

Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern

Professor Dr. Carl Dietrich Harries



 Springer

Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern

I. Band

Drittes Heft (abgeschlossen am 1. November 1921)

Mit 90 Textfiguren, 3 Kurvenblättern und 3 Tafeln

Unter Mitwirkung von

Arthur Clausing, Dr. Robert Fellingner, Dr. Bruno Fetkenheuer, Dr. Adolf Franke, Professor Rob. M. Friese, Professor Dr. Hans Gerdien, Dr.-Ing. e. h. Carl Köttgen, Dr. Georg Krause, Karl Küpfmüller, Martin Lebegott, Fritz Lüschen, Dr. Georg Masing, Dr. Werner Nagel, Professor Dr. Fritz Noether, Geheimrat Professor Dr.-Ing. Walter Reichel, Dr. Hans Riegger, August Rotth, Professor Dr. Reinhold Rüdenberg, Dr. Hermann von Siemens, Erich Wandenberg

herausgegeben von

Professor Dr. Carl Dietrich Harries

Geheimer Regierungsrat



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1922

Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern

Erster Band
1920—1922



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Additional material to this book can be downloaded from <http://extras.springer.com>

ISBN 978-3-662-22748-0

ISBN 978-3-662-24679-5 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-24679-5

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1927

Inhaltsübersicht.

1. Heft.

	Seite
Nachruf für Wilhelm von Siemens. Von Professor Dr. Carl Dietrich Harries	1
I. Mitteilungen aus den wissenschaftlichen Laboratorien des Wernerwerkes der Siemens & Halske A.-G. zu Siemensstadt (Direktion: Professor Dr. A. Raps † und Dr. A. Franke):	
a) Meßinstrumenten-Abteilung (Vorstand H. von Buol):	
W. Hausser: Über die mit Sekundärstrahlen arbeitende Hochvakuumglühkathodenröhre als Schwingungserzeuger	19
H. Zölllich: Prüfung von Meßgeräten zur Aufzeichnung sich rasch verändernder Größen	24
b) Schwachstromkabel-Abteilung (Vorstand Dr. A. Ebeling):	
W. Schottky: Zur Raumladungstheorie der Verstärkerröhren	64
c) Elektrochemische Abteilung (Vorstand Prof. V. Engelhardt und Dr. Gg. Erlwein):	
Gg. Erlwein & H. Becker: Über die Verwendung der stillen Entladung zum Nachweis schlagender Wetter und zur Gasanalyse	71
H. Becker: Über die Extrapolation und Berechnung der Konzentration und Ausbeute von Ozonapparaten	76
II. Aus dem Physikalisch-Chemischen Laboratorium der Siemens & Halske A.-G. und Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H. zu Siemensstadt (Leiter Prof. Dr. H. Gerdien):	
H. Gerdien & R. Holm: Der Luftgeschwindigkeitsmesser der Siemens & Halske A.-G.	107
H. Gerdien & W. Rihl: Ein Resonanzrelais	122
K. Boedeker & H. Riegger: Über Frequenzrelais	126
H. Gerdien & H. Riegger: Ein akustischer Schwinger	137
K. Boedeker & H. Riegger: Über Bau und Anwendungen eines mechanischen Schwingers	141
E. Wilke-Dörfurt: Zur Reindarstellung von Uranverbindungen	143
M. Moeller: Technische Gasanalyse durch Messung der Wärmeleitfähigkeit	147
Herm. v. Siemens: Über die Ableitung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik und verwandte Fragen.	154
III. Aus den wissenschaftlichen Laboratorien des früheren Glühlampenwerkes der Siemens & Halske A.-G. Charlottenburg (Direktion: Dr. O. Feuerlein):	
M. Pirani: Beobachtungen über die Spitzenentladung in Stickstoff	167
IV. Aus der Rechnungsabteilung des Dynamowerkes der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H. Siemensstadt (Direktion: Geheimrat Professor Dr. ing. W. Reichel):	
R. Rüdtenberg: Fremd- und Selbsterregung von magnetisch gesättigten Gleichstromkreisen.	179

2. Heft.

August Raps †. Von Dr. A. Franke	1
I. Aus der Abteilung Hochspannung der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H. zu Siemensstadt (Direktion: Dr.-Ing. e. h. C. Köttgen; Abteilungsleiter: F. Schrottkke).	
R. Bauch: Die Theorie des Drehstrom-Manteltransformers	7
II. Aus dem Charlottenburger Werk der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H. zu Charlottenburg (Direktion: Professor Rob. M. Friese).	
Rob. M. Friese: Über Durchschlagsfestigkeit von Isolierbölen	41
C. Michalke: Rechnen mit zerstreut zurückgeworfenem Licht	56
Fr. Natalis und H. Behrend: Kreisdiagramme in verketteten Wechselstromkreisen	65

	Seite
III. Aus dem Physikalischen Laboratorium des Kabelwerkes der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H. zu Gartenfeld (Direktion: A. von Eicken).	
L. Lichtenstein: Bemerkungen über das elektromagnetische Verhalten gekreuzter Freileitungen	76
IV. Aus den Forschungslaboratorien des Siemens-Konzerns zu Siemensstadt.	
a) Physikalisch-Chemisches Laboratorium (Leiter: Prof. Dr. H. Gerdien).	
Ernst Wilke - Dörfurt: Über die Bestimmung des Magnesiums in Legierungen . .	84
b) Organische Abteilung.	
C. Harries und Fr. Evers: Beiträge zur Bestimmung der Molekulargröße des Kautschukkohlenwasserstoffes auf chemischem Wege	87
V. Aus den Laboratorien des früheren Glühlampenwerkes der Siemens & Halske A.-G. zu Charlottenburg.	
Gg. Masing: Über die Rekristallisation bei kalt gerecktem Zinn	96
VI. Aus den Laboratorien des Wernerwerkes der Siemens & Halske A. G. zu Siemensstadt (Direktion: Dr. A. Franke).	
a) Meßinstrumenten-Abteilung (Vorstand: H. von Buol).	
R. Jaeger: Wärmedrosseln an stromdurchflossenen Einschmelzungen in Vakuumröhren	104
b) Schwachstromkabel-Abteilung (Vorstand: Dr. A. Ebeling; Laboratoriumsleiter: Obering. F. Lüschen).	
W. Schottky: Röhrenvoltmeter und Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung. . . .	110

3. Heft.

I. Aus dem Zentrallaboratorium des Wernerwerkes der Siemens & Halske A.-G. zu Siemensstadt (Direktion: Dr. Ad. Franke).	
F. Lüschen und G. Krause: Behandlung induktiv gekoppelter Schwingungskreise als Siebkette.	1
G. Krause und A. Clausing: Einschaltvorgänge bei ein- und zweigliedrigen Siebketten beim Anlegen einer sinusförmigen E.M.K.	8
K. Küpfmüller: Zur Theorie und Messung des Nebensprechens in Spulenleitungen. . . .	18
II. Aus dem ehemaligen Glühlampenwerk der Siemens & Halske A.-G.	
Gg. Masing: Primäre und sekundäre Rekristallisation	31
III. Aus der Zentralwerksverwaltung der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H. zu Siemensstadt (Direktion: Dr.-Ing. e. h. C. Köttgen).	
Fritz Noether: Über Stromaufnahme in Metallrohrleitungen und verwandte Erdungsfragen	35
IV. Aus der Rechnungsabteilung des Dynamowerkes der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H. zu Siemensstadt (Direktion: Geheimrat Prof. Dr. Dr.-Ing. W. Reichel).	
R. Rüdemberg: Über den räumlichen Verlauf von Erdschlußströmen	61
V. Aus dem Charlottenburger Werk der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H. zu Charlottenburg.	
E. Wandenberg: Beiträge zur Kenntnis des Schleichens der Drehstrom-Asynchronmotoren. (Dissertation zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs).	81
VI. Aus dem Forschungslaboratorium des Siemens-Konzerns zu Siemensstadt.	
H. Riegger: Über Kettenleiter	126
Herm. v. Siemens: Über die Ableitung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik und verwandte Fragen (Schluß der in Heft 1 erschienenen Arbeit)	163
B. Fetkenheuer: Über den Nachweis von Fluor	177
C. Harries und W. Nagel: Zur Kenntnis der Aleuritinsäure	178

Namenverzeichnis.

- Abraham, Henri 1, 142.
 — M. 1, 63, 64, 68; 3, 62.
 Arnold, E. 3, 82, 83, 88, 112,
 123, 124.
 Bahr, E. v. 1, 168.
 Bauch, R. 2, 7, 21.
 Becker, H. 1, 71, 76.
 Behrend, H. 2, 65; 3, 55, 61.
 Ben. tt, R. 1, 108.
 Benedicks, C. 2, 104.
 Biermanns, J. 1, 180.
 Biltz, H. 1, 144.
 — W. 1, 144.
 Blackwell & Colpitts 3, 2.
 Bloch, Eugène 1, 142.
 Blondel, A. 1, 25, 41.
 Boedeker, K. 1, 126, 141.
 Boltzmann, L. 1, 148.
 Breisig, F. 3, 18, 24, 25, 58.
 Bruns, H. 1, 31.
 Busch, H. 1, 25.
 Campbell, E. 3, 1, 2.
 Chapmann, S. J. 1, 148.
 Claus ng, A. 2, 110, 120; 3, 8 ff.
 Clausius, R. 1, 147; 3, 168, 169.
 Cohn, Herm. 2, 60.
 Colp tts & Blackwell 3, 2.
 Czochralsky, J. 2, 98, 99, 100;
 3, 34.
 Deutsch, W. 3, 9.
 DieBelhorst, H. 2, 105, 106, 108.
 Eccles, W. H. 1, 142.
 Emde, F. 1, 25.
 Emde-Jahnke 3, 41, 42, 51.
 Endemann, H. 3, 179, 180, 181.
 Einthoven, W. 1, 63.
 Erlwe n, G. 1, 71.
 Estorff, W. 2, 55.
 Eucken, A. 1, 148, 149.
 Evers, F. 2, 87.
 Ewers, P. 1, 169.
 Fahrion, W. 3, 179.
 Feldmann & Herzog 3, 28.
 Ferraris, G. 3, 81.
 Fetkenheuer, B. 3, 178.
 Finzi, L. 1, 180.
 Fonrobert, E. 2, 88.
 Franck, J. 1, 167, 168, 174.
 Franke, A. 1, 135.
 Friese, Rob. M. 2, 41.
 Gaarz, W. 1, 61.
 Gerdien, H. 1, 107, 122, 132, 137,
 141, 150, 151.
 Gilowy, H. 1, 106.
 Goldschmidt, R. 2, 14.
 Görges, H. 3, 110.
 Gramberg, A. 1, 25.
 Hagedorn, M. 2, 85.
 Harries, C. D. 1, 1, 144; 2, 87, 88;
 3, 179 ff.
 Haußer, K. W. 1, 19.
 Helmholtz, H. 1, 179.
 Hertz, G. 1, 167.
 Herzog & Feldmann 3, 28.
 Heubach, J. 3, 82, 103, 104, 112.
 Hinrichsen-Kempf 2, 88.
 Hoepfner, K. 2, 110.
 Holm, R. 1, 107, 113, 114, 151.
 Hohage, H. 2, 110, 112.
 Howard 3, 178.
 Hull, A. W. 1, 19.
 Huni, E. 2, 92.
 Jäger, Rob. 2, 104, 105, 106.
 Jäger, W. 1, 25.
 Jahnke-Emde 3, 41, 42, 51.
 Jordan, F. W. 1, 142.
 Isnardi, Th. 1, 150.
 Kant, E. 1, 165.
 Ke math, Gg. 1, 127.
 Kempf (Hinrichsen) 2, 88.
 Kennely 1, 108.
 Kirchhoff, G. 3, 63.
 Klobß, M. 3, 83, 88, 90, 104, 110,
 112, 118, 119, 122 ff.
 Knudsen, M. 1, 148.
 Koepsel, A. 1, 108, 150, 151.
 Kohlrausch, F. 2, 105, 106, 108.
 Krause, Gg. 3, 1 ff., 8 ff.
 Kuepfmüller, K. 3, 18 ff.
 Kuhlmann, K. 3, 61.
 Kundt, A. 1, 148.
 Kurda, K. 2, 7.
 Lagrange, Ch. 1, 39.
 Lambert, J. 2, 56, 57, 59.
 Langmuir, A. C. 1, 150.
 Lax, E. 1, 167.
 Lenard, Ph. 1, 20, 121.
 Lichtenstein, L. 2, 76; 3, 18, 19,
 35, 62.
 Lüschen, Fr. 3, 1 ff.
 Magnanini, G. 1, 150.
 Marcusson, J. 2, 45.
 Mas.ng, Gg. 2, 96; 3, 31 ff.
 Maxwell, J. 1, 64, 65, 147, 148.
 Mayer, E. W. 2, 92.
 Mehmcke, R. 1, 61.
 Michalke, C. 2, 56; 3, 35.
 M. eg, W. 2, 92.
 Moeller, M. 1, 147.
 Morris, D. 1, 108.
 Moser, E. 1, 149.
 Müller, Arno 1, 146.
 — M. 1, 180.
 Nagel, W. 3, 178.
 Natalis, Fr. 2, 65.
 Nernst, W. 1, 149.
 Neustätter, M. 2, 52.
 Nielsen, N. 3, 41.
 Noether, Fr. 3, 35 ff.
 Oberbeck, A. 1, 108.
 Oelschläger, E. 2, 53, 55.
 Orlich, E. 1, 25.
 Paal, K. W. 2, 88.
 Petersen, W. 3, 61, 62.
 Pirani, M. 1, 167.
 Poiseu lle, Jean 1, 116.
 Power, F. B. 3, 181.
 Precht, J. 1, 170.
 Punga, E. u. M. 3, 82.
 Raps, A. 2, 2—6.
 Rey, Ch. 3, 82.
 Riegger, H. 3, 127 ff., 138.
 Rihl, W. 1, 122.
 Robin, V. 3, 31.
 Rogerson, H. 3, 181.
 Rossenbeck, E. 1, 106.
 Rüdenberg, R. 1, 179; 3, 61 ff.
 Rukop, H. 1, 21, 22, 23.

- Salinger **3**, 8.
 Schleiermacher, A. **1**, 148, 150.
 Schottky, W. **1**, 64; **2**, 110, 113.
 Schrumpf-Zoellich **1**, 59.
 Schuchardt, Th. **1**, 144.
 Schwaiger, A. **1**, 180.
 Schwarze, W. **1**, 149.
 Schwer, Herm. **3**, 178.
 v. Siemens, Herm. **1**, 154; **3**, 163 ff.
 —, Werner **1**, 180.
 —, Wilhelm **1**, 1—18.
 Skita, A. **2**, 88.
 Smoluchowski, M. **1**, 148.
 Stefan, J. **1**, 148.
 Stiel, W. **3**, 82, 90, 124.
 Strafford **1**, 150.
 Talbot, H. T. **3**, 178.
 Tesla, N. **3**, 81.
 Thoma, H. **1**, 180.
 Thomas, V. **1**, 108.
 Thurston, R. **1**, 108.
 Townsend, J. **1**, 168.
 Tschirch, A. **3**, 179, 180, 182.
 Ubbelohde, L. **2**, 54.
 Ulbricht, R. **3**, 35.
 Wagner, K. W. **3**, 1, 2, 5, 7, 8, 18, 20, 127, 132, 134, 139, 146.
 Wandenberg, E. **3**, 80 ff.
 Warburg, E. **1**, 91, 148, 167, 169.
 Wassiljewa, A. **1**, 153.
 Weber, L. **1**, 108.
 Weber, Leonhard **2**, 60.
 —, C. O. **2**, 88.
 Weiset, M. **2**, 93.
 Wertheim-Salomonsen, J. K. A. **1**, 25.
 Wheatstone, Charles **1**, 109.
 Willstätter, R. **2**, 88, 92.
 Wilke-Dörfurt, E. **1**, 143; **2**, 84.
 Windaus **1**, 144.
 Winkelmann, A. **1**, 148.
 Woodman, A. G. **3**, 178.
 Zenneck, J. **1**, 128; **3**, 126.
 Zimmermann, J. **1**, 143.
 Zölllich, H. **1**, 24.
 Zölllich-Schrumpf **1**, 59.
-

Sachverzeichnis.

[Die fettgedruckten Ziffern beziehen sich auf die Hefte, die anderen Zahlen auf die Seiten.]

- Aberregungsvorgang bei Fremderregung **1**, 182.
— bei Selbsterregung **1**, 187, 201.
Abfallschlüpfung **3**, 83.
Ätzmittel für Zinn (Czoehrsalsky) **2**, 98.
Akustischer Schwinger **1**, 137.
Albedo **2**, 57.
Aleuritinsäure **3**, 179 ff.
— -methylester **3**, 180.
—, Reduktion zu Palmitinsäure **3**, 181.
Ankerspannung **1**, 183.
—, Reduktion der Fremderregerspannung auf **1**, 184.
Anodendurchgriff **1**, 68.
— -empfindlichkeit **1**, 67.
Apparat, stationärer für Rauchgasuntersuchung **1**, 153.
—, tragbarer für Anzeige von Wasserstoff in Luft **1**, 153.
Aufferregungsvorgang bei Fremderregung **1**, 182, 200.
— bei Selbsterregung **1**, 186, 201.
Aufladungskurve, zylindrische (bei Röhrenvoltmeter) **2**, 116.
—, Ermittlung der Fadentemperatur (bei Röhrenvoltmeter) aus der **2**, 111 ff.
—, kugelsymmetrische **2**, 120.
Aufzeichnung sich rasch verändernder Größen **1**, 24.

Banderdung **3**, 60.
Belebte Materie vom statistischen Standpunkt aus **3**, 164.
Beleuchtungswerte, Helligkeitswerte **2**, 62.
Betriebsbedingungen, günstige, für Luftgeschwindigkeitmessner **1**, 117.
Bewegung, Differentialgleichung der **1**, 28.
Bewegungsgesetze für Meßgeräte, praktische Anwendung **1**, 56 ff.
Bewegungsgleichung, allgemeine Lösung für Meßgeräte bei wechselnder Meßgröße **1**, 38, 39.

Campbellsche Filter (Siebketten) **3**, 2.
Carotin, Beziehungen zum Kautschuk **2**, 92, 95.
Charakteristik, magnetische **2**, 181, 185, 188.
—, Widerstandslinien einer Gleichstrommaschine **1**, 190.
Clevéit **1**, 143.

Dämpfungsgrad **1**, 34.
— -konstante **1**, 28; **3**, 3, 12, 13.
— -zahl des Nebensprechens **3**, 24 ff.
— -zahlen, Eichleitung zum Messen hoher **3**, 27 ff.
Deformation, primäre und sekundäre (Rekristallisation) **3**, 31 ff.
Differentialgleichung der Bewegung **1**, 28.
Differenzkette **3**, 156.
Differenzspannung **1**, 188; **3**, 113, 114.
— bei Selbsterregung **1**, 191.
— bei Fremderregung **1**, 193.
—, Verhältnis zur stationären Spannung **1**, 187.
Dihydroxytridezylsäure **3**, 180, 182.
Dissoziationsvorgang in Gasen unter Wärmebindung **1**, 149.
— -zustand von Gasen, Wärmeleitvermögen **1**, 149.
Doppeltarifzähler, Umschaltung von, durch Resonanzrelais **1**, 122.
Drähte, elektrisch geheizte, in Luftströmen **1**, 107.
Drehstrom-Asynchronmotoren, Schleichen bei **3**, 81 ff.
— -Manteltransformer, Theorie **2**, 7 ff.
Durchlässigkeitsgebiet (Siebkette) **3**, 4, 7.
Durchschlagsfestigkeit von Isolierölen **2**, 41 ff.
— und Wassergehalt **2**, 44 ff.
—, Höchstwert **2**, 47 ff.
—, Änderung mit der Zahl der Durchschläge **2**, 51 ff.
— und Barometerstand **2**, 52.
— und Temperatur **2**, 53.
— von α -Hydrokautschuk **2**, 93.
Dynamomaschine, fremd- und selbsterregte **1**, 184.

Edelgase, Reinheitsgrad **1**, 167.
Effektivpotential eines Gitters **1**, 69.
Eichleitung zum Messen hoher Dämpfungszahlen **3**, 27.
Eigenschwingungen **1**, 30.
Eigenwiderstand eines Körpers (Erdschluß) **3**, 65.
Eingitterröhren, zylindrische **1**, 66, 69, 70.
Einphasen-Manteltransformer **2**, 10.
Einschaltvorgänge bei Siebketten **3**, 8 ff.
Einschwingungsvorgänge (Siebkette) **3**, 8.
Elektromagnetisches Verhalten gekreuzter Freileitungen **2**, 76.
Elektronen, Zusammenstöße mit Gasmolekülen **1**, 167.
Elektronenrohr, Glühkathodeneinschmelzung **2**, 105.

- Elektronenstrahlung **1**, 19.
 Elementarstrom, induzierter **3**, 19ff.
 Energiegradient, Temperaturgefälle in Gasen **1**, 147
 Entladung, stille, zum Nachweis schlagender Wetter und zur Gasanalyse **1**, 71.
 Erdschluß am Ende einer langen Leitungsstrecke **3**, 71ff.
 — auf freier Leitungsstrecke **3**, 73ff.
 Erdschlußströme, räumlicher Verlauf **3**, 61ff., 72.
 —, Ausbreitung um den Mastfuß **3**, 62, 73.
 Erdseilwiderstände **3**, 75.
 Erdungsfrager **3**, 35ff.
 Erdungsseil **3**, 62, 72, 79.
 — Wirkung auf Erd- und Kurzschlußströme **3**, 68ff.
 — Ströme **3**, 75.
 Erdwiderstand **3**, 35.
 Erregerkreis, Spannungen im, bei Fremderregung **1**, 183.
 Erregerwindungszahl **1**, 198.
 Erregerspannung **1**, 184.
 Erregerzeitkonstante **1**, 184.
 Erregung eines Magnetfeldes **1**, 181.
 Erregungsdauer **1**, 187.
 — Kurve **1**, 190ff.
 — Stärke **1**, 187.
 — Widerstand **1**, 187.
 — Zeit **1**, 185, 193, 196.
 Extrapolation und Berechnung der Konzentration und Ausbeute von Ozonapparaten **1**, 76.
 Fadentemperatur (Röhrenvoltmeter), Ermittlung aus der Aufladungskurve **2**, 111.
 Feuerungsgase-Untersuchungen **1**, 150ff.
 Flächenbeleuchtung, Gesetz von Lambert **2**, 60.
 Flächenhelle, Unterschied von Helligkeit **2**, 60.
 Flammpunktzone von Ölen **2**, 55.
 Flügelanemometer **1**, 107.
 Fluornachweis **3**, 178.
 Freiheit oder Zufall **3**, 166.
 Freileitungen, gekreuzte, elektromagnetisches Verhalten **2**, 76.
 Fremderregerspannung, Reduktion auf die Ankerspannung **1**, 184.
 Fremderregung von Gleichstromkreisen **1**, 181ff.
 —, Feldanstieg und -abfall **1**, 194, 195.
 —, Hilfskurven **1**, 194.
 —, Stromanstieg und -abfall **1**, 195, 196.
 —, Oszillogramme der Auf- und Aberregung **1**, 200.
 Fremderregungsproblem **1**, 186.
 Frequenz eines akustischen Schwingers **1**, 139.
 Frequenzrelais **1**, 126.
 — mit Gleichrichter **1**, 132.
 Fuchssches Fundamentalsystem **1**, 30, 31.
 Funktionsskalen **1**, 33.
 Gasanalyse, Verwendung stiller Entladung **1**, 71.
 Gase, Wärmeleitvermögen **1**, 147.
 Gasmoleküle, Zusammenstöße mit Elektronen **1**, 167.
 Gesamtkapazität von Freileitungen **2**, 80, 81.
 Gelegenheitsursache zur Erklärung eines Vorganges **1**, 164ff.
 Generatorgasuntersuchung **1**, 150ff.
 Gesetz der großen Zahlen **1**, 160.
 Gleichstromkreise, Fremd- und Selbsterregung **1**, 179.
 Gleichstrommaschinen, Charakteristik und Widerstandslinien **1**, 190.
 Glühelktronenröhren **1**, 19.
 Glühkathodeneinschmelzung **2**, 105.
 Glühkathodenröhren als Schwingungserzeuger **1**, 19.
 —, Strom- und Spannungskennlinien **2**, 110.
 Gitterempfindlichkeit (Verstärkerrohren) **1**, 67.
 Grenzkonzentration von Ozonapparaten **1**, 91, 95.
 Grundwelle eines Drehfeldes **3**, 87.
 Hauptsatz, zweiter, der mechanischen Wärmetheorie **1**, 154; **3**, 163ff.
 Heizstromstärken (Röhrenvoltmeter) **2**, 113ff.
 Helligkeit des Himmelsgewölbes **2**, 60.
 —, Unterschied von Flächenhelle **2**, 60.
 Helligkeitswerte, Beleuchtungswerte **2**, 62.
 Heylandkreis **3**, 99, 105, 115ff.
 Himmelsgewölbe, Helligkeit **2**, 60.
 Hitzdrahtapparat in Verbindung mit einem Staukörper **1**, 113.
 — im Nebenschluß zu einem Poiseuilleschen Widerstand **1**, 116.
 Hochspannungsfreileitungen, gekreuzte **2**, 76ff.
 Hochvakuumglühkathodenröhre als Schwingungserzeuger **1**, 19.
 Hochvakuumverstärker **1**, 64ff., 70.
 α -Hydrokautschuk **2**, 88.
 —, Derivate **2**, 93.
 —, elektrische Konstanten **2**, 93.
 —, Verhalten bei der Destillation im Hochvakuum **2**, 91.
 —, — gegenüber Chlorwasserstoff **2**, 94.
 —, Walzfähigkeit und Plastizierbarkeit **2**, 92.
 Imparitätsfaktor (Transformatoren) **2**, 21.
 Induktanz (Freileitung) **3**, 80.
 Induktiv gekoppelte Schwingungskreise **3**, 1ff.
 Integralgesetz und Ermittlung der Fadentemperatur (bei Röhrenvoltmeter) aus der Aufladungskurve **2**, 111ff.
 Isolieröle, Durchschlagsfestigkeit **2**, 41ff.
 Käfiganker (Asynchronmotoren) **3**, 81, 82, 83ff.
 Kaliumchlorat in Salzsäure als Ätzmittel für Zinn **2**, 98.
 Kapazität von Freileitungen **2**, 81.
 Kapazitätskoeffizienten (Abraham) **1**, 68.
 Katalytische Wirkung von Metalloxyden **1**, 143.
 Kausalitätsproblem **1**, 166.
 Kautschuk, Natur-, Verhalten im Hochvakuum **2**, 92.
 —, Strukturformel **2**, 95.
 Kautschukkohlenwasserstoff, Molekulargröße **2**, 87ff.
 Kerntransformator für Drehstrom **2**, 7ff.
 Kette, homogene **3**, 132, 142ff.
 —, —, Resonanzkurve **3**, 143.
 —, Eigenfrequenz **3**, 138.
 —, Energieaufnahme **3**, 149.

- Kette, Anschluß an eine Leitung **3**, 159.
 Kettenleiter **3**, 1ff., 8ff., 18ff., 126ff.
 —, gemischte Kopplung **3**, 149, 156.
 Kettenleitung, Wagnersche **3**, 7.
 Kippmoment **3**, 83, 84.
 Kohlensäurebestimmung in Gasen **1**, 150ff.
 Konstantan, Verhältnis der thermischen zur elektrischen Leitfähigkeit **2**, 105.
 Konvektion bei Gasen, Unterscheidung von Wärmeleitung **1**, 146.
 Konzentration von Ozonapparaten **1**, 76.
 Kopplung, gemischte (Kettenleiter) **3**, 149, 156.
 Körperstrom (Erdschluß) **3**, 64, 67.
 Körperwiderstand **3**, 65.
 Kraftbedarf von Ozonanlagen **2**, 105.
 Kraftfluß (Gleichstromkreis) **1**, 182.
 Kreisdiagramme in verketteten Wechselstromkreisen **2**, 65ff.
 Kryoskopischer Weg zur Bestimmung der Molekulargröße von Kautschuk **2**, 91.
 Kugelsymmetrische Aufladungskurve (bei Röhrenvoltmeter) **3**, 120.
 Kupfer, Verhältnis der thermischen zur elektrischen Leitfähigkeit **2**, 106.
 Kurzschluß durch Erdschluß zweier Phasen **3**, 76ff.
 Kurzschlußstrom (Erdschlußströme) **3**, 64, 67, 77.

 Ladungsverteilung in Metallrohrleitungen **3**, 39.
 Lambertsches Gesetz der Flächenbeleuchtung **2**, 60.
 Läuferrut **3**, 91, 92.
 Läuferwiderstand **3**, 84.
 Läuferzahn **3**, 91, 92.
 Lävulinlaldehyd bzw. -säure **2**, 89.
 Legierungen, Bestimmungen des Magnesiums in **2**, 84.
 Leistungsfaktor von Transformatoren **2**, 21.
 Leitfähigkeit, thermische und elektrische **2**, 106.
 Leitungen, pupinisierte **3**, 18.
 Leitungsrohr, Stromeintritt **3**, 40ff.
 Leitvermögen, thermisches und elektrisches **2**, 106.
 Leuchtstärke, sphärische **2**, 57.
 —, hemisphärische **2**, 57, 61.
 — einer Reflektorlampe **2**, 61.
 Licht, zerstreut zurückgeworfenes **2**, 56.
 —, schattenfreies **2**, 56.
 Lithium in Uranglimmer **1**, 144.
 Lochbreite (Siebkette) **3**, 12.
 Lochgrenze (Siebkette) **3**, 4, 12.
 Luftfeuchtigkeit und Öl **2**, 49.
 Luftgeschwindigkeitsmesser, elektrischer **1**, 107.
 —, Empfindlichkeit und Skala **1**, 119.
 Luftuntersuchung auf Gas Beimengungen **1**, 150ff.

 Magnesium, Bestimmung des, in Legierungen **2**, 84.
 Magnesiumgehalt in Zink-, Aluminium- und Magnesiumlegierungen **2**, 84.
 Magnesiumpyrophosphat **2**, 85.
 Magnetfelderregung **1**, 181.
 Magnetfluß, Bestimmung aus der zeitlichen Erregerstromkurve **1**, 183.
 Magnetische Charakteristik **1**, 181, 185, 188.
 Magnetisch gesättigte Gleichstromkreise, Fremd- und Selbsterregung **1**, 179.
 Magnetisierungsströme **2**, 12ff.
 —, Phasenverschiebung **2**, 17.
 Makrozustand **1**, 155, 159.
 Mangann, Verhältnis der thermischen zur elektrischen Leitfähigkeit **2**, 106.
 Manteltransformer, Drehstrom, Theorie **2**, 7ff.
 Maschinen, fremd- und selbsterregte **1**, 185.
 Masterdrom **3**, 75, 80.
 Mastwiderstand (Erdschluß) **3**, 75.
 Materie, belebte, vom statistischen Standpunkt aus gesehen **3**, 164.
 Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung **2**, 110.
 Mechanische Wärmetheorie, zweiter Hauptsatz **1**, 154ff.
 Meßanordnung für technische Gasanalyse **1**, 151.
 Meßbereitschaft, Bedingungen für schnellste **1**, 36ff.
 Meßgeräte als schwingungsfähige mechanische Systeme **1**, 25.
 — zur Aufzeichnung sich rasch verändernder Größen **1**, 24.
 Metalloxyde, katalytische Wirkung von **1**, 143.
 Metallrohrleitungen, Stromaufnahme in **3**, 35ff.
 Mikrophonfrequenzrelais **1**, 129.
 Mikrozustand **1**, 155, 159.
 Mineralöle, Durschlagsfestigkeit **2**, 44ff.
 Mitsprechen in Kabeln (s. auch Nebensprechen) **3**, 26.
 Molekulargröße von Kautschuk, Bestimmung auf kryoskopischem Wege **2**, 91.

 Nachleuchten von aktivem Stickstoff **1**, 178.
 Nachrichtenübertragung, Frequenzrelais **1**, 136.
 Nachruf auf Wilhelm v. Siemens **1**, 1.
 — auf August Raps **2**, 1.
 Naturbetrachtung, kausale und konditionale **1**, 166.
 Naturkautschuk, Verhalten im Hochvakuum **2**, 92.
 —, Strukturformel **2**, 95.
 Naturvorgang, einfacher, reversibel **1**, 154.
 Nebensprechen, Dämpfungszahl des **3**, 24ff.
 —, Größe des **3**, 21.
 — in Spulenleitungen **3**, 18ff.
 —, Störwirkung **3**, 27.
 Nickel, Verhältnis des thermischen zum elektrischen Leitvermögen **2**, 106.
 Nullausbeute von Ozonapparaten **1**, 91, 94.
 Numerische Erregungszeiten **1**, 193, 196.
 Nutung, von der, abhängige Sattelbildung **3**, 89ff.
 —, von der, unabhängige Sattelbildung **3**, 86ff.
 Nutungsmoment **3**, 90.

 Oberfeld, zeitliches und räumliches (Drehstrom-Asynchronmotoren) **3**, 86ff.
 Oberwelle eines Drehfeldes **3**, 87.
 Öl- und Luftfeuchtigkeit **2**, 49ff.
 Ozonanlagen, Berechnung von, vermittels der Konzentrationsgleichung **1**, 104.
 —, Kraftbedarf **1**, 105.
 Ozonapparate, Ausbeute **1**, 76, 79.
 —, Ausbeutekurven, Berechnung **1**, 81.
 —, Einfluß von Spannung und Frequenz auf **1**, 97ff.
 Ozonide des α -Hydrokautschuks **2**, 93.
 Ozonkonzentration, Extrapolation der, für große Geschwindigkeiten **1**, 76.

- Parakautschuk, Reduktion **2**, 87.
 Pechblende **1**, 144.
 Phasenablösung **3**, 88, 97.
 —, Satteldrehzahl der **3**, 89.
 Phasenverschiebung zwischen Magnetisierungsströmen **2**, 17, 28.
 Phasenwinkel **2**, 28.
 Phytadien **2**, 92.
 Phyten **2**, 92.
 Pitotröhren **1**, 113.
 Plastizierbarkeit von Hydrokautschuk **2**, 92.
 Platzbeleuchtung eines Schulraumes **2**, 60.
 Polymerisationsprodukt der nichtreduzierten Kohlenwasserstoffe (Kautschuk) **3**, 182.
 Primäre Rekristallisation **3**, 31 ff.
 Pupinierte Leitungen **3**, 18.

 Raps, August, Nachruf auf **2**, 1.
 Rauchgasuntersuchung **1**, 150 ff.
 Raumladungstheorie der Verstärkerröhren **1**, 64.
 Räumlicher Verlauf von Erdschlußströmen **3**, 61 ff.
 Raumwinkel für Platzbeleuchtung **2**, 60.
 Rechnen mit zerstreut zurückgeworfenem Licht **2**, 56 ff.
 Reduktion der Fremderregungsspannung auf die Ankerspannung **1**, 184.
 Reflektor-Wirkungsgrad **2**, 61.
 Reflektorlampe, Leuchtstärke **2**, 61.
 Regel, teleologische **3**, 170.
 Reindarstellung von Uranverbindungen **1**, 143.
 Reinheitsgrad chemisch indifferenten Gase **1**, 167.
 Reintöne, mechanischer Schwinger, Stimmgabel **1**, 142.
 Reizreaktion **3**, 173.
 Rekristallisation, primäre und sekundäre **3**, 31 ff.
 — bei kalt gerecktem Zinn **2**, 96.
 Relais, Frequenz- **1**, 126 ff.
 —, Resonanz- **1**, 122 ff.
 Remanenzspannung, Einfluß der, auf die Selbsterregungszeit **1**, 188.
 Resonanzfrequenz eines Schwingungskreises **3**, 4, 5.
 Resonanzgleichrichter **1**, 123.
 Resonanzkurve **3**, 151 ff.
 — einer homogenen Kette **3**, 143.
 Resonanzrelais **1**, 122 ff.
 Reversibilität eines Naturvorganges **1**, 154.
 Ringübertrager, streuungsloser (Siebkette) **3**, 6.
 Röhrenverstärkung **1**, 69.
 Röhrenvoltmeter und Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung **2**, 110.
 Rohuranylnitrat **1**, 143.
 Rotationskörper für akustischen Schwinger **1**, 138.
 — für mechanischen Schwinger **1**, 141.
 Rückstrahlung von Flächen **2**, 62, 63.
 Rückstrahlungszahl **2**, 61.

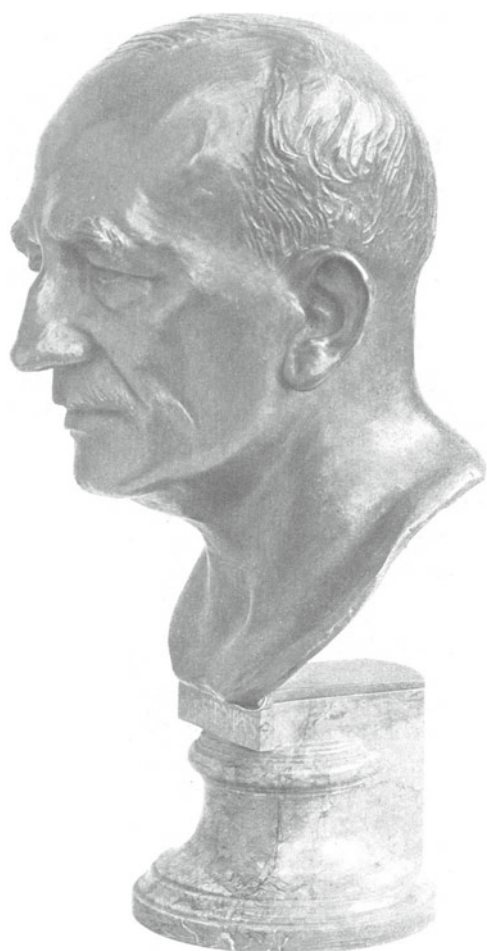
 Sattelbildung unabhängig von der Nutung (Drehstrom-Asynchronmotoren) **3**, 86, 89 ff.
 Satteldrehzahl der Phasenablösung **3**, 89.
 — der Zusatzpolbildung **3**, 96, 104.
 Schalenkreuz (Luftgeschwindigkeitsmesser) **1**, 107.
 Schellack, Bestimmung **3**, 182.
 —, Nachweis in Harzgemischen **3**, 179.

 Schlagende Wetter **1**, 71.
 Schleichdrehzahl **3**, 103.
 Schleichen von Drehstrom-Asynchronmotoren **3**, 81 ff., 123 ff.
 —, Ursachen des **3**, 86.
 —, Wesen des **3**, 83.
 Schleicherscheinung bei Asynchronmotoren mit Käfiganker **3**, 83 ff.
 Schlüpfung **3**, 83.
 Schrittspannung (bei Erdschlußströmen) **3**, 63, 64, 67.
 Schutznetzröhren **1**, 70.
 Schutzwirkung bei Gitterröhren **1**, 68.
 Schwinger, akustischer, Abfall **1**, 140.
 —, mechanischer, Bau und Anwendungen **1**, 141.
 Schwingungen, sinusförmige **1**, 21.
 —, nichtsinusförmige **1**, 22.
 Schwingungserzeugungsrohre mit Rückkopplung **1**, 21.
 Schwingungskreis als Siebkette **3**, 1 ff.
 Sekundäre Rekristallisation **3**, 31 ff.
 Sekundärstrahlen, Hochvakuumglühkathodenröhre **1**, 19.
 Selbsterregung, Hilfskurven **1**, 191.
 —, Oszillogramme der Auf- und Aberregung **1**, 201.
 —, Spannungs- und Feldanstieg- und -abfall **1**, 192.
 —, Stromanstieg und -abfall **1**, 192.
 —, von magnetisch gesättigten Gleichstromkreisen **1**, 186 ff.
 Selbsterregungsproblem **1**, 186.
 Selbsterregungszeiten abhängig von der relativen Überschußspannung **1**, 193.
 Selbstinduktion in Gleichstromkreisen **1**, 179.
 Selektivität (Siebkette) **3**, 8.
 Siebkette, Campbellsche **3**, 6.
 —, Wagnersche **3**, 1 ff., 7.
 —, Einschaltvorgänge **3**, 8 ff.
 —, eingliedrige **3**, 9 ff.
 —, ein- und zweigliedrige **3**, 8 ff.
 Siemens, Wilhelm v., Nachruf auf **1**, 1.
 Spannung, stationäre, Verhältnis zur Differenzspannung **1**, 187.
 —, —, — zur jeweiligen Spannung **1**, 188.
 Spannungsanstieg, allgemeiner Verlauf bei Selbsterregung **1**, 189.
 Spannungsdiagramm (Transformatoren) **2**, 23 ff.
 Spannungsdreieck **2**, 35.
 Spannungsgefälle (Erdschluß) **3**, 67.
 Spannungsquelle für Durchschlagsprüfung **2**, 43.
 Spitzenentladung in Stickstoff **1**, 167 ff.
 —, Warburg **1**, 169.
 Sprachverzerrung (Siebkette) **3**, 6.
 Ständernutzung, Einfluß der **3**, 89 ff.
 Ständersatteldrehzahl **3**, 90, 91, 104.
 Ständerzahnfeld **3**, 89, 90.
 Stickstoff als elektropositives Gas **1**, 169.
 —, Spitzenentladungen im **1**, 167.
 Stimmgabel, Abfall **1**, 140.
 Stirnstreuung **3**, 118.
 Stockpunktzone von Ölen **2**, 55.
 Stromaufnahme in einem Leitungsrohr **3**, 49 ff.

- Stromaufnahme in einem Leitungsrohr, numerisches Beispiel **3**, 51.
 — in Metallrohrleitungen **3**, 35.
 Stromaustritt aus einem in Erde verlegten Leiter **3**, 44ff., 52.
 — — — — — — —, numerisches Beispiel **3**, 57.
 Stromeintritt in einem Leitungsrohr **3**, 40ff.
 Stromspannungskennlinie der Glühkathodenröhre mit und ohne Gitter **2**, 110.
 Stromverlauf beim Erregen ungesättigter Magnetkreise **1**, 179.
 — — — — — — —, hochgesättigter Eisenkreise **1**, 180.
 Stromzeitkurven in Stickstoff **1**, 172ff.
 Synchrondrehzahl **3**, 90, 91.
- Tarifzähler**, Umschaltung durch Resonanzrelais **1**, 122.
 Teilkapazität von Freileitungen **2**, 81.
 Teleologische Regel **3**, 170.
 Temperaturfunktion in stromdurchflossenen Leitern (Kohlrausch) **2**, 105ff.
 Temperaturgefälle in Gasen **1**, 147.
 Temperaturgradient **2**, 107.
 Temperaturkompensation **1**, 114.
 Temperaturverlauf in einem stromdurchflossenen Leiter (Glühfadenzuleiter) **2**, 108.
 Tetrafluoridreaktion **3**, 178.
 Theorie und Messung des Nebensprechens in Spulenleitungen **3**, 18ff.
 Thermodynamik, zweiter Hauptsatz als Ungleichung der Wahrscheinlichkeit nach der Zeit **1**, 157ff.
 Treppendiagramm für Läufer **3**, 92, 94.
 Triacetyllauritinsäure **3**, 181.
 Trihydroxypalmitinsäure **3**, 180, 182.
- Übergangswiderstand** (Erdung) **3**, 35ff., 59, 75.
 Unwahrscheinlichkeit **1**, 158.
 Uranglimmer **1**, 144.
 Uranochlorid **1**, 145.
 Uranoctoxyd **1**, 146.
 Uranoxyduloxyd **1**, 143, 145.
 Uranylinitrat **1**, 143ff.
 Uranylinitratlösung, Explosionsfähigkeit **1**, 145, 146.
 Uranylsulfid **1**, 145.
 Uranverbindungen, Reindarstellung von **1**, 143.
- Vakuumpfeifen, Wärmedrosseln an Einschmelzungen in **2**, 104.
- Verschiebungsstrom **3**, 61, 62.
 Verstärkerrohren, Raumladungstheorie **1**, 64.
- Wackelschwingungen beim akustischen Schwingen **1**, 138.
 Wahrscheinlichkeit, reine Zahl **1**, 156.
 Wahrscheinlichkeitsgesetz, thermodynamischer Spezialfall **1**, 154, 160.
 Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Untersuchung zusammengesetzter Vorgänge **1**, 155ff.
 Walzfähigkeit von Hydrokautschuk **2**, 92.
 Wärmeleitfähigkeit von Gasen **1**, 147ff.
 — von Gasgemischen **1**, 152.
 Wärmeleitvermögen der Gase **1**, 147ff.
 Wärmestrahlung **1**, 148.
 Wassergehalt und Durchschlagsfestigkeit **2**, 44.
 Wattedichte, räumliche, bei Ozonapparaten **1**, 91, 95, 106.
 Wechselstromkreise, Kreisdiagramme in verketteten **2**, 65.
 Wellen, ungedämpfte **3**, 126.
 Wellenlängenkonstante (Siebkette) **3**, 3.
 Wellenwiderstand einer Siebkette **3**, 5, 7.
 Weltzustand, unwahrscheinlicher **1**, 162ff.
 Wetter, schlagende, Nachweis durch stille Entladung **1**, 71.
 Widerstandslinien einer Gleichstrommaschine **1**, 190.
- Zähigkeitsfaktor nach Ubbelohde **2**, 54.
 Zeitkonstante für einen Erregungsvorgang **1**, 185.
 — einer Maschine **1**, 184.
 — eines Stromkreises **1**, 179.
 — selbsterregter Maschinen **1**, 187.
 Zeitkonstanten **1**, 197ff.
 Zickzackstreuung **3**, 93, 119.
 Zink-Aluminium-Magnesiumlegierungen, Magnesiumgehalt **2**, 84.
 Zinn, Ätzmittel (Czochralsky) **2**, 98.
 —, Rekristallisation **2**, 96ff.; **3**, 31ff.
 Zufall oder Freiheit **3**, 166.
 Zusatzbeleuchtung durch Rückstrahlung **2**, 62.
 Zusatzfeldverteilung **3**, 94, 95, 108.
 Zusatzpole, Entstehung **3**, 91.
 —, Anzahl und Veranlassung zu Sattelbildung **3**, 96.
 —, Bewegung der **3**, 97.
 Zustand maximaler Wahrscheinlichkeit **1**, 162.
 Zustandswahrscheinlichkeiten **1**, 157, 159.



W. Siemens.



A. v. Billebrand 1912.

Dem Andenken von
Wilhelm von Siemens

Dr.-Ing. e. h. (Technische Hochschule Dresden, 1905)

Dr. phil. h. c. (Universität Berlin, 1915)

Geheimer Regierungsrat

geb. 30. Juli 1855

gest. 14. Oktober 1919

Geleitwort.

Die im Siemens-Konzern vereinigten Werke der Siemens & Halske A.-G., Berlin, und der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H., Berlin und Nürnberg, haben schon seit langen Jahren in den „Siemens-Mitteilungen“ ihre Fortschritte auf praktisch technischem Gebiete in allgemeinverständlicher Form und in großer Auflage bekanntgemacht. Diese Mitteilungen sind aber hauptsächlich für den Kunden- und Verbraucherkreis bestimmt. Die rein wissenschaftlich behandelten Fragen wurden, in den schon bestehenden sonstigen physikalischen, elektrotechnischen, chemischen Zeitschriften verstreut, nur in sehr beschränktem Maße veröffentlicht. So war die Größe der wissenschaftlich-technischen Leistung des Hauses niemals im Zusammenhange erkenntlich. Diesen Mißstand hat ihr jüngst verstorbener Leiter Wilhelm von Siemens immer beklagt. Bei der wachsenden Schwierigkeit der Behandlung experimenteller Fragen hat die Allgemeinheit aus ökonomischen Gründen Interesse daran, volle Kenntnis von bereits ausgeführten Untersuchungen zu erlangen. Die große Menge von Mühe und Kosten, welche von den Siemens-Werken in ihren Laboratorien zur Lösung von technischen Problemen auf wissenschaftlichem Wege aufgewendet wird, darf nicht dadurch verlorengehen, daß man sie in Geheimarchiven zurückhält, wenn es aus patentrechtlichen Gründen nicht direkt geboten ist. Außerdem empfängt der Außenstehende erst durch eine geschlossene Veröffentlichung eine Vorstellung von der Fülle der bearbeiteten Themen und der hochentwickelten streng wissenschaftlichen Methodik der Siemens-Werkslaboratorien, welche in harmonischer Übereinstimmung mit ihren Fabrikationserzeugnissen steht.

Die General Electric Company in den Vereinigten Staaten von Nordamerika hat aus ähnlichen Erwägungen angefangen, ihre wissenschaftlichen Untersuchungen in der „General Electric Review“ bekanntzumachen, aber keine Trennung von den geschäftlichen Anzeigen vollzogen. In der Erkenntnis, daß ein gleichartiges Vorgehen im Siemens-Konzern zu einer unnötigen Belastung der „Siemens-Mitteilungen“ führen müßte, faßte Wilhelm von Siemens den Gedanken, eine besondere Zeitschrift zu gründen, welche nur die rein wissenschaftlichen Abhandlungen bringen sollte. Die lange Kriegszeit und sein frühzeitiger Tod haben ihn an diesem Vorhaben gehindert. Wir, die Nachfolger, sehen es als ein Vermächtnis von ihm an, seine Absicht zu verwirklichen. Die neue Zeitschrift wird in zwanglosen Heften in beschränkter Auflage im Buchhandel erscheinen. Es ist dafür ein allgemeineres Bedürfnis auch noch insofern vorhanden, als die bereits bestehenden wissenschaftlichen Zeitschriften während absehbarer Zeit kaum mehr in der Lage sein werden, größere Abhandlungen aufzunehmen.

Wir geben durch die Begründung des neuen Unternehmens in dieser Zeit der schwersten Bedrückung Deutschlands der Welt ein sichtbares Zeichen, daß der deutsche philosophische Geist in der Industrie wie an den Hochschulen noch lebt und stark ist.

Die neugegründete Zeitschrift bildet ein Dokument für die kulturelle Höhe und den unzerstörbaren Schaffenstrieb eines durch den sinnlosesten Frieden, den die Welt je gesehen, bedrängten Volkes.

Der Herausgeber.

Inhaltsübersicht.

	Seite
Nachruf für Wilhelm von Siemens. Von Professor Dr. Carl Dietrich Harries	1
I. Mitteilungen aus den wissenschaftlichen Laboratorien des Wernerwerkes der Siemens & Halske A.-G. zu Siemensstadt (Direktion: Professor Dr. A. Raps† und Dr. A. Franke):	
a) Messinstrumenten-Abteilung (Vorstand H. von Buol):	
W. Hausser: Über die mit Sekundärstrahlen arbeitende Hochvakuumglühkathodenröhre als Schwingungserzeuger	19
H. Zölllich: Prüfung von Messgeräten zur Aufzeichnung sich rasch verändernder Größen.	24
b) Schwachstromkabel-Abteilung (Vorstand Dr. A. Ebeling):	
W. Schottky: Zur Raumladungstheorie der Verstärkeröhren	64
c) Elektrochemische Abteilung (Vorstand Prof. V. Engelhardt und Dr. Gg. Erlwein):	
Gg. Erlwein & H. Becker: Über die Verwendung der stillen Entladung zum Nachweis schlagender Wetter und zur Gasanalyse	71
H. Becker: Über die Extrapolation und Berechnung der Konzentration und Ausbeute von Ozonapparaten	76
II. Aus dem Physikalisch-Chemischen Laboratorium der Siemens & Halske A.-G. und Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H. zu Siemensstadt (Leiter Prof. Dr. H. Gerdien):	
H. Gerdien & R. Holm: Der Luftgeschwindigkeitsmesser der Siemens & Halske A.-G.	107
H. Gerdien & W. Rihl: Ein Resonanzrelais	122
K. Boedeker & H. Riegger: Über Frequenzrelais.	126
H. Gerdien & H. Riegger: Ein akustischer Schwinger	137
K. Boedeker & H. Riegger: Über Bau und Anwendungen eines mechanischen Schwingers	141
E. Wilke-Dörfurt: Zur Reindarstellung von Uranverbindungen.	143
M. Moeller: Technische Gasanalyse durch Messung der Wärmeleitfähigkeit . .	147
Herm. v. Siemens: Über die Ableitung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik und verwandte Fragen	154
III. Aus den wissenschaftlichen Laboratorien des früheren Glühlampenwerkes der Siemens & Halske A.-G. Charlottenburg (Direktion: Dr. O. Feuerlein):	
M. Pirani: Beobachtungen über die Spitzenentladung in Stickstoff	167
IV. Aus der Rechnungsabteilung des Dynamowerkes der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H. Siemensstadt (Direktion: Geheimrat Professor Dr.ing. W. Reichel):	
R. Rüdberg: Fremd- und Selbsterregung von magnetisch gesättigten Gleichstromkreisen	179

Anfragen, die den Inhalt dieses Heftes betreffen, sind zu richten an die Zentralstelle für wissenschaftlich-technische Forschungsarbeiten des Siemens-Konzerns, Siemensstadt bei Berlin, Verwaltungsgebäude.

Nachruf für Wilhelm von Siemens.

Andante con moto.

Werner von Siemens und sein Sohn Wilhelm bilden große Gegensätze. Der klare Verstand Werners, seine schnelle Entschlußfähigkeit, seine beinahe übergroße Unternehmungskraft sind oft gerühmt. Wilhelm dagegen war mehr grübelnd, sich langsam mit vieler Mühe zur Erkenntnis durchringend, die Eingebungen des gesunden Menschenverstandes häufig zunächst ablehnend, jedem schnellen Entschlusse gegenüber feindlich gesinnt. Diese eigentümliche Sinnesart hat sich vielleicht zum Teil aus den Erfahrungen seines Vaters und dessen Brüdern herausgebildet, die in den letzten Lebensjahren viel Mißerfolge erleben mußten. Die technische Welt war eben viel komplizierter geworden, seit die ältere Generation ihre bahnbrechende Laufbahn begonnen hatte. Die Möglichkeiten für Unternehmungen waren zwar nicht erschöpft, aber neue Produktionsgebiete zu eröffnen war viel schwieriger geworden. Wollte man fortschreiten und nicht stehenbleiben, so mußten auch die laufenden Betriebe durch verfeinerte Organisation und ökonomischeres Arbeiten verbessert und leistungsfähiger gestaltet werden. Hier bewährte sich Wilhelm als des großen Vaters würdiger Sohn.

Zieht man einen Vergleich zwischen ihm und anderen bedeutenden Männern, ihrem Geist, ihrer Beanlagung und Kapazität, so kommt man zu dem Ergebnis, daß die Natur in Wilhelm von Siemens ein besonders feines Experiment machte, indem sie eine eigenartige Persönlichkeit schuf, wohl wert genauer geschildert zu werden.

Wenn wir die Geistesart Wilhelm von Siemens verstehen wollen, so müssen wir auf seine Jugenderlebnisse im Vaterhause in kurzen Zügen eingehen.

Werner Siemens war zweimal verheiratet. In erster Ehe mit Mathilde, der Tochter des rühmlich bekannten Historikers Professor Drumann an der Universität Königsberg. Der zweite Sohn dieser Ehe war Wilhelm, geboren am 30. Juli 1855. Die Mutter starb früh an dem bösen Lungenleiden, welches der Familie noch viel Sorge verursachen sollte. In zweiter Ehe verband sich Werner mit einer Schwäbin, einer entfernten Verwandten, Antonie Siemens. Diese mußte den Kindern die Mutter ersetzen, was um so notwendiger war, als der Vater in angestrengtester Arbeit seine weltumspannenden Geschäfte zu besorgen hatte und wenig Zeit für seine Kinder erübrigte. Obgleich sie sich bemüht hat, dieser Pflicht getreulich nachzukommen, so ist ihr dies nicht recht gelungen. Sie war der großen Lebensführung Werners rein körperlich nicht gewachsen und mußte vieles gehen lassen wie es ging. Die Kinder wuchsen auf ohne die feinere Fürsorge, wie sie in einfacheren Familien üblich ist, jedes ging seine eigenen Wege. In späteren Jahren hat sich Wilhelm verschiedentlich darüber geäußert, daß er eigentlich gar nicht erzogen und ihm auch sein Bildungsgang ziemlich selbst überlassen worden sei. Er hat es schwer gehabt, aber ich glaube, daß er durch die eigentümliche Art seiner Selbsterziehung gerade zu dem charaktervollen Manne heranwuchs, der alles so merkwürdig durchdachte und nichts

Konventionelles annahm. Die große Menge, die nur oberflächlich urteilt, glaubt, daß ein Sohn aus reichem Hause in eitel Glück und Wonne schwimmen müsse, da ihr Sinn nur auf die materielle Seite der Glücksgüter gerichtet ist. In Wirklichkeit ist das oft ganz anders.

Von früher Jugend stand Wilhelm im Vaterhause, in dem zu verkehren die berühmtesten Männer jener Zeit sich zur Ehre rechneten, im Getriebe der großen Welt und um seine Neigung bewarben sich viele Menschen, darunter auch solche, deren Beweggründe nicht ganz einwandfrei waren. In derartigen Verhältnissen ist es nicht leicht, die Wahrheit in seiner Umgebung zu ergründen, viel schwerer als für den, der sozusagen von der Pike auf dienen muß und das wahre Gesicht der Menschheit im Kampfe ums Dasein kennenlernt. Wilhelm hat in dieser Beziehung manche Enttäuschung erlebt, denn trotzdem er die Menschen mit Interesse studierte und prüfte, irrte er bisweilen in ihrer Einschätzung. Vielleicht als Folge hiervon hat sich bei ihm ein eigentümliches Mißtrauen herausgebildet, das sich aber nicht zur Menschenverachtung verdichtete.

Wilhelm hat nicht das Abiturium gemacht, obwohl es sein Vater gern gesehen hätte. Er besuchte dann die Hochschulen Heidelberg, Stuttgart, Leipzig und Berlin. Dem üblichen Studentenleben mit seinen Verbindungen, Mensuren und Kneipereien war er abhold, wie er überhaupt stets ein Einzelgänger blieb. In Berlin widmete er sich besonders dem Studium der Physik unter Helmholtz. Wie mir von den damaligen Assistenten von Helmholtz später berichtet wurde, soll er ein etwas sonderbarer Kauz gewesen sein, schwer zu behandeln. Man hätte ihm nicht seine künftige technische Entwicklung voraussagen können. Der Vater Werner hat indessen die große Beanlagung von Wilhelm schon klar erkannt, obwohl er sich in seinen Lebenserinnerungen darüber nicht ausspricht. Zahlreiche Äußerungen sind aber in nachgelassenen Briefen vorhanden. Wilhelm hatte einmal einen Unfall bei einer Wagenfahrt, wobei er, auf das Straßenpflaster geschleudert, einen schweren Schädelbruch davontrug. Sein Leben hing an einem dünnen Faden. Damals rief Werner in banger Besorgnis: „Auf diesen Augen ruht das Geschick des Hauses Siemens.“ Dieser Unfall scheint aber für Wilhelms Gesundheit von wesentlicher Bedeutung gewesen zu sein. In jüngeren Jahren litt er häufig an einem dumpfen Gefühl im Kopfe, „am dummen Kopfe“, wie er es nannte. Durch den Schädelbruch wurde dies nachhaltig gebessert. In seinen Jugendjahren war er entschieden pathologisch belastet. Auch sein Wunsch, das Doktorexamen abzulegen, wurde durch starkes körperliches Unbefinden — ein Lungenleiden, welches ihn zu verschiedenen Malen nach Falkenstein im Taunus führte — behindert. So fehlt seinem Studium ein eigentlicher Abschluß. Er besaß aber auch eine ausgesprochene Abneigung gegen Examen, eine Art Idiosynkrasie, die ich später, als es sich darum handelte, ob sein Sohn das Doktor-examen machen sollte oder nicht, ausgiebig kennenlernte.

Charakteristisch für Wilhelm ist sein Streben nach Weiterbildung. Darin hat er nie aufgehört. Noch in der Mitte seiner 50er Jahre habe ich ihn auf seine Bitte mit einem Lehrbuch der Chemie versorgt, es war Hollemanns Anorganische Chemie. Sein Entzücken über den Inhalt desselben bewies mir, daß er sich ernstlich damit befaßt hatte. Sein Wunsch nach Erweiterung des Wissens hatte etwas Rührendes, er glaubte immer noch, ihm Fehlendes ersetzen zu müssen. Nach meiner Meinung überschätzte er das Wissen zu sehr. Denn die Erfahrung lehrt, daß die Fähigkeit zu produktiver Leistung unabhängig vom Umfange der Kenntnisse, wie auch vom Grade

der logischen Schulung ist, ja daß sogenannte Vielwisserei oft die Unbefangenheit zu neuem Schaffen behindert. Auch glaube ich, daß es für jedes Individuum ein Optimum des Wissens gibt, über das hinaus neue Kenntnisse nur unter Verlust eines entsprechenden Teils des bisherigen geistigen Besitzes erworben werden können. Der Umfang der Kenntnisse ist nicht maßgebend für die Weite des geistigen Horizontes, sondern diese ist davon abhängig, wie weit man die Grenzen der Möglichkeit der Erkenntnis begriffen hat.

Bei der Beurteilung der Beanlagung Wilhelm von Siemens müssen wir uns seine Abstammung vergegenwärtigen, von dem auf dem Gebiete der exakten Naturforschung hochbedeutenden Vater und seinem Großvater Drumann, dem feinsinnigen, philosophisch-historischen Kritiker. Es ist falsch zu sagen, daß seine starke wissenschaftliche Neigung und Befähigung als ein Erbteil seines Großvaters anzusehen ist, denn diejenige seines eigenen Vaters ist doch über allen Zweifel erhaben. Er ist von beiden Seiten erblich veranlagt, in der Form war er Philosoph und Historiker, in der Sache hatte er aber, wenigstens später, mehr Interesse für die exakte Naturwissenschaft. Wenn er allerdings keinem Zwange unterstellt gewesen wäre, hätte er sich als Student wohl für das philosophisch-historische Studium entschieden. In ihm hat sich eine seltene Mischung dieser beiden einander scheinbar widerstreitenden Richtungen vollzogen. Die Schwierigkeit im Verstehen ganz leicht faßbarer Gedanken, die zuweilen bei ihm überraschte, war vielleicht eine Folge der verschiedenen Ausdrucksform dieser beiden Richtungen. Leute mit philosophisch-historischer Bildung sind in der Form des Ausdrucks vielfach subtiler als solche der experimentellen Richtung. So blieb er oft an Redewendungen infolge eines nicht ganz treffend gewählten Ausdrucks hängen und wurde dadurch vom eigentlichen Hauptthema abgelenkt. Für im formalen Denken nicht besonders ausgebildete Leute, wie sie unter Ingenieuren und Chemikern häufig sind, war es darum mitunter schwierig, sich bei geschäftlichen Unterhandlungen mit ihm zu verständigen.

Aber diese beiden Richtungen in sich zu verarbeiten, sie auf einen gemeinsamen harmonischen Ausdruck zu bringen, war sein Ziel, verursachte ihm jedoch bei seiner vielseitigen literarischen Tätigkeit große Anstrengung.

So schön und glatt sich seine Abhandlungen lesen, so schwer mußte er dafür arbeiten. Er war von tiefster Gründlichkeit, allen Problemen bis in die feinsten Verzweigungen ihrer Zusammenhänge nachspürend, alle Komplikationen und Bedingtheiten überdenkend und so mühsam und selbständig sich eine eigne Auffassung erarbeitend. Dazu brauchte er Wochen und Monate, dann ließ er das Thema liegen, um es später wieder aufzunehmen, alles umzustoßen und von neuem aufzubauen, bis er das Manuskript in diejenige Form gegossen hatte, wie sie ihm, schwer faßbar, vorschwebte. Er war die Verkörperung der um die Erkenntnis der Wahrheit ringenden Menschheit.

Ich lernte Wilhelm im Jahre 1899 in Harzburg nach meiner Verlobung mit seiner jüngsten Schwester kennen. Damals stand er im 44. Lebensjahre und auf der Höhe seiner Kraft. Auf der mittelgroßen, niedersächsisch gedrungenen Gestalt saß ein charaktvoller Kopf, an dem die Augenpartie und die Stirn das hervorstechendste waren. Die schönen Augen konnten einen unaussprechlich liebenswürdig ansehen und zeigten in ihrem Aufleuchten Energie, festen Willen und Güte. In späteren Jahren veränderte sich der Glanz der Augen, auch hielt er sie meistens durch seine schweren Lider halb verdeckt, gleichsam nach innen gekehrt in ständigem Sinnen

geschlossen, auch bekam er einen müden Zug um den Mund. Damals war er noch frisch, geistreich, voll Witz und Sarkasmus, der aber sorgsam vermied, irgend jemanden zu verletzen. Zarte Rücksichtnahme auf die Empfindungen anderer war ihm ein Herzensbedürfnis. Bemerkenswert erschien mir an ihm, daß er niemals eine Flachheit über seine Lippen brachte. Diese Eigenschaft war natürlich eine Folge seines geistvollen Verstandes und seines starken Bedürfnisses alle Dinge erst zu durchdringen, ehe er sich darüber äußerte, aber auch begründet in seinem feinen Empfinden und seinem guten, ich möchte sagen, keuschen Geschmack. Ist es mir doch niemals während unseres langen Verkehrs miteinander in den Sinn gekommen, ihm eine derbe Anekdote zu erzählen. In unseren Unterhaltungen haben wir mancherlei Fragen behandelt, und da ist mir eine kleine Geschichte in Erinnerung geblieben, weil sie ihn als Ethiker charakterisieren kann. Wir gingen auf einsamem Harzwege, als er plötzlich die Frage stellte, was ich tun würde, wenn uns Strolche überfielen. Ich sagte: „Meinen Revolver ziehen und die Kerle totschießen.“ Er lachte herzlich, lehnte aber für sich jeden Versuch der Notwehr ab, solch ein armer Mensch raube doch nur gezwungen, er werde ihm alles geben, was er haben wollte und, setzte er pffiffig hinzu, man brauche ja nichts besonders Kostbares mitzunehmen. Diese Äußerung kann freilich auch seiner Oppositionslust entsprungen sein, die ihn oft zu einem ausgesprochenen Widerstand gegen jede noch so harmlos vorgebrachte Behauptung führte. Es trieb ihn dann, dazu den entgegengesetzten Standpunkt, manchmal gegen seine eigene Überzeugung, einzunehmen. Dies war eine Methode seiner geistigen Arbeit.

Einstmals hatte sich mir gegenüber ein großer Gelehrter geäußert: Für die Menschheit käme es nur auf den Fortschritt an, ob der Mensch, der diesen Fortschritt hervorbringe, zugleich der größte Lump sei, wäre dabei gleichgültig. Die Brutalität dieses Ausspruchs, dessen Wahrheit ich leider in gewissen Grenzen zugeben mußte, hatte mich tief verletzt. Da bedeutete der Verkehr mit Wilhelm für mich das Aufgehen einer neuen Welt, der Welt eines Mannes, dem Vornehmheit der Gesinnung im Denken und Handeln höher galt als das moderne einseitige Ziel der produktiven Höchstleistung. Wilhelm wies jede Art geschäftlicher Gerissenheit weit von sich, er wollte lieber große Summen verlieren als die kleinste nicht ganz lauter gewinnen. Aus dieser Vorstellung heraus war er auch ein Feind aller Reklame, und seine Mitarbeiter hatten in dieser Beziehung oft einen schweren Stand mit ihm.

Einfach und sparsam lehnte er übertriebenen Luxus für sich ab, denn materielle Genüsse waren ihm gleichgültig, ja unangenehm. Er versuchte sich über den menschlichen Schwächen zu halten, jede Regung der Eitelkeit unterdrückend und sie bei anderen gütig belächelnd. So war sein Verhältnis zu Titeln und Orden, so sein Verhältnis zu Macht und Ansehen beim Kaiser und bei der Regierung. Die Beziehungen zwischen ihm und dem Kaiser haben sich nicht näher gestaltet. Die impulsive Art Wilhelms II. fiel ihm auf die Nerven. Einmal z. B. hatte Wilhelm von Siemens bei einem Bierabend in der Nähe des Kaisers gesessen, als dieser ihm plötzlich in übermütiger Laune auf das Knie schlug und ihm zurief: „Kaufen Sie mir doch Ziegel aus Cadinen für Ihre neuen Bauten ab.“ Ich hätte gefragt, Majestät, zu welchen Bedingungen können Sie liefern? welche Frage auch ein ebenfalls anwesender inzwischen verstorbener Geh. Kommerzienrat prompt stellte. Wilhelm von Siemens konnte aber vor Mißbehagen über diese kaiserliche Art des Geschäftemachens nichts herausbringen. Es war natürlich auch eine gewisse Ungeschicklichkeit im Umgange

mit der Welt im Spiele, die ihm dauernd anhing. So kam es, daß er wenig politischen Einfluß hatte, obwohl er nach seiner geistigen Bedeutung und als Leiter eines des größten Geschäftshauses der Welt eine ganz besondere Stellung hätte einnehmen müssen. Aber die alte Regierung hatte kein Verständnis für solcherlei Erwägungen, sehr zum Nachtheile Deutschlands. Die politischen Parteien dagegen erkannten ihn besser und boten ihm sowohl liberal wie konservativ zu verschiedenen Malen einen Sitz im Parlament an. Er aber lehnte stets ab, weil er sich seine Unabhängigkeit bewahren und außerhalb der Parteien stehen wollte; auch war es ihm unerwünscht, wenn im Siemens-Konzern irgendwelche Politik getrieben wurde. Zum Schlusse seines Lebens neigte er allerdings immer mehr rein konservativen Anschauungen zu.

II.

Marcia funebre.

Das Leben des Menschen kann eine Komödie, bisweilen ein Narrenspiel, oft genug auch eine Tragödie sein. Heute wird es allen denen zur Tragödie, die den Gedanken an eine bessere Zukunft verloren. Zu diesen gehört auch Wilhelm von Siemens. Aber sein Geschick ist noch von besonderer Art.

Er war von jeher eine tragische Figur für die, welche ihn näher kannten. Hatte das Leben ihn doch auf einen Posten gestellt, der seinem innersten Wesen nicht entsprach und von ihm das Opfer seiner Neigungen verlangt. Eine Gelehrtennatur, fühlte er sich nur wohl in der Muße philosophischer Betrachtung. Seine feine Geistigkeit litt an der brutalen Großartigkeit der Arbeit, die von ihm verlangt wurde, und das empfindsame Instrument wurde vorzeitig verstimmt und verbraucht. Die schnellen und schwerwiegenden Entscheidungen machten ihm bei seiner Wesensart mehr Mühe als mancher tüchtigen, einfacher organisierten Natur. So lebte er in fortgesetzter geistiger Überanstrengung.

Da das Geschäft in den letzten Lebensjahren des Vaters sich in einer Krisis befand, sah er ein, daß er der einzige war, der es erhalten könnte. Er übernahm die Leitung im klaren Bewußtsein des persönlichen Opfers, das er damit brachte. Überzeugt, daß er zeit seines Lebens im Kampfe stehen würde mit einer Materie, die ihn aufrieb, im Kampfe auch mit einer vorurteilslosen Konkurrenz. Er nahm diese Lebensarbeit auf sich für seines Vaters Werk, für die Zukunft der Familie, für deren Wohlfahrt in Selbstlosigkeit zu sorgen ihm vom Vater her geheiligte Überlieferung war.

Sein hoher, allem Gewinn abholder Sinn verbot ihm, sich aus seiner Arbeit für das Geschäft einen Sonderverdienst zu verschaffen, trotzdem er seine ganze Arbeitskraft restlos hergab. Er verzichtete damit im Laufe der Zeit auf sehr große Beträge zugunsten der Gesellschaft, aber „der Mammon lockte ihn nicht“. In den letzten Jahren seines Lebens überzeugte er sich, daß er geirrt hatte, da niemand seinen Verzicht verstand. Für alle seine Opfer an Gut und Arbeit für die Allgemeinheit, den Staat, den Militärfiskus hat er nicht die Anerkennung erlebt, die er verdiente, aber manche schamlose Ausnutzung erfahren.

Ein schönes Glück ist Wilhelm beschieden gewesen. Er gewann schon in früher Jugend eine Frau, die er innig liebte. Er heiratete die reizende und lebensprühende Tochter seines Onkels Ferdinand Siemens, Eleonore. Diese Frau war die Ergänzung seines Wesens in vielen Beziehungen. Sie schuf ihm den Zusammenhalt mit dem Leben, den er sonst leicht verloren haben würde. Um die beiden der Ehe entsprossenen Kinder, ihre Erziehung und ihr Wohlergehen bemühte sich der Vater sorgsam. Er fand sich mit ihr in der Pflege der Familientradition, und sein Haus bildete in späteren Jahren den Mittelpunkt für den großen Siemensschen Familienkreis, dessen Mitglieder dort in Nöten und Sorgen, sowie als heiter empfangene Gäste stets warmherzige Anteilnahme fanden. Aber auch über diesen Kreis hinaus stand das Haus allen, die kommen wollten, offen. In ihrer unbekümmerten Lebenslustigkeit gab Elly große Gesellschaften und rauschende Feste, deren Gehalt feineren Ansprüchen nicht immer genügte. Es war dies vielleicht weniger ihre Schuld als die allgemeine Schwäche der Zeit vor dem Kriege. Ihm waren diese Veranstaltungen oft peinlich, er trug aber selbst einen Teil der Verantwortung, denn bei seiner Weltfremdheit ließ er sich leicht von Leuten imponieren, deren innere Werte nicht mit ihrer äußerlichen Gewandtheit im Einklange standen.

Er fand im Hause meist nicht die Muße und Harmonie, welcher seine Natur bedurft hätte. Seiner Liebe zu seiner Frau tat das aber keinen Abbruch, denn „sie gab ihm ja dafür so viel anderes“. Wenn er sich erholen wollte, liebte er es, ganz allein auf Reisen zu gehen. So ist er einmal nach Petersburg gefahren, wo ihn der Direktor des dortigen Werkes, im Glauben, er käme des Geschäftes wegen, eiligst aufsuchte. Er aber sagte: „Herr Goerz, lassen Sie mich in Frieden, ich bin nur gekommen, um hier für mich zu arbeiten.“

Der hereinbrechende Krieg führte Wilhelms Leben dem tragischen Ausgange zu.

Ogbleich kein Anhänger der Kriegspolitik, hielt er es schon in Friedenszeiten für nötig, sich mit kriegstechnischen, im besonderen marinetechnischen Dingen zu beschäftigen. Er bewies in der Behandlung der Fragen seine der Zeit weit voraneilende Erkenntnis.

Bereits im Jahre 1904 entwickelt er den Kreuzerkrieg. Er tritt für den Bau von sehr großen, starken und schnellen Kreuzern ein, die Halbheiten des Reichsmarineamtes verurteilend. Nicht viel später verhandelt er mit einem bekannten Admiral über den Bau von Unterseebooten. In allem findet er mangelndes Verständnis und glatte Ablehnung. Als die dunklen Wolken sich um unser Vaterland drohender auftürmen, dringt er gemeinsam mit anderen patriotischen Männern bei der Regierung darauf, daß Maßnahmen über Beschaffung von größeren Vorratsbeständen an Rohmaterialien getroffen würden, denn die Möglichkeit für den Gegner, Deutschland in Kriege von allen Zufuhren abzuschneiden, ist ihm klar. Im März 1914 wird endlich eine Versammlung für diesen Zweck zusammenberufen. Wilhelm von Siemens tritt für die Ausgabe von mindestens einer Milliarde für Rohstoffe ein. Der Minister kommt erst zum Schluß der Beratung und stellt freundlich die allseitige Übereinstimmung der Anwesenden fest. Aber es geschieht nichts. In sprühendem Zorn hat er mir oft davon gesprochen. Er hält Deutschland für ganz ungenügend vorbereitet für einen Krieg. Doch seine Stimme verhallt wie schon oft ungehört. Nun kommt die Kriegserklärung. Zuerst ist er sehr gedrückt, im August sehe ich ihn aber in mehr Zuversicht. In überlegenem Vorausblick hat er schon Anstalten für Umstellung der Betriebe getroffen und spricht den Zweiflern und

Schwachen Mut zu. Er verfaßt gleichzeitig die schöne Schrift „Die deutsche Industrie und der Weltkrieg“.

Dann kommt der Zickzackkurs, heute wird von der Behörde eine große Kriegslieferung in Bestellung gegeben und morgen wieder zurückgezogen. So wird er bald mit Schrecken gewahr, daß die Regierung die ungeheuren Möglichkeiten, die in der deutschen Industrie liegen, nicht rechtzeitig auszunutzen versteht. Sachverständige werden als unbequem beiseite geschoben, und unerfahrene Leute kommen oft, bloß weil sie Offiziere sind, in einflußreiche Stellen. Trotzdem verliert er den Mut nicht, hat er doch von der militärischen Oberleitung die höchste Auffassung. Sein erfinderischer Kopf beschäftigt sich mit allen möglichen Problemen, die technischen Kriegsmittel zu verbessern, auf der Erde, in der Luft und unter Wasser. Es ist schwer alles zu erzählen, was er und seine Mitarbeiter erdenken. Viele Millionen werden für Versuche aufgewendet. Aber hiermit nicht genug. Wieder ergreift er die Feder und behandelt die Fragen der Kriegspolitik, als er sieht, daß die führenden Kreise zu zaghaft sind. So entstehen die Schriften: „Eine kriegstechnische Betrachtung“ (1915); „Seerecht und Sicherung der Volkswirtschaft“ (1916); „Die Freiheit der Meere“ (1917); „Belgien und die Abrüstungsfrage“ (1917). Der glänzendste Artikel ist wohl der zweite, in dem er mit schärfster Logik und zwingender Dialektik für den unbeschränkten Unterseebootskrieg eintritt. Er gewinnt dadurch manche unsicheren Gemüter wahrscheinlich auch an leitenden Stellen. So erfolgt die schwere Entscheidung für den uneingeschränkten Unterseebootskrieg. Er glaubt, daß eine neue Ära einsetzen und die technische Seite dem Gebot der Stunde entsprechend ausgebildet werden wird. Aber wie täuscht er sich. Stockend und zaghaft wie vorher geht die Entwicklung. Der Leiter des Reichsmarineamts zeigt sich hier in keiner Weise den Forderungen der kritischen Zeit gewachsen. Daß Wilhelm von Siemens nach Erkenntnis dieser Verhältnisse hartnäckig an der Fortsetzung des Krieges festhält, erachte ich für seinen großen politischen Fehler. Er aber glaubt unentwegt an den endgültigen Sieg und arbeitet in diesem Sinne weiter.

Welche Mühe verursacht ihm die Schaffung neuer Flugapparate. Welche Arbeit verwendet er gemeinsam mit seinem Vetter, Oberst Schwedler, auf die Durchbildung des aus der Ferne elektrisch lenkbaren Gleitbootes und anderer wichtiger Dinge mehr. Übernimmt die Marine diese Erfindungen, so wird er von der praktischen Weiterarbeit daran ausgeschlossen, und was nachher geschieht, erfährt niemand. Eine Genugtuung wird ihm wenigstens zum Schluß, als die Heeresverwaltung noch zur Zeit des Waffenstillstandes mehrere Hundert seiner Kampfflugapparate bestellt, die „als die besten der Welt“ sogar von der Entente anerkannt werden. Aber es ist zu spät.

General von Ludendorff sagt in seinen Kriegserinnerungen: „Dieser Welt- und Völkerkrieg verlangte Ungeheures von uns Deutschen, jeder einzelne mußte das Letzte hergeben, wenn wir gewinnen wollten.“ Nun, Wilhelm von Siemens hat dies getan und sehr viele aus seinen Werken und anderen Industrien mit ihm. Aber es ist das Tragische, daß dies Letzte, was der einzelne im besten Sinne hergab, vielfach nicht benutzt, sondern vergeudet wurde.

Es fehlte uns leider außer dem großen Politiker der in der heutigen Zeit ebenso wichtige weitblickende, wirtschaftlich-technische sachverständige Organisator an verantwortlich leitender Stelle. Ein solcher wäre vielleicht zu finden gewesen, aber das alte System ließ dies nicht zu.

Wilhelm von Siemens hat das Scheitern seiner Hoffnungen auf den glücklichen Ausgang des Krieges merkwürdig gefaßt ertragen. Der eigentliche Zusammenbruch kam erst später.

Als die Nahrungsmittel knapper wurden und ihre Rationierung einsetzte, verlangte er, daß mit den kärglichen, offiziell bestimmten Rationen ausgekommen werden müsse. Er verschmähte es, aus den Vorräten seiner Landgüter sich Vorteile zu verschaffen, was doch so leicht gewesen wäre. Er wollte nicht anders als das große Volk gestellt sein. Seine Frau stimmte leider darin mit ihm überein. Trotzdem setzten sie beide ihre unermüdliche Kriegsarbeit fort, und wir anderen mußten es mit ansehen, wie sie sich dabei mehr und mehr aufrieben. Aber alles Zureden half nichts, jeder Hilfe wurde energischster Widerstand entgegengesetzt.

Dann kamen die Revolutionsstürme des Novembers 1918 und die großen Versammlungen in den Räumen der Werke in Siemensstadt. Wüste Reden wurden gehalten, und verblendete Hetzer verlangten, daß die Herren von Siemens davon gejagt würden. Das war der Dank, den der uneigennützig Schöpfer der Existenzmöglichkeit aller dieser Leute, für die er viele Jahre hindurch gedacht und gearbeitet hatte, davontrug. Er verachtete die Hetzer und zog sich mehr und mehr von der Geschäftsleitung zurück.

Die Vorwürfe, die nach der Revolution gegen die deutsche Industrie erhoben wurden, hielt er für ungerechtfertigt. Die Industrie hatte nach seiner Meinung ihre Aufgabe erfüllt. Sie hatte die Massen auf eine Lebenshaltung erhoben, welche im armen Deutschland sonst nicht möglich gewesen wäre, und dem Staate außerdem glänzende Steuerquellen erschlossen. Im Kriege hatte sie ihrer vaterländischen Pflicht genügt, und die Auffassung, daß sie Interesse an der Verlängerung des Krieges gehabt hätte, hielt er für grundfalsch.

In einem Augenblick nun, in dem die deutsche Industrie durch den verlorenen Krieg in größter Gefahr schwebte, stellten gewisse Volksführer die Forderung nach den gewagtesten sozialistischen Experimenten, nur um die Massen von der eigentlichen Not der Zeit abzuleiten. Schwere Sorgen bereitete ihm auch der geschäftliche Dilettantismus in Steuer- und Finanzfragen seitens der Regierung, in dem er den vollständigen wirtschaftlichen Ruin Deutschlands voraussah.

Aber das Maß seiner Leiden war noch nicht erschöpft. Die Frau erkrankte trotz ihrer kräftigen Konstitution an heftiger Lungenschwindsucht, ein Opfer ihrer rastlosen Fürsorgetätigkeit. Viele Monate rang sie mit dem Tode. Als schon jede Hilfe ausgeschlossen erschien, hoffte er noch täglich auf Besserung. Er umgab sie mit rührender Sorgfalt, um ihr das schrecklichste aller Leiden erträglich zu machen. Ihr Tod nahm ihm den letzten Willen zum Leben. Drei Monate später verschied er am 14. Oktober 1919, 64 Jahre alt, nach kurzem Krankenlager fern der Heimat in der Schweiz, wohin ihn die Ärzte zu seiner Kräftigung gesandt hatten. Wir betteten ihn an ihrer Seite zur letzten Ruhe in dem Bewußtsein, daß er jeden Glauben an eine bessere Zukunft in dieser Welt verloren hatte und auch nicht wiedergewonnen haben würde.

III.

Scherzo.

Östlich von Berlin liegt der Ort Biesdorf, mit der Stadtbahn leicht zu erreichen. Das Gut mit dem Schloß übernahm Wilhelm noch zu Lebzeiten des Vaters. Dort verbrachte er durch viele Jahre die Sommermonate, eingedenk der alten Weisheit von Horaz: „Beatus ille qui procul negotiis.“

Den Park hatte er sehr erweitert und freute sich der heranwachsenden Bäume und Sträucher. Auch wandte er der Hebung der Produktion des Gutes große Aufmerksamkeit zu. Fern vom Geräusch der Großstadt war überall Behaglichkeit. Dort war Frau Elly so recht am Platze, als aus Ostpreußen stammende Gutsfrau Gastfreiheit ausüben und Heiterkeit um sich zu verbreiten. Jedermann freute sich, hinauszukommen und die Gastlichkeit des weiten Hauses auszunutzen, wo für merkwürdig viele, wenn sie die Rückfahrt versäumten, Unterkunft zur Nacht sich ermöglichen ließ. Schöne Tennisplätze und Gelegenheit für andere Spiele waren vorhanden. In früheren Jahren ritt Wilhelm gern; abends liebte er es, Billard zu spielen. Dabei konnte er recht leidenschaftlich werden, wenn er in Gefahr des Verlierens kam.

Biesdorf hatte um 1900 einen vorzüglich gepflegten Wildstand, manch ein guter Bock ist auf der Pürsch oder dem Anstand gestreckt worden. Nur Wilhelm selbst hat dort niemals einen erlegt, gern verzichtete er zugunsten seiner Gäste, und solche gab's immer. Fasanen, Hühner und Hasen waren reichlich vorhanden, und am Ende des Jahres hielt man die Treibjagd ab. Eine bunte Gesellschaft erschien dann, Minister, Gelehrte, Ärzte und Künstler, hohe Beamte und Offiziere. Manchen guten Weidmann lernte ich dort kennen, aber auch manchen Schiëßer. Den alten, vornehmen und weidgerechten Exzellenz von Wedell †, den bekannten Hochwildjäger Generalkonsul Wedekind †, den dicken königlichen Leibarzt Lapierre † aus Potsdam, einen ausgezeichneten Schützen, der immer Jagdkönig wurde, wenn er erschien, während der allzeit joviale Stadtrat Markgraf † viele Jahre hindurch die Ehre des Ferkelkönigs erreichte, die er jedesmal mit einer reizenden Rede quittierte. Ferner die Generale Freiherr von Gebattel, von Dinklage-Campe, von Gersdorff †, Wynneken, Oberst von Goldammer †, berühmt wegen seiner nicht gerade keuschen Geschichten, Staatsanwalt von Mendelssohn, die Physiker Nernst und Kurlbaum, den Direktor von Siemens & Halske von Hefner-Alteneck †, einen Riesen an Körper, Bankier Robert Warschauer †, den Afrikareisenden Professor Schillings und Bildhauer Professor Schott, beide große Nimrode, den ehemaligen Polizeipräsident von Berlin von Jagow, den feingebildeten Landrat des Kreises von Treskow, den Arzt Professor Renvers †, den alten Freund des Hauses Professor David von Hansemann u. v. a. m. In früheren Jahren waren auch Exzellenz von Stephan †, ein gewaltiger Jäger, und der Geh. Oberpostrat Henne † ständige Jagdgäste in Biesdorf, von denen mancherlei Jagdgeschichten erzählt wurden. Viele der einstigen Schützen sind bereits in die „ewigen Jagdgründe“ hinübergewechselt, ein grüner Bruch sei ihrem Andenken gewidmet.

Erst gab es einen kräftigen Imbiß mit wärmenden Getränken, und meist zog sich die Stunde hierfür sehr in die Länge. Draußen erschien die Treiberwehr, größten-

teils Leute vom nahen Berlin, aus allen Berufen stammend, zum Teil mit hohen schwarzen Hüten und eleganten Paletots, auf der Jagd sonderbar anzusehen. Aber sie gaben sich viel Mühe, und ich habe nie bessere Treiben erlebt. Lustig ist es für das Weidmannsherz, wenn dann von fernher die Schützen mit den Treibern den großen Kreis des Jagens allmählich enger ziehen, es hier und dort knallt, und die Hasen rollen.

Wenn zum Schluß die Jagd abgeblasen wird, liegen bis zu 350 Hasen und viele Fasanen auf der Strecke, aber weit mehr werden als erlegt gemeldet. Doch dies wird vorläufig verschwiegen, und erst nachher bei der Festtafel verkündet und belacht. Mancher will gern Jagdkönig werden, um die Ehre des Tages zu gewinnen, ob er sich dabei an der Zahl der erlegten Hasen versieht, kommt so genau nicht darauf an. Dann wandert man ins Schloß, wirft sich in weiße Wäsche und den Frack und schreitet gemeinsam mit den erschienenen schön geschmückten Damen zur blumenbekränzten Festtafel. Der Höhepunkt kommt mit den Reden. Niemals habe ich Wilhelm von Siemens in besserer Form gesehen. Er erhebt sich, gibt die Schußresultate bekannt und bringt ein dreimaliges Horrido auf den Jagdkönig aus. Mit Geist und Humor hält er seine formvollendeten Reden und streift mit feiner Ironie die groben Verstöße gegen die Jagdregeln. Leider sind dem Gedächtnis die meisten seiner witzigen Bemerkungen entfallen, nur an wenige erinnere ich mich noch. So berichtete er einst, wie er auf der Jagd zwei Hasen belauscht habe, die sich unterhielten. Plötzlich wies der eine erschreckt auf einen sich nahenden Schützen hin und wollte ausreißen, worauf der andere rief: „Ach, den kenne ich, der kann ja nicht schießen, sieh doch, ein jeder Zoll ein Ferkelkönig.“

Und er ließ den Ferkelkönig hoch leben. Doch gleich, wie um diesen zu entlasten, erzählte er von sich, daß, als ihm ein Hase sehr gut gekommen, er aber fehlte, die Treiber gerufen hätten: „Das Aas trifft ja nischt.“

Die letzte große Jagd in Biesdorf war im Jahre 1907, nur einige kleinere wurden später noch abgehalten. Der Grund war, daß Baugesellschaften Biesdorf mit einem Gürtel von Siedelungen umschlossen, und daß Wilhelm in seinem Patriotismus ein großes, mitten im Gut gelegenes Landstück hergegeben hatte, auf dem die Siemens-Schuckert-Werke eine Flugzeughalle für den Militärfiskus errichteten. Dadurch wurde bald die Jagd vollständig ruiniert.

Zu Anfang dieses Jahrhunderts hatten er und sein Bruder Arnold gemeinschaftlich mit dem alten Oberst von Goldammer als Hochwildrevier den Sachsenwald bei Friedrichsruh gepachtet. Dasselbe verwaltete der letztere schonend nach weidmännischen Grundsätzen. Dort sollte Wilhelm einmal einen Keiler schießen. Von Goldammer führte ihn im Walde an die Futterstelle der Sauen und bezeichnete ihm einen der auf ihre Fütterung wartenden zahlreichen Schwarzkittel. Der Oberst hatte aber keinen Erfolg mit ihm, denn Wilhelm weigerte sich entschieden, „solche zahmen Schweine zu schlachten“.

Später, um das Jahr 1911, übernahm Wilhelm zusammen mit seinem jüngeren Bruder Carl Friedrich die schöne Jagd Rupolding, hoch in den Bergen von Oberbayern bei Traunstein gelegen, wo er gern weilte. Hier hat er noch einige gute Hirsche gestreckt. Es war merkwürdig, daß er, im Leben sonst so wenig vom Glück begünstigt, auf der Jagd ein besonderes Weidmannsheil hatte. Er machte allerdings selten Gebrauch davon, denn er war kein eigentlicher Weidmann, da es ihm an Passion hierfür fehlte. Er hatte aber hohes Verständnis für die Schönheiten des

Waldes und die Eigenheiten seiner Bewohner. Als ihn einmal jemand aus der Jagdhütte fortgehen sah und fragte, wohin er wolle, sagte er: „Pürschen.“ Worauf der andere entgegnete: „Sie haben ja aber keine Büchse mitgenommen.“ „Nein,“ meinte er, „darauf kommt es ja gar nicht an.“ Er ging eigentlich nur hinaus, um seinen Gedanken nachzuhängen. Der Genuß, das Wild von fern zu beobachten, galt ihm dabei höher als es zu erlegen.

IV.

Finale. Allegro molto.

Wilhelm von Siemens' Charakter und Gesinnung stehen auf verehrungswerter Höhe. Ein Maßstab läßt sich für diese ethischen Eigenschaften allerdings schwer anwenden, hier sind wir nur auf unser Empfinden angewiesen.

Anders ist es mit der Wertung seiner geistigen Kapazität. Diese können wir an seiner produktiven Leistung unmittelbar messend verfolgen. Man braucht sich nur die Entwicklung des Hauses zu vergegenwärtigen von dem Zeitpunkt an, als er es im Jahre 1890 übernahm, bis zum Jahre 1914, wie es vor dem Kriege sich darstellte, und man hat Wilhelms Leistung vor Augen. Damals war der Mittelpunkt des Geschäfts das enge Werk in der Markgrafenstraße — nur einige kleinere Abteilungen waren nach Charlottenburg verlegt worden — mit einer Arbeiter- und Angestelltenzahl von insgesamt ca. 4000. Im Jahre 1914 hat die Siemens & Halske A.-G. in Siemensstadt bei Berlin 3 gewaltige Werke, das Werner-Werk, das Blockwerk und die Elektrische Bahnabteilung, in Charlottenburg das Glühlampenwerk und in Lichtenberg die Elektrodenfabrik Gebrüder Siemens. Die engverbundenen Siemens-Schuckert-Werke bestehen aus 8 Riesenwerken, dem Dynamowerk, dem Elektromotorenwerk, dem Kabelwerk, dem Kleinbauwerk, dem Protoswerk, dem Charlottenburger Werk und den beiden Nürnberger Fabriken. Der Umsatz war über das Zwanzigfache gestiegen, entsprechend der Gesamtzahl der Angestellten und Arbeiter, welche im In- und Ausland ca. 83 000 betrug. Diese Entwicklung hat Wilhelm von Siemens bis in die feinsten Adern der Fabrikations- und Kalkulationsmethoden geleitet, sie ist sein Werk.

Im Laufe der vielen Unterhaltungen mit Wilhelm erhielt ich ein Bild seiner Auffassung über die einzelnen Phasen der Geschäftsentwicklung und den Anteil, den er daran genommen hat. Hiervon will ich einiges wiederzugeben versuchen¹⁾.

¹⁾ Ich verweise hier zur Ergänzung meiner Angaben auf die inzwischen erschienenen Nekrologe:

1. F. A. Buchholtz, W. v. S. Prometheus Nr. 1576, Jahrg. XXXI, 15, 10. I. 1920.
2. Prof. Dr. Emil Budde, W. v. S. Elektrotechn. Zeitschr. 1919, Heft 48.
3. Dr. Georg Erlwein, W. v. S. Elektrochem. Zeitschr. 26, 84 (1920).
4. Dr. Rich. Fellingner, W. v. S. Nord und Süd, Februarheft 1920.
5. Prof. Dr. Gerdien, W. v. S. Zeitschr. f. techn. Physik, Februarheft 1920.
6. Ob.-Ing. Heintzenberg, W. v. S. Wirtschaftliche Technik, Februarheft 1920.
7. Prof. Otto Krell, W. v. S. Zeitschr. f. Binnenschiffahrt, Heft 23 (1919).
8. Obering. Martin Lebegott, W. v. S. Das technische Blatt, illustr. Beilage d. Frankfurter Zeitung, II. Jahrg., 10. I. 1920.
9. Dr. ing. hon. causa Ferd. Neureiter †. W. v. S. Elektrotechnik u. Maschinenbau, Wien, Heft 48 (1919).
10. Reichsrat Dr.-Ing. hon. causa A. v. Rieppel, W. v. S. Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing., Heft 52 (1919).
11. Ob.-Ing. Aug. Rotth, Dinglers Polytechnisches Journal, Heft 23 (1919).

Er war sich bewußt, wie wichtig die Wahl der geeigneten Mitarbeiter bei der Leitung solch großen Geschäftes sei und legte auf die Auslese derselben die größte Sorgfalt. Auch das gute Einvernehmen mit seinem Bruder Arnold, mit dem ihn bis zum Ende eine warme Freundschaft verband, betonte er gern. Er hob besonders dessen Zuverlässigkeit hervor und charakterisierte sie in seiner allegorischen Art. Wenn man eine Kahnfahrt zu gemeinsamem Ziele macht, dürfe es nicht einem der Teilnehmer mit einem Male einfallen, aussteigen zu wollen. Arnold hätte das trotz Sturm und Regen niemals getan. Dies schien zugleich eine Art Ermahnung für uns Jüngere sein zu sollen, die sich politisch von ihm getrennt hatten.

Hatte Wilhelm einen Kandidaten zu wichtigem Posten erkoren, so lud er ihn zu einer Besprechung, wobei er eine eigenartige Fragestellung gebrauchte. Solche regelrechten „Examina“ konnten am Vormittag beginnen und bisweilen erst am späten Nachmittag enden, und mancher von denen, die sie bestehen mußten, hatte wohl das Gefühl, niemals eine schwerere Prüfung durchgemacht zu haben.

Als Wilhelm die Oberleitung von Siemens & Halske 1890 übernahm, waren die führenden Männer in der Firma recht alt geworden und hatten wenig Verständnis für die Zukunftsaufgaben der Elektrotechnik. Besonders auf dem Gebiete des Schwachstroms, dem Telephon- u. Telegraphenwesen war die Firma stehengeblieben. Um diese Mißstände zu beseitigen, versuchte er zunächst, sich geeignete neue Persönlichkeiten zu verschaffen. Er ging 1893 zu dem damaligen Universitätsprofessor Kundt in Berlin und bat ihn um Empfehlung eines jungen talentvollen Physikers. Man verfiel auf den Privatdozenten Dr. Raps¹⁾, der ihm bei einem Besuche des Laboratoriums durch seine Geschicklichkeit beim Experimentieren — er zog gerade mit einer virtuoson Kunstfertigkeit lange Quarz-Glaskapillaren aus — aufgefallen war. Wilhelm war besonders stolz darauf, diese Wahl getroffen zu haben, denn unter Professor Raps' Leitung, zu der er sich nach ca. 2 Jahren durchzusetzen verstand, wuchs das Werner-Werk mit Hilfe des im Jahre 1896 noch eingetretenen Physikers Dr. Franke, zu seiner heutigen Ausdehnung heran. Wilhelm betrachtete stets das Werner-Werk als das eigentliche Rückgrat von Siemens & Halske. Mit besonderer Genugtuung wies er auf die feine, wissenschaftlich technische Tätigkeit hin, die dort von einem Stabe hervorragender Physiker und Ingenieure geleistet würde.

Wilhelm hielt es für eine der wichtigsten Aufgaben, dafür zu sorgen, daß jeder Mitarbeiter an den für ihn passenden Platz, wo seine Veranlagung am besten ausgenutzt werden konnte, gestellt wurde, denn in einem großen Betrieb ereignet es sich sehr leicht, daß ein Angestellter auf ein totes Geleise gerät. Schon aus diesem Grunde wollte er über alles unterrichtet sein, über jede technische wie wissenschaftliche Neuerung, jede Änderung in der Propaganda, Kalkulation und in der Behandlung der Arbeiter und Angestellten. Er hat es auch durchgesetzt, daß es nichts im ganzen großen Konzern gab, worüber er nicht informiert war.

Bewunderswert war, daß er bei allen den vielen Problemen, denen er sich gegenübergestellt sah, stets eine ganz originelle Art bewahrte, wie er dieselben anfaßte. Mancher der Direktoren, der zu ihm mit einer nach seiner Meinung ganz fertigen Sache kam, erfuhr im Laufe der Diskussion, daß man dieselbe auch anders ansehen

¹⁾ Inzwischen ist Professor Dr. August Raps im Alter von 55 Jahren am 20. IV. 1920 auf dem Höhepunkt seines Schaffens durch den Tod ereilt worden. Am Sterbetage seines Freundes, Wilhelm von Siemens, legte er sich nieder, um nicht wieder aufzustehen. Auch er ist ein Opfer der Anstrengungen des Krieges und des Zusammenbruchs. Seine Verdienste um die Siemens und Halske A.-G. sollen in diesen Mitteilungen noch eingehend gewürdigt werden.

könne. So war es sein Bestreben, Unternehmungen, bevor sie in Angriff genommen wurden, auf alle Möglichkeiten zu durchdenken und besonders ihre Auswirkung in ferner liegender Zukunft genau einzuschätzen. War von seiten der Konkurrenz ein neues Verfahren eingeführt worden, so hörte man ihn gegenüber den in Betracht kommenden Ingenieuren die peinliche Frage stellen: „Warum haben wir dies Verfahren selbst nicht früher gefunden?“ Diese Frage war nicht ganz unberechtigt. Denn, sagte er, man solle nicht glauben, wie schwer es manchmal sei, daß sich selbst die einfachste neue Sache durchsetze. Der Grund dafür läge zuweilen darin, daß die leitenden Männer eifersüchtig darüber wachten, daß nur von ihnen selbst ausgehende Anregungen zur Ausführung gelangten, während sie fremden Gedanken ablehnend gegenüberständen. Mitunter wären auch junge, aufstrebende Elemente unterdrückt worden. Davon könnten manche der heute in gehobener Stelle stehenden Herren ein Lied singen. Ein jüngerer Angestellter aber, der gar vom obersten Leiter protegirt würde, habe es besonders schwer. Daher bestände eine der Hauptaufgaben für den obersten Leiter des Geschäfts darin, darüber zu wachen, daß die angegebenen Mißstände nicht zum Schaden des Hauses überhand nähmen. In dieser Beziehung teilte er sehr lehrreiche Beispiele mit. Typisch ist die gründliche Ausbildung der Wechselstromtechnik durch Goerges, jetzt Professor in Dresden, in den 80er und 90er Jahren, welche dieser gegen die Neigung der leitenden Ingenieure sozusagen in den Betrieb eingeschmuggelt hat.

Wilhelm von Siemens hat die hohe Bedeutung der Wechselstrommaschine frühzeitig erkannt. Er gab schon im Jahre 1883 einen klaren Ausblick über die Möglichkeiten der Verwendung des hochgespannten Wechselstroms für verschiedene Zwecke, im besonderen im Jahre 1886 für den Betrieb von elektrischen Vollbahnen an. Damals ließ sich aber sein Plan noch nicht ausführen, erst viele Jahre später wurde er in die Tat umgesetzt.

Wie eine gute Idee aber nicht zur Ausführung kommen kann, zeigt nachstehender Fall. In der zweiten Hälfte der 90er Jahre verfolgte Wilhelm von Siemens nämlich in mehrjährigen Versuchen den Einfluß der Kühlung auf im Betrieb befindliche elektrische Motoren. Das Ergebnis war die Gleichstrommaschine in ihrer heutigen Form mit Wendepolen. Die Ingenieure besaßen aber kein Vertrauen zu dem neuen Versuch, und da Wilhelm von Siemens mit anderen Geschäften überhäuft war, wurde er behindert, mit der nötigen Energie auf der Durchführung seiner Ideen zu bestehen. Infolgedessen blieben diese liegen, bis von anderer Seite die ersten Maschinen dieser Art ganz nach dem von Wilhelm von Siemens' gegebenen Vorbild auf den Markt gebracht wurden¹⁾. Diese Geschichte hat er stets mit besonderer Bitterkeit erzählt. Nach meiner Meinung trägt Wilhelm aber ein gut Teil der Verantwortung selbst. Denn obwohl er ein großer Autokrat war, ließ er sich schwer dazu bewegen, eine endgültige Regelung einer Angelegenheit selbst herbeizuführen. Er wollte die eigentliche Entscheidung vielleicht aus einer Art Rücksichtnahme den leitenden Herren überlassen. Daraus entstanden dann manchmal Mißverständnisse und unliebsame Erfahrungen.

Schon von 1882 an beschäftigte er sich mit der Verbesserung der Glühlampen. Er erzählte, wie ihm hierbei zuerst der Zusammenhang zwischen Produktion und Verbrauch klar geworden sei. Wenn man die Herstellung elektrischen Strom liefernder Maschinen in den Fabrikationsstätten erhöhen wollte, so mußte man für die

¹⁾ Siehe Siemens Mitteilungen 1914, S. 203: Die Entwicklung der Gleichstrommaschine v. A. Rothh.

Erzielung einer besseren. Ökonomie der Beleuchtungskörper Sorge tragen. Das Ziel war, die elektrische Beleuchtung wenn nicht wohlfeiler, so doch angenehmer als andere Beleuchtungsarten zu gestalten. Über das Ergebnis dahingehender Untersuchungen hat er seinen ersten Vortrag gehalten, dessen Erfolg man aus einem Brief seines Vaters erfährt.

Werner an Sir William Siemens, London, 28. 2. 1883.

„Gestern hielt Willy im elektrotechnischen Verein seinen Maiden speech mit sehr großem Erfolg. Er gab in seinem Vortrage eine hübsche Theorie der Glühlichtbeleuchtung, die viel wissenschaftlich Neues enthält. Der Vortrag dauerte fast 1½ Stunden, und alles hörte gespannt zu bis zum letzten Augenblick. Ich hatte Sorge um ihn, da er kurz vorher Nasenbluten und während der ganzen Zeit Kopfschmerzen hatte. Aber nur seiner Stimme hörte man starke Erkältung an. Willy ist dadurch mit einem Sprunge zu einer Fachautorität geworden.“

Es handelte sich bei diesen Arbeiten unter anderem darum, den Kohlenfaden mit einem festen, gegen zu große Zerstäubung schützenden und die Leuchtkraft und Lebensdauer der Lampe erhöhenden Überzug aus Graphit zu versehen. Der Weiterausbildung der Glühlampe hat Wilhelm von Siemens bis in die letzte Zeit seine Aufmerksamkeit gewidmet. Schon unter seinem Vater hatte er sich in der Glühlampenabteilung in der Markgrafenstraße ein eigenes, mit guten technischen Hilfsmitteln ausgerüstetes Laboratorium eingerichtet. Als dann später auf seine Anregung die Glühlampenfabrikation nach Charlottenburg in ein neues Werk verlegt wurde, schuf er dort noch größere Laboratorien, die in reichster und muster-gültigster Weise ausgestattet wurden. Seine Idee war, die Kohlenfadenlampe durch die Metallfadenlampe zu ersetzen. Für die Durchführung derselben gewann er den Chemiker Bolton, der dann die Metalle der sogenannten seltenen Erden, die noch wenig bekannt waren, auf chemischem und elektrochemischem Wege rein darstellte. Diesem leider so früh verstorbenen genialen Erfinder glückte es, bei dem außer-ordentlich schwierig zu behandelnden Metall Tantal eine Beobachtung zu machen, die dessen Eignung für die Glühlampe erwies. Aber von dieser Beobachtung bis zur Einführung in die Massenfabrikation war noch ein weiter Weg. Immer und immer wieder wollte man die Sache aufgeben, aber Wilhelm von Siemens hielt zähe fest und bestand mit aller Energie auf der Durchführung der Versuche. Endlich glückte es, zum erwünschten Ziel zu gelangen, die erste Metallfadenlampe, die wesentlich ökonomischer als die Kohlenfadenlampe brannte, auf den Markt zu bringen und die schöne Nernstlampe der A. E. G. zu verdrängen. Die Tantallampe mußte später ihrem Kinde, der noch sparsameren Wolframlampe, weichen. Das ursprünglich so unbedeutende Glühlampenwerk hat sich unter der Leitung von Dr. Feuerlein zu einem der größten Unternehmen seiner Art in der Welt entwickelt. Nach der Seeschlacht am Skagerrak wurde durch Armeebefehl der Firma bekannt gemacht, daß ihre Glühbirnen — wie übrigens auch die vom Werner-Werk gelieferten elektrischen Signalapparate — sich am besten auf den Schiffen während der dauernden großen Erschütterungen bewährt hätten. Mit großer Befriedigung hat Wilhelm von Siemens diese Nachricht empfangen.

Besonderes Interesse hat er dem elektrischen Bahnwesen entgegengebracht, welches von alfersher in zwei getrennten Werken betrieben wurde, dem Block-

werke mit dem elektrischen Eisenbahnsignal und Sicherungswesen und der eigentlichen elektrischen Bahnabteilung. Ersteres ist durch Regierungsbaumeister a. D. Pfeil, letzteres durch Geh. Baurat Schwieger, † 1901, zur Blüte gelangt. Wilhelms Ziel war die Elektrisierung sämtlicher Vollbahnen. Um dasselbe zu verwirklichen, mußte die Möglichkeit, starke, hochgespannte Ströme auf normalem Wege zu übertragen, gezeigt werden. Hierdurch würde die Überlegenheit des elektrischen über den Dampfbetrieb sinnfällig vor Augen geführt werden und eine Schnellbahn mit bis dahin unerhörten Geschwindigkeiten geschaffen. Zu diesem Zweck betrieb er im Jahre 1901 die Errichtung der Studiengesellschaft für elektrische Schnellbahnen. Dabei konnte er zugleich seine alten Pläne verwirklichen. Der hochgespannte Wechselstrom wurde in Gestalt von Drehstrom auf drei Stromleitern zugeführt und in dem im Wagen befindlichen Transformator in Motorstrom umgeformt. Für die Konstruktion fand Wilhelm in Walter Reichel den geeigneten Ingenieur, der seit 1889 unter Schwieger in der elektrischen Bahnabteilung bei Siemens & Halske, insbesondere bei der Inbetriebsetzung der Hoch- und Untergrundbahn Berlin tätig gewesen war. Daß seine Wahl gerade auf diesen Mann fiel, zeugt von eigenartiger Kombinationsgabe, denn bei der Ausführung der Versuche ergaben sich unerwartete Schwierigkeiten, deren Überwindung besondere Fähigkeiten erforderte. Die Stromzuführungsbügel klappten bei einer gewissen Schnelligkeit der fahrenden Züge durch den Luftdruck zurück, so daß man nicht über 130 km in der Stunde erzielen konnte. Da ließ Reichel den Schnellbahnwagen von einer Dampflokomotive mit 130 km Geschwindigkeit schleppen, stellte sich frei oben auf den Wagen und beobachtete das Verhalten der Bügel bei der Fahrt, eine Leistung, die nur ein glänzender Turner zuwege bringen konnte. Durch die Ergebnisse seiner Beobachtungen wurde eine Konstruktion ermöglicht, die den Wagen von Siemens & Halske als ersten die enorme Schnelligkeit von 207 km annehmen ließ.

Als eine nicht sehr erfreuliche Epoche in der Entwicklung der Firma betrachtete Wilhelm von Siemens die Zeit von 1897 bis zum Ende des Jahres 1902. Zum Ausgang 1896 wollte er nämlich Siemens & Halske in eine Aktiengesellschaft umwandeln. Die Deutsche Bank forderte aus einem gewissen Mißtrauen gegen seine geschäftliche Eignung für die Übernahme der Transaktion als Bedingung, daß ein hervorragender Verwaltungsbeamter als Leiter der Aktiengesellschaft bestellt würde. Die Wahl fiel auf den Präsidenten des Reichsversicherungsamtes Boediker, dem ein großer Ruf als bedeutende organisatorische Arbeitskraft voranging.

Er war ein vornehmer Beamter, aber in der Firma nicht an seinem Platze, da er als Jurist keinerlei Verständnis für die technischen Aufgaben mitbrachte und auch im Laufe der Jahre seiner Tätigkeit nicht zu gewinnen vermochte. Er bürokratisierte alles und vergrößerte dadurch die Schwerfälligkeit des Beamtenapparates, die ein altes Erbteil von Siemens & Halske war, anstatt sie zu beheben. Es ist dies ein warnendes Beispiel dafür, wohin ein industrielles Unternehmen treibt, wenn es von einem nur verwaltungsmäßig geschulten Staatsbeamten geleitet wird. Wilhelm bezeichnete es als eine der unangenehmsten Pflichten, die er geschäftlich gehabt habe, diesem hochanständigen Manne, der sein Bestes herzugeben versucht hatte, den Rücktritt nahezu legen.

Die Beanlagung Wilhelm von Siemens als Geschäftsmann ist nicht nur von der Deutschen Bank, sondern auch von anderer Seite manchmal in Zweifel gezogen worden. Hierzu gab Veranlassung seine eigentümliche Stellungnahme gegenüber

geschäftlichem Gewinnmachen und seine schwere Entschlußfähigkeit. Er war der Meinung, daß der Siemens-Konzern keine „kapitalistische Handelsfirma“ werden dürfe und sich auf die Fabrikation beschränken solle. Jede Art von Transaktionsgewinnen lehnte er daher ab, ganz abgesehen davon, daß ihm solche Gewinne peinlich waren. Die kaufmännische Entwicklung des Hauses hat er hierdurch erschwert, obwohl er einsah, daß beim guten Geschäftsbetrieb auch der Kaufmann eine wichtige Rolle spielen müsse.

Aber ein großes Geschäft hat er durchgeführt, dessen Gelingen selbst seine Gegner anerkennen müssen, denn dieses ist für die Ausdehnung des Siemens-Konzerns von der größten Tragweite geworden, nämlich den Zusammenschluß von Siemens & Halske mit der E. A. vormals Schuckert in Nürnberg im Jahre 1903. Selbst wenn man berücksichtigt, daß die Situation für ihn sehr günstig war, da sich die Schuckert-Gesellschaft damals in einer schwierigen Lage befand — scheint doch die A. E. G. nach Kenntnisnahme der Verhältnisse von einer Angliederung der Schuckert-Werke an ihren Konzern kurzerhand Abstand genommen zu haben — so bleibt für Wilhelm von Siemens noch genug des Lobes für seine Leistung übrig. Der Vertrag, den er mit der E. A. vormals Schuckert unter der Mitwirkung von Dr. A. Berliner schloß, ist vom Standpunkt von Siemens & Halske ein Meisterstück an feiner Durcharbeitung aller Möglichkeiten für die Zukunft. Wilhelms Gründlichkeit kam hier zur vollen Geltung. Aber auch die Schuckert-Gesellschaft darf sich nicht beklagen, ist sie doch dadurch einer günstigen Entwicklung wieder zugeführt worden.

Die Form, in der der Zusammenschluß in den Siemens-Schuckert-Werken erfolgte, war die G. m. b. H. Als leitender Gedanke galt, nur diejenigen Werke von beiden Seiten einzubringen, die eine gleichartige oder doch ähnliche Produktion aufwiesen. So kam es, daß bei Siemens & Halske das Werner-Werk, das Blockwerk, das Glühlampenwerk, die elektrische Bahnabteilung und die Elektrodenfabrik von Gebrüder Siemens verblieben, während sämtliche eigentliche Fabrikationsstätten der E. A. vormals Schuckert in Nürnberg zu den Siemens-Schuckert-Werken übergingen.

Die Gründung der Siemens-Schuckert-Werke, deren oberste Leitung er sich als Vorsitzender des Aufsichtsrats vorbehielt, bedeutete für Wilhelm von Siemens aber ein großes Risiko. Das Gelingen hing davon ab, ob es ihm glückte, die geeigneten Persönlichkeiten zu finden, die die schweren Anforderungen der Organisation eines aus so vielen Fabriken zusammengewürfelten Unternehmens zu meistern und dabei noch die Schwierigkeiten besonders heikler Art zu beheben imstande waren, welche sich durch den Zusammenschluß von Nord und Süd infolge der Stammesverschiedenheiten ergaben. Hier erwählte Wilhelm von Siemens eine Anzahl Männer sowohl unter den Direktoren von Siemens & Halske wie der Schuckert-Gesellschaft, nämlich:

Baurat Carl Dihlmann¹⁾, Professor Robert Friese, Hugo Natalis (ausgetreten 1919), Fidelis Nerz †, Kommerzienrat Oskar von Petri, ausgetreten; jetzt Geh. Kommerzienrat Dr. phil. h. c. und Dr.-Ing. ehrenhalber, Dr.-Ing. Heinrich Schwieger †, Kgl. Regierungsbaumeister a. D., D. Friedrich Albert Spieker (ausgetreten 1918), Richard Werner,

¹⁾ Auch Baurat Dihlmann, der Senior des Direktoriums des Siemens-Konzerns, ist während der Drucklegung dieser Zeilen im Alter von 62 Jahren am 25. IV. 20 verschieden. Wer den sehr rüstigen, allzeit arbeitsfrohen Mann vor einigen Monaten sah, konnte nicht ahnen, daß er schon seit längerer Zeit den Todeskeim in sich trug. Sein vorzeitiger Hingang ist durch die Entbehrungen der Kriegezeit und die traurigen Erfahrungen beim allgemeinen Zusammenbruch beschleunigt worden.

die das große Werk vollenden konnten. Den eigentlichen Leiter fand Wilhelm von Siemens aber in Dr. Alfred Berliner. Auch dieser ist aus der physikalischen Schule zuletzt, von Helmholtz, hervorgegangen. Er trat im Jahre 1888 in das Geschäft ein, war einige Zeit Assistent im alten Werke in der Markgrafenstraße, verstand es aber bald, die Aufmerksamkeit Wilhelm von Siemens auf sich zu ziehen, der dann seine Laufbahn beförderte. Schon 1901 wurde er Direktor.

Die Durchführung des Zusammenschlusses der beiden Firmen und ihr glänzender Erfolg war unbestritten sein Verdienst. Die heutige Organisation ist erst viel später, nach dem Austritt Berliners 1913, von Otto Henrich, dem derzeitigen Vorsitzenden des Direktoriums der Siemens-Schuckert-Werke eingerichtet.

Dem obersten Leiter eines so großen Unternehmens traten naturgemäß frühzeitig Probleme des Wirtschaftslebens von allgemeiner Bedeutung entgegen. Sehr ernsthaft bemühte sich Wilhelm von Siemens um deren Lösung und gründete zu dem Zwecke eine eigene volkswirtschaftliche Abteilung, welche sich insbesondere dem Studium der sozialen Verhältnisse widmen sollte.

Zu einer Reihe von Fragen hat er selbst die Feder ergriffen. Der Inhalt dieser schön geschriebenen Abhandlungen ist bereits eingehend behandelt worden¹⁾. Es sollen deshalb hier nur die Titel derselben verzeichnet werden:

„Über Elektrizitäts- und Arbeitgebersteuer“, Deutsche Revue, Dez. 1908.

„Über Arbeitgebersteuer“, ebenda Jan. 1909.

„Das Recht der Angestellten an den Erfindungen“, 1908.

„Über die Zulassung von Technikern zum Verwaltungsdienst“, E. T. V. 1917.
288.

Sein Hauptwerk, welches die Ausarbeitung eines allgemeinen natürlichen Systems für die Steuergesetzgebung zum Ziele hatte, ist nicht vollendet. Hoffentlich gelingt es, aus seinen umfangreichen nachgelassenen Notizen das Wesentliche zusammenzustellen und zu veröffentlichen.

Trotz der großen Anforderungen, die die geschäftlichen Unternehmungen an Wilhelm von Siemens stellten, fand er bewunderswerterweise immer die Möglichkeit, eigene Ideen in Laboratoriumsversuchen zu verfolgen. Er hat bis in die letzte Zeit das Laboratorium im Werner-Werk beibehalten. Dort entwickelte er unter vielem anderen den Schnelltelegraph, der die Handarbeit des Telegraphisten nur zum Vorbereiten der Depeschen benutzt, das Befördern aber mit der größtmöglichen Geschwindigkeit auf mechanischem Wege bewirkt. Im Kriege hat nur dieser Telegraph die riesigen Ansprüche an den telegraphischen Dienst bewältigen können.

Am liebsten hätte er sich in jedem Werk ein besonderes Laboratorium reserviert, wo er die für dasselbe lebenswichtigen Zukunftsfragen experimentell behandelt sehen wollte. Aber obgleich er dies für notwendig hielt, ließ es sich nicht ausführen. Daher schuf er ein besonderes physikalisch-chemisches Laboratorium. Dieses fristete viele Jahre in engen Räumen abseits der Straße sein Leben und wurde von den Praktikern im Konzern nicht gerade mit sehr freundlichen Gefühlen bedacht. Er selbst ließ sich, soweit er überhaupt davon erfuhr, durch diese Meinungen nicht stören, da er mit den im Labor erzielten Erfolgen zufrieden war. Er äußerte sich nicht ohne Ironie dahin, daß eine Sache gewöhnlich nichts taue, wenn sie gleich allgemeinen Beifall fände, je mehr sie aber verurteilt würde, desto besser sei sie. Er verfolgte

¹⁾ Siehe S. 3, Anm. 4.

im physikalisch-chemischen Laboratorium allerdings zum Teil sehr weit ausschauende Probleme, hatte er doch schon vor vielen Jahren eine Idee ausgesprochen, die jüngst der Münchener Gelehrte Richard Willstätter als das Hauptziel unserer modernen chemischen Wissenschaft hingestellt hat: „Wir müssen uns mehr und mehr mit unserer Methodik den Bedingungen der lebenden Zellen nähern, wovon wir noch weit entfernt sind. Unsere Mittel sind zumeist plump, mehr den Kräften der anorganischen als der organischen Welt gemäß.“ Ganz etwas Ähnliches hat Wilhelm von Siemens vorgeschwebt, als er eine physiologisch-chemische Abteilung einrichtete, wo die physikalische Chemie der lebenden Zelle möglichst unter Anpassung an die von der Natur befolgten Methoden untersucht werden sollte. Oft hat er mit mir darüber verhandelt und sich durch seine charakteristische Fragestellung Klarheit über die einzuschlagenden Wege zu verschaffen bemüht. Ob bei diesen Versuchen etwas praktisch Verwertbares herauskomme, sei vorerst ganz gleichgültig. In einem großen Hause dürfe nicht immer der unmittelbar hervorblickende Nutzen alleiniger Zweck für ihre wissenschaftlich technischen Untersuchungen sein, man brauche darum noch nicht gleich „Keilinschriften“ zu lösen. Diese Unterhaltungen mit ihm haben für mich einen besonderen Reiz gehabt, vielleicht deshalb, weil wir uns im Pläneschmieden auf experimentellem Gebiete am besten verstanden.

Er hatte eingesehen, daß für solche umfassenden Ziele die Räume des kleinen physikalisch-chemischen Labors nicht ausreichen würden und ließ schon im Jahre 1913 Vorarbeiten für einen großartigen Neubau anstellen. Die Inbetriebnahme, die in diesen Monaten trotz der üblen Einwirkungen der Folgeerscheinungen des Krieges zustande kommt, durfte er nicht mehr erleben. Das Laboratorium sollte die Krönung seines Strebens nach Wissenschaftlichkeit in der Firma werden. An den Lebenden ist es nun, seine weitblickenden Ziele in die Tat umzusetzen.

Über die mit Sekundärstrahlen arbeitende Hochvakuum-Glühkathodenröhre als Schwingungserzeuger.

Von

Karl Wilhelm Hausser.

Mit 3 Textfiguren.

Mitteilung aus der Meßinstrumentenabteilung des Wernerwerkes
von Siemens & Halske A.-G.

Der ungewöhnliche Erfolg, der durch die Verwendung von Glühelektronenröhren vor allem in der Hochfrequenztechnik erzielt wurde, bringt es mit sich, daß alle möglichen anderen Quellen von Elektronenstrahlung, sowie auch die verschiedensten Schaltungen und Anordnungen in und mit solchen Röhren auf ihre Brauchbarkeit untersucht werden. Aus der Unzahl von möglichen Schaltungen, die die Voraussetzung, z. B. der Schwingungserzeugung erfüllen, wird es erklärlich, daß sich eine große Literatur auf diesem Gebiete entwickelt. Um aber eine Kritik darüber zu bekommen, ob die Anordnungen auch praktisch brauchbar sind, muß man bei jeder Schaltung die Vorteile bzw. Nachteile den bekannten und bewährten Schaltungen gegenüber, vor allem die Nutzeffekte der Anordnung diskutieren.

Im Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie hat Herr A. W. Hull¹⁾ ausführlich die Eigenschaften einer Anordnung besprochen, bei der (im wesentlichen) die sekundäre Elektronenstrahlung für die verschiedensten Zwecke benutzt wird; u. a. wird gezeigt, daß die Anordnung sich zur Erzeugung elektrischer Schwingungen eignet, und auch mitgeteilt, daß Röhren nennenswerter Leistung (100 Watt) mit dieser Anordnung erzielt wurden. Im folgenden soll das Verhalten dieser Art von Röhren als Generatoren eingehend behandelt und der Vergleich mit normalen Rückkopplungs-Senderöhren durchgeführt werden.

Die Hullsche Anordnung ist aus Fig. 1 zu ersehen. — Zwischen einem Glühfaden G und einer Platte P befindet sich eine beispielsweise gitterförmig ausgestaltete Anode A . Der Glühfaden G liegt am negativen und die Anode am positiven Pol einer Batterie. Die Platte P führt über einen Schwingungskreis LC zu einer mittleren Spannung. Denken wir uns erst einmal den Schwingungskreis weg und an der Platte P eine variable Spannung, so wird die prinzipielle Charakteristik aussehen wie Fig. 2, dort bedeutet:

- V = Spannung an P ,
- i_{sp} = Sättigungsstrom der primären Glühelektronen,
- i_1 = Glühelektronenstrom von G nach A ,
- i_2 = Glühelektronenstrom von G nach P ,
- i_{se} = sekundärer Elektronenstrom von P nach A ,
- i_4 = resultierender Strom in P ,
- i_5 = resultierender Strom in A .

¹⁾ A. W. Hull, Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph. 14, 47ff., 157ff. (1919).

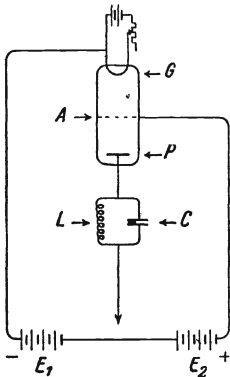


Fig. 1.

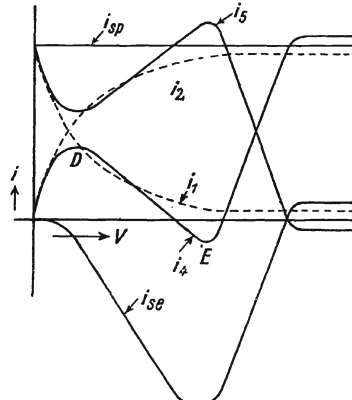


Fig. 2.

Es erscheint zweckmäßig, die Wirkungsweise dieser Röhre noch einmal zu diskutieren an Hand dieser prinzipiellen Charakteristik. Nehmen wir zuerst einmal an, es gäbe keine sekundäre Elektronenstrahlung, dann würde bei gegebener, genügend hoher, den Raumladungseffekt überwindender Spannung $E_1 + E_2$, der Elektronenstrom, der von P zur Batterie fließt, mit wachsender Spannung in P steigen von Null bis nahezu Sättigungsstrom des Glühfadens und der Strom in A entsprechend fallen, so daß in jedem Moment die Summe von beiden den Sättigungsstrom ergibt. Dadurch, daß auf A und auf P sekundäre Kathodenstrahlen erzeugt werden, wird der Verlauf ein anderer; sobald P mit wachsender Spannung anfängt, sekundäre Elektronen zu emittieren, so werden diese die Platte P verlassen und nach A gelangen. Den sekundären Elektronenstrom von P nach A allein stellt i_{se} dar. Der Strom in P ist die Summe dieser beiden Ströme, also i_4 ; der entsprechende Strom in A ist i_5 . Sobald die Spannung in P die von A übersteigt, können — von der geringen Anfangsgeschwindigkeit der Sekundärstrahlen abgesehen — diese die Platte A wegen des entgegenstehenden Feldes nicht mehr erreichen, und es werden jetzt die auf A erzeugten sekundären Elektronen nach P gelangen. Der uns interessierende Teil ist der Teil zwischen D und E , denn hier haben wir eine fallende Charakteristik, die Vorbedingung der Schwingungserzeugung.

In Wirklichkeit handelt es sich bei dem Austritt von Elektronen aus P nicht nur um sekundäre Kathodenstrahlen, sondern auch bei sehr kleiner Geschwindigkeit (Größenordnung unter 10 Volt) um echte Reflexion, bei höherer Geschwindigkeit um Rückdiffusion primärer Elektronen¹⁾. Der erste hier genannte Anteil wird selbstverständlich überhaupt zu vernachlässigen sein; daß wir auch den zweiten Anteil für die Überlegung mit Recht vernachlässigen, geht aus dem späteren Resultat hervor, daß ein wesentlicher Nutzeffekt nur dann erzielt werden kann, wenn die Sekundärstrahlung groß ist gegen die Primärstrahlung. Wir dürfen deshalb im Späteren ausschließlich von sekundärer Elektronenstrahlung reden, ohne den Erscheinungen Gewalt anzutun; wir dürfen auch immer annehmen, daß die aus P austretenden Elektronen eine zu vernachlässigende Geschwindigkeit haben.

¹⁾ Zusammenfassende Darstellung dieser Verhältnisse bei Lenard: „Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten.“ Heidelberg 1918.

Von Interesse ist für uns, wie oben gesagt, das Stück zwischen D und E , denn die negative Charakteristik der Stromspannungskurve ergibt die Möglichkeit einer Generatorwirkung, die allein hier betrachtet werden soll. Von den beiden Resonanzschaltungen (L und C in Serie oder parallel) kommt, wie bei der Senderöhre, wohl nur die Parallelschaltung in Betracht wegen des relativ hohen inneren Widerstandes der Röhre. Für diese Schaltung wollen wir eine Betrachtung über die möglicherweise in idealisierten Verhältnissen zu erhaltenden Nutzeffekte anstellen, indem wir die von Herrn Rukop¹⁾ gegebene Theorie der Schwingungserzeugungsröhre mit Rückkopplung sinngemäß übertragen.

1. Sinusförmige Schwingungen.

Wir wollen zuerst annehmen, daß für beliebig kleine positive Spannungen von P alle Glühelktronen von G nach P gelangen, was erfüllt ist in der Hullschen Anordnung für unendlich kleine Flächenausdehnung von A . Wir wollen weiterhin annehmen, daß die erzeugte Menge Sekundärelektronen proportional der Spannung an P sei, dann wird die Charakteristik aussehen wie Fig. 3. Der Strom in P ist bei kleiner Spannung von P der Sättigungsstrom der den Glühfaden verlassenden Elektronen. Mit wachsender Spannung fällt der Strom in P , da die Sekundärelektronen nach A gelangen. Der Strom wird mit wachsender Spannung negativ und zwar ist in der Figur angenommen, daß für die maximale Spannung vier sekundäre auf ein primäres Elektron erzeugt werden. Bei noch weiterem Anwachsen von P geht der Strom in P plötzlich über zum Sättigungsstrom der Primärelektronen. Die Annahme der geraden Linie auf dem negativen Ast der Charakteristik ist die Voraussetzung für sinusförmige Schwingungen. Es ist evident, daß man die Platte P über den Resonanzkreis an die Mitte der Batterie anlegen muß, damit die Schwingung die ganze negative Charakteristik ausfüllt, also $E_1 = E_2$. Der Nutzeffekt dieser Anordnung ist leicht zu übersehen. Die primären Elektronen dienen lediglich zur Auslösung von Sekundärstrahlen und tragen zur Schwingungserzeugung nicht bei, ergeben also reine Verluste, und zwar sind diese Verluste Sättigungsstrom der Primärelektronen mal mittlere Spannung an P ($V_m = E_1 = E_2$);

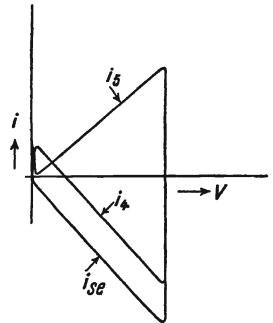


Fig. 3.

$$N_{vp} = i_{sp} \cdot E_2 = \frac{i_{m,se}}{n} \cdot E_2,$$

(wobei bedeutet:

$$\begin{aligned} V_m &= \text{mittlere Spannung an } P, \\ N_{vp} &= \text{Verlust durch Primärelektronen,} \\ i_{m,se} &= \text{max. Sekundärelektronenstrom);} \end{aligned}$$

wenn wir annehmen, daß im Maximum n sekundäre auf ein primäres Elektron kommt, also $i_{m,se} = n i_{sp}$. Die Sekundärstrahlen dagegen, die mit fallender Spannung zwischen P und A in wachsender Zahl nach A gelangen, sind die Träger des für die Schwingungserzeugung maßgebenden Vorgangs. Betrachten wir bei diesem Vorgang die elektronenspendende Platte P als System Glühfaden plus Gitter, die Anode als

¹⁾ H. Rukop, Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph. **14**, 110ff. (1919).

Anode einer normalen rückgekoppelten Senderöhre, so gelten hierfür die Beziehungen die Herr R u k o p für die Senderöhre (l. c. S. 120 ff.) angegeben hat, also für sinusförmige Schwingungen 50% Nutzeffekt.

Es gilt nämlich für die rückgekoppelte Senderöhre im entsprechenden Fall bei bester Kreisleistung

$$N = N_v = \frac{J_A \cdot E_B}{2} = \frac{J_S \cdot E_B}{4} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{1}{2},$$

wobei

$$\begin{aligned} N &= \text{Nutzleistung,} \\ N_v &= \text{Verlustleistung,} \\ J_A &= \text{mittlerer Anodenstrom,} \\ J_S &= \text{Sättigungsstrom,} \\ E_B &= \text{Batteriespannung,} \\ \eta &= \text{Nutzeffekt} \end{aligned}$$

ist. Sinngemäß wäre hier zu schreiben:

$$N = N_{v,se} = \frac{i_{se} \cdot E_2}{2} = \frac{i_{m,se} \cdot E_2}{4}.$$

Der Nutzeffekt wäre dann:

$$\eta = \frac{N}{N + N_{v,se} + N_{vp}} = \frac{1}{2 + \frac{4}{n}}.$$

Die Zahlenwerte des Nutzeffektes in Abhängigkeit von n sind aus der Tabelle 1 zu ersehen. — Wir sehen also als Resultat, daß wir im idealisierten Grenzfall denselben Nutzeffekt bekommen, wie bei der normalen Rückkopplungssenderöhre, wenn die Zahl der Sekundärelektronen pro ein primäres Elektron sehr groß wird. Wir sehen aber weiter, daß nur für ein großes n der Nutzeffekt der Röhre erträglich ist.

n	η
1	16
2	25
3	30
4	33
∞	50%

2. Nicht sinusförmige Schwingungen.

In der zitierten Arbeit zeigt Herr R u k o p, daß man durch eine stark verzerrte Stromspannungskurve den für Sinusform zu 50% befundenen Nutzeffekt erheblich überschreiten kann. Er zeigt auch, daß sich diese hohen Nutzeffekte bei den Senderöhren bis zu einem gewissen Grade durch recht einfache Mittel tatsächlich erreichen lassen. Diese hohen Nutzeffekte sind weniger wegen der günstigen Energieausnutzung der Maschine als vor allem wegen der dadurch eintretenden Entlastung der Röhre von Bedeutung, da es natürlich für die Röhre eine starke Beanspruchung ist, wenn die halbe verbrauchte Energie in der Senderöhre vernichtet werden muß. Für unseren Fall der Sekundärstrahlenröhre ist ebenfalls durch verzerrte Stromspannungskurve in analoger Weise ein erhöhter Nutzeffekt zu erwarten. Man müßte zu diesem Zweck die Platte P über den Schwingungskreis nicht an die Mitte der Batterie legen, also

$E_2 > E_1$ machen. Es ist dann eine Stromspannungskurve ähnlich der von Herrn R u k o p (S. 127) gezeichneten zu erwarten, aber auch wieder nur unter der Bedingung einer großen Zahl Sekundärelektronen pro ein primäres Elektron.

In der normalen Senderöhre hat man Schwierigkeiten bei genügender Lebensdauer der Röhre, die Elektronenströme zu steigern; die Sekundärstrahlenröhre hat den Vorzug, daß man unter gegebenen Glühfadenverhältnissen bei großer Zahl von Sekundären pro Primärelektron größere Ströme anwenden könnte bzw. bei gleicher für den Schwingungsvorgang maßgebender Elektronenstromstärke, den Faden geringer zu heizen braucht und damit die Lebensdauer des Glühfadens, den heikelsten Punkt der Senderöhre, verlängern könnte. Soweit sehen die Verhältnisse bei der Sekundärstrahlenröhre günstig aus; wir wollen jetzt die Schwierigkeiten diskutieren.

Wir haben oben gesehen, daß der Nutzeffekt mit wachsendem n günstiger wird, haben aber weiter gesehen, daß damit auch ein größerer Prozentsatz der Verlustleistung auf der Anode auftreten wird. Um nun keine unzulässige Erhitzung der Anode eintreten zu lassen, müßten wir die Anode flächenhaft ausgestalten, damit sie die Energie leicht abstrahlen kann. Für die Hullsche Anordnung kommen wir damit aber zu einem Widerspruch. Um nämlich zu erreichen, daß für kleine Spannungen von P ein großer Prozentsatz der Primärelektronen nach P und nicht nach A gelangt, war es notwendig, anzunehmen, daß die gitterförmig ausgestaltete Anode A eine minimale Flächenausdehnung besitzt. Wir haben also zwei Bedingungen, die sich widersprechen. Dieser Widerspruch der Bedingungen läßt sich aber wohl durch eine günstigere Konfiguration von Glühfaden, Platte und Anode beheben.

Das bis jetzt so günstige Bild wird aber verschoben, wenn wir die physikalischen Bedingungen der Sekundärelektronenstrahlung betrachten. Es ist nämlich 1. nicht wahrscheinlich, daß man die notwendige Bedingung, zu der wir gekommen sind, — eine wirklich große Zahl von Sekundärelektronen für ein primäres Elektron —, erreichen wird. 2. wird die Röhre nur bis zur Anodenspannung von der Größenordnung 300—500 Volt zu gebrauchen sein, da die Zahl der Sekundärelektronen mit der primären Spannung nicht weiter anwächst¹⁾. Da eine wesentliche Energiesteigerung der Röhre aber praktisch nur durch eine hohe, benutzte Spannung erreicht werden kann (Rückkopplungssenderöhren werden heute bis 4000 Volt benutzt), so muß zusammenfassend gesagt werden, daß die Sekundärstrahlenröhre für kleine Leistungen nur dann praktisch brauchbar werden kann, wenn es gelingt, eine große Zahl Sekundärelektronen für ein primäres Elektron zu erreichen und, daß für hohe Leistungen der Sekundärstrahlenröhre neben der Rückkopplungsröhre keine Bedeutung zukommen wird.

¹⁾ Bei Benutzung hoher Spannungen würde nämlich ein sehr ungünstiger Nutzeffekt dadurch eintreten, daß in Zeiten relativ hoher Spannungen große Stromstärken vorhanden wären. Es wären dies gerade die umgekehrten Verhältnisse, wie man sie zur Erzielung eines hohen Nutzeffektes benutzt.

Prüfung von Meßgeräten zur Aufzeichnung sich rasch verändernder Größen.

Von

Hans Zöllich.

Mit 16 Textfiguren.

Mitteilung aus der Meßinstrumentenabteilung des Wernerwerkes
von Siemens & Halske A.-G.

Das statische Verhalten von Meßgeräten, bei denen die Bestimmung der gesuchten Größe durch eine Kraftmessung erfolgt, braucht nur in besonderen Fällen genauer untersucht zu werden, hauptsächlich nur dann, wenn vermutet wird, daß mehrere Gleichgewichtslagen, darunter labile, möglich sind, also die Eichung nicht eindeutig ausfallen und die Skalenteilung Lücken aufweisen würde. Dagegen das dynamische Verhalten der Meßgeräte muß wegen des häufigen Vorkommens rascher Änderungen der Meßgröße, die zu verfolgen sind, in der Regel eingehend untersucht werden.

So tauchten vor mehreren Jahren gelegentlich der Durchbildung eines hochempfindlichen Meßgerätes zur Aufzeichnung der Herzströme (1911) die Fragen auf: wie beschaffen muß ein solches Meßgerät sein, um die verhältnismäßig raschen Schwankungen der sehr niedrigen, beim Arbeiten des Herzmuskels auftretenden elektrischen Spannungen einigermaßen richtig darzustellen und wie sind an einem gegebenen Meßgerät die hierbei maßgebenden Größen, d. h. die Eigenfrequenz bei gedachtem Fortfall der Dämpfung und die Dämpfung selbst überhaupt feststellbar? Es ist meist sehr schwierig, die dämpfenden Ursachen bei einem solchen hochempfindlichen Apparat zu entfernen, ohne die Richtkräfte und damit die gesuchte Eigenfrequenz zu beeinflussen. Bei einem Saitengalvanometer z. B., das man früher allgemein zur Aufzeichnung der Herzströme benutzte, spielt die Reibung der Saitenoberfläche an der Luft für die Dämpfung die Hauptrolle. Diese Reibung läßt sich nur durch sehr umständliche Vorkehrungen, z. B. den Einbau des Galvanometers in einen luftleeren Kessel, entfernen; andererseits wird durch die übliche Änderung des Dämpfungszustandes mittels Spannen oder Entspannen der Saite auch deren Eigenfrequenz stark verändert. Ähnliche Schwierigkeiten treten auch bei Spulengalvanometern der erforderlichen hohen Stromempfindlichkeit auf. Bei diesen wird die Dämpfung hauptsächlich durch die Rückwirkung der im Magnetfeld schwingenden Spule auf den geschlossenen Leiterkreis, in den sie eingeschaltet ist, und auch durch innere Wirbelströme im Spulenmetall hervorgerufen. Sie ist also durch Verstärken oder Schwächen des Magnetfeldes zu verändern. Da aber bei den winzigen Richtkräften der Spulenaufhängung paramagnetische Erscheinungen bereits eine Rolle spielen, besteht die Befürchtung, daß man gleichzeitig auch die der elektrischen

Ablenkung entgegenwirkende Richtkraft und damit die für getreue Aufzeichnung der Schwankungen maßgebende Eigenfrequenz der ungedämpft gedachten Spule verändert.

Nun lassen sich zwar die bei gedachtem Entfernen der dämpfenden Ursachen vorhandene Eigenfrequenz und die Dämpfung leicht für ein Meßgerät feststellen, das bei Unstetigkeiten in der wiederzugebenden Stromkurve aus sich heraus noch mehrere Schwingungen vollführt. Zweckmäßig arbeitet man aber mit stärkeren Dämpfungen, so daß nur noch eine Halbschwingung sichtbar wird, oder man stellt das Meßgerät auf den gerade noch schwingungslosen Zustand, den „aperiodischen Grenzzustand“ ein; ja, bisweilen muß man zur Erzielung höherer Empfindlichkeit ein schon infolge der Luftreibung allein sich kriechend einstellendes Galvanometer verwenden. Dann handelt es sich um die nicht so einfache Feststellung der gesuchten Größen lediglich aus dem Verlauf der geschriebenen Kurven ohne Änderung der Arbeitsverhältnisse des Meßgerätes.

Zur Lösung dieser Aufgaben wurden schon seinerzeit die Gesetze der Schwingungen von Meßgeräten nach vielen Richtungen hin eingehender untersucht und, durch graphische Tafeln erläutert, übersichtlich zusammengestellt. Wenn zwar die grundlegenden Gesetze bereits lange bekannt sind¹⁾, so ergab die damalige und jetzt wiederholte Untersuchung doch auch Darstellungen und Schaubilder, die die einzelnen Schwingungsvorgänge in neue Beleuchtung rücken. Weiter liegen die Verhältnisse nicht so einfach, daß man für die Wahl der maßgebenden Größen eine für alle Fälle passende Vorschrift geben kann, besonders dann nicht, wenn man bei der Untersuchung rasch verlaufender Vorgänge bis an die Grenze der Leistungsfähigkeit der Meßgeräte gehen muß. Es erscheint daher eine auf diese Verhältnisse besonders zugeschnittene zusammenfassende Darlegung der Schwingungsgesetze für Meßgeräte nicht überflüssig.

1. Meßgeräte als schwingungsfähige mechanische Systeme.

a) Sieht man von einigen bisweilen auch als Meßgeräte bezeichneten Anordnungen zur Feststellung von Raummaßen und Zeiten ab, so wird in Meßgeräten im allgemeinen eine von der unbekanntenen und zu messenden Größe abhängige Kraft durch eine in ihrer Größe veränderbare Gegenkraft gemessen. Bei den Druckmessern sind z. B. die auf einen luftdicht gleitenden Kolben, eine durchbiegbare oder sonst nachgiebige Platte oder eine Flüssigkeitssäule wirkenden Dampf- oder Gasdrücke, bei den elektrischen und magnetischen Meßgeräten sind die treibenden Kräfte des elektrischen und magnetischen Feldes, bei Drehpendeltachometern wieder die Zentrifugalkraft, bei Erdbebenpendeln, Beschleunigungsmessern Beschleunigungskräfte

¹⁾ A. Blondel, Théorie des oscillographes. L'Éclairage Électrique **33**, 115—125 (1902). — E. Orlich, Aufnahme und Analyse von Wechselstromkurven, S. 45—47 (kurzer Abriß). Braunschweig 1906. — Fritz Emde, Theoretisches zur Prüfung von Oszillographen. Elektrotechnik u. Maschinenbau, 28. Jahrg. (1910), S. 1067—1071, (behandelt die Wiedergabe einer rechteckigen Mäanderkurve durch den Oszillographen). — A. Gramberg, Technische Messungen bei Maschinenuntersuchungen und im Betriebe. 2. Aufl. (1910), S. 6—14, 227—233. — J. K. A. Wertheim-Salomonson, Some points in the use and the theory of the oscillograph. The Electrician **69**, 357—360 (1912). — Hans Busch, Eine einfache Ableitung der vollständigen Theorie des Oszillographen. Physikalische Zeitschrift **13**, 615—623 (1912).

Die Bewegungsvorgänge gedämpft schwingender Systeme behandelt auch W. Jaeger in seinem Handbuche: Elektrische Meßtechnik. Theorie und Praxis der elektrischen und magnetischen Messungen, S. 18—28, 163—164 (1917).

die wirkenden Kräfte, die man entweder selbst zu kennen wünscht oder die meist nur in Stellvertretung für andere Größen, von denen sie abhängig sind, gemessen werden; die bis zur jeweiligen Herstellung des Kräftegleichgewichtes geänderte Gegenkraft wird meist von elastischen Körpern, z. B. durch Spannen einer besonderen Meßfeder, Verdrehen von Aufhängebändern, Ausbauchen von gespannten Drähten, geliefert; vielfach auch spielen die Schwerkraft durch Heben eines Gewichtes oder auch einer Flüssigkeitssäule, wie bei verschiedenen Druckmessern und bei Kapillarelektrometern, seltener elektrische oder magnetische Kräfte die Rolle der Gegenkraft. Die Änderung der Gegenkraft erfolgt manchmal von außen her durch den Beobachter bei den jetzt nur noch selten verwendeten Ausgleichsmeßgeräten (Torsionselektrodynamometer, Stromwage, Schutzringeletrometer); meist aber und bei Meßgeräten zur Wiedergabe sich rasch ändernder Größen nur dadurch, daß von der wirkenden Kraft bewegliche Teile im Meßgerät aus der Normallage verschoben werden und die Größe der Gegenkraft von der Stellung dieser Teile abhängig gemacht wird. Diese Stellung wird durch Zeiger irgendwelcher Art, z. B. stoffliche oder Lichtzeiger kenntlich gemacht, so daß durch den Punkt der Skala, auf den der Zeiger einspielt, eine bestimmte Gegenkraft festgelegt und damit die wirkende Kraft und weiter der Wert der gesuchten Größe gegeben ist.

b) Für ein Meßgerät ist ferner noch charakteristisch, daß es die auf die Einstellung wirkende, von der Meßgröße abhängige Kraft insbesondere nicht durch seine Eigenbewegung verändert. Zwar wird diese Bedingung nicht immer streng erfüllt, besonders wenn es sich um die Messung von nur geringe Kraftwirkungen hervorruhenden Größen handelt. Doch besteht natürlich das Bestreben, die Meßgeräte so zu bauen, daß sie die zu untersuchenden Vorgänge nicht beeinflussen, und in der Regel wird auch dies Ziel mit genügender Annäherung erreicht. Es gibt indessen auch Einrichtungen, deren Wirksamkeit auf den gleichen physikalischen Erscheinungen beruht wie die gewisser Meßgeräte und die daher wie diese gebaut sein können, bei denen man aber mit bewußter Absicht durch die Verschiebung der beweglichen Teile die äußeren auf sie wirkenden Kräfte beeinflussen läßt. Das sind Regler (in manchen Fällen fälschlich auch als Relais bezeichnet). So sind z. B. Fliehkraftpendeltachometer einerseits und Zentrifugalregler für Dampfmaschinen andererseits, abgesehen von den Abmessungen, gleich gebaut, ebenso Neigungsmesser mit Flüssigkeit in kommunizierenden Röhren und Schlingertank zum Dämpfen von Schiffschwingungen, Kreisel als Richtungsweiser und Kreisel als Schwingungsdämpfer; aber die einen — die Meßgeräte — vollführen ihre Bewegungen unter dem Einfluß wechselnder äußerer Kräfte ohne diese zu verändern, während die anderen — die Regler — durch ihre Bewegung auf die äußeren Kräfte zurückwirken und infolge dieser Kopplung mit fremden Systemen ganz anderen Bewegungsgesetzen folgen.

c) Schließlich ist für ein Meßgerät noch charakteristisch, daß seine Angaben eindeutig mit der Meßgröße und somit auch mit der von dieser abhängigen Kraft zusammenhängen. Seine beweglichen Teile müssen entweder zusammen mit dem von ihnen geführten Masse- oder Lichtzeiger nur eine Bewegung ausführen oder, wenn die einzelnen Teile verschiedene Bewegungen ausführen, einen zwangsläufigen Mechanismus darstellen. Das Meßgerät soll also im allgemeinen nur einen Freiheitsgrad haben, d. h. durch die Angabe einer einzigen richtungslosen Größe, deren besondere Wahl in der Regel freisteht, muß die Stellung aller Glieder des Systems vollständig charakterisiert sein.

Ausnahmsweise kommen zwar auch Meßgeräte mit zwei Freiheitsgraden vor. Dann ist aber der zweite Freiheitsgrad durch eine Drehbewegung gegeben, wie z. B. bei den Drehpendeltachometern, den Bifluidtachometern und Drehbeschleunigungsmessern; und diese Drehbewegung, die der Zeiger nicht mitmacht, dient teils (bei der Messung der Drehgeschwindigkeit) dazu, um die als richtende Kraft verwendete Fliehkraft hervorzurufen, teils (bei der Messung des Ungleichförmigkeitsgrades oder der Drehbeschleunigung) wird sie mit einer anderen, und zwar gleichförmigen Drehbewegung verglichen. Sie ist in jedem Fall nur ein Mittel, um die eigentliche, anzeigende Bewegung im Meßgerät hervorzurufen oder hervortreten zu lassen. Man kann daher auch hier dem Meßgerät einen Freiheitsgrad zuschreiben und sieht dann die anzeigenden Teile als die wesentlichen an.

d) Wenn auf das Meßgerät keine äußeren Kräfte wirken, so ist es nichts weiter als eine besondere Form einer Federwage oder eines Pendels und wird daher, wenn seine beweglichen Teile auf irgendeine Weise aus ihrer Ruhelage herausgebracht und dann sich selbst überlassen werden, um diese herum Eigenschwingungen von einer bestimmten Frequenz ausführen. Das ist eine Folge der rückstellenden Kräfte und der Trägheit der bewegten Teile. Diese Trägheit macht sich auch geltend, wenn das Meßgerät als solches arbeitet, dabei aber die wirkenden äußeren Kräfte mit der Zeit mehr oder weniger rasch veränderlich sind. Der Zeiger wird sich nicht in jedem Augenblick auf den Wert der Skala einstellen, der dem jeweiligen Betrage der Meßgröße entspricht. Denn den beweglichen Teilen und dem Zeiger muß bei Änderung der Meßgröße bis zum Erreichen der neuen Gleichgewichtslage eine gewisse Beschleunigung erteilt werden. Hierzu muß aber eine Kraft vorhanden sein, und eine solche wird nur ausgelöst durch Störung des Gleichgewichtes, so daß ein Überschuß der Federkraft hervorgerufen wird. Die Einstellung des Zeigers bleibt hinter dem Sollwert zurück und zwar um so mehr, je größere Massen in Bewegung zu setzen sind. Andererseits werden die einmal in Bewegung gesetzten Teile bei Nachlassen der zeitlichen Zunahme der Meßgröße infolge ihrer Trägheit über den Sollwert hinausschießen und zwar solange, bis die ihnen innewohnende Bewegungsenergie durch die im Meßgerät auftretende Gegenkraft aufgehoben wird.

Außer der Trägheitskraft wirken auf die Bewegung noch bremsende Kräfte ein, die teils durch Reibung der beweglichen Teile in Lagern und Gelenken, durch die unvermeidliche Luftreibung und durch absichtlich eingebaute Öl- oder Luftbremsen hervorgerufen werden. Diese Kräfte, die im allgemeinen mit der Geschwindigkeit der bewegten Teile linear zunehmen, verursachen durch Energiezerstreuung einerseits eine Abnahme des durch die Trägheitswirkung hervorgerufenen sonst fort dauernden Austausches von Bewegungs- und Lageenergie, andererseits aber auch ein Nacheilen der ausgeführten Bewegungen hinter den wirkenden Kräften im ganzen. Bei allzu starken bremsenden Kräften wird die Bewegung den rasch vorübergehenden Änderungen der äußeren Kräfte nicht folgen.

Auf diese Punkte muß eine Untersuchung der Leistungsfähigkeit von Meßgeräten zur Wiedergabe sich rasch verändernder Größen Rücksicht nehmen. Bei einer solchen Untersuchung ist aber, um die bisherigen Überlegungen kurz zusammenzufassen, ein Meßgerät als ein schwingungsfähiges, gegen Bremskräfte sich bewegendes mechanisches System mit einem Freiheitsgrad anzusehen, auf das äußere Kräfte ungestört einwirken.

2. Die Differentialgleichung der Bewegung.

Das einfachste Bild für ein mechanisches System mit einem Freiheitsgrad ist der z. B. durch elastische Kräfte in einer bestimmten Ruhelage gehaltene Massenpunkt. Für einen solchen ergibt sich wegen des Kräftegleichgewichtes zwischen Beschleunigungskraft, Bremskraft, rückstellender und äußerer Kraft die folgende Bewegungsgleichung:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + p \frac{dx}{dt} + Dx = f(t) \quad (1)$$

Hierin bedeutet:

- m die Masse des Massenpunktes,
- p die Dämpfungskonstante unter der Voraussetzung, daß die Bremskraft proportional der Geschwindigkeit des Massenpunktes wirkt, also nur reine Dämpfung vorhanden ist (die von der Geschwindigkeit unabhängige Reibung sei vernachlässigbar klein),
- D die Rückstellkraft bei Verschiebung des Massenpunktes um die Längeneinheit aus der Ruhelage,
- x den jeweiligen Abstand des Massenpunktes von seiner Ruhelage,
- $f(t)$ die mit der Zeit t veränderliche äußere Kraft.

Bei diesem Ansatz sind bekanntlich nicht verschwindend kleine Abmessungen des mit Masse begabten „Punktes“ vorausgesetzt, man könnte beispielsweise auch einen beiderseits mit federnden Puffern zwischen Wänden oder Prellböcken eingeklemmten Eisenbahnwagen als solchen mit elastischen Kräften in einer bestimmten Lage gehaltenen Massenpunkt auffassen, indem man von den übrigen Nebenbewegungen, dem Drehen der Räder, etwaigem Schaukeln usw., für die Untersuchung der Bewegung des ganzen Wagens als nebensächlich absieht. Ebenso kann man Meßgeräte, deren wirksame Teile hauptsächlich geradlinige Bewegungen ausführen, zur Vereinfachung als Massenpunkte auffassen: so z. B. Druckmesser mit verschiebbarem Kolben, wobei man die an ihn angelenkten Hebelchen und Zeiger durch einen Zuschlag zur Masse des Kolbens berücksichtigt. Auch das Verhalten von Meßgeräten, in denen nicht ein im wesentlichen starrer Teil sich verschiebt, sondern die deformierbare Membrane oder Saiten enthalten, kann man unter der Annahme eines einfachen Massenpunktes untersuchen. Dies ist z. B. durch Einthoven für das Saitengalvanometer geschehen. Bei diesem wird bekanntlich die Ablenkung der Saitenmitte beobachtet. Die Erfahrung zeigt nun, daß im großen und ganzen das Verhalten der Saitenmitte gegenüber einem durch elastische Federn in einer Mittellage gehaltenen Massenpunkt durch die anderen Saitenteile nicht geändert wird. Der Saitenmitte oder ihrem Schattenbild kann eine durch Versuch festzustellende scheinbare Masse zugeschrieben werden; die diese Masse in ihre Ruhelage zurückzwingende, von der Saitenspannung herrührende Richtkraft ist ebenfalls durch einen Versuch feststellbar. Eine andere Auffassung würde zu äußerst verwickelten Formeln führen, die im übrigen nur mit Hilfe eines gewaltigen mathematischen Rüstzeuges herzuleiten wären, ohne daß irgendein Vorteil für die Praxis dabei herausspringt.

Eine ähnlich wie (1) gebaute Bewegungsgleichung läßt sich für einen unter der Wirkung von äußeren Kräften und gegen die Wirkung einer Rückstellkraft um eine Achse sich drehenden starren Körper herleiten, indem die Bedingung für das Gleich-

gewicht der Drehmomente aufgestellt wird. An die Stelle der Masse m tritt das Trägheitsmoment K . Die Veränderliche x bedeutet den Drehwinkel. Enthält ein Meßgerät, dessen wirksamer Teil eine Drehbewegung ausführt, noch andere Teile, welche andere Bewegungen zum Teil mit anderen Geschwindigkeiten ausführen, so sind diese bei der Berechnung des Trägheitsmomentes K entsprechend zu berücksichtigen.

