) $\mathfrak{p}' = 0$, $\mathfrak{d}' = 0$, $\mathfrak{h}' = 0$. These equations implying $\mathfrak{p} = 0$, $\mathfrak{d} = 0$, $\mathfrak{h} = 0$, as is seen by (26) and (6), it appears that those parts which are dark while the system is at rest, will remain so after it has been put in motion. It will therefore be impossible to detect an influence of the Earth's motion on any optical experiment, made with a terrestrial source of light, in which the geometrical distribution of light and darkness is observed. Many experiments on interference and diffraction belong to this class.

In the second place, if in two points of a system, rays of light of the same state of polarization are propagated in the same direction, the ratio between the amplitudes in these points may be shown not to be altered by a translation. The latter remark applies to those experiments in which the intensities in adjacent parts of the field of view are compared.

The above conclusions confirm the results I have formerly obtained by a similar train of reasoning, in which however the terms of the second order were neglected. They also contain an explanation of MICHELSON's negative result, more general and of somewhat different form than the one previously given, and they show why RAYLEIGH and BRACE could find no signs of double refraction produced by the motion of the Earth.

As to the experiments of TROUTON and NOBLE, their negative result becomes at once clear, if we admit the hypotheses of § 8. It may be inferred from these and from our last assumption (§ 10) that the only effect of the translation must have been a contraction of the whole system of electrons and other particles constituting the charged condenser and the beam and thread of the torsion-balance. Such a contraction does not give rise to a sensible change of direction.

It need hardly be said that the present theory is put forward with all due reserve. Though it seems to me that it can account for all well established facts, it leads to some consequences that cannot as yet be put to the test of experiment. One of these is that the result of MICHELSON's experiment must remain negative, if the interfering rays of light are made to travel through some ponderable transparent body.

Our assumption about the contraction of the electrons cannot in itself be pronounced to be either plausible or inadmissible. What we know about the nature of electrons is very little and the only means of pushing our way farther will be to test such hypotheses as I have here made. Of course, there will be difficulties, e. g. as soon as we come to consider the rotation of electrons. Perhaps we shall have to suppose that in these phenomena in which, if there is no translation, spherical electrons rotate about a diameter, the points of the electrons in the moving system will describe elliptic paths, corresponding, in the manner specified in § 10, to the circular paths described in the other case.

§ 12. It remains to say some words about molecular motion. We may conceive that bodies in which this has a sensible influence or even predominates, undergo the same deformation as the systems of particles of constant relative position of which alone we have spoken till now. Indeed, in two systems of molecules $\Sigma'$ and $\Sigma$, the first without and the second with a translation, we may imagine molecular motions corresponding to each other in such a way that, if a particle in $\Sigma'$ has a certain position at a definite instant, a particle in $\Sigma$ occupies at the corresponding instant the corresponding position. This being assumed, we may use the relation (33) between the accelerations in all those cases in which the velocity of molecular motion is very small as compared to $w$. In these cases the molecular forces may be taken to be determined by the relative positions, independently of the velocities of molecular motion. If, finally, we suppose these forces to be limited to such small distances that, for particles acting on each other, the difference of local times may be neglected, one of the particles, together with those which lie in its sphere of attraction or repulsion, will form a system which undergoes the often mentioned deformation. In virtue of the second hypothesis of § 8 we may therefore apply to the resulting molecular force acting on a particle, the equation (21). Consequently, the proper relation between the forces and the accelerations will exist in the two cases, if we suppose *that the masses of all particles are influenced by a translation to the same degree as the electromagnetic masses of the electrons.*

§ 13. The values (30) which I have found for the longitudinal and transverse masses of an electron, expressed in terms of its velocity, are not the same as those that have been formerly obtained by ABRAHAM. The ground for this difference is solely to be sought in the circumstance that, in his theory, the electrons are treated as spheres of invariable dimensions. Now, as regards the transverse mass, the results of ABRAHAM have been confirmed in a most remarkable way by KAUFMANN's measurements of the deflexion of radium-rays in electric and magnetic fields. Therefore, if there is not to be a most serious objection to the theory I have now proposed, it must be possible to show that those measurements agree with my values nearly as well as with those of ABRAHAM.

I shall begin by discussing two of the series of measurements published by KAUFMANN [1]) in 1902. From each series he has deduced two quantities $\eta$ and $\zeta$, the "reduced" electric and magnetic deflexions, which are related as follows to the ratio $\beta = w/c$:

$$\beta = k_1 \frac{\zeta}{\eta}, \quad \psi(\beta) = \frac{\eta}{k_2 \zeta^2}. \tag{34}$$

Here $\psi(\beta)$ is such a function, that the transverse mass is given by

$$m_2 = \frac{3}{4} \frac{e^2}{6\pi c^2 R} \psi(\beta), \tag{35}$$

whereas $k_1$ and $k_2$ are constant in each series.

It appears from the second of the formulae (30) that my theory leads likewise to an equation of the form (35); only ABRAHAM's function $\psi(\beta)$ must be replaced by

$$\frac{4}{3} k = \frac{4}{3}(1 - \beta^2)^{-1/2}.$$

Hence, my theory requires that, if we substitute this value for $\psi(\beta)$ in (34), these equations shall still hold. Of course, in seeking to obtain a good agreement, we shall be justified in giving to $k_1$ and $k_2$ other values than those of KAUFMANN, and in taking for every measurement a proper value of the velocity $w$, or of the ratio $\beta$. Writing $sk_1$, $3k_2'/4$ and $\beta'$ for the new values, we may put (34) in the form

$$\beta' = sk_1 \frac{\zeta}{\eta} \tag{36}$$

and

$$(1 - \beta'^2)^{-1/2} = \frac{\eta}{k_2' \zeta^2}. \tag{37}$$

KAUFMANN has tested his equations by choosing for $k_1$ such a value that, calculating $\beta$ and $k_2$ by means of (34), he got values for this latter number that remained constant in each series as well as might be. This constancy was the proof of a sufficient agreement.

1) Physik. Zeitschr. 4, 55, 1902.

I have followed a similar method, using however some of the numbers calculated by KAUFMANN. I have computed for each measurement the value of the expression

$$k_2' = (1 - \beta'^2)^{1/2}\, \psi(\beta) k_2, \tag{38}$$

that may be got from (37) combined with the second of the equations (34). The values of $\psi(\beta)$ and $k_2$ have been taken from KAUFMANN's tables and for $\beta'$ I have substituted the value he has found for $\beta$, multiplied by $s$, the latter coefficient being chosen with a view to obtaining a good constancy of (38). The results are contained in the following tables, corresponding to the tables III and IV in KAUFMANN's paper.

III. $s = 0{,}933$.

| $\beta$ | $\psi(\beta)$ | $k_2$ | $\beta'$ | $k_2'$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.851 | 2.147 | 1.721 | 0.794 | 2.246 |
| 0.766 | 1.86 | 1.736 | 0.715 | 2.258 |
| 0.727 | 1.78 | 1.725 | 0.678 | 2.256 |
| 0.6615 | 1.66 | 1.727 | 0.617 | 2.256 |
| 0.6075 | 1.595 | 1.655 | 0.567 | 2.175 |

IV. $s = 0{,}954$.

| $\beta$ | $\psi(\beta)$ | $k_2$ | $\beta'$ | $k_2'$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.963 | 3.23 | 8.12 | 0.919 | 10.36 |
| 0.949 | 2.86 | 7.99 | 0.905 | 9.70 |
| 0.933 | 2.73 | 7.46 | 0.890 | 9.28 |
| 0.883 | 2.31 | 8.32 | 0.842 | 10.36 |
| 0.860 | 2.195 | 8.09 | 0.820 | 10.15 |
| 0.830 | 2.06 | 8.13 | 0.792 | 10.23 |
| 0.801 | 1.96 | 8.13 | 0.764 | 10.28 |
| 0.777 | 1.89 | 8.04 | 0.741 | 10.20 |
| 0.752 | 1.83 | 8.02 | 0.717 | 10.22 |
| 0.732 | 1.785 | 7.97 | 0.698 | 10.18 |

The constancy of $k_2'$ is seen to come out no less satisfactory than that of $k_2$, the more so as in each case the value of $s$ has been determined by means of only two measurements. The coefficient has been so chosen that for these two observations, which were in Table III the first and the last but one, and in Table IV the first and the last, the values of $k_2'$ should be proportional to those of $k_2$.

I shall next consider two series from a later publication by KAUFMANN [1]), which have been calculated by RUNGE [2]) by means of the method of least squares, the coefficients $k_1$ and $k_2$ having been determined in such a way, that the values of $\eta$, calculated, for each observed $\zeta$, from KAUFMANN's equations (34), agree as closely as may be with the observed values of $\eta$.

I have determined by the same condition, likewise using the method of least squares, the constants $a$ and $b$ in the formula

$$\eta^2 = a\zeta^2 + b\zeta^4,$$

which may be deduced from my equations (36) and (37). Knowing $a$ and $b$, I find $\beta$ for each measurement by means of the relation

$$\beta = \sqrt{a}\,\frac{\zeta}{\eta}.$$

For two plates on which KAUFMANN had measured the electric and magnetic deflexions, the results are as follows, the deflexions being given in centimeters.

I have not found time for calculating the other tables in KAUFMANN's paper. As they begin, like the table for Plate 15, with a rather large negative difference between the values of $\eta$ which have been deduced from the observations and calculated by RUNGE, we may expect a satisfactory agreement with my formulae.

§ 14. I take this opportunity for mentioning an experiment that has been made by TROUTON [3]) at the suggestion of FITZ GERALD, and in which it was tried to observe the existence of a sudden

[1]) Gött. Nachr. 1903, p. 90.

[2]) Gött. Nachr. 1903, p. 326.

[3]) Transactions Royal Soc. Dublin. **7**, 379, 1902. (This paper may also be found in The scientific writings of FITZ GERALD, edited by LARMOR, Dublin and London 1902, p. 557).

Plate No. 15. $a = 0{,}06489$, $b = 0{,}3039$.

| $\zeta$ | $\eta$ | | | | | $\beta$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Observed. | Calculated by R. | Diff. | Calculated by L. | Diff. | Calculated by R. | L. |
| 0.1495 | 0.0388 | 0.0404 | — 16 | 0.0400 | — 12 | 0.987 | 0.951 |
| 0.199 | 0.0548 | 0.0550 | — 2 | 0.0552 | — 4 | 0.964 | 0.918 |
| 0.2475 | 0.0716 | 0.0710 | + 6 | 0.0715 | + 1 | 0.930 | 0.881 |
| 0.296 | 0.0896 | 0.0887 | + 9 | 0.0895 | + 1 | 0.889 | 0.842 |
| 0.3435 | 0.1080 | 0.1081 | — 1 | 0.1090 | — 10 | 0.847 | 0.803 |
| 0.391 | 0.1290 | 0.1297 | — 7 | 0.1305 | — 15 | 0.804 | 0.763 |
| 0.437 | 0.1524 | 0.1527 | — 3 | 0.1532 | — 8 | 0.763 | 0.727 |
| 0.4825 | 0.1788 | 0.1777 | + 11 | 0.1777 | + 11 | 0.724 | 0.692 |
| 0.5265 | 0.2033 | 0.2039 | — 6 | 0.2033 | 0 | 0.688 | 0.660 |

Plate No. 19. $a = 0{,}05867$, $b = 0{,}2591$.

| $\zeta$ | $\eta$ | | | | | $\beta$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Observed. | Calculated by R. | Diff. | Calculated by L. | Diff. | Calculated by R. | L. |
| 0.1495 | 0.0404 | 0.0388 | + 16 | 0.0379 | + 25 | 0.990 | 0.954 |
| 0.199 | 0.0529 | 0.0527 | + 2 | 0.0522 | + 7 | 0.969 | 0.923 |
| 0.247 | 0.0678 | 0.0675 | + 3 | 0.0674 | + 4 | 0.939 | 0.888 |
| 0.296 | 0.0834 | 0.0842 | — 8 | 0.0844 | — 10 | 0.902 | 0.849 |
| 0.3435 | 0.1019 | 0.1022 | — 3 | 0.1026 | — 7 | 0.862 | 0.811 |
| 0.391 | 0.1219 | 0.1222 | — 3 | 0.1226 | — 7 | 0.822 | 0.773 |
| 0.437 | 0.1429 | 0.1434 | — 5 | 0.1437 | — 8 | 0.782 | 0.736 |
| 0.4825 | 0.1660 | 0.1665 | — 5 | 0.1664 | — 4 | 0.744 | 0.702 |
| 0.5265 | 0.1916 | 0.1906 | + 10 | 0.1902 | + 14 | 0.709 | 0.671 |

impulse acting on a condenser at the moment of charging or discharging; for this purpose the condensor was suspended by a torsion-balance, with its plates parallel to the Earth's motion. For forming an estimate of the effect that may be expected, it will suffice to consider a condenser with aether as dielectricum.

Now, if the apparatus is charged, there will be (§ 1) an electromagnetic momentum

$$\mathfrak{G} = \frac{2U}{c^2}\mathfrak{w}.$$

(Terms of the third and higher orders are here neglected). This momentum being produced at the moment of charging, and disappearing at that of discharging, the condenser must experience in the first case an impulse $-\mathfrak{G}$ and in the second an impulse $+\mathfrak{G}$.

However TROUTON has not been able to observe these jerks.

I believe it may be shown (though his calculations have led him to a different conclusion) that the sensibility of the apparatus was far from sufficient for the object TROUTON had in view.

Representing, as before, by $K$ the energy of the charged condenser in the state of rest, and by $U + U'$ the energy in the state of motion, we have by the formulae of this paper, up to the terms of the second order,

$$U' = \frac{2w^2}{c^2}U,$$

an expression, agreeing in order of magnitude with the value used by TROUTON for estimating the effect.

The intensity of the sudden jerk or impulse will therefore be $U'/w$.

Now, supposing the apparatus to be initially at rest, we may compare the deflexion $\alpha$, produced by this impulse, to the deflexion $\alpha'$ which may be given to the torsion-balance by means of a constant couple $K$, acting during half the vibration time. We may also consider the case in which a swinging motion has already been set up; then the impulse, applied at the moment in which the apparatus passes through the position of equilibrium, will alter the amplitude by a certain amount $\beta$ and a similar effect $\beta'$ may be caused by letting the couple $K$ act during the swing from one extreme position to the other. Let $T$ be the period of swinging and $l$ the distance from the condenser to the thread of the torsion-balance. Then it is easily found that

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\pi U' l}{KTw}. \tag{39}$$

According to TROUTON's statements $U'$ amounted to one or two ergs, and the smallest couple by which a sensible deflexion could be produced was estimated at 7,5 C. G. S. units. If we substitute this value for $K$ and take into account that the velocity of the Earth's motion is $3 \times 10^6$ cm per sec, we immediately see that (39) must have been a very small fraction.

# CONSIDÉRATIONS SUR LA PESANTEUR[1])

§ 1. Les grands progrès qu'on a faits, pendant les dernières dizaines d'années, dans la connaissance du mécanisme des phénomènes électriques et magnétiques, nous engagent plus que jamais à nous demander si, de même que ces actions, la pesanteur, ou l'attraction universelle, ne peut pas être considérée comme une conséquence de certains changements dans l'état de l'éther. Et d'abord, il importe d'examiner si l'on peut arriver à une explication de la gravitation en se bornant aux conceptions dont on se sert dans la théorie des phénomènes électromagnetiques c. à. d. en admettant seulement que l'éther peut être le siège des deux changements d'état qui existent dans un champ électrique et dans un champ magnétique, et qui satisfont aux équations électromagnétiques bien connues.

Une telle théorie électromagnétique impliquerait que l'éther ne peut agir directement que sur des particules *chargées*, sur des électrons. On serait donc forcé de se représenter chaque particule de la matière pondérable comme constituée par deux électrons, à charges égales mais de signe contraire, — ou contenant du moins deux pareils électrons, — et la pesanteur résulterait des forces agissant sur ces particules chargées. Cette supposition a déjà été faite à diverses reprises et, maintenant que la théorie des électrons a expliqué avec succès tant de phénomènes, elle mérite certainement d'être prise en considération.

Quant aux états électromagnétiques de l'éther, dont l'influence sur les électrons pourrait être considérée comme la cause de la pesanteur, ils doivent, dans tous les cas, être de telle nature qu'ils puissent pénétrer tous les corps pondérables sans être sensiblement affaiblis, condition à laquelle satisfont des vibra-

---

[1]) Traduit de Versl. K. Akad. Wet. Amsterdam **8**, 603, 1900.
Arch. néerl. **7**, 325, 1902.

tions électriques de très petite longueur d'onde. On est ainsi amené à chercher quelles forces agiraient sur des électrons si de pareilles vibrations se propageaient dans toutes les directions à travers l'éther.

L'idée n'est pas nouvelle. On se rappelle comment LE SAGE a attribué l'attraction universelle à d'innombrables petites particules qui traverseraient l'espace avec grande vitesse, et qui tendraient à rapprocher les corps par leurs chocs contre les particules plus grossières de la matière ordinaire. Abstraction faite des objections que l'on pourrait faire contre une telle théorie, il est clair qu'elle ne cadre guère dans nos conceptions actuelles. Mais une fois qu'on eût démontré que des ondes électriques, des rayons lumineux p. ex., peuvent exercer une pression sur les corps qui en sont frappés, tout aussi bien que des projectiles, on put remplacer les corpuscules de LE SAGE par des mouvements vibratoires; et depuis la découverte des rayons de RÖNTGEN l'idée a été exprimée plus d'une fois que l'on pourrait peut-être arriver ainsi à une théorie physique de la gravitation. Ne pourrait-il pas exister dans l'éther des vibrations d'une force de pénétration beaucoup plus grande encore que celle des rayons de RÖNTGEN, et par là capables de produire une force qui, à notre connaissance, est absolument indépendante de toute matière pondérable placée sur la ligne droite qui joint deux particules matérielles?

Avant de passer à d'autres considérations (§ 5), je mettrai en lumière ce qu'on peut déduire de l'hypothèse de pareilles vibrations, et pourquoi elle *ne* conduit *pas* au but que nous nous proposons.

§ 2. Supposons qu'au point $P(x, y, z)$ de l'éther se trouve un électron à charge $e$, ayant une certaine masse, et qui, après écartement de cette position $P$, est soumis ou non à une force élastique, proportionnelle au déplacement, qui tend à l'y ramener. S'il y a dans l'éther un „champ vibratoire" dans lequel le déplacement diélectrique est $\mathfrak{d}$ et la force magnétique $\mathfrak{H}$, l'électron sera soumis à une force

$$4\pi V^2 e\mathfrak{d},$$

($V$ étant la vitesse de la lumière), variable en direction comme $\mathfrak{d}$ et dont les composantes seront

$$X = 4\pi V^2 e\mathfrak{d}_x, \quad Y = 4\pi V^2 \mathfrak{d}_y, \quad Z = 4\pi V^2 e\mathfrak{d}_z. \tag{1}$$

Cette force mettra l'électron en vibration, et l'écart (x, y, z) de la situation primitive sera déterminé par des équations différentielles simples.

Pour plus de facilité nous supposerons que l'état de l'éther est simplement périodique, de fréquence $n$, de sorte que les expressions mathématiques contiendront les facteurs $\cos nt$ et $\sin nt$; dans ces conditions les vibrations forcées de l'électron peuvent être représentées par des expressions de la forme

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{x} &= ae\mathfrak{d}_x - be\dot{\mathfrak{d}}_x, \\ \mathrm{y} &= ae\mathfrak{d}_y - be\dot{\mathfrak{d}}_y, \\ \mathrm{z} &= ae\mathfrak{d}_z - be\dot{\mathfrak{d}}_z, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

où $a$ et $b$ sont des constantes. Les termes en $\dot{\mathfrak{d}}_x$, $\dot{\mathfrak{d}}_y$ et $\dot{\mathfrak{d}}_z$ indiquent que la phase des vibrations forcées diffère de celle de la force (X, Y, Z). Ce cas se présente toujours lorsqu'une résistance s'oppose au mouvement; le coefficient $b$ est alors positif. Une pareille résistance résulte déjà de ce que l'électron lui-même émet des vibrations dans l'éther, du moment qu'il est entré en mouvement; en effet, l'état de mouvement que l'électron produit dans l'éther réagit sur la particule elle-même, ce qui a pour conséquence une augmentation de sa masse apparente et une résistance qui s'oppose au mouvement. Nous admettrons d'ailleurs que nous avons déjà tenu compte de cette action en établissant les équations du mouvement et en déterminant les valeurs de $a$ et $b$; dans ce qui suit nous n'aurons donc plus qu'à considérer la force exercée sur l'électron, indépendamment de l'état qu'il produit lui-même dans l'éther.

Puisque nous avons introduit $e$ comme facteur dans les équations (2), $a$ et $b$ sont indépendants de la charge et le signe de ces coefficients est le même pour des électrons chargés négativement que pour des électrons à charge positive.

Dès que l'électron quitte sa position d'équilibre, de nouvelles forces entrent en jeu. En premier lieu la force $4\pi V^2 e\mathfrak{d}$ sera tant soit peu modifiée, puisqu'à l'endroit où se trouve l'électron le $\mathfrak{d}$ n'est pas le même qu'en $P$. Nous en tenons compte en nous figurant qu'à la force (1) vienne s'en ajouter une autre dont les composantes sont

$$4\pi V^2 e\left(\mathrm{x}\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial x} + \mathrm{y}\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial y} + \mathrm{z}\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial z}\right), \text{ etc.} \tag{3}$$

En second lieu la particule subit, en vertu de sa vitesse, une force électromagnétique aux composantes

$$e(\dot{\mathrm{y}}\mathfrak{H}_z - \dot{\mathrm{z}}\mathfrak{H}_y), \text{ etc.} \tag{4}$$

Si l'écartement de l'électron est très petit par rapport à la longueur d'onde, ces nouvelles forces sont beaucoup plus petites que les forces (1); elles sont périodiques et de fréquence $2n$, et doivent donc communiquer à l'électron de nouvelles vibrations que nous supposerons si faibles qu'elles peuvent être négligées. Nous ne nous occuperons que de la valeur moyenne des forces (3) et (4) pendant un long espace de temps, ou bien, ce qui revient au même, pendant une période complète $2\pi/n$.

§ 3. On reconnaît immédiatement que cette force moyenne doit être nulle quand l'électron se trouve *seul* dans un champ vibratoire où des ondes se propagent de la même manière et avec la même intensité dans toutes les directions. Il n'en est plus ainsi dès qu'il existe, à quelque distance de $P$, un second électron $Q$ qui entre en vibration de la même manière que $P$, et émet donc également des vibrations dans l'éther; il peut alors agir sur $P$ une force, qui sera évidemment dirigée suivant la droite joignant les deux particules. En soumettant cette force au calcul, on obtient une quantité de termes qui dépendent de la distance $r$ de diverses manières. Nous conserverons les termes inversement proportionnels à $r$ et à $r^2$, et négligerons ceux qui sont inversement proportionnels à des puissances plus élevées; l'influence de ces derniers termes, comparée à celle des premiers, sera en effet de l'ordre $\lambda/r$, si $\lambda$ est la longueur d'onde, que nous supposerons très petite par rapport à $r$. Nous laisserons également de côté tous les termes qui contiennent un facteur comme $\cos 2\pi kr/\lambda$ ou $\sin 2\pi kr/\lambda$ ($k$ étant un nombre entier); ces termes changent en effet de signe pour des variations très petites de $r$ et disparaissent donc de la force résultante si nous considérons, non plus *deux* particules $P$ et $Q$, mais des systèmes de particules dont les dimensions contiennent un grand nombre de fois la longueur d'onde $\lambda$.

De ce que nous venons de dire nous pouvons maintenant déduire en premier lieu que, en appliquant les formules précédentes à l'électron $P$, nous pouvons prendre pour $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{H}$ les valeurs qu'auraient ces vecteurs si la particule $Q$ existait seule; ces valeurs peuvent d'ailleurs être scindées en deux parties: les valeurs $\mathfrak{d}_1$ et $\mathfrak{H}_1$ qu'auraient ces grandeurs en l'absence de $Q$, et les valeurs $\mathfrak{d}_2$ et $\mathfrak{H}_2$ produites par $Q$ même.

Prenons $Q$ comme origine, $QP$ comme axe des $x$, et prenons d'abord pour $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ les termes de (2) avec le coefficient $a$.

La force agissant sur $P$ dans la direction de l'axe des $x$ est alors donnée par

$$4\pi V^2 e^2 a\left(\mathfrak{d}_x \frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial x} + \partial_y \frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial y} + \mathfrak{d}_z \frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial z}\right) + e^2 a(\dot{\mathfrak{d}}_y \mathfrak{H}_z - \dot{\mathfrak{d}}_z \mathfrak{H}_y). \quad (5)$$

Puisque nous nous bornons à des valeurs moyennes pour une période complète, nous pouvons remplacer le dernier terme par

$$- e^2 a(\mathfrak{d}_y \dot{\mathfrak{H}}_z - \mathfrak{d}_z \dot{\mathfrak{H}}_y),$$

et, si l'on remplace ici $\dot{\mathfrak{H}}_y$ et $\dot{\mathfrak{H}}_z$ par

$$4\pi V^2 \left(\frac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial z}\right) \text{ et } 4\pi V^2 \left(\frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial x}\right),$$

(5) devient

$$2\pi V^2 e^2 a \frac{\partial(\mathfrak{d}^2)}{\partial x}, \quad (6)$$

où $\mathfrak{d}$ exprime maintenant la grandeur du déplacement diélectrique.

Si l'on prend pour $\mathfrak{d}$ la valeur $\mathfrak{d}_1$, cette expression est évidemment égale à 0.

Quant à $\mathfrak{d}_2$, nous remarquerons que le déplacement diélectrique produit par $Q$ sur la ligne $QP$ est périodique en chaque point. En des points éloignés l'amplitude est $c/r$, où $c$ est indépendant de $r$. La moyenne des valeurs de $\mathfrak{d}^2$, pour une période complète, est alors $c^2/2r^2$, expression qui, différentiée par rapport à $x$ ou par rapport à $r$, donne $r^3$ au dénominateur.

Les termes dans (6) qui dépendent de la partie

$$2(\mathfrak{d}_{1x}\mathfrak{d}_{2x} + \mathfrak{d}_{1y}\mathfrak{d}_{2y} + \mathfrak{d}_{1z}\mathfrak{d}_{2z})$$

de $\mathfrak{d}^2$, c. à d. de la combinaison de $\mathfrak{d}_1$ et $\mathfrak{d}_2$, peuvent également être négligés. En effet, si nous ne voulons pas que dans ces termes entrent des facteurs comme $\cos 2\pi kr/\lambda$ ou $\sin 2\pi kr/\lambda$, il faut qu'entre $\mathfrak{d}_1$ et $\mathfrak{d}_2$ il n'y ait pas de différence de phase, ou bien que, si elle existe, elle soit indépendante de $r$. Or cela n'est possible que si l'on combine un système d'ondes se propageant suivant $QP$ avec les vibrations émises vers $P$ par l'électron $Q$, en vertu du mouvement que ce dernier reçoit de ce même système d'ondes. Les deux vecteurs $\mathfrak{d}_1$ et $\mathfrak{d}_2$ ont alors la même direction, perpendiculaire à l'axe des $x$; si nous prenons cette direction comme axe des $y$, ces vecteurs prennent la forme

$$\mathfrak{d}_{1y} = q \cos n\left(t - \frac{x}{V} + \varepsilon_1\right)$$

et

$$\mathfrak{d}_{2y} = \frac{c}{r} \cos n\left(t - \frac{x}{V} + \varepsilon_2\right).$$

La valeur moyenne de $\mathfrak{d}_{1y}\mathfrak{d}_{2y}$ pour une période entière est

$$\frac{1}{2}\frac{qc}{r}\cos n(\varepsilon_1 - \varepsilon_2),$$

et cette expression, différentiée par rapport à $x$, donne une valeur inversement proportionnelle à $r^2$. Nous devrions donc conserver cette valeur, mais nous remarquerons qu'elle n'est obtenue que pour une très petite partie de tous les systèmes d'ondes qui se propagent dans l'éther; c'est en vertu de la faible énergie de cette partie que le résultat peut être négligé.

§ 4. Nous n'avons donc à nous occuper que des termes de (2) qui contiennent le coefficient $b$. Nous obtenons ainsi les forces:

$$-4\pi V^2 e^2 b\left(\dot{\mathfrak{d}}_x \frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial x} + \dot{\mathfrak{d}}_y \frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial y} + \dot{\mathfrak{d}}_z \frac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial z}\right) \tag{7}$$

et

$$-e^2 b(\ddot{\mathfrak{d}}_y \mathfrak{H}_z - \ddot{\mathfrak{d}}_z \mathfrak{H}_y). \tag{8}$$

Nous savons déjà que si $Q$ n'existait pas, la résultante de ces forces serait nulle; la deuxième force serait alors également nulle. Nous pouvons en effet écrire pour cette dernière:

$$n^2 e^2 b(\mathfrak{d}_y \mathfrak{H}_z - \mathfrak{d}_z \mathfrak{H}_y), \tag{9}$$

ce qui, d'après le théorème de Poynting, est égal à $n^2e^2bS_x/V^2$, si $S_x$ est le courant d'énergie dans le sens de l'axe des $x$; or cette quantité doit disparaître puisque, en l'absence de $Q$, un élément de surface perpendiculaire à l'axe des $x$ est traversé par tout autant d'énergie dans un sens que dans l'autre.

Nous arrivons ainsi à cette conclusion que la force (7) est nulle, pour autant qu'elle dépend de l'état ($\mathfrak{d}_1$), et il résulte de là que la force (7) toute entière doit disparaître; on peut en effet faire voir que la partie de (7) qui résulte de la combinaison des états ($\mathfrak{d}_1$) et ($\mathfrak{d}_2$) doit être nulle, aussi bien que celle qui dépend uniquement des vibrations de $Q$. Pour la première partie cela résulte de considérations analogues à celles qui ont été communiquées à la fin du § précédent. Pour la seconde on le démontre comme suit.

Les vibrations produites par $Q$ en un point quelconque $A$ du milieu ambiant sont de la forme

$$\frac{1}{r}\,\vartheta \cos n\left(t - \frac{r}{V}\right),$$

où $\vartheta$ dépend de la direction de la droite $QA$, et où $r$ représente la longueur de cette droite. Pour ne pas obtenir, par différentiation d'une telle expression par rapport aux coordonnées, le carré de $r$ dans le dénominateur — ce qui est nécessaire pour que (7) ne contienne pas des puissances supérieures à la deuxième — il faut considérer $1/r$ et $\vartheta$ comme des constantes. Les facteurs $\vartheta$ sont d'ailleurs tels que les vibrations s'exécutent perpendiculairement à la droite $QA$.

Si $A$ coïncide maintenant avec $P$, donc $QA$ avec l'axe des $x$, le facteur $\vartheta$ est nul dans l'expression de la valeur de $\mathfrak{d}_x$ produite par $Q$, et comme ce facteur ne doit pas être différentié avec les autres, chaque terme de (7) disparaît.

Nous n'avons donc à nous occuper que des expressions (8) ou (9). Supposons que $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{H}$ s'y rapportent à tout l'état de mouvement, existant en présence de $Q$; nous pouvons alors mettre à leur place:

$$\frac{n^2e^2b}{V^2}\,S_x,$$

à condition que $S_x$ représente le courant d'énergie qui existe en *ce* cas.

D'après les suppositions que nous avons faites, le courant d'energie est évidemment symétrique autour de $Q$; par conséquent, si $E$ est la quantité d'énergie qui sort d'une sphère décrite autour du centre $Q$ avec un rayon $r$, on aura

$$S_x = \frac{E}{4\pi r^2},$$

et le point $Q$ agira sur $P$ avec une force

$$K = \frac{n^2 e^2 b E}{4\pi V^2 r^2}$$

dans la direction de l'axe des $x$, c'est à dire dans le prolongement de $QP$.

Puisque dans l'espace autour de $Q$ l'état est stationnaire, il faut que la même quantité d'énergie traverse toute sphère décrite autour de cet électron comme centre. Il faut donc que $E$ soit indépendant de $r$, c. à d. que la force que nous venons de trouver soit inversement proportionnelle à $r^2$.

Si l'électron $Q$ vibrait sans rencontrer de résistance, le flux total d'énergie traversant une des sphères que nous venons de décrire serait nul, et l'on aurait aussi $K = 0$. Mais si, outre la résistance provenant du rayonnement, il y a encore une autre résistance qui s'oppose au mouvement, les vibrations de la particule seront accompagnées de la dissipation d'une certaine quantité d'énergie électromagnétique, et une quantité égale devra être introduite à travers la surface de la sphère. $E$ est alors négatif et, comme $b$ est positif, on conclut à une attraction. Cette attraction serait indépendante du signe des charges de $P$ et de $Q$.

Cependant le fait, que cette attraction n'existerait que pour autant qu'il se perde continuellement de l'énergie électromagnétique, suffit pour la faire rejeter comme explication de la pesanteur. Il y a du reste d'autres difficultés encore. Je me contenterai de faire remarquer que, si nous devions voir la cause de la gravitation dans des vibrations qui se propagent avec la vitesse de la lumière, cette force devrait être modifiée par le *mouvement* des astres à un degré beaucoup plus considérable que les observations astronomiques ne nous permettent de supposer.

§ 5. Mais, bien que nous soyons ainsi convaincus que des changements d'états dans l'éther, de la nature de ceux que l'on admet dans la théorie de l'électricité, ne suffisent pas pour rendre compte de la pesanteur, nous pouvons cependant essayer de former une théorie de la pesanteur qui se rapproche autant que possible des théories électromagnétiques. Dans cet essai nous nous inspirerons d'une idée avancée depuis longtemps déjà par MOSSOTTI et reprise plus tard par WILHELM WEBER et ZÖLLNER.

D'après MOSSOTTI, chaque particule de la matière pondérable se compose de deux particules à charges électriques de signe contraire. Entre deux particules pondérables il y a donc quatre forces, dont deux attractives entre les charges de signes contraires et deux répulsives entre les charges de même signe. MOSSOTTI admet maintenant que les attractions sont un peu plus grandes que les répulsions et que cette différence constitue la gravitation; on reconnaît aisément qu'une pareille différence peut exister, même quand les actions *électriques*, dans le sens ordinaire du mot, des particules combinées ont complètement disparu.

Pour pouvoir conserver cette théorie, il est nécessaire de lui donner une forme qui soit en harmonie avec la forme actuelle de la théorie de l'électricité, c. à d. que nous devons supposer que les électrons positifs et négatifs produisent dans l'éther certains changements d'état dont les quatre forces de MOSSOTTI seront les conséquences.

On admet dans la théorie de l'électricité qu'autour d'un électron en repos, qu'il soit chargé positivement ou négativement, il y a un déplacement diélectrique; dans le cas d'une charge négative ce déplacement est dirigé vers l'électron et, dans le cas d'une charge positive, il a la direction opposée; ces deux déplacements sont toutefois de même nature, de sorte que, quand ils existent simultanément et dans des directions opposées, ils s'anéantissent complètement.

Il est clair que nous devons abandonner cette conception. En effet, si les changements d'état dans l'éther environnant des électrons positifs et négatifs étaient déterminés par des grandeurs vectorielles de même nature, c. à d. si, dans le cas où un électron positif serait combiné à un électron négatif, les phénomènes dans l'espace environnant dépendaient du vecteur résultant, les actions *électriques* ne pourraient faire défaut que si ce vecteur résultant était nul, mais il n'existerait alors d'action d'aucune sorte; une gravitation, c. à d. une force sans champ électrique, serait donc également impossible.

C'est pourquoi nous allons imaginer autre chose. De même que MOSSOTTI voit entre les charges électriques positives et négatives une différence plus forte que ne l'expriment les signes + et — (leurs actions ne peuvent en effet jamais se contre-balancer complètement), nous admettrons que les changements d'état qu'elles produisent dans l'éther ne sont pas absolument de même nature, de sorte que, dans le cas où ces deux changements sont représentés par deux vecteurs opposés, ces deux vecteurs ne se détruisent pas complètement l'un l'autre.

Si nous attribuons aux deux changements d'état une existence indépendante, nous pouvons admettre qu'ils exercent tous les deux une action sur chaque électron, mais que l'un des deux états a une influence prépondérante sur un électron positif et l'autre une influence prépondérante sur un électron négatif. Cette supposition nous conduit aux conséquences que MOSSOTTI a tirées de son hypothèse de l'inégalité des forces attractives et répulsives.

§ 6. Nous admettrons que chacun de ces changements d'état se propage, indépendamment de l'autre, avec la vitesse de la lumière, ainsi qu'on l'apprend dans la théorie du champ électromagnétique. Les équations qui déterminent cette propagation prennent la forme la plus simple si l'on introduit *deux* vecteurs, le déplacement diélectrique $\mathfrak{d}$ et la force magnétique $\mathfrak{H}$, qui déterminent ensemble le changement d'état. Nous allons maintenant établir *deux* systèmes d'équations, l'un pour le champ produit par les électrons positifs, l'autre pour le champ produit par les électrons négatifs; dans le premier système nous représenterons les vecteurs par $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{H}$ et dans le second par $\mathfrak{d}'$ et $\mathfrak{H}'$. L'hypothèse que $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{d}'$ sont de nature différente implique qu'il en soit de même pour $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{H}'$.

Je donnerai aux équations la forme dont je me suis servi dans des travaux précédents [1]), et qui est basée sur l'hypothèse que les électrons sont perméables pour l'éther et que ce dernier reste en repos quand les électrons se déplacent. Pour plus de

[1]) Arch. Néerl. **25**, 363, 1892 (Coll. Papers, **2**, 164). Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern (Ce Volume, 1).

généralité nous supposerons immédiatement que les électrons soient en mouvement.

Nous nous figurerons les charges positives ainsi que les charges négatives comme distribuées dans les électrons avec une densité finie. Nous supposerons que les unités, dans lesquelles ces densités sont exprimées, soient choisies de telle façon que dans une particule pondérable, qui n'exerce pas d'actions *électriques*, la quantité de la charge positive totale soit le même que celle de la charge négative.

La densité de la charge positive, nous la nommerons $\rho$, et celle de la charge négative $\rho'$; $\rho$ est un nombre positif et $\rho'$ un nombre négatif.

La vitesse de déplacement sera représentée par $\mathfrak{v}$ pour un électron positif et par $\mathfrak{v}'$ pour un électron négatif.

Le changement d'état ($\mathfrak{d}$, $\mathfrak{H}$) produit par les électrons positifs est déterminé par les équations [1])

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \mathfrak{d} &= \rho \\ \operatorname{div} \mathfrak{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= 4\pi\rho\mathfrak{v} + 4\pi\dot{\mathfrak{d}} \\ 4\pi V^2 \operatorname{rot} \mathfrak{d} &= -\dot{\mathfrak{H}}; \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I)}$$

de même le changement d'état produit par les électrons négatifs est déterminé par

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \mathfrak{d}' &= \rho' \\ \operatorname{div} \mathfrak{H}' &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathfrak{H}' &= 4\pi\rho'\mathfrak{v}' + 4\pi\dot{\mathfrak{d}}' \\ 4\pi V^2 \operatorname{rot} \mathfrak{d}' &= -\dot{\mathfrak{H}}'. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

Dans la théorie de l'électricité, la force à laquelle une particule chargée est soumise est, par unité de charge,

$$4\pi V^2\mathfrak{d} + [\mathfrak{v} \,.\, \mathfrak{H}],$$

$\mathfrak{v}$ étant la vitesse de la particule [2]).

---

[1]) $\operatorname{div} \mathfrak{d} = \dfrac{\partial \mathfrak{d}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial z}$,

rot $\mathfrak{d}$ est un vecteur dont les composantes sont $\dfrac{\partial \mathfrak{d}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathfrak{d}_y}{\partial z}$, etc.

[2]) $[\mathfrak{v} .\, \mathfrak{H}]$ est le produit-vecteur de $\mathfrak{v}$ et $\mathfrak{H}$.

Supposons maintenant qu'une particule positive, dont la charge est $e$, subit, en vertu du changement d'état ($\mathfrak{d}$, $\mathfrak{H}$), une force

$$k_1 = \alpha\{4\pi V^2\mathfrak{d} + [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{H}]\}e \tag{10}$$

et en vertu du changement d'état ($\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{H}'$) une force

$$k_2 = \beta\{4\pi V^2\mathfrak{d}' + [\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{H}']\}e \tag{11}$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont deux constantes différentes.

Nous posons de même

$$k_3 = \beta\{4\pi V^2\mathfrak{d} + [\mathfrak{v}' \cdot \mathfrak{H}]\}e' \tag{12}$$

et

$$k_4 = \alpha\{4\pi V^2\mathfrak{d}' + [\mathfrak{v}' \cdot \mathfrak{H}']\}e' \tag{13}$$

pour les deux forces que les deux états exercent sur une particule négative.

On voit que les formules expriment que ($\mathfrak{d}$, $\mathfrak{H}$) agit sur $e$ de la même manière que ($\mathfrak{d}'$, $\mathfrak{H}'$) sur $e'$, et inversement.

§ 7. Supposons que le système dont on veut étudier l'action se compose d'électrons positifs et négatifs accouplés, dont chacun accompagne dans ces mouvements celui auquel il est combiné. Pour simplifier les développements mathématiques nous nous figurerons que les charges positives et négatives s'*entrepénètrent* de telle sorte qu'on ait partout $\rho' = -\rho$. Puisque nous admettons aussi $\mathfrak{v}' = \mathfrak{v}$, les équations (I) et (II) donnent:

$$\mathfrak{d}' = -\mathfrak{d} \quad \text{et} \quad \mathfrak{H}' = -\mathfrak{H}.$$

Plaçons dans le champ ainsi obtenu deux charges égales et de signe contraire, $e$ et $e' = -e$, qui se meuvent avec la même vitesse $\mathfrak{v}$. Les équations (10)—(13) donnent

$$k_2 = -\frac{\beta}{\alpha} k_1, \qquad k_3 = -\frac{\beta}{\alpha} k_1, \qquad k_4 = k_1.$$

La particule positive est soumise à une force

$$k_1 + k_2 = k_1\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)$$

et la particule négative à une force

$$k_3 + k_4 = k_1\left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Puisque, d'après ces formules, deux particules chargées, l'une positive et l'autre négative, sont soumises à des forces égales et de même sens, *il n'y a pas de champ electrique*. Cependant, il y a une force résultante:

$$2k_1\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

qui agit sur le système des deux particules.

Nous admettrons que $\beta$ est un peu plus grand que $\alpha$, de sorte que $2(1-\beta/\alpha)$ prend une certaine valeur négative $-\varepsilon$. Notre résultat peut alors être énoncé comme suit:

Pour trouver la force résultante qui s'exerce entre deux particules matérielles pondérables, on doit se figurer pour un moment que toutes les charges négatives aient été enlevées. Les charges positives restantes exercent alors certaines forces les unes sur les autres. Si l'on change ces forces de sens et qu'on les multiplie par le facteur $\varepsilon$, on obtient la gravitation.

Il va de soi que la théorie précédente a été établie de telle sorte que pour des masses en repos on retrouve la loi de NEWTON. Du reste, elle peut être affranchie de l'hypothèse que toute matière pondérable consiste en des électrons positifs et négatifs. Il suffit d'admettre que le changement d'état qui produit la pesanteur se propage à travers l'éther, d'une manière analogue à la propagation qui a lieu dans un champ électromagnétique. Au lieu de concevoir deux systèmes de vecteurs $(\mathfrak{d}, \mathfrak{H})$ et $(\mathfrak{d}', \mathfrak{H}')$ qui sont tous deux en jeu aussi bien dans les actions électromagnétiques que dans le phénomène de la pesanteur, on peut introduire un seul système pour les premières actions et un deuxième pour la pesanteur. On peut supposer que dans le champ de la pesanteur il y ait deux vecteurs $\mathfrak{d}$ et $\mathfrak{H}$ déterminés par les équations (I), $\rho$ étant la densité de la matière pondérable, et que la force par unité de masse soit donnée par

$$-\eta\{4\pi V^2\mathfrak{d}+[\mathfrak{v}\,.\,\mathfrak{H}]\},$$

$\eta$ étant un certain coefficient positif.

§ 8. Dans toute théorie de la gravitation il importe d'examiner quelle est l'influence du mouvement des corps célestes sur leur action mutuelle. La réponse à cette question peut être déduite des équations précédentes; le problème est d'ailleurs en tous points analogue au problème correspondant relatif aux actions électromagnétiques entre particules chargées [1]).

Je me bornerai à considérer le cas où un corps $A$ se meut autour d'un autre $M$, qui se déplace avec une vitesse constante $p$. J'appellerai $r$ la longueur de la ligne $MA$, prise dans la direction de $M$ vers $A$; $x, y, z$ les coordonnées relatives de $A$ par rapport à $M$; $w$ la vitesse dans le mouvement relatif, $\vartheta$ l'angle qu'elle forme avec $p$, et enfin $p_r$ la composante de la vitesse $p$ dans la direction de $r$.

Je trouve qu'en dehors de l'attraction

$$\frac{k}{r^2}, \tag{14}$$

qui existerait seule si les deux corps étaient en repos, le corps $A$ est soumis aux forces suivantes:

1°. Une force dans la direction de $r$:

$$k \cdot \frac{p^2}{2V^2} \cdot \frac{1}{r^2} \tag{15}$$

2°. Une force dont les composantes sont

$$-\frac{k}{2V^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p_r^2}{r}\right),\ -\frac{k}{2V^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p_r^2}{r}\right),\ -\frac{k}{2V^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p_r^2}{r}\right) \tag{16}$$

3°. Une force

$$-\frac{k}{V^2}p \cdot \frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} \tag{17}$$

dans la direction de $p$.

4°. Une force de la grandeur

$$\frac{k}{V^2}\frac{1}{r^2}pw\cos\vartheta \tag{18}$$

dans la direction de $r$.

Les forces (15) et (16) ne dépendent que de la vitesse commune $p$, les forces (17) et (18) de cette dernière et de la vitesse relative $w$.

Il mérite d'être remarqué que les forces qui viennent s'ajouter à (14) sont toutes du second ordre par rapport aux quantités très petites

$$\frac{p}{V} \text{ et } \frac{w}{V}.$$

---

[1]) Voir le second des deux travaux cités.

A ce point de vue, la loi exprimée par les formules précédentes présente quelque analogie avec les lois de WEBER, RIEMANN et CLAUSIUS, qu'on a quelquefois appliquées aux mouvements des planètes. De même que la loi de CLAUSIUS, nos formules contiennent des vitesses absolues (c'est à dire des vitesses par rapport à l'éther).

Si l'on veut admettre pour la pesanteur une loi analogue à celle qui régit les forces électriques, la loi exprimée par les formules (15)—(18) est sans doute plus plausible que les trois que je viens de mentionner.

§ 9. Les forces (15)—(18) produisent de petites perturbations dans les éléments d'une orbite planétaire; si nous voulons étudier ces phénomènes, nous devons entendre par $p$ la vitesse avec laquelle le système solaire se déplace dans l'espace. J'ai fait usage des formules communiquées par TISSERAND dans sa Mécanique céleste pour calculer les perturbations *séculaires*.

Soient $a$ le demi-grand axe,
$e$ l'excentricité,
$\varphi$ l'inclinaison sur l'écliptique,
$\theta$ la longitude du nœud ascendant,
$\tilde{\omega}$ la longitude du périhélie,
$\varkappa'$ l'anomalie moyenne à l'instant $t = 0$, comprise en ce sens que, si $n$ est le moyen mouvement déterminé par $a$, l'anomalie moyenne à l'instant $t$ est donnée par

$$\varkappa' + \int_0^t n\, dt.$$

Soient en outre $\lambda$, $\mu$, $\nu$ les cosinus des angles que la vitesse $p$ forme 1°. avec le rayon vecteur vers le périhélie, 2°. avec un rayon vecteur que l'on obtient en faisant tourner le premier de 90° dans la direction du mouvement de la planète, 3°. avec la normale sur le plan de l'orbite, dirigée du côté où le mouvement de la planète s'observe dans un sens contraire à celui des aiguilles d'une montre.

Soient encore $\omega = \tilde{\omega} - \theta$, $V/p = \delta$ et $na/V = \delta'$ ($na$ est la vitesse dans une orbite circulaire de rayon $a$).

Pour les changements des éléments *pendant une révolution* je trouve

$$\Delta a = 0$$

$$\Delta e = 2\pi\sqrt{(1-e^2)}\left\{\lambda\mu\delta^2\frac{(2-e^2)-2\sqrt{(1-e^2)}}{e^3}-\lambda\delta\delta'\frac{1-\sqrt{(1-e^2)}}{e^2}\right\}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{(1-e^2)}}\nu\left\{[-\lambda\delta^2\cos\omega+\delta(e\delta'-\mu\delta)\sin\omega]\frac{1-\sqrt{(1-e^2)}}{e^2}+\right.$$
$$\left.+\mu\delta^2\sin\omega\right\}$$

$$\Delta\theta = -\frac{2\pi}{\sqrt{(1-e^2)}\sin\varphi}\nu\left\{\lambda\delta^2\sin\omega+\delta(e\delta'-\mu\delta)\cos\omega]\frac{1-\sqrt{(1-e^2)}}{e^2}+\right.$$
$$\left.+\mu\delta^2\cos\omega\right\}$$

$$\Delta\tilde{\omega} = \pi(\mu^2-\lambda^2)\delta^2\frac{(2-e^2)-2\sqrt{(1-e^2)}}{e^4}+2\pi\mu\delta\delta'\frac{\sqrt{(1-e^2)}-1}{e^3}-$$
$$-\frac{2\pi\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{(1-e^2)}}\nu\left\{[\lambda\delta^2\sin\omega+\delta(e\delta'-\mu\delta)\cos\omega]\frac{1-\sqrt{(1-e^2)}}{e^2}+\right.$$
$$\left.+\mu\delta^2\cos\omega\right\}$$

$$\Delta\varkappa' = \pi(\lambda^2-\mu^2)\delta^2\frac{(2+e^2)\sqrt{(1-e^2)}-2}{e^4}-2\pi\delta^2-2\pi\mu^2\delta^2-$$
$$-2\pi\mu\delta\delta'\frac{(1-e^2)-\sqrt{(1-e^2)}}{e^3}.$$

§ 10. J'ai effectué le calcul pour la planète MERCURE, en prenant pour l'ascension droite et la déclinaison de l'apex du mouvement solaire les valeurs 276° et + 34°. Les résultats sont

$$\begin{aligned}
\Delta a &= 0\\
\Delta e &= 0{,}018\delta^2 + 1{,}38\delta\delta'\\
\Delta\varphi &= 0{,}95\ \delta^2 + 0{,}28\delta\delta'\\
\Delta\theta &= 7{,}60\ \delta^2 - 4{,}26\delta\delta'\\
\Delta\tilde{\omega} &= -0{,}09\ \delta^2 + 1{,}95\delta\delta'\\
\Delta\varkappa' &= -6{,}82\ \delta^2 - 1{,}93\delta\delta'
\end{aligned}$$

Or, $\delta' = 1{,}6 \times 10^{-4}$ et si l'on pose $\delta = 5{,}3 \times 10^{-5}$ on trouve

$$\Delta e = 117 \times 10^{-10},\quad \Delta\varphi = 51 \times 10^{-10},$$
$$\Delta\theta = -137\times 10^{-10},\ \Delta\tilde{\omega} = 162\times 10^{-10},\ \Delta\varkappa' = -355\times 10^{-10}.$$

Pour trouver les variations au bout d'un siècle on doit multiplier ces nombres par 415 et pour exprimer de plus en secondes les variations de $\varphi$, $\theta$, $\tilde{\omega}$ et $\varkappa'$ on doit encore multiplier par $2{,}06 \times 10^5$. On arrive ainsi pour $\varphi$, $\theta$, $\tilde{\omega}$ et $\varkappa'$ à une variation de quelques secondes seulement, et à un accroissement de 0,000005 pour $e$.