Die so gegebenen Differentialgleichungen fußen auf einer Reihe von Voraussetzungen, die aber für Meßgeräte im allgemeinen als erfüllt anzusehen sind: das Trägheitsmoment ist von der die Stellung der beweglichen Teile charakterisierenden Koordinate x unabhängig, die Bremskräfte sind proportional der Geschwindigkeit der Teile und verschwinden bei Ruhe, die Richtkraft wirkt proportional der die Stellung der Teile charakterisierenden Koordinate x . Da die Wahl dieser Koordinate freisteht, man könnte z. B. die Verschiebung der Zeigerspitze, Winkelgrößen usw. wählen, ist die erste Bedingung, von Koordinate x unabhängiges Trägheitsmoment, stets erfüllbar; die zweite versucht man durch Vermeidung der eigentlichen Reibung, d. h. Verwendung reiner Dämpfung, zu erfüllen, die dritte ist immer, z. B. auch bei nach einer Sinusfunktion von der Koordinate abhängiger Richtkraft für genügend kleine Verschiebungen erfüllt.

Die Untersuchung der Bewegungsvorgänge läßt sich vereinfachen, indem die in der Bewegungsgleichung enthaltenen nicht unbedingt erforderlichen Konstanten als unnützer Ballast über Bord geworfen werden. Durch Division der Gleichung mit m bzw. K ergibt sich die folgende einfachere, links nur zwei Konstanten enthaltende Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dx}{dt} + \nu_0^2 x = \frac{f(t)}{m} \quad \text{bzw.} \quad \frac{f(t)}{K} \quad (2)$$

Hierbei sind die folgenden Abkürzungen eingeführt:

$$2\varepsilon = \frac{p}{K} \quad \text{bzw.} \quad \frac{p}{m},$$

$$\nu_0^2 = \frac{D}{m} \quad \text{bzw.} \quad \frac{D}{K},$$

Ferner werde die auf der rechten Seite stehende Funktion in der Form $\nu_0^2 \xi(t)$ geschrieben, so daß die Gleichung nunmehr lautet:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dx}{dt} + \nu_0^2 x = \nu_0^2 \xi(t). \quad (2a)$$

Verschwinden die Ableitungen von x , so erhält man $\nu_0^2 x = \nu_0^2 \xi$. Demnach ist ξ der Wert von x für den Fall, daß die Meßgröße sich nicht mit der Zeit ändert und das Meßgerät sich ruhig eingestellt hat, oder für den idealen Fall, daß das Trägheitsmoment oder die Masse der bewegten Teile und die Dämpfung verschwindend gering sind. Er wird im folgenden kurz als der Sollwert bezeichnet werden. x ist der hiervon bei raschen zeitlichen Änderungen der Meßgröße abweichende, angezeigte Wert.

Eine weitere Vereinfachung der Gleichung läßt sich durch passende Wahl des Zeitmaßstabes erreichen. Führt man statt t die neue Zeitgröße $\tau = \nu_0 t$ ein und bezeichnet man den Quotienten $\varepsilon : \nu_0$ als „Dämpfungsgrad“ mit α , so erhält man nunmehr:

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + 2\alpha \frac{dx}{d\tau} + x = \xi \left(\frac{\tau}{\nu_0} \right) \quad (3)$$

Diese Gleichung enthält links nur noch die den Dämpfungszustand charakterisierende Größe α ; die Lösung ihrer zugehörigen „homogenen Gleichung“ (mit $\xi = 0$) wird daher von den besonderen Werten von m oder K und D unabhängig, d. h. man kann den Verlauf von x als Funktion der Zeit durch entsprechende Wahl des Zeitmaßstabes für alle Meßgeräte gleichen Dämpfungszustandes zur Deckung bringen. Eine ähnliche Vereinheitlichung ergibt sich, wie sich später zeigen wird, aber auch für nicht verschwindende ξ .

3. Die Eigenschwingungen.

Untersuchen wir zunächst ein Meßgerät nicht bei seiner Meßtätigkeit, sondern sehen wir es nur als schwingungsfähiges System an, das nicht unter dem bewegenden Einfluß von äußeren Kräften steht, also nur Eigenschwingungen ausführt. Die rechte Seite der Differentialgleichungen (1) bis (3) verschwindet dann.

Setzt man zunächst das System als ungedämpft voraus, so ergibt sich aus (2) die einfache Differentialgleichung in kanonischer Form:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \nu_0^2 x = 0.$$

Lösungen sind:

$$x_1 = c_1 \sin \nu_0 t \quad \text{und} \quad x_2 = c_2 \cos \nu_0 t,$$

allgemein die Summe $x_1 + x_2$.

Die Bewegung besteht daher in einer rein harmonischen Schwingung mit der Kreisfrequenz ν_0 oder der Frequenz $f = \nu_0 : 2\pi$ bzw. mit der Schwingungsdauer $2\pi : \nu_0$. Damit ergibt sich die Bedeutung der zunächst nur formal eingeführten Bezeichnung ν_0 . Es ist dies die Kreisfrequenz für das ungedämpft schwingende System, wobei als selbstverständlich vorausgesetzt ist, daß lediglich die dämpfenden Ursachen fortgefallen, aber die übrigen Größen — z. B. das Trägheitsmoment und die Richtkraft — unverändert geblieben sind. Ob die Entfernung der dämpfenden Kräfte allein in Wirklichkeit ausführbar ist (in vielen Fällen ist dies nicht der Fall), spielt bei dieser Begriffsbestimmung keine Rolle. Um dies hervorzuheben, wird hier öfter von der Eigenfrequenz bei fortgedachter Dämpfung gesprochen. Ferner wird weiterhin der Einfachheit halber nur mit Kreisfrequenzen gerechnet.

Bei der weiteren Behandlung der Bewegungsgleichungen knüpfen wir zweckmäßig an die Formel (3) an. Denn die in der Gleichung (2) enthaltene Größe ε , der Dämpfungsexponent, beschreibt für sich allein die Schwingungsbewegung nicht eindeutig: wie bekannt, ist z. B. bei schwacher Dämpfung durch dies ε das Abklingen der Schwingungen mit der Zeit gegeben, so daß bei demselben ε ein rasch schwingendes System eine größere Zahl feststellbarer Schwingungen ausführt, als ein langsam schwingendes. Dagegen ist, wie am Schluß von Abschnitt 2 angedeutet wurde, durch die Größe α , den Dämpfungsgrad, der Charakter des Schwingungsvorganges, z. B. die Anzahl der merklichen Schwingungen, das Verhältnis aufeinanderfolgender Schwingungswerten usw. eindeutig gegeben.

Die allgemeine Lösung der Gleichung (3) mit $\xi = 0$ ergibt sich bekanntlich aus zwei ein Fuchssches Fundamentalsystem u, v bildenden partikulären Lösungen zu:

$$x = c_1 u + c_2 v,$$

wobei die Konstanten c_1, c_2 aus der Stellung x_0 des beweglichen Systems und seiner Geschwindigkeit $\left(\frac{dx}{d\tau}\right)_0$ für irgendeinen Zeitpunkt zu bestimmen sind.

Ein Fuchssches Fundamentalsystem bilden z. B. die Funktionen:

$$u = e^{r_1 \tau} = \exp r_1 \tau$$

$$v = e^{r_2 \tau} = \exp r_2 \tau \quad ^1)$$

Hierbei sind r_1 und r_2 Wurzeln der „charakteristischen Gleichung“ zweiten Grades:

$$r^2 + 2\alpha r + 1 = 0;$$

sie können je nach dem Wert von α

- a) beide komplexe Werte haben und zwar für $\alpha < 1$,
- b) beide denselben reellen Wert r haben (Doppelwurzel), nämlich für $\alpha = 1$,
- c) beide reell sein, nämlich für $\alpha > 1$.

Tritt der Fall b) ein, so tritt an Stelle des obigen das folgende System:

$$u = e^{r\tau} = \exp r\tau$$

$$v = \tau e^{r\tau} = \tau \exp r\tau.$$

Es steht uns frei, die Zeitrechnung in irgendeinem beliebigen Zeitpunkt zu beginnen zu lassen, so daß die bis dahin vergangenen Zeiten als negativ, die darauf folgenden als positiv zu rechnen sind. Hier setzen wir zur Vereinfachung der Formeln den Zeitpunkt, für den die Lage des beweglichen Systems $= x_0$ und seine Geschwindigkeit $= x_0'$ bekannt sind, als Anfangspunkt $\tau = 0$ fest. Dann ergeben sich zwei einfache Gleichungen zur Bestimmung der Konstanten c_1 und c_2 . Man findet schließlich, daß die Bewegung des sich selbst überlassenen Systems in den Fällen a) und c) nach der Gleichung

$$x = \frac{x_0' - x_0 r_2}{r_1 - r_2} \exp r_1 \tau - \frac{x_0' - x_0 r_1}{r_1 - r_2} \exp r_2 \tau \quad (4)$$

im Falle b) nach der Gleichung

$$x = x_0 \exp r\tau + (x_0' - x_0 r)\tau \exp r\tau \quad (5)$$

erfolgt.

Um einen klareren Einblick in die Bewegungsvorgänge zu erhalten, pflegt man die Exponentialfunktionen, soweit sie komplexe Argumente haben, entsprechend den bekannten Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} 2i \sin z &= \exp iz - \exp(-iz) \\ 2 \cos z &= \exp iz + \exp(-iz) \end{aligned} \right\} i = \sqrt{-1}$$

durch Kreisfunktionen auszudrücken; der Einheitlichkeit halber ist dann auch die Umrechnung der Exponentialfunktionen mit reellem Argument in Hyperbelfunktionen auf Grund der Beziehungen

$$2 \sinh z = \exp z - \exp(-z)$$

$$2 \cosh z = \exp z + \exp(-z)$$

empfehlenswert.

Führt man das durch und nimmt man ferner an, man habe auf eine beliebige Weise, bei kräftiger gebauten beweglichen Systemen z. B. mechanisch, bei gegen

¹⁾ Diese von H. Bruns stammende, den anderen Funktionsbezeichnungen sin, cos usw. nachgebildete Bezeichnung für die Exponentialfunktion wird wegen ihrer drucktechnischen Einfachheit im folgenden häufiger verwendet.

äußeren, Eingriff empfindlichen durch die den Ausschlag hervorrufende Kraft, der Systemkoordinate x den Wert a gegeben und überlasse das bis dahin ruhende System durch Loslassen oder plötzliches Entfernen der äußeren Kraft sich selbst, so daß $x_0 = a$, $x_0' = 0$, so ergeben sich für die einzelnen Fälle a) bis c) folgende Lösungen der Bewegungsgleichung:

a) für $\alpha < 1$

$$x = \frac{a}{\sqrt{1 - \alpha^2}} e^{-\alpha\tau} \sin(\sqrt{1 - \alpha^2} \tau + \gamma) \quad (6)$$

mit $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha}$

b) für $\alpha = 1$

$$x = a e^{-\tau} (1 + \tau) \quad (7)$$

c) für $\alpha > 1$

$$x = \frac{a}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} e^{-\alpha\tau} \sinh(\sqrt{\alpha^2 - 1} \tau + \gamma) \quad (8)$$

mit $\operatorname{tgh} \gamma = \frac{\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha}$.

Nur im ersten Falle führt das System pendelnde Bewegungen aus. Im zweiten und dritten wird das aus der Gleichgewichtslage gebrachte und dann sich selbst überlassene System seine Ruhelage erreichen, ohne sie je zu überschreiten; d. h. die Bewegung ist aperiodisch. Insbesondere bezeichnet man ein System, das die Bewegung des Falles b) ausführt, als im Grenzzustand der aperiodischen Dämpfung befindlich. Für den letzten Fall c) braucht man oft auch die Bezeichnung „kriechende Einstellung“.

Bei schwingender Einstellung des Zeigers in die Gleichgewichtslage fallen besonders in die Augen und sind leicht zu messen das Abklingen der einzelnen Schwingungsweiten, bestimmt z. B. durch die Schwingungsweite an dem ersten Umkehrpunkt als Bruchteil der Ablenkung bei Beginn der Bewegung, ferner die Zeiten, in denen die Ruhelage passiert wird und die Lage oder der Abstand der einzelnen Umkehrpunkte.

Aus der Lösung (6) läßt sich leicht herleiten:

1. für den Betrag der ersten Schwingungsweite, bezogen auf die Ablenkung bei Beginn der Bewegung:

$$\ddot{u} = 100 \exp(-\pi\alpha : \sqrt{1 - \alpha^2}) \% \quad (9)$$

2. für den Abstand zweier aufeinanderfolgender Durchgänge durch die Ruhelage, also für die halbe Schwingungsdauer

$$\tau_{n+1} - \tau_n = \pi : \sqrt{1 - \alpha^2} \quad (10)$$

Diese Formel gilt für alle ganzzahligen n von $n = 1$ ab. Die Schwingungen verlaufen demnach „isochron“: die Bewegung erfolgt also im Mittel mit um so geringerer Geschwindigkeit, je kleiner die Schwingungsweiten werden. — Derselbe Wert ergibt sich auch für den Abstand zweier aufeinanderfolgender Umkehrpunkte.

3. für die Zeit des ersten Durchganges durch die Ruhelage:

$$\tau_1 = \left[\pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sqrt{1 - \alpha^2} : \alpha) \right] : \sqrt{1 - \alpha^2} \quad (11)$$

Die Umkehrpunkte liegen also nur für $\alpha = 0$ in der Mitte zwischen zwei Durchgängen durch die Ruhelage.

In allen diesen Ausdrücken kommt außer Zahlenkonstanten nur der Dämpfungsgrad α vor. Man kann also ohne Kenntnis der sonstigen Daten eines schwingenden Systems, nur aus der Aufzeichnung der Systembewegung auf einer gleichmäßig fortbewegten Schreibfläche, z. B. für einen festgestellten Wert von \ddot{u} den Dämpfungsgrad α oder umgekehrt für ein gegebenes α die zu erwartenden Werte von $\tau_{n+1} - \tau_n$ und τ_1 bestimmen, indem man den Zusammenhang zwischen den genannten Größen ein für allemal als Kurve im cartesischen Koordinatensystem graphisch darstellt. Sehr zweckmäßig ist die Anwendung von Funktionsskalen, einmal, da sie für gleiche Ablesegenauigkeit weniger Platz beanspruchen und übersichtlicher sind als Kurven, dann vor allem, weil die Ablesung zusammengehöriger Werte weniger Mühe macht wegen des Fortfalls sowohl zweimaligen Entlangfahrens an Ordinaten wie des Einschaltens von Zwischenwerten für jede Ordinate zwischen parallelen Geraden.

Die abgebildeten Funktionsskalen weisen zu be den Seiten einer Geraden je eine Teilung auf. Die eine Teilung enthält in allen drei Skalen die α -Werte, die andere Teilung gibt in der ersten Skala die zu den daneben stehenden Werten von \ddot{u} (der ersten Schwingungsweite, gerechnet in Hundertsteln der ursprünglichen Ablenkung), in der zweiten und dritten entsprechend die Werte für die halbe Schwingungsdauer und die vom Beginn der Bewegung bis zum ersten Durchgang durch die Ruhelage verfllossene Zeit, beide gemessen in den oben eingeführten Zeiten $\tau = \nu_0 t$, wenn t die Zeit in Sekunden bedeutet.

Wie sich in der weiteren Untersuchung zeigen wird, sind die für das dynamische Verhalten eines Meßgerätes (und damit die für seine Leistungsfähigkeit in der Wiedergabe rasch schwankender Meßgrößen) maßgebenden Größen seine Eigenfrequenz ν_0 bei fortgedachter Dämpfung und sein Dämpfungsgrad α . Diese beiden lassen sich

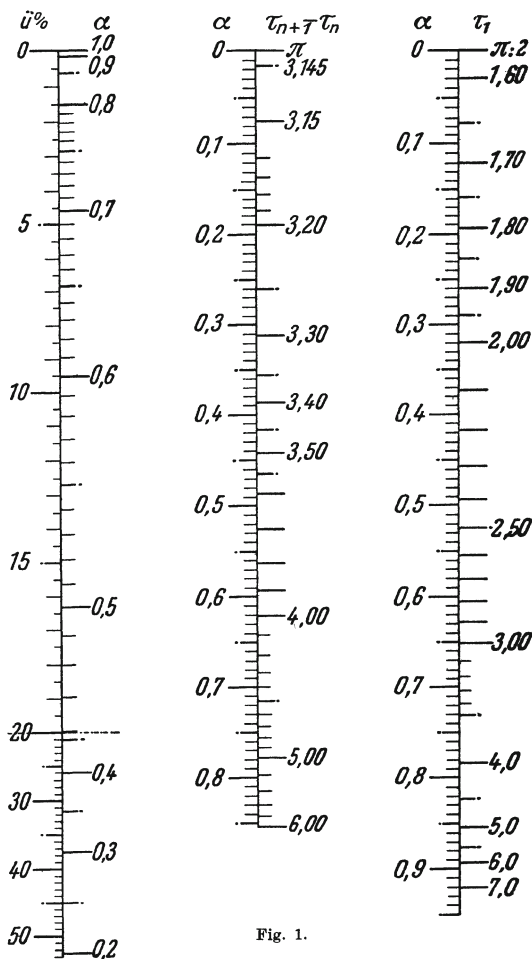


Fig. 1.

Funktionsskalen für die bei der Eigenbewegung von gedämpften Meßsystemen auftretenden charakteristischen Größen. Die Abhängigkeit vom Dämpfungsgrad α für:

1. den Betrag \ddot{u} in Hundertsteln der ursprünglichen Ablenkung um den der Zeiger über die Ruhstellung hinaus schwingt;
2. den zeitlichen Abstand $\tau_{n+1} - \tau_n$ der aufeinanderfolgenden Durchgänge des Zeigers durch seine Ruhstellung oder der aufeinander folgenden Umkehrpunkte (= halbe Schwingungsdauer);
3. den zeitlichen Abstand τ_1 eines Durchganges durch die Nullstellung von dem vorhergehenden Umkehrpunkt.

Man suche in einer der Doppelskalen den gegebenen Wert an und lese für denselben Punkt den Wert der anderen Skala ab. Als Zeiten sind aufgetragen $\tau = \nu_0 t$, wo ν_0 = Kreisfrequenz des Systems bei fortgedachter Dämpfung, t = Zeit in Sekunden. Bei bekannter Zeit t ergibt sich aus τ demnach die Kreisfrequenz ν_0 .

Man suche in einer der Doppelskalen den gegebenen Wert an und lese für denselben Punkt den Wert der anderen Skala ab. Als Zeiten sind aufgetragen $\tau = \nu_0 t$, wo ν_0 = Kreisfrequenz des Systems bei fortgedachter Dämpfung, t = Zeit in Sekunden. Bei bekannter Zeit t ergibt sich aus τ demnach die Kreisfrequenz ν_0 .

Wie sich in der weiteren Untersuchung zeigen wird, sind die für das dynamische Verhalten eines Meßgerätes (und damit die für seine Leistungsfähigkeit in der Wiedergabe rasch schwankender Meßgrößen) maßgebenden Größen seine Eigenfrequenz ν_0 bei fortgedachter Dämpfung und sein Dämpfungsgrad α . Diese beiden lassen sich

nun mit Hilfe der Funktionsskala Fig. 1 sehr leicht aus der Aufzeichnung eines freischwingenden, entsprechend schwach gedämpften Meßgerätes herleiten, die es auf einer gleichmäßig fortbewegten Schreibfläche bei Rückbewegung seiner beweglichen Teile in die Ruhelage nach vorheriger erzwungener Ablenkung hinterläßt. Aus dem in Hundertsteln der ursprünglichen Ablenkung gerechneten Betrag des ersten Überschwingens über die Ruhelage ergibt sich an Hand der ersten Funktionsskala der Dämpfungsgrad α . Zu diesem α ergibt sich aus der zweiten oder dritten Funktionsskala — in den besonderen, oben eingeführten Einheiten gemessen — der zeitliche Abstand aufeinanderfolgender Durchgänge durch die Ruhelage, der sich leichter feststellen läßt, als der Abstand aufeinanderfolgender Umkehrpunkte, oder die bis zum ersten Durchgang durch die Ruhelage verfllossene Zeit. Diese Zeiten lassen sich aber aus der Aufzeichnung auch unmittelbar in Sekunden entnehmen. Durch Vergleich beider Zeitwerte ergibt sich die eingeführte Zeiteinheit, also auch die Eigenfrequenz ν_0 bei fortgedachter Dämpfung.

In Fig. 2 ist der Zusammenhang zwischen dem Dämpfungsgrad α und der Zahl n der Halbschwingungen dargestellt, die ein zwangsweise abgelenktes und dann sich selbst über-

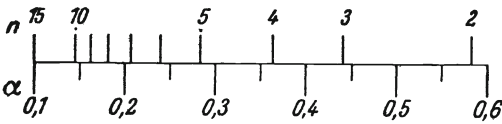


Fig. 2.

Die Zahl n der Halbwellen als Funktion des Dämpfungsgrades α wenn Schwingungsweiten unter 1 v. H. der ursprünglichen Ablenkung unmerklich sind.

lassenes Meßsystem vollführt, unter der Voraussetzung, daß Schwingungsweiten unter einem Hundertstel der Anfangsablenkung unmerklich sind. Da man nur eine ganze Anzahl von Halbschwingungen zählen kann, ist die Benutzung der Funktionsskala Fig. 2 nur für ganz-robe Abschätzungen von α zweckmäßig.

Nicht so einfach ist die gleichzeitige Bestimmung der beiden Größen ν_0 und α für ein stärker gedämpftes Meßgerät. Ist man sicher, ein genau im aperiodischen Grenzfall arbeitendes Meßgerät vor sich zu haben, so kann man aus der Zeit, die bei freier Bewegung bis zum Rückgang der ursprünglichen von außen her aufgedrückten Ablenkung auf ein Hundertstel ihres Betrages verfließt, die Eigenfrequenz bei fort-

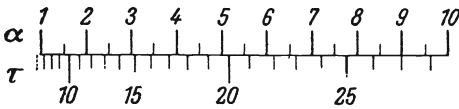


Fig. 3.

Nach welcher Zeit — gemessen in Zeiten $\tau = \nu_0 t$ — ist für die verschiedenen Dämpfungsgrade α der ursprüngliche Zeigerausschlag auf auf $1/100$ herabgegangen bei sich kriechend bewegenden Meßsystemen?

gedachter Dämpfung bestimmen. Aus der Lösung (7) folgt die Zeit $\tau = 6,5$. Mißt man die entsprechende Zeit t für das zu untersuchende Meßgerät in Sekunden, so ergibt sich ohne weiteres der Zeitmaßstab, und man erhält $\nu_0 = 6,5 : t$. Ähnlich kann man verfahren für noch stärker gedämpfte Meßgeräte, falls man

den Dämpfungsgrad kennt. Man würde dann die Funktionsskala Fig. 3 zu Hilfe nehmen, die den Zusammenhang zwischen dem Dämpfungsgrad α und den in Einheiten $\tau = \nu_0 t$ gemessenen Zeiten darstellt, in denen der ursprüngliche Ausschlag auf ein Hundertstel zurückgegangen ist. Die Kenntnis des Dämpfungsgrades läßt sich aber nur in den seltensten Fällen voraussetzen. Schon das Vorhandensein einer Dämpfung entsprechend dem aperiodischen Grenzfall läßt sich schwer beurteilen. Man sollte zwar meinen, bei regelbarer Dämpfung ließe sich das Verschwinden des Überschwingens scharf feststellen. Weiter unten mitgeteilte Versuche haben aber ergeben, daß dies nicht der Fall ist. Man glaubt den Grenzfall hergestellt zu haben, sobald man in der geschriebenen Kurve eine scharfe Ecke zwischen der Nulllinie und der

fast als Gerade verlaufenden Aufzeichnung des in die Ruhelage gehenden Meßgerätezigers erhält. In Wirklichkeit hat man auf eine schwächere Dämpfung eingestellt, also auf pendelnde Bewegung des Zeigers. Nur ist das Überschwingen unmerklich oder erst bei genauerem Hinsehen festzustellen. Man kann als „praktisch aperiodisch“ gedämpft schon ein Meßgerät bezeichnen, dessen Zeiger die Ruhelage gerade noch um 1 vH der ursprünglichen Ablenkung überschreitet. Diese Begriffsbestimmung ist an sich willkürlich, denn in besonderen Fällen erreicht man auch für sehr rasch schwingende Meßgeräte eine höhere Ablesegenauigkeit, etwa bis zu 0,3 vH. Im Durchschnitt ist aber mit einer Meßgenauigkeit von 1 vH zu rechnen. Schießt der Zeiger um diesen Betrag über die Ruhelage hinaus¹⁾, so geht er, wie sich aus der Formel (11) sofort ergibt, bereits zur Zeit $\tau = 4,5$ durch die Ruhelage, und der ursprüngliche Ausschlag ist bis auf ein Hundertstel heruntergegangen schon zu einer noch früheren Zeit, statt zur Zeit $\tau = 6,5$, wie im theoretischen Grenzfall der Aperiodizität. Nimmt man an, durch Verändern der dämpfenden Ursachen den theoretischen Grenzfall eingestellt zu haben, während in Wirklichkeit die schwächere Dämpfung des „praktischen Grenzfalles“ vorliegt, so macht man also bei der Berechnung von ν_0 einen Fehler von etwa 45 vH.

Die gleichzeitige Bestimmung des Dämpfungsgrades und der Eigenfrequenz bei fortgedachter Dämpfung ist für aperiodisch sich einstellende Meßgeräte auf folgende Weise möglich. Die vom Zeiger bei der Rückkehr in die Gleichgewichtslage geschriebene Kurve besitzt einen Wendepunkt. Dieser liegt beispielsweise für den theoretischen Grenzfall der Aperiodizität bei $\tau = 1$. Die an diesen Punkt gezogene Tangente, welche übrigens die steilste der Kurve ist, schneidet die Zeitlinie in einem bestimmten Abstand vom Beginn der Bewegung. Von diesem Punkte aus gerechnet ist die vom Zeiger geschriebene Kurve wegen der mit der Dämpfung zunehmenden Abflachung verschieden weit entfernt. Diese Entfernung läßt sich ebenso wie der Abstand des Tangentenschnittpunktes vom Bewegungsbeginn messen, und es ließe sich dann an Hand von Tabellen oder Kurventafeln sowohl ν_0 wie α bestimmen. Wegen der Unzweckmäßigkeit kriechender Einstellung überhaupt erübrigt sich hier die Wiedergabe solcher Tafeln. Weiter unten wird aber für übermäßig gedämpfte Meßgeräte ein anderes Verfahren zur Bestimmung von ν_0 und α angegeben, da man eine solche Bestimmung doch nicht ganz vermeiden kann, z. B. bei Saitengalvanometern, deren Saite manchmal zur Erzielung genügender Stromempfindlichkeit derart gelockert werden muß, daß sich infolge der Luftdämpfung eine kriechende Einstellung ergibt. Dieses zweite Verfahren zur Bestimmung von ν_0 und α erfordert übrigens nicht die rasche Fortbewegung der Schreibfläche, die bei Anwendung des eben beschriebenen Verfahrens für ausreichende Genauigkeit unerläßliche Bedingung ist. Es wäre auch in den Fällen statt des ersten zu verwenden, in denen die Richtkraft nicht dauernd vorhanden ist, sondern erst zusammen mit der von der Meßgröße abhängigen Kraft entsteht, wie dies bei manchen elektrischen Meßgeräten der Fall ist. Bei Abschalten des Stromes führt in solchen der Zeiger keine Bewegung aus, sondern bleibt in der letzten Stellung liegen.

Bei der Herleitung des Verfahrens zur Bestimmung von ν_0 und α war bisher die einfachste Erzeugungsart von Eigenschwingungen in Meßgeräten zugrunde gelegt worden: das bewegliche System und der zwangläufig mit ihm verbundene Zeiger wurden gegen die Wirkung der inneren Richtkräfte des Meßgerätes in einer

¹⁾ Der Dämpfungsgrad α hat dann den Wert 0,83 (statt 1,0).

von der Ruhelage abweichenden Stellung festgehalten, hatten also bei Beginn der Bewegung keine Geschwindigkeit. Die in der Zwangslage als Formänderungsarbeit der gespannten Feder oder sonstigen durchgebogenen Meßgeräteile oder sonstwie aufgespeicherte Lageenergie wird in dem Augenblick frei, in dem die beweglichen Teile sich selbst überlassen werden. Es erfolgt dann deren allmähliche Umwandlung in Bewegungsenergie und für die Bewegung verlorengelender zerstreuter Energie bis zu ihrem Verschwinden und die Rückverwandlung noch vorhandener Bewegungsenergie in Lageenergie usw. Dieses wechselnde Spiel findet seinen Ausdruck in den Bewegungsvorgängen, die durch die Lösungen (6) bis (8) beschrieben werden. Die gleichen Lösungen lassen sich auch für andere Erzeugungsarten der Eigenschwingungen errechnen. Man braucht nur für $\tau = 0$ der Einstellung x des beweglichen Systems und seiner Geschwindigkeit x' passende Werte zu verleihen: nämlich solche, die einem Punkte der gefundenen Bewegungskurven entsprechen. Bei der vorausgesetzten Erzeugungsart der freien Bewegung konnte zweckmäßig nur der Beginn der Bewegung als Anfangspunkt der Zeitrechnung gewählt werden. An sich aber beruht die Wahl des Zeitnullpunktes auf einer willkürlichen Festsetzung. Man kann die durch die Gleichungen (6) bis (8) beschriebenen Bewegungsvorgänge auch vor den Zeitpunkt $\tau = 0$ zurückverfolgen. Dann findet man für alle drei Lösungen einen in dem negativen Zeitenbereich liegenden Durchgang durch die Ruhelage, und

zwar für mäßig gedämpfte Meßgeräte mit $\alpha < 1$ zu der Zeit $\tau_{-1}^{(1)} = -\frac{\arctg \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}}{\sqrt{1-\alpha^2}}$,
für theoretisch gerade aperiodisch gedämpfte Meßgeräte mit $\alpha = 1$ zu der Zeit $\tau_{-1}^{(2)} = -1$, und schließlich für noch stärker gedämpfte Meßgeräte mit $\alpha > 1$ zu der

Zeit $\tau_{-1}^{(3)} = -\frac{\text{arc tgh } \frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha}}{\sqrt{\alpha^2-1}}$. Die auf das gewählte Zeitmaß bezogene Geschwindigkeit des beweglichen Systems hat in diesen Zeitpunkten entsprechend die Werte:

$$\begin{aligned} \text{bei } \alpha < 1; & \quad x'_{-1} = a e^{-\alpha \tau_{-1}^{(1)}}, \\ \text{,, } \alpha = 1, & \quad x'_{-1} = a e, \\ \text{,, } \alpha > 1. & \quad x'_{-1} = a e^{-\alpha \tau_{-1}^{(3)}}. \end{aligned}$$

Man kann also in Meßgeräten die gleichen Bewegungen wie durch Freilassen der abgelenkten anzeigenden Teile auch dadurch hervorrufen, daß man den in Ruhelage befindlichen anzeigenden Teilen eine bestimmte Geschwindigkeit erteilt, beispielsweise durch einen noch früher liegenden Vorgang oder sicherer durch Anstoßen. Voraussetzung ist hierbei, daß der Stoß, z. B. ein mechanischer oder bei elektrischen Meßgeräten ein Stromstoß, genügend kurze Zeit dauert, so daß während seiner Einwirkung noch keine merkliche Bewegung erfolgt. Diese Bedingung läßt sich für sehr langsam schwingende Meßgeräte, z. B. Spiegelgalvanometer, leicht erfüllen. Man pflegt daher für diese die Eigenbewegung als nach der zweiten Erzeugungsart durch Stromstoß entstanden zu untersuchen. Bei der Mehrzahl der Meßgeräte indessen läßt sich die Eigenbewegung einwandfrei nur durch Dauerablenkung des Zeigers und plötzliche Fortnahme der Hemmung oder der wirkenden Kraft hervorrufen.

4. Bedingung für schnellste Meßbereitschaft.

Eine scheinbare Unstimmigkeit bleibt noch zu erörtern. Aus der Lösung (6) für den Fall $\alpha < 1$ ergibt sich, daß für jeden auch noch so wenig von dem Wert

$\alpha = 1$ abweichenden Dämpfungsgrad, wenn er nur kleiner als 1 ist, unbegrenzt viele Pendelbewegungen auftreten, und dementsprechend ergeben sich aus der Formel (10) auch unbegrenzt viele Durchgänge durch die Ruhelage. Das rührt daher, daß die Sinusfunktion mit einem Faktor $\exp(-\alpha\tau)$ behaftet ist, der für keinen endlichen Wert von τ verschwindet; ebenso verschwinden die Lösungen (7) und (8) für keinen noch so großen Wert von τ ; und zwar sollte das Abklingen der Schwingungen in dem einen Fall und die Annäherung an die Ruhelage in den beiden anderen Fällen schließlich außerordentlich langsam erfolgen. Scheinbar tritt aber in Wirklichkeit schon nach kurzer Zeit das vollständige Verschwinden der Schwingungen für $\alpha < 1$ und die Einstellung in die Ruhelage für $\alpha \geq 1$ ein. Eine Abweichung des tatsächlichen Schwingungsverlaufes von dem errechneten wäre nicht weiter verwunderlich, da es nicht zulässig ist, Formeln, die unter vereinfachenden, von den verwickelteren Beziehungen der Wirklichkeit abweichenden Annahmen hergeleitet sind, bis in die äußersten Möglichkeiten und zu den letzten Feinheiten zu verfolgen.

Eine idealisierende Annahme ist z. B. die, daß die Bewegungswiderstände genau proportional mit der Geschwindigkeit der bewegten Teile zunehmen. Es ist in Wirklichkeit noch ein konstanter, von der Geschwindigkeit unabhängiger Bestandteil vorhanden, der bei Meßgeräten mit Spitzenlagern nicht zu vernachlässigen ist, aber auch bei Meßgeräten mit federnder Lagerung, bei denen keine festen Teile aufeinander gleiten, wegen der in den elastischen Teilen auftretenden molekularen Reibung nicht ganz verschwindet. Dieser von der Geschwindigkeit unabhängige und auch bei Ruhe nicht verschwindende Bestandteil bewirkt plötzliches Aufhören der Schwingungsbewegung, sobald dem beweglichen System nicht genügend Energie innewohnt, um aus einem kleinen Bereich beiderseits der Ruhelage herauszukommen. Der Zeiger bleibt dann irgendwo in diesem Bereich, also in unmittelbarer Nähe seiner Nullstellung stehen. Von noch größerer Bedeutung für die Abweichung der Wirklichkeit von der Rechnung ist, daß die richtende Kraft, zumal wenn sie elastischer Natur ist, nicht bis zu den kleinsten Verschiebungen des beweglichen Systems herunter nach der Voraussetzung proportional abnimmt. Ferner ist die Elastizität immer unvollkommen. Es wird stets eine elastische Nachwirkung beobachtet, so daß das bewegliche System zunächst scheinbar eine Ruhelage erreicht, die sich langsam mit der Zeit ändert.

In der Regel ist aber schon die Genauigkeit, mit der eine bestimmte Einstellung der beweglichen Teile festgestellt werden kann, so gering, daß diese kleinen Abweichungen der Rechnung vom Versuch nicht mehr zu beobachten sind. Diese Meßgenauigkeit ist im allgemeinen nicht so groß, wie man anzunehmen geneigt ist, besonders nicht bei Meßgeräten zur Aufzeichnung sich sehr rasch verändernder Meßgrößen. Bei Spiegelgalvanometern ist es noch möglich, ein Tausendstel der normalen Ablenkungen festzustellen, weil diese selbst sehr große Beträge erreichen. Meßgeräte mit rascher Einstellung arbeiten aber vorwiegend mit kleinen Zeiger-verschiebungen, z. B. soll die Spur des Lichtzeigers bei Oszillographen sich nicht weiter als 40 mm bei einer Zeigerlänge von 40 cm aus der Nulllage entfernen, damit der Spiegel nicht abgeschleudert wird; bei Meßgeräten mit Massezeigern sind wegen der Gefahr elastischer Verbiegung der Zeiger große Ablenkungen selbstverständlich noch weniger möglich. Weiter läßt sich aber auch die Strichdicke der Aufzeichnung nicht soweit herabmindern, daß Verschiebungen von zehntel Millimetern sicher feststellbar sind. Die von stofflichen Zeigern zurückgelassenen Schriftzüge sind nie

fein genug, aber auch mit Lichtzeigern kann man in der Regel keine genügend feinen oder genügend scharfen Linien zeichnen. Denn gerade Meßgeräte mit hoher Eigenfrequenz bei fortgedachter Dämpfung müssen mit sehr kleinem Spiegel versehen werden. Dabei treten Beugungserscheinungen auf, so daß die Ränder des auf die Schreibfläche geworfenen Lichtbündels unscharf werden. Nur dann, wenn das bewegliche System nicht selbst ein Lichtbündel zu lenken hat, ist eine größere Schärfe der Strichränder erzielbar. Das ist z. B. der Fall bei dem Saitengalvanometer mit der auf der Schreibfläche mikroskopisch scharf abbildbaren Saitenmitte. Aber auch hier ist es lediglich ein Glücksfall, wenn man die Saite in ihrer Ruhelage und in ihrer größten Ablenkung gleich scharf abgebildet erhält.

Im allgemeinen kann man sagen, daß sich erst eine Abweichung von 0,2 mm mit Sicherheit feststellen läßt. Das sind für den größten vorkommenden Ausschlag von 40 mm schon 0,5 vH. Bei Geräten mit hoher Meßempfindlichkeit, z. B. Galvanometern zur Aufzeichnung der Herzströme, kommen in der Regel Ablenkungen bis zu 20 mm vor. Der Meßfehler beträgt dann 1 vH.

↳ Bei unseren Überlegungen setzen wir der Einheitlichkeit wegen durchweg eine Meßgenauigkeit von 1 vH voraus. Dies ist übrigens keine Einschränkung, da vorkommendenfalls statt in der Nulllinie in einer von dieser um ein Hundertstel des ursprünglichen Ausschlages abweichenden Linie abgelesen werden kann usw.

Die erzielbare Meßgenauigkeit spielt, wie überhaupt bei der Wahl der für die Wiedergabe bestimmter Meßgrößenschwankungen günstigsten Werte von ν_0 und α , auch für die Frage der schnellsten Meßbereitschaft eine wesentliche Rolle. Der Zeiger eines wenig gedämpften Meßgerätes braucht viel Zeit zur Beruhigung, der eines übermäßig gedämpften kriecht zu langsam seiner Ruhelage zu. Am schnellsten für eine nachfolgende Messung bereit ist daher ein Meßgerät mit einer Dämpfung, die in der Nähe des theoretischen Grenzfalles der Aperiodizität liegt. Man bezeichnet diesen Grenzfall als den günstigsten. Doch geschieht dies wohl mehr deshalb, um mit den dann viel einfacheren Formeln für den Bewegungsvorgang rechnen zu können. Genau genommen ist der theoretische Grenzfall nie der günstigste für die schnellste Meßbereitschaft. Mag man eine Meßgenauigkeit voraussetzen, welche man will, immer wird das weniger gedämpfte Meßgerät sich schneller „beruhigen“, dessen Zeiger über die Ruhelage um den Betrag der angenommenen Meßgenauigkeit hinaus-schwingt.

Wie sich aus den oben mitgeteilten Zahlen ergibt, ist z. B. bei einer Meßgenauigkeit von 1 vH die Beruhigungszeit um etwa 35 vH kürzer; sind nämlich Abweichungen der Einstellung im Betrage von 1 vH der größten Ablenkung gerade nicht mehr feststellbar, so wird ein theoretisch gerade aperiodisch gedämpftes Meßgerät ($\alpha = 1$) die Ruhelage in der Zeit $\tau = 6,5$ erreichen. Die schnellste Einstellung ergibt sich aber für eine Dämpfung entsprechend $\alpha = 0,83$ mit einer Zeit $\tau = 4,2$. Die entsprechenden Werte bei einer Meßgenauigkeit von 0,5 vH sind eine Einstellungszeit $\tau = 7,4$ im Grenzfall und eine Zeit $\tau = 4,8$ bei der günstigsten Dämpfung ($\alpha = 0,86$).

5. Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung für ein unter dem Einfluß der wechselnden Meßgröße stehendes Meßgerät.

Die allgemeine Lösung setzt sich bekanntlich aus zwei Teilen zusammen und zwar aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung, die soeben behandelt

wurde, und einer „partikulären Lösung“, die von der Funktion auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung, der sog. Störungsfunktion, abhängt. Dieser zweite Teil der Lösung läßt sich durch Variation der Konstanten nach Lagrange herleiten. Man erhält auf diese Weise, z. B. für $\alpha < 1$:

$$x = c_1 \exp(-\alpha\tau) \sin \sqrt{1-\alpha^2} \tau + c_2 \exp(-\alpha\tau) \cos \sqrt{1-\alpha^2} \tau + \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \int_0^\tau \xi \left(\frac{\eta}{\nu_0} \right) \exp[-\alpha(\tau-\eta)] \sin \sqrt{1-\alpha^2} (\tau-\eta) d\eta \quad (13)$$

Entsprechende Ausdrücke ergeben sich für die anderen Dämpfungsgrade $\alpha = 1$ und $\alpha > 1$.

Über die Eigenschaften der hinzukommenden partikulären Lösung in Abhängigkeit von ξ läßt sich allgemein wenig aussagen. Für die Fälle, in denen die Störungsfunktion einen periodischen Charakter hat, pflegt man sie in Form einer Entwicklung nach Sinus- und Kosinusfunktionen, einer Fourierschen Reihe, anzusetzen. Die meisten vorkommenden periodischen Schwankungen lassen sich auf diese Weise angemessen darstellen, z. B. der Verlauf eines Wechselstromes oder einer Wechselspannung. Indessen kommen in der Technik auch andere periodische Änderungen der Meßgröße vor, die sich zwar theoretisch auch in Form einer Fourierschen Reihe darstellen lassen, die man aber zweckmäßiger auf andere Weise darstellt. Dies ist der Fall bei periodischen Kurven, die plötzliche Änderungen der Meßgröße oder Ecken und Knicke enthalten. Hier müßte man die Fouriersche Reihe bis zu einer hohen Gliedzahl verfolgen, um Einblick in die Kurvenform zu erhalten, und entsprechend weit wäre die als Lösung der Bewegungsgleichung erhaltene Fouriersche Reihe zu verfolgen. Bestehen die Kurven aus aneinander gefügten Stücken einfacher Form, z. B. Geraden, so wird man also zweckmäßiger die allgemeinen Lösungen für die einzelnen leicht zu behandelnden Teile aufstellen und sie unter Beachtung der Randwerte zusammenflicken.

Es seien zunächst die Vorgänge betrachtet, die vorteilhaft durch Fouriersche Reihen darzustellen sind. Da sich die den einzelnen Gliedern der Reihe entsprechenden Lösungen infolge der Linearität der Differentialgleichung einfach übereinander lagern, so genügt die Untersuchung für einen Vorgang, der nach einer rein harmonischen Schwingung verläuft.

6. Die erzwungene Bewegung des Meßgerätezigers bei rein harmonischer Schwankung der Meßgröße.

Wir nehmen an, die Meßgröße verändere sich mit der Zeit wie eine Sinusfunktion der Kreisfrequenz ω . Auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung, auf der nach Gleichung (3) der Sollwert selbst stehen muß, wäre die entsprechende Sinusfunktion mit der Schwingungsweite ξ_0 und dem Argument ωt anzusetzen. Da wir aber grundsätzlich die Zeit nicht in Sekunden messen, sondern in der von dem verwendeten Meßgerät abhängigen Zeiteinheit $1/\nu_0$, so wird das Argument der Sinusfunktion $\omega\tau : \nu_0$. Zweckmäßig wird nun das Verhältnis der Frequenz ω der harmonischen Meßgrößenschwankung zu der Eigenfrequenz ν_0 des Meßgerätes bei fortgedachter Dämpfung als eine neue Größe, das Frequenzverhältnis, eingeführt und mit λ bezeichnet. Stellt man ferner der Kürze halber jede Differentiation nach der Ver-

änderlichen τ durch einen Strich dar, so kann die Bewegungsgleichung im vorliegenden Falle geschrieben werden:

$$x'' + 2\alpha x' + x = \xi_0 \sin \lambda \tau. \quad (14)$$

Die partikuläre Lösung läßt sich aus der für den allgemeinen Fall gefundenen, d. h. (13) herleiten, bequemer aber erhält man sie durch probeweises Ansetzen einer solchen Sinusfunktion, wie sie auf der rechten Seite steht, nur mit noch zu bestimmender Amplitude und zeitlicher Verschiebung. Fügt man dann die Lösung der homogenen Differentialgleichung hinzu, so erhält man:

$$x = c_1 u + c_2 v + \frac{\xi_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\alpha^2 \lambda^2}} \sin \lambda (\tau - \tau^*), \quad (15)$$

wo
$$\operatorname{tg} \lambda \tau^* = \frac{2\alpha \lambda}{1-\lambda^2} \quad \text{oder} \quad \tau^* = \frac{1}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{2\alpha \lambda}{1-\lambda^2}. \quad (16)$$

Hätte man die Bewegungsgleichung wie folgt angesetzt:

$$x'' + 2\alpha x' + x = \xi_0 \cos \lambda (\tau + \tau_0), \quad (17)$$

so würde sich auf demselben Wege ergeben haben:

$$x = c_1 u + c_2 v + \frac{\xi_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\alpha^2 \lambda^2}} \cos \lambda (\tau + \tau_0 - \tau^*), \quad (18)$$

wo
$$\operatorname{tg} \lambda \tau^* = \frac{2\alpha \lambda}{1-\lambda^2} \quad \text{oder} \quad \tau^* = \frac{1}{\lambda} \operatorname{arctg} \frac{2\alpha \lambda}{1-\lambda^2}. \quad (19)$$

Der erste Lösungsteil von (15) und (18) kann je nach dem Wert von α in eine der besonderen Lösungsformeln (6) bis (8) umgewandelt werden.

Wir sind bei der Aufstellung der Lösung von dem allgemeinen Gebrauch abgewichen, die zeitliche Verschiebung einer Sinusschwingung in Richtung der Zeitlinie durch den Phasenwinkel zu kennzeichnen, wie dies noch bei der Formel (6) geschehen ist. Aus Gründen, die sich durch den weiteren Gang der Rechnung bei der Untersuchung zusammengesetzter Schwingungen ergeben werden, ist es zweckmäßig, die zeitliche Verschiebung durch die „Verzögerungszeit“ τ^* selbst zu kennzeichnen.

Ist man hinsichtlich der Wahl des Anfangspunktes der Zeitrechnung durch die besonderen Umstände bei Beginn der Bewegung gebunden, so ist die Bewegungsgleichung in der Form (17) oder einer ähnlichen zu untersuchen, bei der die Phasenverschiebung des Sollwertes der Meßgröße gegen den gewählten Zeitnullpunkt berücksichtigt ist. Besteht ein solcher Zwang nicht, so wird man zweckmäßig die einfachere Form (14) zugrunde legen.

Es überlagern sich bei der allgemeinen Bewegung des Zeigers eines unter dem Einfluß einer harmonischen Schwingung stehenden Meßgerätes zwei Bewegungsvorgänge: der eine ist die vom Anfangszustand abhängige, mit der Zeit mehr oder weniger rasch verschwindende Eigenbewegung, deren Verlauf für besondere Anfangsbedingungen bereits untersucht wurde; der andere ist die vom Anfangszustand unabhängige erzwungene Schwingung, die schließlich allein übrig bleibt, wenn das Meßgerät sich von der Störung durch den Beginn der Einwirkung der Meßgröße „beruhigt“ hat, was auch bei geringer Dämpfung nach genügend langem Abwarten erreicht ist.

Beschränken wir uns zunächst auf die Betrachtung des die erzwungene Schwingung darstellenden Lösungsteiles, so erkennen wir zunächst ohne weiteres, daß von den Eigenschaften des Meßgerätes nur sein Dämpfungsgrad α und seine Eigenfrequenz bei fortgedachter Dämpfung, diese aber nur bezogen auf die Frequenz der erzwungenen Schwingung, also in Form des Frequenzverhältnisses λ , für den Verlauf der erzwungenen Bewegung maßgebend sind.

a) Die Schwingungsweite.

Die erzwungene Schwingung des Meßgerätzeigers ist durch zwei Größen eindeutig gekennzeichnet: durch ihre Schwingungsweite und ihre Nacheilung hinter der Schwankung des Sollwertes. Praktisch von besonderer Bedeutung ist die Schwingungsweite x_0 , die von α und λ abhängig ist:

$$x_0 = \xi_0 : \sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4 \alpha^2 \lambda^2}. \quad (20)$$

Diese Abhängigkeit kann man anschaulich durch eine Kurvenschar darstellen, indem man als Ordinate die Schwingungsweite x_0 , als Abszisse das Frequenzverhältnis λ und als Parameter den Dämpfungsgrad α wählt¹⁾. Zweckmäßig nimmt man die für $\lambda = 0$ vom Meßgerät angezeigte Schwingungsweite, die für alle Dämpfungsgrade offenbar mit dem Sollwert übereinstimmt, zur Einheit, trägt also das Verhältnis von wirklichem Ausschlag x_0 zum Sollwert ξ_0 als Ordinate auf. Von der Ordinate 1 bei $\lambda = 0$ aus strahlen die zu den einzelnen α gehörigen Kurven fächerartig aus. Die den hohen Werten von α entsprechenden Kurven senken sich sofort nach der Achse des Frequenzverhältnisses zu und nähern sich ihr nach S-förmiger Krümmung asymptotisch. Der Abfall wird mit abnehmendem α geringer bis zur Kurve für $\alpha^2 = 0,5$. Diese bleibt bis auf eine ziemlich weite Strecke nahezu in der gleichen Höhe und fällt erst für einen größeren Wert von λ ab. Für noch kleinere Werte von α steigen die Kurven sofort an und bilden zunächst niedrige und flache Gipfel, hinter denen sie wieder abfallen. Diese Gipfel werden mit kleiner werdendem α immer steiler und höher und rücken weiter von der Ordinatenachse ab, bis schließlich für $\alpha = 0$ der steilste Anstieg mit unendlich hohem Gipfel an der Stelle $\lambda = 1$ erreicht ist. Hinter den Gipfeln laufen die Kurven sämtlich wieder zusammen, so daß das ganze Bündel sich asymptotisch der λ -Achse nähert.

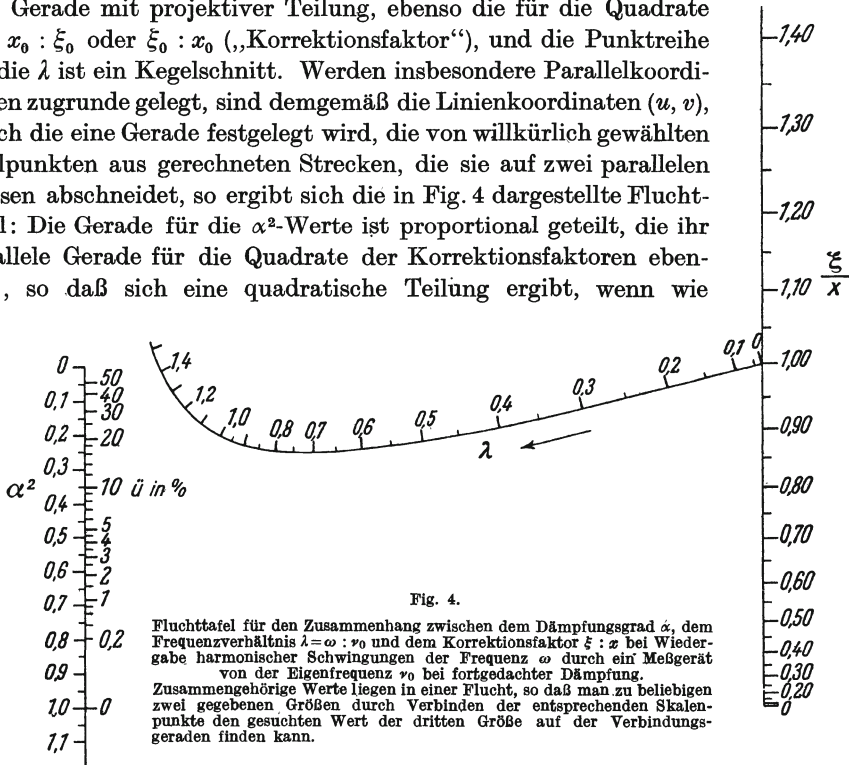
Handelt es sich um die Feststellung von zusammengehörigen Werten λ , α und $x_0 : \xi_0$, so ist diese Kurvenschar, ein so anschauliches Bild sie auch von der Abhängigkeit der drei Größen voneinander gibt, nicht immer zweckmäßig, es sei denn, daß man das Bündel der Kurven sehr dicht wählt, sonst wäre es schwer, die Zwischenkurven zu interpolieren. Erwünscht ist daher eine Umformung der Kurvenschar nach dem geometrischen Prinzip der Dualität oder Reziprozität: An die Stelle der drei Kurvenscharen, der parallelen Geraden $\lambda = \text{const.}$, $x_0 : \xi_0 = \text{const.}$ und der gekrümmten Kurven $\alpha = \text{const.}$, würden dann drei Punktreihen treten; statt mit dem Sichschneiden von drei Kurven, die zu zusammengehörigen Werten der drei Veränderlichen gehören, würde man es mit der Lage von zusammengehörigen Punkten der drei Punktreihen in einer Flucht zu tun haben. Eine solche Umwandlung ist nicht für jeden funktionellen Zusammenhang zwischen drei Veränderlichen möglich. Es war daher zunächst festzustellen, ob sich in dem vorliegenden Falle eine solche graphische Tafel, die als „Fluchttafel“ bezeichnet wird, herstellen läßt. Dies ist der Fall, wenn der gegebene funktionelle Zusammenhang sich in drei, die neuen Veränderlichen

¹⁾ Vgl. die Arbeit von A. Blondel (s. o.)

u und v enthaltende Gleichungen zerlegen läßt, deren Koeffizienten für jede Gleichung nur von einer der Veränderlichen abhängig sind. Nun ist z. B. die folgende Zerlegung möglich:

$$\begin{aligned} u &= -\alpha^2 \\ v &= (\xi_0 : x_0)^2 \\ 4\lambda^2 u + v &= (1 - \lambda^2)^2. \end{aligned} \tag{21}$$

Jede dieser drei linearen Gleichungen stellt, falls u und v als Linienkoordinaten aufgefaßt werden, für einen bestimmten Wert der in ihr vorkommenden Veränderlichen α , $\xi_0 : x_0$ oder λ einen Punkt dar, und jede daher für die Gesamtheit der Werte von α , $\xi_0 : x_0$ oder λ eine Punktreihe; und zwar ist die Punktreihe für die α^2 -Werte eine Gerade mit projektiver Teilung, ebenso die für die Quadrate von $x_0 : \xi_0$ oder $\xi_0 : x_0$ („Korrektionsfaktor“), und die Punktreihe für die λ ist ein Kegelschnitt. Werden insbesondere Parallelkoordinaten zugrunde gelegt, sind demgemäß die Linienkoordinaten (u, v) , durch die eine Gerade festgelegt wird, die von willkürlich gewählten Nullpunkten aus gerechneten Strecken, die sie auf zwei parallelen Achsen abschneidet, so ergibt sich die in Fig. 4 dargestellte Fluchttafel: Die Gerade für die α^2 -Werte ist proportional geteilt, die ihr parallele Gerade für die Quadrate der Korrektionsfaktoren ebenfalls, so daß sich eine quadratische Teilung ergibt, wenn wie



hier geschehen, die Korrektionsfaktoren selbst angeschrieben werden. Die Skala der λ -Werte ist eine Hyperbel. Zusammengehörige Werte von α , $\xi_0 : x_0$ und λ liegen auf einer Geraden; sie lassen sich leicht unter Benutzung eines mit den Händen gespannten Fadens oder auch mit einer auf ein durchsichtiges Blatt u. dgl. gezeichneten Geraden feststellen. Die Einschaltung von Zwischenwerten ist für alle Veränderlichen sehr einfach, da es sich um die Einschaltung von Zwischenpunkten und nicht, wie bei Kurvenscharen, von ganzen Kurven handelt.

Die Fluchttafel Fig. 4 läßt sich auf eine sehr mannigfache Weise in andere Formen bringen, so daß andere Wertbereiche der drei Veränderlichen zugänglich werden; nur muß dabei die Tafel einer projektiven Transformation unterworfen werden, damit ihre wesentliche Eigenschaft, die fluchtrechte Anordnung zusammengehöriger

Werte, bestehen bleibt. Dann bleiben die Skalen für die α^2 - und $(\xi_0 : x_0)^2$ -Werte Gerade und ihre Teilungen werden allgemein projektiv, d. h. die Teilungspunkte und Bezifferungen hängen nach der Beziehung $y = az + b : cz + d$ zusammen, wo z die Ordinaten des Teilungspunktes und y die angeschriebenen Werte bedeutet. Die λ -Skala ist stets ein Kegelschnitt. Die von $\alpha^2 = 0$ an den Kegelschnitt gezogene Tangente berührt diese immer im Punkte $\lambda = 1$ und schneidet die $\xi_0 : x_0$ -Gerade im Punkt 0, ferner trifft die im Schnittpunkt des Kegelschnittes mit der $\xi_0 : x_0$ -Skala angelegte Tangente stets den Punkt $\alpha^2 = 0,5$ usw.

Der funktionelle Zusammenhang zwischen x_0 , λ und α läßt sich auch unter Verwendung von Punkt koordinaten in einer für manche Zwecke besonders anschau-

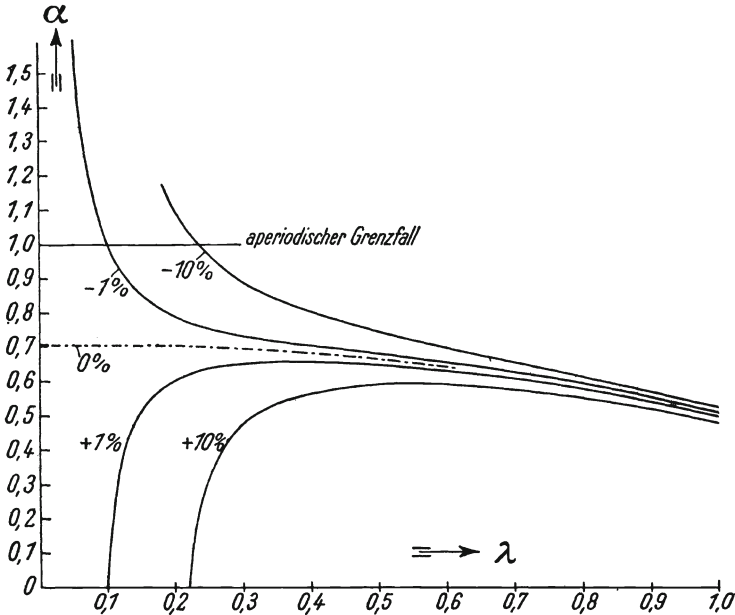


Fig. 5.

Kurven gleichen Fehlers bei der Wiedergabe von Schwingungsweiten (Frequenz ω) durch ein Meßgerät (Eigenfrequenz ν_0 bei fortgedachter Dämpfung).

Abszissen: Frequenzverhältnis $\lambda = \omega : \nu_0$, Ordinaten: Dämpfungsgrad α . Für alle Wertepaare α , λ in dem von der Ordinatenachse und einer Fehlerkurve, z. B. für $\pm 1\%$, eingerahmten Gebiet erreicht der Fehler höchstens den angegebenen Wert. Für alle Wertepaare α , λ auf der strichpunktierten Kurve verschwindet der Fehler.

lichen Form darstellen, indem man als Parameter die Amplituden x_0 wählt oder besser die Fehler, mit denen eine aufgedrückte Schwingung wiedergegeben wird, d. h. $(x_0 - \xi_0) : \xi_0$ und als Ordinaten λ und α . Fig. 5 zeigt eine solche Darstellung. Zur Konstruktion dieses Schaubildes ist der Ausdruck für die Amplituden umzuformen. Man erhält z. B. für Gleichheit von angezeigtem und Sollwert, bzw. für den „Fehler“ 0 den folgenden Zusammenhang zwischen α und λ :

$$4 \alpha^2 = 2 - \lambda^2 \tag{22}$$

und

$$\lambda = 0.$$

Für alle diesem Liniengebilde entsprechenden Wertpaare von α und λ wird also die Amplitude der aufgedrückten harmonischen Schwingung richtig wiedergegeben. Entsprechend lassen sich die beiden Gleichungen für eine Abweichung der Ampli-

tude x_0 von dem Sollwert ξ_0 um $+$ und $-$ 1 vH usw. herleiten. Für alle Wertpaare von α und λ , die innerhalb der links von der α -Achse und rechts von den beiden Kurven für 1 vH Fehler eingeschlossenen Fläche liegen, wird eine aufgedrückte harmonische Schwingung mit einem Fehler bis zu 1 vH wiedergegeben. Diese Fläche hat das Bild eines schmalen Streifens, aus dem ein rüsselartiger Fortsatz hinausragt. Ist die aufgedrückte Schwingung nicht rein harmonisch, sondern enthält sie Wellen verschiedener Frequenz, z. B. außer der Grundwelle noch die höheren Harmonischen, so muß für den ganzen Bereich für $\lambda = 0$ anfangend bis zu einem möglichst hohen Werte von λ der Fehler innerhalb der Genauigkeitsgrenze, z. B. 1 vH liegen. Dabei ist noch $\alpha = \text{const.}$ anzunehmen. Diese Bedingungen werden für einen bestimmten α -Wert am besten erfüllt, und zwar für den, der von der Tangente getroffen wird, welche sich an die untere Begrenzungskurve des „Rüssels“ parallel der λ -Achse legen läßt. Es ist dies die längste Gerade $\alpha = \text{const.}$, die vollständig in das von den beiden Fehlerkurven eingeschlossene Gebiet fällt. Da die rüsselförmigen Gebilde mit dem zugelassenen Fehler immer breiter werden, so werden sich immer andere Werte von α ergeben, oder mit anderen Worten: Die für die Wiedergabe periodisch sich ändernder Meßgrößen günstigste Dämpfung hängt von dem zugelassenen Genauigkeitsgrad ab; ebenso natürlich auch der Bereich der λ , für die die Schwingungen mit dem fraglichen Fehler wiedergegeben werden.

Die entsprechenden Zahlen für die α und λ lassen sich aus dem Kurvenbild entnehmen. Sie können auch berechnet werden: es ergibt sich, daß die Maxima der unteren Fehlerkurven auf der Kurve $\lambda^2 = 1 - 2\alpha^2$ liegen; für sie haben die Korrektionsfaktoren den Wert $\sqrt{1 - \lambda^4}$ oder $2\alpha \sqrt{1 - \alpha^2}$. Dieser Ausdruck ist $= 0,99$ für einen zugelassenen Fehler von 1 vH zu setzen usw. Es ergibt sich so das nachstehende Übersichtstafelchen:

Größter zugelassener Fehler:	Günstigster Dämpfungsgrad $\alpha^2 =$	Der Zeiger überschreitet, frei schwingend, die Ruhelage um	Verwendbar bis zu $\lambda =$
0,5 vH	0,45	5,9 vH	0,49
1 „	0,43	6,5 „	0,58
2 „	0,40	7,7 „	0,70
3 „	0,38	8,5 „	0,77
4 „	0,36	9,5 „	0,82
5 „	0,34	10,3 „	0,87
10 „	0,28	14 „	1,03

Der Bereich der λ , für die ein Meßgerät, das sich im Grenzfall der Aperiodizität befindet, die Schwingungsweiten mit einem bestimmten Fehler wiedergibt, ist viel kleiner als der angegebene Bereich der λ bei der entsprechenden günstigsten Dämpfung: läßt man Fehler von 0,5 vH zu, so darf man nur bis zu $\lambda = 0,026$ gehen. Einen Fehler von 1 vH erzielt man nur unter $\lambda = 0,038$, einen von 2 vH unter $\lambda = 0,054$ usw. Es empfiehlt sich also entgegen der häufig anzutreffenden Vorschrift nicht, das Meßgerät aperiodisch zu dämpfen.

Zur Bestimmung des günstigsten Dämpfungsgrades läßt sich auch die Fluchttafel Fig. 3 verwenden. Man zieht z. B. bei zugelassenem Fehler von 1 vH von dem Werte 0,99 der $\xi_0 : x_0$ -Skala die Tangente an die λ -Skala, d. h. die Hyperbel. Diese schneidet die α -Skala in dem gesuchten Wert. Der größte λ -Wert, für den der Ausschlag mit dem zugelassenen Fehler wiedergegeben wird, ergibt sich durch Verbinden des gefundenen α -Wertes mit dem Punkt 1,01 der $\xi_0 : x_0$ -Skala.

b) Bestimmung von ν_0 und α .

Die hergeleitete Beziehung zwischen der vom Meßgerät angezeigten Schwingungsweite, seinem Dämpfungsgrad und dem Frequenzverhältnis (oder der Eigenfrequenz des Meßgerätes bei fortgedachter Dämpfung) läßt sich zur Bestimmung des Dämpfungsgrades und der Eigenfrequenz verwenden, auch in den Fällen, wo die oben beschriebene Bestimmung dieser Werte aus der Aufzeichnung des Meßgerätes bei fehlender Einwirkung einer äußeren Kraft nicht möglich ist. Dies war der Fall, wenn die Zeigerbewegung aperiodisch oder kriechend ist. Man wird in einem solchen Falle die „Empfindlichkeit“ des Meßgerätes bei mit verschiedenen Frequenzen harmonisch schwankendem Verlauf der Meßgröße bestimmen. Die erhaltene Kurve kann man aufzeichnen und durch Recken oder Zusammendrücken in Richtung der λ -Achse in das hier nicht dargestellte, aber beschriebene Kurvenbündel einpassen. Hierdurch ergäbe sich schätzungsweise α und durch Vergleich der gemessenen ω mit den statt deren bei dem Verzerrten erhaltenen λ auch der Wert von ν_0 . Man kann noch zweckmäßiger die Fluchttafel Fig. 3 benutzen. Man zieht von dem gefundenen Werte $\xi_0 : x_0$ durch einen zunächst nach Gefühl gewählten Wert von λ eine Gerade, welche die α -Skala schneidet. Von dem so gefundenen α -Punkt zieht man nach einem zweiten gefundenen Punkt $\xi_0 : x_0$ eine Gerade. Diese müßte die λ -Skala in einem Wert schneiden, der zu dem ersten, aufs Geratewohl gewählten, in demselben Verhältnis steht wie die entsprechenden ω . Ist dies nicht der Fall, so kann man doch schon nach kurzem Probieren zwei Gerade finden, die von den beiden gefundenen Werten $\xi_0 : x_0$ ausgehen, sich auf der α -Skala schneiden und auf der λ -Skala Skalenwerte treffen, die in dem Verhältnis der tatsächlich gemessenen Frequenzen stehen. Man hat dann ohne weiteres den gesuchten α -Wert und findet aus einem der getroffenen λ -Werte und der statt dessen gemessenen Kreisfrequenz ω den Wert $\nu_0 = \omega : \lambda$. Im allgemeinen genügt bereits die Kenntnis von zwei Empfindlichkeiten, um α und λ getrennt zu bestimmen. Dies ergibt sich auch rechnerisch. Man hat für den einen gefundenen „Korrektionsfaktor“:

$$(\xi_0 : x_0)^2 = c_1^2 = (1 - \lambda_1^2)^2 + 4 \alpha^2 \lambda_1^2,$$

für den anderen entsprechend mit den Zeigern 2. Aus beiden Gleichungen eliminiert man α und erhält so:

$$\lambda_2^2 c_1^2 - \lambda_1^2 c_2^2 = (1 - \lambda_1^2)^2 \lambda_2^2 - (1 - \lambda_2^2)^2 \lambda_1^2.$$

Nun ist aber das Verhältnis von λ_1 zu λ_2 bekannt; es sei: $\lambda_1 = k \lambda_2$. Setzt man dies ein, so erhält man den folgenden Ausdruck für λ_2 :

$$\lambda_2^4 = \frac{c_1^2 - k^2 c_2^2 + k^2 - 1}{k^2 (k^2 - 1)}. \quad (23)$$

Hierdurch ist λ_2 bekannt, andererseits kennt man durch den Versuch ω_2 und daher schließlich auch $\nu_0 = \omega_2 : \lambda_2$. In der Praxis wird man die Empfindlichkeit für mehrere Frequenzen bestimmen, um durch Mittelnehmen Versuchsfehler auszuschalten.

Auf die gleiche Weise lassen sich λ und α auch für weniger stark gedämpfte Meßgeräte bestimmen. Doch ist hier zweckmäßiger festzustellen, für welches λ der Korrektionsfaktor den kleinsten Wert annimmt und wie groß er dann ist. Es genügt dieser einzige Punkt zur eindeutigen Bestimmung.

c) Die Nacheilung der Zeigerbewegung.

Aus der Formel (16) geht hervor, daß der Zeiger hinter der harmonischen Schwingung der Meßgröße um eine Verzögerungszeit τ^* nacheilt, die von dem Dämpfungs-

grad α abhängt. Bei rein harmonischer Schwankung der Meßgröße spielt der Wert von τ^* keine Rolle, da die Nacheilung auf der Schreibfläche nicht zum Ausdruck kommt, falls auf dieser nicht noch eine zweite Kurve von einem Meßgerät anderer Eigenfrequenz aufgezeichnet wird. Der Betrag der Nacheilung wird jedoch von Bedeutung, wenn die Meßgröße nicht gemäß einer einfachen Kreisfunktion schwankt, sondern gemäß einer periodischen Funktion, die sich als Summe von Kreisfunktionen verschiedener Frequenz darstellen läßt. Damit ein solcher Verlauf der Meßgröße verzeichnungsfrei wiedergegeben wird, müssen nicht nur die Schwingungsweiten der einzelnen Teilwellen im richtigen Verhältnis gezeichnet werden, sondern es muß auch die Verzögerungszeit für alle Einzelwellen die gleiche sein; anderenfalls würden sich die einzelnen Teilwellen ineinander schieben, so daß sich das Bild der Gesamtschwankung veränderte. Diese Bedingung ist nach der Formel (16) sicher nicht streng erfüllt; sie ist es aber für kleine Werte von λ wenigstens in erster Annäherung. Davon kann man sich an einer graphischen Tafel mit Kurvenkreuzung (oder „Netztafel“) überzeugen, die sich mit den λ -Werten als Abszissen, den „Phasenwinkeln“ $\lambda\tau^*$ als Ordinaten und den Dämpfungsgraden α als Parametern entwerfen läßt. Statt einer derartigen Tafel läßt sich in ähnlicher Weise, wie bereits oben für die Schwingungsweiten beschrieben, eine Fluchttafel entwerfen. Eine solche ist in Fig. 6 dargestellt. Alle drei Skalen sind hierbei Gerade. Die α -Skala weist eine proportionale Teilung auf, ebenso die Skala für $\operatorname{tg} \lambda\tau^*$. Der Vollständigkeit halber sind neben den entsprechenden Punkten der α -Skala die Beträge angegeben, um die der Meßgerätzeiger freischwingend über die Ruhelage hinausschwingt, und ebenso ist neben der Teilung für $\operatorname{tg} \lambda\tau^*$ die Teilung der Nacheilungswinkel $\lambda\tau^*$ selbst vorgesehen. Die λ -Skala ist nur bis $\lambda = 1,0$ durchgeführt. Sie ließe sich ohne weiteres über diesen Wert hinaus fortsetzen. Sucht man mit Hilfe eines gespannten Fadens zusammengehörige Werte von α , λ und $\lambda\tau^*$ auf, so findet man, daß bei sehr schwachen Dämpfungen der Nacheilungswinkel $\lambda\tau^*$ mit λ zunächst sehr langsam und proportional zunimmt, also τ^* konstant bleibt, bis $\lambda\tau^*$ in der Nähe der Resonanzstelle, d. h. $\lambda = 1,0$, plötzlich um $\pi/2$ springt. Die Gerade, welche den angenommenen kleinen α -Wert mit dem Wert $\lambda = 1,0$ verbindet, schneidet die $\lambda\tau^*$ -Skala im Unendlichen, so daß $\operatorname{tg} \lambda\tau^* = \infty$ oder $\lambda\tau^* = \pi/2$ ist. Läßt man λ über den Wert 1 hinauswachsen, so wechselt die Gerade ihre Richtung, so daß sie die untere Seite der Skala für $\operatorname{tg} \lambda\tau^*$ schneidet. Der Schnittpunkt rückt dann mit wachsendem λ sehr rasch nach oben, bis schließlich die den kleinen α -Wert mit einem großen λ -Wert verbindende Gerade die Skala der Nacheilungswinkel in einem Werte nahe π schneidet. Verbindet man dagegen höhere Werte von α , beispielsweise den Wert 1, entsprechend dem theoretischen Grenzfall der Aperiodizität, oder den Wert $\sqrt{0,5}$ mit den einzelnen λ -Werten, so wird man finden, daß die zugehörigen $\lambda\tau^*$ -Werte bis zu $\lambda = 1$ nahezu proportional zunehmen, d. h. τ^* denselben Wert behält. An einer entsprechend erweiterten Fluchttafel würde man finden, daß für noch höhere Dämpfungsgrade $\lambda\tau^*$ zunächst sehr rasch und proportional, dann weniger rasch mit λ zunimmt. Schließlich ist der Wert von $\lambda\tau^*$ für $\lambda = 1,0$ wie bei den andern Dämpfungen gleich $\pi/2$.

Es zeigt sich also, daß die Zunahme von $\lambda\tau^*$ mit λ in der Nähe von $\lambda = 0$ für alle Dämpfungsgrade α zunächst proportional erfolgt, oder mit anderen Worten: daß τ^* zunächst unverändert $= \tau_0^*$ bleibt. Die einzelnen Dämpfungsgrade unterscheiden sich, abgesehen von der Verschiedenheit der τ^* -Werte bei $\lambda = 0$, nur dadurch voneinander, daß die angenäherte Konstanz von τ^* sich auf einen verschieden weiten

Bereich der λ , von 0 aus gerechnet, erstreckt. Den τ_0^* -Wert selbst erhält man durch Differenzieren der Formel (16) oder durch Entwicklung des Ausdruckes für τ^* in eine nach Potenzen von λ fortschreitende Reihe. Es ergibt sich für die Verzögerungszeit bei $\lambda = 0$ der überraschend einfache Wert:

$$\tau_0^* = 2\alpha. \tag{24}$$

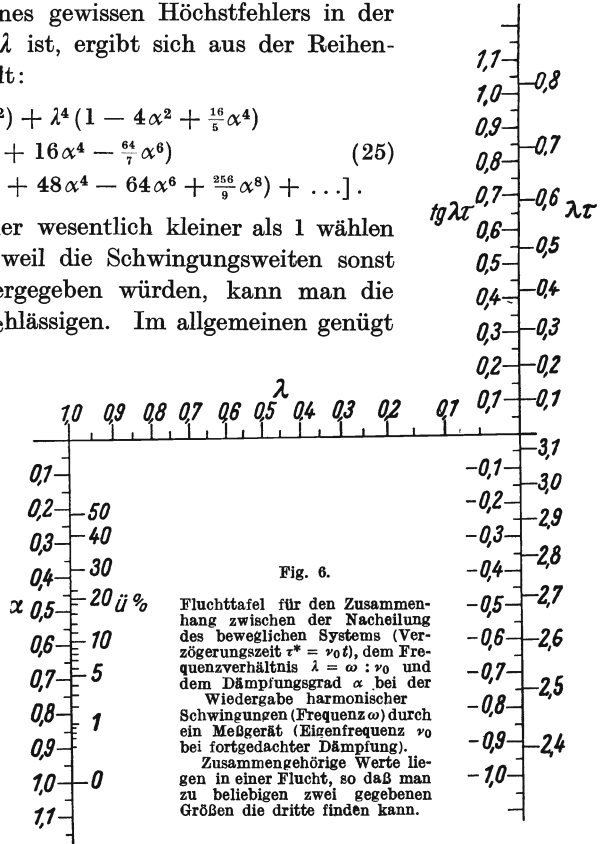
Angenähert um diese Zeit eilt also der Zeiger eines Meßgerätes nach, wenn der Sollwert der Meßgröße periodisch schwankt, aber so langsam, daß der Wert von λ für jede Teilwelle der Schwankung unter einer bestimmten Größe bleibt. Welches nun bei Zulassung eines gewissen Höchstfehlers in der Wiedergabe diese Grenze für λ ist, ergibt sich aus der Reihenentwicklung für τ^* . Man erhält:

$$\begin{aligned} \tau^* = 2\alpha [& 1 + \lambda^2(1 - \frac{4}{3}\alpha^2) + \lambda^4(1 - 4\alpha^2 + \frac{16}{5}\alpha^4) \\ & + \lambda^6(1 - 8\alpha^2 + 16\alpha^4 - \frac{64}{7}\alpha^6) \\ & + \lambda^8(1 - \frac{40}{3}\alpha^2 + 48\alpha^4 - 64\alpha^6 + \frac{256}{9}\alpha^8) + \dots] \end{aligned} \tag{25}$$

Da man den Wert von λ immer wesentlich kleiner als 1 wählen wird, schon aus dem Grunde, weil die Schwingungsweiten sonst mit zu großen Fehlern wiedergegeben würden, kann man die höheren Potenzen von λ vernachlässigen. Im allgemeinen genügt schon die zweite und vierte Potenz. Berechnet man aus dieser Reihenentwicklung für eine Reihe von α -Werten denjenigen größten λ -Wert, bei dem die Abweichung des τ^* -Wertes von dem τ_0^* -Wert gerade 1 vH beträgt, so erhält man die in Fig. 7 dargestellte Abhängigkeit.

Es ergibt sich also, daß für einen Dämpfungsgrad $\alpha = \sqrt{0,75}$ der Bereich der λ , für die eine Konstanz des τ^* -Wertes angenommen werden kann, sich am weitesten erstreckt.

Maßgebend für die treue Wiedergabe der Meßgrößenschwankungen durch das Meßgerät ist nun der von diesem in entsprechenden Zeiten angezeigte Wert; die zeitliche Verschiebung selbst spielt nur insofern eine Rolle, als sie solche Abweichungen der Meßgröße in irgendwelchen Zeitpunkten hervorruft. Es muß daher eine Beziehung zwischen den Unterschieden der Verzögerungszeiten für die Einzelwellen und den dadurch hervorgerufenen Änderungen in der Anzeige des Meßgerätes für die einzelnen Zeitpunkte gefunden werden. Vergleicht man zwei Sinuslinien mit dem Argument $\lambda\tau$, die gegenseitig zur Deckung gebracht werden könnten, aber um die Zeit $\delta\tau$ gegeneinander verschoben sind, so wird die Abweichung der Ordinatenwerte für einen bestimmten Zeitpunkt am größten sein. Man findet, daß



dies der Fall ist z. B. für die Zeit $\tau^* = -\frac{\delta\tau}{2}$; der Fehler hat dann den Wert $\lambda \cdot \delta\tau$.

Der durch eine zeitliche Versetzung einer Teilwelle gegen die anderen entstehende Fehler hängt demnach nicht nur von der Schwingungsweite, sondern auch von der Kreisfrequenz der Teilwelle ab. Er nimmt mit dieser zu. Da im allgemeinen die Oberwellen nur Amplituden haben, die gegen die der Grundwelle klein sind, stört die Zunahme des Fehlers mit λ praktisch nicht sehr.

Kurz zusammengefaßt: der auf die Einstellung des Meßgeräts bezogene Fehler, der durch die zeitliche Versetzung der Teilwellen infolge abweichender Verzögerungszeit entsteht, läßt sich nicht wie bei den Schwingungsweiten allgemein angeben. Er hängt wesentlich von der Art der Zusammensetzung der periodischen Schwankung ab. Die Darstellung von Fig. 7 gibt daher nur ungefähr den Einfluß der Dämpfung an. Der Fehler wird im allgemeinen nicht so groß, daß unsere früheren Erörterungen über die Wiedergabe der Schwingungsweiten hinfällig würden.

Ist im Gegensatz zu dem häufigeren Fall die Amplitude der Grundwelle der periodischen Schwankung klein oder von gleicher Größenordnung wie die der Oberwellen, so legt man zweckmäßig eine ideale

Verzögerungszeit $\tau^* = \frac{\pi}{4}$ zugrunde und stellt die dann positiv und negativ ausfallenden Abweichungen der Verzögerungszeiten für die Einzelwellen von diesem Wert fest. Der Dämpfungsgrad muß dann etwa in dem Bereich 0,5 bis 1 liegen.

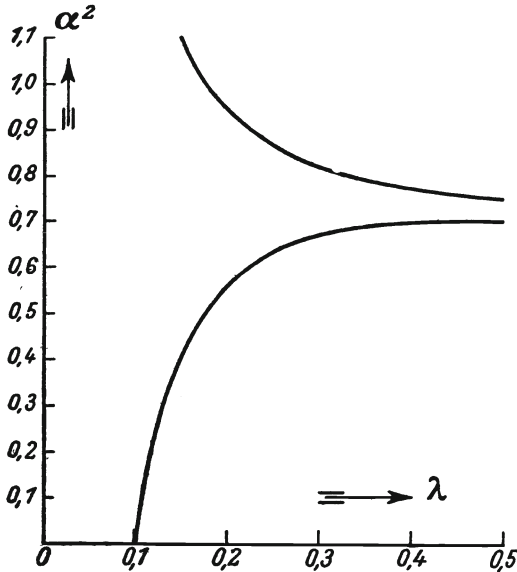


Fig. 7.

Kurve für die Abweichung der Verzögerungszeit τ^* eines Meßsystems (Eigenfrequenz ν_0) von dem doppelten Wert des Dämpfungsgrades α bei Wiedergabe harmonischer Schwingungen (Frequenz ω) um 1 v. H. (Gegenstück zu Fig. 5).

Abzissen: Frequenzverhältnis $\lambda = \omega : \nu_0$. Ordinaten: Quadrate des Dämpfungsgrades α . Für alle Wertepaare α, λ in dem von der Ordinate und der Fehlerkurve eingerahmten Gebiete weicht die Verzögerungszeit um höchstens 1 v. H. von dem für $\lambda = 0$ sich ergebenden Werte 2α ab.

7. Einschwingen des Meßgeräts auf seine erzwungene Bewegung bei rein harmonischer Schwankung der Meßgröße.

Bisher wurde nur das Verhalten eines Meßgerätes untersucht, das sich von den Störungen durch den Anfangszustand bereits beruhigt hat. Will man den Bewegungsvorgang für frühere Zeiten untersuchen, so muß die vollständige Lösung der Gleichung angesetzt werden. Im Endzustand ist eine bestimmte Nacheilung der vom Zeiger beschriebenen Schwingungen hinter den Schwankungen der Meßgröße vorhanden. Zu Beginn der Messung befindet sich der Meßgerätszeiger im allgemeinen in seiner Nullstellung in Ruhe. Den Übergang von diesem Zustand zu der erzwungenen Schwingungsbewegung vermitteln die Eigenschwingungen. Solche treten nur dann nicht auf, wenn sowohl der Ausschlag des Zeigers wie seine Geschwindig-

keit schon Werte haben, die bei Rückverfolgung der erzwungenen Bewegungen bis zur Zeit $\tau = 0$ dann bestehen müßten. Die beiden im ersten Lösungsteil von (18) auftretenden Konstanten sind in der Weise zu bestimmen, wie es für die Lösung der homogenen Differentialgleichung geschah, nur ist jetzt der zweite Lösungsteil mit hinzuzunehmen. Ein Beispiel werde durchgerechnet. Wir nehmen an, daß die Meßgröße bis zur Zeit $\tau = 0$ zunächst unverändert den Wert $2a$ besitzt und dann anschließend nach einer harmonischen Schwingung verläuft, deren Umkehrpunkte auf den Geraden $\xi = 2a$ und $\xi = 0$ liegen. Der Übergang von der Geraden $\xi = 2a$ in die harmonische Schwingung soll ohne Knick erfolgen.

Die Bewegungsgleichung wird:

$$x'' + 2\alpha x' + x = a(1 + \cos \lambda \tau). \quad (26)$$

Als Anfangsbedingungen sind einzusetzen:

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = 2a \\ x'_0 = 0 \end{array} \right\} \text{für die Zeit } \tau = 0.$$

Die Lösung wird für $\alpha < 1$

$$x = c_1 \exp(-\alpha \tau) \sin(\sqrt{1 - \alpha^2} \tau + \gamma) + a \left[1 + \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + 4\alpha^2 \lambda^2}} \cos \lambda(\tau - \tau^*) \right]. \quad (27)$$

Hierin haben c_1 , γ und τ^* leicht zu bestimmende Werte.

Auch bei einem ungedämpften Meßgerät wird der Zeiger in diesem Falle, obwohl die Verzögerungszeit $\tau^* = 0$ sein würde, Eigenschwingungen ausführen, und zwar wird:

$$x = -\frac{a\lambda^2}{1 - \lambda^2} \cos \tau + a + \frac{a}{1 - \lambda^2} \cos \lambda \tau. \quad (28)$$

Für den Grenzfall der aperiodischen Dämpfung $\alpha = 1$ ergibt sich die Lösung:

$$x = \frac{a\lambda^2}{(1 + \lambda^2)^2} [(3 + \lambda^2) + (1 + \lambda^2)\tau] \exp(-\tau) + a + \frac{a}{1 + \lambda^2} \cos \lambda(\tau - \tau^*) \quad (29)$$

$$\text{mit } \tau^* = \frac{1}{\lambda} \operatorname{arctg}[2\lambda:(1 - \lambda^2)].$$

8. Die Bewegung des Meßgerätszeigers bei unstetigem Verlauf der Meßgröße.

Die bisherigen Erörterungen beziehen sich auf einen glatten Verlauf der Störungsfunktion. Bisweilen hat man es aber mit einem scheinbar „unstetigen“ Verlauf dieser Funktion zu tun. Zwar verändern sich die zu messenden Größen streng genommen nie sprunghaft oder ihre Änderungsgeschwindigkeit wechselt nie augenblicklich, und man würde jeden anscheinend unstetigen Vorgang als stetigen nachweisen können, wenn man seinen als Kurve über der Zeit aufgetragenen Verlauf in Richtung der Zeitlinie genügend weit auseinanderzieht. Doch wird auf ein sich verhältnismäßig langsam einstellendes Meßgerät eine genügend rasche Änderung der Meßgröße so wirken, als wenn der Vorgang tatsächlich unstetig wäre. Innerhalb welcher Zeitspanne $\Delta \tau$ eine an sich stetige Änderung der Meßgröße erfolgen muß, um für das betreffende Meßgerät als unstetige Änderung aufgefaßt werden zu können, läßt sich aus dem zuletzt behandelten Beispiel schätzungsweise herleiten. Es ist zunächst die Frage zu beantworten, welchen Wert man dem λ geben muß, damit der Meßgerätszeiger sich erst um 1 vH von seinem ursprünglichen Ausschlag

2 a bewegt hat, wenn der Wert der Meßgröße erstmalig auf Null gefallen ist. Der Wert von λ wird am größten für ein ungedämpftes Meßgerät. Man erhält nun für x zur Zeit $\tau = \frac{\pi}{\lambda}$:

$$x = \frac{a}{\lambda^2 - 1} \left[1 + \lambda^2 \cos \frac{\pi}{\lambda} \right] + a.$$

Dieser Wert soll aber sein = 2 a (1 - 0,01). Es folgt also:

$$\cos \frac{\pi}{\lambda} = 0,98 - 1,98 \lambda^{-2}$$

mit der Wurzel

$$\lambda = \text{rd } 12.$$

Daher ist die Zeit von 0 bis π/λ :

$$\Delta\tau = \text{rd } 0,26 \quad (\text{ungedämpftes Meßgerät}).$$

Fast der gleiche Wert von λ ergibt sich für ein Meßgerät im theoretischen Grenzfall der Aperiodizität, nämlich $\lambda = \text{rd. } 11,5$ und damit

$$\Delta\tau = \text{rd } 0,27 \quad (\text{aperiodisch gedämpftes Meßgerät}).$$

Zu beachten ist, daß die Zeit nicht in Sekunden, sondern in den bekannten Einheiten $1 : \nu_0$ gemessen wird.

bleibt der Wert der Meßgröße von dem Augenblick an, in dem er erstmalig den Wert 0 erreicht hatte, dauernd = 0, wie dies in Fig. 8 dargestellt ist, so wird der Zeiger bis auf einen Fehler von nur 1 vH Eigenschwingungen ausführen, als wenn keine glatte stetige Änderung der Meßgröße nach einer Kosinusfunktion erfolgt wäre, sondern ein plötzlicher Sprung (ideale Unstetigkeit).

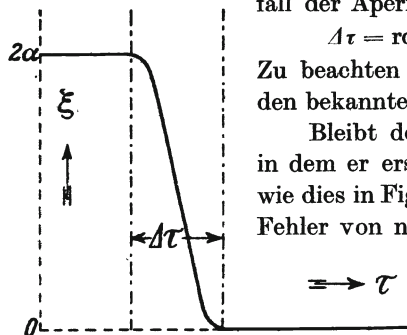


Fig. 8.

Beispiel einer innerhalb einer sehr kurzen Zeit $\Delta\tau$ erfolgenden stetigen Abnahme der Meßgröße von dem Wert 2 a auf Null, gleichwertig mit einem ideal un-stetigen Sprung.

folgen muß, um als un-stetige Änderung gelten zu können. Eine abgerundete Ecke würde, wenn sie ganz in einen Zeitraum $\Delta\tau$ fiele, als scharfer Knick aufzufassen sein.

Anmerkung: Es mag hier noch erwähnt werden, daß sich ungefähr derselbe Wert für λ angibt, wenn man die Frequenz derjenigen harmonischen Schwankungen bestimmt, deren Schwingungsweite auf $1/100$ ihres Sollwertes herabgesetzt wird. Für ungedämpfte Meßgeräte und solche im Grenzfall der Aperiodizität ergibt sich hierbei $\lambda = \text{rd. } 10$. Wellen dieser Frequenz, selbst von der Höhe der Gesamtablenkung, verschwinden dann ganz im Bilde der auf-gezeichneten Kurve. Betragen die Schwingungsweiten nur $p\%$ von dem größten Ausschlag, so kommt man auf Werte von $\lambda = \text{rd. } \sqrt{p}$, für die die Schwankungen im Bilde ebenfalls noch unterschlagen werden.

Ferner werde hier noch kurz erörtert, welche Zeiten mit einem Meßgerät gerade noch festgestellt werden können. Der Zeitpunkt einer plötzlichen Änderung der Meßgröße läßt sich an dem bei gewöhnlichen Aufzeichnungen scheinbar scharfen Knick der gezeichneten Kurve erkennen, Genügend rasche Ablaufgeschwindigkeit vorausgesetzt, läßt sich aber erst eine Abweichung aus der Ruhelage um ein Hundertstel der größten Ablenkung erkennen. Geht man aus von den Gleichungen (6) mit $a = 0$ und (7) und setzt statt der Kreisfunktion und der Exponentialfunktion wegen der zu erwartenden kleinen Zeitwerte die angenäherte Darstellung durch die ersten Glieder ihrer Reihenentwicklung, so erhält man in beiden Fällen

$$1 - \frac{(\delta\tau)^2}{2!} = 0,99$$

$$\delta\tau = 0,14$$

Diese Zeiten sind nicht mehr meßbar, bezw. mit diesem Fehler ist das Einsetzen der Eigen-schwingung feststellbar.

Im folgenden sei das Verhalten eines Meßgerätes gegenüber den einfachsten Fällen solcher Unstetigkeiten in dem Verlauf der Störungsfunktion untersucht. Es können auftreten:

- a) ein Sprung im Werte der Meßgröße selbst,
- b) ein Sprung in der ersten Ableitung der Störungsfunktion, d. h. also eine Ecke oder ein Knick,
- c) Sprünge in den höheren Ableitungen.

Diese Unstetigkeiten können sich auch an einer Stelle vereinigt vorfinden.

Zur Untersuchung dieser Fälle ist die Entwicklung der Störungsfunktion in eine Fouriersche Reihe nicht zweckmäßig. Man wird, zumal wenn die Störungsfunktion durch ein aus Geraden und einfachen Kurven zusammengesetztes Liniengebilde dargestellt wird, am besten die Lösungen für die Einzelteile ansetzen und durch entsprechende Wahl der Grenzbedingungen aneinanderpassen.

- a) Sprung der Ordinate.

Springt die Meßgröße von einem Wert a_1 plötzlich in unmeßbar kurzer Zeit

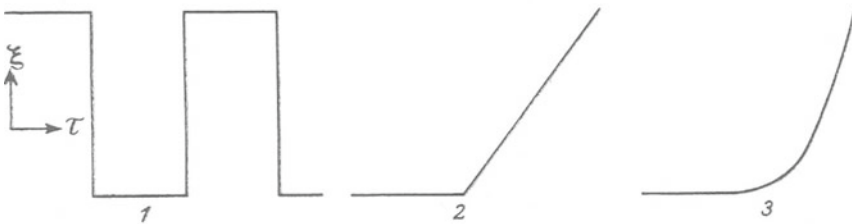


Fig. 9.

Beispiele von idealen Unstetigkeiten.

- 1. Die Meßgröße springt (rechteckige Mäanderkurve).
- 2. Sprung der ersten Ableitung der Kurve Meßgröße über Zeit (Ecke oder Knick).
- 3. Sprung der zweiten Ableitung ohne Knick.

auf den Wert a_2 , so wird die vor sich gehende Bewegung durch die folgende Gleichung beherrscht:

$$x'' + 2\alpha x' + x = a_2. \tag{30}$$

Die allgemeine Lösung ist für $\alpha < 1$:

$$x = c_1 \exp(-\alpha\tau) \sin(\sqrt{1-\alpha^2}\tau + \gamma) + a_2.$$

Entsprechende Lösungen erhält man für $\alpha = 1$ und $\alpha > 1$. Die Integrationskonstanten c_1 und γ ergeben sich aus den Anfangsbedingungen. Befand sich z. B. das Meßgerät zur Zeit $\tau = 0$ in der dem Werte a_1 entsprechenden Stellung in Ruhe, so ergibt sich insbesondere:

$$x = a_2 + \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \exp(-\alpha\tau) \sin(\sqrt{1-\alpha^2}\tau + \gamma). \tag{31}$$

Das Meßgerät wird also eine Bewegung ausführen, die sich als Übereinanderlagerung der dem Sprünge der Meßgröße entsprechenden Stufenkurve und der Eigenschwingung darstellt. Dabei erfolgt die Eigenschwingung so, als wenn der bewegliche Teil des Meßgerätes um die Differenz $a_1 - a_2$ aus der Ruhelage herausbewegt und dann plötzlich sich selbst überlassen würde, und die dem Wert a_2 entsprechende Einstellung seine Nullage wäre. Es treten also nur mit entsprechender Verschiebung der Ordinaten die schon oben behandelten Eigenschwingungen auf.

Erfolgen hintereinander mehrere Sprünge der Meßgröße, so daß ein treppenartiges Gebilde oder eine rechteckige Mäanderkurve wie in Fig. 9 entsteht, so ist auf die passende Aneinanderfügung der Einzellösungen besonders zu achten außer in dem Falle, in dem bei Auftreten der neuen Änderung die von der vorhergehenden herrührenden Eigenschwingungen praktisch abgeklungen sind. Man bestimmt z. B. bei einer Änderung der Meßgröße nach der periodischen Rechteckkurve Fig. 9 die beiden Integrationskonstanten zunächst so, daß man der Meßgröße und ihrer ersten Ableitung an einer Unstetigkeitsstelle zunächst unbestimmt gelassene Werte x_0 und x_0' gibt. Hieraus folgen die für die nächste Unstetigkeitsstelle maßgebenden Werte. Schließlich ergeben sich aus diesen wieder die Werte von x und x_0' für die dritte Unstetigkeit, die eine Wiederholung der ersten ist. Diese Werte müssen aber mit den ersten übereinstimmen. Es ergeben sich daraus zwei Bestimmungsgleichungen, durch die die Werte eindeutig festgelegt sind.

Folgen mehrere Sprünge der Meßgröße aufeinander, so braucht nicht jede Unstetigkeitsstelle zu Eigenschwingungen Anlaß zu geben. Solche treten nur auf, wenn an der Sprungstelle die Einstellung des Meßgerätes nicht dem neuen Wert der Meßgröße entspricht oder der Meßgerätzeiger nicht die Geschwindigkeit besitzt,

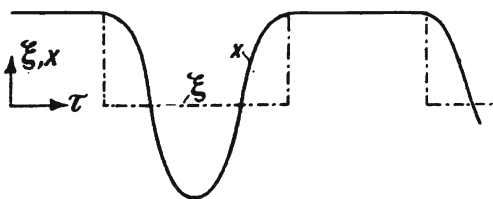


Fig. 10.

Nicht jeder Sprung der Meßgröße gibt Anlaß zu Eigenschwingungen ungedämpfter Meßgeräte.

Strichpunktiert: Sollwert ξ der Meßgröße, ausgezogen: angezeigter Wert x .

mit der sich die Meßgröße ändert. Ist dagegen beides der Fall, so schwenkt der Zeiger ohne jede Störung in die neue Gleichgewichtslage ein, vgl. den in Fig. 10 dargestellten Fall für ein ungedämpftes Meßgerät. Treten die Sprünge bei einem anderen Verlauf der Meßgröße auf, z. B. bei sonst linear zunehmender Meßgröße, so ergeben sich die gleichen Bewegungserscheinungen wie bei nach Mäanderkurven veränderlichen Meßgrößen, wenn nur in der den zeitlichen Verlauf darstellenden Kurve beiderseits der Sprungstelle die erste Ableitung denselben Wert hat.

b) Sprünge der ersten Ableitung (Ecken).

Befindet sich der bewegliche Teil eines Meßgerätes zunächst in der Nullage in Ruhe und wirkt auf ihn von einem bestimmten Zeitpunkt $\tau = 0$ an eine mit der Zeit proportional ansteigende Kraft (vgl. Fig. 9), so werden ebenfalls Eigenschwingungen ausgelöst. Die Bewegungsgleichung lautet in diesem Falle:

$$x'' + 2\alpha x' + x = c\tau \quad (32)$$

und ihre Lösung ist:

$$x = c(\tau - 2\alpha) + \frac{c}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \exp(-\alpha\tau) \sin(\sqrt{1 - \alpha^2}\tau + \gamma) \quad \text{mit } \operatorname{tg} \gamma = \frac{2\alpha\sqrt{1 - \alpha^2}}{2\alpha^2 - 1}. \quad (33)$$

Der Zeiger eines ungedämpften Meßgerätes folgt demnach der linearen Zunahme der Meßgröße im Mittel augenblicklich, führt aber dabei Eigenschwingungen mit der Amplitude c aus. Der Wert von c hängt einmal von der Wahl des Zeitmaßstabes ab. Er ist um so kleiner, je höher die Eigenfrequenz ν_0 des Meßgerätes bei fortgedachter Dämpfung ist. Die Schwingungsweite wird daher klein bei Verwendung von Meßgeräten mit hoher Eigenfrequenz. Während bei der ersten Art der Unstetigkeit, den Sprüngen, im wesentlichen der Dämpfungsgrad die für die Wiedergabe der Meß-

größenänderung maßgebende Rolle spielt, ist es bei der jetzt behandelten Unstetigkeitsform, den Ecken, die Eigenfrequenz des Meßgerätes, und die Dämpfung spielt nur eine nebensächliche Rolle. Denn man könnte bei vollständig ungedämpftem Meßgerät durch Steigern der Eigenfrequenz die durch den Knick hervorgerufene Eigenbewegung unmerklich klein machen. Weiterhin hängt der Wert von c und damit die Schwingungsweite bei gegebenem Zeitmaßstab, wie es sich von selbst versteht, von der Steilheit des Anstieges der Geraden ab.

Ein Meßgerät mit Dämpfung folgt der geradlinigen Meßgrößenänderung im Mittel nicht sofort, sondern eilt ihr um die Zeit $\tau^* = 2\alpha$ nach, die sich bereits für harmonische Schwankungen der Meßgröße, allerdings dann nur annähernd gültig, ergab. Die gedämpften Eigenschwingungen, die der Zeiger außerdem noch beschreibt, erfolgen um die Gerade, welche um die Zeit 2α gegen die den Sollwert darstellende Gerade versetzt ist.

Enthält die Kurve Meßgröße über Zeit nur geradlinige Stücke, so sind als Fehler der Aufzeichnung offenbar nur die Abweichungen der Größe x von den um τ^* verschobenen Geraden anzusprechen. Diese Abweichungen werden mit zunehmender Dämpfung zunächst kleiner, dann aber wieder größer, und zwar ist der theoretische Grenzfall der Aperiodizität ($\alpha = 1$) bereits sehr ungünstig im Gegensatz zu dem Fall sprungartiger Änderung der Meßgröße, wo der „Grenzfall“ wenn auch nicht die beste Dämpfung darstellte, aber noch zulässig war.

Folgt auf den ersten Knick etwa bei dem Ausschlag a_2 ein zweiter derart, daß die Meßgröße von da ab konstant bleibt, so kann sogar ein ungedämpftes Meßgerät unter Umständen frei von Eigenschwingungen sich in die neue Lage einstellen. Dies ist der Fall, wenn der Wert von x an der neuen Knickstelle mit dem Sollwert ξ übereinstimmt und der bewegliche Teil dieselbe Geschwindigkeit hat, wie die Meßgrößenänderung hinter dem Knick, hier also die Geschwindigkeit Null. Ein solcher Fall ist in Fig. 11 dargestellt. Es kann also ausnahmsweise selbst ein ungedämpftes Meßgerät von unstetig verlaufenden Änderungen ein von der Wirklichkeit nur wenig abweichendes Bild aufzeichnen. Sobald jedoch der Anstieg der Geraden von Fig. 11 flacher oder steiler ist als in den Ausnahmefällen, ändert sich das Bild wesentlich; denn die zufällige Übereinstimmung von x und ξ sowie von x' und ξ' am rechten Rand der Unstetigkeitsstelle verschwindet dann. Führt man die beweglichen Teile vor der Zeit $\tau = 0$ bei einer Änderung des Sollwertes nach Fig. 11 bereits Eigenschwingungen um ihre Ruhelage aus, so kann die Gerade richtig gezeichnet werden, oder die Schwingungen um sie herum können klein ausfallen. Das vollkommene Verschwinden tritt ein, falls zur Zeit $\tau = 0$ sowohl $x = 0$ wie $x' = c$ ist.

Entspricht der Verlauf des Sollwertes einer mit fortschreitender Zeit sich senkenden Geraden, die bei Erreichen der Nulllinie in diese einknickt, so treten an dieser Stelle genau dieselben Eigenschwingungen auf, die sich im eben untersuchten Fall der ansteigenden Geraden überlagerten, wenn man voraussetzt, daß die von

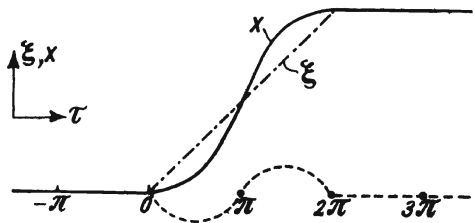


Fig. 11.

Beispiel einer zufällig guten Wiedergabe eines gebrochenen Linienzuges durch ein ungedämpftes Meßgerät niedriger Eigenfrequenz.

Strichpunktiert: Sollwert ξ , ausgezogen: angezeigter Wert x , gestrichelt: die überlagerte Eigenschwingung.

früher liegenden Störungen, insbesondere Ecken, herrührenden Eigenschwingungen abgeklungen sind. Dann eilt der bewegliche Teil des Meßgerätes um die Zeit 2α nach, schreibt aber sonst richtig bis zu dem Augenblick, in dem der Sollwert = Null wird. Hier setzen die Eigenschwingungen ein.

Nimmt man nun an, daß von Null ab die Meßgröße sich wieder linear mit der Zeit ändert, aber nun zunimmt, und zwar in demselben Maße wie sie vorher abnahm, setzt man also einen V-förmigen Verlauf der Störungsfunktion voraus, so gilt von der Zeit $\tau = 0$ ab die Bewegungsgleichung (32), und es sind diejenigen Grenz-

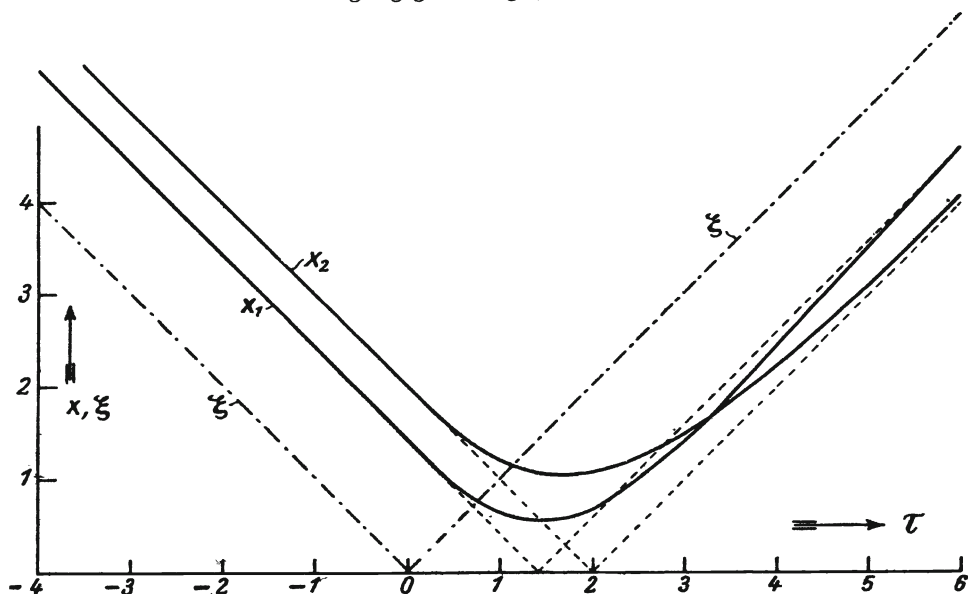


Fig. 12.

Wiedergabe einspringender Winkel in der Kurve Sollwert über Zeit durch verschiedene gedämpfte Meßgeräte gleicher Eigenfrequenz bei fortgedachter Dämpfung.

Strichpunktiert: Sollwert ξ , *ausgezogen:* x_1 = angezeigter Wert bei Dämpfungsgrad $\alpha = \sqrt{0,5}$; x_2 = angezeigter Wert bei Dämpfungsgrad $\alpha = 1$ (Grenzfall). *Gestrichelt:* Um die entsprechenden Verzögerungszeiten 2α verschobene unentstellte Kurve. Der Winkel wird durch das aperiodisch gedämpfte Meßgerät stärker entstellt wiedergegeben.

bedingungen einzusetzen, die sich unter der Annahme abgeklungener Eigenschwingungen für die fallende Gerade ergeben, nämlich:

$$\left. \begin{array}{l} x = 2\alpha c \\ x' = -c \end{array} \right\} \text{für } \tau = 0.$$

In Fig. 12 sind die von einem Meßgerät bei verschiedener Dämpfung geschriebenen Kurven dargestellt. Aus ihnen geht hervor, daß im Falle $\alpha = 1$ die nach unten gerichtete Spitze nur sehr entstellt und abgerundet wiedergegeben wird. Wesentlich besser ist die Wiedergabe bei einer Dämpfung $\alpha = \sqrt{0,5}$. Läßt man negative Fehler von 1 vH für die Ordinate zu, so geht man zweckmäßig mit der Dämpfung sogar noch weiter herunter.

Der Fehler in Richtung der Zeitachse hängt im wesentlichen von der Eigenfrequenz des Meßgerätes ab; jedoch wird er nur bei genügend starkem Auseinanderziehen der Kurve in Richtung der Zeitachse eine merkliche Größe erreichen. Meist kann man aber die Auflösung wegen der praktisch begrenzten Geschwindigkeit der Schreibfläche nicht sehr weit treiben.

c) Sprünge der zweiten Ableitung:

Auch die Stellen der Störungsfunktion, an denen ihre zweite Ableitung unstetig ist, ohne daß ein Sprung der Ordinate selbst oder überhaupt ein Knick vorhanden ist, geben zu Eigenschwingungen Anlaß. Wirkt auf ein in der Gleichgewichtslage in Ruhe befindliches System von der Zeit $\tau = 0$ ab eine nach einer Parabel ansteigende Änderung der Meßgröße (vgl. Fig. 9), so lautet die Bewegungsgleichung:

$$x'' + 2\alpha x' + x = c\tau^2 \quad (34)$$

und ihre partikuläre Lösung wird

$$x_p = c[\tau^2 - 4\alpha\tau + 8\alpha^2 - 2] \quad (35)$$

oder

$$x_p = c(\tau - \tau^*)^2 + 2c(2\alpha^2 - 1), \quad (36)$$

wo

$$\tau^* = 2\alpha = \text{„Verzögerungszeit“}.$$

Parabelförmig verlaufende Kurven werden (nach Abklingen der Eigenschwingungen) somit im allgemeinen nicht einfach mit zeitlicher Verschiebung wiedergegeben wie z. B. die Sinuslinie oder die Gerade, sondern jede Ordinate erscheint noch um denselben Betrag erniedrigt bei $\alpha^2 < 0,5$, erhöht bei $\alpha^2 > 0,5$, und nur bei $\alpha^2 = 0,5$ tritt bloße zeitliche Verschiebung ein.

Der zu dieser partikulären Lösung hinzutretende Teil der vollständigen Lösung ist z. B. für ein ungedämpftes Meßgerät:

$$x_e = 2c \cos \tau \quad (37)$$

Die gleichen Schwingungen setzen für $\tau = 0$ ein, wenn vor dieser Zeit die Meßgröße nach einer Parabel abnimmt, welche die Zeitachse im Punkte $\tau = 0$ tangiert. Setzt man voraus, daß die von der Anfangsstörung herrührenden Eigenschwingungen auf irgendeine Weise vermieden sind, so folgt der Zeiger nicht der Parabel, sondern er eilt infolge Erniedrigung aller Ordinaten scheinbar etwas nach im Gegensatz zu dem Fall der Abnahme der Meßgröße nach einer Geraden.

Ganz allgemein kann jede Unstetigkeit in einer der höheren Ableitungen Eigenschwingungen hervorrufen. Ihre Schwingungsweiten werden allerdings mit höherer Ordnung immer kleiner, so daß sie praktisch nicht in Betracht kommen. Aber es ist jedenfalls zunächst überraschend, daß sogar eine knickfreie Flickstelle von zwei Kurven, an der sich diese in höherer Ordnung berühren, also sich sehr eng aneinander schmiegen, überhaupt zu Eigenschwingungen Anlaß geben kann.

Fassen wir die Erörterungen über Unstetigkeiten zusammen, so können wir kurz sagen: Unstetigkeiten an sich, z. B. Sprünge, Ecken oder Knicke und augenblickliche Änderungen einer der Ableitungen der den Verlauf der Meßgröße darstellenden Kurve gibt es nicht. Wohl aber können Änderungen so rasch erfolgen, daß man sie mit einem gegebenen Meßgerät nicht verfolgen kann. Man muß sich oft mit Meßgeräten von wesentlich geringerer Eigenfrequenz begnügen, als zur richtigen Aufzeichnung der raschen Änderungen an sich erforderlich wäre. Auf solche aber wirken rasche Änderungen wie ideale Unstetigkeiten. Sie werden daher ebensowenig verfolgt werden können wie harmonische Schwingungen von zu hoher Frequenz, d. h. zu großem λ . „Unstetigkeiten“ jeder Art werden daher stets fehlerhaft wiedergegeben. Es hängt jedoch von dem Charakter der Unstetigkeit ab, wie groß der Fehler wird, und es läßt sich nicht ein bestimmter Dämpfungsgrad als besonders günstig für die Wiedergabe aller erdenklichen Unstetigkeiten angeben. Beispielsweise ist eine Dämpfung in der Nähe des theoretischen Grenzfalles der Aperiodizität,

genauer die praktisch aperiodische Dämpfung, nur für den besonderen Fall der sprungweisen Änderung der Meßgröße selbst angemessen. Ecken oder Spitzen in dem zeitlichen Verlauf der Meßgröße, insbesondere V-förmige, gibt ein derartig gedämpftes Meßgerät viel schlechter wieder, als ein wesentlich schwächer gedämpftes. Im allgemeinen wird man zweckmäßig einen Dämpfungsgrad in der Nähe von $\sqrt{0,5}$ wählen und bei der Untersuchung un stetiger Vorgänge eine Rekonstruktion des wahren Vorganges an Hand der gezeichneten Kurven versuchen.

9. Praktische Anwendung der Bewegungsgesetze für Meßgeräte.

Bei der praktischen Anwendung der abgeleiteten Bewegungsgesetze für Meßgeräte ist zu beachten, ob die Voraussetzungen, die der theoretischen Behandlung zugrunde gelegt wurden, mit genügender Annäherung erfüllt sind. Daß dies der Fall ist, kann man für die überwiegende Zahl der Meßgeräte annehmen. Man wird beispielsweise bei Untersuchung von elektrischen Meßgeräten der bekannten Bauarten von einer besonderen Prüfung der Frage absehen können. Nur wenn es sich um neuartige Meßgeräte handelt, für die in dieser Hinsicht keine Erfahrungen vorliegen, wird man sich mit der Frage genauer befassen.

Die Eigenart unserer theoretischen Erörterungen liegt darin, daß wir von den einzelnen Größen: dem Trägheitsmoment, der Dämpfungskonstanten, der Richtkraft und dem Proportionalitätsfaktor der wirkenden Kraft vollkommen abgesehen haben. Wir brauchen die meist recht umständliche Umrechnung dieser Größen, z. B. auf die Bewegung der Zeigerspitze usw., nicht vorzunehmen. Es sind nur zwei Größen: die Eigenfrequenz bei fortgedachter Dämpfung und der Dämpfungsgrad als wesentlich erkannt und der Theorie zugrunde gelegt. Dabei spielt die Eigenfrequenz nur die Rolle eines Maßstabes für die Zeit, und der Dämpfungsgrad bleibt von allen Daten des Meßgerätes allein als charakteristisch übrig. So konnten mit einem Schlage die Bewegungsvorgänge für alle Meßgeräte, ganz gleich ob rasch oder langsam schwingend, beschrieben werden.

Ferner konnten wir die Störungsfunktion ohne Kenntnis des Zusammenhanges der wirkenden Kraft mit den Daten des Meßgerätes hinschreiben, indem einfach der Sollwert eingesetzt wurde, der sich durch Eichung des Meßgerätes mittels Dauerablenkungen ergibt, z. B. bei elektrischen Messungen durch die Gleichstromeichung.

Die beiden als maßgebend gefundenen Größen ν_0 und α lassen sich aus der Aufzeichnung von besonders einfachen Änderungen der Meßgröße bestimmen. Die Kenntnis dieser Werte läßt sich dann rückwärts zur Verfolgung der verwickelteren Bewegungserscheinungen verwenden.

Das bequemste Verfahren zur Bestimmung von ν_0 und α bei Meßgeräten mit nicht zu starker Dämpfung ist die Erzeugung von Eigenschwingungen. Man schaltet z. B. bei elektrischen Meßgeräten den Strom aus. Sind Schwingungen vorhanden, so zählt man sie entweder ab oder mißt, um welchen Bruchteil der Anfangsablenkung der Zeiger über seine Nullage hinausschwingt. In der oben beschriebenen Weise ergibt sich an Hand einer Funktionsskala von Fig. 1 der Dämpfungsgrad α und durch Vergleich der für dies α der entsprechenden Funktionsskala entnommenen Zeiten τ mit den in Sekunden gemessenen die Eigenfrequenz ν_0 .

Führt das Meßsystem bei der Eigenbewegung keine merklichen Schwingungen aus, so ist am zweckmäßigsten eine Eichung mit zeitlich unveränderlichen Meßgrößen und mit harmonisch schwankenden Meßgrößen verschiedener Frequenz.

Wie bereits oben beschrieben, läßt sich dann an Hand der Kurventafeln Fig. 4 oder durch Rechnung sowohl ν_0 wie α finden.

Es seien einige Versuchsergebnisse angeführt. Für ein Saitengalvanometer nach Einthoven, das bei einer Einstellung auf eine Empfindlichkeit $1 \text{ cm} = 1 \text{ mV}$ aperiodisch gedämpft war, aber anscheinend stärker, als dem Grenzfall der Aperiodizität entsprach, wurden die Empfindlichkeiten bei Gleichstrom und Wechselstrom verschiedener Frequenz möglichst sorgfältig gemessen. Es ergab sich:

Saitengalvanometer nach Einthoven.

Frequenz des Wechselstromes (Zahl der Perioden in der Sekunde)	Empfindlichkeit bezogen auf die Gleichstromempfindlichkeit
0 (Gleichstrom)	1,00
10	0,97
20	0,91
30	0,79
40	0,68
50	0,57
60	0,46

Zur Berechnung von ν_0 und α benötigt man nur zwei von den gemessenen sechs Werten. Bestimmt man nach Formel-(23) für je zwei Frequenzen, die mindestens um 30 per/sec auseinanderliegen, ein λ und belegt die Einzelwerte bei der Mittelwertbildung mit einem Gewicht proportional dem Verhältnis k der Frequenzen, so erhält man:

$$\nu_0 : 2\pi = 54.$$

Aus diesem Wert folgt dann:

$$\alpha^2 = 0,87.$$

Die Saite machte den Eindruck einer übermäßig gedämpften, während sie tatsächlich schwächer als „theoretisch gerade aperiodisch“ gedämpft war; sie müßte um 0,5 vH über ihre Ruhelage hinausschnellen, dieser Wert lag aber bereits unter der Meßgenauigkeit. Die gefundene, für das Verhalten des Saitengalvanometers gegenüber raschen Stromschwankungen maßgebende Größe ν_0 , die hier immer als Eigenfrequenz bei fortgedachter Dämpfung bezeichnet wurde, ist nicht zu verwechseln mit den üblicherweise für Saitengalvanometer angegebenen Eigenfrequenzen. Diese beziehen sich auf eine ganz andere Saitenspannung. Man pflegt nämlich die Saite so straff zu spannen, daß sie Schwingungen ausführt, und zählt ab, wie oft sie in einer bestimmten Zeit hin und her schwingt. Die dämpfenden Ursachen, also vorwiegend die Reibung der Luft an der Saitenoberfläche, bleiben hierbei unverändert und damit auch der Dämpfungsexponent ε , dagegen wird der Dämpfungsgrad α und gleichzeitig die Eigenfrequenz ν_0 bei fortgedachter Dämpfung geändert. In dem Zustand, in dem das Saitengalvanometer in Wirklichkeit aber gebraucht wird, ist die Saite viel lockerer gespannt und hat daher einen viel kleineren ν_0 -Wert. Zwischen diesem und den gewöhnlich angegebenen Eigenfrequenzen besteht keine allgemein angebbare Beziehung.

Um zu prüfen, ob das angewandte Verfahren überhaupt einwandfrei ist, wurde auch die Eigenfrequenz bei fortgedachter Dämpfung für ein Spulengalvanometer gemessen, dessen Eigenfrequenz durch Fortlassen der (elektromagnetischen) Dämpfung bestimmt werden konnte. Die Dämpfung des Galvanometers wurde möglichst

genau auf den aperiodischen Grenzfall eingestellt. Es ergaben sich die folgenden Empfindlichkeiten für die einzelnen Wechselstromfrequenzen:

Frequenz des Wechselstromes (Zahl der Perioden in der Sekunde)	Empfindlichkeit bezogen auf die Gleichstromempfindlichkeit
0 (Gleichstrom)	1,00
5	1,00
10	0,97
20	0,93
50	0,63

Die Berechnung ergibt $\nu_0 : 2\pi = 47$ und $\alpha^2 = 0,70$, während andererseits für die ungedämpft schwingende Spule festgestellt wurde: $\nu_0 : 2\pi = 48$. Besonders beachtenswert ist wieder der Wert für α , der sehr stark von dem beabsichtigten Wert $\alpha = 1$ abweicht. Ihm entspräche eine derartige Dämpfung, daß noch ein Überschwingen um 0,9 vH über die Nullage auftritt. Bei genauerer Nachmessung wurde in der Tat in der Rechteckkurve ein gerade noch feststellbares Zäckchen gefunden. Diese Erfahrung wurde noch öfter gemacht. Sie beweist; daß man nach dem Aussehen der geschriebenen „Mäanderkurve“ den aperiodischen Grenzfall doch nicht sehr genau einstellen kann, daß man vielmehr fast stets eine geringere Dämpfung herstellt. Ferner zeigt sich, daß das Verfahren der Bestimmung von α durch Messung der Empfindlichkeiten für Wechselstrom verschiedener Frequenz viel genauer ist, als durch Beobachtung der Ein- und Ausschaltkurve.

Es besteht noch eine andere Möglichkeit, die maßgebenden Größen ν_0 und α für ein Meßgerät zu bestimmen, nämlich durch unmittelbaren Vergleich mit einem anderen, indem man beide denselben Vorgang aufzeichnen läßt. Von dieser wird man z. B. Gebrauch machen, wenn bisher ein bestimmtes Meßgerät zur Wiedergabe gewisser veränderlicher Größen benutzt wurde und das mit diesem erhaltene umfangreiche Kurvenmaterial dadurch weiter verwendbar bleiben soll, daß das neue Meßgerät dieselben Vorgänge mit derselben Treue oder richtiger mit denselben Fehlern wiedergibt. Es ist die Zweckmäßigkeit des unmittelbaren Vergleiches aber stets genau zu prüfen, besonders wenn es sich um den Vergleich zweier elektrischer Meßgeräte handelt. Bei diesen wird durch die Schwingungsbewegung des stromführenden Leiters in einem Magnetfeld eine wechselnde elektromotorische Kraft erzeugt. Diese wirkt der aufgedrückten entgegen und ist proportional der Geschwindigkeit, mit der Kraftlinien geschnitten werden, d. h. proportional der Geschwindigkeit des beweglichen Teiles. Befindet sich nur ein Meßgerät in einem Stromkreis, so wirkt diese rückwirkende EMK lediglich dämpfend. Sie steckt also in dem ε oder α der Bewegungsgleichung. Man braucht ihre Größe dann nicht weiter zu kennen, wenn man ν_0 und α unter den Verhältnissen bestimmt, unter denen das Meßgerät arbeiten soll. Befindet sich aber noch ein zweites Meßgerät in demselben Stromkreis — sei es, daß es dem ersten parallel oder mit ihm in Reihe geschaltet ist —, so wird der durch die rückwirkende EMK gegebene Strom auch auf das zweite Meßgerät wirken. Man hat zwei mechanische Systeme vor sich, die elektrisch gekoppelt sind, und zwar handelt es sich nach der Bezeichnung von Wien um eine Reibungskopplung. Daß die Kopplung trotzdem genügend fest sein kann, um eine merkbare gegenseitige Beeinflussung der Meßgeräte hervorzurufen, wurde durch einen Versuch mit zwei

parallelgeschalteten Spulengalvanometern gezeigt. Das eine war aperiodisch gedämpft und hatte eine Eigenfrequenz $\nu_0 = 314$; das zweite führte noch einige Schwingungen aus und besaß eine Eigenfrequenz von 157. Wurde das zweite Meßgerät durch einen gleichgroßen reinen Widerstand ersetzt, so wurde die Kurve Fig. 13 geschrieben. Schaltete man das Meßgerät ein, so ergab sich die Kurve Fig. 14. Das schneller schwingende Galvanometer zeichnete scheinbar ein Bild, als wenn es nur die halbe Eigenfrequenz besäße und schlecht gedämpft wäre. Eine Beeinflussung war sogar noch merklich bei gleicher Dämpfung beider Meßgeräte. Nur wenn die Windungsflächen und damit die erzeugte rückwirkende EMK klein sind, ist die Kopplung so schwach, daß eine gegenseitige Beeinflussung nicht mehr fest-

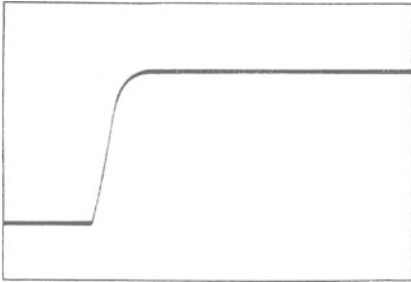


Fig. 13.

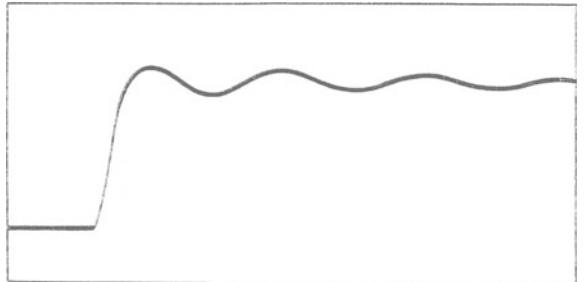


Fig. 14.

Gegenseitige Beeinflussung zweier zusammengeschalteter elektrischer Meßgeräte bei Wiedergabe einer rechteckigen Mäanderkurve.

Fig. 13. An Stelle des zweiten Meßgerätes ist ein entsprechender Widerstand geschaltet.

Fig. 14. Das zweite Meßgerät ist eingeschaltet.

stellbar ist. Dieser Fall tritt z. B. ein bei dem Vergleich eines eine Spule von sehr wenigen Windungen enthaltenden Galvanometers mit einem Saitengalvanometer (vgl. Schrupf - Zöllich, Arch. f. d. ges. Physiol. 170, 553. 1918).

Die Werte für die Eigenfrequenz bei fortgedachter Dämpfung und den Dämpfungsgrad bewegen sich bei den gebräuchlichen Meßgeräten zwischen sehr weiten Grenzen. Die Zusammenstellung einiger Zahlen wird interessieren: Das am raschesten sich einstellende Meßgerät mit Masseteilen ist der Oszillograph, der mit einer Eigenfrequenz von 12 000 Perioden in der Sekunde gebaut werden kann. Für ihn ist also $\nu_0 = \text{rd. } 75\,000$. Eine Stromänderung, die innerhalb einer Zeit $\Delta t = 0,26$, also in Sekunden gerechnet: $\Delta t = \text{rd. } 3,5 \cdot 10^{-6}$ sek erfolgt, wirkt wie eine ideale Unstetigkeit. Die Verzögerungszeit beträgt für $\alpha = \sqrt{0,5}$ etwa $1,9 \cdot 10^{-5}$ sek; im Grenzfall der Aperiodizität $2,6 \cdot 10^{-5}$ sek. Der Oszillograph als Zeitmesser würde Zeiten von $1,9 \cdot 10^{-6}$ sek nicht mehr feststellen lassen, vgl. Anm. S. 50.

Ein zur Aufzeichnung der Herzströme dienendes Spulengalvanometer hat eine Eigenschwingungszahl von etwa 50 Perioden in der Sekunde, also eine Kreisfrequenz von etwa 315. Eine innerhalb der Zeit $8,3 \cdot 10^{-4}$ sek verlaufende Stromschwankung wirkt als Unstetigkeit, die Verzögerungszeit für $\alpha = \sqrt{0,5}$ beträgt $4,5 \cdot 10^{-3}$ sek, im Grenzfall $6,4 \cdot 10^{-3}$ sek.

Ein hochempfindliches Spiegelgalvanometer zur Aufzeichnung von wechselnden Thermostromen hat eine Schwingungsdauer von etwa 0,35 sek; die Kreisfrequenz im ungedämpften Zustande ist etwa 18. Innerhalb der Zeit $1,4 \cdot 10^{-2}$ sek verlaufende Stromschwankungen wirken sicher als Unstetigkeit, die Verzögerungszeit für $\alpha = \sqrt{0,5}$ beträgt $7,8 \cdot 10^{-2}$ sek, im Grenzfall $11 \cdot 10^{-2}$ sek.

10. Erste Fragestellung: Mit welcher Genauigkeit zeichnet ein gegebenes Meßgerät vorgegebene Schwankungen der Meßgröße auf?

Für die Praxis sind bei der Beobachtung und Aufzeichnung sich rasch verändernder Meßgrößen zwei Fragen von Bedeutung: Was kann ein gegebenes Meßgerät leisten, und wie läßt sich aus seinen Angaben der wahre Verlauf der Schwankungen herleiten?

Die erste Aufgabe, die Beurteilung eines Meßgerätes und die Feststellung der Bedingungen, unter denen es Änderungen der Meßgröße möglichst getreu wiedergibt, ist im wesentlichen durch die obige Erörterung der Bewegungsvorgänge in Meßgeräten unmittelbar beantwortet.

Zur Beurteilung eines Meßgerätes bestimmt man zunächst seine Eigenfrequenz bei fortgedachter Dämpfung und seinen Dämpfungsgrad nach einem der im letzten Abschnitt beschriebenen Verfahren. Verändert sich die Meßgröße derartig mit der Zeit, daß sich ein stetiger, glatt verlaufender Linienzug ergibt, so wird man aus der Fig. 4 festzustellen suchen, wie hoch die Frequenz einer harmonischen Schwingung sein darf, wenn für deren Schwingungsweite ein Fehler von beispielsweise 1 vH, bezogen auf den größten Ausschlag, zugelassen wird. Sind in der wiederzugebenden Kurve keine höheren Harmonischen vorhanden, als diese obere Grenze, so wird das Meßgerät die Schwankungen richtig wiedergeben, falls es nicht zu schwach oder zu stark gedämpft ist.

Kann man den Dämpfungszustand des Meßsystems, wie das in der Regel der Fall ist, ändern, so läßt sich aus der gleichen Fig. 4 in der oben beschriebenen Weise der günstigste Dämpfungsgrad ermitteln. Es sei hier verwiesen auf das Übersichtstafelchen Seite 44.

Ein Oszillograph mit 12 000 Eigenschwingungen i. d. S. ist z. B. bei einer Meßgenauigkeit von 1 vH im theoretischen Grenzfall der Aperiodizität brauchbar zur Aufnahme von harmonischen Schwingungen bis zur Frequenz 460 i. d. S. Der gleiche Oszillograph läßt sich bei günstigster Dämpfung, nämlich beim Dämpfungsgrad $\alpha = 0,655$ zur Aufnahme von Schwingungen viel höherer Frequenz verwenden, nämlich rd. 7000 in der Sekunde. Die Dämpfung ist dann so einzustellen, daß bei Ein- und Ausschaltung eines Gleichstromes der Lichtzeiger um 6,5 vH über seine jeweilige Gleichgewichtslage hinausschwingt. Durch diese Grenzangabe soll aber nicht gesagt sein, daß in den wiederzugebenden Stromschwankungen keine höheren Harmonischen vorkommen dürfen, vielmehr kann man in der Regel für diese einen größeren Fehler zulassen, da ihre Schwingungsweiten an sich, auf den größten Ausschlag selbst bezogen, sehr klein sind. Man wird beispielsweise eine Ungenauigkeit von 10 vH in der Wiedergabe höherer Harmonischer zulassen, wenn deren Amplitude selbst nur 10 vH des größten Ausschlages beträgt, usw.

Handelt es sich andererseits um die Wiedergabe un stetiger Vorgänge, so ist die Eigenfrequenz des Meßgerätes bei fortgedachter Dämpfung so hoch wie möglich zu wählen und seine Dämpfung der Art der Unstetigkeit anzupassen. Sind Sprünge der Meßgröße wiederzugeben, so wird man zweckmäßig eine Dämpfung in der Nähe des theoretischen Grenzfall es der Aperiodizität wählen. Sind dagegen Ecken oder Knicke wiederzugeben, so wird man dem Dämpfungsgrad zweckmäßiger den Wert $\alpha = \sqrt{0,5}$ geben, also denselben, in dessen Nähe sich die Dämpfung eines Meßgerätes

halten muß, das zur Wiedergabe harmonischer Schwingungen oder aus diesen zusammengesetzter Schwankungen gedacht ist.

11. Zweite Fragestellung: Herstellung der wahren Meßgrößenschwankungen aus den aufgezeichneten.

Eine zweite für die Praxis wichtige Fragestellung ist die: Wie leitet man aus der vom Meßgerät geschriebenen Kurve für jeden Augenblick die wahren Werte der Meßgröße ab, falls man gezwungen ist, Meßgeräte zu verwenden, die zur Aufzeichnung der fraglichen Vorgänge an sich nicht zweckmäßig sind?

Zunächst sind ν_0 und α festzustellen.

Da mit ξ der Sollwert, mit x der statt dessen vom Meßgerät verzeichnete Wert bezeichnet wurde, so ergibt sich aus der Bewegungsgleichung (3) die folgende Korrektur, die an jedem Punkte der geschriebenen Kurve anzubringen ist:

$$\xi - x = x'' + 2\alpha x' \quad (38)$$

In ihr sind außer den Werten ν_0 (als Zeitmaßstab) und α die erste und zweite Ableitung der geschriebenen Kurve enthalten, Diese lassen sich graphisch leicht bestimmen. z. B. unter Zuhilfenahme eines Spiegellineals, Tangentenziehers oder Spiegelderivators oder durch Konstruktion mittels „Richtbüschel“ usw.¹⁾ Selbstverständlich führt man dies nur für diejenigen Stellen der geschriebenen Kurve durch, für die der Verdacht größerer Verzeichnung besteht. Verlaufen die geschriebenen Kurven periodisch mit wenig Oberwellen, so ist in der Regel²⁾ die Aufzeichnung fehlerfrei. Kommen deutlich erkennbare Oberwellen sehr hoher Frequenz vor, so zieht man zur Bestimmung des Korrektionsfaktors für die Schwingweite die Tafel Fig. 4 heran. Nur dann, wenn innerhalb der für jedes Meßgerät feststellbaren Verzögerungszeit τ^* rasche Änderungen der Meßgröße oder Knicke auftreten, ist die Durchführung der punktweisen Korrektur unbedingt erforderlich.

Das bei einer solchen Berichtigung der Schrift eines Meßgerätes mit ungenügend hoher Eigenfrequenz oder ungeeigneter Dämpfung einzuschlagende Verfahren wird durch Fig. 16 näher erläutert. Die Kurve x stellt die Stromkurve eines hochgesättigten Transformators dar³⁾, aufgenommen mit einem Spiegelgalvanometer, das bereits bei den oben beschriebenen Messungen zur Prüfung der Theorie verwendet wurde. Die Kurven $2\alpha x'$ und x'' sind die hieraus durch graphische Differentiation gefundene erste und zweite Ableitung. Schließlich ist die stark gezeichnete Kurve ξ der nach der Formel (38) rekonstruierte Verlauf der tatsächlichen Stromschwankungen. Zum Vergleich ist noch der mit einer Oszillographenmeßschleife gezeichnete Stromverlauf gestrichelt dargestellt.

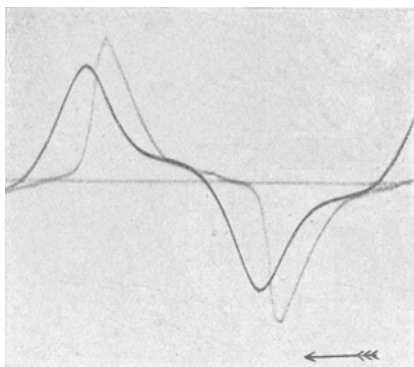


Fig. 15.

Leerlaufstrom einer Drossel bei hoher Eisensättigung, aufgenommen mit einem Oszillographen (schwache Kurve) und mit einem Spulengalvanometer (starke Kurve). Frequenz des Wechselstromes: 20 i. d. S.; des Oszillographen: 5000 i. d. S., des Spulengalvanometers 57 i. d. S.

¹⁾ Vgl. z. B. die in R. Mehmcke, Leitfaden zum graphischen Rechnen, Leipzig 1917, S. 108—113 beschriebenen Verfahren.

²⁾ Glatter Verlauf beweist nicht Abwesenheit hochfrequenter Oberwellen, vgl. Anm. S. 50.

³⁾ Das Oszillogramm Fig. 15 wurde mir von Herrn Gaarz freundlichst zur Verfügung gestellt.

Man kann für das angeführte Beispiel das wahre Bild der Stromschwankungen aus den entstellten Aufzeichnungen des Galvanometers auch so wieder erstehen lassen, indem man die geschriebene Stromkurve einer harmonischen Analyse unterzieht. Für das Spulengalvanometer-Oszillogramm ergibt sich die folgende Darstellung:

$$x = 16,28 \sin \lambda (\tau + 16,6) + 6,10 \sin 3 \lambda (\tau + 1,38) + 1,46 \sin 5 \lambda (\tau + 2,02) \\ + 0,42 \sin 7 \lambda (\tau + 2,30) + 0,08 \sin 9 \lambda (\tau + 0,52) + \dots \quad (39)$$

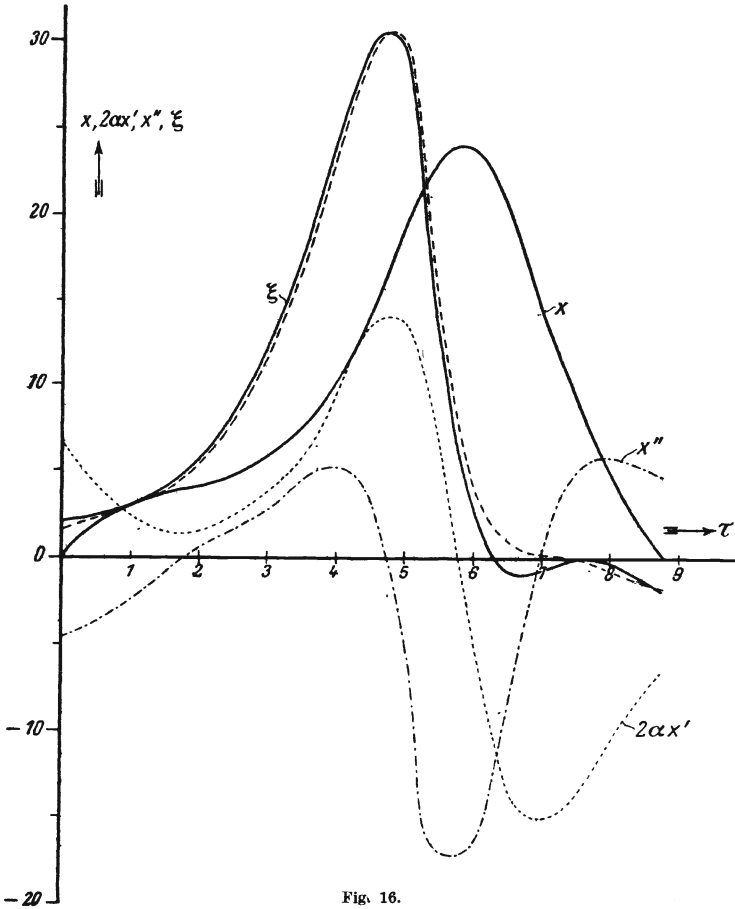


Fig. 16.

Herleitung der wahren Werte aus den angezeigten für die in Fig. 15 wiedergegebene Aufzeichnung eines Spulengalvanometers ($\nu_0 = 350$, $\alpha = 0,59$).

Stark ausgezogen: die Aufzeichnung $x(\tau)$; *schwach punktiert*: die erste Ableitung hiervon, multipliziert mit $2\alpha = 1,18$; *schwach strichpunktiert*: die zweite Ableitung $x''(\tau)$; *stark ausgezogen*: der wahre Stromverlauf $\xi(\tau)$, durch Summierung der drei ersten Kurven entstanden; *schwach gestrichelt*: die entsprechende Aufzeichnung eines Oszillographen von etwa 5000 per/sec. Verwendete Zeiteinheit: $1/\nu_0 = 2,85 \cdot 10^{-3}$ sek.

Hierin ist $\lambda = 0,358$. Man kann nun ohne weiteres die Fluchttafel Fig. 4 zur Bestimmung der Korrekturfaktoren für die Schwingungsweiten der Einzelwellen in dieser Reihenentwicklung verwenden; denn es ist der Dämpfungsgrad α durch die vorhergehende Untersuchung des Galvanometers bekannt = 0,59; ferner kennt man auch die einzelnen λ . Die die entsprechenden Skalenwerte von α und λ verbindende Gerade schneidet die Skala der Korrekturfaktoren in den gesuchten Werten. Die sich ergebende neue Fouriersche Reihenentwicklung stellt die wirklichen Stromschwankungen dar; sie gleicht fast dem aufgenommenen Schleifen-Oszillogramm (40):

$$x = 15,87 \sin \lambda (\tau + 0,34) + 8,33 \sin 3 \lambda (\tau + 2,92) + 4,21 \sin 5 \lambda (\tau + 3,25) \\ + 2,33 \sin 7 \lambda (\tau + 0,76) + 1,66 \sin 9 \lambda (\tau + 1,36) + \dots \quad (40)$$

Bemerkenswert an dem Oszillogramm von Fig. 15 ist die Phasenverschiebung zwischen den beiden aufgezeichneten Stromkurven. Während im allgemeinen die Verzögerungszeit nicht zur Geltung kommt, da alle Oberwellen fast um dieselbe Verzögerungszeit verschoben werden, ist die Phasenverschiebung wohl zu beachten, sobald eine gleichzeitige Aufzeichnung durch zwei verschiedene Meßgeräte vorgenommen wird. In dem Oszillogramm Fig. 15 ist die Verzögerungszeit für die eine Kurve verschwindend gering. Es besteht daher die Möglichkeit einer Prüfung der aus der Theorie sich ergebenden Beträge für die Verzögerungszeiten. Es ergibt sich für die Grundwelle, die sich ohne Vornahme einer vollständigen harmonischen Analyse aus den Kurvenbildern herausziehen läßt: $\lambda \tau^* = 0,454$ und hieraus $\alpha = 0,59$ in Übereinstimmung mit dem gesondert bestimmten Wert.

12. Möglichkeit fast fehlerfreier Aufzeichnung durch an sich ungeeignete Meßgeräte.

In manchen Fällen läßt sich selbst mit Meßgeräten, deren Eigenfrequenz ν_0 und Dämpfung für die Aufzeichnung wechselnder Größen an sich nicht geeignet sind, doch eine Verringerung der Fehler der Aufzeichnung erzielen. Man erreicht dies dadurch, daß man nicht die Meßgröße selbst, deren Schwankungen man aufzeichnen wünscht, auf das Meßgerät einwirken läßt, sondern eine Größe, die von dieser in bestimmter Weise abhängt; und zwar muß die Abhängigkeit nahezu die gleiche sein, wie sie zwischen der Meßgröße und dem Ausschlag des Meßgerätes infolge Trägheit und Dämpfung besteht.

Diesen Weg hat Abraham eingeschlagen und in geistvoller Weise bei seinem Rheographen verwirklicht. Dies ist ein Spiegelgalvanometer von verhältnismäßig langer Schwingungsdauer bzw. geringer Eigenfrequenz und mit fast verschwindender Dämpfung. In dieses wird nicht der zu untersuchende, veränderliche Strom i geleitet, sondern ein anderer j , der mit diesem nach der Differentialgleichung

$$j'' + 2\alpha j' + j = i(t)$$

zusammenhängt. Hierin kommen außer dem zu untersuchenden Strom selbst seine erste und zweite Ableitung vor. Diese drei Bestandteile werden dem das Meßgerät enthaltenden Stromkreis durch galvanische, einmalige induktive und zweimalige induktive Kopplung zugeführt. Die Übereinstimmung der zugehörigen Koeffizienten mit den entsprechenden der Bewegungsgleichung des Galvanometers wird durch Probieren herbeigeführt, indem z. B. die Rechteckkurve aufgezeichnet wird. Allerdings kann keine restlose Übereinstimmung erzielt werden.

Eine Beeinflussung des dem Meßgerät zugeführten Stromes in der Weise, daß eine richtigere Darstellung des ursprünglichen zu untersuchenden Stromes erfolgt, hat auch Einthoven bei seinem Saitengalvanometer versucht. Er schaltet parallel einer Saite mit hoher Eigenfrequenz, die daher schlecht gedämpft ist, einen Kondensator. Die rechteckige Mäanderkurve wird dann bei passender Wahl der Kapazität und der Widerstände bis auf die unvermeidlichen Abrundungen der Ecken nahezu richtig wiedergegeben.

Zur Raumladungstheorie der Verstärkerröhren.

Von
W. Schottky.

Mitteilung aus der Schwachstromkabel-Abteilung des Wernerwerkes von Siemens & Halske A.-G.

In Verstärkerröhren mit einem oder mehreren Hilfsgittern besteht bekanntlich eine Anordnung, bei der das Feld zwischen zwei Elektroden (z. B. Kathode K und Steuergitter G) durch das Potential einer dritten Elektrode (z. B. Anode A) mit beeinflußt wird. Diese Beeinflussung ist bisher unter der Annahme berechnet worden, daß sich im ganzen Raum zwischen den Elektroden keine Raumladung befindet; eine bei den bekannten Raumladungswirkungen der Elektronenströme sehr eigentümliche Annahme, bei der es einer ziemlich genauen Überlegung bedarf, um ihre Zulässigkeit in bestimmten Fällen zu erkennen¹).

Im ladungsfreien Raum ist das Problem mit dem bekannten, von Maxwell für Spezialfälle gelösten Dreileiterproblem der Elektrostatik identisch. Es läßt sich dann die Frage in der Form stellen, daß man bei gegebenen Potentialunterschieden der drei Leiter nach den Ladungen fragt, die auf den ersten Leiter (z. B. K) durch gegebene Potentialunterschiede der anderen Leiter (G und A) gegen diesen Leiter influenziert werden²). Bei dieser Fragestellung läuft die Aufgabe darauf hinaus, die gegenseitigen Kapazitäten C_{12} und C_{13} der Leiter 2 und 3 gegen den Leiter 1 zu bestimmen, und die Wirkung einer Potentialänderung des Leiters 3 verhält sich zur Wirkung einer Potentialänderung des Leiters 2 wie die Kapazität C_{13} zu C_{12} . Durch das Verhältnis $\frac{C_{13}}{C_{12}}$ wird dann auch der sogenannte „Durchgriff“ definiert.

Die Frage nach der Ladung, die auf dem Leiter 1 durch die Leiter 2 und 3 influenziert wird, verliert aber völlig ihren Sinn, wenn Raumladungen auftreten. Es ist dann nicht mehr die Spur eines Zusammenhangs zwischen der Feldstärke an der Kathode und den Teilkapazitäten C_{12} und C_{13} zu erkennen; und wenn auch, wie Abraham für den Fall der zylindrischen Eingitterröhre gezeigt hat, die Definition des Durchgriffs durch C_{12} und C_{13} sich trotzdem unter Umständen in der alten Weise beibehalten läßt, so werden doch im allgemeinen, und insbesondere bei der Berechnung der Einzelwirkung des Gitter- und Anodenpotentials auf den Anodenstrom, durch das Auftreten von Raumladungen die Verhältnisse vollständig gegenüber dem elektrostatischen Fall verschoben. Für zweckmäßiger und allgemeiner halte

¹) Vgl. dazu meine Abhandlung „Über Hochvakuumverstärker“ im Archiv f. Elektrotechnik, Teil I und II, S. 1—31 (1919) und Teil III, S. 299—328 (1919), wo die Grundlagen für die Berechnung und Konstruktion von Verstärkerröhren entwickelt sind, wie sie seit 1916 für die Arbeiten des K.-Labor. der S. & H. A.-G. auf diesem Gebiete maßgebend waren.

²) Diese Form der Fragestellung bei M. Abraham, Archiv f. Elektrotechnik 1919, S. 42—45.

ich daher eine andere Betrachtungsweise¹⁾, die sich darauf stützt, daß in der Verstärkertheorie wie in dem von Maxwell behandelten Spezialproblem immer nur solche Leiter und solche Felder zwischen den Leitern vorkommen, daß das Gesamtfeld sich aus zwei Teilen zusammensetzen läßt: einem homogenen Teil, der so beschaffen ist, als ob alle drei Leiter massive Flächen von konstantem Potential wären, das von dem wahren Potential der Leiter jedoch im allgemeinen verschieden ist; und einem anderen Teil, der nur in der Nähe der gitterartigen Flächen von θ verschiedene Werte hat, und durch dessen Superposition mit dem homogenen Teil dann der wirkliche Feldverlauf und das wirkliche Potential auf den Gitterstegen erreicht wird. Ist insbesondere nur der mittlere Leiter (Potential v_2), den wir uns jetzt, wie die beiden anderen zylindrisch (mit gemeinsamer Achse) denken, gitterartig und die beiden anderen (mit den Potentialen v_1 und v_3) massiv, so hat nur der mittlere Leiter (das Gitter) ein von seinem wahren Potentialwert v_2 abweichendes Effektivpotential p , und in der Frage nach der Abhängigkeit dieses Effektivpotentials von den Potentialen v_1 , v_2 und v_3 , sowie — wie wir jetzt verallgemeinern wollen — von der Raumladung, ist die diesbezügliche Problemstellung der Verstärkertheorie enthalten.

Um dieses verallgemeinerte Problem zu lösen, benutzt man am bequemsten den Satz, daß der Unterschied zwischen Effektivpotential p in der Gitterfläche und dem wahren Potential v_2 des Gitters durch die auf den Gitterstegen aufgehäuften Ladungen bei gegebenen Gitterdimensionen eindeutig bestimmt ist. Dies gilt zwar zunächst nur für raumladungsfreie Felder. Wir begehen jedoch bei Gittern, deren Stegabstand klein gegen den Abstand des Gitters von den beiden anderen Elektroden ist — was wir im folgenden voraussetzen wollen — nur einen Fehler höherer Ordnung, wenn wir den (kleinen) Teil des Raumes, in dem sich die Inhomogenitäten des Gitterfeldes noch bemerkbar machen, raumladungsfrei annehmen. Dann behält also der obige Satz mit genügender Annäherung Gültigkeit, und es handelt sich einfach um die Aufgabe, die auf den Gitterstegen angesammelte Ladung unter unseren verallgemeinerten Voraussetzungen zu bestimmen.

Diese Aufgabe läßt sich nun unter Zuhilfenahme des gewöhnlichen Durchgriffbegriffs einfach lösen. Für den raumladungsfreien Raum werden, wie ich gezeigt habe (Hochvakuumverstärker III, S. 314) die Durchgriffsfaktoren D_{32} der Elektrode 3 durch das Gitter 2 und D_{12} der Elektrode 1 durch das Gitter 2 zweckmäßig definiert durch die Gleichung:

$$p - v_2 = D_{32}(v_3 - p) + D_{12}(v_1 - p). \quad (1)$$

Nun steht der Potentialunterschied $v_3 - p$ bei ebener und zylindrischer Anordnung in einem einfach angebbaren Zusammenhang mit der auf die Elektrode 3 zu gerichteten Feldstärke E_0 des homogenen Teiles des Gesamtfeldes in unmittelbarer Nähe der Gitterfläche; ist r_3 der Radius der Elektrode 3, r_2 der Radius des Gitters, so ist nämlich:

$$v_3 - p = -r_2 \ln \frac{r_3}{r_2} \cdot E_0 \quad (2)$$

Entsprechend gilt für die auf der anderen Gitterseite nach der Kathode zu gerichtete homogene Feldstärke E'_0 (die um einen endlichen Betrag von $-E_0$ verschieden ist) die Beziehung:

$$v_1 - p = r_2 \ln \frac{r_1}{r_2} \cdot E'_0 \quad (3)$$

¹⁾ „Über Hochvakuumverstärker“ Teil II, § 4.

Bezeichnen wir den Ausdruck $-\tau_2 \ln \frac{r_3}{r_2}$ mit n_{32} , den entsprechenden Ausdruck $\tau_2 \ln \frac{r_1}{r_2}$ für die andere Gitterseite mit n_{12} , so ist also nach (2) und (3)

$$p - v_2 = D_{32} n_{32} E_0 + D_{12} n_{12} E'_0. \quad (4)$$

Nun können wir unter unseren Voraussetzungen auch im verallgemeinerten Falle, wie wir sahen, das Feld in der unmittelbaren Umgebung des Gitters mit genügender Annäherung raumladungsfrei annehmen. Die Beziehung (4) behält auch hier ihre Gültigkeit, falls wir nur unter E_0 und D_0 die homogenen Teile der Gesamtfeldstärke in unmittelbarer Nähe des Gitters verstehen und hierbei ist es dann wieder erlaubt, f_0 und f'_0 aus der Lösung des Raumladungsproblems für homogene Elektroden mit den Potentialen v_1 , p und v_3 zu entnehmen.

Durch Gleichung (4) ist also das Dreileiterproblem für, zylindrische (und im Grenzfall ebene) Elektroden, von denen die mittlere Elektrode ein dünnröhrtiges und genügend enges Gitter darstellt, für den allgemeinen Fall beliebiger Raumladungen und Ströme zwischen den Elektroden zurückgeführt auf das gewöhnliche Dreileiterproblem der Elektrostatik mit ladungsfreien Räumen. Sind die Elektroden 1 und 3 nicht die äußersten Elektroden, sondern befindet sich innerhalb 1 noch eine koaxiale zylindrische Elektrode 0 und außerhalb 3 noch eine ebensolche Elektrode 4, wobei dann die Elektroden 1 und 3 ebenfalls gitterförmig anzunehmen sind, so bleibt trotzdem Gleichung (4) bestehen, und die Durchgriffskoeffizienten D_{32} und D_{12} sind so zu berechnen, als ob die Elektroden 1 und 3 massiv wären (vgl. Hochvakuumverstärker III, § 6). Ebenso gilt für den Durchgriff durch die Elektroden 1 und 3 dann eine entsprechende Gleichung wie (4). Es gilt also auch für Mehrgitterröhren mit genügend feinen Gittern der Satz, daß sich die vollständige Raumladungstheorie dieser Röhren mit Hilfe von Gleichungen der Form (4) auf die Theorie der raumladungsfreien Felder (Bestimmung der Koeffizienten D) und die Lösung des homogenen Raumladungsproblems (Bestimmung von E_0 , E'_0 usw. als Funktion der Potentiale v_0 , v_1 , p_1 , v_2 , p_2 , v_3 , p_3 , v_4 und der zwischen den Elektroden fließenden Ströme β_{10} , β_{12} , β_{34} usw.) zurückführen läßt.

Doch wollen wir hier die allgemeine Theorie nicht weiter verfolgen, sondern nur noch für einen wichtigen Spezialfall die vollständige Lösung geben, nämlich den Fall der zylindrischen Eingitterröhren. 1 sei hierbei die (dünnröhrtige) Kathode, 2 das Steuergitter, 3 die Anode. Wir setzen willkürlich $v_1 = 0$; ferner nehmen wir an, daß die Raumladung zwischen Gitter 2 und Anode 3 zu vernachlässigen ist. Wenn man berücksichtigt, daß in Eingitterröhren die Geschwindigkeit der Elektronen von der Kathode nach dem Gitter und der Anode zu ständig wächst (bis auf ganz kleine Bereiche in der Nähe der Gitterstege), und daß sich gleichzeitig der Querschnitt des Stromes dauernd vergrößert, so erkennt man leicht, daß die Wirkung der Raumladung zwischen Gitter und Anode klein sein muß im Vergleich zur Wirkung der Raumladung zwischen Kathode und Gitter. Wir begehen also mit dieser Vernachlässigung wiederum nur einen Fehler höherer Ordnung. Es kann dann das erste Glied der rechten Seite von Gleichung (4) in der Form der Gleichung (1) stehengelassen werden und wir erhalten:

$$p - v_2 = D_{32} (v_3 - p) + D_{12} n_{12} E'_0 \quad (5)$$

E'_0 ist jedoch nicht aus der Lösung des elektrostatischen Problems zu berechnen, sondern aus der Lösung der Raumladungsgleichung. Wird hierbei der Potential-

fall längs des Glühfadens vernachlässigt, (was schon darin zum Ausdruck kommt, daß wir oben v_1 konstant = 0 gesetzt haben), so besteht zwischen dem von der Kathode zur Gitterfläche fließenden Strom β , (der, da das Gitter keinen Strom aufnehmen soll, mit dem Anodenstrom identisch ist) und dem Unterschied $p - v_1 = p$ zwischen dem Effektivpotential des Gitters und der Kathode die Beziehung (Hochvakuumverstärker II, S. 20):

$$\beta = A p^{3/2} \quad (6)$$

wobei

$$A = 1,465 \cdot 10^{-5} \frac{l}{R} \quad \text{ist.}$$

(l Länge des Glühfadens und Zylinders, r Radius des zylindrischen Gitters.) Andererseits gilt für das homogene zylindrische Raumladungsproblem, wenn das Potential der Achse = 0 gesetzt wird, für das Potential φ irgendeines Punktes $r < R$ die Beziehung¹⁾:

$$\varphi = \left(\frac{\beta}{AR} \right)^{2/3} \cdot r^{2/3}, \quad (8)$$

$$\text{so daß} \quad \mathfrak{E}_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{2}{3} \left(\frac{\beta}{AR} \right)^{2/3} \cdot r^{-1/3} \quad \text{wird.} \quad (9)$$

Insbesondere wird für $r = R$: \mathfrak{E}_r gleich unserem \mathfrak{E}'_0 , also

$$\mathfrak{E}'_0 = \frac{2}{3} \left(\frac{\beta}{A} \right)^{2/3} \cdot \frac{1}{R} \quad (10)$$

Wird hierin $\left(\frac{\beta}{A} \right)^{2/3}$ nach (6) durch p ersetzt, so folgt:

$$\mathfrak{E}'_0 = \frac{2}{3R} \cdot p \quad (11)$$

Den Faktor $\frac{2}{3R}$ bezeichnen wir mit m_{12} . Dann wird also nach Gleichung (5) und (11)

$$p - v_2 = D_{32}(v_3 - p) + D_{12}n_{12}m_{12}p$$

oder

$$p(1 + D_{32} - D_{12}n_{12}m_{12}) = v_2 + D_{32}v_3,$$

also

$$p = \frac{1}{1 + D_{32} - D_{12}n_{12}m_{12}} v_2 + \frac{D_{32}}{1 + D_{32} - D_{12}n_{12}m_{12}} v_3 \quad (12)$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit der entsprechenden Gleichung der vereinfachten Verstärkerröhrentheorie (ohne Berücksichtigung der Raumladung), welche die Form hat:

$$p = \frac{1}{1 + D_{32}} v_2 + \frac{D_{32}}{1 + D_{32}} v_3 \quad (12')$$

so erkennt man, daß die Raumladung zwischen Kathode und Gitter auf das Effektivpotential des Gitters nur die Wirkung hat, die Koeffizienten von v_2 („Steuerschärfe“ λ) und v_3 („Anodeneinfluß“ μ) in einem konstanten Verhältnis zu verändern; nach wie vor bleibt also das Verhältnis $\frac{\partial p}{\partial v_2} : \frac{\partial p}{\partial v_3}$ und damit wegen (6) auch das Verhältnis $\frac{\partial \beta}{\partial v_2} / \frac{\partial \beta}{\partial v_3}$ der „Gitterempfindlichkeit“ des Anodenstromes zur „Anodenempfindlichkeit“ des Anodenstromes konstant und vom Strom unabhängig; es existiert also auch

¹⁾ Vgl. z. B. meinen „Bericht über thermische Elektronenemissionen“ im Jahrb. f. Radioaktivität u. Elektronik 1915.

hier (vgl. wegen der Definition: Hochvakuumverstärker II, § 5) eine konstante „Schutzwirkung“ $k = \frac{\lambda}{\mu}$, und diese ist, wie in der gewöhnlichen Theorie, gleich dem reziproken Werte des Anodendurchgriffs durch das Gitter:

$$k = \frac{1}{D_{32}} \cdot 1) \quad (13)$$

Der ganze Effekt der Raumladung auf das Effektivpotential des Gitters besteht also darin, daß sich p mit variierendem v_2 und v_3 in einem etwas anderem Verhältnis ändert als nach der gewöhnlichen Theorie, und es bleibt nunmehr nur noch die Aufgabe, den Sinn und die Größe dieser Abweichung gegenüber der gewöhnlichen Theorie zu untersuchen.

Der Sinn ist sehr leicht zu finden. D_{12} ist als Durchgriffsfaktor stets positiv; n_{12} ist gemäß seiner Definition $n_{12} = r_2 \ln \frac{r_1}{r_2}$ wegen $r_1 < r_2$ negativ, m_{12} endlich ist wegen $m_{12} = \frac{2}{3R} = \frac{2}{3r_2}$ positiv. Also ist das ganze Produkt negativ; die Koeffizienten λ und μ sind gegenüber der gewöhnlichen Theorie (da das Zusatzglied negativ im Nenner steht) verkleinert, infolgedessen muß auch $\frac{\partial \beta}{\partial v_2}$ und $\frac{\partial \beta}{\partial v_3}$ etwas kleiner herauskommen als nach der gewöhnlichen Theorie.

Nun zur Frage der quantitativen Bestimmung. $m_{12} n_{12}$ ist $= \frac{2}{3} \ln \frac{r_1}{r_2}$.

D_{12} ²⁾ hängt mit den von Abraham (l. c.) eingeführten Kapazitätskoeffizienten C_{12} und C_{23} durch die Beziehung zusammen:

$$D_{12} = \frac{C_{13}}{C_{23}},$$

wobei wieder die elektrostatische Definition, diesmal durch das Verhältnis des von der Kathode und dem Gitter auf der Anode mündenden Kraftflusses zugrundegelegt ist. Da für den Durchgriff der Anode durch das Gitter gilt:

$$D_{32} = \frac{C_{31}}{C_{21}}$$

und da $C_{13} = C_{31}$ ist, so gilt auch:

$$D_{12} = \frac{C_{21}}{C_{23}} \cdot D_{23}.$$

Nun ist nach Abraham (l. c. Gleichung (17a) und (17b)); es ist zu beachten, daß bei Abraham der Index 3 sich auf die Kathode, 1 auf die Anode bezieht!)

$$\frac{C_{21}}{C_{23}} = \frac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{\ln \frac{r_2}{r_1}},$$

1) Dieses Resultat bestätigt eine auf anderem Wege von M. Abraham (l. c.) gezogene Schlußfolgerung.

2) Es ist hier stillschweigend vorausgesetzt, daß für den Fall der gewöhnlichen Elektrostatik unsere Definition der Größen D nach Gl. (1) mit der Abrahamschen Flußdefinition übereinstimmt. Wenn man an der Richtigkeit dieser Voraussetzung auch im Grunde nicht zweifeln wird, so bleibt der strenge Beweis doch noch zu führen.

also wird im ganzen unser Zusatzglied

$$m_{13} n_{12} D_{12} = \frac{\frac{2}{3} \ln \frac{r_1}{r_2} \ln \frac{r_3}{r_2}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot D_{32},$$

oder

$$m_{12} n_{12} D_{12} = -\frac{2}{3} \ln \frac{r_3}{r_2} \cdot D_{32}, \quad (14)$$

Wird Gleichung (14) in (12) eingesetzt, so folgt demnach:

$$p = \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{2}{3} \ln \frac{r_3}{r_2}\right) D_{32}} \cdot v_2 + \frac{D_{32}}{1 + \left(1 + \frac{2}{3} \ln \frac{r_3}{r_2}\right) D_{32}} \quad (15)$$

Durch Vergleich mit (12') stellen wir fest: Wird in der Theorie der Eingitterröhren die Wirkung der Raumladung zwischen Kathode und Gitter auf das Effektivpotential des Gitters berücksichtigt, so geht bei der Berechnung der Steuerschärfe λ und des Anodeneinflusses μ der Durchgriff der Anode durch das Gitter nicht, wie in der alten Theorie, einfach neben I in den Nenner ein, sondern mit einem um $\frac{2}{3} \ln \frac{r_3}{r_2}$ vergrößerten Betrage, der von derselben Größenordnung ist, wie D_{32} selbst. Im Zähler von μ bleibt dagegen D_{32} , im Zähler von λ I stehen, so daß das Verhältnis $k = \frac{\lambda}{\mu}$, wie in der alten Theorie, $= \frac{1}{D_{32}}$ wird.

Ist der Durchgriff D_{32} selbst klein, so daß die Nenner von λ und μ in der alten Theorie nahe $= I$ zu setzen sind, so gilt dasselbe auch, wenn auch mit weniger guter Annäherung, in der genaueren Theorie. So ist z. B. bei dem von mir diskutierten Eingitterrohr AC (Hochvakuumverstärker II, S. 38) $k = 18$, $D_{32} = \frac{1}{18}$, $r_3 = 4,5$ mm, $r_2 = 1,7$ mm, also $\ln \frac{r_3}{r_2} \simeq 1$, $\frac{2}{3} \ln \frac{r_3}{r_2} = \frac{2}{3}$, $1 + \left(1 + \frac{2}{3} \ln \frac{r_3}{r_2}\right) D_{32} = 1 + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{18} = 1,093$, während in der alten Theorie der Faktor $1 + \frac{1}{18} = 1,055$ stand. λ und μ und die diesen Größen proportionale Gitter- und Anodenempfindlichkeit des Stromes werden also nach der alten Theorie nur um etwa 4 vH falsch berechnet; ein Fehler, der innerhalb der Genauigkeit der sonstigen Voraussetzungen und der Schwankungen der Röhrendimensionen liegt¹⁾. Die „Röhrenverstärkung“, die bei gegebener Schutzwirkung k der Wurzel aus $\frac{\partial \beta}{\partial v_2}$, also der Wurzel aus λ proportional ist, würde sogar nur um 2 vH anders berechnet werden.

Von Bedeutung wird dagegen die Korrektur bei großen Durchgriffswerten, wie sie für Röhren mit niedrigem Anodenpotential (einschließlich der Schutznetzröhren, auf welche die Theorie auch anwendbar ist), verwandt werden. Für $D_{32} = \frac{1}{3}$ (Anodenspannung etwa 10 Volt) kann z. B. durch Berücksichtigung der Raum-

¹⁾ Bei der Berechnung von $\frac{\partial \beta}{\partial v_2}$ bei AC (l. c.) sind durch Einsetzen eines falschen Wertes für den Gitterradius sowie eine ungenaue Bestimmung von k zwei Fehler unterlaufen, die sich zufällig ungefähr kompensierten und daher unbemerkt blieben. Der genauere Wert soll bei Gelegenheit noch bestimmt und veröffentlicht werden; die hier betrachtete Korrektur liegt aber weit außerhalb der Meßgenauigkeit.

ladung der Nenner von $\frac{\partial \lambda}{\partial v_2}$ und $\frac{\partial \mu}{\partial v_3}$ um 20—30 vH wachsen, so daß $\frac{\partial \beta}{\partial v_2}$ und $\frac{\partial \beta}{\partial v_3}$ gegenüber der alten Theorie ebenfalls um 20—30 vH kleiner herauskommen; eine Größe, die sowohl bei Charakteristik wie bei Verstärkermessungen eine bereits sehr merkliche Rolle spielen kann. In der Tat ist wohl schon vielen Experimentatoren die starke Abnahme der Kurvensteilheit mit zunehmendem Durchgriff aufgefallen, die durch den Koeffizienten D_{32} im Nenner von λ allein doch nicht ganz erklärt werden konnten. Wir haben also hier eine neue Ursache für die Verwischung der Strom-Gitterspannungscharakteristik bei großem Durchgriff kennengelernt, die von derselben Größenordnung ist, wie die bisher bekannte Verwischung der Steuerschärfe durch den Anodendurchgriff.

Aus der Form des Zusatzkoeffizienten von D_{32} läßt sich jedoch auch eine einfache Konstruktionsregel ableiten, um die allzustarke Verminderung der Steuerschärfe bei großem Durchgriff zu vermeiden. Es muß zu diesem Zwecke $\frac{r_3}{r_2}$ möglichst klein gemacht werden; d. h. die Anode muß möglichst nah an das Gitter gebracht werden, wobei dann die Stegabstände des Gitters natürlich bei gleichem Durchgriff kleiner gehalten werden müssen als bei großem Anodenabstand. Wenn die Forderung erfüllt bleiben soll, daß der Stegabstand klein gegen den Anodenabstand zu wählen ist, müssen jedoch gleichzeitig dünnere Gitterdrähte genommen werden¹⁾.

Zum Schluß sei darauf hingewiesen, daß die berechnete Korrektur bei kleinen Anodenspannungen einen nicht unbeträchtlichen Einfluß auf die Lage des Optimums des Durchgriffs bei Eingitter- und Schutznetzröhren haben wird. Dieser Einfluß, dessen quantitative Berechnung hier zu weit führen würde, liegt in dem Sinne, daß bei Eingitterröhren, und noch stärker bei Schutznetzröhren, das Optimum des Durchgriffs bei gegebenem Gitter- und Anodenpotential gegenüber der alten Theorie (Hochvakuumverstärker II, § 5c und III, § 6b) nach kleineren Werten verschoben wird.

Schloß Schaumburg an der Lahn, den 15. Jan. 1920.

¹⁾ Derart nämlich, daß bei gleichem Durchgriff der Stegabstand proportional dem Anodenabstand verkleinert werden kann. Bei konstant gehaltener Drahtdicke darf ja, wenn der Durchgriff konstant bleiben soll, der Stegabstand nicht proportional dem Anodenabstand abnehmen (vgl. z. B. Formel 23¹⁾, Hochvakuumverst. II, S. 24).

Über die Verwendung der stillen Entladung zum Nachweis schlagender Wetter und zur Gasanalyse.

Von

Gg. Erlwein und Hans Becker.

Mit 6 Textfiguren.

Mitteilung aus der Elektrochemischen Abteilung des Wernerwerkes von Siemens & Halske A. G.

Vor einer Reihe von Jahren machte der eine von uns (Erlwein) den Vorschlag, die stille Entladung zum Nachweise von schlagenden Wettern zu benutzen. Es wurde dabei angenommen, daß sich die Leitfähigkeit der durch eine Siemensröhre strömenden Luft merkbar ändern würde, wenn in dieser Luft geringe Mengen von Grubengas vorhanden seien. Diese Änderungen sollten sich bei konstanter Spannung in Änderungen der Stromstärke in der Röhre bemerkbar machen. Es wurden damals im Anschluß an diese Vermutung eine ganze Reihe sehr sorgfältiger Versuche ausgeführt und dabei zur besseren Beobachtung des erwarteten Effekts die Stromstärke auf der Hochspannungsseite des Transformators mit einem Hitzdrahtinstrument gemessen. (Siehe das Schema der Fig. 1.)

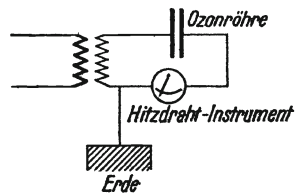


Fig. 1.

Der beobachtete Effekt war nur gering. Es traten, wenn der die Ozonröhre durchstreichenden Luft geringe Mengen Methan zugesetzt wurden, kleine Änderungen in der Stromstärke auf. Ein Einfluß des Methanzusatzes auf die Stromstärke war deutlich vorhanden, aber die beobachteten Änderungen waren so gering, daß sie sich nicht reproduzieren ließen, um so weniger, da die trotz aller Vorsichtsmaßregeln nicht ganz vermeidbaren Spannungsschwankungen und dergleichen größere Änderungen hervorriefen, als die durch den Methanzusatz bewirkten waren. Eine Steigerung des Methanzusatzes bis über die Explosionsgrenze ergab keine Vergrößerung des Effekts. Dagegen wurde schon damals beobachtet, daß sich das Entladungsgeräusch der Röhre ganz auffallend ändert, wenn der Luft geringe Mengen Methan zugesetzt werden. Die Änderung des Entladungsgeräusches war auch von der zugesetzten Menge abhängig, insofern, als sich der Ton des Entladungsgeräusches mit zunehmender Methankonzentration immer mehr von dem Entladungsgeräusch normaler Luft entfernte. Die Versuche wurden damals als aussichtslos aufgegeben.

Sehr viel später, im Jahre 1917, wurde anlässlich von Ozonbestimmungen, die an einem größeren Glasapparat in Luft und in Sauerstoff ausgeführt wurden, beobachtet, daß die Energieaufnahme des Apparates bei konstanter Frequenz und kon-

stanter Spannung sehr viel kleiner war, wenn Luft durch den Apparat strömte, als wenn Sauerstoff verwendet wurde. Der Unterschied war so auffällig, daß zunächst Versuchsfehler angenommen wurden. Durch Wiederholung der Messungen wurde

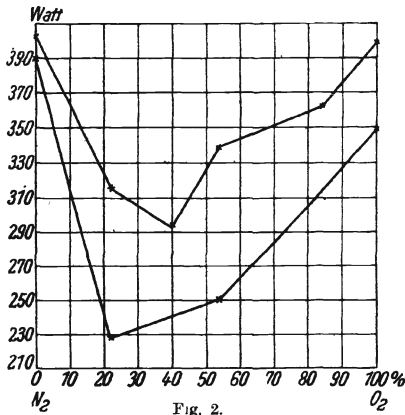


Fig. 2.

die Beobachtung jedoch bestätigt und es wurden im Anschluß daran eine Anzahl Messungen mit Sauerstoff-Stickstoffgemischen verschiedener Konzentration ausgeführt. Der leitende Gedanke bei diesen Messungen war, wenn möglich, mit Hilfe von Energiemessungen an einem Siemensrohr die Konzentration einer oder mehrerer Komponenten in Gasgemischen zu bestimmen. Die Beobachtungsergebnisse sind in den Figuren 2—5 enthalten. In diesen Kurven ist als Abszisse die Konzentration des N₂—O₂-Gemisches in % O₂ aufgetragen, so daß der Wert 0% reinem Stickstoff und der Wert 100% reinem Sauerstoff entspricht. Als Ordinaten sind die Energieaufnahmen bei verschiedenen Spannungen gewählt. Für jedes Kurvenpaar wurde die Spannung natürlich konstant gehalten. Die obere Kurve jeder Figur zeigt die Änderung der Energieaufnahme für strömendes Gas. Die Strömungs-

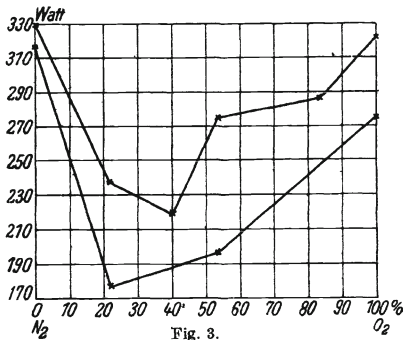


Fig. 3.

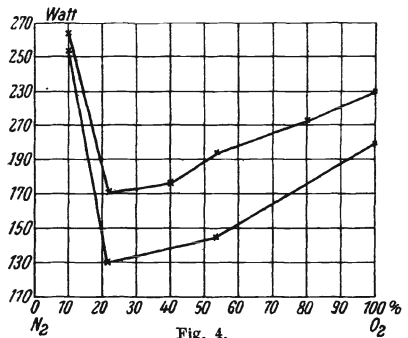


Fig. 4.

geschwindigkeit betrug 100 l pro Stunde. Die untere Kurve gilt für ruhendes Gas.

Bei allen Kurven zeigt sich, daß die Energieaufnahme in reinem Stickstoff recht beträchtlich ist, dann mit zunehmendem Sauerstoffgehalt zunächst abnimmt, um dann wieder zu steigen, bis bei reinem Sauerstoff die Energieaufnahme etwa die gleiche wie in reinem Stickstoff ist.

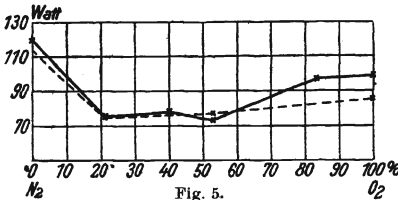


Fig. 5.

Ob die Kurven kontinuierlich verlaufen oder ob bei bestimmten Konzentrationen Maxima oder Minima vorhanden sind, ist weiteren Untersuchungen vorbehalten. Auffallend ist, daß die Differenz zwischen ruhendem und strömendem Gas von der Belastung der Röhre abhängig ist. Diese Abhängigkeit steht aber offenbar in gewissen Beziehungen zu der später von Becker gefundenen Beziehung zwischen Konzentration und Belastung.

Auf Grund der in den Figuren 2—5 enthaltenen Beobachtungen wurden die eingangs erwähnten Versuche wieder aufgenommen und dabei nicht nur auf den

Nachweis schlagender Wetter beschränkt, sondern auf die Untersuchung von Gasgemischen im allgemeinen ausgedehnt. Bei der Fortsetzung der Versuche mußte von der Messung auf der Primärseite wieder abgegangen werden. Die auf der Primärseite gemessene Leistung setzt sich zusammen aus der Leerlaufenergie des Transformators, aus dem Energieverbrauch der Meßinstrumente und aus dem wirklichen Energieverbrauch der Ozonröhre. Bei Verwendung kleiner Ozonapparate ist der Energieverbrauch der Ozonröhre im Verhältnis zu den beiden anderen Größen sehr klein. Änderungen in der Energieaufnahme der Ozonröhre werden daher nur eine sehr geringe Änderung in der Gesamtenergie hervorrufen. Die Verwendung großer, mehr Energie verbrauchender Apparate ist nicht zugänglich, da in diesem Falle auch sehr große Gasmengen erforderlich sind. Es wurde deshalb wiederum versucht, auf der Hochspannungsseite zu messen, und zwar unter Benutzung eines Thermokreuzes, das gestattet, sehr kleine Wechselströme von wenigen Milliampere in bequemer Weise zu messen. Durch die Messung des Wechselstromes auf dem Umwege mit einem Thermoelement wurde weiter erreicht, daß sehr kleine Änderungen der Stromstärke große Ausschläge am Meßinstrument hervorriefen. Es wurden nun Versuche mit verschiedenen Schaltungen durchgeführt, indem das Thermoelement entweder direkt in den Stromkreis eingeschaltet wurde oder indem Brückenschaltungen benutzt wurden. Auf die Einzelheiten soll hier nicht eingegangen werden. Durch die Ozonröhre wurden verschiedene Gasgemische hindurchgeleitet und dabei die Änderungen in der Stromstärke beobachtet. Der Zusatz des zweiten Gases bewirkte in manchen Fällen eine Zunahme, in anderen eine Abnahme der Stromstärke. In der folgenden Tabelle 1 bedeutet das Pluszeichen

Tabelle 1.

$O_2 + O_3$	mit zunehmender	O_3 -Konzentration	—
Luft + O_3	„	„	—
Luft + H_2O	„	H_2O	—
$N_2 + H_2O$	„	H_2O	+
Luft + H_2	„	H_2	+
$N_2 + H_2$	„	H_2	—
$H_2 + H_2O$	„	H_2O	?

Zunahme und das Minuszeichen Abnahme der Stromstärke, wenn die Konzentration des an zweiter Stelle genannten Gases zunimmt.

Unter welchen Verhältnissen der Zusatz eines fremden Gases eine Vergrößerung der Stromstärke hervorruft und unter welchen eine Verringerung der Stromstärke eintritt, konnte noch nicht festgestellt werden. Verschiedene darüber angestellte Vermutungen haben sich nicht bestätigt. Auffallend war, daß in der benutzten Versuchsanordnung bei Zusatz von Wasserdampf zu Wasserstoff eine Änderung in der Stromstärke nicht eintrat. Dies führte schließlich zu der Annahme, daß Änderungen in der Stromstärke immer nur dann eintreten, wenn zwischen den Komponenten des Gases eine chemische Reaktion möglich ist. Dies ist bei den vorstehend aufgeführten Gasgemischen auch überall der Fall mit Ausnahme bei dem letzten Gemisch. Zwischen Wasserstoff und Wasserdampf ist keine Reaktion bekannt.

Quantitative Messungen wurden angestellt mit Luft von verschiedenem Feuchtigkeitsgehalt. Die folgende Tabelle 2 sowie die Figur 6 gibt die erhaltenen Resultate wieder. Der Feuchtigkeitszusatz zur Luft

Tabelle 2.

c	0	4,835	5,73	6,055	11,96	12,34	2,34	15,22
%	0	17,72	23,45	24,75	28,62	48,9	50,5	61,2
α	98	59	56,5	56,2	55	46,25	44,5	43,5

wurde in der Weise hergestellt, daß Luft durch Wasser von bestimmter Temperatur geleitet wurde. Bei der benutzten Durchströmungsgeschwindigkeit konnte ange-

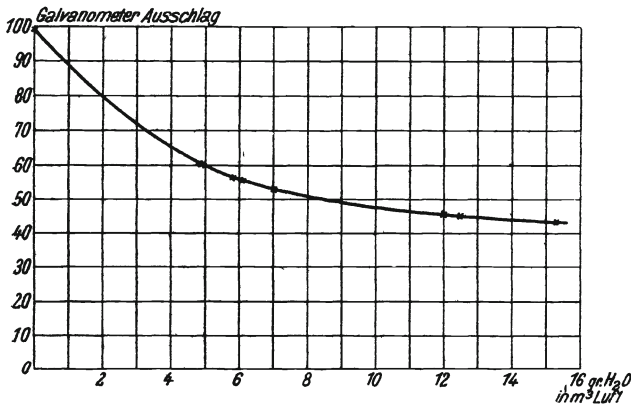


Fig. 6.

nommen werden, daß sich die Luft dabei vollständig mit Wasserdampf sättigte. In der Tabelle 2 bedeutet c die Konzentration in Gramm H₂O pro cbm Luft; % die relative Feuchtigkeit (die Temperatur, bei welcher der Versuch stattfand, war 26,25°) und α den Galvanometerausschlag. Die Tabelle gibt gleichzeitig Aufschluß über die Empfindlichkeit des Verfahrens.

Ein Zusatz von 4,8 g Wasserdampf zu 1 cbm Luft, entsprechend einer Wasserdampfkonzentration von 0,37 Gewichtsprozenten, gibt eine Änderung des Galvanometerausschlages von 40 Skalenteilen. Der Verlauf der Kurve zeigt, daß mit zunehmender Wasserdampfkonzentration die Kurve allmählich horizontal zu verlaufen scheint, d. h. die Empfindlichkeit nimmt mit zunehmender Konzentration des zugesetzten Gases ab.

Noch empfindlicher scheint die Anordnung auf Verunreinigung der Luft mit organischen Dämpfen zu reagieren. So wurde z. B. beim Einarbeiten einer Röhre ein Galvanometerausschlag von etwa 56 Skalenteilen erhalten. Im Verlauf des Versuchs ging dieser Ausschlag ganz plötzlich auf 41,8 Teilstriche herunter, um dann langsam wieder zu steigen. Wie sich herausstellte, war das plötzliche Sinken darauf zurückzuführen, daß im Laboratorium beim Ausspülen von Geräten etwas Benzol verdampft war. Der Versuch wurde durch absichtliche Verunreinigung der Luft mit etwas Benzoldampf wiederholt mit demselben Ergebnis.

Die vorstehend beschriebene Anordnung läßt sich nun auch verwenden zum Nachweis und zur Anzeige von schlagenden Wettern. Luft, die mit Wasserstoff oder Methan verunreinigt wird, ergibt eine beträchtliche Zunahme der Stromstärke. Diese Änderung der Stromstärke kann man dazu benutzen, um Signalvorrichtungen irgendwelcher Art in Tätigkeit zu setzen. Es wurden zunächst Versuche gemacht, direkt ein Relais in den Stromkreis einzuschalten; diese Versuche hatten aber keinen Erfolg, so daß wir dazu übergingen, eine Verstärkerröhre, die uns von der V. Sa.-Abteilung zur Verfügung gestellt wurde, für diese Zwecke zu benutzen. Mit Hilfe einer derartigen Röhre gelingt es leicht, ein Relais zu betätigen und durch dieses Relais irgendwelche Signalvorrichtungen in Gang zu setzen. Durch die Verstärkerröhre hat man es dabei in der Hand, die Anordnung beliebig empfindlich zu machen.

Auffallend war nun, daß die jetzigen Versuche zu einem so überraschenden Resultat führten, während die vor einer Reihe von Jahren unternommenen Versuche keine brauchbaren Resultate ergeben hatten. Dies ist auf zwei Ursachen zurückzu-

führen: einmal ist die Empfindlichkeit des Thermokreuzes sehr viel größer als die der gewöhnlichen Hitzdrahtinstrumente, die bei schwachem Wechselstrom von 1 bis 10 Milliampere kaum ansprechen, sodann können auch Zufälligkeiten bei der Wahl der benutzten Ozonröhre mitgespielt haben.

Wie sich aus theoretischen Überlegungen ergibt, und wie durch Versuche bestätigt wurde, müssen die zu solchen Messungen benutzten Röhren bestimmte Eigenschaften haben, worauf jedoch an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden kann.

Soweit sich aus den bisherigen Versuchen, die noch fortgesetzt werden, übersehen läßt, ist das vorstehend beschriebene Verfahren vielfacher Anwendung fähig und vielleicht geeignet, wichtige neue theoretische Aufschlüsse über die bei Entladungen in Gasen auftretenden Vorgänge zu geben.

Zusammenfassung der Ergebnisse.

1. Es wird ein Verfahren beschrieben, mit Hilfe der stillen Entladung die Gegenwart fremder Beimischungen in einem Gase nachzuweisen und ihre Konzentration zu messen.

2. Es wird gezeigt, wie sich das Verfahren zum Anzeigen schlagender Wetter benutzen läßt.

3. Es werden Angaben über die Empfindlichkeit des Verfahrens gemacht.

Laboratorium der Abteilung für
Elektrochemie, Ressort Dr. Erlwein

Siemensstadt, im Februar 1920.

Über die Extrapolation und Berechnung der Konzentration und Ausbeute von Ozonapparaten.

Von

Hans Becker.

Mit 14 Textfiguren.

Mitteilung aus der Elektrochemischen Abteilung des Wernerwerkes
von Siemens & Halske A. G.

Inhaltsübersicht.

	Seite
1. Extrapolation der Ozonkonzentration für große Gasgeschwindigkeiten	76
2. Extrapolation der Ausbeute pro Kilowattstunde	79
3. Berechnung der Konzentrations- und Ausbeutekurven	81
4. Berechnung der Konstante k für verschiedene Spannungen	87
5. Diskussion und Umformung der Gleichung für Ausbeute und Konzentration (Grenzkonzentration, Nullausbeute und „Räumliche Waddichte“)	91
6. Einfluß von Spannung und Frequenz auf die Ozonkonzentration	97
7. Angaben über die benutzten Ozonapparate und die Meßmethoden. Kritik der Versuchsergebnisse	101
8. Anwendung der Konzentrationsgleichung für die Berechnung von Ozonanlagen	104
9. Zusammenfassung der Ergebnisse	106

1. Extrapolation der Ozonkonzentration für große Gasgeschwindigkeiten.

Die Leistungsfähigkeit eines Ozonapparates ist gegeben durch die Ozonkonzentration und durch die Ausbeute, die der Apparat unter bestimmten Bedingungen der Frequenz, der Spannung, der Temperatur, des Wassergehaltes der Luft bzw. des Sauerstoffs und der Gasgeschwindigkeit liefert. Dabei wird unter der Konzentration (c) die Anzahl Gramm Ozon im Kubikmeter Sauerstoff bzw. Luft und unter der Ausbeute (A) die Anzahl Gramm Ozon verstanden, die der Apparat pro Kilowattstunde liefert. Bei der in der Technik üblichen Form der graphischen Darstellung bezeichnet man als Charakteristik eines Ozonapparates zwei Kurven, deren eine die Ozonkonzentration, deren andere die Ausbeute als Funktion der Gasgeschwindigkeit darstellt. Dabei ist vorausgesetzt, daß die vorher genannten Bedingungen der Frequenz usw. konstant gehalten werden. Man erhält so ein Kurvenpaar, das für jede Gasgeschwindigkeit Konzentration und Ausbeute, die ein Ozonapparat bei gegebener Spannung und Frequenz liefert, abzulesen gestattet. Ändert man die Bedingungen, unter denen der Apparat arbeitet, indem man andere Spannungen oder andere Frequenzen wählt, so bekommt man neue Kurvenpaare, durch die die Leistung des Apparates unter den neuen Bedingungen charakterisiert wird.

Um die Leistung des Apparates für möglichst verschiedene Gasgeschwindigkeiten zu erhalten, sind eine Reihe von Messungen erforderlich, bei denen die Gasgeschwindigkeit innerhalb sehr weiter Grenzen geändert werden muß. Dieses Verfahren ist zeitraubend und oft umständlich, sobald es sich um größere Gasgeschwindigkeiten und ihre Messungen handelt. Ich hatte deshalb vor längerer Zeit die im folgenden beschriebene Methode vorgeschlagen, mit der es möglich ist, die Konzentration für größere Gasgeschwindigkeiten graphisch zu extrapolieren, wenn einige Messungen bei kleinen Gasgeschwindigkeiten vorliegen.

Fig. 1 zeigt die Konzentrationskurve eines Ozonapparates in der in der Technik üblichen Darstellung.

Als Ordinaten sind die Ozonkonzentrationen in Gramm pro Kubikmeter, als Abszissen die Gasgeschwindigkeiten in Kubikmetern pro Stunde aufgetragen. Das Bild zeigt den bekannten fallenden Verlauf der Kurve. Die Konzentration sinkt mit zunehmender Gasgeschwindigkeit erst sehr schnell, dann immer langsamer.

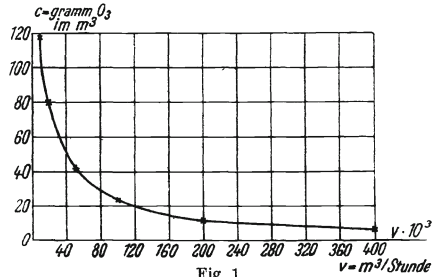


Fig. 1.

Diese Darstellungsform der Konzentrationsänderung mit der Gasgeschwindigkeit ist für die Technik, in welcher die Gasgeschwindigkeiten gemessen werden und wo die Gasgeschwindigkeiten für die Größe der Anlage und der Maschinen unbedingt bekannt sein müssen, äußerst zweckmäßig. Die Kurven, die bei mittleren Gasgeschwindigkeiten, die für die Technik vielfach in Frage kommen, sehr übersichtlich verlaufen, geben jedoch kein klares Bild über die Änderungen der Konzentration bei sehr großen und sehr kleinen Geschwindigkeiten. Um den Reaktionsverlauf für diese Gebiete darzustellen, wählt man besser die in der wissenschaftlichen Literatur übliche Darstellungsform, bei der die Konzentrationsänderung nicht in Abhängigkeit von der Gasgeschwindigkeit dargestellt wird, mit der das Reaktionsgemisch den Reaktionsraum durchströmt, sondern in Abhängigkeit von ihrem reziproken Wert, das ist in Abhängigkeit von der Zeit, während der sich das Reaktionsgemisch im Reaktionsraum aufhält.

Bezeichnet man die Gasgeschwindigkeit, d. h. die Anzahl Kubikmeter, die in der Stunde den Apparat durchströmen, mit v und den Inhalt des Reaktionsraumes mit i (gemessen in Kubikmetern), so ergibt sich für die Reaktionszeit t die Gleichung:

$$t = \frac{i}{v} \tag{1}$$

Handelt es sich nur um vergleichende Untersuchungen bei demselben Apparat, so kann man zur Vereinfachung $i = 1$ setzen; die Gleichung (1) erhält dann die Form $\tau = \frac{1}{v}$. Die Kurven der Fig. 2 geben den Reaktionsverlauf in Abhängigkeit von der Reaktionszeit für verschiedene Spannungen wieder. Als Ordinaten sind — wie üblich — die Ozonkonzentrationen in Gramm Ozon pro Kubikmeter Sauerstoff, als Abszissen die Reaktionszeiten in willkürlichem Maß aufgetragen.

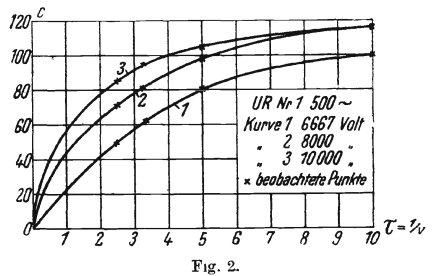


Fig. 2.

Um nun die Konzentrationen für hohe Gasgeschwindigkeiten, also für kleine Reaktionszeiten durch graphische Extrapolation zu finden, braucht man diese Kurven nur bis zum Nullpunkt zu verlängern, wie dies in der Fig. 2 geschehen ist. Der kleinste Wert von τ , bei dem Messungen gemacht wurden, ist $\tau = 2,5$. Die Kurvenabschnitte von $\tau = 2,5$ bis $\tau = 0$ sind extrapoliert.

Zu erwägen ist hierbei noch, ob man berechtigt ist, die Konzentrationskurven der Fig. 2 durch den Nullpunkt zu führen. Im allgemeinen trifft es für chemische Reaktionen zu, daß die Kurven, welche die Konzentration in Abhängigkeit von der Reaktionszeit darstellen, im Nullpunkt anfangen.

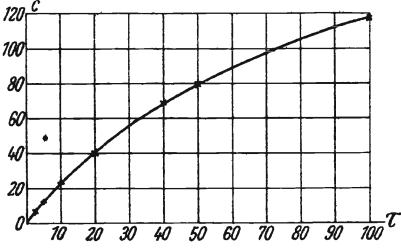


Fig. 3

Es gibt jedoch für manche photochemische Reaktionen Ausnahmen; das sind solche Reaktionen, bei denen eine sogenannte photochemische Induktion vorhanden ist. Trägt man den Verlauf solcher Reaktionen in Abhängigkeit von der Zeit in einem Koordinatensystem auf, so schneidet die Kurve die Abszissenachse nicht im Nullpunkt, sondern in irgendeinem anderen Zeitpunkt, der größer ist als Null. Frühere Messungen, siehe

Fig. 3, hatten jedoch bereits ergeben, daß die c/t -Kurve mit genügender Sicherheit ihren Anfang im Nullpunkt des Koordinatensystems nimmt.

Zu einem direkten Vergleich beider Kurven sind die aufgetragenen Zeitwerte noch mit dem Inhalt des Apparates zu multiplizieren. Dieser betrug für die Kurven Fig. 2 etwa 0,3 l, für die Kurven der Fig. 3 etwa 0,013 l. Der kleinste Zeitwert, bei dem eine Messung vorliegt, ist bei Fig. 2 also $2,5 \times 0,3 = 0,75$; dagegen bei Fig. 3 $2,5 \times 0,013 = 0,0325$. In der Fig. 3 liegt der erste beobachtete Punkt also ganz erheblich näher am Nullpunkt als in Fig. 2.

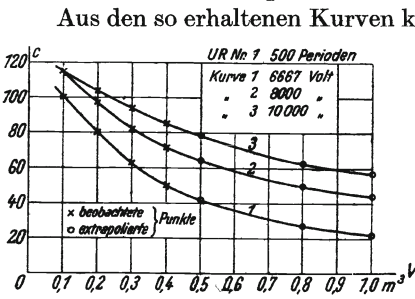


Fig. 4.

Aus den so erhaltenen Kurven kann für irgendwelchen Wert von τ die zugehörige Konzentration abgelesen werden. Da nun $\tau = \frac{1}{v}$ war, ist durch das beschriebene Verfahren

die Möglichkeit gegeben, die Konzentration für größere Werte von v zu ermitteln, wenn einige Beobachtungen bei kleineren Strömungsgeschwindigkeiten vorliegen.

Die folgenden Tabellen enthalten für verschiedene Spannungen die aus den Kurven der Fig. 2 graphisch extrapolierten Konzentrationswerte. Der benutzte Apparat ist ein größerer U-förmiger Glasapparat (UR Nr. 1). Die Versuche wurden mit 500 Perioden vorgenommen. Die Spannung, bei der die

Tabelle 1.

6667 Volt		
v	τ	c
0,4	2,5	49,5
0,5	2,0	41
0,8	1,25	27
1,0	1,0	22,5

Tabelle 2.

8000 Volt		
v	τ	c
0,4	2,5	71,5
0,5	2,0	64
0,8	1,25	49
1,0	1,0	44

Tabelle 3.

10000 Volt		
v	τ	c
0,4	2,5	84,5
0,5	2,0	78
0,8	1,25	63
1,0	1,0	57,5

Messungsreihe ausgeführt wurde, ist am Kopfe der Tabelle angegeben. Die erste Spalte enthält die Strömungsgeschwindigkeit (v), die zweite den ihr entsprechenden Wert von τ . Die dritte Spalte enthält die zugehörige Ozonkonzentration (c). Die erste Reihe jeder Tabelle ($v = 0,4$) ist beobachtet; die übrigen Reihen sind extrapoliert.

Die entsprechenden c/v -Kurven sind in Fig. 4 dargestellt; die experimentell gefundenen Werte sind mit Kreuzen, die extrapolierten Werte mit Kreisen bezeichnet.

2. Extrapolation der Ausbeute pro Kilowattstunde.

Mit Hilfe der vorstehend beschriebenen Methode ist es nun zwar möglich, die Konzentration eines Ozonapparates für höhere Gasgeschwindigkeiten aus den Konzentrationenwerten für kleinere Gasgeschwindigkeiten graphisch zu ermitteln. Das Verfahren gestattet jedoch noch keinen unmittelbaren Schluß auf die Ausbeute des Apparates. Bezeichnet man die Energieaufnahme des Apparates in Kilowatt mit w , so ergibt sich für die Ausbeute in Gramm Ozon pro Kilowattstunde, die mit A bezeichnet werden soll, die Beziehung:

$$A = \frac{c \cdot v}{w} \tag{2}$$

Um die Ausbeute hieraus zu berechnen, muß erst die Energieaufnahme des Apparates bei verschiedenen Gasgeschwindigkeiten bekannt sein. Nach Beobachtungen, die an verschiedenen Apparaten gemacht worden sind, scheint jedoch w von gewissen Strömungsgeschwindigkeiten an konstant zu sein. Die Tabellen 4—6 geben für 3 Apparate bei verschiedenen Spannungen die für die Gasgeschwindigkeiten $v = 0,1$ bis $v = 0,4$ gemessenen Werte von w .

Tabelle 4.
Apparat UR Nr. 1; 500 Perioden.

6667 Volt		8000 Volt		10000 Volt	
v	$w \cdot 10^3$	v	$w \cdot 10^3$	v	$w \cdot 10^3$
0,1	141	0,1	289	0,1	—
0,2	141	0,2	289	0,2	545
0,3	141	0,3	289	0,2	545
0,4	141	0,4	289	0,4	540

Tabelle 5.
Apparat UR Nr. 3.

8000 Volt, 500 Per.	
v	$w \cdot 10^3$
0,1	300
0,2	300
0,3	297

Tabelle 6.
Apparat UR Nr. 5.

4550 Volt, 500 Per.	
v	$w \cdot 10^3$
0,07	76,4
0,10	78
0,13	78

In solchen Fällen, wo die Beobachtung zeigt, daß w bei zunehmenden v -Werten konstant bleibt, kann man den graphisch extrapolierten Wert für c benutzen, um die Ausbeute pro Kilowattstunde für größere Gasgeschwindigkeiten nach Gleichung (2) auszurechnen. (Vgl. Tab. 7—9.)

Es wurden dann weitere Überlegungen angestellt, um ein ähnliches Extrapolationsverfahren wie für die Konzentration auch für die Ausbeute zu finden, ohne

daß dazu die Kenntnis der Energieaufnahme des Apparates bei höheren Strömungsgeschwindigkeiten erforderlich wäre. Dabei wurde auch versucht, Ausbeute und Konzentration für höhere Gasgeschwindigkeiten rechnerisch zu ermitteln aus Beobachtungen, die bei kleinen Gasgeschwindigkeiten gewonnen wurden. Mit anderen Worten: Ziel dieser Überlegungen war, die Gleichungen für die Konzentrations- und für die Ausbeutekurven zu finden. Diese Gleichungen würden dann das Mittel geben, um die Konzentration und die Ausbeute eines Ozonapparates für alle Gasgeschwindigkeiten zu berechnen. Dabei ergab sich folgendes:

Der reziproke Wert der Ausbeute, d. i. die Anzahl Kilowattstunden, die zur Erzeugung von einem Gramm Ozon erforderlich ist, werde mit e bezeichnet. Dann ist:

$$e = \frac{1}{A} \tag{3}$$

Trägt man nun in einem Koordinatensystem die Werte für e als Ordinaten und als Abszissen wiederum die Reaktionszeit ein, so ergibt sich für konstante Spannung und konstante Frequenz eine gerade Linie, die die Ordinatenachse in einem

bestimmten Punkte, dessen zugehörige Ordinate mit e_0 bezeichnet werden soll, schneidet. Trägt man dieselben Werte bei unveränderter Frequenz, aber bei einer anderen Spannung auf, so ergibt sich ebenfalls eine Gerade, die die Ordinatenachse in demselben Punkte wie die vorherige schneidet, die aber eine andere Neigung gegen die Abszissenachse besitzt. In den Figuren 5—7 sind solche Kurven für verschiedene Apparate bei verschiedenen Spannungen dargestellt. Die Kurven verlaufen alle geradlinig und schneiden die Ordinatenachse für jeden Apparat in einem Punkte mit der Ordinate e_0 , deren Wert vom Apparat abhängig ist. Die Neigung der Kurven gegen die

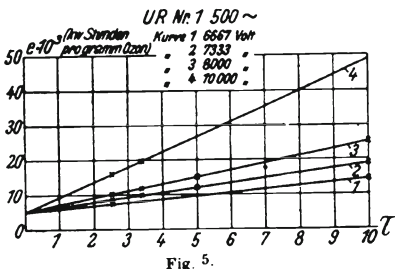


Fig. 5.

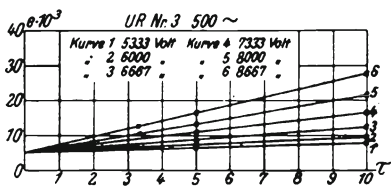


Fig. 6.

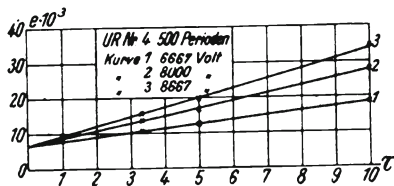


Fig. 7.

Abszissenachse wächst mit der Spannung. Bei kleinen Spannungen ist der Winkel, den die Kurve mit der Abszissenachse bildet, sehr klein, bei höheren Spannungen nimmt er beträchtliche Werte an. Diese Kurven gestatten unmittelbar die Größe e für kleine Reaktionszeiten, mithin also für große Gasgeschwindigkeiten abzulesen.

Da nun $e = \frac{1}{A}$ ist, ergeben sie auch unmittelbar die Ausbeute des Ozonapparates bei großen Gasgeschwindigkeiten, ohne daß Energiemessungen bei größeren Gasgeschwindigkeiten vorzuliegen brauchen.

Die Tabelle 7 enthält in der ersten Spalte die Strömungsgeschwindigkeiten. Die zweite Spalte enthält die (aus den nach Seite 78 extrapolierten c -Werten [Tab. 1—3]) nach Gleichung (2) berechnete Ausbeute. Die dritte Spalte gibt die Ausbeutezahlen, die man erhält, wenn man A nach dem eben beschriebenen Verfahren graphisch extrapoliert.

Tabelle 7.
UR Nr. 1.

6667 Volt, 500 Perioden		
v	Ausbeute	
0,4	140,5	139
0,5	145,3	147
0,8	153,2	166,5
1,0	159,5	169

Tabelle 8.
UR Nr. 1.

8000 Volt, 500 Perioden		
v	Ausbeute	
0,4	98,9	100
0,5	110,6	108,5
0,8	135,7	128
1,0	152,3	139

Tabelle 9.
UR Nr. 1.

10000 Volt, 500 Perioden		
v	Ausbeute	
0,4	62,0	62,2
0,5	70,1	73,4
0,8	92,5	97
1,0	105,5	107

Tabelle 8 und 9 geben dieselben Werte für andere Spannungen. Die nach beiden Methoden gewonnenen Ausbeutezahlen stimmen, wie die Tabellen zeigen, gut überein. Die Abweichungen sind bei kleinen Spannungen und großen Geschwindigkeiten (kleinen τ -Werten) naturgemäß am größten, da die e/τ -Kurve bei kleinen Spannungen nur sehr wenig gegen die Abszissenachse geneigt ist.

Die Abweichungen sind jedoch nicht größer, als sie bei experimentellen Bestimmungen gelegentlich auch vorkommen.

3. Berechnung der Konzentrations- und der Ausbeutekurven.

Die Geraden der Figg. 5, 6 und 7 lassen sich durch eine Gleichung von der Form $y - a = x \cdot k$ darstellen. Im vorliegenden Falle lautet die Gleichung der Geraden

$$e - e_0 = k \cdot \tau \tag{4}$$

In dieser Gleichung ist e_0 eine Konstante, die für alle Geraden gemeinsam gilt. In Fig. 5 ist z. B. $e_0 = 5 \cdot 10^{-3}$.

Dagegen hat die Konstante k für jede Gerade einen besonderen Wert, entsprechend ihrer Neigung gegen die Zeitachse. Da aber, wie wir gesehen hatten (Seite 80), die Neigung gegen die Zeitachse von der Spannung abhängig ist, ist auch die Konstante k von der Spannung, bei welcher der Apparat betrieben wird, abhängig. Nun stehen die Größen e und τ zu c , A und v in bekannten, einfachen Beziehungen. Mithin ist durch die im Abschnitt 2 mitgeteilte Beobachtung die Möglichkeit gegeben, Ausbeute und Konzentration eines Ozonapparates für beliebige Geschwindigkeiten zu berechnen, wenn die Konstanten e_0 und k bekannt sind.

Da $\tau = \frac{1}{v}$ war, folgt aus Gleichung (4) $e - e_0 = \frac{k}{v}$ oder

$$e = \frac{k + e_0 \cdot v}{v}. \tag{5}$$

Nun war $e = \frac{1}{A}$, mithin wird

$$A = \frac{v}{k + e_0 \cdot v}. \tag{6}$$

Nach Gleichung (2) war aber auch $A = \frac{c \cdot v}{w}$. Aus der Vereinigung mit Gleichung (6) erhält man $\frac{c \cdot v}{w} = \frac{v}{k + e_0 \cdot v}$. Daraus folgt

$$c = \frac{w}{k + e_0 \cdot v}. \tag{7}$$

Durch die beiden Gleichungen (6) und (7)

$$A = \frac{v}{k + e_0 \cdot v} \tag{6}; \quad c = \frac{w}{k + e_0 \cdot v} \tag{7}$$

wird der Verlauf der A/v -Kurven und der der c/v -Kurven bei konstant gehaltener Frequenz und Spannung vollständig beschrieben. Da die Konstanten e_0 und k durch experimentelle Bestimmungen von c bei zwei genügend auseinanderliegenden Werten von v ermittelt werden können, ist es mit Hilfe der beiden Gleichungen möglich, aus zwei Beobachtungen den vollständigen Verlauf der Ausbeute- und Konzentrationskurve für eine bestimmte Frequenz und Spannung zu berechnen. Nun hat aber e_0 bei ein und demselben Apparat für alle Spannungen den gleichen Wert (s. Fig. 5 bis 7); infolgedessen genügt für eine zweite Spannung die Ausführung einer einzigen Konzentrationsbestimmung, um die der neuen Spannung entsprechende Konstante k und damit den Verlauf der Kurve zu ermitteln.

Sind die eben angeführten Betrachtungen richtig, so darf sich, wenn der Wert von e_0 auf irgendeine Weise, z. B. durch graphische Extrapolation, bekannt ist, der Wert von k nicht mit der Strömungsgeschwindigkeit v ändern, wenn man in die Gleichung (7) den extrapolierten Wert von e_0 und die für verschiedene Strömungsgeschwindigkeiten beobachteten Konzentrationen einsetzt.

Für die Konstante k ergibt sich durch Umformung der Gleichung (7)

$$k = \frac{w}{c} - e_0 \cdot v. \quad (8)$$

In der Tabelle 10 ist die Berechnung von k für den Apparat UR Nr. 1 durchgeführt¹⁾. Die Beobachtungen wurden bei verschiedenen Spannungen zwischen 6667 und 10 000 Volt bei 500 Perioden ausgeführt. Für e_0 hatte sich durch graphische Extrapolation (Fig. 5) ergeben $e_0 = 5 \cdot 10^{-3}$.

Die Tabelle enthält für die verschiedenen Spannungen in der ersten Spalte die Strömungsgeschwindigkeit v , in der zweiten Spalte die gemessene Konzentration c , die dritte und vierte Spalte enthalten die Größen $\frac{w}{c}$ bzw. $e_0 \cdot v$, die letzte Spalte endlich gibt die nach der Gleichung (8) berechnete Konstante.

Tabelle 10.
Apparat UR Nr. 1; Frequenz 500; $e_0 = 5 \cdot 10^{-3}$.

a) 6667 Volt; $w = 141 \cdot 10^{-3}$				
v	c	$\frac{w}{c} \cdot 10^3$	$e_0 \cdot v \cdot 10^3$	$k \cdot 10^3$
0,1	100	1,41	0,5	0,91
0,2	80,5	1,75	1,0	0,75
0,3	63	2,24	1,5	0,74
0,4	50	2,82	2,0	0,82
Mittel: $k = 0,80 \cdot 10^{-3}$				
b) 7333 Volt; $w = 215 \cdot 10^{-3}$				
v	c	$\frac{w}{c} \cdot 10^3$	$e_0 \cdot v \cdot 10^3$	$k \cdot 10^3$
0,1	111,25	1,93	0,5	1,43
0,2	91	2,36	1,0	1,36
0,3	69,4	3,098	1,5	1,60
0,4	62,5	3,44	2,0	1,44
Mittel: $k = 1,458 \cdot 10^{-3}$				

¹⁾ Eine kurze Beschreibung und Zusammenstellung der benutzten Ozonapparate befindet sich in Abschnitt 7.

c) 8000 Volt; $w = 289 \cdot 10^{-3}$

v	c	$\frac{w}{c} \cdot 10^3$	$e_0 \cdot v \cdot 10^3$	$k \cdot 10^3$
0,1	114,8	2,52	0,5	2,02
0,2	97,75	2,96	1,0	1,96
0,3	82,5	3,50	1,5	2,00
0,4	71,5	4,04	2,0	2,04

Mittel: $k = 2,005 \cdot 10^{-3}$

d) 8667 Volt; $w = 360 \cdot 10^{-3}$

v	e	$\frac{w}{c} \cdot 10^3$	$e_0 \cdot v \cdot 10^3$	$k \cdot 10^3$
0,1	115,1	3,13	0,5	2,63
0,2	101	3,56	1,0	2,56
0,3	86,7	4,15	1,5	2,65
0,4	77,7	4,63	2,0	2,63

Mittel: $k = 2,618 \cdot 10^{-3}$

e) 9833 Volt; $w = 430 \cdot 10^{-3}$

v	c	$\frac{w}{c} \cdot 10^3$	$e_0 \cdot v \cdot 10^3$	$k \cdot 10^3$
0,1	—	—	0,5	—
0,2	97,8	4,395	1,0	3,395
0,3	91,25	4,71	1,5	3,21
0,4	81,5	5,28	2,0	3,28

Mittel: $k = 3,295 \cdot 10^{-3}$

f) 10000 Volt; $w = 540 \cdot 10^{-3}$

v	c	$\frac{w}{c} \cdot 10^3$	$e_0 \cdot v \cdot 10^3$	$k \cdot 10^3$
0,1	—	—	0,5	—
0,2	102,2	5,29	1,0	4,29
0,3	92,8	5,82	1,5	4,32
0,4	84,3	6,41	2,0	4,41

Mittel: $k = 4,34 \cdot 10^{-3}$

Die berechneten k -Werte sind, wie die Tabelle 10 beweist, bei konstanter Spannung unabhängig von der Strömungsgeschwindigkeit. Sie schwanken für jede Spannung in recht guter Übereinstimmung um einen Mittelwert.

In dem vorangehenden Beispiel war die Konstante e_0 graphisch ermittelt durch die Konstruktion der e/τ -Kurven. Wir geben im folgenden noch ein Beispiel für die Berechnung von e_0 . In der Gleichung (4) $e - e_0 = k \cdot \tau$ setzen wir wiederum $\tau = \frac{1}{v}$ und erhalten $e - e_0 = \frac{k}{v}$. Nun entspricht bei konstanten Versuchsbedingungen jedem Wert von v ein zugehöriger Wert von e . Bezeichnen wir die den Strömungsgeschwindigkeiten v_1 und v_2 entsprechenden Werte für e mit e_1 und e_2 , so ist $e_1 - e_0 = \frac{k}{v_1}$

und $e_2 - e_0 = \frac{k}{v_2}$. Division beider Gleichungen gibt $(e_1 - e_0) \cdot v_1 = (e_2 - e_0) \cdot v_2$. Daraus folgt

$$e_0 = \frac{e_2 \cdot v_2 - e_1 \cdot v_1}{v_2 - v_1}.$$

Statt e_2 und e_1 kann man die direkt beobachteten Größen w und c einführen. Aus Gleichung (2) und (3) ergibt sich $e = \frac{w}{c \cdot v}$. Mithin ist $e_2 \cdot v_2 = \frac{w}{c_2}$ und $e_1 \cdot v_1 = \frac{w}{c_1}$ unter der Voraussetzung, daß w bei veränderten v -Werten konstant bleibt. Durch die Einführung von w , c_1 und c_2 in die Gleichung für e_0 erhält man:

$$e_0 = \frac{\frac{w}{c_2} - \frac{w}{c_1}}{v_2 - v_1}$$

oder

$$e_0 = \frac{w \cdot (c_1 - c_2)}{c_1 \cdot c_2 \cdot (v_2 - v_1)}. \quad (9)$$

Nach dieser Formel ist e_0 in der folgenden Tabelle 11 für einen anderen Apparat (UR Nr. 5) berechnet. Die Werte wurden bei 500 Perioden gewonnen; sie gelten wie alle hier mitgeteilten Zahlen für Sauerstoff. Die Beobachtungen wurden durchgeführt für einen Spannungsbereich von 2667 Volt bis 6000 Volt. Die Geschwindigkeiten waren $v_1 = 0,0155$, $v_2 = 0,130$ cbm Sauerstoff in der Stunde.

Tabelle 11.
Apparat UR Nr. 5; Frequenz 500

		$v_1 = 0,0155$	$v_2 = 0,130$		
Volt	$w \cdot 10^4$	c_1	c_2	$e_0 \cdot 10^5$	
6000	169,5	144,5	85,5	7,075	
5333	131,6	144	77,3	6,89	
4667	101,9	140	65	7,34	
4000	68,2	129	51,5	6,95	
3333	43,05	109	38	6,45	
2667	—	—	—	—	

Mittel: $e_0 = 6,94 \cdot 10^{-3}$

In der Tabelle 11 sind die Spannungen, bei welchen die Messungen durchgeführt wurden, mit der zugehörigen Energieaufnahme (w) und den für die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 erhaltenen Konzentrationen c_1 und c_2 zusammengestellt. Die letzte Spalte enthält die nach Gleichung (9) berechneten e_0 -Werte. Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung ist gut. e_0 ist, wie dies die Fig. 5—7 schon zeigten, unabhängig von der Spannung.

Es wurde noch eine Beobachtungsreihe bei 2667 Volt, also bei sehr kleiner Belastung ausgeführt. Bei dieser Belastung ergaben sich verschiedene Werte von w für $v = 0,0155$ und $v = 0,130$. Da außerdem c_1 und c_2 verhältnismäßig klein sind, wird der Fehler in der Differenz $c_2 - c_1$, der durch unvermeidbare Beobachtungsfehler bei der Bestimmung von c_1 und c_2 entsteht, sehr groß. Der für die niedrige

Spannung berechnete Wert von e_0 weicht deshalb von den übrigen Werten ab und schwankt je nachdem, welcher Wert von w der Rechnung zugrunde gelegt wird. Er kann deshalb zur Bildung eines Mittelwertes fortgelassen werden. Aus der Tabelle ergibt sich als Mittelwert $e_0 = 6,94 \cdot 10^{-3}$. Dieser Wert stimmt gut mit dem graphisch ermittelten Wert überein.

Berechnet man mit dem für e_0 berechneten Wert die Konstante k nach der Gleichung $k = \frac{w}{c} - e_0 \cdot v$ (8), so erhält man für verschiedene Spannungen die in der letzten Spalte der Tabelle 12 angegebenen Werte. Auch hier ist die Übereinstimmung bei $v = 0,0155$ und $v = 0,130$ eine sehr gute.

In der letzten Querreihe der Tabelle 12 sind noch die Energieaufnahmen w und die Konzentrationen c für 2667 Volt angegeben, und daraus die Konstante k berechnet. Die Abweichung zwischen den Werten von k für $v = 0,0155$ und $v = 0,130$ ist sehr viel größer, als in den übrigen Querreihen.

Wie sich später zeigen wird, ist der Wert von c für $v = 0,0155$ offenbar zu niedrig.

Tabelle 12.

UR Nr. 5, Frequenz 500; $e_0 = 6.94 \cdot 10^{-3}$

Volt	$v \cdot 10^3$	$w \cdot 10^3$	c	$w/c \cdot 10^3$	$e_0 \cdot v \cdot 10^3$	$k \cdot 10^3$
6000	15,5	169,5	144,5	1,173	0,1076	1,065
	130	169,5	85,5	1,982	0,902	1,082
5333	15,5	131,6	144	0,914	0,1076	0,806
	130	131,6	77,3	1,702	0,902	0,800
4667	15,5	101,9	140	0,728	0,1076	0,620
	130	101,9	65	1,567	0,902	0,665
4000	15,5	68,2	129	0,529	0,1076	0,421
	130	68,2	51,5	1,324	0,902	0,422
3333	15,5	43,05	109	0,395	0,1076	0,287
	130,0	43,05	38	1,132	0,902	0,230
2667	15,5	21,5	72,5	0,296	0,1076	0,188
	130	24,1	23,5	1,025	0,902	0,113

Ist nun nach einer der vorstehend beschriebenen Methoden e_0 und k ermittelt, so können daraus aus den Gleichungen

$$A = \frac{v}{k + e_0 \cdot v} \quad (6) \quad \text{und} \quad c = \frac{w}{k + e_0 \cdot v} \quad (7) \quad \text{die } A/v\text{- und } c/v\text{-Kurven berechnet werden.}$$

In der Tabelle 13 ist die Rechnung für den Apparat UR Nr. 1 bei 500 Perioden durchgeführt. Zum Vergleich sind außer den beobachteten und berechneten Werten für A und c auch noch die extrapolierten Werte angeführt. Die Tabelle 13 enthält in der ersten Spalte die Strömungsgeschwindigkeit; die Spalte 2 gibt die Werte für $k + e_0 \cdot v$; die dritte bis sechste Spalte enthalten die Ausbeute, und zwar: die berechnete (Spalte 3), die beobachtete (Spalte 6) und die extrapolierte Ausbeute (Spalte 4 und 5). Dabei ist die nach Seite 79 extrapolierte Ausbeute mit I und die nach Seite 80 extrapolierte Ausbeute mit II bezeichnet. Die Spalten 7—9 endlich enthalten die berechneten, extrapolierten und beobachteten Konzentrationen.

Tabelle 13.
Apparat UR No. 1; Frequenz 500.

v	$(k + e_0 \cdot v) \cdot 10^4$	Ausbeute				Konzentration		
		berechn.	I	II	beob.	berechn.	extrapoliert	beob.
a) 6667 Volt; $e_0 = 5 \cdot 10^{-3}$; $k = 0,8 \cdot 10^{-3}$; $w = 141 \cdot 10^{-3}$.								
0,1	1,3	76,95	—	—	70,9	108,5	—	100
0,2	1,8	111	—	—	114	78,4	—	80,5
0,3	2,3	130,5	—	—	134	61,3	—	63
0,4	2,8	142,8	—	—	141,8	50,35	—	50
0,5	3,3	151,6	145,3	147	—	42,75	41	—
0,8	4,8	166,7	153	166,5	—	29,4	27	—
1,0	5,8	172,5	159,5	169	—	24,3	22,5	—
1,5	8,3	180,8	165	174	—	17,0	15,5	—
b) 7333 Volt; $e_0 = 5 \cdot 10^{-3}$; $k = 1,46 \cdot 10^{-3}$; $w = 215 \cdot 10^{-3}$.								
0,1	1,96	51	—	—	51,8	109,6	—	111,25
0,2	2,46	81,3	—	—	84,6	87,4	—	91
0,3	2,96	101,3	—	—	96,8	72,6	—	69,4
0,4	3,46	115,6	—	—	116,2	62,2	—	62,5
0,5	3,96	126,2	—	—	—	54,3	—	—
0,8	5,46	146,5	—	—	—	39,4	—	—
1,0	6,46	154,8	—	—	—	33,6	—	—
1,5	8,96	167,5	—	—	—	24,0	—	—
c) 8000 Volt; $e_0 = 5 \cdot 10^{-3}$; $k = 2,01 \cdot 10^{-3}$; $w = 289 \cdot 10^{-3}$.								
0,1	2,51	39,85	—	—	39,5	115	—	114,8
0,2	3,01	66,45	—	—	66,5	96,1	—	97,75
0,3	3,51	85,5	—	—	85,45	82,3	—	82,5
0,4	4,01	99,8	—	—	99,9	72,0	—	71,5
0,5	4,51	111	110,6	108,5	—	64,1	64	—
0,8	6,01	133	135,7	128	—	48,2	49	—
1,0	7,01	142,6	152,3	139	—	41,2	44	—
1,5	9,51	157,5	—	—	—	30,4	34	—
d) 8667 Volt; $e_0 = 5 \cdot 10^{-3}$; $k = 2,62 \cdot 10^{-3}$; $w = 360 \cdot 10^{-3}$.								
0,1	3,12	31,1	—	—	32	115,5	—	115,1
0,2	3,62	55,2	—	—	56,1	99,5	—	101
0,3	4,12	71,8	—	—	72,1	87,4	—	86,7
0,4	4,62	86,6	—	—	86,3	78,0	—	77,7
0,5	5,12	97,7	—	—	—	70,3	—	—
0,8	6,62	120,8	—	—	—	54,4	—	—
1,0	7,62	131,2	—	—	—	47,5	—	—
1,5	10,12	148,2	—	—	—	35,6	—	—
e) 9333 Volt; $e_0 = 5 \cdot 10^{-3}$; $k = 3,3 \cdot 10^{-3}$; $w = 430 \cdot 10^{-3}$.								
0,1	3,8	26,3	—	—	—	113,2	—	—
0,2	4,3	46,5	—	—	45,5	100	—	97,8
0,3	4,8	62,5	—	—	63,6	89,6	—	91,25
0,4	5,3	75,5	—	—	75,8	81,2	—	81,5
0,5	5,8	86,2	—	—	—	74,2	—	—
0,8	7,3	109,5	—	—	—	58,9	—	—
1,0	8,3	120,5	—	—	—	51,8	—	—
1,5	10,8	139,0	—	—	—	39,6	—	—
f) 10 000 Volt; $e_0 = 5 \cdot 10^{-3}$; $k = 4,32 \cdot 10^{-3}$; $w = 540 \cdot 10^{-3}$.								
0,1	4,82	20,75	—	—	—	112	—	—
0,2	5,32	37,6	—	—	37,8	101,5	—	102,2
0,3	5,82	51,5	—	—	51,55	92,8	—	92,8
0,4	6,32	63,3	—	—	62,6	85,45	—	84,5
0,5	6,82	73,35	70,1	73,4	—	79,2	78	—
0,8	8,32	96,2	92,5	97	—	64,95	63	—
1,0	9,32	107,3	105,5	107	—	57,95	57,5	—
1,5	11,82	127	—	—	—	45,65	47	—

Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung ist eine recht gute. Auch die berechneten und die extrapolierten Werte stimmen, wenn man die Ungenauigkeit der Extrapolationsmethode namentlich in bezug auf die Ausbeute berücksichtigt, gut überein. (Vgl. hierzu auch Fig. 9.)

4. Berechnung der Konstante k für verschiedene Spannungen.

Hier soll kurz eine ebenfalls empirisch gefundene Methode beschrieben werden, um die Konstante k , die ja mit der Spannung veränderlich ist, für verschiedene Spannungen zu berechnen. Die Möglichkeit zur Berechnung wurde wieder durch das Verfahren der graphischen Darstellung gefunden, ähnlich wie das Verfahren zur Berechnung der Ausbeuten und der Konzentrationen. Trägt man in ein Koordinatensystem als Ordinate den Logarithmus der Konstante k und als Abszisse den reziproken Wert der Spannung ein, so erhält man eine Reihe von Punkten, die in genügend guter Übereinstimmung auf einer geraden Linie liegen. In der Fig. 8 ist dies für die beiden Apparate UR Nr. 1 und UR Nr. 5 ausgeführt. Um einfachere Zahlenverhältnisse zu bekommen, ist als Ordinate $\log k \cdot 10^4$ und als Abszisse $\frac{10^3}{V}$ aufgetragen, wo V die Spannung in Volt bedeutet, bei welcher der Apparat arbeitet. Die Geraden der Fig. 8 genügen der Gleichung

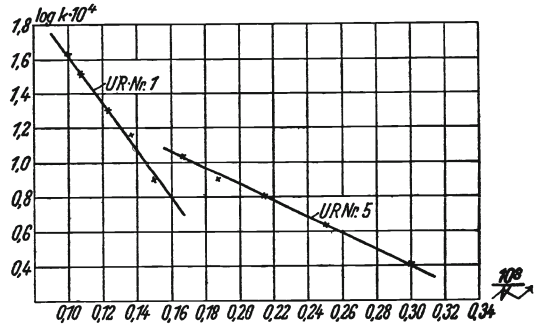


Fig. 8.

Um einfachere Zahlenverhältnisse zu bekommen, ist als Ordinate $\log k \cdot 10^4$ und als Abszisse $\frac{10^3}{V}$ aufgetragen, wo V die Spannung in Volt bedeutet, bei welcher der Apparat arbeitet. Die Geraden der Fig. 8 genügen der Gleichung

$$\log k \cdot 10^4 = \frac{K \cdot 10^3}{V} + B. \tag{10}$$

Aus Fig. 8 ergibt sich für UR Nr. 1:

1. $1,34 = K \cdot 0,12 + B.$
2. $1,0 = K \cdot 0,145 + B.$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$K = -13,6 \quad \text{und} \quad B = 2,972.$$

Berechnet man mit Hilfe dieser beiden Konstanten nach Gleichung (10) die Werte von k , so ergeben sich die in der Tabelle 14 enthaltenen Zahlen.

Tabelle 14.

UR Nr. 1; Frequenz 500. $K = -13,6$; $B = 2,972.$

V	$10^3/V$	$K \cdot 10^3$	$\log K \cdot 10^4$	$\log K \cdot 10^4$	$K \cdot 10^3$
		beobachtet		berechnet	
10000	0,1	4,321	1,63	1,612	4,093
9333	0,1072	3,295	1,51	1,515	3,273
8667	0,1153	2,623	1,419	1,404	2,535
8000	0,125	2,005	1,302	1,272	1,871
7333	0,1365	1,458	1,164	1,116	1,306
6667	0,15	0,8025	0,904	0,932	0,855
5000	0,2	—	—	0,252	0,179

In derselben Weise ergibt sich für den Apparat UR Nr. 5 aus Fig. 8:

$$1. 0,87 = K \cdot 0,20 + B$$

$$2. 0,54 = K \cdot 0,27 + B.$$

Hieraus berechnet sich:

$$K = -4,71 \text{ und } B = 1,1812.$$

Tabelle 15.

UR Nr. 5; Frequenz 500. $K = -4,71$; $B = 1,1812$.

V	$10^3/V$	$k \cdot 10^3$	$\log k \cdot 10^4$	$\log k \cdot 10^4$	$k \cdot 10^3$
		beobachtet		berechnet	
6000	0,1667	1,07	1,029	1,026	1,062
5333	0,1877	0,80	0,903	0,902	0,798
4667	0,2143	0,64	0,806	0,802	0,634
4000	0,250	0,42	0,623	0,635	0,432
3333	0,300	0,26	0,415	0,399	0,251
2667	0,3745	—	—	0,046	0,111

Ein Vergleich der beobachteten und berechneten k -Werte zeigt, daß mit Hilfe der Gleichung (10)

$$\log k \cdot 10^4 = \frac{K \cdot 10^3}{V} + B$$

die Konstanten für verschiedene Spannungen und damit auch die Konzentrationen und Ausbeuten berechnet werden können.

Am Schluß der Tabelle 15 ist für den Apparat UR Nr. 5 die Konstante K für 2667 Volt berechnet. Sie stimmt überein mit dem in der letzten Zeile der Tabelle 12 durch Beobachtung gefundenen Wert.

In der folgenden Tabelle 16 sind für den Apparat UR Nr. 1 die aus den berechneten k -Werten sich ergebenden Ausbeuten und Konzentrationen zusammengestellt. Zum Vergleich sind die entsprechenden experimentell gefundenen, sowie die extrapolierten und die nach Abschnitt 3 berechneten Werte, die zum Teil schon in Tabelle 13 enthalten sind, noch einmal aufgeführt. Außerdem sind die Rechnungen auch für ganz kleine Gasgeschwindigkeiten durchgeführt.

Es bedeutet „ k beob.“ die aus experimentell gefundenen A - oder c -Werten nach Seite 82, Gleichung (8) berechnete Konstante, während „ k berechnet“ die nach Seite 87, Gleichung (10) berechnete Konstante bedeutet. Die Bezeichnung „extrapoliert I bzw. II“ ist identisch mit der entsprechenden Bezeichnung in Tabelle 13.

Für die Spannung von 5000 Volt liegen keine Messungen vor. Es können deshalb, da die Energieaufnahme des Apparates (w) bei 5000 Volt nicht bekannt ist, nur die nach Gleichung (6) berechneten Ausbeutezahlen angegeben werden.

Um die gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung besser zu veranschaulichen, sind in Fig. 9 die Ausbeuten in Abhängigkeit von der Gasgeschwindigkeit für die in Tabelle 16 angegebenen Spannungen graphisch dargestellt. In dieser Fig. sind die experimentell gefundenen, sowie die aus der beobachteten und der berechneten Konstante k gefundenen Ausbeuten eingetragen.

In diesem Zusammenhang sei noch auf die Kurven der Fig. 10 verwiesen, die die Abhängigkeit der Ausbeute von der Spannung bei konstanter Gasgeschwindigkeit

Tabelle 16.

UR Nr. 1. $e_0 = 5 \cdot 10^{-3}$; Frequenz 500.

v	Ausbeute					Konzentration			
	‰ beob.	‰ berechn.	extrapoliert		beob.	‰ beob.	‰ berechn.	extrap.	beob.
			I	II					
a) 5000 Volt									
0,01	—	43,65	—	—	—	—	—	—	—
0,03	—	91,2	—	—	—	—	—	—	—
0,05	—	116,5	—	—	—	—	—	—	—
0,1	—	147,2	—	—	—	—	—	—	—
0,2	—	169,6	—	—	—	—	—	—	—
0,3	—	179	—	—	—	—	—	—	—
0,4	—	183,5	—	—	—	—	—	—	—
0,5	—	186,9	—	—	—	—	—	—	—
0,8	—	191,5	—	—	—	—	—	—	—
1,0	—	193	—	—	—	—	—	—	—
1,5	—	195,5	—	—	—	—	—	—	—
b) 6667 Volt									
0,01	11,72	11,05	—	—	—	(165)	(155,8)	—	—
0,03	31,5	29,85	—	—	—	(148)	(140)	—	—
0,05	47,5	45,3	—	—	—	(134)	(127,6)	—	—
0,1	76,95	73,8	—	—	70,9	108,5	104	—	100
0,2	111	107,8	—	—	114	78,4	76	—	80,5
0,3	130,5	127,5	—	—	134	61,3	59,9	—	63
0,4	142,8	140,0	—	—	141,8	50,35	49,4	—	50
0,5	151,6	149	145,3	147	—	42,75	42,05	41	—
0,8	166,7	164,5	153	166,5	—	29,4	29,05	27	—
1,0	172,5	170,8	159,5	169	—	24,3	24,1	22,5	—
1,5	180,8	179,7	165	174	—	17,0	16,87	15,5	—
c) 8000 Volt									
0,01	4,87	5,21	—	—	—	(141)	(150,5)	—	—
0,03	13,92	14,85	—	—	—	(134)	(143)	—	—
0,05	22,2	23,6	—	—	—	(128)	(136,2)	—	—
0,1	39,85	42,2	—	—	39,5	115	122	—	114,8
0,2	66,45	69,7	—	—	66,5	96,1	100,5	—	97,75
0,3	85,5	89	—	—	85,45	82,3	85,7	—	82,5
0,4	99,8	103,3	—	—	99,9	72,0	74,6	—	71,5
0,5	111	114,4	110,6	108,5	—	64,1	66,1	64	—
0,8	133	136,1	135,7	128	—	48,2	49,2	49	—
1,0	142,6	145,5	152,3	139	—	41,2	42,1	44	—
1,5	157,5	160,0	—	—	—	30,4	30,85	34	—
d) 10 000 Volt									
0,01	2,29	2,41	—	—	—	(123,6)	(130,2)	—	—
0,03	6,71	7,06	—	—	—	(121)	(127,2)	—	—
0,05	10,95	11,5	—	—	—	(118,2)	(124,3)	—	—
0,1	20,75	21,8	—	—	—	112	117,5	—	—
0,2	37,6	39,3	—	—	37,8	101,5	106	—	—
0,3	51,5	53,6	—	—	51,55	92,8	96,6	—	102,2
0,4	63,3	65,6	—	—	62,5	85,45	88,6	—	92,8
0,5	73,35	75,9	70,1	73,7	—	79,2	81,9	78	84,5
0,8	96,2	98,9	92,5	97	—	64,95	66,8	63	—
1,0	107,3	110,0	105,5	107	—	57,95	59,4	57,5	—
1,5	127	129,5	—	—	—	45,65	46,6	47	—

wiedergeben. Die Kurvenpunkte für die Spannungen von 5000 bis 10 000 Volt sind der Fig. 9 entnommen. Für die Spannungen von 1000 bis 4000, 12 500 und 15 000 Volt sind die k -Werte nach Gleichung (10) berechnet und in Tabelle 17 wiedergegeben.

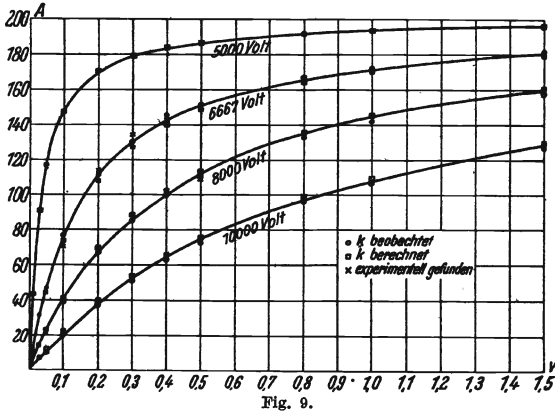


Fig. 9.

Tabelle 17.
UR Nr. 1; Frequenz 500; $K = -13,6$;
 $B = 2,972$.

Volt	$k \cdot 10^3$
1 000	0,00000
2 000	0,00001
3 000	0,00275
4 000	0,0373
12 500	7,656
15 000	11,615

Aus den k -Werten der Tabelle 17 ergeben sich nach Gleichung (6) die in Tabelle 18 enthaltenen Ausbeutewerte.

Tabelle 18.
UR Nr. 1; Frequenz 500; $e_0 = 5 \cdot 10^{-3}$.

	Ausbeute bei				
	$v = 0,1$	$v = 0,2$	$v = 0,4$	$v = 1,0$	$v = 1,5$
1000 Volt $k \cdot 10^3 = 0,00000$	200	200	200	200	200
2000 Volt $k \cdot 10^3 = 0,00001$	200	200	200	200	200
3000 Volt $k \cdot 10^3 = 0,00275$	198,8	199,4	199,7	199,9	200
4000 Volt $k \cdot 10^3 = 0,00373$	186,2	192,3	196,6	198,9	199,1
12 500 Volt $k \cdot 10^3 = 7,656$	12,26	23,1	41,45	79	99
15 000 Volt $k \cdot 10^3 = 11,615$	8,26	15,85	29,4	60,2	78,5

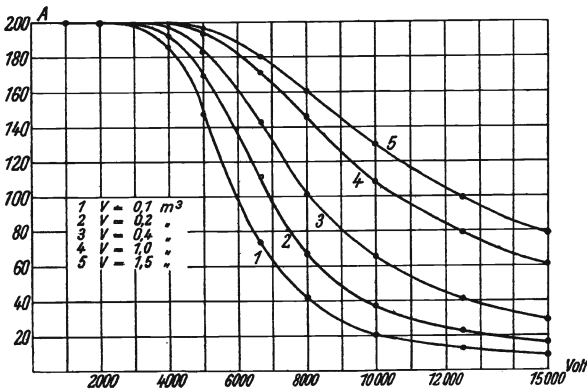


Fig. 10.

Aus den Zahlen der Tabelle 18 kann dann im Verein mit den Punkten der Fig. 9 der vollständige Verlauf der Ausbeute-Spannungskurven von den kleinsten bis zu den höchsten Spannungswerten dargestellt werden.

Wieweit für die Grenzfälle die Rechnung mit der Beobachtung übereinstimmt, bleibe zunächst dahingestellt.

Aus Vorstehendem folgt, daß mit Hilfe der drei Konstanten: e_0 , K und B die Ausbeuten eines Ozonapparates für sämtliche Spannungen und Gasgeschwindigkeiten bei konstanter Frequenz aus den Gleichungen

$$\log k \cdot 10^4 = \frac{K \cdot 10^3}{V} + B \quad (10) \quad \text{und} \quad A = \frac{v}{k + e_0 \cdot v} \quad (6)$$

berechnet werden können, wenn die Konstanten einmal ermittelt sind, was durch drei experimentelle Bestimmungen bei zwei verschiedenen Gasgeschwindigkeiten und zwei verschiedenen Spannungen geschieht.

Dagegen können die Konzentrationen nicht ohne weiteres berechnet werden, da nach Gleichung (7) $c = \frac{w}{k + e_0 \cdot v}$ auch die Energieaufnahme des Apparates bekannt sein muß. Diese ist aber abhängig von der Spannung und innerhalb gewisser Grenzen auch von der Gasgeschwindigkeit. Deshalb fehlen in Tabelle 16 bei 5000 Volt die Konzentrationswerte vollständig. Für die übrigen Spannungen sind die c -Werte für ganz geringe Gasgeschwindigkeiten eingeklammert, da für diese Gasgeschwindigkeiten die Annahme, daß w von der Strömungsgeschwindigkeit unabhängig sei, nicht mehr zutrifft.

5. Diskussion und Umformung der Gleichungen für Ausbeute und Konzentration (Grenzkonzentration, Nullausbeute und „Räumliche Watt-Dichte“).

Den in den beiden vorigen Abschnitten entwickelten Gleichungen haftet noch etwas Willkürliches an, insofern wir den Reaktionsraum zur Vereinfachung der Rechnung gleich eins gesetzt haben. Um zwei beliebige Ozonapparate vergleichen zu können, muß jedoch der Reaktionsraum berücksichtigt werden, da dieser maßgebend ist für die Zeit, während der das Gas, in unserem Falle der Sauerstoff, der Wirkung der stillen Entladung ausgesetzt ist. Bei gleichen Strömungsgeschwindigkeiten (gleichen Werten von v) ist der Sauerstoff in einem Ozonapparat mit großem Entladungsraum der Wirkung der Entladung natürlich länger ausgesetzt, als in einem Apparat mit kleinerem Entladungsraum.

Vorher sollen jedoch die Grenzfälle besprochen werden, d. h. die Werte, die A und c annehmen, wenn die Gasgeschwindigkeit oder die an den Apparat gelegte Spannung ihre äußersten Werte, das ist einerseits Null, andererseits Unendlich erreichen.

Wir betrachten zunächst die Grenzfälle für die Gasgeschwindigkeit. Es war $A = \frac{v}{k + e_0 \cdot v}$ (6). Setzen wir $v = 0$, so wird $A = 0$. Zur Berechnung des A -Wertes für $v = \infty$ formen wir Gleichung (6) um in $A = \frac{1}{\frac{k}{v} + e_0}$; setzen wir nun $v = \infty$, so wird $\frac{k}{v} = 0$ und mithin $A = \frac{1}{e_0}$. Die Ausbeute für unendlich große Gasgeschwindigkeit ist also $\frac{1}{e_0}$. Wir bezeichnen diese von Warburg „Nullausbeute“¹⁾ genannte Größe mit A_0 . Es ist dann:

$$A_0 = \frac{1}{e_0}. \quad (11)$$

Für die Konzentration gilt die Gleichung $c = \frac{w}{k + e_0 \cdot v}$ (7). Wird die Strömungsgeschwindigkeit kleiner, so wächst die Konzentration, um bei der Geschwindigkeit

¹⁾ Unter Ausbeute, also auch unter Nullausbeute, ist hier immer die technische Ausbeute, d. i. die Ausbeute für die Kilowattstunde, verstanden. Sie ist identisch mit der Größe \mathfrak{B} bzw. \mathfrak{B}_0 nach der Warburgschen Nomenklatur.

$v = 0$ den Höchst- oder Grenzwert zu erreichen. Wird in Gleichung (7) $v = 0$, so erhalten wir für die Grenzkonzentration, die wir mit C bezeichnen, die Beziehung

$$C = \frac{w}{k}. \quad (12)$$

Wird dagegen die Strömungsgeschwindigkeit unendlich groß, so folgt für $v = \infty$ aus Gleichung (7) $c = 0$.

Es gelten somit für die Grenzfälle der Geschwindigkeit $v = 0$ bzw. $v = \infty$ die Gleichungen:

$$\text{für die Ausbeute } A = 0 \text{ bzw. } A_0 = \frac{1}{e_0} \quad (11) \text{ und}$$

$$\text{für die Konzentration } C = \frac{w}{k} \quad (12) \text{ bzw. } c = 0.$$

Daß die Theorie mit der Beobachtung übereinstimmt, folgt für die Ausbeute ohne weiteres aus den Tabellen 13 und 16 sowie aus Fig. 9. Die Ausbeute steigt mit zunehmender Gasgeschwindigkeit und nähert sich einem Grenzwert. Bei sehr kleinen Spannungen wird dieser Grenzwert schon bei verhältnismäßig geringen Gasgeschwindigkeiten erreicht. (Vgl. Tabelle 17 und 18, in denen die k - und A -Werte nach Gleichung (7) berechnet sind.)

Da sich für den benutzten Apparat UR Nr. 1 $e_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ (vgl. Fig. 5) ergeben hatte, wird nach Gleichung (11) $A_0 = \frac{1}{5 \cdot 10^{-3}} = 200$.

Die Nullausbeute ist, da in der Gleichung (11) keine von der Spannung abhängige Größe enthalten ist, von der Spannung unabhängig. Die Kurven der Fig. 9 streben daher alle demselben bei $A = 200$ liegenden Grenzwert zu.

In ähnlicher Weise wie die Ausbeutekurven scheinen auch die Konzentrationskurven in Fig. 2 und 4 einem für alle Kurven gemeinsamen Grenzwert zuzustreben. Ist dies der Fall, d. h. ist die Grenzkonzentration wirklich von der Spannung, bei welcher der Apparat betrieben wird, unabhängig, so müßte das Verhältnis $\frac{w}{k}$ für alle Wertepaare von w und k konstant sein. In den Tabellen 19 und 20 sind die Werte für $C = \frac{w}{k}$ für die beiden Apparate UR Nr. 1 und Nr. 5 zusammengestellt. Für Apparat UR Nr. 5 sind die Werte gut konstant, während bei dem Apparat UR Nr. 1 von einer Konstanz nicht gesprochen werden kann.

Tabelle 19.

UR Nr. 1; Frequenz 500.

$w \cdot 10^3$	$k \cdot 10^3$	$\frac{w}{k}$
141	0,8025	176
215	1,458	147,5
289	2,005	144
360	2,623	137
430	3,295	130,5
540	4,32	125

Tabelle 20.

UR Nr. 5; Frequenz 500.

$w \cdot 10^3$	$k \cdot 10^3$	$\frac{w}{k}$
43,05	0,26	165,5
68,2	0,42	162,5
101,9	0,64	159
131,6	0,80	164,5
169,5	1,07	158,5

Der Unterschied zwischen beiden Versuchsreihen liegt einmal darin, daß bei den Versuchen mit UR Nr. 5 die Strömungsgeschwindigkeit besser konstant gehalten werden konnte, als bei den Versuchen mit UR Nr. 1; sodann waren die beim Apparat

UR Nr. 5 benutzten Strömungsgeschwindigkeiten — bezogen auf die Einheit des Reaktionsraumes — sehr viel kleiner als bei dem Apparat UR Nr. 1. Es betrug der Inhalt von UR Nr. 1 etwa 300 ccm, der von UR Nr. 5 etwa 82 ccm; die kleinsten Strömungsgeschwindigkeiten waren entsprechend 100 Liter und 15 Liter. Das ergibt auf die Einheit des Reaktionsraumes bezogen für UR Nr. 1 eine Strömungsgeschwindigkeit von $100 : 300 = 0,33$ Litern und für UR Nr. 5 eine solche von $15 : 82 = 0,18$ Litern.

Außerdem ist noch folgendes zu beachten: $C = \frac{w}{k}$ stellt die Grenzkonzentration dar, d. h. diejenige Konzentration, die der Apparat bei sehr kleinen Gasgeschwindigkeiten gibt. Wir hatten aber darauf hingewiesen, daß für sehr kleine Gasgeschwindigkeiten die allen unseren Rechnungen bisher zugrunde gelegte Annahme, daß bei konstanter Spannung w konstant sei, nicht mehr zutrifft. Wird die Gasgeschwindigkeit sehr klein, so nimmt w bei konstanter Spannung ab. Die Formel für die Grenzkonzentration müßte daher statt $C = \frac{w}{k}$ heißen: $C = \frac{w_0}{k}$, wo unter w_0 die Energieaufnahme bei unendlich kleiner Gasgeschwindigkeit verstanden ist. (Da bei dem Apparat UR Nr. 5 w bei kleineren Strömungsgeschwindigkeiten gemessen wurde, so kommen diese w -Werte näher an w_0 heran als beim Apparat UR Nr. 1).

Es kommt also dadurch, daß den Rechnungen und Beobachtungen konstante Spannung zugrunde gelegt wird, eine gewisse Schwierigkeit in die rechnerische Behandlung der Sache hinein. Diese Schwierigkeiten werden noch vermehrt, wenn wir die Ausbeuten für die Grenzwerte der Spannung, also für die Spannungen Null und Unendlich betrachten.

Wird die an den Apparat angelegte Spannung geändert, so ändert sich auch die Konstante k . Um die Grenzwerte, die Ausbeute und Konzentration annehmen, wenn die Spannung ihre Grenzwerte erreicht, kennenzulernen, bestimmen wir daher zunächst die Grenzwerte für k . Hierzu gibt es zwei Wege.

Im Abschnitt II hatte sich ergeben, daß der Winkel, den die Geraden der Fig. 5 mit der Zeitachse bilden, um so größer ist, je größer die Spannung ist, bei welcher der Apparat betrieben wird, und umgekehrt. Wird dieser Winkel mit φ bezeichnet, so folgt aus Gleichung (4) $e - e_0 = k \cdot \tau$,

$$\frac{e - e_0}{\tau} = k = \operatorname{tg} \varphi.$$

Wird nun die Spannung kleiner, so wird auch der Winkel φ kleiner, um schließlich gleich Null zu werden. Für diesen Fall wird aber $\operatorname{tg} \varphi = 0$; also auch $k = 0$. Nimmt dagegen die Spannung zu, so wächst entsprechend φ . Der größte Wert, den φ annehmen kann, ist 90° . Für diesen Fall ist $\operatorname{tg} \varphi = \infty$. Also auch $k = \infty$.

Aus der Fig. 5 und der Gleichung (4) ergeben sich also für k die Grenzwerte:

für die Spannung Null $k = 0$,

für die Spannung Unendlich $k = \infty$.

Die Abhängigkeit der Konstanten k von der Spannung V wird aber auch ausgedrückt durch die Gleichung (10)

$$\log k \cdot 10^4 = \frac{K \cdot 10^3}{V} + B$$

Wird die Spannung $V = 0$, so wird, da nach Seite 87 K negative Werte hat, $K \cdot \frac{10^3}{V} = -\infty$; mithin ist auch $\log k \cdot 10^4 = -\infty$, folglich $k = 0$. Lassen wir in Gleichung (10) $V = \infty$ werden, so wird der Ausdruck $K \cdot \frac{10^3}{V} = 0$, mithin wird $\log k \cdot 10^4 = B$, d. h. mit zunehmender Spannung erreicht die Konstante k einen Grenzwert:

$$k \cdot 10^4 = 10^B \quad \text{oder} \quad k = 10^{B-4}.$$

Da im vorliegenden Fall $B = 2,972$ war (Seite 87), so ergibt sich: $k = 93,76 \cdot 10^{-3}$. Aus Gleichung (10) folgen also für k die Grenzwerte

für die Spannung Null $k = 0$,

für die Spannung Unendlich $k = 10^{B-4} = 93,76 \cdot 10^{-3}$.

Für die untere Grenze der Spannung führen also beide Wege zu demselben Wert von k , mithin auch zu demselben Wert von A . Für $k = 0$ folgt aus Gleichung (6)

$$A = \frac{v}{k + e_0 \cdot v},$$

$$A_0 = \frac{1}{e_0} = A_0.$$

Das ist dieselbe „Nullausbeute“, die wir oben für die Gasgeschwindigkeit $v = \infty$ abgeleitet hatten und zu der wir durch die Konstruktion der Kurven der Fig. 10 geführt waren. Die „Nullausbeute“ eines Ozonapparates ist also bei konstanter Frequenz und konstanter Gasbeschaffenheit sowohl von der Gasgeschwindigkeit als auch von der Spannung unabhängig. Sie ist eine jedem Apparat eigentümliche Größe, die von den Eigenschaften des Apparates — Elektrodenabstand, Beschaffenheit des Dielektrikums — abhängig ist.

Betrachten wir dagegen die obere Grenze der Spannung, so haben wir für k zwei Grenzwerte, je nachdem wir von der Fig. 5 oder der Gleichung (10) ausgehen: In einem Falle hatten wir $k = \infty$, im anderen $k = 10^{B-4}$ oder $k = 93,76 \cdot 10^{-3}$. Dementsprechend erhalten wir auch zwei Werte für die Ausbeute bei der Spannung Unendlich, nämlich $A = 0$ (für $k = \infty$) und $A = \frac{v}{10^{B-4} + e_0 \cdot v} = \frac{v}{\frac{10^{B-4}}{v} + e_0}$ (für $k = 10^{B-4}$).

Das bedeutet: Im ersten Fall ist der Grenzwert, den die Ausbeute bei wachsender Spannung erreicht, von der Gasgeschwindigkeit unabhängig, im zweiten Fall nicht. Beide Betrachtungen führen aber zu einem ganz verschiedenen Endverlauf der Kurven der Fig. 10. Für $k = \infty$; $A = 0$ nähern sich die Kurven der Fig. 10 mit zunehmender Spannung asymptotisch der Abszissenachse, während sie für $k = 10^{B-4}$;

$$A = \frac{v}{\frac{10^{B-4}}{v} + e_0}$$

sich nicht der Abszissenachse nähern, sondern einer Geraden, die parallel zu dieser gezogen ist. Der Abstand dieser Geraden von der Abszissenachse ist von der Gasgeschwindigkeit abhängig. Auf Grund dieser Abweichungen zwischen den beiden k bzw. A -Werten für unendlich hohe Spannungen betrachten wir die Gleichung (10) nur als annähernd gültig und zwar nur für einen zum mindesten nach oben begrenzten Bereich.

Die eben erwähnten Unstimmigkeiten bei der Berechnung der Grenzkonzentration und bei Berechnung der Ausbeute für äußerst hohe Spannungen, sowie die Unmöglichkeit der Konzentrationsberechnung aus der Gleichung $c = \frac{w}{k + e_0 \cdot v}$, ohne daß w für die in Frage kommende Spannung gemessen ist, ließen es zweckmäßig erscheinen, die Vorgänge bei der Ozonbildung nicht mehr unter dem Gesichtspunkte konstanter Spannung zu betrachten, sondern unter dem Gesichtspunkte konstanter Energieaufnahme. Die Energieaufnahme (w) des Apparates wird also nicht mehr als Funktion der Spannung angesehen, sondern als unabhängige Variable, die während des Versuchs konstant gehalten wird. Die Spannung bleibt dabei unberücksichtigt.

Gleichzeitig nehmen wir noch einige Umformungen der Gleichungen für A und c vor, indem wir den Reaktionsraum, der bisher willkürlich gleich eins gesetzt worden war, berücksichtigen. Durch diese beiden Änderungen in der Betrachtung wird, wie wir sehen werden, eine ganz bedeutende Vereinfachung erreicht.

Für die Reaktionszeit galt die Gleichung $t = \frac{i}{v}$ (1), wo i den Inhalt des Reaktionsraumes bedeutete. Aus der Gleichung (4), die bei Berücksichtigung des Reaktionsraumes die Form annimmt $e - e_0 = k \cdot t^1$) folgt dann $e - e_0 = k \cdot \frac{i}{v}$ oder

$$e = \frac{k \cdot i + e_0 \cdot v}{v}.$$

Da nun $e = \frac{1}{A}$ (3) und $A = \frac{c \cdot v}{w}$ (2) war, so ergeben sich für Ausbeute und Konzentration die Gleichungen

$$A = \frac{v}{k \cdot i + e_0 \cdot v} \quad (13) \quad \text{bzw.} \quad c = \frac{w}{k \cdot i + e_0 \cdot v}. \quad (14)$$

Die Gleichung (14) kann man auch schreiben:

$$c = \frac{w}{i} \cdot \frac{1}{k + e_0 \cdot \frac{v}{i}}. \quad (15)$$

$\frac{w}{i}$ ist aber diejenige Anzahl Kilowatt, mit der die Einheit des Reaktionsraumes belastet wird. Wir setzen

$$\frac{w}{i} = w_R \quad (16)$$

und bezeichnen w_R als „Räumliche Wattdichte“.

(Da w in Kilowatt und i in Kubikmetern gemessen wurde, so ist

$$w_R = \frac{\text{Kilowatt}}{\text{Kubikmeter}} = \frac{\text{Watt}}{\text{Kubikcentimeter}} \cdot 10^3.$$

Aus der Vereinigung von Gleichung (15) und (16) folgt:

$$c = \frac{w_R}{k + e_0 \cdot \frac{v}{i}}.$$

¹⁾ Wir behalten für die Konstante die Bezeichnung k bei, obwohl sie nicht identisch mit der früheren Konstante ist. Bezeichnen wir die neue Konstante mit k' , so gilt zwischen der alten und der neuen Konstante die Bezeichnung $k = k' \cdot i$.

Statt $\frac{v}{i}$ führen wir aus Gleichung (1) $t = \frac{i}{v}$ ein: $\frac{1}{t}$, so daß die Gleichung für die Konzentration die Form annimmt:

$$c = \frac{w_R}{k + \frac{e_0}{t}} \quad (17) \quad \text{oder} \quad c = \frac{w_R t}{k \cdot t + e_0} \quad (18)$$

Hierin ist e_0 die aus den früheren Abschnitten bekannte Konstante, die von der Belastung des Apparates unabhängig ist, während k von w_R abhängig ist. Statt der Strömungsgeschwindigkeit enthält die Gleichung die Reaktionszeit. Die Gleichung wird also durch eine Kurve von der Form wie in Fig. 2 dargestellt.

Betrachten wir nunmehr die Grenzfälle für $t = 0$ und $t = \infty$, so erhalten wir für $t = 0$ (entsprechend $v = \infty$) $c = 0$. Setzen wir dagegen in Gleichung (17) $t = \infty$ (entsprechend $v = 0$), so erhalten wir die Grenzkonzentration

$$C = \frac{w_R}{k} \quad (19)$$

Nach Seite 92 sollte C unabhängig von der Belastung sein. Wir können daher die von w_R abhängige Größe k durch C ausdrücken und erhalten

$$k = \frac{w_R}{C} \quad (20)$$

Diesen Wert für k führen wir in Gleichung (18) ein; es ergibt sich:

$$c = \frac{w_R t}{\frac{w_R t}{C} + e_0} \quad (21) \quad \text{oder} \quad c = \frac{w_R t}{\frac{w_R t}{C} + \frac{1}{A_0}} \quad (22)$$

wenn wir nach Gleichung (11) $e_0 = \frac{1}{A_0}$ setzen.

In gleicher Weise kann die Gleichung für die Ausbeute (13) umgeformt werden. Man erhält dann:

$$A = \frac{1}{\frac{w_R t}{C} + e_0} \quad (23) \quad \text{oder} \quad A = \frac{1}{\frac{w_R t}{C} + \frac{1}{A_0}} \quad (24)$$

Für A ergibt sich noch eine interessante Beziehung, wenn man von Gleichung (2) $A = \frac{c \cdot v}{w}$ ausgeht und berücksichtigt, daß aus Gleichung (1) $v = \frac{i}{t}$ und aus Gleichung (16) $\frac{i}{w} = \frac{1}{w_R}$ sich ergibt:

$$w_R t = \frac{w}{v} \quad (25)$$

Man erhält dann aus Gleichung (2) für A die sehr einfache Gleichung

$$A = \frac{c}{w_R \cdot t} \quad (26)$$

Schließlich können wir auch in der Gleichung, von der wir ausgingen, $e - e_0 = k \cdot t$ für k den Wert $\frac{w_R}{C}$ einsetzen und erhalten

$$e - e_0 = \frac{w_R}{C} \cdot t \quad (27)$$

¹⁾ Vgl. die Fußnote zu S. 95.

6. Einfluß von Spannung und Frequenz auf die Ozonkonzentration.

Nach der im vorigen Abschnitt entwickelten Gleichung (21) $c = \frac{w_R t}{\frac{w_R t}{C} + e_0}$, die

wir auch $c = \frac{w_R t \cdot C}{w_R t + e_0 C}$ (28) schreiben können, ist die Konzentration eines Ozonapparates eine Funktion der Größe $w_R t$. Diese Größe bedeutet die einem Kubikmeter Sauerstoff zugeführte Energiemenge, gemessen in Kilowattstunden. Sie ist das Produkt zweier Faktoren: Intensität und Zeit.

Es gilt also für die Ozonkonzentration eine ähnliche Beziehung wie für manche photochemischen Reaktionen, bei denen die erreichte Konzentration abhängig ist von dem Produkt aus Intensität (Lichtstärke) mal Zeit, d. h. von der dem Reaktionsgemisch in Form von Licht zugeführten Energiemenge.

Für diese Art photochemischer Reaktionen kommt es nur auf die gesamte zugeführte Energie an. Es ist dabei gleichgültig, ob in dem Produkt Lichtstärke mal Zeit der eine oder der andere Faktor größer ist. Die erreichte Konzentration beträgt immer denselben Wert, wenn nur das Produkt aus Lichtstärke mal Zeit das gleiche ist. Es fragt sich nun, ob das gleiche auch für die Ozonbildung gilt, d. h. ob die Ozonkonzentration nur von dem Produkt $w_R t$ abhängig ist, ganz gleich, wie groß dabei jeder der beiden Faktoren ist, oder ob die Größe eines der beiden Faktoren dabei eine bestimmte Rolle spielt.

Der Wert von w_R ist seinerseits abhängig von der Frequenz und der Spannung des benutzten Wechselstromes. Es ist also zu untersuchen, welchen Einfluß durch Spannungs- und Frequenzänderungen hervorgerufene Änderungen des Faktors w_R auf die Ozonkonzentration haben. Die den früheren Rechnungen zugrunde liegenden Versuche sind alle mit einem Wechselstrom von der Frequenz 500 ausgeführt. Daß Änderungen von w_R , die durch Erhöhung oder Erniedrigung der Betriebsspannung hervorgerufen werden, auf die Ozonkonzentration keinen Einfluß haben, wenn nur das Produkt $w_R t$ konstant bleibt, folgt bereits aus den bisher mitgeteilten Beobachtungen.

Für die Versuche mit dem Apparat UR Nr. 5 hatte sich (Tabelle 11, Seite 84) ergeben $e_0 = 6 \cdot 94 \cdot 10^{-3}$. Aus Tabelle 20 folgt für C der Mittelwert $C = 162$. Ermittelt man nun aus Tabelle 12 (Seite 85) die $w_R t$ -Werte nach Gleichung (25) und berechnet mit Hilfe von $e_0 = 6 \cdot 94 \cdot 10^{-3}$ und $C = 162$ die Konzentrationen, so ergeben sich die in Tabelle 21 eingetragenen Werte. Die Tabelle enthält außer den berech-

Tabelle 21.

UR Nr. 5; $e_0 = 6,94 \cdot 10^{-3}$; $C = 162$.

Volt	$w \cdot 10^3$	$v \cdot 10^3$	$w_R t$	c ber.	c beob.	Diff.	Diff. %
6000	169,5	15,5	10,93	147	144,5	2,5	1,73
			130	1,304	87	85,5	1,5
5333	131,6	15,5	8,49	143,1	144	-0,9	-0,62
			130	1,0125	76,8	77,3	-0,5
4667	101,9	15,5	6,575	138,4	140	-1,6	-1,14
			130	0,784	67,7	65	2,7
4000	68,2	15,5	4,21	128,4	129	-0,6	-0,515
			130	0,524	51,5	51,5	0
3333	43,05	15,5	2,779	115,3	109	6,3	5,78
			130	0,331	36,88	38	1,12
2667	21,5	15,5	1,387	89,5	72,5	17	(-23,6)
			130	0,1854	22,8	23,5	-0,7

neten auch die beobachteten Konzentrationen, sowie die Differenzen zwischen beiden. Außerdem ist in der letzten Spalte die Differenz umgerechnet in Prozent des beobachteten Wertes. Die Abweichungen liegen, mit Ausnahme des Versuches in der vorletzten Querreihe, durchaus innerhalb der Fehlergrenzen.

Sie sind, wie aus der Tabelle folgt, auch unabhängig von der Änderung der Werte w und v . In Tabelle 22 sind die Werte von $w_R t$ mit den dazugehörigen Konzentrationen

Tabelle 22.

UR Nr. 5; $e_0 = 6,94 \cdot 10^{-3}$; $C = 162$.

$w_R t$	c ber.	c beob.	Diff. %
0,185	22,8	23,5	-2,98
0,331	36,88	38	2,95
0,524	51,5	51,5	0
0,784	67,7	65	4,15
1,0125	76,8	77,3	-0,65
1,304	87,0	85,5	1,75
1,387	89,5	72,5	(-23,6)
2,779	115,3	109	5,78
4,4	128,4	129	-0,515
6,575	138,4	140	-1,14
8,49	143,1	144	-0,62
10,93	147	144,5	1,73

der Reihe nach geordnet, um zu zeigen, daß die Abweichungen zwischen den beobachteten und berechneten Konzentrationen auch von $w_R t$ unabhängig sind.

In Figur 11 sind die erhaltenen Resultate graphisch dargestellt.

Tabelle 23.

Apparat 36. $e_0 = 5,2 \cdot 10^{-3}$; $C = 284,5$.

Frequenz	Volt	$w \cdot 10^3$	$w_R \cdot 10^{-3}$	$v \cdot 10^3$	$w_R t$	c ber.	c beob.	Diff.	Diff. %
500	4550	26,5	0,881	16,21	1,635	149,2	145,5	3,7	2,54
500	4550	26,5	0,881	15,66	1,692	151,7	150,4	1,3	0,864
500	4550	26,5	0,881	15,31	1,7315	153,4	152,55	0,85	0,56
500	4550	26,5	0,881	14,32	1,85	158	160,3	-2,3	-1,43
500	4550	26,5	0,881	13,355	1,985	163	165,4	-2,4	-1,45
500	4550	26,5	0,881	13,31	1,9915	163,25	165,6	-2,35	-1,42
500	4550	26,5	0,881	13,22	2,005	163,5	166	-2,5	-1,5
500	4550	26,5	0,881	12,49	2,122	167,7	172,9	-5,2	-3,01
500	5060	37,3	1,241	16,4	2,276	172,25	168,85	3,4	2,01
500	5060	37,3	1,241	15,05	2,48	178,2	178	0,2	0,11
500	5060	37,3	1,241	14,885	2,507	178,75	179,5	-0,75	-0,42
500	5060	37,3	1,241	14,72	2,533	179,5	181	-1,5	-0,83
500	6200	68,5	2,28	16,8	4,078	209	214,1	-5,1	-2,38
500	6200	68,5	2,28	16,09	4,26	211,3	216,48	-5,18	-2,39
500	5060	37,3	1,241	5,09	7,33	236,5	227,5	9,0	3,95
500	6200	68,5	2,28	7,985	8,58	242,8	240,05	2,75	1,15
500	6200	68,5	2,28	7,86	8,71	243	235,59	7,41	3,15
120	7200	24,25	0,8075	14,445	1,687	151,6	142,75	8,85	6,2
120	7200	24,25	0,8075	15,34	1,582	147	141,37	5,63	3,97
120	8070	30,0	0,998	5,35	5,61	225	233,83	-8,83	-3,95
50	8465	10,25	0,341	5,83	1,757	154,3	142,3	12	8,43
50	8465	10,25	0,341	5,72	1,794	156	145	11	7,59
50	8465	10,25	0,341	5,64	1,820	157	130	(27)	(20,8)
50	8465	10,25	0,341	5,57	1,84	157,7	147	10,7	7,29

Die Gültigkeit der gefundenen Beziehung $c = \frac{w_R t \cdot C}{w_R t + e_0 C}$ (28) wurde an verschiedenen Apparaten nachgeprüft. Im folgenden seien noch zwei Beispiele angeführt. Tabelle 23 und die Figur 13 zeigen die Anwendbarkeit der Gleichung für den Apparat 36 (ein für besondere Versuche angefertigtes Ozonrohr, vgl. die Zusammenstellung der

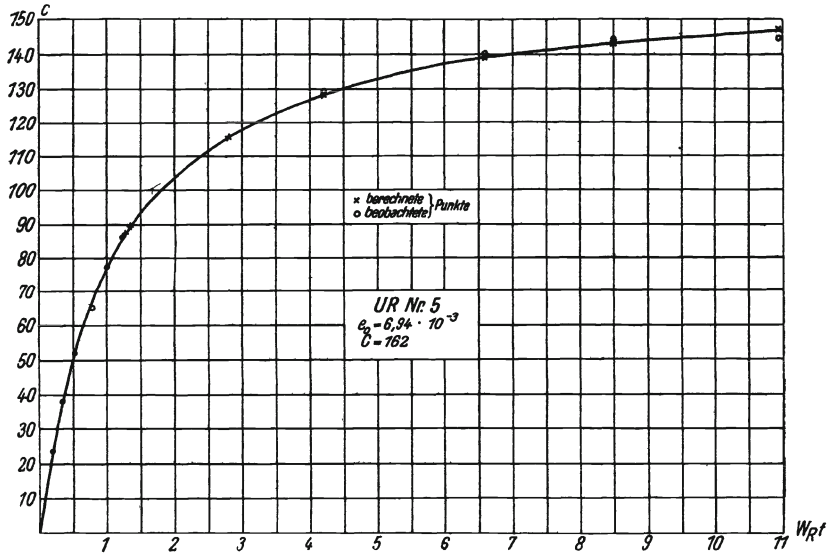


Fig. 11.

benutzten Apparate im Abschnitt 7) und schließlich gibt die Kurve der Fig. 14 den Verlauf der Konzentrationskurve in Abhängigkeit von $w_R t$ für ein normales Siemensrohr wieder. Die Tabelle 23 und die Figuren 13 und 14 zeigen, daß auch für diese Apparate die Gleichung (28) erfüllt ist.

Welchen Einfluß hat nun die Änderung von w_R durch Änderung der Frequenz?

Hier lagen die Dinge zunächst scheinbar recht kompliziert. Aus der Literatur ist zu entnehmen, daß die „Ozonbildung“ mit zunehmender Frequenz zunimmt. Dabei besteht eine gewisse Unklarheit in den Angaben insofern, als unter Ozonbildung manchmal Ozonkonzentration und manchmal Ozonausbeute verstanden ist. In ein neues Stadium trat die Frage durch einen Hinweis von Dr. Keinath, der uns auf die sogenannten Resonanzkurven aufmerksam machte. Trägt man als Abszisse in einem Koordinatensystem die Frequenz und als Ordinate die Stromstärke ein, so erhält man Kurven, bei welchen die Stromstärke mit zunehmender Frequenz zunächst steigt, dann ein Maximum erreicht, und danach wieder abnimmt. Wächst die Frequenz noch weiter, so erreicht die Stromstärke ein Minimum, um dann wieder zu steigen bis zu einem neuen Maximum usw. Die Kurven nehmen einen ähnlichen Verlauf wie die Kurve 1 der Fig. 12.

Versuche ergaben, daß die Abhängigkeit der Ozonkonzentration von der Frequenz durch ähnliche Kurven dargestellt wird. In der Figur 12 ist als Abszisse die Frequenz des benutzten Wechselstroms eingetragen. Die Ordinaten sind für die Kurve 1 die Gesamtenergieaufnahme des Stromkreises (Energieaufnahme der Ozonröhre plus Energieaufnahme des Transformators und der Meßinstrumente), für die Kurve 2

die Ozonkonzentration und schließlich für Kurve 3 die Ausbeute pro Kilowattstunde.

Der Verlauf der Konzentrationskurve 2 zeigt, daß mit zunehmender Frequenz die Konzentration durchaus nicht immer steigt, sondern ein Maximum erreicht, das unter den gegebenen Versuchsbedingungen bei der Frequenz 420 liegt. Mit wachsender Frequenz nimmt die Konzentration sodann ab, um nach Erreichung eines Minimums von neuem zu steigen. Die Ausbeutekurve verläuft entsprechend, nur in umgekehrtem Sinne.

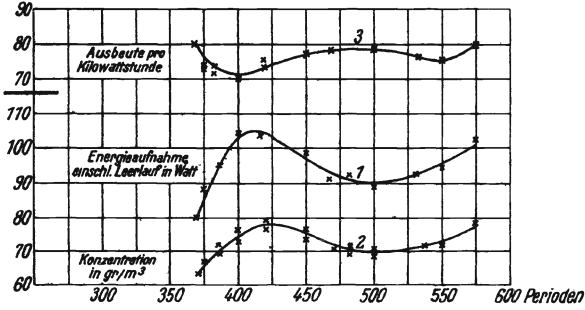


Fig. 12.

Da diese Versuche über den Einfluß der Frequenz ausgeführt wurden, lange bevor die Rechnungen der vorliegenden Arbeit angestellt wurden, so wurde zunächst ein besonderer Einfluß der Frequenz angenommen. Betrachtet man jedoch die Kurven der Fig. 12, insbesondere die Kurven 1 und 2 unter dem Gesichtspunkt der Gleichung $c = \frac{w_R t \cdot C}{w_R t + e_0 C}$, so scheint ihr Verlauf auf einen Zusammenhang zwischen Konzentration und Energieaufnahme hinzudeuten, der von der Frequenz unabhängig

ist. (Bei den Versuchen der Fig. 12 war natürlich Spannung und Gasgeschwindigkeit konstant.)

Die Anwendung der Gleichung (28) auf verschiedene Frequenzen ergab nun, daß die Frequenz auf die Ozonkonzentration keinen spezifischen Einfluß hat. Die Gleichung hat sich

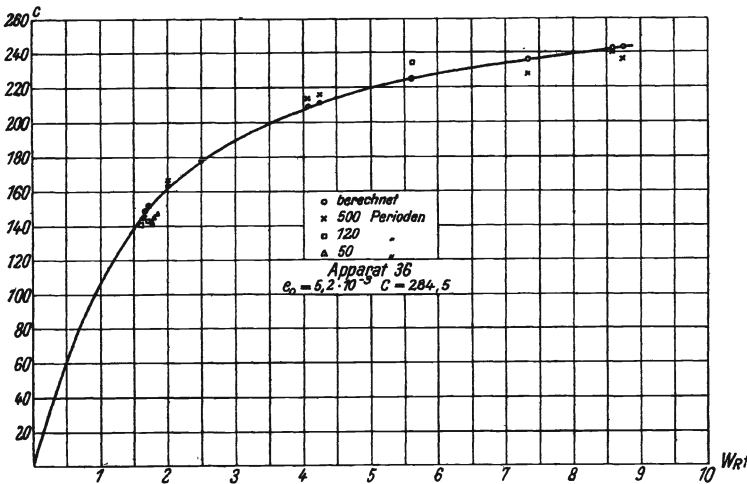


Fig. 13.

wie vordem unabhängig von der Spannung auch unabhängig von der Frequenz erwiesen.

Man erhält bei jeder Frequenz die gleiche Ozonkonzentration, wenn der Wert von $w_R t$ der gleiche ist.

Für den bereits erwähnten Apparat 36, dessen Konstanten e_0 und C nach einer der früher beschriebenen Methoden zu $5,2 \cdot 10^{-5}$ bzw. 284,5 ermittelt sind, sind in der Tabelle 23 eine Reihe von $w_R t$ -Werten mit den dazugehörigen Konzentrationen

für die Frequenzen 120 und 50 angegeben. Die Abweichungen zwischen beobachteten und berechneten c -Werten liegen auch hier innerhalb der bei Ozonbestimmungen vorkommenden Fehlergrenzen. Die in der Tabelle 23 angegebenen Zahlen sind mit Ausnahme der Bestimmungen bei der Frequenz 50 Mittelwerte aus einer Reihe von Beobachtungen. In der Fig. 13 ist die Konzentrationskurve für diesen Apparat wiedergegeben; dabei sind die berechneten und die bei verschiedenen Frequenzen beobachteten Werte besonders kenntlich gemacht. Einige Angaben über die Ausführung der Messungen sowie eine kritische Würdigung der erhaltenen Resultate folgt im nächsten Abschnitt. Schließlich gibt die Fig. 14 den Anfang der Konzentrationskurve für eine normale Ozonröhre von Siemens & Halske wieder. Auch hier liegen die Punkte unabhängig von Spannung und Frequenz auf derselben Kurve. Die Konstanten e_0 und C sind für diese Kurve nicht berechnet. Eine Überschlagsrechnung ergibt für e_0 etwa $5 \cdot 10^{-3}$ und für C etwa 300.

Als Ergebnis dieser Versuche läßt sich also feststellen, daß die Konzentration eines Ozonapparates eine Funktion der dem Apparat zugeführten Energiemenge ist. Die Konzentration ist unabhängig von der Art, wie diese Energiemenge dem Apparat zugeführt wird.

Man erhält mit einem gegebenen Apparat stets dieselbe Ozonkonzentration, wobei es gleichgültig ist, ob der Apparat bei großer Strömungsgeschwindigkeit (kleiner Wert von t) hochbelastet wird (großer Wert von w_R) oder ob er umgekehrt bei kleiner Strömungsgeschwindigkeit (großer Wert von t) mit geringer Belastung (kleiner Wert von w_R) betrieben wird, und wobei es ferner gleichgültig ist, in welcher Weise die Belastung (w_R) in bezug auf Spannung und Frequenz zustande kommt, wenn nur das Produkt $w_R t$ das gleiche ist.

Über eine Einschränkung dieses Satzes wird im folgenden Abschnitt 7 berichtet werden.

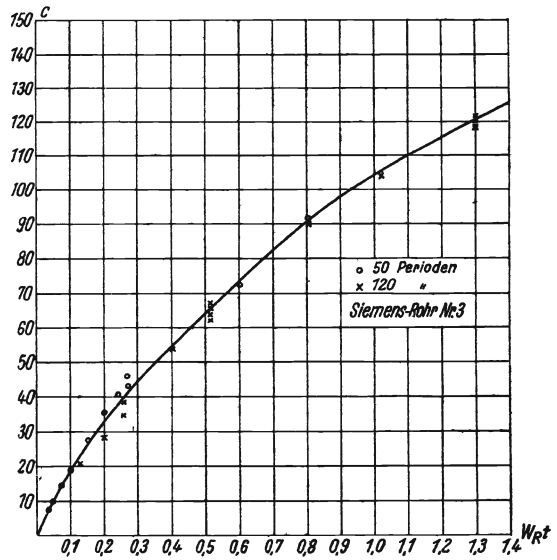


Fig. 14.

7. Angaben über die verwendeten Ozonapparate und die Meßmethode. Kritik der Versuchsergebnisse.

Sämtliche zu vorstehenden Untersuchungen benutzten Apparate sind Siemens'sche Glasröhrenapparate verschiedener Größe, bei welchen in der üblichen Weise Wasser als Elektrodenbelegung benutzt wurde.

Die Apparate sind im folgenden kurz charakterisiert. Dabei bedeutet i den Inhalt des Reaktionsraumes in ccm, l seine Länge in mm, $2r$ den äußeren Durchmesser des äußeren Glasrohres in Millimetern, d die Dicke des Entladungsraumes und d_1

die Stärke der Glaswand, ebenfalls in Millimetern. Da beide Glaswände bei dem einzelnen Apparat möglichst gleich stark gehalten wurden, so ist die Gesamtstärke der von der Entladung zu überwindenden Glasschicht gleich $2d_1$.

1. Apparat UR 1, besteht aus zwei in bezug auf den Luftstrom hintereinander geschalteten größeren Siemensröhren, die am unteren Ende durch ein Glasrohr verbunden sind. $i = 301 \cdot 10^{-6}$ cbm; $2r = 53$ mm; $l = 1000$ mm; $d = 2$ mm, d_1 nicht bekannt.

2. Apparat UR 3 und UR 4: Dieselbe Type wie Nr. 1.

a) UR 3: $i = 206,7 \cdot 10^{-6}$ cbm; $2r = 47,3$; $l = 974$; $d = 1,44$.

b) UR 4: $i = 245 \cdot 10^{-6}$ cbm; $2r = 48$; $l = 1004$; $d = 1,7$.

3. Apparat UR 5: Wie Nr. 1, jedoch kleiner.

$i = 82 \cdot 10^{-6}$ cbm; $2r = 38,4$; $l = 620$; $d = 1,1$.

Außerdem unterscheiden sich die Apparate zu 1 bis 3 durch die Art der Befestigung der Innenkühlung am inneren Rohr, worauf näher einzugehen hier zu weit führen würde.

4. Apparat 36: Einfaches nicht U-förmiges Siemensrohr.

$i = 30,08 \cdot 10^{-6}$; $d = 1,29$; $d_1 = 0,5$; $l = 225$ und $2r = 38,7$.

5. Siemensrohr: Gewöhnliche im Handel befindliche Bauart.

$i = 16,36 \cdot 10^{-6}$; $2r = 29,9$; $l = 152$; d und $d_1 =$ unbekannt.

i wurde durch Auswägen mit Quecksilber bestimmt; d und d_1 entstammt, soweit angegeben, den Angaben des Glasbläfers.

Sämtliche Versuche wurden mit Bombensauerstoff, der mit Phosphorpentoxyd getrocknet wurde, ausgeführt. Bei einzelnen Versuchsreihen (Apparat 36) wurde der Sauerstoff über erhitztes Kupferoxyd geleitet, um etwa vorhandene geringe Mengen Wasserstoff zu beseitigen. In den übrigen Fällen wurde der Sauerstoff den Bomben ohne weitere Reinigung entnommen und nur getrocknet. Die darin enthaltenen geringen Mengen fremder Gase N_2 bzw. H_2 wurden vernachlässigt, da es sich um technische Messungen handelte. Strenggenommen ist diese Vernachlässigung nicht zulässig. Sowohl H_2 als auch N_2 üben einen Einfluß auf die Ozonkonzentration aus.

Über den Einfluß von Stickstoff in größeren Konzentrationen (Ozonisierung von Luft) ergeben sich aus der Gleichung $c = \frac{w_R t \cdot C}{w_R t + e_0 C}$ gewisse Folgerungen, die aber noch nachgeprüft werden müssen. Die Versuche dazu sind in Gang.

Druck (mit Ausnahme bei den ersten Messungen) und Temperatur wurden konstant gehalten. Der Druck wurde auf annähernd 780 mm und die Temperatur bei den meisten Apparaten auf 20° gehalten. Bei höherer Belastung (500 Perioden) wurde der Apparat innen und außen gekühlt. Die an Hochspannung liegende Innenkühlung wurde in der üblichen Weise durch eine Brause gegen Erde isoliert.

Die Ozonbestimmung erfolgte in der in der Technik üblichen Weise durch Einleiten in neutrale Jodkaliumlösung und Titration nach dem Ansäuern mit $\frac{n}{10}$ Thio-sulfat, ohne Einhaltung besonderer Vorsichtsmaßregeln (Anwendung einer zweiten Absorptionsflasche u. dgl.). Bis zur Geschwindigkeit von 40 Litern in der Stunde wurde die Gesamtgasmenge durch die Absorptionsflasche geleitet. Bei größerer Geschwindigkeit wurde ein gemessener Teil abgesaugt. Die Bestimmung der Gas-

geschwindigkeit geschah teilweise durch einen Rotamesser, teilweise durch Auffangen der durchgeleiteten Gasmenge im Eudiometer und Beobachtung der Zeit; jedoch bei demselben Apparat stets nach der gleichen Methode.

Die erforderliche Hochspannung wurde mit Siemensschen Meßtransformatoren der Type MTR 22 für 50 Perioden hergestellt, deren einer Pol geerdet wurde. Das Übersetzungsverhältnis betrug 120 bzw. 210 zu 8000 Volt. Höhere Spannungen bis zu 10 000 Volt wurden durch Überlastung der Transformatoren hergestellt. Auch die Versuche mit 120 und 500 Perioden (der weitaus größte Teil) wurden mit diesen Transformatoren ausgeführt. Wechselstrom mit der Frequenz 50 wurde dem Netz, solcher höherer Frequenz besonderen Umformer-Aggregaten entnommen, deren Umdrehungszahl konstant gehalten wurde. Die Spannung bzw. die Energieaufnahme wurde bei 120 und 500 Perioden durch die Erregung des Generators bei 50 Perioden durch einen Vorschaltwiderstand verändert bzw. konstant gehalten.

Zur Energiemessung wurde in den Primärkreis ein Präzisionswattmeter geschaltet, das für höhere Frequenzen nicht besonders geeicht war. Außerdem befanden sich im Primärkreis Strom- und Spannungsmesser. Als Strommesser dienten Weicheiseninstrumente, da es auf die Stromstärke nicht ankam, als Spannungsmesser zum Teil Präzisionsinstrumente, die für höhere Frequenzen nicht besonders geeicht waren, zum Teil für höhere Frequenzen geeichte Weicheiseninstrumente. Bei demselben Apparat wurden die Schaltung und die Instrumente nicht geändert, um stets dieselben Bedingungen im Stromkreis und bei der Messung zu haben. Die Fehler, die durch Verwendung nur für die Frequenz 50 geeichter Instrumente entstehen, dürften dadurch wegfallen.

Die Energieaufnahme des Ozonapparates ist dann $w = W_1 - (W_2 + W_3)$, wo W_1 die am Wattmeter angezeigte Energie und W_2 bzw. W_3 den Energieverbrauch des Transformators und der Meßinstrumente bedeutet. $(W_2 + W_3)$ erhält man, wenn man die von der Hochspannungsklemme des Transformators zum Ozonapparat führende Leitung unterbricht und den Wattmeterausschlag abliest, natürlich bei derselben Spannung, bei welcher W_1 abgelesen wurde. w wird also durch eine Differenzmessung gefunden. Der Fehler hierbei wird um so größer, je kleiner w im Verhältnis zu $(W_2 + W_3)$ ist, so daß allen Beobachtungen bei sehr kleiner Belastung eine gewisse Unsicherheit anhaftet.

Wird w sehr groß, so macht, besonders bei 500 Perioden die Isolation der Kühlung der Hochspannungselektrode Schwierigkeiten. Trotz sorgfältiger Isolierung konnte bisher nicht vermieden werden, daß durch die Kühlung der Hochspannungselektrode etwas Strom zur Erde abfloß. Dieser Fehler wird um so größer, je kleiner der benutzte Apparat ist.

Zu beachten ist ferner, daß die Energieaufnahme der Röhre wiederum aus zwei Summanden besteht: Aus der von der Glaswand und der von der Gasstrecke verbrauchten Energie. Der Energieverbrauch der Glaswände kann recht beträchtlich sein. In einem Falle wurde er zu 30 bis 35% des Energieverbrauchs der Röhre gemessen. Die Messungen deuten darauf hin, daß der von der Glaswand verbrauchte Anteil an der zugeführten Energie um so größer wird, je kleiner die zugeführte Energie selbst wird. Bei sehr kleinen Belastungen könnte hiernach die Gleichung für die Konzentration nicht mehr stimmen. Die Untersuchung hierüber wird weiter fortgesetzt. Bei längerer Benutzung der Röhre scheint der Energieverbrauch der Glaswand kleiner zu werden. Wieweit er wieder zunimmt, wenn die Röhre längere Zeit

nicht in Betrieb war, darüber sind die Untersuchungen noch nicht abgeschlossen. Um konstante Verhältnisse zu erzielen, wurde jeder neue Apparat deshalb erst längere Zeit mit hoher Belastung bei 500 Perioden eingearbeitet, ehe mit Ozonbestimmungen begonnen wurde. Nach jeder Betriebspause wurde durch Kontrollmessungen der Anschluß an die früheren Versuche hergestellt.

Trotz aller Vorsichtsmaßregeln fallen aber doch einige Bestimmungen aus dem Rahmen der übrigen heraus, ohne daß eine Ursache festzustellen ist. Es sind auch Gründe für die Annahme vorhanden, daß trotz konstanter Ozonkonzentration und trotz konstanter Werte von w der Energieverbrauch der Glaswand nicht konstant ist. Möglicherweise besteht auch ein Zusammenhang zwischen e_0 und der von der Glaswand verbrauchten Energie. Diese Dinge können hier jedoch nur angedeutet werden. Besteht die vermutete Beziehung, so würde sie zu Fehlern führen, die bei kleinem w besonders groß sind und das Resultat in dem Sinne beeinflussen, daß c zu klein gefunden wird. Vielleicht ist es darauf zurückzuführen, daß bei manchen Apparaten die beobachteten Konzentrationen bei 50 Perioden stets kleiner sind als die berechneten.

In diesem Zusammenhang ist hinzuzufügen, daß bei zu großer Belastung des Apparates, wenn w_R eine gewisse Größe überschreitet, die Konzentration bei weiterer Erhöhung von w_R wieder abnimmt. In einem Falle wurde das Maximum der Konzentration bei $w_R = 2,5 \times 10^3$ (entsprechend 2,5 Watt pro Kubikzentimeter Entladungsraum) erreicht. Eine sichere Erklärung für diese Abnahme haben wir zur Zeit noch nicht. Für die Praxis ergibt sich hieraus, daß zu hohe Belastung der Apparate zu vermeiden ist.

Sieht man von den eben erwähnten Grenzfällen ab, so ist die Gleichung $c = \frac{w_R t \cdot C}{w_R t + e_0 \cdot C}$ jedoch vollkommen erfüllt.

Eine andere Fehlerquelle, die noch zu berücksichtigen ist, ist der freiwillige Ozonzerfall. Er fällt um so stärker ins Gewicht, je höher die Konzentration ist. Als Anhalt mag dienen, daß sich von Ozon von der Konzentration 60 bis 80 in einem 5 m langen Glasrohr von etwa 5 mm Durchmesser 8 bis 10% zersetzen. Dieser freiwillige Ozonzerfall bewirkt, daß bei sehr hohen Konzentrationen die beobachteten Werte meist etwas niedriger liegen als die berechneten.

Unter Berücksichtigung aller Fehlerquellen ist die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung als recht gut zu bezeichnen.

Im einzelnen ist zu bemerken, daß in Fig. 13 die Punkte für 50 Perioden durchweg niedriger liegen als die berechneten. Die Gründe dafür wurden bereits angedeutet. Andererseits liegen in Fig. 14 die Punkte für 50 Perioden höher als die für 120 Perioden, was darauf hindeutet, daß die Abweichungen nicht auf eine spezifische Wirkung der verschiedenen Frequenz zurückzuführen sind.

8. Anwendung der Konzentrationsgleichung zur Berechnung von Ozonanlagen.

Für die Berechnung technischer Ozonanlagen ist noch die stündlich erzeugte Ozonmenge, die wir mit s bezeichnen, einzuführen. Es ist $s = c \cdot v$ (29).

$$\text{Da } c = \frac{w_R t \cdot C}{w_R t + e_0 \cdot C} \quad \text{und} \quad w_R t = \frac{w}{v}, \quad \text{ist } s = \frac{w \cdot C}{w_R t + e_0 C} \quad (30)$$

Bei kleinem Wert von w und großer Strömungsgeschwindigkeit (kleines $w_R t$) wird $s = \frac{w}{e_0}$, d. h. die stündliche Ozonmenge ist bei großer Strömungsgeschwindigkeit und konstanter Belastung konstant, was ja aus der Praxis hinlänglich bekannt ist.

Für eine Ozonanlage werden stündlich s Gramm Ozon von der Konzentration c gefordert. Gefragt wird, wie groß die Anzahl n der erforderlichen Apparate, wenn der Rauminhalt der angebotenen Apparattypen i ist, wieviel Kubikmeter Sauerstoff (v) sind pro Stunde erforderlich und wie groß ist der Kraftbedarf w der Ozonapparate. Als bekannt sind also s und c gegeben, zu berechnen sind w , v und n . Aus (29) folgt

$$v = \frac{s}{c} \quad (31).$$

Der Charakteristik des Apparates wird für die Konzentration c der zugehörige Wert $w_R t$ entnommen.

Aus $w_R t = \frac{w}{v}$ folgt für den Energiebedarf (ausschließlich Umformerverluste u. dgl.) $w = w_R t \cdot v$ (32).

Der Rauminhalt eines Apparates war i , der von n Apparaten ist also $n \cdot i$. Es ergibt sich dann für die erforderliche Apparatenzahl aus $w_R = \frac{w}{n \cdot i}$, $n = \frac{w}{i \cdot w_R}$ (33). w_R ist der vorhandene Stromart und der zu benutzende Apparattypen entsprechend zu wählen. Auch der Preis der Kilowattstunde kommt dabei in Frage. Steht Wechselstrom von 500 Perioden zur Verfügung oder ist der Preis der Kilowattstunde niedrig, so daß die Umformerverluste in Kauf genommen werden können, so wird man w_R möglichst groß wählen, z. B. $2 \cdot 10^3$ bis $2,5 \cdot 10^3$ kW pro Kubikmeter (entsprechend 2 bis 2,5 Watt pro Kubikzentimeter). Man kommt dann mit weniger Apparaten aus und spart an Amortisation und Verzinsung, braucht aber Apparate mit sehr guter Kühlung auch des an Hochspannung liegenden Poles. Ist man dagegen auf 50-periodigen Wechselstrom angewiesen, so muß w_R klein gewählt werden, z. B. $0,5 \cdot 10^3$ entsprechend 0,5 Watt pro Kubikzentimeter). Man braucht dann eine größere Anzahl Apparate und hat entsprechend höhere Amortisation und Verzinsung zu tragen, kann dafür aber einfachere und bequemer zu handhabende Apparattypen benutzen, bei welchen die Kühlung zum mindesten des Hochspannungspoles fortfällt.

Es ergeben sich also folgende Gleichungen für die Berechnung von Ozonanlagen:

$$\text{Sauerstoff- (bzw. Luftmenge) in } m^3 \quad v = \frac{s}{c} \quad (31),$$

$$\text{Kraftbedarf in kW} \quad w = w_R t \cdot v \quad (32)$$

$$\text{Apparatenzahl} \quad n = \frac{w}{i \cdot w_R} \quad (33).$$

Für ein praktisches Beispiel ergibt sich folgendes:

Verlangt werden stündlich $10 \text{ kg} = 10\,000 \text{ g}$ Sauerstoffozon von der Konzentration 40. Aus der Charakteristik des Apparates werde für die Konzentration 40 der zugehörige Wert $w_R t = 0,25$ entnommen. Der Rauminhalt eines Apparates betrage $2000 \text{ cm}^3 = 2000 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$. Es ist also $c = 40$; $w_R t = 0,25$; $i = 2000 \cdot 10^{-6}$; $s = 10\,000$. Dann ist $v = \frac{s}{c} = \frac{10\,000}{40} = 250 \text{ m}^3$.

$$w = w_R t \cdot v = 0,25 \cdot 250 = 62,5 \text{ kW}.$$

Die „räumliche Watttdichte“ soll möglichst groß gewählt werden, z. B. $w_R = 2,5 \cdot 10^3$. Dann ergibt sich für die Anzahl der Apparate

$$n = \frac{w}{i w_R} = \frac{62,5}{2000 \cdot 10^{-6} \cdot 2,5 \cdot 10^3} = \frac{62,5}{2 \cdot 2,5} = 12,5,$$

also rund 13 Apparate.

Bei kleiner Belastung, z. B. $w_R = 0,5 \cdot 10^3$ wird $n = \frac{62,5}{2000 \cdot 10^{-6} \cdot 0,5 \cdot 10^3} = 62,5$, also rund 63 Apparate.

9. Zusammenfassung der Ergebnisse.

1. Es wird gezeigt, wie Konzentration und Ausbeute eines Ozonapparates für große Gasgeschwindigkeiten extrapoliert werden können.

2. Es wird eine Methode angegeben, um Konzentration und Ausbeute eines Ozonapparates für verschiedene Spannungen zu berechnen.

3. Es wird gezeigt, daß die Ozonkonzentration unabhängig ist von der Spannung und Frequenz des Wechselstromes, daß sie dagegen eine Funktion der der Volumeneinheit (m^3) des zu ozonisierenden Sauerstoffes zugeführten Energiemenge ($w_R t$) ist.

4. Es wird gezeigt, wie die Größe einer Ozonanlage mit Hilfe der neu gefundenen Ergebnisse in einfacher Weise berechnet werden kann.

Die vorstehende Arbeit wurde mit längeren Unterbrechungen in der Zeit vom Februar 1917 bis Januar 1920 im Laboratorium der Abteilung für Elektrochemie, Ressort Dr. Erlwein, ausgeführt. Die dazu erforderlichen experimentellen Beobachtungen wurden in Gemeinschaft mit Herrn Rossenbeck und Fräulein Gilowy angestellt.

Siemensstadt, im Februar 1920.

Über einen neuen Luftgeschwindigkeitsmesser I.

Von

H. Gerdien und R. Holm.

Mit 9 Textfiguren.

Mitteilung aus dem Physikalisch-Chemischen Laboratorium zu Siemensstadt.

1. Aufgabe.

Die bisher bekannten Methoden zur Messung der Geschwindigkeit von Gasen benutzen entweder rotierende Systeme (Schalenkreuz, Flügelanemometer), deren Umdrehungszahl in gemessener Zeit die mittlere Luftgeschwindigkeit anzeigt, oder bewegliche Teile, die dem Druck des strömenden Gases ausgesetzt sind (Winddrucktafel u. dgl.) und durch ihre Ausschläge ein Maß für die Geschwindigkeit des Gases ergeben, oder auch Vorrichtungen zur Messung des dynamischen Drucks, wobei die Anzeige durch ein Manometer erfolgt. Diese Methoden bringen teils nur den Mittelwert der zu messenden Geschwindigkeit während eines bestimmten Zeitintervalls zur Anzeige (wie die üblichen Schalenkreuz- und Flügelanemometer), wobei die Messung bei Verwendung kleiner Zeitintervalle erheblich durch die Trägheit der rotierenden Massen gefährdet werden kann, teils sind ihre Resultate durch Reibungsfehler oder zu geringe Dämpfung der beweglichen Teile beeinträchtigt (Winddrucktafel), oder sie erfordern ein auf fester Unterlage präzise zu horizontierendes, empfindliches Manometer, das somit nicht allgemeiner Verwendung fähig ist.

Dem einen von uns (H. Gerdien)¹⁾ war die Aufgabe gestellt worden, einen Luftgeschwindigkeitsmesser zu schaffen, der von den erwähnten Mängeln frei ist; dabei sollte besonderer Wert darauf gelegt werden, daß der eigentliche, dem Gasstrom ausgesetzte Apparat keine rotierenden oder mit träger Masse und Reibung behafteten Teile enthalte und ohne merkliches Nachhinken des Meßinstruments Momentanwerte der Geschwindigkeit anzeige; zugleich sollte eine Fernanzeige der Luftgeschwindigkeit angestrebt werden.

2. Allgemeine Untersuchungen über elektrisch geheizte Drähte in Luftströmen.

Diesen Bedingungen schien in einfachster Weise eine Methode zu entsprechen, welche von einem schon mehrmals in der Meßtechnik mit Erfolg angewandten Prinzip Gebrauch macht, nach welchem eine vorgegebene Energieströmung in meßbarer Weise so von der zu messenden Größe abhängig gemacht wird, daß in eindeutiger Weise jedem Wert der letzteren ein bestimmter Wert der ersteren entspricht. Es läßt sich leicht eine spezielle Form dieser Meßmethode angeben, die sich besonders zur Untersuchung der Strömungsverhältnisse eines bewegten Mediums eignet: Führt

¹⁾ Von diesem rührt das Prinzip und auch hauptsächlich die konstruktive Durchbildung des neuen Instrumentes her.

man einem Gasstrom mittels eines elektrisch geheizten Körpers, z. B. eines stromdurchflossenen Drahtes, Energie zu, so hängt die Verteilung der Wärmeenergie in dem Gase von der Strömungsgeschwindigkeit des Gases ab; insbesondere kann ein Draht benutzt werden, dessen Widerstand mit der Temperatur stark veränderlich ist, wobei z. B. der Widerstand selbst bei konstanter Energiezufuhr, oder der Energieverbrauch des Drahtes bei konstanter Klemmspannung u. dgl. ein Maß für die Gasgeschwindigkeit abgibt¹⁾. Ausgehend von diesen Überlegungen wurde zunächst ein kurzes Stück dünnen Pt- oder Ni-Drahtes, senkrecht zur Strömungsrichtung ausgespannt, dem Gasstrom ausgesetzt, und die Veränderung seines Widerstandes oder seines Energieverbrauches in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit des Gasstromes messend verfolgt. Die Messung ergab, daß diese durch ihre Einfachheit ausgezeichnete Anordnung sich leider aus mehreren Gründen nicht vorteilhaft erweist; sehr störend ist vor allem der Umstand, daß z. B. in der ersterwähnten Schaltung bei kleinen Geschwindigkeiten des Gasstromes eine relativ große Änderung des Widerstandes bei sehr kleiner Änderung der Geschwindigkeit stattfindet, während weiterhin bei großen Geschwindigkeiten relativ sehr großen Geschwindigkeitsänderungen nur sehr kleine Widerstandsänderungen entsprechen. Der Funktionalzusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Widerstand (ähnlich auch bei dem Energieverbrauch) ergibt also, nur innerhalb eines sehr kleinen Geschwindigkeitsbereichs einen praktisch brauchbaren Gang der Empfindlichkeit. Außerdem bietet der frei ausgespannte Draht technische Schwierigkeiten, insofern er aus Festigkeitsrücksichten nicht so dünn gewählt werden kann, wie es mit Rücksicht auf den Stromverbrauch und die Einstellgeschwindigkeit erwünscht wäre.

3. Vorbereitende konstruktive Versuche.

Ein besseres Resultat versprach eine Anordnung, bei welcher in einem durchströmten Kanal ein mit konstanter Energiezufuhr geheizter Körper verwendet wurde und die Temperaturerhöhung des strömenden Mediums durch symmetrisch vor und hinter dem Heizkörper angeordnete Widerstandsthermometer zur Messung gelangte²⁾. Bei geeigneter Konstruktion läßt sich der theoretisch zu erwartende Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit des Gases und Temperaturerhöhung, nach welchem das Produkt beider eine Konstante sein muß, mit ziemlich weitgehender Annäherung verwirklichen. Immerhin ergibt sich auch hier eine wenig brauchbare Geschwindigkeitsskala; dazu wird die Anzeige des Instruments bei kleinen Geschwindigkeiten sehr abhängig von den unvermeidlichen Wärmeverlusten nach außen und für sehr kleine Geschwindigkeiten überhaupt unbrauchbar.

¹⁾ Vorschläge, die auf ein ähnliches Ziel hinauslaufen, sind schon bekannt geworden, aber unseres Wissens nach nicht zur praktischen Verwendung gekommen. (L. Weber, Schriften d. naturwiss. Vereins f. Schl.-H., Sitzungsbericht vom 12. März 1894. — Overbeck, Ann. d. Phys. u. Chemie, Neue Folge, 56, 397 [1895]. — A. Koepsel, Zeitschr. f. Chem. Apparatenkunde, 15. Aug. u. 1. Sept. 1908, auch: Berichte der Deutsch. Phys. Gesellsch. 6, 814 [1908]. — R. Benift, Inaug.-Diss., Kiel 1912, S. 27 ff.)

²⁾ Fast gleichzeitig ist ein ähnliches Prinzip in dem Thomasschen Gasmesser zur Verwendung gekommen. Thomas arbeitet aber neuerdings nicht mit konstantem Heizstrom, sondern läßt diesen durch ein Relais regulieren, so daß die Erwärmung des Gases konstant gehalten wird. Diese Anordnung hat viele Vorzüge, erfüllt aber nicht die uns gestellte Aufgabe der Momentanzeige.

Dasselbe gilt für ein von Kennely, Thurston und Morris ausgearbeitetes Verfahren (Engineering 94, 892 [1912]); hier wird die Windstärke durch die Energie beurteilt, die einem vom Winde umspülten Hitzdraht zugeführt werden muß, um ihn auf einer bestimmten Temperaturerhöhung über der Umgebung zu halten.

Die Versuche, die mit derartigen Anordnungen vorgenommen wurden, gaben indessen wertvolle Fingerzeige in konstruktiver Hinsicht. Für eine präzise Messung ist es unerlässlich, daß die Temperaturänderungen unterworfenen Teile in sehr vollkommener Weise ihre Lage gegeneinander und gegenüber den Kanalwänden beibehalten; im Interesse einer präzisen Momentaneinstellung des Meßinstrumentes müssen alle diese Teile möglichst geringe Wärmekapazität haben und dürfen an keiner Stelle in merklichem Wärmeaustausch mit schlechten Wärmeleitern stehen.

Die Erfahrungen, die wir mit einem einzelnen, senkrecht zum Luftstrom ausgespannten Draht gemacht hatten, führten zu der Auffassung, daß es möglich sein müsse, den ungünstigen Gang der Empfindlichkeit dadurch zu verbessern, daß man dem elektrisch geheizten Körper in der Richtung des Gasstromes eine merkliche Ausdehnung erteilt. Die schon bei kleinen Geschwindigkeiten beobachtete, sehr vollständige Kühlung des einzelnen dünnen Drahtes wird im Falle eines ausgedehnten Heizkörpers durch eine gradweise auf ein gewisses Geschwindigkeitsintervall verteilte Kühlung ersetzt. Versuche, die mit einem Drahtgitter angestellt wurden, dessen einzelne Bestandteile senkrecht zum Luftstrom in einer diesem parallelen Ebene dicht nebeneinander ausgespannt waren, bestätigten diese Annahme und führten zu der endgültig von uns ausgearbeiteten Meßanordnung. Diese kann man sich auch dadurch entstanden denken, daß in der an zweiter Stelle genannten Meßanordnung der Heizkörper ganz fortgelassen und zugleich die Belastung der beiden Widerstandsthermometer so gesteigert wird, daß nunmehr das in der Richtung des Gasstromes vorangelegene Widerstandsthermometer zugleich als Heizkörper gegenüber dem dahintergelegenen wirkt.

Die aus den angedeuteten Vorarbeiten hervorgegangene Meßanordnung ist folgende:

4. Prinzip des Apparates.

Die Vorrichtung zum Messen der Geschwindigkeit von Gasen oder Luft besteht aus einer Wheatstoneschen Brückenordnung, von der zwei gleiche Zweige aus sehr dünnem, durch den Meßstrom erwärmten Draht von großem Widerstandstemperaturkoeffizienten gebildet werden. Die beiden Zweige liegen hintereinander in dem strömenden Medium. Vorteilhaft werden sie zickzackförmig derart angeordnet, daß ihre Ebene in der Strömungsrichtung liegt, und daß sie in einem innen hochpolierten, gut wärmeleitenden Gehäuse untergebracht sind. Der von dem strömenden Medium zuerst getroffene Zweig wird stärker abgekühlt als der zu zweit getroffene, der von bereits vorgewärmtem Gas bespült wird. Infolgedessen ändert sich der Widerstand des ersten Zweiges gegenüber dem des zweiten, und das Galvanometer schlägt aus. In Fig. 1 ist das Schaltungsschema dargestellt; w_1 und w_2 sind die beiden dem Luftstrom ausgesetzten Zweige der Wheatstone-Brücke, w_3 und w_4 die beiden Zweige von konstantem Widerstande, B ist die Batterie, welche die Brücke speist, S ein Schleifkontakt zur Abgleichung der Brücke, G das Galvanometer¹⁾, W ein Regulierwiderstand für die Einstellung des Belastungsstromes der Brücke.

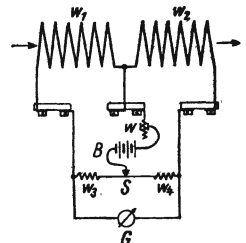


Fig. 1

¹⁾ In der praktischen Ausführung wird das Galvanometer mittels eines Umschalters zugleich zur Kontrolle des Belastungsstromes verwendet.

Um äußere thermische Störungen unschädlich zu machen und stets reproduzierbare und schnell sich einstellende Temperaturverteilungen an den beiden veränderlichen Zweigen der Brücke zu erhalten, sind diese in ein hinreichend dickwandiges Gehäuse aus innen vernickeltem und hochglanzpoliertem Kupfer eingeschlossen. Beide veränderlichen Zweige befinden sich also unmittelbar nebeneinander, vollkommen symmetrisch innerhalb dieser gut wärmeleitenden Kupferhülle.

Diese Anordnung verdient den Vorzug vor einer von anderer Seite vorgeschlagenen, bei welcher nur ein Zweig (oder zwei gegenüberliegende Zweige) der Brücke dem Gasstrom ausgesetzt ist, während der benachbarte Zweig (oder die beiden anderen Zweige) aus Material von dem gleichen Temperaturkoeffizienten hergestellt und auf der Temperatur der Umgebung gehalten wird. In einer derartigen Brücke herrscht nur für einen ganz bestimmten Belastungsstrom Gleichgewicht; soll das Brückeninstrument die zur eigentlichen Messung erwünschte Empfindlichkeit haben, so reagiert es in schädlichster Weise auf die geringsten Schwankungen des Belastungsstromes. Daneben tritt jede Änderung der Außentemperatur als Störung der Nulllage in Erscheinung, indem sie diese teils dauernd verändert, teils sie nur auf eine gewisse Zeit stört, weil die Geschwindigkeiten, mit welchen die beiden veränderlichen Zweige Änderungen der Außentemperatur folgen, naturgemäß verschieden sein müssen, da ja der eine Zweig bei der gewollten Belastung sich erheblich über die Temperatur der Umgebung erwärmen soll, während der andere bei der auf ihn entfallenden Belastung merklich die Temperatur der Umgebung beibehalten soll.

Von diesen Mängeln ist unsere Anordnung frei, insofern die beiden aus temperaturempfindlichem Material hergestellten Zweige, vollkommen symmetrisch gestaltet, beide in dem gleichen Gehäuse auf die gleiche Temperatur über diejenige der Umgebung geheizt werden; dadurch ist erreicht, daß bei merklicher Symmetrie der Anordnung Schwankungen des Belastungsstromes und der Außentemperatur nur verschwindende Änderungen der Nulllage des Brückeninstrumentes hervorrufen.

Fast die gleiche Störungsfreiheit ließe sich erwarten, wenn beide Zweige wie bei unserer Anordnung (Einkammersystem) vollkommen gleich behandelt würden, im übrigen aber in zwei getrennte Kammern innerhalb des gleichen Kupferklotzes eingebaut würden, von denen nur die eine von dem Gasstrom durchflossen wird. Diese Anordnung (Zweikammersystem) würde eine höhere (freilich nicht erheblich höhere, vgl. unten § 9) Empfindlichkeit aufweisen als das Einkammersystem, da bei diesem nur der eine Zweig durch den Gasstrom gekühlt wird, während der Vergleichszweig vollständig unbeeinflusst bleibt, was bei dem Einkammersystem (vgl. unten) nur angenähert der Fall ist. Tatsächlich läßt sich die notwendige hohe Symmetrie der beiden Brückenzweige leichter bei dem Einkammersystem durchführen, welches vor dem Zweikammersystem den nicht unwesentlichen Vorzug besitzt, daß bei ihm der Ausschlag des Brückeninstrumentes eine ungerade Funktion der Gasgeschwindigkeit ist, so daß eine symmetrische Verwendung des Geschwindigkeitsmessers mit Anzeige der Strömungsrichtung erreicht wird (siehe § 14).

5. Normale Ausführungsform.

Das in Vorstehendem angedeutete Meßprinzip wurde in einer Konstruktion verwirklicht, deren Einzelheiten folgende sind:

Der eigentliche Hitzdrahtapparat¹⁾, von welchem Fig. 2 einen Schnitt in der Ebene der Hitzdrahtsysteme, Fig. 3 einen Schnitt senkrecht zu dieser und zur Richtung des Gasstromes im Apparat und Fig. 4 einen Schnitt senkrecht zur Ebene der Hitzdrahtsysteme und parallel zur Richtung des Gasstromes zeigen, besteht aus einem massiven, parallelepipedischen Kupferklotz K , der aus den beiden Hälften K_1 und K_2 unter Zwischenlage der Kupferleisten L_1, L_2, L_3, L_4 (Fig. 3) zusammenschraubt

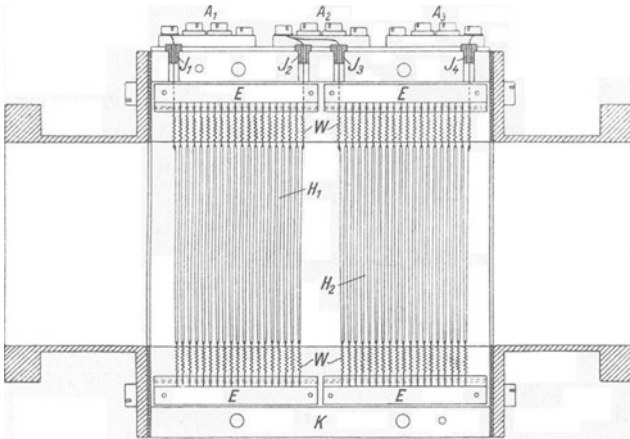


Fig. 2.

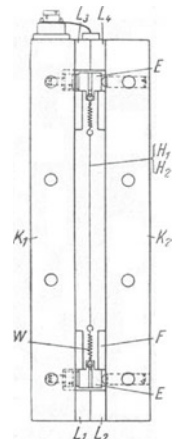


Fig. 3.

ist, so daß zwischen den beiden auf der Innenseite eben abgeschliffenen, vernickelten und auf Hochglanz polierten Kupferplatten K_1 und K_2 ein freier Kanal von rechteckigem Querschnitt gebildet wird. Innerhalb dieses Kanals, genau symmetrisch zueinander und zu den beiden Kupferplatten K_1, K_2 , sind die Hitzdrahtsysteme H_1 und H_2 ausgespannt. Der Gasstrom wird dem Kanal mittels des Rohrstopfens R_1 (Fig. 4) zugeführt und durchströmt, ehe er in den Kanal tritt, die Verteilungskammer V_1 und die Düse D_1 . Beide haben den Zweck, die Geschwindigkeitsverteilung innerhalb des Kanals zwischen den Kupferplatten möglichst homogen zu machen. In analoger Weise erfolgt der Austritt des Gases durch die Düse D_2 , die Kammer V_2 und den Rohrstopfen R_2 (Fig. 4).

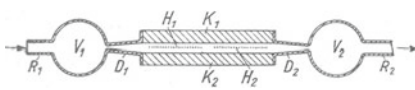


Fig. 4.

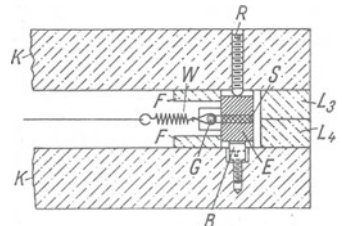


Fig. 5.

Die Einzelheiten der Konstruktion der Hitzdrahtsysteme sind aus den Figg. 2, 3 und 5 zu ersehen. Jeder der beiden Brückenzweige besteht aus Nickeldraht von 0,035 mm Dicke oder Platindraht von 0,040 mm Dicke, der in je 19 Hin- und Hergehängen zwischen den federnden Häkchen ausgespannt ist; die Häkchen sind an kleine Wurmfedern W aus 0,12 mm dickem Nickeldraht (bzw. aus 0,08 mm dickem Platiniridiumdraht) angebogen. An den freien Enden der Wurmfedern sind die gleichen Häkchen angebogen; diese umfassen ein Glasstäbchen G (Fig. 5) von 0,3 mm

¹⁾ D. R. P. Nr. 242 038, Kl. 42o, Gr. 11 vom 18. Mai 1909.

Dicke, das in einer durch Sägenschnitt hergestellten, geraden Nut einer kleinen Elfenbeinleiste E liegt. Letztere ist, um das Einhaken der einzelnen Wurmfedern zu ermöglichen, mit einer hinreichenden Anzahl äquidistanter, kammartiger Einschnitte versehen, in welchen die Haken gegen seitliche Verschiebungen geschützt, aber im übrigen frei drehbar, an den Glasstäbchen angreifen. Die Nut in der Elfenbeinleiste ist mit einem Glimmerstreifen S (Fig. 5) von entsprechender Dicke verschlossen. Die Elfenbeinleisten werden durch den Zug der Wurmfedern gegen Führungsleisten F (Fig. 3 und 5) angedrückt, die auf den Kupferplatten K_1 und K_2 befestigt sind; innerhalb der zwischen den Führungsleisten F , den Leisten L_3 und L_4 und den Kupferplatten K_1 , K_2 liegenden Nut ist die Lage der Elfenbeinleisten zwischen den Kupferplatten mittels der Regulierschrauben R und der Blattfedern B einstellbar. Die Enden der Hitzdrähte sind durch die isolierenden und abdichtenden Buchsen J_1, J_2, J_3, J_4 (Fig. 2) mit den außen am Gehäuse isoliert befestigten Anschlußklemmen A_1, A_2, A_3 (Fig. 2) leitend verbunden.