Nous pouvons conclure de là que la modification que nous venons d'apporter à la loi de NEWTON ne suffit pas pour rendre compte du mouvement du périhélie de MERCURE, ce qui réussit jusqu'à un certain point au moyen de la loi de WEBER; cependant, si nous n'exigeons pas que ce mouvement doive être expliqué par une modification de la loi de NEWTON, les formules que nous venons d'établir sont parfaitement admissibles. De nouvelles recherches devront nous apprendre si les termes que nous avons ajoutés à l'expression ordinaire pour la gravitation peuvent avoir une influence notable chez d'autres corps célestes; mais cela n'est guère probable.

Du reste, je suis loin de vouloir attacher grande importance à la forme particulière que je viens de donner à ces termes. Ce que j'ai voulu faire voir, c'est que la pesanteur peut être attribuée à des actions qui ne se propagent pas avec une vitesse plus grande que celle de la lumière. On sait que LAPLACE s'est déjà occupé de cette question de la vitesse de propagation de l'attraction universelle, et qu'après lui plusieurs astronomes ont également examiné ce qui doit arriver quand l'influence émanant d'un corps céleste $A$ met un certain temps à atteindre un deuxième corps $B$. Supposons que $A$ se déplace avec la vitesse $p$, et représentons par $V$ la vitesse de propagation. Il est facile de déterminer la position $A_1$, dans laquelle $A$ se trouvait au moment où il émettait quelque chose qui, se propageant avec la vitesse $V$, atteint $B$ au temps $t$, position qui doit être distinguée de celle que le corps $A$ occupe à cet instant $t$. Si l'on suppose maintenant que l'action de $A$ est la même que si ce corps était resté en $A_1$, on arrive à une influence de l'ordre $p/V$ sur les mouvements astronomiques; ensuite, si l'on attribue à $V$ la valeur de la vitesse de propagation de la lumière, on trouve que cette influence est bien plus grande que les observations ne nous permettent d'admettre. Pour que, selon cette manière de voir, les termes en $p/V$ ne deviennent pas trop grands, il faut admettre que $V$ soit égal à quelques millions de fois la vitesse de la lumière.

Les développements qui précèdent prouvent que l'on peut échapper à cette conclusion. Bien que des changements d'état dans l'éther, satisfaisant à des équations de la forme (I), se propagent avec la vitesse $V$, les résultats ne contiennent cependant pas des termes du premier ordre, c. à d. en $p/V$ ou $w/V$, mais seulement des termes en $p^2/V^2$ et $pw/V^2$. Cela provient de la façon particulière dont la matière en mouvement modifie l'état de l'éther; en effet, dans le cas que nous venons de considérer, l'état de l'éther n'est pas le même que si le corps agissant était resté en $A_1$.

## SUR LA MASSE DE L'ÉNERGIE [1]

1. Il y a quelques années EINSTEIN [2]) arriva à la conclusion que tout changement dans l'énergie interne $\varepsilon$ d'un corps a pour conséquence un changement de la masse $m$, de telle sorte qu'il existe entre les accroissements $\delta\varepsilon$ et $\delta m$ la relation

$$\delta m = \frac{\delta\varepsilon}{c^2}, \tag{1}$$

où $c$ est la vitesse de la lumière. Je me propose de déduire d'une autre façon ce théorème remarquable et de traiter un peu en détail deux cas particuliers.

Je me servirai à cet effet du principe de relativité d'EINSTEIN et de quelques formules de la mécanique correspondant à ce principe.

Nous nous bornerons à considérer des vitesses de translation dans la direction de l'axe des $z$ et nous mettrons les formules de transformation, par lesquelles on passe d'un système $x, y, z, t$ à un système $x', y', z', t'$ ou inversement, sous la forme suivante [3]:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = az - bct, \quad t' = at - \frac{b}{c}z. \tag{2}$$

Par $a$ et $b$ nous représentons deux nombres, dont le premier est positif et qui sont liés par la relation

$$a^2 - b^2 = 1. \tag{3}$$

Pour fixer les idées nous pouvons imaginer deux observateurs $A$ et $B$, dont l'un se sert du système $x, y, z, t$ et l'autre du système $x', y', z', t'$. Les grandeurs se rapportant à $B$ seront toujours distinguées par des accents des grandeurs correspondantes à introduire pour $A$.

---

[1]) Arch. néerl. **2**, 139, 1912.

[2]) Ann. der Physik. **23**, 371, 1907.

[3]) Voir H. A. Lorentz. Phys. Zeitschrift. **11**, 1234, 1910 (Collected Papers, **7**, 211.)

Les formules de transformation pour les composantes des vitesses sont:

$$\mathfrak{v}'_x = \frac{\mathfrak{v}_x}{\omega}, \quad \mathfrak{v}'_y = \frac{\mathfrak{v}_y}{\omega}, \quad \mathfrak{v}'_z = \frac{a\mathfrak{v}_z - bc}{\omega}, \quad \omega = a - \frac{b\mathfrak{v}_z}{c}, \tag{4}$$

et celles pour les forces electrique ($\mathfrak{d}$) et magnétique ($\mathfrak{h}$)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{d}'_x &= a\mathfrak{d}_x - b\mathfrak{h}_y, & \mathfrak{d}'_y &= a\mathfrak{d}_y + b\mathfrak{h}_x, & \mathfrak{d}'_z &= \mathfrak{d}_z, \\ \mathfrak{h}'_x &= a\mathfrak{h}_x + b\mathfrak{h}_y, & \mathfrak{h}'_y &= a\mathfrak{h}_y - b\mathfrak{d}_x, & \mathfrak{h}'_z &= \mathfrak{h}_z. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Il résulte de (4), et aussi directement de (2), que le système de coordonnées $x', y', z'$ a dans le système $x, y, z, t$ une vitesse de translation $bc/a$ dans la direction de l'axe $z$.

Au sujet des formules de la mécanique citées ci-dessus nous remarquerons que, si un corps est animé de la vitesse $v$, la quantité de mouvement, qui a la même direction que $v$, est donnée par

$$G = m\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{6}$$

et l'énergie cinétique par

$$mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right), \tag{7}$$

de sorte que, s'il y a encore une énergie „interne" $\varepsilon$, l'énergie totale est

$$E = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c}} - 1\right) + \varepsilon. \tag{8}$$

Dans ces formules, $m$ est une grandeur qui est la même pour $A$ et $B$ et que l'on doit considèrer comme constante pour un point matériel; on peut l'appeler la masse minkowskienne.

Connaissant la vitesse $v$, la quantité de mouvement $G$ et l'énergie totale $E$, on peut tirer $m$ et $\varepsilon$ de (6) et (8).

2. Considérons maintenant un corps, ayant pour l'observateur $A$ une vitesse de translation $v$ dans la direction de l'axe des $z$; pour fixer les idées nous nous figurerons cet axe tracé vers la droite. Nous supposons que le corps soit frappé à gauche par un faisceau lumineux à ondes planes, se propageant dans la direction de l'axe des $z$, et limité en avant et en arrière par

un plan d'onde, de manière à avoir une longueur déterminée $l$. Supposons que la lumière soit simple et polarisée, les vibrations électriques s'effectuant parallèlement à l'axe des $x$, de sorte qu'on a

$$\mathfrak{d}_x = s \cos n\left(t - \frac{z}{c} + p\right), \quad \mathfrak{h}_y = s \cos n\left(t - \frac{z}{c} + p\right). \tag{9}$$

Représentant par $\Sigma$ la section du faisceau, on trouve aisément pour expression de l'énergie qu'il contient

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} l \Sigma s^2 \tag{10}$$

et pour la quantité de mouvement électromagnétique, qui a la direction de l'axe $z$ positif,

$$\frac{1}{2c} l \Sigma s^2 = \frac{\mathbf{e}}{c}. \tag{11}$$

Admettons maintenant que, quoiqu'il arrive, il ne reste rien de la lumière en dehors du corps; il faut alors que la quantité totale de son énergie augmente de (10) et que la quantité de mouvement augmente de (11).

Si nous pouvions admettre que $m$ ne change pas par le rayonnement, nous pourrions déduire de ce qu'est devenu en fin de compte la quantité de mouvement la nouvelle valeur de la vitesse de translation; par là on pourrait calculer l'énergie cinétique et, comme l'énergie totale est donnée, trouver comment l'énergie interne est modifiée par le rayonnement. Mais nous allons voir précisément que $m$ ne reste pas le même.

Considérons $\mathbf{e}$ comme infiniment petit, de sorte que tous les changements produits le sont également; nous trouvons alors, en égalant les changements de (6) et (8) aux expressions (11) et (10):

$$\frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \delta m + \frac{m}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)^3}} \delta v = \frac{\mathbf{e}}{c} \tag{12}$$

$$c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \delta m + \frac{mv}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)^3}} \delta v + \delta \varepsilon = \mathbf{e}. \tag{13}$$

Nous pouvons déterminer par là $\delta m$ et $\delta \varepsilon$, parce que $\delta v$ nous est fourni d'une autre façon, savoir par le principe de relativité.

3. En effet, décrivons les phénomènes, non plus dans le système $x, y, z, t$, mais dans le système $x', y', z', t'$, et admettons que

$$\frac{b}{a} = \frac{v}{c},$$

c. à d., en vertu de (3),

$$a = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \quad b = \frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}}; \tag{14}$$

il résulte alors de (4) qu'*avant* éclairement le corps $M$ n'a pas de vitesse de translation pour l'observateur $B$. *Après* éclairement la vitesse est donc infiniment petite et, comme le terme en $v^2$ de (6) peut être négligé, la quantité de mouvement correspondante peut se trouver en multipliant cette vitesse infiniment petite par la masse, telle qu'elle était avant l'éclairement. En effet, dans ce produit de la masse par une vitesse infiniment petite, on peut faire abstraction de la variation infiniment petite que la masse subit peut-être par suite de l'éclairement. L'observateur $B$ trouve donc la vitesse du corps $M$ après l'éclairement en divisant par $m$ la quantité de mouvement acquise. laquelle est égale à la quantité de mouvement électromagnétique du faisceau lumineux. Or, au moyen des formules de transformation (2) et (5) [1]) on déduit de (9):

$$\mathfrak{d}'_x = s' \cos n'(t' - \frac{z'}{c} + p'), \quad \mathfrak{h}'_y = s' \cos n'(t' - \frac{z'}{c} + p'),$$

$$s' = (a - b)s, \quad n' = (a - b)n, \quad p' = \frac{p}{a - b}.$$

Ensuite, on reconnaît aisément que pour $B$ aussi la section du faisceau lumineux est $\Sigma$, mais que pour cet observateur sa longueur est

$$\frac{l}{a - b} \text{ [2]}).$$

[1]) Les calculs sont simplifiés par cette circonstance, que les formules de transformation inverses, qui découlent des précédentes, s'obtiennent en permutant les grandeurs affectées d'accents avec les grandeurs correspondantes sans accents et en remplaçant en outre $b$ par $-b$.

[2]) Supposons que pour l'observateur $A$ le faisceau lumineux soit limité par les plans

$$z = k + ct, \quad z = k + l + ct,$$

qui, distants l'un de l'autre de $l$, se déplacent avec la vitesse $c$. Les plans représentés par les équations

$$z' = \frac{k}{a - b} + ct', \quad z' = \frac{k + l}{a - b} + ct',$$

qui se déduisent des précédentes au moyen des formules de transformation (2), constituent alors les limites du faisceau pour l'observateur $B$.

On obtient donc la quantité de mouvement que le faisceau possède pour $B$ en remplaçant dans (11) $l$ par cette valeur et $s$ par $(a - b)s$. Il s'ensuit que la vitesse après l'éclairement est

$$\mathfrak{v}_z' = \frac{(a-b)\mathrm{e}}{cm}.$$

Nous pouvons maintenant revenir à l'observateur $A$. A l'aide des formules de transformation (4), et songeant que $\mathfrak{v}_z'$ est infiniment petit et tenant compte de (3), nous trouvons:

$$\mathfrak{v}_z = \frac{a\mathfrak{v}_z' + bc}{a + (b\mathfrak{v}_z'/c)} = \frac{bc}{a} + \frac{1}{a^2}\mathfrak{v}_z' = v + \frac{1}{a^2}\mathfrak{v}_z',$$

d'où nous déduisons le changement $\delta v$ entrant dans (12) et (13):

$$\delta v = \frac{1}{a^2}\mathfrak{v}_z' = \frac{(a-b)\mathrm{e}}{a^2 cm} = \frac{\mathrm{e}}{m}\frac{(c-v)\sqrt{c^2-v^2}}{c^3}.$$

Nous en tirons enfin les valeurs

$$\delta m = \frac{\mathrm{e}}{c^2}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}},$$

$$\delta \varepsilon = \mathrm{e}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}},$$

qui sont d'accord avec la relation (1). Nous trouvons ainsi que le théorème d'EINSTEIN est confirmé, bien entendu en supposant que la masse dont nous considérons la variation soit la masse minkowskienne. Quant à l'énergie interne, pour indiquer sa valeur après le changement, il faut retrancher de l'énergie totale $\varepsilon$ l'énergie cinétique, calculée d'après (7) avec la masse et la vitesse modifiées.

4. On arrive à la même conclusion lorsqu'on se figure que le faisceau tombant sur le corps $M$ est réfléchi ou transmis en partie, en admettant, pour simplifier, que $M$ est limité de part et d'autre par un plan perpendiculaire à l'axe des $z$ et que dans le corps l'état est le même en tous les points d'un plan ainsi orienté. Il en est de même lorsqu'on considère un faisceau incident, venant du côté des $z$ positifs; dans ce cas il suffit de modifier quelques signes dans ce qui précède. On peut enfin supposer que la lumière vienne frapper le corps des deux côtés à la fois. Les changements infini-

ment petits qui dans ce dernier cas sont introduits dans les valeurs de $v$, $m$ et $\varepsilon$ s'obtiennent en ajoutant les changements produits séparément par les rayons venant de gauche et de droite.

Si le corps est atteint du côté gauche par l'énergie de rayonnement $\mathbf{e}_1$ et à droite par l'énergie $\mathbf{e}_2$, on trouve, en supposant qu'il ne reste pas de lumière en dehors du corps,

$$\delta v = \frac{\mathbf{e}_1(c - v) - \mathbf{e}_2(c + v)}{m} \cdot \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c^3},$$

$$\delta m = \frac{1}{c^2}\left[\mathbf{e}_1 \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} + \mathbf{e}_2 \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}\right],$$

$$\delta \varepsilon = \mathbf{e}_1 \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} + \mathbf{e}_2 \sqrt{\frac{c + v}{c - v}}.$$

Ce cas mérite l'attention, parce qu'il est naturel de penser qu'en éclairant le corps des deux côtés, de telle sorte que les pressions ainsi exercées s'entredétruisent, on puisse faire en sorte que l'état de mouvement du corps ne soit pas modifié et que seule l'énergie interne soit augmentée. On constate cependant que, s'il y a déjà une vitesse de translation $v$ avant l'éclairement, il n'est pas possible de choisir les grandeurs $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ de manière à laisser invariables à la fois la vitesse de translation et la quantité de mouvement, et c'est là évidemment une circonstance qui tient précisément à la variation considérée de la masse.

Si l'on prend $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1$, la quantité de mouvement ne change pas, mais la vitesse change d'une quantité

$$\delta v = -\frac{2\mathbf{e}_1 v}{m} \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c^3},$$

et l'on a

$$\delta m = \frac{2\mathbf{e}_1}{c\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Par contre, la vitesse ne change pas si

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \frac{c - v}{c + v}.$$

Mais dans ce cas la quantité de mouvement varie de

$$\delta G = \frac{2e_1 v}{c(c+v)}$$

et la masse de

$$\delta m = \frac{2e_1}{c^2}\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}.$$

Remarquons encore que dans tous les cas où la vitesse de translation ne subit pas de changement on a, d'après (6) et (8),

$$\delta G = \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,\delta m$$

et

$$\delta E = c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)\delta m + \delta\varepsilon;$$

de sorte que le théorème d'EINSTEIN exprimé par (1) conduit à la simple relation suivante entre les changements simultanés de la quantité de mouvement et de l'énergie totale:

$$\delta G : \delta E = v : c^2. \tag{15}$$

5. Je n'ai pas parlé dans ce qui précède de la nature spéciale des actions produites par la lumière qui a pénétré dans le corps; quelle que soit la forme prise par l'énergie absorbée à l'intérieur du corps, elle contribuera toujours dans la même mesure à l'augmentation de la masse. On reconnaît d'ailleurs aisément que, si par une modification de l'état interne l'énergie passe d'une forme dans une autre, cela ne peut avoir aucune influence sur la masse, pourvu que dans cette modification la vitesse de translation aussi bien que la quantité de mouvement restent ce qu'elles étaient.

Si l'on envisage des cas particuliers on peut arriver à une verification du résultat d'EINSTEIN par examen attentif de l'énergie et de la quantité de mouvement.

Prenons comme exemple le cas où il y a dans une cavité dans un corps un gaz monoatomique, dont le mouvement calorifique peut être augmenté par l'absorption de lumière [1]. Pour un observateur $B$ par rapport auquel le corps n'a pas de translation ce mouvement se fera avec la même intensité dans toutes les directions.

Soient $\mu$ la masse minkowskienne d'une molécule, $\mathfrak{w}'$ la vitesse qu'elle a pour $B$ et $\mathfrak{w}$ celle qu'elle a pour $A$. Exprimant les composantes de la dernière vitesse au moyen de celles de la première on trouve [2]:

$$c^2 - \mathfrak{w}^2 = \frac{c^2 - \mathfrak{w}'^2}{(a + b\mathfrak{w}'_z/c)^2},$$

d'où il suit, en vertu de (7), que pour l'observateur $A$ l'énergie cinétique de la molécule est

$$\mu c^2 \left( \frac{a + b\mathfrak{w}'_z/c}{\sqrt{1 - \mathfrak{w}'^2/c^2}} - 1 \right).$$

Pour toutes les molécules ensemble l'énergie est donc

$$E = \mu c^2 \Sigma \left( \frac{a}{\sqrt{1 - \mathfrak{w}'^2/c^2}} - 1 \right). \tag{16}$$

Nous avons omis ici sous le signe indiquant la sommation le terme en $\mathfrak{w}'_z$, parce que pour l'observateur $B$ les particules ont au même degré des composantes de vitesse positives et négatives dans la direction de l'axe des $z$.

Par rapport à l'observateur $A$ il n'en est pas ainsi. Pour lui une particule a, d'après la formule (6), une quantité de mouvement égale à

$$\mu \frac{\mathfrak{w}_z}{\sqrt{1 - \mathfrak{w}^2/c^2}} = \mu \frac{a\mathfrak{w}'_z + bc}{\sqrt{1 - \mathfrak{w}'^2/c^2}}$$

dans le sens de l'axe des $z$; cet observateur attribue donc à tout le gaz une quantité de mouvement

$$G = \mu c \, \Sigma \frac{b}{\sqrt{1 - \mathfrak{w}'^2/c^2}}. \tag{17}$$

---

[1] Voir EINSTEIN, l.c. § 4.

[2] Remarquons qu'on déduit de (4):

$$c^2 - \mathfrak{v}'^2 = \frac{c^2 - \mathfrak{v}^2}{\omega^2}.$$

Voir d'ailleurs la première note au bas de la page 219.

Ces résultats confirment tout d'abord la proportionnalité (15). En effet, aussi longtemps que la vitesse de translation $v$ reste la même, $c$ et $b$ ne changent pas non plus; si dans ces conditions les vitesses moléculaires $\mathfrak{w}'$ se modifient, on a d'après (16) et (17)

$$\delta G : \delta \varepsilon = b : ac,$$

ce qui s'accorde avec (15) en vertu de (14).

Si $N$ est le nombre de molécules et que l'on pose

$$m' = \mu \, \Sigma \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \mathfrak{w}'^2/c^2}} - 1 \right), \tag{18}$$

$$\varepsilon = \mu c^2 \, \Sigma \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \mathfrak{w}'^2/c^2}} - 1 \right), \tag{19}$$

on peut écrire, eu égard à (14),

$$G = (N\mu + m') \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$E = (N\mu + m')c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) + \varepsilon. \tag{20}$$

Il ressort de là que $N\mu + m'$ est la masse. Or, comme $N\mu$ est la masse aussi longtemps que la vitesse moléculaire représentée par $\mathfrak{w}'$ n'existe pas, $m'$ est l'augmentation de masse due à cette vitesse. Si l'on compare (20) avec (8), on reconnaît que $\varepsilon$ est effectivement ce que nous avons appelé antérieurement l'énergie „interne", et de (18) et (19) résulte la relation

$$m' = \frac{\varepsilon}{c^2},$$

qui est conforme au théorème d'EINSTEIN.

6. Un cas qui a quelque analogie avec celui que nous venons d'examiner est le cas d'une cavité remplie de rayonnement noir. Toutefois, pour se voir vérifier dans ce cas le théorème d'EINSTEIN on doit faire usage du résultat, trouvé par EINSTEIN [1]), que si un solide rigide [2]) est soumis à des forces qui ne modifient pas son

---

[1]) l.c. § 1.

[2]) Nous entendons par ce mot que le corps ne peut subir d'autres changements de forme et de grandeur que ceux qui sont produits par une vitesse de translation.

mouvement de translation, dans ces conditions l'énergie du corps se trouve augmentée d'une quantité que l'on peut écrire, avec les notations employées ici,

$$-\frac{v^2}{c\sqrt{c^2-v^2}}\Sigma\,(Z'z'), \tag{21}$$

où la sommation doit être étendue à toutes les forces agissant sur le corps.

Pour l'observateur $B$ qui partage la translation, $Z'$ est la composante d'une des forces dans la direction de l'axe des $z$, et $z'$ est la troisième coordonnée de son point d'application.

On peut démontrer, d'une façon analogue à celle employée par EINSTEIN pour la démonstration de ce théorème, que l'existence des forces en question doit donner lieu à une certaine quantité de mouvement. Celle-ci a la direction de la translation et sa grandeur est

$$-\frac{v}{c\sqrt{c^2-v^2}}\Sigma\,(Z'z'). \tag{22}$$

7. Considérons d'abord le rayonnement noir, tel qu'il se présente à l'observateur $B$. Pour lui les valeurs moyennes des six grandeurs

$$\mathfrak{d}_x'^2,\ \mathfrak{d}_y'^2,\ \mathfrak{d}_z'^2,\ \mathfrak{h}_x'^2,\ \mathfrak{h}_y'^2,\ \mathfrak{h}_z'^2,$$

prises par rapport à des espaces qui sont grands en comparaison de la longueur d'onde, sont toutes égales entr'elles; nous les représenterons par $q$. L'énergie rayonnante par unité de volume est $3q$ et il s'exerce contre la paroi de la cavité une pression, égale à $q$ par unité de surface.

Ensuite, il n'y a dans le rayonnement aucune direction qui soit prédominante, d'où nous concluons que, si nous indiquons par un trait horizontal les moyennes de la nature mentionnée, nous avons

$$\overline{\mathfrak{d}_x'\,\mathfrak{h}_y' - \mathfrak{d}_y'\,\mathfrak{h}_x'} = 0.$$

Si nous passons maintenant aux grandeurs qui se rapportent à $A$, au moyen des formules de transformation (5), ou plutôt au moyen des formules inverses, nous trouvons que l'énergie par unité de volume est

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{d}^2+\mathfrak{h}^2) = \tfrac{1}{2}\{(a^2+b^2)(\mathfrak{d}_x'^2+\mathfrak{d}_y'^2+\mathfrak{h}_x'^2+\mathfrak{h}_y'^2) + \\ + (\mathfrak{d}_z'^2+\mathfrak{h}_z'^2) + 4ab(\mathfrak{d}_x'\,\mathfrak{h}_y' - \mathfrak{d}_y'\,\mathfrak{h}_x')\}$$

et que la quantité de mouvement électromagnétique dans la direction de l'axe des $z$, également prise par unité de volume, est

$$\frac{1}{c}(\mathfrak{d}_x \mathfrak{h}_y - \mathfrak{d}_y \mathfrak{h}_x) = \frac{1}{c}\{(a^2 + b^2)(\mathfrak{d}'_x \mathfrak{h}'_y - \mathfrak{d}'_y \mathfrak{h}'_x) + \\ + ab(\mathfrak{d}'^2_x + \mathfrak{d}'^2_y + \mathfrak{h}'^2_x + \mathfrak{h}'^2_y)\}.$$

Les valeurs moyennes de ces grandeurs sont

$$\tfrac{1}{2}\,\overline{(\mathfrak{d}^2 + \mathfrak{h}^2)} = (2a^2 + 2b^2 + 1)q = (3a^2 + b^2)q,$$

$$\frac{1}{c}\,\overline{(\mathfrak{d}_x \mathfrak{h}_y - \mathfrak{d}_y \mathfrak{h}_x)} = \frac{4ab}{c}q,$$

et ces valeurs doivent être multipliées par le volume de la cavité. Si $S'$ est le volume pour l'observateur $B$, pour l'observateur $A$ [1]) il est

$$\frac{S'}{a},$$

ce qui fait que pour l'énergie et la quantité de mouvement présentes dans la cavité nous trouvons les expressions

$$\frac{3a^2 + b^2}{a} qS' \tag{23}$$

et

$$\frac{4b}{c} qS'. \tag{24}$$

8. Nous devons tenir compte maintenant de ce qui a été dit au § 6. La paroi de la cavité est le corps rigide et la force qui la sollicite (au point de vue de l'observateur $B$) est la pression du rayonnement $q$. Pour l'expression $\Sigma\,(Z'z')$ nous obtenons facilement la valeur $qS'$ et en vertu de (14) les expressions (21) et (22) se transforment en

$$-\frac{b^2}{a} qS'$$

et

$$-\frac{b}{c} qS'.$$

[1]) Nous avons tenu compte ici de la contraction bien connue dans le sens du mouvement.

Si l'on additionne la première expression à (23) et la seconde à (24), on obtient les valeurs suivantes pour l'énergie et la quantité de mouvement, qui, somme toute, sont dues à l'existence du rayonnement noir.

$$E = 3aqS' = \frac{3}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\, qS',$$

$$G = \frac{3b}{c}\, qS' = \frac{3v}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}\, qS'.$$

Si l'on pose

$$\varepsilon = 3qS', \quad m = \frac{\varepsilon}{c^2},$$

ces formules prennent la forme des équations (8) et (6). La valeur de $m$ est d'accord avec le théorème d'EINSTEIN, et comme valeur de l'énergie interne on doit prendre celle que l'observateur $B$ attribue au rayonnement noir.

9. Pour conclure nous ferons encore les remarques suivantes.

*a.* La question se pose de savoir si, dans le cas de la cavité remplie de gaz tout comme dans celui où la cavité contient un rayonnement noir, on ne doit pas tenir compte des contributions, mentionnées au § 6, que la paroi apporte à l'énergie et à la quantité de mouvement. On doit le faire sans doute; mais il y a encore une autre circonstance que l'on ne doit pas perdre de vue. Nous avons vu que les termes en question dépendent des forces agissant sur le corps, donc, dans le cas considéré, des forces que la paroi subit à chaque choc de molécule. Mais, par suite des forces que la paroi exerce inversement sur les molécules, nous avons à introduire de nouveaux termes encore dans les expressions de l'énergie et de la quantité de mouvement des *molécules*. Or, je tiens pour probable que ces termes détruisent exactement ceux qui se rapportent à la paroi et qu'on s'en apercevra dès le début lorsqu'on comprendra dans la déduction des formules (21) et (22) l'action et la réaction mutuelles d'une molécule et de la paroi. Cela doit néanmoins être examiné de plus près.

*b.* La modification de la masse, que nous avons considérée dans ce qui précède, doit avoir pour conséquence que, pour mettre un corps en mouvement dans des conditions identiques pour le reste, on doit exercer une force d'autant plus grande que le corps contient plus d'énergie. Il sera intéressant de vérifier cela pour des cas particuliers, par un examen attentif des forces agissant dans le corps. Lorsqu'un récipient contenant un gaz ou du rayonnement noir est animé d'une accélération dirigée vers la droite, le gaz ou le rayonnement doivent exercer contre la paroi de gauche une pression plus grande que contre la paroi opposée. On devra pouvoir déduire ceci des formules relatives à la pression du rayonnement ou de celles relatives aux chocs des molécules; dans le cas du gaz la différence de pression devra se composer de deux parties, l'une indépendante du mouvement moléculaire, l'autre augmentant avec l'intensité de ce mouvement.

*c.* Il est naturel de se demander si l'énergie interne d'un corps ne doit pas avoir sur son poids une influence du même genre que sur la masse. Pour ce qui est de l'énergie du rayonnement noir, cette question a déjà été traitée par EINSTEIN. Je me bornerai ici à quelques remarques au sujet du mouvement moléculaire. Si l'on veut rester d'accord avec le principe de relativité, on ne peut pas admettre que l'attraction mutuelle entre deux particules matérielles dépend uniquement de leur distance; elle doit être modifiée par le mouvement et il n'est donc pas impossible que l'attraction, qu'un système de molécules, p. ex. la masse de gaz considérée ci-dessus, subit de la part de la terre, est changée par les mouvements moléculaires. Malheureusement, cette question doit rester indécise, puisque diverses lois peuvent être admises pour l'influence du mouvement sur l'attraction. D'après celle dont j'ai parlé à une autre occasion [1]), si l'on se borne à considérer les termes du second ordre par rapport aux vitesses, la seconde puissance de la vitesse du point attiré n'intervient pas dans les expressions des composantes des fórces; les formules ne contiennent les composantes de la vitesse de ce point qu'à la première puissance, multipliées par les composantes de la vitesse du point attirant. Il s'ensuivrait que le poids ne dépend *pas* du mouvement moléculaire.

---

[1]) l.c. p. 1239 (Collected Papers, **7**, 216–218).

# ON HAMILTON'S PRINCIPLE IN EINSTEIN'S THEORY OF GRAVITATION[1])

The discussion of some parts of EINSTEIN's theory of gravitation [2]) may perhaps gain in simplicity and clearness, if we base it on a principle similar to that of HAMILTON, so much so indeed that HAMILTON's name may properly be connected with it. Now that we are in possession of EINSTEIN's theory we can easily find how this variation principle must be formulated for systems of different nature and also for the gravitation field itself.

## *Motion of a material point*

§ 1. Let a material point move under the influence of a force with the components $K_1$, $K_2$, $K_3$. Let us vary every position $x, y, z$ occuring in the real motion in the way defined by the infinitely small quantities $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$. If, in the varied motion, the position $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ is reached at the same time $t$ as the position $x$, $y$, $z$ in the real motion, we shall have the equation

$$\delta \int L dt + \int (K_1 \delta x + K_2 \delta y + K_3 \delta z) dt = 0, \tag{1}$$

$L$ being the Lagrangian function and the integrals being taken over an arbitrary interval of time, at the beginning and the end of which the variations of the coordinates are zero. $K$ is supposed to be a force acting on the material point beside the forces that are included in the Lagrangian function.

§ 2. We may also suppose the time $t$ to be varied, so that in the varied motion the position $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ is reached at the time $t + \delta t$. In the first term of (1) this does not make any difference if we suppose that for the extreme positions also

1) Versl. Akad. Amsterdam, **23**, 1073, 1915. Proc. Acad. Amsterdam, **19**, 751, 1915.
2) Zeitschrift für Math. und Physik. **62**, 225, 1914.
Berliner Sitzungsberichte. 1914, 1030.

$\delta t = 0$. As to the second term we remark that the coordinates in the varied motion at the time $t$ may now be taken to be $x + \delta x - v_1 \delta t$, $y + \delta y - v_2 \delta t$, $z + \delta z - v_3 \delta t$, if $v_1, v_2, v_3$ are the velocities in the real motion. In the second term we must therefore replace $\delta x, \delta y, \delta z$ by $\delta x - v_1 \delta t$, $\delta y - v_2 \delta t$, $\delta z - v_3 \delta t$. In the equation thus found we shall write $x_1, x_2, x_3, x_4$ for $x, y, z, t$. For the sake of uniformity we shall add to the three velocity components a fourth, which, however, necessarily must have the value 1 as we take for it $dx_4/dx_4$. We shall also add to the three components of the force $K$ a fourth component, which we define as

$$K_4 = -(v_1 K_1 + v_2 K_2 + v_3 K_3), \tag{2}$$

and which therefore represents the work of the force per unit of time with the negative sign.

Then we have instead of (1)

$$\delta \int L dt + \int \Sigma\,(a) K_a \delta x_a \,.\, dt = 0, \tag{3}$$

and for (2) we may write [1])

$$\Sigma\,(a) v_a K_a = 0. \tag{4}$$

§ 3. In EINSTEIN's theory the gravitation field is determined by certain characteristic quantities $g_{ab}$, functions of $x_1, x_2, x_3, x_4$, among which there are 10 different ones, as

$$g_{ba} = g_{ab}. \tag{5}$$

A point of fundamental importance is the connection between these quantities and the corresponding coefficients $g'_{ab}$, with which we are concerned, when by an arbitrary substitution $x_1, \ldots x_4$ are changed for other coordinates $x'_1, \ldots x'_4$. This connection is defined by the condition that

$$ds^2 = g_{11} dx_1^2 + \ldots + g_{44} dx_4^2 + 2 g_{12} dx_1 dx_2 + \ldots$$

or shorter

$$ds^2 = \Sigma\,(ab) g_{ab} dx_a dx_b$$

be an invariant.

---

[1]) In these formulae we have put between parentheses behind the sign of summation the index with respect to which the summation must be effected, which means that the values 1, 2, 3, 4 have to be given to it successively. In the same way two or more indices behind the sign of summation will indicate that in the expression under this sign these values have to be given to each of the indices. $\Sigma\,(ab)$ f.i. means that each of the four values of $a$ has to be combined with each of the four values of $b$.

Putting

$$dx_a = \Sigma(b)p_{ab}dx'_b \tag{6}$$

we find

$$g'_{ab} = \Sigma\,(cd)p_{ca}p_{db}g_{cd}. \tag{7}$$

Instead of (6) we shall also write

$$dx'_a = \Sigma(b)\pi_{ba}dx_b,$$

so that the set of quantities $\pi_{ba}$ may be called the inverse of the set $p_{ab}$. Similarly, we introduce a set of quantities $\gamma_{ba}$, the inverse of the set $g_{ab}$ [1]).

We remark here that in virtue of (5) and (7) $g'_{ba} = g'_{ab}$ and that likewise $\gamma_{ba} = \gamma_{ab}$.

Our formulae will also contain the determinant of the quantities $g_{ab}$, which we shall denote by $g$, and the determinant $p$ of the coefficients $p_{ab}$ (absolute value: $|p|$). The determinant $g$ is always negative.

We may now, as has been shown by EINSTEIN, deduce the motion of a material point in a gravitation field from the principle expressed by (3) if we take for the Lagrangian function

$$L = -m\,\frac{ds}{dt} = -m\sqrt{\Sigma\,(ab)g_{ab}v_a v_b}. \tag{8}$$

*Motion of a system of incoherent material points*

§ 4. Let us now, following EINSTEIN, consider a very large number of material points wholly free from each other, which are moving in a gravitation field in such a way that at a definite moment the velocity components of these points are continuous functions of the coordinates. By taking the number very large we may pass to the limiting case of a continuously distributed matter without internal forces.

Evidently the laws of motion for a system of this kind follow immediately from those for a single material point. If $\rho$ is the

---

[1]) Suppose

$$x_a = \Sigma(b)\nu_{ba}\xi_b$$

to follow from the equations

$$\xi_a = \Sigma(b)n_{ab}x_b;$$

then the set $\nu_{ab}$ is the inverse of the set $n_{ab}$.

density and $dxdydz$ an element of volume, we may write instead of (8)

$$-\rho\sqrt{\Sigma\,(ab)g_{ab}v_a v_b}\,.\,dxdydz. \tag{9}$$

If now we wish to extend equation (3) to the whole system we must multiply (9) by $dt$ and integrate with respect to $x$, $y$, $z$ and $t$.

In the last term of (3) we shall do so likewise after having replaced the components $K_a$ by $K_a dxdydz$, so that in what follows $K$ will represent the external force per unit of volume.

If further we replace $dxdydzdt$ by $dS$, an element of the four-dimensional extension $x_1, \ldots x_4$, and put

$$\rho v_a = w_a, \tag{10}$$

$$\mathrm{L} = -\sqrt{\Sigma\,(ab)g_{ab}w_a w_b} \tag{11}$$

we find the following form of the fundamental theorem.

Let a variation of the motion of the system of material points be defined by the infinitely small quantities $\delta x_a$, which are arbitrary continuous functions of the coordinates within an arbitrarily chosen finite space $S$[2]), at the limits of which they vanish. Then we have, if the integrals are taken over the space $S$, and the quantities $g_{ab}$ are left *unchanged*,

$$\delta\int \mathrm{L}dS + \int \Sigma\,(a)K_a\delta x_a\,.\,dS = 0 \tag{12}$$

For the first term we may write

$$\int \delta\mathrm{L}\,.\,dS,$$

if $\delta\mathrm{L}$ denotes the change of L at a fixed point of the space $S$.

The quantity $\mathrm{L}dS$ and therefore also the integral $\int \mathrm{L}dS$ is invariant when we pass to another system of coordinates. [1])

§ 5. The equations of motion may be derived from (12) in the following way. When the variations $\delta x_a$ have been chosen, the varied motion of the matter is perfectly defined, so that the changes of the density and of the velocity components are also

[1]) This follows from the invariancy of $ds^2$, combined with the relations

$$\frac{\rho'}{dx'_4} = |p|\frac{\rho}{dx_4}, \quad dS' = \frac{1}{|p|}dS.$$

[2]) The author puts the word "space" for "four-dimensional extension" (Editors' note).

known. For the variations at a fixed point of the space $S$ we find

$$\delta w_a = \Sigma\,(b)\,\frac{\partial \chi_{ab}}{\partial x_b} \tag{13}$$

where

$$\chi_{ab} = w_b \delta x_a - w_a \delta x_b\,. \tag{14}$$

(Therefore: $\chi_{ba} = -\chi_{ab}$, $\chi_{aa} = 0$).

If for shortness we put

$$P = \sqrt{\Sigma\,(ab) g_{ab} w_a w_b}\,, \tag{15}$$

so that $\mathrm{L} = -P$, and

$$\Sigma\,(b) g_{ab} w_b = u_a\,, \tag{16}$$

we have

$$\delta L = -\Sigma\,(a)\,\frac{u_a}{P}\,\delta w_a = -\Sigma\,(ab)\,\frac{u_a}{P}\,\frac{\partial \chi_{ab}}{\partial x_b} =$$

$$= -\Sigma\,(ab)\,\frac{\partial}{\partial x_b}\left(\frac{u_a}{P}\chi_{ab}\right) + \Sigma\,(ab)\chi_{ab}\,\frac{\partial}{\partial x_b}\left(\frac{u_a}{P}\right),$$

so that, with regard to (14),

$$\left.\begin{aligned} \delta \mathrm{L} + \Sigma\,(a) K_a \delta x_a = {} & -\Sigma\,(ab)\,\frac{\partial}{\partial x_b}\left(\frac{u_a}{P}\chi_{ab}\right) + \\ & + \Sigma\,(ab)(w_b \delta x_a - w_a \delta x_b)\,\frac{\partial}{\partial x_b}\left(\frac{u_a}{P}\right) + \Sigma\,(a) K_a \delta x_a \end{aligned}\right\}. \tag{17}$$

If after multiplication by $dS$ this expression is integrated over the space $S$ the first term on the right hand side vanishes, $\chi_{ab}$ being 0 at the limits. In the last two terms only the variations $\delta x_a$ occur, but not their differential coefficients, so that according to our fundamental theorem, when these terms are taken together, the coefficient of each $\delta x_a$ must vanish. This gives the equations of motion [1])

$$K_a = \Sigma\,(b) w_b \left[\frac{\partial}{\partial x_a}\left(\frac{u_b}{P}\right) - \frac{\partial}{\partial x_b}\left(\frac{u_a}{P}\right)\right], \tag{18}$$

[1]) In the term

$$-\Sigma\,(ab) w_a \delta x_b \frac{\partial}{\partial x_b}\left(\frac{u_a}{P}\right)$$

the indices $a$ and $b$ must first be interchanged.

which evidently agree with (4), or what comes to the same, with

$$\Sigma\,(a) w_a K_a = 0 . \qquad (19)$$

In virtue of (18) the general equation (17), which holds for arbitrary variations that need not vanish at the limits of $S$, becomes

$$\delta \mathrm{L} + \Sigma\,(a) K_a \delta x_a = -\Sigma\,(ab) \frac{\partial}{\partial x_b}\left(\frac{u_a}{P}\chi_{ab}\right). \qquad (20)$$

§ 6. We can derive from this the equations for the momenta and the energy.

Let us suppose that only one of the four variations $\delta x_a$ differs from 0 and let this one, say $\delta x_c$, have a *constant* value. Then (14) shows that for each value of $a$ that is not equal to $c$

$$\chi_{ac} = -w_a \delta x_c , \quad \chi_{ca} = w_a \delta x_c , \qquad (21)$$

while all $\chi$'s without an index $c$ vanish.

Putting first $b = c$ and then $a = c$, and replacing at the same time in the latter case $b$ by $a$, we find for the right hand side of (20)

$$\Sigma\,(a) \frac{\partial}{\partial x_c}\left(\frac{u_a w_a}{P}\right) \delta x_c - \Sigma\,(a) \frac{\partial}{\partial x_a}\left(\frac{u_c w_a}{P}\right) \delta x_c\ ^{1}).$$

But, according to (15) and (16),

$$\Sigma\,(a) \frac{u_a w_a}{P} = P = -\mathrm{L},$$

so that (20) becomes

$$\delta \mathrm{L} + K_c \delta x_c = -\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_c} \delta x_c - \Sigma\,(a) \frac{\partial}{\partial x_a}\left(\frac{u_c w_a}{P}\right) \delta x_c . \qquad (22)$$

It remains fo find the value of $\delta$L.

The material system together with its state of motion has been shifted in the direction of the coordiate $x_c$ over a distance $\delta x_c$. If the gravitation field had participated in this shift, $\delta$L would have been equal to

$$-\frac{\partial L}{\partial x_c} \delta x_c .$$

[1]) The circumstance that (21) does not hold for $a = c$ might lead us to exclude this value from the two sums. We need not, however, introduce this restriction, as the two terms that are now written down too much, annul each other.

As, however, the gravitation field has been left unchanged, $\partial L/\partial x_c$ in this last expression must be diminished by $(\partial L/\partial x_c)_w$, the index $w$ meaning that we must keep constant the quantities $w_a$ and consider only the variability of the coefficients $g_{ab}$. Hence

$$\delta L = \left\{ -\frac{\partial L}{\partial x_c} + \left(\frac{\partial L}{\partial x_c}\right)_w \right\} \delta x_c .$$

Substituting this in (22) and putting

$$\frac{u_c w_a}{P} = T_{ac}, \tag{23}$$

we find

$$K_c + \left(\frac{\partial L}{\partial x_c}\right)_w = -\Sigma(a)\, \frac{\partial T_{ac}}{\partial x_a}. \tag{24}$$

The first three of these equations ($c = 1, 2, 3$) refer to the momenta; the fourth ($c = 4$) is the equation of energy. As we know already the meaning of $K_1, \ldots K_4$ we can easily see that of the other quantities. The stresses $X_x, X_y, X_z, Y_x \ldots$ are $T_{11}, T_{21}, T_{31}, T_{12} \ldots$; the components of the momentum per unit of volume $-T_{41}, -T_{42}, -T_{43}$; the components of the flow of energy $T_{14}, T_{24}, T_{34}$. Further $T_{44}$ is the energy per unit of volume. The quantities

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right)_w, \quad \left(\frac{\partial L}{\partial x_2}\right)_w, \quad \left(\frac{\partial L}{\partial x_3}\right)_w$$

are the momenta which the gravitation field imparts to the material system per unit of time and unit of volume, while the energy which the system draws from that field is given by $-(\partial L/\partial x_4)_w$.

*An electromagnetic system in the gravitation field*

§ 7. We shall now consider charges moving under the influence of external forces in a gravitation field; we shall determine the motion of these charges and the electromagnetic field belonging to them. The density $\rho$ of the charge will be supposed to be a continuous function of the coordinates; the force per unit of volume will be denoted by $K$ and the velocity of the point of a charge by $v$. Further we shall again introduce the notation (10).

In EINSTEIN's theory the electromagnetic field is determined by two sets, each of four equations, corresponding to well known equations in the theory of electrons. We shall consider one of these sets as the mathematical description of the system to which we have to apply HAMILTON's principle; the second set will be found by means of this application.

The first set, the fundamental equations, may be written in the form

$$\Sigma\,(b)\,\frac{\partial \psi_{ab}}{\partial x_b} = w_a\,, \tag{25}$$

the quantities $\psi_{ab}$ [1]) on the left hand side being subject to the conditions

$$\psi_{aa} = 0\,, \quad \psi_{ba} = -\psi_{ab}\,, \tag{26}$$

so that they represent 6 mutually independent numerical values. These are the components of the electric force $\mathbf{E}$ and the magnetic force $\mathbf{H}$. We have indeed

$$\left.\begin{array}{lll} \psi_{41} = \mathsf{E}_x\,, & \psi_{42} = \mathsf{E}_y\,, & \psi_{43} = \mathsf{E}_z\,, \\ \psi_{23} = \mathsf{H}_x\,, & \psi_{31} = \mathsf{H}_y\,, & \psi_{12} = \mathsf{H}_z\,, \end{array}\right\} \tag{27}$$

and it is thus seen that the first three of the formulae (25) express the connection between the magnetic field and the electric current. The fourth shows how the electric field is connected with the charge.

On passing to another system of coordinates we have for $w_a$ the transformation formula

$$w'_a = |p|\,\Sigma\,(b)\pi_{ba}w_b\,,$$

which can easily be deduced, while for $\psi_{ab}$ we shall assume the formula

$$\psi'_{ab} = |p|\,\Sigma\,(cd)\pi_{ca}\pi_{db}\psi_{cd}\,. \tag{28}$$

In virtue of this assumption the equations (25) are covariant for any change of coordinates.

---

1) The quantities $\psi_{ab}$ are connected with the components $\varphi_{ab}$ of the tensor introduced by EINSTEIN by the equations $\psi_{ab} = \sqrt{-g}\,.\,\varphi_{ab}$.

§ 8. Beside $\psi_{ab}$ we shall introduce certain other quantities $\overline{\psi}_{ab}$ which we define by

$$\overline{\psi}_{ab} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \Sigma\,(cd) g_{ca} g_{db} \psi_{cd} \tag{29}$$

or with regard to (26)

$$\overline{\psi}_{ab} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \Sigma(\overline{cd})(g_{ca} g_{db} - g_{da} g_{cb}) \psi_{cd}, \tag{30}$$

in which last equation the bar over $cd$ means that in the sum each combination of two numbers occurs only once.

As a consequence of this definition we have

$$\overline{\psi}_{aa} = 0, \quad \overline{\psi}_{ba} = -\overline{\psi}_{ab}, \tag{31}$$

and we find by inversion [1])

$$\psi_{ab} = \sqrt{-g}\, \Sigma\,(cd) \gamma_{ac} \gamma_{bd} \overline{\psi}_{cd}. \tag{32}$$

To these equations we add the transformation formula for $\overline{\psi}_{ab}$, which may be derived from (28) [2])

$$\overline{\psi'}_{ab} = \Sigma\,(cd) p_{ca} p_{db} \overline{\psi}_{cd}. \tag{33}$$

§ 9. We shall now consider the 6 quantities (27) which we shall

---

[1]) By the definition of the quantities $\gamma$ (§ 3) we have

$$\Sigma\,(a)\, g_{ab} \gamma_{ab} = 1 \tag{$\alpha$}$$

and for $b \neq c$

$$\Sigma\,(a)\, g_{ab} \gamma_{ac} = 0, \quad \text{or} \quad \Sigma\,(a)\, g_{ba}\, \gamma_{ca} = 0. \tag{$\beta$}$$

Substituting for $\overline{\psi}_{cd}$ an expression similar to (29) with other letters as indices, we have

$$\sqrt{-g}\, \Sigma\,(cd)\, \gamma_{ac} \gamma_{bd} \overline{\psi}_{cd} = \Sigma\,(cdef) \gamma_{ac} \gamma_{bd} g_{ec} g_{fd} \psi_{ef} = \Sigma\,(df\,) \gamma_{bd} g_{fd} \psi_{af} = \psi_{ab}.$$

The last two steps of this transformation, which rest on ($\alpha$) and ($\beta$), will need no further explanation. In a similar way we may proceed (comp. the following notes) in many other cases, using also the relations $\Sigma\,(a) p_{ba} \pi_{ba} = 1$ and $\Sigma\,(a) p_{ba} \pi_{ca} = 0$ (the latter for $b \neq c$), which are similar to ($\alpha$) and ($\beta$).

[2]) If we start from the equation for $\overline{\psi'}_{ab}$ that corresponds to (29) and if we use (7) and (28), attending to $\sqrt{-g'} = |p|\, \sqrt{-g}$, we find

$$\overline{\psi'}_{ab} = \frac{1}{\sqrt{-g'}} \Sigma\,(cd) g'_{ca} g'_{db} \psi'_{cd} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \Sigma\,(c\,d\,e\,f\,h\,i\,j\,k) p_{ec} p_{fa} p_{hd} p_{ib} \pi_{jc} \pi_{kd} g_{ef} g_{hi} \psi_{jk}.$$

This may be transformed in two steps (comp. the preceeding note) to

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \Sigma\,(e\,f\,h\,i) p_{fa} p_{ib} g_{ef} g_{hi} \psi_{eh}.$$

In this way we may proceed further, after first expressing $\psi_{eh}$ as a function of $\overline{\psi}_{lm}$ by means of (32).

especially call "the quantities $\psi$" and the corresponding quantities $\overline{\psi}$, viz. $\overline{\psi}_{41} \ldots \overline{\psi}_{12}$.

According to (30) these latter are homogeneous and linear functions of the former and as (because of (5)) the coefficient of $\psi_{cd}$ in $\overline{\psi}_{ab}$ is equal to the coefficient of $\psi_{ab}$ in $\overline{\psi}_{cd}$, there exists a homogeneous quadratic function L of $\psi_{41}, \ldots \psi_{12}$, which, when differentiated with respect to these quantities, gives $\overline{\psi}_{41}, \ldots \overline{\psi}_{12}$. Therefore

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_{ab}} = \overline{\psi}_{ab} \tag{34}$$

and

$$L = \tfrac{1}{2} \Sigma\, (\overline{ab}) \psi_{ab} \overline{\psi}_{ab}. \tag{35}$$

If, as in (34), we have to consider derivatives of L, this quantity will be regarded as a quadratic function of the quantities $\psi$.

The quantity L can now play the same part as the quantity that is represented by the same letter in §§ 4—6. Again $L dS$ is invariant when the coordinates are changed [1]).