Diese Konstruktion¹⁾ der Hitzdrahtsysteme ermöglicht es, die elektrisch geheizten, dünnen Drähte unbeeinflusst von thermischen Längenänderungen stets genau in der Mittelebene zwischen den beiden mittels Kugelkaliber auf Planparallelität justierten Kupferplatten des Gehäuses auszuspannen, wodurch eine weitgehende Symmetrie und entsprechende Unabhängigkeit des Brückengleichgewichts von der Temperatur erreichbar ist.

Durch diese Konstruktion wird auch der Anforderung genügt, nach welcher die über die Temperatur der Umgebung erwärmten Teile möglichst geringe Wärmekapazität besitzen und in möglichst geringem Wärmeaustausch mit schlechten Wärmeleitern stehen sollen; denn die Hitzdrähte sind von den thermisch isolierenden Glasstäbchen und Elfenbeinleisten durch die verhältnismäßig langen dünnen Nickelindrähte der Wurmfedern thermisch isoliert, auf welchen sich der der jeweiligen Temperatur der Hitzdrähte entsprechende Temperaturgradient schnell einstellt — im übrigen sind die schlechten Wärmeleiter größtenteils durch die Führungsleisten F (Fig. 3 und 5) gegen Wärmeaustausch mit den Hitzdrähten durch Strahlung geschützt.

Der bisher beschriebene Apparat ist ohne weiteres zur Messung von Gasströmen in Rohrleitungen verwendbar. Die in den Figg. 2—5 dargestellte Ausführungsform reicht z. B. zur Messung von Luftquanten zwischen 0 und etwa 40 ccm/sec. aus. Sollen größere Luftgeschwindigkeiten gemessen werden, so könnte dieses natürlich innerhalb gewisser Grenzen durch Vergrößerung der Dimensionen des Hitzdrahtapparates geleistet werden; dieser Weg ist jedoch nicht rationell, da er die Herstellung einer Reihe verschiedener Apparatypen erforderlich machen würde. Zweckmäßiger ist es, eine einzige Type durchzubilden und die jeweils erforderliche geringere Empfindlichkeit durch eine Art von aerodynamischem Nebenschluß herzustellen.

¹⁾ Die Konstruktion genügt übrigens, was auf den ersten Blick vielleicht nicht selbstverständlich erscheint, den höchsten Ansprüchen an Festigkeit; durch das Herstellungsverfahren werden die dünnen Platin- und Nickeldrähte nur mit etwa $\frac{1}{10}$ ihrer Zugfestigkeit beansprucht, die Aufhängung der Wurmfedern an den Glasstäbchen ist ebenfalls sehr sicher — eine Bruchgefahr des Glasstäbchens kommt nicht in Frage, da es an der Aufhängestelle nur eine freie Länge von 0,15 mm überbrückt. Die Gefahr des Zerreißen des Hitzdrahtes durch Erschütterungen ist wegen der geringen Masse des Drahtes selbstverständlich ausgeschlossen. Die Elfenbeinleisten werden in ihrer einregulierten Lage von den Schrauben R und den Blattfedern B festgehalten.

6. Der Hitzdrahtapparat in Verbindung mit einem Staukörper.

Die zweckmäßigste Art, den Hitzdrahtapparat zur Messung der Gasgeschwindigkeit bei großen Mengen in einem geschlossenen Rohre brauchbar zu machen, ist die Verbindung des Apparates mit einem Staurohr oder dergleichen, wodurch auch die Aufgabe der Luftgeschwindigkeitsmessung im Freien gelöst wird; das Prinzip der Messung ist kurz folgendes: Während bisher die Geschwindigkeitsmessung mittels des Staurohrs oder der Stauscheibe usw. derart erfolgte, daß an die beiden vom Staukörper kommenden Rohrleitungen ein Manometer angeschlossen wurde, dessen Ausschlag ein Maß für die Geschwindigkeit ergab, wird bei unserer Anordnung der Hitzdrahtapparat (vgl. Fig. 6) an einen Staukörper angeschlossen, so daß jetzt unter der Wirkung der Druckdifferenz, die zwischen der Vorder- und der Rückseite des Staukörpers im strömenden Gase besteht, ein schwacher Gasstrom durch die Rohrleitungen und den Hitzdrahtapparat fließt. Dieser Gasstrom stört, wie oben beschrieben, durch seine Kühlwirkung den Ausgleich der Brücke, und der Ausschlag des daran angeschlossenen Galvanometers gibt ein Maß für die Geschwindigkeit des Gasstromes, welchem der Staukörper ausgesetzt ist. Die Druckdifferenz Δp an dem Staukörper steht mit der Geschwindigkeit v des Gases in dem bekannten Zusammenhang

$$\Delta p = k \cdot \frac{\sigma v^2}{2g},$$

worin k eine von der Form des Staukörpers abhängige Konstante, σ die Dichte des Gases und g die Beschleunigung durch die Schwere bezeichnet. Die Geschwindigkeit des Gases im Hitzdrahtapparat ist nahezu proportional Δp und hängt ab von dem Reibungswiderstand des Apparates und der Rohrleitungen, durch dessen Wahl sich beliebige Empfindlichkeiten einstellen lassen (vgl. unten § 7 und 9). Für Geschwindigkeitsmessungen in Röhren und Kanälen verwendet man zweckmäßig Staukörper nach Art der Pitotröhren. Für Messungen im Freien ziehen wir die Stauscheibe vor, weil sie in besonders einfacher Weise einen Staubschutz erhalten und überhaupt einfacher und leichter als ein entsprechendes Staurohr gebaut werden kann¹⁾.

Unsere normale Stauscheibe (Fig. 6, S) besteht aus einer kreisrunden Platte (Dicke 1 mm, Durchmesser 100 mm), die beiderseits mit einem etwa 10 mm hohen Rand versehen ist. Die Rohrleitungen durchdringen beiderseits symmetrisch den Rand und verlaufen, wie aus Fig. 6 ersichtlich ist, über die ganze Breite der Stauscheibe; die Eintritts- bzw. Austrittsöffnungen befinden sich beiderseits in den Rohrleitungen über der Mitte der Platte und sind dieser zugewandt. Im Freien wird die Stauscheibe stets so benutzt, daß die Rohrleitungen von ihr aus zunächst ein Stück weit aufsteigen, wodurch das Eindringen der atmosphärischen Niederschläge verhindert wird.

Die besondere Form der Stauscheibe mit hohem Rand wurde auf Grund von Versuchen gewählt, durch welche eine besonders große Unabhängigkeit dieser Stauscheibe von Abweichungen aus der Windrichtung erwiesen wurde; tatsächlich beträgt der Ausschlagsfehler bei einer innerhalb 25° aus der Windrichtung herausgedrehten Stauscheibe dieser Art höchstens etwa 1%.

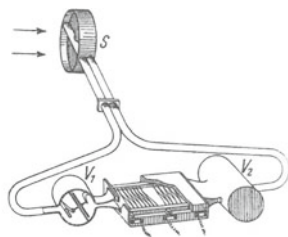


Fig. 6.

¹⁾ Vgl. R. Holm, Phys. Zeitschr. 20, 27 (1919).

Mit Rücksicht darauf, daß bei dem dynamischen Anschluß des Hitzdrahtapparates immerhin merkliche Luftmengen durch diesen Apparat von der Vorderseite zur Rückseite der Scheibe abfließen, hat unsere Stauscheibe relativ große Dimensionen bekommen. Stauröhren für Anschluß an unseren Hitzdrahtapparat müssen etwa dieselben Querdimensionen wie die Stauscheibe haben. Weil sie dabei beträchtliche Länge erhalten, werden sie verhältnismäßig schwer¹⁾.

Die vom Staukörper zum Hitzdrahtapparat führenden Rohrleitungen sind weiterhin so gewählt, daß ihr Luftwiderstand nur einen kleinen Bruchteil des Gesamtwiderstandes ausmacht, somit also auch etwa vorkommende Änderungen dieses Bruchteils keine störende Einwirkung auf die Meßgenauigkeit ausüben können. Der wesentliche Anteil (mindestens 90%) des in der Vorrichtung vorhandenen Widerstandes wird an eine leicht zugängliche Stelle des Apparates verlegt, wo er in bezug auf Sauberkeit und Unveränderlichkeit leicht kontrolliert werden kann. In der vor dem eigentlichen Hitzdrahtapparat gelegenen Verteilungskammer V_1 (Fig. 4 und 6) wird eine Kapillare oder ein aus zwei ebenen Platten von regulierbarem Abstand gebildeter Strömungswiderstand eingebaut, der mindestens den zehnfachen Wert jenes Widerstandes erhält, der sonst auf den Apparat und die Rohrleitungen zusammen entfällt²⁾.

7. Temperaturkompensation.

Die beschriebene Vorrichtung genügt allen Anforderungen an Unveränderlichkeit und Präzision, solange merkliche Temperaturschwankungen in dem Gase, dessen Geschwindigkeit gemessen werden soll, nicht vorkommen. Sollen diese berücksichtigt werden, so kann entweder die Temperaturabhängigkeit des Instrumentes ein für allemal ermittelt werden, und bei der Messung der Geschwindigkeit die Temperatur mit bestimmt und diese zur Anbringung einer Korrektur auf rechnerischem oder graphischem Wege benutzt werden. Dieses Verfahren ist aber zeitraubend und überall da unbrauchbar, wo es sich darum handelt, auch mit ungeschultem Personal durch eine einzige Ablesung eine Geschwindigkeitsmessung vorzunehmen. Wir haben uns daher bemüht, die Temperaturabhängigkeit des Instruments auf mechanischem³⁾ Wege direkt zu kompensieren. Die Temperaturabhängigkeit des mit der Stauscheibe verbundenen Hitzdrahtapparates setzt sich aus drei verschiedenen Anteilen zusammen; erstens ändert sich bei gleichbleibender Geschwindigkeit der Staudruck, da die Dichte sich mit der Temperatur ändert, zweitens ist auch die Reibung und die spezifische Wärme des Gases von der Temperatur abhängig, und drittens ist bei der elektrischen Messung⁴⁾ die Veränderung des Widerstandes der Hitzdrähte mit der Temperatur zu berücksichtigen, wenn man eine bestimmte Festsetzung über die Belastung der Brücke, z. B. Konstanz der Gesamtstromstärke, macht. Unter der letzten Annahme ergibt sich so für das Zusammenwirken aller genannten Faktoren eine Temperaturabhängigkeit der Geschwindigkeitsmessung von etwa $-1,5\%$ pro Grad Celsius für den unkompensierten Apparat. Durch die von uns angewandte Temperaturkompensation ist es gelungen, den Temperatureinfluß für fast die ganze

¹⁾ Vgl. Holm, loc. cit.

²⁾ Über einen zur Messung der Windneigung geeigneten Staukörper s. unter II.

³⁾ Eine elektrische Kompensation, etwa durch mit der Temperatur automatisch veränderliche Stärke des Heizstromes führt auf Grund gewisser Eigentümlichkeiten der Skala nicht zum Ziel.

⁴⁾ Der Einfluß der Temperatur auf die Anzeige des Brückeninstrumentes als solches ist weitgehend beseitigt.

Skala unter $0,1\%$ pro $^{\circ}\text{C}$ herabzudrücken, und zwar besteht eine gute Kompensation innerhalb eines Temperaturbereichs von etwa 40°C .

Das Prinzip der Kompensation ist folgendes: Ein Durchlaßventil, welches in den Luftweg vor dem Hitzdrahtapparat eingeschaltet ist, wird durch einen aus zwei Metallen von verschiedenem thermischen Ausdehnungskoeffizienten gebildeten Mechanismus so gesteuert, daß seine Widerstandsänderungen bei eintretenden Temperaturänderungen gerade die Temperaturabhängigkeit des übrigen Apparates aufheben. Die Einzelheiten der Konstruktion¹⁾ sind folgende (in Fig. 7 schematisch dargestellt): Ein außen schwach konisch abgedrehtes und nach Art eines Hahnkükens in die Verteilungskammer V_1 (Fig. 4 und 6) dicht eingeschliffenes Gehäuse enthält den ganzen Mechanismus und ist mit einer (in der Fig. 7 weggelassenen) Eintrittsöffnung für den Gasstrom versehen; der Austritt des Gases erfolgt durch eine Öffnung O in der Grundplatte G des Ventils.

Das Gas muß von hier aus radial zwischen der Grundplatte und der darüberschwebenden ebenen, kreisrunden Ventilplatte P hindurchströmen, um dann in die Düse D_1 (Fig. 4) einzutreten. Die Ventilplatte wird durch die Feder C (Fig. 7) von der Grundplatte abgezogen, während sie auf der anderen Seite durch den Stift, welcher das Loch in der Grundplatte zentrisch durchsetzt, mit dem temperaturempfindlichen Element verbunden ist. Letzteres besteht aus dem dünnen Metallband B und dem starken Nickelstahlbalken N von \perp -förmigem Querschnitt; das Band ist in der in Fig. 7 ersichtlichen Weise an beiden Enden mit dem Nickelstahlbalken verschraubt und wird durch den in seiner Mitte mit entsprechender Verschraubung angreifenden Stift D gespannt. Der in der Mitte an dem Balken M befestigte Nickelstahlbalken ist mittels der beiden Justierschrauben J_1 und J_2 in seinem Abstand von der Grundplatte G einstellbar.

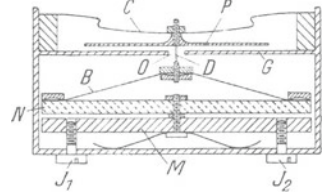


Fig. 7.

Bei steigender Temperatur dehnt sich das Metallband B stärker aus als der Nickelstahlbalken N , es folgt also die Ventilplatte P dem Zuge der Feder C und entfernt sich von der Grundplatte, wodurch der Luftwiderstand des Ventils verkleinert wird. Bei sinkender Temperatur zieht das sich zusammenziehende Metallband die Ventilplatte wieder näher an die Grundplatte heran.

Der Abstand, den die Ventilplatte von der Grundplatte bei einer bestimmten Temperatur haben soll — wodurch Empfindlichkeit und Messbereich des Apparates festgelegt werden — ist mittels der Justierschrauben J_1 und J_2 einstellbar, der Temperaturgang der Ventilbewegung wird durch die Länge und den Durchhang des Metallbandes bestimmt. Die Kräfte, welche von der Feder und dem Bimetallmechanismus auf die Ventilplatte ausgeübt werden, sind so groß gewählt, daß die Druckkräfte der Luftbewegung sowie auch mäßige Erschütterungen des Apparates die Lage der Ventilplatte nicht in störender Weise beeinflussen.

Als Materialien für das Metallband (B , Fig. 7) haben wir Konstantan, Neusilberbronze und Phosphorbronze erprobt. Alle drei Materialien genügen ziemlich gleichwertig den Anforderungen an einen normalen thermischen Ausdehnungskoeffizienten, Festigkeit und geringe elastische Nachwirkung. Unsere bisherigen Erfahrungen

¹⁾ D. R. P. Nr. 252 649, Kl. 17f, Gr. 11 vom 22. April 1911.

gestatten die Behauptung, daß unsere Temperaturkompensation von ungefähr einem Monat nach der Fabrikation ab keine zu berücksichtigende elastische Nachwirkung erleidet. Ein merkliches Nachhinken in der Einstellung des Ventils bei steigender und fallender Temperatur innerhalb der Grenzen -20° und $+40^\circ$ ist nicht vorhanden. Dies ist einmal auf die geringe elastische Nachwirkung der Materialien zurückzuführen, andererseits aber auch bedingt durch die besonders sichere und unveränderliche Befestigung (vgl. Fig. 7) des Bandes durch Einklemmen und vor allem durch die Konstruktion des ganzen Mechanismus, bei welchem alle mit Reibung behafteten Gelenke und dergleichen vermieden sind.

Da der wesentliche Anteil des Strömungswiderstandes¹⁾ in den Raum zwischen Ventilplatte und Grundplatte verlegt ist, muß die Sauberkeit und Unveränderlichkeit dieser Anordnung garantiert und stets leicht der Nachprüfung zugänglich sein. Zu diesem Zweck schalten wir meistens vor die Temperaturkompensation ein Staubfilter; außerdem ist die ganze Temperaturkompensation so eingerichtet, daß sie nach Lösen einer einzigen Verschraubung an der Verteilungskammer V_1 (Fig. 4 und 6) herausgezogen werden kann. Hält man dann die Kompensation gegen einen hellen Hintergrund und visiert zwischen der Ventilplatte und der Grundplatte hindurch, so sind Staubkörner oder dergleichen, die sich auf den Platten abgesetzt haben, auf deren vernickelter und auf Hochglanz polierter Oberfläche leicht erkennbar und können mittels eines Haarpinsels entfernt werden. Die Erfahrung lehrt übrigens, daß Verunreinigungen sich selten hier, viel leichter in den beiden Rohrleitungen und überall da absetzen, wo die Strömungsgeschwindigkeit des Gases klein ist, und daß ein sehr einfaches Seidenfilter (siehe unten) ohne in Frage kommende Widerstandsveränderung jahrelang der Kompensation genügenden Schutz gewähren kann. Einige wenige Staubkörner stören übrigens die Wirkung des Ventils nicht merklich. Für besonders stark verunreinigte Gase verwenden wir besonders leistungsfähige Filtereinrichtungen (vgl. unten II).

8. Der Hitzdrahtapparat im Nebenschluß zu einem Poiseuilleschen Widerstand.

In vielen Fällen, wo es sich um die Messung großer Gasgeschwindigkeiten in Röhren handelt, kann man statt des Anschlusses an einen Staukörper eine Anordnung verwenden, bei welcher der Hitzdrahtapparat im Nebenschluß zu einem in die Rohrleitung eingebauten Strömungswiderstand liegt, derart, daß stets ein gewisser konstanter Bruchteil des ganzen Gasstromes den Nebenschluß passiert. Diese Anordnung empfiehlt sich überall da, wo merkliche Druckschwankungen in dem zu messenden Gasstrom vorkommen, da sie wie der einfache Hitzdrahtapparat bei direkter Durchströmung unmittelbar die in der Sekunde durchströmende Gas(gewichts)menge (vgl. unten § 10) zu messen gestattet. Dabei muß, wenn ein konstanter Bruchteil des Gasstromes durch den Nebenschluß abgezweigt werden soll, sowohl dieser als auch der in das Hauptrohr eingebaute Strömungswiderstand so konstruiert sein, daß in ihm auch bei der maximal vorkommenden Gasgeschwindigkeit reiner, Poiseuillescher (wirbelfreier) Strömungszustand herrscht. Für den im Nebenschluß liegenden Hitzdrahtapparat ist eine Lösung dieser Aufgabe bereits in § 7 angegeben worden. Als wirbelfreien Strömungswiderstand kann man ein Bündel nach Art der

¹⁾ Dieser Strömungswiderstand ist von der Größenordnung $1 \frac{\text{mm Wasserdruck}}{\text{cm}^2 \text{sec}}$, während der Widerstand des ganzen sonstigen Kanals den sechsten Teil davon beträgt.

Dampfkesselsiederohre parallelgeschalteter Kapillarrohre (1—2 mm Durchmesser) verwenden, welches bei staubhaltigen Gasen durch vorgeschaltete Staubfilter geschützt werden muß. Handelt es sich bei der Messung sehr großer sekundlicher Durchströmungsmengen darum, in sehr ausgedehnten Rohrquerschnitten die wirbelfreie Strömung zu erzielen, so verwendet man statt der Kapillarrohrbündel besser Widerstände aus übereinandergeschichteten Blechen, die durch zwischengelegte schmale Blechstreifen in einem Abstände von etwa 1 mm gehalten werden; diese Widerstände sind wohlfeil und mit genügend gesicherter Unveränderlichkeit herzustellen und haben sich nach unseren Messungen (mit Luft und Wasserstoff) gut bewährt.

Bei der Verwendung derartiger Strömungswiderstände muß die Rohrleitung für den Anschluß der zum Nebenschluß führenden Leitungen vor und hinter dem Widerstand hinreichend erweitert werden, um die Gasgeschwindigkeit soweit herabzusetzen, daß keine merklichen Stau- oder Saugwirkungen an den Anschlußstellen zustande kommen.

9. Günstigste Betriebsbedingungen.

Über die günstigsten Betriebsbedingungen (Dimensionen der einzelnen Teile des Hitzdrahtapparates, Schaltung, Belastungsstrom) haben wir eingehende Untersuchungen angestellt, deren Hauptresultate hier kurz angeführt werden sollen:

Die günstigsten Betriebsbedingungen hängen von den Anforderungen ab, die an die Einstellgeschwindigkeit, die Empfindlichkeit, die zum Betriebe erforderliche Stromquelle und an das Brückeninstrument gestellt werden.

Die Betriebsbedingungen, für welche die von uns ausgearbeitete Type konstruiert ist, setzen ein nicht allzu empfindliches, gut transportables Strominstrument, einen verhältnismäßig geringen Energieverbrauch des Hitzdrahtapparates bei nicht zu kleiner Betriebsspannung, eine Einstellgeschwindigkeit, welche spätestens nach ein paar Sekunden (je nach der herrschenden Gasgeschwindigkeit) zur endgültigen Einstellung führt, und eine Empfindlichkeit, die bei den in Frage kommenden Anwendungen noch ein merkliches Abdrosseln des Gasstromes gestattet, voraus.

Von den Dimensionen des Hitzdrahtapparates spielt die Dicke des Kanals die wichtigste Rolle. Mit wachsender Dicke sinkt bei gleichbleibender Gasmenge pro Sekunde die Einstellgeschwindigkeit, während die Empfindlichkeit (bei gleicher Belastungsstromstärke) steigt. Letzteres ist darin begründet, daß die Temperaturerhöhung der Hitzdrähte über die Temperatur der Umgebung mit der Dicke der Luftschicht wächst, durch welche die Wärmeableitung zu den Wänden des Gehäuses erfolgt — wodurch also die Empfindlichkeit der Brücke wächst.

Die Steigerung der Empfindlichkeit auf diesem Wege stößt jedoch auf eine Grenze, oberhalb deren der Apparat überhaupt unbrauchbar wird. Benutzt man den Apparat in seiner normalen Lage, in welcher die Kupferplatten des Gehäuses horizontal liegen, so zeigt sich, daß bei gleicher Belastungsstromstärke oberhalb eines gewissen Plattenabstandes (bei den von uns gewählten Verhältnissen etwa oberhalb 10 mm) die Gleichgewichtslage des Brückeninstrumentes labil wird — während schon kurz unterhalb dieser Grenze eine sehr störende Empfindlichkeit gegen Neigungen des Apparates bemerkbar wird. Diese Verhältnisse werden wahrscheinlich dadurch erklärt, daß bei kleinen Plattenabständen der Wärmeübergang von den Hitzdrähten zur Wand des Gehäuses wesentlich durch reine Wärmeleitung besorgt wird,

neben welcher vielleicht in geringem Maße von den einzelnen Drähten aufsteigende Konvektionsströme in stationärer Weise wirksam sind — bei größeren Plattenabständen aber — ähnlich dem Auftreten des turbulenten Zustandes bei der Strömung von Flüssigkeiten durch Hohlräume — sich ein unregelmäßiger Konvektionswirbel ausbildet, dessen Wirkung natürlich stark von Neigungen des Apparates abhängt. Bei dem von uns gewählten Plattenabstand von 6 mm herrscht noch durchaus stabiles Gleichgewicht bei einer ausreichenden Empfindlichkeit und Einstellgeschwindigkeit.

Die Länge des Kanals beeinflusst außer der Einstellgeschwindigkeit im wesentlichen den Gang der Empfindlichkeit; je länger man den Kanal macht, um so wirksamer tritt das Phänomen des Vorwärmens des durchströmenden Gases (s. oben) in Erscheinung, um so weiter rückt also das oben erwähnte Maximum des Ausschlages zu größeren Gasgeschwindigkeiten hinaus. Wir haben uns auch mit Rücksicht auf die Herstellungskosten des Apparates mit der aus den Figg. 2 und 4 ersichtlichen Länge des Kanals begnügt, da sich mit dieser schon der gewünschte Gang der Empfindlichkeit erzielen läßt. Die Breite des Kanals hat im wesentlichen nur Einfluß auf die Einstellgeschwindigkeit.

Als kleinste brauchbare Drahtstärke und gleichzeitig die zweckmäßigste haben wir für die Nickeldrähte die Dicke von 0,035 mm gefunden. Drähte von diesem Durchmesser sind noch hinreichend homogen und ermöglichen ohne besonderen Aufwand die Verarbeitung zu symmetrischen Brückenweigen. Ungefähr dieselbe Empfindlichkeit wie mit 0,035 mm dickem Nickeldraht erreichen wir mit gleichlangen, gleichbelasteten Platindrähten von 0,04 mm Dicke.

Die Belastungsstromstärke wird für alle Apparate, die einfachen Messungen dienen, bei durchströmtem Apparat einreguliert. Für registrierende Apparate wählt man Betriebsspannung und Vorschaltwiderstand zweckmäßig so groß, daß die Belastungsstromstärke praktisch unabhängig von dem Widerstand der Hitzdrähte wird.

Wir verwenden je nach der Empfindlichkeit des benutzten Brückeninstrumentes verschiedene Belastungsstromstärken. Die kleinste bisher gebrauchte betrug:

0,045 Amp. in jedem Zweig der Brücke, also insgesamt 0,09 Amp., die größte betrug:

0,090 Amp. in jedem Zweig der Brücke, also insgesamt 0,18 Amp. Durch erstere wird die Temperatur der Nickelheizdrähte um etwa 10° C, bzw. 13,5° für die Platindrähte, durch letztere um etwa 52° C, bzw. 48° für die Platindrähte, über diejenige der Umgebung erhöht. Der Wattverbrauch im Apparat beträgt im ersten Falle 0,6 Watt, im zweiten 2,5 Watt, und der Widerstand des einzelnen Brückenweiges, der im unbelasteten Zustand bei Zimmertemperatur etwa 125 Ohm, bzw. 133 für Platin beträgt, steigt im ersten Falle auf 132, bzw. 140, im zweiten auf 158 Ohm, bzw. 158 Ohm¹⁾.

Die Temperaturen der Hitzdrähte blieben in jedem Falle (bei gewöhnlicher Temperatur des Gases) weit unterhalb derjenigen, bei welcher Staubverbrennung (und damit Korrosion der Drähte) oder gar Zündwirkungen in explosiblen Gasgemischen bewirkt werden.

Da im ersten Falle nur etwa auf 250 cm², im zweiten auf etwa 59 cm² der Oberfläche des Gehäuses die in einer Sekunde fortzuführende Energiemenge von 1 Watt

¹⁾ In gewissen neueren Apparaten beträgt der Widerstand eines Brückenweiges bei Zimmertemperatur etwa 160 Ohm.

entfällt, erwärmt sich dieses, wenn es von der freien Luft umspült wird, nicht merklich über die Temperatur der Umgebung.

Die Betriebsspannung beträgt mindestens etwa 15 bzw. 32 Volt.

10. Empfindlichkeit und Skala des elektrischen Luftgeschwindigkeitsmessers.

Die Empfindlichkeit des Apparates gemessen in Skalenteilen Ausschlag pro ccm/sec. durchströmenden Gases ist angenähert proportional dem Produkt aus Belastungsstromstärke und Temperaturerhöhung der Hitzdrähte.

Der Zusammenhang zwischen Luftgeschwindigkeit und Ausschlag des Brückeninstrumentes ergibt sich aus dem Verlauf der Abkühlung, die das erste und das zweite Drahtsystem bei wachsender Geschwindigkeit erleiden; er wurde durch besondere Messungen festgestellt und wird durch die folgende Tabelle erläutert, die mit Nickeldraht für die Belastungsstromstärke 0,045 Amp. (des einzelnen Zweiges) aufgenommen wurde und die Temperaturerniedrigungen der beiden Zweige enthält.

Luftmenge ccm/sec	1. Zweig	2. Zweig
etwa 15	1,5°	0,5°
30	5,1°	2,6°

Da der Ausschlag des Brückengalvanometers proportional der Widerstandsdifferenz, in unserem Falle also der Temperaturdifferenz der beiden Zweige, ist, läßt sich aus der Tabelle leicht entnehmen, daß das von uns angewendete „Einkammersystem“ bei mittleren Geschwindigkeiten nur eine um 30% geringere Empfindlichkeit besitzt als das „Zweikammersystem“ bei gleichem Aufwand an Hitzdraht, denn die Temperaturdifferenz könnte bei letzterem maximal 1,5° erreichen, während sie bei dem ersteren 1,0° beträgt. Bei größeren Geschwindigkeiten steigt natürlich der Vorsprung des Zweikammersystems, wie aus der unteren Reihe der Tabelle ersichtlich ist, welche die Annäherung an den bei 40 ccm/sec liegenden Maximalausschlag erkennen läßt. Die damit erreichbare, höhere Empfindlichkeit hat aber für uns keinen Wert, da wir, um Poiseuillesche Ströme im Apparat zu bekommen, sehr große Geschwindigkeiten in dem Apparat vermeiden wollen. Eine kleinere Empfindlichkeit ist sogar bei großen Luftgeschwindigkeiten erwünscht, weil dadurch eine Erweiterung des Skalenbereiches bedingt wird.

Der Zusammenhang zwischen der am Apparat wirkenden Druckdifferenz, der das in der Sekunde durchströmende Gasvolumen angenähert proportional ist, und dem Galvanometerausschlag zeigt die gestrichelte Kurve in Fig. 8. Sie läßt die anfangs langsam zunehmende, dann auf längerer Strecke fast konstante Empfindlichkeit erkennen, die dann mit Annäherung an das flache Maximum des Ausschlages wieder stark abnimmt. In der ausgezogenen Kurve derselben Figur ist der Zusammenhang zwischen der Luftgeschwindigkeit und dem Ausschlag des Brückeninstru-

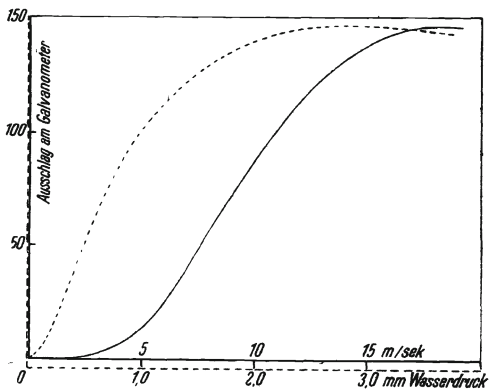


Fig. 8

menten für die Kombination des Hitzdrahtapparates mit der Stauscheibe gegeben. Die Kurve zeigt bei kleinen Geschwindigkeiten stark ansteigende Empfindlichkeit, die dann im Bereich der mittleren Geschwindigkeiten sehr nahe konstant wird, um bei größeren Geschwindigkeiten ein wenig abzunehmen¹⁾.

Der günstige lineare Verlauf bei mittleren Geschwindigkeiten wird erreicht durch Zusammenwirken der quadratisch mit der Geschwindigkeit ansteigenden Druckdifferenz an der Stauscheibe und der in dem gleichen Gebiet mehr und mehr abnehmenden Empfindlichkeit des Hitzdrahtapparates für die sekundlich durchströmende Gasmenge.

Die Zeit, welche der Hitzdrahtapparat braucht, um einer Änderung der Geschwindigkeit zu folgen, stimmt praktisch etwa mit derjenigen Zeit überein, welche das Gas braucht, um die halbe Länge des Luftkanals zu durchströmen, da die Einstellgeschwindigkeit der dünnen Hitzdrähte sehr groß ist und daher außer Betracht gelassen werden kann. Es hängt also die Einstellzeit des Hitzdrahtapparates von der Durchströmungsgeschwindigkeit ab und steht somit im engsten Zusammenhang mit der Dicke des Kanals und dadurch mit der Empfindlichkeit (vgl. oben § 8). Die Einstellzeit des normalen Hitzdrahtapparates beträgt bei großen Geschwindigkeiten etwa $\frac{1}{3}$ Sekunde und steigt bei ganz kleinen Geschwindigkeiten bis auf etwa 3 Sekunden. Sie kann auf Kosten der Empfindlichkeit vermindert werden.

Die ganze Anordnung — das Brückeninstrument eingeschlossen — hinkt bei mäßigen Änderungen der Geschwindigkeiten um etwa 2 Sekunden nach.

Die Empfindlichkeit des Apparates ist naturgemäß stark abhängig von der Art des Gases, dessen Geschwindigkeit gemessen werden soll. Einerseits sinkt bei höherer Wärmeleitfähigkeit die Temperaturerhöhung der Hitzdrähte bei gleicher Belastungsstromstärke, wodurch die Empfindlichkeit entsprechend verringert wird, andererseits hängt der Kühleffekt von der spezifischen Wärme des Gases ab. So ist z. B. die auf Volumen/sec bezogene Empfindlichkeit in Wasserstoff 15—20 mal kleiner als in Luft. Der Einfluß der Gasart ist von Wichtigkeit für diejenigen Anwendungen, bei welchen Verunreinigungen des zu messenden Gases durch andere Gase vorkommen. So vermindert sich die auf Volumen/sec bezogene Empfindlichkeit bei Luft, die mit Leuchtgas verunreinigt ist, für jedes Prozent Leuchtgas um etwa 3,5%. Die Empfindlichkeit bei Messungen mit Stauscheibe verringert sich entsprechend um 2% für jedes Prozent Leuchtgas.

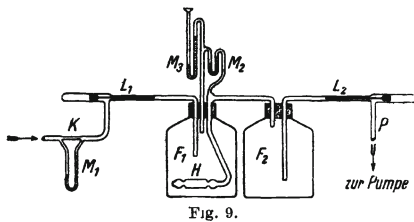


Fig. 9.

Hg.-Zunahme des Dampfdruckes, andererseits vergrößert sich die Empfindlichkeit des Hitzdrahtsystems zugleich um 0,03%, so daß die restierende Änderung fast vollkommen verschwindet.

Durch besondere Versuche wurde die Abhängigkeit der Geschwindigkeitsanzeige vom Gasdruck festgestellt. Die dazu benutzte Anordnung ist in Fig. 9 schematisch dargestellt. Darin bedeutet K eine geeichte Kapillare, an der durch Messung der

¹⁾ Der Meßbereich läßt sich (vgl. oben Schluß von § 6) durch Wahl des Luftwiderstandes natürlich weitgehend verändern, nur bleibt der allgemeine Charakter der Empfindlichkeitskurve erhalten.

Druckdifferenz mittels des Manometers M_1 die in der Sekunde durchströmende Gasmenge gemessen wird. Von hier tritt das bei P durch eine Pumpe abgesaugte Gas durch den Lenardschen Regulierhahn L_1 in die Flasche F_1 ein, die den Hitzdrahtapparat H enthält. Nachdem es diesen durchströmt hat, tritt es durch die zur Dämpfung von Druckschwankungen dienende Flasche F_2 und den Lenardschen Hahn L_2 in die Pumpe ein. Mittels der beiden Lenardschen Hähne läßt sich der Druck in der Flasche F_1 auf einen beliebigen Wert einregulieren, der zwischen dem Atmosphärendruck und dem durch die Pumpe geschaffenen Unterdruck liegt. An dem Manometer M_3 wird dieser Druck abgelesen, während das Manometer M_2 die Druckdifferenz an dem Hitzdrahtapparat angibt. Die Untersuchungen mit dieser Anordnung wurden auf Drucke bis herunter zu 250 mm Quecksilber in der Flasche F_1 ausgedehnt. Es wurde dabei gefunden, daß der Hitzdrahtapparat unmittelbar auf durchfließende Gewichtsmengen des verwendeten Gases reagiert¹⁾, unabhängig von dem Drucke, bei welchem diese den Apparat passieren. Dieses Ergebnis erklärt sich folgendermaßen:

Die Wärmeleitfähigkeit des Gases bleibt unabhängig vom Druck bis hinab zu sehr kleinen Drucken. Die durch diese Wärmeleitfähigkeit bedingte Temperaturerhöhung der Hitzdrähte bei ruhendem Gas bleibt deshalb auch unabhängig vom Druck. Da nun die Abkühlung der Drähte bloß von der Wärmekapazität des vorbeistreichenden Gases abhängig ist, so ist ohne weiteres ersichtlich, daß das Instrument einfach auf vorbeiströmende Gewichtsmengen des Gases anspricht.

Für die Einwirkung des Druckes auf die Anzeige des mit der Stauscheibe kombinierten Apparates haben wir keine besondere Kompensation verwendet. Ist der Apparat z. B. für den Druck von 760 mm Hg. geeicht und wird bei dem Drucke B die Geschwindigkeit gemessen, so ist der abgelesene Wert mit dem Faktor $760/B$ zu multiplizieren.

Die Abhängigkeit des Apparates von der Temperatur bei konstantem Druck ergab sich aus besonderen Versuchen sehr angenähert folgendermaßen:

Ergibt die in der Sekunde durchgesaugte Gasmenge V ccm/sec bei der absoluten Temperatur Θ_1 einen bestimmten Ausschlag, so wird derselbe Ausschlag bei der Temperatur Θ_2 erst durch die Gasmenge $\frac{\Theta_2}{\Theta_1} \cdot V$ bewirkt.

¹⁾ Die Beobachtungen bei verschiedenen Drucken stimmen auf 0,5% genau überein und liegen alle innerhalb der Beobachtungsfehlergrenze.

Ein Resonanzrelais.

Von

H. Gerdien und W. Rihl.

Mit 4 Textfiguren.

Mitteilung aus dem Physikalisch-Chemischen Laboratorium
zu Siemensstadt.

An verschiedenen Stellen der Technik tritt das Bedürfnis auf, ein Relais zu besitzen, welches einen Schaltvorgang ausschließlich in Abhängigkeit von dem Auftreten eines Wechselstromes von ganz bestimmter Frequenz auslöst.

Ein Anwendungsgebiet dieser Art dürfte z. B. in dem Eisenbahnsicherungswesen und hier besonders auf dem Gebiete der elektrischen Vollbahnen vorliegen, wenn es sich darum handelt, Signalimpulse über die Betriebsstarkstromleitung fortzuleiten und vollkommene Sicherheit gegen das Ansprechen der Signalvorrichtung durch Beeinflussung mittels des Betriebsstromes zu haben. Ähnliche Aufgaben liegen bei dem Problem der Umschaltung von Doppeltarifzählern vor, wenn diese von der Zentrale aus über die Netzleitungen vorgenommen werden soll.

Es ließen sich noch andere Anwendungsgebiete aus der Fernsprechtechnik und den verwandten Gebieten anführen. Allen ist die Anforderung gemeinsam, daß das Relais verhältnismäßig frequenzrein sein muß, d. h. daß es im wesentlichen nur durch eine bestimmte Frequenz — seine Grundfrequenz — und die unmittelbar benachbarten Frequenzen zum Ansprechen gebracht werden kann, andere, weiter abliegende Frequenzen aber völlig wirkungslos bleiben. Ferner muß das Relais, besonders, wenn an eine Anwendung im Eisenbahnsicherungswesen zu denken sein soll, auf eine sehr weitgehende Betriebssicherheit Anspruch erheben können, während auf eine besonders hohe Empfindlichkeit bei den gedachten technischen Anwendungen weniger Wert zu legen sein wird, da gewöhnlich für die zum Betrieb von Relais notwendige Energie hinreichend gesorgt zu sein pflegt.

Wir haben versucht, zu einer den genannten Anforderungen entsprechenden technischen Lösung zu kommen, indem wir als resonierendes Organ des Relais ein mechanisches, schwingungsfähiges Gebilde nach Art einer Zunge verwendeten, welches durch den erregenden Wechselstrom zum Schwingen gebracht wird und bei einer gewissen Amplitude gegen Kontakte schlägt, derart, daß bei der Berührung des einen Kontaktes eine Stromquelle die Aufladung einer Kapazität bewirkt, welche mit dem schwingenden Organ verbunden ist, während auf der anderen Seite die Entladung der Kapazität über einen Ortsstromkreis erfolgt. Wir haben dabei unser Augenmerk darauf gerichtet, die Kontakte derart auszubilden, daß eine störende Beeinflussung des schwingenden Organs nach Amplitude und Eigenfrequenz möglichst vermieden wurde. Ein besonders sicheres und wirksames Arbeiten des Relais läßt

sich erzielen, wenn der Vorgang des Aufladens und Entladens der mit dem schwingenden Organ verbundenen Kapazität dadurch erleichtert wird, daß die beiderseitigen Kontakte ebenfalls mit Kapazität ausgerüstet werden. Wir haben endlich auch die bei der bisher erörterten Schaltung noch erforderliche Gleichstromquelle beseitigt, indem wir an den Aufladekontakt einfach eine von dem Betriebswechselstrom in geeigneter Phase gespeiste Wechselspannung anlegten und so das Relais zu einem Resonanzgleichrichter ausbildeten.

Im einzelnen sind die getroffenen konstruktiven Maßnahmen aus den beigegebenen schematischen Figuren zu ersehen.

Die Fig. 1 und 2 zeigen das erregende Magnetsystem, welches aus einem permanenten Magneten 1 besteht, auf welchen die unterteilten Polstücke 2 und 3 und 2' und 3' aufgesetzt sind.

Diese Polstücke tragen die vom erregenden Wechselstrom durchflossenen Windungen.

Zwischen den Polen befindet sich die schwingungsfähige Zunge, derart gelagert, daß sie sich nur parallel den Polflächen verschieben, nicht aber sich einer der Polflächen nähern kann.

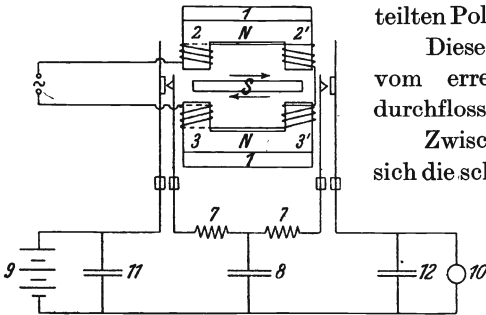


Fig. 1.

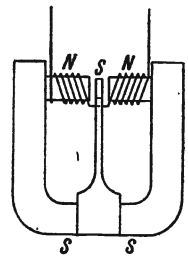


Fig. 2.

Die Schaltung der Wechselstromwicklung auf den Polen ist derartig, daß bei der einen Phase der Magnetfluß gleichzeitig in 2' und 3' verstärkt wird, während er in 2 und 3 geschwächt wird. Bei der entgegengesetzten Phase wird der Magnetfluß in 2' und 3' geschwächt, während er in 2 und 3 verstärkt wird.

Das permanent magnetisierte, schwingungsfähige Organ wird daher im ersten Falle sich auf den Zwischenraum zwischen den Polen 2' und 3', im zweiten Falle auf den Zwischenraum zwischen 2 und 3 zu bewegen. Die gewählte Anordnung hat den Vorteil, daß ein Anschlagen der schwingenden Zunge bei zu großen Wechselstromstärken an den Polen vermieden wird, und daß sich eine Unterteilung des schwingenden Teiles erübrigt, weil hier keine nennenswerten Magnetflußänderungen vorkommen.

Beiderseits des schwingenden Organs sind Kontaktfedersätze angeordnet, welche bei einer bestimmten Amplitude der Zunge zusammengedrückt werden (vgl. Fig. 1 und 3).

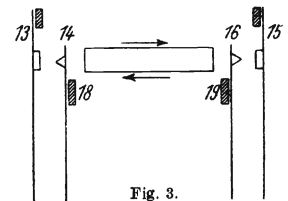


Fig. 3.

Es wird also einerseits die Feder 14 gegen den Kontakt 13 gelegt, andererseits die Feder 16 gegen den Kontakt 15. Das schwingende Organ ist also nicht selbst als stromleitender Teil verwendet worden, sondern besorgt seinerseits nur die mechanische Verrichtung des Kontaktdrückens. Das hat den Vorteil, daß Abnutzungen der Kontakte, die im Laufe der Zeit eintreten können, nicht zu Masseverlusten am schwingenden Organ und somit zu Änderungen der Grundfrequenz führen können. Die Kontaktfedern sind mit Massen und Direktionskräften ausgerüstet, welche verschwindend klein sind gegenüber Masse und Direktionskraft des schwingungsfähigen Organs. Jedoch ist ihre Eigenfrequenz so hoch gelegt, daß sie die Frequenz

der schwingenden Zunge übertrifft. Beim Zurückgehen der Zunge in die Ruhelage folgen die inneren Kontaktfedern 14 und 16 bis zum Anliegen an einen inneren Anschlag 18 und 19.

Durch Regelung des Abstandes dieser inneren Anschläge ist es möglich, die Reizschwelle des Relais auf einen gewünschten Wert einzustellen. Die Anschläge haben ferner den Zweck, die nach jeder Berührung mit der schwingenden Zunge noch übrigbleibenden Schwingungen der inneren Kontaktfedern rasch zu vernichten, so daß die inneren Federn beim erneuten Berühren durch das schwingende Organ schon wieder vollständig ruhig liegen.

Entsprechende innere Anschläge begrenzen auch die Bewegung der äußeren Kontaktfedern 13 und 15. Sie erleichtern sehr das regelmäßige Ablösen der Kontakte voneinander, welches ohne die inneren Anschläge für die äußeren Kontaktfedern nur schwer in der für das regelmäßige Arbeiten des Relais erforderlichen Vollkommenheit zu erreichen ist.

Fig. 1 zeigt bei 11 und 12 die mit den äußeren Kontaktfedern verbundenen Kapazitäten, bei 8 die mit den inneren Federn verbundene Kapazität. Bei 9 ist die Stromquelle, welche bei Gleichstrombetrieb zum Aufladen der Kapazität 11 dient, angedeutet, bei 10 der Verbrauchsapparat (Gleichstromrelais, Signal), welcher durch den vom Resonanzrelais gelieferten Strom betätigt wird.

Bei 7 sind Widerstände angedeutet, welche den Zweck haben, die während der Berührung der Kontaktfedern 13/14 bzw. 15/16 auftretenden Stromstärken auf einem die Kontakte dauernd nicht schädlich beeinflussenden Maße zu halten.

Natürgemäß tritt bei der Schwingung der Zunge eine Änderung der Dämpfung ein, sobald die Zunge beiderseits auf die Kontakte trifft und dort die Arbeit des

Kontaktdrückens verrichtet. Es wird dadurch der für das Ansprechen des Relais, bevor die Zunge die Kontakte erreichte, geltende Resonanzbereich erweitert. In der Tat läßt sich zeigen, daß die Betriebsfrequenz, wenn erst das Ansprechen des Relais erfolgt ist, innerhalb weiterer Grenzen verändert werden kann, ohne daß das Ansprechen des Relais unterbrochen wird. Diese Verbreiterung des Resonanzbereichs läßt sich aber durch richtige Wahl des Verhältnisses von Masse und Direktionskraft der Resonanzzunge und der Kontaktfedern auf jeden gewünschten Betrag herabdrücken.

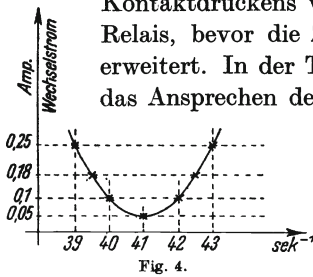


Fig. 4.

Bei praktischen Versuchen mit einer vorläufigen Anordnung ließ sich die Dämpfung der resonierenden Zunge so wählen, daß das Relais z. B. bei der Grundfrequenz 41 in der Sekunde bei einer Wechselstromstärke von 0,05 Ampere zum Ansprechen kam, während bei Erregung mit der Frequenz 39 oder 43 schon etwa der 5fache Wert der Stromstärke zum Ansprechen erforderlich war (s. Fig. 4).

Durch größeres Trägheitsmoment und größere Direktionskraft der schwingenden Zunge läßt sich bei gleichen Bewegungswiderständen natürlich ein weit engerer Resonanzbereich erhalten.

Wir haben unser besonderes Augenmerk auf die Ausbildung der Kontakte gerichtet. Diese müssen nicht nur den elektrischen Anforderungen genügen, sondern unterliegen auch einer erheblichen mechanischen Beanspruchung. So zeigte es sich, daß Kontakte aus reinem Silber nicht verwendbar waren, weil sie durch die Dauerbeanspruchung zu stark deformiert wurden. Nur Stoffe von großer Härte können

für die Kontakte in Betracht kommen. So bewähren sich Kontakte aus Tantalmetall bei ausgedehnten Dauerversuchen bis jetzt gut. Wolframkontakte erwiesen sich als zu spröde; auf die Dauer zeigten sich Zertrümmerungen des ganzen Gefüges. Voraussichtlich werden sich mit Stahlkontakten geeigneter Beschaffenheit ähnliche Ergebnisse wie mit Tantalkontakten erreichen lassen.

Bei Gleichstrombetrieb wurden die Kontakte mit einer Spannung von 120 Volt betrieben und lieferten bei Frequenzen von der Größenordnung 50 in der Sekunde mit Papierkondensatoren von 24 MF Stromstärken von etwa 50 Milliampere. Ein Relais in kleinen Ausmaßen für Laboratoriumszwecke hatte beim Ansprechen einen Leistungsverbrauch von weniger als $\frac{1}{2}$ Watt.

Die Dauerversuche wurden in der Weise angestellt, daß der Wechselstrom zum Betrieb des Resonanzrelais einem kleinen Gleichstrom-Wechselstromumformer entnommen wurde, dessen Umlaufzahl mittels zweier weiterer Resonanzrelais geregelt wurde, deren Frequenz etwas unterhalb bzw. oberhalb der Grundfrequenz des zu prüfenden Relais lag. Die Zunge des zu prüfenden Relais war mit hinreichend großer Dämpfung ausgestattet, so daß der Resonanzbereich genügend breit war, um das zu prüfende Relais bei den kleinen noch vorkommenden Drehzahlschwankungen dauernd in Betrieb zu halten. So ließen sich die Dauerversuche bequem über mehrere Tage ausdehnen.

Auf die Möglichkeit, den Ortsstromkreis des Relais mit gleichgerichtetem Wechselstrom zu speisen, wurde schon hingewiesen.

Die Relaisanordnung läßt noch mannigfaltige andere Anwendungen zu, von denen hier nur erwähnt sein mag, daß man das Relais auch als Gleichstrom-Wechselstromumformer in einer summerartigen Schaltung betreiben kann, wobei die Kontakte lediglich von Kapazitätsentladungen beansprucht werden und so eine weit höhere Betriebssicherheit und Lebensdauer erreichen lassen, als dieses sonst bei Stimmgabelunterbrechern und ähnlichen Apparaten möglich ist.

Über Frequenzrelais.

Von

K. Boedeker und H. Riegger.

Mit 9 Textfiguren.

Mitteilung aus dem Physikalisch-Chemischen Laboratorium
zu Siemensstadt.

Will man bei Maschinen mit umlaufender Welle die Drehzahl dauernd konstant halten, so ist es vielfach notwendig, ein eigenes Reglerorgan als Frequenzsteuer zu verwenden. Die bekannteste Vorrichtung dieser Art ist der Zentrifugalregler bei der Dampfmaschine. Allen Reglern gemeinsam ist, daß sie beim Überschreiten einer Normalfrequenz Vorgänge hervorrufen, welche die Geschwindigkeit der Welle verlangsamen, im entgegengesetzten Falle beschleunigen. Bei elektrischen Maschinen ist im allgemeinen ein Regler nicht nötig, da ihre Umlaufzahl durch die benützte Spannung bestimmt wird. Schwankungen in der Spannung, wie sie bei jedem Netz vorkommen, rufen auch entsprechende Änderungen der Tourenzahl der angeschlossenen Motoren hervor. Ist es nun erwünscht, unabhängig vom Netz einen konstanten Umlauf einzuhalten, so müssen auch für Elektromotoren geeignete Mittel angewandt werden. Die Bedürfnisse der Technik haben es mit sich gebracht, daß an die Regler immer höhere Anforderungen gestellt wurden. Für die Zwecke der drahtlosen Telegraphie wird z. B. verlangt, daß die Schwankung der Tourenzahl eines Generators höchstens 1‰ sei.

Im folgenden sei ein Weg beschrieben, auf welchem man zu der gewünschten Konstanthaltung gelangen kann. Die zu beschreibende Methode hat dabei den Vorteil bequemer und kontinuierlicher Einstellung auf eine gewünschte Frequenz. Die Anwendung der Apparate, die im wesentlichen Relais darstellen, ist nicht auf die Regelung allein beschränkt, sondern sie kann vielmehr für mannigfache andere Zwecke der Technik von Bedeutung sein.

Beschreibung der neuen Regler:

Die neuen Regler bestehen im wesentlichen aus elektrischen Relais, welche bei Einhaltung einer bestimmten Normalfrequenz eine Nullage einnehmen, bei Abweichungen von derselben aber Kontakte nach der einen oder anderen Seite betätigen, je nachdem die Normalfrequenz unter- oder überschritten wird. Man kann sie daher als Frequenzrelais bezeichnen. Sie werden mit Wechselstrom betrieben, dessen Periode von der Drehzahl der zu regelnden Maschine abhängt. Ihr gemeinschaftlicher Gedanke besteht in der Ausnützung der schnellen Phasenänderung eines schwingenden Systems, wenn die Periode der anregenden Kraft über die Resonanzstelle hinweggeht. Diese schnelle Phasenänderung findet bereits Anwendung in den Frequenz-

messern von S. u. H.¹⁾. Versieht man solche Frequenzmesser mit Kontakten, so können sie auch bereits als Frequenzrelais dienen. Die von uns durchgebildeten Apparate unterscheiden sich hiervon dadurch, daß sie von Anfang an für den speziellen Zweck als Relais konstruiert sind. Zur Veranschaulichung der theoretischen Wirkungsweise solcher Relais ist Fig. 1a gezeichnet. Sie stellt die Phase ϑ eines elektrischen Schwingungskreises dar im Verhältnis zur Phase der anregenden elektromotorischen Kraft in Abhängigkeit von der erregenden Frequenz. Sie wurde berechnet nach der bekannten abgekürzten Formel

$$\operatorname{tg} \vartheta = -\frac{\delta}{2\pi x}, \quad (1)$$

worin x die Verstimmung $= \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}$

und ω die veränderliche Kreisfrequenz

der elektromotorischen Kraft und ω_0 diejenige des Schwingungskreises und δ dessen Dekrement ist. Schon bei 1% Verstimmung ändert sich die Phase um 20° . Diese Änderung ist außerdem umgekehrt proportional mit dem Dekrement.

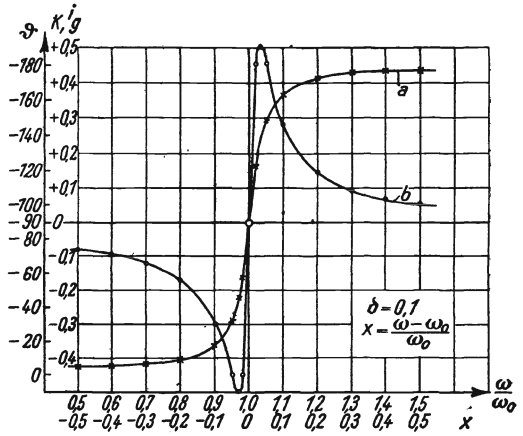


Fig. 1.

1. Frequenzrelais nach Art der polarisierten Relais.

Das erste zu beschreibende Frequenzrelais hat in seiner Bauart Ähnlichkeit mit einem polarisierten Relais. Fig. 2 zeigt es im Schnitt in seiner einfachsten Form und Schaltung. Es werden dünne, etwa 0,1 mm dicke, legierte Eisenbleche verwandt, die gut gegeneinander isoliert sind. Die Zunge Z, ebenfalls aus dünnen Blechen, liegt in Ruhestellung symmetrisch zu den Polen P_1 und P_2 und kann in dieser Lage durch eine kleine Direktionskraft gehalten werden. Sie ist beweglich in einem Zapfenlager, das in der Mitte zwischen den Polen P_1 und P_2 liegt. Die Ankerspule S_2 kann fest mit dem Relaisanker verbunden sein, doch wird dieselbe dann unnötig schwer und die Anspruchszeit zu langsam. Daher ist es ratsam, die Spule S_2 fest einzubauen.

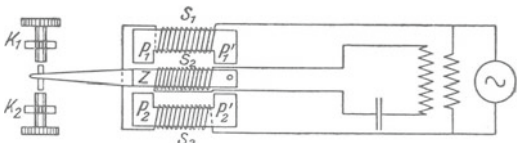


Fig. 2.

Geht durch die Feldspulen S_1 und S_3 Gleichstrom, und zwar so, daß etwa P_1 Nordpol, P_2 Südpol wird, so bleibt zunächst die Zunge in ihrer Ruhelage. Schickt man aber auch durch S_2 Gleichstrom, so bewegt sich die Zunge je nach der Stromrichtung nach der einen oder anderen Seite. Dabei können die Kontakte K_1 und K_2 betätigt werden. Dieses Klappen nach einer Seite ändert sich nicht, wenn man die Richtung des Stromes in allen drei Spulen gleichzeitig umkehrt. Das Relais kann demnach auch mit Wechselstrom betrieben werden. Der Ausschlag geht nur dann nach der anderen Seite, wenn man die Phase der Ankerspule relativ zur Phase in den Feldspulen um 180° umlegt.

¹⁾ Vgl. Keinath, E. T. Z. 37, 271 (1916).

Diese Einrichtung wird als Frequenzrelais nun in der Weise verwendet, daß man etwa die Feldspulen S_1 und S_3 direkt von der Wechselstromquelle aus speist, die Spule S_2 aber mit einem Schwingungskreis verbindet, der seinerseits von der Wechselstromquelle erregt wird. Stimmt die Eigenfrequenz des Kreises mit der Frequenz des Wechselstroms überein, so ist die Phase des Kreises um -90° gegen die Phase des letzteren verzögert. Auf den Anker wird dann, wie nachher dargestellt wird, eine Kraft mit der doppelten Frequenz ausgeübt, wobei aber das Zeitintegral gleich Null ist, so daß das Relais nicht anspricht. Die Zunge besitzt nämlich so große Trägheit, daß sie den schnellen Wechselströmen nicht folgen kann. Tritt nun aber eine Verstimmung zwischen der Eigenfrequenz des Kreises und dem erregenden Strom auf, so wird die Phase größer oder kleiner als -90° , je nach der Richtung der Verstimmung. Dementsprechend bewegt sich der Anker nach der einen oder anderen Seite, weil jetzt das Zeitintegral nicht mehr Null wird. Die Verhältnisse lassen sich leicht analytisch darstellen.

Die Kraft K , welche auf den Relaisanker ausgeübt wird, ist proportional den Strömen $J_{10} \cdot \cos \omega t$ und $J_{20} \cdot \cos (\omega t + \vartheta)$ in Feld- und Ankerspule, also

$$K = C \cdot J_{10} \cdot J_{20} \cdot \cos \omega t \cdot \cos (\omega t + \vartheta) \quad (2)$$

oder

$$K = C \cdot \frac{J_{10} \cdot J_{20}}{2} \cdot [\cos (2\omega t + \vartheta) + \cos \vartheta] \quad (2a)$$

Sie besteht demnach aus einer Wechselstromkomponente mit der doppelten Frequenz des Wechselstromes und einer einseitigen Wirkung, die durch das Glied mit $\cos \vartheta$ gegeben ist. Letzteres wird 0 für $\vartheta = -90^\circ$, also bei Abstimmung. Wenn dagegen, wie bei Verstimmung, $\cos \vartheta$ von 0 verschieden ist, muß das Relais ansprechen. Die einseitige Kraftkomponente ist dann

$$K_0 = C \cdot \frac{J_{10} \cdot J_{20}}{2} \cdot \cos \vartheta \quad (3)$$

Mit der Verstimmung ändert sich auch die Stromamplitude J_{20} , und zwar nach der bekannten Resonanzformel so, daß sehr angenähert

$$J_{20} = C' \cdot \frac{\sin \vartheta}{\delta} \quad (4)$$

wird, wenn δ das Dekrement des Schwingungskreises ist. Das ergibt für die einseitig wirkende Kraft, mit welcher die Relaiszunge bewegt wird,

$$K_0 = C'' \cdot J_{10} \cdot \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{\delta} \quad (5)$$

Wenn man für ϑ den Wert aus 1 einsetzt:

$$K_0 = C_0 \cdot \frac{2\pi x}{4\pi^2 x^2 + \delta^2} \quad (6)$$

Dieser Ausdruck wird durch die Schaulinie b der Fig. 1 dargestellt. Sie entspricht der bekannten Dynamometerkurve, bei der es auch auf $J_1 \cdot J_2$ ankommt¹⁾.

Man sieht daraus, daß der Kontaktdruck zwei Maxima besitzt. Wie aus Gleichung (5) leicht zu entnehmen ist, liegen dieselben bei $\vartheta = -45^\circ$ oder $\vartheta = -135^\circ$.

¹⁾ Zenneck, Lehrb. d. drahtl. Telegraphie, 2. Aufl., S. 156 ff.

Die zugehörige Verstimmung erhält man dann nach Gleichung (1) aus

$$2\pi x = \delta$$

oder

$$x = \frac{\delta}{2\pi} \tag{7}$$

Besonders augenfällig ist, wie schnell die Kraft bei Resonanz durch 0 hindurchgeht, so daß schon sehr kleine Verstimmungen ein Ansprechen des Relais ermöglichen. Aus den später mitzuteilenden Versuchen wird sich ergeben, welche Verstimmungen ausreichend sind, um den Anker von der einen Seite nach der anderen umzuklappen.

Beachtenswert ist dabei, daß die Ruhfrequenz, auf die das Relais einreguliert, natürlich nur durch die Dimensionen des Schwingungskreises bestimmt wird; die Größe des Relaisstromes spielt keine Rolle. Diese ist nur für

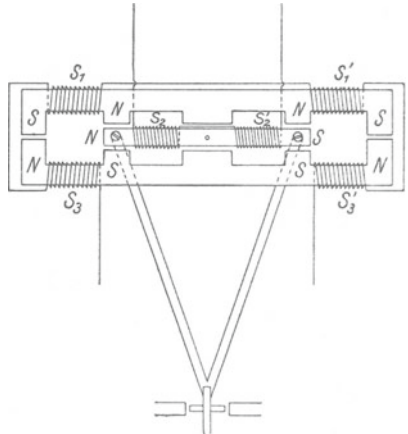


Fig. 4

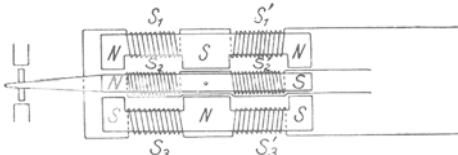


Fig. 3.

die Schnelligkeit des Ansprechens von Wert. Die Fig. 3 und 4 stellen zwei andere Ausführungsformen des Relais dar.

Der elektrische Schwingungskreis, der zur Steuerung dient, kann auch durch einen mechanischen Schwinger ersetzt werden, der seinerseits elektrischen Wechselstrom von derselben Frequenz erzeugt.

2. Mikrophonfrequenzrelais.

Auf eine andere Weise wird hier der Phasensprung im Resonanzpunkt zur Regelung von Umlaufzahlen ausgenutzt. Zur Veranschaulichung verweisen wir auf die Fig. 5.

In dieser bedeutet *S* einen mechanischen Schwinger, beispielsweise eine am unteren Ende eingeklemmte Blattfeder, die durch den Telephonmagneten *T* zu Schwingungen angeregt werden kann. Die Feder trägt ein Mikrophon *M*, dessen Widerstand sich synchron mit den Schwingungen der Feder *S* periodisch ändert. Dieses Mikrophon *M* wird an dieselbe Wechselstromquelle *W* angeschlossen.

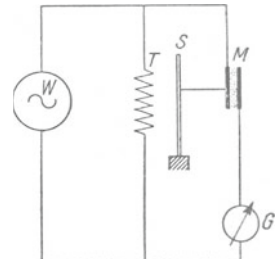


Fig. 5.

Im allgemeinen findet die an das Mikrophon angelegte Wechselspannung in den beiden Halbperioden verschiedene Widerstände im Mikrophon vor, woraus sich eine größere Wechselstromamplitude in der einen Halbperiode gegenüber der anderen ergibt, d. h. es resultiert eine Gleichstromkomponente nach der einen oder anderen Richtung, je nach der gegenseitigen Phase zwischen der Federschwingung und dem Wechselstrom. Nun ändert sich die Phase der Federschwingung gegenüber dem sie

anregenden Wechselstrom in der Nähe der Resonanz bei verschiedener Verstimmung, wie bereits gezeigt, sehr schnell. Somit wird der vor Erreichung des Resonanzpunktes bestehende Gleichstromanteil, den das Gleichstromgalvanometer G anzeigt, im Resonanzfalle durch 0 hindurchgehen, und nach seiner Überschreitung wird sich ein Gleichstromanteil mit umgekehrtem Vorzeichen ergeben. Es ist dabei vorausgesetzt, daß die Widerstandsänderungen im Mikrophon gleichphasig mit der Federschwingung verlaufen. Außer der Phasenänderung ist noch die Veränderung der Amplitude der Federschwingung in der Umgebung des Resonanzpunktes zu beachten. Bei stärkerer Verstimmung nimmt die Amplitude rasch ab. Dies bewirkt, daß der Gleichstromanteil bei größerer Verstimmung wieder abnimmt. Wir können annehmen, daß die Widerstandsänderungen proportional mit der Amplitude der Schwingungen von M verlaufen. Wir bekommen also für eine bestimmte geringe Verstimmung nach beiden Seiten hin ein Maximum des Gleichstromes, und bei zunehmender Verstimmung nimmt dieser allmählich wieder ab. Versuche, die nachstehend beschrieben werden, ergaben weitgehende Übereinstimmung mit diesen Überlegungen (vgl. Fig. 6).

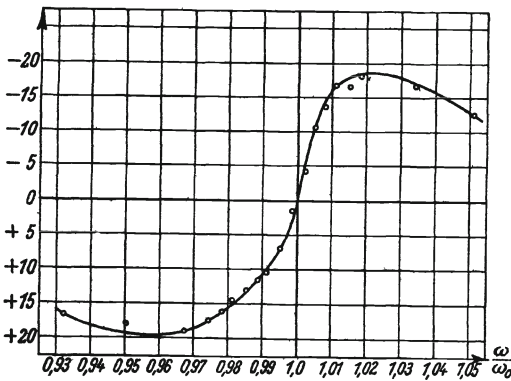


Fig. 6.

genommen sind. ϑ ist der Phasenwinkel zwischen der erregenden periodischen Kraft und der erzwungenen Schwingung, also hier zwischen dem Wechselstrom im Telefonmagneten und der Federschwingung. Weiter bedeutet r_0 den konstanten Widerstand des Mikrophons und der übrigen Teile des Stromkreises. r_1 ist der durch die Schwingungen des Mikrophons veränderliche Widerstandsanteil. Wir nehmen an, daß r_1 klein ist gegen r_0 , und setzen $r_1 = \alpha r_0$. Wir beachten, daß α abhängig ist von der Amplitude der Schwingung. Wir setzen $\alpha = c_1 A$.

Wir erhalten für den Strom im Mikrophonkreis

$$i = \frac{e}{r} = \frac{E \cos \omega t}{r_0 [1 + \alpha \cos (\omega t + \vartheta)]}$$

Da α klein ist gegen 1, so formen wir dies um und schreiben:

$$i = \frac{E}{r_0} \cos \omega t [1 - \alpha \cos (\omega t + \vartheta)],$$

$$i = \frac{E}{r_0} \cos \omega t - \frac{\alpha \cdot E}{r_0} \cos (\omega t + \vartheta) \cos \omega t$$

$$i = \frac{E}{r_0} \cos \omega t - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{E}{r_0} \cos \vartheta - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{E}{r_0} \cos (2 \omega t + \vartheta).$$

Wir erkennen aus dieser Formel zunächst folgendes: Der Strom besteht aus drei Anteilen, einem Wechselstrom von der Frequenz ω , einem dagegen in der Phase

um den Winkel ϑ verschobenen Wechselstrom von der doppelten Frequenz mit der Amplitude

$$\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{E}{r_0}$$

und einem Gleichstromanteil von der Grösse

$$\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{E}{r_0} \cos \vartheta^1).$$

Da nur dieser Gleichstromanteil für ein Gleichstrominstrument oder Relais in Frage kommt, betrachten wir ihn genauer:

Der Strom ist proportional zur Amplitude A der Federschwingung und zu $\cos \vartheta$. Also setzen wir

$$i_g = C_1 \cdot A \cdot \cos \vartheta.$$

Aus der Schwingungstheorie folgt für die Größe der Amplitude in Abhängigkeit von der Verstimmung

$$A = C_2 \cdot \frac{\sin \vartheta}{\delta}, \text{ wo}$$

δ das Dekrement der Schwingung ist.

$$\text{Somit haben wir } i_g = C_1 \cdot C_2 \cdot \frac{\sin \vartheta}{\delta} \cdot \cos \vartheta$$

oder dieselbe Form wie in Gleichung (5).

Die Abhängigkeit der Gleichstromkurve von der Verstimmung wird demnach ebenfalls gegeben durch die Kurve b der Fig. 1. Sie gilt für ein Dekrement $\delta = 0,1$.

Die Kurve wurde experimentell mit derselben Anordnung, die auch für die Aufnahme der Oszillogramme diente, bestätigt. Ein Beispiel ist in Fig. 6 wieder gegeben.

Nach Formel 7 berechnet sich daraus ein Dekrement der Federschwingung $\delta = 0,15$. Es sei noch darauf hingewiesen, daß man von irgendeinem mechanischen Schwinger, wenn es möglich ist, ein Mikrophon durch ihn beeinflussen zu lassen, nach unserer Methode die Dynamometerkurve aufnehmen und aus ihr die Dämpfung bestimmen kann. Da zur Lagenbestimmung der Maxima die Konstanz des Mikrophons nicht in demselben Maße verlangt wird, wie bei Aufnahme einer Resonanzkurve, ist dieser Wert genauer, als er sich aus einer entsprechenden Resonanzkurve ergeben würde.

Die Anwendung einer solchen Anordnung zur Frequenzreglung ist nun leicht ersichtlich. Wie bei der im ersten Teil beschriebenen Methode kuppelt man mit der zu steuernden Maschine einen Wechselstromgenerator und benutzt den von ihm gelieferten Wechselstrom zum Betrieb der eben besprochenen Vorrichtung. Der Schwinger (Mikrophonträger) wird auf die gewünschte Frequenz abgestimmt. Statt des Gleichstromgalvanometers benutzt man ein Gleichstromrelais, z. B. ein Drehspulrelais, dessen Kontaktzunge je nach dem Vorzeichen der Gleichstromkomponente nach rechts oder links ausschlägt. Dieses Relais ersetzt ohne weiteres das Relais F in der Anordnung nach Fig. 9; die weiteren Regelvorgänge können unverändert übernommen werden.

¹⁾ Das tatsächliche Vorhandensein dieser 3 Anteile wurde durch Oszillogramme festgestellt. Man erkennt deutlich die 3 Stromanteile und ihre gegenseitige Verschiebung beim Ändern der Verstimmung. Die Anordnung entsprach genau der schematischen Zeichnung.

Es hat sich bald herausgestellt, daß die Anwendung dieser einfachen Anordnung mit der Blattfeder für die Erzielung hoher Genauigkeit nicht geeignet ist, da die Schwingungsmasse durch das unmittelbar auf die Feder aufgesetzte Mikrophon zu stark beeinflußt und ungenau definiert wird. Auch wird durch das Mikrophon die Dämpfung wesentlich erhöht. Es wurde deshalb ein größerer Schwinger konstruiert nach Grundsätzen, die dem von H. Gerdien und H. Riegger an anderer Stelle beschriebenen Schwinger ähnlich sind.¹⁾ Die Koppelung des Mikrophons mit diesem Schwinger wurde so schwach gewählt, daß ein merklicher Einfluß auf die Schwingungsmasse und die Dämpfung nicht wahrgenommen werden konnte.

3. Frequenzrelais mit Gleichrichter.

Betrachtet man das Grundprinzip der beiden ersten Frequenzrelais allgemeiner, so wird man erkennen, daß sie beide in gewissem Sinne Gleichrichter sind. Die Anordnung ist dabei so getroffen, daß der Effekt, der gleichgerichtet wird, beim Durchgang durch die Normalfrequenz sein Vorzeichen ändert. Man kann auf Grund dieses Gedankens leicht zu einer Zahl weiterer Relais gelangen. Nach Analogie des Mikrophonrelais insbesondere kann man sagen, daß jede von einem periodischen Einfluß abhängige Änderung eines Widerstandes oder auch einer elektromotorischen Kraft

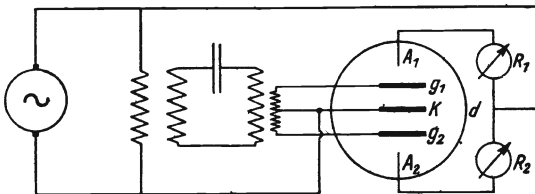


Fig. 7.

für unsere Zwecke ausgenutzt werden kann. Wir wollen im nachstehenden eine Anwendung dieses Gedankens näher beschreiben, bei welcher die Eigenschaften der Kathodenstrahlröhren zur Geltung kommen. Wir gebrauchen eine Röhre mit zwei Gittern und zwei

Anoden (denselben Dienst können auch zwei einzelne normale Röhren leisten) in einer Schaltung, die aus Fig. 7 ersichtlich ist. Von der Wechselstromquelle geht die Spannung über die beiden Gleichstrominstrumente R_1 und R_2 zu den beiden Anoden, während der andere Pol am Glühfaden liegt. Von einem Schwingungskreis, der seinerseits durch dieselbe Wechselstromquelle erregt wird, welche die Anodenspannung liefert, werden die beiden Gitter beeinflusst, und zwar so, daß die beiderseitigen Gitterspannungen in der Phase um 180° gegeneinander verschoben sind, wobei aber ihre Amplitude gleich groß ist. Einen Elektronenstrom können wir nur dann erhalten, wenn die resultierende Spannung positiv ist. Dies hängt von der Größe und relativen Phase der Anoden- und Gitterspannung ab. Bei Resonanz sind Gitter- und Anodenspannung um 90° in der Phase verschoben, und zwar beim einen Gitter um $+90^\circ$, beim anderen um -90° . Setzen wir die Amplitude des Durchgriffs = der Amplitude der Gitterspannung voraus, so ist die Phase der resultierenden Spannung des ersten Gitters gegen die Phase der resultierenden Spannung des zweiten Gitters um 90° verschoben, während ihre Amplituden gleich groß sind. Die beiden Anodenströme, die durch die Gleichstrominstrumente R_1 und R_2 gemessen werden, sind dann gleich groß. Wenn nun die Wechselfrequenz gegen den Eigenton des Schwingungskreises verstimmt wird, so nähert sich die Phase des einen Gitters der Phase seiner Anode, so daß die resul-

¹⁾ Siehe die beiden nachfolgenden Abhandlungen, S. 137 u. 141.

tierende Spannung bei ihm größer wird, während beim anderen Gitter das Umgekehrte der Fall ist. Die Folge davon ist, daß der Gleichstrom im einen Instrument steigt, im anderen fällt. Mit Hilfe der Theorie der Kathodenstrahlröhren ist es nicht schwer, ein angenähertes Bild der Verhältnisse zu liefern. Wir wollen uns einer graphischen Darstellung bedienen. In Fig. 8 entspricht der Sinuslinie 1 der Durchgriff der Anodenspannung, der Sinuslinie 2 die Gitterspannung bei Resonanz. Die resultierende Spannung e_r wird erhalten aus: $e_r = e_g + \alpha \cdot e_A$, wenn e_g die Gitterspannung, e_A die Anodenspannung und α der Durchgriff ist, welcher bei einer zu den Versuchen benutzten Röhre = 4% gefunden wurde. Sie ist in Kurve 3 dargestellt. Mit

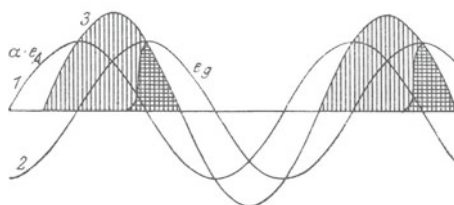


Fig. 8.

ihr gleichphasig ist der durchgehende Elektronenstrom, und es fragt sich nur, welcher Zusammenhang zwischen der Größe des Anodenstroms und der resultierenden Spannung besteht. Zunächst muß wegen der Ventilwirkung der Röhren beachtet werden, daß nur während der positiven Halbperiode Strom fließen kann. Ferner muß nach dem Langmuirschen Gesetz im günstigsten Fall für den gesamten Elektronenstrom gelten:

$$i = \frac{1}{k} \cdot e^{v_i}.$$

Da wir zwischen Anoden- und Gitterspannung eine Phasenverschiebung von 90° haben, so müssen Zeitpunkte vorhanden sein, in welchen die Anodenspannung 0 oder sogar negativ ist, während die resultierende Spannung positiv bleibt. Dann geht der Elektronenstrom zum Gitter. Diesem Gitterstrom ist die doppelt schraffierte Fläche der Fig. 8 zugeordnet, während die einmal gestrichelte Fläche zum Anodenstrom gehört. Der Gitterstrom wurde bei Versuchen nur bis zu $\frac{1}{6}$ des Anodenstromes beobachtet, so daß der Anodenstrom selber, wie auch empirisch festgestellt wurde, noch im wesentlichen nach dem Langmuirschen Gesetz verläuft. Für den zweiten Anodenstrom in R_2 müssen dieselben Betrachtungen gelten, nur sind dann die schraffierten Flächen um 90° relativ zu den bisherigen verschoben, während ihre Größe dieselbe ist. Es ist nach Fig. 8 nun leicht einzusehen, daß, wenn man außerhalb der Resonanz ist, und demnach die Phase zwischen den beiden Sinuslinien 1 und 2 etwa kleiner wird als 90° , die schraffierte Fläche wachsen muß, während sie kleiner wird, wenn die Phase größer als 90° wird. Der Gleichstrom nimmt dann im einen Instrument zu, im anderen ab.

Denken wir uns nun an Stelle der Gleichstrominstrumente R_1 und R_2 zwei Spulen eines Relais in Differentialschaltung, z. B. in einem polarisierten Relais, so wird auf die Relaiszunge bei Resonanz keine einseitig wirkende Kraft ausgeübt. Zwar sind die Gleichstromstöße in den beiden Spulen nicht in Phase, aber ihr Integral ist = 0. Ist nun die Zunge so träge, daß sie den einzelnen Stößen nicht folgen kann, so bleibt sie in Ruhe. Bei Verstimmung hingegen heben sich die Stromintegrale nicht mehr auf, und es entsteht eine einseitige Wirkung auf den Relaisanker, so daß er sich nach der einen oder anderen Seite bewegt, entsprechend der Richtung, nach welcher die Verstimmung eintrat.

4. Versuche mit den Relais.

Da für die Ausarbeitung der besprochenen Relais die Reglerfrage den Anstoß gab, wurde zur Prüfung der Apparate eine Anordnung getroffen, in welcher dieselben

zur Regelung eines Motors benutzt wurden. Die Reguliereinrichtung zerfällt immer in zwei Teile. Der erste Teil ist dasjenige Organ, durch welches die einzuhaltende Frequenz definiert wird, bzw. bei Abweichung von ihr ein Effekt ausgelöst wird. Der zweite Teil besteht in den Vorkehrungen, welche infolge dieses Effektes auf die Maschine einen solchen Einfluß ausüben, daß die Normalfrequenz wieder hergestellt wird. Dieser zweite Teil kann in verschiedenster Weise ausgeführt werden und ist nicht ausführlicher Gegenstand dieser Abhandlung. Da für unsere Versuche ein Gleichstrommotor in Verbindung mit einer Wechselstrommaschine für 400 bis 800 Perioden zur Verfügung stand, regelten wir durch Einwirkung auf die Erregung des Antriebsmotors. Auf welche Weise dies geschah, geht aus der Fig. 9 hervor. Die Kontakte K_1 und K_2 gehören zum Frequenzrelais F . Sobald einer dieser Kontakte

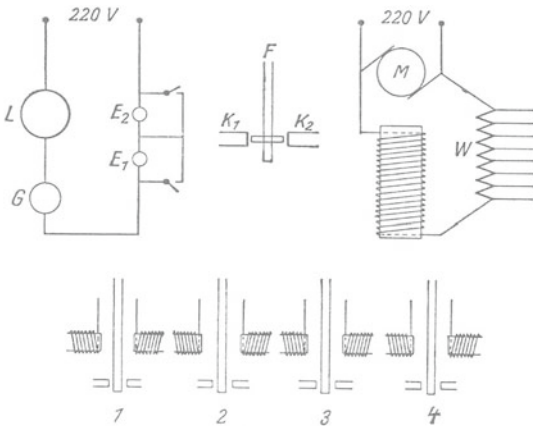


Fig 9

geschlossen wird, fließt Strom durch die Wicklung eines der beiden Relais 1 oder 2. Als Stromquelle für diese diente der Spannungsabfall an einer kleinen Glühlampe G , die in Reihe mit einer anderen Glühlampe L und mit zwei Eisendrahtwiderständen E_1 und E_2 (nach Art der Nernst-Lampenwiderstände) in die Netzleitung eingeschaltet war. Durch die Relais 1 oder 2 wird ein Teil des Regulierwiderstandes in der Erregerwicklung des zu steuernden Motors M kurzgeschlossen oder geöffnet, so daß der

Motor langsamer oder schneller läuft. Da die Relais schnell ansprechen, erfolgt diese Regelung sehr rasch. Die ein- oder ausgeschaltete Widerstandsstufe darf nicht zu groß sein, weil sonst eine Überregulierung eintritt. Ist nun die Frequenzabweichung größer, als mit diesen Stufen erfaßt werden kann, so sind an der Zunge des Frequenzrelais weitere Kontakte angebracht, welche erst bei größerem Kontaktdruck ansprechen. Durch sie können größere Widerstandsstufen ein- oder ausgeschaltet werden. Mit Hilfe dieser direkten Beeinflussung können vorübergehende, nicht zu große Abweichungen von der Normaltoureanzahl rasch ausgeglichen werden. Ist nun aber diese Abweichung zu groß oder dauert sie zu lange, so würde der Relaiskontakt längere Zeit oder dauernd auf einer Seite anliegen. In diesem Falle kommen die Verzögerungsrelais 3 und 4 zum Ansprechen. Die Verzögerung dieser Relais, die an sich normale technische Relais sind, wird in der Weise erreicht, daß sie durch den Spannungsabfall an den Eisenwiderständen E_1 und E_2 gespeist werden. Normalerweise sind diese Widerstände kurzgeschlossen. Der Kurzschluß wird erst selbsttätig geöffnet im Augenblick des Ansprechens von Relais 1 oder 2. Die Wärmeträgheit der Eisenwiderstände ist so groß gewählt, daß sie die Temperatur von etwa 500° erst nach einiger Zeit erreichen. Bei den bekannten Eigenschaften der Eisendrahtwiderstände dauert es daher einen gewissen Zeitraum, bis der Spannungsabfall an ihnen groß genug wird, um die Relais 3 und 4 zum Ansprechen zu bringen. Letztere dienen dazu, einen kleinen Hilfsmotor zu steuern, der in gleicher Weise wie beim Siemenschen

Schnelltelegraphen¹⁾ dann seinerseits so lange Widerstandsstufen von W ein- oder ausschaltet, bis wieder die kleinen Regulierstufen zur Regelung ausreichen.

Um nun die Regulierungsgenauigkeit feststellen zu können, wurde in folgender Weise verfahren: Ein zweiter Schwingungskreis wurde von dem Maschinenwechselstrom angeregt. Das Dekrement dieses Kreises betrug 0,08. In einem an diesen Kreis angeschlossenen Stromzeiger wurde der Strom bei Resonanz abgelesen. Darauf wurde der Kreis so weit verstimmt, daß man an die steilste Stelle der Resonanzkurve kam. An dieser Stelle genügen dann schon sehr kleine Abweichungen in der Frequenz, um erhebliche Unterschiede in der Stromstärke zu ergeben. Es ließen sich Frequenzänderungen von $\frac{1}{10} \text{‰}$ noch messen.

Die mit Hilfe dieser ganzen Anordnung erhaltenen Ergebnisse seien in der nachstehenden Tabelle mitgeteilt:

	x in ‰	Dekrement	Wattverbrauch
Relais nach Fig. 2	0,6	0,1	5
„ „ „ 3	0,3	0,1	2
„ „ „ 4	0,15	0,1	11
Mikrophonrelais mit Blattfeder	0,8	0,15	1
„ „ „ speziellem Schwinger	0,15	0,03	3
Relais mit Kathodenstrahlröhre	0,4	0,12	9

In derselben bedeutet x die Verstimmung in ‰ gegenüber der Normalfrequenz, bei welcher die verschiedenen Relais ansprechen. Das angegebene Dekrement gilt für den Schwinger, der zur Regulierung verwendet wurde. Der Wattverbrauch gibt der Größenordnung nach die Leistung an, welche das eigentliche Frequenzrelais beansprucht. Der verschiedene Verbrauch bei den ersten drei Relais beruht im wesentlichen auf der verschiedenen Dimensionierung derselben; die anderen Relais, welche Gleichstrom liefern, können natürlich auch mit viel kleinerer Energie betrieben werden, wenn man hochempfindliche Relais 1 und 2 anwendet, was bei unseren Versuchen noch nicht der Fall war.

In der drahtlosen Telegraphie ist eine Feinregulierung der Umlaufzahl in erster Linie deshalb verlangt, weil bei modernen Empfängern meistens die Überlagerung benutzt und der Differenzton abgehört wird. Die Frequenz dieses Tones ändert sich prozentuell viel schneller, als die Senderwelle selbst. Der Zweck der Regelung ist also zu ermöglichen, daß der Differenzton nicht allzu großen Schwankungen unterliegt. Dieser Zweck kann mit Hilfe unserer Regler auch erfüllt werden, wenn man in der Empfangsstation den Überlagerungssender automatisch so steuert, daß ein bestimmt gewählter Differenzton auch bei etwaigen Schwankungen der Senderwelle dauernd erhalten bleibt.

Da der Differenzton, wie erwähnt, sich prozentuell viel schneller ändert, als die Überlagerungsfrequenz, so kann zur Erreichung höchster Genauigkeit auch für die Steuerung der Maschine des Senders der Differenzton herangezogen werden. Es ist bekannt, daß die Eigenfrequenz eines Röhrensenders bei gleichmäßiger Heizung außerordentlich konstant ist; benützt man nun einen solchen Röhrensender, um mit dem Hochfrequenz-Wechselstrom der Maschine einen Differenzton zu erzeugen, so ist dieser Differenzton nur noch von der Drehzahl der Maschine abhängig und ist auf Schwankungen derselben außerordentlich empfindlich. Wird dieser Differenz-

¹⁾ A. Franke, E. T. Z. 34, 1108 (1913).

ton jetzt zum Betrieb der oben besprochenen Frequenzrelais benutzt, so läßt sich dadurch ein sehr hoher Grad von Konstanz der Drehzahl der Sendermaschine erreichen.

Da die Frequenzrelais einen wesentlichen Unterschied hinsichtlich ihres Verhaltens machen zwischen tieferer und höherer Frequenz gegen die Normalfrequenz, für die sie gebaut sind, so steht ihnen in der Nachrichtenübertragung überhaupt ein weites Feld offen. Sollen z.B. über eine einzige Leitung an zwei verschiedene Empfangsapparate Signale übermittelt werden, so kann man die ersten mit einer kleineren Frequenz, die anderen mit einer höheren Frequenz geben, als der Normalfrequenz eines obigen Relais entspricht, welches den Anschluß der Signale an den einen oder anderen Empfangsapparat herstellt.

Ein akustischer Schwinger.

Von

H. Gerdien und H. Riegger.

Mit 7 Textfiguren.

Mitteilung aus dem Physikalisch-Chemischen Laboratorium
zu Siemensstadt.

Wer je auf akustischem Gebiet gearbeitet hat, wird es als einen Mangel empfunden haben, daß unter allen zur Verfügung stehenden schwingungsfähigen Systemen — die Stimmgabel nicht ausgenommen — keines vorhanden ist, welches ohne weiteres eine einzige Frequenz frei von allen Oberschwingungen liefert.

Das Bedürfnis nach einem Schwinger, der völlig frei, wenigstens von den im Empfindlichkeitsbereich des Ohres liegenden Oberschwingungen ist, wird ein sehr fühlbares, sobald man in der Technik derartige Schwinger in beliebiger Weise verwenden will. Sobald es sich darum handelt, verwickeltere Systeme aus mehreren gekoppelten Schwingern zu verwenden¹⁾, ist es unbedingt notwendig, zunächst die folgenden Aufgaben zu lösen:

1. Es soll ein von hörbaren Obertönen freier akustischer Schwinger gefunden werden.

Dazu kommen als Nebenbedingungen für technische Zwecke.

2. Die Grundfrequenz muß durch das Herstellungsverfahren genügend genau festzulegen sein.

3. Ihre Feinregelung muß in einfacher Weise möglich sein.

4. Das Herstellungsverfahren muß ein derartiges sein, daß es sich für die Methoden der Präzisionsmassenherstellung eignet.

Betrachtet man etwa die an einem einerseits eingeklemmten Stabe möglichen freien Transversalschwingungen, so leuchtet ein, daß die gleichmäßige Verteilung der schwingungsfähigen Massen und Biegungswiderstände über die ganze Länge des Stabes die Grundlage bildet für die Ausbildung der verschiedenen möglichen Schwingungsformen. Wir können eine Grundschiwingung schon dadurch merklich bevorzugen, daß wir an dem freien Ende des Stabes die Masse und gleichzeitig die Querschnitte vom freien Ende aus so vergrößern, daß Durchbiegungen hier gegenüber dem unverändert gelassenen Teil des Stabes merklich unterdrückt werden (Fig. 1). Verfährt²⁾ man in dieser Weise, so gelangt man bei fortschreitender Verkürzung des biegungsfähigen Teiles in der Tat zu schwingungsfähigen Gebilden, welche die Grund-

¹⁾ Vgl. unter „Anwendungen des Schwingers“.

²⁾ Es wird hier also durch räumliche Trennung des Trägers der kinetischen Energie der Schwingung von dem der potentiellen Energie der analoge Schritt getan, wie seinerzeit in der Entwicklung der drahtlosen Telegraphie, als man die Selbstinduktion und Kapazität des Antennengebildes räumlich zu trennen suchte.

schwingung stark ausgeprägt bevorzugen. Man stößt aber auf Schwierigkeiten, sie auch für größere schwingende Massen und Frequenzen im Hörbereich bei zulässigen Biegungsbeanspruchungen des federnden Teiles für technisch brauchbare Schwingungswerten auszuführen. Man muß bestrebt sein, die Federkraft im Verhältnis zur schwingenden Masse möglichst zu vergrößern, ohne dabei zu Dicken der durchgebogenen Federn zu gelangen, welche die mögliche Schwingungswerte allzu sehr herabsetzen. Man gelangt dazu z. B., indem man die Federkraft möglichst am ganzen Umfang

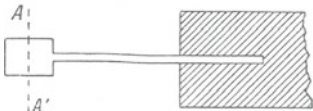


Fig. 1.

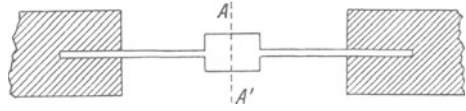


Fig. 2.

der schwingenden Masse angreifen läßt und sich z. B. aus dem in Fig. 1 dargestellten Schnitt durch Rotation um die Achse $A A'$ einen Rotationskörper hergestellt denkt, wie er aus Fig. 2 zu ersehen ist.

Wir gelangen hier also zu einer Platte mit verstärkter Mitte und verstärktem Rande, bei der die gewünschte Schwingung der zentralen Masse M_1 gegenüber dem Ring M_2 parallel der Rotationsachse $A A'$ zu denken ist. Dabei ist eine Änderung in der Beanspruchung des durchgebogenen Teiles gegenüber Fig. 1 eingetreten, denn die schwingende Masse erfährt jetzt nur noch Parallelverschiebungen und keine Drehungen mehr.



Fig. 3a.

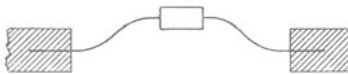


Fig. 3b.

In Fig. 3 sind die im Falle 1 und 2 stattfindenden Verbiegungen der federnden Teile in vergrößertem Maßstabe angedeutet.

Eine derartige Ausführungsform eines akustischen Schwingers erfüllt aber noch nicht vollkommen die Bedingung der Reinheit der Grundschwingung. Auch



Fig. 4.

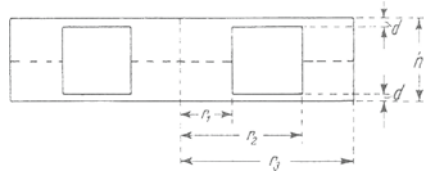


Fig. 5.

wenn man den federnden Teil der Platte in radialer Richtung nach Möglichkeit verkürzt, so daß die Gradführung der schwingenden zentralen Masse schon eine verhältnismäßig vollkommene wird, bleiben dennoch Schwingungsformen übrig, bei welchen die zentrale Masse um einen zur Rotationsachse $A A'$ senkrechten Radius als Achse Drehbewegungen ausführt.

Diese „Wackelschwingungen“ treten naturgemäß besonders stark auf, wenn etwa durch exzentrisches Anschlagen die Masse zum Schwingen gebracht wird. Es mußte also die Gradführung der Masse noch in einer Weise verbessert werden, welche die Wackelschwingungen ausschloß. Das geschieht leicht durch Vereinigung von zwei Schwingern der bisher beschriebenen Art zu einem einzigen Schwinger, wobei sowohl die zentralen Massen als auch die äußeren Ringe fest miteinander verschraubt zu

denken sind. Derartige Gebilde (Fig. 4 u. Fig. 5) erfüllen in der Tat alle oben an einen akustischen Schwinger für technische Zwecke gestellten Anforderungen in recht vollkommener Weise. Sie zeigen bei geeigneter Wahl der Dimensionen nur eine einzige im Hörbereich des Ohres liegende Grundschwingung. Sie lassen sich als Rotationskörper äußerst leicht mit genügender Genauigkeit reproduzieren. Die Feinregelung auf eine bestimmte Frequenz ist ebenso leicht durch Abdrehen oder Nachschleifen nach dem Zusammenschrauben der beiden Teile ausführbar und die Präzisionsmassenherstellung stößt auf keinerlei Schwierigkeiten.

Wir haben derartige Schwinger mit den verschiedensten Ausmassen und für die verschiedensten Grundfrequenzen (zwischen 30 pro Sekunde und einigen 1000 pro Sekunde) aus Siemens-Martinstahl hergestellt. Sie wurden durch Elektromagnete, welche von sinusförmigem Wechselstrom in kontinuierlich langsam veränderter Frequenz durchflossen wurden, zum Schwingen angeregt und auf das Auftreten von Oberschwingungen durch Abhören geprüft.

Die Tabelle enthält die Ausmaße (nach den Bezeichnungen der Fig. 5) in Millimeter für 5 verschiedene Schwinger, welche sämtlich auf die Frequenz $\omega/2\pi = 1050$ in der Sekunde abgestimmt waren. Die Dämpfung nimmt bei gleicher Masse M mit wachsendem $r_2 - r_1$ ab.

r_1	r_2	r_3	d	h
10	30	50	0,8	20
10	40	60	1,25	20
15	25	60	0,5	20
15	20	60	0,25	20
15	35	55	0,9	20

Die Frequenz des Schwingers ergibt sich in bekannter Weise aus der schwingenden Masse M_1 , der Ringmasse M_2 und der Direktionskraft C (Kraft bei der Ausweichung um die Längeneinheit) zu

$$\omega^2 = C \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right),$$

worin ω wie gewöhnlich die Kreisfrequenz bezeichnet. Für nicht sehr weit von 1 verschiedene Werte des Verhältnisses r_1/r_2 läßt sich die Direktionskraft in erster Annäherung berechnen, indem man den federnden Teil des Schwingers als Blattfeder von der Länge $r_2 - r_1$ der Dicke d und der Breite $\pi(r_1 + r_2)$ betrachtet, deren Ende einerseits fest eingespannt, andererseits im Endquerschnitt parallel der Ruhelage geführt wird. Bei endlicher Größe der Masse M_2 führt natürlich auch die Masse M_2 Schwingungen um den mit der Masse M_1 gemeinsamen Schwerpunkt aus, wobei sich die von diesem Schwerpunkt aus gemessenen Amplituden umgekehrt wie die Massen verhalten. Es ist daher bei dem Gebrauch der Schwinger notwendig, auf die Befestigung des äußeren Ringes zu achten: Ist dieser starr eingespannt, so tritt eine Verkleinerung der Frequenz gegenüber dem freischwingenden System ein, welche allerdings sehr unbedeutend ist bei allen Schwingern, deren M_2 an sich schon sehr groß gegenüber M_1 gehalten ist. Bei kleinen Schwingern genügt es, den Ring lose zwischen Daumen und den gespreizten anderen vier Fingern der Hand zu halten, um eine genügend nachgiebige „freie“ Lagerung des Schwingers zu gewinnen.

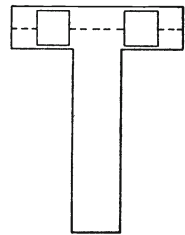


Fig. 6

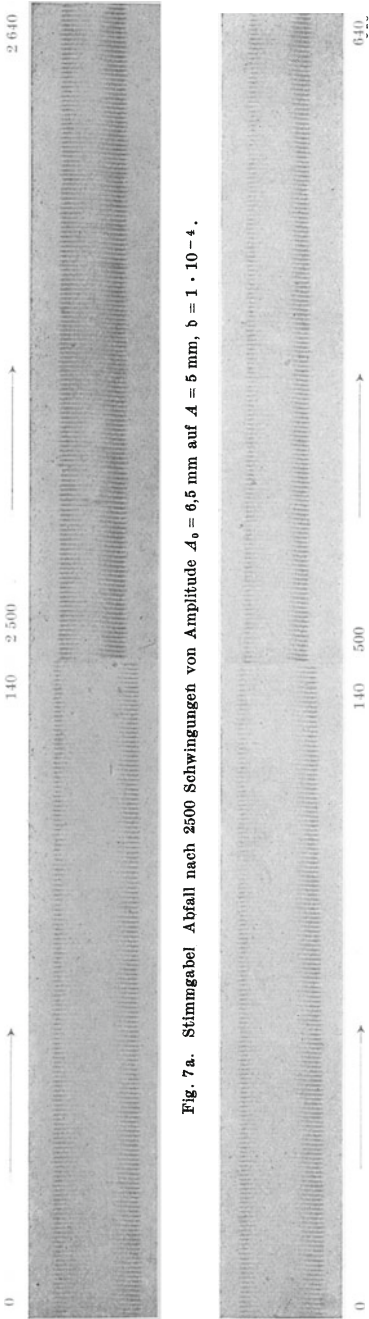


Fig. 7a. Stimmgabel Abfall nach 2500 Schwingungen von Amplitude $A_0 = 6,5$ mm auf $A = 5$ mm, $b = 1 \cdot 10^{-4}$.

Fig. 7b. Schwinger, Abfall nach 500 Schwingungen von Amplitude $A_0 = 6,5$ mm auf $A = 5$ mm, $b = 5 \cdot 10^{-4}$.

Es wird lediglich die Dämpfung etwas vermehrt gegenüber einer wirklich nachgiebigen Aufhängung. Letztere erhält man leicht durch Aufhängen an einer den Ring umschlingenden Drahtschlinge, oder durch Aufhängung an zwei Drähten (bei horizontaler Lage der Hauptachse des Schwingers) oder durch Aufhängen an drei Drähten unter Zwischenschaltung einer sehr nachgiebigen Wurmfeder (bei vertikaler Lage der Hauptachse des Schwingers). In letzterer läßt sich sehr schön mittels aufgestreuten Sandes die völlige Freiheit von Oberschwingungen durch Auftreten einer einzigen kreisförmigen Knotenlinie zeigen. Die zunächst gegenüber der Stimmgabel nachteilig erscheinenden Schwingungen des äußeren Ringes sind für die meisten technischen Anwendungen sehr wertvoll, weil sie es ermöglichen, die Bewegungen der schwingenden Masse in jedem gewünschten Maße verkleinert auf andere gekoppelte Systeme zu übertragen. Man kann natürlich auch die zentrale Masse größer machen als die Ringmasse oder sie überhaupt durch starre Befestigung an einer sehr großen Masse festlegen; dann dient die Ringmasse als schwingende Masse (vgl. Fig. 6).

Die Dämpfung frei aufgehängter Schwinger der beschriebenen Art ist bei kleinen handlichen Ausführungen etwas größer als die der gewöhnlichen Stimmgabeln auf Resonanzkasten. Wir haben Messungen des Schwingungsdekrements für einen ziemlich stark gedämpften Schwinger und zum Vergleich für eine Stimmgabel ausgeführt, indem wir die von einem Telephon aufgenommenen Schwingungen mittels eines Dreiröhrenverstärkers vergrößert dem Oszillographen zuführten. Die Oszillogramme sind in Fig. 7 wiedergegeben. Ihre Ausmessung ergibt

für den Schwinger das Dekrement $5 \cdot 10^{-4}$,
für die Stimmgabel „ „ $1 \cdot 10^{-4}$.

Wir glauben, daß die von uns aufgefundenen, zunächst nur für technische Zwecke bestimmte Form des Schwingers, die wir im Hinblick auf kompliziertere, späterhin zu beschreibende Gebilde als „Elementarschwinger“ bezeichnen, sich auch in den Händen der Experimentalphysiker und Physiologen

wegen ihrer wertvollen Eigenschaften bald als Ersatz für Normalstimmgabeln einer gewissen Beliebtheit erfreuen wird.

Über Bau und Anwendungen eines mechanischen Schwingers.

Von

K. Boedeker und H. Riegger.

Mit 1 Textfigur.

Mitteilung aus dem Physikalisch-Chemischen Laboratorium zu Siemensstadt.

Bei ihren akustischen Arbeiten sind Gerdien und H. Riegger auf eine Form eines akustischen Schwingers¹⁾ gekommen, welche sehr reine sinusförmige Töne zu erzeugen erlaubt. Die Schwinger kennzeichnen sich hauptsächlich 1. durch die vollständige Trennung der die elastischen Kräfte gebenden Teile von der schwingenden Masse, 2. durch eine Gradführung mit Hilfe zweier Membranen, die die Bewegung der schwingenden Teile nur nach einer Richtung zulassen. Diese Schwinger werden wie eine Stimmgabel durch Anschlagen zum Tönen gebracht. Im folgenden soll eine Anwendung dieser Schwinger beschrieben werden, die einen kontinuierlichen Ton zu erzeugen gestattet, der 1. rein sinusförmig und 2. sehr konstant in der Frequenz und bequem veränderlich in der Amplitude ist. Dabei kann auch die Frequenz selber durch Veränderung der Schwingungsmasse stufenweise variiert werden. Diese Anordnung erzeugt gleichzeitig einen Wechselstrom, dessen Verlauf zwar nicht vollständig sinusförmig ist, dessen Grundfrequenz aber entsprechend der Eigenfrequenz des mechanischen Schwingers sehr genau definiert ist. Fig. 1 stellt einen Schnitt durch diesen Reintöner dar.

Der Töner ist ein Rotationskörper mit der Achse $A-B$. Der eigentliche schwingende Teil besteht darin einmal aus den Massen $m_1 + m_2 = m$, sodann den mit diesen durch die elastischen Teile E_1 und E_2 verbundenen Massen $m_3 + m_4 + m_5 + m_6 = M$. Die Massen m_1 und m_2 sind durch Schrauben S_1 starr miteinander verbunden, ebenso die Massen m_3, m_4, m_5 und m_6 , so daß für die Frequenz die Massen m und M maßgebend sind. Aus dieser Konstruktion ergibt sich, daß beim Schwingen die beiden Massen nur Bewegungen ausführen können parallel zu $A-B$. Irgendwelche seitliche Schwingungen sind durch die von den beiden Membranen E_1 und E_2 erzwungene Gradführung ausgeschlossen. Oberschwingungen sind durch die geringe Masse der elastischen Teile verhindert. Die aus den Teilen m_1, E_1, m_3 und m_2, E_2 und m_4 gebildeten Elemente, welche in ihrem Bau genau dem von H. Gerdien und H. Riegger beschriebenen Schwinger entsprechen, sind aus dem Vollen gedreht und durch Schrauben S_1 und S_2 unter sich fest verbunden. Durch 3 am Umfang verteilte Schrauben S_3 ist das ganze

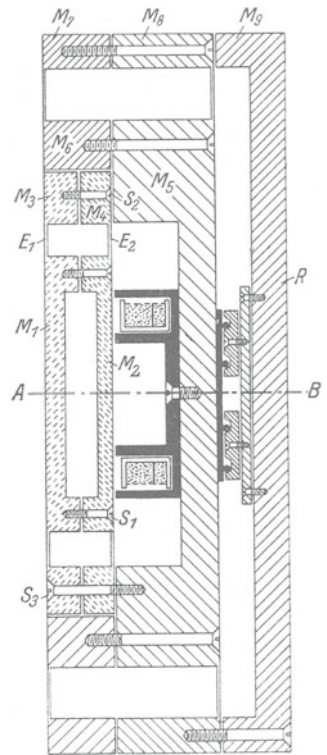


Fig. 1.

¹⁾ S. 137.

Schwingerelement mit m_5 verbunden und kann sehr leicht gegen ein entsprechend anderes mit anderer Abstimmung ausgewechselt werden. Hierdurch ist eine stufenweise Änderung der Tonfrequenz ermöglicht worden. Auch durch Aufschrauben von Massen bei A ist eine solche Tonänderung bequem zu bewerkstelligen. Wie oben erwähnt, schwingen beim Töner die beiden Massen m und M gegeneinander. Das Verhältnis ihrer Amplituden ist nach dem Schwerpunktssatz gegeben durch $m : M$. Da nun die Masse M etwa 10 mal so groß ist wie die Masse m , so liegt die Schwingungsenergie zu etwa 90% in der Masse m . Trotz des geringen Energieanteiles der großen Masse M kann der Schwinger von an M angreifenden Reibungskräften, wie sie beispielsweise durch Aufstellen des Reintöners auf einen Tisch entstehen können, merklich gedämpft werden. Um eine möglichst reibungsfreie Befestigung des Töners zu erhalten, wurde derselbe, wie aus der Fig. 1 leicht zu erkennen ist, mit einer dritten Masse $m_7 + m_8 + m_9$ durch zwei dünne Membranen verbunden. Diese Membranen, welche übrigens mit den entsprechenden Massen m_6, m_7 und m_5, m_8 zusammen aus einem Stück hergestellt sind, hindern in keiner Weise die Schwingungen in der Richtung AB , tragen zur Frequenz derselben sehr wenig bei, sind aber andererseits doch hinreichend stark, um den Töner zu tragen. In dieser Form kann der Töner unbedenklich auf den Tisch gestellt werden, ohne daß eine störende Zunahme der Dämpfung befürchtet werden müßte.

Um nun den Reintöner anzuregen, sitzt auf der Masse m_5 ein Magnetsystem. Dieses kann wie beim Telephon aus einem permanenten Magneten mit entsprechenden Spulen bestehen. Als zweckmäßig hat sich eine Anregungsform, wie sie aus der Fig. 1 erkennbar ist, ergeben. Die Magnetisierung geschieht dann durch einen Gleichstrom. Wird dieses Magnetsystem mit Wechselstrom beschickt, so gibt der Schwinger bei Resonanz einen kräftigen rein sinusförmigen Ton.

Durch ein mit dem Schwinger verbundenes Mikrophon kann aber auch Selbsterregung nach Art bekannter Schaltungen erreicht werden. Wir haben zu diesem Zweck ein Mikrophon auf die Rückwand R aufgebracht, die Masse m_5 trägt dabei die Kohlemembran, und die Kohlekörner befinden sich also zwischen einem bewegten und einem festen Teil. Auch ein sogenanntes Schüttelmikrophon, das vollständig auf der Masse m_5 sitzt, ist verwendungsfähig. Bei der Größe der Masse M und ihrer relativ kleinen Amplitude wird die Dämpfung des Schwingers nicht unnötig vergrößert, seine Frequenz kaum merklich beeinflußt.

Statt zur Selbsterregung ein Mikrophon zu verwenden, haben wir auch mit gutem Erfolg Verstärkerröhren benutzt. An Stelle der einen Spule werden dann besser zwei Spulen verwandt. Wird der Schwinger angestoßen, so ergeben sich induzierte Spannungen in der einen Spule, die dem ersten Gitter eines Mehrfachverstärkers zugeführt werden. Der verstärkte Strom wird durch die zweite Spule geschickt. Geschieht dies in der richtigen Phase, so werden die Schwingungen des Töners verstärkt, und die Schwingungen laufen kontinuierlich weiter. Da kleine Erschütterungen immer vorhanden sind, setzt das Schwingen auch selbsttätig ein. Es ist auf diese Weise möglich, den mechanischen Schwinger als Frequenzsteuer an Stelle des gewöhnlich benutzten elektrischen Schwingungskreises bei Schwingungsröhren zu verwenden¹⁾.

Der so beschriebene Reintöner mit Mikrophon fand bereits Anwendung als Frequenzrelais und ist als solches von den Verfassern an anderer Stelle beschrieben²⁾.

¹⁾ Nachträglich wurde uns aus Referaten bekannt, daß ähnliche Anwendung mechanischer Schwinger (Stimmgabeln) auch von anderer Seite beschrieben wurden, vgl. W. H. Eccles und F. W. Jordan, *The Electrician* **81**, 20. Juni 1919; Henri Abraham und Eugène Bloch, *C. R.* **168**, 1197 (1919).

²⁾ Siehe S. 132.

Zur Reindarstellung von Uranverbindungen.

Von

Ernst Wilke-Dörfurt.

Mitteilung aus dem Physikalisch-Chemischen Laboratorium
zu Siemensstadt.

Für eine Untersuchung über die katalytische Wirksamkeit von Metalloxyden wurde ein sehr reines Uranoxyduloxyd U_3O_8 gebraucht. Da die erhältlichen Handelspräparate in bezug auf Reinheit so wenig befriedigten, daß ohnehin eine systematische Reindarstellung in präparativem Ausmaß hätte vorgenommen werden müssen, lag es nahe, das Uran unmittelbar aus dem Erz herauszuarbeiten. Als Ausgangsmaterial wurden die Rückstände eines früher in der physikalischen Abteilung des Laboratoriums auf Helium verarbeiteten Cleveits gewählt, deren hoher Urangehalt es lohnend erscheinen ließ, das immerhin seltene Mineral auch noch auf diesen hin auszuwerten. Zu dem Zweck wurden die Rückstände mit konz. Salpetersäure behandelt, der unangreifbare Teil darauf durch Aufschluß säurelöslich gemacht und die Salpetersäureauszüge zur Verarbeitung auf Uran vereinigt. Diese Nitratlösung befreite man zunächst von der Hauptmenge der seltenen Erden und des Thoriums durch Fällung mit Oxalsäure¹⁾ und dann von den übrigen Metallen, nachdem man die Salpetersäure durch Fällern mit Ammoniak und Lösen in Salzsäure eliminiert hatte. Die alte Zim m e r m a n n s c h e Vorschrift²⁾ mit Schwefelwasserstoff und dann mit Schwefelammonium das Uran von fremden Schwermetallen zu reinigen, bewährte sich ausgezeichnet: Nach zweimaliger Ausführung wurde eine von Begleitmetallen nur noch Spuren enthaltende Uranlösung gewonnen. Nach einer Fällung mit Ammoniak lieferte sie mit Salpetersäure ein Rohuranyl nitrat. Dies wurde aus Wasser und dann zur endgültigen Reinigung aus Äther mehrfach umkristallisiert. Entwässern und Glühen ergab dann ein Uranoxyduloxyd, das nach den im Schrifttum sich findenden Angaben über die Reindarstellung von Uranverbindungen völlig rein hätte sein müssen. Dies war indes nicht der Fall. Zwar waren alle Schwermetalle, die seltenen Erden, Tonerde, die alkalischen Erden und Magnesium nun auch nicht mehr spurenweise vorhanden, jedoch befanden sich beträchtliche Mengen Alkalien in dem Präparat. Die teilweise Wiederholung der Reinigung führte zu Proben, die zuletzt wägbare Mengen Alkali nicht mehr enthielten, sich aber spektralanalytisch noch keineswegs als Alkali frei erwiesen; besonders die rote Lithiumlinie trat noch mit beträchtlicher Intensität auf. Da der Verwendungszweck auch die Beseitigung dieser Spuren erforderte, so mußte der Grund für das hartnäckige Haften des Alkalis aufgesucht und eine Methode gefunden werden, die eine scharfe Trennung ermöglichte,

¹⁾ Die Abtrennung der Edelerden vor den Schwermetallen an dieser Stelle ist bei der Zusammensetzung des Cleveits notwendig. Sie gelingt ohne Uranverluste, wenn man in verdünnter Lösung arbeitet.

²⁾ Liebigs Ann. **213**, 289 (1882).

noch bevor das Uranylнитrat aus Wasser kristallisiert wurde. Denn dabei konnte bei der Ähnlichkeit der in Betracht kommenden Löslichkeiten nur ein langwieriges Fraktionieren zum Ziele führen oder bei der Neigung des Uranyls zur Bildung von Doppelsalzen ein stationärer Endzustand eintreten. Das Kristallisieren aus Äther andererseits mußte aus unten angegebenen Grunde nach Möglichkeit überhaupt vermieden werden. Der Mangel der befolgten Arbeitsweise mußte in der zweiten Schwefelammonfällung liegen. Liegt ein sehr alkaliarmes Ausgangsmaterial, z. B. eine reine Pechblende vor, so wird dieser Teil der Reinigung keine Schwierigkeiten machen¹⁾. Bei alkalireichem Ausgangsmaterial ist aber die übliche Arbeitsweise offenbar unzulässig. Daß dies Verhalten der Alkalien z. B. bei der Verarbeitung von Uranglimmern bisher nicht berücksichtigt ist, scheint der Umstand anzudeuten, daß in vielen Handels- und Sammlungspräparaten von Uranylsalzen mit großer Regelmäßigkeit Alkali und besonders Lithium enthalten ist²⁾. Der nach Beseitigung der Schwermetalle enthaltene Schwefelammonniederschlag, der die Abtrennung der alkalischen Erden und auch der Alkalien hätte bewirken sollen, wurde nun genauer untersucht und erwies sich als alkalihaltig. Und zwar machte es nicht den Eindruck, als ob das Alkali durch „Mitreißen“ in ihn hineingelangt war, sondern in chemischer Bindung darin vorlag. Es war nämlich der Alkaligehalt weder durch Wiederholen der Fällung, noch durch Verkleinerung der jeweils in Arbeit genommenen Proben herabzusetzen, sondern er stieg und fiel, je nachdem, ob eine alkalireiche oder eine alkaliarme Uranlösung verwendet wurde. Das konnte nur so zustandekommen, daß der Niederschlag, der mit Schwefelammonium in Uranylsalzlösungen erzeugt und als Uranylsulfid (UO_2S) angesprochen wird — bei völlig alkalifreiem Uransalz wohl auch darstellt — in Gegenwart von Alkalien Alkaliuranat enthält, das sich indes mit Schwefelammon nicht zu Sulfid umsetzt, sondern bei der Weiterbehandlung immer wieder Alkali ins Endprodukt bzw. in die schließlich durch Kristallisation zu reinigende Uranylнитratlösung gelangen läßt. Es war daher zu erwarten, daß man zum Ziele gelangen konnte, wenn man zur Abtrennung der Alkalien das Uran aus dem sechswertigen Zustande in den vierwertigen überführte und ihm dadurch die Möglichkeit zur Bildung der so beständigen Alkalisalze und -Doppelsalze benahm. Die Reduktion von Uranylsalz zu Uransalz kann z. B. mit naszierendem Wasserstoff vorgenommen werden, was jedoch das Einbringen von Zink oder dgl. nötig machte. Das Schwefelammonium selbst soll nach Angaben des Schrifttums das Uranylsalz „teilweise reduzieren“. Wenn es gelang, diese Reaktion zu quantitativem Verlauf zu zwingen, mußte sich die bequemste präparative Methode ergeben, denn dann waren Reduktionsmittel und Trennungsmittel identisch, ein Überschuß war leicht zu beseitigen und die Wiederoxydation konnte ohne weiteres mit Salpetersäure erfolgen, da die Kristallisation des Uranylнитrats nach Beseitigung der Alkalien ohne Zweifel die beste Schlußreinigung darstellen mußte. Dieser Gedankengang erwies sich als richtig, Durch geeignete Ausführung der Schwefelammonfällung ließ sich in der Tat glatt Uransulfid erhalten, das keinerlei Neigung zeigt, Alkalien festzulegen. Mitgerissenes Alkali kann durch doppelte Fällung und Arbeiten in kleinen Anteilen vermieden werden, das Sulfid

¹⁾ Daher führt die von H. und W. Biltz, „Übungsbeispiele aus der unorganischen Experimentalchemie“, Leipzig 1913, 2. Aufl., S. 216 gegebene Aufarbeitung von Uranpecherz zu praktisch reinem Oxyd.

²⁾ Untersuchungen wurden Präparate von E. Merck, C. A. F. Kahlbaum, E. de Haën, Dr. Th. Schuchhardt, ferner Präparate aus den Sammlungen der chemischen Institute der Universitäten Göttingen, Kiel und Breslau. Den Herren Prof. Dr. Windaus, Geheimrat Prof. Dr. Harries und Prof. Dr. Heinrich Biltz verdanke ich die Überlassung von Uransalzproben.

kann man leicht in Uranochlorid und dies über das Hydroxydul in Nitrat verwandeln, das mit Salpetersäure zu Uranylнитrat oxydiert wird und nach Kristallisation dieses Salzes aus Wasser kann ein Uranoxyduloxyd erhalten werden, in dem selbst spektroskopisch auch nicht Spuren von Alkali mehr nachzuweisen sind. Für die Verarbeitung alkalihaltiger Uranverbindungen auf ein sehr reines Octoxyd empfiehlt sich daher die folgende Arbeitsvorschrift¹⁾.

Die in üblicher Weise aus dem Erz oder aus Rückständen gewonnene, das Uran als Uranylнитrat enthaltende salpetersaure Lösung wird mit karbonatfreiem Ammoniak gefällt und durch Lösen des Niederschlages mit Salzsäure in eine Chloridlösung verwandelt. Diese sättigt man in der Wärme mit Schwefelwasserstoff und läßt das Gas noch einige Zeit einwirken. Den Schwefelwasserstoffniederschlag beseitigt man und versetzt das Filtrat mit Ammoniak, Ammonkarbonat und Schwefelammon. Während das Uran nun als Ammoniumdoppelsalz in Lösung bleibt, fallen die Metalle der Schwefelammoniumgruppe aus. Muß man bei Anwesenheit von Mangan und Nickel einen schlecht filtrierenden Niederschlag erwarten, so ist eine Abänderung der Schwefelammoniumfällung geraten: Man versetzt mit wenig überschüssigem Ammoniak, mit Ammonkarbonat und leitet nach dem Aufkochen Schwefelwasserstoff ein, bis die Flüssigkeit auf Zimmertemperatur abgekühlt ist. Das uranhaltige Filtrat der Schwefelammonfällung säuert man nun mit Salzsäure an, vertreibt durch Kochen Schwefelwasserstoff und Kohlensäure, und fällt mit karbonatfreiem Ammoniak und Schwefelammonium das Uran als Uranylsulfid (bzw. in Wirklichkeit ein Gemisch von diesem mit Schwefel und Ammonium- und Alkaliuranat) aus. Durch Kochen mit Wasser, Trocknen und Glühen dieses Niederschlages im Porzellantiegel erhält man ein Rohoxyd U_3O_8 , das in Salpetersäure zu Uranylнитrat gelöst und nun in folgender Weise systematisch von Alkalien befreit werden muß. Man löst 3 Gramm des mehrfach aus Wasser kristallisierten Uranylнитrates in 500 ccm Wasser, gibt karbonatfreies Ammoniak in geringem Überschuß dazu und leitet Schwefelwasserstoff ein bis zur Sättigung. Nun erhitzt man zum Sieden ohne Unterbrechung des Gasstromes, den man zur vollständigen Reduktion bis zum Erkalten der Flüssigkeit wirken läßt. Den mit schwefelammoniumhaltigem Wasser gut ausgewaschenen Niederschlag saugt man scharf ab, löst ihn mit wenig warmer konz. Salzsäure zu tiefdunkelgrünem Uranochlorid, verjagt den Schwefelwasserstoff durch Kochen und wiederholt nach dem Verdünnen auf 500 ccm die Behandlung mit Ammoniak und Schwefelwasserstoff. Die das zweitemal erhaltene Chlorürlösung fällt man mit Ammoniak und löst und oxydiert das Hydroxydul mit starker Salpetersäure zu Uranylнитrat. Dies endlich wird aus reinem Wasser unter sorgfältigem Staubschutz bis zum Verschwinden der freien Säure kristallisiert und ist nun völlig rein; seine Zersetzung in Glühhitze liefert Uranoxyduloxyd U_3O_8 .

Bei dieser Arbeitsweise wird die vielfach benutzte Methode, das Uranylнитrat durch Kristallisation aus Äther zu reinigen, vermieden. Einmal liefert sie kein alkalifreies Nitrat und zweitens ist sie wegen der Explosionsneigung dieser ätherischen Lösungen für präparatives Arbeiten mit einem Material, das, an sich schon kostbar, nach einer solchen Präzisionsreinigung vollends sehr wertvoll geworden ist, doch recht bedenklich. In der Literatur ist mehrfach von der Explosionsfähigkeit äthe-

¹⁾ Auf das Vorhandensein seltener Erden ist hierbei keine Rücksicht genommen. Sind sie reichlich vorhanden, worüber die spektroskopische Betrachtung der Lösung sofort Aufschluß gibt, so berücksichtige man die Anmerkung I auf S. 143.

rischer Uranylнитratlösungen die Rede¹⁾, ohne daß bisher genaueres darüber ermittelt ist. Vor allem finden sich keine Hinweise, die Möglichkeit dieser seltenen Selbstzersetzung mit Sicherheit auszuschließen. Offenbar sind nur gelegentlich ätherische Uranylнитratlösungen explodiert unter ganz bestimmten Versuchsbedingungen, die aber nachträglich nicht genau haben festgestellt werden können. Man kann daher nur jeden Einzelfall registrieren in der Hoffnung, daß später eine Vielheit von Beobachtungen instand setzt, die Ursache der Erscheinung aufzuklären. Bei den hier beschriebenen Versuchen wurde ursprünglich die Ätherlösung mit Vorliebe zur Schlußreinigung des Uransalzes benutzt, bis eine recht heftige Explosion sie aus dem Arbeitsplan verbannte. Es fiel auf, daß die Explosion der Lösung eintrat, als eine Fraktion aus Äther kristallisierten Salzes auf der Nutsche abgesaugt wurde und bereits etwa 500 ccm Lösung sich in der Saugflasche, also unter vermindertem Druck und durch die lebhaftere Ätherverdunstung bei ziemlich niedriger Temperatur befanden. Die Lösung war bei einer Erstkristallisation erhalten, also vergleichsweise reich an Salpetersäure. Ferner lag der Arbeitsplatz $1\frac{1}{2}$ m von einem großen Fenster in vollem Sonnenlicht. Möglich wäre mithin eine Initialwirkung durch Licht. Dagegen wiederum spricht, daß an genau der gleichen Stelle, ebenfalls in direktem Sonnenlicht, zuvor Dutzende solcher Lösungen ohne Zwischenfall verarbeitet worden waren.

Zusammenfassung.

Es wird darauf aufmerksam gemacht, daß bei der üblichen Herausarbeitung von Uranverbindungen aus Erzen oder Rückständen Alkalien hartnäckig durch alle Reinigungsoperationen hindurch vom Uran festgehalten werden können und daß daher Handelspräparate von Uransalzen oft durch Alkali verunreinigt sind. Es wird eine Anweisung gegeben, auch aus stark alkalihaltigem Ausgangsmaterial zu einem reinen Uranoctoxyd zu gelangen. Vor der Reinigung von Uranylнитrat durch Lösen und Kristallisieren in Äther wird wegen der Neigung dieser Lösung zur Explosion gewarnt.

Die Versuche wurden im Winter 1916/17 ausgeführt.

¹⁾ Z. B. Arno Müller, Chem. Ztg. **40**, 38 (1916); **41**, 438 (1917).

Technische Gasanalyse durch Messung der Wärmeleitfähigkeit.

Von

Max Moeller.

Mit 3 Textfiguren.

Mitteilung aus dem Physikalisch-Chemischen Laboratorium
zu Siemensstadt.

Von den physikalischen Eigenschaften der Gase ist das Wärmeleitvermögen besonders häufig untersucht worden, vor allem mit Rücksicht auf den Umstand, daß die kinetische Gastheorie für diese Eigenschaft wichtige Gesetzmäßigkeiten liefert, deren experimentelle Bestätigung eine Stütze für die kinetischen Vorstellungen bildet. So ist der Koeffizient der Wärmeleitfähigkeit einer von denjenigen Faktoren, aus welchen sich die fundamentale Größe der freien Weglänge der Gasmoleküle ermitteln läßt (Maxwell, Clausius). Da im folgenden eine Meßanordnung wiedergegeben werden soll, durch welche das Wärmeleitvermögen der Gase für Zwecke der technischen Gasanalyse benutzt wird, wird es notwendig sein, dieses Erscheinungsgebiet zunächst einer kurzen allgemeinen Betrachtung zu unterziehen.

Die Erscheinung der Wärmeleitfähigkeit findet gaskinetisch eine sehr einfache Erklärung: Da das Wärmeleitvermögen eines Körpers nichts anderes darstellt als seine Fähigkeit, bei Vorhandensein eines Energiegradienten (Temperaturgefälle) die Wärmeenergie von wärmeren zu kälteren Teilen zu transportieren, so hat man sich bei den Gasen nur vorzustellen, daß dieser Wärmetransport in einem gegenseitigen Ausgleich der kinetischen Energien der Gasmoleküle bei ihrem Zusammenprall besteht. Das wärmere Molekül wird beim Zusammenstoß mit einem kälteren an dieses Energie abgeben, während umgekehrt ein in eine wärmere Schicht gelangendes Molekül einen Energiezuwachs erleidet. Im stationären Zustand wird bei Temperaturgefälle in einem Gas jede wärmere Gasschicht in der angedeuteten Weise an die benachbarte kältere Energie abgeben und diesen Verlust aus der vorhergehenden wärmeren decken, wodurch ein gleichmäßiger Wärmetransport entsteht.

Streng zu unterscheiden von der Wärmeleitung ist selbstverständlich die Erscheinung der Konvektion, welche an sich auch einen Vorgang darstellt, durch welchen ein Gas den Wärmeübergang zwischen einem wärmeren und einem kälteren Körper vermitteln kann. Bei der Konvektion wird den Gasmolekülen unter der Wirkung einer äußeren Kraft, z. B. der Schwerkraft, eine allgemeine Bewegungsrichtung gegeben, so daß hier der wärmetransportierende Vorgang nicht in dem Energieaustausch beim Zusammenprall der Moleküle, sondern in einer Fortbewegung der wärmeren und kälteren Schichten unter dem Einfluß der richtenden Kraft zu suchen ist. Die dritte noch mögliche Form der Wärmeübertragung durch einen nur von

einem Gase erfüllten Raum, die Wärmestrahlung, ist bekanntlich an die Gegenwart des Gases nicht gebunden, sondern wird von ihr nur mittelbar, durch mehr oder minder große Absorption, beeinflusst.

Aus der kinetischen Gastheorie folgt für den Koeffizienten k der Wärmeleitfähigkeit die sehr wichtige Beziehung:

$$k = K \cdot \eta \cdot c_v, \quad (1)$$

wo K eine Konstante, η den Koeffizienten der inneren Reibung und c_v die spezifische Wärme bei konstantem Volumen bezeichnet. Da die beiden letzten Größen, wenigstens bei nicht zu hohen Drucken, vom Druck unabhängig sind, so muß auch das Wärmeleitvermögen der Gase vom Druck unabhängig sein, eine auf den ersten Blick merkwürdig anmutende, von Stefan zuerst experimentell bestätigte Folgerung, die sich aber mit einer einfachen kinetischen Betrachtung sehr leicht anschaulich machen läßt. Denn bei n -mal kleinerem Druck werden zwar n -mal weniger Moleküle aus einer Schicht in die andere treten; dafür werden sie aber n -mal größere Wege zurücklegen, d. h. n -mal tiefer in die benachbarte Schicht eindringen. Das äußere Bild, welches die Wärmeleitfähigkeit der Gase bietet, verändert sich erheblich, wenn man zu Versuchsumständen übergeht, wo die freie Weglänge der Gasmoleküle kommensurabel wird mit den Gefäßdimensionen. Dieser Fall ist gegeben bei niedrigen Drucken (1 mm und weniger), wo die freien Weglängen 0,1 mm und mehr betragen. Alsdann tritt der Energieaustausch an der Grenzschicht Gas-Fester Körper in den Vordergrund gegenüber den Vorgängen in der Gasschicht selbst. Die zwischen den Gefäßwänden übergehende Wärmemenge sinkt nunmehr mit dem Gasdruck und wird abhängig von Abstand und Material dieser Wände, an denen gleichzeitig ein Temperatursprung auftritt (Smoluchowski, Knudsen u. a.).

Bezüglich der Temperaturabhängigkeit des Wärmeleitvermögens läßt Formel (1) erwarten, daß in solchen Fällen, wo c_v konstant bleibt, k den gleichen Temperaturkoeffizienten haben muß wie die innere Reibung, welche proportional der Wurzel aus der absoluten Temperatur anwächst. Es müßte also gelten:

$$k = k_0 (1 + 0,00366t)^{1/2}$$

bzw. wenn man bedenkt, daß näherungsweise $(1 + d)^{1/2} = 1 + \frac{d}{2}$ ist,

$$k = k_0 (1 + \beta t), \text{ wo } \beta = \frac{1}{2} \cdot 0,00366 = 0,00183$$

zu setzen wäre.

Die experimentellen Messungen ergeben, wie die nachher mitgeteilten Zahlenwerte zeigen werden, meist sehr erhebliche Abweichungen von diesem Wert, so daß die Formel (1) in dieser einfachen Formulierung nur angenähert richtig sein kann. Aufklärung geben hier neuere Untersuchungen, nach denen sich die Konstante K als additive Funktion der drei Freiheitsgrade der molekularen Energie, mithin auch als abhängig von Temperatur und Gasart ergibt (Chapmann, Eucken). Bei den Edelgasen ist K , übereinstimmend mit älteren theoretischen Überlegungen von Maxwell und Boltzmann, = 2,5, sonst meist kleiner.

Von den experimentellen Meßmethoden der Wärmeleitfähigkeit, von denen diejenigen von Stefan - Winkelmann und Kundt und Warburg genannt seien, kann als in diesem Zusammenhang besonders wichtig nur diejenige von Schleiermacher skizziert werden, bei welcher die Messung im stationären Zustand erfolgt. Schleiermacher spannte einen dünnen Draht mit bekanntem Temperaturkoeffi-

zienten des elektrischen Widerstandes (Platindraht) in der Achse eines zylindrischen mit dem zu untersuchenden Gas gefüllten Glasgefäßes aus, das sich in einem Temperaturbad befand. Der Draht wurde mit Hilfe eines elektrischen Stromes von genau bestimmter Stromstärke i auf eine geringe Übertemperatur t geheizt und w durch Messung des Spannungsabfalls ermittelt. Im stationären Zustand wird ebensoviel Joulesche Wärme dem Draht zugeführt, wie infolge der Wärmeleitfähigkeit¹⁾ abgeführt wird, so daß die Beziehung gilt:

$$i^2 w = \frac{k \cdot 2\pi l \cdot t}{\ln r_2 - \ln r_1} \quad (2)$$

l bedeutet hier die Länge des Drahtes, r_1 seinen Querschnitt, r_2 den Rohrdurchmesser. t folgt aus w unter Berücksichtigung des Temperaturkoeffizienten. Man kann also k errechnen. In zum Teil etwas veränderter Form bedienen sich dieser Methode u. a. Schwarze, neuerdings Eucken und Moser²⁾.

Tabelle 1 gibt die Werte von k für eine Reihe von Gasen und Dämpfen wieder, Spalte 3 den Temperaturkoeffizienten β (nach Eucken).

Tabelle 1.

Gas bzw. Dampf	$k \cdot 10^7 \frac{\text{cal}}{\text{cm Grad sec bei } 0^\circ}$	β	$k \cdot f \cdot \text{Luft} \approx 100$
Wasserstoff	3970	0,00261	700
Stickstoff	566	0,00264	100
Sauerstoff	570	0,00303	101
Kohlensäure	337	0,00495	59
Kohlenoxyd	542		96
Schweflige Säure	195		34
Argon	390	0,00311	69
Chlor	183		32
Ammoniak	513		90
Methan	714		126
Azetylen	440		78
Leuchtgas etwa	1500		260

Tabelle 2 setzt die Wärmeleitfähigkeit der Gase in Vergleich mit derjenigen einer Reihe von anderen Körpern:

Tabelle 2.

(k für Luft = 1)

Silber	2.10 ⁴
Glas	34
Kieselgur (lose)	2
Wasser	26
Quecksilberdampf	0,4

Wichtig ist, zu erwähnen, daß bei im Dissoziationszustand befindlichen Gasen nach einer Überlegung von Nernst das Wärmeleitvermögen erheblich steigen kann, indem bei Temperaturgefälle in einer Gasschicht der in den wärmeren Teilen stattfindende Dissoziationsvorgang unter Wärmebindung, der entgegengesetzte Vorgang

¹⁾ Der Wärmeverlust durch Strahlung und durch die Drahtenden muß in evakuiertem Gefäß besonders bestimmt und in Abzug gebracht werden. Konvektion kommt in engen Röhren nicht in Betracht.

²⁾ A. Eucken, Phys. Zeitschr. **12**, 1101 (1911); **14**, 324 (1913); E. Moser, Diss. Berlin 1913.

der Wiedervereinigung in den kälteren Teilen unter Wärmeentwicklung verläuft. Diese Erscheinung ist beobachtet am Stickstoffdioxyd (Magnanini), Schwefeldampf (Strafford), Joddampf (Isnardi) und bei sehr hohen Temperaturen auch in reinem Wasserstoff (Langmuir).

Wie Spalte 4 der Tabelle 1 besonders deutlich zeigt, hat eine Reihe technisch wichtiger Gase, vor allem der Wasserstoff, ferner in geringerem Maße Kohlensäure und Methan, sowohl von Luft als unter sich erheblich verschiedene Werte der Wärmeleitfähigkeit, was die Anwendung von Wärmeleitungsmessungen für gasanalytische Zwecke nahelegt. Zu berücksichtigen ist, daß CO , N_2 und O_2 auf diesem Wege voneinander nicht zu unterscheiden sind. Konkrete Vorschläge für die Anwendung solcher Messungen in der Gasanalyse machte bereits Koepsel¹⁾. Auf Grund der Erfahrungen mit den Hitzdrahtsystemen der Luftgeschwindigkeitsmesser beschäftigte sich Prof. Gerdien mit der Konstruktion einer technisch brauchbaren Meßanordnung. Die auf eine Vervollkommnung derselben gerichteten Versuche des Verfassers, die auf seine Anregung hin unternommen wurden, haben in der Folge sowohl zur Konstruktion tragbarer Apparate für die Anzeige von gefährlichen Gasbeimengungen in der Luft (z. B. von Wasserstoff, Leuchtgas usw.) als zum Bau stationärer Anordnungen für die Untersuchung von Feuerungsgasen (Rauchgas, Generatorgas) auf Kohlensäure und Wasserstoff bzw. von technisch hergestellten Gasen (z. B. Wasserstoff) auf Verunreinigungen geführt. Die Apparate vereinigen einfachste Handhabung mit großer Zuverlässigkeit.

Von den Meßmethoden der Wärmeleitfähigkeit kam nur die oben gekennzeichnete von Schleiermacher in Betracht, da sie in stationärem Zustand arbeitet. Aus Formel (2) ergibt sich, daß, wenn i^2 konstant gehalten wird, mit der Messung von w alle Daten zur Feststellung der Größe k in gegebener Apparatur vorhanden sind. Es ist demgemäß bei konstanter Drahtbelastung die Widerstandsveränderung zu bestimmen, die ein elektrisch erhitzter Meßdraht erfährt, wenn er einmal von dem zu untersuchenden Gasgemisch (Meßgas) und das andere Mal von einem Vergleichsgas umgeben ist. Natürlich sind in dieser Weise nur Gasgemische bekannter Bestandteile zu analysieren, auch kann man durch eine einzige Messung nur die prozentische Zusammensetzung eines binären Gasgemisches bzw. den prozentischen Gehalt an einem einzigen Gasbestandteil in mehr als binären Gasgemischen feststellen²⁾. Als Vergleichsgas kann man sich je nach Umständen atmosphärischer Luft (z. B. bei Rauchgasuntersuchungen) oder des durch Absorptionsmittel bzw. katalytische Verbrennung usw. von dem festzustellenden Gas befreiten Restgemisches (z. B. bei Kohlensäurebestimmung in Kraftgasen) oder endlich des von Verunreinigungen befreiten Gases (z. B. bei Untersuchungen von Wasserstoff auf Reinheit) bedienen. Am zweckmäßigsten untersucht man, wie in Fig. 1 angedeutet ist, Meßgas und Vergleichsgas gleichzeitig, indem man beide in zwei völlig symmetrisch gebaute Meßkammern A und B einführt und die Widerstandsdifferenz beider Meßdrähte an dem Galvanometer J einer Wheatstoneschen Brücke, dessen Skala unmittelbar in Gasprozenten geeicht sein kann, sichtbar macht. Die Meßdrähte oder Drahtsysteme

¹⁾ A. Koepsel, Ber. d. Deutsch. phys. Ges. **6**, 814 (1908). — Es ist mir nicht bekannt, ob und in welchem Umfang die von Koepsel vorgeschlagenen Apparate Eingang in die Technik gefunden haben.

²⁾ Sind mehrere Gasbestandteile, etwa n , festzustellen, so kommt man prinzipiell immer, wenigstens angenähert, zum Ziel, wenn sich $n - 1$ derselben durch Absorptionsmittel u. dgl. aus dem Gasgemisch jeweils entfernen lassen und n Apparate benutzt werden. Man kann mithin Kohlensäure und Wasserstoff im Generatorgas bestimmen, da erstere sich bequem entfernen läßt.

in den Kammern werden durch Federn f , die unter Umständen auch gleich die Stromzuführung übernehmen können, unabhängig von ihrer Wärmedilatation in der zentralen Lage gehalten.

Die hier wiedergegebene Meßanordnung bietet bei Überführung in eine praktisch verwendbare Apparatur eine ganze Reihe von Schwierigkeiten, deren Überwindung für die Brauchbarkeit der Methode in technischen Betrieben entscheidend ist. Führt man die Gase an den Meßdrähten vorbei, so erfahren diese nicht nur durch Veränderung des Wärmeleitvermögens, sondern auch infolge der Kühlung durch das vorbeiströmende Gas eine Temperaturveränderung, die so groß sein kann, daß der zweite Effekt den ersten vollkommen überdeckt. Da es praktisch unmöglich ist,

Meßgas und Vergleichsgas mit stets genau gleichbleibender Geschwindigkeit an den Drähten vorbeizuführen, so muß man entweder diskontinuierlich arbeiten oder in anderer Weise den Kühlungseffekt gegenüber demjenigen der Wärmeleitung weitgehend unterdrücken. Ersteres kompliziert und verteuert die Apparatur, ist daher in der Regel unausführbar. Hingegen gelingt es, indem man, wie auch in Fig. 1 angedeutet, die Drähte in sehr engen Metallzylindern, statt nach Koeplers Vorschlag

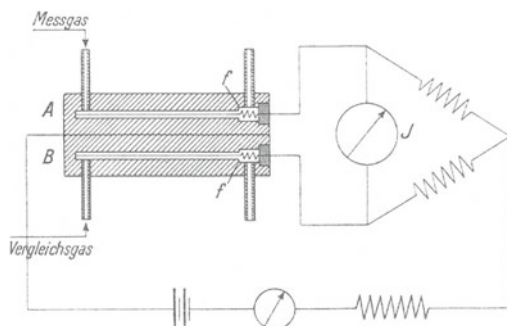


Fig. 1.

in größeren Meßkammern, ausspannt, eine von der Strömungsgeschwindigkeit nicht beeinflusste Messung der Wärmeleitung vorzunehmen, da alsdann der Gradient des Wärmestromes Draht-Wand sehr groß, dagegen die Wärmekapazität des eingeführten Gases infolge seiner geringen Menge sehr klein wird. Auch bei Gasen mit wenig ausgeprägtem Wärmeleitvermögen und bei beliebigen Drahttemperaturen gelingt so mit einer jeweiligen Menge von kaum 1 ccm eine kontinuierliche Analyse im strömenden Gas. Eine zweite konstruktive Schwierigkeit bietet die unbedingt notwendige Gewährleistung einer nahezu konstanten Nullage, da Nullpunktsregulierungen in der Praxis sehr lästig sind. Sowohl bei den tragbaren Apparaten wie in den stationären Anlagen wendet man zweckmäßig möglichst wenig elektrische Energie für die Messung auf (1—2 Watt); man muß daher sehr dünne Drähte ziemlich hoch erhitzen und sehr empfindliche Galvanometer anwenden. Unter diesen Umständen beträgt z. B. die Widerstandsänderung für 1% C O₂ etwa 10-20% des auf wenige Ohm bemessenen Hitzdrahtes; 0,1% C O₂ werden aber von den Apparaten noch deutlich angezeigt. Infolgedessen werden die Nullpunktsverschiebungen durch thermische Unsymmetrien usw. sehr leicht kommensurabel mit den zu bestimmenden Widerstandsänderungen. Es ist einleuchtend, daß die Meßkammer in bezug auf thermischen Ausgleich, Zentrierung und Spannung der Meßdrähte usw. ein Präzisionsinstrument sein muß, wenn diese Fehlerquelle unterdrückt werden soll. Es würde zu weit führen, die konstruktive Durcharbeitung der Meßkammern hier im einzelnen zu behandeln, zumal die für ähnliche Präzision vorgesehenen Meßsysteme der schon erwähnten Luftgeschwindigkeitsmesser von H. Gerdien und R. Holm an anderer Stelle (s. S. 107) ausführlich beschrieben werden. Hingegen soll auf die Abhängigkeit der Messung von einer Reihe von Fak-

toren, Strombelastung, Druck, Temperatur und Konzentration, kurz eingegangen werden.

Formel (2) zeigt, daß die Änderung der Meßdrahttemperatur für eine gegebene Änderung von k , daher auch die Meßempfindlichkeit *ceteris paribus* mit der Wattbelastung des Meßdrahtes anwachsen wird¹⁾. Infolge des starken Einflusses von Stromänderungen auf den Ausschlag muß man daher die Stromstärke gut konstant halten, was mit Eisendrahtwiderständen bequem zu erreichen ist.

Daß die Messung der Wärmeleitfähigkeit den Druck nicht zu berücksichtigen braucht, folgt aus den einleitenden Betrachtungen dieses Aufsatzes und ist ein großer Vorzug der Methode.

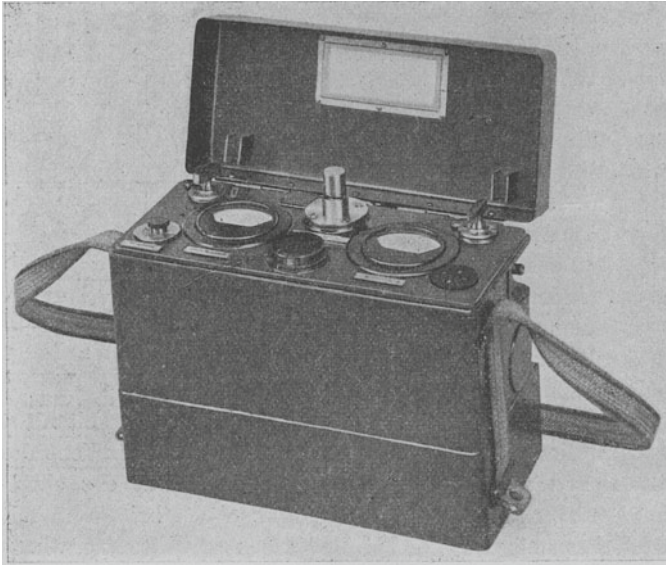


Fig. 2.

Von der Temperatur kann die Messung nur dann unbeeinflusst bleiben, wenn der Wärmeleitkoeffizient bei allen Komponenten des Gasgemisches die gleiche Abhängigkeit von der Temperatur aufweist. Spalte 3 Tabelle 1 lehrt, daß für Gemische von Kohlensäure und Luft diese Voraussetzung nicht erfüllt ist; der Galvanometerausschlag für einen bestimmten Gehalt an CO_2 wird mit-

hin bei starken Temperaturschwankungen merklich verschieden sein, und zwar mit Temperaturerhöhung abnehmen, weil β für CO_2 fast doppelt so groß ist als für Luft. Zum Ausgleich der starken Schwankungen der Raumtemperatur in Kesselhäusern ist deshalb für Kohlensäureanzeiger eine Wasserkühlung der Meßkammern vorgesehen, wodurch der Temperatureinfluß unmerklich wird.

Bei bestimmten Gasgemischen, insbesondere bei solchen von Wasserstoff und Luft, verändert sich die Wärmeleitfähigkeit nicht linear mit der prozentischen Zusammensetzung; die Skala für Wasserstoffgehalt in Luft wird mit steigendem Wasserstoffgehalt gedrängter; das Gegenteil gilt für die Skala Luft in Wasserstoff. Diese Erscheinung ist verursacht durch die Erniedrigung (Erhöhung) von w bzw. t mit steigendem (sinkendem) Wasserstoffgehalt, womit in entsprechender Weise sich die Meßempfindlichkeit ändert. In Gemischen mit weniger stark verschiedenem Wärmeleitvermögen der Komponenten ist diese Abhängigkeit der Empfindlichkeit von der Zusammensetzung unmerklich und die Skala linear. Der Wasserstoff zeigt auch insofern ein außergewöhnliches Verhalten, als die Wärmeleitfähigkeit von Wasserstoff =

¹⁾ Man kann aus Formel (2), wenn man t durch w ausdrückt und die dann entstehende Gleichung nach w auflöst, für ein gegebenes i^2 die Widerstandsänderung in Abhängigkeit von k rechnerisch ermitteln.

Sauerstoffgemischen nach Untersuchungen von Fr. Wassiljewa¹⁾ nicht additiv, sondern erheblich kleiner ist. Dieser Einfluß würde in bezug auf die Meßempfindlichkeit dem eben gekennzeichneten entgegenwirken, wird aber von diesem dem absoluten Werte nach übertroffen.

In Fig. 2 ist ein tragbarer Apparat für die Anzeige von Wasserstoff in Luft (auf Luftschiffen, in Fabrikräumen usw.) wiedergegeben. Er besitzt in der Mitte eine kleine, durch Fingerdruck bedienbare Pumpvorrichtung zum Ansaugen der Außenluft in die Kammer. Die Untersuchung erfordert kaum 2—3 Sekunden.

Fig. 3 zeigt eine stationäre Anlage für Rauchgasuntersuchung, die dicht neben dem Kessel angebracht wird, so daß der Heizer den Kohlensäuregehalt der Abgase genau so bequem verfolgen kann wie den Dampfdruck und die Zuggeschwindigkeit. Ein auf beliebige Entfernung in einem Bureauraum unterzubringendes Registrierinstrument gewährleistet Dauer- und Fernkontrolle der Feuerung. Die Bedienungsansprüche sind kaum nennenswert.

Zum Schluß sei erwähnt, daß ein transportabler Apparat im Jahre 1916 vom Verfasser auf einer Reihe von Fahrten des Luftschiffes L. Z. 72 zwecks Feststellung eventuell auftretender Knallgasmischungen in allen Räumen des Schiffes benutzt wurde. Es ergab sich hierbei u. a. das interessante Resultat, daß sich bei steigendem Schiff oberhalb des Tragkörpers infolge Abblasens der Ventile eine Wasserstoffhaut von erheblichem Durchmesser (mehr als 1 m) und stellenweise über 10proz. Konzentration bildete. Die Verwendung des Maschinengewehrs auf der oberen Plattform bot in diesem Fall größte Gefahr einer Knallgasexplosion. Andererseits blieb die Wasserstoffkonzentration im oberen Teil einer Luftschiffhalle, auch bei intensiver Sonnenbestrahlung des Hochsommers und starkem Gasverlust des Schiffes, verschwindend gering.

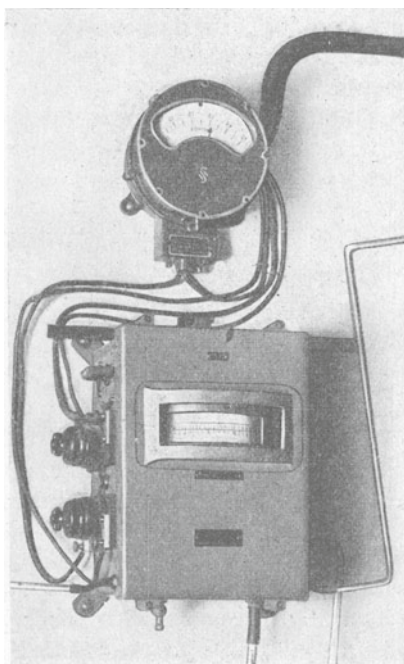


Fig. 3.

¹⁾ Fr. Wassiljewa, Phys. Zeitschr. 5, 737 (1904).

Über die Ableitung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik und verwandte Fragen.

Von

Hermann von Siemens.

Mit 1 Textfigur.

Mitteilung aus dem Physikalisch-Chemischen Laboratorium
zu Siemensstadt.

1. Einleitung.

Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik wird aufgefaßt als thermodynamischer Spezialfall eines allgemeinen Wahrscheinlichkeitsgesetzes. Dieses spricht aus, daß ein sich selbst überlassenes System im Lauf der fortschreitenden Zeit aus Zuständen geringerer Wahrscheinlichkeit (größerer Ordnung) nur in Zustände größerer Wahrscheinlichkeit (geringerer Ordnung) übergehen kann. Ist es nicht sich selbst überlassen, d. h. steht seine Zustandswahrscheinlichkeit mit der eines anderen Systems in zwangsläufiger Verbindung, so gilt der Satz für das Gesamtsystem, während die Zustandswahrscheinlichkeit eines Teilsystems sich innerhalb der so gegebenen Grenzen auf Kosten des anderen Systems verkleinern kann. Dieser Satz pflegt mit Betrachtungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung, Gesetz der großen Zahlen usw. plausibel gemacht zu werden. Es soll im folgenden gezeigt werden, daß diese Erklärungen eins nicht geben können, nämlich den einseitigen zeitlichen Verlauf, die Irreversibilität, daß vielmehr hierin eine selbständige Voraussetzung liegt, sowie daß die Richtung der Zeitfolge von Gelegenheitsursache (*causa occasionalis*) und Wirkung im Wesen eng mit dieser Irreversibilität des zweiten Hauptsatzes verknüpft ist. Es sollen ferner die Vorgänge der belebten Materie dem oben formulierten Satz gegenübergestellt werden, zwar nicht in thermodynamischer, aber in anderer Beziehung. Es soll (rein empirisch) gezeigt werden, daß das Wesen der Belebung die Umkehrung dieses Satzes bedeutet, und daß mithin für belebte Systeme die teleologische Betrachtungsweise erforderlich wird, für die die Bedingung (Zweck) dem Bedingten (Mittel) nachfolgt.

2. Ein einfacher Naturvorgang ist reversibel.

Eine Veränderung in der Natur ist die Wirkung von Kräften auf die träge Materie. Diese sind Zentralkräfte, haben ein Potential und verwandeln die Energie aus einer Form in eine andere. Die Vorgänge in einem bestimmt gegebenen System lassen sich also durch Kräfte, Potentiale oder Energien eindeutig beschreiben. Die Dimensionen dieser drei Größen enthalten im Nenner das Quadrat des Zeitinkrements. Größe und Vorzeichen dieses Quadrats bleiben identisch, wenn ich in der Gleichung eines Vorganges die Richtung des Zeitablaufs bei sonst gleichen Bedingungen umkehre.

Ein Vorgang also, der die genaue zeitliche Umkehrung eines tatsächlich erfolgenden Vorganges darstellt, folgt denselben Gesetzen und Kräften wie dieser. Beide Vorgänge erfüllen dieselbe Differentialgleichung, und ihr tatsächliches Eintreten ist von seiten der allgemeinen Naturgesetze gleich möglich. Welcher von beiden wirklich wird, hängt nur von den Integrationsbedingungen ab. Eine Veränderung in der Natur ist also reversibel. Man kann dafür folgendes Bild brauchen. Betrachte ich räumliche Verhältnisse in einem Spiegel, so ist im Spiegelbilde eine räumliche Richtung umgekehrt gegen das Original. Ein solches Spiegelbild eines Naturvorgangs ist ebenso möglich wie dieser selber. Kehre ich das Vorzeichen der Zeitrichtung um, so betrachte ich, bildlich gesprochen, den Vorgang in einem „Zeitspiegel“. Nach der angestellten Dimensionalbetrachtung ist also das zeitliche Spiegelbild eines Naturvorgangs ebenso möglich und folgt denselben Gesetzen, wie das Original. Gemäß der Überschrift bezieht sich die Betrachtung auf einfache Vorgänge. Da aber in der Ableitung von der Einfachheit kein Gebrauch gemacht wurde, bezieht sich das Ergebnis auf alle Vorgänge überhaupt, sofern sie eben streng festgelegt sind und mathematisch genau umgekehrt werden. Beides ist aber dem Experimentator bei komplizierten Vorgängen nicht mehr mit der erforderlichen Strenge möglich, so daß hier die Umkehrbarkeit nur theoretisch, aber nicht praktisch vorhanden ist. Es läßt sich also denken, daß komplizierte Vorgänge, in einem Zeitspiegel betrachtet, Bilder ergeben, die zwar an sich denkbar sind, jedoch ungereimt erscheinen, weil sie Integrationsbedingungen voraussetzen, welche die Natur nicht gibt. Aus der Differentialgleichung, welche das allgemeine Gesetz der wirkenden Kräfte darstellt, läßt sich jedoch die Bevorzugung einer bestimmten Verlaufsrichtung vor der entgegengesetzten nie ableiten. Es fragt sich, ob sich das ändert, wenn für die Beurteilung eines Vorganges auch Gesetze maßgebend werden, die nicht eine Kraft zur Grundlage haben. Ein Vorgang, der so einfach ist, daß er in seinen Einzelheiten völlig zu übersehen ist, wird durch das Kraftgesetz und die Integrationsbedingung vollständig dargestellt. Nur Vorgänge, die so verwickelt sind, daß ihre Einzelheiten nicht genau erkannt werden können, bieten Veranlassung zu andersartiger Darstellung. Diese müssen daher genauer untersucht werden, während die Umkehrbarkeit der einfachen Vorgänge feststeht.

3. Zusammengesetzte Vorgänge werden durch Wahrscheinlichkeitsrechnung untersucht.

Die andere Betrachtungsweise eines zusammengesetzten Vorgangs muß davon ausgehen, daß er nicht genau bekannt ist. Ein zusammengesetztes System ist in jedem Augenblick in einem gewissen Zustand, der in seinen Einzelheiten unbekannt ist, aber ein gewisses allgemeines Bild gibt. Die Beschreibung eines Vorgangs in einem solchen System kann nur den Übergang dieser allgemeinen Zustandsbilder ineinander geben. Nenne ich das allgemeine Bild den „Makrozustand“, so gibt es verschiedene genau definierte Einzelfälle, „Mikrozustände“, die ihn realisieren, deren jeder gleichberechtigt ist. Diese Möglichkeiten sind nur ein Teil aller möglichen Einzelfälle, die mit den bekannten Bedingungen (z. B. Kraftgesetzen) des Systems überhaupt vereinbar sind, ohne daß sie den gegebenen „Zustand“ zu realisieren brauchen. Sind mit den Bedingungen des Systems überhaupt a verschiedene Fälle vereinbar, und geben von diesen b Fälle den Makrozustand, so wird er durch den Bruchteil $\frac{b}{a}$ aller möglichen Fälle realisiert. Liegt nun kein Grund vor, einen oder eine

Gruppe dieser a -Fälle zu bevorzugen, so muß ich erwarten, daß bei häufiger Beobachtung jeder der a -Fälle ebenso oft vorkommt. Der bestimmte Zustand wird also in dem Bruchteil $W = \frac{b}{a}$ aller beobachteten Fälle vorliegen. Bei einer einzelnen Beobachtung ist also W der Bruchteil der Gewißheit, mit der ich das Vorliegen eines bestimmten Zustandes erwarte. W heißt deshalb seine Wahrscheinlichkeit. Sie ist also ein echter Bruch, der im Nenner die Zahl der mit den allgemeinen Bedingungen verträglichen Fälle und im Zähler die Zahl derjenigen von diesen Fällen enthält, die außerdem noch eine weitere Bedingung erfüllen. In derselben Art, wie die Wahrscheinlichkeit eines Zustandes, läßt sich die eines Vorgangs darstellen. Sind mit den Bedingungen des Systems von einem gegebenen Makrozustand aus α einfache Veränderungen verträglich, und führen von diesen β zu einem bestimmten anderen Makrozustand, so besteht die Wahrscheinlichkeit $W = \frac{\beta}{\alpha}$ dafür, daß das erstere Zustandsbild in das andere übergeht. Die ganze Rechenoperation beruht auf dem Mangel eines zureichenden Grundes in der Erkenntnis und gibt nur eine Erwartung. Es fragt sich, wie diese Erwartung mit den Tatsachen übereinstimmt. Für jeden Einzelfall muß zweifellos eine zureichende Ursache bestehen, die ich nur nicht kenne, sonst könnte keiner aller möglichen Fälle eintreten. Das Nichtkennen kann keinen Einfluß auf den wirklichen Ablauf der Vorgänge ausüben. Deshalb besteht kein Widerspruch mit Gesetzen der Natur oder der Erkenntnis, wenn meine Erwartung wiederholt getäuscht und ein Fall oder eine Gruppe von Fällen aus den a resp. α möglichen mehrfach hintereinander bevorzugt sind. Nehme ich aber eine hinreichend zahlreiche Wiederholung, so müssen sich solche Ausnahmen ausgleichen und der Durchschnitt über alles sich immer mehr der Wahrscheinlichkeitserwartung anpassen (Gesetz der großen Zahlen). Um das einzusehen, muß man die Frage umdrehen und überlegen, wie man sich dazu stellen würde, wenn es nicht so wäre. Würde sich der Durchschnitt auf andere als die erwarteten Werte einstellen, oder würde er einen „Gang“ zeigen, so würde man daraus schließen, daß in den Bedingungen des Systems doch ein zureichender Grund vorliege, um einige der möglichen Fälle zu begünstigen. Man würde also feststellen, daß das Spiel des Zufalls überlagert sei von einer Kraft, die auf das ganze System als einen Einzelfall wirkt, daß also kein sich selbst überlassenes System vorliegt. Wenn man nun nach dieser Feststellung seine Erwartung korrigiert, so wird sie tatsächlich um so mehr erfüllt, je häufiger man beobachtet.