§ 10. We shall define a varied motion of the electric charges by the quantities $\delta x_a$ and we shall also vary the quantities $\psi_{ab}$, so far as can be done without violating the connections (25) and (26). The possible variations $\delta\psi_{ab}$ may be expressed in $\delta x_a$ and four other infinitesimal quantities $q_a$ which we shall presently introduce. Our condition will be that equation (12) shall be true if, leaving the gravitation field unchanged, we take for $\delta x_a$ and $q_a$ any continuous functions of the coordinates which vanish at the limits of the domain of integration. We shall understand by $\delta w_a$, $\delta\psi_{ab}$, $\delta L$ the variations at a fixed point of this space. The variations $\delta w_a$ are again determined by (13) and (14), and we have, in virtue of (26) and (25),

$$\delta\psi_{aa} = 0, \quad \delta\psi_{ba} = -\delta\psi_{ab}, \quad \Sigma\,(b) \frac{\partial \delta\psi_{ab}}{\partial x_b} = \delta w_a = \Sigma\,(b) \frac{\partial \chi_{ab}}{\partial x_b}.$$

If therefore we put

$$\delta\psi_{ab} = \chi_{ab} + \vartheta_{ab}, \tag{36}$$

---

[1]) Instead of (35) we may write $L = \frac{1}{4} \Sigma\,(ab) \psi_{ab} \overline{\psi}_{ab}$ and now we have according to (28) and (33)

$$L' = \tfrac{1}{4} \Sigma\,(ab)\, \psi'_{ab} \overline{\psi'}_{ab} = \tfrac{1}{4} \,|p|\, \Sigma\,(a\,b\,c\,d\,e\,f) \pi_{ca} \pi_{db} p_{ea} p_{fb} \psi_{cd} \overline{\psi}_{ef} =$$
$$= \tfrac{1}{4} \,|p|\, \Sigma\,(cd) \psi_{cd} \overline{\psi}_{cd} = |p|\, L,$$

while

$$|p|\, dS' = dS.$$

we must have

$$\vartheta_{aa} = 0, \quad \vartheta_{ba} = -\vartheta_{ab}, \quad \Sigma\,(b)\frac{\partial \vartheta_{ab}}{\partial x_b} = 0.$$

It can be shown that quantities $\vartheta_{ab}$ satisfying these conditions may be expressed in terms of four quantities $q_a$ by means of the formulae

$$\vartheta_{ab} = \frac{\partial q_{b'}}{\partial x_{a'}} - \frac{\partial q_{a'}}{\partial x_{b'}} \,(a \neq b). \tag{37}$$

Here $a'$ and $b'$ are the numbers that remain when of 1, 2, 3, 4 we omit $a$ and $b$, the choice of the value of $a'$ and that of $b'$ being such that the order $a, b, a', b'$ can be derived from the order 1, 2, 3, 4 by an even number of permutations each of two numbers.

§ 11. By (34), (36) and (37) we have

$$\delta \mathrm{L} + \Sigma\,(a) K_a \delta x_a = \Sigma\,(\overline{ab})\overline{\psi}_{ab}\left(\frac{\partial q_{b'}}{\partial x_{a'}} - \frac{\partial q_{a'}}{\partial x_{b'}}\right) +$$
$$+ \Sigma\,(\overline{ab})\overline{\psi}_{ab}\chi_{ab} + \Sigma\,(a) K_a \delta x_a. \tag{38}$$

Here, in the transformation of the first term on the right hand side it is found convenient to introduce a new notation for the quantities $\overline{\psi}_{ab}$. We shall put

$$\overline{\psi}_{ab} = \psi^*_{a'b'},$$

a consequence of which is

$$\psi^*_{ba} = -\psi^*_{ab}$$

and we shall complete our definition by [1])

$$\psi^*_{aa} = 0. \tag{39}$$

The term we are considering then becomes

$$\Sigma\,(\overline{ab})\psi^*_{a'b'}\left(\frac{\partial q_{b'}}{\partial x_{a'}} - \frac{\partial q_{a'}}{\partial x_{b'}}\right) = \Sigma\,(\overline{ab})\psi^*_{ab}\left(\frac{\partial q_b}{\partial x_a} - \frac{\partial q_a}{\partial x_b}\right) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(ab)\psi^*_{ab}\left(\frac{\partial q_b}{\partial x_a} - \frac{\partial q_a}{\partial x_b}\right) = -\Sigma\,(ab)\psi^*_{ab}\frac{\partial q_a}{\partial x_b} =$$
$$= -\Sigma\,(ab)\frac{\partial(\psi^*_{ab} q_a)}{\partial x_b} + \Sigma\,(ab)\frac{\partial \psi^*_{ab}}{\partial x_b}\, q_a,$$

[1]) The quantities $\psi^*_{ab}$ are connected with the quantities $\varphi^*_{ab}$ introduced by EINSTEIN by the equation $\psi^*_{ab} = \sqrt{-g}\,.\,\varphi^*_{ab}$.

so that, using (14), we obtain for (38)

$$\delta L + \Sigma\,(a) K_a \delta x_a = -\Sigma\,(ab)\,\frac{\partial(\psi^*_{ab} q_a)}{\partial x_b} + \Sigma\,(ab)\,\frac{\partial \psi^*_{ab}}{\partial x_b}\, q_a + \\ + \Sigma\,(ab)\overline{\psi}_{ab} w_b \delta x_a + \Sigma\,(a) K_a \delta x_a, \quad (40)$$

where we have taken into consideration that

$$\Sigma\,(\overline{ab})\overline{\psi}_{ab}(w_b \delta x_a - w_a \delta x_b) = \Sigma\,(ab)\overline{\psi}_{ab} w_b \delta x_a.$$

If we multiply (40) by $dS$ and integrate over the space $S$ the first term on the right hand side vanishes. Therefore (12) requires that in the subsequent terms the coefficient of each $q_a$ and of each $\delta x_a$ be 0. Therefore

$$\Sigma\,(b)\,\frac{\partial \psi^*_{ab}}{\partial x_b} = 0 \quad (41)$$

and

$$K_a = -\Sigma\,(b)\overline{\psi}_{ab} w_b, \quad (42)$$

by which (40) becomes

$$\delta L + \Sigma\,(a) K_a \delta x_a = -\Sigma\,(ab)\,\frac{\partial(\psi^*_{ab} q_a)}{\partial x_b}. \quad (43)$$

In (41) we have the second set of four electromagnetic equations, while (42) determines the forces exerted by the field on the charges. We see that (42) agrees with (19) (namely in virtue of (31)

§ 12. To deduce also the equations for the momenta and the energy we proceed as in § 6. Leaving the gravitation field unchanged we shift the electromagnetic field, i.e. the values of $w_a$ and $\psi_{ab}$ in the direction of one of the coordinates, say of $x_c$, over a distance defined by the constant variation $\delta x_c$ so that we have

$$\delta \psi_{ab} = -\frac{\partial \psi_{ab}}{\partial x_c}\, \delta x_c.$$

From (36), (14) and (37) we can infer what values must then be given to the quantities $q_a$. We must put $q_c = 0$ and for $a \neq c$ [1])

$$q_a = \psi_{ac'}\, \delta x_c.$$

[1]) To understand this we must attend to equations (25).

For $\delta$L we must substitute the expression (cf. § 6)

$$\left\{-\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_c}+\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_c}\right)_{\psi}\right\}\delta x_c,$$

where the index $\psi$ attached to the second derivative indicates that only the variability of the coefficients (depending on $g_{ab}$) in the quadratic function L must be taken into consideration. The equation for the component $K_c$ which we finally find from (43) may be written in the form

$$K_c+\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_c}\right)_{\psi}=-\Sigma(b)\frac{\partial T_{bc}}{\partial x_b}, \tag{44}$$

where

$$T_{cc}=-\mathrm{L}+\sum_{a\neq c}(a)\psi^{*}_{ac}\psi_{a'c'} \tag{45}$$

and for $b \neq c$

$$T_{bc}=\sum_{a\neq c}(a)\psi^{*}_{ab}\psi_{a'c'}. \tag{46}$$

Equations (44) correspond exactly to (24). The quantities $T$ have the same meaning as in these latter formulae and the influence of gravitation is determined by $(\partial \mathrm{L}/\partial x_c)_{\psi}$ in the same way as it was formerly by $(\partial \mathrm{L}/\partial x_c)_w$.

We may remark here that the sum in (45) consists of three and that in (46) (on account of (39)) of two terms.

Referring to (35), we find f.i. from (45)

$$T_{11}=\tfrac{1}{2}(\psi_{43}\overline{\psi}_{43}+\psi_{42}\overline{\psi}_{42}-\psi_{41}\overline{\psi}_{41}+\psi_{23}\overline{\psi}_{23}-\psi_{31}\overline{\psi}_{31}-\psi_{12}\overline{\psi}_{12}),$$

while (46) gives

$$T_{12}=\psi_{31}\overline{\psi}_{32}-\psi_{41}\overline{\psi}_{42}.$$

*The differential equations of the gravitation field*

§ 13. The equations which, for a given material or electromagnetic system, determine the gravitation field caused by it can also be derived from a variation principle. EINSTEIN has prepared the way for this in his last paper by introducing a quantity which he calls $H$ and which is a function of the quantities $g_{ab}$

and their derivatives, without further containing anything that is connected with the material or the electromagnetic system. All we have to do now is to add to the left hand side of equation (12) a term depending on that quantity $H$. We shall write for it the variation of

$$\frac{1}{\varkappa}\int Q dS,$$

where $\varkappa$ is a universal constant, while $Q$ is what EINSTEIN calls $H\sqrt{-g}$, with the same or the opposite sign[1]). We shall now require that

$$\delta\int \mathrm{L} dS + \frac{1}{\varkappa}\delta\int Q dS + \int \Sigma\,(a) K_a \delta x_a \,.\, dS = 0, \qquad (47)$$

not only for the variations considered above but also for variations of the gravitation field defined by $\delta g_{ab}$, if these too vanish at the limits of the field of integration.

To obtain now

$$\delta \mathrm{L} + \frac{1}{\varkappa}\delta Q + \Sigma\,(a) K_a \delta x_a$$

we have to add to the right hand side of (17) or (40), first the change of L caused by the variation of the quantities $g$, viz.

$$\Sigma\,(\overline{ab})\,\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial g_{ab}}\,\delta g_{ab},$$

and secondly the change of $Q$ multiplied by $1/\varkappa$. This latter change is

$$\Sigma\,(\overline{ab})\,\frac{\partial Q}{\partial g_{ab}}\,\delta g_{ab} + \Sigma\,(\overline{ab}e)\,\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,e}}\,\delta g_{ab,e},$$

where $g_{ab,e}$ has been written for the derivative $\partial g_{ab}/\partial x_e$.

As

$$\delta g_{ab,e} = \frac{\partial \delta g_{ab}}{\partial x_e}$$

we may replace the last term by

$$\Sigma\,(\overline{ab}e)\,\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,e}}\,\delta g_{ab}\right) - \Sigma\,(\overline{ab}e)\,\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,e}}\right)\delta g_{ab}.$$

---

[1]) I have not yet made out which sign must be taken to get a perfect conformity to EINSTEIN's formulae. (For an explicit statement of the meaning of Q compare page 277 of this volume. Ed.)

§ 14. As we have to proceed now in the same way in the case of a material and in that of an electromagnetic system we need consider only the latter. The conclusions drawn in § 11 evidently remain valid, so that we may start from the equation which we obtain by adding the new terms to (43). We therefore have

$$\begin{aligned}\delta \mathrm{L} + \frac{1}{\varkappa}\delta Q + \Sigma\,(a) K_a \delta x_a = &-\Sigma\,(ab)\,\frac{\partial(\psi^*_{ab} q_a)}{\partial x_b} + \\ &+\frac{1}{\varkappa}\Sigma\,(\overline{ab}e)\,\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,e}}\,\delta g_{ab}\right) + \Sigma\,(\overline{ab})\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial g_{ab}} + \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial Q}{\partial g_{ab}}\right)\delta g_{ab} - \\ &-\frac{1}{\varkappa}\Sigma\,(\overline{ab}e)\,\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,e}}\right)\delta g_{ab}. \qquad (48)\end{aligned}$$

When we integrate over $S$, the first two terms on the right han d side vanish. In the terms following them the coefficient of each $\delta g_{ab}$ must be 0, so that we find

$$\frac{\partial Q}{\partial g_{ab}} - \Sigma\,(e)\,\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,e}}\right) = -\varkappa\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial g_{ab}}. \qquad (49)$$

These are the differential equatio ns we sought for. At the same time (48) becomes

$$\begin{aligned}\delta \mathrm{L} + \frac{1}{\varkappa}\delta Q + \Sigma\,(a) K_a \delta x_a = &-\Sigma\,(ab)\,\frac{\partial(\psi^*_{ab} q_a)}{\partial x_b} + \\ &+\frac{1}{\varkappa}\Sigma\,(\overline{ab}e)\,\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,e}}\,\delta g_{ab}\right). \qquad (50)\end{aligned}$$

§ 15. Finally we can derive from this the equations for the momenta and the energy of the gravitation field. For this purpose we impart a virtual displacement $\delta x_c$ to this field only (comp. §§ 6 and 12). Thus we put $\delta x_a = 0$, $q_a = 0$ and

$$\delta g_{ab} = -g_{ab,c}\delta x_c.$$

Evidently

$$\delta Q = -\frac{\partial Q}{\partial x_c}\delta x_c$$

and (comp. § 12)

$$\delta \mathrm{L} = -\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_c}\right)_\psi \delta x_c.$$

After having substituted these values in equation (50) we can deduce from it the value of $(\partial L/\partial x_c)_\psi$.

If we put

$$T^g_{cc} = -\frac{1}{\varkappa} Q - \frac{1}{\varkappa} \Sigma\, (\overline{ab})\, \frac{\partial Q}{\partial g_{ab,c}}\, g_{ab,c} \tag{51}$$

and for $e \neq c$

$$T^g_{ec} = -\frac{1}{\varkappa} \Sigma\, (\overline{ab})\, \frac{\partial Q}{\partial g_{ab,e}}\, g_{ab,c} \tag{52}$$

the result takes the following form

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_\psi = -\,\Sigma(e)\,\frac{\partial T^g_{ec}}{\partial x_e}. \tag{53}$$

Remembering what has been said in § 12 about the meaning of $(\partial L/\partial x_c)_\psi$, we may now conclude that the quantities $T^g_{ab}$ have the same meaning for the gravitation field as the quantities $T_{ab}$ for the electromagnetic field (stresses, momenta etc.). The index $g$ denotes that $T^g_{ab}$ belongs to the gravitation field.

If we add to (53) the equations (44), after having replaced in them $b$ by $e$, we obtain

$$K_c = -\,\Sigma\,(e)\,\frac{\partial T^t_{ec}}{\partial x_e}, \tag{54}$$

where

$$T^t_{ec} = T_{ec} + T^g_{ec}.$$

The quantities $T^t_{ec}$ represent the *total* stresses etc. existing in the system, and equations (54) show that in the absence of external forces the resulting momentum and the total energy will remain constant.

We could have found directly equations (54) by applying formula (50) to the case of a common virtual displacement $\delta x_c$ imparted both to the electromagnetic system and to the gravitation field.

Finally the differential equations of the gravitation field and the formulae derived from them will be quite conform to those given by EINSTEIN, if in $Q$ we substitute for $H$ the function he has chosen.

§ 16. The equations that have been deduced here, though mostly of a different form, correspond to those of EINSTEIN. As to the covariancy, it exists in the case of equations (18), (24), (41), (42) and (44) for any change of coordinates. We can be sure of it because $LdS$ is an invariant.

On the contrary the formulae (49), (53) and (54) have this property only when we confine ourselves to the systems of coordinates adapted to the gravitation field, which EINSTEIN has recently considered. For these the covariancy of the formulae in question is a consequence of the invariancy of $\delta \int H dS$ which EINSTEIN has proved by an ingenious mode of reasoning.

# ON EINSTEIN'S THEORY OF GRAVITATION [1])

§ 1. In pursuance of his important researches on gravitation EINSTEIN has recently attained the aim which he had constantly kept in view; he has succeeded in establishing equations whose form is not changed by an arbitrarily chosen change of the system of coordinates [2]). Shortly afterwards, working out an idea that had been expressed already in one of EINSTEIN's papers, HILBERT [3]) has shown the use that may be made of a variation law that may be regarded as HAMILTON's principle in a suitably generalized form. By these results the "general theory of relativity" may be said to have taken a definitive form, though much remains still to be done in further developing it and in applying it to special problems. It will also be desirable to present the fundamental ideas in a form as simple as possible.

In this communication it will be shown that a four-dimensional geometric representation may be of much use for this latter purpose; by means of it we shall be able to indicate for a system containing a number of material points and an electromagnetic field (or eventually only one of these) the quantity $H$, which occurs in the variation theorem, and which we may call the *principal function*. This quantity consists of three parts, of which the first relates to the material points, the second to the electromagnetic field and the third to the gravitation field itself.

As to the material points, it will be assumed that the only connexion between them is that which results from their mutual gravitational attraction.

§ 2. We shall be concerned with a four-dimensional extension $R_4$, in which "space" and "time" are combined, so that each point $P$ in it indicates a definite place $A$ and at the same time a

[1]) Versl. Akad. Amsterdam, **24**, 1389, 1916. Proc. Acad. Amsterdam. **19**, 1341, 1916.
[2]) Berl. Sitzungsberichte, 1915. 778, 799, 844.
[3]) Göttinger Nachrichte, 1915.

definite moment of time $t$. If we say that $P$ refers to a material point we mean that at the time $t$ this point is found at the place $A$. In the course of time the material point is represented every moment by a new point $P$; all these points lie on the "world-line", which represents the state of motion (or eventually the state of rest) of the material point [1]. In the same sense we may speak of the world-line of a propagated light-vibration. An intersection of two world-lines means that the two objects to which they belong meet at a certain moment, that a "coincidence" takes place [2]. Now EINSTEIN has made the striking remark [3] that the only thing we can learn from our observations and with which our theories are essentially concerned, is the existence of these coincidences. Let us suppose e.g. that we have observed an occultation of a star by the moon or rather the reappearance of a star at the moon's border. Then the world-line of a certain light-vibration starting from a point on the world-line of the star has in its further course intersected the world-line of a point of the border of the moon and finally that of the observer's eye. A similar remark may be made when the moment of reappearance is read on a clock. Let us suppose that the light-vibration itself lights the dial-plate, reaching it when the hand is at the point $a$; then we may say that three world-lines, viz. that of the light-vibration, that of the hand and that of the point $a$ intersect.

§ 3. We may imagine that, in order to investigate a gravitation field as e.g. that of the sun, a great number of material points, moving in all directions and with different velocities, are thrown into it, that light-beams are also made to traverse the field and that all coincidences are noted [4]. It would be possible to represent the results of these observations by world-lines in a four-dimensional figure — let us say in a "field-figure" — the lines being drawn in such a way that each observed coincidence is represented by an intersection of two lines and that the points of intersection

[1]) It will be known that in the theory of relativity MINKOWSKI was the first who used this geometric representation in an extension of four dimensions. The name "world-line" has been borrowed from him.

[2]) For the sake of simplicity we shall imagine the two motions not to be disturbed by this coincidence, so that e.g. two material points penetrate each other or pass each other at an extremely small distance without any mutual influence.

[3]) In a correspondence I had with him.

[4]) In other terms, that the data procured by astronomical observations can be extended arbitrarily and unboundedly.

of one line with a number of the others succeed each other in the right order.

Now, as we have to attend only to the intersections, we have a great degree of liberty in the construction of the "field-figure". If, independently of each other, two persons were to describe the same observations, their figures would probably look quite different and if these figures were deformed in an arbitrary way, without break of continuity, they would not cease to serve the purpose.

After having constructed a field-figure $F$ we may introduce "coordinates", by which we mean that to each point $P$ we ascribe four numbers $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, in such a way that along any line in the field-figure these numbers change continuously and that never two different points get the same four numbers. Having done this we may for each point $P$ seek a point $P'$ in a four-dimensional extension $R'_4$, in which the numbers $x_1, \ldots x_4$ ascribed to $P$ are the Cartesian coordinates of the point $P'$. In this way we obtain in $R'_4$ a figure $F'$, which just as well as $F$ can serve as field-figure and which of course may be quite different according to the choice of the numbers $x_1 \ldots x_4$ that have been ascribed to the points of $F$.

If now it is true that the coincidences only are of importance it must be possible to express the fundamental laws of the phenomena by geometric considerations referring to the field-figure, in such a way that this mode of expression is the same for all possible field-figures; from our point of view all these figures can be considered as being the *same*. In such a geometric treatment the introduction of coordinates will be of secondary importance; with a single exception (§ 13) it only serves for short calculations which we have to intercalate (for the proof of certain geometric propositions) and for establishing the final equations, which have to be used for the solution of special problems. In the discussion of the general principles coordinates play no part; and it is thus seen that the formulation of these principles can take place in the same way whatever be our choice of coordinates. So we are sure beforehand of the general covariancy of the equations that was postulated by EINSTEIN.

§ 4. EINSTEIN ascribes to a line-element $PQ$ in the field-figure a length $ds$ defined by the equation

$$ds^2 = \Sigma(ab) g_{ab} dx_a dx_b \tag{1}$$
$$(g_{ab} = g_{ba})$$

Here $dx_1 \ldots dx_4$ are the changes of the coordinates when we pass from $P$ to $Q$, while the coefficients $g_{ab}$ depend in one way or another on the coordinates. The gravitation field is known when these 10 quantities are given as functions of $x_1 \ldots x_4$. Here it must be remarked that in all real cases the coordinates can be chosen in such a way that for one point arbitrarily chosen (1) becomes

$$ds^2 = -dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2.$$

This requires that the determinant $g$ of the coefficients of (1) be always negative. The minor of this determinant corresponding to the coefficient $g_{ab}$ will be denoted by $G_{ab}$.

Around each point $P$ of the field-figure as a centre we may now construct an infinitesimal surface [1]), which, when $P$ is chosen as origin of coordinates, is determined by the equation

$$\Sigma(ab) g_{ab} x_a x_b = \varepsilon^2, \tag{2}$$

where $\varepsilon$ is an infinitely small positive constant which we shall fix once for all. This surface, which we shall call the *indicatrix*, is a hyperboloid with one real axis and three imaginary ones. We shall also introduce the surface determined by the equation

$$\Sigma(ab) g_{ab} x_a x_b = -\varepsilon^2 \tag{3}$$

which differs from (2) only by the sign of $\varepsilon^2$. We shall call this the *conjugate indicatrix*. It is to be understood that the indicatrices and conjugate indicatrices take part in the changes to which the field-figure may be subjected. As these surfaces are infinitely small, they always remain hyperboloids of the said kind. The gravitation field will now be determined by these indicatrices, which we can imagine to have been constructed in the field-figure without the introduction of coordinates. When we have occasion to use these latter, we shall so choose them that the "axes" $x_1$, $x_2$, $x_3$ intersect the conjugate indicatrix constructed

---

[1]) A "surface" determined by one equation between the coordinates is a three-dimensional extension. It will cause no confusion if sometimes we apply the name of "plane" to certain two-dimensional extensions, if we speak e.g. of the "plane" determined by two line-elements.

around their starting point, while the indicatrix itself is intersected by the axis $x_4$. This involves that the coefficients $g_{11}$, $g_{22}$, $g_{33}$ are negative and that $g_{44}$ is positive.

§ 5. The indicatrices will give us the units in which we shall express the length of lines in the field-figure and the magnitude of two-, three-, or four-dimensional extensions. When we use these units we shall say that the quantities in question are expressed in *natural measure*.

In the case of a line-element $PQ$ the unit might simply be the radius-vector in the direction $PQ$ of the indicatrix or the conjugate indicatrix described about $P$. It is however desirable to distinguish the two cases that $PQ$ intersects the indicatrix itself or the conjugate indicatrix. In the latter case we shall ascribe an imaginary length to the line-element [1]). Besides, by taking as unit not the radius-vector itself but a length proportional to it, the numerical value of a line-element may be made to be independent of the choice of the quantity $\varepsilon$.

These considerations lead us to define the length that will be ascribed to line-elements by the assumption that each radius-vector of the indicatrix has in natural measure the length $\varepsilon$, while each radius-vector of the conjugate indicatrix has the length $i\varepsilon$. [2])

It will now be clear that the length of an arbitrary line in the field-figure can be found by integration, each of its elements being measured by means of the indicatrix or the conjugate indicatrix belonging to the position of the element. In virtue of our definitions a deformation of the field-figure will not change the length of lines expressed in natural measure and a geodetic line will remain a geodetic line.

§ 6. We are now in a position to indicate the first part $H_1$ of the principal function (§ 1). Let $\sigma$ be a closed surface in the field-figure and let us confine ourselves to the principal function so far as it belongs to the space $\Omega$ enclosed by that surface. Then the quantity $H_1$ is the sum, taken with the negative sign, of the lengths of all world-lines of material points so far as they lie

[1]) This corresponds to the negative value which (1) gives for $ds^2$.

[2]) For a radius-vector on the asymptotic cone we may take either of these values; this makes no difference, as the numerical value of a line-element in the direction of such a radius-vector becomes 0 in both cases.

within $\Omega$, each length multiplied by a constant $m$, characteristic of the point in question and to be called its *mass*. [1])

It must be remarked that the elements of the world-lines of material points intersect the corresponding indicatrices themselves. The lengths of these lines are therefore real positive quantities.

A deformation of the field-figure leaves $H_1$ unchanged.

§ 7. We shall now pass on to the part of the principal function belonging to the gravitation field. The mathematical expression for this part was communicated to me by EINSTEIN in our correspondence. It is also to be found in HILBERT's paper in which it is remarked that the quantity in question may be regarded as the measure of the *curvature* of the four-dimensional extension to which (1) relates. Here we have to speak only of the interpretation of this quantity. To find this the following geometrical considerations may be used.

Let $PQ$ and $PR$ be two line-elements starting from a point $P$ of the field-figure, $QR$ the line-element joining the extremities $Q$ and $R$. If then the lengths of these elements in natural measure are

$$PQ = ds', \quad PR = ds'', \quad QR = ds,$$

we define the angle $(s', s'')$ between $PQ$ and $PR$ by the well known trigonometric formula

$$ds^2 = ds'^2 + ds''^2 - 2ds'ds'' \cos(s', s''),$$

$$\cos(s', s'') = \frac{ds'^2 + ds''^2 - ds^2}{2ds'ds''} \tag{4}$$

from which one can derive

$$\cos(s', s'') = \Sigma(ab) g_{ab} \frac{dx'_a}{ds'} \frac{dx''_b}{ds''}. \tag{5}$$

By means of this formula we are able to determine the angle between any two intersecting lines. Of course the two other angles of the triangle $PQR$ can be calculated in the same way.

Now two cases must be distinguished.

*a*. The plane of the triangle $PQR$ cuts the conjugate indicatrix, but not the indicatrix itself. Then the three sides have positive

[1]) This agrees with the value of the LAGRANGIAN function, which is to be found e.g. in my paper on "HAMILTON's principle in EINSTEIN's theory of gravitation". Proc. Acad. Amsterdam. **19**, 751, 1916 (This volume, p. 231).

imaginary values. Moreover each of them proves to be smaller than the sum of the others, from which one finds that the angles have real values and that their sum is $\pi$.

*b*. The plane $PQR$ cuts both the indicatrix and the conjugate indicatrix. In this case different positions of the triangle are still possible. We can however confine ourselves to triangles the three sides of which are real. These are really possible, for in the plane of a hyperbola we can draw triangles the sides of which are parallel to radius-vectors drawn from the centre to points of the curve (and not of the conjugate hyperbola).

By a closer consideration of the triangles now in question it is found however that by the choice of our "natural" units one side is necessarily longer than the sum of the other two. Formula (4) then shows that the cosines of the angles are real quantities, greater than 1 in absolute value, two of them being positive, and the third negative. We must therefore ascribe to the angles imaginary or complex values. If for $p > +1$ we put

$$\text{arc} \cos p = i \log (p + \sqrt{p^2 - 1})$$

and

$$\text{arc} \cos (-p) = \pi - \text{arc} \cos p,$$

we find for the three angles expressions of the form

$$i\alpha, \ i\beta \text{ and } \pi - i(\alpha + \beta),$$

so that the sum is again $\pi$.

From the cosine calculated by (4) or (5) the sine can be derived by means of the formula

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi},$$

where for the case $\cos^2 \varphi > 1$ we can confine ourselves to the value

$$\sin \varphi = i\sqrt{\cos^2 \varphi - 1}$$

with the positive sign.

It deserves special notice that two conjugate radius-vectors of the indicatrix and the conjugate indicatrix are perpendicular to each other and that a deformation of the field-figure does not change the angle between two intersecting lines determined according to our definitions.

§ 8. Before proceeding further we must now indicate the natural units (§ 5) for two-, three-, or four-dimensional extensions in the field-figure. Like the unit of length, these are defined for each point separately, so that the numerical value of a finite extension is found by dividing it into infinitely small parts.

A two-dimensional extension cuts the conjugate indicatrix in an ellipse, or the indicatrix itself and the conjugate indicatrix in two conjugate hyperbolae. In both cases we derive our unit from the area of a parallelogram described on conjugate radius-vectors.

A three-dimensional extension cuts the conjugate indicatrix in an ellipsoid, or the indicatrix and its conjugate in two conjugate hyperboloids. Now our unit will be derived from the volume of a parallelepiped described on three conjugate radius-vectors.

In a similar way the magnitude of four-dimensional extensions will be determined by comparison with a parallelepiped the edges of which are four conjugate radius-vectors of the indicatrix and the conjugate indicatrix.

It must here be kept in mind that, according to well known theorems, the area of the parallelogram and the volume of the parallelepipeds in question are independent of the special choice of the conjugate radius-vectors.

We shall further specify the units in such a way (comp. § 5) that the numerical magnitude of a parallelogram or a parallelepiped described on conjugate radius-vectors is found by multiplying the numbers by which the edges are expressed in natural measure.

From what has been said it follows that the area of the parallelogram described on two line-elements is given by the product of the lengths of these elements and the sine of the enclosed angle. Similarly the area of an infinitely small triangle is determined by half the product of two sides and the sine of the angle between them.

We need hardly add that the numerical value of any two-, three- or four-dimensional domain expressed in natural measure is not changed by a deformation of the field-figure.

§ 9. Let, at any point $P$ of the field-figure, 1, 2, 3, 4 be four arbitrarily chosen conjugate radius-vectors of the indicatrix. Two of these determine an infinitely small part $V$ of a two-dimensional extension. We may prolong this part to finite distances from $P$ by drawing from this point geodetic lines whose initial directions lie in the plane $V$. In this way we obtain six two-dimensional extensions (1,2), (2,3), (3,1), (1,4), (2,4) and (3,4). Let us now consider in one of these e.g. $(a, b)$ an infinitesimal triangle near the point $P$, the sides of which are geodetic lines (viz. geodetic lines *in* $(a, b)$). If in calculating the angles of this triangle we go to quantities of the second order with respect to the sides and to the distances from $P$, the sum $s$ of the angles proves to have no longer the value $\pi$ (comp. § 7). The "excess" $e = s - \pi$ is proportional to the area $\Delta$ of the triangle, independently of the length of the sides, of their ratios and of the position of the triangle in the extension $(a, b)$. For the three extensions (1,2) ,(2,3), (3,1) which do not intersect the indicatrix itself but the conjugate indicatrix, this proposition follows from a well-known theorem of GAUSS in the theory of curvature of surfaces; for the other three (1,4), (2,4), (3,4), which cut the indicatrix itself, the proof can be given by direct calculation. The considerations necessary for this, and some other calculations with which we shall be concerned further on will be communicated in a later paper.

In considering the three last-mentioned extensions I have confined myself to triangles with real sides (§ 7, $b$).

The quotient

$$\frac{e}{\Delta} = K_{ab}$$

is now for each extension a definite number, which we may consider as a measure of the *curvature* of the two-dimensional extension $(a, b)$; the sum $K$ of the six numbers $K_{ab}$ may be called the *curvature of the field-figure* at the point $P$ in question. This quantity is the same that has been introduced by HILBERT; this results from the calculation of its value, which at the same time shows $K$ to be independent of the special choice of the directions 1, 2, 3, 4 introduced in the beginning of this §.

The numbers $K_{ab}$ are all real and have a meaning that can be indicated without the introduction of coordinates; moreover their sum $K$ is not changed by a deformation of the field-figure.

If now $d\Omega$ is an element of the four-dimensional extension of the field-figure, expressed in natural measure, the part of the principal function belonging to the gravitation field is

$$H_3 = \frac{i}{\varkappa}\int K d\Omega, \tag{6}$$

where the integration is extended to the domain considered (§ 6) while $\varkappa$ is the gravitation constant. $H_3$ too is not changed by a deformation of the field-figure.

The factor $i$ has been introduced in order to obtain a real value for $H_3$, the element $d\Omega$ being represented in natural measure by a negative imaginary number (§ 8).

§ 10. What we have to say of the electromagnetic field must be preceded by some considerations belonging to what may be called the "vector theory" of the field-figure.

A line-element $PQ$, taken in a definite direction (indicated by the order of the letters), may be called a *vector*. Such vectors can be compounded or decomposed by means of parallelograms or parallelepipeds. Especially, when coordinates $x_1, \ldots x_4$ have been chosen, a vector may be resolved into four components which have the directions of the coordinates, viz. such directions that a shift along the first e.g. changes only $x_1$, while $x_2, x_3, x_4$ remain constant. The four components in question are determined by the differentials $dx_1, \ldots dx_4$ corresponding to $PQ$. We shall say that by these they are expressed in "$x$-measure". Their values in natural measure are found by multiplying $dx_1, \ldots dx_4$ by certain factors. If we keep in mind that the radius-vectors of the conjugate indicatrix and the indicatrix in the directions of the axes are expressed in "$x$-measure" by

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{-g_{11}}}, \quad \frac{\varepsilon}{\sqrt{-g_{22}}}, \quad \frac{\varepsilon}{\sqrt{-g_{33}}}, \quad \frac{\varepsilon}{\sqrt{-g_{44}}},$$

and in natural units by

$$i\varepsilon, \quad i\varepsilon, \quad i\varepsilon, \quad \varepsilon$$

we find for the reducing factors

$$l_1 = i\sqrt{-g_{11}}, \; l_2 = i\sqrt{-g_{22}}, \; l_3 = i\sqrt{-g_{33}}, \; l_4 = \sqrt{g_{44}}. \tag{7}$$

In the language of vector-analysis the vector obtained by the composition of two or more vectors is also called the *sum* of these vectors.

We shall also speak of *finite* vectors, i.e. of directed quantities which can be represented on an infinitely reduced scale by line-elements in the field-figure. If $\omega$ is the constant "reduction factor" chosen for this purpose, a vector $\mathsf{A}$ will be represented by a line-element $\omega\mathsf{A}$, the direction of which is also ascribed to $\mathsf{A}$. It will now be evident that two finite vectors, as well as two infinitely small ones, determine an infinitesimal two-dimensional extension and that finite vectors can be compounded and resolved by means of parallelograms and parallepipeds. Also that we may speak of the "magnitude" of such figures, that e.g. the rule given in § 8 applies to the parallelogram described on two vectors.

The components of a vector in the directions of the coordinates expressed in $x$-measure will be called $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$. This means that $\omega X_1, \ldots \omega X_4$ are equal to the differentials $dx_1, \ldots dx_4$ corresponding to the infinitely small vector $\omega\mathsf{A}$.

If we want to know the components of $\mathsf{A}$ in natural units we must multiply $X_1, \ldots X_4$ by the factors (7).

§ 11. Two vectors $\mathsf{A}$ and $\mathsf{B}$ starting from a point $P$ of the field-figure and lying in a plane $V$, determine what we shall call a *rotation* $\mathsf{R}$ in that plane. We ascribe to it the direction indicated by the order $\mathsf{AB}$ and a value given by the parallelogram described on $\mathsf{A}$ and $\mathsf{B}$ and expressed in natural measure [1]). This involves that the same rotation may be represented in many different ways by two vectors in the plane $V$.

For the rotation $\mathsf{R}$ we shall also use the symbol $[\mathsf{A}.\mathsf{B}]$.

By the *vector product* $[\mathsf{A}.\mathsf{B}.\mathsf{C}]$ of three vectors $\mathsf{A}$, $\mathsf{B}$, $\mathsf{C}$ at a point of the field-figure and not lying in one plane we shall understand a vector $\mathsf{D}$ the direction of which is conjugate with each of the three vectors (and therefore with the three-dimensional extension $\mathsf{A}$, $\mathsf{B}$, $\mathsf{C}$), the direction of $\mathsf{D}$ corresponding to those of $\mathsf{A}$, $\mathsf{B}$ and $\mathsf{C}$ in a way presently to be indicated, while the magnitude of $\mathsf{D}$, expressed in natural measure, is equal to that of the parallelepiped described on $\mathsf{A}$, $\mathsf{B}$ and $\mathsf{C}$ and expressed in the same measure. This definition involves that the value 0 is

[1]) If, according to circumstances, different signs are given to $V$, the angle whose sine occurs in the formula for the area of a parallelogram must be understood to be positive in one case and negative in the other.

ascribed to the vector product of three vectors lying in one and the same plane.

A further statement about the direction of $\mathbf{D}$ is necessary because *two* opposite directions are conjugate with $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$. For one set of three directions $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{C}_0$ we shall choose arbitrarily which of its two conjugate directions will be said to correspond to it. If this is the direction $\mathbf{D}_0$ then the direction $\mathbf{D}$ corresponding to $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ will be determined by the rule that $\mathbf{D}_0$ passes into $\mathbf{D}$ by a gradual passage of the first three vectors from $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{C}_0$ into $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, this latter passage being effected in such a way that during the change the vectors never come to lie in one plane.

The vector product $[\mathbf{A}.\mathbf{B}.\mathbf{C}]$ takes the opposite direction when one of the vectors is reversed as well as when two of them are interchanged. We must therefore always attend to the order of the symbols in $[\mathbf{A}.\mathbf{B}.\mathbf{C}]$.

The vector product possesses the distributive property with respect to each of the three vectors, so that e.g. if $\mathbf{A}_1$ and $\mathbf{A}_2$ are vectors

$$[(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2).\mathbf{B}.\mathbf{C}] = [\mathbf{A}_1.\mathbf{B}.\mathbf{C}] + [\mathbf{A}_2.\mathbf{B}.\mathbf{C}].$$

From this we can infer that $[\mathbf{A}.\mathbf{B}.\mathbf{C}]$ depends only on $\mathbf{C}$ and the rotation $\mathbf{R}$ determined by $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$. For this reason we write for the vector product also $[\mathbf{R}.\mathbf{C}]$; in calculating it we are free to replace the rotation $\mathbf{R}$ by any two vectors by means of which it can be represented.

If $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_1$ and $\mathbf{R}_2$ are rotations in the same plane, such that the value and direction of $\mathbf{R}$ are found by adding $\mathbf{R}_1$ and $\mathbf{R}_2$ algebraically, we have, in virtue of the distributive property

$$[\mathbf{R}_1.\mathbf{C}] + [\mathbf{R}_2.\mathbf{C}] = [\mathbf{R}.\mathbf{C}].$$

§ 12. In what precedes we were concerned with the volumes of parallelepipeds expressed in natural units. When we have introduced coordinates $x_1, \dots x_4$ we may also express these volumes in the "$x$-units" corresponding to the coordinates chosen.

Let us consider e.g. the three-dimensional extension $x_4 =$ const. which cuts the conjugate indicatrix in the ellipsoid

$$g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + 2g_{12}x_1x_2 + 2g_{23}x_2x_3 + 2g_{31}x_3x_1 = -\varepsilon^2.$$

If we agree that in $x$-measure spaces in this extension will be represented by positive numbers and that a parallelepiped with the positive edges $dx_1$, $dx_2$, $dx_3$ will have the volume $dx_1 dx_2 dx_3$, we find for that of the parallelepiped on three conjugate radius-vectors

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{-G_{44}}},$$

where it has been taken into consideration that $G_{44}$ is negative.

The volume of the same parallelepiped being expressed in natural measure by $-i\varepsilon^3$ (§ 8), we have to multiply by

$$l_{123} = -i\sqrt{-G_{44}} \tag{8}$$

if we want to pass from the expression in $x$-measure to that in natural measure.

For the extension $(x_2, x_3, x_4)$, i.e. $x_1 = 0$ the corresponding factor is

$$l_{234} = -\sqrt{G_{11}}. \tag{9}$$

§ 13. In the theory of electromagnetic phenomena we are concerned in the first place with the electric charge and the convection current. So far as these quantities belong to a definite element $d\Omega$ of the field-figure they may be combined into

$$\mathsf{q}\,d\Omega$$

where $\mathsf{q}$ is a vector which we may call the *current vector*. When it is resolved into four components having the directions of the axes, the first three components determine the convection current while the fourth component gives the density of the electric charge.

As to the electric and the magnetic force, these two taken together can be represented at each point of the field-figure by two rotations

$$\mathsf{R}_e \text{ and } \mathsf{R}_h$$

in definite, mutually conjugate two-dimensional extensions. These quantities are closely connected with the current vector, for after having introduced coordinates $x_1, \ldots x_4$ we have for each closed surface $\sigma$ the vector equation

$$\int \{[\mathsf{R}_e . \mathsf{N}] + [\mathsf{R}_h . \mathsf{N}]\}_x \, d\sigma = i \int \{\mathsf{q}\}_x \, d\Omega, \tag{10}$$

where the second integral has to be taken over the domain $\Omega$ enclosed by $\sigma$. On the left hand side $d\sigma$ represents a three-dimensional surface-element expressed in natural units and **N** a vector of the magnitude 1 in natural measure conjugate with or perpendicular to that element (§ 7) and directed towards the outside of the domain $\Omega$. The index $x$ shows that the vector $[\mathbf{R}_e \,.\, \mathbf{N}] + [\mathbf{R}_h \,.\, \mathbf{N}]$ must be expressed in $x$-measure. At each point of the surface we must resolve the vector along the four directions of the coordinates, express each component in $x$-measure (§ 10) and finally, after multiplication by $d\sigma$, we must add algebraically all $x_1$-components; similarly all $x_2$-components and so on.

It must be expressly remarked that if an equation like (10) in which we are concerned with the composition of vectors at *different* points of the field-figure, shall have a definite meaning we must know which components are to be considered as having the same direction, so that they can be added. This has been determined by the introduction of coordinates.

On the right hand side of the equation the index $x$ means that the vector **q** must be expressed in $x$-measure and the factor $i$ had to be introduced because $d\Omega$ is imaginary.

One can prove that equation (10) is equivalent to the differential equations which in EINSTEIN's theory serve for the same purpose and further that when the equation holds for one choice of coordinates it will also be true for any other choice.

§ 14. The proof for these assertions must be deferred to the second part of this communication. For the present we shall only add that the part of the principal function referring to the electro-magnetic field is given by

$$H_2 = i\int \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{R}_e^2 + \mathbf{R}_h^2)\, d\Omega,$$

where $\mathbf{R}_e$ and $\mathbf{R}_h$ are, expressed in natural units, the two rotations that are characteristic of the field. Like the two other parts of the principal function, $H_2$ is not changed by a deformation of the field-figure. In this statement it is to be understood that the parallelograms by which $\mathbf{R}_e$ and $\mathbf{R}_h$ are represented take part in the deformation.

Some remarks on the way in which, starting from the principal function, we may obtain the fundamental equations of the theory must also be deferred. I shall conclude now by remarking that, as an immediate consequence of HAMILTON's principle, the world-line of a material point which is acted on only by a given gravitation field, will be a geodetic line, and that the equations which determine the gravitation field caused by material and electromagnetic systems will be found by the consideration of infinitely small variations of the indicatrices, by which the numerical values of all quantities that are measured by means of these surfaces will be changed.

II [1]).

§ 15. In the first part of this communication the connexion between the electric and the magnetic force on one hand and the charge and the convection current on the other was expressed by the equation

$$\int \{[\mathsf{R}_e . \mathsf{N}] + [\mathsf{R}_h . \mathsf{N}]\}_x d\sigma = i \int \{\mathfrak{q}\}_x d\Omega, \tag{10}$$

which has been discussed in § 13. It will now be shown that this formula is equivalent to the differential equations by which the connexion in question is expressed in the theory of EINSTEIN. For this purpose some further geometrical considerations must first be developed. They refer to the special case that the quantities $g_{ab}$ have the same values at every point of the field-figure.

If this condition is fulfilled, considerations which generally may be applied to infinitesimal extensions only are valid for finite extensions too.

§ 16. The factor required, in the measurement of four-dimensional domains, for the passage from $x$-units to natural units has now the same value at every point of the field-figure. Similarly, when any one-, two- or three-dimensional extension in the field-figure that is determined by linear equations ("linear extensions") is considered, the factor by means of which the said passage may be effected for parts of that extension, will be the same for all those parts. Moreover the factor in question will be the same for two "parallel" extensions of this kind, i.e. for two extensions the determining equations of which can be written in such a way that the coefficients of $x_1, \ldots x_4$ are the same in them.

It is obvious that linear one-dimensional extensions can be called "straight lines", also it will be clear what is to be under-

[1]) Versl. Akad. Amsterdam, **24**, 1759, 1916, Proc. Acad. Amsterdam, **19**, 1354, 1916.

stood by a "prism" (or "cylinder"). This latter is bounded by two mutually parallel linear three-dimensional extensions $\sigma_1$ and $\sigma_2$ and by a lateral surface which may be extended indefinitely to both sides and in which mutually parallel straight lines ("generating lines") can be drawn.

We need not dwell upon the elementary properties of the prism.

§ 17. A vector may now be represented by a straight line of finite length; the quantities $X_1, \ldots X_4$, which have been introduced in § 10, are the changes of the coordinates caused by a displacement along that line. The magnitude of the vector, expressed in natural units, will be denoted by $S$. It is given by a formula similar to (1), viz. by

$$S^2 = \Sigma(ab) g_{ab} X_a X_b. \tag{11}$$

A vector may be regarded as being the *same* everywhere in the field-figure, if $X_1, \ldots X_4$ have constant values. In the same way a rotation $\mathsf{R}$ (§ 11) may be said to be the same everywhere, if it can be respresented by two vectors of this kind.

If from a point $P$ two vectors $PQ$ and $PR$ issue, denoted by $X_1', \ldots X_4', S'$ and $X_1'', \ldots X_4'', S''$ resp., the angle between them (comp. (5)) is defined by

$$S'S'' \cos(S', S'') = \Sigma(ab) g_{ab} X_a' X_b''. \tag{12}$$

We remark here that $X_a'$, $X_b''$ are real, positive or negative quantities and that $S'$ and $S''$ are expressed in the way indicated in § 5 ("absolute" values). It is to be understood that $S$ does not change when the signs of $X_1, \ldots X_4$ are reversed at the same time.

If $S'''$ is the value of the vector $RQ$ and if the angle between this vector and $RP$ is denoted by $(S'', S''')$, it follows further from (11) and (12) that

$$S'' = S' \cos(S', S'') + S''' \cos(S'', S''').$$

In the special case of a right angle $R$ we have

$$S'' = S' \cos(S', S''),$$

an equation expressing the connexion between a vector $PQ$ and its "projection" on a line $PR$. The angle $(S', S'')$ is the angle between the vector and its projection, both reckoned from the same point $P$.

§ 18. Let us now return to the prism $P$ mentioned in § 16.

From a point $A_2$ of the boundary of the "upper face" $\sigma_2$ we can draw a line perpendicular to $\sigma_2$ and $\sigma_1$. Let $B_1$ be the point, where it cuts this last plane, the "base", and $A_1$ the point where this plane is encountered by the generating line through $A_2$. If then $\angle A_1A_2B_1 = \vartheta$, we have

$$\overline{A_2B_1} = \overline{A_2A_1} \cos \vartheta. \tag{13}$$

The strokes over the letters indicate the absolute values of the distances $A_2B_1$ and $A_2A_1$.

It can be shown (§ 8) that, all quantities being expressed in natural units, the "volume" of the prism $P$ is found by taking the product of the numerical values of the base $\sigma_1$ and the "height" $A_2B_1$.

Let now linear three-dimensional extensions perpendicular to $A_1A_2$ be made to pass through $A_1$ and $A_2$. From these extensions the lateral boundary of the prism cuts the parts $\sigma_2'$ and $\sigma_1'$ and these parts, together with the lateral surface, enclose a new prism $P'$, the volume of which is equal to that of $P$. As now the volume of $P'$ is given by the product of $\overline{A_2A_1}$ and $\sigma_1'$, we have with regard to (13)

$$\sigma_1' = \sigma_1 \cos \vartheta.$$

If now we remember that, if a vector perpendicular to $\sigma_1$ is projected on the generating line, the ratio between the projection and the vector itself (viz. between their absolute values) is given by $\cos\vartheta$ and that a connexion similar to that which was found above between a normal section $\sigma_1'$ of the prism and $\sigma_1$ also exists between $\sigma_1'$ and any other oblique section, we easily find the following theorem:

Let $\sigma$ and $\bar{\sigma}$ be two arbitrarily chosen linear three-dimensional sections of the prism, $\mathsf{N}$ and $\bar{\mathsf{N}}$ two vectors, perpendicular to $\sigma$ and $\bar{\sigma}$ resp. and of the same length, $S$ and $\bar{S}$ the absolute values of the projections of $\mathsf{N}$ and $\bar{\mathsf{N}}$ on a generating line. Then we have

$$S\sigma = \bar{S}\bar{\sigma}. \tag{14}$$

§ 19. After these preliminaries we can show that the left hand side of (10) is equal to 0, if the numbers $g_{ab}$ are constants and if moreover both the rotation $\mathsf{R}_e$ and the rotation $\mathsf{R}_h$ are everywhere the same. For the two parts of the integral the proof may be given in the same way, so that it suffices to consider the expression

$$\int [\mathbf{R}_e . \mathbf{N}]_x d\sigma. \tag{15}$$

Let $X_1, \ldots X_4$ be the components of the vector $\mathbf{N}$, expressed in $x$-units. From the distributive property of the vector product it then follows that each of the four components of

$$[\mathbf{R}_e . \mathbf{N}]_x$$

is a homogeneous linear function of $X_1, \ldots X_4$. Under the special assumptions specified at the beginning of this § these are everywhere the same functions. Let us thus consider a definite component of (15) e.g. that which corresponds to the direction of the coordinate $x_a$. We can represent it by an expression of the form

$$\int (\alpha_1 X_1 + \ldots + \alpha_4 X_4) d\sigma,$$

where $\alpha_1, \ldots \alpha_4$ are constants. It will therefore be sufficient to prove that the four integrals

$$\int X_1 d\sigma, \ldots \int X_4 d\sigma \tag{16}$$

vanish.

In order to calculate $\int X_1 d\sigma$ we consider an infinitely small prism, the edges of which have the direction $x_1$. This prism cuts from the boundary surface $\sigma$ two elements $d\sigma$ and $\overline{d\sigma}$. Proceeding along a generating line in the direction of the positive $x_1$ we shall enter the extension $\Omega$ bounded by $\sigma$ through one of these elements and leave it through the other. Now the vectors perpendicular to $\sigma$, which occur in (15) and which we shall denote by $\mathbf{N}$ and $\overline{\mathbf{N}}$ for the two elements, have the same value [1]). If, therefore, $S$ and $\overline{S}$ are the absolute values of the projections of $\mathbf{N}$ and $\overline{\mathbf{N}}$ on a line in the direction $x_1$, we have according to (14)

$$S d\sigma = \overline{S}\, \overline{d\sigma}. \tag{17}$$

Let first the four directions of coordinates be perpendicular to one another. Then the components of the vector obtained by projecting $\mathbf{N}$ on the above mentioned line are $X_1$, 0, 0, 0 and

[1]) From § 10 it follows that if the length of a vector $A$ that is represented by a line (§ 17) coincides with a radius-vector of the conjugate indicatrix, it is always represented by an imaginary number. We may however obtain a vector which in natural units is represented by a real number e.g. by 1 (§ 13) if we multiply the vector $A$ by an imaginary factor, which means that its components and also those of a vector product in which it occurs are multiplied by that factor.

similarly those of the projection of $\overline{\mathsf{N}}$: $\overline{X}_1$, 0, 0, 0. But as, proceeding in the direction of $x_1$, we enter $\Omega$ through one element and leave it through the other, while $\mathsf{N}$ and $\overline{\mathsf{N}}$ are both directed outward, $X_1$ and $\overline{X}_1$ must have opposite signs. So we have

$$S : \overline{S} = X_1 : -\overline{X}_1$$

and because of (17) we may now conclude that the elements $X_1\, d\sigma$ and $\overline{X}_1\, \overline{d\sigma}$ in the first of the integrals (16) annul each other. It will be clear now that the whole integral vanishes and that similar considerations may be applied to the other three.

So we have proved that under the special assumptions made the left hand side of (10) will vanish in the special case that the directions of the coordinates are perpendicular to each other. This conclusion likewise holds for an other set of coordinates if only the assumption made at the beginning of this § is fulfilled. This is obvious, as we can pass from mutually perpendicular coordinates $x_1, \ldots x_4$ to arbitrarily chosen other ones $x_1', \ldots x_4'$ which fulfil this latter condition by linear transformation formulae with constant coefficients. The $x$- and the $x'$-components of the vector

$$[\mathsf{R}_e . \mathsf{N}] + [\mathsf{R}_h . \mathsf{N}]$$

are then connected by homogeneous linear formulae with coefficients which have the same value at all points of the surface $\sigma$. Hence if, as has been shown above, the four $x$-components of the vector

$$\int \{[\mathsf{R}_e . \mathsf{N}] + [\mathsf{R}_h . \mathsf{N}]\}\, d\sigma$$

vanish, the four $x'$-components are now seen to do so likewise. [1])

§ 20. The above considerations were intended to prepare a corollary which will be of use in the treatment of the integral on the left hand side of (10), if we now leave the special assumptions made above and suppose the quantities $g_{ab}$ to be functions of the coordinates while also the rotations $\mathsf{R}_e$ and $\mathsf{R}_h$ may change from point to point.

This corollary may be formulated as follows: If all dimensions

---

[1]) In the above considerations difficulties might arise if the vector $\mathsf{N}$ lay on the asymptotic cone of the indicatrix, our definition of a vector of the value 1 would then fail (comp. note 2, p. 250). With a view to this we can choose the form of the extension $\Omega$ (§ 13) in such a way that this case does not occur, a restriction leading to a boundary with sharp edges.

of the limiting surface $\sigma$ are infinitely small of the first order, the integral

$$\int \{[\mathsf{R}_e \cdot \mathsf{N}] + [\mathsf{R}_h \cdot \mathsf{N}]\}_x d\sigma$$

will be of the *fourth* order.

In order to make this clear let us suppose that in the calculation of the integral we confine ourselves to quantities of the third order. The surface $\sigma$ being already of that order we may then omit all infinitesimal values in the quantities by which $d\sigma$ is multiplied; we may therefore neglect the infinitesimal changes of the quantities $g_{ab}$ over the extension considered, and also those of $\mathsf{R}_e$ and $\mathsf{R}_h$. By this we just come to the case considered in § 19. Thus it is evident, that as regards quantities of the third order the first part of (10) is 0. From this it follows that in reality it is at least of the fourth order.

§ 21. Let us now return to the general case that the extension $\Omega$ to which equation (10) refers, has finite dimensions. If by a surface $\bar{\sigma}$ this extension is derived into two extensions $\Omega_1$ and $\Omega_2$, the quantities on the two sides in (10) each consist of two parts referring to these extensions. For the right hand side this is immediately clear and as to the quantity on the left hand side, it follows from the consideration that the contributions of $\bar{\sigma}$ to the integrals over the boundaries of $\Omega_1$ and $\Omega_2$ are equal with opposite signs. In the two cases namely we must take for $\mathsf{N}$ equal but opposite vectors.

Also, if the extension $\Omega$ is divided into an arbitrary number of parts, each term in (10) will be the sum of a number of integrals, each relating to one of these parts.

By surfaces with the equations $x_1 = \text{const.}, \ldots x_4 = \text{const.}$ we can divide the extension $\Omega$ into elements which we shall denote by $(dx_1, \ldots dx_4)$. As a rule there will be left near the surface $\sigma$ certain infinitely small extensions of a different form. From the preceding § it is evident that, in the calculation of the integrals, these latter extensions may be neglected and that only the extensions $(dx_1, \ldots dx_4)$ have to be considered. From this we can conclude that equation (10) is valid for any finite extension, as soon as it holds for each of the elements $(dx_1, \ldots dx_4)$.

§ 22. We shall now show what equation (10) becomes for one element $(dx_1, \ldots dx_4)$. Besides the infinitesimal quantities $x_1, \ldots x_4$, occuring in the equation

$$F = \Sigma(ab) g_{ab} x_a x_b = \varepsilon^2$$

of the indicatrix we introduce four other quantities $\xi_1, \ldots \xi_4$, which we define by

$$\xi_a = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x_a}, \tag{18}$$

or

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1 = g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + \ldots + g_{14}x_4 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \xi_4 = g_{41}x_1 + g_{42}x_2 + \ldots + g_{44}x_4 \end{array}\right\} \tag{19}$$

with the equalities $g_{ba} = g_{ab}$.

To each of these quantities corresponds a definite direction, viz. that in which we have to proceed in order to make the considered quantity change in positive sense while the other three remain constant. If we denote these directions by 1*, 2*, 3*, 4* and in the same way the directions of the coordinates $x_1, x_2, x_3, x_4$ by 1, 2, 3, 4, it is evident that 1* is conjugate with 2, 3 and 4, 2* with 3, 1 and 4, and so on; inversely 1 with 2*, 3*, 4*; 2 with 3*, 1*, 4*, and so on. From what has been said above about the algebraic signs of $g_{11}, g_{22}, g_{33}, g_{44}$ it follows further that, if directions opposite to 1, 1* etc. are denoted by — 1, — 1* etc., the directions — 1 and 1* will point to the same side of an extension $x_1 =$ const. The same may be said of the directions — 2 and 2* or — 3 and 3* with respect to extensions $x_2 =$ const. or $x_3 =$ const., while with respect to an extension $x_4 =$ const. the directions 4 and 4* point to the same side.

Finally, we shall fix (§ 11) as far as is necessary, which direction corresponds to three others. For that purpose we shall imagine the directions of coordinates 1, . . . 4 to pass into mutually conjugate directions, which will also be called 1, . . . 4, by gradual changes, in such a way that never three of them come to lie in one plane. We shall agree that after this change — 4 corresponds to 1, 2, 3.

Let $a, b, c, d$ be the numbers 1, 2, 3, 4 in an order obtained from the natural one by an *even* number of permutations. Then the rule of § 11 teaches us that the direction $-d$ corresponds to $a, b, c$. It is clear that this would be the case with $d$, if $a, b, c, d$ were obtained from 1, 2, 3, 4 by an odd number of permutations. If further it is kept in mind that, always in the new case, the directions 1*, 2*, 3*, 4* coincide with $-1$, $-2$, $-3$, 4, we come to the conclusion that the directions 1, 2, 3 and 4 correspond to the sets 2*, 3*, 4*; 3*, 1*, 4*; 1*, 2*, 4* and 1*, 2*, 3* respectively. The rule of gradual change (§ 11) involves that this holds also for the original case, in which 1, 2, 3, 4 were not yet mutually conjugate.

This is all that has to be said about the relations between the different directions. It must only be kept in mind, that whenever two of the first three directions are interchanged, the fourth must be reversed.

§ 23. In the neighbourhood of a point $P$ of the field-figure we may introduce as coordinates instead of $x_1, \dots x_4$ the quantities $\xi_1, \dots \xi_4$ defined by (19). Line-elements or finite vectors can be resolved in the directions of these coordinates, i.e. in the directions 1*, 2*, 3*, 4*. Their components and the magnitudes of different extensions can now be expressed in $\xi$-units in the same way as formerly in $x$-units. So the volume of a three-dimensional parallelepiped with the positive edges $d\xi_1$, $d\xi_2$, $d\xi_3$ is represented by the product $d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3$.

Solving $x_1, \dots x_4$ from (19) we obtain expressions of the form:

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = \gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{21}\xi_2 + \dots + \gamma_{41}\xi_4 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x_4 = \gamma_{14}\xi_1 + \gamma_{24}\xi_2 + \dots + \gamma_{44}\xi_4 \\ \gamma_{ba} = \gamma_{ab} \end{array}\right\} \tag{20}$$

If we use the coordinates $\xi$ the coefficients $\gamma_{ab}$ play the same part as the coefficients $g_{ab}$ when the coordinates $x$ are used. According to (18) and (20) we have namely

$$F = \Sigma(a)\xi_a x_a = \Sigma(ab)\gamma_{ba}\xi_a\xi_b,$$

so that the equation of the indicatrix may be written

$$\Sigma(ab)\gamma_{ba}\xi_a\xi_b = \varepsilon^2.$$

§ 24. Let the rotations $\mathsf{R}_e$ and $\mathsf{R}_h$ of which we spoke in § 13 be defined by the vectors $\mathsf{A}^{\mathrm{I}}$, $\mathsf{A}^{\mathrm{II}}$ and $\mathsf{A}^{\mathrm{III}}$, $\mathsf{A}^{\mathrm{IV}}$ respectively, the resultants of the vectors $\mathsf{A}^{\mathrm{I}}_{1*}, \ldots \mathsf{A}^{\mathrm{I}}_{4*}$, etc. in the directions $1^*, \ldots 4^*$. Then, according to the properties of the vector product that were discussed in § 11,

$$[\mathsf{R}_e . \mathsf{N}] = [(\mathsf{A}^{\mathrm{I}}_{1*} + \ldots + \mathsf{A}^{\mathrm{I}}_{4*}) . (\mathsf{A}^{\mathrm{II}}_{1*} + \ldots + \mathsf{A}^{\mathrm{II}}_{4*}) . \mathsf{N}]$$
$$= \Sigma(\overline{ab})\{[\mathsf{A}^{\mathrm{I}}_{a*} . \mathsf{A}^{\mathrm{II}}_{b*} . \mathsf{N}] - [\mathsf{A}^{\mathrm{II}}_{a*} . \mathsf{A}^{\mathrm{I}}_{b*} . \mathsf{N}]\},$$

where the stroke over $ab$ indicates that each combination of two different numbers $a$, $b$ contributes one term to the sum. For the vector product $[\mathsf{R}_h . \mathsf{N}]$ we have a similar equation. Now two or more rotations in one and the same plane, e.g. in the plane $a^*b^*$, may be replaced by one rotation, which can be represented by means of two vectors with arbitrarily chosen directions in that plane, e.g. the directions $a^*$ and $b^*$. We may therefore introduce two vectors $\mathsf{B}_{a*}$ and $\mathsf{B}_{b*}$ directed along $a^*$ and $b^*$ resp., so that

$$[\mathsf{B}_{a*} . \mathsf{B}_b] = [\mathsf{A}^{\mathrm{I}}_{a*} . \mathsf{A}^{\mathrm{II}}_{b*}] - [\mathsf{A}^{\mathrm{II}}_{a*} . \mathsf{A}^{\mathrm{I}}_{b*}] +$$
$$+ [\mathsf{A}^{\mathrm{III}}_{a*} . \mathsf{A}^{\mathrm{IV}}_{b*}] - [\mathsf{A}^{\mathrm{IV}}_{a*} . \mathsf{A}^{\mathrm{III}}_{b*}]. \quad (21)$$

Then we must substitute in (10)

$$[\mathsf{R}_e . \mathsf{N}] + [\mathsf{R}_h . \mathsf{N}] = \Sigma(\overline{ab})[\mathsf{B}_{a*} . \mathsf{B}_{b*} . \mathsf{N}]. \quad (22)$$

Here it must be remarked that the magnitude and the sense of one of the vectors $\mathsf{B}$ may be chosen arbitrarily; when this has been done, the other vector is perfectly determined.

In the following calculations the vector $\mathsf{N}$ has one of the directions $1^*, \ldots 4^*$. As this is also the case with the vectors $\mathsf{B}_{a*}$ and $\mathsf{B}_{b*}$, the vector product occuring in (22) can easily be expressed in $\xi$-units. After that we may pass to natural units and finally, as is necessary for the substitution in (10), to $x$-units.

In order to pass from $\xi$-units to natural units we have to multiply a vector in the direction $a^*$ by a certain coefficient $\lambda_a$, and a part of the extension $a^*, b^*, c^*$ by a coefficient $\lambda_{abc}$. These coefficients correspond to $l_a$ (§ 10) and $l_{abc}$ (§ 12). The factors $\lambda_{abc}$ e.g. can be expressed by means of the minors $\Gamma_{ab}$ of the determinant $\gamma$ of the quantities $\lambda_{ab}$. If this is worked out and if the equations

$$\gamma_{ab} = \frac{G_{ab}}{g}, \quad g_{ab} = \frac{\Gamma_{ab}}{\gamma}, \quad g\gamma = 1$$

are taken into consideration, we obtain the following corollary, which we shall soon use:

Let $a, b, c, d$ and also $a', b', c', d'$ be the numbers 1, 2, 3, 4 in any order, $a'$ being not the same as $a$, then we have, if none of the two numbers $\alpha$ and $\alpha'$ is 4,

$$\frac{l_{bcd}\lambda_{b'c'd'}}{l_{a'}\lambda_a} = -1, \tag{23}$$

and if one of the two is 4

$$\frac{l_{bcd}\lambda_{b'c'd'}}{l_{a'}\lambda_a} = 1. \tag{24}$$

§ 25. We shall now suppose (comp. § 24) that in $\xi$-units the vector $\mathsf{B}_{a*}$ has the value $+1$, and we shall write $\chi_{ab}$ for the value that must then be given to $\mathsf{B}_{b*}$. If the $\xi$-components of the vectors $\mathsf{A}^{\mathrm{I}}$ etc. are denoted by $\Xi_1^{\mathrm{I}}, \ldots \Xi_4^{\mathrm{I}}$ etc., we find from (21)

$$\chi_{ab} = (\Xi_a^{\mathrm{I}}\,\Xi_b^{\mathrm{II}} - \Xi_a^{\mathrm{II}}\,\Xi_b^{\mathrm{I}}) + (\Xi_a^{\mathrm{III}}\,\Xi_b^{\mathrm{IV}} - \Xi_a^{\mathrm{IV}}\,\Xi_b^{\mathrm{III}}). \tag{25}$$

This formula involves that

$$\chi_{ba} = -\chi_{ab}. \tag{26}$$

It may be remarked that $\chi_{ba}$ is the value that must be given to the vector $B_{a*}$ if $B_{b*}$ is taken to be 1.

The quantities $\chi_{ab}$ may be said to represent the rotations $[B_{a*}.B_{b*}]$.

At the end of our calculations we shall introduce instead of $\chi_{ab}$ the quantities $\psi_{ab}$ defined by

$$\psi_{ab} = \chi_{a'b'} (a \neq b), \quad \psi_{aa} = 0. \tag{27}$$

In the first of these equations $a, b, a', b'$ are supposed to be the numbers 1, 2, 3, 4, in an order obtained from 1, 2, 3, 4 by an even number of permutations.

§ 26. We have now to calculate the left hand side of equation (10) for the case that $\sigma$ is the surface of an element $(dx_1, \ldots dx_4)$. For this purpose we shall each time take together two opposite sides, calculating for each pair the contributions due to the different terms on the right hand side of (22), or as we may say to the different rotations $\chi_{ab}$. It is convenient now to denote by $a, b, c$ the numbers 1, 2, 3 either in this order or in any other derived from it by a cyclic permutation, while the $x$-components of the vector we are calculating and which stands on the left hand side of (10) will be represented by $X_1, \ldots X_4$.

*a.* Let us first consider that one of the sides $(dx_a, dx_b, dx_c)$ which faces towards the side of the positive $x_4$. The vector **N** drawn outward has the direction $4^*$ and in $\xi$-units the magnitude $1/\lambda_4$. As the direction $c$ corresponds to $a^*$, $b^*$, $4^*$, the rotation $\chi_{ab}$ gives with **N** a vector product represented by a vector in the direction $c$. The magnitude of this vector is in $\xi$-units

$$\frac{1}{\lambda_4}\chi_{ab}$$

and in natural units

$$\frac{\lambda_{ab4}}{\lambda_4}\chi_{ab}.$$

This must be multiplied by $l_{abc}\,dx_a\,dx_b\,dx_c$, the magnitude of the side under consideration in natural units, and finally by $1/l_c$ to express the vector product in $x$-units. Because of (24) we may write for the result

$$\chi_{ab}\,dx_a\,dx_b\,dx_c = \psi_{c4}\,dx_a\,dx_b\,dx_c.$$

The opposite side gives a similar result with the opposite sign (**N** having for that side the direction $-4^*$), so that together the sides contribute the term

$$\frac{\partial\psi_{c4}}{\partial x_4}\,dW$$

to the component $X_c$. For shortness' sake we have put here

$$dx_1dx_2dx_3dx_4 = dW.$$

Finally we may take $c = 1, 2, 3$.

*b.* Secondly we consider a side $(dx_a, dx_b, dx_4)$ facing towards the positive $x_c$. The vector **N** has now the direction $-c^*$. We consider the vector products of this vector with the rotations $\chi_{b4}$, $\chi_{4a}$ and $\chi_{ba}$, which vector products have the directions $a, b$ and 4. A calculation exactly similar to the one we performed just now gives the contributions to $X_a$, $X_b$, $X_4$. For these we thus find the products of $dx_adx_bdx_4$ by

$$\frac{l_{ab4}\,\lambda_{bc4}}{l_a\,\lambda_c}\,\chi_{b4}=\chi_{4b}=\psi_{ac},$$

$$\frac{l_{ab4}\,\lambda_{ac4}}{l_b\,\lambda_c}\,\chi_{4a}=\chi_{a4}=\psi_{bc},$$

$$\frac{l_{ab4}\,\lambda_{abc}}{l_4\,\lambda_c}\,\chi_{ba}=\chi_{ba}=\psi_{4c}.$$

Taking also into consideration the opposite side $(dx_a, dx_b, dx_4)$ we find for $X_a, X_b, X_4$ the contributions

$$\frac{\partial\psi_{ac}}{\partial x_c}\,dW,\quad \frac{\partial\psi_{bc}}{\partial x_c}\,dW,\quad \frac{\partial\psi_{4c}}{dx_c}\,dW.$$

This may be applied to each of the three pairs of sides not yet mentioned under $a$; we have only to take for $c$ successively 1, 2, 3.

Summing up what has been said in this § we may say: the components of the vector on the left hand side of (10) are

$$X_a=\Sigma\,(b)\,\frac{\partial\psi_{ab}}{\partial x_b}\,dW.$$

§ 27. For the components of the vector occurring on the right hand side of (10) we may write

$$i\mathfrak{q}_a\,d\Omega,$$

if $\mathfrak{q}_a$ is the component of the vector $\mathfrak{q}$ in the direction $x_a$ expressed in $x$-units, while $d\Omega$ represents the magnitude of the element $(dx_1, \ldots dx_4)$ in natural units. This magnitude is

$$-i\sqrt{-g}\,dW,$$

so that by putting

$$\sqrt{-g}\,\mathfrak{q}_a=w_a \tag{28}$$

we find for equation (10)

$$\Sigma\,(b)\,\frac{\partial\psi_{ab}}{\partial x_b}=w_a. \tag{29}$$

The four relations contained in this equation have the same form as those expressed by formula (25) in my paper of last year [1]).

[1]) On Hamilton's principle in Einstein's theory of gravitation. Proc. Acad. Amsterdam. **19**, 751, 1916 (this volume, p. 229). Further on this last paper will be cited by l.c.

We shall now show that the two sets of equations correspond in all respects. For this purpose it will be shown that the transformation formulae formerly deduced for $w_a$ and $\psi_{ac}$ follow from the way in which these quantities have been now defined. The notations from the former paper will again be used and we shall suppose the transformation determinant $p$ to be positive.

§ 28. Between the differentials of the original coordinates $x_a$ and the new coordinates $x'_a$ which we are going to introduce we have the relations

$$dx'_a = \Sigma\,(b) \pi_{ba}\,dx_b \tag{30}$$

and formulae of the same form (comp. § 10) may be written down for the components of a vector expressed in $x$-measure. As the quantities $q_a$ constitute a vector and as

$$\sqrt{-g'} = p\,\sqrt{-g},$$

we have according to (28) [1])

$$\frac{1}{\sqrt{-g'}}\,w'_a = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\Sigma\,(b)\,\pi_{ba}\,w_b,$$

or

$$w'_a = p\,\Sigma\,(b)\,\pi_{ba}\,w_b.$$

Further we have for the infinitely small quantities $\xi_a$ [2]) defined by (19)

$$\xi'_a = \Sigma\,(b)\,p_{ba}\,\xi_b$$

and in agreement with this for the components of a vector expressed in $\xi$-units

$$\Xi'_a = \Sigma\,(b)\,p_{ba}\,\Xi_b,$$

so that we find from (25) [3])

$$\chi'_{ab} = \Sigma\,(cd)\,p_{ca}\,p_{db}\,\chi_{cd}.$$

[1]) Comp. § 7, l.c.

[2]) For the infinitesimal quantities $x_a$ occurring in (19) we have namely (comp. (30)):

$$x'_a = \Sigma\,(b)\,\pi_{ba}\,x_b$$

and taking into consideration (19) and (20), i.e.

$$\xi_a = \Sigma\,(b)\,g_{ab}\,x_b,\quad x_a = \Sigma\,(b)\,\gamma_{ba}\,\xi_b$$

and formula (7) l.c., we may write (comp. note 2, p. 758, l.c.)

$$\xi'_a = \Sigma\,(b)\,g'_{ab}\,x'_b = \Sigma\,(bcde)\,p_{ca}\,p_{db}\,\pi_{eb}\,g_{cd}\,x_e =$$
$$= \Sigma\,(cd)\,p_{ca}\,g_{cd}\,x_d = \Sigma\,(cdf)\,p_{ca}\,g_{cd}\,\gamma_{fd}\,\xi_f = \Sigma\,(c)\,p_{ca}\,\xi_c.$$

[3]) Put $\Xi_a{}^{\mathrm{I}}\,\Xi_b{}^{\mathrm{II}} = \vartheta_{ab}$. Then we have

$$\vartheta'_{ab} = \Xi_a{}^{\mathrm{I}\prime}\,\Xi_b{}^{\mathrm{II}\prime} = \Sigma\,(cd)\,p_{ca}\,p_{db}\,\Xi_c{}^{\mathrm{I}}\,\Xi_d{}^{\mathrm{II}} = \Sigma\,(cd)\,p_{ca}\,p_{db}\,\vartheta_{cd}$$

and similar formulae for the other three parts of (25).

Interchanging here $c$ and $d$, we obtain

$$\chi'_{ab} = \Sigma\,(cd)\, p_{da}\, p_{cb}\, \chi_{dc} = -\Sigma\,(cd)\, p_{da} p_{cb} \chi_{cd}$$

and

$$\chi'_{ab} = \tfrac{1}{2}\Sigma\,(cd)\,(p_{ca}\, p_{cb} - p_{da} p_{cb})\chi_{cd}\,. \qquad (31)$$

The quantity between brackets on the right hand side is a second order minor of the determinant $p$ and as is well known this minor is related to a similar minor of the determinant of the coefficients $\pi_{ab}$. If $a'b'$ corresponds to $ab$ in the way mentioned in § 25, and $c'd'$ in the same way to $cd$, we have

$$p_{ca}\, p_{db} - p_{da}\, p_{cb} = p(\pi_{c'a'}\, \pi_{d'b'} - \pi_{d'a'}\, \pi_{c'b'}),$$

so that (31) becomes

$$\chi'_{ab} = \tfrac{1}{2}\, p\, \Sigma\,(cd)\,(\pi_{c'a'}\, \pi_{d'b'} - \pi_{d'a'}\, \pi_{c'b'})\, \chi_{cd}\,.$$

According to (27) this becomes

$$\psi'_{a'b'} = \tfrac{1}{2}\, p\, \Sigma\,(cd)\,(\pi_{c'a'}\, \pi_{d'b'} - \pi_{d'a'}\, \pi_{c'b'})\, \psi_{c'd'}\,,$$

for which we may write

$$\psi'_{ab} = \tfrac{1}{2}\, p\, \Sigma\,(cd)\,(\pi_{ca}\, \pi_{db} - \pi_{da}\, \pi_{cb})\, \psi_{cd}.$$

Interchanging $c$ and $d$ in the second of the two parts into which the sum on the right hand side can be decomposed, and taking into consideration that

$$\psi_{cd} = -\psi_{dc},$$

as is evident from (26) and (27), we find [1])

$$\psi'_{ab} = p\, \Sigma\,(cd)\, \pi_{ca}\, \pi_{db}\, \psi_{cd}.$$

§ 29. Finally it can be proved that if equation (10) holds for one system of coordinates $x_1, \ldots x_4$, it will also be true for every other system $x'_1, \ldots x'_4$, so that

$$\int \{[\mathsf{R}_e . \mathsf{N}] + [\mathsf{R}_h . \mathsf{N}]\}_{x'}\, d\sigma = i \int \{\mathsf{q}\}_{x'}\, d\Omega. \qquad (32)$$

To show this we shall first assume that the extension $\Omega$, which is understood to be the same in the two cases, is the element $(dx_1, \ldots dx_4)$.

[1]) Comp. (28) l.c.

For the four equations taken together in (10) we may then write

$$\int u_1\, d\sigma = v_1\, d\Omega, \ldots \int u_4\, d\sigma = v_4\, d\Omega \tag{33}$$

and in the same way for the four equations (32)

$$\int u'_1\, d\sigma = v'_1\, d\Omega, \ldots \int u'_4\, d\sigma = v'_4\, d\Omega. \tag{34}$$

We have now to deduce these last equations from (33). In doing so we must keep in mind that $u_1, \ldots u_4$ are the $x$-components and $u'_1, \ldots u'_4$ the $x'$-components of one definite vector and that the same may be said of $v_1, \ldots v_4$ and $v'_1 \ldots v'_4$.

Hence, at a definite point (comp. (30))

$$v'_a = \Sigma\,(b)\, \pi_{ba}\, v_b. \tag{35}$$

We shall particularly denote by $\pi_{ba}$ the values of these quantities belonging to the angle $P$ from which the edges $dx_1, \ldots dx_4$ issue in positive directions. To the right hand sides of the equations (34) we may apply transformation (35) with *these* values of $\pi_{ba}$, $d\Omega$ being infinitely small of the fourth order and it being allowed to confine ourselves to quantities of this order.

On the left hand sides of (34), however, we must take into consideration, the surface being of the third order, that the values of $\pi_{ba}$ change from point to point. Let $\mathrm{x}_1, \ldots \mathrm{x}_4$ be the changes which $x_1, \ldots x_4$ undergo when we pass from $P$ to any other point of the surface. Then we must write for the value of the coefficient at this last point

$$\pi_{ba} + \Sigma\,(c)\, \frac{\partial \pi_{ba}}{\partial x_c}\, \mathrm{x}_c.$$

We thus have

$$\int u'_a\, d\sigma = \Sigma\,(b)\, \pi_{ba} \int u_b\, d\sigma + \Sigma\,(b) \int u_b\, \Sigma\,(c)\, \frac{\partial \pi_{ba}}{\partial x_c}\, \mathrm{x}_c\, d\sigma.$$

It will be shown presently that the last term vanishes. This being proved, it is clear that the relations (34) follow from (33); indeed, multiplying equations (33) by $\pi_{1a}, \ldots \pi_{4a}$ respectively and adding them we find

$$\int u'_a\, d\sigma = v'_a\, d\Omega.$$

§ 30. The proof for

$$\Sigma\,(b) \int u_b\, \Sigma\,(c)\, \frac{\partial \pi_{ba}}{\partial x_c}\, \mathrm{x}_c\, d\sigma = 0 \tag{36}$$

rests on the relations

$$\frac{\partial \pi_{ba}}{\partial x_e} = \frac{\partial \pi_{ea}}{\partial x_b}\,, \tag{37}$$

which follow from

$$\pi_{ba} = \frac{\partial x'_a}{\partial x_b}\,, \quad \pi_{ea} = \frac{\partial x'_a}{\partial x_e}\,.$$

The integral which occurs in (36) differs from

$$\int u_b\, d\sigma \tag{38}$$

by the infinitely small factor under the sign of integration

$$\Sigma\,(c)\, \frac{\partial \pi_{ba}}{\partial x_c}\, \mathrm{x}_c\,.$$

Now we have calculated in § 26 integrals like (38) by taking together each time two opposite sides, one of which $\Sigma_1$ passes through $P$ while the second $\Sigma_2$ is obtained from the first by a shift in the direction of one of the coordinates e. g. of $x_e$ over the distance $dx_e$. We had then to keep in mind that for the two sides the values of $u_b$, which have opposite signs, are a little different; and it was precisely this difference that was of importance. In the calculation of the integral

$$\int u_b\, \Sigma\,(c)\, \frac{\partial \pi_{ba}}{\partial x_c}\, \mathrm{x}_c\, d\sigma \tag{39}$$

however it may be neglected. Hence, when we express the components $u_b$ in terms of the quantities $\psi_{ab}$, we may give to these latter the values which they have at the point $P$.

Let us consider two sides situated at the ends of the edges $dx_e$, and whose magnitude we may therefore express in *x-units* by $dx_j dx_k dx_l$ if $j$, $k$, $l$ are the numbers which are left of 1, 2, 3, 4 when the number $e$ is omitted. For the part contributed to (38) by the side $\Sigma_2$ we found in § 26

$$\psi_{be} dx_j dx_k dx_l\,.$$

We now find for the part of (39) due to the two sides

$$\psi_{be}\,\Sigma\,(c)\,\frac{\partial \pi_{ba}}{\partial x_c}\left[\int\limits_{2} \mathrm{x}_c\,d\sigma - \int\limits_{1} \mathrm{x}_c\,d\sigma\right]$$

where the first integral relates to $\Sigma_2$ and the second to $\Sigma_1$. It is clear that but one value of $c$, viz. $e$ has to be considered. As everywhere in $\Sigma_1 : \mathrm{x}_e = 0$ and everywhere in $\Sigma_2 : \mathrm{x}_e = dx_e$ it is further evident that the above expression becomes

$$\psi_{eb}\,\frac{\partial \pi_{ba}}{\partial x_e}\,dW.$$

This is one part contributed to the expression (36). A second part, the origin of which will be immediately understood, is found by interchanging $b$ and $e$. With a view to (37) and because of

$$\psi_{eb} = -\psi_{be}$$

we have for each term of (36) another by which it is cancelled. This is what had to be proved.

§ 31. Now that we have shown that equation (32) holds for each element $(dx_1, \ldots dx_4)$ we may conclude by the considerations of § 21 that this is equally true for any arbitrarily chosen magnitude and shape of the extension $\Omega$. In particular the equation may be applied to an element $(dx'_1 \ldots dx'_4)$ and by considerations exactly similar to those presented in § 26 we see that in the new coordinates as well as in the original ones we have equations of the form (29).

Whatever be our choice of the coordinates the part of the principal function indicated in § 14 can therefore be derived for a given current vector $\mathfrak{q}$.

In a sequel to this paper some conclusions that may be drawn from HAMILTON's principle will be considered.

## III [1]).

§ 32. In the two preceding papers we have tried so far as possible to present the fundamental principles of the new gravitation theory in a simple form.

---

1) Versl. Akad. Amsterdam, **25**, 468, 1916. Proc. Acad. Amsterdam. **20**, 2, 1916.

We shall now show how EINSTEIN's differential equations for the gravitation field can be derived from HAMILTON's principle. In this connexion we shall also have to consider the energy, the stresses, momenta and energy-currents in that field.

We shall again introduce the quantities $g_{ab}$ formerly used and we shall also use the "inverse" system of quantities for which we shall now write $g^{ab}$. It is found useful to introduce besides these the quantities

$$\mathfrak{g}^{ab} = \sqrt{-g}\, g^{ab}.$$

Differential coefficients of all these variables with respect to the coordinates will be represented by the indices belonging to these latter, e.g.

$$g_{ab,p} = \frac{\partial g_{ab}}{\partial x_p}, \quad g_{ab,pq} = \frac{\partial^2 g_{ab}}{\partial x_q \partial x_p}.$$

We shall use CHRISTOFFEL's symbols

$$\begin{bmatrix} ab \\ c \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\,(g_{ac,b} + g_{bc,a} - g_{ab,c})$$

and RIEMANN's symbol

$$(ik, lm) = \tfrac{1}{2}(g_{im,kl} + g_{kl,im} - g_{il,km} - g_{km,il}) + \\ + \Sigma\,(ab)\, g^{ab} \left\{ \begin{bmatrix} im \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kl \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} il \\ a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} km \\ b \end{bmatrix} \right\}.$$

Further we put

$$G_{im} = \Sigma\,(kl)\, g^{kl}(ik, lm) \tag{40}$$

$$G = \Sigma\,(im) g^{im}\, G_{im}. \tag{41}$$

This latter quantity is a measure for the curvature of the field-figure. The principal function of the gravitation field is

$$\frac{1}{2\varkappa}\int Q dS,$$

where

$$Q = \sqrt{-g}\, G.$$

In the integral $dS$, the element of the field-figure, is expressed in $x$-units. The integration has to be extended over the domain within a certain closed surface $\sigma$; $\varkappa$ is a positive constant.

§ 33. When we pass from the system of coordinates $x_1, \dots x_4$ to another, the value of $G$ proves to remain unaltered; it is a scalar quantity. This may be verified by first proving that the quantities $(ik, lm)$ form a covariant tensor of the fourth order [1]). Next, $(g^{kl})$ being a contravariant tensor of the second order [2]), we can deduce from (40) that $(G_{im})$ is a covariant tensor of the same order [3]). According to (41) $G$ is then a scalar. The same is true [4]) for $QdS$.

We remark that $g_{ba} = g_{ab}$ [5]) and $g_{ab,fe} = g_{ab,ef}$. We shall suppose $Q$ to be written in such a way that its form is not altered by interchanging $g_{ba}$ and $g_{ab}$ or $g_{ab,fe}$ and $g_{ab,ef}$. If originally this condition is not fulfilled it is easy to pass to a "symmetrical" form of this kind.

It is clear that $Q$ may also be expressed in the quantities $g^{ab}$ and their first and second derivatives and in the same way in the $\mathfrak{g}^{ab}$'s and first and second derivatives of these quantities.

If the necessary substitutions are executed with due care, these new forms of $Q$ will also be symmetrical.

§ 34. We shall first express the quantity $Q$ in the $g_{ab}$'s and their derivatives and we shall determine the variation it undergoes by arbitrarily chosen variations $\delta g_{ab}$, these latter being continuous functions of the coordinates. We have evidently

$$\delta Q = \Sigma (ab) \frac{\partial Q}{\partial g_{ab}} \delta g_{ab} + \Sigma (abe) \frac{\partial Q}{\partial g_{ab,e}} \delta g_{ab,e} + \Sigma (abef) \frac{\partial Q}{\partial g_{ab,ef}} \delta g_{ab,ef}.$$

By means of the equations

$$\delta g_{ab,ef} = \frac{\partial}{\partial x_f} \delta g_{ab,e} \text{ and } \delta g_{ab,e} = \frac{\partial}{\partial x_e} \delta g_{ab}$$

1) This means that the transformation formulae for these quantities have the form

$$(ik,lm)' = \Sigma\,(abce)\, p_{ai}\, p_{bk}\, p_{cl}\, p_{em}\, (ab,ce).$$

See for the notations used here and for some others to be used later on my communication in Proc. Acad. Amsterdam **19**, 751, 1916 (this volume, p. 229). In referring to the equations and the articles of this paper I shall add the indication l.c.

2) Namely

$$g'^{kl} = \Sigma\,(ab)\, \pi_{ak}\, \pi_{bl}\, g^{ab}.$$

The symbol $(g^{kl})$ denotes the complex of all the quantities $g^{kl}$.

3) Namely

$$G'_{im} = \Sigma\,(ab)\, p_{ai}\, p_{bm}\, G_{ab}.$$

4) On account of the relation

$$\sqrt{-g'}\, dS' = \sqrt{-g}\; dS.$$

5) Similarly

$$g^{ba} = g^{ab}, \quad \mathfrak{g}^{ba} = \mathfrak{g}^{ab}$$

this may be decomposed into two parts

$$\delta Q = \delta_1 Q + \delta_2 Q, \tag{42}$$

namely

$$\delta_1 Q = \Sigma(ab)\left\{\frac{\partial Q}{\partial g_{ab}} - \Sigma(e)\frac{\partial}{\partial x_e}\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,e}} + \Sigma(ef)\frac{\partial^2}{\partial x_e \partial x_f}\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,ef}}\right\}\delta g_{ab}. \tag{43}$$

$$\delta_2 Q = \Sigma(abe)\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,e}}\delta g_{ab}\right) + \Sigma(abef)\frac{\partial}{\partial x_f}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,ef}}\delta g_{ab,e}\right) -$$

$$- \Sigma(abef)\frac{\partial}{\partial x_e}\left\{\frac{\partial}{\partial x_f}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,ef}}\right)\delta g_{ab}\right\}. \tag{44}$$

The last equation shows that

$$\int \delta_2 Q\, dS = 0 \tag{45}$$

if the variations $\delta g_{ab}$ and their first derivatives vanish at the boundary of the domain of integration.

§ 35. Equations of the same form may also be found if $Q$ is expressed in one of the two other ways mentioned in § 33. If e.g. we work with the quantities $\mathfrak{g}^{ab}$ we shall find

$$(\delta Q) = (\delta_1 Q) + (\delta_2 Q),$$

where $(\delta_1 Q)$ and $(\delta_2 Q)$ are directly found from (43) and (44) by replacing $g_{ab}$, $g_{ab,e}$, $g_{ab,ef}$, $\delta g_{ab}$ and $\delta g_{ab,e}$ etc. by $\mathfrak{g}^{ab}$, $\mathfrak{g}^{ab,e}$, etc. If the variations chosen in the two cases correspond to each other we shall have of course

$$(\delta Q) = \delta Q.$$

Moreover we can show that the equalities

$$(\delta_1 Q) = \delta_1 Q, \quad (\delta_2 Q) = \delta_2 Q,$$

exist separately. [1])

---

[1]) Suppose that at the boundary of the domain of integration $\delta g_{ab} = 0$ and $\delta g_{ab,e} = 0$. Then we have also $\delta \mathfrak{g}^{ab} = 0$ and $\delta \mathfrak{g}^{ab,e} = 0$, so that

$$\int (\delta_2 Q)\, dS = 0, \quad \int \delta_2 Q\, dS = 0$$

and from

$$\int (\delta Q)\, dS = \int \delta Q\, dS$$

we infer

$$\int (\delta_1 Q)\, dS = \int \delta_1 Q\, dS.$$

As this must hold for every choice of the variations $\delta g_{ab}$ (by which choice the variations $\delta \mathfrak{g}^{ab}$ are determined too) we must have at each point of the field-figure

$$(\delta_1 Q) = \delta_1 Q$$

The decomposition of $\delta Q$ into two parts is therefore the same, whether we use $g_{ab}$, $g^{ab}$ or $\mathfrak{g}^{ab}$.

It is further of importance that when the system of coordinates is changed, not only $\delta Q dS$ is an invariant, but that this is also the case with $\delta_1 Q dS$ and $\delta_2 Q dS$ separately [2]).

We have therefore

$$\frac{\delta_1 Q'}{\sqrt{-g'}} = \frac{\delta_1 Q}{\sqrt{-g}} . \tag{46}$$

§ 36. For the calculation of $\delta_1 Q$ we shall suppose $Q$ to be expressed in the quantities $\mathfrak{g}^{ab}$ and their derivatives. Therefore (comp. (43))

$$\delta_1 Q = \Sigma\,(ab)\, M_{ab} \delta \mathfrak{g}^{ab} , \tag{47}$$

if we put

$$M_{ab} = \frac{\partial Q}{\partial \mathfrak{g}_{ab}} - \Sigma\,(e)\,\frac{\partial}{\partial x_e}\frac{\partial Q}{\partial \mathfrak{g}^{ab,e}} + \Sigma\,(ef)\,\frac{\partial^2}{\partial x_e \partial x_f}\frac{\partial Q}{\partial \mathfrak{g}^{ab,ef}} .$$

Now we can show that the quantities $M_{ab}$ are exactly the quantities $G_{ab}$ defined by (40). To this effect we may use the following considerations.

We know that

$$\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\mathfrak{g}^{ab}\right)$$

is a contravariant tensor of the second order. From this we can deduce that

$$\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\delta \mathfrak{g}^{ab}\right)$$

is also such a tensor.

---

[2]) This may be made clear by a reasoning similar to that used in the preceding note. We again suppose $\delta g_{ab}$ and $\delta g_{ab,e}$ to be zero at the boundary of the domain of integration. Then $\delta g'_{ab}$ and $\delta g'_{ab,e}$ vanish too at the boundary, so that

$$\int \delta_2 Q'\, dS' = 0, \quad \int \delta_2 Q\, dS = 0 .$$

From

$$\int \delta Q'\, dS' = \int \delta Q\, dS$$

we may therefore conclude that

$$\int \delta_1 Q'\, dS' = \int \delta_1 Q\, dS .$$

As this must hold for arbitrarily chosen variations $\delta g_{ab}$ we have the equation

$$\delta_1 Q'\, dS' = \delta_1 Q\, dS .$$

Writing for it $\epsilon^{ab}$ we find according to (46) and (47) that

$$\Sigma\,(ab)\; M_{ab}\epsilon^{ab}$$

is a scalar for every choice of $(\epsilon^{ab})$.

This involves that $(M_{ab})$ is a covariant tensor of the second order and as the same is true for $(G_{ab})$ we must prove the equation

$$M_{ab} = G_{ab}$$

only *for one special* choice of coordinates.

§ 37. Now this choice can be made in such a way that at the point $P$ of the field-figure $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, $g_{44} = +1$, $g_{ab} = 0$ for $a \neq b$ and that moreover all first derivatives $g_{ab,e}$ vanish. If then the values $g_{ab}$ at a point $Q$ near $P$ are developed in series of ascending powers of the differences of coordinates $x_a(Q) - x_a(P)$ the terms directly following the constant ones will be of the second order. It is with these terms that we are concerned in the calculation both of $M_{ab}$ and of $G_{ab}$ for the point $P$. As in the results the coefficients of these terms occur to the first power only, it is sufficient to show that each of the above mentioned terms separately contributes the same value to $M_{ab}$ and to $G_{ab}$.

From these considerations we may conclude that

$$\delta_1 Q = \Sigma\,(ab)\; G_{ab}\delta\mathfrak{g}^{ab}. \tag{48}$$

Expressions containing instead of $\delta\mathfrak{g}^{ab}$ either the variations $\delta g^{ab}$ or $\delta g_{ab}$ might be derived from this by using the relations between the different variations. Of these we shall only mention the formula

$$\delta g^{ab} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\delta\mathfrak{g}^{ab} - \frac{g^{ab}}{2\sqrt{-g}}\,\Sigma\,(cd)\; g_{cd}\delta\mathfrak{g}^{cd}. \tag{49}$$

§ 38. In connexion with what precedes we here insert a consideration the purpose of which will be evident later on. Let the infinitely small quantity $\xi$ be an arbitrarily chosen continuous function of the coordinates and let the variations $\delta\mathfrak{g}_{ab}$ be defined by the condition that at some point $P$ the quantities $g_{ab}$ have *after* the change the values which existed *before* the change at the point $Q$, to which $P$ is shifted when $x_h$ is diminished by $\xi$, while the three other coordinates are left constant. Then we have

$$\delta \mathfrak{g}_{ab} = -g_{ab,h}\xi$$

and similar formulae for the variations $\delta \mathfrak{g}^{ab}$.

If for $\delta_1 Q$ and $\delta_2 Q$ the expressions (48) and (44) are taken, the equation

$$\delta Q - \delta_2 Q = \delta_1 Q \tag{50}$$

is an identity for every choice of the variations.

It will likewise be so in the special case considered and we shall also come to an identity if in (50) the terms with the derivatives of $\xi$ are omitted while those with $\xi$ itself are preserved.

When this is done $\delta Q$ reduces to

$$-\frac{\partial Q}{\partial x_h}\xi$$

and, taking into consideration (44) and (48), we find after division by $\xi$

$$-\frac{\partial Q}{\partial x_h} + \Sigma(abe)\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,e}} g_{ab,h}\right) + \Sigma(abef)\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}} g_{ab,fh}\right) -$$
$$- \Sigma(abef)\frac{\partial}{\partial x_e}\left\{\frac{\partial}{dx_f}\left(\frac{\partial Q}{\partial g^{ab,ef}}\right) g_{ab,h}\right\} = -\Sigma(ab)\, G_{ab}\mathfrak{g}^{ab,h}. \tag{51}$$

In the second term of (44) we have interchanged here the indices $e$ and $f$.

If for shortness' sake we put, for $e \neq h$

$$\mathfrak{s}_h^e = \Sigma(ab)\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,e}} g_{ab,h} + \Sigma(abf)\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}} g_{ab,fh} -$$
$$- \Sigma(abf)\frac{\partial}{\partial x_f}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,ef}}\right) g_{ab,h} \tag{52}$$

and for $e = h$

$$\mathfrak{s}_h^h = -Q + \Sigma(ab)\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,h}} g_{ab,h} + \Sigma(abf)\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fh}} g_{ab,fh} -$$
$$- \Sigma(abf)\frac{\partial}{\partial x_f}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,hf}}\right) g_{ab,h}, \tag{53}$$

we may write

$$\Sigma (e) \frac{\partial \mathfrak{S}_h^e}{\partial x_e} = - \Sigma (ab) G_{ab} \mathfrak{g}^{ab,h}. \tag{54}$$

The set of quantities $\mathfrak{S}_h^e$ will be called the *complex* $\mathfrak{S}$ and the set of the four quantities which stand on the left hand side of (54) in the cases $h = 1, 2, 3, 4$, the *divergency* of the complex.[1] It will be denoted by div $\mathfrak{S}$ and each of the four quantities separately by $\mathrm{div}_h \mathfrak{S}$.

The equation therefore becomes

$$\mathrm{div}_h \mathfrak{S} = - \Sigma (ab) G_{ab} \mathfrak{g}^{ab,h}. \tag{55}$$

If we take other coordinates the right hand side of this equation is transformed according to a formula which can be found easily. Hence we can also write down the transformation formula for the left hand side. It is as follows

$$\mathrm{div}_h' \mathfrak{S}' = p \Sigma (m) p_{mh} \, \mathrm{div}_m \mathfrak{S} - Q \Sigma (a) p_{ah} \frac{\partial p}{\partial x_a} + 2p \Sigma (abc) p_{ah,c} \mathfrak{g}^{bc} G_{ab}. \tag{56}$$

§ 39. We shall now consider a second complex $\mathfrak{S}_0$, the components of which are defined by

$$\mathfrak{S}_{0h}^e = - G \Sigma (a) \mathfrak{g}^{ae} g_{ah} + 2 \Sigma (a) \mathfrak{g}^{ae} G_{ah}. \tag{57}$$

Taking also the divergency of this complex we find that the difference

$$\mathrm{div}_h' \mathfrak{S}_0' - p \Sigma (m) p_{mh} \, \mathrm{div}_m \mathfrak{S}_0$$

has just the value which we can deduce from (56) for the corresponding difference

$$\mathrm{div}_h' \mathfrak{S}' - p \Sigma (m) p_{mh} \, \mathrm{div}_m \mathfrak{S}.$$

It is thus seen that

$$\mathrm{div}_h' \mathfrak{S}' - \mathrm{div}_h' \mathfrak{S}_0' = p \Sigma (m) p_{mh} (\mathrm{div}_m \mathfrak{S} - \mathrm{div}_m \mathfrak{S}_0)$$

and that we have therefore

$$\mathrm{div}\, \mathfrak{S} = \mathrm{div}\, \mathfrak{S}_0 \tag{58}$$

for all systems of coordinates as soon as this is the case for one system.

---

[1]) Einstein uses the word "divergency" in a somewhat different sense. It seemed desirable however to have a name for the left hand side of (54) and it was difficult to find a better one.

Now a direct calculation starting from (52), (53) and (57) teaches us that the terms with the highest derivatives of the quantities $g_{ab}$, (viz. those of the third order) are the same in $\mathrm{div}_h\, \mathfrak{S}$ and $\mathrm{div}_h\, \mathfrak{S}_0$. Further it is evident that in the system of coordinates introduced in § 37 these terms with the third derivatives are the only ones. This proves the general validity of equation (58). It is especially to be noticed that if $\mathfrak{S}$ and $\mathfrak{S}_0$ are determined by (52), (53) and (57) and if the function defined in § 32 is taken for $G$, the relation is an identity.

§ 40. We shall now derive the differential equations for the gravitation field, first for the case of an electromagnetic system [1]). For the part of the principal function belonging to it we write

$$\int \mathrm{L}\, dS\,,$$

where L is defined by (35), l.c. From L we can derive the stresses, the momenta, the energy-current and the energy of the electromagnetic system; for this purpose we must use the equations (45) and (46), l.c. or in EINSTEIN's notation, which we shall follow here [2]),

$$\mathfrak{T}_c^c = -\mathrm{L} + \sum_{a \neq c} (a) \psi^*_{ac} \psi_{a'c'} \tag{59}$$

and for $b \neq c$

$$\mathfrak{T}_c^b = \sum_{a \neq c} (a) \psi^*_{ab} \psi_{a'c'}. \tag{60}$$

The set of quantities $\mathfrak{T}_c^b$ might be called the stress-energy-complex (comp. § 38). As for a change of the system of coordinates the transformation formulae for $\mathfrak{T}$ are similar to those by which tensors are defined, we can also speak of the stress-energy-*tensor*.

---

[1]) This has also been done by DE DONDER, Versl. K. Akad. Wet. Amsterdam, **25** 153, 1916 .

[2]) The notations $\psi_{ab}$, $\overline{\psi_{ab}}$ and $\psi^*_{ab}$ (see (27), (29) and § 11, l.c.), will however be preserved though they do not correspond to those of EINSTEIN. As to formulae (59) and (60) it is to be understood that if $p$ and $q$ are two of the numbers 1, 2, 3, 4, $p'$ and $q'$ denote the other two in such a way that the order $p\ q\ p'\ q'$ is obtained from 1 2 3 4 by an even number of permutations of two ciphers.

If $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ are replaced by $x$, $y$, $z$, $t$ and if for the stresses the usual notations $X_x$, $X_y$, etc., are used (so that e.g. for a surface element $d\sigma$ perpendicular to the axis of $x$, $X_x$ is the first component of the force per unit of surface which the part of the system situated on the positive side of $d\sigma$ exerts on the opposite part) then $\mathfrak{T}_1^1 = X_x$, $\mathfrak{T}_1^2 = X_y$, etc. Further $-\mathfrak{T}_1^4, -\mathfrak{T}_2^4, -\mathfrak{T}_3^4$ are the components of the momentum per unit of volume and $\mathfrak{T}_4^1$, $\mathfrak{T}_4^2$, $\mathfrak{T}_4^3$ the components of the energy current. Finally $\mathfrak{T}_4^4$ is the energy per unit of volume.

We have namely

$$\frac{1}{\sqrt{-g'}}\,\mathfrak{T}_c'^b = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\Sigma\,(kl) p_{kc}\pi_{lb}\mathfrak{T}_k^l.$$

§ 41. The equations for the gravitation field are now obtained (comp. §§ 13 and 14, l.c.) from the condition that

$$\delta_\psi \int \mathrm{L}\, dS + \frac{1}{2\varkappa}\,\delta \int Q\, dS = 0 \tag{61}$$

for all variations $\delta g_{ab}$ which vanish at the boundary of the field of integration together with their first derivatives. The index $\psi$ in the first term indicates that in the variation of L the quantities $\psi_{ab}$ must be kept constant.