4. Die Wahrscheinlichkeit ist eine reine Zahl. Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung allein ist daher nichts über die zeitliche Richtung eines Vorgangs zu folgern.

Rein mathematisch ist die Wahrscheinlichkeit ein Bruch aus zwei gleichartigen Größen, nämlich den Anzahlen der Fälle, die gewisse Bedingungen erfüllen. Sie ist also eine reine Zahl ohne Dimension, insbesondere nach der Zeit. Die Verwendung der Wahrscheinlichkeit in einer Rechnung bringt also in das Resultat die Richtung des Zeitablaufs nicht hinein, wenn sie nicht schon in den physikalischen Prämissen vorhanden war. Ein Beispiel dafür ist die Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines konstanten Zustandes. Verstandesmäßig ist die Wahrscheinlichkeit der Bruchteil der Gewißheit, mit der ich etwas erwarte. Nun bezieht sich ja eine Erwartung auf die Zukunft, insolvirt also eine Zeitrichtung. Doch ist das der Erwartung zeitlich

folgende nicht der Eintritt des Ereignisses, sondern der Eintritt meiner Kenntnis von ihm. Das Ereignis kann längst eingetreten sein, wenn ich seine Wahrscheinlichkeit berechne. Ich weiß auch, daß es eingetreten ist, aber nicht, wie es ausgefallen ist. Ich kann dann auf Grund der Berechnung erwarten, daß eine etwaige spätere Erkennung des früheren Ereignisses das und das Bild geben werde. Also auch verstandesmäßig wird die Zeitrichtung bei Benutzung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes nicht für die Vorgänge, sondern nur für ihre Erkennung festgelegt. Besteht demnach ein physikalisches System aus Teilen, die in einfacher Weise von Kräften abhängen, und wird der Gesamtzustand und dessen Änderung nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung untersucht, so ergeben die angestellten Dimensionalbetrachtungen, daß weder die Benutzung von Kräften, noch von Wahrscheinlichkeiten einen zureichenden Grund dafür abgibt, daß sich der Gesamtzustand irreversibel ändert. Insbesondere besteht kein Unterschied in der Wahrscheinlichkeit, daß ein gegebener Zustand eines Systems sich in einen wahrscheinlicheren verwandele, oder daß er aus diesem hervorgehe; daß also der wahrscheinlichere Zustand im Durchschnitt der spätere oder frühere sei, als der unwahrscheinlichere. Gibt es also ein Gesetz hierüber, so ist es nicht eine rein mathematische Folgerung aus Prämissen, die nur reversible Änderungen aussprechen, sondern es muß auf einer selbständigen physikalischen Tatsache beruhen, die zu diesen Prämissen und der angewandten Rechnungsweise hinzukommt.

5. Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik ist eine Ungleichung der Wahrscheinlichkeit nach der Zeit. Seine Ableitung bloß aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist ein psychologischer Trugschluß.

Man hat nun ein Gesetz aufgestellt, welches aussagt, daß in einem sich selbst überlassenen System, dessen Zustand also nicht zwangläufig mit einem anderen System verbunden ist, jeder Zustand sich im Laufe der fortschreitenden Zeit in einen Zustand größerer Wahrscheinlichkeit umwandelt. Im Grenzfall kann ein Zustand konstant bleiben oder in einen gleich wahrscheinlichen übergehen, niemals aber in einen unwahrscheinlicheren. Wendet man diesen Satz auf ein System an, insofern es aus Atomen und Molekülen aufgebaut ist, die sich unter dem Einflusse ihrer Anziehungs- und Abstoßungskräfte und ihrer Wucht gruppieren und bewegen, so erhält man den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik. Wenn die Zeit t heißt, so läßt er sich schreiben: $\frac{dW}{dt} > 0$, ist also eine Ungleichung der Zustandswahrscheinlichkeit nach der Zeit. Diese Ungleichung läßt sich, wie gezeigt worden ist, nicht aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung und den gegebenen Molekularkräften ableiten.

Gehe ich von einem bestimmten Zustand, als gegeben, aus und lasse das System eine elementare Veränderung durchmachen, so kann diese zu zwei benachbarten Zuständen führen, zum nächst wahrscheinlicheren oder zum nächst unwahrscheinlicheren. Vom gegebenen zum wahrscheinlicheren Nachbarzustand führen aber mehr Wege, als zum unwahrscheinlicheren. Dies Mißverhältnis wird um so größer, je weiter der gegebene vom Zustand größtmöglicher Wahrscheinlichkeit entfernt ist. Rechne ich darum nach der Wahrscheinlichkeitslehre von der Gegenwart, als gegeben, den Zustand des folgenden Zeitpunktes, als gesucht, aus, so ergibt sich, daß der wahrscheinlichere Vorgang zum wahrscheinlicheren Nachbarzustand führt, wie es der zweite Hauptsatz verlangt. Die möglichen Wege zwischen zwei

Nachbarzuständen lassen sich aber nach beiden Richtungen beschreiten. Wenn ich also den vorangegangenen Nachbarzustand suche, aus dem sich der gegenwärtig gegebene entwickelt hat, so muß ich mit gleichem Recht erwarten, daß es der wahrscheinlichere war. Denn von diesem führen mehr Wege zum gegebenen Zustand, als vom unwahrscheinlicheren. Es stellt sich also rein mathematisch der gegebene Zustand als der unwahrscheinlichste dar, der nach Zukunft und Vergangenheit von wahrscheinlicheren und immer wahrscheinlicheren Zuständen begleitet ist, die sich immer mehr dem Zustand von der größtmöglichen Wahrscheinlichkeit annähern. Die Zeitkurve wird natürlich keinen ganz glatten, sondern einen Zickzackverlauf haben, sich aber in großen Zügen in der beschriebenen Weise verhalten. Der gegebene Zustand stellt mithin eine Spitze der Unwahrscheinlichkeit dar. Durch die Spitze wird die Kurve in zwei Äste geteilt, deren zeitlich erster dem zweiten Hauptsatz entgegen und deren zweiter ihm gemäß verläuft.

Die Ableitung des zweiten Hauptsatzes bloß aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung beruht also auf deren Anwendung nur nach der einen ihrer beiden gleichberechtigten Richtungen unter Vernachlässigung der anderen. Daß dieser Trugschluß übersehen wird, hat psychologische Gründe. Dem Bewußtsein ist die Zeit keine analytische Dimension mit entgegengesetzten und gleichberechtigten Richtungen. Die Gegenwart erlebe ich, die Vergangenheit besitze ich zum großen Teil im Gedächtnis oder schwarz auf weiß, kenne sie also. Die Zukunft dagegen ist mir nicht „gegeben“, jedoch „gesucht“, weil ich sie kennen muß, um mit dem Willen den richtigen Einfluß auf ihren Verlauf auszuüben. Die Zukunft ist also interessant aber unbekannt, und die Wahrscheinlichkeitsrechnung oft das einzige Mittel zu ihrer Ergründung. Die Vergangenheit dagegen ist unwichtiger und meist besser bekannt, als es die Wahrscheinlichkeitsrechnung leisten könnte. Man ist darum im täglichen Leben gewöhnt, die Zukunft aus der Vergangenheit und Gegenwart zu erraten, und wendet dies Verfahren unbesehen auf die Thermodynamik an. Dabei kommt man gerade auf das experimentell richtige Resultat und hat so gar keine Veranlassung, nach einem Überlegungsfehler zu suchen.

Als Beispiel eines ähnlichen Gesetzes, das auch nicht auf Kraftwirkung, sondern auf dem Spiel des Zufalls beruht, wird oft die Regel beim Glücksspiel herangezogen, daß im Laufe der Zeit die großen Vermögen die kleinen verzehren, indem bei den kleinen früher der Punkt erreicht ist, an dem das ganze Vermögen verspielt und damit die Möglichkeit des Weiterspielens verwirkt ist. Hier liegt aber ein ganz anderer Fall vor. Denn die einzelnen Spiele sind psychisch in Einsatz und Gewinn auf dem Interesse an der Zukunft und physikalisch in der rollenden Kugel oder dem Fall der Würfel auf einem irreversiblen Vorgang aufgebaut. Hier ist also bereits im Einzelfall die Richtung der Zeit festgelegt. Ein einzelnes Roulettespiel im Zeitspiegel betrachtet, gäbe ein ganz unmögliches Bild. Es ist deshalb von vornherein zu erwarten, daß ein Gesetz, das aus der statistischen Zusammenfassung solcher Einzelspiele abgeleitet wird, ebenfalls einen irreversiblen Vorgang aussprechen wird.

6. Zahlenbeispiel.

Um die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf ein zusammengesetztes System zu veranschaulichen, soll ein einfaches Beispiel ausgeführt werden. Es liegen zehn gleiche numerierte Kugeln auf einem Feld, das durch eine Grenze in eine rechte und eine linke Seite geteilt ist. Jede Kugel liegt dann entweder rechts

oder links. Mit diesen allgemeinen Bedingungen sind verträglich $2^{10} = 1024$ verschiedene Fälle der Verteilung (Mikrozustände). Lege ich die Zahl der rechtsliegenden Kugeln fest, so füge ich eine weitere Bedingung hinzu und bestimme dadurch den Zustand (Makrozustand) des Systems. Der Zustand 10 links — 0 rechts ist nur einmal realisierbar; seine Wahrscheinlichkeit beträgt daher $\frac{1}{2^{10}}$. Der Zustand 9 links — 1 rechts ist 10 mal realisierbar, der Zustand 8—2 schon $\frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2}$ mal usw., wie in folgender Tabelle.

Zustand	Zahl der Fälle	Wahrscheinlichkeit
10 — 0	= 1	$\frac{1}{1024} = 0,000\ 977$
9 — 1	$\frac{10}{1} = 10$	$\frac{10}{1024} = 0,009\ 766$
8 — 2	$\frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$	$\frac{45}{1024} = 0,043\ 945$
7 — 3	$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$	$\frac{120}{1024} = 0,117\ 187$
6 — 4	$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$	$\frac{210}{1024} = 0,205\ 078$
5 — 5	$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$	$\frac{252}{1024} = 0,246\ 094$
4 — 6	$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 210$	$\frac{210}{1024} = 0,205\ 078$
3 — 7	$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 120$	$\frac{120}{1024} = 0,117\ 187$ usw.

Hierdurch sind die Zustandswahrscheinlichkeiten berechnet. Eine Zeit ist in keiner Weise in der Rechnung vorgekommen. Ich nenne eine elementare Veränderung den Übergang einer Kugel über die Grenze. Geht vom Zustande 8—2 aus eine elementare Veränderung vor sich, so wird das System in einen der beiden benachbarten Zustände 7—3 oder 9—1 gelangen. Gehe ich von einem bestimmten Einzelfall des Zustandes 8—2 aus, so kann sich jede der zehn Kugeln verändern. Da acht Kugeln links und zwei rechts liegen, so sind acht Übergänge nach rechts und zwei nach links möglich, die zu 7—3 resp. 9—1 führen. Da es im ganzen 45 Einzelfälle für 8—2 gibt, sind im ganzen 450 Übergänge vom Zustand 8—2 aus denkbar, von denen $8 \cdot 45 = 360$ zu 7—3 und $2 \cdot 45 = 90$ zu 9—1 führen. Die Wahrscheinlichkeit des Übergangs nach 7—3 ist also $\frac{360}{450} = 0,8$ und für den Übergang nach 9—1 gleich $\frac{90}{450} = 0,2$. Ist also ein Anfangszustand gegeben, so ist der Übergang zum wahrscheinlicheren der beiden Nachbarzustände der wahrscheinlichere Vorgang. Zu gleichen Zahlen gelange ich auf folgende Weise: Die Kugel Nr. 1, die den Zustand 8—2 mit aufbaut, hat neun Möglichkeiten, rechts zu liegen, nämlich mit jeder der anderen Kugeln zusammen. Da im ganzen 45 Einzelfälle möglich sind, muß sie in den anderen 36 Fällen links liegen. Die Kugel Nr. 1, und ebenso jede andere Kugel, hat demnach 36 Möglichkeiten nach rechts und neun Möglichkeiten nach links überzugehen. Für zehn Kugeln gibt das 360 und 90 Wege von 8—2 zu 7—3 resp. 9—1, wie oben. Hier ist die Voraussetzung gemacht, daß der gegebene Zustand 8—2 der Anfangszustand sei. Entsprechend kommt ein zeitlich gerichtetes Ergebnis heraus. Die Wege können aber gerade so gut auch rückwärts beschrritten werden, ohne daß an der Rechnung

etwas geändert zu werden braucht. Es sind also auch die Wahrscheinlichkeiten, daß sich 8—2 aus 7—3 oder 9—1 bildet, 0,8 resp. 0,2. Zu beachten ist nur, daß der Zustand 8—2 festgelegt, aber zwischen den beiden Nachbarzuständen als anderen Enden des Übergangs die Wahl frei ist. Gehe ich z. B. von 7—3 aus und berechne die Wahrscheinlichkeit des Übergangs zu 8—2, so erhalte ich 0,3 an Stelle von 0,8.

Das liegt daran, daß ich jetzt nicht die Wahl habe zwischen $\begin{matrix} 7-3 \\ \downarrow \\ 8-2 \end{matrix}$ und $\begin{matrix} 9-1 \\ \downarrow \\ 8-2 \end{matrix}$, sondern zwischen $\begin{matrix} 7-3 \\ \downarrow \\ 8-2 \end{matrix}$ und $\begin{matrix} 7-3 \\ \downarrow \\ 6-4 \end{matrix}$. Die Kugel Nr. 1 im Verbande 7—3 hat $\frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$ Mög-

lichkeiten, rechts zu liegen, also in den Zustand 8—2 überzugehen. Für zehn Kugeln gibt das wieder 360 Wege von 7—3 nach 8—2. Zahl der möglichen Fälle für 7—3 ist 120, also liegt die Kugel in $120 - 36 = 84$ Fällen links und erzeugt beim Übergang den Zustand 6—4. Das macht für zehn Kugeln 840 Wege von 7—3 nach 6—4. Die Zahl der Verbindungswege zwischen 8—2 und 7—3 ist also 360, wie man auch rechnet. Aber je nachdem man damit die größere Zahl 840 oder die kleinere Zahl 90 kombiniert, erhält man für die Übergangswahrscheinlichkeit von 7—3 nach 8—2 oder umgekehrt einen Wert kleiner oder größer als $\frac{1}{2}$. Es kommt also bei dem Übergang nicht auf

die Richtung der Zeit an, sondern darauf, welcher der beiden Endpunkte fest gegeben ist, und neben welchem noch eine anderweitige Möglichkeit besteht. Von den beiden möglichen wird derjenige am häufigsten als Nachbarzustand des gegebenen auftreten, zu dem die meisten Wege führen, und das ist der wahrscheinlichere der beiden. Im großen Durchschnitt ergibt sich also eine Tendenz dahin, daß der gegebene Zustand unwahrscheinlicher ist, als der aus ihm durch eine elementare Veränderung abgeleitete, ohne eine Annahme darüber, ob der abgeleitete Zustand früher oder später ist, als der gegebene.

Habe ich ein zehnmal so großes System, und lasse ich entsprechend auch gleichzeitig zehn einfache Veränderungen vor sich gehen, so kann ich zu 11 verschiedenen Zuständen gelangen. Gehe ich vom Zustand 80—20 aus, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß schließlich ein Zustand mit mehr als 20 Kugeln rechts eintritt, gleich 0,9745, für Beibehaltung des Zustandes 80—20 gleich 0,0215 und für Bildung eines unwahrscheinlicheren Zustandes nur 0,0040. Am größten ist die Wahrscheinlichkeit, daß acht Kugeln nach rechts und zwei nach links gehen, daß also der Zustand 74—26 eintritt, nämlich 0,3182. Je größer also das betrachtete System ist, um so geringer ist die Unsicherheit in der Behauptung, daß der abgeleitete Zustand wahrscheinlicher sei als der gegebene. Diese Tatsache, daß die Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung sich um so mehr der absoluten Sicherheit eines strengen Gesetzes nähern, je größer das betrachtete System ist, nennt man das Gesetz der großen Zahlen. Dies verbürgt den Wahrscheinlichkeitsüberlegungen bei so großen Systemen, wie es meßbare Mengen Substanz sind, große Verlässlichkeit, hat aber mit der zeitlichen Richtung eines Vorgangs nichts zu tun. Will man eine Regel erhalten, die dem zweiten Hauptsatz entspricht, so muß man eine zeitliche Voraussetzung einführen, nämlich daß der gegebene Zustand der Anfang der Veränderung ist.

7. Die reine Wahrscheinlichkeitsrechnung stellt einen Spezialfall des zweiten Hauptsatzes dar, nämlich das stabile thermodynamische Gleichgewicht.

Nach den bisherigen Ausführungen ergibt sich scheinbar ein Widerspruch zwischen Rechnung und Versuch, und es entsteht die Frage, wie er zu lösen ist. Zu-

nächst soll untersucht werden, ob das von der reinen Wahrscheinlichkeitsrechnung entworfene Bild in der Wirklichkeit vorkommt. Es muß vor allem symmetrisch nach der Zukunft und Vergangenheit sein, also einen reversiblen Vorgang darstellen. Nun rechnet man in der Thermodynamik mit reversiblen Vorgängen, die durch eine kontinuierliche Reihe von Gleichgewichten führen. Solche Vorgänge können aber, streng genommen, nicht vor sich gehen, da die Veränderung dem Wesen des thermodynamischen Gleichgewichts widerspricht. Es bleibt also nur noch das Gleichgewicht selber übrig, das dadurch charakterisiert ist, daß eine Vermehrung der Zustandswahrscheinlichkeit mit den Bedingungen des Systems nicht verträglich ist, also:

$$W = \max ; \quad \frac{dW}{dt} = 0 .$$

In einem solchen Zustand befindet sich z. B. ein Liter Wasserstoff, das bei konstanter Temperatur und konstantem Druck gehalten wird und sich innerlich ausgeglichen hat. Als Grundlage besteht hier der Zustand der größten, unter den gegebenen Bedingungen erreichbaren Wahrscheinlichkeit, also ein relatives Maximum. Nun entspricht es sowohl dem Gleichgewicht, wie der voraussetzungslosen Wahrscheinlichkeitsrechnung, daß es gleichgültig ist, ob man von der Vergangenheit in die Zukunft oder umgekehrt, oder aber von einem Zeitpunkt nach beiden Richtungen rechnet. Es soll deshalb zunächst die erste Methode, als die normale, benutzt werden.

Teile ich das Liter in Kubikmillimeter ein, so befindet sich nicht jeder dieser Teile im Normalzustand. Einige werden in unwahrscheinlichere Zustände übergehen und dadurch zwangsläufig andere Teile in wahrscheinlichere Zustände überführen. Hierdurch wird die Wahrscheinlichkeit des Gesamtsystems nach der Voraussetzung verringert, es ist also ein unwahrscheinlicher Vorgang. Ihm wird meistens der wahrscheinliche Vorgang der Rückkehr zum Normalzustand folgen, gelegentlich aber auch eine weitere Entfernung von ihm. Es wird sich dann eine solche durchschnittliche Abweichung vom Normalzustand ausbilden, daß sie erhalten bleibt, wenn die Anzahlen beider Arten von Vorgängen sich verhalten wie ihre Wahrscheinlichkeiten. Man bekommt so ein Hin- und Herpendeln um eine mittlere Lage, die man als Gleichgewichtslage bezeichnen könnte. Es ist aber kein Gleichgewicht der Kräfte, sondern der Wahrscheinlichkeiten. Es ist der Zustand größtmöglicher Systemlosigkeit, der besteht mangels einer regelnden Bedingung. In ihm einbegriffen sind auch die Abweichungen vom Normalen. Wählt man die Zeit als Abszisse und die Zustandswahrscheinlichkeit des Systems als Ordinate, so entsteht ein Bild, in dem die Horizontale der maximalen Wahrscheinlichkeit das Niveau bildet, unter das die Kurve in vielen übereinander gelagerten Spitzen abfällt, um immer wieder zu ihm aufzusteigen. Die kleinsten Spitzen kommen am häufigsten vor, je größer, um so seltener werden sie.

Die rückläufige Überlegung geht genau ebenso, nur daß es dann der unwahrscheinliche Vorgang ist, wenn sich der Normalzustand aus einem unwahrscheinlicheren bildet, und der wahrscheinliche, wenn letzterer Zustand aus dem normalen hervorgegangen ist. Es entsteht dann dasselbe Zustandsbild wie vorher. Nimmt man endlich einen Zustand geringerer als der maximalen Wahrscheinlichkeit als gegeben an, so bildet er eine Spitze, die sich aus dem Normalzustand entwickelt hat und in ihn wieder zurückkehrt. Ist die angenommene Abweichung klein, so bleibt sie ohne weiteres im Rahmen; ist sie erheblich, so haben wir eine Spitze, wie sie eventuell

nur in kosmischen Zeiten einmal auftreten kann; immerhin wird sie sich auch dann in das Bild des Gleichgewichts folgerichtig einfügen.

Das Bild, das die reine Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickelt: Zustand maximaler Wahrscheinlichkeit, von dem sich Spitzen der Unwahrscheinlichkeit absenken, entspricht genau dem thermodynamischen stabilen Gleichgewicht, einschließlich der Schwankungserscheinungen und des Verteilungsgesetzes. Stabil ist das Gleichgewicht auf Grund des zweiten Hauptsatzes, nach dem ein System wohl in das Gleichgewicht hinein, aber von selber nicht mehr aus ihm herauskommen kann. Das Gleichgewicht stellt sich aperiodisch ein, im Gegensatz zu Kräftegleichgewichten, die Schwingungen um die Ruhelage zulassen. Würde man, wogegen ein logischer Grund nicht vorliegt, den Hauptsatz umkehren, so müßte man das Gleichgewicht labil nennen, d. h. der Zustand muß in der Vergangenheit konstant gewesen sein, kann sich aber in der Zukunft in einen unwahrscheinlicheren verwandeln. Dieses Verhalten des thermodynamischen Gleichgewichtes bedeutet nichts anderes, als daß eine Unwahrscheinlichkeit aus dem Normalzustande entsteht und in ihn vergeht in einer Spitzenkurve, deren erster Ast dem zweiten Hauptsatz zuwider und deren zweiter ihm gemäß verläuft.

8. Als Anfang der Geltung des zweiten Hauptsatzes muß ein sehr unwahrscheinlicher Weltzustand gesetzt werden. Diese Annahme macht den Satz für die Folgezeit notwendig.

Das treibende Prinzip der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die mangelhafte Kenntnis des Gegenstandes, infolge deren mehrere Fälle als gleich möglich angesehen werden, von denen doch nur einer eintreten kann. Es entsteht dadurch eine unsichere Erwartung. Lerne ich den Gegenstand besser kennen, so kann ich die Voraussetzungen vermehren, ohne daß eine Überbestimmung eintritt. Die Erwartung wird dann korrigiert und verändert. Sie gewinnt an Sicherheit, ohne doch völlig gewiß zu werden. Die „reine“ Wahrscheinlichkeitsrechnung, die also keine zeitlichen Voraussetzungen hat, sondern nur eine zeitlose, daß nämlich die Einzelvorgänge reversibel sind, führt zu einem Grenzfall des zweiten Hauptsatzes. Es ist nun erlaubt, nach einer zeitlichen physikalischen Voraussetzung zu suchen, deren Hinzufügung das Resultat im Sinne des zweiten Hauptsatzes verändert. Es ist bereits festgestellt, daß der unwahrscheinlichste Zustand eines Systems als der gegebene auftritt, und daß die Zustandskurve in der Zeit, die auf den gegebenen Zustand folgt, als dem zweiten Hauptsatz gehorchend, erwartet werden muß. Je weiter die Zustandswahrscheinlichkeit von ihrem Maximum entfernt ist, um so sicherer geht diese Erwartung. Ist nun das System die Welt, oder der unserer Beobachtung zugängliche Teil derselben, und sollen alle beobachteten oder durch Rückschluß von der Wirkung auf die Ursache erschlossenen Vorgänge unter den zweiten Hauptsatz fallen, so muß in sehr ferner Vergangenheit ein sehr unwahrscheinlicher Zustand der Welt, resp. unserer Welt, als gegeben gesetzt werden. Dann ergibt sich daraus, daß wir uns auf dem zweiten Aste einer kosmischen Spitze der Unwahrscheinlichkeit befinden, daß also mit hoher Sicherheit und Allgemeinheit der zweite Hauptsatz gilt, und zwar vom Eintreten dieses vorausgesetzten Zustandes an. Bedenken wir, daß auch der jetzige Zustand der Welt eine Wahrscheinlichkeit besitzt, die ein undenkbar minimaler Bruchteil ihres Maximalwertes ist, und vernachlässigen wir dementsprechend die ganz geringe Unsicherheit, die noch in unserer Betrachtung liegt, so können wir sagen: Die ge-

machte Voraussetzung ist die hinreichende Bedingung für den zweiten Hauptsatz. Da wir aber den vorausgesetzten Zustand nur finden können durch Regreß aus der Gegenwart an Hand des zweiten Hauptsatzes, so ist der Zustand als Spezialfall des allgemeinen Gesetzes gegeben, und sein Fortfallen würde das ganze Gesetz umstoßen. Der gesetzte Anfangszustand ist also auch die notwendige Bedingung für den zweiten Hauptsatz. Ist nun eine Behauptung die notwendige und hinreichende Bedingung einer zweiten, so sind im allgemeinen beide nur verschiedene Ausdrücke für dieselbe Tatsache. Es fragt sich also, was mit der ganzen Ableitung gewonnen ist. Nun ist auf alle Fälle gezeigt, daß der zweite Hauptsatz überhaupt eine selbständige physikalische Tatsache und nicht ein rein mathematischer Aufbau aus reversiblen Elementen ist. Es könnte jedoch als beliebig erscheinen, ob man einen bestimmten Anfangszustand behaupten und aus ihm das Gesetz ableiten oder ob man einfacher gleich das Gesetz selber behaupten wollte. In Wirklichkeit besteht zwischen beiden ein Unterschied. Der Einzelfall ist unter dem allgemeinen Gesetz unmittelbar enthalten. Die Ableitung des allgemeinen Gesetzes aus dem einzelnen Fall benutzt aber die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Diese gibt auch aus einer sicheren Voraussetzung grundsätzlich nur eine ungewisse Folgerung. Der Inhalt der letzteren kann dafür über die erstere hinausgehen. Daß die Unsicherheit in diesem Falle äußerst gering ist, tut prinzipiell nichts zur Sache. In der Tat gibt das allgemeine Gesetz mehr als der einzelne Fall. Man kann sich das graphisch klarmachen. Die Abszisse stelle die Zeit

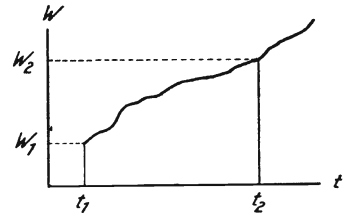


Fig. 1.

dar und es sei t_1 der Zeitpunkt des Anfangszustandes, t_2 der gegenwärtige Moment. Die Ordinate stelle die Zustandswahrscheinlichkeit dar, die analog mit W_1 und W_2 bezeichnet werde. Die Annahme eines sehr unwahrscheinlichen Anfangszustandes, der an Hand des zweiten Hauptsatzes gefunden wird, heißt dann: $W_1 < W_2$. Die Geltung des zweiten Hauptsatzes von t_1 an wird dargestellt durch: $\frac{dW}{dt} > 0$ für $t > t_1$. Die erste Ungleichung folgt aus der zweiten ohne weiteres. Aus der ersten Ungleichung folgt aber nur, daß zwischen t_1 und t_2 im Durchschnitt $\frac{dW}{dt} > 0$ ist, nicht aber, daß es dies in jedem einzelnen Punkt der Kurvenstrecke und auch über t_2 hinaus ist. Wenn aus der ersten Ungleichung die zweite doch abgeleitet wird durch Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, so liegt ein Fortschritt vor, der mit einer gewissen Unsicherheit erkaufte wird. Es wird also ein ganzer Ablauf von Zuständen von einem Zustand hergeleitet, und es braucht dazu keine Hypothese eingeführt werden, sondern die erklärende Tatsache steht als Teil des zu erklärenden, experimentell sichergestellten Gesetzes fest. Die Ableitung des zweiten Hauptsatzes aus der Setzung eines sehr unwahrscheinlichen Weltzustandes an den Anfang seines zeitlichen Geltungsbereiches erfüllt also alle Anforderungen einer wissenschaftlichen Erklärung.

Kehren wir zum Ausgangspunkt der Untersuchung zurück, so finden wir dort die Unterscheidung zwischen Differentialgleichung und Integrationsbedingung. Die Differentialgleichung bedeutet das allgemeine Gesetz, die Integrationsbedingung die Spezialisierung auf den einzelnen Fall. Es wurde anfangs festgestellt, daß die allgemeinen Naturgesetze der Kräfte keine Irreversibilität bedingen. Es wurde dann

zeigt, daß das Denkgesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit zeitlosen Begriffen arbeitet und ebenfalls keine Irreversibilität gibt. Daß die Naturvorgänge trotzdem nicht umkehrbar sind, kann also nur in dem vorliegenden Spezialfall begründet sein und muß durch eine Integrationsbedingung, eine Tatsache und nicht durch eine Differentialgleichung, ein Gesetz folgerichtig dargestellt werden. Der zweite Hauptsatz ist also kein selbständiges Gesetz, das zu den Kraftgesetzen hinzukommt, sondern deren Spezialisierung auf eine bestimmte Gruppe von Fällen, deren Gemeinsames eben die bestimmte Richtung ihres zeitlichen Verlaufes ist. Die einschränkende Bedingung ist das, was wirklich zu den Kraftgesetzen hinzukommt. Sie ist eine Wahrscheinlichkeitsbedingung, also ein gegebener unwahrscheinlicher Zustand und muß als Anfangsbedingung auftreten, um als ihre Konsequenz für die Folgezeit den zweiten Hauptsatz herauszubekommen.

9. Die Erklärung eines Vorgangs aus einer ihm vorangehenden Gelegenheitsursache ist eine Folge aus dem zweiten Hauptsatz.

Ein Einzelvorgang ist definiert durch das allgemeine Gesetz und die vollständige Integrationsbedingung. Diese kann gegeben werden durch Beschreibung der Lage und Bewegung in einem bestimmten Zeitpunkt. Welchen Zeitpunkt ich dafür wähle, ist gleichgültig, da ich auf alle Fälle den ganzen Vorgang damit eindeutig festlege. Ich kann als Bedingung also nach Belieben einen Anfangs-, Durchgangs- oder Endzustand wählen, durch den ich dann jeden anderen Zustand bestimme. Die verschiedenen Zustände bedingen einander daher gegenseitig notwendig und sind infolgedessen in Verbindung mit dem allgemeinen Veränderungsgesetz miteinander identisch.

Bei einem zusammengesetzten Vorgang ist die Integrationsbedingung unvollständig bekannt. Nun gehen von einem Zustand 2 die meisten möglichen Wege zum wahrscheinlicheren Zustand 3 und ein geringer Teil zum unwahrscheinlicheren 1. Von 3 gehen verhältnismäßig wenig Wege zu 2, aber die meisten zum noch wahrscheinlicheren Zustand 4. Liegen die Zahlenverhältnisse so, daß man die Zahl der Wege 2—1 gegen 2—3 und andererseits 2—3 gegen 4—3 vernachlässigen kann, so läßt sich mit ziemlicher Sicherheit sagen, daß 2 von 3 als Nachbarzustand begleitet wird, aber von 3 aus läßt sich 2 nicht erwarten, wenn es nicht durch Beobachtung festgestellt ist. Der unwahrscheinlichere Zustand ist also die fast hinreichende Bedingung und der wahrscheinliche das fast notwendig Bedingte, weil die Wege vom ersteren her unter die Wege zum letzteren hin subsumiert werden. Bei der Veränderung eines nicht genau bekannten Systems gibt es also einen Zustand, der so genau definiert ist, daß fast alle von ihm ausgehenden Wege sich subsumieren lassen unter die Wege, die in die anderen Zustände des Vorgangs einlaufen. Dieser Zustand ist also der günstigste Punkt, um den ganzen Vorgang zu beschreiben. Bei Benutzung unvollständiger Integrationsbedingungen und deren Ergänzung durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist also nicht jeder Zustand eines Vorgangs gleichberechtigt, sondern der Vorgang läßt sich nur von dem einen Punkte aus richtig übersehen, in welchem das System den unwahrscheinlichsten Zustand besitzt. Man nennt die einseitige Herleitung eines Vorgangs aus den definierenden Bedingungen dieses Zustandes die Erklärung des Vorgangs aus dem Zustande, im Gegensatz zur Beschreibung eines völlig eindeutigen Vorgangs aus einem beliebigen seiner Zustände.

Bisher war von der Zeitrichtung nicht die Rede. Gilt nun der zweite Hauptsatz, so muß der unwahrscheinlichere dem wahrscheinlicheren Zustande, also die (fast) hinreichende Bedingung dem (fast) notwendig Bedingten vorangehen. Es ist aber die Bedingung, die dem Bedingten vorangeht, die Gelegenheitsursache (*causa occasionalis*) und das folgende Bedingte die Wirkung. Die *causa efficiens* ist die im allgemeinen Gesetz dargestellte Kraft. Würde die Umkehrung des Hauptsatzes gelten, so würde die Bedingung dem Bedingten folgen, und man könnte von „Zweck“ und „Mittel“ sprechen, wobei aber nicht an einen Willensakt gedacht werden soll, wie er gewöhnlich mit diesen Worten verbunden wird. Bezeichnet man das Operieren mit Gelegenheitsursache oder Zweck als *causales resp. teleologisches Denken*, so zwingt die Gültigkeit des zweiten Hauptsatzes dazu, auf unvollständig bekannte Vorgänge das kausale Denken anzuwenden, während der umgekehrte Satz eine teleologische Naturbetrachtung benötigen würde. Für völlig bestimmte Vorgänge haben beide Methoden kein Vorrecht. Hier ist der Platz für das Denken, das in der Wahl der Bedingung völlig zeitfrei ist, und das man das konditionale nennen kann.

Nach Kant ist der Schematismus für die Anwendung der rein verstandesmäßigen Kategorie der Ursache, die ohne ihn nur Bedingung bleibt, auf die Erscheinungen die Konstruktion der Zeitrichtung. Dabei würde also a priori der zweite Hauptsatz gleich mitkonstruiert werden. Nun ist rein verstandesmäßig auch dessen Umkehrung, und damit die umgekehrte Zeitrichtungskonstruktion denkbar. Sie wird sogar tatsächlich in einigen Fällen angewendet, nämlich bei Willenshandlungen. Es ist also die Auswahl zwischen kausalem und teleologischem Denken nicht eine aprioristische, sondern eine empirische. In der Tat würde, wenn es anders wäre, eine Überbestimmung eintreten. Die Zeit wird nicht vollständig durch den Verstand in die Erscheinungen hineingetragen, sondern ist in gewisser Weise bereits in ihren rein ästhetischen Elementen, den Empfindungen enthalten. Die Gegenwart ist unmittelbar, die Vergangenheit als Erinnerung vorhanden, und zwar einschließlich der Reihenfolge der erinnerten Empfindungen, die Zukunft dagegen überhaupt nicht. Hierdurch ist die Zeitrichtung in den Empfindungen festgelegt. Nun ist zwar die „Empfindungszeit“ von der „Anschauungszeit“ auseinanderzuhalten, weil die Ablaufsrichtung eines Vorgangs nicht mit seiner Betrachtungsrichtung zusammenfällt. Aber es geht doch nicht an, daß sie sich auf die Dauer entgegenlaufen. Wird also die Zeitrichtung durch den Kausalschematismus unabhängig nochmal bestimmt, so kann das nur ein Versuch sein, dessen Richtigkeit durch die sinngemäße Übereinstimmung der so erhaltenen Zeitrichtung mit der Empfindungszeit bestätigt wird.

Das kausale und konditionale Denken beruhen auf den Prinzipien der Subsumption und Identifikation. Beides sind rein analytische Operationen. Das kausale Denken benutzt noch eine empirische Regel, daß die erklärende Bedingung für den ganzen Weltablauf und damit für alle Teilvorgänge am Anfang steht. Der Begriff der Gelegenheitsursache ist also teils analytisch, teils empirisch und vollzieht keine primäre verstandesmäßige Synthese. Die Synthese besteht vielmehr in der Anerkennung, daß jede Veränderung durch allgemeingültige Gesetze streng geregelt ist, und in der Aufstellung solcher Gesetze. Diese stellen den zweiten Differentialquotienten des Ortes nach der Zeit als eine nur von den örtlichen Verhältnissen abhängige und nur durch sie, aber nicht direkt mit der Zeit variable Größe dar. Die Gesetze geben also nicht das Vorzeichen, wohl aber die Größe von Zeitintervallen. Durch sie wird die Zeit aus einer intensiven Empfindungsgröße in eine

extensive, Maß und Zahl zugängliche Größe verwandelt. Sie sind deshalb zur aprioristischen Konstruktion der Zeitgröße brauchbar. Ob freilich jede vorstellbare Kombination von Elementarempfindungen mit ihren Lokal- und Zeitzeichen eine solche allgemeingültige Konstruktion ermöglicht, oder ob letztere schon eine gewisse primäre Ordnung ihrer Elemente voraussetzt, ist eine andere Frage, die mit den hier vorgetragenen Gedanken nichts zu tun hat. Hierin liegt das wahre Kausalitätsproblem, das sich nicht auf die *causa occasionalis*, sondern auf die *causa efficiens* bezieht. Der Begriff der *causa occasionalis* dagegen geht im Falle eines genau definierten Vorgangs in eine zeitlich nicht beschränkte Bedingung über, den Minor eines logischen Schlusses, dessen Major die *causa efficiens* ist. Für einen nicht genau festgelegten Vorgang ist der Minor nicht genügend für einen bindenden Schluß, da die Zeitrichtung offen bleibt. Hierüber entscheidet als weitere allgemeine empirische Voraussetzung der zweite Hauptsatz. Der läßt sich aber zurückführen auf einen Einzelfall, auf die Voraussetzung einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsbedingung für einen Zeitpunkt, nämlich den Anfang des uns zugänglichen Weltablaufs. Dies ist die genügende Ergänzung des Minor, und alles andere ergibt sich rein syllogistisch-analytisch. Eine Synthese liegt also nur in der Bildung des Major, des allgemeinen Kraftgesetzes.

Es wird häufig die Forderung aufgestellt, daß die kausale Naturbetrachtung, die einen Vorgang aus seiner Ursache erklärt, der konditionalen zu weichen habe, die ihn durch Differentialgleichung und Integrationsbedingung beschreibt. Der zweite Hauptsatz sagt nichts über die Zeitgröße, sondern nur über die Zeitrichtung aus. Daher kann eine kausale Erklärung nur die Richtung eines Vorganges, aber keine Reaktionsgeschwindigkeit geben. Die konditionale Beschreibung dagegen gibt auch die Zeitgröße in strenger Abhängigkeit von den anderen Variablen. Das strengere konditionale Verfahren ist daher dem oberflächlicheren kausalen überall da vorzuziehen, wo sich ein Vorgang wirklich genau definieren läßt. Hierin liegt aber die enge Grenze für die Berechtigung der Forderung. Das kausale Verfahren behält jedoch nach wie vor seine Berechtigung, insofern in die Darstellung eines Vorgangs der zweite Hauptsatz eingeht.

Fortsetzung folgt.

Beobachtungen über die Spitzenentladung in Stickstoff.

Nach gemeinsam mit E. Lax angestellten Versuchen.

Von

M. Pirani.

Mit 11 Textfiguren.

Mitteilung aus dem Laboratorium des früheren Glühlampenwerkes von Siemens & Halske A. G.

1. Fragestellung und Zweck der Versuche.

Die Prüfung des Reinheitsgrades chemisch indifferenten Gase, z. B. des Stickstoffs und der Edelgase, bietet sowohl chemischen wie physikalischen Untersuchungen große Schwierigkeiten. Die hohen Anforderungen, welche zuweilen bei der technischen Verwendung dieser Gase an ihre Reinheit gestellt werden müssen, gaben Veranlassung dazu, nach einem Kriterium zu suchen, welches die Anwesenheit von Verunreinigungen mit größerer Sicherheit, als dies bisher möglich gewesen ist, nachzuweisen imstande ist.

So war es z. B. erwünscht, Sauerstoff- und Wasserdampfspuren von einigen Tausendstel Prozent sicher erkennen und ihre Einwirkung wenn möglich meßbar verfolgen zu können.

Aus der Reihe der indifferenten Gase wurde zum Objekt der vorliegenden Untersuchung der Stickstoff gewählt, weil seine Herstellung die wenigsten Schwierigkeiten bietet, die Resultate daher der Nachprüfung am leichtesten zugänglich sind, und ferner auch, weil er in der älteren Literatur¹⁾ am häufigsten behandelt wurde, so daß auf die bis jetzt vorliegenden Ergebnisse Bezug genommen werden kann. Eine Übertragung der Versuchsergebnisse auf die Edelgase ist ohne erhebliche Abänderungen möglich.

2. Die Arbeits-Hypothese.

Die theoretische Grundlage der im folgenden beschriebenen Methode bildeten die von Franck und Hertz²⁾ entwickelten Anschauungen über die Zusammenstöße zwischen Gasmolekülen und Elektronen, die diese Forscher in zahlreichen Arbeiten niedergelegt haben. Die besondere Anwendung dieser Anschauung auf die vorliegenden Untersuchungen ist zum Teil in den zitierten Arbeiten noch nicht enthalten und wurde dem Verfasser durch persönliche Mitteilungen des Herrn Franck bekannt. Sie sei mit freundlicher Erlaubnis des Herrn Franck hier kurz wiedergegeben, soweit sie als Arbeitshypothese für diese Versuche gedient hat und zur Deutung dieser Versuche herangezogen worden ist.

Nehmen wir an, daß sich in einem Gas ohne Elektronenaffinität einige freie

¹⁾ Warburg, Ann. d. Phys. **2**, 295 (1900).

²⁾ Vgl. zusammenfassende Arbeit: J. Franck und G. Hertz, Phys. Zeitschr. **17**, 409, 430 (1916).

Elektronen befinden, so wird bei Anlegung einer Potentialdifferenz eine Bewegung der Elektronen vom negativen nach dem positiven Pol hin einsetzen.

Wegen der mangelnden Elektronenaffinität stoßen die Elektronen dann mit dem Gasmolekül völlig elastisch zusammen und nehmen die zur Ionisation benötigte Energie allmählich nach vielen Zusammenstößen aus dem beschleunigenden Felde auf.

Da die bei der Ionisation gebildeten Elektronen ihrerseits auch wieder als Ionisatoren wirken, so tritt eine so starke Vermehrung von Elektronen und Ionen ein, daß die beobachtete Stromstärke auf einen hohen Wert gelangen kann.

Wird jetzt ein Gas mit Elektronenaffinität beigemischt, so werden unter der großen Zahl der Zusammenstöße einige unelastische, nämlich die mit den elektroaffinen Gasmolekülen sein. Dadurch wird bedingt, daß die Elektronen die zur Ionisation nötige Energie nicht mehr erlangen, infolgedessen wird der Ionisierungsstrom und damit die beobachtete Stromstärke sehr wesentlich herabgedrückt.

Um einen dauernden Strom aufrecht erhalten zu können, müssen immer einige wenige Elektronen an oder in der Nähe der negativen Elektrode nachgeliefert werden, die dann ihrerseits in der geschilderten Weise Stoßionisation und dadurch Strom hervorrufen.

Die Nachlieferung der wenigen auslösenden Elektronen an oder in der Nähe der Elektrode wird, wie Townsend gezeigt hat, durch die positiven Ionen bedingt.

Nach Arbeiten, welche von E. von Bahr und J. Franck¹⁾ veröffentlicht wurden, und anderen Arbeiten von J. Franck, welche noch im Gange sind, hängt aber die ionisierende Wirkung positiver Ionen sehr wesentlich von ihrer chemischen Natur ab, und zwar so, daß positive Ionen inerten Gase eine sehr kleine ionisierende Kraft besitzen, während von Gasen mit Elektronenaffinität bei gleicher kinetischer Energie eine viel stärkere Ionisierungswirkung hervorgerufen wird.

Bei ganz reinen Gasen wird also infolgedessen zwar jedes in der Nähe der Spitze gebildete Elektron eine sehr starke Ionisation hervorrufen können, es werden jedoch so selten Elektronen in der Nähe der Spitze erzeugt, daß dies zu unregelmäßig einsetzenden Stromstößen führen muß resp. bei schnellen Einzelschwankungen zu einer Abschwächung des Stromes.

Dagegen ergibt sich, daß ganz kleine Verunreinigungen elektronegativer Natur, wie z. B. Sauerstoff, Stickoxyde, Wasser u. dgl. zu einer Verstärkung des Stromes führen, denn durch sie wird erst die nötige Nachlieferung von Elektronen an der Kathode gewährleistet.

Es ist nun nicht möglich, in einem Gase dauernd einen genau definierten Zustand, wie er bei dieser Überlegung vorausgesetzt ist, zu erhalten. Vielmehr wird man überall da, wo stark verdünnte chemisch nicht indifferente Beimengungen in Betracht kommen, langsam verlaufende chemische Reaktionen erwarten müssen. Dadurch werden sich zeitliche Veränderungen der Stromstärken ergeben; die Art derselben wird von dem Wesen der chemischen Reaktion abhängen.

Mit anderen Worten werden wir je nach der ursprünglichen Reinheit des Gases die für konstante Zustände soeben besprochenen Möglichkeiten in zeitlicher Aufeinanderfolge beobachten können.

Gehen wir z. B. von einem reinen Gas aus, so werden beim Stromdurchgang durch Erwärmung o. dgl. affine Verunreinigungen freigemacht, es wird also die Strom-

¹⁾ Verh. d. Phys. Ges. **16**, 57 (1914).

stärke mit der Zeit zunächst anwachsen. Ist das „Verunreinigungsoptimum“ überschritten, so wird sie wieder abfallen.

Umgekehrt kann auch der Fall eintreten, daß aus der ursprünglichen geringen Verunreinigung (z. B. Sauerstoff) durch chemische Reaktion mit dem umgebenden Gas eine neue sehr viel stärker elektronegativ wirkende entsteht (z. B. Stickoxyde); dann wird die Stromstärke zunächst abfallen. Wird aber nun die entstehende Verunreinigung ganz oder zum größten Teil z. B. durch die Elektroden aufgenommen, so wird die Stromstärke später wieder ansteigen.

3. Die Versuche.

Die skizzierten Arbeitshypothesen dienten als Leitgedanken bei den im folgenden beschriebenen Versuchen:

Als elektro-positives Gas wurde, wie bereits in der Einleitung erwähnt, reiner Stickstoff verwendet, als elektro-negative Beimengungen O_2 und H_2O untersucht. Als Elektronenquelle wurde die Entladung aus einer Spitze gewählt.

Die Spitzenentladung in Stickstoff hat bereits Warburg¹⁾ untersucht und gefunden, daß die Spitzenstromstärke einer negativ geladenen Spitze durch einen geringen Sauerstoffgehalt des Stickstoffs auf geringe Bruchteile ihres ursprünglichen Wertes geschwächt wird.

Über die Grenze der Empfindlichkeit und den quantitativen Zusammenhang zwischen der Schwächung des Spitzenstromes und der Größe und Art der Beimengungen liegen bisher keine Angaben vor.

Nach mancherlei Vorversuchen²⁾, welche erkennen ließen, daß die Methode im Prinzip geeignet sei, die in sie gesetzten Hoffnungen zu erfüllen, wurde die folgende Anordnung gewählt, bei deren Ausbau in erster Linie das Bestreben maßgebend war, den gedachten Zweck mit möglichst einfachen technischen Mitteln zu erreichen.

In einer zwei Liter fassenden Glaskugel waren im Abstand von 50 mm ein Aluminiumteller P und eine Molybdänspitze Sp , beide mit Stromzuführungen, Pt -einschmelzungen, angebracht (Fig. 1). Der Teller hatte einen Durchmesser von 30 mm und war vor Einbringung in den Kugelrezipienten sorgfältig gereinigt. Die Spitze war aus 2 mm dicken Molybdändraht durch abwechselndes elektrolytisches Ätzen in Natronlauge und Salzsäure hergestellt. Als Spannungsquelle konnte ein Wechselstromhochspannungstransformator dienen, da bei der gewählten Anordnung eine gleichrichtende Wirkung der Spitze eintreten mußte³⁾. Auf die Kurvenform des Wechselstroms brauchte keine Rücksicht genommen zu werden, da es sich nur um relative Messungen handelte. Es wurde ein Meßtransformator angewandt, der mit 90—110 Volt Wechselspannung von 50 Perioden betrieben wurde und ein

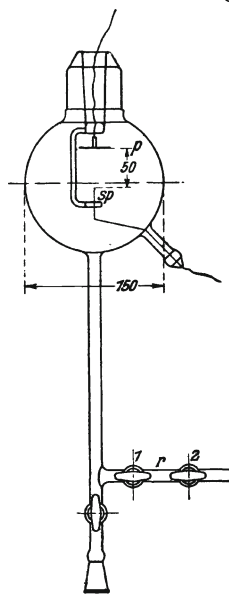


Fig. 1.

¹⁾ Ann. d. Phys. **2**, 295 (1900).

²⁾ U. a. wurde festgestellt, daß die Beobachtung des früher häufig als charakteristisch betrachteten „Minimum“-Potentials für den in Frage kommenden Zweck bei weitem nicht die genügende Empfindlichkeit lieferte. Lit. P. Ewers, Ann. d. Phys. **17**, 781 (1905).

³⁾ P. Ewers, Ann. d. Phys. **17**, 781 (1905).

Übersetzungsverhältnis von 48 hatte, so daß Spannungen von 4320—5300 Volt benutzt wurden. Bis auf wenige Ausnahmen wurden alle Kurven mit 4320 Volt effektiver Sekundärspannung aufgenommen. Der Aluminiumteller *P* war stets geerdet. Der durch die Spitze *Sp* gleichgerichtete Strom wurde mit einem Drehspulengalvanometer *G* (Siemens & Halske) von einer Empfindlichkeit von $3 \cdot 10^{-7}$ Ampere gemessen. Durch geeigneten Nebenschluß konnte das Instrument schnell für andere Meßbereiche bis $1 \cdot 10^{-3}$ Ampere eingestellt werden. (Schaltungsskizze Fig. 2.) An dem Kugelrezipienten war unten ein Rohr angeschmolzen, durch das das Auspumpen und Füllen mit dem Untersuchungsgase vorgenommen wurde. Um die gewünschten Beimengungen hinzuzufügen, wurden an das Rohr seitlich verschiedene Ansätze angeschmolzen.

Für Sauerstoff bestand der Ansatz aus einem am Ende offenen Rohr, in dem zwei mit gasfreiem Gummifett geschmierte Glashähne eingesetzt waren. Die Füllung geschah nun so, daß der am Rezipienten sitzende Hahn während des Auspumpens geöffnet war, dann geschlossen wurde, und der Hahnzwischenraum mit Luft gefüllt wurde. Nach Schließen des äußeren Hahnes wurde die im Hahnzwischenraum *r* sich befindende Luft in den evakuierten Rezipienten eingelassen.

Für Wasserdampf war ein Ansatzrohr mit einem Dreiweghahn, der einerseits einen kleinen zugeschmolzenen Glasansatz von gemessenem Volumen (inklusive der Hahnwege) und andererseits eine kleine Kugel zur Aufnahme des Wassers trug, angeschmolzen. Auch hier wurde nach Evakuieren des Rezipienten das bekannte Volumen mit Wasserdampf bei Abschluß vom Rezipienten gefüllt, und

dann hineingelassen. Vorher war das Wasser selbst möglichst durch Auspumpen von Gasen befreit.

Es wurde stets mit zwei Rezipienten gleichzeitig gearbeitet, einmal um durch doppelte Versuche die Befunde zu erhärten, und zweitens um den Einfluß der Spitzenbeschaffenheit möglichst auszuschalten. Außerdem wurden bei Wiederholungen der Versuchsreihe andere Rezipienten verwendet; so sind manche Reihen mit fünf verschiedenen Spitzen nachgeprüft.

Wohl in Anbetracht des großen Einflusses der Spitzenform, die schon von Precht¹⁾ festgestellt und untersucht worden ist, waren die Ergebnisse für verschiedene Rezipienten im einzelnen recht unterschiedlich, doch stets von gleicher Charakteristik.²⁾ Waren zwei Rezipienten mehrmals nebeneinander benutzt, so war immer eine Umrechnung aufeinander möglich. — Es muß noch erwähnt werden, daß die Verunreinigungen, vor allem Wasserdampf, die Spitze und den Teller mit der Zeit durch chemische Einwirkung so stark veränderten, daß es nötig war, die Rezipienten durch andere zu ersetzen. Das Unbrauchbarwerden eines Rezipienten konnte durch Auf-

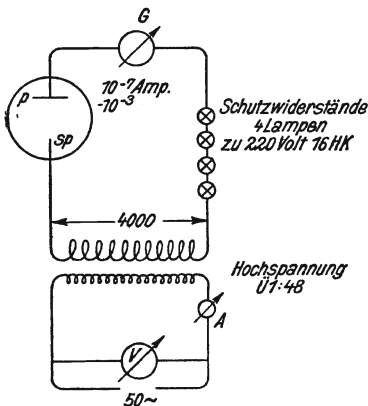


Fig. 2.

¹⁾ Precht, Wied. Ann. 41 (1893).

²⁾ Die Spitze wurde vor dem Einsetzen mikroskopisch untersucht und solche Exemplare ausgewählt, welche sehr schlank, aber am Ende ganz wenig abgerundet waren, da es sich herausstellte, daß ganz scharfe Spitzen eine unregelmäßig schwankende Entladungsstromstärke ergaben.

nahme von Strom-Zeitkurven stets erkannt werden (s. w. u.). Da stets nur relative Werte als maßgebend betrachtet worden sind, sind diese Schwankungen der Beschaffenheit ohne Bedeutung.

Der Gang der Untersuchungen war meist folgender: Es wurden am Morgen die Rezipienten unter Evakuieren bis auf $\frac{1}{1000}$ mm Quecksilberdruck durch Überstülpen einer Heizkappe eine Stunde lang auf 350°C erwärmt. Nach Abkühlung wurde der zur Ölpumpe führende Hahn geschlossen und das Füllgas eingelassen. Es wurden dann bis zu 7 Messungen am Tage ohne erneutes Erwärmen ausgeführt. Zwischen jeder Messung wurde sorgfältigst evakuiert, — das dabei erreichte Vakuum war stets besser als $\frac{1}{1000}$ mm Hg, es wurde am McLeod abgelesen — und dann mit reinem Stickstoff gespült und erneut hochevakuiert. Es war besonders darauf zu achten, daß bei hohem Vakuum noch einige Minuten gepumpt wurde, da sich erst dann für die nächste Untersuchung einwandfreie Resultate erzielen ließen. Unterblieb das längere Hochpumpen, so war die Strom-Zeitkurve verändert, und zwar setzte sie dann meist mit zu hohen Werten ein.

Bei der Spitzenentladung wurde für die Untersuchungen stets als Druck des Füllgases 700 mm Hg gewählt.

Für die Messung der hinzugefügten Sauerstoffmengen sei noch erwähnt, daß der gesamte an die Pumpe angeschlossene Glasrezipient anfänglich mit diesen Gasen gefüllt wurde. Ihr Druck konnte am McLeod bis 0,57 mm Hg oder am Hg-Barometer abgelesen werden. Für Werte zwischen 0,57 mm Hg und 10 mm Hg wurde zwecks Erzielung größerer Genauigkeit immer bis ca. 10 mm Hg eingelassen und dann später das Füllgas auf den gewünschten Gehalt verdünnt. War der Druck der Gasbeimengung bestimmt, so wurde unter Schließung des Rezipientenhahnes der übrige Teil des Glasapparates erneut evakuiert, dann mit N_2 gefüllt und der Hahn des Rezipienten geöffnet und auf 700 mm Hg-Druck aufgefüllt. Auf diese Weise war es möglich, genau bestimmte Mengen fremder Gase zuzufügen. War die Füllung beendet, so wurde die Veränderung des Spitzenstromes mit der Zeit bei einer Spitzenspannung von 4320 Volt (im folgenden kurz Stromzeitkurve genannt) aufgenommen. Die Ablesungen erfolgten dabei je nach der Krümmung der Kurve alle 10—180 Sekunden. Die Primärspannung am Transformator wurde dabei dauernd reguliert. Die Zeit, während der die Spitzenentladung einer Füllung beobachtet wurde, schwankte zwischen 30—120 Minuten, der Versuch wurde stets dann unterbrochen, wenn ein gleichmäßiger Gang erreicht zu sein schien.

Um die Genauigkeit der Messungen festzustellen, ist ein kurzer Blick auf die Fehlerquellen zu werfen. Der Ablesungsfehler am Galvanometer konnte höchstens 1% betragen und wird durch die Aufnahme vieler Kurvenpunkte bedeutend verringert, aus gleichem Grunde fällt auch der durch die Spannungsschwankungen der Primärleitung bedingte Fehler nicht ins Gewicht. Spannungsänderungen von 2%, wie sie häufig plötzlich auftraten, bedingten hier bei 90 Volt primär eine Stromänderung von 8%. Druckschwankungen, wie sie durch Ablesungsfehler beim Füllen entstehen, sind gänzlich bedeutungslos; bei 0,5% Druckvermehrung oder Verminderung liegt, wie festgestellt wurde, die Stromänderung innerhalb der Ablesungsgenauigkeit. Auch Temperaturschwankungen von $2\text{—}3^{\circ}\text{C}$, wie sie im Versuchsraum im Laufe des Tages vorkamen, haben nie einen feststellbaren Gang in die Untersuchungen gebracht. Stets zeigte es sich, daß die durch Temperaturveränderungen bewirkten Unterschiede kleiner waren, als die durch Vorhandensein minimaler Verunreinigungen im Gas bedingten.

Der im folgenden verwandte reine Stickstoff wurde aus käuflichem Bombenstickstoff (gewonnen durch Fraktionierung von flüssiger Luft) durch Absorption

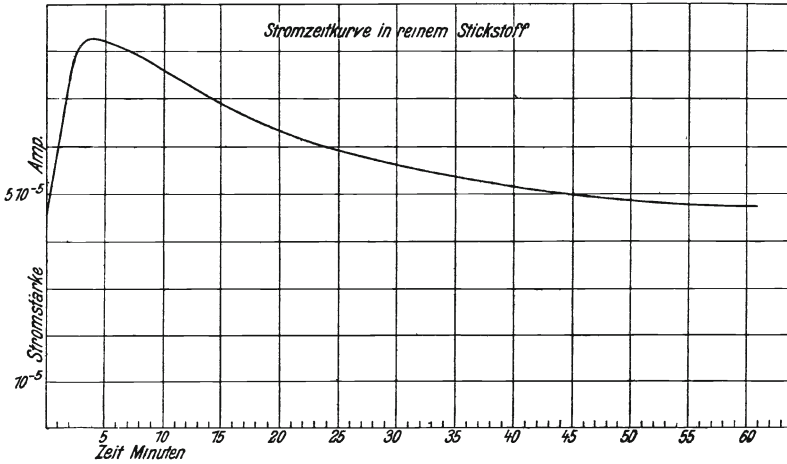


Fig. 3.

des Sauerstoffs in der üblichen Weise und nachfolgender sorgfältiger Trocknung durch Chlorcalcium und Phosphorsäure hergestellt. Zur Beseitigung der letzten

Spuren von Sauerstoff und Wasserdampf wurde das Gas vor dem Einlassen in den Versuchsrezipienten durch einen auf etwa 1000° erhitzten Röhrenofen geleitet, in welchem eine etwa 40 cm lange Schicht von fein verteiltem, vorher vollständig entgastem Tantalmetall lag.

Solcher Stickstoff ergab unter den beschriebenen Versuchsbedingungen (Konstante Wechselspannung von 4320 Volt, 700 mm Hg-Druck), eine in den ersten drei Minuten bis zu einem Maximum ansteigende Kurve, welche dann nach längerem Durchgang der Entladung eine mehr oder weniger starke Senkung zeigte. Die beschriebene und in Fig. 3 dargestellte Form ergab sich bei den angestellten Versuchen unabhängig vom verwendeten Rezipienten, jedoch waren die absoluten Werte der Stromstärke bei den verschiedenen Rezipienten ungleich und standen z. B. im äußersten Fall im Verhältnis 3 : 2. Als ein mittlerer Wert für

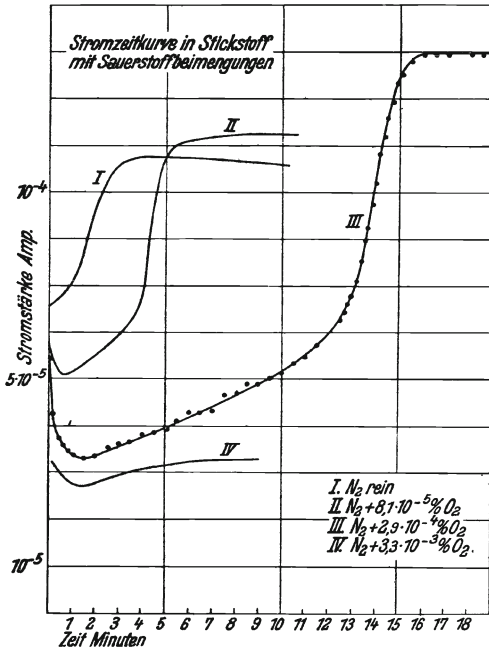


Fig. 4.

die Stromstärke in reinem Stickstoff konnte 10^{-4} Ampere angesehen werden. Um die Spitze war bei dieser Stromstärke ein einige Zehntel Millimeter dicker Dunkelraum zu sehen, welchem ein violetter Saum folgte, von dem kleine Büschelentladungen ausgingen.

Wurde dem Stickstoff in der oben beschriebenen Weise Sauerstoff durch Zulassen von Luft beigemischt, so zog sich die Entladung bei wachsendem Sauerstoffgehalt in einen immer kleiner werdenden Punkt zusammen, der schließlich nur noch mit der Lupe wahrgenommen werden konnte. Es ergaben sich Kurven von der Gestalt der in Fig. 4 dargestellten¹⁾. Der Sauerstoffgehalt des Füllgases, welcher zu den einzelnen Kurven gehört, ist auf der Figur angegeben. Sieht man aus dieser Figur bereits, daß Sauerstoffbeimengungen von $10^{-4}\%$ im Stickstoff mit Sicherheit erkannt werden können, so reizt die nähere Betrachtung der Kurve auch noch zu weitergehenden quantitativen Schlüssen: Die Form der Kurve ist in folgenden Punkten charakteristisch:

1. Mit wachsendem Sauerstoffgehalt wird die Minimumstromstärke immer kleiner.

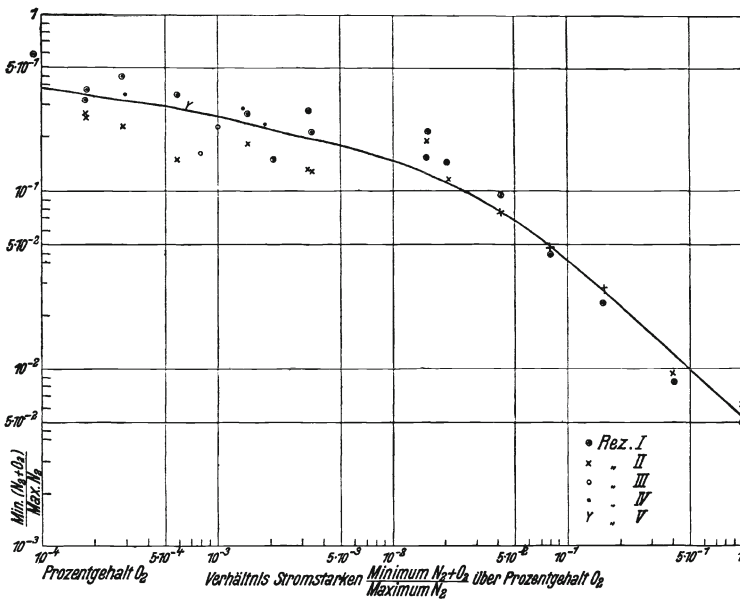


Fig. 5.

2. Der auf der Kurve mit kleinerem Sauerstoffgehalt nach einiger Zeit beobachtete Anstieg erfolgt zu immer späteren Zeiten.

3. Die Größe der Maximumstromstärke hängt irgendwie mit dem Sauerstoffgehalt zusammen.

Um diesen Zusammenhang zu prüfen, wurde eine große Reihe von Versuchen im Intervall 10^{-4} — $10^{-2}\%$ ausgeführt. Einzelne Versuche reichten auch bis $5 \cdot 10^{-5}$, doch hatte es nicht viel Zweck mit den Beimengungen weiter herunterzugehen, da mit den angewandten experimentellen Mitteln unabsichtliche Verunreinigungen dieser Größenordnung schon kaum vermeidlich waren.

Das vorher für die Entladungskurve in reinem Stickstoff Gesagte gilt auch hier: Verschiedene Rezipienten gaben gleiche Charakteristiken, aber verschiedene absolute Stromstärke und auch verschiedene Anstiegszeiten. Um trotzdem verschiedene Rezipienten aufeinander beziehen zu können, und überall die Resultate

¹⁾ In eine der Kurven sind die Beobachtungspunkte mit eingezeichnet.

miteinander vergleichbar zu gestalten, wurde das Minimum der Stromstärke i bei verschiedenen Sauerstoffzusätzen auf das Maximum der dazugehörigen vorher beobachteten Kurve für reinen Stickstoff J bezogen, und das Verhältnis $\frac{i}{J}$ über dem prozentualen Sauerstoffgehalt aufgetragen. Da sich die Variablen über mehrere Zehner-Potenzen erstrecken, ist die logarithmische Teilung gewählt. Es ergaben sich dann eine Anzahl von Punkten, welchen ein Kurvenzug (Fig. 5) zugeordnet wurde, aus diesem kann rückwärts bei irgendwelchen Beobachtungen auf die Größenordnung des Sauerstoffgehaltes geschlossen werden, wenn für die betreffenden Rezi-

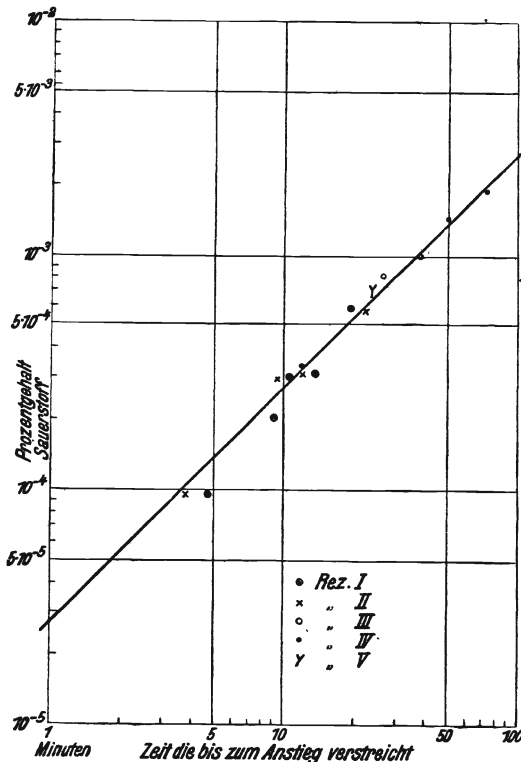


Fig. 6.

pien nur der Maximumwert für reinen Stickstoff bekannt ist. Die große Streuung, welche die Punkte gegenüber der Kurve aufweisen, hat ihren Grund darin, daß sie sich nicht überall auf denselben gereinigten Stickstoff beziehen, sondern daß bei jeder der teilweise zeitlich weit auseinanderliegenden Versuchsreihe anderer Stickstoff verwendet wurde, und daß sich erklärlicherweise sonst unmerkliche Unterschiede in der Reinheit im vorliegenden Falle ganz besonders stark ausprägen.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung der zweiten Eigenheit, welche die Stromzeitkurven der Spitzenentladung mit Sauerstoffbeimengung aufweisen, dem steilen Anstieg nach einer gewissen Zeit. Es handelt sich hier offenbar um eine allmähliche Verzehrung des Sauerstoffs, vielleicht durch Bildung von Stickstoffoxyden, welche ihrerseits durch die Molybdänspitze oder andere oxydierbare Teile gebunden oder anderweitig absorbiert werden. Dies erfolgt offenbar nicht ganz quantitativ, und

es bleiben wahrscheinlich äußerst geringe Spuren von Sauerstoff zurück, welche ein Anwachsen der Spitzenstromstärke über den normalen Wert bewirken, wie dies den Franckschen Vorstellungen entspricht¹⁾. Die Beimengung, bei welcher die höchste Steigerung beobachtet wurde, war etwa $5 \cdot 10^{-4} \%$. Tragen wir die Zeiten vom Einsetzen der Entladung bis zum steilen Anstieg, die wir vielleicht willkürlich Reaktionszeiten nennen wollen, in Abhängigkeit von dem Sauerstoffzusatz auf, so erhalten wir die Kurve Fig. 6, in welcher alle Beobachtungen an fünf verschiedenen Apparaturen dadurch vereinigt werden, daß die Reaktionszeiten bei einem Stickstoffzusatz von $8 \cdot 10^{-4} \%$, gleich einer willkürlichen (29 Minuten)

¹⁾ Wenn in der Kurve der Minima diese Strom befördernde Bildung geringer Reste nicht gefunden würde, so liegt dies wahrscheinlich daran, daß die untersuchten Beimengungen schon zu groß waren.

Einheit gesetzt wurden. Über $2 \cdot 10^{-3} \%$ konnte ein Anstieg nicht mehr beobachtet werden, da die Reaktion schließlich offenbar nicht mehr stattfand, bzw. die Beobachtungszeiten sich zu lang ausdehnten.

Im übrigen war es gerade das Gebiet der geringen Beimengung, welches in erster Linie interessierte, um so mehr, als ja die Darstellung der Minima gerade in diesem Bereich eine geringere Genauigkeit besitzt.

Die Darstellung ergibt, wenn man den Prozentgehalt und diese Zeit logarithmisch aufträgt, eine Gerade, und die Auswertung ergibt eine Gleichung von der Form

$$R = B v^n.$$

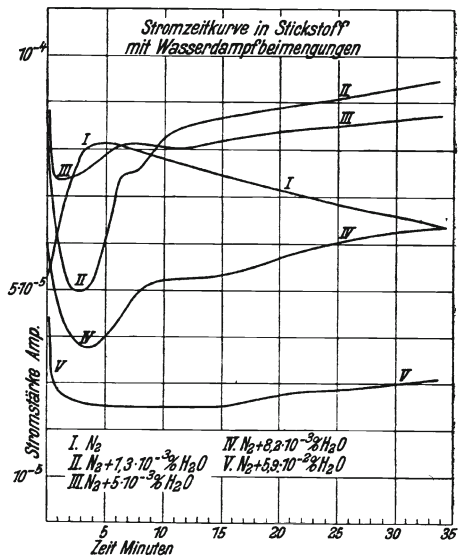
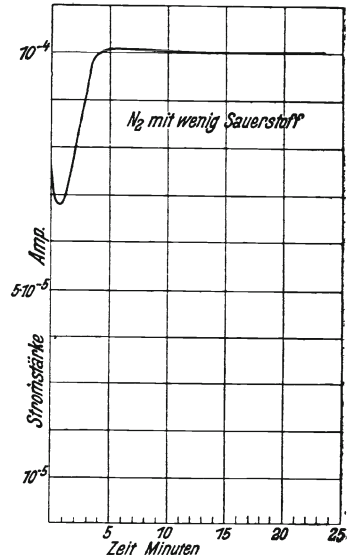
Wenn R die Reaktionszeit in Minuten v die Größe der Beimengung in Prozent, B und n Konstanten bedeuten. B ist gleich $3,5 \cdot 10^{-4}$ zu setzen, und n ist annähernd 1.

Da Messungen an dem gleichen Rezipienten eine Übereinstimmung von $\pm 10\%$ zeigen, so kann man nach Eichung des Rezipienten mit einem bekannten Sauerstoffgehalt auch absolute Messungen ausführen, und zwar wie man sieht, bis zu einem Sauerstoffgehalt von $5 \cdot 10^{-5}\%$ herunter. Bei noch kleineren Reaktionszeiten dürfte eine Größenordnungs-Extrapolation der logarithmischen Graden gestattet sein, wie sie z. B. angewendet werden konnte, wenn bei gereinigtem Stickstoff Stromzeitkurven wie Fig. 9 beobachtet wurden. Die Extrapolation der logarithmischen Graden würde z. B. für die Kurve Fig. 7 einen Sauerstoffgehalt von $10^{-5}\%$ ergeben, eine Verunreinigung, deren absichtliche Hinzufügung mit den angewandten Mitteln nicht mehr möglich war.

In ähnlicher Weise, wenn auch nicht ganz so einfach und übersichtlich, gestaltete sich die Messung mit Wasserdampfbeimengungen zum reinen Stickstoff.

Wie oben erwähnt, wurde der Dampf aus vorher sorgfältig durch Evakuieren von Gasen befreitem Wasser entwickelt. Als Dampftension wurde die für die betreffende Temperatur in der Tabelle des Landolt-Börnstein angegebene benutzt. Nach dem Einlassen des Wasserdampfes in das Gefäß mußte die Stickstofffüllung schnell eingeführt werden, da sonst der Wasserdampf ziemlich schnell von den Glaswänden absorbiert wurde, besonders wenn der Rezipient vorher angeheizt gewesen war.

Das Aussehen der Spitzenentladung wird durch die Gegenwart von Wasserdampf



noch stärker als von Sauerstoff beeinflusst. Das Spitzenlicht zieht sich in ein winziges fahlviolettcs Pünktchen zusammen.

Bei verschiedenen Wasserdampfgehalten ergaben sich Kurven wie Fig. 8, welche zum Unterschied von den Sauerstoffkurven ein scharfes und ein weniger scharf ausgeprägtes Minimum, welches bei hohen Wasserdampfgehalten mehr und mehr verwischt wird, und als besonderes Charakteristikum einen allmählich ansteigenden Kurvenast haben, dessen Stromwerte bei geringen Wasserdampf Beimengungen weit über die Stromwerte des reinen Stickstoffs hinausgehen und scheinbar asymptotisch einem Endwert zustreben. So wurde z. B. in einem Falle bei $1,25 \cdot 10^{-3}\%$ nach einer Stunde das 1,6fache des reinen Stickstoffs beobachtet. Die Vorgänge, die für die

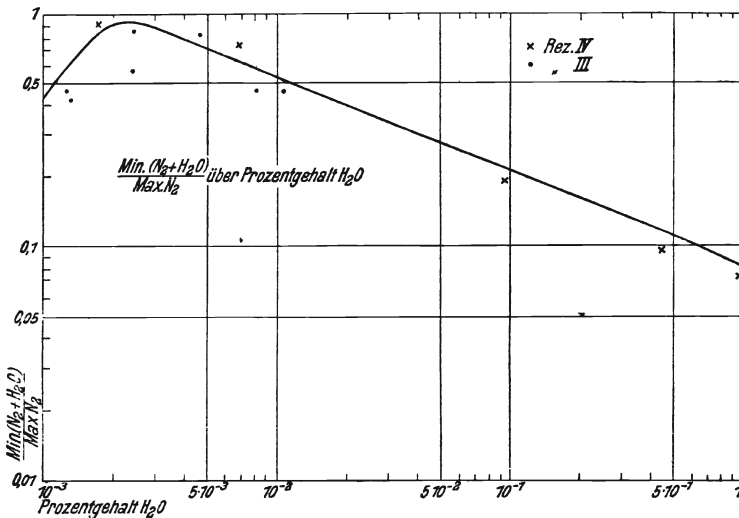


Fig. 9.

Ausbildung dieser Kurven maßgebend sind, sind sicherlich sehr kompliziert, da ja eine Dissoziation des Wasserdampfes stattfinden wird.

Bringt man wieder die Stromwerte im ersten scharf ausgeprägten Minimum $i_{\text{H}_2\text{O}}$ in Beziehung zu dem Maximum bei reinem Stickstoff J und trägt diese Größe $\frac{i_{\text{H}_2\text{O}}}{J}$ über den Verunreinigungen (die logarithmisch aufgezeichnet sind) auf, so ergibt sich Fig. 9. Auch hier ist über die Streuung der Punkte dasselbe zu sagen wie oben beim Sauerstoff. Immerhin ergibt sich aus der Kurve deutlich, daß etwa bei $2,10^{-3}\%$ H_2O -Dampf die $\frac{i}{J}$ Kurve ein Maximum hat, und daß das Minimum der Stromzeitkurve die Höhe des Maximums der reinen Stickstoffkurve erreicht oder überschreitet. Wir sehen also hier die strombefördernde Wirkung kleiner Mengen elektronegativer Gase. Daß wir das Maximum hier gefunden haben, liegt wohl im wesentlichen daran, daß Wasserdampf schwächer wirksam ist als Sauerstoff, und daher die zugefügte Menge, um den gleichen Effekt zu erreichen, größer sein konnte und daher leichter meßbar war. Die Messung wurde an zwei verschiedenen Rezipienten durchgeführt. Man sieht, daß es möglich ist, aus der beobachteten Stromzeitkurve im Verein mit Kurve 9 einen Schluß auf die Menge des vorhandenen Wasserdampfes zu ziehen.

Betrachtet man die Winkel, welche die ansteigenden Äste hinter dem zweiten Minimum mit der zugehörigen Kurve des reinen Stickstoffs haben, so erhält man eine Kurve ähnlichen Charakters wie Fig. 9 mit einem Maximum zwischen 10^{-3} und $10^{-2}\%$ Beimengung. Auch aus den Stromzeitkurven für Wasserdampfbeimengungen lassen sich, wenn der Rezipient für einige Wasserdampfbeimengungen geeicht ist, durch Extrapolation die Größenordnung geringer Verunreinigungen bestimmen.

So ergab sich z. B. nach längerem Arbeiten mit Wasserdampfbeimengungen für reinen Stickstoff einmal eine Kurve Fig. 10. Die Größe des Minimumstromes und der Winkel des ansteigenden Astes ergaben durch Extrapolation aus den beobachteten Werten, daß es sich um eine Wasserdampfverunreinigung von 10^{-4} bis $10^{-5}\%$ handeln mußte, welche sehr wohl von den Wänden des Rezipienten herrühren konnte. Durch Erhitzen des Rezipienten und Evakuieren konnte die normale Stromzeitkurve für reinen Stickstoff erhalten werden. Enthält der Stickstoff kleine Beimengungen von Sauerstoff und Wasserdampf gleichzeitig, so zeigen die Stromzeitkurven kombinierte Charakteristik (Fig. 11). Der Sauerstoffgehalt gibt sich durch den plötzlichen Anstieg, der Wasserdampfgehalt durch den aufsteigenden Ast zu erkennen. Doch ist die

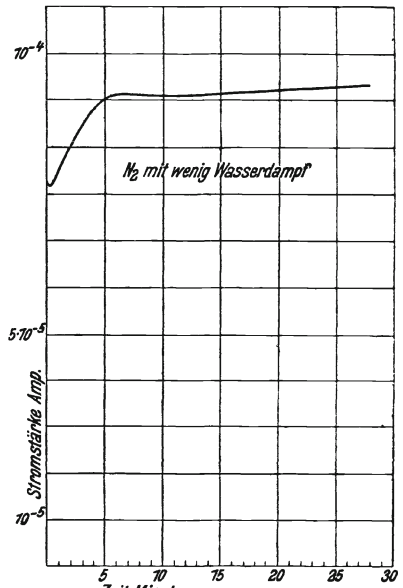


Fig. 10.

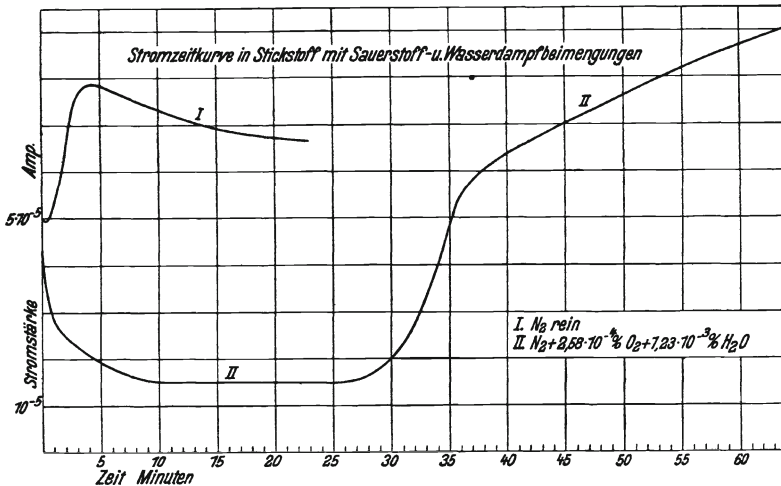


Fig. 11.

Wirkung keine rein additive. Aus der Zeitspanne, die bis zum Anstieg verstreicht, ist nicht ohne weiteres auf den Sauerstoffgehalt zu schließen, sondern dieselbe variiert mit dem Wasserdampfgehalt, und zwar in dem Sinn, als ob die Wirkung eines Teiles des im Wasserdampf enthaltenen Sauerstoffes zu dem bereits vorhandenen hinzukäme.

Schluß: Wie eingangs erwähnt, lassen sich die beschriebenen Versuche mit geringen Abänderungen auch auf Edelgasmischungen ausdehnen. Die Empfindlichkeiten werden hier noch größer, ohne daß sich prinzipiell neue Gesichtspunkte ergeben.

Auf die Untersuchungen, den Einfluß von Beimengungen mit schwach elastischen Molekülen, wie z. B. Wasserstoff, auf die Spitzenentladung in reinem Stickstoff festzustellen, ist in dieser Arbeit nicht eingegangen worden. Es ist klar, daß die Methode ihrer ganzen Anlage nach hierfür keine große Empfindlichkeit aufweisen kann. Immerhin war es möglich, auch Wasserstoffmengen von etwa $\frac{1}{10}\%$ aufwärts im Stickstoff auf Grund der Beobachtung der Stromzeitkurve mit Sicherheit zu finden.

Die beschriebene Methode dürfte, abgesehen von der analytischen Verwendbarkeit, ein brauchbares Hilfsmittel für manche experimentellen Arbeiten auf physikalischem und chemischem Gebiete bilden. Als Beispiel hierfür seien genannt: Die Untersuchung der wasserdampfbindenden Wirkung verschiedener Körper bei verschiedenen Temperaturen (z. B. der Trockenmittel), Wirksamkeit reduzierender Substanzen in Abhängigkeit von der Temperatur und der Verteilung, ferner die Frage des Nachleuchtens von aktivem Stickstoff. Über diese letztere konnten bereits auf Grund der beschriebenen Versuchsergebnisse einige Aufschlüsse gewonnen werden, über die anderer Stelle berichtet werden wird.

Fremd- und Selbsterregung von magnetisch gesättigten Gleichstromkreisen.

Von

Reinhold Rüdenberg.

Mit 31 Textfiguren.

Mitteilung aus dem Dynamowerk der Siemens -
Schuckertwerke G. m. b. H.

1. Ziel der Untersuchung.

Die Vorgänge beim Einschalten eines Gleichstromes, dessen Kreis mit Selbstinduktion behaftet ist, sind zuerst von Helmholtz¹⁾ untersucht worden. Er fand, daß der Strom beim Einschalten einer konstanten Spannung E auf eine Spule mit unveränderlicher Selbstinduktion L und dem Widerstande R , wie in Fig. 1 dargestellt ist, nach einer Exponentialfunktion erst schnell und dann langsamer und langsamer ansteigt und sich allmählich dem Endwerte des stationären Stromes nähert, der sich aus dem Ohmschen Gesetz ergibt. Das Verhältnis des anwachsenden Stromes J zum Dauerstrom J_0 ist:

$$\frac{J}{J_0} = 1 - e^{-\frac{R}{L}t}, \quad (1)$$

wobei man den Quotienten:

$$T = \frac{L}{R} \quad (2)$$

als Zeitkonstante des Stromkreises bezeichnet.

Wird der Strom nicht durch plötzliches Anlegen einer Spannung eingeschaltet, sondern durch Kurzschließen des Stromkreises zum Verschwinden gebracht, so erlischt er nach einer entsprechenden

Exponentialfunktion, die in Fig. 1 gestrichelt dargestellt ist. Diese Gesetzmäßigkeiten der veränderlichen Ströme sind in der Technik häufig angewandt und bilden die Grundlage für die Wirkungsweise zahlreicher Schalt- und Regelapparate.

Man verwendet nun aber heutzutage in den magnetischen Kreisen fast stets Eisen, das man im Interesse einer hohen Ausnutzung der Apparate und Maschinen bis zu einem erheblichen Grade sättigt. Da bei hohen Feldstärken alsdann keine Proportionalität mehr zwischen Kraftfluß und erregendem Strom vorhanden ist,

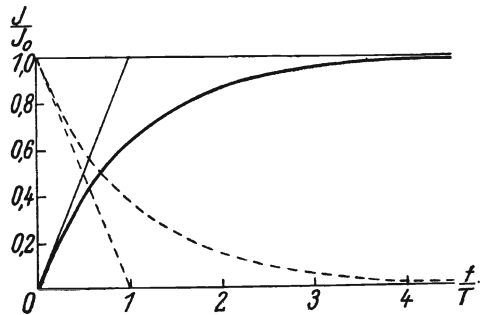


Fig. 1.

Stromverlauf beim Erregen ungesättigter Magnetkreise mit konstanter Selbstinduktion.

¹⁾ H. Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen, Bd. 1, S. 429.

so ist die Selbstinduktion dieser technisch verwandten Stromkreise nicht mehr konstant, und es treten wesentliche Abweichungen von den einfachen Gesetzmäßigkeiten nach Fig. 1 und Gleichung (1) auf, die im folgenden genauer untersucht werden sollen. Die Abweichungen sind häufig so groß, daß man auch nicht annäherungsweise mehr mit den Helmholtz'schen Beziehungen rechnen darf. Beispielsweise zeigt Fig. 2 das Oszillogramm eines Einschaltstromes in einem vollständig eisengeschlossenen Magnetkreise.

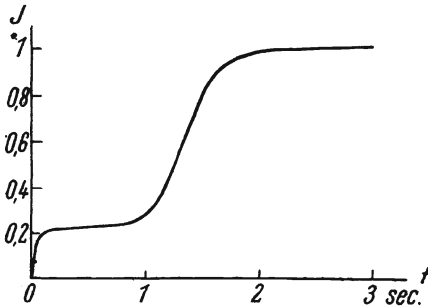


Fig. 2.

Stromverlauf beim Erregen hochgesättigter Eisenkreise.

zwei Treppenstufen des Stromes zu beobachten, als deren Ursache sich die gekrümmte magnetische Charakteristik herausstellen wird. Es zeigt sich, daß die Verhältnisse in gesättigten Stromkreisen im allgemeinen grundlegend anderen Stromverlauf und andere Erregungszeiten bedingen.

Häufig verwendet man neben der Fremd- erregung von Magnetkreisen selbsterregte Dynamomaschinen, deren Magnetismus durch die im eigenen Anker entstehende Spannung erzeugt wird¹⁾. Wir wollen daher im folgenden eine genaue Theorie der Fremd- und Selbsterregungsvorgänge von magnetisch gesättigten Gleichstromkreisen herleiten, die als Grundlage für die Theorie der meisten elektrischen Regulierungseinrichtungen dienen können. In Fig. 3 ist eine derartige Dynamo-

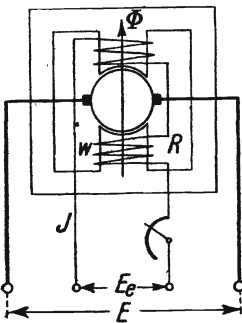


Fig. 3.

Fremderregte Dynamomaschine.

maschine dargestellt, deren Magnet- spule an eine fremde Erregerspannung E_e angelegt werden kann. Das im Eisenkreis entstehende magnetische Feld Φ erzeugt dann im rotierenden Anker eine Klemmenspannung E . Fig. 4 zeigt eine gleiche Dynamo, die nach der Erfindung von W. Siemens²⁾ dadurch auf Selbsterregung gebracht ist, daß die Ankerspannung über einen regulierbaren Widerstand auf die Feld- erregerspulen geschaltet ist und daher selbst die Erregung bewirkt. Es soll

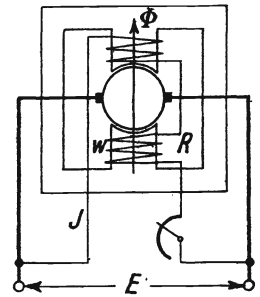


Fig. 4.

Selbsterregte Dynamomaschine.

untersucht werden, nach welchem zeitlichen Verlauf in beiden Fällen das Magnetfeld und die Erregerströme ansteigen oder abschwellen, wenn der Zustand der Maschine entweder durch Regeln der Erreger- spannung oder durch Regeln des Erregerwiderstandes sich ändert. Wir wollen dabei von dem Einfluß der Wirbelströme, die in sehr starkem Massiveisen entstehen und die Erregungszeiten vergrößern können, absehen und annehmen, daß sie durch Unterteilung des Eisens auf ein unschädliches Maß herab- gesetzt seien. Ferner wollen wir annehmen, daß der gesamte von dem Feldstrom

¹⁾ Über den Selbsterregungsvorgang liegen folgende Arbeiten vor, die jedoch nicht zu einer geschlossenen Lösung geführt haben: L. Finzi, Phys. Zeitschr. 4, 212 (1903); A. Schwaiger, E. u. M. 28, 929 (1910); M. Müller, E. T. Z. 30, 540 (1909); H. Thoma, Theorie des Tirrilreglers, Berlin 1914; J. Biermanns, Arch. f. Elektrot. 7, 1 (1915).

²⁾ W. Siemens, Wissenschaftliche und technische Arbeiten. Bd. I, S. 429.

erzeugte magnetische Fluß in den Polschenkeln der Maschine fließt und keine Streufelder vorhanden seien, die sich außerhalb des Magnetkreises allein in der Luft schlössen. Schließlich wollen wir voraussetzen, daß der Belastungsstrom des Ankers nicht auf das Feld zurückwirkt.

2. Fremderregung.

Wenn eine konstante Spannung E_e an einen Feldstromkreis gelegt wird, wie es in Fig. 5 gezeichnet ist, der den Widerstand R besitzt, so beginnt in ihm ein Strom J zu fließen, der einen Ohmschen Spannungsverlust $R \cdot J$ verursacht. Da gleichzeitig mit dem Strom ein magnetisches Feld Φ entsteht, so erzeugt dieses in den Windungszahlen sämtlicher Erregerspulen w eine induktive Spannung vom Betrage $w \cdot \frac{d\Phi}{dt}$. Während des ganzen Ausgleichvorganges bis zum Eintreten des stationären Zustandes muß daher die Beziehung herrschen:

$$E_e = R J + w \frac{d\Phi}{dt} \tag{3}$$

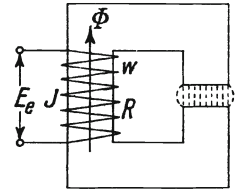


Fig. 5. Erregung eines Magnetfeldes durch einen Stromkreis mit konstanter Spannung.

Nach sehr langer Zeit wird der Strom und das Feld konstant geworden sein, so daß alsdann das letzte Glied dieser Gleichung verschwindet. Der Dauerstrom wird daher:

$$J_0 = \frac{E_e}{R} \tag{4}$$

so daß man Gleichung (3) auch schreiben kann:

$$w \frac{d\Phi}{dt} = E_e - R J = R (J_0 - J) = R \cdot \Delta J \tag{5}$$

Aus der magnetischen Charakteristik des Stromkreises, die die Abhängigkeit des Kraftflusses Φ vom erregenden Strom J darstellt, und die in Fig. 6 gezeichnet ist, geht nun hervor, daß nicht nur der jeweilige Strom J eine gegebene Funktion des magnetischen Kraftflusses Φ ist, sondern daß auch der in Gleichung (5) stehende Differenzstrom ΔJ zwischen dem Endstrom und dem jeweiligen Strom als gegebene Funktion des jeweiligen Flusses angesehen werden kann.

Gleichung (5) ist daher integrierbar, indem man sie schreibt:

$$\frac{w \cdot d\Phi}{R \cdot \Delta J} = dt \tag{6}$$

oder

$$t = \frac{w}{R} \int_{\Phi_a}^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta J} \tag{7}$$

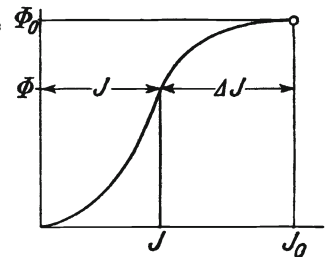


Fig. 6. Magnetische Charakteristik.

Als untere Grenze des Integrals ist dabei der Anfangsfluß Φ_a gesetzt, der beim Auferregen entweder zu Null oder besser als Größe des Remanenzflusses angenommen werden kann, und beim Aberregen den Ausgangsfluß zur Zeit $t = 0$ darstellt.

Da auf der rechten Seite dieser Beziehung Windungszahl und Widerstand bekannte Größen sind und der Zusammenhang von Φ und ΔJ bekannt ist, so läßt sich durch graphisches Auswerten des Integrals für jeden Fluß Φ die seit dem Ein-

schalten vergangene Zeit finden. In Fig. 7 a, b und c ist die Konstruktion für eine bestimmte Magnetisierungskurve durchgeführt. Man trägt zunächst aus der bekannten Charakteristik in Fig. 7a den Wert $\frac{1}{\Delta J}$ in Fig. 7b auf. Durch Integration dieser Kurve findet man nach Multiplikation mit dem Quotienten $\frac{w}{R}$ direkt die in Fig. 7c dargestellte Zeit t und besitzt nunmehr den kurvenmäßigen Zusammenhang des Kraftflusses mit der Zeit. Jeder Zeit kann man alsdann durch

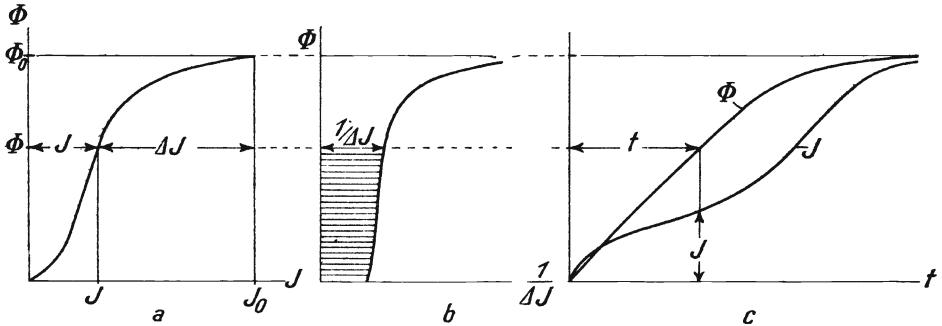


Fig. 7. Bestimmung des Auferregungsvorganges bei Fremderregung.

Eingehen in Kurve 7a die jeweilige Stromstärke J zuordnen und erhält so den in Fig. 7c ebenfalls gezeichneten Stromverlauf.

Das Problem, das Ansteigen des Feldes und des Stromes in einem gesättigten Gleichstrommagneten mit wachsender Zeit zu finden, ist damit gelöst. Man erkennt,

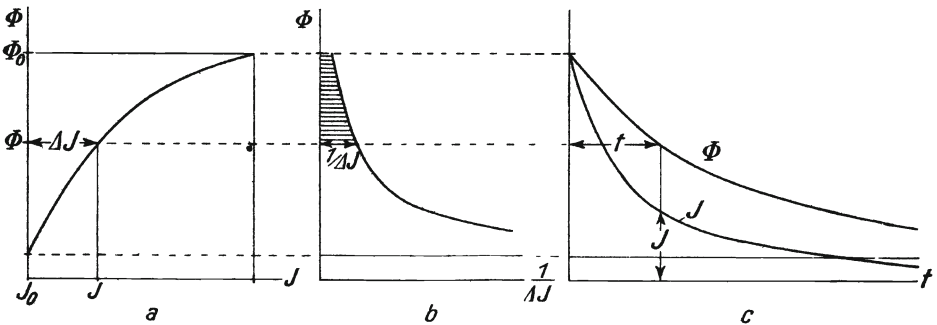


Fig. 8. Bestimmung des Aberregungsvorganges bei Fremderregung.

daß das Feld sich noch mit einer gewissen Näherung nach der Exponentialkurve von Fig. 1 richtet, daß dagegen die Stromstärke einen gänzlich anderen Verlauf zeigt, der tatsächlich der in Fig. 2 dargestellten Kurve entspricht. Die starke Treppenstufe des Stromes erklärt sich dadurch, daß in einem großen Bereiche der Feldstärke eine ganz geringe Änderung des Stromes schon eine starke Feldänderung hervorruft und daher ausreicht, um der aufgedrückten Spannung unter Abzug des Ohmschen Spannungsabfalles das Gleichgewicht zu halten.

In Fig. 8a, b und c ist im Gegensatz zu Fig. 7 der Vorgang des Abklingens eines Magnetfeldes ausgewertet, wenn die Magnetwicklung auf ihren eigenen oder einen äußeren Widerstand kurzgeschlossen wird. Man erkennt, daß auch hier das Magnet-

feld einigermaßen gleichmäßig abklingt, während der Strom zuerst im Bereiche hoher Sättigung sehr rasch und späterhin bei kleinen Feldstärken nur sehr langsam und schleichend geringer wird. Von einem exponentiellen Abklingen entsprechend dem Helmholtzschen Gesetz ist auch diese Erscheinung weit entfernt.

Wegen der sehr langen Auf- und Aberregungszeiten, die größere Feldmagnete besitzen, wie sie in Dynamomaschinen benutzt werden, und die in der Größenordnung von einer Minute liegen können, ist es schwierig, die Stärke ihres Magnetflusses festzustellen. Die Messung mit dem ballistischen Galvanometer ist deshalb nicht möglich, weil dessen Schwingungsdauer groß gegen die Erregungszeiten der Magnete sein muß und daher viele Minuten betragen müßte. Man kann nun aber leicht den Verlauf des Stromes in einem solchen Magneten beim Anschalten an eine konstante Spannung oszillographisch feststellen. Trägt man denselben dann, wie in Fig. 9 gezeichnet ist, abhängig von der dimensionslosen Größe $\frac{R}{w} t$ auf, so stellt die schraffierte Fläche zwischen dem Strom selbst und seiner Asymptote, die er als Endwert erreicht, maßstäblich die Größe des gesamten erzeugten Kraftflusses dar. Denn durch Integration von Gleichung (5) erhält man:

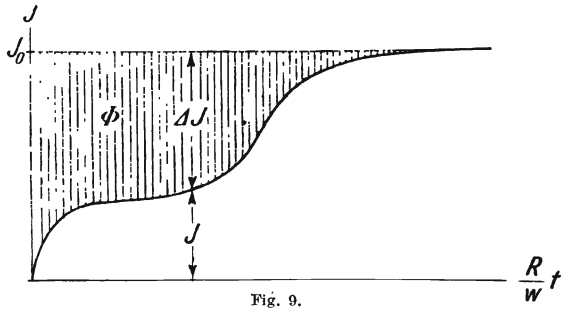


Fig. 9. Bestimmung des Magnetflusses aus der zeitlichen Erregerstromkurve.

$$\Phi = \frac{R}{w} \int_0^t \Delta J \cdot dt \tag{8}$$

und dieses ist nichts anderes als die eben genannte Fläche. Man kann der Beziehung (7) für die Erregungszeiten von Gleichstrommagneten noch eine andere Form geben, was besonders zweckmäßig ist, wenn es sich um Feldmagnete von Dynamomaschinen in der Anordnung nach Fig. 3 handelt. Anstatt des Magnetflusses derartiger Maschinen führt man nämlich zweckmäßigerweise die Ankerspannung E ein, die bei konstant rotierendem Anker in jedem Augenblick dem Flusse proportional ist. In Fig. 10a ist dementsprechend die Spannungscharakteristik der Dynamomaschine aufgetragen, die der Feldcharakteristik proportional ist und die Ankerspannung in Abhängigkeit vom Erregerstrom darstellt.

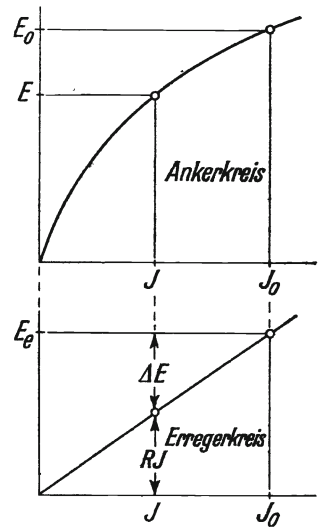


Fig. 10. Spannungen im Anker- und Erregerkreis bei Fremderregung.

Bezeichnet man die jeweilige Ankerspannung mit E und im stationären Zustande mit E_0 , so verhält sich demnach:

$$\frac{E}{E_0} = \frac{\Phi}{\Phi_0} \tag{9}$$

Kann man hierdurch den Zähler des Integrals in Gleichung (7) durch eine Spannung

ausdrücken, so gelingt dasselbe auch für den Nenner, wenn man beachtet, daß

$$R \cdot \Delta J = R J_0 - R J = E_e - R J = \Delta E \quad (10)$$

nach Fig. 10b eine Spannung ist, die als Rest zwischen der Erregerspannung und dem Ohmschen Spannungsabfall des jeweiligen Erregerstromes auftritt. Gleichung (7) gewinnt dann die Form:

$$t = \frac{w \Phi_0}{E_0} \int \frac{dE}{\Delta E}. \quad (11)$$

Da sowohl die Ankerspannung E als auch die Erregerrestspannung ΔE , entsprechend Fig. 10, als Funktion des Erregerstromes gegeben sind, so kann man genau wie früher in Fig. 7 und 8 die Integration graphisch ausführen. Man hat jedoch jetzt den Vor-

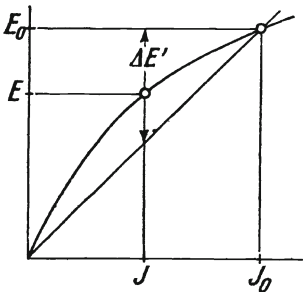


Fig. 11.
Reduktion der Fremderregungsspannung
auf die Ankerspannung.

teil, daß das Integral in Gleichung (11) eine dimensionslose Größe ist und daher eine reine Zahl ergibt, während der vor dem Integral stehende Quotient die Dimension einer Zeit besitzt, und eine reine Maschinenkonstante ist, weil das Verhältnis der stationären Werte von Fluß und Spannung durch die Abmessungen des Ankers fest gegeben ist. Wir wollen diese Größe

$$T = \frac{w \Phi_0}{E_0} \quad (12)$$

die Zeitkonstante der Maschine nennen. Es darf dabei beachtet werden, daß sie trotz der veränderlichen magnetischen Verhältnisse und der nicht konstanten Selbstinduktion der Maschine einen unveränderlichen Wert besitzt.

In dem Integral der Gleichung (11) bezieht sich der Zähler auf die Ankerspannung, der Nenner auf die Erregerspannung. Wenn diese beiden Spannungen in keiner bestimmten Abhängigkeit stehen, wie z. B. bei Wechselstrommaschinen, kann es zweckmäßig sein, auch den Nenner auf die Ankerspannung zu beziehen. Man kann dann in der Spannungscharakteristik der Maschine, die in Fig. 11 nochmals dargestellt ist, eine Hilfsgerade zwischen dem Nullpunkt und dem stationären Punkte E_0, J_0 ziehen, die ein Abbild der Erregergeraden in Fig. 10b ist. Nennt man ihre Differenz gegenüber der stationären Ankerspannung $\Delta E'$, so ist:

$$\Delta E' = \Delta E \cdot \frac{E_0}{E_e} \quad (13)$$

und damit wird:

$$t = \frac{w \Phi_0}{E_e} \int \frac{dE}{\Delta E'} \quad (14)$$

wobei wir:

$$T_e = \frac{w \Phi_0}{E_e} \quad (15)$$

als Erreger-Zeitkonstante bezeichnen wollen.

Diese Größe ist zwar für jeden Erregungsvorgang bei einmal eingestellter Erregerspannung E_e konstant; sie ist jedoch, da Fluß und Erregerspannung nicht proportional sind, für verschiedene Werte dieser Größen verschieden groß. Man hat aber durch die Formulierung in

Gleichung (14) andererseits den Vorteil, daß das Integral ohne Rücksicht auf die Höhe der Erregerspannung lediglich aus der Spannungscharakteristik der Maschine ausgewertet werden kann. Für fremderregte Maschinen wird man deshalb im allgemeinen die Formulierung der Gleichungen (14) und (15) zur Auswertung benutzen. Nur wenn die Ankerspannung und die Erregerspannung übereinstimmen, ist es zweckmäßig, die Formulierung der Gleichungen (11) und (12) anzuwenden. In jedem Falle stellt das Integral eine absolute Zahl dar, deren Größe wir später noch untersuchen wollen. Wir wollen sie deshalb die numerische Erregungszeit nennen und mit ϑ bezeichnen. Die wirklichen Erregungszeiten sind außerdem proportional den Zeitkonstanten, die nach Gleichung (12) oder (15) aus den für jede Maschine bekannten Werten von Windungszahl, Fluß und Spannung errechnet werden können. Allgemein ist also die Erregungszeit:

$$t = T \cdot \vartheta \quad (16)$$

wobei die Zeitkonstante T für den Erregungsvorgang konstant ist und den Einfluß der Konstruktion und Wicklung der Maschine widerspiegelt, während die numerische Erregungszeit ϑ variabel ist und den Einfluß der Form der magnetischen Charakteristik zum Ausdruck bringt.

Es hat Interesse, den zu Anfang erwähnten Helmholtzschen Fall konstanter Selbstinduktion in der hier zugrunde gelegten Formulierung zu betrachten. Konstante Selbstinduktion bedeutet geradlinige magnetische Charakteristik. Es ist also, wie man unter dieser Annahme aus Fig. 11 entnehmen kann, für den Auferregungsvorgang:

$$\Delta E' = E_0 - E, \quad (17)$$

damit wird:

$$\vartheta = \int \frac{dE}{\Delta E'} = \int \frac{dE}{E_0 - E} = - \int \frac{d(E_0 - E)}{E_0 - E} \quad (18)$$

und wenn man integriert und beachtet, daß die Integrationskonstante so bestimmt werden muß, daß für $E = 0$ auch die numerische Erregungszeit $\vartheta = 0$ wird:

$$\frac{t}{T} = \vartheta = \ln \frac{1}{1 - \frac{E}{E_0}}. \quad (19)$$

Diese Beziehung ist, wie man leicht sieht, tatsächlich identisch mit der Helmholtzschen Gleichung (1). Für eine Erregung bis auf 95% der Endspannung muß man setzen $\frac{E}{E_0} = 0,95$ und damit wird die entsprechende numerische Erregungszeit bei konstanter Selbstinduktion und konstanter Permeabilität des Eisens:

$$\vartheta_{95\%} = \ln \frac{1}{0,05} = 3,0. \quad (20)$$

Wir werden später sehen, daß die numerischen Erregungszeiten für fremderregte Maschinen durch den Einfluß der magnetischen Sättigung nicht unwesentlich kleiner werden, daß die numerischen Erregungszeiten für selbsterregte Maschinen jedoch sehr erheblich größer sind als in diesem idealen Falle.

3. Selbsterregung.

Für selbsterregte Dynamomaschinen nach der Schaltung der Fig. 7 gelten dieselben Überlegungen, die zur Gleichung (3) führten. Nur ist hier die Erregerspannung der Magnete nicht konstant, sondern gleich der vom variablen Magnetfelde selbst im rotierenden Anker erzeugten Ankerspannung.

Es ist also:

$$E = RJ + w \frac{d\Phi}{dt} \tag{21}$$

Wie man aus Fig. 12 erkennt, läßt sich die Differenz der jeweiligen Ankerspannung und des jeweiligen Ohmschen Spannungsabfalles:

$$E - RJ = \Delta e \tag{22}$$

als Funktion des Erregerstromes oder auch der Ankerspannung leicht aus der Charakteristik ableiten, wenn man den Nullpunkt und den stationären Arbeitspunkt derselben durch eine gerade Linie, die sogenannte Widerstandslinie, verbindet. Im stationären Falle ist der Ohmsche Spannungsabfall RJ_0 gerade gleich der Ankerspannung E_0 . Der Schnittpunkt von Widerstandslinie und Charakteristik liefert daher den stationären Betriebspunkt.

Für alle anderen Ströme und Spannungen ist stets eine Restspannung Δe vorhanden, die der in den Magnetspulen durch Flußänderung erzeugten Spannung das Gleichgewicht hält. Es ist also:

$$w \frac{d\Phi}{dt} = \Delta e \tag{23}$$

Auch hier ist es zweckmäßig, anstatt des magnetischen Flusses die ihm proportionale Ankerspannung mit Hilfe von Gleichung (9) einzuführen. Man erhält dann:

$$\Delta e = \frac{w\Phi_0}{E_0} \frac{dE}{dt} \tag{24}$$

und daraus durch Integration:

$$t = \frac{w\Phi_0}{E_0} \int \frac{dE}{\Delta e} \tag{25}$$

Das Selbsterregungsproblem führt also auf eine ganz analoge Beziehung, wie sie in Gleichung (11) für das Fremderregungsproblem entwickelt wurde, nur mit dem Unterschiede, daß unter dem Integral

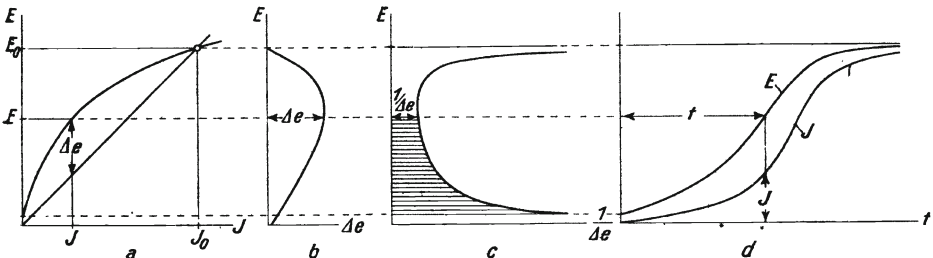


Fig. 13.

Bestimmung des Aufregungsvorganges bei Selbsterregung.

nicht der Überschuß ΔE der konstant gehaltenen Erregerspannung über dem Ohmschen Spannungsabfall des Erregerstromes steht, sondern der Überschuß Δe der veränderlichen Ankerspannung. Auch hier ergibt sich die Erregungszeit als Produkt aus zwei Faktoren. Der erste Faktor ist die bereits in Gleichung (12) definierte Zeitkonstante; der zweite Faktor ist ein reiner Zahlenwert, der als numerische Erregungszeit die relative Größe der Erregungsdauer angibt. In Fig. 13a bis d ist die graphische Auswertung des Integrals der Gleichung (25) dargestellt, und zwar

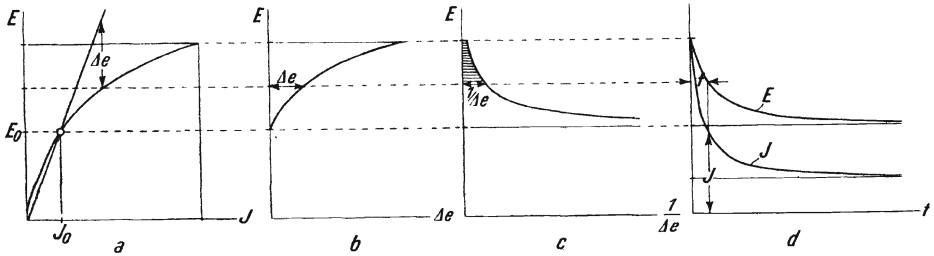


Fig. 14.

Bestimmung des Aberregungsvorganges bei Selbsterregung.

für einen Auferregungsvorgang, ausgehend von der Remanenzspannung. In Fig. 14a bis d ist ein entsprechender Aberregungsvorgang gezeigt.

Ähnlich wie bei der Berechnung der Fremderregung nach Gleichung (14) stellt auch in Gleichung (25) das Integral eine numerische Zeit dar, deren Größe lediglich von der Form der magnetischen Charakteristik bis zum stationären Punkte abhängt. Während dort die Zeitkonstante zwar für einen bestimmten Erregungsvorgang konstant war, aber noch von der Höhe der Erregerspannung und des stationären Flusses abhing, ist die Zeitkonstante der Selbsterregung:

$$T = \frac{w\Phi_0}{E_0} \quad (26)$$

eine absolute Konstante der Maschinen und läßt sich, wenn die Maschine einmal vorliegt, durch keinerlei Ändern der Erregungsstärke verkleinern oder vergrößern. Schaltet man in die Erregerwicklung etwa einen großen Widerstand ein, so daß die stationäre Spannung E_0 gering wird, so wird genau proportional der stationäre Fluß Φ_0 geringer, so daß der Wert der Gleichung (26) sich nicht ändert. Die Zeitkonstante selbsterregter Maschinen ist daher völlig unabhängig von der Größe des Erregerwiderstandes. Sie bleibt bei beliebigen Betriebszuständen der Maschine stets die gleiche.

Man kann für den Vorgang der Selbsterregung ein einfaches Annäherungsgesetz finden, wenn man die Annahme macht, daß die Differenzspannung Δe in Abhängigkeit von der Ankerspannung nach einer symmetrischen Parabel verläuft, wenn man also setzt:

$$\frac{\Delta e}{E_0} = e \cdot 4\varepsilon(1 - \varepsilon), \quad (27)$$

wobei e das für den Selbsterregungsvorgang charakteristische Verhältnis der größten Differenzspannung zur stationären Spannung und:

$$\varepsilon = \frac{E}{E_0} \quad (28)$$

das veränderliche Verhältnis von jeweiliger Spannung zu stationärer Spannung bedeutet. Diese Annahme ist natürlich nicht genau richtig, wie man z. B. aus Fig. 13 erkennt; jedoch gibt sie einen guten qualitativen Überblick über die auftretenden Erscheinungen.

Man erhält damit aus Gleichung (25):

$$t = T \int \frac{dE}{4e E_0 \varepsilon (1 - \varepsilon)} = \frac{T}{4e} \int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon (1 - \varepsilon)} \quad (29)$$

und dieses gibt integriert:

$$t = \frac{T}{4e} \ln \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \right). \quad (30)$$

Die Erregungszeit von einer relativen Spannung ε_1 bis zu einer anderen relativen Spannung ε_2 ergibt sich damit zu:

$$t_{1,2} = \frac{T}{4e} \ln \left[\frac{\varepsilon_2 (1 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 (1 - \varepsilon_2)} \right]. \quad (31)$$

Dieselbe hängt also außer von der Zeitkonstante noch ab von dem Verhältnis e der höchsten Differenzspannung zur Ankerspannung und von der relativen Anfangs- und Endspannung des Selbsterregungsvorganges. Nimmt man als Anfangsspannung eine Remanenz von 5% an und als Endspannung eine Annäherung bis auf 95% an den stationären Wert, so ist der Logarithmus:

$$\ln \left[\frac{95}{5} \cdot \frac{95}{5} \right] = 5,88 \quad (32)$$

und wenn man eine größte Differenzspannung von beispielsweise $e = 1/5$ der stationären Spannung annimmt, so erhält man eine numerische Selbsterregungszeit von:

$$\vartheta_{5/95\%} = \frac{t}{T} = 7,4. \quad (33)$$

Man erkennt durch Vergleich mit Gleichung (20), daß der Selbsterregungsvorgang sehr viel längere Zeit beansprucht als die Fremderregung mit konstanter Selbstinduktion.

Ganz wesentlich hängt die Selbsterregungszeit von der größten Differenzspannung e , also von der Stärke der Krümmung der magnetischen Charakteristik ab. Wünscht man kleine Selbsterregungszeiten zu haben, was für viele Regulierzwecke erforderlich ist, so muß man mit großen Werten von e und mit stark gekrümmten Charakteristiken arbeiten.

Geht man von einer sehr kleinen Anfangsspannung, nämlich der Remanenzspannung $\varepsilon_2 = \varepsilon_r$, der Maschine aus und nähert man sich dem stationären Endzustand bis auf einen geringen Betrag, so kann man in Gleichung (31) unter dem Logarithmus die Klammerngrößen nahezu gleich 1 setzen und erhält als Näherungsformel für die numerische Selbsterregungszeit:

$$\vartheta = \frac{1}{4e} \ln \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_r} \right), \quad (34)$$

die nunmehr mit größter Deutlichkeit den umgekehrt proportionalen Einfluß der Differenzspannung e und vor allem den logarithmischen Einfluß der Remanenzspannung ε_r auf die Selbsterregungszeit zur Anschauung bringt.

Zum Aufzeichnen des durch Gleichung (30) bestimmten Selbsterregungsverlaufs ist es bequem dem Logarithmus noch eine Integrationskonstante von der Größe $\ln(-1)$ zuzufügen, weil dadurch der Zeitverlauf so verschoben wird, daß die Kurve symmetrisch zur Nullachse der Zeit liegt. Man erhält damit:

$$\vartheta = \frac{t}{T} = \frac{1}{4\epsilon} \ln\left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right), \quad (35)$$

die durch Umkehrung ergibt:

$$\frac{\epsilon}{1-\epsilon} = e^{4\epsilon\vartheta} \quad (36)$$

und ausgerechnet:

$$\epsilon = \frac{E}{E_0} = \frac{1}{1 + e^{-4\epsilon\vartheta}} \quad (37)$$

Dieser Verlauf der Spannung ist in Fig. 15 bildlich dargestellt. Von sehr kleinen Werten aus, die für sehr ferne negative Zeiten vorhanden sind, erregt sich die Maschine erst sehr langsam, dann immer schneller, erreicht für die Zeit 0 den schnellsten Spannungsanstieg und wächst nunmehr wieder langsamer an, bis sie für sehr ferne positive Zeiten den stationären Endwert erreicht.

Für negative Zeiten und sehr kleine Spannungen ϵ kann man aus Gleichung (36) den asymptotischen Näherungswert herleiten:

$$\epsilon_0 = e^{4\epsilon\vartheta}, \quad (38)$$

während man für positive Zeiten und große Spannungen aus derselben Gleichung (36) den asymptotischen Näherungswert erhält:

$$\epsilon_\infty = 1 - e^{-4\epsilon\vartheta} \quad (39)$$

Die selbsterregte Maschine zeigt also im Anfangszustand labiles exponentielles Anwachsen der Spannung, im Endzustand stabiles exponentielles Erreichen der Endspannung nach einem Verlauf, der dem der Fremderregung ähnlich ist, jedoch, wie man durch Vergleich mit Gleichung (1) und (19) sieht, eine im reziproken Verhältnis zu 4ϵ größere Zeitkonstante besitzt.

In Fig. 15 sind die asymptotischen Näherungskurven dünn eingetragen. Aus dieser Figur ersieht man am besten den prinzipiellen Verlauf der Selbsterregungserscheinungen. Man erkennt einerseits den ausschlaggebenden Einfluß der Anfangsspannung, also im allgemeinen der Remanenzspannung, auf die Zeitdauer des Verlaufs. Man sieht andererseits, daß der Verlauf der Kurven lediglich von der dimensionslosen Größe $4\epsilon\vartheta$ abhängt, daß man also für schnelle Selbsterregungsvorgänge außer der Wahl einer geeigneten Anfangsspannung noch eine große Differenzspannung ϵ und eine kleine Zeitkonstante T verwenden muß.

Für den Aberregungsvorgang selbsterregter Maschinen wollen wir keine Näherungsgleichung herleiten, da man gegenüber der Darstellung in Fig. 14 nichts prinzipiell Neues aus ihr erkennen würde. Man sieht aus dieser Figur im Vergleich mit Fig. 13

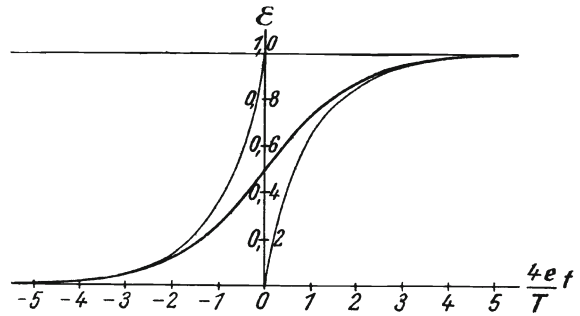


Fig. 15.
Allgemeiner Verlauf des Spannungsanstieges bei Selbsterregung.

bereits, daß bei hohen Feldstärken das Aberregen außerordentlich viel schneller erfolgt als das Auferregen.

4. Erregungskurven.

Am klarsten erkennt man den Verlauf und den Zusammenhang aller Erscheinungen, wenn die verschiedenen Erregungsarten für eine bestimmte Maschine mit verschiedenen Sättigungsstufen bildlich dargestellt werden. Fig. 16 zeigt die magnetische Charakteristik einer bestimmten Gleichstrommaschine, für die die Konstruktion durchgeführt wurde. Die Maschine hat eine Remanenzspannung von 11 Volt und ist untersucht für verschieden hohe Endspannungen, nämlich einerseits für ihre nor-

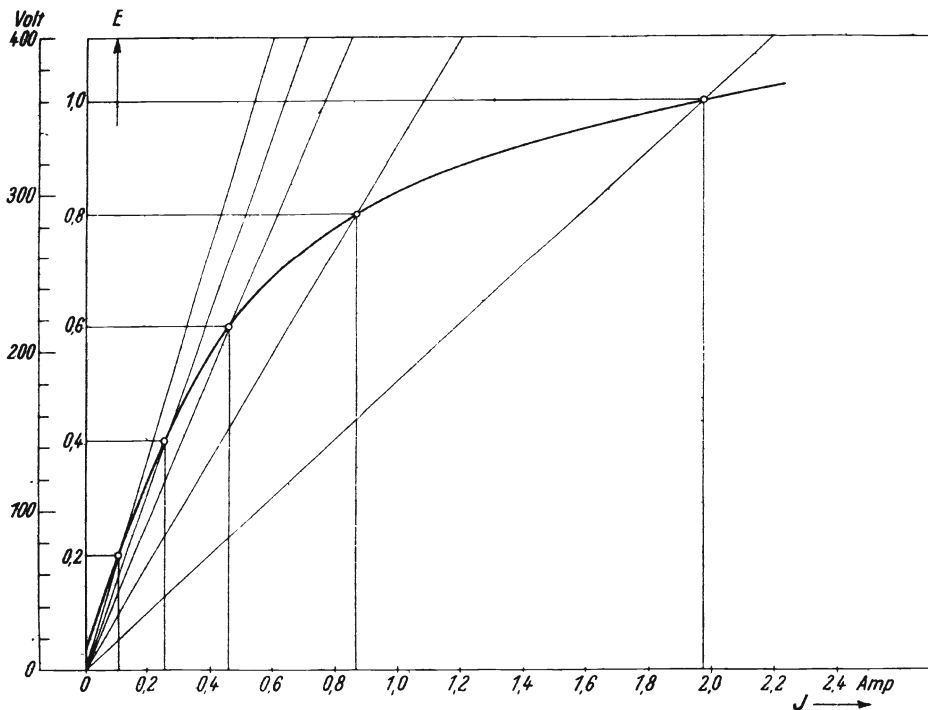


Fig. 16.

Charakteristik und Widerstandslinien einer Gleichstrommaschine.

male Spannung von 360 Volt und andererseits für vier in gleichmäßigen Abständen liegende Teilspannungen. Die stationären Arbeitspunkte sind in Fig. 16 durch kleine Kreise auf der Charakteristik dargestellt.

In Fig. 17 ist die Differenzspannung Δe für Selbsterregung nach dieser Charakteristik abhängig von der Klemmenspannung E aufgetragen und in Fig. 18 ihr reziproker Wert, der nach Integration, entsprechend Gleichung (25), in Fig. 19 den Verlauf der Spannung als Funktion der numerischen Zeit ϑ ergibt. Der zugehörige Stromverlauf ist der Charakteristik entnommen und in Fig. 20 als Funktion von ϑ aufgetragen. Da die Remanenzspannung dieser Maschine relativ groß ist, so beginnt die Selbsterregung ziemlich schnell. Bei hoher Sättigung der Maschine und entsprechend großen Werten von e steigt die Spannung beschleunigt, bei kleinen Sättigungen der Maschine und demgemäß kleinen e -Werten nur langsam bis zur End-

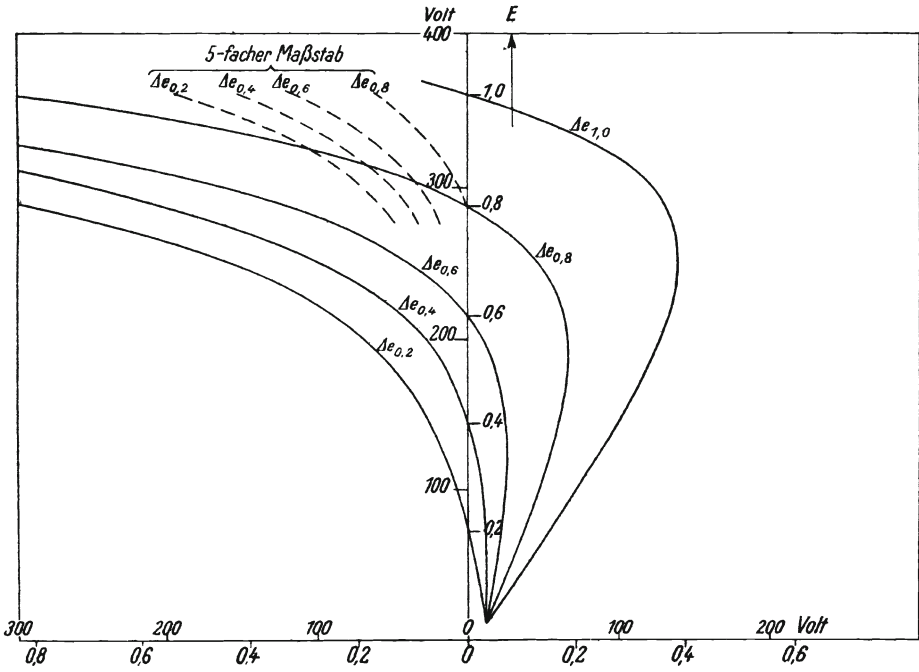


Fig. 17.
Differenzspannung bei Selbsterregung.

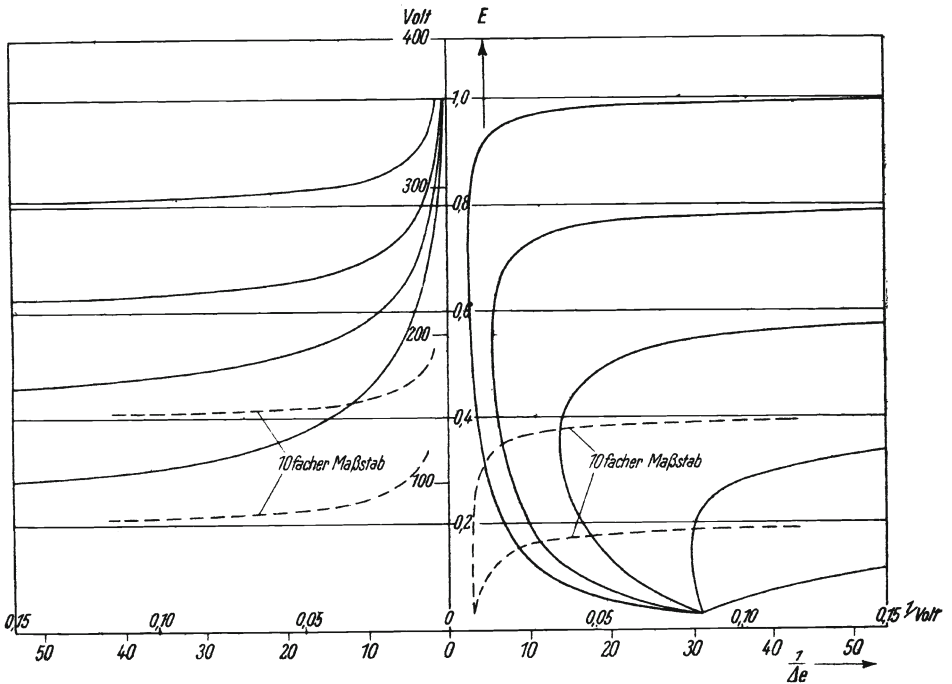


Fig. 18.
Hilfskurven für die Selbsterregung.

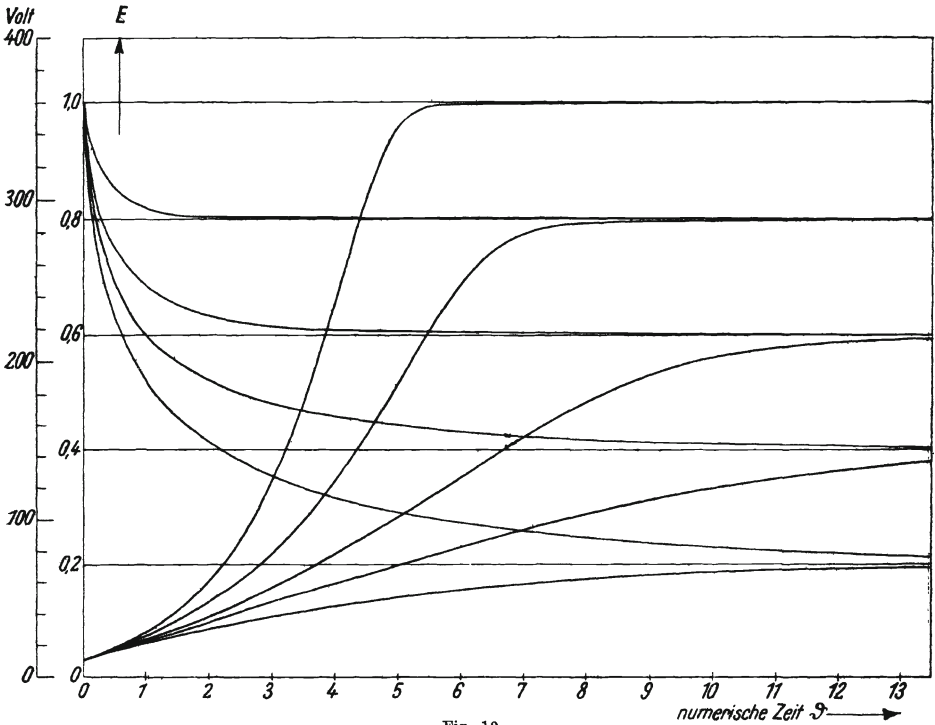


Fig. 19.

Spannungs- und Feldanstieg und -abfall bei Selbsterregung.

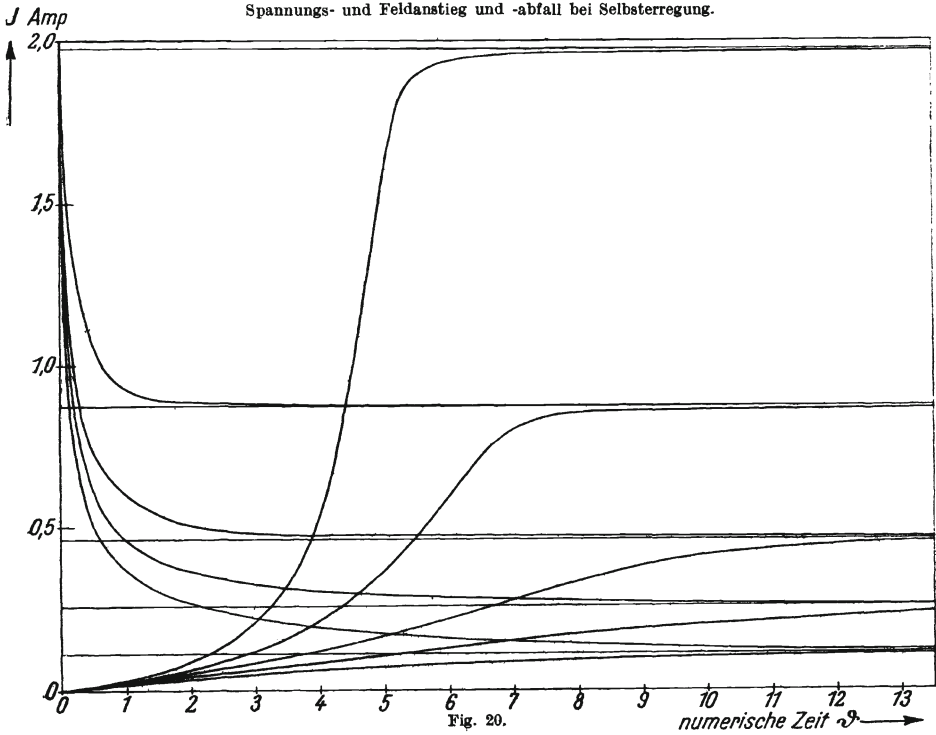


Fig. 20.

Stromanstieg und -abfall bei Selbsterregung.

spannung an. Die numerischen Erregungszeiten bis zum Erreichen von 95 % der Endspannung liegen bei dieser Maschine in der Größenordnung $\vartheta = 5$ bis 13. Sie sind in Fig. 21 abhängig von der relativen Differenzspannung e aufgetragen.

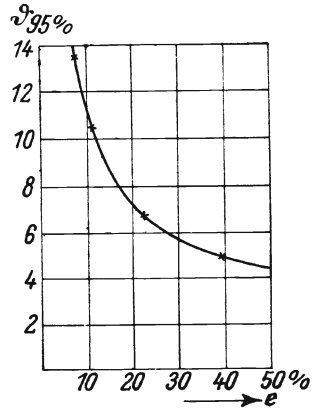


Fig. 21. Numerische Selbsterregungszeiten, abhängig von der relativen Überschußspannung.

In Fig. 22 ist die Differenzspannung ΔE für Fremderregung und in Fig. 23 ihr reziproker Wert aus der Charakteristik entnommen, und daraus nach Gleichung (11) der Anstieg der Spannung in Fig. 24 und des Stromes in Fig. 25 aufgetragen. Um einen Vergleich mit den Kurven für Selbsterregung zu erhalten, ist hierbei angenommen, daß den Erregerspulen für die verschiedenen stationären Zustände eine verschiedene Spannung aufgedrückt wird, die ebenso groß wie die stationär zu erreichende Ankerspannung ist. Die Erregerspulen werden also bei höchster Sättigung mit 360 Volt gespeist und bei den niederen Sättigungen mit den entsprechenden Bruchteilen von 360 Volt. Der richtige Wert des stationären Erregerstromes wird dabei erreicht durch Einstellung des Vorschaltwiderstandes auf denselben Wert, den er bei Selbsterregung hatte. Die numerischen Erregungszeiten bis zu 95 % der Erdspannung liegen bei dieser Art der Erregung zwischen $\vartheta = 1,4$ und 2.5. Sie sind bei geringen Sättigungen länger als bei hoher Sättigung.

Noch kürzere Erregungszeiten erhält man bei Anwendung von Fremderregung mit konstanter Erregerspannung, bei der zur Erzielung des gewollten statio-

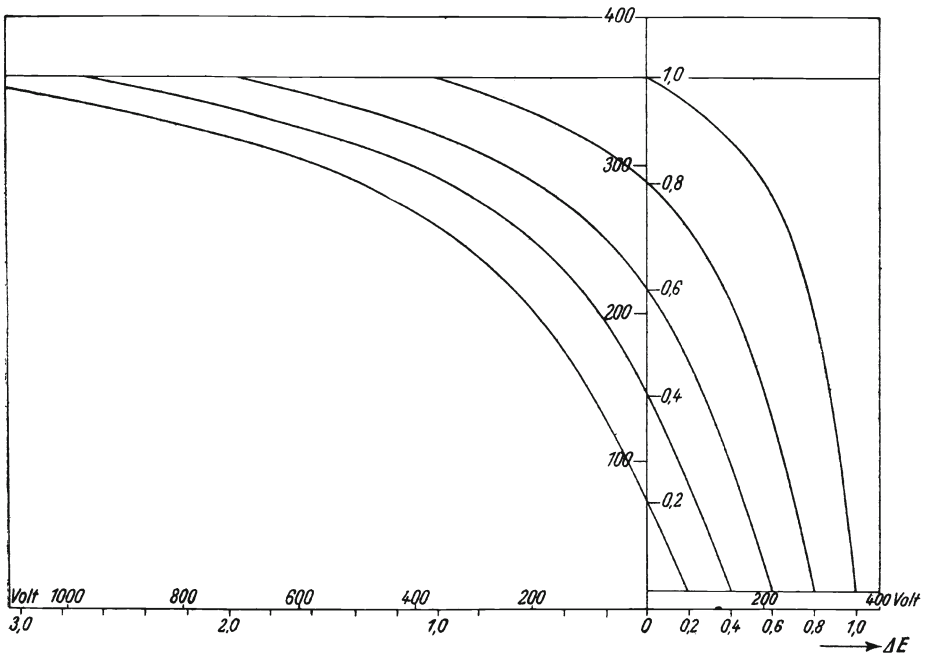


Fig. 22.

Differenzspannung für Fremderregung bei Einstellung von Spannung und Widerstand.

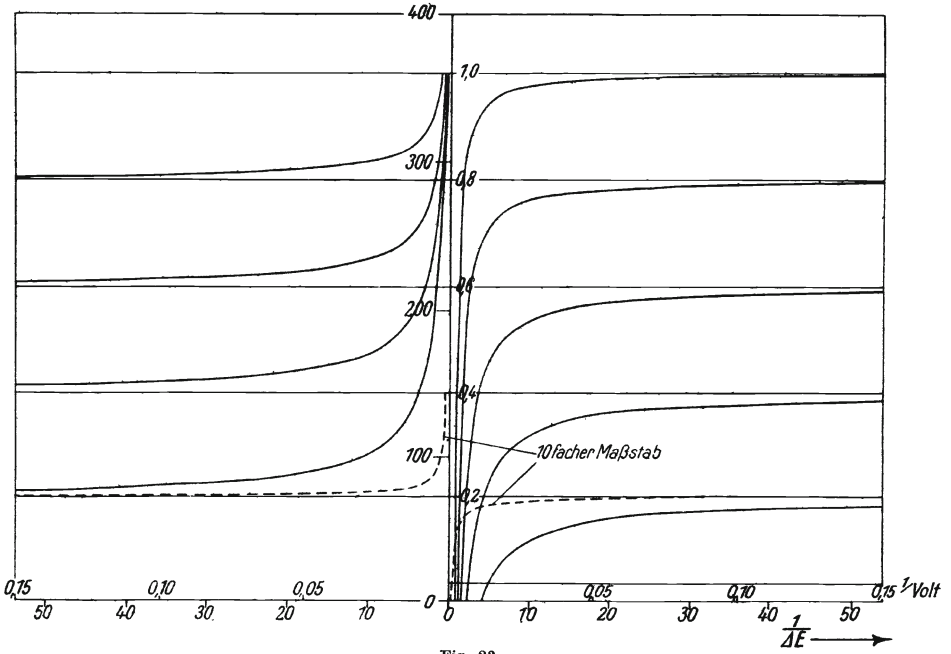


Fig. 23.
Hilfskurven für die Fremderregung bei Einstellung von Spannung und Widerstand.

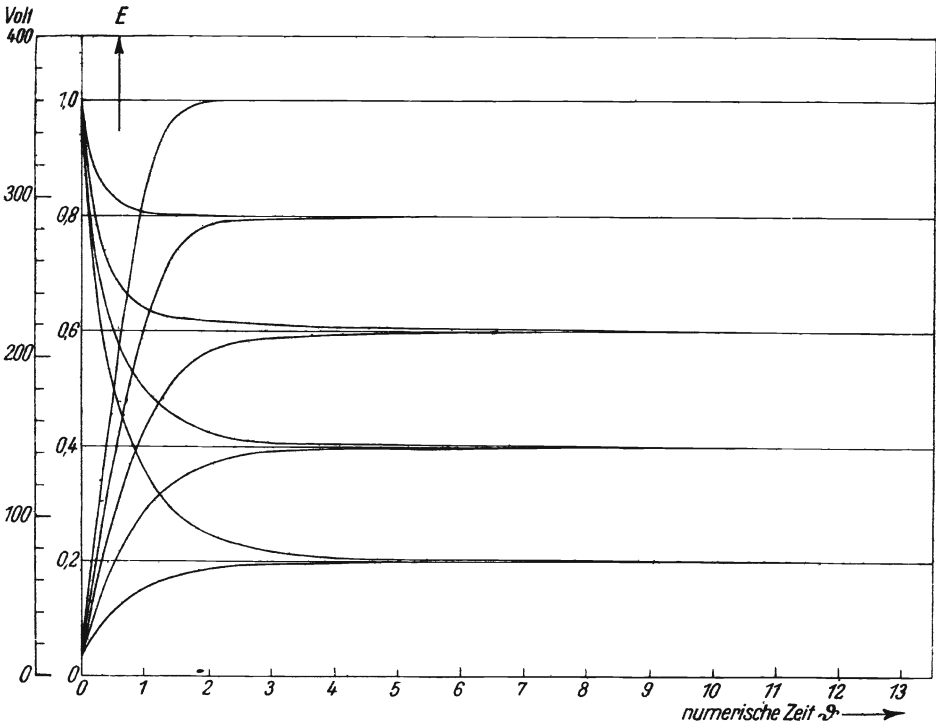


Fig. 24.
Feldanstieg und -abfall bei Fremderregung mit Einstellung von Spannung und Widerstand.

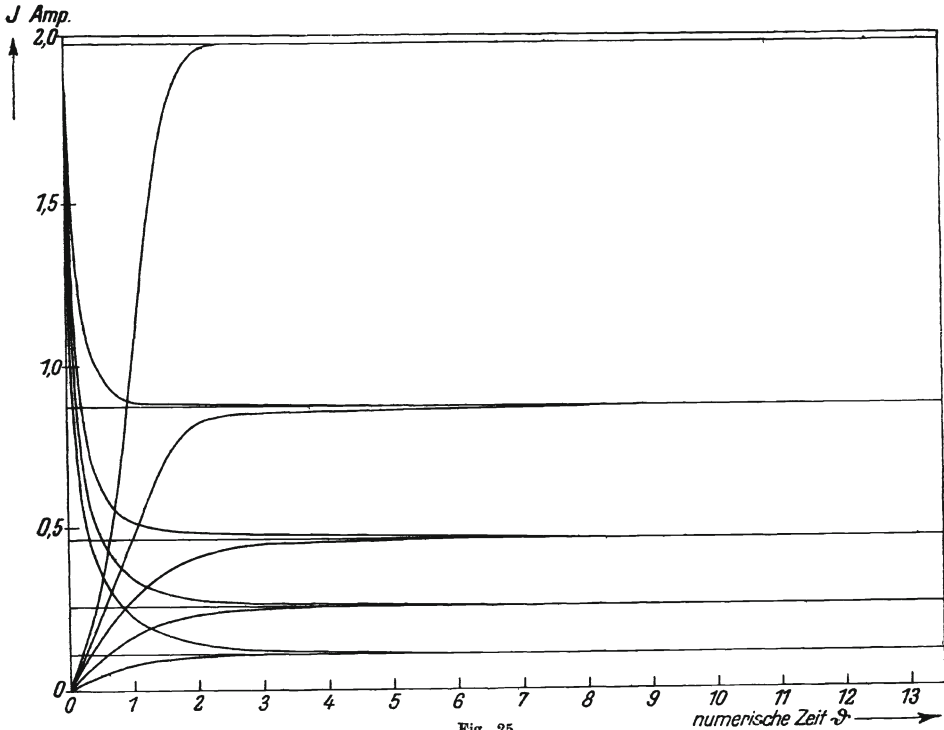


Fig. 25.

Stromanstieg und -abfall bei Fremderregung mit Einstellung von Spannung und Widerstand.

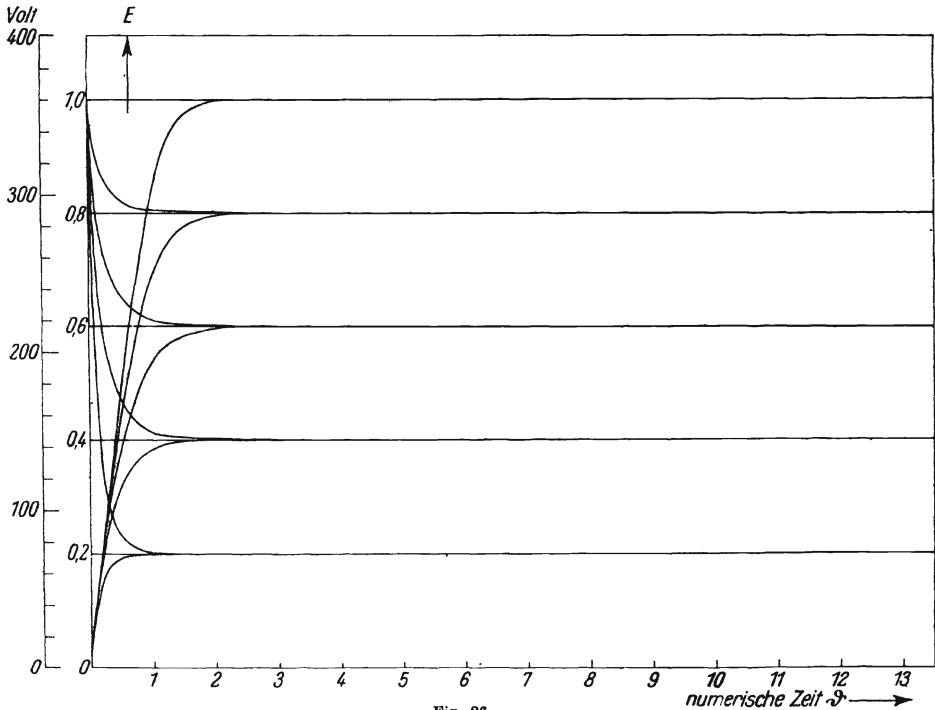


Fig. 26.

Feldanstieg und -abfall bei Fremderregung mit konstanter Spannung und eingestelltem Widerstand.

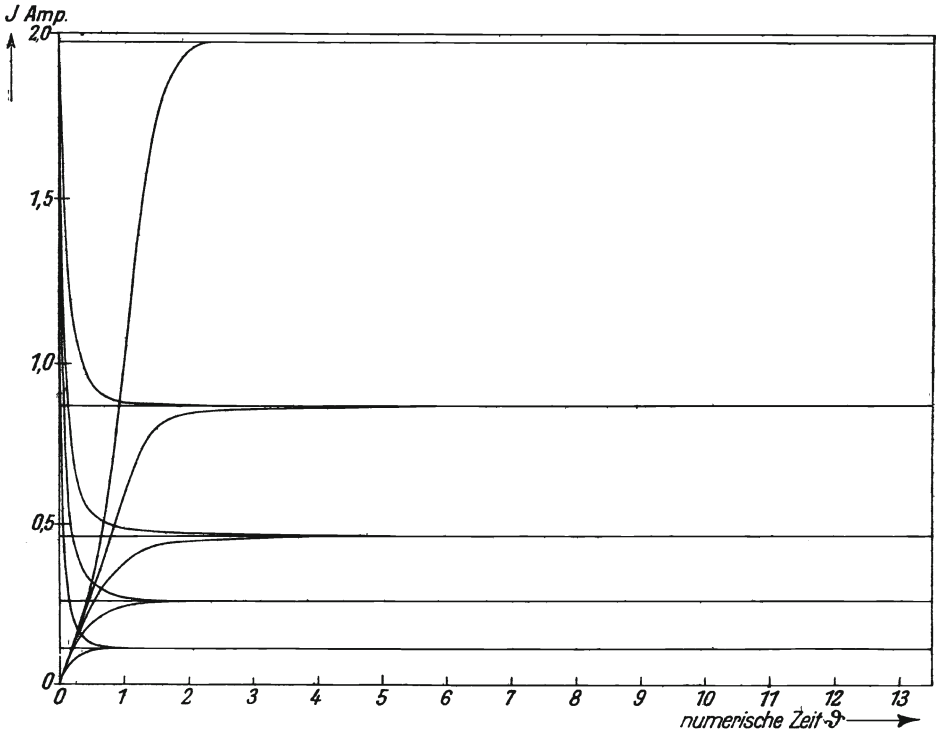


Fig. 27. Stromanstieg und -abfall bei Fremderregung mit konstanter Spannung und eingestelltem Widerstand.

nären Erregerstromes lediglich der Widerstand verändert wird. Behält man dabei die Formulierung der Gleichung (11) bei, so gewinnt man den Spannungs- oder Feld-

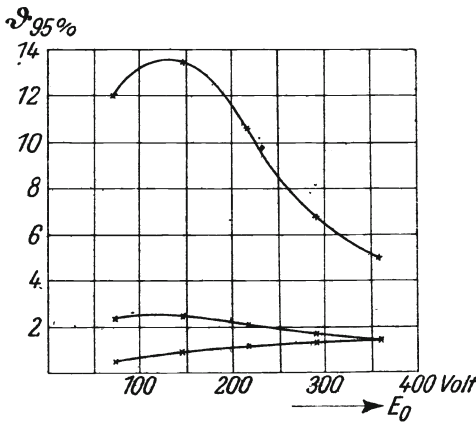


Fig. 28.

Numerische Erregungszeiten, abhängig von der stationären Spannung.

Oben: Selbsterregung.
Mitte: Fremderregung mit eingestellter Spannung.
Unten: Fremderregung mit konstanter Spannung.

anstieg der Fig. 26 und den Stromanstieg der Fig. 27 und erkennt, daß die Erregungszeiten für geringere Erregungsstärken wesentlich kleiner geworden sind. Sie liegen hier im Bereich von $\vartheta = 1,4$ bis $0,5$. Alle diese numerischen Erregungszeiten sind in Fig. 28 abhängig von der stationären Spannung aufgetragen, die anhand von Fig. 16 die Sättigungsverhältnisse der Maschine erkennen läßt. Die Kurven beziehen sich alle auf dieselbe Zeitkonstante der Maschine nach Gleichung (12) und gelten für eine Remanenzspannung von ca. 3% der höchsten Spannung.

Anstatt die Kurven nach Fig. 26 und 27 für konstante Erregerspannung nach der Vorschrift der Gleichung (11)

und Fig. 10 mit der Zeitkonstante der Maschine zu zeichnen, könnte man sie auch nach der Vorschrift der Gleichung (14) und Fig. 11 bestimmen. Man erhält dann für

konstante Erregerspannung Kurven, die mit denen in Fig. 24 und 25 identisch sind. Es müßte aber hierbei für jede Erregungsstärke eine andere Erregerzeitkonstante nach Gleichung (15) bestimmt werden, da ja bei konstanter Erregerspannung E_e der stationäre Fluß Φ_0 für die verschiedenen Fälle verschieden ist.

Man erkennt aus der prinzipiellen Kurve der Fig. 15 und aus den für die wirkliche Maschine errechneten Kurven der Fig. 19, daß die Selbsterregung einer Dynamo nur in den mittleren Spannungsbereichen mit erheblicher Geschwindigkeit erfolgt, dagegen für kleine und für große Spannungen nur schleichend vor sich geht. Will man die Felder von großen Maschinen daher schnell regulieren, so muß man bei Verwendung von Selbsterregung, auf die man in der Technik meistens angewiesen ist, nur die mittleren Teile der Erregungskurven benutzen. Das geschieht durchweg bei Schnellreglern nach dem Tirrilprinzip.

5. Zeitkonstanten.

Wir hatten in Gleichung (12) oder (26) eine sehr einfache Formulierung für die bei Selbsterregung in Betracht kommende Zeitkonstante der Maschine und in Gleichung (15) für die bei Fremderregung in Betracht kommende Erregerzeitkonstante gefunden, die sich beide aus den stets bekannten Zahlenwerten von Windungszahl, Kraftlinienzahl und Spannung auf einfachste Weise berechnen lassen.

Von den Vorgängen in Stromkreisen mit konstanter Selbstinduktion ohne Sättigung her ist man gewöhnt, als Zeitkonstante das Verhältnis von Selbstinduktivität zu Widerstand, entsprechend Gleichung (2) zu definieren. Für gesättigte Gleichstromkreise versagt diese einfache Formulierung natürlich, da es keine konstante Selbstinduktivität mehr gibt, jedoch kann man eine ähnliche Formulierung finden, wenn man eine ideelle Selbstinduktivität

$$L_0 = \frac{w \Phi_0}{J_0} \quad (40)$$

bezogen auf den stationären Arbeitspunkt mit seinem Fluß Φ_0 und Strom J_0 einführt und beachtet, daß die stationäre Spannung

$$E_0 = R J_0 \quad (41)$$

ist. Führt man diese Werte in Gleichung (26) ein, so erhält man als Zeitkonstante

$$T = \frac{w \Phi_0}{E_0} = \frac{L_0}{R} \quad (42)$$

tatsächlich das Verhältnis der ideellen Selbstinduktivität für den stationären Punkt zum Widerstand des Stromkreises. Dieses Verhältnis ist aber für selbsterregte Maschinen keineswegs durch Wahl verschieden großer Erregerwiderstände veränderbar, sondern es hat stets den gleichen Wert. Bei einer Vergrößerung des Widerstandes R bleibt die Induktivität L_0 nicht konstant, sondern wird ebenfalls größer, denn es stellt sich dabei ein anderer stationärer Betriebszustand mit kleinerem Kraftfluß und erheblich kleinerem Erregerstrom ein, was nach Gleichung (40) eine Vergrößerung der Selbstinduktivität bewirkt, die den Einfluß des vergrößerten Widerstandes auf die Zeitkonstante gerade kompensiert.