If we suppose L to be expressed in the quantities $g^{ab}$ and if (42), (45) and (48) are taken into consideration, we find from (61) that at each point of the field-figure

$$\Sigma\,(ab)\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial g^{ab}}\right)_\psi \delta g^{ab} + \frac{1}{2\varkappa}\,\Sigma\,(ab) G_{ab}\delta \mathfrak{g}^{ab} = 0. \tag{62}$$

If now in the first term we put

$$\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial g^{ab}}\right)_\psi = \tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\, T_{ab}, \tag{63}$$

and if for $\delta g^{ab}$ the value (49) is substituted, this term becomes

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\,(ab)\, T_{ab}\delta\mathfrak{g}^{ab} - \tfrac{1}{4}\Sigma\,(abcd) g^{ab} g_{cd} T_{ab}\delta\mathfrak{g}^{cd},$$

or if in the latter summation $a$, $b$ is interchanged with $c$, $d$ and if the quantity

$$T = \Sigma\,(cd) g^{cd} T_{cd}$$

is introduced,

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(ab)(T_{ab} - \tfrac{1}{2}\, g_{ab}\, T)\,\delta\mathfrak{g}^{ab}.$$

Finally, putting equal to zero the coefficient of each $\delta\mathfrak{g}^{ab}$ we find from (62) the differential equation required

$$G_{ab} = -\varkappa(T_{ab} - \tfrac{1}{2}\, g_{ab} T). \tag{65}$$

This is of the same form as EINSTEIN's field equations, but to see that the formulae really correspond to each other it remains to show that the quantities $T_{ab}$ and $\mathfrak{T}_c^b$ defined by (63), (59) and (60) are connected by EINSTEIN's formulae

$$\mathfrak{T}_c^b = \sqrt{-g}\, \Sigma\, (a) g^{ab}\, T_{ac}. \tag{66}$$

We must have therefore

$$2\, \Sigma\, (a) g^{ac} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial g^{ac}}\right)_{\psi} = -\mathrm{L} + \underset{a \neq c}{\Sigma}\, (a) \psi^{*}_{ac} \psi_{a'c'} \tag{67}$$

and for $b \neq c$

$$2\, \Sigma\, (a) g^{ab} \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial g^{ac}}\right)_{\psi} = \underset{a \neq c}{\Sigma}\, (a) \psi^{*}_{ab} \psi_{a'c'}. \tag{68}$$

§ 42. This can be tested in the following way. The function L (comp. § 9, l.c.) is a homogeneous quadratic function of the $\psi_{ab}$'s and when differentiated with respect to these variables it gives the quantities $\overline{\psi}_{ab}$. It may therefore also be regarded as a homogeneous quadratic function of the $\overline{\psi}_{ab}$. From (35), (29) and (32) [1], l.c. we find therefore

$$\mathrm{L} = \tfrac{1}{8} \sqrt{-g}\, \Sigma\, (pqrs) (g^{pr} g^{qs} - g^{qr} g^{ps}) \overline{\psi}_{pq} \overline{\psi}_{rs}. \tag{69}$$

Now we can also differentiate with respect to the $g^{ab}$'s, while not the $\psi_{ab}$'s but the quantities $\overline{\psi}_{ab}$ are kept constant, and we have e.g.

$$\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial g^{ac}}\right)_{\psi} = -\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial g^{ac}}\right)_{\overline{\psi}}.$$

According to (69) one part of the latter differential coefficient is obtained by differentiating the factor $\sqrt{-g}$ only and the other part by keeping this factor constant.

For the calculation of the first of these parts we can use the relation

$$\frac{\partial \log(\sqrt{-g})}{\partial g^{ac}} = -\tfrac{1}{2}\, g_{ac} \tag{70}$$

and for the second part we find

$$\tfrac{1}{2} \sqrt{-g}\, \Sigma\, (pq) g^{pq} \overline{\psi}_{ap} \overline{\psi}_{cq}.$$

[1]) The quantities $\gamma_{ab}$ in that equation are the same as those which are now denoted by $g^{ab}$.

If (32) l.c. is used (67) and (68) finally become

$$\Sigma\,(q)\psi_{cq}\overline{\psi}_{cq} + \sum_{a \neq c}(a)\psi^{*}_{ac}\psi_{a'c'} = 2\mathrm{L}\,,$$

$$\Sigma\,(q)\overline{\psi}_{cq}\psi_{bq} + \sum_{a \neq c}(a)\psi^{*}_{ab}\psi_{a'c'} = 0.$$

These equations are really fulfilled. This is evident from: $\psi_{aa} = 0$, $\overline{\psi}_{aa} = 0$, $\psi_{ba} = -\psi_{ab}$ and $\overline{\psi}_{ba} = -\overline{\psi}_{ab}$; besides, the meaning of $\psi^{*}_{ab}$ (§ 11, l.c.) and equation (35), l.c. must be taken into consideration.

§ 43. In nearly the same way we can treat the gravitation field of a system of incoherent material points; here the quantities $w_a$ and $u_a$ (§§ 4 and 5, l.c.) play a similar part as $\psi_{ab}$ and $\overline{\psi}_{ab}$ in what precedes. To consider a more general case we can suppose "molecular forces" to act between the material points (which we assume to be equal to each other) in such a way that in ordinary mechanics we should ascribe to the system a potential energy depending on the density only. Conforming to this we shall add to the Lagrangian function L (§ 4, l.c.) a term which is some function of the density of the matter at the point $P$ of the field-figure, such as that density is when by a transformation the matter at that point has been brought to rest. This can also be expressed as follows. Let $d\sigma$ be an infinitely small three-dimensional extension expressed in natural units, which at the point $P$ is perpendicular to the world-line passing through that point, and $\overline{\rho}d\sigma$ the number of points where $d\sigma$ intersects world-lines. The contribution of an element of the field-figure to the principal function will then be found by multiplying the magnitude of that element expressed in natural units by a function of $\overline{\rho}$. Further calculation teaches us that the term to be added to L must have the form

$$\sqrt{-g}\,\varphi\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) \tag{71}$$

where $P$ is given by (15), l.c. As the Lagrangian function defined by (11), l.c. equally falls under this form and also the sum of this function and the new term, the expression (71) may be regarded as the *total* function L. The function $\varphi$ may be left indeterminate. If now with this function the calculations of

§§ 5 and 6, l.c. are repeated, we find the components of the stress-energy-tensor of the matter.

The equations for the gravitation field again take the form (65). $T_{ab}$ is defined by an equation of the form (63), where on the left hand side we must differentiate while the $w_a$'s are kept constant. Relation (66) can again be verified without difficulty.

We shall not, however, dwell upon this, as the following considerations are more general and apply e.g. also to systems of material points that are anisotropic as regards the configuration and the molecular actions.

§ 44. At any point $P$ of the field-figure the Lagrangian function L will evidently be determined by the course and the mutual situation of the world-lines of the material points in the neighbourhood of $P$. This leads to the assumption that for constant $g_{ab}$'s the variation $\delta$L is a homogeneous linear function of the virtual displacements $\delta x_a$ of the material points and of the differential coefficients

$$\frac{\partial \delta x_a}{\partial x_b},$$

these last quantities evidently determining the deformation of an infinitesimal part of the figure formed by the world-lines [1]).

The calculation becomes most simple if we put

$$\mathrm{L} = \sqrt{-g}H \tag{72}$$

and for constant $g_{ab}$'s

$$\delta H = \Sigma\,(a) U_a \delta x_a + \Sigma\,(ab) V_a^b \frac{\partial \delta x_a}{\partial x_b}\,. \tag{73}$$

Considerations corresponding exactly to those mentioned in §§ 4—6, l.c., now lead to the equations of motion and to the following expressions for the components of the stress-energy-tensor

$$\mathfrak{T}_c^c = -\mathrm{L} - \sqrt{-g} V_c^c \tag{74}$$

and for $b \neq c$

$$\mathfrak{T}_c^b = -\sqrt{-g} V_c^b. \tag{75}$$

[1]) In the cases considered in § 43, $\delta L$ can indeed be represented in this way.

The differential equations again take the form (65) if the quantities $T_{ab}$ are defined by

$$\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial g^{ab}}\right)_x = \tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\,T_{ab};$$

in the differentiation on the left hand side the coordinates of the material points are kept constant. To show that $T_{ab}$ and $\mathfrak{T}_c^b$ satisfy equation (66) we must now show that

$$-\mathrm{L} - \sqrt{-g}\,V_c^c = 2\,\Sigma\,(a) g^{ac}\left(\frac{\partial L}{\partial g^{ac}}\right)_x$$

and for $b \neq c$

$$-\sqrt{-g}\,V_c^b = 2\,\Sigma\,(a) g^{ab}\left(\frac{\partial L}{\partial g^{ac}}\right)_x.$$

If here the value (72) is substituted for L and if (70) is taken into account, these equations say that for all values of $b$ and $c$ we must have

$$2\,\Sigma\,(a) g^{ab}\left(\frac{\partial H}{\partial g^{ac}}\right)_x + V_c^b = 0. \tag{76}$$

Now this relation immediately follows from a condition, to which L must be subjected at any rate, viz. that L$dS$ is a scalar quantity. This involves that in a definite case we must find for $H$ always the same value whatever be the choice of coordinates.

§ 45. Let us suppose that instead of only one coordinate $x_c$ a new one $x'_c$ has been introduced, which differs infinitely little from $x_c$, with the restriction that if

$$x'_c = x_c + \xi_c$$

the term $\xi_c$ depends on the coordinate $x_b$ only and is zero at the point in question of the field-figure. The quantities $g^{ab}$ then take other values and in the new system of coordinates the world-lines of the material points will have a slightly changed course.

By each of these circumstances separately $H$ would change, but all together must leave it unaltered. As to the first change we remark that, according to the transformation formula for $g^{ab}$, the variation $\delta g^{ab}$ vanishes when the two indices are different from $c$, while

$$\delta g^{cc} = 2 g^{cb}\,\frac{\partial \xi_c}{\partial x_b}$$

and for $a \neq c$

$$\delta g^{ac} = \delta g^{ca} = g^{ab} \frac{\partial \xi_c}{\partial x_b}.$$

The change of $H$ due to these variations is

$$2 \frac{\partial \xi_c}{\partial x_b} \Sigma (a) g^{ab} \left( \frac{\partial H}{\partial g^{ac}} \right)_x.$$

Further, in the new system of coordinates the figure formed by the world-lines differs from that figure in the old system by the variation $\delta x_c = \xi_c$ which is a function of $x_b$ only. Therefore according to (73) the second variation of $H$ is

$$V_c^b \frac{\partial \xi_c}{\partial x_b}.$$

By putting equal to zero the sum of this expression and the preceding one we obtain (76).

§ 46. We have thus deduced for some cases the equations of the gravitation from the variation theorem. Probably this can also be done for thermodynamic systems, if the Lagrangian function is properly chosen in connexion with the thermodynamic functions, entropy and free energy. But as soon as we are concerned with irreversible phenomena, when e.g. the energy-current consists in a conduction of heat, the variation principle cannot be applied. We shall then be obliged to take EINSTEIN's field-equations as our point of departure, unless, considering the motions of the individual atoms or molecules, we succeed in treating these by means of the generalized principle of HAMILTON.

§ 47. Finally we shall consider the stresses, the energy etc. which belong to the gravitation field itself. The results will be the same for all the systems treated above, but we shall confine ourselves to the case of §§ 44 and 45. We suppose certain external forces $K_a$ to act on the material points, though we shall see that strictly speaking this is not allowed.

For any displacements $\delta x_a$ of the matter and variations of the gravitation field we first have the equation which summarizes what we found above

$$\delta \mathrm{L} + \frac{1}{2\varkappa}\,\delta Q + \Sigma\,(a) K_a \delta x_a = \sqrt{-g}\,\Sigma\,(a) U_a \delta x_a +$$

$$+ \Sigma\,(ab)\,\frac{\partial}{\partial x_b}\,(\sqrt{-g}\,V_a^b \delta x_a) - \Sigma\,(ab)\,\frac{\partial}{\partial x_b}\,(\sqrt{-g}\,V_a^b)\delta x_a +$$

$$+ \Sigma\,(ab)\left(\frac{\partial L}{\partial g^{ab}}\right)_x \delta g^{ab} + \frac{1}{2\varkappa}\,\delta_1 Q + \frac{1}{2\varkappa}\,\delta_2 Q + \Sigma\,(a) K_a \delta x_a .$$

In virtue of the equations of motion of the matter, the terms with $\delta x_a$ cancel each other on the right hand side and similarly, on account of the equations of the gravitation field, the terms with $\delta g^{ab}$ and $\delta_1 Q$. Thus we can write [1])

$$\Sigma(a) K_a \delta x_a = -\,\delta L + \Sigma(ae)\,\frac{\partial}{\partial x_e}\,(\sqrt{-g}\,V_a^e \delta x_a) - \frac{1}{2\varkappa}\,(\delta Q - \delta_2 Q). \quad (77)$$

Let us now suppose that only the coordinate $x_h$ undergoes an infinitely small change, which has the same value at all points of the field-figure. Let at the same time the system of values $g_{ab}$ be shifted everywhere in the direction of $x_h$ over the distance $\delta x_h$. The left hand side of the equation then becomes $K_h \delta x_h$ and we have on the right hand side

$$\delta \mathrm{L} = -\,\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x_h}\,\delta x_h , \quad \delta Q = -\,\frac{\partial Q}{\partial x_h}\,\delta x_h .$$

After dividing the equation by $\delta x_h$ we may thus, according to (74) and (75), write

$$-\,\Sigma\,(e)\,\frac{\partial \mathfrak{T}_h^e}{\partial x_e} = -\,\mathrm{div}_h\,\mathfrak{T}.$$

By the same division we obtain from $\delta Q - \delta_2 Q$ the expression occurring on the left hand side of (51), which we have represented by

$$\Sigma\,(e)\,\frac{\partial \mathfrak{S}_h^e}{\partial x_e} = \mathrm{div}_h \mathfrak{S},$$

---

[1]) To make the notation agree with that of § 38 $b$ has been replaced by $e$.

where the complex $\mathfrak{s}$ is defined by (52) and (53). If therefore we introduce a new complex $\mathfrak{t}$ which differs from $\mathfrak{s}$ only by the factor $1/2\varkappa$, so that

$$\mathfrak{t}_h^e = \frac{1}{2\varkappa}\mathfrak{s}_h^e, \tag{78}$$

we find

$$K_h = -\operatorname{div}_h \mathfrak{T} - \operatorname{div}_h \mathfrak{t}. \tag{79}$$

The form of this equation leads us to consider $\mathfrak{t}$ as the stress-energy-complex oi the gravitation field, just as $\mathfrak{T}$ is the stress-energy-tensor for the matter. We need not further explain that for the case $K_h = 0$ the four equations contained in (79) express the conservation of momentum and of energy for the total system, matter and gravitation field taken together.

§ 48. To learn something about the nature of the stress-energy-complex $\mathfrak{t}$ we shall consider the stationary gravitation field caused by a quantity of matter without motion and distributed symmetrically around a point $O$. In this problem it is convenient to introduce for the three space coordinates $x_1, x_2, x_3$, ($x_4$ will represent the time) "polar" coordinates. By $x_3$ we shall therefore denote a quantity $r$ which is a measure for the "distance" to the centre. As to $x_1$ and $x_2$, we shall put $x_1 = \cos\vartheta$, $x_2 = \varphi$, after first having introduced polar coordinates $\vartheta$, $\varphi$ (in such a way that the rectangular coordinates are $r\cos\vartheta$, $r\sin\vartheta\cos\varphi$, $r\sin\vartheta\sin\varphi$). It can be proved that, because of the symmetry about the centre, $g_{ab} = 0$ for $a \neq b$, while we may put for the quantities $g_{aa}$

$$g_{11} = -\frac{u}{1-x_1^2}, \quad g_{22} = -u(1-x_1^2), \quad g_{33} = -v, \quad g_{44} = w \tag{80}$$

where $u$, $v$, $w$ are certain functions of $r$. Differentiations of these functions will be represented by accents. We now find that of the complex $\mathfrak{t}$ only the components $\mathfrak{t}_1^1$, $\mathfrak{t}_3^3$ and $\mathfrak{t}_4^4$ are different from zero. The expressions found for them may be further simplified by properly choosing $r$. If the distance to the centre $O$ is measured by the time the light requires to be propagated from $O$ to the point in question, we have $w = v$. One then finds

$$\left.\begin{aligned}
t_1^1 &= \frac{1}{2\varkappa}\left(-\frac{u'^2}{2u} + 2u'' - \frac{uv'^2}{v^2} + \frac{uv''}{v}\right),\\
t_3^3 &= \frac{1}{2\varkappa}\left(-2v + \frac{u'^2}{2u} + \frac{u'v'}{v}\right),\\
t_4^4 &= \frac{1}{2\varkappa}\left(-2v - \frac{u'^2}{2u} + 2u'' + \frac{uv''}{v}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{81}$$

§ 49. We must assume that in the gravitation fields really existing the quantities $g_{ab}$ have values differing very little from those which belong to a field without gravitation. In this latter we should have

$$u = r^2, \quad v = w = 1,$$

and thus we put now

$$u = r^2(1 + \mu), \quad v = w = 1 + \nu,$$

where the quantities $\mu$ and $\nu$ which depend on $r$ are infinitely small, say of the first order, and their derivatives too. Neglecting quantities of the second order we find from (81)

$$t_1^1 = \frac{1}{2\varkappa}(2 + 2\mu + 6r\mu' + 2r^2\mu'' + r^2\nu''),$$

$$t_3^3 = \frac{1}{\varkappa}(\mu - \nu + r\mu' + r\nu'),$$

$$t_4^4 = \frac{1}{2\varkappa}(2\mu - 2\nu + 6r\mu' + 2r^2\mu'' + r^2\nu'').$$

For our degree of approximation we may suppose that of the quantities $T_{ab}$ only $T_{44}$ differs from 0. If we put

$$T_{44} = \rho, \tag{82}$$

a quantity which depends on $r$ and which we shall assume to be zero outside a certain sphere, we find from the field equations

$$\mu = \varkappa\left\{-\frac{2}{r}\int_0^r \frac{dr}{r}\int_0^r r^2\rho dr - \frac{1}{r}\int_0^r r^2\rho dr + \int_\infty^r r\rho dr\right\},$$

$$\nu = \varkappa\left\{-\frac{1}{r}\int_0^r r^2\rho dr + \int_\infty^r r\rho dr\right\}.$$

We thus obtain

$$\mathfrak{t}_1^1 = \frac{1}{\varkappa} + \int\limits_{\infty}^{r} r\rho dr - \frac{1}{r}\int\limits_{0}^{r} r^2\rho dr - \tfrac{1}{2} r^2\rho\,, \tag{83}$$

$$\mathfrak{t}_3^3 = 0, \quad \mathfrak{t}_4^4 = -\tfrac{1}{2} r^2\rho\,. \tag{84}$$

§ 50. If first we leave aside the first term of $\mathfrak{t}_1^1$, which would also exist if no attracting matter were present, it is remarkable that the gravitation constant $\varkappa$ does not occur in the stress $\mathfrak{t}_1^1$, nor in the energy $\mathfrak{t}_4^4$; the same would have been found if we had used other coordinates. This constitutes an important difference between EINSTEIN's theory and other theories in which attracting or repulsing forces are reduced to "field actions". The pulsating spheres of BJERKNES e.g. are subjected to forces which, for a given motion, are proportional to the density of the fluid in which they are imbedded; and the changes of pressure and the energy in that fluid are likewise proportional to this density. In this case we shall therefore ascribe to the stress-energy-complex values proportional to the intensity of the actions which we want to explain. In EINSTEIN's theory such a proportionality does not exist. The value of $\mathfrak{t}_4^4$ is of the same order of magnitude as $\mathfrak{T}_4^4$ in the matter. To our degree of approximation we find namely from (82) $\mathfrak{T}_4^4 = r^2\rho$.

§ 51. If we had not worked with polar coordinates but with rectangular coordinates we should have had to put for the field without gravitation $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, $g_{44} = 1$, $g_{ab} = 0$ for $a \neq b$. Then we should have found zero for all the components of the complex. In the system of coordinates used above we found for the field without gravitation $\mathfrak{t}_1^1 = 1/\varkappa$; this is due to the complex $\mathfrak{t}$ being no tensor. If it were, the quantities $\mathfrak{t}_a^b$ would be zero in every system of coordinates if they had that value in one system.

It is also remarkable that in real cases the first term in (83) can be much larger than the following ones. If we consider e.g. a point $P$ outside the attracting sphere, we can prove that the ratio of the first term to the third is of the same order as the ratio of the square of the velocity of light to the square of the velocity with which a material point can describe a circular orbit passing through $P$.

The following must also be noticed. In the system of polar coordinates used above there will exist in the field without gravitation the stress $\mathfrak{t}_1^1 = 1/\varkappa$. If a stress of this magnitude were produced by means of actions which give rise to a stress-energy-*tensor,* the passage to rectangular coordinates would give us a stress which becomes infinite at the point $O$. In those coordinates we should namely have

$$\mathfrak{t}_1'^1 = \frac{\sin^2\vartheta}{r^2}\,\frac{1}{\varkappa}.$$

§ 52. Evidently it would be more satisfactory if we could ascribe a stress-energy-*tensor* to the gravitation field. Now this can really be done. Indeed, the quantities $\mathfrak{s}_{0h}^e$ determined by (57) form a tensor and according to (58), (79) may be replaced by

$$K_h = -\operatorname{div}_h \mathfrak{T} - \operatorname{div}_h \mathfrak{t}_0, \tag{85}$$

if $\mathfrak{t}_0$ is defined by a relation similar to (78), viz.

$$\mathfrak{t}_{0h}^e = \frac{1}{2\varkappa}\mathfrak{s}_{0h}^e. \tag{86}$$

Equation (85) shows that, just as well as $\mathfrak{t}_h^e$, we may consider the quantities $\mathfrak{t}_{0h}^e$ as the stresses etc. in the gravitation field. This way of interpretation is very simple. With a view to (41) we can namely derive from the equations for the gravitation field (65)

$$G = \varkappa T$$

and

$$T_{ab} = -\frac{1}{\varkappa}(G_{ab} - \tfrac{1}{2}\, g_{ab}G).$$

Further we find from (66)

$$\mathfrak{T}_h^e = \frac{1}{2\varkappa} G\,\Sigma\,(a)\mathfrak{g}^{ae}g_{ah} - \frac{1}{\varkappa}\Sigma\,(a)\mathfrak{g}^{ae}G_{ah}$$

and from (57) and (86)

$$\mathfrak{t}_{0h}^e = -\mathfrak{T}_h^e. \tag{87}$$

At every point of the field-figure the components of the stress-energy-tensor of the gravitation field would therefore be equal to the corresponding quantities for the matter or the electro-magnetic system with the opposite sign. It is obvious that by this the condition of the conservation of momentum and energy for the *whole* system would be immediately fulfilled. It was in fact this circumstance that made me think of the tensor $\mathfrak{t}_0 = -\mathfrak{T}$. The way in which $\mathfrak{s}_0$ was introduced in §§ 38 and 39 has only been chosen in order to lay stress on (58) being an identity, so that equation (85) is but another form of (79).

At first sight the relations (87) and the conception to which they have led, may look somewhat startling. According to it we should have to imagine that behind the directly observable world with its stresses, energy etc. there is hidden the gravitation field with stresses, energy etc. that are everywhere equal and opposite to the former; evidently this is in agreement with the interchange of momentum and energy which accompanies the action of gravitation. On the way of a lightbeam e.g. there would be everywhere in the gravitation field an energy current equal and opposite to the one existing in the beam. If we remember that this hidden energy-current can be fully described mathematically by the quantities $g_{ab}$ and that only the interchange just mentioned makes it perceptible to us, this mode of viewing the phenomena does not seem unacceptable. At all events we are forcibly led to it if we want to preserve the advantage of a stress-energy-*tensor* also for the gravitation field. It can namely be shown that a tensor which is transformed in the same way as the tensor $\mathfrak{t}_0$ defined by (57) and (86) and which in every system of coordinates has the same divergency as the latter, must coincide with $\mathfrak{t}_0$.

Finally we may remark that (78), (86), (58), (87) give

$$\operatorname{div} \mathfrak{t} = \operatorname{div} \mathfrak{t}_0 = -\operatorname{div} \mathfrak{T},$$

so that we have, both from (79) and from (85), $K_h = 0$.

The question is this, that, so long as the gravitation field is considered as given, we may introduce "external" forces, but that in the equations for the gravitations field itself we must also take into consideration the stress-energy-tensor of the system by which those forces are exerted.

IV [1]).

§ 53. The expressions for the stress-energy-components of the gravitation field found in the preceding paper call for some further remarks. If by $\delta_h^e$ we denote a quantity having the value 1 for $e = h$ and being 0 for $e \neq h$, those expressions can be written in the form (comp. equations (52) and (78))

$$\mathfrak{t}_h^e = \frac{1}{2\varkappa}\left\{-\delta_h^e Q + \Sigma\,(ab)\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,e}}\,g_{ab,h} + \Sigma\,(abf)\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}\,g_{ab,fh} - \right.$$
$$\left. -\Sigma\,(abf)\frac{\partial}{\partial x_f}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,ef}}\right)g_{ab,h}\right\} \qquad (88)$$

They contain the first and second derivatives of the quantities $g_{ab}$. EINSTEIN on the contrary has given values for the stress-energy-components which contain the first derivatives only and which therefore are in many respects much more fit for application.

It will now be shown we can also find formulae without second derivatives, if we start from (88).

§ 54. For this purpose we shall consider the complex $\mathfrak{u}$ defined by

$$\mathfrak{u}_h^e = \frac{1}{2\varkappa}\left\{\delta_h^e\, Q - \Sigma\,(abf)\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}\,g_{ab,f}\right)\right\} \qquad (89)$$

and we shall seek its divergency.

We have

$$(\operatorname{div}\mathfrak{u})_h - \Sigma\,(e)\frac{\partial \mathfrak{u}_h^e}{\partial x_e} = \frac{1}{2\varkappa}\left\{\frac{\partial Q}{\partial x_h} - \Sigma\,(abfe)\frac{\partial^2}{\partial x_e \partial x_h}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}\,g_{ab,f}\right)\right\}$$

or

$$(\operatorname{div}\mathfrak{u})_h = \frac{1}{2\varkappa}\frac{\partial R}{\partial x_h} \qquad (90)$$

if we put

$$R = Q - \Sigma\,(abfe)\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}\,g_{ab,f}\right). \qquad (91)$$

Now $Q = \sqrt{-g}G$ can be devided into two parts, the first of which $Q_1$ contains differential coefficients of the quantities $g_{ab}$ of the first order only, while the second $Q_2$ is a homogeneous

[1]) Versl. Akad. Amsterdam, **25**, 1380. Proc. Acad. Amsterdam, **20**, 20, 1917.

linear function of the second derivatives of those quantities. This latter involves that, if we replace (91) by

$$R = Q_1 + Q_2 - \Sigma\,(abfe)\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}\,g_{ab,fe}\right) - \Sigma\,(abfe)\,\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}\right)g_{ab,f},$$

the second and the third term annul each other. Thus

$$R = Q_1 - \Sigma\,(abfe)\,\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}\right)g_{ab,f}\,. \qquad (92)$$

If now we define a complex $\mathfrak{v}$ by the equation

$$\mathfrak{v}_h^e = -\frac{1}{2\varkappa}\,\delta_h^e R\,, \qquad (93)$$

we have

$$(\mathrm{div}\,\mathfrak{v})_h = -\frac{1}{2\varkappa}\,\frac{\partial R}{\partial x_h}\,. \qquad (94)$$

If finally we put

$$\mathfrak{t}' = \mathfrak{t} + \mathfrak{u} + \mathfrak{v},$$

we infer from (90) and (94)

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{t}' = \mathrm{div}\,\mathfrak{t} \qquad (95)$$

and from (88), (89), (93) and (92)

$$\mathfrak{t}'^h_h = \frac{1}{2\varkappa}\Big\{-Q_1 + \Sigma\,(ab)\,\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,h}}\,g_{ab,h} - \Sigma\,(abf)\,\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fh}}\right)g_{ab,f} -$$
$$- \Sigma\,(abf)\,\frac{\partial}{\partial x_f}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,hf}}\right)g_{ab,h} + \Sigma\,(abfe)\,\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}\right)g_{ab,f}\Big\} \qquad (96)$$

and for $e \neq h$

$$\mathfrak{t}'^e_h = \frac{1}{2\varkappa}\Big\{\Sigma\,(ab)\,\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,e}}\,g_{ab,h} - \Sigma\,(abf)\,\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}\right)g_{ab,f} -$$
$$- \Sigma\,(abf)\,\frac{\partial}{\partial x_f}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,ef}}\right)g_{ab,h}\Big\}\,. \qquad (97)$$

Formula (95) shows that the quantities $\mathfrak{t}'^e_h$ can be taken just as well as the expressions (88) for the stress-energy-components and we see from (96) and (97) that these new expressions contain only the first derivatives of the coefficients $g_{ab}$; they are homogeneous quadratic functions of these differential coefficients.

This becomes clear when we remember that $Q_1$ is a function of this kind and that only $Q_1$ contributes something to the second term of (96) and the first of (97); further that the derivatives of $Q$ occuring in the following terms contain only the quanties $g_{ab}$ and not their derivatives.

§ 55. EINSTEIN's stress-energy-components have a form widely different from that of the above mentioned ones. They are

$$\mathfrak{t}^e_{(E)h} = \frac{1}{2\varkappa}\,\delta^e_h\,\Sigma\,(abcf) g^{ab}\Gamma^f_{ac}\Gamma^c_{bf} - \frac{1}{\varkappa}\,\Sigma\,(abc) g^{ab}\Gamma^e_{ac}\Gamma^c_{bh},$$

where for the sake of simplicity it has been assumed that $\sqrt{-g} = 1$. Further we have

$$\Gamma^c_{ab} = -\begin{Bmatrix} ab \\ c \end{Bmatrix} = -\,\Sigma\,(e) g^{ce}\begin{bmatrix} ab \\ e \end{bmatrix}.$$

If now our formulae (96) and (97) are likewise simplified by the assumption $\sqrt{-g} = 1$ (so that $Q$ becomes equal to $G$), we may expect that $\mathfrak{t}'$ will become identical with $\mathfrak{t}_{(E)}$. This is really so in the case $g_{ab} = 0$ for $a \neq b$; by which it seems very probable that the agreement will exist in general.

In the preceding paper it was shown already that the stress-energy-components $\mathfrak{t}^e_h$ do not form a "tensor", but what was called a "complex". The same may be said of the quantities $\mathfrak{t}'^e_h$ defined by (96) and (97) and of the expressions given by EINSTEIN. If we want a stress-energy-*tensor*, there are only left the quantities $\mathfrak{t}^e_{0h}$ defined by (86) and (57), the values of which are always equal and opposite to the corresponding stress-energy-components $\mathfrak{T}^e_h$ for the matter or the electromagnetic field.

It must be noticed that the four equations

$$\Sigma\,(e)\,\frac{\partial}{\partial x_e}\,(\mathfrak{T}^e_h + \mathfrak{T}^e_{(g)h}) = 0$$

always express the same relations, whether we choose $\mathfrak{t}^e_{0h}$, $\mathfrak{t}^e_h$, $\mathfrak{t}'^e_h$ or $\mathfrak{t}^e_{(E)h}$ as stress-energy-components $\mathfrak{T}^e_{(g)h}$ of the gravitation field. If however in a definite case we want to use the equations in order to calculate how the momentum and the energy of the matter and the electromagnetic field change by the gravitational actions, it is best to use $\mathfrak{t}'^e_h$ or $\mathfrak{t}^e_{(E)h}$, just because these quantities are homogeneous quadratic functions of the derivatives $g_{ab,c}$.

Experience namely teaches us that the gravitation fields occurring in nature may be regarded as feeble, in this sense that the values of the $g_{ab}$'s are little different from those which might be assumed if no gravitation field existed. For these latter values, which will be called the "normal" ones, we may write in orthogonal coordinates

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{44} = c^2, \quad g_{ab} = 0, \text{ for } a \neq b. \tag{98}$$

In a first approximation, which most times will be sufficient, the deviations of the values of the $g_{ab}$'s from these normal ones may be taken proportional to the gravitation constant $\varkappa$. This factor also appears in the differential coefficients $g_{ab,c}$; hence, according to the character of the functions $t_h'^e$ mentioned above (and on account of the factor $1/\varkappa$ in (96) and (97)) these functions become proportional to $\varkappa$, so that in a feeble gravitation field they have low values.

§ 56. Because of the complicated form of equations (96) and (97), we shall confine ourselves to the calculation for some cases of $t_4'^4$, i.e. of the energy per unit of volume. This calculation is considerably simplified if we consider stationary fields only. Then all differential coefficients with respect to $x_4$ vanish, so that we have according to (96)

$$t_4'^4 = \frac{1}{2\varkappa}\left\{-Q_1 + \Sigma\,(abfe)\,\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}\right)g_{ab,f}\right\}. \tag{99}$$

We shall work out the calculation, first for a field without gravitation and secondly for the case of an attracting spherical body in which the matter is distributed symmetrically round the centre.

If there is no gravitation field we may take for the quantities $g_{ab}$ the "normal" values. For the case of orthogonal coordinates these are given by (98). When we want to use the polar coordinates introduced into § 48 we have the corresponding formulae

$$\left.\begin{aligned} g_{11} = -\frac{r^2}{1-x_1^2}, \; g_{22} = -r_2(1-x_1^2), \; g_{33} = -1, \; g_{44} = c^2, \\ g_{ab} = 0, \quad \text{for } a \neq b. \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

If, using polar coordinates, we have to do with an attracting sphere and if we take its centre as origin, we may put

$$g_{11} = -\frac{u}{1-x_1^2}, \quad g_{22} = -(1-x_1^2)u, \quad g_{33} = -v, \quad g_{44} = w, \qquad (101)$$

where $u$, $v$, $w$ are functions of $r$. The $g_{ab}$'s which belong to an orthogonal system of coordinates may be expressed in the same functions.

These $g_{ab}$'s are

$$g_{11} = -\frac{u}{r^2} + \frac{x_1^2}{r^2}\left(\frac{u}{r^2} - v\right), \text{ etc.}$$

$$g_{12} = \frac{x_1 x_2}{r^2}\left(\frac{u}{r^2} - v\right), \text{ etc.}$$

$$g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0, \qquad g_{44} = w.$$

The "etc." means that for $g_{22}$, $g_{33}$ we have similar expressions as for $g_{11}$ and for $g_{23}$, $g_{31}$ similar ones as for $g_{12}$.

§ 57. In order to deduce the differential equations determining $u$, $v$, $w$ we may arbitrarily use rectangular or polar coordinates; the latter however are here to be preferred. If differentiations with respect to $r$ are indicated by accents, we have according to (40) and (101)

$$G_{11} = \frac{1}{1-x_1^2}\left(-1 + \frac{u''}{2v} - \frac{u'v'}{4v^2} + \frac{u'w'}{4vw}\right),$$

$$G_{22} = (1-x_1^2)\left(-1 + \frac{u''}{2v} - \frac{u'v'}{4v^2} + \frac{u'w'}{4vw}\right),$$

$$G_{33} = \frac{u''}{u} - \frac{u'^2}{2u^2} - \frac{u'v'}{2uv} - \frac{v'w'}{4vw} + \frac{w''}{2w} - \frac{w'^2}{4w^2},$$

$$G_{44} = -\frac{u'w'}{2uv} + \frac{v'w'}{4v^2} - \frac{w''}{2v} + \frac{w'^2}{4vw},$$

$$G_{ab} = 0, \quad \text{for } a \neq b.$$

So we have found the left hand sides of the field equations (65). Before considering these equations more closely we shall introduce the simplification that the $g_{ab}$'s are very little different from the normal values (100). For these latter we have

$$u = r^2, \qquad v = 1, \qquad w = c^2 \qquad (102)$$

and therefore we now put

$$u = r^2(1 + \lambda), \quad v = 1 + \mu, \quad w = c^2(1 + \nu). \tag{103}$$

The quantities $\lambda$, $\mu$, $\nu$, which depend on $r$, will be regarded as infinitely small of the first order and in the field equations we shall neglect quantities of second and higher orders.

Then we may write for $G_{11}$ etc.

$$G_{11} = \frac{1}{1 - x_1^2}(\lambda + 2r\lambda' + \tfrac{1}{2} r^2\lambda'' - \mu - \tfrac{1}{2} r\mu' + \tfrac{1}{2} r\nu'),$$

$$G_{22} = (1 - x_1^2)(\lambda + 2r\lambda' + \tfrac{1}{2} r^2\lambda'' - \mu - \tfrac{1}{2} r\mu' + \tfrac{1}{2}r\nu'),$$

$$G_{33} = \frac{2}{r}\lambda' + \lambda'' - \frac{1}{r}\mu' + \tfrac{1}{2}\nu'',$$

$$G_{44} = -c^2\left(\frac{1}{r}\nu' + \tfrac{1}{2}\nu''\right).$$

On the right hand-sides of the field equations (65) we may take for $g_{ab}$ the normal value; moreover we shall take for $T_{ab}$ and $T$ the values which hold for a system of incoherent material points. We may do so if we assume no other internal stresses but those caused by the mutual attractions; these stresses may be neglected in the present approximation.

As we supposed the attracting matter to be at rest we have according to (10), (16) and (15), l.c., $w_1 = w_2 = w_3 = 0$, $w_4 = \rho$, $u_1 = u_2 = u_3 = 0$, $u_4 = c^2\rho$, $P = c\rho$.

In the notations we are now using we have further, according to (23), l.c.,

$$\mathfrak{T}_h^e = \frac{u_h w_e}{P},$$

so that of the stress-energy-components of the matter only one is different from zero, namely

$$\mathfrak{T}_4^4 = c\rho\,.$$

Further (66) involves that, also of the quantities $T_{ab}$, only one, namely $T_{44}$, is not equal to zero. As we may put $\sqrt{-g} = cr^2$, we have namely

$$T_{44} = \frac{c^2}{r^2}\rho, \quad T = \frac{1}{r^2}\rho.$$

Finally we are led to the three differential equations

$$\lambda + 2r\lambda' + \tfrac{1}{2} r^2\lambda'' - \mu - \tfrac{1}{2} r\mu' + \tfrac{1}{2} r\nu' = -\tfrac{1}{2}\varkappa\rho, \tag{104}$$

$$2r\lambda' + r^2\lambda'' - r\mu' + \tfrac{1}{2} r^2\nu'' = -\tfrac{1}{2}\varkappa\rho, \tag{105}$$

$$r\nu' + \tfrac{1}{2} r^2\nu'' = \tfrac{1}{2}\varkappa\rho. \tag{106}$$

It may be remarked that $\rho dx_1 dx_2 dx_3$ represents the "mass" present in the element of volume $dx_1 dx_2 dx_3$. Because of the meaning of $x_1$, $x_2$, $x_3$ (§ 48) the mass in the shell between spheres with radii $r$ and $r + dr$ is found when $\rho dx_1 dx_2 dx_3$ is integrated with respect to $x_1$ between the limits $-1$ and $+1$ and with respect to $x_2$ between 0 and $2\pi$. As $\rho$ depends on $r$ only, this latter mass becomes $4\pi\rho dr$, so that $\rho$ is connected with the "density" in the ordinary sense of the word, which will be called $\bar{\rho}$, by the equation

$$\rho = r^2\bar{\rho}.$$

The differential equations also hold outside the sphere if $\rho$ is put equal to zero. We can first imagine $\rho$ to change gradually to 0 near the surface and then treat the abrupt change as a limiting case.

In all the preceding considerations we have tacitly supposed the second derivatives of the quantities $g_{ab}$ to have everywhere finite values. Therefore $\nu$ and $\nu'$ will be continuous at the surface even in the case of an abrupt change.

§ 58. Equation (106) gives

$$\nu' = \frac{\varkappa}{r^2}\int_0^r \rho dr, \tag{107}$$

where the integration constant is determined by the consideration that for $r = 0$ all the quantities $g_{ab}$ and their derivatives must be finite, so that for $r = 0$ the product $r^2\nu'$ must be zero. As it is natural to suppose that at an infinite distance $\nu$ vanishes, we find further

$$\nu = \varkappa\int_\infty^r \frac{dr}{r^2}\int_0^r \rho dr. \tag{108}$$

The quantities $\lambda$ and $\mu$ on the contrary are not completely determined by the differential equations. If namely equations (105) and (106) are added to (104) after having been multiplied by $-\frac{1}{2}$ and $+\frac{1}{2}$ respectively, we find

$$\lambda + r\lambda' - \mu + r\nu' = 0 \tag{109}$$

and it is clear that (104) and (105) are satisfied as soon as this is the case with this condition (109) and with (106). So we have only to attend to (108) and (109). The indefiniteness remaining in $\lambda$ and $\mu$ is inevitable on account of the covariancy of the field equations. It does not give rise to any difficulties.

Equation (107) teaches us that near the centre

$$\nu' = \tfrac{1}{3}\varkappa\bar{\rho}_0 r$$

if $\bar{\rho}_0$ is the density at the centre, whereas from (108) we find a finite value for $\nu$ itself. This confirms what has been said above about the values at the centre. We shall assume that at that point $\lambda, \mu$ and their derivatives have likewise finite values. Moreover we suppose (and this agrees with (109)) that $\lambda, \mu, \lambda'$ and $\mu'$ are continuous at the surface of the sphere.

If $a$ is the radius of the sphere we find from (108) for an external point

$$\nu = -\frac{\varkappa}{r}\int_0^a \rho dr.$$

Without contradicting (109) we may assume that at a great distance from the centre $\lambda$ and $\mu$ are likewise proportional to $1/r$, so that $\lambda'$ and $\mu'$ decrease proportionally to $1/r^2$.

§ 59. We can now continue the calculation of $\mathfrak{t}_4'^4$ (§ 56). Substituting (101) in (99) and using polar coordinates we find

$$\mathfrak{t}_4'^4 = -\frac{1}{2\varkappa}u\sqrt{\frac{w}{v}}\left(\frac{1}{2}\frac{u'^2}{u^2} + \frac{u'w'}{uw}\right),$$

whence by substituting (102) we derive for a field without gravitation

$$\mathfrak{t}_4'^4 = -\frac{c}{\varkappa}.$$

This equation shows that, working with polar coordinates, we should have to ascribe a certain negative value of the energy to a field without gravitation, in such a way (comp. § 57) that the energy in the shell between the spheres described round the origin with radii $r$ and $r + dr$ becomes

$$-\frac{4\pi c}{\varkappa}\,dr.$$

The density of the energy in the ordinary sense of the word would be inversely proportional to $r^2$, so that it would become infinite at the centre.

It is hardly necessary to remark that, using rectangular coordinates we find a value zero for the same case of a field without gravitation. The normal values of $g_{ab}$ are then constants and their derivatives vanish.

§ 60. Using rectangular coordinates we shall now indicate the form of $\mathfrak{t}'^4_4$ for the field of a spherical body, with the approximation specified in § 57. Thus we put

$$\left.\begin{aligned} g_{11} &= -(1+\lambda) + \frac{x_1^2}{r^2}(\lambda - \mu), \text{ etc.} \\ g_{12} &= \frac{x_1 x_2}{r^2}(\lambda - \mu), \text{ etc.} \\ g_{14} &= g_{24} = g_{34} = 0, \quad g_{44} = c^2(1+\nu). \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

By (109) and (110) we find [1])

[1]) Of the laborious calculation it may be remarked here only that it is convenient to write the values (110) in the form

$$g_{11} = -1 + \alpha + \frac{\partial^2\beta}{\partial x_1^2}, \text{ etc.}$$

$$g_{12} = \frac{\partial^2\beta}{\partial x_1 \partial x_2}, \text{ etc.}$$

where $\alpha$ and $\beta$ are infinitesimal functions of $r$. We then find

$$\mathfrak{t}'^4_4 = \frac{c}{2\varkappa}\left\{-\tfrac{1}{2}\Sigma(a)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_a}\right)^2 + \Sigma(a)\frac{\partial\nu}{\partial x_a}\frac{\partial\alpha}{\partial x_a} + \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{4}\Sigma(a\,i\,k)\left[\frac{\partial^3\beta}{\partial x_a \partial x_i^2}\frac{\partial^3\beta}{\partial x_a \partial x_k^2} - \left(\frac{\partial^3\beta}{\partial x_a \partial x_i \partial x_k}\right)^2\right]\right\}$$
$$(a, i, k = 1, 2, 3)$$

which reduces to (111) if the relations between $\alpha$, $\beta$ and $\lambda$, $\mu$, viz.

$$\alpha + \frac{1}{r}\beta' = -\lambda, \quad , \quad -\frac{1}{r}\beta' + \beta'' = \lambda - \mu$$

and the equality $\alpha' = \nu'$ involved in (109) are taken into consideration.

$$\mathfrak{t}_4'^4 = \frac{c}{4\varkappa}\left\{\nu'^2 + \frac{1}{r}(\lambda - \mu)\left[\frac{1}{r}(\lambda - \mu) + 2(\lambda' - \mu')\right]\right\}. \quad (111)$$

Thus we see (comp. § 58) that at a distance from the attracting sphere $\mathfrak{t}_4'^4$ decreases proportionally to $1/r^4$. Further it is to be noticed that on account of the indefiniteness pointed out in § 58, there remains some uncertainty as to the distribution of the energy over the space, but that nevertheless the total energy of the gravitation field

$$E = 4\pi \int_0^\infty \mathfrak{t}_4'^4 r^2 dr$$

has a definite value.

Indeed, by the integration the last term of (111) vanishes. After multiplication by $r^2$ this term becomes namely

$$(\lambda - \mu)^2 + 2r(\lambda - \mu)(\lambda' - \mu') = \frac{d}{dr}[r(\lambda - \mu)^2].$$

The integral of this expression is 0 because (comp. §§ 57 and 58) $r(\lambda - \mu)^2$ is continuous at the surface of the sphere and vanishes both for $r = 0$ and for $r = \infty$.

We have thus

$$E = \frac{\pi c}{\varkappa}\int_0^\infty \nu'^2 r^2 dr, \quad (112)$$

where the value (107) can be substituted for $\nu'$. If e.g. the density $\bar{\rho}$ is everywhere the same all over the sphere, we have at an internal point

$$\nu' = \tfrac{1}{3}\varkappa\bar{\rho} r$$

and at an external point

$$\nu' = \tfrac{1}{3}\varkappa\bar{\rho}\frac{a^3}{r^2}.$$

From this we find

$$E = \tfrac{2}{15}\pi c \varkappa \bar{\rho}^2 a^5.$$

§ 61. The general equation (99) found for $\mathfrak{t}_4'^4$ can be transformed in a simple way. We have namely

$$\Sigma(abfe)\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,\,fe}}\right)g_{ab,\,f}=\Sigma(abfe)\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,\,fe}}\,g_{ab,\,f}\right)-$$
$$-\Sigma(abfe)\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,\,fe}}\,g_{ab,\,fe}$$

and we may write $-Q_2$ (§ 54) for the last term. Hence

$$t_4'^4=\frac{1}{2\varkappa}\left\{-Q+\Sigma(abfe)\frac{\partial}{\partial x_e}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,fe}}\,g_{ab,f}\right)\right\},\tag{113}$$

where we must give the values 1, 2, 3 to $e$ and $f$.

The gravitation energy lying within a closed surface consists therefore of two parts, the first of which is

$$E_1=-\frac{1}{2\varkappa}\int Q\,dx_1dx_2dx_3\tag{114}$$

while the second can be represented by surface integrals. If namely $q_1, q_2, q_3$ are the direction constants of the normal drawn outward

$$E_2=\frac{1}{2\varkappa}\,\Sigma(abfe)\int\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,\,fe}}\,g_{ab,f}\,q_e\,d\sigma.\tag{115}$$

In the case of the infinitely feeble gravitation field represented by $\lambda$, $\mu$, $\nu$ (§ 57) both expressions $E_1$ and $E_2$ contain quantities of the first order, but it can easily be verified that these cancel each other in the sum, so that, as we knew already, the total energy is of the second order.

From $Q=\sqrt{-g}\,G$ and the equations of §32 we find namely

$$\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,\,fe}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\,(2g^{ab}\,g^{fe}-g^{bf}\,g^{ae}-g^{af}\,g^{be}),\tag{116}$$

so that we can write

$$E_2=\frac{1}{4\varkappa}\int\sqrt{-g}\,\Sigma(abfe)\,(2g^{ab}\,g^{fe}-g^{bf}\,g^{ae}-g^{af}\,g^{be})\,g_{ab,\,f}\,q_e\,d\sigma.$$

The factor $g_{ab,\,f}$ is of the first order. Thus, if we confine ourselves to that order, we may take for all the other quantities these normal values. Many of these are zero and we find

$$E_2=-\frac{c}{2\varkappa}\,\Sigma(ae)\int g^{aa}\,(g_{aa,e}-g_{ae,a})\,q_e\,d\sigma.\tag{117}$$

Here we must take $a=1, 2, 3, 4$; $e=1, 2, 3$, while we remark that for $a = e$ the expression between brackets vanishes. For $a = 4$ the integral becomes

$$\int \frac{\partial \nu}{\partial x_e} q_e \, d\sigma,$$

which after summation with respect to $e$ gives

$$\int \frac{\partial \nu}{\partial n} d\sigma, \tag{118}$$

$n$ representing the normal to the surface. If $a$ and $e$ differ from each other, while neither of them is equal to 4, we can deduce from (110) and (109)

$$g_{aa,e} - g_{ae,a} = \frac{\partial \nu}{\partial x_e} .$$

Each value of $e$ occurring twice, i.e. combined with the two values different from $e$ which $a$ can take, we have in addition to (118)

$$-2\int \frac{\partial \nu}{\partial n} d\sigma,$$

so that (117) becomes

$$E_2 = \frac{c}{2\varkappa}\int \frac{\partial \nu}{\partial n} d\sigma.$$

As now outside the sphere

$$\nu = -\frac{\varkappa}{r}\int_0^a \rho dr$$

we have for every closed surface that does not surround the sphere $E_2 = 0$, but for every surface that does

$$E_2 = 2\pi c \int_0^a \rho dr. \tag{119}$$

As to $E_1$ we remark that substituting (65) in (41) and taking into consideration (64) we find,

$$G = \varkappa T \ , \quad Q = \varkappa\sqrt{-g}\, T. \tag{120}$$

From this we conclude that $E_1$ is zero if there is no matter inside the surface $\sigma$. In order to determine $E_1$ in the opposite case, we remember that $G$ is independent of the choice of coordinates. To calculate this quantity we may therefore use the value of $T$ indicated in § 56, which is sufficient to calculate $E_1$ as far as the terms of the first order. We have therefore

$$G = \frac{\varkappa}{r^2} \rho$$

and if, using further on rectangular coordinates, we take for $\sqrt{-g}$ the normal value $c$,

$$Q = \frac{c\varkappa}{r^2} \rho.$$

From this we find by substitution in (114) for the case of the closed surface $\sigma$ surrounding the sphere

$$E_1 = -2\pi c \int_0^a \rho dr.$$

This equation together with (119) shows that in (113) when integrated over the whole space the terms of the first order really cancel each other. In order to calculate those of the second order and thus to derive the result (112) from (113), we should have to determine the quantity $T$ (comp. (120)), accurately to the order $\varkappa$. The surface integrals in (115) too would have to be considered more closely. We shall not however dwell upon this.

§ 62. From the expression for $\mathfrak{t}_4'^4$ given in (113) and the value

$$E = E_1 + E_2$$

derived from it, it can be inferred that, though $\mathfrak{t}'$ is no tensor, we yet may change a good deal in the system of coordinates in which the phenomena are described, without altering the value of the total energy. Let us suppose e.g. that $x_4$ is left unchanged but that, instead of the rectangular coordinates $x_1$, $x_2$, $x_3$ hitherto used, other quantities $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$ are introduced, which are some continuous function of $x_1$, $x_2$, $x_3$, with the restriction that $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3$ outside a certain closed surface surrounding the attracting matter at a sufficient distance. If we use these new coordinates, we shall have to introduce other quantities $g'_{ab}$ instead of $g_{ab}$. As however outside the closed surface the quantities $g_{ab}$

and their derivatives do not change, the value of $E_2$ will approach the same limit as when we used the coordinates $x_1$, $x_2$, $x_3$, if the surface $\sigma$ for which it is calculated expands indefinitely. The value which we find for $E_1$ after the transformation of coordinates will also be the same as before. Indeed, if $d\boldsymbol{\tau}$ is an element of volume expressed in $x_1$, $x_2$, $x_3$-units and $d\boldsymbol{\tau}'$ the same element expressed in $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$-units, while $Q'$ represents the new value of $Q$, we have

$$Qd\boldsymbol{\tau} = Q'd\boldsymbol{\tau}'.$$

It is clear that the total energy will also remain unchanged if $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$ differ from $x_1$, $x_2$, $x_3$ at all points, provided only that these differences decrease so rapidly with increasing distance from the attracting body, that they have no influence on the limit of the expression (115).

The result which we have now found admits of another interpretation. In the mode of description which we first followed (using $x_1$, $x_2$, $x_3$), $\boldsymbol{\rho}$ [1]) and $g_{ab}$ are certain functions of $x_1$, $x_2$, $x_3$; in the new one $\boldsymbol{\rho}'$, $g'_{ab}$ are certain other functions of $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$. If now, without leaving the system of coordinates $x_1$, $x_2$, $x_3$, we ascribe to the density and to the gravitation potentials values which depend on $x_1$, $x_2$, $x_3$ in the same way as $\boldsymbol{\rho}'$, $g'_{ab}$ depended on $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$ just now, we shall obtain a new system (consisting of the attracting body and the gravitation field) which is different from the original system because other functions of the coordinates occur in it, but which nevertheless no observation will be able to discern from it, the indefiniteness which is a necessary consequence of the covariancy of the field equations, again presenting itself.

What has been said shows that the total gravitation energy in this new system will have the same value as in the original one, as has been found already in § 60 with the restrictions then introduced.

§ 63. If $\mathfrak{t}'$ were a tensor, we should have for all substitutions the transformation formulae given at the end of § 40. In reality this is not the case now, but from (96) and (97) we can still deduce that those formulae hold for *linear* substitutions. They may likewise be applied to the stress-energy-components of the

---

[1]) By $\rho$ we mean here what was denoted by $\overline{\rho}$ in § 56.

matter or of an electromagneticsystem. Hence, if $\mathfrak{T}_b^a$ represents the total stress-energy-components, i.e. quantities in which the corresponding components for the gravitation field, the matter and the electromagnetic field are taken together, we have for any linear transformation

$$\frac{1}{\sqrt{-g'}}\mathfrak{T}_c'^{b} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\Sigma(kl)p_{kc}\pi_{lb}\mathfrak{T}_k^l. \tag{121}$$

We shall apply this to the case of a relativity transformation, which can be represented by the equations

$$x_1' = ax_1 + bcx_4, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad x_4' = ax_4 + \frac{b}{c}x_1, \tag{122}$$

with the relation

$$a^2 - b^2 = 1. \tag{123}$$

In doing so we shall assume that the system, when described in the rectangular coordinates $x_1$, $x_2$, $x_3$ and with respect to the time $x_4$, is in a stationary state and at rest.

Then we derive from (97) [1])

$$\mathfrak{t}_1'^4 = \mathfrak{t}_2'^4 = \mathfrak{t}_3'^4 = 0; \qquad \mathfrak{t}_4'^1 = \mathfrak{t}_4'^2 = \mathfrak{t}_4'^3 = 0,$$

which means that in the system $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ there are neither momenta nor energy currents in the gravitation field.

We may assume the same for the matter, so that we have for the total stress-energy-components in the system $(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\mathfrak{T}_1^4 = \mathfrak{T}_2^4 = \mathfrak{T}_3^4 = 0; \qquad \mathfrak{T}_4^1 = \mathfrak{T}_4^2 = \mathfrak{T}_4^3 = 0.$$

---

[1]) We have $g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0$, while all the other quantities $g_{\overline{ab}}$ are independent of $x_4$. Thus we can say that the quantities $g_{ab}$ and $g_{ab,c}$ are equal to zero when among their indices the number 4 occurs an odd number of times. The same may be said of $g^{ab}$, $g^{ab,c}$,

$$\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,cd}} \text{ (according to (116))}, \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial Q}{\partial g_{ab,cd}}\right)$$

and also of products of two or more of such quantities. As in the last two terms of (97) the indices $a$, $b$ and $f$ occur twice, these terms will vanish when only one of the indices $e$ and $h$ has the value 4.

As to the first term of (97) we remark that, according to the formulae of § 32, each of the indices $a$, $b$ and $e$ occurs only once in the differential coefficient of $Q$ with respect to $g_{ab,e}$, while other indices are repeated.As to the number of times which $e$, $h$ and the other indices occur we can therefore say the same of the first term of (97) as of the other terms. The first term also is therefore zero, if no more than one of the two indices $e$ and $h$ has the value 4.

That $t_4'^e$ vanishes for e $\neq$ 4 is seen immediately.

Let us now consider especially the components $\mathfrak{T}_1'^4$, $\mathfrak{T}_4'^1$ and $\mathfrak{T}_4'^4$ in the system $(x_1', x_2', x_3', x_4')$. For these we find from (121) and (122)

$$\mathfrak{T}_1'^4 = \frac{ab}{c}\mathfrak{T}_1^1 - \frac{ab}{c}\mathfrak{T}_4^4; \quad \mathfrak{T}_4'^1 = -abc\,\mathfrak{T}_1^1 + abc\,\mathfrak{T}_4^4 \qquad (124)$$

$$\mathfrak{T}_4'^4 = -b^2\mathfrak{T}_1^1 + a^2\mathfrak{T}_4^4. \qquad (125)$$

It is thus seen in the first place that between the momentum in the direction of $x_1(-\mathfrak{T}_1'^4)$ and the energy-current in that direction $(\mathfrak{T}_4'^1)$ there exists the relation

$$\mathfrak{T}_4'^1 = -c^2\mathfrak{T}_1'^4$$

well known from the theory of relativity.

Further we have for the total energy in the system $(x_1', x_2', x_3', x_4')$

$$E' = \int \mathfrak{T}_4'^4\, dx_1'\, dx_2'\, dx_3',$$

where the integration has to be performed for a definite value of the time $x_4'$. On account of (122) we may write for this

$$E' = \frac{1}{a}\int \mathfrak{T}_4'^4\, dx_1\, dx_2\, dx_3,$$

where we have to keep in view a definite value of the time $x_4$.

If the value (125) is substituted here and if we take into consideration that, the state being stationary in the system $(x_1, x_2, x_3, x_4)$,

$$\int \mathfrak{T}_1^1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

we have

$$E' = aE,$$

if $E$ is the energy ascribed to the system in the coordinates $(x_1, x_2, x_3, x_4)$. By integration of the first of the expressions (124) we find in the same way for the total momentum in the direction of $x_1$

$$G' = \frac{b}{c}E.$$

§ 64. Equations (122) show that in the coordinates $(x_1', x_2', x_3', x_4')$ the system has a velocity of translation $bc/a$ in the direction of $x_1'$. If this velocity is denoted by $v$, we have according to (123)

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

If therefore we put

$$M = \frac{E}{c^2},$$

we find

$$E' = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad G' = \frac{Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{126}$$

When the system moves as a whole we may therefore ascribe to it an energy and a momentum which depend on the velocity of translation in the way known from the theory of relativity. The quantity $M$, to which the energy of the gravitation field also contributes a certain part, may be called the "mass" of the system. From what has been said in § 62 it follows that within certain limits it depends on the way in which the system and the gravitation field are described.

It must be remarked however that, if for the gravitation field we had chosen the stress-energy-tensor $\mathfrak{t}_0$ (§ 52), the *total* energy of the system even when in motion would be zero. The same would be true of the *total* momentum and we should have to put $M = 0$.

At first sight it may seem strange that we may arbitrarily ascribe to the moving system the momentum determined by (126) or a momentum 0; one might be inclined to think that, when a definite system of coordinates has been chosen, the momentum must have a definite value, which might be determined by an experiment in which the system is brought to rest by "external" forces. We must remember however (comp. § 52) that in the theory of gravitation we may introduce no "external" forces without considering also the material system $S'$ in which they originate. This system $S'$ together with the system $S$ with which we were originally concerned, will form an entity, in which there is a gravitation field, part of which is due to $S'$ (and a part also to the simultaneous existence of $S$ and $S'$). There is no doubt that we may apply the above considerations to the *total* system $(S, S')$ without being led into contradiction with any observation.

# THE CONNECTION BETWEEN MOMENTUM AND FLOW OF ENERGY. REMARKS CONCERNING THE STRUCTURE OF ELECTRONS AND ATOMS. [1]

As is well known, a relativity transformation, referring to the $z$-axis is expressed by the equations

$$X' = X, \quad y' = y, \quad z' = az - bct, \quad t' = at - \frac{b}{c} z, \qquad (1)$$

in which $c$ denotes the velocity of light while $a$ and $b$ are constants connected by the relation

$$a^2 - b^2 = 1. \qquad (2)$$

We shall suppose the first one to be positive. These equations lead to the following transformation equations [2] for the stress-components $X_x$, $X_y$, etc., for the components $g_x$, $g_y$ and $g_z$ of the momentum per unit of volume, for the components $s_x$, $s_y$ and $s_z$ of the flow of energy and for the energy $\varepsilon$ per unit of volume: [3]

$$X'_x = X_x, \quad Y'_y = Y_y, \quad X'_y = X_y, \quad Y'_x = Y_x, \qquad (3)$$

$$X'_z = aX_z + bcg_x, \quad Y'_z = aY_z + bcg_y, \qquad (4)$$

$$Z'_x = aZ_x + \frac{b}{c} s_x, \quad Z'_y = aZ_y + \frac{b}{c} s_y, \qquad (5)$$

$$Z'_z = a^2 Z_z + \frac{ab}{c} s_z - abcg_z - b^2 \varepsilon, \qquad (6)$$

$$g'_x = ag_x + \frac{b}{c} X_z, \quad g'_y = ag_y + \frac{b}{c} Y_z, \qquad (7)$$

$$g'_z = a^2 g_z + \frac{ab}{c} Z_z - \frac{ab}{c} \varepsilon + \frac{b^2}{c^2} s_z, \qquad (8)$$

---

[1]) Translated from Versl. K. Akad. Wet. Amsterdam. **26**, 981, 1917.

[2]) The easiest way to derive these formulae is to start from the transformation equation of the general theory of relativity (which for the rest does not enter in any way into the present communication).

[3]) We shall write $G$ for the momentum and $E$ for the energy of a system or of a body.

$$s'_x = as_x + bcZ_x, \qquad s'_y = as_y + bcZ_y, \tag{9}$$

$$s'_z = a^2 s_z + abcZ_z - abc\,\varepsilon + b^2c^2 g_z, \tag{10}$$

$$\varepsilon' = a^2\varepsilon - abcg_z - \frac{ab}{c} s_z - b^2 Z_z. \tag{11}$$

The theory of relativity establishes between the stress-components and between the energy components the relations

$$X_y = Y_x, \qquad Y_z = Z_y, \qquad Z_x = X_z,$$
$$s_x = c^2 g_x, \qquad s_y = c^2 g_y, \qquad s_z = c^2 g_z, \tag{12}$$

and this whatever the system of coordinates may be; indeed, it follows from the transformation formulae that they will hold in the system $x'$, $y'$, $z'$, $t'$ if they be satisfied in the system $x$, $y$, $z$, $t$.

The first three of these relations have been known a long time. The connection, on the other hand, expressed by (12) between the momentum and the flow of energy (in vector notation $\mathsf{S} = c^2\mathsf{g}$) with which we became acquainted for the the first time in the case of the electro-magnetic field, is characteristic of the theory of relativity. From the point of view of earlier physics it must even occasion some surprise, because in many cases one would never suspect, on first consideration, any connection at all between the quantities mentioned. It will perhaps be advisable, before availing ourselves of the relations recapitulated above for a few considerations concerning the structure of electrons and atoms, (§ 6), to illustrate first the equations (12) by a few examples.

§ 2. To begin with, we shall consider a mass of gas, of which the molecules may be treated as material points. We divide the particles into groups, each characterised by some definite velocity; we shall write $N$ for the number of particles of a group per unit of volume, $m$ for the mass of a molecule [1]) and $v_x$, $v_y$, $v_z$ for the components of the velocity $v$. A summation over the various groups is indicated by $\Sigma$. Since the $z$-component of the momentum of a molecule is

$$\frac{mv_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

[1]) We shall always understand by "mass", the "mass of Minkowski", which is constant for each body or particle, independent of the choice of the system of coordinates. It may be considered to measure the "quantity of matter".

we have

$$g_z = \Sigma \frac{mNv_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{13}$$

The number of particles belonging to a definite group, traversing an element of surface at right angles to the $z$-axis, is, per unit of area and of time, $Nv_z$ and since each particle possesses the energy

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{14}$$

we have

$$s_z = \Sigma \frac{mNc^2 v_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

which is, indeed, equal to $c^2 g_z$.

It is worthy of note that this result is due in particular to the fact that even when a particle has no velocity at all, a certain amount of energy, namely $mc^2$ is attributed to it all the same. Consequently, when particles move across the plane considered with an extremely small velocity $v$, a transport of energy equal to $c^2$ times the momentum per unit of volume will correspond to that motion, whereas according to pre-relativistic physics, a flow of energy would hardly exist, for it would be proportional to $v^2 v_z$.

In other cases, one would, according to pre-relativistic physics think indeed of a current of energy but not of a momentum. When, for example, the ends of a cylindrical mass of gas are kept at different constant temperatures a steady state with a current of energy will result, namely, the conduction of heat, but at first sight without momentum since no current takes place in the gas. The steady state involves indeed that through a cross-section of the cylindrical mass (we imagine the length of the column to be directed along the $z$-axis) as many molecules will pass towards the one side as towards the other. This requires that $\Sigma N v_z = 0$ and, therefore, also $\Sigma m N v_z = 0$, which, in terms of earlier mechanics, means that the resulting momentum is zero. In relativity mechanics these equations remain valid, but the momentum given by (13) can now quite well differ from zero, all the same. This is exactly what will occur in the case of the supposed difference of temperature. For, if the temperature is higher on the side of the negative $z$ so that the energy-current has the positive direction, the particles moving towards the positive side will possess, on the whole, a larger velocity than those moving in the opposite direction. Positive values of $v_z$ will be combined with smaller values of $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ than negative values of $v_z$; in this way (13) can possess a positive value, although $\Sigma Nmv_z$ is equal to zero.

§ 3. In the second place, we imagine a long and thin elastic rod, at rest in the system of coordinates $x$, $y$, $z$ with its length along the $z$-axis, and stretched in the direction of its length by forces acting on both ends. We suppose these forces $K$, while remaining continually equal to each other, to increase very slowly from 0 to a value $K_1$ and to remain constant from then onward; by this process the rod, taken as a whole, will not acquire any velocity. If the length is originally $l$ and, at an arbitrary moment during the stretching $l(1 + \sigma)$, a certain relation dependent on the nature of the material will exist between the dilatation $\sigma$ and the force $K$ [1]. Let us write for it

$$K = f(\sigma) \tag{15}$$

and if the value $\sigma_1$ corresponds to $K_1$, the work done by the forces in stretching the rod will be given by

$$l \int_0^{\sigma_1} K d\sigma.$$

Further, let the mass per unit of length of the unstretched rod be $\rho_0$, the initial energy is then (cf. (14)) $l\rho_0 c^2$; therefore, writing

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \sigma_1} \tag{16}$$

for the density in the stretched state, the energy after the stretching will be per unit of length

$$\varepsilon = \rho c^2 + \frac{1}{1 + \sigma_1} \int_0^{\sigma_1} K d\sigma. \tag{17}$$

The meaning of $\varepsilon$ here differs in so far from the former one

[1] It is not necessary in the following considerations, to suppose the quantity $\sigma$ to be infinitesimal.

(§ 1) in that now the energy per unit of length is meant and not per unit of volume. We shall, in accordance herewith, understand by $g_z$ the momentum per unit of length, by $Z_z$ the stress over the whole of the cross-section, and by $s_z$ the current of energy across the whole of the cross-section.

We shall now describe the state of the rod in the system $x', y', z', t'$ to which we pass by means of the transformation (1). This way of proceeding does not alter the cross-section and we can therefore still avail ourselves of the formulae (6), (8), (10) and (11), with the altered meaning given to $Z_z$, $g_z$, $s$, $\varepsilon$ and, in accordance therewith, to $Z'_z$, $g'_z$, $s'_z$, $\varepsilon'$.

In the new system the velocity of the rod is

$$v' = -\frac{bc}{a} \tag{18}$$

in the direction of the $z$-axis and its length

$$l' = l\sqrt{1 - v'^2/c^2}\,.$$

If we substitute for $\varepsilon$, $Z_z$, $g_z$ and $s_z$ the values (17), $K$, 0 and 0 introduce the new mass per unit of length

$$\rho' = \frac{\rho}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}} \tag{19}$$

and, finally drop the accents and the index 1 we obtain,

$$Z_z = K - v^2 Q, \qquad g_z = vQ, \qquad s_z = c^2 vQ, \tag{20}$$

$$\varepsilon = K + c^2 Q, \tag{21}$$

where, for brevity, $Q$ is written for

$$\frac{\rho}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{1}{c^2 - v^2}\left(-K + \frac{1}{1+\sigma}\int_0^\sigma K d\sigma\right). \tag{22}$$

We observe here, that $\sigma$ can be found from the mass $\rho$ per unit of length and the value $\rho_0$ for this quantity when the rod is at rest and not stretched by the formula, following from (16) and (19)

$$\sigma = \frac{\rho_0}{\rho\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1. \tag{23}$$

By means of (15) $K$ and $\int_0^\sigma K d\sigma$ can also be calculated. The stress, the momentum and the energy in the moving and the stretched rod are, therefore expressed by (20), (21) and (22) as functions of the velocity and the density.

In this result, the forces acting on the ends of the rod have still the value $K$ as appears from the transformation formulae for forces [1]).

That the stress $Z_z$ differs from $K$ is due to the fact that this quantity refers to a plane *at rest* at right angles to the $Z$-axis, and that its amount comprises not only the force $K$ which the part of the rod lying on the positive side of that plane exerts on the part lying on the negative side, but the momentum as well, with its proper sign, passing through the plane when the rod shifts. One finds for this momentum $-\mathfrak{v}\mathfrak{g}_z$ and, truly enough, the second of the expressions (20) multiplied by $-v$ and added to $K$ yields the value (20) of $Z_z$.

In a similar way one can account for the current of energy $\mathfrak{s}_z$. This comprises, namely the work $-vK$, done by the part of the rod on the negative side on the part on the positive side per unit of time and the energy transferred per unit of time by the motion of the rod across the plane which amounts to $v\varepsilon$.

One can, for that matter, obtain the equations (20) and (21) also by fixing one's attention on the stretching of the rod while making use of the system $x'$, $y'$, $z'$, $t'$. To this end, it is only necessary to transfer the mathematical description of the manipulation, indicated at the beginning of this paragraph faithfully into the system $x'$, $y'$, $z'$, $t'$ and then to deduce, in that system, from the forces and their work, the change of the momentum and the energy.

§ 4. The relations (20) and (21) can serve to deduce the equations of motion for a rod in which $\rho$ and $v$ vary slightly from

[1]) The form of the formulae is namely

$$\frac{F'_x}{\sqrt{c^2 - v'^2}} = \frac{F_x}{\sqrt{c^2 - v^2}}\,; \quad \frac{F'_y}{\sqrt{c^2 - v'^2}} = \frac{F_y}{\sqrt{c^2 - v^2}}\,;$$

$$\frac{F'_z}{\sqrt{c^2 - v'^2}} = a\,\frac{F_z}{\sqrt{c^2 - v^2}} - \frac{b}{c\sqrt{c^2 - v^2}}\,(v_x F_x + v_y F_y + v_z F_z).$$

On putting in the last equation $v = 0$, $F_x = F_y = 0$, $F_z = K$ and substituting (18) for the value $v'$ one obtains $F'_z = K$.

point to point, so slightly, namely, that the distance over which an appreciable change takes place, is very large compared with the dimensions of the cross-section. One can, in that case, consider two fixed planes $P_1$ and $P_2$ perpendicular to the $z$-axis and separated by the infinitesimal distance $dz$, and then express that the change in the quantity of matter contained between these two planes is determined by the quantities passing through $P_1$ and $P_2$ and that similarly the change in the momentum between $P_1$ and $P_2$ is determined by the values of the current of energy. This way of proceeding leads to three equations namely

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial z} = 0, \tag{24}$$

and

$$\frac{\partial g_z}{\partial t} = \frac{\partial Z_z}{\partial z}, \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\frac{\partial s_z}{\partial z},$$

or

$$\frac{\partial(vQ)}{\partial t} + \frac{\partial(v^2Q - K)}{\partial z} = 0, \tag{25}$$

$$\frac{\partial(c^2Q + K)}{\partial t} + \frac{\partial(c^2vQ)}{\partial z} = 0. \tag{26}$$

To these equations must still be added the relations, expressed by (15) and (23) between $K$, $\rho$ and $v$ and also the conditions at the end, for example that the force $K$ or the velocity $v$ shall there possess a certain prescribed value. The equations together determine how longitudinal waves are propagated along the rod; they can also serve to trace in detail how the rod is set into motion by a force, which for some time acts, for example, on one of the ends and how during that process the contraction determined by the factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ is brought about by a temporary difference between the velocities of the ends.

Since the state of the rod is in each point determined by the two quantities $\rho$ and $v$ there can be only two mutually independent equations. One can, indeed, deduce one of the equations (24), (25) and (26) from the two other ones.

§ 5. In some cases it is difficult by means of simple considerations to convince one's self of the validity of the relations (12).

When, for instance, an elastic sphere collides with a certain velocity, with a similar sphere originally at rest, and imparts to the latter the whole of its own motion, there is certainly a current of energy through the fixed plane touching both spheres at the moment of the collision; but one does not see at once how a certain momentum answers to that current. A similar difficulty arises if one wishes to interpret the conduction of heat, not for a highly rarified gas as considered in § 2, but in cases in which the transfer of energy during the collisions constitutes an appreciable part of the phenomenon. In such cases, in which the mutual actions of the molecules come into play, one will be obliged to assume that the relations (12) are valid in every point of the molecular fields of force, also when these are perhaps not of an electro-magnetic nature. If this be true they will also hold when, employing a less deepgoing analysis, one replaces $g$ as well as $s$ by average values over spaces which are large in comparison with the molecular dimensions.

In connection with the above, it may be pointed out here that relativity-mechanics force us to *localise* all energies; it is for instance, entirely out of the question to consider the potential energy of two bodies, which attract each other, as a mathematical quantity, having no other meaning than to yield conjointly with the kinetic energy a constant sum. Just the same as to energy, a definite position in space is assigned to momentum. In this way, we are enabled by the concepts of EINSTEIN to penetrate far into the mechanism of phenomena.

Another characteristic feature of these concepts is that one never meets with an indeterminate additive constant in the expression for the energy. If all particulars of a system are known, there remains nothing indeterminate in the momentum. The same, then, owing to the connection discussed above, must be true for the current of energy and this excludes the occurrence of an indeterminate constant in the value of the energy. For, such a constant would make itself felt in the current of energy also with which one has to deal when a system in a state of translatory motion carries its energy along with it.

§ 6. If one tries in terms of mechanics to picture in detail the structure of an electron, one must introduce not only electromagnetic forces but also forces of a different nature; without the latter the electron would be torn to pieces by the outwards-directed electro-magnetic stresses acting at its surface; or, which comes to the same, by the mutual repulsions of its similarly charged parts. The question as to the direction and intensity of what we may call the "supplementary" forces in question, is answered unambiguously by a well-known hypothesis of POINCARÉ. According to this hypothesis, the charge is carried by a closed skin which in itself offers no resistance of any kind to any change in its shape or size, and the stresses of the surrounding electro-magnetic field are counterbalanced by a normal tensile stress at the inner surface of the skin (where there is no electro-magnetic field), and this in such a way that the latter stress has constantly the same value $T$ even when the electron is in motion and flattened into an ellipsoid.

If $e$ is the charge of the particle and if it has, at rest, the shape of a sphere with radius $R$, then

$$T = \frac{e^2}{32\pi^2 R^4}, \tag{27}$$

for which one can write

$$T = \frac{3mc^2}{16\pi R^3}, \tag{28}$$

on introducing the mass

$$m = \frac{e^2}{6\pi c^2 R}. \tag{29}$$

With the latter quantity are also connected the energy

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{30}$$

and the momentum

$$G = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{31}$$

The electro-magnetic field of the electron which moves with the velocity $v$ and of which the shape is modified into an ellipsoid with semi-axes $R$, $R$ and $R\sqrt{1 - v^2/c^2}$ can easily be determined, so that one can also calculate the momentum in that field. This turns out to have exactly the value (31) from which one may conclude that the momentum is wholly of an electro-magnetic nature. On the other hand one does not obtain for the electro-magnetic energy the value (30) but an amount

$$\tfrac{1}{4} mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

less. One must therefore imagine that energy of a non-electro-magnetic nature exists to that same amount. Now, since, owing to (28), one can write for our last expression $TV$ when $V$ denotes the volume $\frac{4}{3}\pi R^3 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ it is only natural to imagine this "supplementary" energy as being distributed uniformly over the interior of the electron and to bring it in connection with the stress $T$ of POINCARÉ. Indeed, if a potential energy does exist inside the skin and $T$ remains constant when the shape or the volume changes, then when $V$ varies, the work $-TdV$ will be done on the skin from which one may draw the conclusion that a stress is actually at work.

§ 7. [1]) It is particularly worthy of attention that no momentum and therefore no current of energy must correspond to the POINCARÉ stress. Whereas the electro-magnetic energy, lying outside the electron shares the translatory motion of the latter, one must imagine the supplementary energy to remain in its place in the interior. This is in accordance with the fact that so long as an element of space $dS$, which is at rest, lies inside the electron it contains continually the same amount of energy $TdS$ and also with the fact that as soon as the surface of the electron passes through the element, the energy present in it changes from the value $TdS$ to the value $\varepsilon dS$ ($\varepsilon$ being the electro-magnetic energy) which it possesses outside the electron, or vice-versa.

In order to elucidate the latter point, we imagine the electron to move with the velocity $v$ in the direction of the positive $z$-axis, and we fix our attention on an element of surface $d\sigma$ at the front. We denote by $\alpha$, $\beta$ and $\gamma$ the angles which the normal drawn towards the outside makes with the axes of coordinates, further by $d\sigma_1$ and $d\sigma_2$ the surface elements at rest, with which $d\sigma$ coincides at the beginning and at the end of the element of time $dt$. The element of space between $d\sigma_1$ and $d\sigma_2$ covered by $d\sigma$

[1]) In an article by J. D. VAN DER WAALS Jr.: "On the energy and the radius of the electron", one will find considerations, to a certain extent similar to those of the present paragraph. See Versl. K. Akad. Wet. Amsterdam. **25**, 1109, 1917.

has the value $v \cos\gamma \, d\sigma dt$ and the energy it contains changes with the amount

$$(T - \varepsilon)v \cos\gamma \, d\sigma dt.$$

Since, according to the above, no current of energy takes place across $d\sigma_1$ and since one may neglect the current across the cylindrical surface which, together with $d\sigma_1$ and $d\sigma_2$ is the boundary of the element of volume (because this surface is proportional to $dt$ and therefore the energy passing through it to $dt^2$) one must have

$$(T - \varepsilon)v \cos\gamma + s_x \cos\alpha + s_y \cos\beta + s_z \cos\gamma = 0, \quad (32)$$

where $s_x$, $s_y$ and $s_z$ refer to an external point in the immediate vicinity of the surface.

In order to test this equation, which, as is easily seen, must hold at the back of the electron as well, we shall, by means of the formulae of transformation deduce $\varepsilon$, $s_x$, $s_y$, $s_z$ from the corresponding quantities for the electron at rest, which quantities we shall distinguish by accents [1]). As $g'_z = 0$ and $s'_z = 0$ one finds

$$\varepsilon = a^2\varepsilon' - b^2 Z'_z,$$

$$s_x = -bcZ'_x, \quad s_y = -bcZ'_y, \quad s_z = -abcZ'_x + abc\varepsilon',$$

while, since the electron is at rest in the system $x'$, $y'$, $z'$, $t'$ the velocity in the system $x$, $y$, $z$, $t$ is determined by

$$v = \frac{bc}{a}.$$

Let the point, under consideration, of the surface have the coordinates $x$, $y$, $z$ in the one system and the coordinates $x'$, $y'$, $z'$ in the other system, each time in relation to the centre. It follows from the equation of the ellipsoid

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{1 - v^2/c^2} = R^2,$$

that in (32) the quantities $\cos\alpha$, $\cos\beta$ and $\cos\gamma$ may be replaced by $x$, $y$ and

---

[1]) We avail ourselves here of the formulae that can be derived from (1) and (3)—(11), by solving the unaccented quantities and which can also be written down immediately by interchanging the corresponding accented and unaccented quantities, at the same time replacing $b$ by $-b$.

$$\frac{z}{1 - v^2/c^2}$$

that is to say by $x'$, $y'$ and

$$\frac{z'}{\sqrt{1 - v^2c^2}}.$$

On substituting at the same time, for $\varepsilon$, $s_x$, $s_y$, $s_z$ and $v$ the values given above, one obtains, after some reductions

$$z'T = x'Z'_x + y'Z'_y + z'Z'_z,$$

which equation is indeed satisfied. If one, namely, divides by $R$, the right-hand member will represent the component $Z'_n$ of the electromagnetic stress acting on the outer side of the electron at rest. Since this stress is directed along the normal and has the same value as $T$, we have

$$Z'_n = \frac{z'}{R}T.$$

§ 8. We will now see what conclusions we can draw from the fundamental assumptions concerning the structure of the electron by generalising POINCARÉ's model, while in the meantime retaining our assumption that whatever system of coordinates one may choose, no momentum, and, therefore, no current of energy will answer the supplementary forces.

To begin with, one can, still independent of this assumption, observe that the total stress-energy components are subject to the formulae of transformation (3)—(11) and that the same is true of the electromagnetic quantities, considered apart. We can therefore also make use of these formulae if, as we are going to do now, we understand by $X_x$, $X_y$, etc., the supplementary stress-energy components. If now, the current of energy shall be zero in the system $x, y, z, t$ as well as in the system $x', y', z', t'$ we must have by (9) and (10)

$$Z_x = 0, \qquad Z_y = 0, \qquad Z_z = \varepsilon$$

and therefore, as appears from (5) and (6), also

$$Z'_x = 0, \qquad Z'_y = 0, \qquad Z'_z = \varepsilon.$$

One can, however, apply a similar reasoning in carrying out a relativity transformation referring to the $X$-axis or the $Y$-axis; one arrives then at the conclusion that in the system $x, y, z, t$ the remaining tangential stresses too, are zero, and that $X_x$ and $Y_y$ have like $Z_z$ the value $\varepsilon$. The same is then true, as appears from (3) and (4), in the system $x', y', z', t'$ while, besides, equation (11) shows us that $\varepsilon' = \varepsilon$.

In each point of the electron there exists, therefore, a normal stress $T$ of equal strength in all directions possessing the same numerical value as the energy per unit of volume; this value is, moreover, independent of the choice of the system of coordinates.

These conclusions remain valid whatever the motion of the electron and whatever the deformations resulting from the action of external electro-magnetic forces.

§ 9. We shall imagine the charge of the electron to be distributed with a finite volume density $\rho$ and we fix our attention on a definite point of that charge. Such a point, which shares the motion of the electron may be called a "substantial" point and in the same sense, we may speak of a substantial element of volume. We shall prove that in a definite substantial point $T$ has continually the same value.

Let, namely, $F_e$ be the electro-magnetic and $F_s$ the supplementary force acting on a substantial element of volume and let $dS$ be a fixed element of space with which that element of volume coincides at the moment considered. We understand by $A_e$ the work done per unit of time by $F_e$, by $A_s$ the work done by $F_s$, further by $E_e$ and $E_s$ the electro-magnetic and the supplementary energy present in $dS$ and finally by $\mathbf{e}$ the electro-magnetic energy flowing inward through the surface of $dS$. Then, as there is no supplementary current of energy,

$$A_e + A_s + \frac{\partial E_e}{\partial t} + \frac{\partial E_s}{\partial t} = \mathbf{e},$$

and since by a well-known theorem

$$A_e + \frac{\partial E_e}{\partial t} = \mathbf{e},$$

we shall have

$$A_s = -\frac{\partial E_s}{\partial t},$$

which has no other meaning than that the work done by the supplementary force in a certain element of space $dS$ is done at the cost of the supplementary energy contained *in that element.*

Now, since, $v_x$, $v_y$, $v_z$ being the velocity-components

$$A_s = \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) dS$$

and

$$E_s = TdS,$$

one finds

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = 0,$$

which proves our proposition.

In order to know, once for all, the value of $T$ in each substantial point it will be sufficient to carry out the calculation for the case that the electron is at rest and removed from the influence of any external force. Suppose then the charge to be distributed symmetrically around the centre within a sphere of radius $R$ so that $\rho$ will be a function of the distance $r$ from the centre. The electric potential is then

$$\varphi = \frac{1}{r}\int_0^r r^2 \rho dr + \int_r^R r\rho dr$$

and from the condition of equilibrium

$$-\rho \frac{d\varphi}{dr} + \frac{dT}{dr} = 0$$

it follows that

$$T = \int_R^r \rho \frac{d\varphi}{dr} dr = \int_r^R \frac{\rho}{r^2} dr \int_0^r r^2 \rho dr, \tag{33}$$

since we may assume $T$ to vanish at the surface.

One finds then after some reductions for the energy $E$ i.e. the sum of the electric energy $\frac{1}{2}\int \rho\varphi dS$ and the supplementary energy $\int TdS$

$$E = \tfrac{16}{3}\pi \int_0^R r^2 \rho dr \int_r^R r\rho dr. \tag{34}$$

It is hardly necessary to mention that in what has been expounded here POINCARÉ's way of picturing is comprised as a special case. When the charge $e$ contracts itself more and more in a thin skin at the surface of the sphere over which it is distributed uniformly, (34) approaches the value $e^2/6\pi R$ which one finds also from (30) and (29), while it follows from (33) that everywhere within the skin a stress exists, determined by (27).

§ 10. Availing one's self either of POINCARÉ's mode of picturing or of the more general one discussed in the two latter paragraphs, one would be in a position to follow in detail, while taking into account the supplementary forces, the way in which an electron is set into motion and how it is deformed in various cases, if it were not for the serious objection that the state, considered by us is unstable. As regards POINCARÉ's model, this observation was already made long ago by ABRAHAM, and as regards our generalisation it appears in the following way.

Since, in the case of an electron at rest one may consider the electric, as well as the supplementary, energy to be potential, the state of equilibrium considered in the preceding paragraph will be stable only when the sum represented by $E$ is a minimum.

Suppose now, the spherical electron to change its shape by homogeneous dilatations or contractions along three diameters at right angles to each other into an ellipsoid of semi-axes $(1 + \lambda)R$, $(1 + \mu)R$ and $(1 + \mu)R$. Here $\lambda$ and $\mu$ are meant to represent small quantities, of which we shall retain the second powers and the products and each substantial element of volume is meant to retain its charge. One can, in that case, calculate the change of the electric energy by means of well-known rules and deduce the supplementary energy from the condition that in each substantial element of volume $T$ shall remain the same. It follows from this condition that the supplementary energy of such an element changes proportionally to its size, in the ratio, therefore, as 1 to $(1 + \lambda)(1 + \mu)^2$. On carrying out the calculations one finds that the whole of the energy $E$ changes in the ratio as 1 to

$$1 + \tfrac{1}{10}\lambda^2 + \tfrac{4}{5}\lambda\mu + \tfrac{3}{5}\,\mu^2.$$

Now, as the sum of the last three terms will be negative when the value of $\lambda$ lies between $-(4 + \sqrt{10})\mu$ and $-(4 - \sqrt{10})\mu$ the equilibrium is not stable with respect to any deformations.

In order to avoid this difficulty, it is natural to think that one will be obliged to assume the existence of a supplementary momentum also. From a continuation to this communication it will be clear that there are no objections whatever to this assumption and the less so, because, as it is, quantities have already been introduced of a non-electromagnetic nature by the supplementary stress $T$ and the energy corresponding to it.

# THE MOTION OF A SYSTEM OF BODIES UNDER THE INFLUENCE OF THEIR MUTUAL ATTRACTION, ACCORDING TO EINSTEIN's THEORY

by H. A. LORENTZ and J. DROSTE

## I [1]

The second of us showed [2] some time ago how with the aid of fieldequations established by EINSTEIN, the gravitational field of bodies with a given motion can be determined to quantities of the second order. This made the investigation possible of the motion of a material point in that field, of a body, namely, so small that the field arising from itself can be neglected.

We will now deal with the motion of a system of bodies of arbitrary size under the influence of their mutual attractions. We will include, in this investigation too, quantities of the second order, but to avoid making the calculations too complicated we will introduce a few simplifying assumptions. We will assume that the dimensions of the bodies are small in comparison with their mutual distances and that, therefore, the effects of "tidal actions" can be neglected. Further that we can take the motion of each body to be a translation and finally we will assume that the bodies consist of incompressible liquid. This final assumption is introduced on purpose to obtain completely determinate results. One may expect, however, the final equations to be of the same form in the case of bodies of a different nature, although further discussion would be necessary to make this certain. Thanks to the simplifications mentioned it proves possible to reduce the equations of motion to the canonical form with a Lagrangian function, depending only on the instantaneous mutual distances and the velocities.

---

[1] Versl. K. Akad. Wet. Amsterdam. **26**, 392, 1917.

[2] J. DROSTE. Het zwaartekrachtveld van één of meer lichamen volgens de theorie van EINSTEIN. Diss. Leiden, 1916. Also: Versl. K. Akad. Wet. Amsterdam. **25**, 460, 1916. These papers will be quoted as A and B.

In these introductory considerations the space-coordinates $x_1$, $x_2$ and $x_3$ can be left indeterminate, but subsequently (§ 5) we shall suppose them to be rectangular cartesian coordinates.

§ 2. To begin with, we will discuss the general equations of motion, the tension-energy components and the field equations. In doing this we follow up two earlier papers [1]) and shall avail ourselves of the principle of variation brought into prominence in these papers.

We write again $\rho$ for the density, $v_a$ for the velocity-components ($v_4 = 1$) and we put [2])

$$w_a = c\rho v_a, \tag{1}$$

$$u_a = \Sigma^{(b)} g_{ab} w_b, \tag{2}$$

$$P = \sqrt{\Sigma^{(a)} u_a w_a}. \tag{3}$$

As Lagrangian function we take

$$L = -\sqrt{-g}\,\varphi\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right), \tag{4}$$

where $\varphi$ is a function depending on the nature of the liquid.

If $dS$ represents an element of the 4-dimensional field-configuration, measured in $x_1, x_2, x_3, x_4$ units, the principal function of the liquid is

$$\int LdS$$

and the equations of motion can be derived from the condition that, with restrictions still to be specified,

$$\delta \int LdS + \int \Sigma^{(a)} K_a \delta x_a dS = 0. \tag{5}$$

Here the quantities $\delta x_a$ denote virtual displacements of the points of the world lines and $K_a$ the components of certain exterior forces which, for the time being, are supposed to act on the liquid. It must be understood that in equation (5) the quantities $g_{ab}$ are not to be varied.

We will assume the motion of only one of the bodies to be varied. The world-lines of its points occupy a tube-shaped region

[1]) Versl. K. Akad. Wet. Amsterdam **23**, 1073, 1915. (This volume, p. 229) Quoted as C.
Versl. K. Akad. Wet. Amsterdam. **25**, 468, 1916. (This volume, p. 276) Quoted as D.

[2]) The notations differ from those of C in that the velocity of light in a field without gravitation is no longer put equal to 1, but is denoted by $c$.

[3]) The negative sign is introduced here, contrary to $D$ § 43, hence it follows that the function $\varphi$ itself becomes positive.

bounded by a three-dimensional extension $\sigma$ in which lie the world-lines of the points at the surface of the liquid. Of this region we will now consider the part $S$ lying between two cross-sections $\Sigma$ and $\Sigma'$ which correspond to distinct values of the time $x_4$. To fix our thoughts, we assume $\delta x_4$ to be dependent on $x_4$ only, not on $x_1$, $x_2$ and $x_3$, whereas $\delta x_1$, $\delta x_2$ and $\delta x_3$ are supposed to be continuous functions of $x_1$, $x_2$, $x_3$ and $x_4$. At the surfaces $\Sigma$ and $\Sigma'$ all variations will vanish but not at the surface $\sigma$; there they may even give rise to an inward or an outward motion of the latter.

§ 3. We understand now by $\delta L$ the variation of $L$ in a fixed point of the field-configuration and we take the first term in (5) to mean that before and after the variation one must compute $\int LdS$ extended over the region between $\Sigma$ and $\Sigma'$ which in each of the two cases is occupied by the world-lines. If we then set to work as if $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ were rectangular coordinates and if we understand by $q_1$, $q_2$, $q_3$, $q_4$ the direction-constants of the normal to $\sigma$ drawn towards the outside, we shall have

$$\delta \int LdS = \int \delta LdS + \int L \, \Sigma_{(a)} \, q_a \delta x_a d\sigma. \tag{6}$$

Now, putting

$$\chi_{ab} = w_b \delta x_a - w_a \delta x_b,$$

we have (cp. C. § 5)

$$\delta w_a = \Sigma_{(b)} \frac{\partial \chi_{ab}}{\partial x_b}, \qquad \delta P = \Sigma_{(ab)} \frac{u_a}{P} \frac{\partial \chi_{ab}}{\partial x_b},$$

$$\delta L = -\varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) \delta P = -\Sigma_{(ab)} \frac{u_a}{P} \varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) \frac{\partial \chi_{ab}}{\partial x_b},$$

or

$$\delta L = -\Sigma_{(ab)} \frac{\partial}{\partial x_b} \left[ \frac{u_a}{P} \varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) (w_b \delta x_a - w_a \delta x_b) \right] +$$

$$+ \Sigma_{(ab)} (w_b \delta x_a - w_a \delta x_b) \frac{\partial}{\partial x_b} \left[ \frac{u_a}{P} \varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) \right]. \tag{7}$$

The first right hand term gives on substitution in (6) an integral over the surface $\sigma$. Further, if we interchange in the terms with $w_a \delta x_b$ the suffixes $a$ and $b$ and take into account that at the surface $\Sigma^{(b)} q_b w_b = 0$ [1]), while, as is evident from (3), $\Sigma^{(b)} u_b w_b$ can be replaced by $P^2$ we obtain finally from (5)

$$\int \left\{ P\varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) - \sqrt{-g}\,\varphi\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) \right\} \Sigma^{(a)} q_a \delta x_a d\sigma +$$

$$+ \int \Sigma^{(ab)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_b} \left[ \frac{u_a}{P} \varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_a} \left[ \frac{u_b}{P} \varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) \right] \right\} w_b \delta x_a dS +$$
$$+ \int \Sigma^{(a)} K_a \delta x_a dS = 0.$$

From this one finds for the surface of the liquid the condition [2])

$$\sqrt{-g}\,\varphi\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) - P\varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) = 0 \tag{8}$$

and for the interior

$$\Sigma^{(b)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_b} \left[ \frac{u_a}{P} \varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) \right] - \frac{\partial}{\partial x_a} \left[ \frac{u_b}{P} \varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) \right] \right\} w_b + K_a = 0. \tag{9}$$

§ 4. Owing to this last relation one can derive from (7)

$$\delta L + \Sigma^{(a)} K_a \delta x_a = - \Sigma^{(ab)} \frac{\partial}{\partial x_b} \left[ \frac{u_a}{P} \varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) (w_b \delta x_a - w_a \delta x_b) \right]$$

and from this one finds the impulse-energy equations by supposing (cp. C. § 6) that only one of the coordinates, say $x_c$, is subjected to a virtual change and that the change $\delta x_c$ is independent of the coordinates. The result is

$$K_c + \left(\frac{\partial L}{\partial x_c}\right)_w = - \Sigma^{(a)} \frac{\partial \mathfrak{T}_c^a}{\partial x_a}, \tag{10}$$

if

$$\mathfrak{T}_c^a = \delta_c^a \left[ \sqrt{-g}\,\varphi\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) - P\varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) \right] + \frac{u_c w_a}{P} \varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) \text{[3])}. \tag{11}$$

The suffix $w$ indicates that $L$ must be expressed as a function of the quantities $w_a$ and $g_{ab}$ and that when differentiating with

---

[1]) From the fact, that the world-lines of the points of the surface lie in the extension $\sigma$, it follows that $\Sigma^{(b)} q_b v_b = 0$, and therefore, because of (1), $\Sigma^{(b)} q_b w = 0$.

[2]) This relation holds in any system of coordinates, the derivation is, in reality, independent of the choice of a system. Since $P/\sqrt{-g}$ is a scalar, the condition holds, for that matter, in every system as soon as it holds in one system.

[3]) The factor $\delta^a{}_c$ has the value 1 for $a = c$ and the value 0 for $a \neq c$.

respect to $x_c$ one must take into account the variability of the $g_{ab}$ only.

It appears from (10) that the quantities $\mathfrak{T}_c^a$ are the tension-energy components of the liquid [1]. If there are no exterior forces as we shall, henceforth, suppose to be the case, the equation becomes

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_c}\right)_w = -\Sigma(a)\frac{\partial \mathfrak{T}_c^a}{\partial x_a}. \tag{12}$$

§ 5. We shall avail ourselves of this equation in order to find what may be called the equations of motion of the body as a whole. To that end we shall understand by $c$ one of the values 1, 2, 3 and derive from (12) (writing $t$ instead of $x_4$)

$$-\frac{\partial \mathfrak{T}_c^4}{\partial t} = \sum_{(a=1,2,3)} \frac{\partial \mathfrak{T}_c^a}{\partial x_a} + \left(\frac{\partial L}{\partial x_c}\right)_w. \tag{13}$$

Let $d\tau$ be a volume-element of the liquid, $d\omega$ a surface-element, and let us write $q_1$, $q_2$, $q_3$ for the direction cosines of the normal drawn towards the outside. The three expressions

$$-\int \mathfrak{T}_c^4\, d\tau \quad (c = 1, 2, 3)$$

represent the components of the impulse of the body and we will follow its change from instant to instant. While doing this, we bear in mind that when the body is in motion, the change in question is not only due to the change determined by $\partial \mathfrak{T}_c^4/\partial t$ occuring each time in a fixed point of space, but also due to the fact that the boundary surface displaces itself. One finds easily

$$-\frac{d}{dt}\int \mathfrak{T}_c^4\, d\tau = -\int \frac{\partial \mathfrak{T}_c^4}{\partial t}\, d\tau - \int \mathfrak{T}_c^4 \sum_{(a=1,2,3)} q_a v_a d\omega$$

[1] The following consideration can serve as elucidation. The coordinates are supposed to be rectangular. The quantities $\mathfrak{T}^1{}_4$, $\mathfrak{T}^2{}_4$ and $\mathfrak{T}^3{}_4$ represent the components of the energy current and one can write $q_1\mathfrak{T}^1{}_4 + q_2\mathfrak{T}^2{}_4 + q_3\mathfrak{T}^3{}_4$ for the energy current per unit of surface across a surface element at rest, the normal to which has the direction-cosines $q_1$, $q_2$, $q_3$. If the surface-element lies at a certain moment in the surface of the liquid, this quantity must be equal to the energy of the amount of liquid which per unit of time passes during the motion with the velocity $v_1$, $v_2$, $v_3$ through the surface element. Hence

$$q_1\mathfrak{T}_4{}^1 + q_2\mathfrak{T}_4{}^2 + q_3\mathfrak{T}_4{}^3 = (q_1 v_1 + q_2 v_2 + q_3 v_3)\,\mathfrak{T}_4{}^4.$$

This equation is, in fact, satisfied if at the surface condition (8) is valid. As it appears from (11), one has in that case,

$$\mathfrak{T}_4{}^1 : \mathfrak{T}_4{}^2 : \mathfrak{T}_4{}^3 : \mathfrak{T}_4{}^4 = w_1 : w_2 : w_3 : w_4 = v_1 : v_2 : v_3 : 1.$$

A statement similar to that concerning the energy holds for each momentum-component.

and thus, making use of (13) and carrying out the integration as far as possible,

$$-\frac{d}{dt}\int \mathfrak{T}_c^4 d\tau = \int\left(\frac{\partial L}{\partial x_c}\right)_w d\tau + \int \sum_{(a=1,2,3)} (\mathfrak{T}_c^a - v_a \mathfrak{T}_c^4) q_a d\omega.$$

It follows from (8) and (11) that the last integral is equal to zero (cp. the note) and we have, accordingly,

$$-\frac{d}{dt}\int \mathfrak{T}_c^4 d\tau = \int\left(\frac{\partial L}{\partial x_c}\right)_w d\tau, \tag{14}$$

an equation which teaches us how the momentum of the body changes under the influence of the gravitational field.

§ 6. We can now find out the particular condition satisfied by an "incompressible" liquid. Let us, to that purpose, first consider the case of a mass at rest. In this case, as is evident from (11), the normal tension components $\mathfrak{T}_1^1$, $\mathfrak{T}_2^2$, $\mathfrak{T}_3^3$ have equal values, namely, denoting this value by $-p$,

$$p = -\sqrt{-g}\,\varphi\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) + P\varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right). \tag{15}$$

Since in this case

$$P = c\rho\sqrt{g_{44}}, \tag{16}$$

substitution in (15) will give the connection between the density $\rho$ and pressure $p$. If the latter is 0 the density will acquire a value which one derives from

$$\frac{P}{\sqrt{-g}} = \mu, \tag{17}$$

if one determines the quantity $\mu$ by the equation

$$\varphi(\mu) - \mu\varphi'(\mu) = 0. \tag{18}$$

If, then, we are to regard the liquid at all as "incompressible", a slight further increase of the density must insolve a very considerable increase of the pressure. Now, according to (15) and (16),

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = c\sqrt{g_{44}}\,\frac{P}{\sqrt{-g}}\,\varphi''\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) = c\sqrt{g_{44}}\,\mu\varphi''(\mu)$$

and hence the characteristic required is that for the value of $\mu$, determined by (18), the second derivative $\varphi''(\mu)$ shall possess a high value.

§ 7. If now we determine $p$ by (15) for the liquid when in motion as well, we can write for the tension-energy components(11)

$$\mathfrak{T}_c^a = -\delta_c^a p + \frac{u_c w_a}{P^2}\left[p + \sqrt{-g}\,\varphi\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right)\right].$$

Owing to the condition that they can have only finite values any appreciable deviation from the equality (17) is excluded here too, because of the high value of $\varphi''(\mu)$. It is also permitted to replace $P/\sqrt{-g}$ in the last term of $\mathfrak{T}_c^a$ by $\mu$ because, namely, $\varphi(\mu)$ and, as appears from (18), $\varphi'(\mu)$ also, can be considered to be finite, and the function $\varphi$ therefore is by no means, as is $\varphi'$, particularly sensitive to small changes in the argument.

Let us, for brevity, put

$$\varphi(\mu) = s, \tag{19}$$

then

$$\mathfrak{T}_c^a = -\delta_c^a p + \frac{u_c w_a}{P^2}\,(p + \sqrt{-g}\,.\,s). \tag{20}$$

Here one must not lose sight of the fact that in connection with the very small deviations from $\mu$ which $P/\sqrt{-g}$ can show, the quantity $p$ may very well acquire appreciable values.

There must also be pointed out that although the liquid is incompressible in the particular sense that the density cannot change perceptibly with increasing pressure, yet, the density $\rho$ depends on the velocity and on the gravitation-potentials $g_{ab}$. This dependency is determined by (17), for which one can also write

$$c\rho\sqrt{\Sigma_{(ab)}\, g_{ab} v_a v_b} = \sqrt{-g}.\ \mu, \tag{21}$$

where for a given liquid $\mu$ has a definite value.

If, using rectangular coordinates, one has to deal with the values

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = - \ , \quad g_{44} = c^2, \quad g_{ab} = 0 \text{ when } a \neq b, \tag{22}$$

then

$$\rho = \frac{\mu}{\sqrt{c^2 - v^2}}\,. \tag{23}$$

In the dependency thus formulated, of increasing density on increasing velocity one recognizes the influence of contraction in the direction of motion.

It would be possible to deduce from the fundamental equations of the theory that with the aid of the suppositions mentioned in § 1, the shape of the masses of liquid to be considered differs from the spherical shape only by the influence of this contraction. We shall, however, for brevity accept this without it being proved. We imagine therefore each mass to be a flattened ellipsoid of revolution. Denoting the radius of the equator by $R$ we have for the semi-axis at right angles to it, that is in the direction of the velocity $v$, $R\sqrt{1 - v^2/c^2}$. We observe here that for one definite body $R$ is *not* constant. Its value changes under the influence of gravitational actions and will be determined, later on, from the consideration that for each body the amount of liquid determined by $\int \rho d\tau$ has a given constant value.