Wir wollen die Maschinenzeitkonstante T nun noch in Beziehung zu den Hauptangaben der Maschine bringen, um zu erkennen, in welcher Weise man vorgehen

muß, um Maschinen mit möglichst kleiner Zeitkonstante zu erhalten. Die Ankerspannung E_0 läßt sich nach einer bekannten Beziehung aus der Ankerleiterzahl N , der Drehzahl der Maschine n , dem Ankerfluß Φ_a und dem Verhältnis der Zahl der Polpaare zur Zahl der Ankerstromzweigpaare $\frac{p}{a}$ berechnen. Es ist nämlich:

$$E_0 = \Phi_a N \frac{n}{60} \frac{p}{a}. \quad (43)$$

Beachtet man nun, daß der Magnetkraftfluß Φ_0 wegen der magnetischen Streuung stets etwas größer ist als der Ankerkraftfluß Φ_a und daß ihr Verhältnis durch den Streufaktor der Maschine:

$$\sigma = \frac{\Phi_0}{\Phi_a} \quad (44)$$

gegeben ist, so erhält man für die Zeitkonstante den Wert:

$$T = \sigma \frac{w}{N} \frac{a}{p} \frac{60}{n}. \quad (45)$$

Da nun

$$\frac{w}{2p} = w_p \quad (46)$$

die Windungszahl eines Erregerpoles der Maschine und

$$\frac{1}{2} \frac{N}{a} = W_a \quad (47)$$

die Windungszahl eines Ankerzweiges ist, so erhält man in:

$$T = \frac{\sigma}{2} \frac{w_p}{W_a} \frac{60}{n} \quad (48)$$

den endgültigen Ausdruck für die Zeitkonstante der Maschine, der zeigt, daß dieselbe außer von dem Streufaktor, der im allgemeinen in der Größenordnung 1,2 liegt, lediglich vom Verhältnis der Erregerwindungszahl pro Pol zur Ankerwindungszahl pro Zweig und von der Drehzahl der Maschine abhängt. Zur Erzielung kleiner Zeitkonstanten sind also vor allem schnellaufende Maschinen und sodann solche mit vielen Ankerwindungen und wenig Erregerwindungen geeignet. Die Drehzahl der Maschine n läßt sich nur selten frei wählen. Sie ist meistens aus anderen Gründen gegeben, besonders dann, wenn es sich um Gleichstromerregemaschinen handelt, die mit größeren Gleichstrom- oder Drehstrommaschinen direkt gekuppelt sind. Die Ankerwindungszahl W_a ist bei gegebenem Maschinenmodell, das nur einen bestimmten Fluß Φ_a führen kann, nach Gleichung (43) und (47) direkt durch die gewünschte Spannung bestimmt und läßt sich ebenfalls nicht beliebig wählen. Es bleibt daher zur künstlichen Erzielung kleiner Zeitkonstanten lediglich die Erregerwindungszahl w_p zur Verfügung, die nach Belieben kleingehalten werden kann. Führt man sie wesentlich kleiner aus, als es bei normalen Maschinen üblich ist, so muß man natürlich einen entsprechend größeren Erregerstrom durch die Windungen fließen lassen, um wieder auf die richtigen Amperewindungen und damit das richtige Feld der Maschine zu kommen. Die durch den Erregerstrom bewirkten Verluste werden dadurch größer als bei normalen Maschinen. Man muß dieselben unter Umständen in einem äußeren Vor-

schaltwiderstand vernichten und die Erregerwicklung selbst mit reichlichem Kupferquerschnitt bauen, um sie nicht übermäßig heiß werden zu lassen.

Man kann noch eine andere Formulierung für die Zeitkonstante der Maschine finden, in der die spezifischen Beanspruchungen der Maschine enthalten sind. Nennt man den Erregerstrom J_e , die größte Luftinduktion unter den Polen B und den magnetisch wirksamen Luftspalt der Maschine δ'' , so ist nach dem magnetischen Grundgesetz:

$$B\delta'' = \frac{4\pi}{10} J_e w_p. \quad (49)$$

Bezeichnet man andererseits den Ankerstrom mit J_a , den spezifischen Strombelag des Ankers in Amp/cm mit A und die Polteilung mit τ , so ist die gesamte Stromdurchflutung des Ankers:

$$N \frac{J_a}{2a} = 2p\tau A. \quad (50)$$

Setzt man die beiden letzten Gleichungen unter Zuhilfenahme von Gleichung (46) in Gleichung (45) ein und beachtet man, daß

$$f = \frac{pn}{60} \quad (51)$$

die elektrische Umdrehungsfrequenz im Anker darstellt, so erhält man:

$$T = \frac{5}{4\pi} \frac{\sigma J_a \delta'' B}{f J_e \tau A}, \quad (52)$$

aus der man erkennt, daß die Zeitkonstante außer von dem schon besprochenen Einfluß von Streuung und Drehfrequenz noch abhängig ist von den Verhältnissen: Ankerstrom zu Erregerstrom, Luftspalt zu Polteilung und Luftinduktion zu Strombelag. Durch Wahl von hohem Erregerstrom bei kleinem Luftspalt, sowie geringem magnetischen Feld bei starkem elektrischen Strombelag kann man die Zeitkonstante der Maschine von vornherein gering halten.

Für die Erregerzeitkonstante fremderregter Maschinen nach Gleichung (15) könnte man ähnliche Substitutionen machen wie soeben, jedoch wird man dabei nicht zu besonders bemerkenswerten Ergebnissen geführt, weil das Verhältnis des magnetischen Flusses Φ_0 und der Erregerspannung E_e ja keine absolute Konstante ist, sondern noch von der jeweiligen stationären Erregungsstärke abhängt. Im allgemeinen hat man auch bei fremderregten Maschinen, bei denen es sich meistens um große Gleichstrom- oder Wechselstromgeneratoren oder -Motoren handelt, die elektromagnetischen Verhältnisse nicht derart in der Hand, wie bei selbsterregten Maschinen, die lediglich zum Zwecke der Erregung anderer Maschinen dienen, weil ihre Verhältnisse mehr durch den Arbeitszweck der Maschinen gegeben sind. Die Formulierung der Gleichung (15) ist auch einfach genug, um im gegebenen Falle beurteilen zu können, ob es zur Erzielung kürzerer Erregungszeiten zweckmäßig ist, Windungszahl und Fluß zu verkleinern oder die Erregerspannung zu vergrößern.

6. Versuche.

Aus einer größeren Zahl von oszillographischen Messungen über die Erregungszeiten von Dynamomaschinen sollen einige typische Fälle herausgegriffen werden. Die untersuchte 4 polige Gleichstrommaschine hat eine normale Leistung von 25 kW

bei 500 U/min. Sie besitzt auf jedem der vier Magnetpole eine Windungszahl $w_p = 340$. Im Anker hat sie Reihenwicklung mit $2a = 2$ parallelen Stromkreisen, deren jeder $W_a = 36,5$ wirksame Leiter besitzt. Die Maschine ist nicht nur im Anker, sondern auch in ihren Magnetpolen und im Magnetjoch aus lamelliertem Eisen aufgebaut, wodurch die Wirbelstrombildung während des Feldanstieges oder

Abstieges wirksam verhindert wird. Ihre magnetische Charakteristik ist in Fig. 29 wiedergegeben. Der Streufaktor wurde zu $\sigma = 1,25$ bestimmt. Die Zeitkonstante der Maschine ist daher nach Gleichung (48):

$$T = \frac{1,25}{2} \cdot \frac{340}{36,5} \cdot \frac{60}{500} = 0,70 \text{ sec.} \quad (53)$$

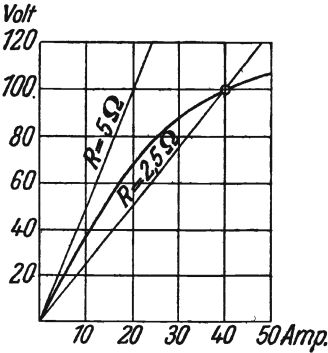


Fig. 29.

Charakteristik und Widerstandslinien der Versuchsmaschine.

In Fig. 30 sind die Ankerspannung und der Erregerstrom oszillographisch aufgenommen sowohl für das Auferregen als für das Aberregen des Feldes durch eine fremde Spannung. Dieselbe betrug 100 Volt, der Widerstand der Magnetspulen war 2,5 Ohm, und es wurde ein Vorschaltwiderstand von 20 Ohm im Erregerkreise abwechselnd eingeschaltet und kurzgeschlossen. Man sieht, daß das Auferregen innerhalb

etwa 1,5 Sekunden erfolgt, also etwa innerhalb des zweifachen Wertes der Zeitkonstante. Das Aberregen geht dagegen schneller vor sich, nämlich innerhalb einer

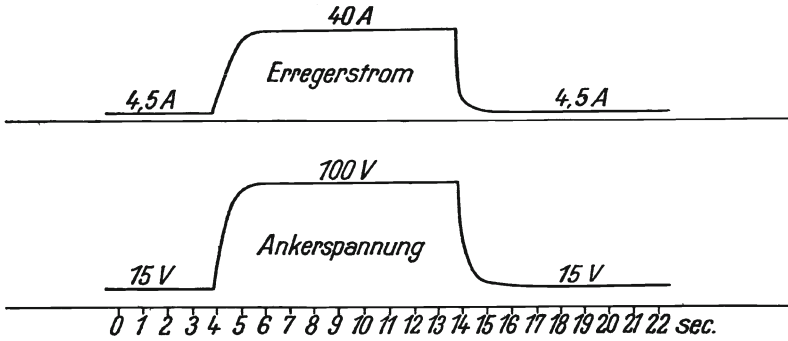


Fig. 30.

Oszillogramme der Auf- und Aberregung bei Fremderregung.

Sekunde, also des 1,5fachen Wertes der Zeitkonstante. Diese Zahlenwerte stehen in völliger Übereinstimmung mit den numerischen Zeiten, die wir aus Fig. 26 ablesen können.

Für den Selbsterregungsvorgang sind die oszillographischen Aufnahmen von Ankerspannung und Erregerstrom in Fig. 31 dargestellt und zwar für die gleiche Endspannung des Ankers von 100 Volt, wie in Fig. 30. Zum Auferregen waren hier die Erregerespulen ohne Vorschaltwiderstand an die Ankerklemmen gelegt. Zum Aberregen wurde ein zusätzlicher Widerstand von 2,5 Ohm in den Erregerkreis geschaltet, der ausreicht, die Neigung der Widerstandslinie in Fig. 29 stärker zu machen als die Anfangsneigung der Charakteristik. Da die Remanenzspannung der Maschine, bedingt durch die lamellierten Pole und Joche, außerordentlich gering

wird, so sank die Selbsterregung hierbei in einiger Zeit auf geringe Werte herab. Die Dauer der Aberregung ist etwa 10 Sekunden, also das 15fache der Zeitkonstante; andererseits ist die Dauer des Aufregungsvorganges, wenn man sie von etwa 3% der Spannung ab rechnet, um sie mit den aus der Charakteristik von Fig. 16 herge-

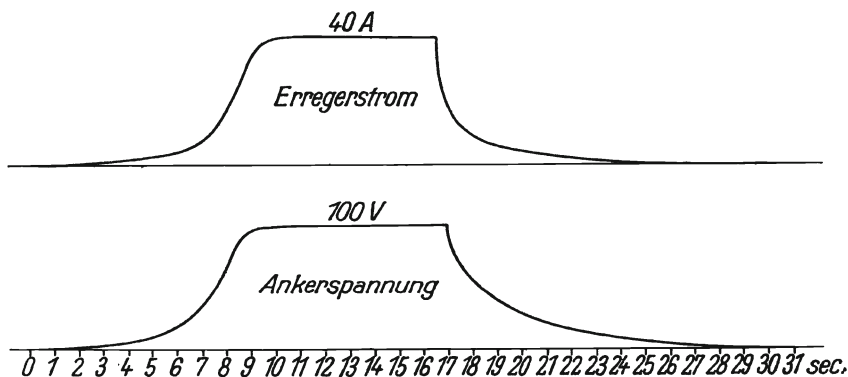


Fig. 31.

Oszillogramme der Auf- und Aberregung bei Selbsterregung.

leiteten Kurven vergleichen zu können, ca. 5,5 Sekunden, also das 8fache der Zeitkonstante. Diese Zahlenwerte stehen in Übereinstimmung mit den numerischen Selbsterregungszeiten, die wir in Fig. 19 gewonnen haben, wobei man beachten muß, daß die Sättigung der Versuchsmaschine etwa der dem Punkte 0,8 E der Charakteristik in Fig. 16 entsprach. Ein genauer Vergleich der oszillographischen Kurven in Fig. 30 und 31 mit Kurven, die aus der berechneten Zeitkonstante nach Gleichung (53) und der Charakteristik der Maschine gewonnen werden, zeigt tatsächlich völlige Übereinstimmung der gemessenen und gerechneten Erscheinungen.



Rapp

August Raps †.

Von

A. Franke.

Die junge Starkstromtechnik stellte in den achtziger Jahren des vorigen Jahrhunderts eine solche Fülle verlockender Aufgaben, daß sie die besten Kräfte an sich zog und die Bearbeitung des älteren Zweiges der Elektrotechnik darunter Schaden litt. Im Hause Siemens & Halske, in dem die selbsterregende Dynamo entstanden war, zeigte sich dieser Übelstand in erheblichem Grade. Selbst dem ebenfalls jungen und aufblühenden Fernsprechwesen wurde nicht die genügende Aufmerksamkeit gewidmet. In der Fabrikation wurden die zur wohlfeilen Massenherstellung auf diesem Gebiete unentbehrlichen Blechbearbeitungsmethoden gering geschätzt gegenüber der gewohnten Präzisionsmechanik, und der Bau größerer Fernsprechzentralen wurde nicht rechtzeitig aufgenommen. Auch die Entwicklung der Meßinstrumente wurde nicht in der früheren erfolgreichen Weise gepflegt. In klarer Erkenntnis dieses Mangels ging Wilhelm von Siemens nach einer Studienreise durch die Vereinigten Staaten an seine Behebung. Er suchte eine Kraft, welche die Neubelebung des Schwachstromgebietes führend in die Hand nehmen sollte, und fand sie in dem Privatdozenten und Assistenten am Physikalischen Institut zu Berlin, Dr. August Raps.

Die glückliche Wahl führte zu den gewünschten Erfolgen. Raps, der im Juli 1893 im Alter von 28 Jahren in die Firma eintrat und 3 Jahre später, nach dem Tode von Hermann Siemens, Direktor der im Berliner Werk verbliebenen Abteilungen für Schwachstrom, Meßinstrumente und Wassermesser wurde, hat 26 Jahre hindurch seine ganze Kraft der gestellten Aufgabe geweiht. In dieser Zeit ist aus der mit etwa 1000 Arbeitern übernommenen, fast ausschließlich für behördliche Aufträge arbeitenden Fabrik das Wernerwerk mit 17 000 Beschäftigten geworden, dessen Entwicklungsarbeit auf seinen vielseitigen Arbeitsgebieten in allen Ländern Anerkennung gefunden hat. Dazu wurde das Werk auf eine breite Grundlage gestellt: durch Befriedigung der Bedürfnisse der Privatkundschaft und Pflege der Auslandsbeziehungen der Abnehmerkreis wesentlich erweitert und überall den neuzeitlichen Forderungen durch neue Konstruktionen und Erfindungen Rechnung getragen. Beim Übergange zur Massenherstellung galt es die bewährte Präzision der Arbeit zu erhalten. Die Ähnlichkeit der Fabrikate hinsichtlich der Herstellungsmethoden erlaubte, dieselben Maschinen für alle vorkommenden Zwecke zu verwenden und dadurch deren größte und regelmäßigeste Ausnutzung zu erzielen. Insbesondere wurde hierdurch und durch zusammenfassende Organisation des Ganzen erzielt, daß Fortschritte, die auf einem Gebiete in irgendeiner Hinsicht errungen waren, den anderen ohne weiteres zugute kamen.

Im Fernsprechwesen nahm Raps vor allem alsbald nach seinem Eintritt den Ämterbau in Angriff und entwickelte diesen Zweig nach einigen Jahren mühevoller

Konstruktionsarbeit zu einem der bedeutendsten des Werkes. Später kamen die selbsttätigen Vermittlungsämter hinzu, die bis dahin in Amerika mühselig um Anerkennung rangen und in Europa nur in kleinerem Maße versuchsweise verwendet worden waren. Die Vervollkommnungs- und Einführungsarbeiten des Wernerwerks brachten sie bald zu allgemeiner Geltung. Für die Verbesserungen der Fernsprechleitungen wurde besonders durch die Entwicklung der Pupinschen Erfindung, deren Erwerb Raps 1902 in den Vereinigten Staaten selbst durchführte, gesorgt, in den letzten Jahren kamen Arbeiten an Verstärkerrelais hinzu. Telegraphie und Feuermeldewesen wurden den neueren Anforderungen entsprechend ausgestaltet, elektrische Uhren neu aufgenommen und Signalapparate entwickelt, die in Bergwerken und in der Handelsflotte, in hervorragendem Maße aber in der Kriegsmarine Einführung fanden. Die Entwicklung der elektrischen Meßinstrumente in ihrer ungeheuren Mannigfaltigkeit für technische und wissenschaftliche Zwecke, die Vervollkommnung der Wassermesserkonstruktionen, der Bau elektromedizinischer Apparate, besonders auf dem Röntgengebiete, die Herstellung von Telefunkeneinrichtungen — das alles wurde in gleichem Maße gefördert. Doch fehlt hier der Raum, um die unzähligen Arbeiten im einzelnen auch nur anzudeuten. Auch die dem Werk angegliederte elektrochemische Abteilung der Firma hat eine Reihe wichtiger Arbeiten erfolgreich durchgeführt.

Allen diesen Zweigen hat Raps jederzeit sein volles Interesse zugewendet, überall hat er anregend, aufgabenstellend, fördernd und entscheidend mitgewirkt, nicht nur bei der technischen Entwicklung, in den wissenschaftlichen und technischen Laboratorien und Konstruktionsbureaux, sondern in gleichem Maße auch in Fragen der Fabrikation, der Organisation, der Verwaltung und des Vertriebes. Auf Einzelheiten, die sein besonderes Verdienst waren, komme ich noch zurück. Die Grundbedingung seiner Erfolge war, daß er in hervorragendem Maße die Eigenschaften des Führers besaß.

Raps stammte aus Köln, und das Temperament des Rheinländers war ihm eigen. Mit dem frohen humorvollen Sinn paarte sich in ihm ein strenges Gefühl der Pflicht und Verantwortung. Wohl ein Erbteil seines früh verstorbenen Vaters, eines Malers, war ein gewisser künstlerisch-genialer Zug in seinem Wesen, der ihn mitunter die Dinge aus dem Gefühl heraus erkennen ließ, die er durch Denken noch nicht ergründen konnte. Das Gefühlsleben spielte stets eine starke Rolle bei ihm, er arbeitete immer mit dem ganzen Herzen. Erregungen, nicht nur schmerzliche, sondern auch Freude über besondere Erfolge, konnten ihn im vertrauten Kreise zu Tränen bewegen. Sein Auge strahlte, besonders in seinen jüngeren Jahren, wenn er Gelegenheit hatte, die Arbeiten des Werkes vorzuführen. Eine Dame, die einst einer solchen Vorführung beiwohnte, sagte mir: „Es muß eine Lust sein, einem Manne mit solchem Auge zu folgen.“

Bei alledem war aber seine Tätigkeit im Grunde doch vom Verstande beherrscht. Er besaß die gründliche physikalisch-wissenschaftliche Durchbildung Helmholtzscher Schule, die es ihm leicht machte, in alle die vielseitigen Probleme seiner Arbeitsgebiete einzudringen, und eine scharfe Kritik des eigenen Denkens. „Ich weiß, was ich nicht weiß“, war eines seiner Lieblingsworte. Daraus folgte eine strenge Sachlichkeit in seinen Betrachtungen und Entscheidungen; persönliche Momente, mochte es sich um seine Person oder andere handeln, mußten in den Hintergrund treten gegenüber der Förderung der Sache.

Ein dritter hervortretender Zug war sein tiefer Sinn für das Praktische, der sich in besonderer Liebe für die Fragen der Herstellung, insbesondere des Apparatebaues äußerte. Schon als Knabe hatte er sich die Pfeife für seinen ersten Rauchversuch selbst gebaut, allerdings mit dem Erfolge, daß er nie wieder rauchte. Später schenkte dem Gymnasiasten seine Mutter eine Drehbank, auf der er sich ein Spektrometer und anderes baute, und die er bis zu seinem Ende liebevoll bewahrte. Erst in der praktischen Vollendung hatte die neue Idee für ihn den wahren Wert, und nie ließ er nach in zäher Ausdauer, bevor nicht durch oft mühselige Arbeit die letzte Feinheit herausgeholt, die letzte Schwäche beseitigt war. Das gleiche verlangte er mit Ernst von seinen Mitarbeitern.

Diesen gegenüber war es sein Hauptbestreben, dem einzelnen soviel Freiheit der Betätigung zu lassen, wie die Rücksicht auf die Zusammenfassung des Ganzen irgend zuließ. Insbesondere in der technischen Entwicklungsarbeit schätzte er den Wert freier Entfaltung der Kräfte hoch und stellte ohne Engherzigkeit die Mittel dafür zur Verfügung. Fühlte sich in dieser Hinsicht ein tüchtiger Mitarbeiter durch bürokratische Vorschriften oder andere Schwierigkeiten beengt, so machte er ihm den Weg frei mit den Worten: „In diesem Hause soll keiner am Arbeiten gehindert werden.“ Aber auch auf geschäftlichem Gebiete bevorzugte er selbständige, verantwortungsfreudige Naturen mit starker Initiative. „Antreiben kann ich nicht zehn, zügeln will ich hundert.“ Die Tüchtigen förderte er nach Kräften, ohne allzuviel Rücksicht auf berufliche Vorbildung und Herkunft, selbst wenn sich mit der Tüchtigkeit unbequeme Eigenschaften paarten. „Lieber will ich mich mit einem herum-schlagen müssen, wenn er nur etwas vorwärts bringt.“ „Wir müssen sie verbrauchen, wie sie geschaffen sind, und können sie nur auf den richtigen Platz stellen.“

Bei alledem nahm er es mit dem „Zügeln“ durchaus ernst. Innerhalb der gegebenen allgemeinen Richtlinien mußte ein jeder sich halten, und wer gegen den Geist des Ganzen sündigte, fand in ihm seinen Gegner. Personen, die in dem großen Getriebe mehr Reibungen verursachten als sie Nutzen stifteten, oder mehr an das eigene Ich, als an die Förderung der Sache dachten, mußten, wenn sie nicht besserungsfähig waren, weichen. In solchen Fällen ließ er wohl auch einmal seinem Temperament den Lauf und konnte scharf und hart werden. Andererseits befähigte es ihn wieder, mit wenigen Worten zu begeistern und anzufeuern, so daß die höchsten Leistungen erzielt wurden.

So konnte es ihm durch glückliche Wahl, Erziehung und Führung einer großen Zahl hervorragender Mitarbeiter gelingen, Großes zu leisten. Dabei fand er persönlich die Zeit und Kraft, auf fast allen Gebieten technisch mitzuarbeiten durch Anregungen und Vorschläge, deren Wirkungen wir vielfach beobachten können. Er stellte die Anforderungen hoch, oft bis an die Grenze des Erreichbaren und gönnte jedem Mitarbeiter gern die Freude des Erfolges. Einzelne Erfolge beruhen aber so sehr auf seiner persönlichen Tätigkeit, sind so sehr sein eigenes Verdienst, daß ich sie hier besonders erwähnen muß.

In den ersten Jahren seines Wirkens bei Siemens & Halske war seine Tätigkeit naturgemäß hauptsächlich technischer Einzelarbeit gewidmet. Er nahm sich zunächst die Verbesserung des Regulators des Hughes-Telegraphenapparates vor, der bei seiner damaligen Konstruktion durch heftige Vibration des Apparates störend wirkte. Die Neukonstruktion von Raps ist noch heute in allgemeinem Gebrauch. Dann

setzte er den von Weston herausgebrachten Drehspulmeßinstrumenten eine gleichwertige deutsche Konstruktion entgegen. Seine Arbeiten auf dem Gebiete der Elektrizitätszähler fanden einen vorzeitigen Abschluß durch den Übergang dieses Zweiges auf die Siemens-Schuckertwerke bei deren Gründung. Die elektrische Minenzündung durch hintereinandergeschaltete Glühzünder brachte er beim Heere und in Bergwerken zur Einführung durch Ausbildung einer federgetriebenen Dynamo. Seine Übungen als Reserveoffizier der Artillerie gaben ihm Anregung, den Lautfernsprecher zur Verwendung für das artilleristische Schießverfahren auszubilden. Seine bedeutungsvollste, wenn auch in der Öffentlichkeit kaum bekannte Arbeit ist aber die Schaffung der Signaleinrichtungen für die Feuerleitung der Kriegsmarine. Wohl 20 Jahre hat er unausgesetzt an ihrer Vervollkommnung gearbeitet. Der Dank des Kaisers an die Firma nach der Schlacht am Skagerrak war eine wohlverdiente Anerkennung für seine Mühen. Einige Zeilen aus der Feder eines Mannes, der an der Entwicklung dieses Zweiges teilgenommen hat, des Herrn Konteradmiral a. D. Pieper, werden am besten ein Bild dieser Arbeit geben. Er schreibt:

„Die Energie der machtvollsten Batterie ist an sich blind. Sie bedarf, um das Ziel zu finden und zu treffen, einer der Schußentfernung entsprechenden Erhöhung und der Seitenrichtung. Diese in der Seeschlacht in raschestem Tempo wechselnden Elemente werden vom Artilleriekommandostande mit Hilfe elektrischer Geberapparate an die Geschütze übermittelt, nachdem sie teilweise sogar vorher von den Apparaten automatisch berechnet worden sind.

Alle Marinen wetteiferten hierin, die anderen an Schnelligkeit und Präzision zu überbieten. Diese Aufgabe traf in Deutschland das schöpferische Genie des Professor Raps, der mit rascher Auffassung von der hohen Bedeutung der Arbeit überzeugt war.

Seine Lebensarbeit an der deutschen Flotte hatte ihren Ehrentag in der Skagerrak-Schlacht. Alle Feuerleitungsapparate der Artillerie waren aus dem von ihm geleiteten und zur höchsten Blüte gebrachten Wernerwerk hervorgegangen. Sie haben in der Schlacht eine glänzende Feuerprobe bestanden.

Der Wert seiner Arbeit findet seinen präzisesten Beweis in der artilleristischen Leitung der Nachtkämpfe gegen feindliche Schiffe und Torpedoboote. Hier wird eine auf das höchste gesteigerte Schnelligkeit und Präzision der Artillerieleitung verlangt, da es gilt, dem Torpedo zuvorzukommen. Darum seien einige Urteile des englischen Flottenführers am Skagerrak, des Admirals Jellicoe, speziell über die Nachtkämpfe angeführt:

“The enemy at once opened a rapid and accurate fire.”

“The enemy again opened fire with great rapidity and accuracy.”

“A heavy and accurate fire was opened by the enemy.”

“There is no doubt at all that the German organisation for night action was of a remarkably high standard” . . .

“Their method of . . . bringing guns and searchlights rapidly on to any vessel sighted was excellent.”

Diese unerwartete Präzision und Schnelligkeit der deutschen Artillerie ist den Engländern als dumpfer Schreck ins Gebein gefahren.

In genialer, gewissenhafter Arbeit waren die erforderlichen Werkzeuge ausgebaut. Mit glühender Begeisterung für die deutsche Flotte hatte Professor Raps

persönlich an Bord unermüdlich die Schwierigkeiten des Schießens von bewegtem Schiff gegen bewegte Ziele studiert.

Manche Winternacht hatte er an praktischen Schießversuchen an Bord teilgenommen. Er beherrschte demgemäß die komplizierten Faktoren des Schießens auf See vollkommen.

Seine Genialität löste alle Aufgaben. Er war niemals damit zufrieden, Gutes zu leisten, sondern war stets bestrebt, die letzte Möglichkeit einer Entwicklung zu erschöpfen. Gerade die schwierigsten Aufgaben waren ihm nicht Arbeit, sondern höchste Lebensfreude seiner Meisterschaft. In jeder Phase der technischen Entwicklung steckte seine persönliche theoretische Arbeit. Jedes Instrument erprobte er praktisch persönlich und beherrschte es im Gebrauch.

Sein frisches, herzliches, glückliches Lachen, sobald ein Erfolg klar zutage trat, wird mir unvergeßlich bleiben.

Sein offenes Lachen offenbarte seinen Charakter und seine Seele, sein Vertrauen zum eigenen Können, seinen Optimismus in der Überwindung aller Schwierigkeiten. Sein charaktvoller Kopf trug das leuchtende Auge des Genies. Mit dem Genie paarte sich zähste Arbeitskraft, so daß er von Erfolg zu Erfolg schreiten und sein Lachen stets glücklich und sieghaft sein konnte. Er war ein großer und feiner Künstler in der Beherrschung der Materie wie in der Behandlung der Menschen. Seine Mitarbeiter waren von ihm so gewählt, daß sie Geist von seinem Geiste waren. Er hatte sich einen mustergültigen Stab von vorzüglich begabten Ingenieuren, vornehmen Menschen, geschaffen, denen er wiederum von ganzem Herzen jeden Erfolg gönnte.

Er versuchte stets zu beweisen und zu überzeugen. Hierin und in seinem menschenfreundlichen Wesen offenbarte sich seine hervorragende Fähigkeit, ein Beamtenkorps und ein Werk von Weltbedeutung zu leiten. Ungehemmt und wohl aufgenommen strömte sein ganzes Wesen auf seine Untergebenen über. Die Spuren seines Geistes zeigten sich bei seinem jüngsten Mitarbeiter. Es war mir allezeit eine hohe Freude und Genuß, mit ihm und seinem Stabe zu arbeiten.

Die technische Konstruktion geht durch die Hände der Arbeiter, Werkführer und Meister. An Präzision der Arbeit wurde das Höchste verlangt und geleistet. Professor Raps' Geist der Pflichttreue und Gewissenhaftigkeit war auf seine Arbeiter übertragen, die zur Elite der deutschen Arbeiterschaft gehörten. Es ist dringend zu hoffen, daß dieser Weltruf bestehen bleibt zur Ehre des deutschen Arbeiters und zum Gedeihen des deutschen Volkes.“

Zu Wilhelm von Siemens stand Raps dauernd in einem Verhältnis unbegrenzten Vertrauens. Den Blick immer auf die Fortschritte der Technik richtend, verfolgte jener die Arbeiten des Wernerwerkes mit liebevollem Interesse, nahm verschiedentlich persönlich daran teil. Wurde auch immer wieder ein großer Teil der Überschüsse der technischen Entwicklung geopfert, so daß Jahre hindurch die ausgewiesenen Gewinne nicht die Kapitalsaufwendungen für die fortwährenden Vergrößerungen zu rechtfertigen schienen, so hat doch Wilhelm von Siemens in der Überzeugung, daß die Sache ihren richtigen Weg ging, nie mit seiner vollen Unterstützung zurückgehalten.

An äußeren Ehrungen hat es Raps nicht gefehlt. Er nahm sie gern als Zeichen der Anerkennung der Leistungen des ganzen Werkes und aller seiner Mitarbeiter an.

Raps war nie ein Freund rauschender Geselligkeit. Die Erholung von seiner Arbeit schöpfte er aus der Stille seines Heims, in dem er gern in kleinem Kreise Freunde sah. Die Pflege der Musik war dabei seine besondere Freude, wozu die her-

vorragende Sangeskunst seiner Gattin viel Anregung und Gelegenheit bot. An seinen beiden Kindern hing er mit der ganzen Zärtlichkeit seines Herzens.

Meine nähere Bekanntschaft mit Raps stammt schon aus der Studienzeit; im Helmholtzschen Laboratorium lagen wir einige Monate hindurch im gleichen Zimmer unseren Arbeiten ob. Als er Direktor des Berliner Werkes wurde, veranlaßte er meinen Eintritt in die Firma; 23 Jahre hindurch habe ich die Freude gehabt, an seiner Seite, zunächst als sein Vertreter, später als sein Kollege an der erfolgreichen Arbeit teilnehmen zu dürfen. Selten wohl gelingt ein so vollständig harmonisches Zusammenarbeiten, wie es zwischen Raps und mir die langen Jahre hindurch stattfand. Obgleich natürlich jeder von uns gewissen Dingen besondere Aufmerksamkeit zuwandte, hatten wir doch nicht eigentlich getrennte Arbeitsgebiete, da jeder den anderen auf dem laufenden hielt und bei dessen Abwesenheit seine Geschäfte führte, und keine wichtige Entscheidung gefällt wurde, ohne daß wir uns gemeinsam zu einem Entschluß durchgerungen hätten, mit dem beide einverstanden waren. Gewiß waren unsere Temperamente und Veranlagungen sehr verschieden, und unsere Anschauungen konnten nicht immer übereinstimmen. Aber in keinem Falle hat uns eine Meinungsverschiedenheit zu persönlichen Verstimmungen geführt, weil zwischen uns kein anderer Wunsch aufkam, als sachlich den besten Weg zu finden.

Ich komme zum Schluß, dem traurigen, viel zu frühzeitigen Abschluß seines Lebens. Schon vor Jahren hatten sich bei ihm unliebsame Erscheinungen an den Nieren und eine Erweiterung des Herzens gezeigt, aber eine gründliche Kur und regelmäßige Erholungen in Neuenahr erhielten ihm seine Frische. Auch die schwere Zeit des Krieges überstand er gut bis auf eine vorübergehende Erkrankung. Der Zusammenbruch aber mit allen seinen schlimmen Begleiterscheinungen, der allgemeine Wirrwarr, die unerfreuliche Haltung eines großen Teils der Angestellten, vor allem die Auslieferung der deutschen Kriegsflotte und damit die Vernichtung seiner liebsten Lebensarbeit — das alles war zuviel für sein Herz, das an allem und jedem so innigen Anteil nahm. Wohl arbeitete er sich zwangsweise immer wieder zu seinem früher so selbstverständlichen Optimismus durch, wohl griff er manche Frage mit Energie an, die ihm für den Wiederaufbau am nötigsten schien — die alte Frische kehrte nicht zurück. Als dann im Oktober 1919 die Nachricht von dem Tode des von ihm so hochverehrten Wilhelm von Siemens kam, erlitt er in der folgenden Nacht einen schweren Zusammenbruch des Herzens.

Nur zweimal habe ich ihn während seiner langen Krankheit wiedersehen dürfen, da die Ärzte Aufregungen durch geschäftliche Unterhaltungen fernzuhalten wünschten, die sich zwischen uns nicht vermeiden ließen. Es waren Tage, an denen es ihm verhältnismäßig gut ging und er nicht so schwer mit der Atemnot zu kämpfen hatte. Während er sich, im Lehnstuhl sitzend, mit mir unterhielt, kam die ganze Elastizität seines Geistes wieder zum Vorschein. Zahlreiche Fragen hatte er sich notiert, die er an mich richten wollte, und Wünsche, die er mir ans Herz legte. In einer kurzen Stunde wurden alle wichtigen Dinge des Werkes, der Firma und der politischen Entwicklung besprochen, und er vermochte ihnen zu folgen wie in guten Tagen. In den letzten Worten, die er an mich richtete, kam wieder sein unzerbrechlicher Optimismus zum Durchbruch: „Das eine sehe ich klar, Franke, wenn einiges stehen bleibt in dem allgemeinen Zusammenbruch, so bleibt die Firma Siemens & Halske bestehen.“

In der Nacht vom 19. zum 20. April 1920 erlöste ihn ein sanfter Tod von seinem schweren Leiden.

Die Theorie des Drehstrom-Manteltransformers.

Von **Richard Bauch.**

Mit 44 Textabbildungen.

Mitteilung aus der Abteilung Hochspannung der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H. zu Siemensstadt.

Einleitende Bemerkungen.

Der Manteltransformer für Mehrphasenströme nach DRP 93 254, der 1895 von Kurda angegeben wurde und eine umfangreiche Anwendung gefunden hat, gehört neben dem Kerntransformer zu den wenigen Formen, die sich dauernd bewährt haben. Er zeigt eine Reihe von Vorzügen, von denen hier nur seine große mechanische Sicherheit gegen Kurzschlußströme genannt sei. Infolge seines magnetischen Aufbaues entstehen nun in diesem Transformer gewisse eigenartige Erscheinungen, die noch nicht untersucht sind, übrigens seinen praktischen Betrieb nicht gestört haben, deren noch unvollkommene Kenntnis aber gelegentlich zu Bedenken Anlaß gegeben hat. Diese zu beheben, ist der wesentliche Zweck der nachfolgenden Arbeit, die schon 1916/17 im Zusammenhange mit anderen Untersuchungen entstand und auch weiteren Fachkreisen Anregung bieten dürfte, weil sie zeigt, wie man verhältnismäßig leicht selbst sehr verwickelte Vorgänge rechnerisch verfolgen kann. Die Ergebnisse der durchgeführten Untersuchung sind am Schlusse übersichtlich zusammengefaßt. Sie zeigen, daß die fraglichen Erscheinungen praktisch geringe oder keine Bedeutung haben, so fesselnd sie auch in akademischer Hinsicht sind.

Das benutzte Rechnungsverfahren ist das der sogenannten Momentangleichung, d. h. die Vorgänge werden in ihrem momentanen Verlauf, und zwar zuerst ohne irgendwelche Annahme einer gegebenen Kurvenform der periodischen Erscheinungen usw. gefaßt. Erst wenn phasenverschobene Schwingungen zahlenmäßig addiert werden müssen, gehe ich zu der üblichen Annahme der Sinusform über. In diesem Fall benutze ich auch, wo die geometrische Berechnungsweise einfacher als die analytische oder trigonometrische ist, das sogenannte graphische Verfahren. Es ist also jede höhere Mathematik vermieden, so daß auch der Praktiker, der nur noch über die Kenntnis der niederen Algebra verfügt, die Arbeit verstehen kann. Da die Arbeit auch für den Konstrukteur verständlich sein soll, mußte ich besonders im Anfang manche rechnerische Breite in der Ableitung der einzelnen Resultate walten lassen, die man in rein theoretischen Arbeiten sonst nicht vorfindet.

Die Einfachheit des mathematischen Ausdruckes erforderte in mancher Beziehung eine Abweichung von der sonst üblichen Schreibweise. Besonders mußte ich die allgemein gebräuchlichen Symbole E und J für Spannungen und Ströme vermeiden weil ich sonst mit zuviel Indizes arbeiten müßte. Aus diesem Grunde werden die Momentanwerte von Spannungen resp. EMKEn durch die griechischen Buchstaben α , β , γ ausgedrückt. Die lateinischen Buchstaben A , B , C , D resp. a , b , c bedeuten Momentanwerte von Strömen.

Der Maximalwert einer Schwingung, also die Amplitude der Sinuswelle, wird durch ein ' hinter dem betreffenden Buchstaben angedeutet. Der Index (-) bedeutet, daß diese Schwingung gegenüber ihrem ursprünglichen Wert um 90° in der Phase nacheilt.

E_Y resp. E_Δ bezeichnet die Sternspannung (auch Phasenspannung genannt) resp. die Dreieckspannung (auch verkettete Spannung).

Wird ein Buchstabe, der in der Rechnung den Momentanwert einer Spannung oder eines Stromes bezeichnet, als Index des φ benutzt, dann heißt dies, daß dieser Phasenverschiebungswinkel zu der im Index angegebenen Größe gehört. Dabei wird der Winkel φ stets positiv gezählt, nacheilendes φ wird also ausdrücklich in den Formeln als $-\varphi$ geschrieben.

Um die Rechnungen nicht zu sehr zu komplizieren, sind sie auf konstantes μ bezogen. Dadurch entsprechen die Resultate verschiedentlich nicht dem praktischen Verhalten, weil die Permeabilität im Manteltransformer unter Umständen sehr verschiedene Größen annehmen kann. Ich glaubte aber diese Vereinfachung in den meisten Fällen machen zu können, weil es sich im vorliegenden nicht darum handelt, den Einfluß der Permeabilität zu zeigen, sondern die Wechselwirkung der verschiedenen MMKe auf die Eisenwege möglichst klar hervortreten zu lassen. Würde ich die Änderung der Permeabilität stets berücksichtigt haben, dann würde sie die Resultate verschleiern, derart, daß man nicht mehr klar sehen kann, was ist die Folge der Wechselwirkung der MMKe und was ist die Folge der Änderung von μ .

Der Drehstrom-Manteltransformer unterscheidet sich in einer wichtigen Beziehung grundsätzlich vom Drehstrom-Kerntransformator. Bei letzterem bildet das Joch einen magnetischen Knotenpunkt, in dem die Kraftlinien der 3 Schenkel derart

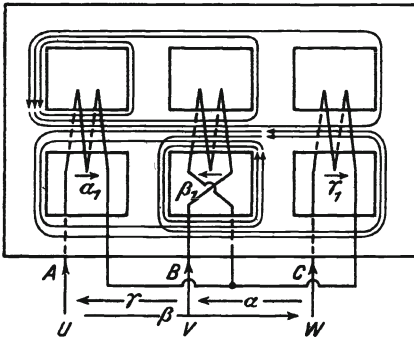


Fig. 1.

zusammentreffen, daß stets die Summe der Fluxe aller 3 Schenkel (abgesehen von der Jochstreuung) gleich Null sein muß. Beim Manteltransformer ist dies anders. Gesetzt den Fall, die eine Außenspule, Fig. 1, wäre allein erregt, dann bieten sich dem Flux beim Verlassen des linken Schenkels 3 Wege¹⁾: Ein Teil des Fluxes kann sich unmittelbar durch die ersten Querstege und Joch schließen, während ein Teil durch die zweiten Querstege und der dritte erst durch die Schlußstege und alle 3 Joche zum Schenkel zurückfließen kann. Schließt man also die mittlere und die

rechte Außenspule kurz und erregt nur die linke Außenspule, dann kann ein Flux bestehen, ohne daß die Summe der Fluxe in allen 3 Spulen gleich Null ist. Demzufolge ist auch die Summe der 3 EMKe nicht gleich Null.

Es ist also die (magnetische) Kopplung der 3 Spulen nicht vollkommen.

Andererseits unterscheiden sich aber auch die Verhältnisse von denen, die bei der Sternschaltung von 3 Einphasen-Transformern auftreten. Es teilt sich zwar in beiden Fällen der Strom beim Austritt aus einer Spule, um durch die beiden anderen

¹⁾ In Fig. 1 ist der Kraftlinienweg nur auf je einer Hälfte der Figur angedeutet.

parallel liegenden zu fließen. Es besteht aber noch die magnetisch leitende Verbindung zwischen allen 3 Kernen. Daraus ergeben sich ganz eigenartige Vorgänge, die wir später kennenlernen werden.

Zur Lösung der Aufgabe betrachten wir die Vorgänge in einem unendlich kleinen Zeitintervall, d. h. wir arbeiten mit Momentangleichungen. Dementsprechend bezeichnen die Pfeile in den Figuren nur die Richtung in der der positive Wechsel der betreffenden Schwingung verläuft. Das richtige Vorzeichen, soweit dies vom angenommenen abweicht, ergibt dann das Rechnungsergebnis.

Es bedeutet: α, β, γ die aufgedrückten Spannungen
 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ die EMKe in den Spulen
 Φ_A, Φ_B, Φ_C die $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ induzierenden Fluxe
 A, B, C die aufgenommenen Ströme.

I. Y/Y-Schaltung, a) unbelastet.

Wir wissen nur, daß

$$(1) \quad \alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \text{und}$$

$$(2) \quad A + B + C = 0 \quad \text{ist.}$$

Unter Übertragung der Kirchhoffschen Regeln auf magnetische Vorgänge erhalten wir dann folgende Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der 9 Unbekannten, wenn wir die verschiedenen Konstanten gleich 1 setzen.

$$(3) \quad A - 2 \Phi_A \cdot W - (2 \Phi_A + \Phi_B) w = 0 = A - 2 \Phi_A (W + w) - \Phi_B \cdot w^1)$$

$$(4) \quad B - 2 \Phi_B (W + w) - (\Phi_A + \Phi_C) w = 0^1)$$

$$(5) \quad C - 2 \Phi_C (W + w) - \Phi_B \cdot w = 0^1)$$

$$(6) \quad \alpha_1 = F(\Phi_A)$$

$$(7) \quad \beta_1 = F(\Phi_B)$$

$$(8) \quad \gamma_1 = F(\Phi_C)$$

$$(9) \quad \alpha + \beta_1 - B \cdot r + C \cdot r - \gamma_1 = 0$$

$$(10) \quad \beta + \gamma_1 - C \cdot r + A \cdot r - \alpha_1 = 0$$

$$(11) \quad \gamma + \alpha_1 - A \cdot r + B \cdot r - \beta_1 = 0.$$

Hierin bedeutet

W = magnetischer Widerstand der Kernbalken und Jochbalken

w = magnetischer Widerstand der Querstege

r = elektrischen Widerstand jeder Spule.

Setzen wir $2(W + w) = Kw$ und vernachlässigen wir vorläufig den ohmschen Spannungsverlust, dann haben wir

$$(3a) \quad A - Kw \cdot \Phi_A - w \cdot \Phi_B = 0$$

$$(4a) \quad B - Kw \cdot \Phi_B - (\Phi_A + \Phi_C) \cdot w = 0$$

$$(5a) \quad C - Kw \cdot \Phi_C - \Phi_B \cdot w = 0$$

$$(9a) \quad \alpha = \gamma_1 - \beta_1$$

$$(10a) \quad \beta = \alpha_1 - \gamma_1$$

$$(11a) \quad \gamma = \beta_1 - \alpha_1$$

¹⁾ In diesen Gleichungen ist der Einfachheit halber w für alle Querstege gleich groß angenommen, was selbst bei gleichen Abmessungen infolge der verschiedenen Dichten nicht ganz zutrifft.

Mittels Determinanten erhalten wir dann aus (3a) bis (5a)

$$(12) \quad \Phi_A \cdot K(K^2 - 2)w = A(K^2 - 1) - B \cdot K + C$$

$$(13) \quad \Phi_B \cdot K(K^2 - 2)w = B \cdot K^2 - (A + C) \cdot K$$

$$(14) \quad \Phi_C \cdot K(K^2 - 2)w = C(K^2 - 1) - B \cdot K + A$$

Addieren wir zu (12) noch $+A - A = 0$, dann erhalten wir

$$A(K^2 - 2) + (A + C) - B \cdot K = \Phi_A \cdot K(K^2 - 2)w$$

und unter Einsetzung von (2)

$$(15) \quad \Phi_A = \frac{A(K^2 - 2) - B(K + 1)}{K(K^2 - 2)w}.$$

Die gleiche Einsetzung gibt uns

$$(16) \quad \Phi_B = \frac{B \cdot K(K + 1)}{K(K^2 - 2)w}$$

Analog (15) erhalten wir

$$(17) \quad \Phi_C = \frac{C(K^2 - 2) - B(K + 1)}{K(K^2 - 2)w}.$$

Wir sehen aus (15) bis (17), daß sich die beiden Außenspulen ähnlich verhalten und daß die Innenspule stark von ihnen abweicht.

Das Verhalten der Spulen bei Erregung einer einzelnen können wir aus (12) bis (14) ersehen, indem wir 2 Ströme gleich Null setzen. Wir betrachten hierbei einen Transformator, in dem $W = w$ also $k = 4$ ist.

a) Eine Außenspule erregt: $B = C = 0$

$$\Phi_A = 1,07 \frac{A}{Kw} = 1,07 \cdot \Phi_1$$

$$\Phi_B = -0,286 \frac{A}{Kw} = -0,286 \cdot \Phi_1$$

$$\Phi_C = 0,0714 \frac{A}{Kw} = 0,0714 \cdot \Phi_1,$$

wenn $\Phi_1 = A/K \cdot w$ der Flux eines Einphasen-Manteltransformers gleicher Abmessungen wie Kern, Querstege und Joch sie haben, ist.

b) Die Mittelspule erregt: $A = C = 0$

$$\Phi_A = -0,286 \cdot \Phi_1$$

$$\Phi_B = +1,142 \cdot \Phi_1$$

$$\Phi_C = -0,286 \cdot \Phi_1.$$

Der Einfluß ein- und desselben Magnetisierungsstromes ist also sehr verschieden und zwar nicht nur mit Bezug auf die anderen Spulen, sondern auch auf die eigene Spule. Bei dieser Rechnung ist μ für alle Fälle gleich groß angenommen, um die Betrachtungen dieser praktisch belanglosen Fälle nicht zu komplizieren.

Die Betrachtung der Gleichungen (15) bis (17) zeigt uns bereits verschiedene, interessante Eigenheiten des Manteltransformers.

I. Aus dem symmetrisch zu (16) gefügten Bau von (15) und (17) geht hervor, daß A und C unter sich gleiche Kurvenform haben müssen, wobei die eine Welle das Spiegelbild der anderen sein kann, und das bei Abweichung von der Sinusform B andere Gestalt hat als A und C .

II. Bei Sinusform haben A und C anderen Effektivwert als B .

III. Die Phasenverschiebung zwischen A und C ist bei Sinusform anders als zwischen A und B resp. C und B .

IV. Infolge der verschiedenen Kurvenform können die Stromwellen Harmonische dreifacher Ordnung enthalten. Es muß nur sein $A_3 + C_3 = -B_3$.

V. Es können in den Fluxen Harmonische dreifacher Ordnung auftreten infolge der verschiedenen Wege der Einzelfluxe. Doch muß mit Rücksicht auf (9a) bis (11a) die Amplitude dieser Glieder in allen 3 Wellen den gleichen Wert haben, selbst wenn die Grundharmonischen verschiedene Amplituden haben.

VI. Φ_A und Φ_C , infolgedessen auch α_1 und γ_1 haben unter sich gleichen aber von Φ_B resp. β_1 abweichenden Mittelwert.

Das Auftreten von Harmonischen dreifacher Ordnung ist eine Eigenschaft des Manteltransformers¹⁾ gegenüber dem Kerntransformator, dessen 3 Kraftlinienwege wenigstens theoretisch gleich groß sind und in einem Punkt vereint sind. Infolgedessen können beim Kerntransformator in den EMKen nur so schwache Harmonische dreifacher Ordnung auftreten, als von Joch zu Joch magnetisch gestreut werden können. Im Magnetisierungsstrom des Kerntransformers können theoretisch überhaupt keine Harmonischen dreifacher Ordnung auftreten, weil die 3 Ströme theoretisch gleiche Größe, Kurvenform und Phasenverschiebung haben müssen.

Aus den Folgerungen I bis III und Bedingungsgleichung (2) folgt für Sinuskurven

$$(18) \quad B' = 2 A' \cos \xi,$$

wenn A' , B' , die Amplituden der Stromwellen A und B und ξ der halbe Phasenverschiebungswinkel zwischen A' und C' ist, Fig. 2.

Wir wollen jetzt A' , B' und C' bestimmen. Hierfür nehmen wir je einen theoretischen Flux für die Klemmenspannungen an, also

$$\alpha = F(\Phi_\alpha)$$

$$\beta = F(\Phi_\beta)$$

$$\gamma = F(\Phi_\gamma)$$

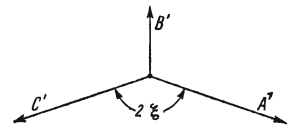


Fig. 2.

Aus (6) bis (7), (9a) bis (11a) und (15) bis (17) erhalten wir dann

$$(19) \quad \Phi_\alpha = \frac{C(K^2 - 2) - B(K + 1)^2}{K(K^2 - 2)w}$$

$$(20) \quad \Phi_\beta = \frac{(A - C)(K^2 - 2)}{K(K^2 - 2)w}$$

$$(21) \quad \Phi_\gamma = \frac{B(K + 1)^2 - A(K^2 - 2)}{K(K^2 - 2)w}.$$

Fig. 3 zeigt das Diagramm dieser Fluxe für gleiche Amplituden aller 3 Dreiecksspannungen.

Danach ist

$$\Phi'_\Delta = (A' + C') \frac{K^2 - 2}{K(K^2 - 2) \cdot w} \cdot \sin \xi.$$

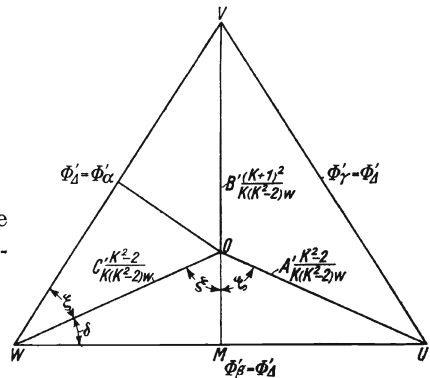


Fig. 3.

¹⁾ Es ist dies kein Nachteil.

Da $A' = C'$ so folgt

$$A' = C' = \Phi'_{\Delta} \cdot Kw \frac{1}{2 \sin \xi}.$$

Nun ist

$$\Phi'_{\Delta} = \sqrt{3} \cdot \Phi'_1.$$

Bezeichnen wir mit i_1 den effektiven Magnetisierungsstrom des entsprechenden Einphasen-Transformers, so daß

$$\sqrt{2} \cdot i_1 = \Phi'_1 \cdot Kw$$

ist, dann ist

$$(22) \quad A' = C' = i_1 \cdot \sqrt{2} \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \xi}.$$

Aus (18) folgt

$$A' = B' \frac{1}{2 \cos \xi}.$$

Setzt man A' aus (22) in (18) ein, dann erhält man

$$(23) \quad B' = i_1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cotg \xi.$$

Wir bestimmen jetzt ξ . In Fig. 3 ist

$$\overline{VM} = \overline{VW} \cdot \cos 30^\circ = \Phi'_{\Delta} \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Außerdem ist

$$\overline{VM} = B' \frac{(K+1)^2}{K(K^2-2)w} + A' \frac{K^2-2}{K(K^2-2)w} \cdot \cos \xi.$$

Hierin den aus (18) folgenden Wert eingesetzt, gibt

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \frac{i_1 \cdot \sqrt{2}}{Kw} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} &= B' \frac{1}{K(K^2-2)w} \cdot \left\{ (K+1)^2 + \frac{1}{2}(K^2-2) \right\} \\ &= \frac{i_1 \cdot \sqrt{2}}{Kw} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cotg \xi \frac{2(K+1)^2 + (K^2-2)}{K^2-2} \end{aligned}$$

also

$$(24) \quad \operatorname{tg} \xi = \frac{2(K+1)^2 + (K^2-2)}{(K^2-2) \cdot \sqrt{3}} = \frac{K \cdot [3(K+1) + 1]}{\sqrt{3}(K^2-2)}.$$

Wir sehen, daß die Effektivwerte der Magnetisierungsströme $\frac{A'}{\sqrt{2}} = \frac{C'}{\sqrt{2}} = i_a$ und $\frac{B'}{\sqrt{2}} = i_m$ (i_a = Magnetisierungsstrom einer Außenspule, i_m = demselben der Mittelspule) sowohl von dem eines korrespondierenden Einphasen-Transformers als auch unter sich abweichen, und zwar ist diese Abweichung eine Funktion der aus den konstruktiven Verhältnissen folgenden Konstante K . Tabelle I und Fig. 4

Tabelle I.

$\frac{W}{w}$	K	$\varphi = 180^\circ - \xi$	$\frac{i_m}{i_1}$	$\frac{i_a}{i_1}$	$\frac{i_a}{i_m}$
0	2	99° 50'	0,3	0,879	2,93
4	1	110° 45'	0,658	0,927	1,41
2	6	114° 5'	0,773	0,944	1,222
3	8	115° 35'	0,831	0,962	1,156
4	10	116° 30'	0,864	0,967	1,120

geben die hierauf bezüglichen Größen abhängig von K . Das darin angegebene Verhältnis $\frac{i_a}{i_m}$ ist nach (22) und (23)

$$(25) \quad \frac{i_a}{i_m} = \frac{1}{2 \cos \xi}.$$

Beim Kerntransformer ist $\xi = 60^\circ$ und $i_a = i_m$. Die Kurve für $\frac{i_a}{i_m}$ nähert sich asymptotisch dem Wert 1, so daß ein Manteltransformer für $K = \infty$ dieselben Verhältnisse seiner Magnetisierungsströme aufweist wie ein Kerntransformer. Dies geht auch aus (24) hervor. In der Praxis ist das Verhältnis $\frac{i_a}{i_m} = 1$ nie zu erreichen, gleichgültig wie man die magnetischen Abmessungen, μ usw. auch wählen mag.

Wichtig ist die Abweichung, die φ durchweg gegen 120° aufweist, d. h. gegen die Verschiebung, die die Sternspannungen des Netzes hat. Daraus ergibt sich, daß selbst bei vollständigem Mangel an Leerverlusten eine Messung mit 3 Wattmetern, deren Stromspulen in je eine Zuführung zum Transformer und deren Spannungsspulen zwischen je eine Stromzuführung

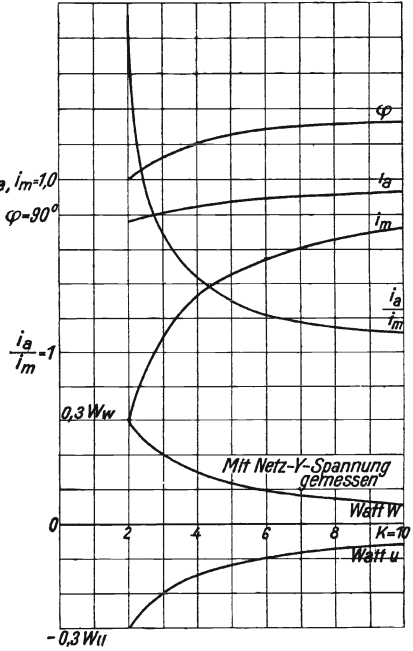


Fig. 4.

und den Netznullpunkt geschaltet wird, nicht überall den Ausschlag Null ergeben kann. Dies trifft nur bei dem Instrument zu, das an die Zuführung zur mittleren Spule V angeschlossen ist, während die mit den beiden Außenspulen U und W verbundenen etwas anzeigen müssen. Und zwar schlägt das eine Wattmeter positiv und das andere negativ aus. Ohne Leerverluste sind beide Ausschläge gleich groß. Die Kernverluste addieren wir zu je einem Drittel zu den aus den Magnetisierungsströmen folgenden¹⁾. Es wird also das mit der mittleren Spule verbundene Wattmeter $\frac{1}{3}$ der gesamten Kernverluste anzeigen. Das zweite Wattmeter zeigt mehr an, das dritte weniger, wobei letzterer Ausschlag positiv oder negativ sein kann.

Tabelle II zeigt die aus den Werten der Tabelle I berechneten Phasenverschiebungen der 3 Magnetisierungsströme gegen die 3 Sternspannungen des Netzes und die sich aus ihnen und den Leerströmen ergebenden Watt, wobei als Leerstrom der

Tabelle II.

K	Zeitwinkel von						Phasenverschiebung			Watt		
	i_u	i_v	i_w	E_{Y_u}	E_{Y_v}	E_{Y_w}	i_u/E_{Y_u}	i_v/E_{Y_v}	i_w/E_{Y_w}	u	v	w
2	+ 9° 50'	- 90°	- 189° 50'	+ 120°	0°	- 120°	110° 10'	90°	69° 50'	- 0,303	0	+ 0,303
4	+ 20° 45'	- 90°	- 200° 45'	+ 120°	0°	- 120°	99° 15'	90°	80° 45'	- 0,148	0	+ 0,148
6	+ 24° 5'	- 90°	- 204° 5'	+ 120°	0°	- 120°	95° 55'	90°	84° 5'	- 0,097	0	+ 0,097
8	+ 25° 35'	- 90°	- 205° 35'	+ 120°	0°	- 120°	94° 25'	90°	85° 35'	- 0,074	0	+ 0,074
10	+ 26° 30'	- 90°	- 206° 30'	+ 120°	0°	- 120°	93° 30'	90°	86° 30'	- 0,059	0	+ 0,059

¹⁾ Das gilt nur für den Fall, daß die Verlustwatt sich gleichmäßig auf die drei Spulen verteilen, was nicht genau zutrifft. Für den vorliegenden Zweck ist die Annahme gleichmäßiger Verteilung aber angebracht.

Zahlenwert der fünften Spalte von Tabelle I eingesetzt ist. Fig. 4 zeigt die Kurven der Watt.

Auf eine ähnliche Erscheinung hat Rudolf Goldschmidt¹⁾ beim Kerntransformator hingewiesen. Auch dort sind die Magnetisierungsströme und die von den einzelnen Spulen aufgenommenen Watt verschieden. Die Ursache ist in beiden Fällen verschieden: Beim Kerntransformator sind die magnetischen Widerstände verschieden groß, der von der mittleren Spule erregte ist kleiner als der von jeder Außenspule erregte. In dem hier betrachteten Fall dagegen sind die magnetischen Widerstände gleich groß angenommen; die Verschiedenheit wird hier durch die verschiedene Beeinflussung jedes Kerns durch die 3 Spulen bedingt.

Wir berechnen jetzt die EMKE in den Spulen. Zu diesem Zweck setzen wir in (15) und (16) die Werte für A' und B' aus (22) und (23) ein, indem wir sinusförmigen Verlauf aller Schwingungen annehmen.

Der Effektivwert der EMK E_{Ym} in der mittleren Spule ist direkt proportional der Amplitude des Fluxes Φ_B , also proportional Φ'_B . Letzterer wieder ist proportional der Amplitude des erregenden Stromes, so daß

$$\Phi'_B = B' \frac{K(K+1)}{Kw(K^2-2)} = \frac{i\sqrt{2}}{Kw} \cdot \sqrt{3} \frac{K(K+1)}{K^2-2} \cotg \xi.$$

Hierin den reziproken Wert von (24) eingesetzt, gibt

$$\Phi'_B = \Phi'_1 \frac{3(K+1)}{3K+4}.$$

Da wir die Verhältnisse in einem Drehstromsystem betrachten, müssen wir 3 nach Stern geschaltete Einphasen-Transformer zum Vergleich heranziehen und demzufolge

$$\Phi_1 = \Phi_Y \text{ resp. } E_1 = E_Y$$

setzen, wenn Φ_Y der, der Sternspannung E_Y des Netzes entsprechende Flux ist. Also

$$(26) \quad E_{Ym} = E_1 \frac{3(K+1)}{3(K+1)+1}.$$

Zur Berechnung von Φ_A resp. der ihm proportionalen EMK in einer Außenspule E_{Ya} dient das Diagramm Fig. 5. Es ist

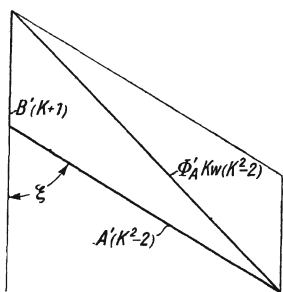


Fig. 5.

$$\Phi'_A \cdot Kw \cdot (K^2 - 2) = \sqrt{A'^2(K^2 - 2)^2 + B'^2(K + 1)^2 + 2A'B'(K^2 - 2)(K + 1) \cos \xi}.$$

Hierin die Werte von (22) und (23) eingesetzt, gibt

$$\Phi'_A \cdot Kw(K^2 - 2) \cdot 2 \sin \xi = i_1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \sqrt{(K^2 - 2) + (K + 1) \cdot 4 \cos^2 \xi [(K + 1) + (K^2 - 2)]},$$

also

$$(27) \quad E_{Ya} = E_Y \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \xi} \sqrt{1 + 4 \cos^2 \xi [(K + 1) + (K^2 - 2)] \frac{K + 1}{(K^2 - 2)^2}}.$$

Es ist nun noch die Phasenverschiebung zwischen E_{Ym} und E_{Ya} zu bestimmen. Wir setzen zu diesem Zweck

$$B = B' \sin \omega t$$

$$A = A' \sin(\omega t + 180^\circ - \xi)$$

¹⁾ ETZ. 1900, S. 991.

in dem Zähler von (15) ein. Dann ist in der Formel

$$M \cdot \sin \delta + N \sin(\delta - \varphi) = (M^2 + N^2 + 2MN \cos \varphi)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(\delta - \zeta)$$

$$M = B'(K + 1)$$

$$N = A'(K^2 - 2)$$

$$\delta = \omega t + 180^\circ$$

$$\varphi = \xi$$

$$\zeta = \arctg \frac{N \sin \varphi}{M + N \cos \varphi}$$

also

$$(28) \quad \zeta = \arctg \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \left[2 + \frac{K}{K+2} \right] \right\}.$$

Der Vektor Φ'_A liegt dann im Vektordiagramm um $180^\circ - \zeta$ vor dem Vektor Φ'_B .

Wir haben jetzt die Gleichungen für die EMKe sämtlich abgeleitet. Tabelle III und Fig. 6 zeigt den Einfluß von K auf dieselben.

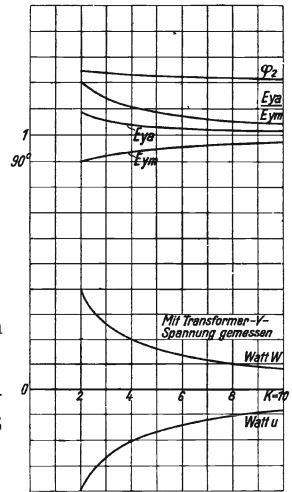


Fig. 6.

Tabelle III.

K	$\varphi_B = 180^\circ - \zeta$	$\frac{E_{Ym}}{E_Y}$	$\frac{E_{Ya}}{E_Y}$	$\frac{E_{Ya}}{E_{Ym}}$
2	124° 40'	0,900	1,085	1,206
4	123° 0'	0,938	1,038	1,106
6	122° 10'	0,955	1,024	1,072
8	121° 40'	0,965	1,022	1,060
10	121° 20'	0,971	1,013	1,044

Diese Tabelle III und Fig. 6 zeigen nun verschiedenes Interessante: Erstens folgt aus der Verschiedenheit der EMKe, daß der sogenannte Nullpunkt des Transformers selbst dann, wenn seine 3 Klemmen mit Leitern gleicher Kapazität gegen Erde verbunden sind, nicht das Potential Null gegen Erde hat. Für $K = 4$ z. B. weicht E_{Ym} vom Erdpotential um $E_Y - E_{Ym} = 1 - 0,938 \approx 6\%$ ab. Daraus folgt, daß entweder die an den Transformer angeschlossenen Leiter verschieden große Ladeströme führen, indem sie verschiedenes Potential gegen Erde haben, oder — wenn ihnen durch irgendwelche Verhältnisse gleiches mittleres Potential aufgezwungen wird — daß bei Erdung des Transformer-Nullpunktes ein Ausgleichstrom zwischen ihm und Erde fließt. Letzteres gilt auch für Parallelschaltung von Mantel- und Kerntransformatoren bei gleichzeitiger Verbindung der Nullpunkte. Außerdem aber zeigen die Tabellen, daß bei der üblichen Ausführung der Transformer mit gleichem Querschnitt für alle 3 Kerne die gemachten Annahmen über die Verhältnisse der magnetischen Widerstände nicht zutreffen. Ehe wir aber den Einfluß betrachten, den die magnetischen Verschiedenheiten zwischen innerem und den beiden äußeren Systemen ausüben, wollen wir unsere Aufmerksamkeit der Phasenverschiebung zuwenden, die die EMKe in den beiden äußeren Spulen gegen die der mittleren Spule aufweisen. Diese Phasenverschiebungen weichen von der theoretischen (120°) ab. Sie weichen aber auch von denen ab, die die Magnetisierungsströme der beiden Außenspulen gegen den der Innenspule besitzen. Da nun der letztere um 90° gegen die EMK der Innenspule

voreilen muß, so folgt aus der Verschiedenheit der Phasenverschiebungen, daß auch dann, wenn die Wattmeter das Produkt aus Leerstrom und Sternspannung des Transformers selbst messen, das Wattmeter an einer Außenspule negativ ausschlagen muß, während das an der anderen positiv ausschlägt. Tabelle IV gibt die Zahlen, während Fig. 6 die beiden Kurven gibt.

Tabelle IV.

K	Phasenverschiebung von			$\frac{i_a}{i_1}$	$\frac{E_{Y a}}{E_Y}$	Watt Außenspule
	i_a gegen i_m	$E_{Y a}$ gegen $E_{Y m}$	i_a gegen $E_{Y a}$			
2	99° 50'	124° 40'	90° ± 24° 50'	0,879	1,035	± 0,400
4	110° 45'	123° 0'	90° ± 12° 15'	0,927	1,038	± 0,204
6	114° 5'	122° 10'	90° ± 8° 5'	0,944	1,024	± 0,136
8	115° 35'	121° 40'	90° ± 6° 5'	0,962	1,022	± 0,104
10	116° 30'	121° 20'	90° ± 4° 50'	0,967	1,013	± 0,083

Um den Einfluß magnetischer Unterschiede zwischen dem inneren System und den beiden Außensystemen zu studieren, brauchen wir nur eine Hälfte des Eisengerüsts zu betrachten, nämlich die oberhalb der Mittellinie in Fig. 7 gelegene.

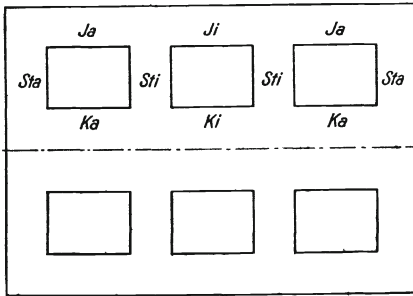


Fig. 7.

Die korrespondierenden Kernbalken und Jochbalken führen die gleichen magnetischen Flüsse, so daß in ihnen gleiche Dichten und bei gleichem Querschnitt auch gleiche Permeabilitäten vorhanden sind. Es ist also, wenn die Indices auf die Teile der Fig. 7 hinweisen

$$W_{K i} = W_{J i}$$

$$W_{K a} = W_{J a}.$$

Die beiden Außenstege $St a$ führen die gleichen Flüsse wie die ihnen benachbarten Balken $K a$ und $J a$, so daß für sie noch die Gleichung gilt

$$2(W + w) = K w,$$

wenn wir annehmen, daß $w_{St i} = w_{St a}$ ist. Das trifft nicht zu. Immerhin ist die Dichte in $St i$ nicht so sehr von der in $St a$ verschieden, wie die in $K i$ von der in $K a$. Setzen wir den Widerstand von $K i$ und von $J i$ gleich zW gegenüber dem von $K a$ und $J a$, den wir gleich W setzen, dann haben wir annähernd für das innere System den Gesamtwiderstand

$$2(zW + w) = m \cdot w.$$

Für die folgenden Zwecke sind diese Widerstandsgleichungen genau genug.

Die Bedingungsgleichungen (3) bis (5) lauten dann nach Einführung dieser Modifikationen

$$(3b) \quad \Phi_A \cdot K w + \Phi_B \cdot w = A$$

$$(4b) \quad \Phi_B \cdot m w + \Phi_A \cdot w + \Phi_C \cdot w = B$$

$$(5b) \quad \Phi_C \cdot K w + \Phi_B \cdot w = C.$$

Hieraus erhalten wir

$$(15b) \quad \Phi_A = \frac{A(mK - 2) - B(K + 1)}{K w(mK - 2)}$$

$$(16b) \quad \Phi_B = \frac{B \cdot K (K + 1)}{K w (m K - 2)}$$

$$(17b) \quad \Phi_C = \frac{C (m K - 2) - B (K + 1)}{K w (m K - 2)}$$

Für die Magnetisierungsströme gelten auch hier die Gleichungen (22) und (23) unverändert. Wir erhalten dann auf uns bekanntem Wege

$$(26b) \quad E_{Ym} = E_1 \frac{3(K + 1)}{2(K + 2) + m}$$

$$(27b) \quad E_{Ya} = E_1 \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \xi} \cdot \sqrt{1 + [(K + 1) + (m K - 1)] \frac{K + 1}{(m K - 1)^2} 4 \cos^2 \xi}$$

worin

$$(24b) \quad \xi = \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{K [m + 2(K + 2)]}{m K - 2}$$

Die Phasenverschiebung zwischen den Magnetisierungsströmen ist dann bestimmt durch

$$(28b) \quad \operatorname{tg} \zeta = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left[1 + 2 \frac{K + 1}{m + 2} \right]$$

z ist stets kleiner als 1. Wir berechnen nun einen Fall für $z = 0,5$ bis $z = 0,9$ bei $K = 4$. Die Resultate zeigt Tabelle V und Fig. 8.

Tabelle V.

z	m	$180^\circ - \xi$	$\frac{i_a}{i_1}$	$\frac{i_m}{i_1}$	$180^\circ - \zeta$	$\frac{E_{Ym}}{E_1}$	$\frac{E_{Ya}}{E_1}$
0,4	2,8	105°	0,895	0,465	119° 20'	1,014	0,992
0,5	3,0	106°	0,901	0,500	120° 0'	1,000	1,000
0,6	3,2	107° 10'	0,906	0,533	120° 40'	0,987	1,005
0,7	3,4	108° 10'	0,911	0,565	121° 15'	0,975	1,013
0,8	3,6	109°	0,917	0,595	121° 55'	0,962	1,018
0,9	3,8	109° 50'	0,922	0,628	122° 25'	0,950	1,025

Wir können nun diese Tabelle dazu benutzen, um das Verhalten eines Manteltransformers bei verschiedenen primären Spannungen zu studieren. Wie bereits bemerkt, trifft die Annahme gleichen Widerstandes für alle 3 Kerne oder Jochbalken nicht zu, weil den Verschiedenheiten der EMKe in den Spulen auch Verschiedenheiten der magnetischen Dichten und damit auch der Widerstände entsprechen müssen. Da nun μ nicht konstant ist, muß das Verhältnis der Widerstände beim gleichen Verhältnis der EMKe für verschiedene mittlere Dichten variieren. Wenn man also für verschiedene angenommene E_1 die einzelnen nach Tabelle V aus z folgenden Werte E'_{Ym} und E'_{Ya} entnimmt und die ihnen entsprechenden B_m und B_a berechnet, so folgen aus einer Magnetisierungskurve verschiedene magnetische Widerstände der Schenkel und der Jochbalken W_m und W_a . Daraus ergibt sich wieder für jedes angenommene z ein anderes Verhältnis z' . Nimmt man nun verschiedene

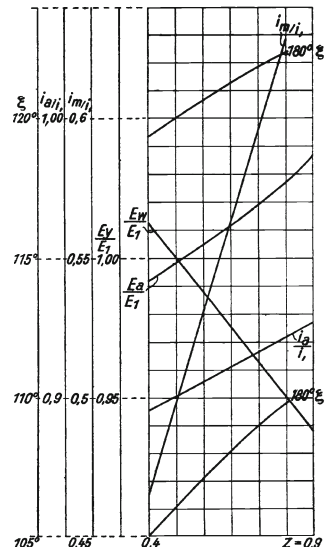


Fig. 8.

B_1 an und trägt für die aus Tabelle V folgenden Werte $\frac{E_{Ya}}{E_1}$ das Verhältnis z und das Verhältnis z' als Funktion von $\frac{E_{Ya}}{E_1}$ in Kurvenform auf, dann werden sich beide Kurven in einem Punkt schneiden. Hierdurch erhalten wir ein B_a , für das wir dann aus Fig. 8 die betreffenden anderen Werte ablesen können. Den Rechnungsgang zeigt Tabelle VI für $B_1 = 14\ 000$ Gauß. Aus der dazugehörigen Fig. 9 erhalten wir $z' = 0,705 = z$ für $B_a = 14\ 175$ Gauß.

Tabelle VI.
 $B = 14\ 000$ Gauß.

Aus Tabelle V folgend			Aus Magnetkurve folgend		
z	B_a	B_m	W_a	W_m	z'
0,9	14 360	13 280	0,00214	0,00108	0,505
0,8	14 260	13 450	0,00192	0,00118	0,614
0,7	14 180	13 630	0,00188	0,00129	0,705
0,6	14 070	13 800	0,00165	0,00140	0,848

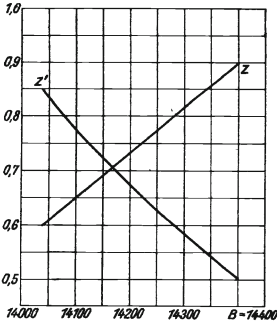


Fig. 9.

Dasselbe Verfahren ist für $B_1 = 5000, 10\ 000, 12\ 000$ und $16\ 000$ Gauß angewendet. Die sich für die so gewonnenen z' aus Fig. 8 ergebenden Werte sind in Tabelle VII zusammengestellt. Ganz genau sind diese nicht, da aus der Verschiedenheit von B_m und B_a auch andere Werte für die Dichten in den Querstegen folgen. Die sich hieraus ergebenden Widerstände weichen von den angenommenen ab. Immerhin geben die Zahlen ein gutes Bild von dem Verhalten eines Transformers bei variabler Primärspannung.

Tabelle VII.

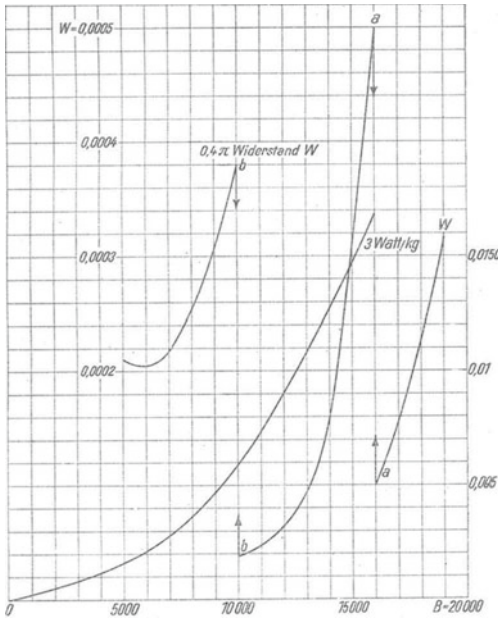
B_1	z'	$180^\circ - \xi$	$\frac{i_m}{i_1}$	$\frac{i_a}{i_1}$	$180^\circ - \zeta$	$\frac{E_{Ym}}{E_1}$	$\frac{E_{Ya}}{E_1}$	$\frac{i_a}{i_m}$	$\frac{E_{Ya}}{E_{Ym}}$
5 000	1,000	110° 45'	0,658	0,927	123° 0'	0,938	1,038	1,408	1,106
10 000	0,876	109° 40'	0,622	0,921	122° 15'	0,953	1,025	1,480	1,075
12 000	0,800	109°	0,595	0,917	121° 50'	0,962	1,020	1,541	1,062
14 000	0,705	108° 15'	0,565	0,912	121° 80'	0,974	1,013	1,614	1,041
16 000	0,724	108° 25'	0,572	0,913	121° 25'	0,972	1,015	1,596	1,044

Um von diesen Zahlen auf praktische Betriebswerte überzugehen, nehmen wir an, der Transformer arbeite normal mit $B_1 = 14\ 000$ Gauß. Dem entsprechen 22,3 AW. Diesen Zahlenwert setzen wir gleich $10\ i_1$. Der Leerstrom mache 7% des Nennstromes aus, dann ist letzterer gleich 31,8 Amp. Die normale Primärspannung sei $E_\Delta = 14\ 000$ V. Die Leerlaufverluste seien gleich 1% der Nennlast, also $14\ 000 \cdot \sqrt{3} \cdot 31,8 \cdot 0,01/1000 = 7,73$ kW oder pro Phase 2,58 kW. Für das unseren Betrachtungen zugrunde gelegte Eisen Fig. 10 werden 2,55 Watt pro kg angegeben. Wir brauchen also nur den aus der Kurve abzugreifenden Wert in die Rechnung einzusetzen. Die Spulen-EMKE erhalten wir dann durch Multiplikation von B_1 mit $\frac{E_Y}{\sqrt{3} \cdot E_1}$ und die Leerströme durch Multiplikation des aus der Kurve abgelesenen Magnetisierungsstromes mit $\frac{i_a}{i_1}$ resp. mit $\frac{i_m}{i_1}$. Es bezeichnet φ in Tabelle VIII

den Phasenverschiebungswinkel zwischen dem Magnetisierungsstrom einer Außen-
spule und der zugehörigen Sternspannung des Netzes, und zwar φ_u für die eine
Außenphase, φ_w für die andere, Fig. 11.

Tabelle VIII.

E_A	i_1	i_a	i_m	E_1	E_{Y_a}	E_{Y_m}	φ_u	φ_w
5 000	0,148	0,137	0,097	2890	3000	2710	— 99° 15'	— 80° 45'
10 000	0,538	0,496	0,335	5780	5930	5510	— 100° 20'	— 79° 40'
12 000	0,984	0,902	0,585	6910	7050	6640	— 101° 0'	— 79° 0'
14 000	2,230	2,03	1,26	8070	8170	7860	— 101° 45'	— 78° 15'
16 000	4,970	4,53	2,84	9220	9370	8970	— 101° 35'	— 78° 25'



Wir berechnen jetzt wieder die
Watt, die nach der Dreiwattmeter-
Methode gemessen würden. Zu diesem
Zweck bilden wir zuerst die Watt aus E_1
und i_a mit $\cos \varphi_u$ resp. $\cos \varphi_w$ und ad-
dieren dann dazu die Watt, die den
Kernverlusten entsprechen. Für die
mittlere Spule ist letzterer Wert allein

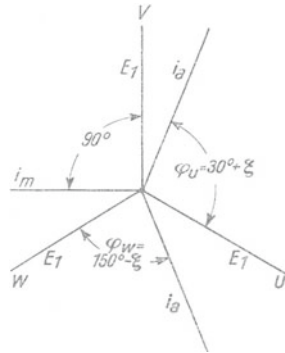


Fig. 11.

die Angabe des Wattmeters. Die betreffenden Zahlen ergibt Tabelle IX und
Fig. 12a.

Tabelle IX.

E_A	$i_a \cdot E_1 \cdot \cos \varphi_u$		Kernverluste pro Kern	Summe der kW			Summe aller kW
	—	+		u	v	w	
5 000	— 62,6	+ 62,6	+ 320	+ 0,257	+ 0,32	+ 0,383	0,96
10 000	— 507	+ 507	+ 1180	+ 0,673	+ 1,18	+ 1,687	3,54
12 000	— 1190	+ 1190	+ 1810	+ 0,620	+ 1,81	+ 3,000	5,43
14 000	— 3335	+ 3335	+ 2550	— 0,785	+ 2,55	+ 5,885	7,65
16 000	— 8570	+ 8570	+ 3370	— 5,200	+ 3,37	+ 11,940	10,11

Zum Vergleich mit den tatsächlichen Werten sind in Fig. 12b die Resultate
der Messungen an einem 800 KVA-Transformer für 5750 V wieder gegeben.

Die einzelnen Größen werden bei 3000, 4500 und 6000 Volt gemessen. Sie
sind in den Figuren durch gerade Linien verbunden. Die Untersuchungen wurden

im Kriege mit Montageinstrumenten ausgeführt, worauf die Abweichung von $\frac{i_a}{i_m}$ bei 3000 Volt zurückzuführen ist. Abgesehen hiervon ist die Übereinstimmung zwischen Theorie und Meßergebnissen sehr gut.

In gleicher Weise sind in Tabelle X und Fig. 13 die Werte wiedergegeben, wenn die Spannungsspulen an den Nullpunkt des zu untersuchenden Transformers

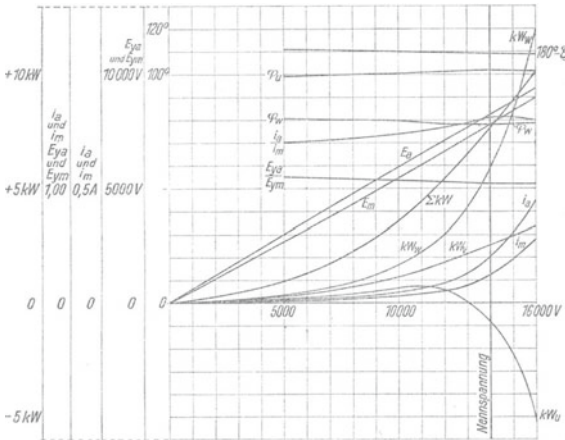


Fig. 12a.

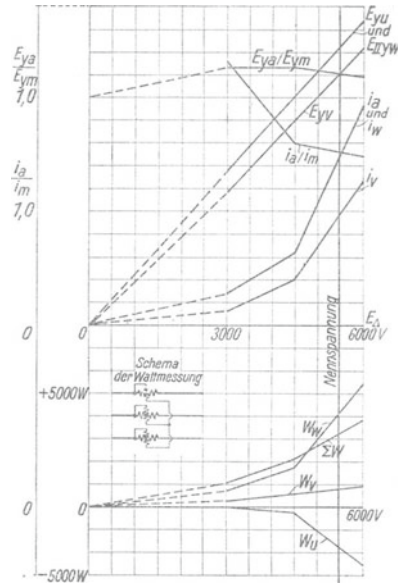


Fig. 12b.

selber angeschlossen sind. In diesem Falle erhält das an die mittlere Spule, also an Phase *V* angeschlossene Wattmeter nicht die volle Sternspannung des Netzes, sondern die kleinere Spannung der mittleren Spule, so daß die an *V* bei dieser Schaltung gemessenen Watt kleiner ausfallen als bei der vorigen. In Phase *U* und *W* werden die Kernverluste mit einer zu hohen Spannung, nämlich E_a statt E_1 gemessen, die aber gegen den Wattstrom verschoben ist, und zwar um $180^\circ - \zeta - 120^\circ = 60^\circ - \zeta$. Es muß also der auf eine Außenspule entfallende Kernverlust mit

$$\frac{E_{Ya}}{E_1} \cdot \cos(60^\circ - \zeta)$$

multipliziert werden. Die Summe aller 3 Wattmeter-Angaben weicht bei letzterer Schaltung von der bei ersterer ab. Diese Abweichung ist der Fehler, mit dem man bei letzterer Schaltung mißt. Wenn er auch nur klein bei normalen Verhältnissen ist, so zeigt er doch, daß man sich auf diese Ablesungen nicht verlassen darf. Diese

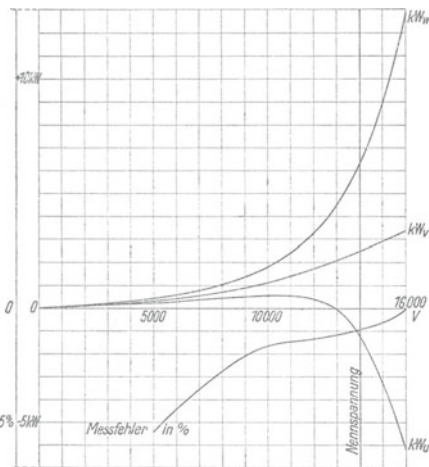


Fig. 13.

Schaltung hat also nicht nur gar keinen Wert, sondern ist direkt irreführend in ihren Resultaten. Die Dreiwattmeter-Methode mit künstlichem Nullpunkt hat vor der Aronschen Zweiwattmeter-Methode nur den scheinbaren Vorzug, daß sie die Berech-

nung des Phasenwinkels der Leerströme zu gestatten scheint. Aber auch dies ist trügerisch; denn die Leerströme führen andere Harmonische höherer Ordnung als die Sternspannung des Netzes, so daß der aus E_1 , i_a und den Watt berechnete „Leistungsfaktor“ nicht gleich $\cos(\xi - \zeta)$ ist¹⁾. Es sei hier noch besonders hervorgehoben, was aus Tabelle IX und X ersichtlich, daß es mit der Dreiwattmetermethode nicht möglich ist, die Kernverluste der 3 magnetischen Kreise eines Mantel-Transformers einzeln zu messen.

Tabelle X.

E_A	Wattmeter-Angaben			Summe der Angaben kW	Wahre Kernverluste	Meßfehler	
	u	v	w			kW	%
5 000	+ 0,232	+ 0,300	+ 0,406	0,908	0,960	- 0,052	- 5,42
10 000	+ 0,546	+ 1,124	+ 1,812	3,482	3,540	- 0,058	- 1,64
12 000	+ 0,396	+ 1,740	+ 3,220	5,356	5,430	- 0,074	- 1,36
14 000	- 1,210	+ 2,480	+ 6,310	7,580	7,650	- 0,070	- 0,915
16 000	- 6,190	+ 3,365	+ 12,930	10,105	10,110	- 0,005	- 0,049

Y/Y-Schaltung, b) belastet.

Nachdem wir die Vorgänge im leerlaufenden Manteltransformer eingehend betrachtet haben, wollen wir uns dem belasteten zuwenden. Und zwar wollen wir zuerst den Fall der einspuligen Last untersuchen, d. h. den Fall, in dem nur eine Spule eine Last mit elektrischer Energie zu speisen hat. Dieser Fall tritt bei Y/Y-Schaltung und sekundärem Vierleitersystem ein.

Hierfür wird aber der Manteltransformer in Y/Y-Schaltung nicht in der Praxis benutzt, weil seine 3 EMKe nicht gleich groß sind. Einspulige Last kann aber auch bei einem Defekt der Wicklung auftreten. Der Vorgang hierbei ist bei allen Transformatoren fast stets so, daß durch eine Überspannung ein Teil der Windungen einer Spule durch einen Überschlagnfunken geschlossen wird. Dieser Schluß erhält dann seine Energie vor allem von der defekten Spule selber. Offenbar äußert sich aber eine solche Last, wie aus (15) bis (17) hervorgeht, verschieden, je nachdem, ob sie auf einem Außenschenkel oder auf dem Mittelschenkel auftritt.

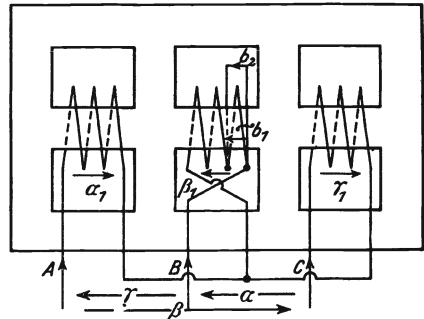


Fig. 14.

Untersuchen wir zuerst die Vorgänge bei primärem Defekt der Mittelspule. Die benutzten Symbole zeigt Fig. 14. Die Bedingungsgleichungen sind (29) bis (39) für den der Praxis nahekommenden Fall, daß $K = 4$ ist. Die Einführung des allgemeinen K würde die an sich schon reichlich komplizierten Formeln nur vollständig unhandlich machen. Aus dem gleichen Grunde ist auch $z = 1$ zugrunde gelegt. Bei derartiger Last tritt nun eine Streuung zwischen dem durch den Defekt geschlossenen Teil und dem übrigen Teil der Spule auf, ähnlich der Streuung zwischen Primär- und Sekundärspule. Sie ist aber von geringem Einfluß, da — wie wir sehen werden — andere Verhältnisse weit stärker wirken. Diese Streuung kann also, als unbedeutend, vernachlässigt werden.

¹⁾ Vgl. hierüber den Abschnitt „Imparitätsfaktor“ meiner Arbeit über das Hitzdrahtwattmeter. ETZ. 1903, S. 532.

Bereits in den Bedingungsgleichungen ist der Umweg über die Fluxe Φ_A , Φ_B , Φ_C übersprungen und statt dessen L_b eingeführt.

Es bedeutet:

x = defekte Windungszahl in Bruchteilen der gesamten Windungszahl einer Spule.

$$y = 1 - x.$$

$$(29) \quad \alpha + \beta + \gamma = 0$$

$$(30) \quad A + B + C = 0$$

$$(31) \quad \alpha - B r y - b_1 r x + \beta_1 - \gamma_1 + C r = 0$$

$$(32) \quad \beta - C r + \gamma_1 - \alpha_1 + A r = 0$$

$$(33) \quad \gamma - A r + \alpha_1 - \beta_1 + B r y + b_1 r x = 0$$

$$(34) \quad \alpha_1 = \frac{1}{14} L_b \{ 15 A_{(-)} - 4 [B_{(-)} \cdot y + b_{1(-)} \cdot x] + C_{(-)} \}$$

$$(35) \quad \beta_1 = \frac{1}{14} L_b \{ 16 [B_{(-)} \cdot y + b_{1(-)} \cdot x] - 4 [A_{(-)} + C_{(-)}] \}$$

$$(36) \quad \gamma_1 = \frac{1}{14} L_b \{ A_{(-)} - 4 [B_{(-)} \cdot y + b_{1(-)} \cdot x] + 15 C_{(-)} \}$$

$$(37) \quad \beta_1 \cdot x - b_1 x r + b_2 f = 0$$

$$(38) \quad B - b_1 - b_2 = 0$$

Man kann mit diesen Bedingungsgleichungen sämtliche Größen berechnen. Die Gleichungen werden aber derart kompliziert, daß sie von der zahlenmäßigen

Auswertung abschrecken. Da wir außerdem für die Auswertung doch auf Sinuskurven übergehen müssen, so nehmen wir außer einer anderen Vernachlässigung schon jetzt die vor, daß wir nur die Grundharmonische betrachten. Das rechnerische Verfahren ist auch fernerhin das bisher benutzte, nämlich die Momentangleichung mit gelegentlicher Zuhilfenahme des Diagrammes.

Fig. 15 zeigt im $\triangle UVW$ das Dreieck der aufgedrückten Spannungen. Die Strahlen UO , VO und WO sind die Sternspannungen bei Defekt ohne Nutzlast. Wir können die Spannungsverluste — wie wir am Zahlenbeispiel sehen werden — vernachlässigen, ohne einen unzulässigen Fehler zu begehen. Angenommen ist eine beliebige Lage des Nullpunktes im Dreieck. Wir bilden jetzt die Summe $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$, indem wir an die Resultante $O_N V'$ von OU und OW den

dritten Strahl $OV = O'V$ antragen. Dann ist OO' dreimal so groß als die Nullpunktsabweichung $O_N O$. Nennen wir diese σ , dann ist

$$(39) \quad -3\sigma = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1.$$

σ ist hier negatives Vorzeichen gegeben, um es im gleichen Sinn wie β_1 usw. zu zählen. Aus (31) und (33) erhält man bei Vernachlässigung der Spannungsverluste

$$\alpha - \gamma = -2\beta_1 + (\alpha_1 + \gamma_1).$$

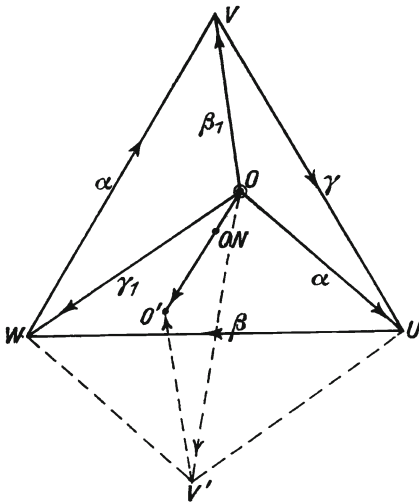


Fig. 15.

Setzen wir hierin für $(\alpha_1 + \gamma_1)$ den aus (39) folgenden Wert ein, dann erhalten wir

$$(40) \quad \frac{\alpha - \gamma}{3} = -(\beta_1 + \sigma).$$

Hierin können wir β_1 durch (37) und (38) und σ durch (39) und (34) bis (36) ausdrücken. Wir erhalten dann für

$$(41) \quad \beta_1 = b_1 \frac{f + x \cdot r}{x} - B \frac{f}{x}$$

und unter Benutzung von (30)

$$(42) \quad \sigma = \frac{2}{21} L_b \{ B_{(-)} \cdot [1 + 2x] - 2x \cdot b_{1(-)} \}.$$

Beide Gleichungen zeigen die EMKe als Funktionen der beiden Ströme B und b' . Um die Abhängigkeit des Stromes B vom Defektstrom b' zu bestimmen, setzen wir die rechten Seiten von (35) und (41) einander gleich, nachdem wir erstere Gleichung unter Benutzung von (30) zu

$$(35a) \quad \beta_1 = \frac{2}{7} L_b \{ [5 - 4x] \cdot B_{(-)} + 4x b_{1(-)} \}$$

umgeformt haben. Wir erhalten dann

$$(43) \quad b_1 \frac{f + x \cdot r}{x} - \frac{8}{7} x \cdot L_b \cdot b_{1(-)} = \frac{8}{7} [5 - 4x] L_b \cdot B_{(-)} + B \frac{f}{x}.$$

Eine zahlenmäßige Untersuchung dieser Gleichung zeigt, daß wir $B \frac{f}{x}$ vernachlässigen können.¹⁾

Wir erhalten dann

$$(44) \quad B_{(-)} = \frac{1}{5 - 4x} \left\{ \frac{7}{2} \cdot \frac{f + x \cdot r}{x \cdot L_b} \cdot b_1 - 4x b_{1(-)} \right\}.$$

Diesen vereinfachten Ausdruck von $B_{(-)}$ setzen wir in (41) und (42) ein und erhalten dann nach (40)

$$(45) \quad \frac{\alpha - \gamma}{3} = - \left\{ \frac{f + xr}{x} b_1 + \frac{1}{3[5 - 4x]} \cdot \left[(1 + 2x) \frac{f + xr}{x} b_1 - 4x L_b \cdot b_{1(-)} \right] \right\}.$$

Hierin entspricht der erste Summand $\frac{f + xr}{x} b_1$ der Gegen-EMK β_1 und der zweite, komplizierte der Nullpunktabweichung σ .

Wir können mit dieser Gleichung das Spannungsdiagramm konstruieren, und führen zu diesem Zweck Sinusschwingungen ein. Wir setzen

$$\alpha = \sqrt{3} E'_1 \cdot \sin(\omega t + 30^\circ)$$

$$\beta = \sqrt{3} E'_1 \cdot \sin(\omega t - 90^\circ)$$

$$\gamma = \sqrt{3} E'_1 \cdot \sin(\omega t - 210^\circ)$$

und

$$b_1 = J' \cdot k \sin(\omega t - \varphi_b).$$

¹⁾ Für $x = 0,01$, $r = 0,006$, $L = 16$ erhalten wir bei $f = 0,01$ $\frac{f}{x} = 1$ und bei $f = 0$ $\frac{f}{x} = 0$ gegen $\frac{2}{7} [5 - 4x] L_b = 23,65$. Da die uns interessierenden Fälle alle bei $f \leq 0,01$ liegen, ist der Fehler nur von der Größenordnung von $\frac{00}{0}$. Die angenommenen Verhältnisse entsprechen ungefähr einem Manteltransformator von 500—1000 kVA Leistung.

Hierin ist J der Nennstrom des Transformers und k das Verhältnis des effektiven Defektstromes zum Nennstrom. Da

$$\frac{\alpha - \gamma}{3} = E'_1 \cdot \sin \omega t$$

ist, folgt

$$(45a) \ E'_1 \sin \omega t = - \left\{ \frac{f + xr}{x} \sin(\omega t - \varphi_b) + \frac{1}{3[5 - 4x]} \left[(1 + 2x) \frac{f + xr}{x} \sin(\omega t - \varphi_b) \right] + 4x L_b \cdot \sin(\omega t - \varphi_b + 90^\circ) \right\} \cdot J'k.$$

Fig. 16 zeigt das — aus den $\frac{1}{3}(\alpha - \gamma)$, β_1 und σ entsprechenden Strahlen gebildete — Diagramm. Fig. 17 zeigt dann die Umformung desselben für die Rechnung. Da $b_{1(-)}$

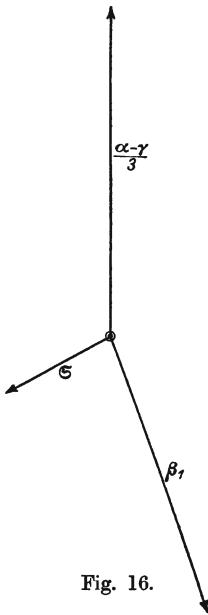


Fig. 16.

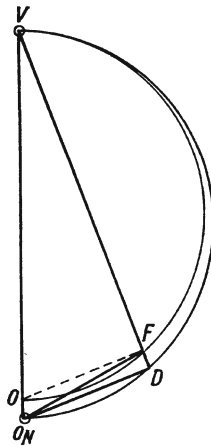


Fig. 17.

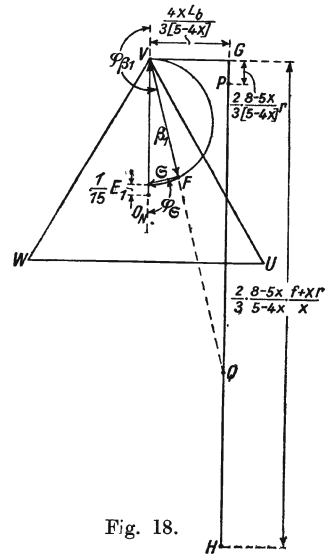


Fig. 18.

senkrecht auf b_1 steht, ist die Grundform des Diagrammes ein rechtwinkliges Dreieck $VO_N D$. In ihm ist

$$\overline{O_N D} = \frac{4x L_b}{3[5 - 4x]} \cdot b'_1$$

und

$$\overline{VD} = \frac{f + xr}{x} \left\{ 1 + \frac{1 + 2x}{3[5 - 4x]} \right\} b'_1.$$

Da σ die Hypotenuse des Dreiecks FDO_N ist, so muß

$$\overline{FD} = \frac{1 + 2x}{3[5 - 4x]} \cdot \frac{f + xr}{x} \cdot b'_1$$

sein. Weiter

$$\frac{\overline{VO_N}}{\overline{VO}} = \frac{1 + \frac{1 + 2x}{3[5 - 4x]}}{1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8 - 5x}{5 - 4x}.$$

Da nun VOF und $VO_N D$ rechtwinklige Dreiecke sind, die beide den Winkel $\sphericalangle DVO_N$ enthalten, so muß sich auch verhalten

$$\frac{\overline{VO_N}}{\overline{VO}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8 - 5x}{5 - 4x}.$$

Dies Verhältnis muß für jeden möglichen Wert des $\sphericalangle DVO_N$ gelten, also auch für $\sphericalangle DVO_N = 0^\circ$, d. h. für Leerlauf des intakten Transformfers. Tatsächlich ist es für $x = 0$ auch gleich dem Wert von β_1 , den wir für $K = 4$ berechneten, nämlich gleich 0,938. Schlagen wir also über

$$\overline{VO} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5 - 4x}{8 - 5x} \cdot \beta_0$$

einen Halbkreis, dann ist er der geometrische Ort aller Nullpunkte, die durch Defekt von x Windungen bei verschiedenen Defektwiderständen auftreten können. Um mit dem Diagramm das Verhalten des Transformfers zu bestimmen, verfahren wir folgendermaßen (Fig. 18). Wir zeichnen uns ein Spannungsdreieck mit einer Seitenlänge von z. B. 173,2 mm. Auf der Sternspannung des Netzes $VO_N = 100$ mm trägt man von O_N aus eine Länge OO_N für $x = 0$ ab. Diese ist

$$\overline{OO_N} = \frac{1 + 0}{3[5 - 0]} \cdot E_1' = 0,0666 E_1' \text{ } ^1),$$

d. h. sie schneidet auf $\overline{VO_N}$ die Leerlaufs-Sternspannung β_1 ab. Man schlägt jetzt über \overline{VO} einen Halbkreis. Sodann trägt man in V senkrecht zu \overline{VO} eine Gerade an, deren Länge

$$\overline{VG} = \frac{4x}{3[5 - 4x]} L_b$$

ist. Für $x = 0,01$ ist in unserem Beispiel, das ungefähr den mittleren Manteltransformertypen entspricht

$$\overline{VG} = 0,043.$$

In G tragen wir wieder eine senkrechte an, deren Länge von dem höchsten Wert von f abhängt, für den wir das Diagramm konstruieren wollen. Da der Defektstrom im Spulenteil ungefähr gleich $\frac{x}{f}$ (wir rechnen mit Verhältniszahlen) und da es keinen Zweck hat, für Defektströme unter dem Nennstrom das Diagramm zu zeichnen, so nehmen wir $f = 0,01$ als höchsten Wert an. Wir müssen dann machen

$$\overline{GH} = \frac{f + xr}{x} \left\{ 1 + \frac{1 - 2x}{3[5 - 4x]} \right\} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8 - 5x}{5 - 4x} \cdot \frac{f + xr}{x}.$$

Für unser Beispiel ist $\overline{GH} = 1,073$. Machen wir also z. B. $\overline{VG} = 500 \cdot 0,043 = 21,5$ mm, dann muß $\overline{GH} = 500 \cdot 1,073 = 536,5$ mm werden. Nun tragen wir von G auf \overline{GH} eine zweite Länge für den kleinstmöglichen Wert von f nämlich für $f = 0$ ab. Diese Länge ist

$$\overline{CP} = \frac{2}{3} \cdot \frac{8 - 5x}{5 - 4x} \cdot r.$$

¹⁾ Es mag stutzig machen, daß diese Größe von den Abmessungen des Transformfers nicht abzuhängen scheint. In Wahrheit enthalten aber die Funktionen den aus den konstruktiven Verhältnissen folgenden Faktor K . So ist z. B. im Nenner $5 = K + 1$ und $4 = K$ für die der jetzigen Rechnung zugrunde liegenden Abmessungsverhältnisse.

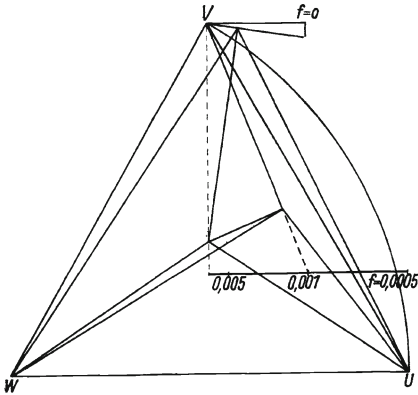


Fig. 19.

In unserem Beispiel ist dies $\overline{GP} = 0,0064$. Die Länge ist im allgemeinen so klein, daß man sie bei den üblichen Diagramm-Abmessungen vernachlässigen kann. Trägt man nun von P resp. G aus auf GH eine beliebige Länge von f gleich \overline{PQ} resp. \overline{CQ} ab und verbindet man Q mit V , dann gibt uns der Schnittpunkt F von \overline{VQ} mit dem Halbkreis

- $\overline{O_N F} = \sigma$
- $\overline{U F} = \alpha_1$ bei dem Defekt x und f in Spule V
- $\overline{V F} = \beta_1$ „ „ „ „ „ „ „ „
- $\overline{W F} = \gamma_1$ „ „ „ „ „ „ „ „

Außerdem ist

- $\overline{O_N O} =$ Nullpunkts-Abweichung bei intaktem, leerlaufenden Transformier
- $\overline{U O} = \alpha_1$ bei intaktem, leerlaufenden Transformier
- $\overline{V O} = \beta_1$ „ „ „ „
- $\overline{W O} = \gamma_1$ „ „ „ „

Man kann also mit dem Diagramm (Fig. 18) sämtliche EMKe des Transformier für Leerlauf und Defekt bestimmen. Außerdem gibt noch $\overline{V F}$ die Richtung von b'_1 .

Fig. 19 zeigt das Diagramm in etwas anderer Form. Hier ist für die kleineren Werte von f nicht \overline{CH} kleiner abgesteckt, sondern \overline{VG} im umgekehrten Verhältnis vergrößert. Das ist bei der Kleinheit von \overline{GP} zulässig bis auf die Wertbestimmung für $f = 0$. Hierfür ist an V ein besonderes größeres Dreieck angesetzt. Fig. 20 und 21 zeigen die Kurven der mittels Fig. 19 konstruierten Werte als Funktion von b'_1 .

Wir wollen jetzt B bestimmen. Zu diesem Zweck setzen wir

$$(46) \quad b_1 = \beta_1 \frac{x}{f + xr}$$

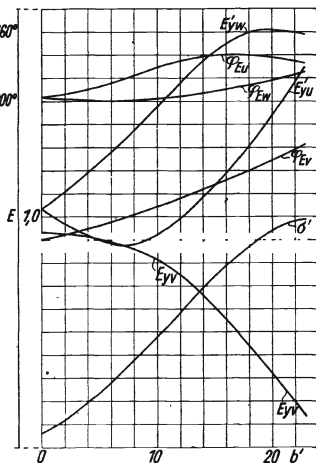


Fig. 20.

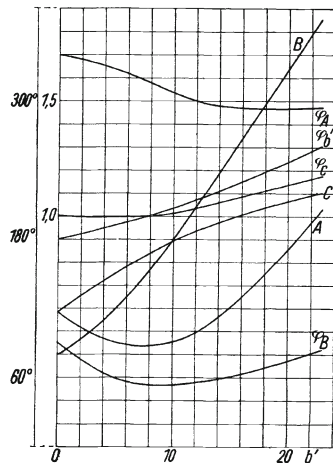


Fig. 21.

in (44) ein und erhalten

$$B_{(-)} = \frac{1}{5 - 4x} \cdot \left\{ \frac{7}{2} \cdot \frac{\beta_1}{L_b} - \frac{4x^2}{f + xr} \cdot \beta_{1(-)} \right\}.$$

Einführung von Sinusschwingungen gibt

$$B = \frac{\beta'_1}{5 - 4x} \left\{ \frac{7}{2L_b} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ - \varphi_{\beta_1}) + \frac{4x^2}{f + xr} \cdot \sin(\omega t + 180^\circ - \varphi_{\beta_1}) \right\}$$

resp.

$$(47) \quad B' = \frac{\beta'_1}{5 - 4x} \sqrt{\frac{49}{4L_b^2} + \frac{16x^4}{(f + xr)^2}}.$$

Die graphische Rechnung von B' und von φ_B zeigt Fig. 22.

Wir können jetzt die Ströme in den beiden anderen Spulen berechnen. Zu diesem Zweck setzen wir in (32) die Ausdrücke (34) und (36) ein.

Wir erhalten dann

$$\beta = L_b [A_{(-)} - C_{(-)}] - [A - C] \cdot r.$$

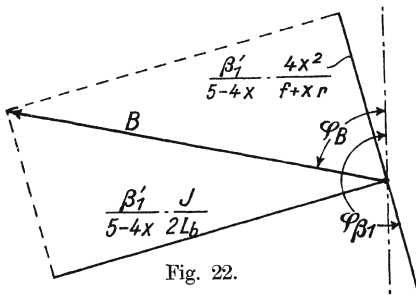


Fig. 22.

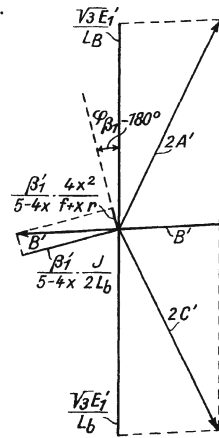


Fig. 23.

Hierin können wir, da r stets kleiner als 1% von L_b ist, die zweite Klammer ohne weiteres vernachlässigen. Dann ist

$$(48) \quad A - C = \beta_{(+)} \cdot \frac{1}{L_b}.$$

Weiter haben wir

$$A + C = -B.$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$(49) \quad A = \frac{1}{2} \left\{ \beta_{(+)} \frac{1}{L_b} - B \right\}$$

$$(50) \quad C = \frac{1}{2} \left\{ \beta_{(-)} \frac{1}{L_b} - B \right\}$$

oder mit Sinusschwingungen

$$(49a) \quad A' \sin(\omega t - \varphi_A) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sqrt{3} \cdot E'_1}{L_b} \cdot \sin \omega t + B' \cdot \sin(\omega t - \varphi_B + 180^\circ) \right\}$$

$$(50a) \quad C' \sin(\omega t - \varphi_C) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sqrt{3} \cdot E'_1}{L_b} \cdot \sin(\omega t - 180^\circ) + B' \cdot \sin(\omega t - \varphi_B + 180^\circ) \right\}.$$

Fig. 23 zeigt das zur Konstruktion der einzelnen Primärströme dienende Diagramm, das eine Vereinigung von Fig. 22 und den Gleichungen (49a) und (50a) darstellt.

Tabelle XI und Fig. 20—21 geben eine Zusammenstellung der wichtigsten Betriebswerte, wie sie mit dem angenäherten Verfahren erhalten wurden.

Tabelle XI.

f	E_{Y_u}	E_{Y_v}	E_{Y_w}	σ	φ_{Eu}	φ_{Ev}	φ_{Ew}	φ_σ
∞	1,032	0,933	1,032	0,066	— 50° 50'	180°	303°	180°
0,01	1,000	0,928	1,070	0,083	— 55° 30'	182° 40'	302° 10'	149° 20'
0,005	0,974	0,924	1,102	0,106	— 53° 50'	184° 50'	301° 20'	135°
0,003	0,943	0,918	1,150	0,150	— 51° 50'	187° 40'	300° 30'	124° 40'
0,002	0,912	0,910	1,208	0,206	— 48° 40'	190° 20'	299° 50'	119° 20'
0,0015	0,889	0,897	1,268	0,265	— 45° 20'	194° 50'	300°	119° 30'
0,001	0,882	0,860	1,385	0,380	— 37° 50'	202°	300° 20'	121° 40'
0,0005	1,024	0,720	1,617	0,626	— 23° 50'	218° 50'	305° 20'	133° 40'
0	1,648	0,137	0,788	0,988	— 26° 30'	261° 30'	325° 40'	172°

Tabelle XI (Fortsetzung).

f	J_u	J_v	J_w	J_b	φ_A	φ_B	φ_C	φ_{b_1}
∞	0,0581	0,040	0,0581	0	— 20° 45'	90°	200° 45'	180°
0,01	0,0560	0,045	0,0615	9,23	— 23° 30'	83°	200° 50'	182° 40'
0,005	0,0537	0,0465	0,0642	1,825	— 25° 10'	76° 20'	200°	184° 50'
0,003	0,0478	0,0505	0,0680	3,000	— 27° 50'	68° 30'	199° 30'	187° 40'
0,002	0,0455	0,0564	0,0765	4,42	— 31° 30'	61° 30'	199°	191° 20'
0,0015	0,0453	0,0637	0,0781	5,75	— 36° 10'	57°	199° 30'	194° 50'
0,001	0,0444	0,0782	0,0837	8,11	— 45° 40'	54° 10'	201° 20'	202°
0 0005	0,0522	0,110	0,0957	12,85	— 62° 40'	57° 30'	207° 40'	218° 50'
0	0,1026	0,185	0,1116	22,85	— 64° 50'	84° 30'	235° 10'	261° 30'

In Tabelle XI bedeuten die Phasenwinkel das Nacheilen der betreffenden Schwingung hinter ωt . Das Minuszeichen in den Spalten φ_{Eu} und φ_c bedeutet also, daß die betreffenden Größen um diesen Betrag vor ωt voreilen.

Um die Genauigkeit der Rechnung zu kontrollieren, nehmen wir an, es würde die Wattaufnahme nach der Dreiwattmeter-Methode gemessen, wobei der Nullpunkt des Netzes benutzt wird. Und zwar sei die Messung bei vollendetem Kurzschluß — also bei $f = 0$ — ausgeführt. Die 3 Ströme sind dann

$$J_u = 0,1026$$

$$J_v = 0,185$$

$$J_w = 0,1116.$$

Die Phasenverschiebungen zwischen diesen Strömen und den zugehörigen Sternspannungen des Netzes sind dann

$$\varphi_u = - 120^\circ - (- 61^\circ 50') = - 55^\circ 10'$$

$$\varphi_v = 0^\circ - 84^\circ 30' = - 84^\circ 30'$$

$$\varphi_w = + 120^\circ - 235^\circ 10' = - 115^\circ 10'.$$

Daraus ergeben sich folgende Wattmeter-Ablesungen

$$J_u \cdot E_Y \cdot \cos \varphi_u = 0,1026 \cdot 1 \cdot \cos 55^\circ 10' = + 0,0600$$

$$J_v \cdot E_Y \cdot \cos \varphi_v = 0,185 \cdot 1 \cdot \cos 84^\circ 30' = + 0,0178$$

$$J_w \cdot E_Y \cdot \cos \varphi_w = 0,1116 \cdot 1 \cdot \cos 115^\circ 10' = - 0,0463$$

$$\text{Zusammen} + 0,0315.$$

Der tatsächliche Wattverbrauch ist gleich dem Produkt aus dem Stromquadrat im Defekt und dem Widerstand des Defektteiles, also proportional

$$J_b^2 \cdot r \cdot x = 22,85 \cdot 0,01 \cdot 0,006 = 0,0314.$$

Die Rechnungen sind also richtig.

Besonders interessant ist der Fall, daß die intakte mittlere Spule kurz geschlossen wird, also für $x = 1$ und $f = 0$. Dieser Fall gibt gleichzeitig ein gutes Kriterium für die Richtigkeit der Theorie, da er sich leicht an jedem Manteltransformer experimentell nachprüfen läßt. Das komplette Diagramm dieses Falles zeigt Fig. 24. Das Diagramm ist für normales L_b , also auch für konstantes μ konstruiert, was ja in

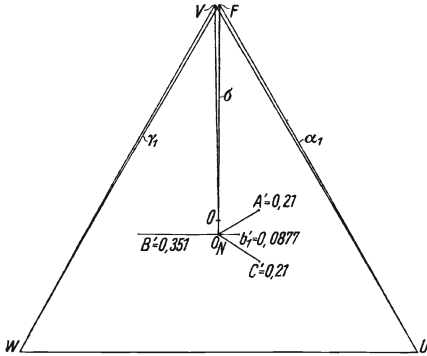


Fig. 24.

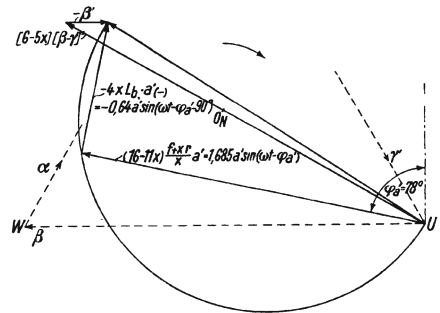


Fig. 25.

Wahrheit wegen des Auswachsens von α_1 und γ_1 nicht zutrifft. Aber das wichtigste Resultat wird — wenigstens qualitativ, wenn auch nicht quantitativ — hiervon nicht beeinflußt, nämlich, daß die Stromstärke b_1 in der kurzgeschlossenen Spule selber nur klein und zwar ganz erheblich kleiner als bei einem Kerntransformer im gleichen Fall ist.

Wenden wir uns jetzt dem Fall zu, daß der Fehler in einer Außenspule auftritt und zwar in der Spule U . Hierfür gelten die Bedingungsgleichungen (29) und (30) unverändert, für die übrigen Beziehungen müssen wir neue analog (31) bis (38) aufstellen.

$$(51) \quad \alpha - Br + \beta_1 - \gamma_1 + Cr = 0$$

$$(52) \quad \beta - Cr + \gamma_1 - \alpha_1 + Ayr + a_1xr = 0$$

$$(53) \quad \gamma - Ayr - a_1xr + \alpha_1 - \beta_1 + Br = 0$$

$$(54) \quad \alpha_1 = \frac{1}{14} L_b \{15 [A_{(-)}y + a_{1(-)}x] - 4B_{(-)} + C_{(-)}\}$$

$$(55) \quad \beta_1 = \frac{1}{14} L_b \{16 B_{(-)} - 4 [A_{(-)}y + a_{1(-)}x + C_{(-)}]\}$$

$$(56) \quad \gamma_1 = \frac{1}{14} L_b \{A_{(-)}y + a_{1(-)}x - 4B_{(-)} + 15C_{(-)}\}$$

$$(57) \quad \alpha_1 x - a_1 xr + a_2 f = 0$$

$$(58) \quad A - a_1 - a_2 = 0.$$

Wir bestimmen zuerst mit Hilfe von (54) und (56) C in (52)

$$\beta - Cr + Ayr + a_1xr - \frac{L_b}{14} \{14 [A_{(-)}y + a_{1(-)}x] - 14C_{(-)}\} = 0.$$

Hierin ist stets $r \ll L_b$, so daß wir erhalten

$$(59) \quad C_{(-)} = y \cdot A_{(-)} + a x_{1(-)} - \frac{1}{L_b} \beta.$$

Diesen Ausdruck für C sowie $-B = +A + C$ setzen wir in (54) ein:

$$\alpha_1 = \frac{2}{7} L_b \{A_{(-)} [6 - 5x] + 5x a_{1(-)}\} - \frac{5}{14} \beta.$$

Aus (57) und (58) erhalten wir

$$(60) \quad \alpha_1 = a_1 \frac{f + xr}{x} - A \frac{f}{x}.$$

Setzen wir beide Ausdrücke für α_1 einander gleich, dann erhalten wir

$$\frac{2}{7} [6 - 5x] L_b \cdot A_{(-)} + \frac{f}{x} \cdot A = -\frac{10}{7} x L_b a_{1(-)} + \frac{f + xr}{x} \cdot a_1 + \frac{5}{14} \beta.$$

Untersuchen wir, ob wir einen der Summanden vernachlässigen können; wenn wir die Verhältnisse unseres Beispiels zugrunde legen, ist

$$\frac{2}{7} [6 - 5x] L_b = 27,2 \quad \frac{10}{7} x L_b = 0,228$$

und für $f = 0,01 \quad \frac{f}{x} = 1 \quad \frac{f + xr}{x} = 1,006$

resp. $f = 0 \quad \frac{f}{x} = 0 \quad \frac{f + xr}{x} = 0,006.$

Wir dürfen also $\frac{f}{x} A$ vernachlässigen, wodurch wird

$$(61) \quad A_{(-)} = a_1 \frac{7(f + xr)}{2[6 - 5x]x \cdot L_b} - \frac{5x}{[6 - 5x]} a_{1(-)} + \frac{5}{4} \cdot \frac{\beta}{[6 - 5x]L_b}.$$

Nun gehen wir mit (55), (56), (30) und (59) in (51) hinein:

$$\begin{aligned} \alpha &= (\gamma_1 - \beta_1) - (A + 2C)r \\ &= \frac{L_b}{14} \{5A_{(-)}[5 - x] + 5x a_{1(-)} + 39C_{(-)}\} - (A + 2C)r. \end{aligned}$$

Hierin können wir $(A + 2C)r$ wegen der Kleinheit von r vernachlässigen, so daß nach einigen Umformungen

$$(62) \quad A_{(-)} = \frac{7\alpha}{2[16 - 11x]L_b} - \frac{11x a_{1(-)}}{16 - 11x} + \frac{39\beta}{4[16 - 11x]L_b}$$

wird. Durch Gleichsetzen von (61) und (62) erhalten wir nach einigen Zwischenrechnungen (ohne Vernachlässigungen)

$$(63) \quad a_1(16 - 11x) \frac{f + xr}{x} - 4x L_b \cdot a_{1(-)} = (6 - 5x)(\beta - \gamma) - \beta.$$

Führen wir Sinusschwingungen ein, indem wir — wie bereits früher —

$$\beta = \sqrt{3} \cdot E_1 \sin(\omega t - 90^\circ)$$

$$\gamma = \sqrt{3} \cdot E_1 \sin(\omega t - 210^\circ)$$

setzen, dann lautet die Gleichung

$$(64) \quad \begin{aligned} &a_1' \left\{ 4x L_b \cdot \sin(\omega t + 90^\circ - \varphi a_1) + [16 - 11x] \frac{f + xr}{x} \sin(\omega t - \varphi a_1) \right\} \\ &= \sqrt{3} E_1' \{ (6 - 5x) \cdot \sqrt{3} \cdot \sin(\omega t - 60^\circ) + \sin(\omega t + 90^\circ) \}. \end{aligned}$$

Wir benutzen (64), um das Diagramm zur Bestimmung der Größe und Phasenlage zu zeichnen, Fig. 26, und zwar für

$$\begin{aligned} L_b &= 16 \\ r &= 0,006 \\ x &= 0,01 \\ f &= 0,001. \end{aligned}$$

Aus dieser graphischen Rechnung folgt

$$a_1 = 9,71 \cdot \sin(\omega t - 78^\circ).$$

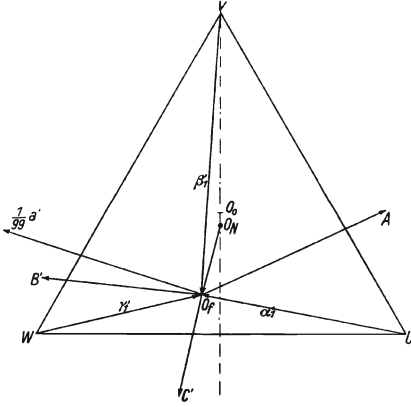


Fig. 26.

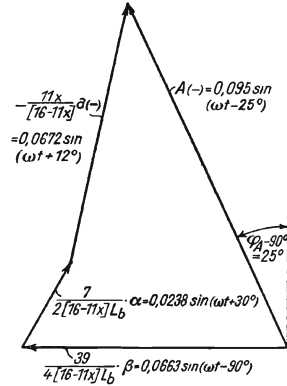


Fig. 27.

Mit diesem Wert gehen wir jetzt in Gleichung (62) und konstruieren aus ihr das Diagramm für $A_{(-)}$, Fig. 27. Aus ihr ergibt sich

$$A = 0,095 \cdot \sin(\omega t + 65^\circ).$$

Wir können jetzt aus (60) α_1 berechnen, doch sind beide Summanden so verschieden

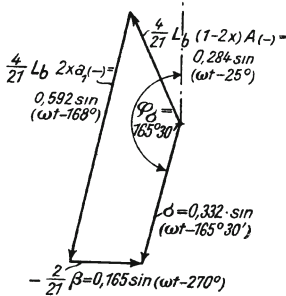


Fig. 28.

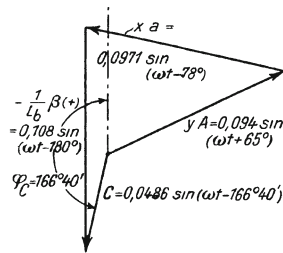


Fig. 29.

für das gewählte Beispiel, daß α_1 nur unmerklich von $\alpha_1 \frac{j+xr}{x}$ abweicht. Wir wählen deshalb den anderen Weg zur Bestimmung der 3 EMKE, den wir bereits bei unseren Betrachtungen über das Verhalten der Mittelspule einschlugen, und bestimmen σ . Wir benutzen hierzu (54) bis (56) (30) und (59)

$$\begin{aligned} 3\sigma &= \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \\ &= \frac{L_b}{41} \{12[A_{(-)}y + a_{1(-)}x] + 8B_{(-)} + 12C_{(-)}\}. \end{aligned}$$

Durch die erwähnten Gleichungen erhalten wir

$$(65) \quad \sigma = \frac{4}{21} L_b \{ (1 - 2x) A_{(-)} + 2a_{1(-)}x \} - \frac{2}{21} \beta.$$

Diese Rechnung graphisch durchgeführt zeigt Fig. 28. Sie ergibt

$$\sigma = 0,332 \sin(\omega t - 165^\circ 30').$$

Mit Hilfe von (59) kann man jetzt C bestimmen; Fig. 29 gibt als Resultat

$$C = 0,0486 \sin(\omega t - 166^\circ 40').$$

Aus A und C folgt dann in bekannter Weise

$$B = 0,0752 \sin(\omega t - 84^\circ).$$

Fassen wir jetzt Fig. 27 und 28 zusammen, (Fig. 30), indem wir die Komponente $\overline{DO} = \frac{4}{21} [1 - 2x] L_b \cdot A_{(-)}$ durch das Viereck $ODEF$ ähnlich Fig. 27 ausdrücken.

Es müssen dann die einzelnen Seiten die Längen haben

$$\overline{DE} = \frac{1 - 2x}{16 - 11x} \cdot \frac{44x L_b}{21} \alpha'_1$$

$$\overline{EF} = \frac{1 - 2x}{16 - 11x} \cdot \frac{2}{3} \alpha'$$

$$\overline{OF} = \frac{1 - 2x}{16 - 11x} \cdot \frac{13}{7} \beta'.$$

Da $\overline{DJ} = \frac{8x L_b}{21} \alpha'_1$ ist, so ist

$$\overline{EJ} = \overline{DJ} - \overline{DE} = \frac{4x L_b}{16 - 11x} \alpha'_1.$$

Ziehen wir zu \overline{EJ} , \overline{EF} und \overline{FO} je eine Parallele, dann erhalten wir ein Viereck $GHKO$, in dem ist

$$\overline{HK} = \overline{EJ}$$

$$\overline{GO} = \overline{EF}$$

Fig. 30.

$$\overline{HG} = \overline{FO} = \overline{JK} = \left\{ \frac{13}{7} \cdot \frac{1 - 2x}{16 - 11x} - \frac{2}{21} \right\} \beta' = \frac{1 - 8x}{3(16 - 11x)} \cdot \beta'$$

$$\overline{OK} = \sigma.$$

In diesem Viereck ist H der feste Endpunkt von $a_{1(-)}$, während der andere Endpunkt auf dem Halbkreis der Fig. 25 liegt. Tragen wir also an die Konstruktion von Fig. 25 den Winkel $\sphericalangle HGO$ an, Fig. 31, dessen Schenkel gegenüber Fig. 30 mit $(16 - 11x)$ multipliziert sind, dann können wir nach Fig. 25 hiermit $4x L_b a'_{1(-)}$ und $(16 - 11x)\sigma'$ bestimmen. Beide sind durch den Punkt O festgelegt. Oder — wenn man a'_1 annimmt — kann man σ' bestimmen, indem man mit $4x L_b a'_1$ einen Kreisbogen um H schlägt. Die so erhaltene Länge \overline{KO} ist dann $(16 - 11x)\sigma'$.

Fig. 32 zeigt das durch Vereinigung von Fig. 29 und Fig. 31 entstandene vollständige Diagramm. Aus dem Spannungsdreieck und σ erhält man dann die einzelnen Stern-EMKe. Der Punkt Q in Fig. 31 ist mit dem Punkt O_N im Spannungsdreieck, dem Nullpunkt der Netzstromspannungen, identisch.

Fig. 33 bis 34 zeigen die Kurven für $x = 0,01$.

Wir leiten jetzt in derselben Weise, wie für Defekt in Spule U , die Formeln für Defekt in der anderen Außenspule W ab. Die Bedingungsgleichungen hierfür sind:

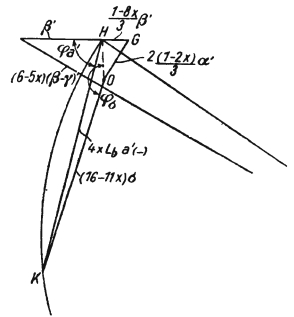


Fig. 31.

- (66) $\alpha - Br + \beta_1 - \gamma_1 + Cyx + c_1xr = 0$
- (67) $\beta - Cy r - c_1xr + \gamma_1 - \alpha_1 + Ar = 0$
- (68) $\gamma - Ar + \alpha_1 - \beta_1 + Br = 0$
- (69) $\alpha_1 = \frac{1}{14} L_b \{ 15 A_{(-)} - 4 B_{(-)} + C_{(-)}y + c_{1(-)}x \}$

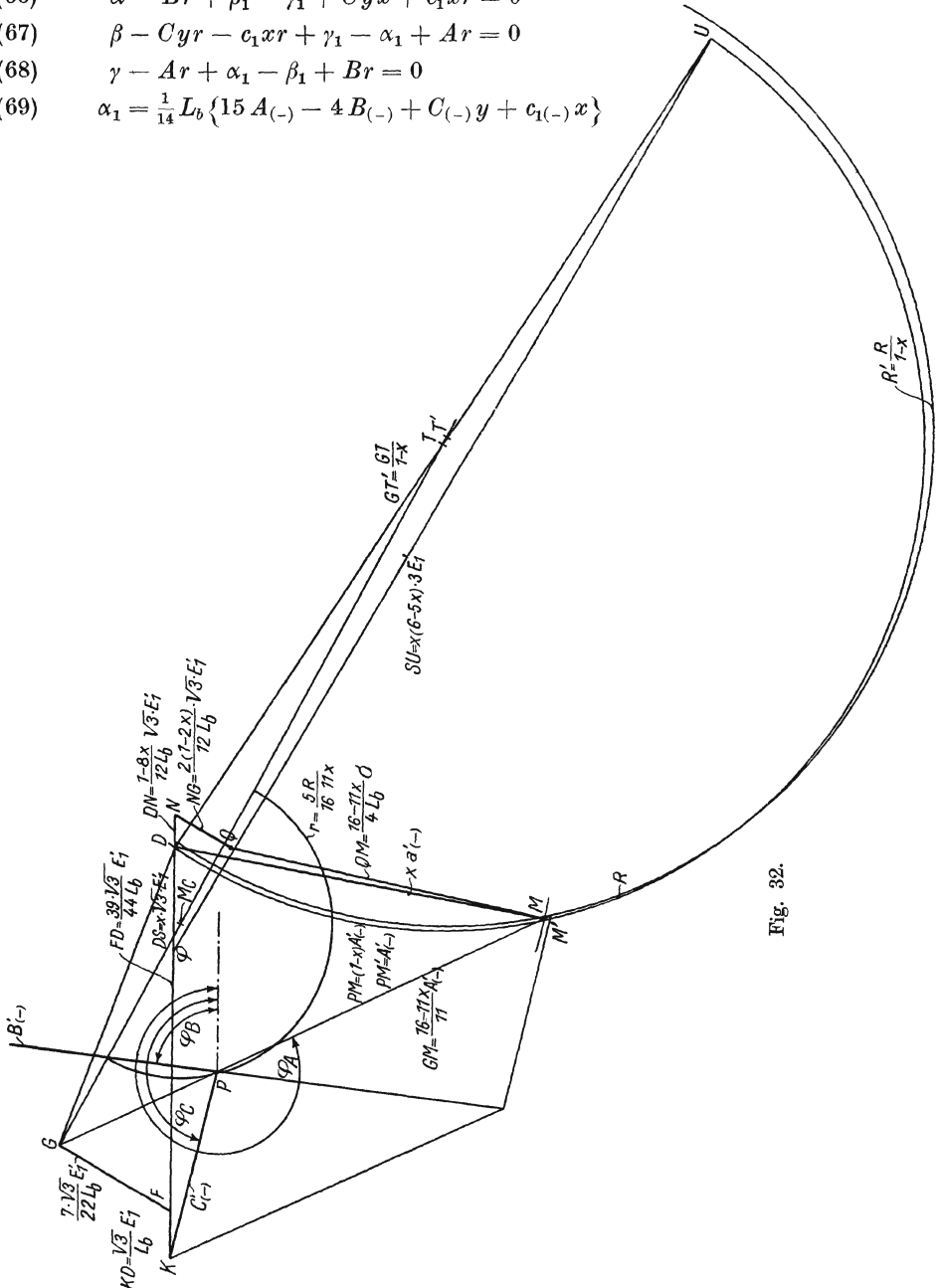


Fig. 32.

- (70) $\beta_1 = \frac{1}{14} L_b \{ -4 A_{(-)} + 16 B_{(-)} - 4 [C_{(-)}y + c_{1(-)}x] \}$
- (71) $\gamma_1 = \frac{1}{14} L_b \{ A_{(-)} - 4 B_{(-)} + 15 [C_{(-)}y + c_{1(-)}x] \}$
- (72) $\gamma_1 \cdot x - c_1xr + c_2f = 0$
- (73) $C - c_1 - c_2 = 0$.

Wir erhalten zuerst

$$(74) \quad A_{(-)} \propto C_{(-)}y + c_{1(-)}x + \frac{\beta}{L_b}$$

und

$$(75) \quad C_{(-)} = \frac{7}{2(6-5x)} \cdot \frac{f+xr}{x \cdot L_b} c_1 - \frac{5x}{6-5x} c_{1(-)} - \frac{5}{4(6-5x)} \cdot \frac{\beta}{L_b}.$$

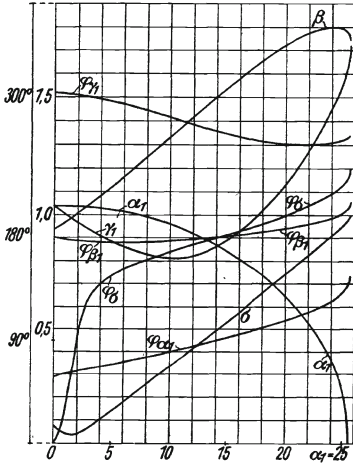


Fig. 33.

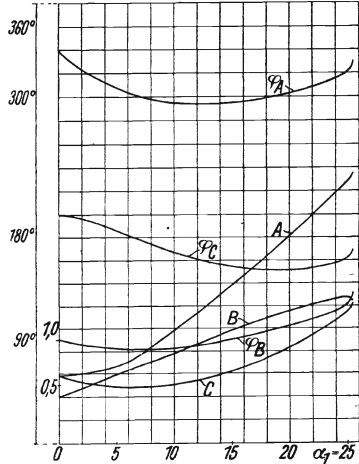


Fig. 34.

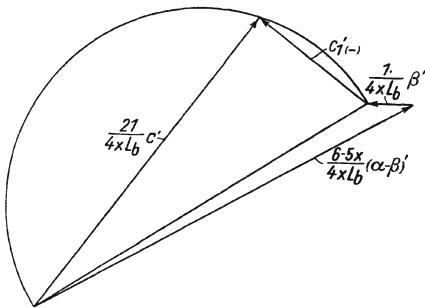


Fig. 35.

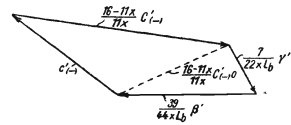


Fig. 36.

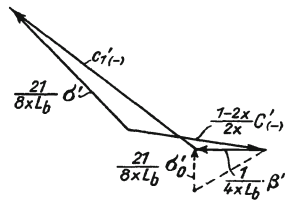


Fig. 37.

Aus

$$\gamma = -\frac{2}{7} L_b \left\{ (16 - 11x) C_{(-)} + 11x c_{1(-)} \right\} - \frac{39}{14} \beta$$

und (74) ergibt sich dann

$$(76) \quad (16 - 11x) \frac{f+xr}{x} c_1 - 4x L_b c_{1(-)} = (6 - 5x) \cdot (\alpha - \beta) + \beta.$$

Auf Grund dieser Gleichung ist das Diagramm Fig. 35 konstruiert, das durch die aus der Gleichung für γ folgende Formel

$$(77) \quad C_{(-)} = -\frac{1}{16 - 11x} \left\{ \frac{7}{2 L_b} \gamma + \frac{39}{4 L_b} \beta + 11x c_{1(-)} \right\},$$

Fig. 36, und durch

$$(78) \quad \sigma = \frac{4}{21} L_b \{ (1 - 2x) \cdot C_{(-)} + 2x c_{1(-)} \} + \frac{2}{21} \beta$$

Fig. 37, vervollständigt, schließlich das definitive Diagramm gibt. Fig. 38—39 zeigen die berechneten Kurven.

Y/Y-Schaltung, c) bei schiefe Spannungsdreieck.

Aus der Tatsache, daß der Nullpunkt bei einpoliger Last sich verschiebt, kann man folgern, daß er sich auch gegen die Lage des idealen Punktes verschiebt, wenn das Dreieck der aufgedrückten Spannungen kein gleichseitiges Dreieck, sondern ein schiefwinkliges ist. Im Nachfolgenden soll diese Frage untersucht werden. Da in der Praxis hierbei aber, sobald die Mittelwerte der 3 Dreiecksspannungen stark voneinander abweichen, μ in den 3 Teilen sehr verschiedene Werte annimmt und infolge-

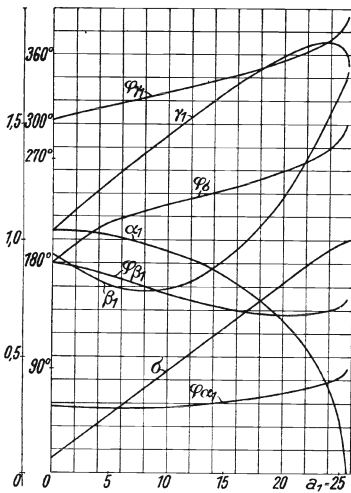


Fig. 38.

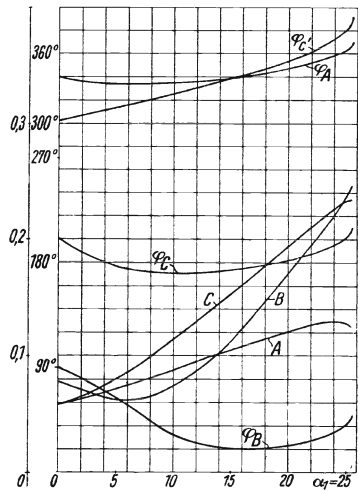


Fig. 39.

dessen L_b in einer — mathematisch nur schwer zu erfassenden — Weise sich ändert, so müssen wir auch hier die Beschränkung machen, daß wir L_b und damit auch μ konstant annehmen, wie dies im größten Teil dieser Arbeit geschehen ist. Wir sind zu dieser Annahme um so eher berechtigt, als wir ohne sie den Einfluß der Sättigung und der Eisensorte in unsere Betrachtungen einbeziehen müßten.

Unsere Betrachtungen wollen wir auf den leerlaufenden Transformator beschränken und hier außer den Leerströmen nur die Nullpunkts-Abweichung berechnen, da sie ein wertvolles Charakteristikum für die Sternspannungen ist.

Wir gehen von den Gleichungen (19) bis (21) aus, die etwas umgeformt lauten:

$$(19a) \quad \alpha = \frac{L_b}{14} \{ 14 C_{(-)} - 25 B_{(-)} \}$$

$$(20a) \quad \beta = L_b \{ A_{(-)} - C_{(-)} \}$$

$$(21a) \quad \gamma = \frac{L_b}{14} \{ 25 B_{(-)} - 14 A_{(-)} \}.$$

Hieraus bestimmen wir zunächst die Ströme als Funktion der aufgedrückten Spannungen. Wir bilden zu diesem Zweck die Differenz von (19a) und (21a) und erhalten

$$(79) \quad B_{(-)} = \frac{14}{64 L_b} (\gamma - \alpha).$$

Dieser Wert in (21a) eingesetzt gibt

$$(80) \quad A_{(-)} = -\frac{39\gamma + 25\alpha}{64 L_b}.$$

Durch Einsetzen von (79) in (19a) erhalten wir

$$(81) \quad C_{(-)} = -\frac{39\alpha + 25\gamma}{64 L_b}.$$

Wir bilden nun eine Gleichung für den Abstand des Transformer-Spannungs-Nullpunktes vom Netz-Nullpunkt analog (39):

$$(82) \quad -3\sigma = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1.$$

Wir berücksichtigen hierfür (12) bis (14) und erhalten dann

$$-3\sigma = \frac{4}{14} L_b \cdot B_{(-)}.$$

Einsetzen von (79) hierin gibt

$$-3\sigma = \frac{4}{14} L_b \cdot \frac{14}{64 L_b} (\gamma - \alpha)$$

also

$$(82) \quad \sigma = \frac{1}{16} \cdot \frac{\alpha - \gamma}{3}.$$

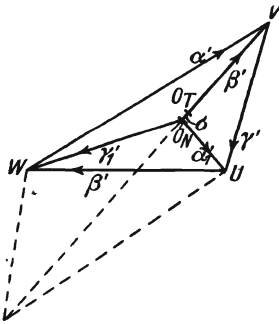


Fig. 40.

Die Unabhängigkeit der Nullpunkts-Abweichung von β ist nur scheinbar. Denn wenn β einen Wert annimmt, der von dem des gleichseitigen Spannungsdreiecks abweicht, dann weichen auch α und γ von den diesem entsprechenden Werten ab. Da nun der Nullpunkt des Netzes stets um

$$\frac{\alpha - \gamma}{3}$$

von der Spitze V des Dreiecks entfernt ist (Fig. 40), so sagt (82), daß der Nullpunkt des leerlaufenden Manteltransformers stets um denselben Prozentsatz gegen den Netznullpunkt auf der Sternspannung $\bar{V}O_N$ verschoben liegt.

Y/Y-Schaltung, d) mit Anschluß des Nullpunktes.

Verbindet man den Nullpunkt des Manteltransformers leitend mit dem Nullpunkt der Generatorwicklung, dann wird der Transformer gezwungen, Sternspannungen der gleichen Größe und Kurvenform zu erzeugen wie jener und außerdem hat er die Möglichkeit, über den Nulleiter Ströme zu senden, so daß der Magnetisierungsstrom jeder Spule dem genannten Zwang entspricht, ohne durch einen anderen Zwang behindert zu sein.

Da bei gleicher Größe aller 3 Sternspannungen auch die Dichten und damit auch die Widerstände der 3 magnetischen Kreise gleich groß sind, können wir für diese Betrachtung die zuerst abgeleiteten Formeln benützen.

Nennen wir D den Nulleiterstrom, dann ist

$$(2a) \quad A + B + C + D = 0.$$

Außerdem gilt für die Sternspannungen

$$(82) \quad \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0$$

und für die Fluxe in den 3 Kernen

$$(83) \quad \Phi_A + \Phi_B + \Phi_C = 0$$

wenn in der Generatorspannung keine Glieder 3. Ordnung enthalten sind. Den Einfluß solcher müssen wir aber — als durch einfache Formeln nicht faßbar — aus unseren Betrachtungen von vornherein ausscheiden.

Gehen wir mit (12) bis (14) in (83) hinein, dann erhalten wir

$$(A + B + C) \cdot (K^2 - K) - BK = 0.$$

Hieraus und aus (2a) erhalten wir

$$(84) \quad D = -B \frac{1}{K-1}.$$

Gehen wir mit (2a) und (84) in (13) hinein, dann erhalten wir

$$\Phi_B \cdot Kw \cdot (K^2 - 2) = BK^2 + (B + D)K$$

$$\Phi_B \cdot Kw = B \frac{K}{K-1}.$$

Wir können jetzt auf den Effektivwert einer Sinusschwingung übergehen. Da die Spule die volle Sternspannung aufbringen muß, hat sie den gleichen Flux in ihrem Kern wie ein Einphasentransformer gleicher Windungszahl. Es ist also

$$\Phi'_B = \Phi'_1 \quad \text{und} \quad \Phi_B Kw = \sqrt{2} \cdot i_1,$$

so daß

$$(85) \quad B' = \sqrt{2} \cdot i_1 \cdot \frac{K-1}{K}$$

und

$$(86) \quad D' = -\sqrt{2} i_1 \cdot \frac{1}{K}$$

ist.

Bilden wir jetzt die durch die Dreieckspannung β bedingte Differenz von (12) und (14).

$$(\Phi_A - \Phi_C) \cdot Kw \cdot (K^2 - 2) = (A - C) \cdot (K^2 - 2).$$

Der Ausdruck $(\Phi_A - \Phi_C)$ hat als Amplitude die Größe $\Phi'_\Delta = \sqrt{3} \cdot \Phi'_1$. Demnach ist

$$(87) \quad A - C = \sqrt{2} i_1 \cdot \sqrt{3} \sin(\omega t - 180^\circ),$$

wenn wir wieder

$$\beta = \sqrt{3} E_1 \cdot \sin(\omega t - 90^\circ)$$

setzen. Aus (2a), (85) und (86) folgt unter Berücksichtigung der Phasenlage

$$(88) \quad A + C = -(B + D) = \sqrt{2} i_1 \cdot \frac{K-2}{K} \sin(\omega t - 90^\circ).$$

Wie der symmetrische Bau von (12) und (14) zeigt, müssen A' und C' gleiche Größe haben.

Wir können demnach durch geometrische Zusammensetzung von $(A + C)$ und $(A - C)$ die Amplitude und Phasenlage von A und C bestimmen, Fig. 41. Tabelle XII und Fig. 42 geben die Resultate wieder, wenn i_0 den Effektivwert des Nulleiterstromes bezeichnet.

Tabelle XII.

K	$180^\circ - \xi$	$\frac{i_m}{i_1}$	$\frac{i_a}{i_1}$	$\frac{i_a}{i_m}$	i_p
2	$90^\circ 0'$	0,5	0,866	1,732	0,5
4	$106^\circ 10'$	0,75	0,901	1,200	0,25
6	$111^\circ 0'$	0,833	0,928	1,112	0,166
8	$113^\circ 25'$	0,875	0,944	1,079	0,125
10	$114^\circ 50'$	0,9	0,953	1,059	0,1

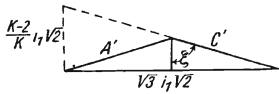


Fig. 41.

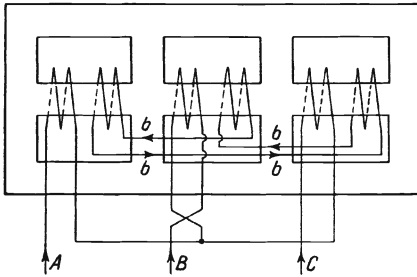


Fig. 43.

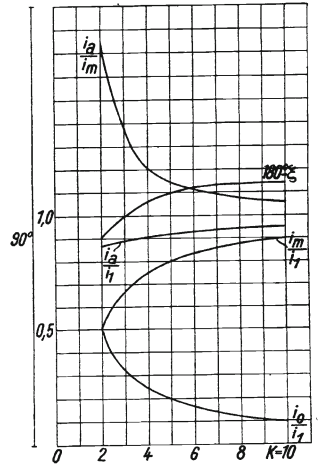


Fig. 42.

II. Δ / Y - Schaltung.

Bei primärer Dreieck- und sekundärer Sternschaltung können sich die Ströme in den einzelnen Spulen ebenso entwickeln wie bei Verbindung des Transformernullpunktes mit dem des Generators. Da hier die Dreiecksspannungen genau den Regeln folgen wie dort die Sternspannungen, können wir die im vorigen Abschnitt für die Spulenströme entwickelten Formeln auch hier verwenden. D. h. die Fig. 42 gilt auch für die Spulenströme bei Dreieckschaltung der Primärwicklung. Die Ströme in den Zuleitungen sind gleich der Differenz je zweier Spulenströme.

In ähnlicher Weise wie beim vorigen Fall kann man auch hier die Angaben dreier Wattmeter ableiten, deren Stromspulen in die Zuleitungen und deren Spannungsspulen zwischen diesen und einen künstlich gebildeten Nullpunkt angeschlossen werden. Auf das solcher Art an der zu den beiden Außenspulen führenden Zuleitung liegende Instrument entfallen 40% der gesamten Kernverluste, auf jedes der beiden anderen je 30%. Prinzipiell Neues tritt bei dieser Schaltung nicht auf, so daß wir zu der letzten charakteristischen Möglichkeit übergehen können.

III. Y / Δ - Schaltung.

Hier wirkt auf jeden magnetischen Kreis die Differenz zweier MMKe, so daß wir die Gleichungen (12) bis (14) nicht für die Ströme der Primärspulen, sondern — Übersetzungsverhältnis 1 : 1 — für die Differenz aus je einem Primärstrom und einem in dem geschlossenen Dreieck fließenden Sekundärstrom b , Fig. 43, ansetzen müssen. Wir können dann durch die Differenz je zweier derartiger Gleichungen andere

Gleichungen erhalten, die sich auf die Fluxe beziehen, die zur Induktion der gegebenen, uns also bekannten Dreiecks-Spannungen dienen.

$$(19a) \quad \Phi_\alpha = \frac{C(K^2 - 2) - B(K + 1)^2 + (2K + 3)b}{K(K^2 - 2)w}$$

$$(20b) \quad \Phi_\beta = \frac{(A - C) \cdot (K^2 - 2)}{K(K^2 - 2)w}$$

$$(21b) \quad \Phi_\gamma = \frac{B(K + 1)^2 - A(K^2 - 2) - b(2K + 3)}{K(K^2 - 2)W}$$

Die Größe des Dreieckstromes b hängt nur von den MMK-Verhältnissen ab. Wir erhalten demnach seine Größe am wenigsten durch andere Einflüsse verschleiert, wenn wir die im Dreieck wirksame EMK gleich Null setzen. Wir stoßen hiermit nicht wesentlich gegen die praktischen Verhältnisse; denn b ist klein gegen die primären Leerlaufströme, so daß die zu seiner Erzeugung notwendige EMK sehr klein gegen die Sternspannungen ist. Wir nehmen also den idealen Fall einer widerstandslosen Dreiecks-Wicklung an. Dann ist

$$\Phi_A + \Phi_B + \Phi_C = 0.$$

Aus den modifizierten Gleichungen (12) bis (14) erhalten wir dann

$$(89) \quad (A + C) \cdot (K^2 - K) + B(K^2 - 2K) - b(3K^2 - 4K) = 0.$$

Da $A + B + C = 0$ ist, folgt hieraus

$$B = -b(3K - 4)$$

oder

$$(90) \quad b = -\frac{B}{3K - 4}.$$

Wir können jetzt die einzelnen Größen mit Hilfe eines Diagrammes, Fig. 44, bestimmen. Die 3 Dreieckseiten dieses Diagrammes sind $\Phi_\alpha(K^2 - 2)Kw$, $\Phi_\beta(K^2 - 2)Kw$, $\Phi_\gamma(K^2 - 2)Kw$.

Die Basis dieses Dreiecks ist dann eine Funktion von $(A - C)$ und die Höhe eine Funktion von B und b abhängig von K . Letztere ist

$$h = \frac{1}{2} \left\{ (A + C) \cdot (K^2 - 2) - 2B(K + 1)^2 + 2b(2K + 3) \right\} \\ = \left\{ -B \frac{3K^2 + 4K}{2} + b(2K + 3) \right\}.$$

Hierin (90) eingesetzt, gibt

$$h = -B \left\{ \frac{3K^2 + 4K}{2} + \frac{2K + 3}{3K - 4} \right\}.$$

Da die Basis des Dreiecks $\sqrt{3} \cdot (K^2 - 2) \cdot i_1 \sqrt{2}$ ist, so ist

$$h = \frac{2}{3} (K^2 - 2) i_1 \sqrt{2}$$

und folglich

$$B' = -3i_1 \sqrt{2} \frac{(K^2 - 2)(3K - 4)}{K(9K^2 - 16) + 2(2K + 3)}.$$

A und C bestimmt man in bekannter Weise. Wir erhalten dann

$$A = 0,921 \cdot i_1 \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + 110^\circ)$$

$$B = 0,630 \cdot i_1 \sqrt{2} \cdot \sin \omega t$$

$$C = 0,921 \cdot i_1 \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - 110^\circ)$$

$$b = 0,079 \cdot i_1 \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t - 180^\circ).$$

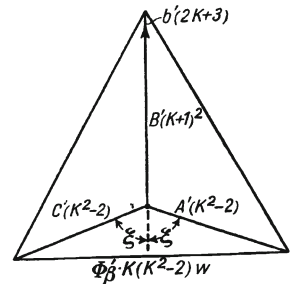


Fig. 44.

Schluß-Bemerkungen.

Die mit einfachen analytischen Mitteln arbeitende Theorie gibt einen klaren Einblick in die Wirkungsweise des Manteltransformators bei den verschiedenen Schaltungsmöglichkeiten. Die Freiheit der 3 magnetischen Kreise ist nicht vollkommen, da der Verlust an MMK in den beiden mittleren Querstegen je zwei benachbarte Kreise unvollkommen miteinander koppelt. Infolgedessen wird jeder Kern mehr oder minder von allen 3 Spulen erregt. Da die mittlere Spule aber entgegengesetzt geschaltet ist, wie die beiden Außenspulen, so wird bei primärer Sternschaltung der mittlere Kern schwächer erregt. Der Manteltransformator hat demzufolge bei Leerlauf eine Nullpunktverschiebung und zwar ist die EMK der mittleren Spule kleiner als die der beiden Außenspulen. Daraus folgt eine von der normalen Phasenverschiebung von je 120° zwischen den 3 EMKen abweichende Verschiebung. Diese hat zur Folge, daß bei der Messung der Leerlaufverluste mit 3 Wattmetern alle drei Instrumente verschieden große Ausschläge haben. Auch wenn man den Nullpunkt des Transformators selber für die Messung benützt, werden die Ausschläge nicht gleich groß. Es kann sogar eines der 3 Wattmeter negativ ausschlagen. Die 3 Magnetisierungsströme sind infolge desselben Einflusses verschieden groß. Diese Verschiedenheiten hängen ab von den konstruktiven Verhältnissen des Eisenweges. Die Nullpunktverschiebung ändert sich nicht bei Belastung; sogar schiefe (sogenannte einphasige) Last erzeugt keine zusätzliche Nullpunktverschiebung. Einspulige Last dagegen erzeugt eine Nullpunktverschiebung ähnlich wie im Kerntransformer. Wegen des reinen Eisenschlusses, den der diese zusätzliche EMK induzierende Flux im Manteltransformer findet, ist die Verschiebung größer als im Kerntransformer. Ist die Sekundärwicklung in Dreieck geschaltet, so führt sie einen Ausgleichs-Magnetisierungsstrom, der die Nullpunktverschiebung praktisch gleich Null macht. Die Leerlaufsströme in den 3 Spulen sind auch in diesem Falle verschieden groß. Dasselbe gilt für die Dreiecksschaltung der Primärspulen. Verbindet man bei Y/Y-Schaltung den primären Nullpunkt mit dem Generator-Nullpunkt, dann fließt durch den Nulleiter ein Magnetisierungsstrom, der kleiner ist, als der Leerlaufsstrom der Mittelspule ohne diese Nullpunktverbindung. Irgendwelche Komplikationen treten hierbei nicht auf, im Gegenteil, der Nulleiter stellt sogar eine — allerdings nur theoretisch in Frage kommende — Verbesserung dar. Durch die mangelhafte Kopplung der 3 Magnetkreise können sich im Manteltransformer Glieder höherer Ordnung sowohl im Magnetisierungsstrom als auch in den EMKen ausbilden. Eine gefährliche Höhe nehmen sie aber nie an. Sowohl eine Dreieckwicklung als auch Verbindung des Nullpunktes mit dem des Generators verhindert ihre Ausbildung in den EMKen. Bei Y/Y-Schaltung können die beiden Außenspulen sogar Harmonische dritter Ordnung führen, was beim Kerntransformer höchstens minimal der Fall sein kann. All diese in wissenschaftlicher Beziehung sehr interessanten Eigentümlichkeiten haben nur ein rein akademisches Interesse; die manchmal gegen den Manteltransformer ihretwegen geäußerten Bedenken sind nicht gerechtfertigt.

Über Durchschlagsfestigkeit von Isolierölen.

Von

Robert M. Friese.

Mitteilung aus dem Charlottenburger Werk der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H.
zu Charlottenburg.

Mit 8 Textfiguren.