With a view to calculations to be carried out later on we shall give here also an expression for the differential quotient

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_c}\right)_w$$

occurring in (12) and (14). It follows from

$$P^2 = \Sigma^{(ab)} g_{ab} w_a w_b,$$

that

$$\left(\frac{\partial (P^2)}{\partial x_c}\right)_w = \Sigma^{(ab)} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x_c} w_a w_b$$

and from (4), that

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_c}\right)_w = \frac{p}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x_c} - \left(\frac{s}{2\mu^2\sqrt{-g}} - \frac{p}{2\mu^2 g}\right) \rho^2 c^2 \Sigma^{(ab)} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x_c} v_a v_b. \quad (24)$$

In deriving this expression

$$\varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right)$$

has been replaced by its value resulting from (15), further

$$\varphi\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right)$$

by $s$, and finally, on account of (17), $P^2$ by $-\mu^2 g$.

§ 8. We are now in a position to proceed to the determination of the gravitational field with the aid of the field equations.

On applying the relation

$$T_{ij} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \Sigma_{(a)}\, g_{ia}\, \mathfrak{T}_j^a$$

one finds from (20)

$$T_{ij} = -g_{ij} \frac{p}{\sqrt{-g}} + (p + \sqrt{-g} \,.\, s) \frac{u_i u_j}{\mu^2 \sqrt{(-g)^3}},$$

again, on using the formula

$$\Sigma_{(j)}\, g^{ij}\, u_j = w_i,$$

which is a consequence of (2), and on using (3) as well, one finds

$$T = \Sigma_{(ij)}\, g^{ij}\, T_{ij} = -3 \frac{p}{\sqrt{-g}} + s,$$

from which one finally obtains

$$T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T = -\left(\frac{1}{2} g_{ij} + \frac{u_i u_j}{\mu^2 g}\right) s + \left(\frac{1}{2} g_{ij} - \frac{u_i u_j}{\mu^2 g}\right) \frac{p}{\sqrt{-g}}. \qquad (25)$$

By this result the right-hand members of the field-equations are known. The latter can be written as

$$2G_{ij} = -2\varkappa\,(T_{ij} - \tfrac{1}{2} g_{ij} T). \qquad (26)$$

For simplicity we shall assume 1°. that the terms with $\varkappa$ and $v$ are very small in comparison with those containing neither $\varkappa$ nor $v$ and 2°. that the terms with $v^2$ and those with $\varkappa$ are of the same order of magnitude, we shall say of the *first* order. Thanks to these suppositions [1]), which do actually hold, for instance, in the case of the solar system, the field equations can be solved by successive approximations; the expressions for $g_{ab}$ are obtained by subsequently adding terms of increasing order to the values (22) which would hold in the absence of a gravitational field.

---

[1]) This means that velocities $v$ which actually occur, will be very small with respect to the velocity of light. The supposition concerning $\varkappa$ amounts to this, that the same will be true of certain fictive velocities $v'$, namely of those with which a material point inside or outside one of the masses of liquid would be able to describe a circle round the centre after the removal of all other bodies. The second supposition signifies that the velocities $v$ occurring in reality are of the same order as the velocities $v'$.

We can take the expansion of the left-hand member $2G_{ij}$ from A pages 50—57 or from B pages 460—464, and further, we observe that because of our suppositions a factor $v_1$, $v_2$, or $v_3$ and likewise a differentiation with respect to the time increases the order of a term by half. Furthermore, that $s$ has a finite value but that $p$ is of the first order. Indeed, this quantity is 0 at the surface of a mass of liquid and it can in the interior only acquire a value differing from 0 under the influence of gravitation itself.

§ 9. Confining oneself to quantities of the first order, the equations can be satisfied by [1])

$$\left.\begin{array}{c} g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 + \chi, \quad g_{44} = c^2(1 + \chi), \\ g_{ab} = 0 \quad \text{when } a \neq b \end{array}\right\} \tag{27}$$

if outside the masses of liquid, $\chi$ is determined by the equation

$$\Delta\chi = 0$$

and in the interior of each of them by

$$\Delta\chi = \varkappa s. \tag{28}$$

These formulae correspond to the theory of NEWTON and we can appropriately call $\chi$ the Newtonian potential. When we consider one of the bodies in particular we can split $\chi$ in its proper potential $\chi_e$ and the contribution $\chi'$ of all other masses, and write

$$\chi = \chi_e + \chi'.$$

We shall, occasionally, also write

$$\chi = \Sigma\psi, \tag{29}$$

to which summation each body is meant to furnish one term.

In determining the potential $\chi$, we imagine the bodies to be *spheres* with radius $R$. Hence, it follows that in the interior of a mass of liquid

$$\chi_e = -\tfrac{1}{2}\varkappa s\,(R^2 - \tfrac{1}{3}r^2), \tag{30}$$

if $r$ represents the distance to the centre.

§ 10. We must now push the approximation further in two respects. We must, namely, calculate $g_{14}$, $g_{24}$ and $g_{34}$, which quantities turn out to be of the order $1\tfrac{1}{2}$, to that order inclusive,

---

[1]) Compare A, formula (75) or B, formula (5). Since we have introduced the velocity of light $c$, we ought to put $\beta_{44} = c^2\beta$. The quantity $\chi$ in the text corresponds with $\varkappa\beta$ in A and B.

and in $g_{44}$ take into account terms of the second order. To carry out the first calculations we take in (26) $j = 4, i \neq 4$. In the right hand member, determined by (25), we need then only retain the term

$$2\varkappa \frac{u_1 u_4}{\mu^2 g} s.$$

Since (cp. (2), (1), (23) and (22)) one can put

$$u_i = -c\rho v_i, \quad u_4 = c^3\rho, \quad \rho = \frac{\mu}{c}, \quad g = -c^2,$$

one can write for that term

$$2\varkappa v_i s.$$

We obtain, in this way, the differential equations [1])

$$\sum_{(l=1,2,3)} \left(\frac{\partial^2 g_{4l}}{\partial x_l \partial x_i} - \frac{\partial^2 g_{i4}}{\partial x_l^2}\right) - 2\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_4 \partial x_i} = 2\varkappa v_i s, \tag{31}$$

which [2]) because of (28) and (29) are satisfied by

$$g_{i4} = -2\Sigma v_i \psi, \tag{32}$$

if $v_i$ denotes a component of the velocity of that body, to which $\psi$ belongs. Between the quantities $g_{i4}$ and $\chi$ we have the relation

$$\sum_{(i=1,2,3)} \frac{\partial g_{i4}}{\partial x_i} = 2\frac{\partial \chi}{\partial x_4}. \tag{33}$$

§ 11. Again, in order to calculate $g_{44}$ to the second order, we must know to that order the right hand member of the equation

$$2G_{44} = 2\varkappa\left(\frac{1}{2}g_{44} + \frac{u_4^2}{\mu^2 g}\right)s - 2\varkappa\left(\frac{1}{2}g_{44} - \frac{u_4^2}{\mu^2 g}\right)\frac{p}{\sqrt{-g}}. \tag{34}$$

Now, we have as a consequence of (27) to terms of the first order

$$g = -c^2(1 - 2\chi)$$

and according to (21)

$$\rho = \frac{\mu}{c}\left(1 - \frac{3}{2}\chi + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right). \tag{35}$$

---

[1]) In the expressions which one finds in A, page 57 and in B, page 464, we have replaced $\varkappa^{3/2}\sigma_{4l}$, $\varkappa^{3/2}\sigma_{i4}$ and $\varkappa\beta$ by $g_{4l}$, $g_{i4}$ and $\chi$ respectively.

[2]) Cp. A, page 61 or B, page 465.

One can, further, replace $u_4$ by $g_{44}w_{44} = c^3\rho(1 + \chi)$. Hence, since $p$ is of the first order

$$2G_{44} = -\varkappa c^2 s\left(1 + 2\frac{v^2}{c^2} + \chi\right) - 3\varkappa c p. \tag{36}$$

In order, now, to calculate $p$ for the interior of one of the bodies to the first order of magnitude, we can imagine (since we have neglected the effects of tidal actions and therefore need not consider the tensions caused by the proximity of the other bodies) that this body is the only one present, and that when at rest, it has the shape of a sphere with radius $R$. With a view to the required degree of approximation we can, since the differential quotients of the quantities $g_{ab}$ are of the first order, omit in (24) the terms with $p$ and in the remaining ones we can put

$$\sqrt{-g} = c, \quad \rho = \frac{\mu}{c}, \quad \frac{\partial g_{44}}{\partial x_c} = c^2 \frac{\partial \chi_e}{\partial x_c}.$$

It follows, therefore, from the condition of equilibrium (12), that

$$\frac{\partial p}{\partial x_c} = -\frac{1}{2} cs \frac{\partial \chi_e}{\partial x_c}, \quad c = 1, 2, 3.$$

$$p = -\tfrac{1}{2} cs\chi_e + C,$$

or, on account of (30), if we determine the constant of integration so as to make $p = 0$ at the surface of the sphere

$$p = \tfrac{1}{12}\varkappa cs^2(R^2 - r^2). \tag{37}$$

§ 12. Let us represent the part of $g_{44}$ which is of the second order by $\varkappa^2\gamma_{44}$, so that the complete expression is

$$g_{44} = c^2(1 + \chi) + \varkappa^2\gamma_{44}; \tag{38}$$

we can write then according to A pp. 52 and 57, or B pp. 462 and 464 for the left hand member of (36) [1])

$$-c^2\Delta\chi - \varkappa^2\Delta\gamma_{44} - 3\frac{\partial^2\chi}{\partial x_4^2} + 2\sum_{(l=1,2,3)} \frac{\partial^2 g_{4l}}{\partial x_4 \partial x_l} -$$
$$- c^2 \sum_{(l=1,2,3)} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\chi\frac{\partial\chi}{\partial x_l}\right) + 2c^2 \sum_{(l=1,2,3)} \left(\frac{\partial\chi}{\partial x_l}\right)^2.$$

---

[1]) Here we have replaced $\varkappa\beta_{44}$, $\varkappa\beta$ and $\varkappa^{3/2}\sigma_{4l}$ by $c^2\chi$, $\chi$ and $g_{4l}$ respectively, while the factor $c^2$ in the last two terms is due to our no longer putting the velocity of light equal to 1.

We can, as appears from (33), replace the fourth term by

$$4\,\frac{\partial^2\chi}{\partial x_4^2}\,.$$

Substitution of (37) in (36) and omission of the terms of the first order which cancel out on account of (28) leads to

$$-\varkappa^2\Delta\gamma_{44}+\frac{\partial^2\chi}{\partial x_4^2}-c^2\sum_{l=1,2,3}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\chi\,\frac{\partial\chi}{\partial x_l}\right)+2c^2\sum_{l=1,2,3}\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_l}\right)^2=$$

$$=-\varkappa c^2 s\left(2\,\frac{v^2}{c^2}+\chi\right)-\frac{1}{4}\,\varkappa^2 c^2 s^2(R^2-r^2).$$

On substituting for $\Sigma\left(\dfrac{\partial\chi}{\partial x_l}\right)^2$

the expression

$$\Sigma\,\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\chi\,\frac{\partial\chi}{\partial x_l}\right)-\chi\Delta\chi,$$

which in turn is equal to

$$\Sigma\,\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\chi\,\frac{\partial\chi}{\partial x_l}\right)-\varkappa s\chi$$

and for

$$\Sigma\,\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\chi\,\frac{\partial\chi}{\partial x_l}\right)$$

the value

$$\tfrac{1}{2}\Delta(\chi^2),$$

on transposing further the term with $\chi$ from left to right, and on introducing in the right-hand member

$$\chi=\chi_e+\chi'=-\tfrac{1}{2}\varkappa s(R^2-\tfrac{1}{3}r^2)+\chi',$$

we find for $\gamma_{44}$ the differential equation

$$-\varkappa^2\,\Delta\gamma_{44}+\frac{\partial^2\chi}{\partial x_4^2}+\frac{1}{2}\,c^2\Delta(\chi^2)=$$

$$=-2\varkappa v^2 s+\varkappa c^2 s\chi'-\frac{1}{4}\,\varkappa^2c^2s^2\left(3R^2-\frac{5}{3}\,r^2\right). \quad (39)$$

The equation holding for the space outside the masses of liquid is found from this one by replacing the right-hand member by 0.

II [1])

§ 13. We will now proceed to calculate $\gamma_{44}$ at a point in the interior of the body of which we want to know the equations of motion. We will call this body $A$ and the other bodies $A_1$, $A_2$, etc. The velocity components of $A$ are $\xi$, $\eta$, $\zeta$ of $A_i$ in general $\xi_i$, $\eta_i$, $\zeta_i$. Let the time $x_4$ henceforth be called $t$.

Since

$$\Delta \int \frac{\varkappa s r d\tau}{4\pi} = 2 \int \frac{\varkappa s d\tau}{4\pi r} = -2\chi,$$

we shall have

$$-2\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \Delta \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{\varkappa s r\, d\tau}{4\pi}$$

and in this way we find from (39)

$$\varkappa^2 \gamma_{44} = \frac{1}{2} c^2 \chi^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int \frac{\varkappa s r d\tau}{4\pi} - \frac{1}{4} \varkappa^2 c^2 \int \frac{s^2[3R^2 - \frac{5}{3}(x^2+y^2+z^2)]d\tau}{4\pi r}$$

$$- 2\varkappa \int \frac{v^2 s d\tau}{4\pi r} + \varkappa c^2 \int \frac{s\chi' d\tau}{4\pi r}. \tag{40}$$

Here the integrals must be extended over each of the bodies which for this purpose may be taken to be spherical; $x$, $y$, $z$ denote rectangular coordinates, which are 0 in the centre of the body over which we have to integrate.

The value of $\gamma_{44}$ which we shall calculate from (40) will have to serve for the calculation of $(\partial L/\partial x_c)_w$ in (14). We shall see in § 18 that the contribution of $\gamma_{44}$ to this quantity is

$$-\frac{1}{2}\frac{\varkappa^2 s}{c}\frac{\partial \gamma_{44}}{\partial x_c},$$

whence we can conclude that, considering the integration which in (14) must be extended over $A$, the terms in (40) which are even functions of $x$, $y$ and $z$ may be omitted.

Let us first calculate in (40) the integrals extended over the body in question $A$ itself. It follows from what has just been remarked that the contributions of the third and the fourth term may be omitted. As to the second term, one finds easily

$$-\frac{1}{2}\varkappa s \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1}{4}R^4 + \frac{1}{6}R^2 r^2 - \frac{1}{60} r^4\right).$$

[1]) Versl. K. Akad. Wet. Amsterdam, **26** 649, 1917.

The quantity $R$ occurring in this formula is variable (see § 7), but we can pass over its changes since in doing so we neglect only terms of the third order. As regards $r$ this quantity is a function of the time because it represents the distance between the centre of the body moving with the velocity $(\xi, \eta, \zeta)$ and a fixed point, which at the moment considered has the coordinates $x, y, z$ relative to that centre. Whence it follows that

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -\frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{r},$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{v^2}{r} - \frac{(x\xi + y\eta + z\zeta)^2}{r^3} - \frac{x\dot{\xi} + y\dot{\eta} + z\dot{\zeta}}{r}.$$

The second term of (40) appears therefore to contribute chiefly terms which are even functions of $x$, $y$ and $z$, and which accordingly may be omitted. There remains only

$$\varkappa s\left(\frac{1}{6}R^2 - \frac{1}{30}r^2\right)(x\dot{\xi} + y\dot{\eta} + z\dot{\zeta}).$$

In the fifth term of (40) we write

$$\chi' = \chi'_0 + \sum_{c=1,2,3} x_c\left(\frac{\partial \chi'}{\partial x_c}\right)_0, \tag{41}$$

where the suffix 0 serves as a reminder that the value at the centre is meant; $x_c$ are the coordinates relative to that centre. We may now omit $\chi'_0$ and find the contribution of the body $A$ to the fifth term of (40) to be

$$\varkappa c^2 s\left(\frac{1}{6}R^2 - \frac{1}{10}r^2\right)\sum_{c=1,2,3} x_c\left(\frac{\partial \chi'_c}{\partial x_c}\right)_0. \tag{42}$$

For the first term in (40) we write

$$\tfrac{1}{2}c^2(\chi_e^2 + 2\chi_e\chi' + \chi'^2) \tag{43}$$

and we may omit here $\frac{1}{2}c^2\chi_e^2$. On substitution of (41) in the second term of (43) we may omit $c^2\chi_e\chi'_0$ and in this way we find, considering (30),

$$-\frac{1}{2}\varkappa c^2 s\left(R^2 - \frac{1}{3}r^2\right)\sum_{c=1,2,3} x_c\left(\frac{\partial \chi'}{\partial x_c}\right)_0.$$

The first term and the integrals over $A$ together contribute therefore to the right hand member of (40)

$$\varkappa s\left(\frac{1}{6}R^2-\frac{1}{30}r^2\right)(x\dot{\xi}+y\dot{\eta}+z\dot{\zeta})\Bigg)+$$
$$+\frac{1}{2}c^2\chi'^2+\varkappa c^2 s\left(-\frac{1}{3}R^2+\frac{1}{15}r^2\right)_{c=1,2,3,}\Sigma\, x_c\left(\frac{\partial\chi'}{\partial x_c}\right)_0.$$

§ 14. In order now to write the integrals in (40) over the bodies $A_1$, $A_2$, etc. in a concise form we put for the body $A_i$

$$\tfrac{1}{3}\varkappa s_i R_{0i}^3=\alpha_i, \tag{44}$$

where $R_{0i}$ denotes the constant quantity, determined by the condition

$$\frac{4}{3}\pi R_{0i}^3\frac{\mu_i}{c}=\int\limits_{(i)}\rho d\tau. \tag{45}$$

The differences between $R_i$ and this quantity $R_{0i}$ are never greater than the first order and we may replace $R_i$ by $R_{0i}$ in all terms of the second order and similarly, in the case of the body $A$, $R$ by $R_0$. Denoting further by $r_i$ the distance between the centres of $A_i$ and $A$ we obtain

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\frac{\varkappa s r\, d\tau}{4\pi}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Sigma\,\alpha_i r_i)=-\frac{1}{2}\Sigma\,\alpha_i\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2},$$

in which each of the bodies $A_1$, $A_2$, etc. contributes one term to the summation.

Since because of (28) and (44) we have to terms of the first order

$$\chi'=-\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}, \tag{46}$$

we find for the remaining integrals of (40)

$$-\frac{3}{2}c^2\Sigma\frac{\alpha_i^2}{R_i r_i}-2\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}v_i^2+c^2\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}\chi_i'.$$

On taking all terms together we obtain

$$\frac{\varkappa^2}{c^2}\bar{\gamma}_{44}=\frac{\varkappa s}{c^2}\left(\frac{1}{6}R_0^2-\frac{1}{30}r^2\right)(x\dot{\xi}+y\dot{\eta}+z\dot{\zeta})+$$
$$+\frac{1}{2}\chi'^2+\varkappa s\left(-\frac{1}{3}R_0^2+\frac{1}{15}r^2\right)\sum_{c=1,2,3}x_c\left(\frac{\partial\chi'}{\partial x_c}\right)_0-$$

$$-\frac{1}{2}\Sigma\frac{\alpha_i}{c^2}\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2}-\frac{3}{2}\Sigma\frac{\alpha_i^2}{R_{0i}r_i}-2\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}\frac{v_i^2}{c^2}+\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}\chi_i', \qquad (47)$$

where the bar over $\gamma_{44}$ serves as a reminder that terms which will have to be dropped later on, are already omitted here.

§ 15. We must now calculate $\mathfrak{T}_c^4$. It follows from (20), (1), (2) and (3) that

$$\mathfrak{T}_c^4 = (p + \sqrt{-g}\,.\,s)\;\Sigma^{(a)}\,g_{ca}v_a : \Sigma^{(ab)}\,g_{ab}v_a v_b,$$

whence, because of (37), (27), and (32), to terms of the order $1^1/_2$,

$$\mathfrak{T}_c^4 = s\left[-\frac{v_c}{c}+3\chi\frac{v_c}{c}-2\Sigma\,\psi\frac{v_c}{c}-\frac{v^2 v_c}{c^3}-\frac{\varkappa s}{12}\left(R^2-r^2\right)\frac{v_c}{c}\right]. \qquad (48)$$

§ 16. Let us now calculate the radii of the spheres. If we write down (45) for the body $A$ and calculate the right-hand member with the aid of (35) while taking into account that the integration must be extended over an ellipsoid of semi-axes $R$, $R$ and $R\sqrt{1-v^2/c^2}$, we obtain, since because of (30)

$$\chi = \chi' - \tfrac{1}{2}\varkappa s(R^2 - \tfrac{1}{3}r^2),$$

for $R$

$$R^3 = R_0^3\,(1 - \tfrac{3}{5}\,\varkappa s R_0^2 + \tfrac{3}{2}\,\chi'),$$

where in the second member $R^2$ is replaced by $R_0^2$, which is evidently permitted.

§ 17. We must now substitute in (14) the results obtained; to that end we will commence calculating $\int\mathfrak{T}_c^4 d\tau$. To avoid a crowding of suffixes, we shall take $c = 1$, whence, because of (48),

$$-\mathfrak{T}_1^4 = s\left[\frac{\xi}{c}-3\chi\frac{\xi}{c}+\frac{v^2\xi}{c^3}+2\Sigma\,\psi\frac{\xi}{c}+\frac{1}{12}\varkappa s\frac{\xi}{c}\,(R^2-r^2)\right].$$

In the second term we replace $\chi$ by $\chi_e + \chi'$, or, according to (30) and (46), by

$$-\frac{1}{2}\varkappa s\left(R^2-\frac{1}{3}r^2\right)-\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}$$

and in the fourth term we write for $\psi\xi$ successively

$$\chi_e\xi,\quad -\frac{\alpha_1\xi_1}{r_1},\quad -\frac{\alpha_2\xi_2}{r_2},\quad \text{etc.}$$

In this way we find for the mean value of $-\mathfrak{T}_1^4$, over the sphere $R$

$$s\left(\frac{\xi}{c}+\frac{v^2\xi}{c^3}+3\frac{\xi}{c}\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}+\frac{13}{30}\varkappa sR_0^2\frac{\xi}{c}-2\Sigma\frac{\alpha_i\xi_i}{cr_i}\right),$$

where $R$ is again replaced by $R_0$. In order to obtain the integral of $-\mathfrak{T}_1^4$ over the ellipsoid the last expression must be multiplied by

$$\frac{4}{3}\pi R^3\sqrt{1-v^2/c^2}=\frac{4}{3}\pi R_0^3\left(1-\frac{3}{5}\varkappa sR_0^2+\frac{3}{2}\chi'\right)\left(1-\frac{v^2}{2c^2}\right).$$

In connection with (46) the result is to terms of the order $1^1/_2$:

$$-\int\mathfrak{T}_1^4d\tau=\frac{4}{3}\pi R_0^3\, s\left(\frac{\xi}{c}+\frac{3}{2}\frac{\xi}{c}\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}-\frac{\alpha\xi}{2R_0c}+\frac{v^2\xi}{2c^3}-2\Sigma\frac{\alpha_i\xi_i}{cr_i}\right), \quad (49)$$

where we have introduced for $A$ too, in accordance with (44), a quantity

$$\alpha=\tfrac{1}{3}\,\varkappa sR_0^3.$$

§ 18. We now proceed to calculate $(\partial L/\partial x_c)_w$. It follows from (4), in connection with (15) that

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x_c}\right)_w=-\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_c}\varphi\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right)+\frac{P}{\sqrt{-g}}\varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right)\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_c}-$$

$$-\varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial x_c}\right)_w=\frac{p}{\sqrt{-g}}\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x_c}-\varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial x_c}\right)_w. \quad (50)$$

In the first term, both factors must be calculated to terms of the first order. On account of (37) and because

$$\sqrt{-g}=c(1-\chi), \quad (51)$$

the first term of (50) becomes

$$-\frac{1}{12}\varkappa cs^2(R^2-r^2)\frac{\partial\chi}{\partial x_c}.$$

Because of (15) we can substitute in the second term of (50)

$$\varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right)=\frac{p}{P}+\frac{\sqrt{-g}}{P}\varphi\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right)$$

and find to terms of the first order

$$\varphi'\left(\frac{P}{\sqrt{-g}}\right) = \frac{1}{12}\frac{\varkappa s^2}{\mu}(R^2 - r^2) + \frac{s}{\mu}.$$

Again,

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_c}\right)_w = \frac{1}{2P}\left(\frac{\partial (P^2)}{\partial x_c}\right)_w$$

in which formula we may put

$$\frac{1}{2P} = \frac{1+\chi}{2c\mu},$$

whence, on account of (3), (2) and (1),

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_c}\right)_w = \frac{1+\chi}{2\mu} c\rho^2 \Sigma(ab) \frac{\partial g_{ab}}{\partial x_c} v_a v_b.$$

For $a \neq 4$, $b \neq 4$, we get in the right-hand member, because of (35) and (27)

$$\frac{\mu}{2c}\frac{\partial \chi}{\partial x_c} v^2;$$

for $a = 4$, $b \neq 4$ and $a \neq 4$, $b = 4$ we get

$$\frac{\mu}{c} \sum_{a=1,2,3} v_a \frac{\partial g_{a4}}{\partial x_c}.$$

For $a = 4$, $b = 4$ we find on account of (35) and (38)

$$\frac{1}{2}\mu c\left(\frac{\partial \chi}{\partial x_c} - 2\chi\frac{\partial \chi}{\partial x_c} + \frac{v^2}{c^2}\frac{\partial \chi}{\partial x_c} + \frac{\varkappa^2}{c^2}\frac{\partial \gamma_{44}}{\partial x_c}\right).$$

On substituting all these results in (50), we obtain

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial x_c}\right)_w = cs\left[\frac{1}{2}\frac{\partial \chi}{\partial x_c} - \chi\frac{\partial \chi}{\partial x_c} + \frac{\partial \chi}{\partial x_c}\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{8}\varkappa s(R^2 - r^2)\frac{\partial \chi}{\partial c_c} + \right.$$
$$\left. + \sum_{a=1,2,3} \frac{v_a}{c^2}\frac{\partial g_{a4}}{\partial x_c} + \frac{1}{2}\frac{\varkappa^2}{c^2}\frac{\partial \gamma_{44}}{\partial x_c}\right]. \qquad (52)$$

In the first, second, third and fourth term we replace $\chi$ by $\chi_e + \chi'$. The contribution of $\chi_e$ to the first, third or fourth term is then an odd one with respect to $x_c$, and may, accordingly, be omitted, considering the integration over $A$. For the second term we obtain

$$-\chi_e\frac{\partial \chi_e}{\partial x_c}-\chi_e\frac{\partial \chi'}{\partial x_c}-\chi'\frac{\partial \chi_e}{\partial x_c}-\chi'\frac{\partial \chi'}{\partial x_c},$$

where the first term gives 0; in the second one $\partial\chi'/\partial x_c$ can be replaced by its value at the centre $(\partial\chi'/\partial x_c)_0$; for the third term one can write

$$-\chi_0'\frac{\partial \chi_e}{\partial x_c}-\left(\frac{\partial \chi'}{\partial x_c}\right)_0 x_c\frac{\partial \chi_e}{\partial x_c},$$

where the first term may be omitted; finally one can write for the fourth term

$$-\chi_0'\left(\frac{\partial \chi'}{\partial x_c}\right)_0.$$

By all these calculations (52) is transformed into

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial x_c}\right)_w = cs\left[\frac{1}{2}\frac{\partial \chi'}{\partial x_c}-\chi_e\frac{\partial \chi'}{\partial x_c}-x_c\frac{\partial \chi'}{\partial x_c}\frac{\partial \chi_e}{\partial x_c}-\chi'\frac{\partial \chi'}{\partial x_c}+\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial \chi'}{\partial x_c}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{8}\varkappa s(R_0^2-r^2)\frac{\partial \chi'}{\partial x_c}+\sum_{a=1,2,3}\frac{v_a}{c^2}\frac{\partial g_{a4}}{\partial x_c}+\frac{1}{2}\frac{\varkappa^2}{c^2}\frac{\partial \gamma_{44}}{\partial x_c}\right], \quad (53)$$

where the suffix 0 is omitted although $\chi'$ and $\partial\chi'/\partial x_c$ refer to the centre of $A$.

We now replace $\chi_e$, $x_c\partial\chi_e/\partial x_c$ and $R_0^2 - r^2$ by their mean values over the sphere which because of (30) are, successively, $-\frac{2}{5}\varkappa sR_0^2$, $\frac{1}{15}\varkappa sR_0^2$ and $\frac{2}{5}R_0^2$. On differentiating (47) with respect to $x_c$ and on taking subsequently the mean value over the sphere of the first and second term, we find

$$\frac{\varkappa^2}{c^2}\frac{\partial \overline{\gamma}_{44}}{\partial x_c}=\chi'\frac{\partial \chi'}{\partial x_c}+\frac{2}{15}\varkappa sR_0^2\frac{v_c}{c^2}-\frac{4}{15}\varkappa sR_0^2\frac{\partial \chi'}{\partial x_c}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\alpha_i}{c^2}\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2}-$$
$$-\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\alpha_i^2}{R_{0i}r_i}-2\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}\frac{v_i^2}{c^2}+\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}\chi_i'.$$

Substitution in (53) leads to

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial x_c}\right)_w = cs\left[\frac{1}{2}\frac{\partial \chi'}{\partial x_c}+\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial \chi'}{\partial x_c}-\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}\frac{v_i^2}{c^2}+\sum_{a=1,2,3}\frac{v_a}{c^2}\frac{\partial g_{a4}}{\partial x_c}+\right.$$

$$+\frac{1}{4}\varkappa s R_0^2 \frac{\partial \chi'}{\partial x_c} - \frac{1}{2}\chi' \frac{\partial \chi'}{\partial x_c} - \frac{3}{4}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma \frac{\alpha_i^2}{R_{0i} r_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma \chi_i' \frac{\alpha_i}{r_i} -$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma \frac{\alpha_i}{c^2}\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2} + \frac{1}{15}\varkappa s R_0^2 \frac{v_c}{c^2}\Bigg]. \tag{54}$$

On account of (32), the fourth term becomes

$$-2\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial \chi_e}{\partial x_c} + 2\Sigma \frac{\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i}{c^2}\frac{\partial}{\partial x_c}\left(\frac{\alpha_i}{r_i}\right),$$

the first term of which we may omit.

In all terms of (54) but the first one we may replace $\chi'$ by $-\Sigma\alpha_i/r_i$. As regards that first term we bear in mind that $\chi'$ must be calculated from (28) by an integration over the bodies $A_i$. The volumes of these bodies are

$$\frac{4}{3}\pi R_i^3\left(1 - \frac{v_i^2}{2c^2}\right) = \frac{4}{3}\pi R_{0i}^3\left(1 - \frac{v_i^2}{2c^2} - \frac{3}{5}\varkappa s R_{0i}^2 + \frac{3}{2}\chi_i'\right),$$

so that we find

$$\chi' = -\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i} + \frac{1}{2}\Sigma\frac{v_i^2\alpha_i}{c^2 r_i} + \frac{9}{5}\Sigma\frac{\alpha_i^2}{R_{0i} r_i} - \frac{3}{2}\Sigma\chi_i'\frac{\alpha_i}{r_i}.$$

Now, in order to obtain the integral of $-(\partial L/\partial x_c)_w$ extended over the body $A$, we must multiply (54) by

$$\frac{4}{3}\pi R^3\left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) = \frac{4}{3}\pi R_0^3\left(1 - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{3}{5}\varkappa s R_0^2 + \frac{3}{2}\chi'\right).$$

Finally the result is

$$\int\left(\frac{\partial L}{\partial x_c}\right)_w d\tau = \frac{4\pi c}{\varkappa}\alpha\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i} + \frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i} + \frac{3}{4}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{v_i^2\alpha_i}{c^2 r_i} -\right.$$

$$-2\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i}{c^2}\frac{\alpha_i}{r_i} - \frac{3}{20}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\alpha_i^2}{R_i r_i} - \frac{3}{20}\frac{\alpha}{R}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i} -$$

$$\left.-\frac{1}{8}\frac{\partial}{\partial x_c}\left(\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\chi_i'\frac{\alpha_i}{r_i} + \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\alpha_i}{c^2}\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2} - \frac{\alpha\dot{v}_c}{5Rc^2}\right]. \tag{55}$$

We have written here $R$ and $R_i$ without the suffix 0 and henceforth shall continue to do so.

§ 19. We must now substitute (49) and (55) in (14) and obtain in this way the equations of motion for the body $A$. We will now show that for each of the bodies these have the form of LAGRANGE's equations, namely the form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c}\right)=\frac{\partial L}{\partial x_c},$$

$x_1$, $x_2$, $x_3$ denoting the coordinates of the centre of the body. We put

$$\Omega=\frac{1}{2}(\alpha v^2+\Sigma\alpha_i v_i^2)+\frac{1}{8c^2}(\alpha v^4+\Sigma\alpha_i v_i^4)-\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^2v^2}{R}+\Sigma\frac{\alpha_i^2v_i^2}{R_i}\right)-$$
$$-\frac{3}{4}(\alpha v^2\chi'+\Sigma\alpha_i v_i^2\chi_i')-2\Sigma\frac{\alpha\alpha_i}{r_i}(\xi\xi_i+\eta\eta_i+\zeta\zeta_i)-$$
$$-2\Sigma\frac{\alpha_i\alpha_j}{r_{ij}}(\xi_i\xi_j+\eta_i\eta_j+\zeta_i\zeta_j),\qquad(56)$$

where $r_{ij}$ represents the distance between $A_i$ and $A_j$ and each pair of bodies $A_i$, $A_j$ contributes one term to the last summation; $\Omega$ is then an expression into which the coordinates and the velocities of each of the bodies enter in the same manner. Now, since

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}=\alpha\left(\xi+\frac{v^2\xi}{2c^2}-\frac{\alpha\xi}{2R}-\frac{3}{2}\xi\chi'-2\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}\xi_i\right),$$

comparison with (49) leads to

$$-\frac{\varkappa c}{4\pi}\int\mathfrak{X}_1^4\,d\tau=\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}.$$

Further, for the body $A$ we shall have

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_c}=\alpha c^2\left(\frac{3}{4}\frac{v^2}{c^2}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}+\frac{3}{4}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{v_i^2\alpha_i}{c^2r_i}-2\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\xi\xi_i+\eta\eta_i+\zeta\zeta_i}{c^2}\frac{\alpha_i}{r_i}\right),$$

which is precisely $\varkappa c/4\pi$ times the contribution of the second, third and fourth term in (55). On account of all this (14) becomes, after multiplication by $\varkappa c/4\pi$,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{x}_c}\right)=\frac{\partial\Omega}{\partial x_c}+\frac{1}{2}c^2\alpha\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}-\frac{3}{20}c^2\alpha\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\alpha_i^2}{R_ir_i}-\frac{3}{20}c^2\alpha\frac{\alpha}{R}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}-$$
$$-\frac{1}{8}c^2\alpha\frac{\partial}{\partial x_c}\left(\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}\right)^2+\frac{1}{4}c^2\alpha\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\chi_i'\frac{\alpha_i}{r_i}+\frac{1}{4}\alpha\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\alpha_i\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2}-\frac{1}{5}\frac{\alpha^2\dot{v}_c}{R}.\ (57)$$

Again, we put

$$S=\frac{1}{2}c^2\left(\alpha\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}+\Sigma\frac{\alpha_i\alpha_j}{r_{ij}}\right)-\frac{3}{20}c^2\left[\frac{\alpha^2}{R}\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}+\Sigma\frac{\alpha_i^2\alpha}{R_ir_i}+\Sigma_{ij}\left(\frac{\alpha_i^2\alpha_j}{R_ir_{ij}}+\frac{\alpha_i\alpha_j^2}{R_ir_{ij}}\right)\right]$$
$$-\frac{1}{8}c^2\left[\alpha\left(\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}\right)^2+\Sigma_i\alpha_i\left(\frac{\alpha}{r_i}+\Sigma_{j\neq i}\frac{\alpha_j}{r_{ij}}\right)^2\right], \tag{58}$$

where $j \neq i$ means that we must give to $j$ all values successively except the value $i$; $S$ is then an expression into which the coordinates of all bodies enter in the same way. For the body $A$ one has

$$\frac{\partial S}{\partial x_c}=\frac{1}{2}c^2\alpha\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}-\frac{3}{20}c^2\alpha\frac{\alpha}{R}\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}-\frac{3}{20}c^2\alpha\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\frac{\alpha_i^2}{R_ir_i}-$$
$$-\frac{1}{8}c^2\alpha\frac{\partial}{\partial x_c}\left(\Sigma\frac{\alpha_i}{r_i}\right)^2-\frac{1}{4}c^2\Sigma_i\alpha_i\left(\frac{\alpha}{r_i}+\Sigma_{j\neq i}\frac{\alpha_j}{r_{ij}}\right)\frac{\partial}{\partial x_c}\left(\frac{\alpha}{r_i}\right).$$

This is exactly equal to the second, the third, fourth, fifth and sixth term in the right-hand member of (57). For in the sixth term of that formula $\chi'$ must not be included in the differentiation, that term being, accordingly,

$$-\frac{1}{4}c^2\alpha\Sigma_i\left(\frac{\alpha}{r_i}+\Sigma_{j\neq i}\frac{\alpha_j}{r_{ij}}\right)\frac{\partial}{\partial x_c}\left(\frac{\alpha_i}{r_i}\right).$$

Hence we can write for (57)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\dot{x}_c}\right)=\frac{\partial\Omega}{\partial x_c}+\frac{\partial S}{\partial x_c}-\frac{1}{5}\frac{\alpha^2\dot{v}_c}{R}+\frac{1}{4}\alpha\frac{\partial}{\partial x_c}\Sigma\alpha_i\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2}. \tag{59}$$

§ 20. We have still to give the last two terms the desired form. If we put

$$C^{1)}=\frac{1}{10}\left(\frac{\alpha^2v^2}{R}+\Sigma\frac{\alpha_i^2v_i^2}{R_i}\right), \tag{60}$$

we get for the body $A$

$$-\frac{1}{5}\frac{\alpha^2}{R}\dot{v}_c=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial C}{\partial v_c}\right)=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial C}{\partial\dot{x}_c}\right)+\frac{\partial C}{\partial x_c}, \tag{61}$$

since $C$ does not depend on $x_c$.

In the last term of (59) one must, when differentiating $r_i$ with respect to $t$, first keep the point $x_1, x_2, x_3$ fixed, so that the change

1) In the original paper this quantity was denoted by $A$; in order to avoid confusion with the body $A$ we have ventured to alter the notation into B (Editor's note).

in $r_i$ is caused by the motion of $A_i$ exclusively. Bearing this in mind, one finds

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} = \Sigma(a) \frac{\partial r_i}{\partial x_{ia}} \dot{x}_{ia},$$

$$\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2} = \Sigma(a) \frac{\partial r_i}{\partial x_{ia}} \ddot{x}_{ia} + \Sigma(ab) \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_{ia} \partial x_{ib}} \dot{x}_{ia} \dot{x}_{ib},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_c}\left(\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2}\right) = \Sigma(a) \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_c \partial x_{ia}} \ddot{x}_{ia} + \Sigma(ab) \frac{\partial^3 r_i}{\partial x_c \partial x_{ia} \partial x_{ib}} \dot{x}_{ia} \dot{x}_{ib},$$

where, just as in the next formula, the values 1, 2, 3 must be given to each suffix with respect to which the summation is carried out.

If we now put

$$B_{i0} = \Sigma(ab) \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_a \partial x_b} \dot{x}_b \dot{x}_{ia},$$

then

$$\frac{\partial B_{i0}}{\partial \dot{x}_c} = \Sigma(a) \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_c \partial x_a} \dot{x}_{ia},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial B_{i0}}{\partial \dot{x}_c}\right) = \Sigma(a) \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_c \partial x_a} \ddot{x}_{ia} + \Sigma(ab) \frac{\partial^3 r_i}{\partial x_c \partial x_a \partial x_b} (\dot{x}_b - \dot{x}_{ib}) \dot{x}_{ia},$$

$$\frac{\partial B_{i0}}{\partial x_c} = \Sigma(ab) \frac{\partial^3 r_i}{\partial x_c \partial x_a \partial x_b} \dot{x}_b \dot{x}_{ia}.$$

If one takes into account that

$$\frac{\partial}{\partial x_a} = -\frac{\partial}{\partial x_{ia}},$$

it follows from these equations that

$$\frac{\partial}{\partial x_c}\left(\frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial B_{i0}}{\partial \dot{x}_c}\right) + \frac{\partial B_{i0}}{\partial x_c}. \tag{62}$$

Since, if we write $x, y, z$ for the coordinates,

$$\frac{\partial^2 r_i}{\partial x^2} = \frac{1}{r_i} - \frac{(x - x_i)^2}{r_i^3}, \text{ etc.}; \quad \frac{\partial^2 r_i}{\partial x \partial y} = -\frac{(x - x_i)(y - y_i)}{r_i^3}, \text{ etc.},$$

we shall have

$$B_{i0} = \frac{\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i}{r_i^2} +$$

$$+ \left(\frac{1}{r_i} \frac{x-x_i}{r_i}\xi_i + \frac{y-y_i}{r_i}\eta_i + \frac{z-z_i}{r_i}\zeta_i\right)\left(\frac{x_i-x}{r_i}\xi + \frac{y_i-y}{r_i}\eta + \frac{z_i-z}{r_i}\zeta\right).$$

Now

$$v_{i0} = \frac{x-x_i}{r_i}\xi_i + \frac{y-y_i}{r_i}\eta_i + \frac{z-z_i}{r_i}\zeta_i$$

is the component of the velocity of $A_i$ in the direction towards $A$, and

$$v_{0i} = \frac{x_i-x}{r_i}\xi + \frac{y_i-y}{r_i}\eta + \frac{z_i-z}{r_i}\zeta$$

is the component of the velocity of $A$ in the direction towards $A_i$. Accordingly, we can write

$$B_{i0} = \frac{\xi\xi_i + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i + v_{0i}v_{i0}}{r_i}. \tag{63}$$

§ 21. It appears from (60), (61) and (62) that since the velocities do not occur in $S$, we may write for (59)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial M}{\partial \dot{x}_c}\right) = \frac{\partial M}{\partial x_c} \quad (c = 1, 2, 3), \tag{64}$$

if we put

$$M = \Omega + C + \tfrac{1}{4}\alpha\Sigma\alpha_i B_{0i} + \tfrac{1}{4}\Sigma\alpha_i\alpha_j B_{ij} + S, \tag{65}$$

where

$$B_{ij} = \frac{\xi_i\xi_j + \eta_i\eta_j + \zeta_i\zeta_j + v_{ij}v_{ji}}{r_{ij}}.$$

Hitherto we have assigned to $A$ a particular role. We shall now name the bodies $A_1, A_2, \ldots A_n$, the coordinates of their centres $x_1, y_1, z_1$, etc., and the velocity components $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$, etc. Equation (65) then becomes

$$M = \Omega + C + \tfrac{1}{4}\Sigma\alpha_i\alpha_j B_{ij} + S, \tag{66}$$

where, as is always the case, each pair of bodies $A_i, A_j$ contributes only one term to the summation. As a consequence of the new notation, one can write the expressions $\Omega$, $C$ and $S$ in a simpler way. If, by putting

$$L = \frac{4\pi}{\varkappa c} M, \tag{67}$$

we introduce once more the factor $4\pi/\varkappa c$ which has been omitted in the transition from (55) to (57), and if we put, moreover,

$$\varkappa = \frac{8\pi}{c^3} k, \qquad \alpha_i = \frac{2k}{c^2} m_i,$$

equation (64) becomes

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial x_i}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial y_i}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial z_i},$$

$$(i = 1, 2, \ldots n). \tag{68}$$

and we find from (56), (58), (60), (66) and (67), taking together the terms which refer to one, to two and to three bodies at a time,

$$L = \Sigma_{(i)} \left\{ \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{1}{8} m_i \frac{v_i^4}{c^2} - \frac{3k}{10c^2} \frac{m_i^2 v_i^2}{R_i} \right\} +$$

$$+ \frac{k}{2c^2} \Sigma_{(\overline{ij})} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} \{3(v_i^2 + v_j^2) - 7(v_i v_j) + v_{ij} v_{ji}\} +$$

$$+ \Sigma_{(\overline{ij})} \left\{ k \frac{m_i m_j}{r_{ij}} - \frac{3}{5} \frac{k^2}{c^2} \left( \frac{m_i m_j^2}{R_i} + \frac{m_j m_i^2}{R_i} \right) \frac{1}{r_{ij}} - \frac{k^2}{2c^2} \frac{m_i m_j^2 + m_j m_i^2}{r_{ij}^2} \right\} -$$

$$- \frac{k^2}{c^2} \Sigma_{(\overline{ijl})} m_i m_j m_l \left( \frac{1}{r_{ij} r_{jl}} + \frac{1}{r_{jl} r_{li}} + \frac{1}{r_{li} r_{ij}} \right).$$

In this expression $(v_i v_j)$ denotes the scalar product of the velocities $v_i$ and $v_j$. The bars over the suffixes are meant as a reminder that each couple of bodies or each combination of three bodies contibutes only one term to the summation each time.

It is hardly necessary to point out that the first order terms correspond to the form of the Lagrangian function on Newton's theory in which that function is equal to the difference between the kinetic and the potential energy.

# THE MICHELSON-MORLEY EXPERIMENT AND THE DIMENSIONS OF MOVING BODIES [1]

As doubts have sometimes been expressed concerning the interpretation of Prof. MICHELSON's celebrated experiment, some remarks on the subject will perhaps not be out of place here. I shall try to show, by what seems to me an unimpeachable mode of reasoning, that, if we adopt FRESNEL's theory of a stationary aether, supposing also that a material system can have a uniform translation with constant velocity $v$ without changing its dimensions, we must surely expect the result that was predicted by MAXWELL.

Let us introduce a system of rectangular axes of co-ordinates fixed to the material system, the axis of $x$ being in the direction of the motion. Then, with respect to these axes, the æther will flow with the velocity — $v$. The progress of waves of light, relatively to them, may be traced by means of HUYGENS's principle; for this purpose it suffices to know the form and position of the elementary waves. For the sake of generality I shall suppose the propagation to take place in a material medium of refractive index $\mu$, so that, if $c$ is the velocity of light in the aether, the velocity in the medium when at rest would be $c/\mu$. The elementary wave formed in the time $dt$ around a point $P$ will be a sphere of radius $(c/\mu)dt$, of which the centre $P'$ does not, however, coincide with $P$, the line $PP'$ being in the direction opposite to that of $OX$, and having the length $(v/\mu^2)dt$ (FRESNEL's coefficient).

If $Q$ is any point on the surface of the sphere, $PQ$ can be considered as an element of a ray of light, and $w = PQ/dt$ will be the velocity of the ray. Confining ourselves to terms of the second order, i.e. of the order $v^2/c^2$, and denoting by $\delta$ the angle between the ray and $OX$, we have

$$\frac{1}{w} = \frac{\mu}{c} + \frac{c^2}{v} \cos \delta + \frac{v^2}{2\mu c^3} (1 + \cos^2 \delta) \tag{1}$$

[1] Nature, **106**, 793, 1921

Now, let $A$ and $B$ be points having fixed positions in the material system. The course $s$ of a ray of light passing from $A$ to $B$ will be determined by the condition that the integral

$$\int \frac{ds}{w} \tag{2}$$

is a minimum. Using the above value of $1/w$, it is easily shown that, if quantities of the second order are neglected, the course of the ray is not affected by the translation $v$, so that, if $L_0$ is the path of the ray in the case $v = 0$, and $L$ the real path, these lines will be distant from each other to an amount of the second order only. Hence, if in the case of a translation $v$ we calculate by means of (1) the integral (2), both for $L$ and $L_0$, the two values will differ by no more than a quantity of the fourth order; indeed since the integral is a minimum for $L$, the difference must be of the second order with respect to the distances between $L$ and $L_0$, and these distances are already of the second order of magnitude.

It is seen in this way that, so long as we neglect terms of an order higher than the second, we may replace

$$\int_L \frac{ds}{w} \quad \text{by} \quad \int_{L_0} \frac{ds}{w},$$

an argument that must not be overlooked in the theory of the experiment. On the ground of it we shall commit no error if, in determining the paths $L_1$ and $L_2$ of two rays that start from a point $A$, and are made to interfere at a point $B$, we take no account of the motion of the apparatus. The change in the difference of phase produced by the translation will be given by the difference between the values which the integral

$$\int \frac{v^2}{2\mu c^3}(1 + \cos^2 \delta)\, ds$$

takes for the lines $L_1$ and $L_2$ so determined. If, along the first of them, $\cos^2 \delta = 1$, and along the second $\cos^2 \delta = 0$, and $\mu = 1$, the change will be the same as would be produced by a lengthening of $L_1$ in the ratio of 1 to $1 + v^2/2c^2$. As no displacement of the fringes has been observed, we are led to the well-known hypothesis of a contraction of moving bodies in the direction of translation, in the ratio of 1 to $1 - v^2/2c^2$.

We could now try to extend the above considerations to cases in which $v/c$, though always below 1, is no longer a small fraction. This would require somewhat lengthy calculations, into which, however, we need not enter here, because we know by the theory of relativity that the true value of the coefficient of contraction is $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. I may remark here that there can be no question about the reality of this change of length. Suppose that, in studying the phenomena, we use a system of rectangular co-ordinates $x_1$, $x_2$, $x_3$, and a time $t$, and that in this system the velocity of light is $c$ in all directions. Further, let there be two rods, I and II, exactly equal to each other, and both placed in the direction of $x_1$, I at rest in the system of co-ordinates, and II moving in the direction of its length with a velocity $v$. Then, certainly, if the length of a rod is measured by the differences of the values which the co-ordinate $x_1$ has at the two ends at one and the same instant $t$, II will be shorter than I, just as it would be if it were kept at a lower temperature. I need scarcely add that if, by the ordinary transformation of the theory of relativity, we pass to new co-ordinates $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$, $t'$ in such a manner that in this system the rod II is at rest, and if now we measure the lengths by the difference between the values of $x_1'$ which correspond to a definite value of $t'$, I will be found to be the shorter of the two.

The question arises as to how far the dimensions of a solid body will be changed when its parts have unequal velocities, when, for example, it has a rotation about a fixed axis. It is clear that in such a case the different parts of the body will, by their interaction, hinder each other in their tendency to contract to the amount determined by $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. The problem can be solved by the ordinary theory of elasticity, provided only that this theory be first adapted to the principle of relativity. Indeed, we can still use HAMILTON's principle: —

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int (T - U) dS = 0 \tag{3}$$

($dS$, element of volume; $T$, kinetic, and $U$, potential, energy, both per unit of volume), if, by some slight modifications, the integral is made to the independent of the particular choice of co-ordinates. That this can be done, even in the general theory of relativity (theory of gravitation), is due to the possibility of expressing the length of a line-element in the four-dimensional space $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ ($x_4 = t$) in „natural units" — i.e. in such a manner that the number obtained for it is the same whatever be the co-ordinates chosen — and of measuring angles in a similar way. As is wel known, the length $ds$ of a line-element is given by the formula: —

$$ds^2 = \Sigma\,(ab) g_{ab}\, dx_a\, dx_b\,, \tag{4}$$

where the ten quantities $g_{ab}$ ($g_{ab} = g_{ba}$) are the gravitation potentials, and the angle $\delta$ between two elements is determined by

$$\cos\delta\; ds\; d's = \Sigma\,(ab) g_{ab}\, dx_a\, d'x_b \tag{5}$$

In the sums, each of the indices $a$ and $b$ is to be given the values 1, 2, 3, 4. When the value 4 is excluded, as will be the case in some of the following formulae, a Greek letter will be used for the index.

We can also find an invariant value $l$ for the distance between two material particles $P$ and $P'$ infinitely near each other. To this effect we have to consider the word-lines $L$ and $L'$ of these particles in the space $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$. Let $Q$ be the point $L$ of corresponding to the chosen time $x_4$, and $Q'$ a point of $L'$ such that $QQ'$ is at right angles to $L$. Then the length of $QQ'$, determined by means of (4), will be the value required. Similarly, if $P''$ is a third particle, infinitely near $P$ and $P'$, and $Q''$ the point of its word-line so situated that $QQ''$ is perpendicular to $L$, the angle $P'PP''$ will be taken to be the angle between the elements $QQ'$ and $QQ''$ determined according to (5).