Vor etwa 20 Jahren fanden die Isolieröle Eingang in die Starkstromtechnik. Im großen und ganzen mit Erfolg. Der Grund lag nicht darin, daß etwa ein tieferer Einblick in das Wesen der Isolieröle und der Vorgänge des Durchschlags überhaupt vorhanden gewesen wäre, sondern darin, daß damals noch mit mäßigen Spannungen gearbeitet wurde, die heute kaum mehr als Hochspannung angesehen werden. Diesen gegenüber waren die damals erhältlichen und verwendeten Öle selbst in mäßiger Güte noch von erheblicher Sicherheit gegen Durchschlag. Mißerfolge gab es natürlich auch, aber man erkannte sehr bald, daß es hauptsächlich zwei Umstände waren, die die Öle in ihrer Brauchbarkeit herabsetzten: unvollkommene Reinigung der Öle nach dem Raffiniervorgang und Wasserhaltigkeit derselben. Demgemäß verlangte man von den Ölwerken die Lieferung säurefreier Öle. Man verstand darunter die Abwesenheit von Mineralsäureresten aus dem Waschvorgang der Rohdestillate mit H_2SO_4 . Daß die Säurereste in den Ölraffinerien durch Behandlung mit Alkalien entfernt wurden und die Öle zwar säurefrei, aber nicht alkalifrei zu sein brauchten, fand merkwürdigerweise keine Erwähnung. Dagegen fand die als schädlich erkannte Gegenwart von Wasser im Öl dauernde Beachtung, und die Forderung nach wasserfreiem Öl war zu jeder Zeit gleichbedeutend mit der Zulässigkeit der Verwendung in Hochspannungsapparaten. Das Verlangen nach einem säurefreiem Öl war eine gute Forderung, und ihr verdankte man die überaus erfolgreiche Wirkung der Isolieröle bei der Überwindung aller mit wachsender Hochspannung mehr und mehr auftretenden Schwierigkeiten.

Erst die letzten 10 Jahre etwa, mit der sprunghaften Aufwärtsbewegung der Hochspannung zeigten, daß die Isolieröle nicht mehr die große natürliche Sicherheitsreserve gegenüber den wachsenden Spannungen aufwiesen, wie das am Anfang der Entwicklung der Fall war. Man erkannte, daß ein ursprünglich säure- und wasserfreies Öl im Laufe seiner Verwendung zwar säurefrei¹⁾, aber nicht wasserfrei zu bleiben brauchte, ja daß es sogar ganz besonderer Vorkehrungen bedurfte, um die Isolieröle an der Aufnahme von Wasser aus der Luft zu verhindern. Hierbei ergab sich, daß die Durchschlagsfestigkeit außerordentlich empfindlich auf Feuchtigkeitsgegenwart reagierte. Es wurden Durchschlagskurven veröffentlicht, die diese Abhängigkeit zeigen sollten. Die Übereinstimmung war aber schlecht. Der Grund mag zum Teil an der nicht leichten Feststellbarkeit der beiden Abhängigkeitsgrößen an sich liegen,

¹⁾ Die Möglichkeit der Gegenwart organischer Säuren, die in nicht gut raffinierten Ölen vorhanden sein können — aber möglichst nicht vorhanden sein sollten — haben mit den hier betrachteten Vorgängen nichts zu tun. Sie scheinen übrigens auf die Durchschlagsfestigkeit nicht ohne Einfluß zu sein.

zum Teil an der Schwierigkeit des sauberen Arbeitens bei der hohen Empfindlichkeit der Abhängigkeit und schließlich noch von Umständen unbekannter Art, die nicht vernachlässigt werden dürfen.

Die nachfolgenden Versuche und Betrachtungen sollen einen Beitrag liefern zur Aufklärung der mancherlei Widersprüche, die beim Eindringen in das vielfach noch recht dunkle Gebiet dem Praktiker wie Theoretiker aufstoßen.

Es ist nützlich, zunächst gewisse Festsetzungen zu treffen über das Was und Wie der Prüfungen, einmal um für spätere Fortschrittsarbeiten die Möglichkeit der Vergleichbarkeit zu behalten und eine ebensolche Vergleichbarkeit mit in anderen Händen befindlichem Versuchsmaterial zu ermöglichen.

1. Das Öl.

Unerlässlich sind genaue Angaben über die Art des Isolieröles. Im folgenden handelt es sich nur um Mineralöle im engeren Sinne, die überwiegend aus Rohpetroleum durch fraktionierte Destillation gewonnen werden. Sie genügen den vom Zentralverband der Deutschen Elektrotechnischen Industrie herausgegebenen Richtlinien¹⁾. Werden Öle kritisiert, die diesen Vorschriften nicht entsprechen, so müssen die Punkte genannt werden, worin sie abweichen. Ferner sind Aussagen zu machen über die Vorbehandlung des Öles, ehe es der Durchschlagsprüfung unterworfen wurde, insbesondere ob und mit welchen Mitteln es wasserfrei gemacht und in der erzielten Wasserfreiheit erhalten wurde, ferner ob und wieweit man es sonst noch von möglichen Verunreinigungen befreite. Ich hoffe in einer späteren Arbeit zeigen zu können, daß z. B. der Fasergehalt (nicht der Staubgehalt schlechtweg) des Öles eine sehr beachtenswerte Rolle bei der Durchschlagsfestigkeit spielt und daß die hierdurch eingeleiteten Durchschläge fälschlich als Wassergehalt gedeutet werden können.

Es sei schon hier betont, daß es außerordentlich schwierig ist, Öl wirklich wasserfrei zu bekommen und es auch nur kurze Zeit in diesem Zustand zu erhalten. Jedenfalls kann bei den in der Praxis üblichen und im allgemeinen auch nur möglichen Verfahren, das Wasser aus dem Öle zu entfernen, nicht von einem absolut wasserfreiem Endprodukt gesprochen werden. Die im Großbetrieb üblichen Verfahren der „Entfeuchtung“ des Öles beruhen entweder auf dem Wege des Herausdampfens oder des Herausfilterns oder einer Kombination beider. Das Herausdampfen verlangt bei Atmosphärendruck eine Erhitzung des Öles über 100° C. Die Erfahrung hat gelehrt, daß man hierbei nicht über 120° C gehen soll, und zwar an keinem Punkte des Ölkreislaufes, weil die Mineralöle bei höherer Temperatur besonders bei Gegenwart des Luftsauerstoffes sehr rasch in ihrer chemischen Konstitution verändert werden. Über die Einzelheiten dieser Vorgänge sind wir nur sehr unvollkommen unterrichtet. Jedenfalls weiß man aber, daß besonders längeres Erhitzen bei diesen Temperaturen möglichst zu vermeiden ist, es sei denn, daß das Verfahren wenigstens unter Luftabschluß vor sich geht. Man ist daher auch den Weg gegangen, die Erhitzung bei Temperaturen unter 100° C vorzunehmen, muß dann aber den Druck erniedrigen, um das Wasser mit einiger Sicherheit ausdampfen zu können. Dieses Verfahren der Entfeuchtung im (mäßigen) Vakuum ist dem ersteren vorzuziehen,

¹⁾ Richtlinien für die technischen Bedingungen für Transformatoren- und Schalteröle, festgelegt in den Sitzungen vom 4. Mai und 8. November 1918 von der Unterkommission für Transformatorenöle.

obgleich auch hier — wenn auch in vermindertem Maße — auf die Konstitution des Öles eingewirkt wird. Das Herausfiltern dagegen beruht nicht, wie man zunächst glauben möchte, auf der großen Neigung des Wassers zur ausgetrockneten Pflanzenfaser, die natürlich an sich vorhanden ist, sondern auf einem rein mechanischen Vorgang der Siebwirkung, worüber später noch einiges zu sagen ist. (Abschnitt 3). Das Öl wird vermittels einer Pumpe durch eine Reihe scharf ausgetrockneter Filtrierpapiere gedrückt und gibt an diese das Wasser ab. Zugleich bleiben in den Maschen des Filters noch sonstige Verunreinigungen zurück. Das Verfahren bedarf keiner gesteigerten Temperaturen. Höchstens um ein allzu viskoses Öl für den Filtriervorgang genügend dünnflüssig zu machen, erweist sich eine mäßige Anwärmung als nützlich. Von einer chemischen Einwirkung auf das Öl kann dabei praktisch nicht die Rede sein. Man könnte die Ausfiltrierung als die beste Lösung betrachten, haftet auch ihr nicht der Nachteil an, daß sie das Öl nicht frei von Fasern zu machen vermag. Sehr wahrscheinlich geben die Filtrierpapiere ihrerseits feine Pflanzenfäserchen an das durchflutende Öl ab.

2. Die Spannungsquelle.

Die Durchschlagsprüfung kann sowohl mit Gleich- als auch mit Wechselstrom vorgenommen werden. Bei Öl handelt es sich infolge seiner im allgemeinen hohen Durchschlagsfestigkeit gewöhnlich um Spannungen von der Größenordnung 10 bis 50 kV. Mit Gleichstrom sind solche Spannungen nicht ohne weiteres erhältlich, wenigstens nicht in einer für derartige Untersuchungszwecke geeigneten Form. Es ist daher üblich, und bei dem Überwiegen des Wechselstromes in der Hochspannungstechnik auch berechtigt, die Durchschlagsfestigkeit des Öles mit Wechselstrom festzustellen. Man muß sich aber darüber klar sein, daß vielleicht bei hohen Gleichstromspannungen andere Ergebnisse herauskommen können. Vorerst wissen wir hierüber nichts. Man nimmt an, daß der Durchbruch eines Dielektrikums erfolgt beim jeweils vorhandenen Höchstwert der Spannung, bei Wechselstrom also beim Amplitudenwert. Dieser Wert ist der Messung aber nicht bequem zugänglich. Man hat daher den Effektivwert der Spannung, wie er von den gebräuchlichen Spannungsmeßinstrumenten angezeigt wird, dafür gesetzt; ist der zeitliche Verlauf der Spannungslinie sinusförmig, so ist der Amplitudenwert das $\sqrt{2}$ -fache. Wenn irgend möglich wird man mit sinusförmigen Stromquellen zu arbeiten suchen. Wo dies nicht angängig ist, wird man den alsdann gemessenen Effektivwert umrechnen auf den Effektivwert einer äquivalenten Sinuslinie gleichen Amplitudenwertes; es genügt hierfür eine einmalige Feststellung des Scheitelfaktors. Streng richtig ist dies Verfahren wohl auch nicht, denn es ist bis jetzt noch nicht erwiesen, ob die Durchschlagsfestigkeit vom Amplitudenwert allein abhängt und nicht noch von dem zeitlichen Verlaufe der Spannung bis zu diesem Amplitudenwert. Aber die Vorsicht sollte man jedenfalls gebrauchen, Durchschlagsfestigkeiten nicht zu messen, ohne sich über die Spannungskurve einigermaßen klar zu sein. Die in dieser Abhandlung zur Sprache kommenden Spannungswerte beziehen sich alle auf Effektivwerte von Sinus- oder äquivalenten Sinuslinien. Die Vorsicht erheischt bei allen Durchschlagsversuchen das Vorschalten dämpfender, induktionsfreier Widerstände. Sie dürfen aber nicht so groß gewählt werden, daß schon die Verschiebestrome einen merkbaren Spannungsabfall darin hervorzurufen

vermögen. Aus denselben Gründen müssen auch die Maschinen wie Transformatoren genügend starr und von ausreichender Leistung sein. Elektrischer- oder Influenzmaschinen, Leidener Flaschen und dgl. sind aus den genannten Gründen zur zahlenmäßigen Festlegung der Durchschlagsfestigkeit unbrauchbar.

3. Die Durchschlagsfestigkeit und der Wassergehalt.

Wenn in der Literatur von Durchschlagsvorgängen die Rede ist, so findet man gewöhnlich nur Spannungen angegeben. Mit diesen ist aber mangels genügender Erläuterungen nicht viel anzufangen. Fehlen dann auch noch genauere Unterlagen über Anordnung und Gestaltung der Elektroden, zwischen denen die Durchschläge stattfanden, so haben die Angaben kaum mehr Wert als reine Relativzahlen für einen Sonderfall und lassen sich zu irgendwelchen Vergleichen und sonstigen Schlüssen nicht verwenden. Es gibt nur eine Größe, die sich zur zahlenmäßigen Festlegung der Durchschlagsfestigkeit eines Isolierstoffes vertreten läßt. Das ist diejenige Spannung, die im homogenen elektrischen Felde die Dickeneinheit des Isolierstoffes gerade zu durchschlagen vermag. Ist in einem solchen Felde die auf die Dicke r eines Isolierstoffes entfallende Durchschlagsspannung V , so ist die Größe $\frac{V}{r}$ die Durchschlagsfestigkeit des betreffenden Stoffes und ist eine Materialkonstante¹⁾. Nun ist die Herstellung eines homogenen Feldes gar keine so leichte Sache. Es erübrigt sich auch, weil für gewisse einfache geometrische Gebilde sich die Feldstärke für jeden Feldpunkt berechnen läßt. Kennt man aber die Gesetzmäßigkeit der Feldebildung, so braucht man für den Ort des Maximums nur den Gradienten $\frac{dV}{dr}$ zu bilden und kann auf diese Weise die Durchschlagsfestigkeit bequemer und genauer ermitteln als auf dem Definitionsweg der homogenen Felderzeugung. Nun wissen wir aus der Theorie, daß z. B. bei zwei konzentrischen Zylindern mit den Radien $r_1 < r_2$ die maximale Feldstärke auf r_1 herrschen muß und sich dafür der sehr einfache Ausdruck

$$D = \frac{V}{r_1 \ln \frac{r_2}{r_1}}$$

ableiten läßt. Ist also V die Durchschlagsspannung, so ist D die Durchschlagsfestigkeit des den Zwischenraum zwischen r_1 und r_2 ausfüllenden Isolierstoffes. Mit derartigen konzentrischen Zylinderfunkenstrecken, die besonders bei flüssigen Isolierstoffen sehr bequem sind, sind die hier vorkommenden Zahlenwerte ermittelt bzw. überprüft. Da V nach dem Vorangegangenen in kV eff, die Längen in cm gemessen sind, ergibt sich D in kV eff/cm (im folgenden kurz kV/cm geschrieben). Werden Meßfunkenstrecken anderer geometrischer Form verwendet, z. B. Kugeln, Scheiben usw., die, besonders unter Berücksichtigung ihres konstruktiven Beiwerks der Rechnung nicht genügend sicher zugänglich sind, so werden sie am besten auf dem Wege

¹⁾ Die Fälle, in denen die Größe $\frac{V}{r}$ keine Konstante, sondern V eine Funktion von r zu sein scheint, klären sich zumeist dahin auf, daß die Voraussetzung des homogenen Feldes nicht mehr erfüllt ist und über die Änderung des Feldes mit r Aussagen nicht gemacht werden können.

der Eichung auf die Zylinderfunkenstrecke¹⁾ zurückgeführt. Denn, das sei nochmals betont, nicht auf die Durchschlagsspannung kommt es bei der Bewertung eines Isolierstoffes an, sondern auf die Durchschlagsfestigkeit.

Bestimmt man unter Beachtung des bis jetzt Erörterten die Durchschlagsfestigkeit D eines Isolieröles, das nicht kurz vorher entfeuchtet wurde, so erhält man gewöhnlich Werte für D von der Größenordnung 50 kV/cm. Entfeuchtet man es aber vorher nach einem der erwähnten Verfahren, so steigt der Wert von D auf etwa 130 kV/cm, also auf etwa das $2\frac{1}{2}$ fache. Man sieht schon hieraus, daß der Wassergehalt des Öles

eine bedeutende Rolle bei der Durchschlagsfestigkeit spielen muß. Versucht man aber nach einer der bekannten Methoden, z. B. dem Xylolverfahren²⁾, den Wassergehalt des Öles bei diesen D -Werten zu bestimmen, so kommt man nicht zum Ziele, denn die Wassermengen sind so gering, daß die Empfindlichkeitsgrenzen dieser Methoden nicht ausreichen, sie nachzuweisen. Wir sind daher den umgekehrten Weg gegangen und haben zunächst ein Öl mit den in Abschnitt 1 genannten Mitteln so wasserfrei gemacht, wie dies mit der Sorgfalt des Großbetriebes möglich ist. Diesem Öl wurde der Wassergehalt O zugesprochen. Das ist nicht absolut richtig, wie sich später zeigen wird, aber es kann als erste Annäherung wohl bestehen. Diesem Öl von bekannter Menge wurden abgewogene Mengen destillierten Wassers steigend zugesetzt und mit dem Öle gut emulgiert³⁾. Nachdem die Gemische frei von Luftbläschen geworden waren, wurde D bestimmt. Die Versuche fanden bei Temperaturen von 15 bis 20° C und dem durchschnittlichen Barometerstande von Berlin (75,8 cm Hg) statt. Genaue Angaben hierüber erübrigen sich, weil die Versuche mit Unsicherheiten mancherlei Art behaftet sind, die schwerer wiegen als die Temperatur- und Druckkorrekturen. Die Ergebnisse zeigt das Kurvenblatt Fig. 1.

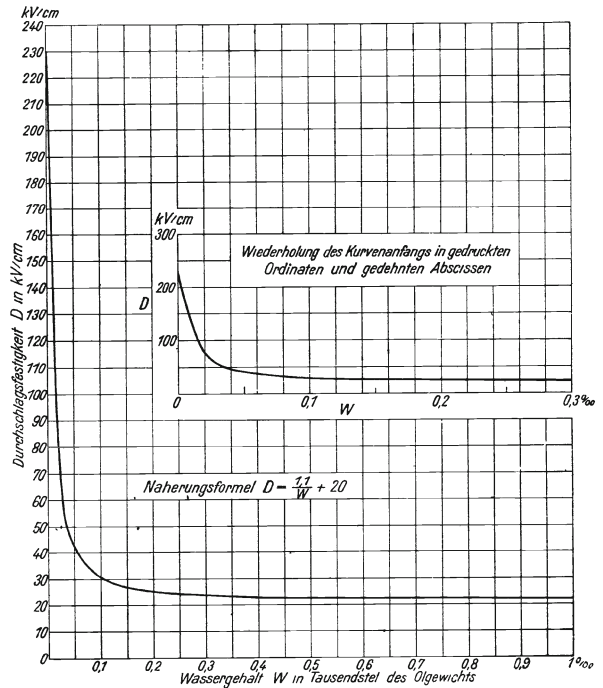


Fig. 1.

Durchschlagsfestigkeit D in kV/cm eines Isolieröles nach den Verbindungsrichtlinien, abhängig von seinem Wassergehalt W in Tausendstel des Ölgewichts.

¹⁾ Der große Vorteil, daß äußere Felder das Feld im Zylinderzwischenraum nicht zu stören vermögen, gilt natürlich nur, so lange die axialen Längen der Zylinder genügend groß im Verhältnis zu $r_2 - r_1$ sind; etwa 20 ($r_2 - r_1$).

²⁾ Marcousson, Laboratoriumsbuch für die Industrie der Öle und Fette. 1911, S. 44.

³⁾ Man verfährt am besten in der Weise, daß man erst stärkere Wasseremulsionen herstellt und diese durch allmähliche Ölzugabe auf schwächere Emulsionen einstellt. Leichtes Anwärmen und sehr kräftiges Schütteln mit reichlicher Luftmenge (trockene natürlich), erleichtert die an sich nicht sehr willige Emulsionsbildung. Alle Gefäße müssen selbst gut ausgetrocknet sein, damit hieraus nicht Fehlerquellen entstehen, denn es handelt sich bei den einzubringenden Wassermengen nur um Bruchteile von Tausendstel des Ölgewichts.

Die Kurve hat große Ähnlichkeit mit einer Hyperbel. In der Tat läßt sich die Abhängigkeit der Durchschlagsfestigkeit D vom Wassergehalt W mit befriedigender Annäherung innerhalb der Gebrauchsgrenzen durch den Ausdruck

$$D = \frac{1,1}{W} + 20$$

wiedergeben, worin D in kV/cm und W in Tausendsteln des Ölgewichtes (‰) ausgedrückt ist. Es ist das natürlich nur eine empirische Einkleidung des Durchschlagsgesetzes, dessen innere Zusammenhänge uns noch dunkel sind.

Betrachtet man ein solches wasserhaltiges Öl bei 300facher Vergrößerung unter dem Mikroskop und hat man den Kunstgriff gebraucht, das Wasser vorher mit einem möglichst intensiv färbenden, neutralen und wasserlöslichen Farbstoff, z. B. Spritscharlach B (der Bad. Anilin- und Sodafabrik) zu färben, so sieht man das Wasser in Form kleiner rubinroter Kügelchen im Öle schweben. Ihr Durchmesser ist von der Größenordnung $10\ \mu$ [$1\ \mu = 10^{-3}\ \text{mm}$]¹⁾. Steigt der Wassergehalt auf etwa $0,1\ \text{‰}$, so ist die Häufigkeit dieser Kügelchen schon so groß, daß durch die nun merkliche diffuse Streuung eine (optische) Trübung des Öles entsteht. Läßt man ein solches Öl durch getrocknete Filter gehen und untersucht gleich darauf das Filterpapier, so findet man, daß die roten Wasserkügelchen nicht etwa als kleine verwaschene rote Flecken ihren wässerigen Inhalt an die feinen Faserhärchen des Papierstoffes abgegeben haben, sondern sie sitzen als dieselben runden Kügelchen, als die man sie in der Emulsion sah, im öligen Maschengewebe des Papiere, so etwa, wie Schrotkörner in einem mehrfachen Drahtgewebe. Das Öl überzieht mit solcher Geschwindigkeit die Papierfäserchen, daß die Wasserkügelchen gar nicht mehr an die Fasern herankommen können, im Gegenteil, infolge der abstoßenden Wirkung zwischen Öl und Wasser die öligen Fasern nunmehr zu meiden suchen.

Fig. 1 ist recht lehrreich. Sie läßt zunächst erkennen, daß schon außerordentlich kleine Wassermengen, wie sie sonst bei exakten wissenschaftlichen Untersuchungen kaum irgendwo eine Rolle spielen, hier schon — man könnte sagen — wie Gift auf die Durchschlagsfestigkeit des Öles wirken. Besonders zu Beginn des Feuchtwerdens ist, entsprechend dem steilen Abfall des linken Kurvenastes, die Verschlechterung eine ganz gewaltige. Dann aber biegt die Kurve in die Horizontale ein und verläuft zur x-Achse asymptotisch in einem Abstand von etwa 22 kV/cm. Dies besagt, daß es nicht möglich ist, das Öl durch Wasseraufnahme beliebig zu verschlechtern, sondern daß es bei einem Feuchtigkeitsgehalt von etwa $1\ \text{‰}$ Wasser praktisch seine geringste Durchschlagsfestigkeit von 22 kV/cm erreicht. Es ist nicht leicht, eine Erklärung für diese Tatsache zu geben. Richtig ist, daß sich aus mit Wasser übersättigtem Öl das Wasser allmählich ausscheidet und zu Boden sinkt. Aber nur ein Teil wird dies tun, nämlich der, der die größeren Wasserkügelchen ausmacht. Die kleineren werden in einem Dauerschwebestand im Öl verbleiben und verhindern, daß ein besserer Wert für D als 22 kV/cm zustande kommt. Bei den der Fig. 1 zugrunde liegenden Versuchen konnte von einer nennenswerten Wasserausscheidung aber nicht die Rede sein, weil sich der

¹⁾ Man sieht auch noch Kügelchen von 1 bis $2\ \mu$ Durchmesser, wie auch solche bis $50\ \mu$, aber das sind Ausnahmen. Die weitaus überwiegende Mehrzahl bewegt sich in der oben angegebenen Größenordnung. Als Vergleich sei daran erinnert, daß die roten Blutkörperchen einen Durchmesser von 7 bis $8\ \mu$, die Fettkügelchen in der Milch von 2 bis $10\ \mu$ haben.

Emulsionsherstellung unmittelbar die Durchschlagsversuche anschlossen. Trotzdem konnte ein geringerer Wert für D als ~ 22 kV/cm nicht gefunden werden. Es ist hiernach anzunehmen, daß trotz der Gegenwart einer Wassermenge von mehr als 1‰ doch nur dieser Betrag bei dem Durchschlagsvorgang in Wirkung tritt. Warum und weshalb bleibt vorläufig ungeklärt. Man ersieht aber aus den bisherigen Ergebnissen, warum in früheren Jahren die Frage der Ölfeuchtigkeit keine sehr brennende war: die Betriebsspannungen waren noch relativ niedrig und die Abmessungen in den Konstruktionen dafür so reichlich, daß der Spannungsgradient an keiner Stelle den Mindestwert für D erreichte. Bei den heutigen üblichen Hochspannungen liegt die Sache nicht mehr so günstig. Die wirtschaftliche Gestaltung der Konstruktionen gestattet nicht mehr beliebigen Raumverbrauch und damit beliebige Herabdrückung des Spannungsgradienten. Man ist daher gezwungen, mit Öl zu isolieren, das höher beansprucht werden kann und muß, als dem oben genannten Mindestwerte entspricht, d. h. das unter einen gewissen Feuchtigkeitsgehalt nicht herabsinken darf und daher dort, wo es durch äußere Umstände an der Wasseraufnahme nicht gehindert werden kann, überwacht und von Zeit zu Zeit mit einem der angegebenen Verfahren entfeuchtet und damit auf hoher Durchschlagsfestigkeit gehalten werden muß. Das kann z. B. für Ölschalter sehr hoher Spannung zutreffen. Wie sieht es nun mit der höchst erreichbaren Durchschlagsfestigkeit des Öles aus? Ist der mit den praktischen Entfeuchtungsverfahren erreichbare, bereits genannte Wert $D \sim 130$ kV/cm dieser Höchstwert, oder gibt es einen noch höheren Wert, der die wahre Durchschlagsfestigkeit des von allen störenden Beimengungen befreiten Öles darstellt? Um diesen

4. Höchstwert der Durchschlagsfestigkeit

zu finden, wurde wie folgt vorgegangen: In eine Glaskugel (Fig. 2) wurden 2 gleiche Elektroden (gut abgerundete Messingscheiben von 10 mm Durchmesser und 3 mm Dicke) eingeschmolzen. Ihr Abstand betrug 2,33 mm. Durch Vorversuche war durch Vergleich mit der Zylinderfunkenstrecke die reduzierte Schlagweite zu 2,30 mm ermittelt worden. In einem erweiterten Ansatzrohr mit Einschnürung war Raum vorgesehen zur Unterbringung von Filterwatte. Nach außen endete der Filterraum in eine Glaskapillare mit einem Lumen von 0,70 mm. Schon bei der Herstellung der Apparatur wurde mit größter Sauberkeit verfahren. Nach Fertigstellung wurde die Röhre (ohne Filterstoff) 1 Stunde lang evakuiert und dabei auf einer Temperatur von 420°C gehalten. Dann wurde die Röhre wieder geöffnet und die vorher 3 Stunden im Vakuum auf 110°C erhitzte Watte (3,2 g chemisch reine, entfettete Verbandwatte), ohne sie mit den Händen zu berühren, in den Filterraum gebracht. Nunmehr wurden nochmals 2 Stunden bei einem Vakuum von 10^{-4} mm Hg und einer Erhitzung

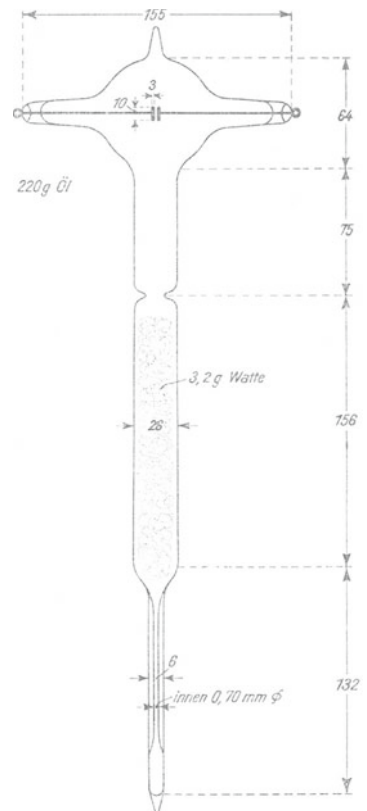


Fig. 2.

auf 110° C gepumpt und die Kapillare an der Pumpe abgeschmolzen. Inzwischen wurde ein gutes Durchschnittsöl durch Ausdampfen, wie früher beschrieben, entfeuchtet und unter diesem die Kapillare geöffnet. Das Öl strömte nun, gedrosselt durch die Kapillare, in langsamem, stetigem Strom durch das Wattleiter in die Kugel ein. Die Füllung dauerte rund 10 Minuten, die eingeströmte Ölmenge betrug 220 g. In dieser Zeit hatte das Öl Gelegenheit, etwa noch vorhandene Spuren von Feuchtigkeit an die Wattle abzugeben. Andererseits konnte aus den Erfahrungen im Glühlampen- bzw. Kathodenröhrenbau angenommen werden, daß nach der beschriebenen Vorbehandlung der Apparatur irgendwelche okkludierten Wassermengen an den Innenteilen der Röhre nicht mehr hafteten und somit vom Öl auch nachträglich nicht mehr aufgenommen werden konnten. Nachdem die Kapillare mit Klebwachs verschlossen war, wurde die Röhre sich 24 Stunden selbst überlassen. Nach Ablauf dieser Zeit zeigte sich die Röhre mit Öl voll gefüllt und frei von erkennbaren Gas- oder Luftbläschen. Nunmehr wurde zur Bestimmung des Durchschlagswertes geschritten. Es war anzunehmen (vgl. Abschn. 6), daß der erste Durchschlag den zu erwartenden Höchstwert ergeben würde, die nächstfolgenden Durchschläge dagegen niedrigere Werte. Denn bei anderer Gelegenheit hatten Analysen ergeben, daß der Durchschlag des Öles mit einer Ölersetzung verbunden ist. Es bilden sich als Gase in der Hauptsache Wasserstoff, Methan, Äthylen und Azetylen und als Festkörper Kohle in Form feinsten Rußes, durch den die Durchschlagsfestigkeit allmählich herabgesetzt wird. Das Ergebnis im vorliegenden Falle (reduziert auf Effektivwerte sinusförmigen Wechselstroms von 50 Perioden) zeigt nachstehende Tabelle:

	Durchschlagsspannung in kV	Durchschlagsfestigkeit in kV/cm
1. Durchschlag	53	230
2. „	42	180
3. „	35	150
4. „	32	140
5. „	30	130

Man sieht, daß unter Beachtung aller nur möglichen Vorsichtsmaßregeln ein Öl so präpariert und zum Versuch gebracht werden kann, daß man es wohl als absolut wasserfrei bezeichnen darf und daß die Durchschlagsfestigkeit eines solchen Öles den bis jetzt noch nicht bekannt gewordenen hohen Wert von 230 kV/cm erreicht. Man darf daher bis auf weiteres auch in Fig. 1 die Kurve als von diesem Punkte ausgehend betrachten. Man ersieht aber aus der Tabelle und dem daraus gewonnenen Kurvenbilde 3 weiter, daß mit jedem folgenden Durchschlag die Durchschlagsfestigkeit sinkt und dem Grenzwerte 125 kV/cm zuzustreben scheint. Ob nun zwischen diesem Zahlenwerte und dem nahezu gleichen des als praktisch wasserfrei bezeichneten Öles (Abschn. 3) irgendwelche Beziehungen bestehen, bleibt vorläufig eine offene Frage. Man könnte daran denken, daß die Mineralöle doch keine vollkommen reinen Kohlenwasserstoffe sind und daß noch Sauerstoff in kleinster Bindung irgendwie angelagert ist und Anlaß zur Bildung von Wasser mit dem bei dem Durchschlagsvorgang entstehenden Wasserstoff in statu nascendi geben könnte¹⁾. Lehnt man diese Möglichkeit ab, so wäre noch denkbar, daß die sich bildenden, äußerst fein ver-

¹⁾ Bei der nachgewiesenen großen Empfindlichkeit des Durchschlages gegen Wassersuspensionen genühten schon solch kleine Mengen H₂O, die selbst als Spuren chemisch nicht mehr feststellbar wären.

teilten Rußpartikel dieselbe Rolle für den Durchschlagsvorgang spielen könnten wie die Wasserkügelchen im (feuchten) Öl. Man könnte aber auch zu dem Schlusse kommen, daß das „praktisch“ wasserfreie Öl doch „absolut“ wasserfrei ist und nur den hier nachgewiesenen Durchschlagshöchstwert deshalb nicht erreicht, weil noch andere Ursachen in ihm wirksam sind (z. B. Fasergebilde), die, als Feuchtigkeit gedeutet, in unserem Experimentum crucis aber durch die sich allmählich bildenden Rußpartikel in ihrer Wirkung ersetzt werden. Dann müßten die Punkte in Fig 3 auch der Kurve in Fig. 1 angehören und in dieser die Abszissen W als Korrektur eine kleine Verschiebung nach rechts erfahren.

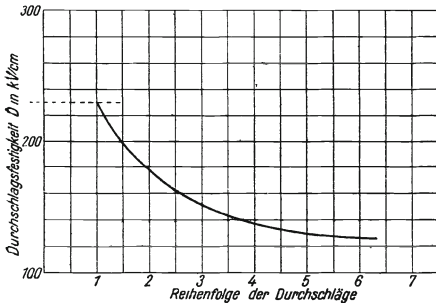


Fig. 3.

Durchschlagsfestigkeit D in kV/cm eines „absolut“ wasserfreien Isolieröles nach den Verbandsrichtlinien abhängig von der Reihenfolge der Durchschläge.

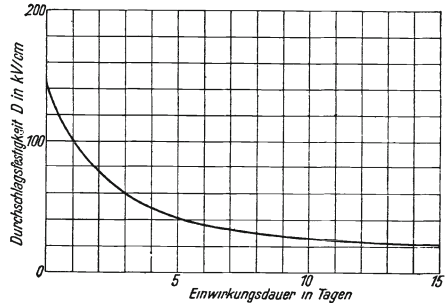


Fig. 4.

Abnahme der Durchschlagsfestigkeit D in kV/cm eines entfeuchteten Isolieröles nach den Verbandsrichtlinien in feuchter Luft (80% rel. Feuchtigkeit) bei Zimmertemperatur, abhängig von der Zeitdauer der Einwirkung in Tagen.

5. Das Öl und die Luftfeuchtigkeit.

Daß trotz des Antagonismus zwischen Wasser und Öl dieses die Neigung hat, aus feuchter Luft Wasser an sich zu reißen und zwar um so lebhafter, je sorgfältiger das Öl vorher entfeuchtet war, ist eine Erfahrungstatsache. Z. B. ergab bei einem Versuche ein vorher sorgfältig entfeuchtetes Öl, das in diesem Zustande eine Durchschlagsfestigkeit von 145 kV/cm hatte, nachdem es in einer offenen Schale von 12 cm Durchmesser in einen Raum gebracht worden war, in dem die relative Luftfeuchtigkeit auf konstant 80% bei Zimmertemperatur gehalten wurde, am 3. Tage nur noch eine Durchschlagsfestigkeit von 60 kV/cm, am 8. Tage von 30 kV/cm und am 13. Tage von 23 kV/cm (Fig. 4). Wurde dieses feuchte Öl nun in einem mit Chlorkalzium beschickten Exsikkator gebracht und dort 45 Tage belassen, so war nach Umfluß dieser Zeit seine Durchschlagsfestigkeit wieder bis auf 128 kV/cm gestiegen. Da dieser Punkt indessen keinen Einblick in den zeitlichen Verlauf einer solchen Selbsttrocknung gibt, sei in Fig. 5 aus einer anderen Versuchsreihe ein derartiges Kurvenbild wiedergegeben. Wir sehen, daß in den ersten 2 bis 3 Tagen der stärkste Anwachs der Durchschlagsfestigkeit erfolgt, dann verlangsamt sich der Vorgang, um schließlich einem Endwerte zuzustreben, der dieselbe Durchschlagsfestigkeit zu ergeben scheint, wie die Entfeuchtung nach den früher genannten Verfahren der Filtration bzw. Erhitzung. Es hat also das Öl nicht nur die Neigung Feuchtigkeit aufzunehmen, sondern auch wieder abzugeben, je nach dem Zustande seiner Umgebung. Wie der physikalische Vorgang bei dieser Wasseraufnahme bzw. -abgabe sich im einzelnen abspielt, ist noch ungeklärt. Das Mikroskop ließ selbst bei 1000-facher Vergrößerung nichts erkennen.

Leider versagt hier die Möglichkeit, von dem Kunstgriff der Färbung Gebrauch zu machen. Vielleicht haben wir es mit einer Okkludierung des Wasserdampfes zu tun, die sich nicht in Parallele stellen läßt mit der Emulgierung. Um zu sehen, ob infolge dieses möglichen Unterschiedes andere Werte für die Durchschlagsfestigkeit des Öles herauskommen, wurde folgender Versuch gemacht. In eine Kochflasche wurden 450 g entfeuchtetes Öl ($D = 145 \text{ kV/cm}$) gebracht. In die Kochflasche eingehängt war ein kleines Glasgefäß, das mit dem unteren Teil etwas in den Ölspiegel eintauchte. In dieses kleine Verdampfungsgefäß kamen 0,05 g ($0,11\%$) destilliertes Wasser. Die Ölflasche wurde verschlossen und langsam auf eine Temperatur von 110 bis 120°C gebracht, bis alles Wasser aus dem kleinen Gefäß verdampft war.

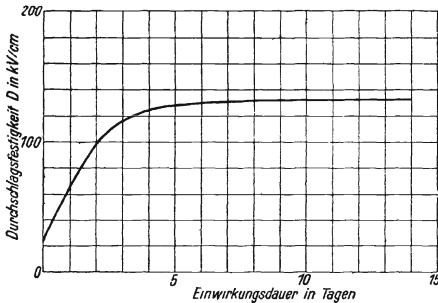


Fig. 5.

Zunahme der Durchschlagsfestigkeit D in kV/cm eines feuchten Isolieröles in trockener Luft (18% rel. Feuchtigkeit) bei Zimmertemperatur, abhängig von der Zeitdauer der Einwirkung in Tagen.

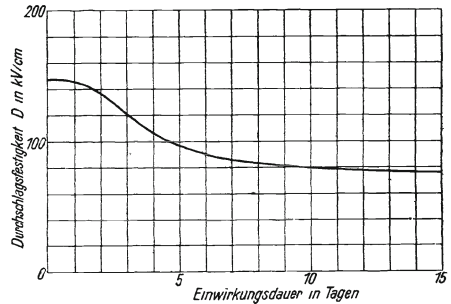


Fig. 6.

Abnahme der Durchschlagsfestigkeit D in kV/cm eines entfeuchteten Isolieröles nach den Verbandsrichtlinien bei Zimmertemperatur über Wasser von $0,5\%$ des Ölgewichtes, abhängig von der Zeitdauer der Einwirkung in Tagen.

Nun wurde unter dauerndem Schütteln¹⁾ langsam abkühlen lassen und bei Zimmertemperatur die Durchschlagsfestigkeit D bestimmt. Es ergab sich 24 kV/cm . Nunmehr wurde der Versuch wiederholt, aber die $0,05 \text{ g H}_2\text{O}$ wurden diesmal auf dem früher beschriebenen Wege kalt in das Öl einemulgiert. Es ergab sich jetzt ein $D = 30 \text{ kV/cm}$. Die Versuche wurden noch variiert mit Wassermengen von $0,56\%$ und $0,06\%$ des Ölgewichtes, wobei sich ergab, daß auch hierbei die D -Werte des Öles bei hineingedampfter Feuchtigkeit niedriger waren als die bei hineinmulgierter. Es scheint dies darauf hinzuweisen, daß es nicht gleichgültig ist, in welcher feinsten Verteilung das Wasser in das Öl gelangt und hier klafft noch insofern eine Lücke, als die Angabe des Wassergehaltes schlechtweg noch kein eindeutiges Argument ist, auf das die Durchschlagsfestigkeit bezogen werden kann.

Es war naheliegend, einen umgekehrten Versuch zu machen, also das Wasser nicht von oben aus der feuchten Luft in das Öl gelangen zu lassen, sondern eine ungeteilte Menge H_2O auf den Boden des Ölfäßes zu bringen und zu sehen, was sich das Öl von diesem Wasser aneignen werde. Es wurde in die vorerwähnte Kochflasche wiederum 450 g entfeuchtetes Öl ($D = 147 \text{ kV/cm}$) gebracht und mittels einer Pipette auf den Boden der Flasche eine Wassermenge von $0,5\%$ vorsichtig ausgebreitet. Die Flasche blieb so gut verschlossen und unberührt bei Zimmertemperatur stehen. Von Zeit zu Zeit wurde die Durchschlagsfestigkeit in der oberen Ölschicht bestimmt. Das Ergebnis zeigt Fig. 6. Wie ihr zu entnehmen ist und

¹⁾ Dies hatte den Zweck, die Bildung von tropfbarem Kondensat an sich sonst ungleichmäßig abkühlenden Gefäßteilen, z. B. Flaschenhals, zu verhindern.

vorauszusehen war, vollzieht sich hier die Abnahme der Durchschlagsfestigkeit des Öles wesentlich anders als in Fig. 4. Das spezifisch schwerere Wasser am Boden wird keine Möglichkeit haben, im Öle nach oben zu wandern. Trotzdem findet auch hier eine allmähliche Durchfeuchtung des Öles von unten nach oben statt, nur geht das alles viel langsamer als in Fig. 4, und es dauert daher eine ganze Weile, bis in den oberen Ölschichten von einer Verschlechterung der Durchschlagsfestigkeit etwas zu merken ist. Wahrscheinlich vollzieht sich auch hier vom Boden aus die Durchfeuchtung in Form von Wasserdampf, der sich von der Oberfläche der Wasserschicht ablöst. Es ist aber nach dem Verlauf der Kurve zweifelhaft, ob auf diese Weise das Öl sämtliches Wasser ($0,5^0/_{00}$) als Feuchtigkeit in sich aufnehmen wird. Denn es müßte dann als Grenzwert für D etwa 23 kV/cm erreicht werden, und das wäre nach dem Kurvenverlauf erst nach sehr langer Zeit zu erwarten. Andererseits weisen Erfahrungen aus dem praktischen Betriebe darauf hin, daß Öl, das in Tanks und Fässern lange Zeit über größeren Wassermengen gestanden hat, doch schließlich die Eigenschaften feuchtigkeitsgesättigten Öles annimmt. Jedenfalls kann aber ausgesprochen werden, daß Wasser, das in geschlossener Menge (also nicht fein verteilt) auf den Boden von Ölgefäßen gelangt, das Öl viel langsamer verdirbt als Feuchtigkeit, die durch Emulgierung oder in Dampfform von der Oberfläche her aufgenommen wird. Man wird daher bei Unfällen, durch die in das Öl von Hochspannungsapparaten in zusammenhängender Menge Wasser gekommen ist, dieses durch die Ablaufvorrichtungen möglichst schnell zu entfernen suchen.

6. Die Änderung der Durchschlagsfestigkeit mit der Zahl der Durchschläge.

Wer auf dem Gebiete der Durchschlagsprüfung von Ölen Erfahrungen besitzt, weiß schon aus dem Knallgeräusch, der Lichterscheinung und der Gasentwicklung des ersten Durchschlages einen ungefähren Schluß zu ziehen auf die Höhe der Durchschlagsspannung des folgenden Durchschlages. Ist das Öl wasserhaltig, und das ist es zumeist, wenn es nicht vorher sehr gründlich entfeuchtet wurde, so wird man finden, daß in etwa 80 von hundert Fällen die Durchschlagsfestigkeit zuzunehmen scheint. Der Grund dürfte der sein, daß durch die Wärme-Energie im Lichtbogen die Wasserprikelchen im Durchschlagsweg verdampft und entfernt werden. Das Geräusch eines solchen Durchschlages ist scharf und klatschend, und es erfolgt bei ungeänderter Spannung nicht sofort ein zweiter Durchschlag; die Wunde ist zunächst geheilt. Erst wenn wieder feuchtes Öl aus der Umgebung in die Funkenstrecke eingetreten ist, wiederholt sich der Vorgang. In der Zwischenzeit könnte nur bei erhöhter Spannung ein Durchschlag erzwungen werden. Dies setzt aber voraus, daß die Durchschlagsenergie durch Dämpfungswiderstände so geregelt ist, daß keine zu starke Ölverbrennung (Ölzeretzung) erfolgt. Tritt dieses letztere ein, so entsteht (vgl. Abschn. 4) im Funkenzwischenraum eine entsprechende Menge fein verteilten Rußes, der aber nicht verschwindet, sondern die Brücke zu neuem Durchschlag bildet, und zwar steigend mit den folgenden Durchschlägen. Es kommt zum Dauerüberschlag, die Durchschlagsfestigkeit scheint abzunehmen. Derartige Durchschläge sind von einem dumpfen, mehr brodelnden Geräusch begleitet infolge der bereits früher erwähnten gasförmigen Kohlenwasserstoffe (Abschn. 4) aus zersetztem Öl. Dies ist auch der Grund des in Fig. 3 dargestellten sinkenden Verlaufes der Durchschlagsfestigkeit, denn es handelt sich dort um ein Öl, das infolge vollkommener Wasserfreiheit nur

Durchschläge der zweiten Art bilden kann. Maßgebend für die Kennzeichnung eines Öles kann daher nur der erste Durchschlagswert sein, denn jeder unmittelbar darauf folgende trifft im Überschlagsweg Öl an, das durch den vorangegangenen Durchschlag verändert ist und nicht mehr identisch sein kann mit dem Öl in seiner ursprünglichen Form. Ganz falsch ist natürlich die Angabe eines „Dauerdurchschlagswertes“, denn dieser hängt viel mehr ab von der Versuchsanordnung bzw. von der auf die Funkenstrecke gegebenen Energiemenge als von der Konstitution des Öles. Man darf auch nicht vergessen, daß schon allein durch die Erwärmung der Elektroden und des Öles im Funkenweg eine weitere Fehlerquelle für die Deutung des Durchschlagswertes erwächst (Abschn. 8). Selbstverständlich steht nichts im Wege und ist sehr zu empfehlen, durch eine mehrfache Wiederholung eines Durchschlagsversuches seine Genauigkeit zu verbessern, dann muß aber sorgfältig erwogen werden, ob der zweite (und folgende) Versuch unter denselben Bedingungen ganz besonders auch in Ansehung des Ölzustandes erfolgt wie der erste. Wird dies nicht beachtet, so wird man eine Schar wild streuender Beobachtungspunkte erhalten, die selbst durch die Mittelwertbildung nicht richtiger, also auch nicht verbessert werden können. Diese Ausführungen gehören zu dem, was eingangs mit den Worten sauberes Arbeiten gekennzeichnet wurde. Nicht unerwähnt darf schließlich bleiben, daß bei Öldurchschlagsprüfungen keine Gas- oder Luftbläschen im Öle vorhanden sein dürfen, die in die Prüffunkenstrecke gelangen können, da sie infolge ihrer wesentlich geringeren Dielektrizitätskonstante die Feldverteilung und damit die Gesetzmäßigkeit der Funkenstrecke stören.

7. Die Durchschlagsfestigkeit und der Barometerstand.

Wie bereits erwähnt, ist die Bestimmungsmöglichkeit der Durchschlagsfestigkeit nicht von solcher Schärfe, daß die täglichen Luftdruckschwankungen dabei zu beachten wären. Es gibt aber Fälle, wo Hochspannungslöparate in solchen geographischen Höhen zur Verwendung kommen¹⁾, daß es von Interesse sein kann zu wissen,

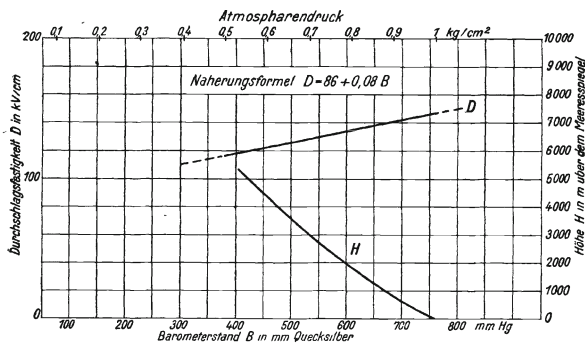


Fig. 7.

Durchschlagsfestigkeit D in kV/cm eines entfeuchteten Isolieröles nach den Verbindungsrichtlinien, abhängig vom Barometerstand B in mm Quecksilber bzw. dem Atmosphärendruck in kg/cm^2 bzw. der Höhe H in Meter über dem Meeresspiegel.

wie die Durchschlagsfestigkeit bei erheblicher Abnahme des Barometerstandes sich ändert. Fig. 7 gibt darüber Aufschluß. Die Versuchsanordnung war die folgende. Ein kleiner Eisenkessel (der auch noch anderen Zwecken diente) mit luftdicht aufschraubbarem Deckel, Schauloch, und durch Stopfbüchsen gedichteten Elektroden war an eine Ölluftpumpe angeschlossen. Ein Feder- und ein Quecksilbermanometer gestatteten die Ablesung des Druckes. Gefüllt

wurde der Kessel mit sorgfältig durch Erhitzen und Filtrieren entfeuchtetem Öl

¹⁾ Siehe z. B. Neustätter, E. T. Z. 1921, S. 2.

($D = 145 \text{ kV/cm}$). Jeder Versuch wurde 6 mal wiederholt bei 4 verschiedenen Drucken. Die Elektroden bestanden aus Kugeln von 20 mm Durchmesser, deren Konstanten durch Vergleich mit der Zylinderfunkenstrecke ermittelt waren. Die Temperatur betrug 15 bis 18°C . Man sieht aus Fig. 7, daß man praktisch mit einer gradlinigen Abnahme der Durchschlagsfestigkeit mit fallendem Barometerstande, also steigender geographischen Höhe rechnen kann. Die Formel

$$D = 86 + 0,08 B,$$

worin $D =$ Durchschlagsfestigkeit in kV/cm , $B =$ Barometerstand in mm Quecksilber, gibt diesen Verhältnissen empirischen Ausdruck. Es ist in Fig. 7 noch die Hilfskurve H aufgenommen, um den Zusammenhang zwischen D , B und der geographischen Höhe H in m zu haben. Die Untersuchung bezog sich wie erwähnt auf praktisch wasserfreies Isolieröl. Ob bei feuchtem Öl andere Beziehungen bestehen, wurde nicht geprüft.

8. Die Durchschlagsfestigkeit und die Temperatur.

Die Isolieröle sind viskose Flüssigkeiten. Ihre Zähigkeit hängt in hohem Maße von der Temperatur ab¹⁾. Es war daher zu vermuten, daß auch die Durchschlagsfestigkeit von der mit der Temperatur sich ändernden Viscosität beeinflusst wird. Indessen sind diese Beziehungen außerordentlich von der Herkunft, also von der chemischen Konstitution des Öles abhängig. Es ist sehr zu bedauern, daß wir hierüber nur sehr dürftig unterrichtet sind. Wohl ist uns bekannt, daß die Isolieröle ein Gemenge aller möglichen Kohlenwasserstoffe darstellen, daß diese im Gebrauche in fortgesetzter Änderung begriffen sind, daß bei niederen Temperaturen der flüssige Zustand sich allmählich in den festen oder vielleicht richtiger in den salbenförmigen umwandelt (Stockpunktzone), daß bei steigender Temperatur die Öle immer flüssiger werden, daß sie dann durch den Luftsauerstoff oxydierbar, vielleicht auch polymer veränderlich sind, daß sie aber auch leichtflüchtigere Anteile an Kohlenwasserstoffen abgeben, die brennbar sind (Flammpunktzone) u. dgl. m. Um einen so schwer definierbaren Stoff einigermaßen für Isolierzwecke zu kennzeichnen, sind die bereits erwähnten Richtlinien des Zentralverbandes der D. E. J. herausgegeben worden. Sie sagen u. a., daß der Flüssigkeitsgrad bei $+20^\circ \text{C}$ nicht über 10° Engler sein soll, der Stockpunkt für Transformatorenöle nicht über $+5^\circ \text{C}$, für Schalteröle nicht über -15°C und der Flammpunkt nicht unter 140°C liegen soll. Untersucht man nun ein so eingegrenztes Isolieröl auf Durchschlagsfestigkeit, abhängig von der Temperatur, so erhält man die Kurve D nach Fig. 8. Sie besagt, daß im mittleren Teile bei irgendeiner Temperatur ein Höchstwert der Durchschlagsfestigkeit vorhanden ist und daß von hier ab sowohl bei steigender wie bei fallender Temperatur D abnimmt.

Es scheint dies darauf hinzuweisen, daß in beiden Fällen eine Umwandlung des Öles vor sich geht und Grenzen zustrebt, wo die Untersuchung ihren Sinn verliert. Das ist sicher der Fall bei der Annäherung der Temperatur an den Flammpunkt. Merkwürdig ist das Verhalten bei sinkender Temperatur bei Annäherung an den Stockpunkt. Hier erreicht D ein Minimum. Seine Lage ist wohl abhängig von der Art und Menge der festen Ausscheidungen an Kohlenwasserstoffen und deren Einzel-

¹⁾ Vgl. Oelschläger, Z. d. V. d. I. 1918, S. 422.

festpunkten, wobei man in erster Linie an die paraffinartigen Kohlenwasserstoffe zu denken haben wird. In Fig. 8 ist noch die Hilfskurve E aufgenommen, um aus der Temperatur auf die Zähigkeit in Grad Engler¹⁾ und umgekehrt schließen zu können. Natürlich ist die E -Kurve eine sehr veränderliche je nach der Provenienz des Öles und entspricht hier dem Mittelwert gebräuchlicher Isolieröle.

Zusammenfassung.

Isolieröle, gewonnen durch fraktionierte Destillation und zusätzliche Raffination aus Erdölen, sind komplizierte Kohlenwasserstoffe, über deren chemische Konstitution und Veränderlichkeit im praktischen Betriebe der Hochspannungstechnik noch wenig bekannt ist. Die Erfahrung lehrt, daß

sie eine außerordentliche Neigung haben, Feuchtigkeit aus der Umgebung an sich zu reißen, die die Durchschlagsfestigkeit dieses im absolut wasserfreien Zustande sehr hochwertigen Isolierstoffes wesentlich herabsetzt. Der Höchstwert der Durchschlagsfestigkeit wird zu 230 kV/cm ermittelt. Durch Emulgierung wasserfreien Öles mit abgewogenen Mengen destillierten Wassers läßt sich eine Durchschlagskurve abhängig vom Wassergehalt ableiten (Fig. 1). Sie zeigt hyperbelartigen Verlauf und führt zu dem Ergebnis, daß Isolieröle durch Wasseraufnahme nicht beliebig verschlechtert werden können. Die Durchschlagsfestigkeit erreicht einen untersten Wert, der bei etwa 22 kV/cm liegt und dem ein Wassergehalt von rund 1 Tausendstel des Ölgewichtes entspricht. Durch Erhitzung (nicht über 120° C) oder durch Filtration läßt sich nasses Öl entfeuchten. In der Praxis erreicht man hiermit Durchschlagsfestigkeiten, die bei etwa 130 bis 140 kV/cm liegen. Während durch Emulgierung in das Öl gebrachtes Wasser durch mikroskopisch kleine Wasserkügelchen von etwa 10 μ nachweisbar war, ließ sich der Nachweis von Wasser, das durch Wasserdampf in das Öl gelangte (okkludiertes Wasser), auf diesem Wege nicht erbringen. Es wird angenommen, daß diese Wasseraufnahme noch sehr viel feiner verteilt erfolgt. Die Durchschlagswerte hierfür ergeben sich um einiges niedriger als bei emulgiertem Wasser. Die Isolieröle haben die Eigenschaft, ihren Wassergehalt auf ihre Umgebung einzustellen. Aus feuchter Luft nehmen sie Wasser auf (Fig. 4), an trockene Luft geben sie Wasser ab (Fig. 5). Entfeuchtete Isolieröle müssen sofort unter luftdichtem Verschluß genommen werden, wenn sie ihre hohe Durchschlagsfestigkeit beibehalten sollen. In Betriebsräumen mittlerer Beschaffenheit (etwa 50% relat. Feuchtigkeit) stellen sich nicht geschützte Isolieröle allmählich auf eine mittlere Durchschlagsfestigkeit von etwa 50 kV/cm ein. Von der Oberfläche her nehmen Isolieröle Feuchtigkeit schneller auf (Fig. 4) als vom Bodenwasser, über dem sie stehen (Fig. 6). Für die zahlenmäßige Festlegung der

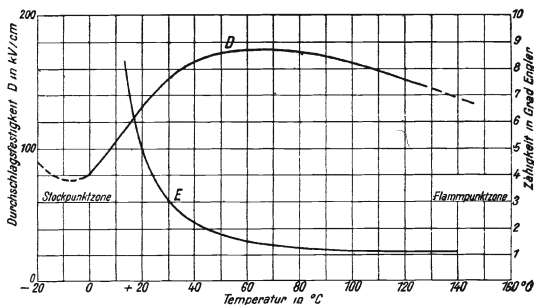


Fig. 8.

Durchschlagsfestigkeit D in kV/cm eines entfeuchteten Isolieröles nach den Verbandsrichtlinien, abhängig von seiner Temperatur in °C.

¹⁾ Die Grad Engler E sind Relativzahlen und nicht proportional der absoluten Zähigkeit η (Schubmodul) mit der Dimension $c^{-1} g s^{-1}$. Es ist $\eta = 0,018 \cdot s \cdot Z$, worin s = spez. Gewicht und Z der „Zähigkeitsfaktor“ ist, der sich (nach Ubbelohde) aus E berechnet nach der Formel

$$Z = 4,072E - \frac{3,518}{E}$$

Durchschlagsfestigkeit ist der jeweils erste Durchschlagswert bestimmend; die folgenden nur dann, wenn sie unter denselben Voraussetzungen erfolgen wie der erste. Bei nicht ganz trockenen Ölen erfordert der dem ersten sofort folgende zweite Durchschlag in 80 von 100 Fällen eine höhere Spannung (Wasserverdampfung durch den Lichtbogen), bei vollkommen wasserfreien Ölen ist es umgekehrt (Rußausscheidung durch Ölzersetzung) Fig. 3. Während die Durchschlagsfestigkeit eines entfeuchteten Isolieröles dem Luftdruck proportional ist (Fig. 7), ist die Abhängigkeit von der Temperatur verwickelterer Natur (Fig. 8). Es ergibt sich ein Höchstwert (abhängig von der Herkunft des Öles), von dem aus die Durchschlagsfestigkeit sowohl sinkt bei Annäherung der Temperatur an die Flammzone (140°C und mehr) als auch bei Annäherung an die Stockpunktzone ($+ 5^{\circ}$ bis $- 15^{\circ}\text{C}$). Im letzteren Fall erreicht die Durchschlagsfestigkeit ein Minimum.

Schlußwort.

Das Versuchsmaterial zu dieser Arbeit liegt teilweise 8 bis 10 und mehr Jahre zurück, zum Teil ist es in den letzten beiden Jahren (1919 und 20) im Laboratorium und Prüffeld unseres Charlottenburger Werkes neu gewonnen. Ich möchte nicht schließen, ohne den Vorständen dieser Abteilungen, den Herren Oberingenieur Ölschläger und Dr. Ing. Estorff, für ihre Mühewaltung bei der experimentellen Durchführung auch an dieser Stelle bestens zu danken.

Rechnen mit zerstreut zurückgeworfenem Licht.

Von

Carl Michalke.

Mit 8 Textfiguren.

Mitteilung aus dem Charlottenburger Werk der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H.
zu Charlottenburg.

Die Grundgesetze und Grundbegriffe des Lichtmessens sind von Lambert schon gegen Mitte des 18. Jahrhunderts aufgestellt worden. Lambert mußte noch mit den einfachsten Mitteln arbeiten, während jetzt von hervorragendsten Fachgelehrten durchgearbeitete Meßgeräte zur Verfügung stehen. Trotzdem war bis auf die neuere Zeit die Anzahl derer, die sich dem Sondergebiet der Photometrie eingehend widmeten, beschränkt. Es wurde aber mehr den selbstleuchtenden Lichtquellen Beachtung geschenkt als dem Lichte, das zerstreut von beleuchteten Flächen zurückgeworfen wird. Mit zerstreut zurückgeworfenem Licht läßt sich unter bestimmten Voraussetzungen ebenso rechnen wie mit selbstleuchtenden Lichtquellen.

Zerstreut wird das Licht von einer Fläche zurückgeworfen, wenn die Lichtstrahlen an den kleinen Unebenheiten einer rauhen Oberfläche wiederholt unregelmäßig zurückgestrahlt werden, bei matten Milchglasplatten, z. B. wenn das Licht bei mehr oder weniger tiefem Eindringen in den Körper an den kristallinen oder amorphen in den Körper eingebetteten Teilchen wiederholt zurückgeworfen wird, bevor es wieder in den Luftraum zurückgestrahlt wird. Erfolgt das Zurückwerfen genügend oft, so wird beim Austritt keine Richtung besonders bevorzugt. Die Vollkommenheit der Streuung hängt also bei lichtdurchlässigen Medien von der Tiefe des Eindringens der Lichtstrahlen, der Größe, Gestaltung und Lagerung der Teilchen, Lichtbrechungsverhältnissen u. dgl. ab. Wie tief die Lichtstrahlen eindringen, hängt von der optischen Dichte ab. Beim Eindringen von Lichtstrahlen in ein optisch dichtes Medium steigt die Absorption mit dem Exponenten der Dichte und der Länge des im Medium zurückgelegten Weges. Es können die Lichtverluste hierbei bedeutend werden. Bei Milchglas mit zum Teil kolloidal klein fein verteilten Teilchen wird bei einer Dicke von 1 mm nur noch etwa ein Drittel des auffallenden Lichts zerstreut hindurchgelassen.

Zerstreutes Licht wird vielfach als schattenfreies Licht bezeichnet, da von großen zerstreut strahlenden Flächen zurückgeworfenes Licht fast schattenfrei wirkt. Praktisch schattenfreies Licht kann aber auch z. B. durch genügend unterteilte Glühlampenbeleuchtung erreicht werden. Andererseits sind auch alle Temperaturstrahler als leuchtende Flächen anzusehen, für deren Strahlung die Lambertschen Gesetze gelten.

Im folgenden seien die nachstehenden Bezeichnungen gewählt. Für Beleuchtung B durch eine Lichtquelle, deren Leuchtstärke in der Strahlungsrichtung J ist, gilt

wenn φ der Einfallswinkel, r die Entfernung der beleuchteten Fläche von der Lichtquelle ist

$$B = \frac{J \cos \varphi}{r^2}.$$

Wird r in Metern ausgedrückt, J in Hefnerkerzen, so wird B in Lux gewertet.

Die Helligkeit H ist der Bruchteil der Beleuchtung, der von der Fläche (zerstreut) zurückgeworfen wird. Ist μ die Rückstrahlungszahl (Albedo Lamberts), d. h. das Verhältnis des zurückgeworfenen zum aufgestrahlten Licht, so ist

$$H = \mu B = \frac{\mu J \cos \varphi}{r^2}.$$

H wird gleichfalls in Lux ausgedrückt.

i sei die der Helligkeit einer bestimmten Fläche gleichwertige mittlere Leuchtstärke, i_φ die Leuchtstärke bei dem Ausstrahlungswinkel φ , i_0 die Leuchtkraft bei senkrechter Ausstrahlung ($= i_{\max}$).

Mit der Helligkeit im obigen Sinne kann leicht die sog. Flächenhelle der Temperaturstrahler verwechselt werden. Es ist dies die Verhältniszahl Leuchtstärke durch Leuchtfläche HK/cm^2 . Für eine 25kerzige Glühlampe mit einem Metallfaden von 0,028 mm Durchmesser und 440 mm Drahtlänge ist die Flächenhelle $\approx 65 HK/cm^2$. Helligkeit und Flächenhelle sind zwar gleichdimensional, in der Auswertung aber völlig verschieden.

Ist J die mittlere sphärische Leuchtstärke einer Lichtquelle in der Mitte einer Kugel vom Halbmesser r , so wird auf der Innenfläche durch unmittelbare Bestrahlung die Beleuchtung $\frac{J}{r^2}$ erzeugt. Würde der gesamte Lichtstrom auf eine kleine Fläche Δf zusammengedrängt werden, so ist die Beleuchtung dieser Fläche

$$B = \frac{J 4r^2 \pi}{r^2 \Delta f} = \frac{4\pi J}{\Delta f},$$

also gleich dem gesamten Lichtstrom geteilt durch die Flächengröße. Die Helligkeit dieser Fläche ist $H = \frac{4\pi \mu J}{\Delta f}$, also unabhängig von der Entfernung.

Würde alles Licht zurückgestrahlt werden ($\mu = 1$), so würde die mittlere Leuchtstärke gleichwertig der der Lichtquelle J sein. Es ist aber $J = \frac{H \Delta f}{4\pi}$, demnach ist die Helligkeit einer Fläche Δf gleichwertig der mittleren sphärischen Leuchtstärke $i_0 = \frac{H \Delta f}{4\pi}$.

Die Strahlung oder das Leuchtvermögen der Fläche eines undurchsichtigen Körpers ist nur einseitig. Es ist daher bei Rechnen mit zerstreuten Flächen übersichtlicher, die mittlere hemisphärische Leuchtstärke in die Rechnung einzuführen, weil dann die Werte sich leichter den tatsächlichen Verhältnissen anpassen, wodurch die Anschaulichkeit gewinnt. Es ist hierbei 1) $i_\ominus = \frac{H \Delta f}{2\pi}$, d. h.: Besitzt eine Fläche Δf (ausgedrückt in m^2) eine Helligkeit H (ausgedrückt in Lux), so ist die Helligkeit gleichwertig der mittleren hemisphärischen Leuchtstärke einer Lichtquelle von der Leuchtstärke i_\ominus (in HK) $= \frac{H \Delta f}{2\pi}$.

Wird ein Flächenstück Δf in der Entfernung r durch eine Lichtquelle J senkrecht bestrahlt, so ist die Beleuchtung $B = \frac{J}{r^2}$ die Helligkeit $H = \frac{\mu J}{r^2}$. Diese entspricht einer mittleren hemisphärischen Leuchtstärke $i_{\cup} = \frac{H \Delta f}{2\pi} = \frac{\mu J \Delta f}{2\pi r^2}$. Nun ist der Lichtstrom Φ der auf die Fläche Δf fällt $= \frac{J \Delta f}{r^2}$, demnach

$$i_{\cup} = \frac{\mu \Phi}{2\pi} \text{ (hemisphärisch)}$$

$$i_{\circ} = \frac{\mu \Phi}{4\pi} \text{ (sphärisch).}$$

Φ ist in den letzten Formeln in Lumen ausgedrückt. Man könnte also die Umformung von Helligkeiten in Verbindung mit Flächengröße auch auf dem Umweg über den Lichtstrom machen, doch ist dies umständlicher und weniger übersichtlich, wie wenn nach Formel (1) gerechnet wird.

In den folgenden Ausführungen sollen, falls nichts anderes vermerkt, Helligkeiten als hemisphärische Leuchtkräfte behandelt werden. Besitzt die Flächeneinheit $\Delta f = 1 \text{ m}^2$ die gleichmäßige Helligkeit von 1 Lux, so ist sie gleichwertig einer hemisphärischen Leuchtstärke $\frac{1}{2\pi}$, die Helligkeit der Flächeneinheit muß 2π Lux betragen, damit sie gleichwertig einer Hefnerkerze (HK) ist. Eine Lichtquelle von 16 HK sphärischer oder 32 HK hemisphärischer Leuchtstärke wird in ihrer Wirkung ersetzt durch die Leuchtstärke einer zerstreut strahlenden Fläche von 1 cm^2 und 2 Millionen Lux. Es wird dies auch ersichtlich, wenn man sich eine Kugelfläche von 1 cm^2 Oberfläche vom Mittelpunkt aus durch eine unendlich kleine allseitig gleichmäßig strahlende Lichtquelle von 16 HK sphärischer Lichtstärke oder eine Halbkugel von 1 cm^2 Oberfläche durch eine entsprechende Lichtquelle von 32 HK hemisphärischer Leuchtstärke beleuchtet denkt. (Die Verstärkung der Beleuchtung durch wiederholte Rückwerfung des Lichtes bleibe unberücksichtigt). Im ersteren Falle ist die Beleuchtung $B = 16 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10^4$, im letzteren $B = 32 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 10^4 \text{ Lux}$. Geht also die Leuchtstärke von der Lichtquelle auf die beleuchtete Fläche von 1 cm^2 über, so leuchtet diese bei einer Helligkeit von $2 \cdot 10^6 \text{ Lux}$ wie eine Lichtquelle von 16 HK sphärischer oder 32 HK hemisphärischer Leuchtstärke.

Zerstreut strahlende Flächen können demnach in ihrer Strahlung rechnerisch wie selbstleuchtende Körper behandelt werden. i_{φ} sei die Strahlung der Fläche bei einem Einfallswinkel φ (Fig. 1), die Höchststrahlung für $\varphi = 0$ sei i_0 , dann ist

$$i_{\varphi} = i_0 \cos \varphi. \quad (2)$$

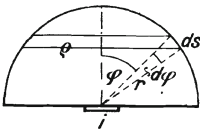


Fig. 1.

Schneidet man von einer die strahlende Fläche umgebenden Halbkugel vom Halbmesser r eine Scheibe mit dem Halbmesser ρ heraus, so ist $\rho = r \sin \varphi$. Die Beleuchtung des Ringes von der Breite ds ist

$$B_{\varphi} = \frac{i_{\varphi}}{r^2} = \frac{i_0 \cos \varphi}{r^2}.$$

dies entspricht einer Leuchtstärke

$$di_{\varphi} = \frac{B_{\varphi} 2\rho \cdot \pi ds}{2\pi} = \frac{i_0 \rho \cos \varphi ds}{r^2} = i_0 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$$

$$\int_0^{\pi/2} di_\varphi = i_\ominus = \frac{i_0}{2} \cdot \left[\sin^2 \varphi \right]_0^{\pi/2}$$

$$i_\ominus = \frac{i_0}{2} = \frac{H \Delta f}{2\pi}$$
(3)

$$i_0 = \frac{H \Delta f}{\pi}$$
(4)

$$i_\varphi = i_0 \cos \varphi = \frac{H \Delta f \cos \varphi}{\pi}$$
(5)

Hiermit sind alle in Betracht kommenden Werte strahlender Flächen bestimmt.

Größere Flächen von ungleicher Helligkeit müssen für genauere Rechnungen in Teilflächen zerlegt werden.

Bei gekrümmten Flächen von gleichmäßiger Helligkeit gilt für die Berechnung der gleichwertigen Leuchtstärke als Flächengröße Δf die Projektion der gekrümmten Fläche auf eine Ebene senkrecht zur Strahlungsrichtung. Ist df (Fig. 2) ein Stück einer gekrümmten Fläche, das gegen die Fläche F , die senkrecht zur Strahlungsrichtung S steht, den Winkel φ bildet, so ist, wenn N , die Normale auf Fläche df ist,

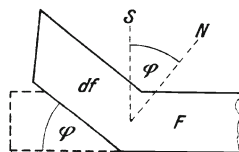


Fig. 2.

die Leuchtstärke i_φ in Richtung S $i_\varphi = \frac{H \cos \varphi df}{\pi}$, $df \cos \varphi$ ist aber die Projektion der Fläche df auf F .

Für eine zerstreut nach außen strahlende Kugel vom Halbmesser r (Fig. 3) kommt als Projektion die Fläche $\varrho^2 \pi$ in Rechnung. Besitzt die Kugeloberfläche allseitig die Helligkeit H , so ist die Leuchtstärke in Richtung nach dem Punkt P , die der Leuchtstärke der Kugeloberfläche gleichwertig ist

$$i_0 = H r^2 \cos^2 \alpha.$$

Für kleine Winkel α in genügender Entfernung des Punktes P wird:

$$i_0 = H r^2.$$

Da die Leuchtstärke nach allen Seiten gleich ist, ist auch die mittlere sphärische Leuchtkraft der Kugel

$$J_\circ = H r^2.$$

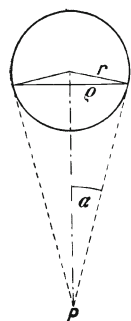


Fig. 3.

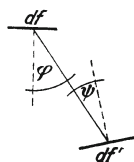


Fig. 4.

Das Lambertsche Gesetz für die Beleuchtung einer Fläche df' (Fig. 4) durch eine zerstreut strahlende Fläche df in der Entfernung r ist, wenn φ und ψ die betreffenden Einfallswinkel sind, hiernach, da die Leuchtstärke i_φ der Fläche df in der Richtung φ durch die Gleichung $i_\varphi = \frac{H df \cos \varphi}{\pi}$ und die durch i_φ auf der Fläche df' erzeugte Beleuchtung $B = \frac{i_\varphi}{r^2} \cos \psi$ ist, für die Beleuchtung der Fläche df'

$$B = \frac{H df \cos \varphi \cos \psi}{\pi r^2}$$
(6)

B und H sind hierbei beide in Lux auszudrücken. Die Helligkeit der Fläche df' ist μB . Sie entspricht einer mittleren hemisphärischen Leuchtstärke

$$i_\ominus = \frac{\mu H df df' \cos \varphi \cos \psi}{2 \pi^2 r^2}$$

Die Strahlung der Fläche df' in irgendeiner Richtung ψ' wird

$$i'_{\psi'} = \frac{H df df' \cos \varphi \cos \psi \cos \psi'}{\pi^2 r^2}$$

$\frac{df \cos \varphi}{r^2} = d\omega$ ist der Raumwinkel, unter dem die Fläche df von der Mitte der Fläche df' aus gesehen wird. Die Lambertsche Formel (Gleichung 6) kann daher auch geschrieben werden

$$B = \frac{H \cos \psi d\omega}{\pi}. \quad (7)$$

Die beleuchtete Fläche df' hat eine Helligkeit

$$H' = \mu B = \frac{\mu H \cos \psi d\omega}{\pi}. \quad (8)$$

So könnte die Helligkeit des Himmelsgewölbes bestimmt werden, deren Kenntnis für die Ermittlung des in Innenräume eindringenden Lichts von Wert ist. Von Leonhard Weber und Hermann Cohn wurde z. B. die Güte der Platzbeleuchtung eines Schulraumes nach dem Raumwinkel beurteilt, unter dem Licht vom Himmelsgewölbe auf den betreffenden Platz eindringt. Der Raumwinkel wurde mit dem Leonhard Weberschen Raumwinkelmesser gemessen. Für Bestimmung der Helligkeit des Himmelsgewölbes kann nach Formel (8) die Helligkeit einer unter dem Raumwinkel $d\omega$ vom Himmelslicht bestrahlten Fläche bestimmt werden. Wird durch eine künstliche Lichtquelle J die Fläche hierauf in einer solchen Entfernung R unter dem Winkel ψ' bestrahlt, daß die gleiche Helligkeit entsteht, so ist

$$H = \frac{J \pi \cos \psi'}{R^2 d\omega \cos \psi}.$$

Die Beleuchtung der einzelnen Plätze ist nach Formel (7) zu bestimmen.

Lambert schreibt das Gesetz der Flächenbeleuchtung

$$B = \frac{J df \cos \varphi \cos \psi}{r^2},$$

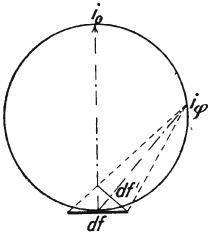


Fig. 5.

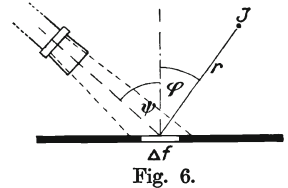
wobei J eine der Helligkeit der Fläche df oder gleichwertigen Leuchtstärke einer Lichtquelle proportionale Größe ist, während in den Formeln (6) bis (8) die Helligkeiten oder die Beleuchtungen in der üblichen Lichteinheit Lux, die gleichwertigen Lichtquellen in Hefnerkerzen bezeichnet sind.

Aus den Ausführungen geht hervor, daß ein großer Unterschied zwischen Helligkeit $H = \mu B$ und der Flächenhelle J/df besteht. Um den Begriff der Flächenhelle bei zerstreut rückstrahlenden Flächen eindeutig zu fassen, würde darunter die Leuchtstärke i_φ in Richtung φ geteilt durch die in der Strahlungsrichtung gesehenen Fläche zu verstehen sein. f ist hierbei die Projektion der strahlenden Fläche auf eine senkrecht zur Strahlungsrichtung gelegte Ebene. Ist df (Fig. 5) die rückstrahlende Fläche i_0 die Strahlung für $\varphi = 0$, i_φ die für den Winkel φ , so ist für die Strahlungsrichtung $\varphi = 0$, die Flächenhelle $\frac{i_0}{df}$, für den Winkel φ $\frac{i_\varphi}{df'} = \frac{i_0 \cos \varphi}{df \cos \varphi}$ also gleichfalls $= \frac{i_0}{df}$. Ist beispielsweise die Helligkeit einer Fläche 1 Lux, so ist die gleichwertige Leuchtstärke für $\varphi = 0$ $i_0 = \frac{\Delta f}{\pi}$ für ein Flächenstück Δf , demnach $\frac{i_0}{df} = \frac{1}{\pi}$, wenn Δf in

m² gerechnet wird. Wird aber die Flächenhelle entsprechend den festgelegten Einheiten auf die Leuchtstärke für 1 cm² bezogen, so ist die Helligkeit ausgedrückt in Lux 10⁴π mal so groß als die Flächenhelle.

Um aus der Beleuchtung einer Fläche die Helligkeit zu berechnen, benötigt man die Rückstrahlungszahl μ . Diese Zahl läßt sich finden, wenn von einer durch bekannte Leuchtstärke J beleuchteten Fläche ein Teil herausgeblendet wird, dessen Leuchtstärke in einer Richtung gemessen wird. Ist (Fig. 6) J die Leuchtstärke einer Lichtquelle in der Richtung nach dem aus der Fläche herausgeblendeten Teil Δf , so ist dessen Beleuchtung $\frac{J \cos \varphi}{r^2}$ und die Helligkeit $\frac{\mu J \cos \varphi}{r^2}$. In der Strahlungsrichtung ψ ist die Leuchtstärke $i_\psi = \frac{\mu J \cos \varphi \Delta f \cos \psi}{r^2 \pi}$. Sowohl J wie i_ψ können photometrisch in bekannter Weise ermittelt werden. Es ergibt sich

$$\mu = \frac{i_\psi r^2 \pi}{J \Delta f \cos \varphi \cos \psi}.$$



Selbstverständlich muß bei Ermittlung von i_ψ darauf gesehen werden, daß von allen Teilen der Fläche Δf Strahlen ins Photometer dringen, daß beispielsweise bei Verwendung des Weberschen Milchglasplatten-Photometers die Milchglasplatte im Photometer von allen Teilen der Fläche Δf Strahlen empfängt.

Im übrigen können alle nach der Lambertschen Grundformel entwickelten Gleichungen unter Berücksichtigung der Koeffizienten auf die Rechnung in vorge-schlagener Form übertragen werden. Die Formeln wurden für kleine lichtstrahlende Flächenteile Δf entwickelt. Bei großen Flächen können Schwierigkeiten auftreten, wenn die Flächen ungleich stark beleuchtet und für die einzelnen Flächenteile verschiedene Ausstrahlungswinkel in Rechnung zu ziehen sind. Am schnellsten wird man in den meisten Fällen zum Ziele kommen, wenn die Fläche für die rechnerische Behandlung unterteilt wird, falls die Integration nicht einfache Formeln ergibt.

Um den von einem Reflektor auf eine weiße Wand geworfenen Lichtschein auszuwerten, wird dessen Helligkeit von der Mitte nach den Seiten abgetastet. Die Helligkeiten werden in gleichwertige Leuchtstärken umgerechnet. Auf diese Weise kann gefunden werden, wieviel von der Leuchtstärke der Reflektorlampe in wirksame Beleuchtung umgesetzt ist. Ist H_ϱ die Helligkeit im Abstand ϱ vom Mittelpunkt einer kreisförmig angenommenen Lichtfläche, so entspricht die Helligkeit des Kreis-rings $2\varrho \pi d\varrho$ einer mittleren hemisphärischen Leuchtstärke

$$di = \frac{H_\varrho 2\pi \varrho d\varrho}{2\pi} = H_\varrho \varrho d\varrho$$

$$i = \int_0^r H_\varrho \varrho d\varrho.$$

Die vom Reflektor ausgesandte Leuchtstärke ist $\frac{1}{\mu} i$. Ist J die mittlere hemisphärische Leuchtstärke der Reflektorlampe, so ist $\frac{1}{J} \int_0^r \frac{H_\varrho}{\mu} \varrho d\varrho$ überschlägig der Wirkungsgrad des Reflektors. $\frac{H_\varrho}{\mu}$ sind die Beleuchtungswerte. Wird statt der

Helligkeit H die Beleuchtung $B = \frac{H}{\mu}$ auf dem Schirm ermittelt, ist der Wirkungsgrad $\frac{1}{J} \int_0^r B_e \rho d\rho$.

Bei beleuchtungstechnischen Rechnungen handelt es sich meist um Beleuchtung durch künstliche Lichtquellen, die für die Praxis genügend genau als punktförmig angesehen werden können. Hierbei sind fast stets nicht Helligkeitswerte, sondern Beleuchtungswerte zu ermitteln. Nicht wie hell ein Arbeitsplatz ist, sondern wie stark er beleuchtet ist, darauf kommt es zumeist an. Nur bei mittelbarer Beleuchtung durch die weiße Decke oder bei Berücksichtigung der Zusatzbeleuchtung durch Rückstrahlung von den Wänden kommen Helligkeitswerte in Betracht. In allen diesen Fällen kann man ohne die entwickelte Rechnungsart auskommen, wenn auch zuweilen auf dem umständlichen Wege unter Einführung des Lichtstromes. Deshalb erschien es bisher nicht notwendig, die beiden gebräuchlichen Grundgleichungen $i_\varphi = h_1 \Delta F \cos \varphi$ für die Strahlung von Flächen, und $h_2 = \frac{J_\varphi \cos \psi}{r^2}$ für die Beleuchtung durch eine Lichtquelle J in unmittelbare Verbindung zu bringen. Die beiden Gleichungen wurden unabhängig voneinander aufgestellt, weshalb h_1 und h_2 verschiedene Werte haben. Diese Zweideutigkeit, die sich erst zeigt, wenn mit zerstreut strahlenden Flächen zu rechnen ist, wird in der oben entwickelten Rechnungsart, bei der in den Endformeln noch Koeffizienten auftreten, vermieden. Bedeutung gewinnt die Rechnungsart, wenn z. B. zerstreut strahlende Flächen die einzige Lichtquelle für Innenräume bilden, z. B. wenn Licht in einen Raum durch mattierte Scheiben von außen eindringt.

Die Rechnungen galten unter der Voraussetzung einer freien unbehinderten Strahlung. Schwieriger und weniger anschaulich gestalten sich die Verhältnisse, wenn die zerstreut von einer Fläche ausgehende Strahlung ganz oder zum Teil, wenn auch mehr oder minder geschwächt, von anderen Flächen wieder zurückgeworfen wird, so daß die ursprüngliche Helligkeit verstärkt wird. Bei der Ulbrichtschen Kugel steigt bekanntlich die Beleuchtung im Innern theoretisch auf den Wert unendlich für $\mu = 1$. Der Anschauung würde man entgegenkommen, wenn man annimmt, daß es sich hierbei um eine Lichtabgabe ΦT handelt. Infolge der hohen Lichtgeschwindigkeit stellt sich der stationäre Zustand schon nach unendlich kurzer Zeit ein, so daß T hierbei unendlich klein angenommen werden kann. Ähnliche Verhältnisse treten übrigens auch bei spiegelnder Rückwerfung innerhalb eines abgeschlossenen Raumes auf.

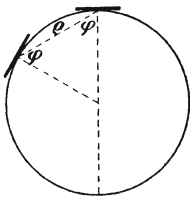


Fig. 7.

Nach der entwickelten Rechnungsart würde die Berechnung der Helligkeit im Innern der Ulbrichtschen Kugel folgende sein. Durch ein Fenster von der Öffnung df (Fig. 7) trete zerstreutes Licht in die Kugel. Die Helligkeit der Fläche df im Innern sei H . Die gleichwertige Leuchtstärke in Richtung φ ist

$$i_\varphi = \frac{df H \cos \varphi}{\pi}.$$

Die Beleuchtung irgendeines Teils der Kugel ist

$$B_1 = \frac{i_\varphi \cos \varphi}{\rho^2} = \frac{H df \cos^2 \varphi}{\rho^2 \pi} = \frac{H df}{4 r^2 \pi}$$

wenn r der Halbmesser der Kugel ist. Sämtliche Flächenteile erhalten gleiche Beleuchtung. Die Helligkeit ist $H_1 = \mu B_1$. Jeder Flächenteil dF der Kugel strahlt in Richtung φ mit einer Leuchtkraft

$$i_{1\varphi} = \frac{H_1 dF \cos \varphi}{\pi} = \frac{\mu B_1 dF \cos \varphi}{\pi}$$

und bringt die Zusatzbeleuchtung

$$dB_2 = \frac{\mu B_1 dF}{4r^2 \pi}.$$

Die ganze Kugelfläche $4r^2\pi$ mit der Helligkeit H_1 bringt die Zusatzbeleuchtung

$$B_2 = \mu B_1.$$

Diese bringt wieder eine weitere Zusatzbeleuchtung

$$B_3 = \mu B_2 \text{ usw.},$$

so daß die sich einstellende Beleuchtung ist

$$\sum B = \frac{B_1}{1 - \mu} = \frac{h df}{4r^2 \pi (1 - \mu)}.$$

Die Helligkeit ist $H = \mu B = \frac{\mu h df}{4r^2 \pi (1 - \mu)}$.

Damit die Helligkeit der inneren Kugelfläche gleich der des lichtstrahlenden Fensters innen wird ($H = h$), müßte

$$4r^2 \pi (1 - \mu) = \mu df \text{ sein}$$

$$\mu = \frac{1}{1 + \frac{df}{4r^2 \pi}}$$

Die Rechnungen haben zur Voraussetzung, daß für die Rückstrahlung von den Flächen das Cosinusetz befolgt wird. In einzelnen Fällen wird nur ein Teil zerstreut zurückgeworfen, während ein, wenn auch kleiner Teil spiegelnd zurückgeworfen wird. Die Stärke der Spiegelung hängt von dem Einfallswinkel ab. Unter großem Einfallswinkel erscheinen bekanntlich fast alle rauhen Flächen spiegelnd. Die Rauheit der Flächen wird zuweilen nach dem Winkel beurteilt, unter dem die Fläche spiegelnd erscheint. Durch die zum Teil spiegelnde Zurückwerfung werden bei dieser besondere Richtungen bevorzugt. Ähnliche Verhältnisse treten bei durchscheinendem Licht auf. Werden bestimmte Richtungen beim Durchgang des Lichtes durch lichtdurchlässige Medien bevorzugt, so werden in der Richtung der Lichtquelle Lichtflecken wahrgenommen. In solchen Fällen lassen sich die Rechnungen mit so einfachen Formeln, wie gegeben, nicht durchführen. In Theaterhorizonten aus Leinwandstoffen z. B. werden die Unvollkommenheiten des Durchscheinens durch Dichtung mit einem passenden Anstrich oder durch doppelte Leinwandlagen vermieden.

Begnügt man sich mit einer unvollkommenen Streuung des Lichts, so kann diese auch durch Spiegelung von passend gekrümmten Flächen erreicht werden. Wird das Licht von der spiegelnden Oberfläche einer Kugel zurückgeworfen, so geschieht dies nach allen Richtungen hin. Würde man spiegelnde Halbkugeln nebeneinander reihen, so würde ein Teil des einfallenden Lichts zwischen den Kugelflächen (bei A

Fig. 8) in wiederholter Rückwerfung ungenützt verbraucht werden. Dies wird vermieden, wenn Kugelcalotten $L L$ mit einem Zentriwinkel von 60° aneinanderstoßen. Die äußersten Strahlen bei senkrechter Inzidenz berühren die Nachbarcalotte, so daß nur Strahlen nach einmaligem Zurückwerfen austreten in einem Bereich von 60°

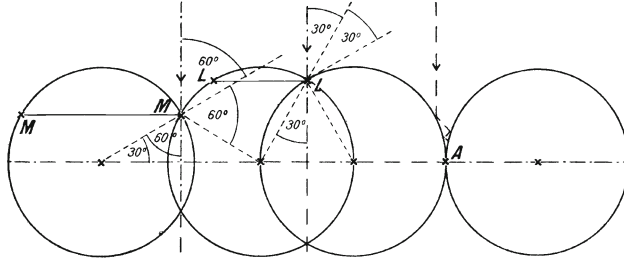


Fig. 8.

gegen die senkrechte Einstrahlung. Würde man doppelte Rückstrahlung zulassen, so können Kugelcalotten $M M$ gewählt werden. Die Streuung würde bei so gestalteten Flächen einen beschränkten Ausbreitungsbereich haben, auch würden die allerdings kleinen Flächenteile zwischen den Calotten ungenützt bleiben. Um diese Flächenteile nicht ungenutzt zu lassen, könnten unmittelbar aneinander anstoßende, passend gekrümmte Flächen benutzt werden, deren Randwinkel 30° oder 60° sind. Auf Flächen mit solcher künstlichen verlustschwachen Streuung lassen sich die obigen Formeln nicht ohne weiteres anwenden.

Kreisdiagramme in verketteten Wechselstromkreisen.

Von

Friedr. Natalis und Hans Behrend.

Mit 16 Textfiguren.

Mitteilung aus dem Charlottenburger Werk der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H.
zu Charlottenburg.

Einleitung.

Die Berechnung von Wechselstromkreisen erforderte bisher meist ziemlich verwickelte Rechenoperationen, welche die Erforschung dabei auftretender Gesetzmäßigkeiten sehr erschwerte. Die Verwendung komplexer Größen für die Spannungen und Ströme durch Steinmetz stellt zwar einen erheblichen Fortschritt dar. Trotzdem konnte sich die Rechnung mit komplexen Größen nicht allgemein einbürgern, weil sie nicht anschaulich genug ist und keine Verbindung mit physikalischen Vorstellungen bietet.

Ein neuerdings entwickeltes Berechnungsverfahren¹⁾, bei dem lediglich Zeitvektoren und die bekannten Gesetze der Vektoranalysis benutzt werden, hat sich daher als äußerst brauchbar und anschaulich erwiesen. Die erforderlichen Vektorgleichungen lassen sich ohne Schwierigkeit aufstellen, und ihre Umwertung stellt sich fast als eine handwerksmäßige Arbeit dar. Ein weiterer Vorteil dieses Verfahrens liegt darin, daß es die Aufdeckung von Gesetzmäßigkeiten erleichtert, wie die nachfolgenden Berechnungen verketteter Wechselstromkreise zeigen werden.

Zum leichteren Verständnis derselben mögen die Grundlagen dieses neuen Verfahrens kurz zusammengestellt werden.

Die Darstellung von Wechselstromspannungen (und -strömen) durch Vektoren sowie ihre geometrische Addition und Subtraktion dürfen als bekannt vorausgesetzt werden.

Es sei ferner daran erinnert, daß jede Vektorgleichung, z. B. $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2$, zwei Aussagen enthält und sich daher jederzeit in zwei Gleichungen zerlegen läßt. Die erste besagt, daß die Effektivwerte E_1 und E_2 gleich sind, und die zweite, daß die Vektoren in ihrer Richtung oder Phase übereinstimmen, d. h. mit der Null-Zeit-Linie den gleichen Winkel bilden. Es fehlte aber noch in der Vektorsprache ein Ausdruck für einen Widerstand, der in allgemeinsten Form aus induktionsfreien und induktiven bzw. kapazitiven Teilen bestehen mag.

Wird ein derartiger Scheinwiderstand w nacheinander an die Spannungen \mathfrak{E} bzw. e gelegt und entstehen dabei die Ströme \mathfrak{I} bzw. i , Fig. 1, so muß

$$(1) \quad \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{I}} = \frac{e}{i}$$

¹⁾ Die Berechnung von Gleich- und Wechselstromsystemen, neue Gesetze über ihre Leistungsaufnahme. Von Fr. Natalis. J. Springer, 1920.

sein, d. h. die beiden Dreiecke $A O B$ und $a O b$ sind ähnlich, und der Widerstand w wird dargestellt durch das Vektorverhältnis

$$(2) \quad w = \frac{\mathcal{E}}{\mathfrak{I}} = \frac{e}{i}.$$

Ein solches Vektorverhältnis ist weder ein Vektor noch ein Skalar, sondern eine neue Einheit, und es enthält — wie jede Vektorgleichung — zwei Werte, und zwar, das Verhältnis der Effektivwerte

$$\frac{E}{J}, \text{ z. B. } \frac{10 \text{ Volt}}{2 \text{ Amp.}} = 5 \frac{\text{Volt}}{\text{Amp.}}$$

und den Winkel φ der Phasenverschiebung, der je nach Umständen positiv oder negativ zu rechnen ist. Ferner ist es unabhängig vom Koordinatensystem.

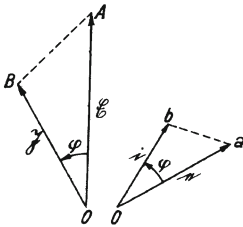


Fig. 1.

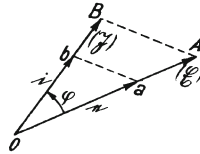


Fig. 2.

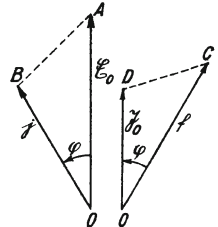


Fig. 3.

Man könnte daher außer dem Winkelmaßstab und den beiden Maßstäben für Spannung und Strom noch einen weiteren für den Widerstand einführen, dessen Einheit $\frac{1 \text{ Volt}}{1 \text{ Amp.}}$ oder ein Vielfaches davon ist.

Ist der Widerstand durch das Vektorverhältnis $\frac{\mathcal{E}}{\mathfrak{I}}$ gegeben und wird derselbe Widerstand an eine Spannung e gelegt, so ist der dabei entstehende Strom $i = \mathfrak{I} \frac{e}{\mathcal{E}}$ nach Größe und Richtung entsprechend Fig. 2 zu ermitteln, indem man das Dreieck $A O B$ derart verschiebt und dreht, daß die Richtung von $O A$ mit $O a$ zusammenfällt und $a b \parallel A B$ zieht, wodurch $i = O b$ gefunden wird. Da hierbei \mathcal{E} und \mathfrak{I} um den gleichen Winkel verdreht sind, wurden die Zeichen (\mathcal{E}) und (\mathfrak{I}) in Klammern gesetzt. Diese Konstruktion ist die allgemeine Lösung der Aufgabe der Multiplikation eines Vektors (\mathfrak{I}) mit einem Vektorverhältnis $\left(\frac{e}{\mathcal{E}}\right)$. Sie bildet die Grundlage für die Auswertung der zu entwickelnden Vektorgleichungen.

Sind mehrere Widerstände $\frac{\mathcal{E}_1}{\mathfrak{I}_1}, \frac{\mathcal{E}_2}{\mathfrak{I}_2} \dots$ zu berücksichtigen, so ist es vorteilhaft, nach Abb. 3 für alle entweder die gleiche Einheitsspannung \mathcal{E}_0 oder den gleichen Einheitsstrom \mathfrak{I}_0 zugrunde zu legen und zu schreiben:

$$(3) \quad \begin{cases} w_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{i_1} \\ w_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{i_2} \end{cases} \quad \text{oder} \quad (3a) \quad \begin{cases} w_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{\mathfrak{I}_0} \\ w_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{\mathfrak{I}_0} \end{cases} \text{ ufw.}$$

Da $\frac{\mathcal{E}_0}{i} = \frac{i}{\mathfrak{I}_0}$ ist, so sind die beiden Dreiecke $A O B$ und $C O D$, Fig. 3, ähnlich. Die Gleichungen 3 werden vorzugsweise benutzt werden, wenn es sich um Parallel-

schaltung von Widerständen, die Gleichungen 3a, wenn es sich um Reihenschaltung von Widerständen handelt. Diese beiden gleichwertigen Ausdrucksweisen für die Widerstände entsprechen den auch sonst üblichen Bezeichnungen der Leitfähigkeit und des Widerstandes; denn es ist

$$\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} = \frac{j_1 + j_2}{\mathcal{E}_0}$$

$$w_1 + w_2 = \frac{\dot{i}_1 + \dot{i}_2}{\mathcal{U}_0},$$

wobei die vektorielle Addition von j_1 und j_2 bzw. \dot{i}_1 und \dot{i}_2 in bekannter Weise auszuführen ist.

Berechnung eines Drehstromnetzes mit ungleichmäßiger Belastung.

Diese Aufgabe kommt in der Praxis häufig vor, z. B. bei der Anwendung von Zählern für ungleiche Belastung der Phasen und bei den durch Erdung einer Drehstromleitung auftretenden Störungen.

Ein Drehstromgenerator, Fig. 4, sei durch 3 Scheinwiderstände w_1, w_2, w_3 in Sternschaltung ungleichmäßig belastet, dann ergibt sich das Vektordiagramm, Fig. 5.

Hierbei ist angenommen, daß die 3 Phasenspannungen des Generators e_a, e_β, e_γ gleich groß und um 120° in der Phase gegeneinander verschoben sind. Dann ist

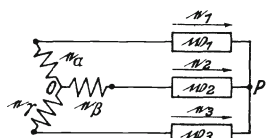


Fig. 4.

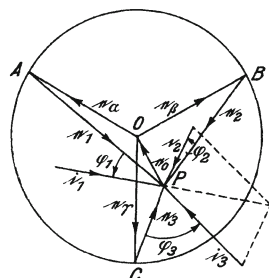


Fig. 5.

$$(4) \quad |e_a| = |e_\beta| = |e_\gamma|$$

$$(5) \quad e_a + e_\beta + e_\gamma = 0.$$

Wären die 3 Scheinwiderstände w_1, w_2, w_3 gleich (gleichmäßige Belastung der 3 Phasen), so würde der Sternpunkt P, in dem sich die 3 an den Klemmen der Widerstände auftretenden Spannungen e_1, e_2, e_3 treffen, mit 0 zusammenfallen. Sind die Widerstände dagegen ungleich, wie in Fig. 5, so ist die Lage von P gegenüber 0 durch den Vektor e_0 eindeutig festgelegt. Durch die Ermittlung von e_0 sind daher auch die Vektoren e_1, e_2, e_3 bestimmt, denn e_1, e_2, e_3 können als lineare Vektorfunktionen von e_0 und den bekannten Vektoren e_a, e_β, e_γ dargestellt werden:

$$(6) \quad \begin{cases} e_1 + e_0 + e_a = 0; & e_1 = -(e_0 + e_a) \\ e_2 + e_0 + e_\beta = 0; & e_2 = -(e_0 + e_\beta) \\ e_3 + e_0 + e_\gamma = 0; & e_3 = -(e_0 + e_\gamma). \end{cases}$$

Die Spannungen e_1, e_2, e_3 erzeugen in den 3 Widerständen die Ströme i_1, i_2, i_3 mit entsprechenden Phasenverschiebungen gegen erstere. Die geometrische Summe der Stromvektoren muß aber gleich Null sein.

$$(7) \quad i_1 + i_2 + i_3 = 0.$$

Jeder der Widerstände w_1, w_2, w_3 kann nun aus Teilen zusammengesetzt sein, die je nach Stellung der Aufgabe parallel oder in Reihe geschaltet sind. Daher sind die Widerstände entspr. Gleichung 3 oder 3a darzustellen.

	entweder durch		oder durch
(8)	$\begin{cases} w_1 = \frac{\mathfrak{G}_0}{j_1} \\ w_2 = \frac{\mathfrak{G}_0}{j_2} \\ w_3 = \frac{\mathfrak{G}_0}{j_3} \end{cases}$	(8a)	$\begin{cases} w_1 = \frac{f_1}{\mathfrak{S}_0} \\ w_2 = \frac{f_2}{\mathfrak{S}_0} \\ w_3 = \frac{f_3}{\mathfrak{S}_0} \end{cases}$

Damit wird

	Damit wird		
(9)	$\begin{cases} i_1 = e_1 \frac{j_1}{\mathfrak{G}_0} \\ i_2 = e_2 \frac{j_2}{\mathfrak{G}_0} \\ i_3 = e_3 \frac{j_3}{\mathfrak{G}_0} \end{cases}$	(9a)	$\begin{cases} i_1 = e_1 \frac{\mathfrak{S}_0}{f_1} \\ i_2 = e_2 \frac{\mathfrak{S}_0}{f_2} \\ i_3 = e_3 \frac{\mathfrak{S}_0}{f_3} \end{cases}$

und nach Gleichung 7

(10) $e_1 j_1 + e_2 j_2 + e_3 j_3 = 0$

(10a) $\frac{e_1}{f_1} + \frac{e_2}{f_2} + \frac{e_3}{f_3} = 0$

(11) $(e_0 + e_\alpha) j_1 + (e_0 + e_\beta) j_2 + (e_0 + e_\gamma) j_3 = 0$

(11a) $\frac{e_0 + e_\alpha}{f_1} + \frac{e_0 + e_\beta}{f_2} + \frac{e_0 + e_\gamma}{f_3} = 0$

(12) $e_0(j_1 + j_2 + j_3) = -(e_\alpha j_1 + e_\beta j_2 + e_\gamma j_3)$

(12a) $e_0 \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} \right) = - \left(\frac{e_\alpha}{f_1} + \frac{e_\beta}{f_2} + \frac{e_\gamma}{f_3} \right)$

Wir wollen nunmehr annehmen, daß die Widerstände w_1 und w_2 gleich, aber von w_3 verschieden sind, und setzen

(13) $i_1 = i_2 = i$ | (13a) $f_1 = f_2 = f$

Wird ferner nach Gleichung 5 $e_\alpha + e_\beta = -e_\gamma$ gesetzt, dann ergibt sich

(14) $e_0 = e_\gamma \frac{j - j_3}{2j + j_3}$

(14a) $e_0 = e_\gamma \frac{f_3 - f}{2f_3 + f}$

(15) $e_3 = -(e_0 + e_\gamma) = -e_\gamma \frac{3j}{2j + j_3}$

(15a) $e_3 = -e_\gamma \frac{3f_3}{2f_3 + f}$

(16) $\frac{e_0}{e_3} = \frac{j_3 - j}{3j}$

(16a) $\frac{e_0}{e_3} = \frac{f - f_3}{3f_3}$

(17) $i_3 = j_3 \frac{e_3}{\mathfrak{G}_0} = -j_3 \frac{e_\gamma}{\mathfrak{G}_0} \frac{3j}{2j + j_3}$

(17a) $i_3 = \mathfrak{S}_0 \frac{e_3}{f_3}$

Die Einheitsspannung \mathfrak{G}_0 für die Bestimmung der Widerstände kann beliebig gewählt werden. Nimmt man $\mathfrak{G}_0 = -e_\gamma$, so vereinfacht sich Gleichung 17 folgendermaßen:

(18) $i_3 = 3j \frac{j_3}{2j + j_3}$

(18a) $i_3 = -\mathfrak{S}_0 \frac{3e_\gamma}{2f_3 + f}$

Ferner ergibt sich mit Gleichung 9 bzw. 9a:

(19) $i_1 = j \frac{e_1}{\mathfrak{G}_0} = j \frac{e_\alpha + e_0}{e_\gamma}$

$i_1 = \mathfrak{S}_0 \frac{e_1}{f} = -\mathfrak{S}_0 \frac{e_\alpha + e_0}{f}$

(19) $i_1 = j \frac{e_\alpha}{e_\gamma} + j \frac{j - j_3}{2j + j_3}$

(19a) $i_1 = -\mathfrak{S}_0 \frac{e_\alpha}{f} - \mathfrak{S}_0 \frac{e_\gamma}{f} \frac{f_3 - f}{2f_3 + f}$

$$(20) \quad \begin{aligned} i_2 &= j \frac{e_2}{\mathfrak{G}_0} = i \frac{e_\beta + e_0}{e_\gamma} \\ i_2 &= i \frac{e_\beta}{e_\gamma} + i \frac{j - i_3}{2j + j_3} \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} i_2 &= \Im_0 \frac{e_2}{\mathfrak{f}} = - \Im_0 \frac{e_\beta + e_0}{\mathfrak{f}} \\ (20a) \quad i_2 &= - \Im_0 \frac{e_\beta}{\mathfrak{f}} - \Im_0 \frac{e_\gamma}{\mathfrak{f}} \frac{\mathfrak{f}_3 - \mathfrak{f}}{2\mathfrak{f}_3 + \mathfrak{f}} \end{aligned} \right.$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, gibt die Summe von $i_1 + i_2 + i_3$ nach Gleichung 18, 19, 20 bzw. 18a, 19a, 20a den Wert Null (vgl. Gleichung 7).

Bevor diese Gleichungen auf bestimmte Belastungsfälle angewendet werden, mögen die Grundlagen für die Entstehung von Kreisdiagrammen entwickelt werden, die bei Wechselstromaufgaben besonders häufig auftreten.

Grundgleichungen der Kreisdiagramme.

Es soll nunmehr untersucht werden, welche charakteristischen Eigenschaften die Vektorgleichungen für die Spannungen bzw. Ströme besitzen müssen, wenn die Spitze des betreffenden Vektors sich auf einem Kreise bewegen soll. Wir nehmen dabei an, daß die Belastungen der 3 Drehstromleitungen teilweise durch unveränderliche Leitwerte oder Widerstände $j \left(\frac{1}{\mathfrak{G}_0} \right)$ bzw. $\mathfrak{f} \left(\frac{1}{\mathfrak{S}_0} \right)$ teilweise durch veränder-

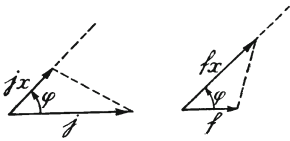


Fig. 6a.

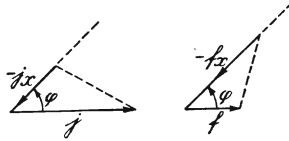


Fig. 6b.

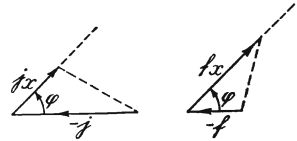


Fig. 6c.

liche $j_x \left(\frac{1}{\mathfrak{G}_0} \right)$ bzw. $\mathfrak{f}_x \left(\frac{1}{\mathfrak{S}_0} \right)$ gebildet werden, daß sich aber die Veränderlichen j_x bzw. \mathfrak{f}_x zunächst nur nach ihrer Größe, aber nicht nach ihrer Richtung ändern, Fig. 6a. Kommen in den nachfolgenden Gleichungen die Verhältnisse $\frac{j_x}{j}$ bzw. $\frac{\mathfrak{f}_x}{\mathfrak{f}}$ mit negativem Vorzeichen vor, so braucht man nach Fig. 6b nur den Pfeil des einen Vektors, z. B. j_x bzw. \mathfrak{f}_x umzukehren. Im übrigen sind die Pfeilrichtungen genau zu beachten. Das Vektorverhältnis bleibt aber unverändert, wenn man gleichzeitig beide Pfeilrichtungen umkehrt,

$$(21) \quad \frac{j_x}{j} = \frac{-j_x}{-j} \quad (21a) \quad \frac{-\mathfrak{f}_x}{\mathfrak{f}} = \frac{j_x}{-j}, \quad \text{Fig. 6b und 6c.}$$

a) Kreisdiagramm der Spannungen, Fig. 7.

Der Vektor a der Netzspannung (entspr. e_γ der Fig. 5) sei bekannt und konstant, die Maschenspannungen $CP = e_y$ und $PO = e_z$ (entspr. e_3 und e_0) veränderlich und Funktionen der veränderlichen Strombelastung j_x . Zwei Punkte D, E des Kreises, auf dem sich die Enden der Vektoren e_y und e_z , d. h. der Punkt P bewegt, seien durch die Vektoren b bzw. c gegeben. Dann ist

$$DP = e_y + b \quad \text{und} \quad PE = e_z + c$$

Soll sich der Punkt P auf dem Kreise bewegen, so muß der Winkel $DPE = \text{const.}$ sein. Da aber nach der Annahme der Winkel zwischen j_x

und j konstant sein soll, so ändern sich e_y und e_z , nach einer Kreisfunktion, wenn sich

$$(22) \quad \frac{e_z + c}{e_y + b} = \frac{-j_x}{j} \quad \text{oder} \quad (22a) \quad \frac{e_z + c}{e_y + b} = \frac{\bar{f}}{-\bar{i}_x}$$

schreiben läßt.

Gelingt es daher $\frac{-j_x}{j}$ (bzw. $\frac{\bar{f}}{-\bar{i}_x}$) als Verhältnis zweier linearer Funktionen von e_y und e_z darzustellen, so liegt eine Kreisfunktion vor. Die Vektoren b und c bestim-

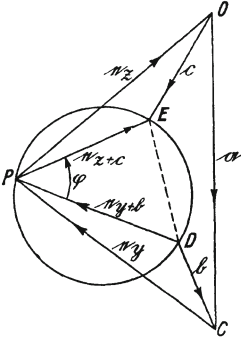


Fig. 7.

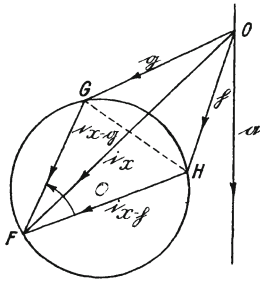


Fig. 8.

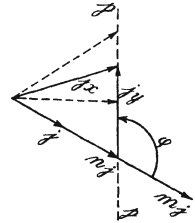


Fig. 9.

men 2 Punkte des Kreises, und der Winkel φ zwischen j_x und j dient zur Bestimmung des wandernden dritten Punktes.

b) Kreisdiagramm der Ströme, Fig. 8.

In gleicher Weise ergibt sich für einen Stromvektor i_x dessen Spitze auf einem Kreise wandern soll,

$$(23) \quad \frac{i_x - g}{i_x - h} = \frac{j_x}{j} \quad \text{bzw.} \quad (23a) \quad \frac{i_x - g}{i_x - h} = \frac{\bar{f}}{\bar{i}_x}$$

Zwei Punkte des Kreises sind durch die Vektoren g und h , der dritte wandernde durch den Winkel zwischen j_x und j (bzw. f und \bar{i}_x) bestimmt.

Entwickelt man daher $\frac{j_x}{j}$ (bzw. $\frac{\bar{f}}{\bar{i}_x}$) als Funktion von i_x und ergibt sich dabei das Verhältnis zweier linearer Funktionen von i_x , so kann man aus der Gleichung sofort erkennen, daß es sich um eine Kreisfunktion handelt. Aus den Konstanten der Gleichung lassen sich ferner die Lage und die Größe des Kreises ohne weiteres ablesen. Zu erwähnen ist noch, daß in Gleichung 22 und 23 j noch mit einem beliebigen Zahlenbeiwert m behaftet sein kann, da der Winkel zwischen j_x und j sich nicht ändert, wenn mj statt j geschrieben wird, Fig. 9.

Die Möglichkeit der Entstehung von Kreisdiagrammen ist jedoch auch hiermit noch nicht ganz erschöpft. Es war oben angenommen, daß sich j_x zwar nach seiner Größe aber nicht nach seiner Richtung ändert. Es genügt aber auch, wenn sich nach Fig. 9 j_x nach einer beliebigen Geraden p ändert, derart, daß sich j_x darstellen läßt durch

$$j_x = n j + j_y \quad \text{oder} \quad j_y = j_x - n j.$$

In diesem Falle ist Gleichung 23 zu schreiben

$$(24) \quad \frac{i_y - g}{i_y - h} = \frac{j_y}{m j} = \frac{j_x - n j}{m j}.$$

Dieses ist die allgemeinste Form der Gleichung eines Kreisdiagrammes, wenn sich die Spitze von j_x auf einer beliebigen Geraden $p-p$ bewegt. In der gleichen Weise können die Gleichungen 22a und 23a umgeformt werden.

Berechnungsbeispiele für Kreisdiagramme.

In den beiden vorhergehenden Abschnitten sind die Gleichungen für ein Drehstromnetz bei einer beliebigen ungleichmäßigen Belastung sowie die Grundlagen für die Entstehung von Kreisdiagrammen entwickelt. Nunmehr sollen die aufgestellten Formeln auf bestimmte praktisch auftretende Belastungsfälle angewendet und die dabei entstehenden Kreisdiagramme entwickelt werden.

a) Belastung nach Fig. 10.

Dieser Belastungsfall tritt ein, wenn eine Leitung über einen induktionsfreien Widerstand (z. B. einen Baumzweig) geerdet und die Leitfähigkeit des Erdreiches als ∞ groß angenommen ist.

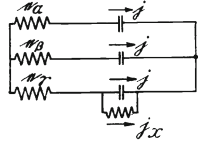


Fig. 10.

Die 3 Drehstromleitungen besitzen eine Kapazität, welche durch die Werte j_1, j_2, j_3 charakterisiert ist. Parallel zur Kapazität der dritten Leitung ist aber ein induktionsfreier Erdschluß vorhanden, der durch j_x dargestellt ist.

Es ist daher

$$(25) \quad j_1 = j_2 = j \quad \text{und}$$

$$(26) \quad j_3 = j + j_x. \quad \text{Dann ist nach Gl. 16}$$

$$(27) \quad \frac{e_0}{e_3} = \frac{j_3 - j}{3j} = \frac{j + j_x - j}{3j} = \frac{j_x}{3j}.$$

Eine Gegenüberstellung dieser Gleichung mit Gleichung 22 und Fig. 7 zeigt, daß sich e_0 und e_3 nach einem Kreise verändern. Da ferner b und $c = o$ sind, so geht der Kreis durch die Punkte O und C , Fig. 11.

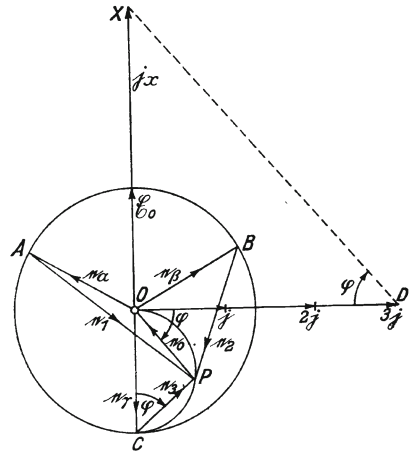


Fig. 11.

Da die Bezugsspannung $\mathcal{E}_0 = -e_y$ gesetzt war, so ist j_x durch die Strecke \vec{OX} (phasengleich mit $-e_y$) und $3j$ durch $\vec{OD} \perp$ zu $-e_y$ und voreilend gegen $-e_y$ dargestellt. Ferner ist Winkel $\angle XOD = \angle OPC = 90^\circ$, daher ist CPO ein Halbkreis über OC und $\sphericalangle OCP = \sphericalangle ODX = \varphi$, worin

$$(28) \quad \text{tg } \varphi = \frac{j_x}{3j}.$$

ist. Die zweite Hälfte des Kreises scheidet hier aus, da j_x negative Werte nicht annehmen kann. Die Spitze P der Vektoren e_1 und e_2 liegt auf dem gleichen Halbkreis, ihre Festpunkte A und B liegen aber außerhalb desselben.

Der durch Gleichung 28 bestimmte Winkel φ ist auch für die nachfolgende Berechnung der Stromvektoren maßgebend. Nach Gleichung 18 ist

$$(29) \quad i_3 = 3j \frac{j_3}{2j + j_3} = 3j \frac{j + j_x}{2j + j + j_x} = 3j \frac{j + j_x}{3j + j_x} \quad \text{oder}$$

$$(30) \quad \frac{i_3 - j}{i_3 - 3j} = \frac{-j_x}{3j}$$

Eine Gegenüberstellung dieser Gleichung mit Gleichung 23 (Fig. 8) zeigt, daß sich i_3 nach einem Kreise ändert, von dem durch $g_3 = j = OG_3$ und $h_3 = 3j = OH_3$ die beiden Punkte G_3 und H_3 , Fig. 12, bestimmt sind. Da ferner $-j_x$ und $3j$ aufeinander \perp stehen, so handelt es sich um einen Halbkreis $G_3 J_3 H_3$, und der $\sphericalangle OH_3 J_3$ ist wieder der oben ermittelte $\sphericalangle \varphi$.

Ferner ist nach Gleichung 19

$$i_1 = j \frac{e_a}{e_\gamma} + j \frac{j - j_3}{2j + j_3} = j \frac{e_a}{e_\gamma} + j \frac{j - (j + j_x)}{2j + j + j_x}$$

$$(31) \quad i_1 = j \frac{e_a}{e_\gamma} - j \frac{j_x}{3j + j_x} \quad \text{oder}$$

$$(32) \quad \frac{i_1 - j \frac{e_a}{e_\gamma}}{i_1 - \left(j \frac{e_a}{e_\gamma} - j \right)} = \frac{-j_x}{3j}$$

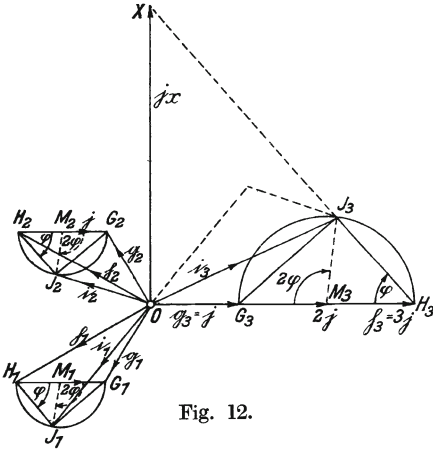


Fig. 12.

Auch diese Gleichung ist nach Gleichung 23 eine Kreisfunktion, bei der 2 Kreispunkte G_1 und H_1 , Abb. 12, durch

$$g_1 = j \frac{e_a}{e_\gamma} = OG_1 \quad \text{bzw.} \quad h_1 = j \frac{e_a}{e_\gamma} - j = OH_1 \quad \text{gegeben sind.}$$

Dabei stellt $j \frac{e_a}{e_\gamma}$ lediglich eine Verdrehung des Vektors j um 120° in dem durch $\frac{e_a}{e_\gamma}$ (Fig. 11) gegebenen Drehsinne dar. Der Winkel $G_1 H_1 J_1$ ist $= \varphi$.

In gleicher Weise ergibt sich schließlich nach Gleichung 20

$$i_2 = j \frac{e_\beta}{e_\gamma} + j \frac{j - j_3}{2j + j_3} = j \frac{e_\beta}{e_\gamma} + j \frac{j - (j + j_x)}{2j + j + j_x}$$

$$(33) \quad i_2 = j \frac{e_\beta}{e_\gamma} - j \frac{j_x}{3j + j_x} \quad \text{oder}$$

$$(34) \quad \frac{i_2 - j \frac{e_\beta}{e_\gamma}}{i_2 - \left(j \frac{e_\beta}{e_\gamma} - j \right)} = \frac{-j_x}{3j}$$

Auch diese Gleichung stellt nach Gleichung 23 eine Kreisfunktion dar, bei der 2 Kreispunkte G_2 und H_2 , Abb. 12, durch $g_2 = j \frac{e_\beta}{e_\gamma} = OG_2$ und $h_2 = j \frac{e_\beta}{e_\gamma} - j = OH_2$ gegeben sind. Der $\sphericalangle G_2 H_2 J_2$ ist $= \varphi$.

Im vorstehenden sind die Spannungs- und Stromvektoren graphisch ermittelt. Man kann sie aber schließlich auch trigonometrisch berechnen, wobei die betreffenden Formeln direkt aus dem Diagramm abzulesen sind. Am besten geschieht dies in der Weise, daß die Komponenten der Spannungen und Ströme in der Richtung e_γ und j bestimmt werden.

Setzen wir dabei nach Gleichung 28 $\operatorname{tg} \varphi = \frac{j_x}{3j}$ und $|e_\gamma| = e$, $|j| = i$ sowie die Phasenstellungen von e_1, e_2, e_3 gegenüber e_γ gleich $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ und diejenigen von i_1, i_2, i_3 gegenüber e_γ gleich ψ_1, ψ_2, ψ_3 und beachten, daß

$$\sphericalangle G_3 M_3 J_3 = G_1 M_1 J_1 = G_2 M_2 J_2 = 2\varphi,$$

dann ist

Vektor	Komponente in der Richtung e_γ	Komponente in der Richtung j	Tang. des Phasenwinkels.
e_1	$e(\sin \varphi^2 + \cos 60^\circ)$	$e(\sin \varphi \cos \varphi + \sin 60^\circ)$	$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\sin \varphi \cos \varphi + \sin 60^\circ}{\sin \varphi^2 + \cos 60^\circ}$
e_2	$e(\sin \varphi^2 + \cos 60^\circ)$	$e(\sin \varphi \cos \varphi - \sin 60^\circ)$	$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\sin \varphi \cos \varphi - \sin 60^\circ}{\sin \varphi^2 + \cos 60^\circ}$
e_3	$-e \cos \varphi^2$	$e \sin \varphi \cos \varphi$	$\operatorname{tg} \varphi_3 = -\operatorname{tg} \varphi$
i_1	$\frac{1}{2} i (\sin 2\varphi + \sqrt{3})$	$\frac{1}{2} i (\cos 2\varphi - 2)$	$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{\cos 2\varphi - 2}{\sin 2\varphi + \sqrt{3}}$
i_2	$\frac{1}{2} i (\sin 2\varphi - \sqrt{3})$	$\frac{1}{2} i (\cos 2\varphi - 2)$	$\operatorname{tg} \psi_2 = \frac{\cos 2\varphi - 2}{\sin 2\varphi - \sqrt{3}}$
i_3	$-i \sin 2\varphi$	$i(2 - \cos \varphi)$	$\operatorname{tg} \psi_3 = \frac{\cos 2\varphi - 2}{\sin 2\varphi}$
$i_1 + i_2 + i_3$	0	0	—

b) Belastung nach Fig. 13.

Dieser Belastungsfall tritt ein, wenn der Widerstand $\frac{E_0}{j_x}$ des Erdreiches an der Stromeintrittsstelle konzentriert gedacht ist.

Es ist daher

(35) $j_3 = j_x$ und nach Gl. 16

$$\frac{e_0}{e_3} = \frac{j_3 - j}{3j} = \frac{j_x - j}{3j} \quad \text{oder}$$

$$\frac{3e_0 + e_3}{2e_3} = \frac{j_x}{2j} \quad \text{und mit } e_0 + e_3 = -e_\gamma.$$

(36) $\frac{e_0 - \frac{1}{2}e_\gamma}{e_3} = \frac{j_x}{2j}$

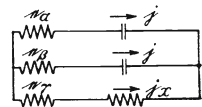


Fig. 13.

Diese Formel stellt nach Gleichung 22 eine Kreisfunktion dar mit $c = -\frac{1}{2}e_\gamma = OF$ und $b = 0$ (Punkt C), Fig. 14, wobei

(37) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{j_x}{2j}$ ist.

Ferner ist nach Gleichung 18

$$(38) \quad i_3 = 3j \frac{j_3}{2j + j_3} = 3j \frac{j_x}{2j + j_x} \quad \text{oder}$$

$$(39) \quad \frac{i_3}{i_3 - 3j} = \frac{j_x}{2j}$$

Diese Formel stellt nach Gleichung 23 eine Kreisfunktion dar mit $g = 0$ (Punkt O) und $h = 3j = OG$, Fig. 14.

Nach Gleichung 19 ist weiter

$$(40) \quad i_1 = j \frac{e_a}{e_y} + j \frac{j - j_3}{2j + j_3} = j \frac{e_a}{e_y} + j \frac{j - j_x}{2j + j_x}$$

oder

$$(41) \quad \frac{i_1 - \left(j \frac{e_a}{e_y} + \frac{1}{2} j \right)}{i_1 - \left(j \frac{e_a}{e_y} - j \right)} = \frac{-j_x}{2j}$$

Auch diese Formel stellt nach Gleichung 23 eine Kreisfunktion dar mit

$$g = j \frac{e_a}{e_y} + \frac{1}{2} j = OH + HK \quad \text{und}$$

$$h = j \frac{e_a}{e_y} - j = OH + HL,$$

d. h. einen Halbkreis über $KL = 1,5j$.

In gleicher Weise ergibt sich nach Gleichung 20

$$(42) \quad i_2 = j \frac{e_\beta}{e_y} + j \frac{j - j_3}{2j + j_3} = j \frac{e_\beta}{e_y} + j \frac{j - j_x}{2j + j_x} \quad \text{oder}$$

$$(43) \quad \frac{i_2 - \left(j \frac{e_\beta}{e_y} + \frac{1}{2} j \right)}{i_2 - \left(j \frac{e_\beta}{e_y} - j \right)} = \frac{-j_x}{2j}$$

Auch diese Formel ist nach Gleichung 24 eine Kreisfunktion mit

$$g = j \frac{e_\beta}{e_y} + \frac{1}{2} j = ON + NQ \quad \text{und} \quad h = j \frac{e_\beta}{e_y} - j = ON + NR.$$

Auf eine trigonometrische Ableitung der Komponenten der Vektoren mag bei diesem und dem nächsten Beispiel verzichtet werden, da sich die Formeln ohne Schwierigkeiten aus dem Diagramm ablesen lassen.

c) Belastung nach Fig. 15.

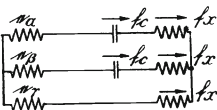


Fig. 15.

Bei diesem Beispiel wird angenommen, daß der Widerstand des Erdreiches auf die 3 Phasen gleichmäßig verteilt, aber die Kapazität eines Leiters durch den Erdschluß zum Verschwinden gebracht ist ¹⁾. Da hierbei die Widerstände $\frac{f_c}{\mathfrak{S}_0}$ und $\frac{f_x}{\mathfrak{S}_0}$ in

¹⁾ Alle diese Voraussetzungen treffen in Wirklichkeit niemals zu, es sollte nur geprüft werden, ob und in welcher Weise die nach diesen Annahmen ermittelten drei Spannungen e_1, e_2, e_3 , von wirklich gemessenen Werten abweichen.

Bemerkungen über das elektromagnetische Verhalten gekreuzter Freileitungen.

Von

Leon Lichtenstein.

Mit 4 Textfiguren.

Mitteilung aus dem Physikalischen Laboratorium des Kabelwerkes der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H. zu Gartenfeld.

Im Felde einer langgestreckten Freileitung möge eine weitere Freileitung liegen. Um Vorstellungen zu fixieren, möge es sich zunächst um zwei Hochspannungsfreileitungen 1, 2, 3; 4, 5, 6 auf einem Gestänge handeln: die eine Freileitung 1, 2, 3 sei im Betrieb, die andere 4, 5, 6 sei beiderseits offen und von der Erde völlig isoliert. Wie man weiß, kommen durch Influenz die Leiter 4, 5, 6 auf Spannung. Ist die Leitung 4, 5, 6 gekreuzt, so sind die durch Influenz erzwungenen Potentiale der einzelnen Leiter vor der Kreuzungsstelle und hinter dieser verschieden. Ein statisches Gleichgewicht ist unmöglich; — die Leitung 4, 5, 6 wird von Ausgleichströmen durchflossen.

Man pflegt bei gekreuzten Leitungen mit den Mittelwerten der elektrischen Konstanten zu rechnen. Dieses Verfahren kann nach dem obigen nur dann eine brauchbare Näherung ergeben, wenn die Entfernung zweier benachbarten Kreuzungsstellen hinreichend klein ist.

Um ein Bild über die komplizierten Vorgänge bei Kreuzungen zu gewinnen und um sich ein Urteil über die notwendige Häufigkeit der Kreuzungsstellen zu bilden, soll im folgenden ein besonders einfacher Fall einer sprungweisen Änderung der elektrischen Konstanten einer langgestreckten Leitung näher untersucht werden.

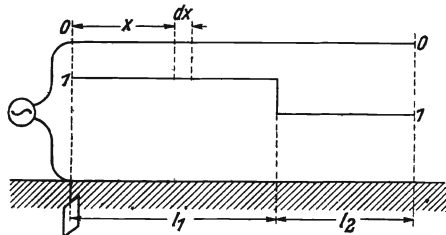


Fig. 1.

Das fragliche System besteht aus nur zwei Leitern (0) und (1). Der Leiter (0) ist horizontal ausgespannt, der Leiter (1) verläuft hierzu parallel; dabei tritt in der Entfernung l_2 vom Leitungsanfang sprungweise eine Lagenänderung ein (vgl. die Fig.1). Die Gesamtlänge der Leitung heiße $l_1 + l_2$; die Leitung (1) sei beiderseits offen, die Leitung (0) sei am Ende offen und am Anfang an eine sinusförmige Spannungsquelle angeschlossen. Der Einfachheit halber wird der Leerstrom und der Spannungsabfall in (0) vernachlässigt und die Spannung in (0) gleich

$$(1) \quad V_0 = \mathfrak{B}_0 e^{i\omega t} \quad (\mathfrak{B}_0 = \text{einer reellen Konstanten})$$

gesetzt. Demgegenüber kann der Zustand des Leiters (1) nicht als quasistationär angesehen werden. Auch darf sein Widerstand nicht vernachlässigt werden; er sei

für die Längeneinheit der Strecke AB gleich w_1 , auf der Strecke BC gleich w_2 . Dagegen sollen alle Induktivitäten gleich Null gesetzt werden. Wir setzen für die Spannung und den Strom in (1) in der Entfernung x vom Anfang den Ausdruck

$$(2) \quad V = \mathfrak{B} e^{i\omega t}, \quad J = \mathfrak{S} e^{i\omega t}.$$

Hier sind \mathfrak{B} und \mathfrak{S} im allgemeinen komplexe Funktionen von x .

Für die Ladung auf dem Element dx der Leitung (1) wird in dem Teile AB der Leitung der Ausdruck

$$(3) \quad (c_0 V_0 + c_1 V) dx,$$

in dem Teile BC der Ausdruck

$$(4) \quad (c'_0 V_0 + c_2 V) dx$$

angesetzt. In (3) und (4) sind c_0, c'_0, c_1, c_2 Konstanten (Teilkapazitäten); c_1 und c_2 sind positiv, c_0, c'_0 negativ. In bekannter Weise gewinnt man jetzt die beiden Differentialgleichungen des Problems

$$(5) \quad \text{in } AB: \begin{cases} c_0 \frac{\partial V_0}{\partial t} + c_1 \frac{\partial V}{\partial t} = - \frac{\partial J}{\partial x}, \\ \frac{\partial V}{\partial x} = - w_1 J; \end{cases}$$

$$(6) \quad \text{in } BC: \begin{cases} c'_0 \frac{\partial V_0}{\partial t} + c_2 \frac{\partial V}{\partial t} = - \frac{\partial J}{\partial x}, \\ \frac{\partial V}{\partial x} = - w_2 J. \end{cases}$$

Aus (2), (5) und (6) ergeben sich die weiteren Formeln:

$$(7) \quad \text{in } AB: \begin{cases} i\omega (c_0 \mathfrak{B}_0 + c_1 \mathfrak{B}) = - \frac{d\mathfrak{S}}{dx}, \\ \frac{d\mathfrak{B}}{dx} = - w_1 \mathfrak{S}; \end{cases}$$

$$(8) \quad \text{in } BC: \begin{cases} i\omega (c'_0 \mathfrak{B}_0 + c_2 \mathfrak{B}) = - \frac{d\mathfrak{S}}{dx}, \\ \frac{d\mathfrak{B}}{dx} = - w_2 \mathfrak{S}. \end{cases}$$

Durch Differentiation der ersten Gleichung (7) nach x erhält man in AB :

$$(9) \quad i\omega c_1 \frac{d\mathfrak{B}}{dx} = - \frac{d^2 \mathfrak{S}}{dx^2},$$

demnach mit Rücksicht auf die zweite Gleichung (7):

$$(10) \quad \text{in } AB: \frac{d^2 \mathfrak{S}}{dx^2} - i\omega c_1 w_1 \mathfrak{S} = 0.$$

Analog hierzu gilt

$$(11) \quad \text{in } BC: \frac{d^2 \mathfrak{S}}{dx^2} - i\omega c_2 w_2 \mathfrak{S} = 0.$$

Aus den Gleichungen (10) und (11) bestimmt sich der Stromverlauf des Leiters (1), wenn noch die Grenzbedingungen in den Punkten A, B, C berücksichtigt werden.

Diese sind:

$$(12) \quad \text{in } A: \mathfrak{S} = 0; \quad \text{in } C: \mathfrak{S} = 0.$$

Darüber hinaus weiß man, daß das Potential \mathfrak{B} und der Strom \mathfrak{J} sich in B stetig verhalten. In der üblichen Schreibweise ist

$$(13) \quad \mathfrak{B}(l_1 - 0) = \mathfrak{B}(l_1 + 0), \quad \mathfrak{J}(l_1 - 0) = \mathfrak{J}(l_1 + 0).$$

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (10) ist, wie man leicht verifizieren kann,

$$(14) \quad \mathfrak{J} = M e^{\alpha_1 x} + N e^{-\alpha_1 x}, \quad (M, N \text{ konstant})$$

$$\alpha_1 = (1 + i) \sqrt{\frac{\omega c_1 w_1}{2}}.$$

Entsprechend ist das allgemeine Integral von (11) gleich

$$(15) \quad \mathfrak{J} = P e^{\alpha_2 x} + Q e^{-\alpha_2 x} \quad (P, Q \text{ konstant})$$

$$\alpha_2 = (1 + i) \sqrt{\frac{\omega c_2 w_2}{2}}.$$

Aus (14) und (7) folgt auf AB

$$(16) \quad \mathfrak{B} = -\frac{c_0}{c_1} \mathfrak{B}_0 - \frac{1}{i \omega c_1} \alpha_1 M e^{\alpha_1 x} + \frac{1}{i \omega c_1} \alpha_1 N e^{-\alpha_1 x}.$$

Auf BC ist entsprechend

$$(17) \quad \mathfrak{B} = -\frac{c'_0}{c_2} \mathfrak{B}_0 - \frac{1}{i \omega c_2} \alpha_2 P e^{\alpha_2 x} + \frac{1}{i \omega c_2} \alpha_2 Q e^{-\alpha_2 x}.$$

Aus (14) folgt für $x = 0$ wegen (12)

$$(18) \quad M + N = 0.$$

Aus (15) ergibt sich ferner für $x = l = l_1 + l_2$

$$(19) \quad P e^{\alpha_2 l} + Q e^{-\alpha_2 l} = 0.$$

Schließlich ist wegen (13), (14), (15), (16) und (17)

$$(20) \quad -\frac{c_0}{c_1} \mathfrak{B}_0 - \frac{1}{i \omega c_1} \alpha_1 M e^{\alpha_1 l_1} + \frac{1}{i \omega c_1} \alpha_1 N e^{-\alpha_1 l_1} = -\frac{c'_0}{c_2} \mathfrak{B}_0 - \frac{1}{i \omega c_2} \alpha_2 P e^{\alpha_2 l_1}$$

$$+ \frac{1}{i \omega c_2} \alpha_2 Q e^{-\alpha_2 l_1},$$

$$(21) \quad M e^{\alpha_1 l_1} + N e^{-\alpha_1 l_1} = P e^{\alpha_2 l_1} + Q e^{-\alpha_2 l_1}.$$

Aus den Gleichungen (18), (19), (20) und (21) erhält man nach einigen Umformungen

$$(22) \quad M = -N = \frac{\mathfrak{B}_0 i \omega (c_0 c_2 - c'_0 c_1) \sin \frac{1}{i} \alpha_2 l_2}{(c_1 \alpha_2 - c_2 \alpha_1) \sin \frac{1}{i} (\alpha_1 l_1 - \alpha_2 l_2) + (c_1 \alpha_2 + c_2 \alpha_1) \sin \frac{1}{i} (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)}$$

demnach auf der Strecke AB

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{B}_0 \cdot 2 \omega (c_0 c_2 - c'_0 c_1) \sin \frac{1}{i} \alpha_1 x \cdot \sin \frac{1}{i} \alpha_2 l_2}{(c_1 \alpha_2 - c_2 \alpha_1) \sin \frac{1}{i} (\alpha_1 l_1 - \alpha_2 l_2) + (c_1 \alpha_2 + c_2 \alpha_1) \sin \frac{1}{i} (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)}, \\ \mathfrak{B} = -\frac{c_0}{c_1} \mathfrak{B}_0 + \frac{2 \alpha_1 \mathfrak{B}_0}{c_1} \cdot \cos \frac{1}{i} \alpha_1 x \\ \frac{(c_0 c_2 - c'_0 c_1) \sin \frac{1}{i} \alpha_2 l_2}{(c_1 \alpha_2 - c_2 \alpha_1) \sin \frac{1}{i} (\alpha_1 l_1 - \alpha_2 l_2) + (c_1 \alpha_2 + c_2 \alpha_1) \sin \frac{1}{i} (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)}. \end{array} \right.$$

Wir nehmen jetzt an, daß $|\alpha_1|$ und $|\alpha_2|$ so klein sind, daß für $\sin \frac{1}{i} \alpha_1 l_1$, $\sin \frac{1}{i} \alpha_2 l_2$, $\cos \frac{1}{i} \alpha_1 l_1$, $\sin \frac{1}{i} (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)$, ... entsprechend $\frac{1}{i} \alpha_1 l_1$, $\frac{1}{i} \alpha_2 l_2$, 1 , $\frac{1}{i} (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)$, ... gesetzt werden kann. Für \mathfrak{B} erhält man dann angenähert:

$$(24) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{B} &= -\frac{c_0}{c_1} \mathfrak{B}_0 + \frac{2 \alpha_1 \mathfrak{B}_0}{c_1} \cdot \frac{(c_0 c_2 - c'_0 c_1) \frac{1}{i} \alpha_2 l_2}{(c_1 \alpha_2 - c_2 \alpha_1) \frac{1}{i} (\alpha_1 l_1 - \alpha_2 l_2) + (c_1 \alpha_2 + c_2 \alpha_1) \frac{1}{i} (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)} \\ &= -\frac{c_0}{c_1} \mathfrak{B}_0 + \frac{2 \alpha_1 \mathfrak{B}_0}{c_1} \cdot \frac{(c_0 c_2 - c'_0 c_1) \alpha_2 l_2}{(c_1 \alpha_2 \alpha_1 l_1 + c_2 \alpha_1 \alpha_2 l_2)} \\ &= -\frac{c_0}{c_1} \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_0 \frac{(c_0 c_2 - c'_0 c_1) l_2}{c_1 (c_1 l_1 + c_2 l_2)} = \mathfrak{B}_0 \frac{-c_0 c_1 l_1 - c_0 c_2 l_2 + c_0 c_2 l_2 - c'_0 c_1 l_2}{c_1 (c_1 l_1 + c_2 l_2)} \\ &= -\mathfrak{B}_0 \frac{c_0 l_1 + c'_0 l_2}{c_1 l_1 + c_2 l_2}. \end{aligned} \right.$$

Demnach ist auch

$$(25) \quad V = -V_0 \frac{c_0 l_1 + c'_0 l_2}{c_1 l_1 + c_2 l_2}.$$

Betrachten wir jetzt vorübergehend eine homogene Leitung (1*) im Felde einer weiteren Leitung (0*) (vgl. die Fig. 2). Die Teilkapazitäten der Leitung (1*) heißen jetzt c^* , c_1^* . Jetzt kommt (1*), wenn wieder der Leerstrom und der Spannungsabfall in (0*) vernachlässigt werden, auf das Potential V^* , das von x unabhängig ist. Beim Betriebe nach Fig. 2 ist (1*) Sitz einer Ladung vom Betrage

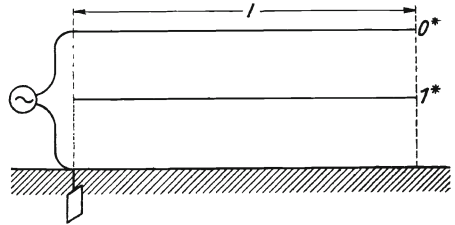


Fig. 2.

$$(26) \quad c_0^* V_0 + c_1^* V_1^*.$$

Da (1*) von der Erde isoliert ist, so muß

$$(27) \quad c_0^* V_0 + c_1^* V_1^* = 0$$

sein. Aus (27) folgt

$$(28) \quad V_1^* = -\frac{c_0^*}{c_1^*} V_0.$$

Den Formeln (25) und (28) gemäß verhält sich das Leitersystem (0), (1) wie eine homogene Leitung mit den Teilkapazitäten

$$(29) \quad c_0^* = \frac{c_0 l_1 + c'_0 l_2}{l_1 + l_2}, \quad c_1^* = \frac{c_1 l_1 + c_2 l_2}{l_1 + l_2}.$$

Das sind aber Mittelwerte aus den Teilkapazitäten der beiden Strecken AB und BC .

In dem von uns betrachteten Spezialfalle ist der Ersatz der sprungweise unsteitigen Leitung durch eine homogene Leitung nach dem Prinzip der Mittelwertbildung in dem Maße zulässig, in dem die Werte $\sin \frac{1}{i} \alpha_1 l_1$, $\sin \frac{1}{i} \alpha_2 l_2$, $\cos \alpha_1 l_1$, ...

entsprechend durch $\frac{1}{i} \alpha_1 l_1$, $\frac{1}{i} \alpha_2 l_2$, $1, \dots$ ersetzt werden können. Dieses Kriterium dürfte allgemeiner bei beliebigen gekreuzten Leitungen unbedenklich angewandt werden können. Für l_1 und l_2 treten dort die Entfernungen zweier aufeinanderfolgenden Kreuzungsstellen, für c_1, c_2, \dots gewisse aus Teilkapazitäten einzelner Leiter des Systems sinngemäß zu bildende Betriebswerte.

Von Interesse ist jetzt ferner die in dem Leiter 1 in Wärme umgesetzte Energie \mathfrak{B} :

$$(30) \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} w_1 |\mathfrak{J}|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} w_2 |\mathfrak{J}|^2 dx = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2,$$

unter $|\mathfrak{J}|$ den absoluten Betrag der komplexen Zahl \mathfrak{J} verstanden.

Wir begnügen uns bei der weiteren Berechnung mit den Annäherungswerten für \mathfrak{J} . Es ist nach (23) angenähert auf $A B$:

$$(31) \quad \mathfrak{J} = - \frac{\mathfrak{B}_0 \cdot 2 \omega (c_0 c_2 - c'_0 c_1) \alpha_1 \alpha_2 l_2 x}{\frac{2}{i} \alpha_1 \alpha_2 (l_1 c_1 + l_2 c_2)} = - \mathfrak{B}_0 \omega \frac{c_0 c_2 - c'_0 c_1}{l_1 c_1 + l_2 c_2} l_2 x i,$$

darum

$$(32) \quad |\mathfrak{J}| = \mathfrak{B}_0 \omega \left| \frac{c_0 c_2 - c'_0 c_1}{l_1 c_1 + l_2 c_2} \right| l_2 x$$

und

$$(33) \quad \mathfrak{B}_1 = w_1 \mathfrak{B}_0^2 \omega^2 \left(\frac{c_0 c_2 - c'_0 c_1}{l_1 c_1 + l_2 c_2} \right)^2 l_2^3 \frac{l_1^3}{6}.$$

Aus Gründen der Symmetrie finden wir

$$(34) \quad \mathfrak{B}_2 = w_2 \mathfrak{B}_0^2 \omega^2 \left(\frac{c_0 c_2 - c'_0 c_1}{l_1 c_1 + l_2 c_2} \right)^2 l_1^3 \frac{l_2^3}{6},$$

demnach

$$(35) \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{6} \mathfrak{B}_0^2 \omega^2 \left(\frac{c_0 c_2 - c'_0 c_1}{l_1 c_1 + l_2 c_2} \right)^2 l_1^2 l_2^2 \cdot (l_1 w_1 + l_2 w_2).$$

Der Gesamtwiderstand des Leiters (1) ist $W = l_1 w_1 + l_2 w_2$.

Wir finden mithin endgültig

$$(36) \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{6} \mathfrak{B}_0^2 \omega^2 W \left(\frac{c_0 c_2 - c'_0 c_1}{l_1 c_1 + l_2 c_2} \right)^2 l_1^2 l_2^2.$$

Betrachten wir für einen Augenblick einen Leiter, dessen Gesamtkapazität gegen Erde den Wert

$$(37) \quad \frac{(c_0 c_2 - c'_0 c_1) l_1 l_2}{l_1 c_1 + l_1 c_2} = C$$

hat¹⁾. Der Gesamtwiderstand des Leiters sei W , seine Gesamtlänge l , die Spannung gegen Erde

$$(38) \quad V_0 = \mathfrak{B}_0 e^{i\omega t}.$$

Der effektive Wert des Ladestromes in der Entfernung x vom Leiteranfang ist dann gleich

$$(39) \quad \omega \frac{\mathfrak{B}_0}{\sqrt{2}} C \frac{l-x}{l}.$$

¹⁾ Man überzeugt sich leicht, daß der Ausdruck (37) eine Kapazität darstellt.

Die in Wärme umgesetzte Energie ist, wie man leicht sieht,

$$(40) \quad \omega^2 \frac{\mathfrak{R}_0^2}{2} C^2 \int_0^l \frac{(l-x)^2}{l^2} \frac{W}{l} dx = \frac{1}{6} \omega^2 \mathfrak{R}_0^2 C^2 W .$$

Aus (36), (37) und (40) ergibt sich, daß unser Leiter, was die in Wärme umgesetzte Energie betrifft, sich wie ein ungekreuzter, freihängender Leiter von der Gesamtkapazität

$$(41) \quad \frac{(c_0 c_2 - c_0' c_1) l_1 l_2}{l_1 c_1 + l_2 c_2}$$

verhält.

Erscheint erwünscht, die Ergebnisse durch ein Zahlenbeispiel zu illustrieren.

Betrachten wir die in den Fig. 3 und 4 angegebenen Leiteranordnungen; Fig. 3 stellt den Querschnitt durch die Strecke AB , die Fig. 4 denjenigen durch die Strecke

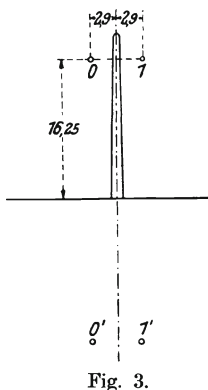


Fig. 3.

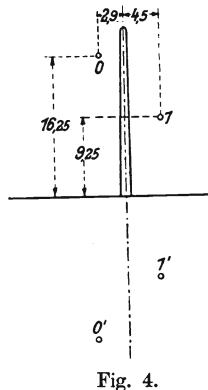


Fig. 4.

BC dar. Wir beginnen mit der Bestimmung der Koeffizienten c_0, c_0', c_1, c_2 und führen hierzu in bekannter Weise die Spiegelbilder der Leiter 0 und 1 in bezug auf die Erdoberfläche $0', 1'$ ein. Es mögen die Potentiale der jetzt isoliert gedachten Leiter 0 und 1 entsprechend V_0, V_1 , ihre Ladungen Q_0, Q_1 heißen. Die Entfernungen der Leiterpaare 0, 1; 0, 1'; 0', 1; 0', 1' seien $\varrho_{01}, \varrho_{01'}, \varrho_{0'1}, \varrho_{0'1'}$, ihre Halbmesser r_0, r_1 . Dann ist allgemein

$$(42) \quad \begin{cases} V_0 = 2 Q_0 \log \frac{\varrho_{00'}}{r} + 2 Q \log \frac{\varrho_{01'}}{\varrho_{01}} , \\ V_1 = 2 Q_0 \log \frac{\varrho_{10'}}{\varrho_{10}} + 2 Q \log \frac{\varrho_{11'}}{r} . \end{cases}$$

In unserem besonderen Falle findet man auf der Strecke AB im elektrostatischen Maßsystem

$$(43) \quad \begin{cases} \frac{1}{4,6052} V_0 = 3,61278 Q_0 + 0,75511 Q , \\ \frac{1}{4,6052} V = 0,75511 Q_0 + 3,61278 Q , \end{cases}$$

¹⁾ Das Zeichen \log bedeutet den natürlichen Logarithmus.

auf der Strecke BC

$$(44) \quad \begin{cases} \frac{1}{4,6052} V_0 = 3,61278 Q_0 + 0,55121 Q, \\ \frac{1}{4,6052} V = 0,55121 Q_0 + 3,36791 Q. \end{cases}$$

Nach Auflösung der Gleichungen (43) und (44) erhalten wir auf AB :

$$(45) \quad Q = 0,0629 V - 0,01316 V_0,$$

auf BC

$$(46) \quad Q = 0,0660 V - 0,0101 V_0.$$

Die Werte der Konstanten c_0, c_0', c_1, c_2 sind darum, umgerechnet auf $\frac{\text{Mi}}{\text{km}}$, gleich:

$$(47) \quad \begin{cases} c_1 = \frac{0,0629}{9} \frac{\text{Mi}}{\text{km}} = 6,99 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Mi}}{\text{km}} = 6,99 \cdot 10^{-9} \frac{\text{Farad}}{\text{km}}, \\ c_2 = \frac{0,0660}{9} \frac{\text{Mi}}{\text{km}} = 7,33 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Mi}}{\text{km}}, \\ c_0 = -\frac{0,01316}{9} \frac{\text{Mi}}{\text{km}} = -1,46 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Mi}}{\text{km}}, \\ c_0' = -\frac{0,0106}{9} \frac{\text{Mi}}{\text{km}} = -1,12 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Mi}}{\text{km}}. \end{cases}$$

Der Leiterwiderstand für die Längeneinheit (Aluminiumleiter 150 mm²) ist gleich

$$(48) \quad w_1 = w_2 = w = \frac{1000}{150 \cdot 32} \frac{\text{Ohm}}{\text{km}} = 0,208 \frac{\text{Ohm}}{\text{km}}.$$

Sei endlich $l_1 = l_2 = 15 \text{ km}$, $\mathfrak{B}_0 = 150\,000 \sqrt{2} \text{ Volt}$, entsprechend $150\,000 \text{ Volt}$, mit-
hin der Gesamtwiderstand $W = 6,24 \text{ Ohm}$.

Wir finden weiter

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1+i) \sqrt{\frac{\omega c_1 w_1}{2}} = (1+i) \sqrt{\frac{314 \cdot 6,99 \cdot 10^{-9} \cdot 0,208}{2}} \\ &= (1+i) \sqrt{2,29 \cdot 10^{-7}} = (1+i) \cdot 4,8 \cdot 10^{-3}, \quad \alpha_1 l_1 = (1+i) \cdot 0,072, \\ \alpha_2 &= (1+i) \sqrt{\frac{314 \cdot 7,33 \cdot 10^{-9} \cdot 0,208}{2}} = (1+i) \cdot 4,89 \cdot 10^{-3}, \quad \alpha_2 l_2 = (1+i) \cdot 0,0734. \\ \alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 &= \gamma i = (1+i) \cdot 0,1454, \quad \frac{\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2}{i} = \gamma = \frac{1+i}{i} \cdot 0,1454. \end{aligned}$$

Es ist nun

$$\begin{aligned} \frac{\sin \gamma - \gamma}{\gamma} &= -\frac{1}{3!} \gamma^2 + R, \\ R &= \frac{1}{5!} \gamma^4 - \frac{1}{7!} \gamma^6 + \dots \end{aligned}$$

Offenbar ist

$$|R| < \frac{1}{5!} |\gamma|^4 (1 + |\gamma|^2 + |\gamma|^4 + \dots) = \frac{1}{5!} |\gamma|^4 \frac{1}{1 - |\gamma|^2},$$

darum

$$\left| \frac{\sin \gamma - \gamma}{\gamma} \right| < \frac{1}{3!} |\gamma|^2 + \frac{1}{5!} |\gamma|^4 \frac{1}{1 - |\gamma|^2}.$$

Im vorliegenden Falle ist

$$|\gamma| = \sqrt{2} \cdot 0,1454 = 0,205 ,$$

$$\left| \frac{\sin \gamma - \gamma}{\gamma} \right| < \frac{1}{6} \cdot 0,0416 + \frac{1}{120} \cdot 0,00173 \cdot \frac{1}{0,96} = 0,007 .$$

In ähnlicher Weise findet man

$$\left| \frac{\sin \gamma_1 - \gamma_1}{\gamma_1} \right| < 0,007 , \quad \gamma_1 = \frac{1}{i} (\alpha_1 l_1 - \alpha_2 l_2) ,$$

$$\left| \frac{\sin \frac{\alpha_1 l_1}{i} - \frac{\alpha_1 l_1}{i}}{\frac{\alpha_1 l_1}{i}} \right| < 0,00173 , \quad \left| \frac{\cos \frac{\alpha_1 x_1}{i} - 1}{1} \right| < 0,005 .$$

Es ist jetzt leicht, den prozentualen Fehler $\frac{\delta \mathfrak{S}}{\mathfrak{S}}$ abzuschätzen, den man begeht, wenn man für \mathfrak{S} den Mittelwert (24) setzt. Man findet

$$\left| \frac{\delta \mathfrak{S}}{\mathfrak{S}} \right| < 0,0137 .$$

Der prozentuale Fehler beträgt demnach weniger als 1,37%. Es dürfte darum erlaubt sein, wenigstens für $l = 15$ km mit den Mittelwerten der elektrischen Konstanten der Strecken AB und BC zu rechnen.

Es ist anzunehmen, daß dieses Ergebnis auch noch bei den in der üblichen Weise belasteten Drehstromleitungen gilt. Eine vollständige Kreuzung (Drehung um 360°) entspricht hier einer Entfernung von 45 km.

Es ist nicht ohne Interesse, die infolge der Kreuzung von den Ausgleichströmen in Wärme umgesetzte Energie zu ermitteln.

Nach (36) ist diese für $l_1 = l_2 = 15$ km gleich

$$\begin{aligned} \mathfrak{S} &= \frac{1}{3} (150\,000)^2 (314)^2 \cdot 6,24 \left(\frac{-1,46 \cdot 7,33 \cdot 10^{-18} + 1,12 \cdot 6,99 \cdot 10^{-18}}{15 (6,99 + 7,33) 10^{-9}} \right)^2 \cdot 15^2 \cdot 15^2 \text{ Watt} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 225 \cdot 10^8 \cdot 9,86 \cdot 10^4 \cdot 6,24 \left(\frac{2,84 \cdot 10^{-18}}{214,8 \cdot 10^{-9}} \right)^2 \cdot 225 \cdot 225 \cdot 10^{-3} \text{ KW} \\ &= 75 \cdot 9,86 \cdot 6,24 \cdot 1,745 \cdot 5,07 \cdot 10^{-9} \text{ KW} = 4,28 \cdot 10^{-5} \text{ KW} . \end{aligned}$$

Diese Leistung könnte auf den ersten Blick zu klein erscheinen. Wir haben indessen angenommen, daß die beiden Leiter beiderseits offen sind und wir haben vor allem den Spannungsabfall in dem Leiter 0 vernachlässigt. Unter diesen Voraussetzungen würde, wenn in (1) keine Kreuzung vorgelegen hätte, die in beiden Leitungen in Wärme umgesetzte Leistung völlig verschwinden. Sie ist in dem Leiter 0 in Wirklichkeit tatsächlich nur darum vorhanden, weil dieser von Ladestrom durchflossen wird und darum \mathfrak{S}_0 von x nicht unabhängig ist.

Über die Bestimmung des Magnesiums in Legierungen.

Von

Ernst Wilke-Dörfurt.

Mitteilung aus den Forschungslaboratorien des Siemens-Konzerns zu Siemensstadt.
Physikalisch-Chemisches Laboratorium.

In einem Betriebslaboratorium hatte die Untersuchung von Zink-Aluminium-Magnesium-Legierungen mit kleinem Magnesiumgehalt die unerklärliche Schwierigkeit ergeben, daß durch die Analyse ständig viel kleinere Magnesiumwerte erhalten wurden, als nach der Herstellung der Legierungen erwartet werden mußten. Die Wertbestimmung dieser Metallmischungen, für die ihr Magnesiumgehalt maßgebend war, wurde auf diese Weise in hohem Maße unsicher, ja schließlich unmöglich, wenn z. B. bei einem erwarteten Gehalt von 6% Mg die Analyse nur 3 und 1% anzeigte. Das benutzte analytische Verfahren hatte bei einer dem kleinen Magnesiumgehalt angepaßten Einwage ordnungsgemäß mit Ammoniak, Ammonchlorid und Schwefelammon das Zink als Sulfid und das Aluminium als Hydroxyd gefällt und im Filtrat mit Natriumphosphat das Magnesium aufgesucht. Die Nachprüfung ergab nun, daß Magnesium bei so reichlichem Schwefelammonniederschlag nicht durch Chlorammonium in Lösung gehalten, sondern im Schwefelammonniederschlag festgehalten wird. Diese Gefahr liegt bei allen Abtrennungen des Magnesiums von Metallen der Schwefelammoniumgruppe vor und ist seit langem bekannt. Nach den Anweisungen der analytischen Lehr- und Handbücher begegnet man ihr meist durch doppelte Ausführung der Fällung mit Schwefelammonium. Im vorliegenden Falle jedoch war selbst nach dreimaliger Wiederholung noch viel Magnesium im Niederschlag enthalten. Die Menge des mitgerissenen Magnesiums stieg mit der Einwage, also der Masse des Sulfid-Hydroxyd-Niederschlags. Wählte man die Einwage so klein, daß kein Mitreißen erfolgen bzw. doppelte Fällung den Fehler beseitigen konnte, so wurde bei der Kleinheit des Magnesiumgehalts die Menge des Magnesium-Ammoniumphosphatniederschlags unzulässig klein und der Magnesiumwert nun aus diesem Grunde wieder unsicher. Man mußte also eine Analysenmethode aufsuchen, für welche die Zusammensetzung der Legierung nicht derartige Schwierigkeiten machte. Der Versuch, die salzsaure Metall-Lösung mit Ätznatron zu fällen und dabei die Bedingungen so zu wählen, daß Zinkat und Aluminat löslich bleiben, während Magnesiumhydroxyd ausgeschieden wurde, mißlang. In Konzentrationen zu arbeiten, die alles Zink und alles Aluminium mit Sicherheit in Lösung hielten, stellte sich als unmöglich heraus, da so stark alkalische Flüssigkeiten das Filterpapier zu stark angreifen, und bei Anwendung schwächeren Natriumhydroxyds wurden während des Filtrierens Tonerde und Zinkhydroxyd durch Einwirkung der Luft ausgeschieden und verunreinigten den Magnesiumniederschlag. Dagegen führte zum Ziele der Versuch,

das Zink und das Aluminium mit Weinsäure bzw. weinsaurem Salz in Lösung zu halten und mit Natriumphosphat das Magnesium direkt zu bestimmen. Eine gleichartige Verwendung der Weinsäure ist in der analytischen Praxis viel geübt. Es fehlte der Nachweis, daß in Gegenwart von weinsaurem Ammoniak durch Natriumphosphat weder Zink noch Aluminium gefällt werden, daß in Anwesenheit weinsauren Salzes die Abscheidung des Magnesiums auch noch quantitativ erfolgt und daß aus Gemischen das Magnesium-Ammoniumphosphat unter diesen Umständen frei von Zink und Aluminium ausfällt. Daß alle drei Bedingungen erfüllt sind, wurde durch genaue Einzelversuche erwiesen: In einer Lösung von Kalialaun (C. A. F. Kahlbaum, „zur Analyse“), die in 1 l 66 g $K_2Al_2(SO_4)_3 \cdot 24 H_2O$ enthielt und in einer 36 g $ZnSO_4 \cdot 7 H_2O$ in 1 l enthaltenden Lösung von Zinksulfat (E. Merck, puriss. pro anal.) wurde nach Zusatz von 5 g Weinsäure zu je 50 ccm mit Ammoniak, Ammonchlorid und Natriumphosphat auch nach längerem Stehen keine Spur einer Fällung erhalten. Eine Lösung von Magnesiumsulfat (E. Merck, puriss. pro anal., 16 g in 1 l) ergab ohne Zusatz von Weinsäure aus 10 ccm in üblicher Weise mit Natriumphosphat 0,163, 0,164, 0,166, 0,163 g Mg in 100 ccm; mit 15 g Weinsäure versetzt: 0,164, 0,164 g Mg. Schließlich wurden die genau analysierten Standardlösungen in dem Verhältnis gemischt, das der Zusammensetzung einer der in Frage stehenden Legierungen entsprach, und man nahm nun eine direkte Magnesiumbestimmung in Gegenwart von 15 g Weinsäure auf 50 + 50 + 10 ccm vor. Es wurde ein Magnesiumgehalt von 0,163 g gefunden¹).