As to the co-ordinates $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, it may be recalled that, in a field free from gravitation, they may be chosen in such a manner ($x_1$, $x_2$, $x_3$ being at right angles to each other) that the velocity of light has the constant magnitude $c$; the potentials $g_{ab}$ will in this case have the values

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1,\; g_{44} = c^2,\; g_{ab} = 0 \text{ for } a \neq b.$$

These may be called the normal values of the potentials, and a system of co-ordinates for which they hold a normal system.

Let us now consider a solid body $M$, and let us first conceive it to be placed in a normal system of co-ordinates ($S_0$), and to be at rest in that system, free from all external forces. The body may then be said to be in its natural state, and its particles may be distinguished from each other by their co-ordinates $\xi$, $\eta$, $\zeta$ with respect to three rectangular axes fixed in the body. In all that follows, these quantities will be constant, and so will be the mass $\rho d\xi d\eta d\zeta$ of an element, $\rho$ being the density in the natural state.

We shall now suppose the body to be placed in a system of co-ordinates $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ ($S$), not necessarily normal, and to have some kind of motion in that system. It is this motion, in which $x_1, x_2, x_3$ will be definite functions of $\xi$, $\eta$, $\zeta$, and $x_4$, which we want to determine by means of HAMILTON's principle properly modified.

In order to get the new $U$, I shall introduce the dilatations $\xi_\xi$, $\eta_\eta$, $\zeta_\zeta$ and shearing strains $\xi_\eta$, $\eta_\zeta$, $\zeta_\xi$ with respect to the axes $\xi$, $\eta$, $\zeta$. These quantities are defined as follows: —

Let $P$, $P'$ be the particles $\xi$, $\eta$, $\zeta$, and $\xi + d\xi$, $\eta$, $\zeta$, and let $l$ be their distance in the state considered(system $S$), and $l_0$ their distance in the natural state (system $S_0$), these distances being both determined in the manner specified in what precedes. Then

$$\xi_\xi = (l - l_0)/l_0.$$

Again, if $P''$ is the particle $\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta$, and if the angle $P'PP''$, calculated as stated before, has in the two cases the values $\delta$ and $\delta_0 (= \frac{1}{2}\pi)$, we shall have

$$\xi_\eta = \delta_0 - \delta.$$

The six deformations $\xi_\xi \ldots$ will be considered as infinitely small. In the problem we have in view, they are of the order of magnitude $v^2/c^2$, so that our final result will be correct to that order.

If we put

$$U = A(\xi_\xi^2 + \eta_\eta^2 + \zeta_\zeta^2) + \tfrac{1}{2}B(\xi_\xi + \eta_\eta + \zeta_\zeta)^2 + \tfrac{1}{2}A(\xi_\eta^2 + \eta_\zeta^2 + \zeta_\xi^2), \quad (6)$$

the well-known expression for the potential energy of an isotropic elastic body, $U$ will be invariant for any change of co-ordinates.

As to the kinetic energy $T$, it is to be replaced by an expression containing $\rho\, ds/dt$. Finally, we must write, instead of (3),

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int \left(-c\rho - \frac{1}{c} U\right) \frac{ds}{dt} dt d\xi d\eta d\zeta = 0.$$

We have still to add the formulae that are found by working out the above definitions of $\xi_\xi$, $\xi_\eta$, etc., viz.: —

$$\xi_\xi = -\tfrac{1}{2}\Sigma\,(\alpha\beta) g_{\alpha\beta}\frac{\partial x_a}{\partial\xi}\frac{\partial x_a}{\partial\xi} + \frac{[\Sigma\,(\alpha\beta) g_{\alpha\beta}\, v_\beta\,(\partial x_\alpha/\partial\xi)]^2}{2\Sigma\,(ab) g_{ab}\, v_a v_b} - \tfrac{1}{2},$$

$$\xi_\eta = -\Sigma\,(\alpha\beta) g_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial\xi}\frac{\partial x_\beta}{\partial\eta} + \\ + \frac{\Sigma\,(\alpha\beta) g_{\alpha\beta}\, v_\beta\,(\partial x_\alpha/\partial\xi)\,.\,\Sigma\,(\alpha\beta) g_{\alpha\beta}\, v_\beta\,(\partial x_\alpha/\partial\eta)}{\Sigma\,(ab) g_{ab}\, v_a v_b}$$

($v_1$, $v_2$, $v_3$ are the components of the velocity, and $v_4 = 1$).

In our problem the body is supposed to move in a normal system of co-ordinates. By this our formulae simplify to [1])

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\int(-c^2\rho - U)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt d\xi d\eta d\zeta = 0, \tag{7}$$

$$\xi_\xi = \tfrac{1}{2}\Sigma\,(\alpha)\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial\xi}\right)^2 + \frac{[\Sigma\,(\alpha) v_\alpha\,(\partial x_\alpha/\partial\xi)]^2}{2(c^2 - v^2)} - \tfrac{1}{2},$$

$$\xi_\eta = \Sigma\,(\alpha)\frac{\partial x_\alpha}{\partial\xi}\frac{\partial x_\alpha}{\partial\eta} + \frac{\Sigma\,(\alpha) v_\alpha\,(\partial x_\alpha/\partial\xi)\,.\,\Sigma\,(\alpha) v_\alpha\,(\partial x_\alpha/\partial\eta)}{c^2 - v^2}.$$

When applied to a revolving body, these equations will enable us to determine the deformation that is produced, wholly independently of the theory of relativity, by centrifugal force, a deformation that will in reality far surpass the changes we want to consider. To get free from it we can consider the ideal case of a „rigid" body — i.e. a body for which the moduli of elasticity $A$ and $B$ in (6) are infinitely great. The centrifugal force will then have no effect on the dimensions, but the changes required by the theory of relativity will subsist. The assumption has also the advantage of simplifying the calculations; indeed, since $U$ becomes infinitely great, the term $-c^2\rho$ in (7) may be omitted.

I have worked out the case of a thin circular disc rotating with constant speed about an axis passing through its centre, at right angles to its plane. The result is that, if $v$ is the velocity at the

[1]) If in (7) we replace $(1 - v^2/c^2)^{\frac{1}{2}}$ by $1 - v^2/2c^2$, omitting the constant term $-c^2p$ and neglecting $U\,.\,v^2/2c^2$, we are led back to the ordinary formula (3).

rim, the radius will be shortened in the ratio of 1 to $1 - v^2/8c^2$. The circumference changing to the same extent, its decrease is seen to be exactly one-fourth of that of a rod moving with the same velocity in the direction of its length. That there would be a smaller contraction was to be expected; indeed, the case can be compared to what takes place when a hot metal band is fitted tightly around a wheel and then left to cool.

At first sight our problem seems to lead to a paradox. Let there be two equal discs $A$ and $B$, mounted on the same axis, $A$ revolving and $B$ at rest. Then $A$ will be smaller than $B$, and it must certainly appear so (the discs being supposed to be quite near each other) to any observer, whatever be the system of co-ordinates he chooses to use. However, we can introduce a system of co-ordinates $S'$ revolving with the disc $A$; with respect to these it will be $B$ that rotates, and so one might think that now this latter disc would be the smaller of the two. The conclusion would be wrong because the system $S'$ would not be a normal one, If we leave $S$ for it, we must at the same time change the potentials $g_{ab}$, and if this is done the fundamental equation will certainly again lead to the result that $A$ is smaller than $B$.

# THE DETERMINATION OF THE POTENTIALS IN THE GENERAL THEORY OF RELATIVITY, WITH SOME REMARKS ABOUT THE MEASUREMENT OF LENGTHS AND INTERVALS OF TIME AND ABOUT THE THEORIES OF WEYL AND EDDINGTON [1]

§ 1. It was remarked some years ago by KRETSCHMANN [2] that from observations solely concerning the course of rays of light and the motion of material particles, the values of the potentials $g_{ab}$ which characterize a gravitation-field can be so far deduced that only a constant factor remains undetermined. He showed, in fact, that, if two sets of values $g_{ab}$ and $\bar{g}_{ab}$ are in agreement with these observations, the ratio $\bar{g}_{ab}/g_{ab}$ must be the same for all suffixes $a$ and $b$, and independent of the coordinates.

It is easily seen in what manner this determination of the potentials can be effected. Let us imagine that a physicist explores a gravitation-field by attending to the motion of light-signals and material particles which he throws into the field in any way he likes, and let us suppose that he does so a great number of times and under varied conditions. His object will be to note and clearly to record the encounters between these projectiles.

To this effect he might tabulate the encounters in a register, after having numbered the projectiles, but a better picture of the phenomena may be obtained by means of a diagram drawn in a four-dimensional space $R_4$ in which each projectile has its "world-line". An encounter between two projectiles will be represented by an intersection of their world-lines and the lines have to be drawn in such a way that, along any one of them, the intersections with other lines follow each other in the order in which the successive encounters have taken place.

---

[1] Proc. Acad. Amsterdam. **29**, 383, 1923.

[2] Ann. der Physik. **53**, 575, 1917.

It is clear that the observer has a good deal of liberty in the construction of the diagram. A particular figure will continue to serve his purpose though it be subjected to an arbitrary deformation, provided only that the connexions between its parts remain unbroken. Even, as we are concerned with the intersections and their order only, all diagrams thus derivable from each other may, in a sense, be said to be the *same* figure. It ought also to be remarked that points in $R_4$ are defined exclusively by the intersection of world-lines, there being, according to the conceptions of the theory of relativity, no other means for defining the position of a point. Each point represents an "event".

We shall suppose the world-lines and the encounters to be so numerous that we may speak of a continuous succession of points along each line, and also of lines lying infinitely near each other.

After having drawn the world-diagram we can introduce coordinates, assigning to each point four numbers $x_1 \ldots x_4$. In so doing we are limited only by the restriction of continuity and by the condition that, as we proceed along a world-line in the positive direction, corresponding to the succession of the encounters, the time-coordinate $X_4$ must constantly increase.

§ 2. EINSTEIN's theory postulates the possibility of associating with each point in $R_4$ ten numbers $g_{ab}(g_{ba} = g_{ba})$, such that, if one puts

$$ds^2 = \Sigma\,(ab) g_{ab}\, dx_a\, dx_b\,,$$

*ds* being the "line-element", the world-line of a flash of light satisfies the condition

$$ds = 0$$

and that the world-line of a material particle is a geodesic, i.e. such that, if its beginning and its end are kept fixed,

$$\delta \int ds = 0.$$

Admitting this, and remembering that the values of the coordinates can be directly read from the diagram, we may solve our problem as follows.

We consider in the first place the world-lines belonging to light-signals and passing through a definite point $P$. Let, on any one of these, $Q$ be a point infinitely near $P$. We see at once the values of the four differentials $dx_a$, corresponding to the transition from $P$ to $Q$, and the condition

$$\Sigma\ (ab) g_{ab}\, dx_a\, dx_b = 0$$

gives us a homogeneous linear relation between the potentials, with known coefficients $dx_a dx_b$. Proceeding in the same way with eight other lines of the same class, passing through $P$, we are led to nine equations from which the ratios between the potentials may be found. This can be done for any position of the point $P$ and the result may be written in the form

$$g_{ab} = \omega \gamma_{ab}\,, \tag{1}$$

where the quantities $\gamma_{ab}$ are known functions of the coordinates $(\gamma_{ab} = \gamma_{ab})$, whereas the function $\omega$ remains to be determined. If, as we shall suppose, the field is free from discontinuities, the quantities $\gamma_{ab}$ may be chosen as continuous functions, and then $\omega$ will be of the same kind.

Any world-line of light passing through $P$ and not included in the group selected will give a verification of the theory, because for it also the equation

$$\Sigma\ (ab) g_{ab}\, dx_a\, dx_b = 0$$

must hold.

§ 3. The world-lines for particles, the geodesics, may now serve for the determination of the function $\omega$. Indeed, at any point of such a line, we have the four equations

$$\frac{d^2 x_c}{ds^2} = -\Sigma\,(ab) \begin{Bmatrix} ab \\ c \end{Bmatrix} \frac{dx_a}{ds} \frac{dx_b}{ds} \tag{2}$$

and these may be put in the form of differential equations for $\omega$.

The symbol $\{\ \ \}$ in (2) is defined by

$$\begin{Bmatrix} ab \\ c \end{Bmatrix} = \Sigma\ (e) g^{ce} \begin{bmatrix} ab \\ e \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\, \Sigma\ (e) g^{ce} (g_{ae,b} + g_{be,a} - g_{ab,e}),$$

$g_{ac,b}$ being the differential coefficient of $g_{ac}$ with respect to $x_b$ and the set of quantities $g^{ab}$ the "inverse" to the set $g_{ab}$. Similarly, we may introduce $\gamma^{ab}$ and the derivatives $\gamma_{ab,c}$. All these quantities will have definite values because $\gamma_{ab}$ is known.

Now

$$g^{ab} = \frac{1}{\omega}\gamma^{ab}, \quad g_{ae,b} = \frac{\partial}{\partial x_b}(\omega\gamma_{ae}),$$

and therefore

$$\begin{Bmatrix} ab \\ c \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\Sigma\,(e)\gamma^{ce}(\gamma_{ae,b} + \gamma_{be,a} - \gamma_{ab,e}) +$$

$$+ \frac{1}{2}\Sigma\,(e)\gamma^{ce}\left(\gamma_{ae}\frac{\partial \log \omega}{\partial x_b} + \gamma_{be}\frac{\partial \log \omega}{\partial x_a} - \gamma_{ab}\frac{\partial \log \omega}{\partial x_e}\right). \quad 3)$$

If, further, we put

$$d\sigma^2 = \Sigma\,(ab)\gamma_{ab}\,dx_a\,dx_b\,, \tag{4}$$

we have

$$ds = \sqrt{\omega}\,d\sigma \tag{5}$$

The differential $d\sigma$ may be considered as the line-element expressed in a new measure, and since by (4) it is known, we know also for any point of the geodesic under consideration the value of the integral $\sigma = \int d\sigma$, reckoned from some fixed point of the line. Thus, along the line, the coordinates become known functions of $\sigma$, and the same may be said of their first and second derivatives with respect to that variable.

Now, on account of (5),

$$\frac{dx_c}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{dx_c}{d\sigma}, \text{ etc.}$$

$$\frac{d^2x_c}{ds^2} = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{d}{d\sigma}\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{dx_c}{d\sigma}\right) = \frac{1}{\omega}\frac{d^2x_c}{d\sigma^2} - \frac{1}{2\omega^2}\frac{dx_c}{d\sigma}\frac{d\omega}{d\sigma}$$

by which, after multiplication by $\omega$, the equation of the geodesic line becomes

$$\frac{d^2x_c}{d\sigma^2} - \frac{1}{2}\frac{dx_c}{d\sigma}\frac{d\log\omega}{d\sigma} = -\Sigma\,(ab)\begin{Bmatrix} ab \\ c \end{Bmatrix}\frac{dx_a}{d\sigma}\frac{dx_b}{d\sigma}. \tag{6}$$

If, finally, we substitute the expression (3) and the value

$$\frac{d\log\omega}{d\sigma} = \Sigma\,(f)\frac{dx_f}{d\sigma}\frac{\partial\log\omega}{\partial x_f},$$

we are led to four equations, linear in the unknown quantities

$$\frac{\partial \log \omega}{dx_f}.$$

§ 4. Since we started the assumption that EINSTEIN's theory is true, we need fear no contradiction between the different equations. But we must make sure that they are mutually independent and can give us definite values for the derivatives of $\log \omega$.

The equation which we deduce from (6) as just explained may be written in the form

$$-\Sigma\,(f)\,\frac{dx_c}{d\sigma}\frac{dx_f}{d\sigma}\frac{\partial \log \omega}{\partial x_f}+$$

$$+\Sigma\,(abe)\gamma^{ce}\frac{dx_a}{d\sigma}\frac{dx_b}{d\sigma}\left(\gamma_{ae}\frac{\partial \log \omega}{dx_b}+\gamma_{be}\frac{\partial \log \omega}{\partial x_a}-\gamma_{ab}\frac{\partial \log \omega}{\partial x_e}\right)=\,..\quad (7)$$

where the terms on the right-hand side are completely known. We have simply represented them by . . . ., their values being irrelevant to our purpose, which is merely to show the definiteness of the solution.

Multiplying (7) by $\gamma_{ch}$ and adding the resulting equations [1]) with $c = 1, 2, 3, 4$, we find four new equations ($h = 1, \ldots 4$)

$$\Sigma\,(ab)\left(\gamma_{bh}\frac{\partial \log \omega}{\partial x_a}-\gamma_{ab}\frac{\partial \log \omega}{\partial x_h}\right)\frac{dx_a}{d\sigma}\frac{dx_b}{d\sigma}=\ldots$$

or, again, if we add the equation that is obtained by interchanging the snffixes $a$ and $b$,

$$\Sigma\,(ab)\,\Phi_{ab}\frac{dx_a}{d\sigma}\frac{dx_b}{d\sigma}=\ldots \quad (8)$$

$$\Phi_{ab}=\gamma_{ah}\frac{\partial \log \omega}{\partial x_b}+\gamma_{bh}\frac{\partial \log \omega}{\partial x_a}-2\gamma_{ab}\frac{\partial \log \omega}{\partial x_h}.$$

Now, consider a definite point $P$ and a definite suffix $h$. Since $\Phi_{ba} = \Phi_{ab}$ there are ten mutually independent values $\Phi_{11}$, . . . $\Phi_{12}$, . . . and these are the same whatever be the direction

---

[1]) The relations $\Sigma\,(c)\,\gamma_{ch}\gamma^{ce} = \delta^e{}_h$ ($\delta^e{}_h = 1$ for $h = e$, and $= 0$ for $h \neq e$) may be used here.

of the geodesic line. The values of $dx_a/d\sigma$ and $dx_b/d\sigma$ being known, each line gives us an equation of the form (8) that must be satisfied by $\Phi_{ab}$. Hence, if we apply (8) to ten geodesic lines passing through $P$, we obtain a sufficient number of equations for the determination of $\Phi_{ab}$. There will be but one solution, if the determinant on the coefficients is not zero, a condition that will be fulfilled when the lines selected do not happen to lie on a cone of the second degree.

The outcome of the calculations so far sketched is this, that for all combinations of the suffixes $a$, $b$, $h$, we know the expression

$$\gamma_{ah}\frac{\partial \log \omega}{\partial x_b} + \gamma_{bh}\frac{\partial \log \omega}{\partial x_a} - 2\gamma_{ab}\frac{\partial \log \omega}{\partial x_h} = \ldots \tag{9}$$

Let us now multiply this by $\gamma^{ab}$ and add the equations which we find by giving both to $a$ and $b$ the values 1, 2, 3, 4. The first term gives $\partial \log \omega/\partial x_h$, the second leads to the same result and from the third we find

$$-8\frac{\partial \log \omega}{\partial x_h},$$

so that the derivative $\partial \log \omega/\partial x_h$ becomes known. Thus, since $h$ may be 1, 2, 3 or 4, one finds at any point of the diagram the derivatives of log $\omega$ with respect to the coordinates. By this, apart from a constant term, log $\omega$ becomes known. Finally, one finds the function $\omega$ and, by virtue of (1), the potentials $g_{ab}$, only a constant factor being left undeterminate [1]).

Here again there would be opportunities for verifications of the theory. Indeed, we have used no more than ten of the geodesics passing through $P$, the number of the equations (9) is far greater than four, the number of the first derivatives of log $\omega$, and finally, when these have been determined as functions of

[1]) According to WEYL (Raum, Zeit, Materie, 1st ed., p. 182) the world-lines of light-signals would suffice already for this determination of the potentials. I think this cannot be said. Suppose f.i., that, after having properly chosen the coordinates, one has been able to account for the course of these lines by assuming for $g_{44}$ and $g_{ab}$ ($a \neq 4$, $b \neq 4$) certain values that are functions of the space-coordinates $x_1$, $x_2$, $x_3$ only, and by putting $g_{a4} = 0$ for $a \neq 4$ (so that the field is a stationary one). Then, one may multiply all potentials by one and the same arbitrarily chosen function of $x_1, x_2, x_3$, without altering the velocities of propagation, which are determined by $ds^2 = 0$, and therefore without modifying the course of rays of light which follows from the velocities by means of HUYGENS' construction.

the coordinates, the relations of the form

$$\frac{\partial^2 \log \omega}{\partial x_b \partial x_a} = \frac{\partial^2 \log \omega}{\partial x_a d x_b}$$

may be put to the test.

§ 5. So far we used an arbitrarily chosen system of coordinates $x_a$. If, instead of these, we want to introduce new coordinates $x'_a$, certain functions of $x_a$, we can follow the same method for determining the corresponding potentials $g'_{ab}$. We may, however, just as well take for these the values that are derived from the potentials $g_{ab}$ first determined by means of the transformation-formulae for covariant tensors. These formulae, when applied to $g_{ab}$, are equivalent to the statement that $ds^2$ is invariant, and it is clear that, if $ds' = ds$, the new conditions $ds' = 0$, and $\delta \int ds' = 0$ for the world-lines are equivalent to the original ones $ds = 0$ and $\delta \int ds = 0$.

As to the constant factor in $g_{ab}$ or $g'_{ab}$, we shall suppose it to have been chosen for the first system and to have such a value for the second that $g_{ab}$ and $g'_{ab}$ are related to each other in the way just mentioned.

When the potentials $g_{ab}$ have been determined, the geometry of the extension $R_4$ may be completely developed on the assumption that $ds$ represents the line-element. It will be easy f.i. to define the angle between two directions and to find the differential equation for geodesic lines. We need not speak of all this, but perhaps the following remarks will not be out of place.

1. Two line-elements ($PQ$ and $PQ'$) $ds$ and $d's$ with the components $dx_a$ and $d'x_a$ are said to be at right angles to each other when

$$\Sigma\,(ab) g_{ab} dx_a d'x_b = 0.$$

2. It may be inferred from this that, if the line-element $QQ'$ is denoted by $d''s$,

$$d''s^2 = ds^2 + d's^2.$$

3. A line-element is a contravariant vector, whose direction-constants $\xi^a$ are given by the differential coefficients $dx_a/ds$.

4. If a vector is displaced parallel to itself (the word "parallel"

being used in the sense that was given it by LEVI CIVITA [1])), its starting point moving along a line-element $dx_a$, the changes of its direction-constants are given by

$$d\xi^a = -\Sigma\,(bc)\begin{Bmatrix} bc \\ a \end{Bmatrix}\xi^c dx_b. \tag{10}$$

§ 6. Let us now imagine that not only the values of the coordinates but also those of the potentials $g_{ab}$ are inscribed in the diagram $R_4$.

A physicist who wants to study phenomena as affected by the gravitational field will then be enabled, using the numbers which he sees in the diagram, to assign definite values, indepen-

[1]) In order to state what is the meaning of a parallel displacement of a vector we may remark in the first place that, when, at any point $P$, we have two directions at right angles to each other and determined by the constants $\xi_a$ and $\xi'_a$, the four quantities

$$\xi''^a = \xi^a \cos\varphi + \xi'^a \sin\varphi$$

will also satisfy the condition that is fulfilled by direction-constants, (viz. the condition

$$\Sigma\,(ab) g_{ab}\,\xi^a\,\xi^b = 1).$$

The direction which they determine is said to lie in the plane of the two given directions and to make an angle $\varphi$ with the former of these.

Let $P$ be a point in $R_4$ and $L$ a geodesic line starting from it. We shall now define a parallel displacement of a vector $PA$, the starting point $P$ of which moves along $L$.

1. If, in the first place, at the point $P$ the vector $PA$ is directed along $L$, it shall constantly be directed along that line.

2. Similarly, if originally the vector is perpendicular to the line, it shall remain at right angles to it. This, however, does not completely determine the direction of the vector when a point $Q$ has been reached, and we therefore complete the definition as follows:

Draw from the point $P$ a second geodesic line $L'$ that makes an infinitely small angle with the line $L$ and whose direction at the point $P$ lies in the plane containing the initial direction of $L$ and that of the vector $PA$. Take equal infinitely small segments $PQ$ and $PQ'$ on $L$ and $L'$. Then the line-element $QQ'$ will give us the direction of the vector $PA$ after its displacement to the point $Q$.

Repeating this construction, one can displace the vector parallel to itself over any finite part of the geodesic $L$.

3. If finally the vector $PA$ in its initial position has a direction neither along the line $L$ nor perpendicular to it, we decompose it into two components having these directions. Displacing each of them parallel to itself along the line, say to a point $R$, and keeping their magnitudes constant, we shall find two vectors at the point $R$. Compounding these we obtain a definite resulting vector and this will give us the direction of $PA$ after a parallel displacement to the point $R$.

This definition of a parallel displacement along a geodesic implies the definition of such a displacement along a given infinitely short line, for such a line may always be considered as the first element of a geodesic. Proceeding by infinitely small steps, we may now also displace a vector parallel to itself along any length of an arbitrarily chosen line that is no geodesic.

Working out what has been said here, one is led to eq. (10).

dent of the choice of coordinates, to lengths of lines and to intervals of time; he can express them in what may be called "invariant" measure. A first instance of this kind is the distance between two neighbouring points in the diagram, the invariant measure for which will simply be the value of $ds$. As a second example we may take the length of an infinitely short rod. Let $L$ and $L'$ be the world-lines of its extremities, $A$ a point of the first line corresponding to the instant $x_4$ for which we want to evaluate the length, and $B$ a point of $L'$ determined by the condition that $AB$ is perpendicular to $L'$. Then we shall measure the length $l$ of the rod by [1])

$$l^2 = -AB^2, \tag{11}$$

calculating $AB^2$ by means of the formula for $ds^2$.

The necessary calculation can be performed in the following manner. Let $A'$ be the point of $L'$ corresponding to the same time $x_4$ as $A$, and let $B$ correspond to $x_4 + \tau$. Then the infinitely short time $\tau$ is determined by the condition that $AB$ is at right angles to $L'$ (we may just as well say, at right angles to $L$) and having found $\tau$ one knows $A'B^2$ and $AB^2 = AA'^2 - A'B^2$. The result is

$$l^2 = -\Sigma\,(ab) g_{ab}(x'_a - x_a)(x'_b - x_b) + \frac{\{\Sigma\,(ab) g_{ab}\dot{x}_a(x'_b - x_b)\}^2}{\Sigma\,(ab) g_{ab}\dot{x}_a\dot{x}_b} \tag{12}$$

Here the coordinates of $A$ are denoted by $x_a$ and those of $A'$ by $x'_a$ (so that $x'_4 = x_4$). The symbols $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, $\dot{x}_3$ represent the components of the velocity of the first extremity of the rod, $(\dot{x}_4 = 1)$.

Owing to the way in which it has been found, the above expression (12) is invariant. It may be remarked that, if instead of the length of $AB$ we had taken that of $AA'$, which depends on the "simultaneous" positions of the two ends, the result would have depended on the choice of coordinates.

That $l$, as defined by (12), may appropriately be termed the "length" of the rod, will be clear if one remarks that, if all circumstances remain the same, $l$ is proportional to the differences of corresponding coordinates $x'_a - x_a$, and that for a rod at rest,

[1]) If the potentials have the values that are often ascribed to them (f.i. $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$, $g_{44} = c^2$, $g_{ab} = 0$ for $a \neq b$, or values little different from these) $AB^2$ becomes negative. In order to find a real value for $l$ (11) has been written with the negative sign.

placed in a field characterized by

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{44} = c^2, \quad g_{ab} = 0 \text{ for } a \neq b,$$

the formula becomes

$$l^2 = (x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + (x'_3 - x_3)^2.$$

§ 7. In what precedes nothing has been said of the phenomena presented by rods placed in a gravitational field; we have only adopted a rule for measuring their length. If a physicist, adhering to the theory of relativity, were able to observe all the minute effects required by this theory and wanted to account for them, he certainly would follow this rule, because it would enable him to discuss all his observations, f.i. those about the influence of temperature and of external forces, in terms that are independent of the choice of coordinates. An "ideal rod of unvariable length" would mean to him a rod whose "invariant" length $l$ would be the same under all circumstances.

Take f.i. the case of a field, which, when $x_1$, $x_2$, $x_3$ are rectangular cartesian coordinates, is characterized by the potentials specified at the end of § 6, that is a field in which there are no forces of gravitation. Let a rod be placed in this field in the direction $x_1$ and let it move with the velocity $v$ in that direction. Then $\dot{x}_1 = v$, $\dot{x}_2 = \dot{x}_3 = 0$, $\dot{x}_4 = 1$, so that (12) becomes

$$l^2 = (x'_1 - x_1)^2 + \frac{v^2(x'_1 - x_1)^2}{c^2 - v^2} = \frac{c^2}{c^2 - v^2}(x'_1 - x_1)^2.$$

Now, it would be very natural to measure the length of the rod by the difference of the simultaneous values of the coordinates $x_1$ and $x'_1$. If $l$ is the same under all circumstances, this new length $l_e$ (say the "euclidian" length) will change with the velocity $v$, according to the formula

$$l_e = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, l,$$

in which one recognizes the well known contraction that is brought about by a motion of translation.

§ 8. The influence of a gravitation-field on the motion of a clock can be treated in a similar way. Let the clock be so small that we may speak of its world-line $L$; on this line the successive ticks will mark a series of points $P$, $Q$, $R$, . . ., which we shall suppose to be infinitely near each other. The statement that a clock is "perfect" will have a meaning independent of the choice of coordinates, if we understand by it that the distances $PQ$, $QR$, . . ., when expressed in invariant measure, will be equal for the particular clock considered, whatever be the circumstances. If the length of this distance is $\tau$ and if $dx_4$ is the interval of time between successive ticks, we have

$$\tau^2 = \Sigma\,(ab) g_{ab}\, dx_a dx_b,$$

or

$$\tau^2 = (g_{11}\dot{x}_1^2 + \ldots + 2g_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + \ldots + 2g_{14}\dot{x}_1 + \ldots g_{44}) dx_4^2,$$

a relation from which the value of $dx_4$ in different cases can be deduced.

§ 9. A rod may be conceived to have different lengths $l$ according to the circumstances under which it is placed. A short discussion, under certain simplifying assumptions, of changes of this kind (in the case of an infinitely short rod) will be of interest with a view to a theory that has been proposed by WEYL [1]) and according to which there is a close and fundamental connexion between gravitational and electromagnetic phenomena.

The length of the rod might change with the time $x_4$, with the position of one of the extremities, determined by its coordinates $x_1$, $x_2$, $x_3$, and with the direction in which the rod is placed in the space $R_3$. We shall however discard this latter possibility, so that we are only concerned with variations of $x_1, \ldots x_4$. If these are infinitely small, the change produced in $l$ may be assumed to be a homogeneous linear function of them, and if, further, we suppose it to be proportional to $l$ itself, we may write

$$d \log l = \Sigma\,(a) P_a dx_a \tag{13}$$

with coefficients $P_a$ solely depending on the coordinates. $P_a$ will be a covariant vector, because, according to the fundamental idea of EINSTEIN's theory, for a given displacement in $R_4$, $d \log l$ must be independent the choice of coordinates.

Eq. (13) may be applied to any part of a world-line, say between the points $C$ and $D$, which, of course, means that during a certain interval of time the position of the rod in $R_3$ undergoes some definite change. We shall suppose the dimensions of the

[1]) Berl. Sitzungsberichte, p. 465, 1918.

line $CD$ to be very small and we shall calculate the change of $l$ accurately up to quantities of the second order with respect to these dimensions.

Then, if for any point $E$ of the path we put

$$x_a = x_{a,C} + \mathbf{x}_a,$$

we must, in (13), replace $P_a$ by

$$P_a + \Sigma\,(b)\,\frac{\partial P_a}{\partial x_b}\,\mathbf{x}_b,$$

where we have to take, both for $P_a$ and for its differential coefficients, their values at the point $C$.

The total change of $\log l$ now becomes

$$\Delta \log l = \Sigma\,(a) P_a \int d\mathbf{x}_a + \Sigma\,(ab)\,\frac{\partial P_a}{\partial x_b} \int \mathbf{x}_b\, d\mathbf{x}_a.$$

The last term in this expression depends on the path along which the transition from $C$ to $D$ has taken place, and if $\Delta' \log l$ is the change corresponding to a second path $CE'D$, we have

$$\Delta \log l - \Delta' \log l = \Sigma\,(ab)\,\frac{\partial P_a}{\partial x_b} \int \mathbf{x}_b\, d\mathbf{x}_a, \tag{14}$$

the integral being taken along the closed path $CEDE'C$ in the direction indicated by the order of the symbols.

The integral vanishes for $a = b$ and we have $\int \mathbf{x}_a\, d\mathbf{x}_b = -\int \mathbf{x}_b\, d\mathbf{x}_a$, the sum of the two integrals being $\int d(\mathbf{x}_a \mathbf{x}_b) = 0$.

Thus (14) may be replaced by

$$\Delta \log l - \Delta' \log l = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(ab) \left( \frac{\partial P_a}{\partial x_b} - \frac{\partial P_b}{\partial x_a} \right) \int \mathbf{x}_b\, d\mathbf{x}_a. \tag{15}$$

This again shows that in general the final length of the rod will be different, according to the path along which the transition from $C$ to $D$ has been made. If there is to be no such difference, the components of the vector $P_a$ must depend on a potential $\varphi$, so that

$$P_a = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_a}.$$

§ 10. There is a certain formal similarity between the expressions to which we have now been led and the relations which exist in an electromagnetic field.

Indeed, it is well known that the state of things in such a field can be described by means of a fourfold vector $\overline{P}_a$, the components of electric and magnetic force being given by the expressions

$$\frac{\partial \overline{P}_a}{\partial x_b} - \frac{\partial \overline{P}_b}{\partial x_a}, \tag{16}$$

which taken together, form an antisymmetric covariant tensor of the second rank.

This analogy would have a deeper meaning if the two vectors $P_a$ and $\overline{P}_a$ could be assimilated to each other, so that with a constant numerical coefficient $\lambda$,

$$P_a = \lambda \overline{P_a}. \tag{17}$$

This would mean, and it would certainly be very important, that the changes of length considered in the preceding § are the indications of an electromagnetic field and that, conversely, any electromagnetic field gives rise to changes of that kind. In particular, the electric and the magnetic force would be made responsible for the fact that the length of a rod depends on the path in $R_4$ that has been followed. So long, however, as these effects of an electromagnetic field have not been observed or, at all events, have not been made probable by other arguments (for one can always account for their apparent absence by a too low value of the coefficient $\lambda$), I think we had better not admit the connexion in question, confining ourselves to the introduction in electromagnetic theory of the fourfold potential and not ascribing to it any other physical meaning.

Two remarks more may be made. In the first place, if the fourfold vectors $P_a$ and $\overline{P}_a$ really were indissolubly connected, this would amount to an action of an electromagnetic field widely different from anything that could reasonably be expected. This may be seen by taking the case of a constant electric field. In this we are concerned with one only of the components $\overline{P}_a$, namely with $\overline{P}_4$, the ordinary electrostatic potential, and the expression (13) would reduce to $P_4 dx_4$, showing that the length of a rod would, in course of time, continually and indefinitely increase or diminish. These changes might be detected by the following experiment. Of two equal rods, first juxtaposed in a region 1, one is left there, while the other is removed to a region

2 where the potential has a different value. After some time it is brought back to its original position and again compared with the first rod. The effect of these manipulations would be a difference in the two lengths that might be increased at will, simply by keeping the second rod for a longer time in the region 2.

In the second place, from electromagnetic phenomena one can deduce differences or changes only of potentials, the absolute values remaining undetermined. On the contrary, the numbers inscribed in the diagram $R_4$ enable us to determine in invariant measure the lengths of rods. Attending to their changes and applying eq. (13) one could obtain a knowledge of the potentials themselves.

§ 11. I shall conclude with some remarks on a generalisation of WEYL's theory that has been proposed by EDDINGTON [1]). His considerations are the more interesting because they can be developed to a certain extent without it being necessary to introduce the potentials $g_{ab}$.

EDDINGTON's aim is to arrive at the anti-symmetric covariant tensor $F_{ab}$ of electric and magnetic force, at the fourfold potential on which these forces depend, and at the gravitation-potentials, making all these quantities flow from one common source. For this purpose, he begins by assigning to each point of the diagram $R_4$, in which coordinates, but no values $g_{ab}$ have been inscribed, 40 numbers. These are regarded as continuous functions of the four coordinates and are then subjected to certain mathematical operations.

The *fundamental numbers* as we may call them are represented by the symbol $\Gamma^c_{ab}$, with the relation

$$\Gamma^c_{ba} = \Gamma^c_{ab}, \tag{18}$$

by which the number of mutally independent quantities that otherwise would be 64, is reduced to 40.

Since no potentials $g_{ab}$ have been introduced, we can speak neither of the length of a line-element, nor of the magnitude of a vector $A$ (as we may call any line-element); there can be question only of the components $dx_a$ or $A^a$. There is nothing, however, that prevents us from imagining that, when the starting point of a vector moves along a line-element $dx_b$, the components

[1]) Proc. Royal Soc. 99, 104, 1921. The mathematical theory of relativity, p. 213.

of the vector change in some specified manner. Making a definite assumption concerning these changes, EDDINGTON defines what he calls a parallel displacement; I shall rather say the "selected" displacement in order to keep in mind that, so long as there is no $ds$, there can be no question of direction-constants and of angles, nor of a parallel displacement in the sense in which the term was understood in § 5.

The fundamental numbers serve precisely for the definition of the changes in the components of a vector $A^a$, which accompany its displacement along a line-element $dx_b$, EDDINGTON's formula being

$$dA^a = -\Sigma\,(bc)\Gamma^a_{bc}A^c dx_b. \tag{19}$$

Line-elements and vectors in $R_4$ may be conceived to remain the *same* whatever be the coordinates which one uses for the evaluation of their components, and in the definition contained in (19) it is to be understood that the element $dx_b$ along which the displacement is effected and the vector $A^a$, both before and after its displacement, are always the same in this sense. Hence, equations of the form (19), but with other fundamental numbers $\Gamma^a_{bc}$ will hold after a change of coordinates. It is not difficult to find the relations between the original and the new fundamental numbers, but these transformation-formulae are found to have a form different from the one that is characteristic of tensors. In other terms, $\Gamma^a_{bc}$ is not a tensor [1]).

§ 12. We shall now use eq. (19) for calculating the changes $\Delta A^a$ which occur in the components of a vector, when in a succession of infinitely small selected displacements, its starting point is made to move in a closed line drawn in $R_4$. The dimensions of this line are supposed to be infinitely small and we shall limit ourselves to quantities that are of the second order with respect to them.

Let the motion begin at the point $P$, and let for any other

[1]) The transformation-formula for $\Gamma^a_{bc}$ is

$$\left(\frac{\partial x'_a}{\partial x_b} = \pi_{ba}, \quad \frac{\partial x_a}{\partial x'_b} = p_{ab}\right)$$

$$\Gamma'^a{}_{bc} = -\Sigma\,(kl)\,p_{kc}\,p_{lb}\frac{\partial \pi_{ka}}{\partial x_l} + \Sigma\,(klm) p_{lb}\,p_{mc}\,\pi_{ka}\,\Gamma^k{}_{lm}. \tag{20}$$

If here, on the right-hand side we had the last term only, $\Gamma^a{}_{bc}$ would be a tensor.

Using the relation $\partial\pi_{ka}/\partial x_l = \partial\pi_{la}/\partial x_k$, one can deduce from (20) that $\Gamma'^a{}_{bc}$ has like $\Gamma^a{}_{bc}$ the symmetry expressed in (18).

point $Q$ of the cycle

$$x_a - x_{aP} = \mathrm{x}_a.$$

Then we have to calculate

$$\Delta A^a = - \Sigma\,(bc) \int \Gamma^a_{bc} A^c\, d\mathrm{x}_b. \tag{21}$$

We must here keep in mind that the first factor under the sign of integration is the value of $\Gamma^a_{bc}$ at the point $Q$ and that for the second factor we must take the component $A^c$ such as it has become when that point has been reached. It is preferable, however, to understand by these symbols the values corresponding to the fixed point $P$. Doing so, we must replace the first factor by

$$\Gamma^a_{bc} + \Sigma\,(s) \Gamma^a_{bc,s}\, \mathrm{x}_s,$$

where $\Gamma^a_{bc,s}$ is the value at $P$ of the differential coefficient of $\Gamma^a_{bc}$ with respect to $x_s$. As to the change of $A^c$ during the motion from $P$ to $Q$, it will be sufficient to calculate it up to terms of the first order and we can therefore directly deduce it from (19), replacing the differentials $dx_b$ by $x_{bQ} - x_{bP} = \mathrm{x}_b$ and understanding by $A^c$ the initial values at the point $P$. Thus the second factor in the integral has to be replaced by

$$A^c - \Sigma\,(hi) \Gamma^c_{hi} A^i \mathrm{x}_h.$$

After substitution (21) becomes ($\int d\mathrm{x}_b = 0$, and we may omit the product $\mathrm{x}_s \mathrm{x}_h$)

$$\Delta A^a = - \Sigma\,(bcs) \Gamma^a_{bc,s} A^c \int \mathrm{x}_s\, d\mathrm{x}_b + \Sigma\,(bchi) \Gamma^a_{bc} \Gamma^c_{hi} A^i \int \mathrm{x}_h\, d\mathrm{x}_b.$$

We may now, in the first term, write $i$ and $h$ instead of $c$ and $s$ and then obtain a new form of the same expression by interchanging in both terms the suffixes $h$ and $b$. Finally, taking half the sum of the two forms and remembering that

$$\int \mathrm{x}_b\, d\mathrm{x}_h = - \int \mathrm{x}_h\, d\mathrm{x}_b,$$

we find

$$\Delta A^a = \tfrac{1}{2} \Sigma\,(bih) B^a_{ihb} A^i \int \mathrm{x}_h\, d\mathrm{x}_b, \tag{22}$$

where

$$B^a_{ihb} = \Gamma^a_{hi,b} - \Gamma^a_{bi,h} + \Sigma\,(c) [\Gamma^a_{bc} \Gamma^c_{hi} - \Gamma^a_{hc} \Gamma^c_{bi}]. \tag{23}$$

Our conclusion is therefore that in general the components of a vector will have changed when it has been carried round along a closed path and that the changes are determined by the expressions (23). In what follows we shall be concerned with the quantities $B^a_{ihb}$ only or rather with a tensor $G_{ih}$ of the second rank that may be derived from them, and we shall scarcely have to think any more of the foregoing considerations, which were intended to deduce $B^a_{ihb}$ from the fundamental numbers and to point out its geometrical meaning.

It is easily shown that $B^a_{ihb}$ is a tensor, covariant as to the suffixes $i$, $h$, $b$ and contravariant as to $a$ [1]).

The covariant tensor $G_{ih}$ that was mentioned just now is deduced from $B^a_{ihb}$ by the operations indicated in the formula [2])

$$G_{ih} = \Sigma\,(a) B^a_{iha}. \tag{24}$$

If the fundamental numbers are arbitrarily chosen, the tensor $G_{ih}$ will be neither symmetric, nor antisymmetric. It may however be decomposed into a symmetric and an antisymmetric part, namely

$$R_{ih} = \tfrac{1}{2}(G_{ih} + G_{hi}), \qquad F_{ih} = \tfrac{1}{2}(G_{ih} - G_{hi}).$$

It is easily seen that these are both covariant tensors and that

$$R_{hi} = R_{ih}, \qquad F_{hi} = -F_{ih}.$$

Performing the operations leading from the tensor (23) to $F_{ih}$ and taking into account the relations (18), one finds

$$F_{ih} = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(a)(\Gamma^a_{ah,i} - \Gamma^a_{ai,h}),$$

which shows that the tensor $F$ depends on a fourfold potential $A_k$. If we put

$$A_k = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(a)\,\Gamma^a_{ak}, \tag{25}$$

---

[1]) In eq. (22) we may apply to $A^i$ the transformation-formula for line-elements. We may proceed in the same way with $\mathbf{x}_h$, because this quantity is treated as infinitely small, and with $\Delta\,A^a$ because it is the difference of two vectors beginning at the same point. In all these cases the quantities $p_{ab}$ and $\pi_{ab}$ which occur in the transformation-formulae may be taken such as they are at the point $P$. We may do the same in transforming $d\mathbf{x}_b$. It is true that this element lies at a certain distance from $P$, but the influence which this has on $p_{ab}$ would lead to terms of an order higher than needs be considered.

Thus:

$$\Delta\,A'^k = \Sigma\,(a)\pi_{ak}\,\Delta\,A^a = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(abih)\pi_{ak}\,B^a{}_{ihb}\,A^i \textstyle\int \mathbf{x}_h\,d\mathbf{x}_b$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\Sigma\,(abihlmn)\,\pi_{ak}\,p_{il}\,p_{hm}\,p_{bn}\,B^a{}_{ihb}\,A'^l \textstyle\int \mathbf{x}'_m\,d\mathbf{x}'_n,$$

an expression that has the same form as (22) if we put

$$B'^k{}_{lmn} = \Sigma\,(abih)\pi_{ak}\,p_{il}\,p_{hm}\,p_{bn}\,B^a{}_{ihb}.$$

[2]) Proof that $G_{ih}$ is a covariant tensor. It suffices to express in the components $B$ the quantities $B'$ occurring in

$$G'_{ih} = \Sigma\,(a) B'^a{}_{iha}$$

and to use the relations

$$\Sigma\,(a)\,\pi_{ba}\,p_{ca} = \delta^c{}_b.$$

we may write

$$F_{ih} = \frac{\partial A_h}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_h}. \tag{26}$$

Following EDDINGTON we may now identify the quantities $F_{ih}$ with the components of electric and magnetic force, or the components $A_k$ with those of the fourfold electromagnetic potential.

It must be remarked, however, that the quantities $A_a$ as defined by (25), do not constitute a tensor.

If we require them to do so, we must replace (25) by [1])

$$A_k = \tfrac{1}{2}\Sigma\,(a)\Gamma^a_{ak} + \frac{\partial\psi}{\partial x_k},$$

$\psi$ being a function of the coordinates for which the transformation-formula is

$$\psi' = \psi - \tfrac{1}{2}\log p \tag{27}$$

($p$ is the functional determinant of the original coordinates with respect to the new ones). [1])

By the addition of the terms depending on $\psi$ (26) is not changed.

§ 13. If $h, i, j$ are all different, we have according to (26)

$$\frac{\partial F_{hi}}{\partial x_j} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_h} + \frac{\partial F_{jh}}{\partial x_i} = 0.$$

---

[1]) Using (20) we may write

$$A'_r = \tfrac{1}{2}\Sigma\,(a)\Gamma'^a{}_{ar} + \frac{\partial\psi'}{\partial x'_r} = -\tfrac{1}{2}\Sigma\,(akl)\,p_{kr}\,p_{la}\,\frac{\partial\pi_{ka}}{\partial x_l} +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\Sigma\,(aklm)p_{la}\,p_{mr}\,\pi_{ka}\,\Gamma^k{}_{lm} + \frac{\partial\psi}{\partial x'_r} - \tfrac{1}{2}\frac{\partial\log p}{\partial x'_r}.$$

But $\Sigma\,(a)\,p_{la}\,\pi_{ka} = \delta^l{}_k$ and consequently

$$\Sigma\,(a)\frac{\partial}{\partial x_l}(p_{la}\pi_{ka}) = 0.$$

By this the first term of the expression for $A'_r$ becomes

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\,(l)\frac{\partial p_{lr}}{\partial x_l} = \tfrac{1}{2}\Sigma\,(lu)\pi_{lu}\frac{\partial p_{lr}}{\partial x'_u} = \tfrac{1}{2}\Sigma\,(lu)\pi_{lu}\frac{\partial p_{lu}}{\partial x'_r} =$$
$$= \tfrac{1}{2}\Sigma\,(lu)\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial p_{lu}}\frac{\partial p_{lu}}{\partial x'_r} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial\log p}{\partial x'_r},$$

and if, in the third term, we write

$$\frac{\partial}{\partial x'_r} = \Sigma\,(m)p_{mr}\frac{\partial}{\partial x_m}$$

the formula becomes

$$A'_r = \Sigma\,(m)\,p_{mr}A_m,$$

showing that $A_k$ is a covariant tensor.

It may also be noted that the transformations defined by (27) form a group.

There are four formulae of this kind and these form one group of MAXWELL's equations.

As to the other group, in which the density of electric charge and the components of the convection-current occur, these equations must necessarily contain a contravariant tensor connected with $F_{ih}$. A tensor $F^{ab}$ of this kind can only be defined if we have introduced beforehand the components $g_{ab}$, the relation between the two tensors being expressed by the formula

$$F^{ab} = \Sigma\ (ih) g^{ai} g^{bh} F_{ih}.$$

Moreover the equations in question contain the factor $\sqrt{-g}$.

EDDINGTON has remarked, however, that the gravitation-potentials $g_{ab}$ and all quantities that depend on them, may also be considered as derived from the fundamental numbers that have given us the components of electric and magnetic force.

Indeed, we have so far used only the antisymmetric part $F_{ih}$ of the tensor $G_{ih}$ and we may now have recourse to its symmetric part $R_{ih}$. Since $g_{ih}$ must also be symmetric we may put

$$g_{ih} = \frac{1}{\lambda} R_{ih},$$

$\lambda$ being a constant.

The effect of this will be that all quantities involved in the phenomena of gravitation and electromagnetism, namely the potentials $g_{ab}$, the electric and magnetic forces $F_{ab}$ and the corresponding contravariant tensor $F^{ab}$ have been derived from the fundamental numbers. [1])

§ 14. All that has been said in §§ 11—13 amounts to the establishment of certain rules for the mathematical operations by means of which the components of electric and magnetic force and, if so desired, the gravitation-potentials can be derived from the fundamental numbers.

Now it must be remarked that the variety of these numbers is considerably greater than that of the quantities which we want to deduce from them. Indeed, there are four components

[1]) The only quantity occurring in the above formulae of which this cannot, as yet, be said, is the function $\psi$ which appears in our definition of $A_k$. This function is to a certain extent undeterminate, the only condition being that it must transform according to eq. (27). If we put $\psi = -\frac{1}{2} \log \sqrt{-g}$, an assumption that agrees with (27), $\psi$ also will have its origin in the fundamental numbers.

of the electromagnetic potential and ten values $g_{ab}$, whereas there are no less than fourty fundamental numbers. It may well be asked whether after all it would not be preferable simply to introduce the functions that are necessary for characterizing the electromagnetic and gravitational fields, without encumbering the theory with so great a number of superfluous quantities. The introduction of these could be justified, and would, of course, become very important, only if we had good grounds for thinking that something that might sooner or later be observed lies behind their wide diversity.

It may also be remarked that, in any particular case, the fundamental numbers must be such that they lead to the really existing values of electric and magnetic force and of the gravitation-potentials. However, I have found it by no means easy to account f. i. for the values

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{44} = c^2$$

by suitable assumptions concerning EDDINGTON's $\Gamma^c_{ab}$.

§ 15. Some words remain to be said about the analogy between eq. (10) and (19). The direction-constants in the former equation may be considered as the components of a vector of unit magnitude, so that, like (19), (10) expresses a rule for a certain selected displacement of a vector. In so far it is a special case of (19), $\Gamma^a_{bc}$ being replaced by $\left\{ \begin{matrix} bc \\ a \end{matrix} \right\}$ (by which condition (18) is satisfied).

By this the tensors $B^a_{ihb}$ and $G_{ih}$ defined by (23) and (24) become the well known tensors connected with the curvature of $R_4$, and the latter of them becomes symmetric, a simplification that is important for the theory of gravitation.

In order to prove it, one has to show that the antisymmetric part (26) vanishes. This becomes clear if one takes into account that, according to (25),

$$2A_k = \Sigma\,(a) \left\{ \begin{matrix} ak \\ a \end{matrix} \right\} = \Sigma\,(ab) g^{ab} \begin{bmatrix} ak \\ b \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \Sigma\,(ab) g^{ab} \left( \begin{bmatrix} ak \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} bk \\ a \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{2} \Sigma\,(ab)\, g^{ab}\, g_{ab,k}$$

$$= \frac{1}{2g} \Sigma\,(ab) \frac{\partial g}{\partial g_{ab}} \frac{\partial g_{ab}}{\partial x_k} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x_k} = \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x_k}.$$