Da es für technische Zwecke sehr oft genügen wird, von solchen Legierungen lediglich den Magnesiumsgehalt zu ermitteln, so kann dies Verfahren dazu empfohlen werden, weil es in sehr einfacher Weise schnell und unmittelbar zu einem genauen Magnesiumwert führt. Das Zink kann hinterher als Sulfid bestimmt und das Aluminium aus der Differenz ermittelt werden. Da, wo derartige Qualitätslegierungen für besondere Zwecke nur gelegentlich analysiert werden, wird die Verwendung des nicht wohlfeilen weinsauren Salzes zulässig, und in Betrieben, wo Massen-Analysen einen hohen Verbrauch davon verursachen, eine Wiedergewinnung des Tartrats aus den Filtraten ohne weiteres zu organisieren sein.

Für den praktischen Gebrauch wird im folgenden eine Arbeitsanweisung gegeben, mit Hilfe deren Zink-Aluminium-Magnesium-Legierungen mit kleinem Magnesiumgehalt zu analysieren sind:

1 g der Legierung wird in der üblichen Weise gelöst und die zur Trockne gebrachte, mit Wasser aufgenommene Lösung von Spuren Kieselsäure durch Filtration befreit. Man verdünnt dann auf etwa 150 ccm, versetzt mit Chlorammonium in der für Ammoniakfällungen in Gegenwart von Erdalkalien oder Magnesium nötigen Menge und mit 15 g Weinsäure oder der entsprechenden Menge weinsauren Ammoniaks. Gibt man nun 70 ccm konz. Ammoniak hinzu, so darf keine Fällung entstehen. Hierauf fällt man in gewöhnlicher Weise mit Natriumphosphat das Magnesium aus, läßt 12 Stunden stehen, wäscht zuerst mit einer Waschflüssigkeit aus, die Ammoniak, Ammoniumchlorid und etwas weinsaures Ammoniak enthält, dann mit sehr verdünntem Ammoniak und schließlich mit reinem Wasser und verarbeitet den Niederschlag vorschriftsgemäß auf Magnesiumpyro-phosphat $Mg_2P_2O_7$. Das Zink wird im Filtrat aus essigsaurer Lösung als Zinksulfid niedergeschlagen und in der üblichen

¹) Die Beleganalysen sind z. T. von Herrn Dr. Max Hagedorn ausgeführt.

Weise zur Wägung gebracht, und der Prozentgehalt an Aluminium ergibt dann mit genügender Genauigkeit die Differenz gegen 100.

Zusammenfassung. Es wird von einem Fall berichtet, bei dem die übliche Bestimmungsweise des Magnesiums nach zuvorgegangener Schwefelammonfällung versagt, ein Analysen-Verfahren mitgeteilt, in Zink-Aluminium-Magnesium-Legierungen mit kleinem Magnesiumgehalt das Magnesium ohne vorherige Ausfällung des Zinks und des Aluminiums direkt genau zu bestimmen und eine Arbeitsanweisung dafür gegeben.

Die Versuche wurden im Frühjahr 1919 ausgeführt.

Beiträge zur Bestimmung der Molekulargröße des Kautschukkohlenwasserstoffs auf chemischem Wege.

Von

C. Harries und Fritz Evers.

Mitteilung aus den Forschungslaboratorien des Siemens-Konzerns zu Siemensstadt,
Organische Abteilung.

Über Reduktion des Parakautschuk.

Aus den Abbauprodukten des Kautschuks bzw. seiner Derivate durch Ozon hat man schließen können, daß in ihm ein großer Kohlenstoffring enthalten ist, dessen Struktur man genau kennt. Nur seine wahre Gliederzahl ob C_{20} , C_{24} , C_{28} , hat sich nicht endgültig feststellen lassen¹⁾. Ja es ist sogar noch unsicher, ob der Naturkautschuk durch Polymerisation einer Anzahl gleichartiger Kohlenwasserstoffmoleküle der oben gegebenen Größenordnung zustande kommt, oder ob die Molgröße des dem Kautschuk zugrunde liegenden Kohlenwasserstoffes identisch ist mit derjenigen des Naturkautschuks selbst. Im letzteren Falle wäre es möglich, daß die Zahl C_{28} für die Kohlenstoffringglieder erheblich übertroffen wird.

Es wurde auch schon dargelegt, warum es plausibel ist, daß der natürliche Kautschuk ein Polymerisationsprodukt von variabler Molekulargröße ist und deshalb sein Grundkohlenwasserstoff kein sehr hohes Molekulargewicht besitzen dürfte, obgleich auch in Rücksicht gezogen wurde, daß eine Reihe von Veränderungen des Kautschuks, die man bisher als Folgen von Poly- und Depolymerisationserscheinungen anzusehen pflegte, kolloidchemisch auf Unterschiede in der Dispersion bei gleicher Molgröße zurückgeführt werden könnten.

Es erscheint schwierig diese Frage allein auf physikalisch-chemischem Wege lösen zu können, man muß sie auch von der chemischen Seite anzugreifen versuchen. Eine einfache chemische Methode bestände darin, den Kautschuk, der sich einer Reihe von Reagentien gegenüber wie ein stark ungesättigter Körper der allgemeinen Formel $(C_{10}H_{16}\overline{2})x$ verhält, zu reduzieren. Der hierbei entstehende gesättigte Kohlenwasserstoff besäße dann entweder die Formel $n(C_{10}H_{20})\frac{x}{n}$ bei Annahme von Polymerisation oder bei Identität der Molgröße von Kohlenwasserstoff mit Kautschuk $(C_{10}H_{20})x$. Im ersten Falle müßte man eine Verbindung von verhältnismäßig niederer Molgröße etwa von C_{25} bis C_{40} erhalten, die sich wahrscheinlich im Hochvakuum destillieren ließe. Im zweiten wäre das Produkt zwar in seinen allgemeinen Eigenschaften dem ersten ähnlich, aber wegen der zu hohen Kohlenstoffzahl nicht mehr destillierbar.

¹⁾ Harries, Liebigs Annalen d. Chemie **406**, 197 (1914).

Bisher waren die Versuche, den Kautschuk zu reduzieren, ohne Erfolg, so hat sich insbesondere bei ihm die katalytische Methode vermitteltst Platin bzw. Palladium und Wasserstoff nach Paal, Skita und Willstätter vorläufig nicht anwenden lassen¹⁾. Wir unternahmen es daher auf indirektem Wege die Hydrierung zu bewerkstelligen.

Wenn man Kautschuk in Chloroformlösung mit Chlorwasserstoff sättigt, so nimmt er auf $C_{10}H_{16}$ 2 Mol HCl auf und geht in das bekannte feste weiße Kautschukdihydrochlorid über²⁾. Reduziert man dasselbe in Chloroformlösung mit Zinkstaub und Essigsäure, so gewinnt man nachher ein Produkt, welches immer noch 6,5proz. Chlor enthält. Da das neue Präparat aber in Äther leichter löslich geworden ist, läßt es sich mit Natrium, Äther und Wasser bequem erschöpfend reduzieren und man bekommt ein praktisch chlorfreies Produkt von elastischen, an den Naturkautschuk erinnernden Eigenschaften, welches aber sauerstoffhaltig ist. Bei dem Versuche dieses Verfahren technisch zu vereinfachen, gelangten wir zu ganz anderen Resultaten, so daß wir die zunächst erhaltene kautschukartige Verbindung vorläufig nicht näher untersucht haben und nur die neue weiter verfolgten.

Vereinfacht man nämlich die Reduktion dergestalt, daß man das Kautschukdihydrochlorid gar nicht erst isoliert, sondern den in Äthylenchlorid in Lösung gebrachten Kautschuk mit Salzsäuregas sättigt und dann direkt mit Zinkstaub ohne Essigsäure behandelt, so erhält man ein ganz anderes chlorfreies Produkt. Dasselbe ist weiß, fest und besitzt keine Kautschukeigenschaften mehr. Ozonisiert liefert es ein festes Ozonid, welches mit Wasser gespalten nicht die Pyrrolreaktion anzeigt. Daraus geht hervor, daß es zwar noch Doppelbindungen besitzt, die Konstitution sich aber hinsichtlich ihrer Lagerung wesentlich gegenüber dem Kautschuk geändert hat. Ungereinigt enthält es etwa 8proz. Sauerstoff. Den sauerstoffhaltigen Anteil kann man durch ein fraktioniertes Lösungsverfahren abscheiden. Eine umfangreiche analytische Kontrolle hat ergeben, daß man es mit einem Kohlenwasserstoff zu tun hat, der durch Aufnahme von sehr wenig Wasserstoff aus dem Kautschuk entstanden ist. Die empirische Formel stimmt auf etwa $C_{30}H_{52}$ oder auch $C_{35}H_{62}$. Danach müßten noch 4 Doppelbindungen vorhanden sein, denn die unreduzierte Formel ist $C_{30}H_{48}$ und die vollständig hydrierte $C_{30}H_{60}$ bzw. $C_{35}H_{56}$ und $C_{35}H_{70}$. Mit Hilfe des Ozon-Additionsprodukts läßt sich nachweisen, daß dies ungefähr der Fall sein kann, denn das Ozonid stimmt annähernd auf die Formel $C_{30}H_{52}O_{12}$ bzw. $C_{35}H_{62}O_{12}$ aber auch auf $C_{40}H_{70}O_{15}$, also einem Derivat eines Kohlenwasserstoffes $C_{40}H_{70}$.⁵⁾ Dadurch ist aber die Tatsache wahrscheinlich gemacht, daß bei der oben angegebenen Methode eine partielle Hydrierung des Kautschukkohlenwasserstoff erfolgt. Wir nennen die neue Substanz bis zur genaueren Festlegung ihrer Konstitution α -Hydrokautschuk.

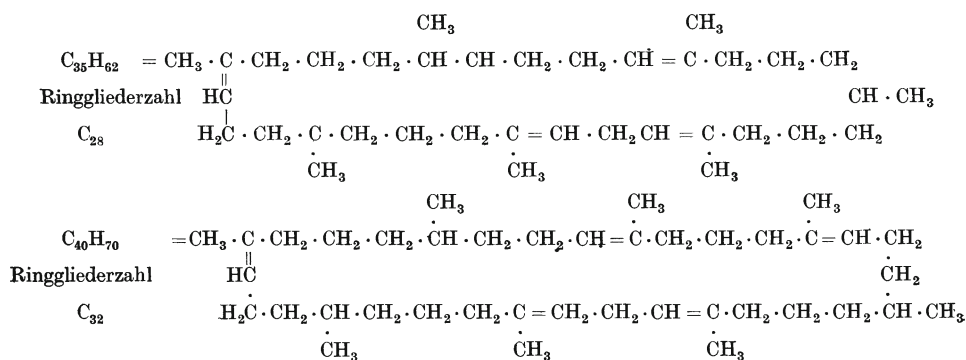
Für die Beurteilung der Molekulargröße des α -Hydrokautschuks ist sein Verhalten bei der Destillation im Hochvakuum von Bedeutung. Dieser Vorgang ist eingehend untersucht worden. Hierbei wurde beobachtet, daß, obwohl starke Zersetzungserscheinungen auftreten, sich eine bei 240 bis 300° unter 0,1 bis 0,5 mm Druck siedende Fraktion gewinnen läßt, die fest wird und immerhin so ähnliche Eigenschaften in

¹⁾ Vgl. Harries, Vortrag Wien 1910. — Hinrichsen - Kempf, Ber. d. d. chem. Ges. **46**, 2106 (1912).

²⁾ Weber, Ber. d. d. chem. Ges. **33**, 779 (1900). — Harries - Fonrobert, ibid. **46**, 733 (1913).

Zusammensetzung, Verhalten gegen Ozon und Chlorwasserstoffsäure wie der nicht destillierte Körper aufweist, daß wir glauben annehmen zu können, der Hydrokautschuk siedet zum Teil unzersetzt. Obwohl nun eine genaue Festlegung des Siedepunktes nicht gelungen ist, sind doch mit der oben gegebenen Zahl Schätzungen der Molgröße in gewissen Grenzen möglich. Wir kommen auf Grund von Überlegungen, die später wieder gegeben werden (S. 92), zu dem Schluß, daß die obere Grenze in der Kohlenwasserstoffzahl für eine bei 240 bis 280° unter 0,1 bis 0,5 mm siedende Substanz die zyklische Formel $C_{40}H_{70}$ ⁵ und die untere $C_{35}H_{62}$ ⁴ repräsentieren kann.

Mit beiden Formeln sind die Ergebnisse der Elementaranalyse des Kohlenwasserstoffs selbst wie seines Ozonids in Einklang zu bringen. Andererseits scheint es nach dem ständig steigenden Siedepunkt, als wenn ein Gemisch von Kohlenwasserstoffen vorläge. Hiermit stimmen übrigens noch andere Beobachtungen überein¹⁾. Wir haben natürlich versucht die Molgröße des α -Hydrokautschuks auch auf kryoskopischem Wege festzustellen und haben das von E. Fischer und Freudenberg mit Erfolg bei hochmolekularen Verbindungen gebrauchte Bromoform, worin er im Gegensatz zum Naturkautschuk leicht löslich ist, benutzt. Hierbei fanden wir aber bei einer sehr kleinen Depression abnorm hohe Werte, im Mittel 6067, die zunächst nur erklärt werden können, wenn man annimmt, daß eine kolloidale Lösung vorhanden ist. Wir haben daher die Versuche in dieser Richtung nicht fortgesetzt. Für die reduzierten Verbindungen $C_{35}H_{62}$ und $C_{40}H_{70}$ kämen etwa folgende Konstitutionsformeln in Frage, die der Forderung gerecht werden, daß das Ozonid bei der Spaltung keinen Laevulinaldehyd bzw. Säure liefert. Von diesen sind natürlich noch eine Reihe von Isomeren möglich.



Aus diesen Formeln lassen sich dann ganz bestimmte Rückschlüsse auf diejenige des Naturkautschuks selbst ziehen. Leider haben sich bei der Untersuchung der Spaltungsprodukte des Ozonids größere Schwierigkeiten ergeben als wir erwarteten, so daß wir eingehende Erörterungen über diesen Gegenstand vorläufig zurückstellen müssen.

¹⁾ Wenn in dem α -Hydrokautschuk ein Gemenge von Kohlenwasserstoffen und zwar verschiedenartiger Kohlenstoffzahl vorliegt, so ist es wahrscheinlich, daß auch im Rohkautschuk selbst ein solches enthalten ist. Es sei darauf hingewiesen, daß hiermit zum ersten Male Beobachtungen gemacht worden sind, die nach dieser Richtung hin Anhaltspunkte geben können. Die Reduktion des Hydrochlorkautschuks mit Zinkstaub ist ein so sanfter chemischer Eingriff, daß dabei der Eintritt einer Veränderung des Kohlenstoffgerüsts des Kautschuks durch Abspaltung von Kohlenwasserstoffrestgruppen ausgeschlossen erscheint. Allerdings sind Umlagerungen im Sinne derjenigen des Pinen zum Campher oder intramolekulare Brückenbildungen, aber unter Erhaltung der Kohlenstoffzahl, nicht unmöglich.

Experimenteller Teil.

Je 100 g roher fein ausgewalzter Parakautschuk wurden in 4,5 kg Äthylenchlorid geworfen und etwa 5 Stunden auf der Maschine geschüttelt. Wenn der größte Teil gelöst ist, leitet man einen mäßig starken Strom Chlorwasserstoffgas bis zur Sättigung ein. Diese Lösung läßt man in der Kälte 8 Tage stehen. Darauf wird in kleinen Portionen etwa 90 bis 100 g Zinkstaub eingetragen und der Kolben mit der Reduktionsmasse unter Rückfluß in einem kochenden Wasserbade unter ständigem starken Umschütteln erhitzt. Nach einiger Zeit erscheint die vorher stark viscose Lösung plötzlich dünnflüssig, ein Zeichen für das Eintreten der Reduktion, die man noch durch einundhalbstündiges Kochen auf dem Wasserbade vervollständigt. Darauf wird noch heiß vom unverbrauchten Zinkstaub filtriert und das Filtrat in ein Porzellengefäß mit abnehmbarer Glashaube gegossen, um das Äthylenchlorid zuletzt bei der Temperatur des kochenden Wasserbades im Vakuum abdestillieren zu können. Der Rückstand läßt sich nun aus dem Porzellengefäß gut herausnehmen, er stellt eine bröcklige stark aufgeblähte Masse von rötlich oder auch gelblich weißer Farbe dar. Man behandelt sie zur Entfernung der Zinksalze mit Wasser und trocknet das Produkt nachher auf dem Wasserbade. Die Ausbeute beträgt in diesem Zustande etwa 70% des angewandten Kautschuks. Die Analyse ergibt einen Sauerstoffgehalt von 7,5 bis 8 proz. (Bei der Reduktion setzt sich am Boden des Kolbens eine gummiartige Masse mit Zinkstaub durchsetzt ab. Durch Kochen mit verdünnter Schwefelsäure läßt sich letzter entfernen. Die Untersuchung über dieses Produkt steht noch aus).

Die weitere Reinigung bzw. Abtrennung des sauerstoffhaltigen Anteils war schwierig. Es wurden eine Anzahl Lösungsmittel zum Umfällen und zur Extraktion angewandt und die erhaltenen Produkte einer genauen Kontrolle durch Elementaranalyse unterworfen. Diese Zahlenreihen sollen als zu umfangreich hier nicht mitgeteilt werden. Es hat sich schließlich herausgestellt, daß folgendes Verfahren vorläufig als das geeignetste zu empfehlen ist, um eine Substanz konstanter Zusammensetzung zu erhalten. Der Rohkörper wird in Benzol etwa im Verhältnis 10 : 200 aufgenommen, und zunächst 8 Tage stehen gelassen. Danach wird von einem dicken Bodensatz dekantiert, die Lösung durch Glaswolle filtriert und mit dem gleichen Volumen abs. Alkohol gefällt. Es scheidet sich ein weißer wenig gelblich gefärbter fadenziehender Stoff aus, während in der Flüssigkeit eine starke Emulsion nachbleibt. Bei längerem Stehen setzt sich diese allmählich ab und kann filtriert werden. Man sammelt Niederschlag und Filterrückstand durch Wiederaufnahme in Benzol, wiederholt den Prozeß des Fällens und trocknet schließlich im Vakuum. Man erhält so einen hellgelblichweißen sehr voluminösen Körper von etwas elastischeren Eigenschaften als das Rohprodukt, der sich indessen auch zu einem Pulver zerreiben läßt.

I.	0,0980 g i. V. bei 100° getr.	ergaben	0,1138 g H ₂ O,	0,3154 g CO ₂	
II.	0,1220 „	„	0,1407 „ „	0,3927 „ „	
III.	0,0870 „	„	0,0987 „ „	0,2770 „ „	
IV.	0,0509 „	„	0,0615 „ „	0,1616 „ „	
ber. für	C ₁₀ H ₁₆	C ₃₀ H ₅₂	C ₄₀ H ₇₀	C ₃₅ H ₆₂	C ₁₀ H ₁₈
	C 88,16	87,29	87,19	87,05	86,87
	H 11,84	12,71	12,81	12,95	13,13
		I	II	III	IV
	gef. C	87,80	87,81	86,86	86,61
	H	12,99	12,91	12,70	13,52

Analyse III und IV stammen von dem unter 0,1 bis 0,5 mm Druck über 240° destillierenden mit Essigester gewaschenen Präparat, siehe unten.

Löslichkeit: Der α -Hydrokautschuk wird in der Kälte spielend von Benzol, Chloroform, in der Wärme von Äthylenchlorid aufgenommen. Er ist schwer oder nicht löslich in Ligroin, Essigester, Eisessig, Alkohol, Äther, Azeton. Die Lösungen besitzen, trotzdem das Präparat selbst weiß ist, immer eine dunkle Färbung.

Verhalten beim Erhitzen: Der Körper schmilzt ungenau ähnlich wie reine Guttapercha zwischen 120 bis 130° im Kapillarrohr.

Versuch zur Bestimmung der Molekulargröße auf kryoskopischem Wege.

Beckmannscher Apparat:

Angewandt 0,3361 g Subst., 79,77 g Bromoform $\Delta = 0,001^\circ$ (Mittel von 12 Bestimm.), $K = 14,4$; gef. M. 6067; ber. für $(C_{35}H_{62})_{12} = 5792$
für $(C_{40}H_{70})_{11} = 6058$.

Da die Bromoformlösung des α Hydrokautschuk aber viscos ist, liegt augenscheinlich eine kolloidale Lösung vor, so daß auf diese Bestimmungen allein kein Gewicht gelegt werden darf. Indessen ist der α -Hydrokautschuk noch stark ungesättigter Natur, weshalb bei ihm gerade sowie beim Kautschuk selbst Polymerisation des getrockneten Präparats eingetreten sein könnte. Die Zersetzung beim Destillieren wäre dann auf eine Begleiterscheinung der Depolymerisation zurückzuführen.

Verhalten des Hydrokautschuks bei der Destillation im Hochvakuum.

Je 6 g des gereinigten α -Hydrokautschuk wurden im Hochvakuum destilliert, dabei ergaben sich folgende Erscheinungen:

Temp.	Vak.	
60—120°	0,04—0,09 mm	Schmelzen
120—130°	0,04—0,09 mm	Es bilden sich unter starker Zersetzung Nebel und kleine Öltropfenscheiden sich in der Vorlage ab: 1,1 g; Isopren ist darin nicht nachweisbar.
140—200°	0,08—0,16 mm	Es destilliert ein hellgelbes Öl, etwa 1,3 g
230—320°	0,16—0,5 mm	Zersetzungserscheinungen etwas geringer, es destilliert ein dickes, hellbraunes Öl, welches zu einer harten, spröden Masse erstarrt, 3,5 g.

Um das feste Produkt zu gewinnen, wurde der Inhalt der Vorlage nochmals der Rektifikation unterworfen. Zu dem Ende wurde zunächst alles bis 230° unter 0,12 mm abdestilliert und der feste Rückstand mit Essigester gewaschen, um ev. ölige Anteile davon zu trennen, da das feste Produkt sich darin langsamer löst. Das gewaschene feste Produkt wurde nun i. V. bei 100° sorgsam getrocknet, es ist dann spröde, zerreiblich wie das Ausgangsmaterial und zeigt ähnliche Löslichkeitsverhältnisse. Um seine Natur zu ergründen wurde es zunächst analysiert, die Resultate siehe vorher unter III und IV, dann ozonisiert, Analysen siehe nachher unter Ozonide II und III und mit Chlorwasserstoffgas behandelt, siehe unter Hydrohalogenide unter V und VI. Um den Siedepunkt genauer festzulegen wurde dieses Präparat nochmals im Hochvakuum destilliert. Dabei wurden folgende Beobachtungen gemacht:

Temp.	Vak.	
240—260°	0,06—0,08 mm	Unter Zersetzungserscheinungen destilliert etwa die Hälfte über; honiggelbe Masse, die in der Vorlage erstarrt,
Therm. g. im D.		ähnlich wie vorher, wenig dunkler gefärbte Masse
270—290°	0,05—0,12 mm	
Thermometerfaden a. d. Dampf		
Rückstand		geringfügige Menge eines schwarzbraunen Harzes.

Nach diesen Ergebnissen könnte man glauben, daß ein Gemenge von Kohlenwasserstoffen vorliegt, indessen ist dies auch nicht unbedingt nötig, da die Zersetzungerscheinungen an sich genügend Erklärung für den steigenden Siedepunkt bieten. In der Literatur findet man natürlich keine Angaben über Siedepunkte ähnlich konstituierter Körper. Nur das Phytan, bzw. das Phytadien von Willstätter¹⁾ kommt in etwas in Betracht, obwohl sie offene Kohlenwasserstoffe sind, aber verzweigte Kohlenstoffketten besitzen. Das Phytan $C_{20}H_{40}$ siedet bei 167 bis 168° unter 7,5 mm. Das Phytadien $C_{20}H_{38}$ siedet bei 186 bis 187° unter 13 mm. Wir schätzen ihre Siedepunktserniederung im Hochvakuum bei 0,15 auf etwa 50°. Es ist möglich, daß dann ein zyklischer Körper $C_{40}H_{70}$ unter gleichem Druck ungefähr 150° höher siedet. Leider ist das Verhalten des Carotins²⁾ aus Brennesseln $C_{40}H_{56}$ beim Erhitzen im Vakuum noch nicht beschrieben worden. Wenngleich dasselbe weniger Wasserstoff enthält, C 89,50 H 10,59, so hat Willstätter mit Recht darauf hingewiesen, daß es möglicherweise pflanzenphysiologisch zum Isopren und damit indirekt auch zum Kautschuk in Beziehungen zu bringen ist. Die Molekulargröße $C_{40}H_{64}$ für den unreduzierten Grundkohlenwasserstoff des natürlichen Kautschuks erhielt durch diese Überlegungen eine gewisse Stütze und das Carotin stünde vielleicht in ähnlichen Beziehungen zum Kautschukkohlenwasserstoff wie das Cymol zum Limonen.

Vergleichende Untersuchung über das Verhalten des Naturkautschuks im Hochvakuum.

Zum Vergleich haben wir den natürlichen Kautschuk (Para) genau unter den vorher beschriebenen Bedingungen im Hochvakuum 0,1 bis 0,5 mm destilliert. Auch hier erhält man unter starker Zersetzung (das Vak. schwankt fortwährend) mehrere Fraktionen. Uns interessierte nur die hochsiedende letzte Fraktion, welche über 220 bis 230° bei 0,8 mm übergeht. Sie bildet ein dickes braunes, nicht erstarrendes Öl und beträgt etwa 5 g bei 10 g angewandter Substanz. Die Ozonisierung dieser Fraktion (gelbes Öl)³⁾ ebenso wie seine Behandlung mit Chlorwasserstoff lieferte total verschiedene Produkte von mit denjenigen des destillierten α -Hydrokautschuk. Die Analyse des nach dem Einleiten von Chlorwasserstoff in die Chloroformlösung des Öles sofort mit Alkohol gefällten Hydrochlorids — eine plastische Masse — ergab bedeutende höhere Cl-Werte, nämlich Cl. 22, 99proz. und 23, 29proz. (vgl. S. 94).

Technische Versuche:

Walzfähigkeit und Plastizierbarkeit des α -Hydrokautschuks.

Für technische Versuche sind mehrere Kilogramm des α Hydrokautschuk dargestellt worden. Zunächst wurde seine Walzfähigkeit untersucht. Er läßt sich im rohen Zustande auf einer 80 bis 100° heißen Walze zu einem Fell auswalzen, dessen Ablösen aber unmöglich ist, weil die Masse bei einer Temperatur von 50 bis 60° brüchig wie Kolophonium wird. Er läßt sich mit Ölen zu plastischen Massen verarbeiten, die aber keine besonderen Vorzüge vor anderen ähnlichen Produkten aufweisen.

¹⁾ R. Willstätter, E. W. Mayer u. E. Huni, Liebigs Annalen d. Chemie **378**, 108 (1910).

²⁾ R. Willstätter u. W. Mieg, Liebigs Annalen d. Chemie **355**, 4 (1907).

³⁾ Liefert keine Pyrrolreaktion.

Elektrische Konstanten.

Herr Dr. Weiset vom Kabelwerk S. S. W. hatte die Güte für uns diese Konstanten zu bestimmen.

Oberflächenwiderstand = ∞

Durchschlagsfestigkeit (gemessen an einer Schichtdicke von 0,6 bis 0,7 mm)
für 1 mm Dicke = 15 000 bis 20 000 V

Widerstand pro cdm = $6,7 \cdot 10^{15} \Omega$

Die Isolationsfähigkeit kommt also der von Glas und Hartgummi nahe, wird aber von Glimmer übertroffen. Da der α -Hydrokautschuk in dieser Beziehung keine besonders vorteilhaften Eigenschaften besitzt, steht seine praktische Verwendung nicht in Frage.

Derivate des α -Hydrokautschuks.

Ozonide. Die Ozonisation ist sowohl in Chloroform wie in Essigester-Tetrachlorkohlenstofflösung vorgenommen worden, im letzten Falle dauert die Operation viel länger.

In Chloroform: 25 g wurden in Chloroform gelöst und solange ein kräftiger Ozonstrom eingeleitet, bis eine herausgenommene Probe Brom in Eisessig nicht mehr entfärbt. Die Lösung hat sich danach vollständig aufgehellt. Nach dem Abdunsten des Chloroform im Vakuum hinterbleibt eine stark aufgeblähte harte Masse von schwach gelblicher Farbe, 35 g Ausbeute. Das Ozonid zeigt die bekannten Ozonideigenschaften, ist nicht explosiv, sondern schäumt beim Erwärmen auf. In heißem Wasser löst es sich nicht, sondern scheint beim Kochen damit zu verharzen. Zur Analyse wurde es zunächst nicht weiter gereinigt.

I.	0,1386 g i. V. getr.	gaben	0,1112 g H ₂ O	und	0,3055 g CO ₂
II.	0,1164 „	„	0,0969 „	„	0,2595 „
III.	0,1818 „	„	0,1396 „	„	0,4118 „

	I	II	III
gef. C	60,13	60,82	61,80
H	8,97	9,32	8,59
O	30,90	29,86	29,61

Die Analysen II und III stammen von einem Ozonid, welches aus einem im Vakuum unter 0,1 bis 0,5 mm Druck über 240° siedenden Präparat durch Ozonisieren in Chloroform bereitet war.

Die Theorie verlangt für Ozonide der Formel

	C ₂₅ H ₄₄ O ₉	C ₃₀ H ₅₂ O ₁₂	C ₃₅ H ₆₂ O ₁₂	C ₄₀ H ₇₀ O ₁₅
C	61,44	59,57	62,28	60,72
H	9,08	8,67	9,26	8,93
O	29,48	31,76	28,46	30,35

Nach dem Siedepunkt des α -Hydrokautschuks i. V. dürfte nur eine der beiden letzten Formeln oder auch vielleicht beide in Frage kommen.

Der im Äther-Essigester verbleibende Teil des Ozonids kann durch Eindampfen im Vakuum gewonnen werden, er bildet nach dem Trocknen über Schwefelsäure eine sirupöse honiggelbe Masse und beträgt an Gewicht 20 proz. des Unlöslichen vorher

beschriebenen. Die direkte Analyse ergibt die in folgendem unter I und II angeführten Werte:

I.	0,2614 g i. V. getr.	gaben 0,1888 g H ₂ O und 0,5599 g CO ₂	
II.	0,2969 „	„	0,2074 „ „ „ 0,6361 „ „
III.	0,3570 „	„	0,2460 „ „ „ 0,7174 „ „
IV.	0,2849 „	„	0,1939 „ „ „ 0,5750 „ „

	I	II	III	IV
gef. C	58,43	58,45	54,81	55,06
H	8,08	7,81	7,71	7,61
O	33,49	33,74	37,48	37,33

[ber. für C ₃₅ H ₅₈ O ₁₈	C 54,81	H 7,62	O 37,87]
[ber. für C ₄₀ H ₆₆ O ₂₁	54,40	7,53	38,07].

Nimmt man das Produkt wieder in Essigester auf und behandelt es noch 5 Stunden mit Ozon weiter, isoliert das Ozonid wie vorher, so erhält man bei der Analyse die Werte in III und IV. Die Folgerung liegt nahe, daß ein Gemenge von Kohlenwasserstoffen vorliegt. Die Spaltungsversuche mit den Ozoniden haben noch zu keinem greifbaren Resultat geführt. Wir hoffen später darüber berichten zu können.

Verhalten des α -Hydrokautschuks und seines Destillates gegenüber Chlorwasserstoff.

Der α -Hydrokautschuk verhält sich dem natürlichen Kautschuk gegenüber insofern ähnlich, als er beim Absättigen mit Chlorwasserstoffgas in Chloroformlösung und Fällen mit Alkohol ein festes, bröckliches, graugelbes Produkt ergibt. Dasselbe unterscheidet sich aber wesentlich durch seinen viel geringeren Gehalt an Chlor von dem Dihydrochlorid des Naturkautschuks.

Für die Untersuchung wurden 5 g Hydrokautschuk in 100 ccm Chloroform gelöst und 4 Stunden lang Salzsäuregas eingeleitet. Die Lösung wurde in zwei gleiche Teile geteilt und der eine Teil sofort, der andere Teil nach 3 Tagen mit je 75 ccm abs. Alkohol gefällt.

1. Hydrochlorid sofort gefällt: grauweiße Masse schäumt bei 185°, schmilzt bei 195° (Dihydrochlorid des Parakautschuk 185°).

I.	0,0965 g i. V. getr. n. Dennst.	0,1041 g H ₂ O,	0,2811 g CO ₂ ,	0,0085 g Cl
II.	0,1875 „	0,1885 „ „	0,5405 „ „	0,0162 „ „

2. Hydrochlorid nach 3 Tagen gefällt: weißgraue harte Masse sintert bei 150°, schäumt bei 180°, schmilzt bei 190°.

III.	0,1068 g i. V. getr. n. Dennst.	0,1067 g H ₂ O,	0,3078 g CO ₂ ,	0,0098 g Cl
IV.	0,1134 „	0,1072 „ „	0,3217 „ „	0,0103 „ „

3. Im Vakuum destilliertes Präparat ebenso behandelt. Durch direkte Fällung schieden sich nur ganz geringe Mengen aus.

4. Im Vakuum destilliertes Präparat ebenso behandelt, nach 3 Tagen gefällt, grauweiße harte Masse, schmilzt schon bei 83°.

V.	0,1637 g	0,1580 g H ₂ O,	0,4785 g CO ₂ ,	0,0126 g Cl
VI.	0,1269 „	0,1206 „ „	0,3715 „ „	0,0100 „ Cl.

Zusammenstellung der aus den Analysen I—VI berechneten Werte

	I	II	III	IV	V	VI
C	79,47	78,64	78,63	77,39	79,74	79,87
H	12,07	11,21	11,18	10,58	10,80	10,63
Cl	8,80	8,64	9,18	9,08	7,70	7,88

Über die Rekristallisation bei kalt gerecktem Zinn.

Von

Georg Masing.

Mit 1 Tafel.

Mitteilung aus den Laboratorien des früheren Glühlampenwerkes der Siemens & Halske Aktien-Gesellschaft zu Charlottenburg.

Es ist eine altbekannte Tatsache, daß die Metalle bei der Verarbeitung in kaltem Zustande Eigenschaften annehmen, die sich von jenen eines aus der Schmelze erstarrten Metalles wesentlich unterscheiden. Durch die Kaltverarbeitung werden die Metalle härter, ihre Elastizitätsgrenze steigt, zuweilen sehr beträchtlich, und auch ihre übrigen technischen Eigenschaften werden weitgehend beeinflußt. Die Dichte der Metalle nimmt bei Verarbeitung etwas ab, ebenso ihre elektrische Leitfähigkeit. Auch ist es allgemein bekannt, daß dieser „harte“ Zustand der Metalle, wie man ihn wohl oft zu bezeichnen pflegt, bis zu einem gewissen Grade unbeständig ist und leicht teilweise oder ganz beseitigt werden kann. Hierzu genügt es, ein Metall kürzere oder längere Zeit auf eine bestimmte, für das Metall charakteristische Temperatur zu erhitzen. Die bei der Erhitzung eines harten Metalles eintretenden Vorgänge, die in einer Erweichung des Metalles, in dem allmählichen Herabsinken der durch die Verarbeitung erhöhten technischen Eigenschaftswerte bis nahe an die des geschmolzenen Metalles, wie auch in einer Vergrößerung der Dichte und der Leitfähigkeit bestehen, werden allgemein als Rekristallisationserscheinungen bezeichnet wegen der sie begleitenden charakteristischen Änderung der Struktur der Metalle, die mit fortschreitender Rekristallisation zu Gebilden eines charakteristischen und schön ausgebildeten Kristallgefüges führt. Bei einigen Metallen ist zur Einleitung der Rekristallisation eine Erhitzung überhaupt nicht notwendig. Für diese Metalle, die sich durch einen verhältnismäßig tiefen Schmelzpunkt auszeichnen, kann bereits die gewöhnliche Temperatur als eine verhältnismäßig „hohe“ betrachtet werden, so daß die Beweglichkeit der Metallteilchen auch bei gewöhnlicher Temperatur für die Rekristallisation ausreicht.

Diese Rekristallisationserscheinungen treten sowohl bei reinen Metallen als auch bei Legierungen auf und haben deshalb für sämtliche metallische Körper eine grundsätzliche Bedeutung. Allerdings verlaufen sie bei Legierungen oft wesentlich anders als bei reinen Metallen, was zum Beispiel durch eine Wechselwirkung von Rekristallisationserscheinungen mit chemischen Reaktionen in derartigen Legierungen erklärt werden kann.

Bereits aus den ganz kurz angedeuteten, bei der Rekristallisation stattfindenden Änderungen der Eigenschaften der Metalle geht hervor, daß sie sowohl eine Verbesserung wie auch eine Verschlechterung der technischen Eigenschaften bedeuten können. Handelt es sich darum, ein Metall in weichem Zustande zu erhalten, so wird man sich hierzu des Mittels der Rekristallisation bedienen müssen. Handelt

Additional material from *Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern*,
ISBN 978-3-662-22748-0, is available at <http://extras.springer.com>



es sich im Gegenteil darum, das Metall in hartem Zustande zu erhalten oder ihm eine besonders hohe Zerreißfestigkeit zu verleihen, so wird man sorgfältigst auf eine Vermeidung der Rekristallisation achten müssen. Die Rekristallisation bildet sowohl ein technisches Mittel als auch eine technische Gefahr. Ferner ist zu berücksichtigen, daß es meistens nicht möglich ist, durch Kaltverarbeitung allein ein Metall in einem vorgeschriebenen technischen Zustande zu erhalten. So ist zum Beispiel kalt verarbeitetes Kupfer oder Zink für die technische Verwendung zu hart. Um nun die technischen Eigenschaften rationell zu modifizieren, bedient man sich einer vorsichtigen Erhitzung, das heißt einer partiellen Rekristallisation, bei der das Metall etwa in einem verlangten kleinen Maße weicher wird, ohne daß z. B. seine Zerreißfestigkeit oder seine Biegefhigkeit in gefahrdrohender Weise sinkt. Ein schönes Beispiel hierfür bietet die Herstellung der technischen Leitungsdrähte aus Kupfer. Diese Leitungsdrähte müssen einerseits eine genügende Biegefhigkeit, also Weichheit besitzen und andererseits, insbesondere für Freileitungen, aus verständlichen Gründen eine möglichst hohe Zerreißfestigkeit. Diese beiden Bedingungen führen dazu, daß die Leitungsdrähte in der Elektrotechnik unter genau bestimmten und sorgfältig eingehaltenen Bedingungen, die je nach der Qualität des Kupfers etwa zwischen 100 und 300° liegen, zur beginnenden Rekristallisation gebracht werden. Die Rekristallisation bedeutet also in diesem Falle ein technisches Mittel und zugleich eine Gefahr. Dieses kleine Beispiel möge genügen, um die Bedeutung der Rekristallisation für die Elektrotechnik zu erläutern. Ein anderes bekanntes Beispiel aus der Kriegszeit bildet das Zink. Das Zink rekristallisiert bekanntlich schon bei gewöhnlicher Temperatur und hat die unangenehme Eigenschaft, hierbei brüchig zu werden. Diese und auch andere Begleiterscheinungen bei der Rekristallisation, die sich beim Zink besonders unangenehm bemerkbar machen, sind eine dauernde und nicht überwundene Schwierigkeit der Zinktechnik gewesen, ja man kann sagen, daß die Technik des Zinks an der Rekristallisation gescheitert ist.

Ein weiteres Beispiel aus der Technik, wo die Rekristallisation allerdings nicht in reiner Form, sondern in Verbindung von chemischen Vorgängen auftritt, bilden die Sthle und speziell die Werkzeugstähle. Ein Werkzeugstahl, etwa ein Bohrer oder ein Fräser, wird bei seiner Benutzung bekanntlich stark erhitzt. Sobald die Erhitzung einen gewissen Grad erreicht, treten nun die erwähnten chemischen Umsetzungen (Bildung der Perlit-Bestandteile aus Martensit) und gleichzeitig Rekristallisationsvorgänge ein, wodurch der Stahl seine Hrte verliert und außerordentlich schnell abgenutzt wird. Dieser Umstand verbietet es, bei gewöhnlichen Werkzeugstählen mit zu großer Arbeitsgeschwindigkeit zu arbeiten und hat das Problem der Schnelldrehsthle ins Leben gerufen, bei dem die betreffende Umsetzung und die sie begleitende Rekristallisation nicht eintritt. In diesem Falle bedeutet die Rekristallisation ebenso wie beim Zink eine technische Gefahr.

Man kann sagen, daß die Rekristallisation bei jedem Gebrauchsgegenstand aus Metall entweder bei seiner Herstellung in zweckmäßiger Weise ausgenutzt wird oder aber durch die mit ihr verbundene Gefahr seiner Verwendung Grenzen setzt. In diesem Sinne hat die Rekristallisation für die ganze Welt der verarbeiteten Metalle eine große und grundsätzliche Bedeutung. Trotzdem muß festgestellt werden, daß ihre Erkenntnis noch sehr wenig fortgeschritten ist und insbesondere sich in einem noch ausschließlich roh-empirischen Stadium befindet. Es stehen uns ausgedehnte Reihen von Beobachtungen zur Verfügung, die sowohl in der Technik als auch in der Wissen-

schaft ausgeführt worden sind. Die theoretische Deutung und Erklärung der Rekristallisation steckt aber doch noch so tief in den Kinderschuhen, daß es zur Zeit kaum möglich ist, von Beobachtungen in beschränktem Umfange weitere grundlegende Schlüsse zu ziehen. Man ist vielmehr im wesentlichen auch in seinen Voraussagen auf den Umfang des bereits unmittelbar experimentell festgestellten beschränkt. Das bedeutet selbstverständlich nicht nur theoretisch, sondern auch praktisch eine große Unbeholfenheit. Sobald ein neues technisches Problem uns zu neuen Methoden führt oder zu Arbeitsverfahren unter Bedingungen, die von den bisher bekannten oder üblichen abweichen, stößt man deshalb auch auf dem Gebiet der Rekristallisation immer wieder auf Überraschungen, die man nicht erwartet hat und zunächst nicht zu deuten weiß.

Die weiter unten beschriebenen Versuche sollten nun vor allen Dingen dem Zweck dienen, nach Möglichkeit über das Wesen der Rekristallisation einige systematische und grundsätzliche Aufklärungen zu geben. Deshalb erschien es zweckmäßig, zu Untersuchungen einerseits ein experimentell bequemes Metall zu wählen und andererseits ein solches, über welches schon möglichst viel systematisch gearbeitet worden war. Ein solches Metall ist nun das Zinn. Dank dem niedrigen Schmelzpunkt des Metalles verläuft seine Rekristallisation bereits bei verhältnismäßig tiefen Temperaturen von etwa 100° sehr schnell und führt zu Strukturen, die sehr schön und deutlich sind. Ferner ist im Jahre 1916 von Czochralsky¹⁾ eine umfangreiche theoretische und experimentelle Studie über Rekristallisation veröffentlicht worden, die speziell am Beispiel des Zinns durchgeführt wurde. Zum Studium bei der Rekristallisation wurde also zunächst das Zinn gewählt.

Die Versuche wurden in der Weise ausgeführt, daß reinstes käufliches Zinn von Kahlbaum vorgehämmer und dann in einer Kalenderwalze, das heißt in einem Walzenstuhl, dessen beide Walzen mit verschiedenen Geschwindigkeiten rotieren, zu Bändern von 0,1 bis 0,2 mm Stärke heruntergewalzt wurde. Auf diese Weise hatte man am Arbeitsgut von vornherein Planflächen, die nach der Ätzung ohne weiteres mikroskopischen Beobachtungen zugänglich wurden, ohne daß man das Metall hierzu zu schleifen oder zu polieren brauchte. Letzteres läßt sich bei Zinn, wie insbesondere Czochralsky gezeigt hat, ohne eine nennenswerte Störung der Struktur überhaupt nicht durchführen. Als Ätzmittel wurde die von Czochralsky empfohlene Lösung Kaliumchlorat in Salzsäure mit bestem Erfolge verwendet.

Um das Studium der Rekristallisation systematisch durchzuführen, wurden nun die gewalzten Bänder in Stücke zerschnitten, diese Stücke bei verschiedenen Temperaturen zur Rekristallisation gebracht und dann geätzt. Auf dem Photogramm Nr. 1 ist die Struktur eines so hergestellten Walzbandes sofort nach dem Kaltwalzen dargestellt. Über diese Struktur, die man als griesig und sehr deutlich bezeichnen kann, läßt sich nur das eine sagen, daß in ihr kein Kristallgefüge mit Sicherheit nachzuweisen ist. Die undeutlichen Unterschiede in der Helligkeit, die den Eindruck des Griesigen hervorrufen, sind vermutlich auf ungleichmäßige Ätzung und damit verbundene Beleuchtungsunterschiede (dieses Photogramm wurde ebenso wie alle folgenden bei schräger Beleuchtung aufgenommen) zurückzuführen. Wenn in diesem Metallband eine Kristallstruktur im üblichen Sinne überhaupt vorliegt, so ist ihr Gefüge jedenfalls sehr fein, da es bei der verhältnismäßig groben Art der Ätzung

¹⁾ Int. Zeitschr. f. Metallographie 1916, 1.

nicht mehr aufgedeckt werden kann. Im weiteren werden wir darauf noch zurückkommen.

Andere Stücke desselben Bandes wurden nun unter Bedingungen zur Rekristallisation gebracht, die in der folgenden Tabelle nebst den dazugehörigen Nummern der Photogramme zusammengestellt sind. Es sei erwähnt, daß die Rekristallisation jedesmal so ausgeführt wurde, daß das betreffende Stück sofort nach dem Walzen auf die betreffende Temperatur gebracht wurde, so daß eine vorangehende Rekristallisation bei tieferen Temperaturen und unter anderen Bedingungen im wesentlichen ausgeschlossen war.

Im Gegensatz zu den Feststellungen von Czochralsky muß darauf hingewiesen werden, daß das kalt gewalzte Zinn bereits bei gewöhnlicher Temperatur rekristallisiert. Das Photogramm Nr. 2 zeigt die Struktur eines solchen über Nacht rekristallisierten Walzbandes. Man sieht deutlich die einzelnen Kristallkörner, die sich gegenseitig durch verschiedene Beleuchtungsfarbe unterscheiden und der Gegensatz zum Photogramm Nr. 1 läßt keinen Zweifel über die stattgefundene weitgehende Änderung der Struktur des Metalles bestehen. Läßt man nun das Metall statt bei gewöhnlicher Temperatur bei 100° während weniger Sekunden oder auch während 2 Stunden rekristallisieren, so erhält man Strukturen, wie sie in den Photogrammen 3 und 4 dargestellt sind. Man findet die auffallende Tatsache, daß die durchschnittliche Größe der Körner des rekristallisierten Zinns dieselbe ist, ob das Metall nun längere Zeit bei gewöhnlicher Temperatur oder kürzere Zeit bei 100° rekristallisiert wurde, ja es zeigt sich, daß, wenn man die Rekristallisation während kurzer Zeit bei Temperaturen bis zu 150° durchführt, man Gebilde von derselben Korngröße erhält. Der Vergleich der Phot. 3 und 4 lehrt ferner, daß das bei 100° sehr schnell entstehende Korn bei längerer Erhitzung auf diese Temperatur gar nicht oder nur sehr langsam wächst. Dieses Wachstum läßt sich erst bei einer 4stündigen Erhitzung auf 100° wahrnehmen.

Während das Walzband, dem die bisher geschilderten Stücke entnommen worden waren, in einem Zuge hintereinander heruntergewalzt worden war, sind auf den Phot. 7 bis 17 Strukturen von rekristallisierten Zinnbändern dargestellt, die mitten in der Verarbeitung einer Zwischenerhitzung auf 100° bei den Stücken der Phot. 7 bis 11 und auf 180° bei den Stücken 12 bis 17 ausgesetzt wurden. Auf den Phot. 7 bis 11 (die Rekristallisationsbedingungen des Metalles sind jedesmal unter dem Phot. angegeben) findet man dieselbe oben geschilderte Regelmäßigkeit. Die griesige Struktur des gewalzten Materials verwandelt sich bei der Rekristallisation in eine körnige kristallinische Struktur, deren Feinheit von den Rekristallisationsbedingungen weitgehend unabhängig ist. Auf dem Phot. 12, das die Struktur des bei einer Stärke von 0,5 mm Durchmesser auf 180° erhitzten und dann heruntergewalzten Stückes darstellt, sieht man Reste der bei der Zwischenerhitzung entstandenen groben Kristalle mit ganz undeutlich verschwimmenden Übergängen. Auch in diesem Falle zeigt es sich, daß bei der Rekristallisation ziemlich unabhängig von den Bedingungen zunächst ein ganz bestimmtes Korn entsteht, das nur sehr langsam weiter wächst.

An dieser Serie mit einer besonders groben Struktur konnten die Anfangsstadien der Rekristallisation bei gewöhnlicher Temperatur genauer verfolgt werden. Wäre die Annahme, daß die große Undeutlichkeit der Struktur des frisch gewalzten Metalles auf eine zu große Feinheit der Kriställchen zurückzuführen ist, richtig, so müßte man erwarten, daß man bei der Rekristallisation zunächst die Entstehung kleinerer

Kristalle durch Vereinigung dieser kleinsten Elemente beobachten könnte, ehe die grobe Struktur des Phot. 13 entsteht. In Wirklichkeit ist nichts Derartiges beobachtet worden. Es läßt sich in den ersten Stadien der Rekristallisation keine feinere Struktur als die des Phot. 14 wahrnehmen. Die Rekristallisation verläuft vielmehr in der Weise, daß diese erste charakteristische Struktur allmählich wie aus dem Nebel hervortritt. Diese Struktur ist also tatsächlich die primäre, bei der Rekristallisation auftretende Kristallstruktur und die Struktur, der soeben gewalzten Bänder läßt sich nicht ohne weiteres als eine aus feinsten Kristallen bestehende auffassen.

Werden die Metallstücke einer Rekristallisation bei höheren Temperaturen oder während längerer Zeit (etwa 4 Stunden bei 100°) unterworfen, so findet ein weiteres Wachsen der Korngröße statt, das beim Zinn anscheinend durchaus kontinuierlich und normal verläuft. Wie bereits erwähnt, findet dieses Wachstum jedoch unvergleichlich langsamer statt als die Bildung des primären Korns, so daß man berechtigt ist, die Rekristallisation beim Zinn prinzipiell in zwei verschiedene Stufen zu gliedern, nämlich in die erste Stufe der Ausbildung des primären Korns und in die zweite Stufe, die man als eine Stufe der Kornvereinigung bezeichnen kann, indem man annimmt, daß das Ansteigen der Korngröße dadurch zustande kommt, daß die kleinen Kristallkörner sich durch Vereinigung mit ihren Nachbarn zu größeren umgestalten. Dieser letzte Vorgang ist es, der bei der Rekristallisation bisher vorwiegend beobachtet worden ist und in der Hauptsache die Grundlage für ihre theoretische Deutung gegeben hat.

Die Größe des primären Korns ist vom Grade und von der Art der vorangegangenen Kaltbearbeitung abhängig und nimmt mit diesen ab. Ebenso findet man allgemein das Gesetz von Czochralsky bestätigt, nach dem die Korngröße durch die Rekristallisationstemperatur und durch den Grad der Verarbeitung bestimmt wird in der Weise, daß die Korngröße mit steigender Temperatur zunimmt, mit steigendem Grad der Verarbeitung aber abnimmt.

Da der hier geschilderte Vorgang der Ausbildung des primären Korns eine erhebliche theoretische Bedeutung hat, so wäre es wichtig, festzustellen, ob er in dieser Weise auch bei anderen Metallen auftritt oder ob er aus irgendwelchen Gründen eine Eigentümlichkeit des kaltgewalzten Zinns allein bedeutet. Hierüber fehlt in der Literatur so gut wie jegliches Material, und die weitere Klärung dieser Fragen muß späteren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

Durch die geschilderten Vorgänge ist die Rekristallisation des kaltgewalzten Zinns nicht erschöpft. Man beobachtet vielmehr unter gewissen Umständen ganz auffallende und abnorme Bildungen von großen Kristallen, und zwar an denjenigen Stellen, die nach dem Walzen einer geringen anderweitigen Deformation unterworfen waren. Wenn man beispielsweise das Walzband mit einer Schere durchschneidet, also am Schneiderand einer kleinen Biegung unterwirft, oder wenn man das Band mit einem Bleistift oder mit einem härteren Gegenstand etwas durchdrückt, oder wenn man es allgemein knickt und rollt, so treten an den Stellen, wo diese Deformationen eingesetzt haben, bei nachfolgender Rekristallisation große Kristalle auf, die ihrem Gesamthabitus nach von den soeben geschilderten normalen Kristallen erheblich abweichen. Photogramm Nr. 18 gibt das Bild eines zusammengerollt gewesenen und bei 100° rekristallisierten Zinnstreifens wieder. Die großen Kristalle sieht man in

sehr schöner Entwicklung und ebenso, wie sie etwa bei a) unvermittelt in das feinkörnige Gefüge der normalen Rekristallisation übergehen.

Die Erscheinung eines abnorm großen Rekristallisationskorns ist an und für sich nicht neu und ist bisher entweder als Wirkung einer lokalen Deformation oder aber als einer kleinen Deformation schlechthin aufgefaßt worden. Aus unseren Versuchen folgt, daß diese Erklärungen ungenügend sind, daß das Wesentliche für das Auftreten der großen Körner in der Folge dieser verschiedenen Deformationen liegt. Eine nähere Beschreibung dessen, wie man sich den Unterschied dieser zwei Deformationen genau vorzustellen hat, ist zur Zeit nicht möglich, offenbar kommt es auf die Verschiedenheit der Spannungs- und Schubkräfteverteilung bei der Deformation an. Dieses wird uns besonders durch folgendes bestätigt:

Das vorsichtig heruntergewalzte Zinn erleidet während des Walzens eine große Reihe von geringen Deformationen. Trotzdem führt der letzte Walzgang, der ja auch eine kleine Deformation bedeutet, nicht zu einer abnormen Rekristallisation, weil eben diese letzte kleine Deformation sich von der Reihe der vorangegangenen Deformationen nicht unterscheidet. Ändert man jedoch die Verarbeitung in der Weise, daß man das Material vorhämmert und dann einer schwachen einmaligen Walzdeformation aussetzt, so tritt die abnorme grobe Kristallisation in charakteristischer Weise auf. Wenn man diejenige oft wiederholte Deformation, mittels der das Material verarbeitet wurde, als die primäre Deformation bezeichnet, und die zweite geringe Deformation, die zur abnormen Rekristallisation führt, als sekundäre, so kann man also sagen, daß die primäre und die sekundäre Deformation sich gegenseitig vertauschen können. Es kommt eben nicht auf den speziellen Charakter jeder dieser Deformationen an, sondern, wie gesagt, auf ihre Wechselbeziehungen.

Das auf dem Photogramm Nr. 18 dargestellte Walzband wurde vom unteren Ende zusammengerollt; so daß der untere Teil eine größere Biegedeformation und der obere Teil eine geringere erlitten hat. Man sieht, daß unten die Kristalle verhältnismäßig kleiner sind und daß sie mit abnehmender sekundärer Deformation ständig größer werden, bis der größte Kristall, der die ganze Breite des Walzbandes ausfüllt, ganz unvermittelt in das normale, feine Rekristallisationsgefüge bei a) übergeht. Oberhalb a) ist eben die Biegedeformation für die Entwicklung der abnormen Rekristallisation teilweise nicht genügend groß gewesen. Der unvermittelte Sprung von den feinen Kristallen der normalen Rekristallisation zu dem großen bei a) hat zunächst etwas Paradoxes an sich und ruft den Eindruck hervor, daß die Wirkung der sekundären Deformation bei Erreichung eines gewissen Grades unvermittelt von Null zu sehr erheblichen Werten hinaufsteigt. Bei näherer Untersuchung ergibt sich jedoch, daß dieser Sprung die sekundäre Folge eines anderen Vorganges ist.

Es zeigt sich nämlich, daß die Rekristallisations-Korngröße eines zusammengerollten Zinnbandes geringer wird, wenn man die Rekristallisation bei höherer Temperatur sich vollziehen läßt. Diese Beobachtung führt zum Schluß, daß die abnorm großen Kristalle sich auf dem Wege der Kernbildung entwickeln. Das heißt, daß sie nicht etwa durch ein Weiterwachsen von schon vorhandenen Kristallen sich bilden, sondern dadurch, daß an Stelle dieser Kristalle neue treten. Es ist nun verständlich, daß bei einer höheren Temperatur sich mehr Kerne bilden, da die Kernbildung mit steigender Temperatur und mit steigender Molekularbeweglichkeit stark zunehmen muß. Es ist aber auch damit verständlich, daß sich dann mehr Kristalle bilden und daß jeder einzelne Kristall kleiner ist.

Andererseits erscheint es durchaus plausibel, daß die Kernbildung mit zunehmendem Grade der sekundären Deformation zunimmt. Dementsprechend beobachtet man, wie erwähnt, daß bei höheren Deformationswerten das Korn geringer ist. An Stellen der geringen sekundären Deformation wird die Kernbildung äußerst träge erfolgen, es können sich also nur ganz vereinzelt Kristalle bilden, die eben deshalb sehr groß werden.

Wenn man die Grenzen zwischen dem letzten großen Kristall und dem noch unveränderten normalen Rekristallisationsgefüge bei a) genauer betrachtet, so fällt ihre unregelmäßige Gestalt auf und auch der Umstand, daß der große Kristall stellenweise eigenartig durchlöchert erscheint. Bei stärkerer Vergrößerung nimmt man wahr, daß diese Löcher in Wirklichkeit charakteristische Reste der primären Struktur sind, die von großen Kristallen noch nicht aufgezehrt worden sind. Das ganze bietet ein Bild, das sehr an das Wachsen einer beständigeren Kristallmodifikation innerhalb einer weniger beständigen, wie man es etwa bei Schwefel und zahlreichen anderen Stoffen beobachten kann, erinnert und gibt somit eine weitere indirekte Bestätigung der Auffassung dieser Rekristallisation als auf einer Kernbildung beruhend.

Auf die theoretische Deutung dieser Vorgänge kann hier nicht näher eingegangen werden, es sollen aber einige Worte über ihre praktische Bedeutung gesagt werden.

Nach der Schilderung der normalen Rekristallisation konnte man den Eindruck haben, daß, wenn man das Metall in einer gewissen Weise kalt verarbeitet hat und bei einer bestimmten Temperatur zur Rekristallisation bringt, man mit Sicherheit zu einem durch diese Bedingung bestimmten Kristallgefüge gelangen kann. Die soeben beschriebenen Beobachtungen zeigen jedoch, daß dieses Gefüge äußerst leicht und in einer schier unberechenbaren Weise gestört werden kann, wenn das Metall nach vollendeter Verarbeitung kleinen, vielleicht ungewollten oder technisch unvermeidlichen Deformationen ausgesetzt wird. Es ergibt sich hiermit ein technischer Faktor der Unsicherheit, der zuweilen sehr wohl beachtet werden muß und der bisher wegen Unkenntnis des Zusammenhanges selbstverständlich außer Auge gelassen worden ist.

So würde es z. B. bei einem Zinngegenstand, der während der Benutzung lediglich bis zu Temperaturen von 100° erhitzt wird, genügen, ihn vorher unvorsichtig zu biegen, zu knicken und wieder auszurichten u. dgl. mehr, um ganz abnorme und überraschende Rekristallisationsbilder zu erhalten.

Aber das schönste Beispiel für diesen Fall bietet uns die Praxis der Zinkleitungen. Es ist bekannt, daß die Zinkleitungen nach einer gewissen Benutzungszeit unvermittelt und ohne daß man den Grund dieser Erscheinung ermitteln konnte, brechen. Eine nähere Untersuchung hat ergeben, daß dieser Bruch die Folge von groben Kristallgebilden war. Es ist ferner beobachtet worden, daß besonders die Knick- und Biegestellen der Leitungen dieser Gefahr ausgesetzt waren.

Die beschriebenen Beobachtungen am Zinn geben uns den wahrscheinlichen Schlüssel zur Erklärung dieser Erscheinung. Das Zinn rekristallisiert ebenso wie das Zinn bereits bei gewöhnlicher Temperatur. Wenn man beim letzteren die grobe Kristallbildung experimentell zunächst nur bei höherer Temperatur beobachtet hat, so folgt daraus nicht, daß sie nicht auch bei normaler oder nur wenig erhöhter Temperatur eintreten kann. Sie wird dann nur vermutlich zu ihrer Entstehung und Entwicklung sehr viel größerer Zeiträume bedürfen. Dasselbe kann man wahrscheinlich auch beim Zink annehmen, und so stellt sich das Versagen der Zinkleitungen an

Biegestellen und ähnlichen als eine Folge der gewollten oder ungewollten sekundären Deformation dar.

Es ist ferner klar, daß die sekundäre Deformation noch viel mehr bei Metallgegenständen zu berücksichtigen ist, die ständig oder vorübergehend bei höheren Temperaturen gehalten werden müssen, bei denen das Metall nachweislich und bereits schnell rekristallisiert. Das gilt z. B. für alle Heizkörper aus Metallen, sei es für technische Öfen, sei es für häusliche Kochzwecke oder für etwas anderes. Es ist allgemein bekannt, daß der Heizdraht zur Bewicklung von elektrischen Öfen aus den verschiedensten Metallen hergestellt wird und dann nach längerer Benutzung brüchig wird und entzweigt. Bisher hat man dieses Brüchigwerden so gut wie immer auf chemische Wechselwirkungen mit der Umgebung, etwa mit einem Quarzrohr durch Aufnahme von Silizium oder dgl., zurückgeführt. Aus obigem ergibt sich jedoch, daß die Ursache der groben Kristallbildung und der Brüchigkeit keineswegs immer in chemischen Einwirkungen gesucht werden muß, sondern daß sie zuweilen in kleinen, ja unbemerkten und unbeabsichtigten mechanischen Beeinflussungen liegt.

Wärmedrosseln an stromdurchflossenen Einschmelzungen in Vakuumröhren.

Von

Robert Jaeger.

Mit 4 Textfiguren.

Mitteilung aus dem Physikalischen Laboratorium der M.-Abteilung, Wernerwerk,
Siemens & Halske A.-G.

Bei dem Bau von Vakuumröhren, in deren Innern eine bestimmte Leistung vernichtet wird, ist man vor die Aufgabe gestellt, die entstandene Wärme in geeigneter Weise durch Abstrahlung oder Wärmeleitung abzuführen, dabei aber die Einschmelzstellen der Elektroden möglichst vor Erwärmung zu schützen. Es kommen dabei hauptsächlich 3 verschiedene Ursachen in Frage, die diese Temperaturerhöhung der Einschmelzung verursachen. — Zunächst die Strahlung von heißeren Elektroden oder heißeren Stellen derselben Elektrode auf die Einschmelzungen, wie bei Elektronenrohren die Strahlung der Anode oder des Heizfadens, ferner die Wärmeleitung längs einer Elektrode von innen nach außen und schließlich bei stromdurchflossenen Einschmelzungen die Stromwärme.

Bei der folgenden Betrachtung sei angenommen, daß die Wärmestrahlung auf geeignete Weise von den Einschmelzungen ferngehalten sei, wie man es durch entsprechende Anordnung der Elektroden oder Abschirmung erreichen kann. Es bleibt dann im Vakuum nur die Wärmeleitung und die Stromwärme, da die äußere Wärmeleitung ebenfalls fortfällt. (Bzgl. der Wärmeleitung im Glase siehe weiter unten.)

Die Aufgabe reduziert sich für diesen Fall darauf, die Temperaturverteilung in einem stromdurchflossenen, auf stationärem Temperaturgefälle gehaltenen Leiter zu betrachten und dieses Gefälle so zu gestalten, daß die Einschmelzung möglichst wenig erwärmt wird. — Dazu ist es zunächst notwendig, Elektrizitäts- und Wärmeleitung getrennt zu betrachten.

Für die Beeinflussung der Wärmeleitung an sich kann man das bekannte Drosselprinzip verwenden, das in der Praxis in Einschnürungen des Leiters besteht und in besonders deutlicher Weise z. B. von Benedicks¹⁾ in seiner großen Arbeit über Thermoelektrizität und metallische Wärmeleitung benutzt wurde. Eine solche „Wärmedrossel“ staut den Wärmetransport und ergibt an der Einschnürungsstelle ein starkes Temperaturgefälle. Das Wesen einer solchen Einschnürung besteht also bei gleichen Endtemperaturen in einer Temperaturverteilung, die verschieden ist von der bei linearem Gefälle. Nicht ganz so einfach erscheinen zunächst die Verhältnisse, wenn man stromdurchflossene Leiter vor sich hat, wie es z. B. bei den

¹⁾ C. Benedicks, Ann. der Physik **55**, 1 (1918).

üblichen Glühkathodeneinschmelzungen der Fall ist. Die Stromwärme allein bewirkt eine Temperaturerhöhung, die bei gleichmäßigem Leiterquerschnitt ihr Maximum in der Mitte des Leiters hat. Diese Verteilung wird aber durch die Drosseln in einer zunächst noch nicht bekannten Weise verschoben. Wie man in solchen Fällen leicht einen Überblick über die Temperaturverteilung bei dem Zusammenwirken von Wärme durch Leitung und durch den elektrischen Strom gewinnen kann, soll der Zweck der folgenden Überlegungen sein.

Für Wärmeleitung und Elektrizitätsleitung gilt im stationären Zustand ebenso wie auch für die Diffusion und Hydrodynamik dieselbe Differentialgleichung von der Form $\Delta v = 0$ unter der Voraussetzung, daß die Konstante, durch welche die Stärke der Strömung bestimmt wird, von den Koordinaten unabhängig ist. In dem gleichen Bau der Differentialgleichung liegt die theoretische Begründung für die Tatsache, daß die Strömungslinien bei diesen Erscheinungen in gleicher Weise verlaufen, und daß man durch Formgebung die Wärmeleitung und Elektrizitätsleitung in gleicher Weise beeinflußt, soweit man sie getrennt betrachtet. Dabei muß jedoch darauf geachtet werden, daß diese Tatsache nur in beschränktem Maße gilt, weil bei der Betrachtung der Wärmeleitung die Abhängigkeit der Leitfähigkeit von den Koordinaten bzw. der Temperatur berücksichtigt werden muß.

Zur genaueren Betrachtung sei jetzt der oben erwähnte spezielle Fall angenommen, und zwar die Glühkathodeneinschmelzung eines Elektronenrohres. Man hat schematisch die Verhältnisse der Figur 1. In der Praxis ist der Haltestab H nur ein kurzes Stück eingeschmolzen und setzt sich dann beispielsweise als doppelte Platindurchführung D nach außen fort. Hier sei aber der Einfachheit halber angenommen, daß der Stab H mit gleichmäßigem Querschnitt bis nach außen geführt sei. Wenn LL nun vom Heizstrom durchflossen wird, so glüht der Faden Gl . Im stationären Zustand stellt sich eine gewisse Temperatur u_2 am Ende des Glühfadens ein, die vielleicht noch einige hundert Grad beträgt, und von dort einigermaßen gleichmäßig nach außen auf die Zimmertemperatur u_1 abfällt. Dabei sei die Ableitung durch das Glas zunächst nicht berücksichtigt. Die durch die äußere Wärmeleitung in Luft auftretende Abweichung bedingt nach den Untersuchungen von W. Jaeger und H. Diesselhorst nur eine Korrekptionsgröße, so daß die Ableitung in Glas hier auch zunächst vernachlässigt werden darf, zumal nur ein kurzes Stück des ganzen Leiters in Glas eingeschmolzen ist.

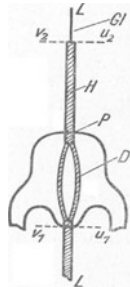


Fig. 1.

Ist die Strahlung von den auf hoher Temperatur (2300°) befindlichen Teilen des Glühfadens und vielleicht auch der Anode abgeschirmt, so läßt sich die Temperaturverteilung längs des Leiters theoretisch verfolgen. Als Ziel sei dabei nochmals ins Auge gefaßt, die Temperaturverteilung so günstig zu gestalten, daß die Temperatur der Einschmelzstelle P merklich herabgesetzt wird. Daneben ist zu untersuchen, in welcher Weise dadurch die Stromleitung verändert wird und wie sie auf die Temperaturverteilung einwirkt.

Eine ganz allgemeine Gleichung für die Temperaturfunktion in stromdurchflossenen Wärmeleitern stellte F. Kohlrausch¹⁾ auf. Bedeuten:

¹⁾ Vgl. F. Kohlrausch, Ann. d. Phys. **1**, 149 (1900) u. H. Diesselhorst, ebenda S. 313.

$$(1) \quad \begin{cases} u \text{ die Temperatur,} \\ v \text{ das Potential,} \\ \lambda \text{ das thermische} \\ \text{und } \kappa \text{ das elektrische Leitvermögen,} \end{cases}$$

so gelten im stationären Zustand die Gleichungen¹⁾

$$(2) \quad \kappa \nabla^2 v + \nabla(\lambda \nabla u) = 0 \quad \text{und}$$

$$(3) \quad \nabla(\kappa \nabla v) = 0.$$

Das Zeichen ∇ bedeutet den Gradienten des betr. Skalars.

Gleichung (2) besagt, daß die Summe der Stromwärme $\kappa \nabla^2 v$ und der durch Leitung zugeführten Wärme $\nabla(\lambda \nabla u)$ stets gleich Null sein muß; Gleichung (3) stellt die Kontinuitätsgleichung der Elektrizität dar. Für $v = 0$ und konstante κ und λ erhält man die Gleichung $\triangle v = 0$. Ausgehend von den beiden Grundgleichungen (2) und (3) gelangte F. Kohlrausch zu dem allgemeinen Ausdruck:

$$(4) \quad \int \frac{\lambda}{\kappa} du + \frac{1}{2} v^2 + Av + D = 0,$$

in dem A und D Konstanten bedeuten.

Aus dieser Formel ist ersichtlich, daß für gegebenes Potential die Temperaturfunktion nur von dem Verhältnis der Leitfähigkeiten $\frac{\kappa}{\lambda}$ abhängt. Dieser Umstand kann zunächst den Gedanken nahelegen, die eingangs skizzierte Aufgabe dadurch zu lösen, daß man durch die Wahl des Materials eine gute Elektrizitätsleitung mit schlechter Wärmeleitung verbindet. Bis jetzt ist jedoch kein derartiges Material bekannt.

Die größten Abweichungen vom Wiedemann-Franz'schen Gesetz zeigen einige Legierungen wie Manganin und Konstantan. Im Vergleich zu Kupfer (Handelsware) und Nickel sind die Zahlen nach W. Jaeger und H. Diesselhorst²⁾ folgende:

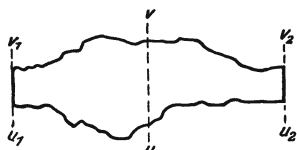


Fig. 2.

	$\frac{\lambda}{\kappa}$ bei 18° C
Kupfer	$676 \cdot 10^{-8}$
Nickel	$699 \cdot 10^{-8}$
Konstantan	$1106 \cdot 10^{-8}$
Manganin	$914 \cdot 10^{-8}$

Sie zeigen, daß die Unterschiede zu gering sind, um einen praktischen Nutzen daraus zu ziehen, außerdem liegt der Sinn der Verschiedenheit so, daß die Legierungen die Wärme besser leiten als die Elektrizität.

W. Jaeger und H. Diesselhorst³⁾ haben die Formel für den Fall, daß sich die Enden des Leiters auf verschiedenen Temperaturen befinden, weiterentwickelt und die Konstanten A und D durch die Grenzwerte bestimmt. Setzt man (s. Fig. 2)

$$(5a) \quad V = \frac{v_1 - v_2}{2}, \quad (5b) \quad \delta = \frac{v_1 + v_2}{2} - v, \quad (5c) \quad u' = \frac{u_1 + u_2}{2},$$

¹⁾ Gött. Nachr. 184, 83; Pogg. Ann. 156, 616 (1875); Zeitschr. f. Instr.-Kunde 18, 139 (1898).

²⁾ W. Jaeger u. H. Diesselhorst, Wiss. Abh. d. P. T. R. 3, 424.

³⁾ W. Jaeger u. H. Diesselhorst, l. c. S. 424.

so wird

$$(6) \quad \int_{u'}^u \frac{\lambda}{\kappa} du = \frac{1}{2} (V^2 - \delta^2) - \frac{1}{2} \frac{\delta}{V} \int_{u_2}^{u_1} \frac{\lambda}{\kappa} du + \frac{1}{2} \int_{u'}^{u_1} \frac{\lambda}{\kappa} du + \frac{1}{2} \int_{u'}^{u_2} \frac{\lambda}{\kappa} du.$$

Für den stromlosen Zustand wird $v = 0$ und δ und V einzeln $= 0$, d. h. das erste Glied rechts fällt fort. Da sich δ im selben Verhältnis ändert wie V , bleibt $\frac{\delta}{V}$ eine konstante Größe auch für $\delta = V = 0$. Diese Größe wird im allgemeinen wenig verschieden sein von derjenigen bei stromdurchflossenem Leiter, da die durch die zusätzliche Stromerwärmung eintretende Änderung von V bzw. δ nur gering ist.

Für den stromlosen Zustand lautet die Formel also

$$(7) \quad \int_{u'}^u \frac{\lambda}{\kappa} du = - \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{V} \right)_0 \int_{u_2}^{u_1} \frac{\lambda}{\kappa} du + \frac{1}{2} \int_{u'}^{u_1} \frac{\lambda}{\kappa} du + \frac{1}{2} \int_{u'}^{u_2} \frac{\lambda}{\kappa} du.$$

Hierüber lagert sich bei Stromdurchgang das Glied

$$(8) \quad \frac{1}{2} (V^2 - \delta^2).$$

Sehr einfach gestaltet sich der Ausdruck für den Fall, daß man in dem betrachteten Temperaturintervall $\frac{\lambda}{\kappa}$ als konstant ansehen kann. Man erhält

$$(9) \quad u = u' + \underbrace{\frac{\delta}{V} \frac{u_2 - u_1}{2}}_I + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\kappa}{\lambda} (V^2 - \delta^2)}_{II}.$$

Diese Gleichung hat den großen Vorzug, daß sie für jeden beliebig gestalteten Körper gültig ist.

Term I stellt die Erwärmung durch die Wärmeleitung allein, Term II die Erwärmung infolge des Stromdurchganges allein dar.

Da u' , V , $\frac{u_2 - u_1}{2}$ und $\frac{v_1 + v_2}{2}$ Konstanten sind, läßt sich die Verteilung im stromlosen Zustand durch die Gleichung

$$(10) \quad u = a + b v$$

ausdrücken, d. h. die Temperaturverteilung im stromlosen Zustand wird durch die Potentialverteilung im gleichtemperierten Zustand vollkommen abgebildet. Dasselbe Folgerung ergibt sich wie oben angedeutet auch daraus, daß für konstantes λ die Differentialgleichungen für Temperatur und Potential die gleichen sind.

Man kann auf diese Weise den Temperaturgradienten eines Leiters durch die Berechnung seines Potentials oder seiner Widerstandsverteilung auffinden.

Die durch Stromdurchgang allein hervorgerufene Temperaturverteilung hat als Funktion des Potentials die durch Gleichung (8) ausgedrückte Parabelform. (Vgl. Fig. 4). Durch Abtragen der an den betreffenden Stellen des Leiters befindlichen Potentiale ergibt sich dann ohne weiteres die durch den Strom bedingte, der übrigen Temperatur überlagerte Erwärmung in bezug auf die Koordinaten des Körpers.

Beispiel.

Für ein Beispiel ist dies in folgendem angeführt. Gegeben sei ein Stab von zunächst beliebigem Halbmesser D_1 (s. Fig. 3A), der an 3 Stellen Einschnitte besitzt,

die den Halbmesser auf den vierten Teil D_2 reduzieren (Fig. 3). Nimmt man nun an, daß bei a das freie Ende, also Zimmertemperatur = 20° , und bei d der Anfang des Glühfadens sei, wo eine Temperatur von etwa 400° herrsche, so ist der Temperaturabfall längs des Leiters, abgesehen vom Strom, der in Fig. 3B durch die ausgezogene Linie angegebene. Der lineare Abfall für gleichmäßigen Halbmesser D_1 ist durch die gestrichelte Linie dargestellt. An dem Leiterstück ad , das in den praktischen Fällen

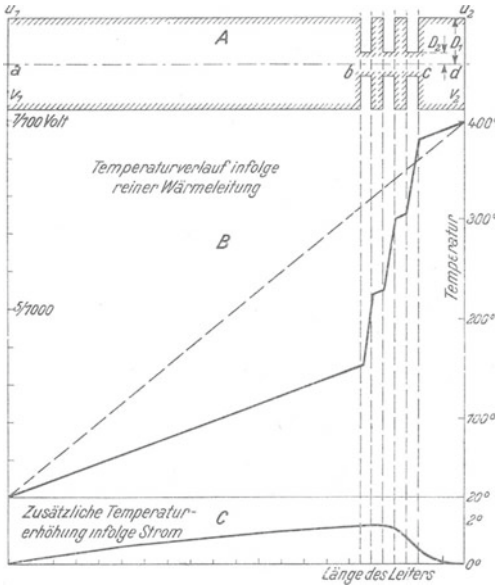


Fig. 3.

einen sehr geringen Widerstand besitzt, möge $\frac{1}{100}$ Volt liegen; mit Hilfe dieser Angabe ergibt sich aus dem Term II der Gleichung (9) die Temperaturverteilung längs des Stabes. Man darf nicht vergessen, daß diese Formel nur für konstantes $\frac{\kappa}{\lambda}$ gilt; im anderen Fall müßte man den ganz allgemeinen Ausdruck (6) benutzen. Zunächst werde jedoch ein konstanter Wert angenommen. Nach den Tabellen bei Jaeger und Diesselhorst

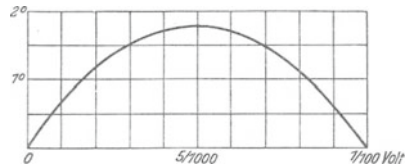


Fig. 4.

ist der Temperaturkoeffizient des Leitverhältnisses von Kupfer etwa 4% , das mittlere Leitverhältnis werde zu

$$\frac{\kappa}{\lambda} = \frac{1}{700} \cdot 10^8 = 1,43 \cdot 10^5$$

angesetzt. Es wird dann

$$\frac{1}{2} \frac{\kappa}{\lambda} (V^2 - \delta^2) = 0,71 \cdot 10^5 v \left(\frac{1}{100} - v \right),$$

wenn noch $v_1 = 0$ gesetzt wird.

Dieser Ausdruck hat für $v = \frac{1}{200}$ sein Maximum, und die durch den Strom hervorgerufene Temperaturerhöhung beträgt demnach an der Stelle des mittleren Potentials $1,8^\circ$ oder rund 2° . Der Verlauf der Abhängigkeit der Stromwärme vom Potential ist in Fig. 4 wiedergegeben. Man sieht daraus, daß bei kleinen Spannungsdifferenzen am Leiter die durch den Strom hervorgerufene Temperaturerhöhung keinen nennenswerten Betrag annimmt; daraus geht ferner hervor, daß die für verschiedenes $\frac{\kappa}{\lambda}$ anzubringende Korrektur durchaus nicht ins Gewicht fällt und man für Überschlagsrechnungen in ähnlichen Fällen tatsächlich immer $\frac{\kappa}{\lambda}$ als konstant annehmen darf. Der Term II der Gleichung (9) enthält den Querschnitt des Drahtes überhaupt nicht, doch ist der Widerstand in der anfangs erhaltenen Kurve des Temperaturverlaufes bzw. des Spannungsverlaufes implizite enthalten.

Diese letztere benutzt man dazu, um die längs des Stabes durch die Stromwärme auftretende Temperaturerhöhung zu ermitteln. Für praktische Fälle erreicht man das am leichtesten, indem man die aus Fig. 4 ersichtlichen Spannungen abgreift und für sie die entsprechende Temperaturerhöhung in Fig. 3 einträgt. Die dadurch eintretende Verteilung der durch Stromwärme bedingten Temperaturerhöhung gibt Fig. 3C wieder. Dann fällt, wie zu erwarten war, die durch den Strom hervorgerufene Erwärmung an die Einschnürungsstelle.

Für den Fall, daß die Einschnürung zwischen b und c nicht in verschiedenen Stufen, sondern durchweg mit dem Halbmesser D_2 ausgeführt ist, erhält man zwischen ab und cd ein langsames Gefälle, während es bei bc steiler verläuft. Die Stromwärme liegt dann etwas höher, aber die an der Einschmelzstelle liegenden Teile des Fadens erhalten eine noch geringere Temperatur. In dem hier gewählten Beispiel findet, wie sich durch Vergleich der gestrichelten mit der ausgezogenen Linie in Fig. 3B ergibt, auf der Strecke ab eine Temperaturerniedrigung etwa auf die Hälfte statt. Wählt man die Drossel länger, so wird man leicht entscheiden können, welchen Kompromiß zwischen Erniedrigung der Temperatur durch Leitung und Erhöhung der Temperatur durch Strom man zu schließen hat.

Zusammenfassung.

An Hand einer von F. Kohlrausch aufgestellten und von W. Jaeger und H. Diesselhorst für den Fall verschiedener Endtemperatur auf praktisch brauchbare Form gebrachten Formel wird gezeigt, wie man bei irgendwie gestalteten stromdurchflossenen Leitern, deren Enden sich auf bestimmter Temperaturdifferenz befinden, die Temperaturverteilung finden kann.

Zunächst erhält man durch die Bestimmung der Potentialverteilung bzw. Widerstandsverteilung des Leiters ohne weiteres die Temperaturverteilung ohne Strom. Der absolute Widerstand des Leiters ist für die Betrachtungen gleichgültig. Er wird in dem beschriebenen Beispiel so gewählt, daß die für die Erhitzung des Wolframfadens nötige Stromstärke ohne merkliche Erwärmung hindurchgeführt werden kann. Sodann bestimmt man aus dem Glied

$$\frac{1}{2} \frac{\alpha}{\lambda} (V^2 - \delta^2)$$

der Kohlrauschschen Formel die Abhängigkeit der Temperaturerhöhung durch den Strom vom elektrischen Potential allein und kann dann durch Zuordnung des betreffenden Potentials zu den verschiedenen Stellen des Leiters die Temperaturverteilung durch den Strom ermitteln. Beide Kurven ergeben durch Überlagerung die gesuchte Temperaturverteilung. Für kleinere Potentiale fällt die Stromwärme dabei gar nicht ins Gewicht, so daß man in Vakuumröhren Einschnürungen an stromdurchflossenen Einschmelzungen, wofür insbesondere Glühkathodeneinschmelzungen in Frage kommen, mit Vorteil als Wärmedrosseln verwenden kann.

Röhrenvoltmeter und Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung.

Von

W. Schottky,

Mit 2 Textfiguren.

(Mitteilung aus dem Laboratorium K der Siemens & Halske A.-G., Wernerwerk.)

§ 1. Das Problem und der experimentelle Befund.

Die Strom-Spannungskennlinie der Glühkathodenrohre mit und ohne Gitter ist bekanntlich keine gerade Linie, sondern eine doppelt gekrümmte Kurve, die bei genügend kleinen und genügend großen Spannungswerten parallel der Spannungsachse verläuft. In ihren gekrümmten Teilen ist eine solche Kennlinie zur Messung von Wechselspannungen durch Gleichstromausschläge brauchbar, da bei gleichen Spannungsänderungen die Stromänderungen beispielsweise in der + Richtung größer sind als in der — Richtung und dadurch der zeitliche Mittelwert des von der Anode abfließenden Stromes ein anderer wird als ohne Wechselstromerregung. Als Meßinstrumente sind Glühkathodenrohre in Richtverstärkerschaltung¹⁾ im Wernerwerk seit Anfang 1917 im Gebrauch; in direkter Schaltung sind sie besonders von H. Hohage²⁾ untersucht worden, der dabei vorzugsweise hochempfindliche Gleichstrominstrumente (Spiegelgalvanometer) benutzt.

Man wird nun zunächst glauben, daß im vorliegenden Falle, wie sonst immer, die Empfindlichkeit der Anordnung desto größer wird, daß also desto kleinere Wechselspannungen noch gut meßbar sind, je empfindlicher das benutzte Meßinstrument ist. Die Erfahrung spricht aber gegen diese Annahme. Man findet nämlich, daß man bei gegebenem Meßinstrument immer nur dann eine brauchbare Empfindlichkeit erhält, wenn man die Hilfsspannungen so wählt, daß das Instrument bereits ohne Wechselstromerregung einen Dauerausschlag zeigt; im Bereich der kleinen Stromwerte ist die Empfindlichkeit desto größer, je größer der Dauerausschlag ist. Wählt man nun ein empfindlicheres Meßinstrument, so muß man, um überhaupt noch darauf ablesen zu können, den Dauerausschlag verkleinern³⁾, damit setzt man aber wieder die Empfindlichkeit der Rohre herab, und zwar anscheinend um ebensoviele, als man die Empfindlichkeit des Meßinstrumentes vergrößert hat.

Diese Tatsachen, die jedem geläufig sind, der einmal mit Röhrenvoltmetern gearbeitet hat, veranlaßte mich, bei gemeinsam mit Herrn Clausen im Lab. K. des

¹⁾ Vgl. z. B. Höpfner, Über Wechselstrommessungen. Telegr.- u. Fernsprechtechnik 1919, S. 128.

²⁾ H. Hohage, „Helios“ 29. Juni 1919.

³⁾ Auf Kompensationsmethoden, die in Zukunft vielleicht eine nicht unbedeutende Rolle spielen werden, soll hier nicht eingegangen, sondern stets der an sich wichtigste Fall der einfachsten Meßanordnung zugrunde gelegt werden.

Wernerwerkes angestellten Versuchen zur Konstruktion empfindlichster Röhrenvoltmeter, den Wechselstromausschlag bei gegebener Wechselspannung einmal als Funktion des Ruhestromes aufzutragen. Das Ergebnis des Versuches zeigt die Kurve Fig. 1, die mit einem zylindrischen Rohr EVE 173 in der Hohageschen Schaltung und mit der von Hohage benutzten Gitterspannung $v = 0$ aufgenommen worden ist.

Als Abszissen sind die Werte der zur Anode fließenden Ruheströme i (hier zwischen $3 \cdot 10^{-7}$ und $17 \cdot 10^{-7}$ Amp. variierend), als Ordinaten die Gleichstromänderungen Δi bei Anlegung einer konstanten Wechselspannung (Effektivwert 0,2 Volt) aufgetragen. Man erkennt, daß mit abnehmenden i -Werten diese Kurve nicht nur in eine gerade Linie übergeht, sondern, daß diese gerade Linie auch ziemlich genau auf den Nullpunkt des Diagramms zuläuft, so daß man sagen kann, daß das Ver-

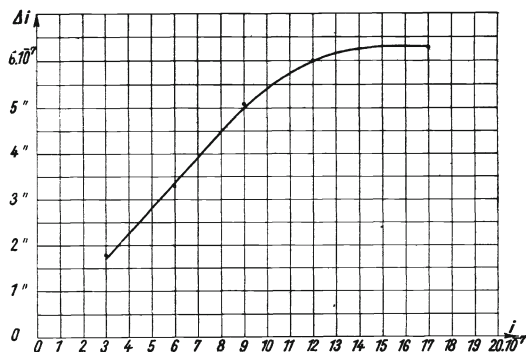


Fig. 1.

hältnis $\frac{\Delta i}{i}$ mit abnehmendem i einen konstanten Grenzwert erreicht.

Damit ist eine exaktere Bestätigung der obigen ungefähren Feststellung gegeben, daß „wegen der notwendigen Reduktion des Nullausschlages die Empfindlichkeit der Rohre bei Vergrößerung der Instrumentempfindlichkeit ebensoviel abnimmt, wie die Empfindlichkeit des Instrumentes zunimmt“. Denn wenn durch den Strom i ein Ausschlag von einer bestimmten Anzahl, sagen wir a Skalenteile, auf dem Meßinstrument hervorgerufen wird, und durch die Wechselspannung wird dieser Ausschlag um Δa vergrößert, so bleiben die Verhältnisse genau dieselben, wenn die Empfindlichkeit des Instrumentes verzehnfacht wird und i soweit reduziert, daß wieder a Skalenteile Nullausschlag vorhanden sind. Denn $\frac{\Delta a}{a}$ ist durch das Verhältnis $\frac{\Delta i}{i}$ gegeben, und dieses Verhältnis ist, wie aus der konstanten Neigung der Kurve zu sehen, unterhalb einer gewissen Grenze von i unabhängig.

§ 2. Aufstellung des Integralgesetzes und Ermittlung der Fadentemperatur aus der Aufladungskurve.

Diese Feststellung hat meßtechnisch die Bedeutung, daß man nicht unnötig empfindliche Meßinstrumente verwenden wird, sondern die Empfindlichkeit nur eben so weit steigern wird, daß bei einem angemessenen Ausschlag (Hohage schlägt etwa 10° vor) und dem dazugehörigen Stromwert i das Verhältnis $\frac{\Delta i}{i}$ ungefähr seinen Grenzwert erreicht. Mit dieser Feststellung wird man sich jedoch nicht begnügen, sondern weiter fragen, welches einfache Naturgesetz sich hinter der gefundenen Gesetzmäßigkeit verbirgt, und ferner, wie der Maximal- und Grenzwert von $\frac{\Delta i}{i}$ bei kleinen i -Werten von der Art der Rohre, dem Heizstrom usw. abhängt, da ja alles darauf ankommt, dieses Verhältnis möglichst groß zu machen.

Zur Deutung des Gesetzes $\left(\frac{\Delta i}{i}\right)_{\lim i=0} = C$ (C eine Konstante) fragen wir zunächst nach der Abhängigkeit von Δi von den Eigenschaften der Strom-Spannungskennlinie i, e , wobei e die Spannung zwischen Kathode und der den Strom i steuernden Elektrode bedeutet. (Im Hohageschen Fall ist dies die Anode selbst.)

Dann gilt:

$$\Delta i = \frac{\partial i}{\partial e} \Delta e + \frac{\partial^2 i}{\partial e^2} \frac{\Delta e^2}{2} + \frac{\partial^3 i}{\partial e^3} \frac{\Delta e^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \quad (1)$$

Voraussetzung ist hierbei noch, daß keine der anderen in der Röhre vorhandenen Elektroden Spannungsschwankungen aufweisen, und wenn man unter Δe die E. M. K. der angelegten Wechselspannung verstehen will, und diese ist, wie bei Hohage, im Meßkreis selbst angelegt, so ist ferner noch zu fordern, daß der innere Widerstand der Röhre im Meßkreis groß gegen den Widerstand des angelegten Meßinstrumentes (und zwar für Gleich- und Wechselstrom) ist, da sonst die Klemmspannung an der Röhre sich nicht mit der E. M. K. des Stromkreises decken würde. Beide Voraussetzungen sind aber bei den benutzten Schaltungen praktisch stets erfüllt.

Hat Δe den Charakter einer reinen Wechselspannung, $\Delta e = \mathfrak{C} \cdot \sin \omega t$, so ist im zeitlichen Mittel $\Delta e = 0$, und wenn die Amplituden \mathfrak{C} so klein sind, daß die höheren Glieder vernachlässigt werden können, so reduziert sich die Gleichung (1) auf

$$\overline{\Delta i} = \frac{\partial^2 i}{\partial e^2} \cdot \frac{\overline{\Delta e^2}}{2} = \frac{\partial^2 i}{\partial e^2} \cdot \mathfrak{C}^2 \cdot \frac{\overline{\sin^2 \omega t}}{2} = \frac{\partial^2 i}{\partial e^2} \cdot \frac{\mathfrak{C}^2}{4} \quad (2)$$

Das bei konstanter Wechselspannung \mathfrak{C} gefundene Gesetz $\lim_{i \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{i} = \text{const}$ geht also über in

$$\lim_{i \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial^2 i}{\partial e^2}}{i} = \alpha^2 \quad (3)$$

wobei α^2 eine (positive) Konstante ist, die mit der oben eingeführten Konstante C durch die Gleichung zusammenhängt.

$$\alpha^2 = \frac{4C}{\mathfrak{C}^2} \quad (4)$$

Nun ist bei den betrachteten Kurven die Größe e die einzige unabhängige Veränderliche, alle anderen Spannungen bleiben ja konstant. Wir können also statt $\frac{\partial^2 i}{\partial e^2}$ auch $\frac{d^2 i}{d e^2}$ schreiben und erhalten für kleine Werte von i die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 i}{d e^2} = \alpha^2 i.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist:

$$i = A \cdot e^{\alpha e} + B e^{-\alpha e} + \text{const}.$$

Verstehen wir nun unter α die positive Wurzel von α^2 und berücksichtigen, daß in der wirklichen Stromspannungskurve $i = 0$ ist für $e = -\infty$, so müssen offenbar die Glieder $B e^{-\alpha e} + \text{const}$ fortfallen, und die Kurve wird für kleine Stromwerte durch eine Funktion

$$i = A \cdot e^{\alpha e} \quad (5)$$

dargestellt.

Das ist nun dieselbe Funktion, die ich für zylindrische Elektrodenanordnungen mit genügend kleinem Drahradius für das Gebiet von Stromwerten, die gegen den Sättigungsstrom genügend klein sind, in einer 1914 erschienenen Abhandlung¹⁾ theoretisch abgeleitet habe. Voraussetzung ist hierbei, daß die Elektronen aus dem Glühdraht mit der konstanten Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung austreten, und es läßt sich dann die Konstante α aus der absoluten Temperatur T des Glühdrahtes, dem absoluten Betrag der Elementarladung ε eines Elektrons und der Boltzmannschen Konstanten κ vorausberechnen:

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{K \cdot T} \quad (6)$$

(a. a. O. S. 1016). Wird die Spannung e in Volt gerechnet, ε in elektrost. Einheiten, so kommt noch der Faktor $\frac{1}{300}$ hinzu, und mit Einsetzung der Werte $\varepsilon = 4,78 \cdot 10^{-10}$ elektrost. Einheiten, $\kappa = 1,37 \cdot 10^{-16}$ ergibt sich:

$$\alpha [\text{Volt}^{-1}] = \frac{11\,600}{T}. \quad (7)$$

Umgekehrt kann man aus dem gemessenen Wert von α T berechnen:

$$T = \frac{11\,600}{\alpha}.$$

Wir wollen nun in Fig. 1 den Grenzwert von $\frac{\overline{A}i}{i}$ für kleine i -Werte bestimmen, indem wir, freilich nicht ganz genau, als Grenzwert C von $\frac{\overline{A}i}{i}$ das Verhältnis von $\overline{A}i:i$ für den kleinsten gemessenen i -Wert ansehen. Wir finden: $C = 0,50$. Berücksichtigen wir nun, daß in $\alpha^2 = \frac{4C}{\mathcal{E}^2} \mathcal{E}^2 = 2 \cdot 0,2^2 = 0,08$ Volt ist, so erhalten wir aus Gleichung (4)

$$\alpha^2 = \frac{4 \cdot 0,5}{0,08} = 25, \text{ also } \alpha = 5,$$

$$T = \frac{11\,600}{5} = 2320^\circ \text{ absolut.}$$

Wir erhalten also eine ziemlich richtige Bestimmung der Fadentemperatur — der Faden war „normal“ geheizt — und damit einen neuen Beleg dafür, daß Teilchen von einer Elementarladung von ungefähr $4,78 \cdot 10^{-10}$ elektrost. Einheiten den Glühdraht mit Wärmegeschwindigkeit verlassen. Die Bestätigung des Maxwellschen Verteilungsgesetzes, die durch diese zufällige und ursprünglich für technische Zwecke ausgeführte Messung gewonnen ist, ist sogar besser als in den seinerzeit eigens zur Prüfung des Maxwellschen Gesetzes von mir angestellten Versuchen, wo ich im Durchschnitt 20%, d. h. etwa 400° Abweichungen zwischen errechneter und wahrer Temperatur erhielt.

§ 3. Messungen bei verschiedenen Heizstromstärken.

Um einerseits den günstigsten Heizstromwert für das Röhrenvoltmeter ausfindig zu machen, andererseits den erwarteten thermischen Charakter der Aufladungskurven zu bestätigen, wurden jetzt, und zwar im Gebiet möglichst kleiner Rohrstromwerte i , (mit dem Spiegelgalvanometer) 3 sorgfältige Meß-

¹⁾ Über den Austritt von Elektronen aus Glühdrähten bei verzögernden Potentialen. Ann. d. Phys. 44, 1011—1032 (1914).

reihen von $\overline{A}i$ in Abhängigkeit von i für ein Rohr EVE 173 bei verschiedenen Heizströmen, d. h. verschiedenen Temperaturen aufgenommen. Bei der ersten Meßreihe wurde der Glühfaden, dessen normale Belastung bei 0,55 Amp. lag, nur mit 0,50 Amp. geheizt, die 2. Meßreihe bezog sich auf 0,55, die 3. auf 0,57 Amp. Das Gitter hatte in allen Fällen das Potential Null gegen den negativen Pol der Kathode; das Potential e der Anode wurde variiert. Aus $\overline{A}i$ und dem Scheitelwert \mathcal{E} der Wechselfspannung (deren Effektivwert wieder 0,2 Volt betrug) wurde ebenso wie für die besprochenen Messungen aus Gl. (2) $\frac{d^2 i}{de^2}$ (im folgenden mit i'' bezeichnet) ermittelt; hierbei wurde noch eine kleine Korrektur angebracht, die sich auf die Berücksichtigung höherer Glieder in der Entwicklung von Gl. (1) bezog. In den Kurven, die diese Messungen darstellen, wurde nun nicht i'' gegen i , sondern das Verhältnis $\frac{i''}{i}$ gegen i aufgetragen; dieses gestattete eine noch genauere Untersuchung der Frage, ob mit abnehmendem i das Verhältnis $\frac{i''}{i}$ einem konstanten Wert zustrebt.

Tabelle I.

$J = 0,50$ Amp., $s = 5,17 \cdot 10^{-4}$ Amp.,
 $V = 2,42$ Volt.

i	$\frac{i''}{i}$	$\alpha^2_{\mathcal{E}}$	$\alpha^2_{\mathcal{E}}$
4,17 10^{-8}	29,8	34,8	38,5
8,32 „	28,1	33,3	37,1
12,5 „	27,1	32,5	36,4
20,8 „	24,9	30,4	34,2
29,2 „	23,4	29,0	32,9
41,8 „	20,8	26,5	29,7
67,0 „	17,6	22,8	25,8
83,5 „	15,9	20,8	23,8
100,0 „	14,3	19,1	21,4

Tabelle II.

$J = 0,55$ Amp., $s = 2,4 \cdot 10^{-3}$ Amp.,
 $V = 2,87$ Volt.

i	$\frac{i''}{i}$	$\alpha^2_{\mathcal{E}}$	$\alpha^2_{\mathcal{E}}$
4,17 $\cdot 10^{-8}$	29,8	33,8	37,0
8,32 „	28,0	32,1	35,5
12,5 „	27,1	31,3	34,6
20,8 „	25,0	29,1	32,2
29,2 „	23,4	27,6	30,5
41,8 „	21,2	26,3	28,1
67,0 „	18,4	22,3	24,9
83,5 „	17,2	21,0	23,4
100,0 „	16,3	20,5	22,4

Tabelle III.

$J = 0,57$ Amp., $s = 3,98 \cdot 10^{-3}$ Amp.,
 $V = 3,08$ Volt.

i	$\frac{i''}{i}$	$\alpha^2_{\mathcal{E}}$	$\alpha^2_{\mathcal{E}}$
4,17 10^{-8}	29,8	33,6	36,6
8,32 „	28,0	31,9	34,9
12,5 „	27,1	31,1	34,2
20,8 „	25,0	28,7	32,0
29,2 „	23,4	27,3	30,2
41,8 „	21,2	25,0	27,9
67,0 „	18,8	22,4	24,9
83,5 „	17,9	21,5	23,9
100,0 „	16,9	20,4	22,7

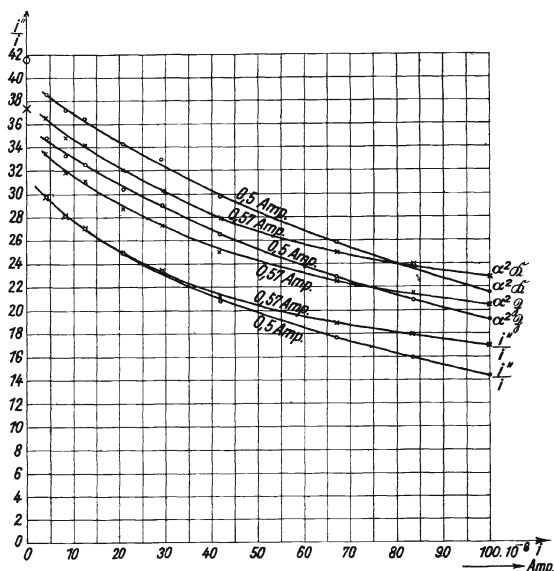


Fig. 2.

Das Resultat der Messungen ist in den Tabellen I—III und in Fig. 2 wiedergegeben; in Fig. 2 ist zur klareren Übersicht die Kurve für 0,55 Amp. weggelassen. Auf die mit

den Bezeichnungen α_{B}^2 und α_{R}^2 versehenen Tabellen, Spalten und Kurven wird später zurückzukommen sein. Man sieht, daß die genauere Prüfung der einzelnen Kurve und der Vergleich der verschiedenen Kurven untereinander zwei unerwartete Abweichungen von dem theoretischen Bilde zeigt, das durch die approximativen Feststellungen des vorigen Paragraphen nahegelegt wurde. Erstens liegen die $\frac{i''}{i}$ -Werte durchaus nicht, wie nach Gl. (3) und (6) zu erwarten, bei den stärkeren Heizströmen (also höheren Temperaturen¹⁾) tiefer als bei dem kleinsten Heizstrom; zweitens zeigen selbst bei den kleinsten Elektronenstromwerten — die Messungen erstrecken sich bis herab zu 10^{-8} Amp. — die Kurven keine Tendenz zu konstanten Werten, sondern die bei größeren i -Werten unschwer zu erklärende Steigung der Kurven mit abnehmendem i scheint nach $i = 0$ hin ständig weiter zu wachsen. Allerdings ist durch den Verlauf der Kurven ein schließliches horizontales Einmünden in die Achse $i = 0$ noch nicht ausgeschlossen. Daß zunächst mit abnehmendem i die $\frac{i''}{i}$ Kurven immer steiler ansteigen, kann sich vielmehr daraus erklären, daß mit kleiner werdendem i gewissen algebraischen Unterschieden der i immer größere Unterschiede der e -Werte entsprechen; der Verlauf ist ja in erster Annäherung so, daß einer geometrischen Verkleinerung der i eine algebraische Zunahme [absolut genommen] der e -Werte entspricht. Ein Unabhängigwerden der Ausdrücke $\frac{i''}{i}$ von e würde also zunächst durch diesen geometrisch-algebraischen Verzerrungseffekt verdeckt sein können.

Da jedoch ein wesentlich weiteres Herabgehen mit dem Stromwerte galvanometrisch nicht möglich ist, auch für die eigentlich technischen Zwecke der Untersuchung nicht in Frage kommt, entsteht die Aufgabe, die aufgenommenen Kurven in dem gegebenen Meßbereich, wenigstens in großen Zügen, zu deuten, nach Gründen, für die Abweichung von dem zunächst erwarteten einfachen Verlauf zu suchen. Hierbei handelt es sich vor allem um die erwähnte, mit dem thermischen Charakter der Kurven anscheinend im Widerspruch stehende Tatsache, daß die Kurve für $\frac{i''}{i}$ bei kleinen i -Werten für $J = 0,50$ Amp. nicht höher liegt (entsprechend dem kleineren T -Wert, Gleichung (7)), als bei $0,57$ Amp., sondern in einem großen Bereich anscheinend genau konform verläuft²⁾.

¹⁾ Eine direkte (pyrometrische) Bestimmung der Fadentemperaturen war deshalb nicht gut möglich, weil, wie die späteren Überlegungen zeigen werden, das maßgebende Stück des Glühfadens ganz an einem Ende liegt, wo bereits ein starkes Temperaturgefälle vorhanden ist und man nicht weiß, auf welchen Punkt man einstellen soll. Die Temperaturen der Fadenmitte sind, wie Fräulein Dr. Miething festzustellen die Güte hatte, etwa 2100° abs. bei $J = 0,50$ und etwa 2400° abs. bei $J = 0,57$. Die entsprechenden α^2 Werte wären etwa 31 bei $J = 0,50$ und 24 bei $J = 0,57$. Für das „maßgebende“ Stück des Glühfadens wird man nur soviel behaupten können, daß die Temperaturen tiefer, also die α^2 -Werte größer und der Unterschied der T - und α^2 -Werte kleiner sein muß. Unmöglich aber kann der Unterschied der α^2 -Werte so klein sein, daß er in der Figur nicht einem merklichen Intervall entspräche.

²⁾ Die Übereinstimmung der letzten Dezimalen in den Tabellen für $\frac{i''}{i}$ bei verschiedenen J -Werten geht allerdings über die in Wirklichkeit erzielte Meßgenauigkeit (1—2%) hinaus und beruht darauf, daß in allen Fällen auf gleiche i -Werte, also gleiche Stellen der Galvanometerskala eingestellt wurde. Es wurde dann merklich gleiches Δi abgelesen, und die Gleichheit der Dezimalen ergibt sich durch die Multiplikation mit dem Skalenfaktor.

Dem Wunsch, gerade diesen Umstand aufzuklären, verdanken die nun folgenden theoretischen Betrachtungen ihren Ursprung. Man hat das Folgende also nicht so aufzufassen, als ob nun eine vollständige theoretische Begründung des wahren Verlaufes der $\frac{i''}{i}$ -Kurve untersucht werden sollte; dazu sind ja die speziellen Bedingungen der aufgenommenen Kurven viel zu kompliziert und speziell. Man erinnert sich, daß wir es nicht einfach mit einem Glühfaden in einer zylindrischen Anode zu tun haben, sondern mit einer Gitteranordnung, bei der das Gitter speziell den Potentialunterschied Null gegen das negative Kathodenende hat; erst zwischen Gitter und Anode liegt dann das variable Feld, in dem das Potential e der Anode verändert wird. Zwischen Glühdraht und Gitter liegt dagegen das mit axialen Komponenten behaftete Feld, das durch den Spannungsabfall längs des Glühfadens hervorgerufen wird, und ebenso wirkt hier das Magnetfeld des Stromes auf die Elektronen. Ferner kommt, wie wir sehen werden, für die Gestalt der Aufladungskurve wesentlich nur die Umgebung des negativen Glühdrahtendes in Frage, die von der besonderen Gestalt des seitlichen Gitterrandes, Lage des Glühfadenendes gegen Gitter und Anodenrand usw. abhängig ist und wo auch die Temperatur schon von Punkt zu Punkt variiert. Endlich können im allgemeinen Raumladungswirkungen eine Rolle spielen; in dem Gebiet zwischen 10^{-8} und 10^{-6} Amp., in dem wir uns hier bewegen, wird dies allerdings nicht der Fall sein.

Also jedenfalls: Nicht auf alle diese speziellen und komplizierten Abhängigkeiten können sich die folgenden Untersuchungen beziehen, sondern nur auf gewisse Gesichtspunkte, die in allen Fällen bei der Aufladungskurve von Glühdrähten (stromdurchflossen oder nicht) eine Rolle spielen werden. Das ist festzuhalten, wenn auch zur Prüfung der erwarteten Abhängigkeiten zunächst nur die besonderen in den Tabellen 1—3 niedergelegten Messungen zur Verfügung stehen und herangezogen werden können.

§ 4. Die zylindrische Aufladungskurve.

Die fehlenden Unterschiede der $\frac{i''}{i}$ -Werte bei verschiedenen Heizstromstärken würden sich — das war die nächstliegende Vermutung — vielleicht erklären lassen, wenn man statt des ja nur für ebene Elektroden streng gültigen $e^{\alpha e}$ -Gesetzes das hier in Wirklichkeit in Betracht kommende für zylindrische Anordnung in Rechnung setzte. Bezeichnen wir von hier an, wie in der zitierten Annalenarbeit (Anm. S. 65), den Ausdruck αe (der das Verhältnis des Absolutbetrages der (negativen) Spannung e zu einer durch die Temperatur bestimmten Spannung $\mathfrak{B} = \frac{1}{\alpha} = \frac{T}{11\,600}$ darstellt), wie l. c. mit n , so ist die Gestalt der zylindrischen Aufladungskurve nicht durch

$$i = s \cdot e^{-n} \quad (s = \text{Sättigungsstrom}) \quad (8)$$

gegeben, sondern durch:

$$i = s \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-n} \cdot \sqrt{n} + \frac{1}{2} \int_n^{\infty} e^{-n} \cdot \frac{dn}{\sqrt{n}} \right)^2. \quad (9)$$

¹⁾ An der zitierten Stelle steht das Integral im Klammerglied in etwas anderer Form. Man überzeugt sich leicht, daß die beiden Darstellungen identisch sind.

Das bedingt gegenüber der Gleichung (8) eine Verkleinerung der i'' -Werte bis zu verhältnismäßig großen n -Werten hin, die Verkleinerung wird mit abnehmendem n (kleinerem Gegenpotential) immer größer, und vielleicht wäre dieser Effekt die Hauptursache der Abweichung der $\frac{i''}{i}$ -Kurven von den erwarteten konstanten Werten α^2 .

Auch das unerwartete Zusammenfallen der 0,50 Amp.-Kurve mit der 0,57 Amp.-Kurve ließe sich vielleicht so erklären; ist doch der Sättigungsstrom im ersten Falle 8 mal kleiner und der n -Wert demnach bei gleichem i nach der (angenäherten) Gleichung (8) etwa um 2 größer als bei $J = 0,57$, so daß die 0,50 = Kurve mehr gedrückt wird als die Kurve bei $J = 0,57$. (Die ungefähren n -Werte bewegen sich für die angenommenen Kurvenpunkte von $J = 0,50$ zwischen 4 und 7, für $J = 0,57$ zwischen 6 und 9).

Wäre diese Vermutung richtig, so müßte eine Berechnung von $\frac{i''}{i}$ aus Gleichung (9) mit den tatsächlichen Kurven bessere Übereinstimmung ergeben; oder eine Darstellung von α^2 durch $\frac{i''}{i}$, die mit Hilfe von Gleichung (9) vorgenommen wurde, müßte nunmehr die erwarteten Unterschiede und die geforderte Konstanz der Größe α^2 für kleinere i -Werte ergeben.

Die Prüfung dieser Folgerung war wegen der komplizierten Abhängigkeiten, die hier vorliegen, — $n = -\alpha e$ ist ja selbst von α abhängig — nicht ganz einfach. Und ehe sie in Angriff genommen wurde, mußte mindestens noch eine andere Abänderung an den Gleichungen (8) und (9) vorgenommen werden; es mußte berücksichtigt werden, daß das Potential der Anode gegenüber den verschiedenen Punkten der Glühkathode nicht, wie bei der Ableitung von Gleichung (8) und (9) vorausgesetzt, konstant, sondern von Punkt zu Punkt des Glühfadens veränderlich ist; wenn also überhaupt die Gleichungen (8) oder (9) angewandt werden sollen, so dürfen sie nicht in dieser Form, sondern mit Mittelwerten bezüglich der Größe n , die über den ganzen Glühfaden gebildet sind, in die Rechnung eingeführt werden.

Was bedeutet das physikalisch? Sehen wir nunmehr von der Gleichung (8) ab, die sich auf ebene Anordnungen bezieht und die sicher nicht anwendbar ist, so bedeutet i in Gleichung (9) zunächst den Strom, der von einer dünnen fadenförmigen gestreckten Kathode von konstantem Potential zu einem koaxialen Zylinder bei einem angelegten Gegenfeld übergeht, sofern Raumladungswirkungen keine Rolle spielen.

Ihrer Ableitung nach kann man jedoch die Gleichung (9) auch etwas allgemeiner deuten. Man kann sagen: i nach Gleichung (9) bedeutet den Strom, der von irgendeinem kleinen Teile einer gestreckten fadenförmigen Glühkathode zu einer benachbarten anderen Elektrode übergeht unter der Voraussetzung, daß diejenigen und nur diejenigen Elektronen die andere Elektrode erreichen, bei denen die radiale Komponente der kinetischen Energie größer oder gleich der (mit der Elementarladung multiplizierten) Gegenspannung ist¹⁾. Eine entsprechende Gleichung wie Gleichung (9) gilt also für den von jedem Längenelement des

¹⁾ Es ist sogar noch eine weitere Verallgemeinerung möglich, die allerdings im vorliegenden Fall nicht notwendig herangezogen zu werden braucht. Ein Verlauf entsprechend Gl. (9) gilt für jeden von einem Oberflächenelement einer beliebig gestalteten Glühkathode zu einer anderen Elektrode übergehenden Teilstrom, falls alle von dem Oberflächenelement ausgehenden Teilchen, deren auf irgendeine zur Oberfläche senkrechte Ebene projizierte Bewegungskomponente eine genügend große kinetische Energie im obigen Sinne liefert, die Gegenelektrode erreichen.

Glühfadens ausgehenden und zur gegenüberstehenden Elektrode übergehenden Strom, falls für jedes Längenelement die auf der Gegenelektrode anlangende Zahl von Elektronen durch deren radiale Geschwindigkeitskomponente bestimmt ist.

Wenn diese Annahme beim heizstromlosen Glühfaden erfüllt ist — wir werden allerdings später sehen, daß die Bedenken, die sich gegen diese Annahme richten, auch bereits beim heizstromlosen Glühfaden eine Rolle spielen —, so werden wir dieselbe Annahme in erster Annäherung auch beim stromdurchflossenen Glühfaden machen können. Denn da es sich bei den beobachteten Elektronenströmen um gegen höhere Gegenpotentiale anlaufende Elektronen, also Elektronen mit großer Anfangsgeschwindigkeit handelt, spielt sowohl das elektrische wie das magnetische Feld in der Nähe des Glühdrahtes für die Bewegung der Elektronen keine allzu große Rolle. Und die Verlangsamung der Elektronen tritt ja bei unserer Anordnung erst zwischen Gitter und Anode ein, wo weder ein tangenciales elektrisches noch ein merkliches magnetisches Feld herrscht. (Bedeutend wichtiger ist der „Randeffect“; wir kommen später darauf zurück.)

Jedenfalls können wir einmal den vom stromdurchflossenen Glühdraht zur Anode übergehenden Elektronenstrom unter der Annahme berechnen, daß für jeden Teil des Glühfadens nur die Beziehung zwischen radialer Geschwindigkeits-Komponente der Elektronen und dem Potentialunterschied der betreffenden Stelle des Glühdrahtes gegenüber der Auffangelektrode in Frage kommt. Nach einer Rechnung, die ganz in den gewohnten analytischen Bahnen verläuft und deren vollständige Ausführung hier zu weit führen würde, erhält man, unter Vernachlässigung der Potenzen $\frac{1}{n^2}$ gegen $\frac{1}{n}$ (also in unserem Gebiet von $n = 4$ bis 9 , mit einem relativen Fehler von der Größenordnung 1 bis 6%), folgende Gleichung für den vom stromdurchflossenen Glühdraht (Sättigungsstrom s) zur Auffangelektrode übergehenden Strom:

$$i = \frac{s}{\alpha \cdot V} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{n}. \quad (10)$$

Dabei bedeutet V den in Volt gemessenen Potentialunterschied der beiden Enden des Glühdrahtes gegeneinander. Gleichung (10) unterscheidet sich also von Gleichung (9) vor allem dadurch, daß nicht der ganze Sättigungsstrom s in Frage kommt, sondern nur der durch αV dividierte Teil; oder, da $\alpha = \frac{1}{\mathfrak{B}} = \text{ca. } \frac{1}{0,15} \text{ Volt}^{-1}$ ist, der $\frac{V}{\mathfrak{B}}$ -Teil des Glühfadens, d. h. derjenige Bruchteil, in dem der Spannungsabfall infolge des Heizstromes nicht V ($= \text{ca. } 3 \text{ Volt}$), sondern nur \mathfrak{B} ($= 0,15 \text{ Volt}$) beträgt, also in unserem Falle von dem im ganzen 18 mm langen Glühfaden weniger als 1 mm . Und zwar muß es sich hier offenbar um den unmittelbar an das negative Ende anschließenden Teil des Glühfadens handeln, gegen den die Auffangelektrode die kleinste Gegenspannung hat; bei allen positiveren Teilen ist die Gegenspannung größer. — Diese Betrachtung gilt übrigens ziemlich unabhängig von den speziellen Annahmen über die Aufladungskurve für das Glühfadenelement, wie wir später noch sehen werden.

In der Abhängigkeit von n ist der Unterschied gegenüber der „heizstromlosen“ Gleichung (9) gering, und vernachlässigen wir auch in Gleichung (9) Potenzen 2. Grades in $\frac{1}{n}$, so erhalten wir

$$i = s \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{n}. \quad (9')$$

Bis auf einen Faktor $\frac{1}{2n}$ gegen 1, d. h. in unserem Gebiete bis auf 5 bis 12%, stimmen also die Abhängigkeiten von n überein.

Mit derselben Annäherung wie in Gleichung (10) erhalten wir für $\frac{d^2 i}{d e^2}$, daß wir von jetzt an mit i'' bezeichnen wollen, für den Fall des stromdurchflossenen Glühfadens:

$$i'' = \frac{s}{\alpha \cdot V} \cdot \alpha^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{n}, \quad (11)$$

also

$$\frac{i''}{i} = \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right). \quad (12)$$

Man überzeugt sich, daß dies — immer unter Vernachlässigung der Potenzen mit $\frac{1}{n^2}$ — genau dasselbe Resultat ist, das man erhalten würde, wenn man von der Gleichung (9) bzw. (9') Gebrauch machte, also den Fall des stromlosen Glühfadens zugrunde legte.

Wenn Gleichung (12) eine bessere Annäherung an die wirklichen Verhältnisse darstellte als Gleichung (3), nach der ja

$$\frac{i''}{i} = \alpha^2$$

wäre, so müßte man sowohl in bezug auf die Verschiedenheit der Werte bei verschiedenen Temperaturen wie betreffs der Abhängigkeit von i eine bessere Überein-

stimmung mit den erwarteten Kurven $\alpha^2 = \text{const.}$ erhalten, wenn man $\frac{\frac{i''}{i}}{1 - \frac{1}{n}}$ bildet

und diesen Wert in Abhängigkeit von i aufträgt. Bezugnehmend auf den Umstand, daß diese neue Größe $\frac{\frac{i''}{i}}{1 - \frac{1}{n}}$ konstant und $= \alpha^2$ sein müßte, wenn die Vor-

aussetzungen der zylindrischen Aufladungskurve zuträfen, bezeichnen wir diesen Ausdruck mit

$$\alpha_3^2 = \frac{\frac{i''}{i}}{1 - \frac{1}{n}}. \quad (13)$$

Nun ist es nicht ganz einfach, α_3^2 als Funktion von i zu berechnen, da die rechte Seite noch die Größe $n = -\alpha e$ enthält, die, selbst wenn α bekannt wäre, schon deshalb nicht ohne weiteres aus dem Werte der angelegten Gegenpotentiale entnommen werden könnte, weil e sich von den angelegten Potentialen um die nur sehr ungenau bekannte Kontaktpotentialdifferenz (zwischen Eisen und glühendem Wolfram) unterscheidet. Um hier nicht neue Annahmen einführen zu müssen, ist es notwendig, n selbst wieder durch i oder i'' auszudrücken, was z. B. vermittels Gleichung (11) geschehen kann. Das hierbei auftretende, auch von vornherein unbekanntes n wird dabei in erster Annäherung — n ist gegen eine Veränderung von α ziemlich unempfind-

lich — durch $\sqrt{\frac{i''}{i}}$ ausgedrückt werden können. Löst man die Gleichung (11) durch zweimalige Approximation (für den vorliegenden Fall weitaus genügend) nach n auf und ersetzt α durch den obengenannten Ausdruck, so erhält man schließlich

$$n = U + \frac{1}{2} \ln U, \quad (14)$$

wobei

$$U = -\frac{1}{2} \ln i i'' + \ln \frac{2}{\sqrt{\pi}} + \ln \frac{s}{V} \quad (15)$$

zu setzen ist. Dieser Ausdruck kann bei gegebenem Werte von i , i'' , s und V berechnet werden; die Werte von s und V sind jedesmal am Kopfe der Tabelle mit angegeben.

Die Ausführung der Berechnung von n und Einsetzen in (13), für die ich Herrn Clausing zu Danke verpflichtet bin, ist in der 3. Kolonne der Tabelle unter α_3^2 und in Fig. 2 durch die mit α_3^2 bezeichnete Kurve wiedergegeben.

Man erkennt ein Auseinanderrücken der Kurven für 0,50 und 0,57 Amp., und auch eine kleine Verringerung der relativen Steilheit der Kurven ist vorhanden. Doch hat man sowohl in bezug auf die Steigung wie auf den Unterschied der beiden Kurven den Eindruck, daß nur ein unvollkommener Schritt zur Annäherung an die einfachen Kurven $\alpha^2 = \text{const.}$ getan ist.

§ 5. Die kugelsymmetrische Lösung. Schlußdiskussion.

Von früheren Überlegungen her war mir bekannt¹⁾, daß eine noch stärkere Abweichung vom e^{-n} -Gesetz als bei zylindrischer Anordnung bei einer Anordnung zu erwarten ist, wo der Glühfaden als punktförmige Elektronenquelle innerhalb einer kugelförmigen Elektrode angesehen werden kann. Die Stromgleichung lautet in diesem Falle:

$$i = s \cdot e^{-n} (n + 1) \quad (16)$$

und $\frac{i''}{i}$ wird, wie sich durch Differenzieren ergibt, $= \alpha^2 \cdot \frac{n-1}{n+1}$, d. h. bis auf Glieder

2. Ordnung in $\frac{1}{n}$, gleich $\alpha^2 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)$. Hier ist also in der Tat der Einfluß von n auf

die Verminderung von $\frac{i''}{i}$ gegenüber α^2 doppelt so groß wie im zylindrischen Fall (Gleichung 12), und es liegt deshalb die Vermutung nahe, daß wir es in unserem komplizierten Versuchsfalle viel eher mit der kugelsymmetrischen Aufladungskurve zu tun haben, als mit der zylindrischen.

Läßt sich das physikalisch begründen? Überlegen wir zunächst wieder die allgemeineren Voraussetzungen von Gleichung (16). Die Rechnung, die zu dieser Gleichung führt, benutzt keine anderen Annahmen, als daß aller Elektronen kinetische Gesamtenergie zur Überwindung des angelegten Gegenpotentials ausreicht, die Auffangelektrode zu erreichen. Würde diese Voraussetzung für die von jedem Oberflächenelement des Glühfadens ausgehenden Elektronen zutreffen, so würde der Potentialabfall längs des Glühdrahtes, der ja eine von Punkt zu Punkt variierende Potentialdifferenz gegen das Potential der Auffangelektrode bedingt, in Gleichung

¹⁾ Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 482, 1914.

(16), wie man durch einfache Überlegungen findet, nur ein dem Unterschied zwischen Gleichung (10) und (9) bzw. (9') ganz analoge Abänderung bewirken (hier sogar, da sich die Rechnung geschlossen durchführen läßt, ohne Vernachlässigung der $\frac{1}{n^2}$ -Glieder); es würde sich ergeben:

$$i = \frac{s}{\alpha \cdot V} \cdot e^{-n} (n + 2). \quad (17)$$

Wieder kommt also der durch $\alpha \cdot V$ dividierte Sättigungsstrom in Frage, d. h. der Sättigungsstrom von einem Stück des Glühdrahtes, in dem der durch den Heizstrom verursachte Potentialfall nur von der Größenordnung $\mathfrak{B} = 0,15$ Volt ist.

Bilden wir die 2. Ableitung von i nach $e = -\frac{n}{\alpha}$, so erhalten wir:

$$i'' = \alpha^2 \cdot \frac{s}{\alpha \cdot V} \cdot e^{-n} \cdot n. \quad (18)$$

Durch Division ergibt sich

$$\frac{i''}{i} = \alpha^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{n}}, \quad (19)$$

also¹⁾ bis auf Größen 2. Ordnung dasselbe wie bei stromlosen Glühkathoden.

Trifft nun aber die Voraussetzung, daß es für die Erreichung der Auffangelektrode nur auf die kinetische Gesamtenergie ankommt, wirklich zu? Ein Idealfall von sehr allgemeiner Bedeutung, der sich von den Voraussetzungen der Kugelsymmetrie beliebig weit entfernen kann, existiert jedenfalls, bei dem diese Bedingung erfüllt ist. Wir wollen für diesen Fall nichts anderes voraussetzen, als daß die Oberfläche der Kathode und aller Zuführungen und etwaige weitere Elektroden, die sich auf gleichen oder positiveren Potentialen wie die Kathode befinden, außerordentlich klein sei gegen die Fläche der Auffangelektrode. Dann wird die wahre Bahn der Glüh-Elektronen so aussehen: Entweder werden sie, wenn sie die nötige Anfangsgeschwindigkeit besitzen und das Schicksal ihnen günstig ist, gleich beim ersten Losfliegen auf die Auffangelektrode auftreffen und dort absorbiert werden, oder sie werden auf ihrem Wege durch elektrische und magnetische Wirkungen so abgelenkt, daß sie mit einer endlichen, größeren oder kleineren, Aphelgeschwindigkeit umkehren. Nun werden sie anfangen, in einer nicht geschlossenen Bahn die Kathode bzw. die weiteren nur sehr geringen Teile des Bahnraumes in Anspruch nehmenden Elektroden zu umkreisen, mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit, bei den nächsten Umläufen auf diese Elektroden aufzutreffen. Wohl aber wird diese ungeschlossene Bahn, da sie ja alle statistischen Möglichkeiten durchlaufen wird, in irgendwelchen Fällen mit der großflächigen Auffangelektrode kollidieren; und die einzige Bedingung für die Möglichkeit dieses Falles ist eben die, daß die kinetische Gesamtgeschwindigkeit zur Überwindung des Potentialunterschiedes zwischen Glühdraht und Auffangelektrode ausreicht. Das Auftreffen auf die Auffangelektrode hat aber die Absorption der Elektronen zur Folge, und da sich alle diese Vorgänge so unmeßbar schnell abspielen, daß ein früheres oder späteres Auftreffen der Elektronen auf der Auffangelektrode sich in keiner Weise in der Messung bemerkbar macht, so sind hier tatsächlich dieselben Bedingungen erfüllt wie bei der kugelsymmetrischen Anordnung, d. h. es gilt

¹⁾ Man vergleiche das oben unter Gl. (16) Gesagte.

die Gleichung (16), bzw. für einen stromdurchflossenen Glühdraht die Gleichungen (17, (18) und (19).

Fragen wir nun zunächst nicht weiter, wieweit die Bedingungen unserer Anordnung sich diesem Extremfall nähern, sondern versuchen wir einfach, ebenso wie für die zylindrische Kurve, wieweit unsere Messungen richtige Unterschiede der verschiedenen Kurven und eine genügende Konstanz des aus Gleichung (19) berechneten α^2 -Wertes ergeben, den wir jetzt zum Unterschied von dem aus der zylindrischen Gleichung (12) berechneten mit α_{K}^2 bezeichnen wollen.

$$\alpha_{\text{K}}^2 = \frac{i''}{i} \left(1 + \frac{2}{n} \right) \quad (19)$$

(ohne Vernachlässigungen von $\frac{1}{n^2}$ -Gliedern).

Wieder müssen wir zur Auswertung dieser Gleichung n durch i und i'' auszudrücken versuchen; analoge Überlegungen wie für den zylindrischen Fall führen zu den Gleichungen:

$$n = W + \ln W, \quad (20)$$

wobei

$$W = -\frac{1}{2} \ln i \cdot i'' + \ln \frac{s}{V} \text{ ist.} \quad (21)$$

Die Ausführung dieser Rechnung ergibt die in der 4. Spalte der Tabelle I—III in den obersten beiden Kurven der Fig. 2 wiedergegebenen α_{K}^2 -Werte.

Wir finden: Die beiden Kurven für 0,50 und 0,57 Amp. rücken im Sinne des wirklich vorzunehmenden Temperaturunterschiedes noch weiter auseinander. Der Gang mit zunehmendem i zeigt aber auch hier nicht entfernt die erwartete Konstanz von α^2 , vielmehr ist die fallende Tendenz von $\frac{i''}{i}$ mit wachsendem i so groß, daß auch die aus der kugelsymmetrischen Lösung sich ergebende n -Korrektur die Steilheit des Abfalles der vermeintlichen Konstanten nicht einmal auf die Hälfte zu reduzieren vermag.

Diese Inkonzanz sowohl von $\frac{i''}{i}$, das wir als die bei ebener Anordnung konstante α^2 -Größe auch mit α_{E}^2 bezeichnen können, wie von α_{Z}^2 und α_{K}^2 , weist also darauf hin, daß noch ein anderer Grund für die mit steigenden i -Werten (d. h. kleineren mittleren Anfangsgeschwindigkeiten der übergelassenen Elektronen) abnehmende Steilheit der Aufladungskurve vorhanden sein muß, als in den Voraussetzungen dieser Idealfälle — auch in der angegebenen Verallgemeinerung — enthalten ist. Einen stärkeren Abfall von $\frac{i''}{i}$ mit wachsendem i , als es diese Fälle voraussehen lassen, würden wir dann erhalten, wenn für kleine i -Werte wesentlich die kugelsymmetrische Lösung in Frage käme, so daß nur die Gesamtgeschwindigkeit der Elektronen ein Rolle spielte, dagegen bei zunehmendem i , d. h. kleineren Anfangsgeschwindigkeiten, auch die Richtung maßgebend wäre. Es würden dann mit wachsendem i immer mehr Elektronen, die nach der kugelsymmetrischen Lösung eigentlich die Elektrode erreichen müßten, ausscheiden, und die Verkleinerung von $\frac{i''}{i}$ gegenüber dem kugelsymmetrischen Fall wäre dadurch zu erklären. Allgemein kommt aber jede Ursache in Frage, die gegenüber den betrachteten Idealfällen bei kleineren Geschwindigkeiten größere Abweichungen bedingt, als bei größeren Geschwindigkeiten; und diese

Eigenschaft wird sowohl das elektrische Streufeld haben — man behalte immer im Auge, daß es die von dem negativen Ende des Glühdrahtes ausgehenden Elektronen sind, mit denen wir es zu tun haben — als auch das Magnetfeld des Stromes. Für noch wichtiger halte ich aber die abfangende Wirkung der Kathodenzuführungen und des Hilfsgitters, das ja dasselbe Potential wie die Kathode, also gegenüber der Auffangelektrode (Anode) ein wesentlich positives Potential besitzt und zudem durchaus nicht besonders fein ist, sondern den Weg zwischen Glühdraht und Anode zu etwa $\frac{1}{4}$ versperrt. Da nun das Gitter unter der Wirkung der negativen Aufladung der Anode auf die Elektronen entschieden anziehende Kräfte ausübt, so läßt sich denken, daß die Elektronen mit kleinen Anfangsgeschwindigkeiten durch diese Anziehungskräfte viel mehr aus ihrer Bahn abgelenkt und an dem Gitter entladen werden, als die schnell fliegenden Elektronen mit großen Anfangsgeschwindigkeiten; und wenn unsere Betrachtung mit den vielfachen ungeschlossenen Bahnen für die tatsächlichen Verhältnisse eine Bedeutung besitzt, so muß sich dieser Effekt bei dem mehrmaligen Durchgang der Elektronen durch das Gitter noch potenzieren.

Damit wäre wohl eine qualitative Deutung¹⁾ auch der feineren Abweichungen der beobachteten Aufladungskurve von den bisher behandelten Idealfällen gewonnen, die natürlich auch für die Konstruktion der besten Röhrenvoltmeter (mit möglichst großen und mit wachsendem i möglichst wenig abfallenden $\frac{i''}{i}$ oder $\frac{\Delta i}{i}$ -Werten) nicht ohne Bedeutung ist. Derartige feinere Untersuchungen würden natürlich nicht möglich sein, wenn an der Grundvoraussetzung der ganzen Frage, nämlich daß die Elektronen mit Maxwellscher Geschwindigkeitsverteilung entsprechend der Drahttemperatur aus dem Glühdraht austreten, noch irgendein Zweifel beständen daß diese Voraussetzung sich aber innerhalb aller zu erwartenden Genauigkeit bestätigt, wird man als Nebenresultat dieser Arbeit nunmehr wohl ohne Bedenken konstatieren. Vielleicht liegt in den hier besprochenen Gründen für die Verflachung der Aufladungskurve auch eine der Ursachen, weshalb bei meinen früheren ad hoc mit einem stromlosen Glühdraht und randgeschütztem Auffangzylinder angestellten Untersuchungen (Ann. d. Phys., l. c.) der Temperaturwert zu hoch, d. h. der α^2 -Wert (es handelt sich um den Wert α_3^2) zu klein herauskam. Auch beim stromlosen Zylinder werden die Elektronen mit großen axialen Geschwindigkeiten, wenn sie nur die Wahl haben, entweder zur dünnen Kathode zurückzukehren oder sich an dem Auffangzylinder (oder den auf gleichem Potential mit ihm befindlichen Schutzrändern) zu entladen, vielfach das letztere vorziehen, d. h. sie werden den Zylinder in der Längsrichtung bis zu den Enden durchfliegen, dann, durch das Streufeld zur Umkehr gebracht, den Draht in ungeschlossenen Bahnen umkreisen und sich auf den Schutzrändern, zum Teil aber auch auf dem zentralen Auffangzylinder niederschlagen, so daß auch hier bis zu einem gewissen Grade die Bedingungen jenes oben betrachteten Extremfalles erfüllt sind, bei dem statt der zylindrischen die kugelsymmetrische Lösung in Frage kommt. Überhaupt kann man wohl sagen, daß die Bedingungen der zylindrischen Lösung überhaupt nicht oder nur durch ganz besondere Anordnungen genau zu realisieren sein werden.

¹⁾ In welcher Weise die vermutete Inkonstanz der Temperatur in dem maßgebenden Endstück des Glühdrahtes die Aufladungskurve verändern kann, bliebe noch genauer zu untersuchen. Soviel glaube ich aber schon sagen zu können, daß dieser Umstand eher ein Ansteigen als ein Abfallen der $\frac{i''}{i}$ -Werte mit wachsendem i bedingen müßte, also wohl ein Effekt niederer Ordnung ist.

Zusammenfassung.

1. Für die Güte von Wechselstrom- oder Wechselspannungs-Röhrenvoltmeter ist nicht die absolute Größe des Gleichrichtereffektes, sondern das Verhältnis dieses Effektes zu dem dabei vorhandenen Ruhestrom maßgebend.

2. Dieses Verhältnis ist bei gegebener (nicht zu großer) Wechselspannung e an der Röhre dem Verhältnis $\frac{d^2 i}{i de^2}$ proportional.

3. Im Gebiet der Stromwerte i , die gegen den Sättigungsstrom genügend klein sind, d. h. im Gebiet genügend hoher Gegenpotentiale, wird das Verhältnis $\frac{d^2 i}{i de^2}$ in erster Näherung konstant $= \alpha^2$.

4. Dieser Befund ist so zu deuten, daß auch bei stromdurchflossenen Glühfäden und ziemlich beliebig gestalteten Elektroden für den Verlauf der Aufladungskurve in erster Linie die Geschwindigkeitsverteilung der austretenden Elektronen maßgebend ist; aus dem Maxwell'schen Geschwindigkeits-Verteilungsgesetz und seinen Konstanten, d. h. der Boltzmann'schen Konstanten K und der absoluten Temperatur des Glühfadens, sowie aus der Größe des in geeigneten Maßeinheiten gemessenen elektrischen Elementarquantums ϵ läßt sich die Größe $\alpha = \frac{\epsilon}{K T}$ in erster Annäherung berechnen.

5. In dieser Beziehung ist eine absolute Grenze für die Güte von Röhrenvoltmetern mit einfacher Ruhestromschaltung vorhanden, die sich durch keine Hilfsmittel überschreiten läßt.

6. Der Einfluß des Heizstromes auf die Gleichrichterwirkung ist in erster Näherung zu vernachlässigen. Der Absolutwert des Elektronenstromes, bei einem gegebenen Gegenpotential gegen das negative Ende der Glühkathode, läßt sich aus dem Sättigungsstrom in erster Näherung unter der Annahme berechnen, daß nur ein dem negativen Pol unmittelbar benachbartes Stück des Glühdrahtes für den ganzen Vorgang in Betracht kommt; die Länge dieses Stückes verhält sich zur gesamten Fadenlänge wie die in Volt gemessene mittlere thermische Geschwindigkeit der Glühelctronen (etwa 0,15 Volt) zu dem durch den Heizstrom verursachten Spannungsabfall zwischen den Kathodenenden (Größenordnung einige Volt).

7. Das e^{-n} -Gesetz, das der ersten Näherung zugrunde liegt, gilt theoretisch streng nur für unbegrenzte ebene Elektroden. Die zweite Näherung wird bei der benutzten (zylindrischen) Anordnung nicht durch das strenge Zylindergesetz, sondern eher besser durch das kugelsymmetrische Aufladungsgesetz dargestellt.

8. Es wird ein von der kugelsymmetrischen Anordnung wesentlich abweichender Idealfall angegeben, in dem das „Kugelgesetz“ seiner Ableitung nach trotzdem streng gültig ist; sein wesentliches Kennzeichen ist eine gegen die Fläche der Auffangelektrode genügend kleine Glühkathodenfläche, eine Voraussetzung, die auch bei zylindrischer Anordnung erfüllt sein kann.

9. Bei der untersuchten Anordnung, bei der ein gegen die Auffangelektrode positives und nicht besonders feines Gitter zwischen Glühdraht und Auffangelektrode

eingeschoben ist, sind die Voraussetzungen dieses Idealfalles jedoch nicht hinreichend genau erfüllt, und infolgedessen gibt auch die kugelsymmetrische Lösung den Gang der Aufladungskurve nicht befriedigend wieder. Das auch gegenüber der kugel-

symmetrischen Lösung noch beträchtlich zu starke Absinken der $\frac{d^2 i}{d e^2}$ Werte mit wachsendem i wird wohl hauptsächlich dadurch erklärt, daß von langsameren Elektronen verhältnismäßig mehr an anderer Stelle (Kathode oder Hilfsgitter) absorbiert werden, als von den schnellen Elektronen; eine Folgerung, die mit den allgemeinen Bewegungsgesetzen geladener Teilchen durchaus im Einklang steht.

Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern

I. Band

Drittes Heft (abgeschlossen am 1. November 1921)

Mit 90 Textfiguren, 3 Kurvenblättern und 3 Tafeln

Unter Mitwirkung von

Arthur Clausing, Dr. Robert Fellingner, Dr. Bruno Fetkenheuer, Dr. Adolf Franke, Professor Rob. M. Friese, Professor Dr. Hans Gerdien, Dr.-Ing. e. h. Carl Köttgen, Dr. Georg Krause, Karl Küpfmüller, Martin Lebegott, Fritz Lüschen, Dr. Georg Masing, Dr. Werner Nagel, Professor Dr. Fritz Noether, Geheimrat Professor Dr.-Ing. Walter Reichel, Dr. Hans Riegger, August Rotth, Professor Dr. Reinhold Rüdenberg, Dr. Hermann von Siemens, Erich Wandenberg

herausgegeben von

Professor Dr. Carl Dietrich Harries

Geheimer Regierungsrat



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1922

Behandlung induktiv gekoppelter Schwingungskreise als Siebkette.

Von Fritz Lüschén und Georg Krause.

Mit 13 Textfiguren.

Mitteilung aus dem Zentral-Laboratorium des Werner-Werkes der Siemens & Halske A.-G.

Abgeschlossen am 14. Juli 1921. Eingegangen am 26. September 1921.

I. Allgemeines.

Unter Kettenleitern versteht man eine Kette von gleichen Leitungsgliedern, die aus beliebigen Zusammenstellungen von Widerständen, Induktivitäten und Kapazitäten bestehen. Mit der Theorie solcher Kettenleiter hat sich in Deutschland K. W. Wagner, in Amerika Campbell¹⁾ beschäftigt. Wagner hat darüber eine Arbeit am 7. Januar 1915 dem Archiv für Elektrotechnik eingereicht. Von militärischer Seite wurde jedoch die Veröffentlichung der Arbeit während des Krieges verboten. Sie ist am 24. Juli 1919 erschienen. Wagner behandelt folgende Formen von Kettenleitern:

1. Die Spulenleitung (Fig. 1).

Die Spulenleitung unterdrückt alle Frequenzen, die über der Eigenfrequenz liegen.

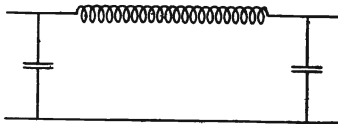


Fig. 1.

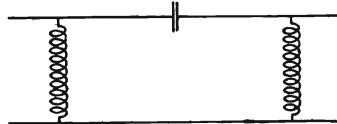


Fig. 2.

2. Die Kondensatorleitung (Fig. 2).

Die Kondensatorleitung unterdrückt alle unter ihrer Eigenfrequenz liegenden Frequenzen.

3. Siebketten folgender Art (Fig. 3).

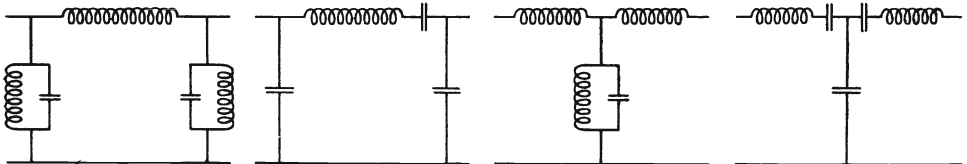


Fig. 3.

Die Siebketten haben die Eigenschaften, einen gewissen Frequenzbereich durchzulassen, die unterhalb und oberhalb dieses Bereiches liegenden Frequenzen aber abzdrosseln.

¹⁾ Campbell, Amerikan. Patentschrift Nr. 1227113.

Campbell hat auf die Verwendung solcher Siebketten in den Vereinigten Staaten von Nordamerika ein Patent am 15. Juli 1915 erteilt erhalten. Die Siebketten heißen in amerikanischen Veröffentlichungen allgemein „Campbellsche Filter“.

Eigenartigerweise haben weder Wagner noch Campbell die mehr oder weniger lose gekoppelten Schwingungskreise, wie sie in der drahtlosen Telegraphie z. B. verwendet werden, unter den Siebketten mitbehandelt. Ja, sie sehen beide die von ihnen als Siebketten bezeichneten Gebilde als von den üblichen gekoppelten Schwingungskreisen prinzipiell verschiedene Gebilde an.

So heißt es in einem Aufsatz von Colpitts und Blackwell vom 16. Februar 1921¹⁾: „Die einfachen abgestimmten Schwingungskreise der früheren Art würden entweder störende Verzerrung verursachen oder, wenn sie genügend unselektiv gemacht werden, um Verzerrung zu vermeiden, würden die Trägerfrequenzen bei ihrer Verwendung weit auseinander gelegt werden müssen.“

Wagner weist in einem Aufsatz über Vielfachtelephonie und -telegraphie mit schnellen Wechselströmen²⁾ zwar darauf hin, daß man induktiv gekoppelte Schwingungskreise auch als Siebketten auffassen kann und gibt die Grenzfrequenzen solcher Kreise an, führt dann aber folgendes aus: „Vom Standpunkt des Hochfrequenztechnikers liegt es nahe, sich die Frage vorzulegen, ob man nicht durch eine Reihe von abgestimmten Schwingungskreisen, von denen jeder mit dem nächsten lose gekoppelt ist, eine ebensohohe Selektivität erreichen könne. Ja, man kann weiter fragen, ob denn die Siebkette nicht auch als eine Reihe von gekoppelten Kreisen aufzufassen sei. Diese Auffassung ist zwar möglich, aber sie erscheint mir unzulässig und unter Umständen irreführend. Denn wenn man in der Hochfrequenztechnik von gekoppelten Kreisen spricht, durch welche eine gewisse Selektivität erreicht werden soll, so meint man stets ‚lose‘ gekoppelte Kreise. Die Kopplung zwischen den einzelnen Gliedern einer Siebkette ist aber keineswegs eine im Sinne der Hochfrequenztechnik ‚lose‘ Kopplung. Dieser Umstand begründet einen wesentlichen Unterschied im elektrischen Verhalten einer Siebkette und einer Reihe von lose miteinander gekoppelten abgestimmten Kreisen.“ Es dürfte daher nützlich sein, allgemein zu zeigen, daß induktiv gekoppelte Schwingungskreise durchaus der von Wagner und Campbell behandelten Siebketten gleichwertig sind³⁾.

II. Berechnung induktiv gekoppelter Schwingungskreise.

Eine Kette aus induktiv gekoppelten gleichen Schwingungskreisen mit gleicher Kopplung kann man in der Form der Fig. 4 darstellen.

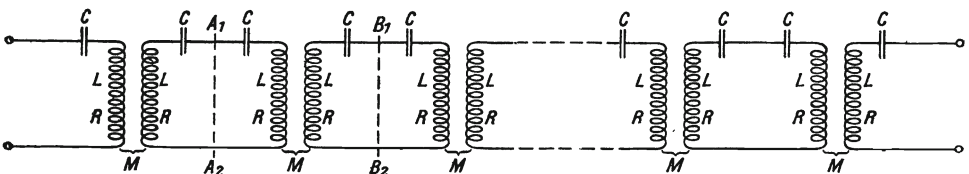


Fig. 4.

¹⁾ Carrier current Telephonie and Telegraphie, Journal of the American Institute of Electrical Engineers 1921, S. 301 ff.

²⁾ E. T. Z. 1919, S. 395.

³⁾ In seinem auf dem deutschen Physikertag gehaltenen Vortrage hat Wagner diese Unterscheidung nicht mehr gemacht.

In dieser Form stellt die Reihe eine Kette aus lauter gleichen Gliedern von der Form des zwischen A_1, A_2 und B_1, B_2 eingeschlossenen Gliedes dar. Bei gleichem Wickelsinn der beiden Wicklungen eines Übertragers und Festsetzung der positiven Richtungen der Ströme nach Fig. 5 bestehen für eingeschwingene, erzwungene Schwingungen in der komplexen Rechnungsweise folgende Beziehungen:

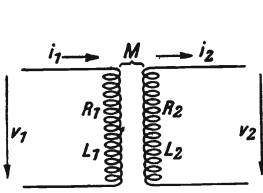


Fig. 5.

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{1}{\mathfrak{M}} \cdot \mathfrak{L}_2 \cdot \mathfrak{S}_2,$$

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{M}} \cdot \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{M} \left(\frac{\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2}{\mathfrak{M}^2} - 1 \right) \mathfrak{S}_2,$$

wobei $\mathfrak{L}_1 = R_1 + j\omega L_1,$

$$\mathfrak{L}_2 = R_2 + j\omega L_2,$$

$$\mathfrak{M} = j\omega M \quad \text{ist.}$$

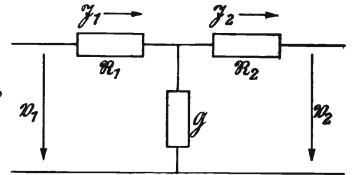


Fig. 6.

Für eine Sternschaltung der Fig. 6 bestehen folgende Gleichungen:

$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{G} \mathfrak{S}_2 + (1 + \mathfrak{G} \mathfrak{R}_2) \mathfrak{S}_2,$$

$$\mathfrak{B}_1 = (1 + \mathfrak{G} \mathfrak{R}_1) \mathfrak{S}_2 + (\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 \mathfrak{G}) \cdot \mathfrak{S}_2,$$

wo \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 beliebige Impedanzen und \mathfrak{G} einen beliebigen Leitwert bedeuten. Übertrager und Sternschaltung sind also äquivalent, wenn folgende Gleichungen erfüllt werden:

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{\mathfrak{M}}; \quad 1 + \mathfrak{G} \mathfrak{R}_2 = \frac{\mathfrak{L}_2}{\mathfrak{M}}; \quad 1 + \mathfrak{G} \mathfrak{R}_1 = \frac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{M}};$$

$$\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 \mathfrak{G} = \left(\frac{\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2}{\mathfrak{M}^2} - 1 \right) \mathfrak{M},$$

d. h. $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{L}_1 - \mathfrak{M}; \quad \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{L}_2 - \mathfrak{M}; \quad \mathfrak{G} = \frac{1}{\mathfrak{M}}.$

Die 4. Gleichung ist eine Folge der drei ersten Gleichungen. Ein Glied der Kette (Fig. 4, wo $R_1 = R_2 = R$ und $L_1 = L_2 = L$ zu setzen ist) ist also äquivalent der Sternschaltung (Fig. 7), falls man setzt:

$$\frac{\mathfrak{R}'}{2} = \mathfrak{R} + \frac{1}{j\omega C},$$

wo

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{L} - \mathfrak{M}.$$

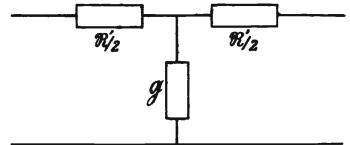


Fig. 7.

Man kann also die ganze Reihe von induktiv gekoppelten Schwingungskreisen der Fig. 4 als eine Wagnersche Kettenleitung zweiter Art auffassen, die für eine bestimmte Frequenz einer homogenen Leitung äquivalent ist mit einem bestimmten Wellenwiderstand \mathfrak{B} , einer Dämpfungskonstanten β und einer Wellenlängenkonstanten α . Setzt man $\gamma = \beta + j\alpha$, so gibt die Auffassung als Kettenleitung nach Wagner die Beziehung

$$\mathfrak{G} \circ j\gamma = 1 + \frac{\mathfrak{R}'}{2} \mathfrak{G} = A + jB,$$

wo $A = \frac{L}{M} \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC} \right)$ und $B = -\frac{R}{\omega M}$ ist.

Im folgenden soll zunächst der Grenzfall $R = 0$ und dann der allgemeinere (praktisch stets vorliegende Fall) $R \neq 0$ behandelt werden.

Erster Fall $R = 0$.

Dann wird $B = 0$, $\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s}\gamma = A$, d. h. $\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s}\beta \cos \alpha = A$, $\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\beta \sin \alpha = 0$.

Es muß also sein:

1. entweder $\sin \alpha = 0$, $\cos \alpha = \pm 1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s}\beta = \pm A$
2. oder $\mathfrak{S}\mathfrak{i}\mathfrak{n}\beta = 0$, $\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s}\beta = 1$; $\beta = 0$, $\cos \alpha = A$.

Der Verlauf von β als Funktion von ω folgt aus dem von A als Funktion von ω nach Fig. 8.

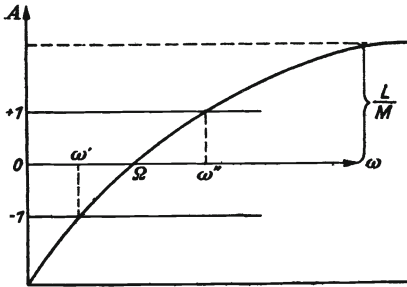


Fig. 8.

Hierin ist:

$$\omega_{A=-1} = \omega' = \frac{1}{\sqrt{C(L+M)}},$$

$$A_{\omega=0} = -\infty;$$

$$\omega_{A=+1} = \omega'' = \frac{1}{\sqrt{C(L-M)}},$$

$$A_{\omega=\infty} = \frac{L}{M};$$

$$\omega_{A=0} = \Omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

(1.)

Den Verlauf von β als Funktion von ω gibt dann Fig. 9.

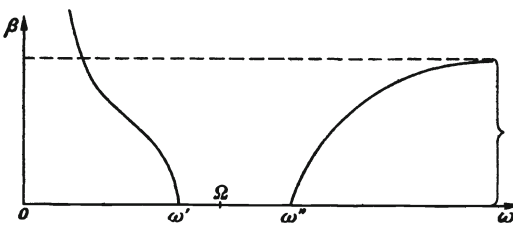


Fig. 9.

$$\beta_{\omega=0} = \infty. \quad \beta_{\omega=\infty} = \mathfrak{A}\mathfrak{r} \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{s} \frac{L}{M}.$$

Es verhält sich also die Schwingungskreisreihe wie eine Siebkette mit der unteren Lochgrenze ω' und der oberen Lochgrenze ω'' .

Die Frequenz

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2LC/2}}$$

stellt eine mittlere Frequenz innerhalb des Durchlässigkeitsgebietes $\omega' < \Omega < \omega''$ dar.

Sie ist die Resonanzfrequenz eines Schwingungskreises für sich allein. Ferner ist

$$\text{die untere relative Lochgrenze } \vartheta' = \frac{\omega'}{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{M}{L}}},$$

$$\text{die obere relative Lochgrenze } \vartheta'' = \frac{\omega''}{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{M}{L}}}$$

Die Frequenz $\omega_m = \frac{\omega' + \omega''}{2}$ ist stets größer als Ω , da

$$\frac{\omega_m}{\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{M}{L}}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{M}{L}}} \right) = \frac{\vartheta' + \vartheta''}{2} > 1$$

ist. Ω liegt also stets näher an ω' als ω'' .

Es ist die relative Lochbreite

$$(2) \quad b = \frac{\omega'' - \omega'}{\Omega} = \vartheta'' - \vartheta' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{M}{L}}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{M}{L}}}$$

eine Funktion von $\frac{M}{L}$ allein.

Die Auffassung als Kettenleiter zweiter Art nach Wagner liefert für den Wellenwiderstand der Kette die Beziehung

$$\mathfrak{B} = \sqrt{\frac{\Re'}{\mathfrak{G}}} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \Re' \mathfrak{G}} = \frac{1}{\omega C} \sqrt{\left[\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 - 1\right] \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega''}\right)^2\right]} = |\mathfrak{B}| e^{j\varphi}.$$

Also innerhalb des Durchlässigkeitsgebietes $\omega' \leq \omega \leq \omega''$ ist \mathfrak{B} ein Ohmscher Widerstand ($\varphi = 0$). Den Verlauf von \mathfrak{B} als Funktion von ω gibt Fig. 10.

$$|\mathfrak{B}|_{\omega=0} = \infty, \quad |\mathfrak{B}|_{\omega=\infty} = \infty, \quad |\mathfrak{B}|_{\omega=\omega'} = 0, \quad |\mathfrak{B}|_{\omega=\omega''} = 0.$$

Innerhalb des Durchlässigkeitsgebietes hat \mathfrak{B} ein Maximum für $\omega = \text{rund } \Omega$, wie die Gleichung $\frac{d\mathfrak{B}^2}{d\omega} = 0$ zeigt. Und zwar ist dieses Maximum

$$(3) \quad \mathfrak{B}_{\omega=\Omega} = \text{rund } M \cdot \Omega.$$

Für so feste Kopplung, daß $M = L$ ist, gilt

$$\mathfrak{B}_{\omega=\Omega} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

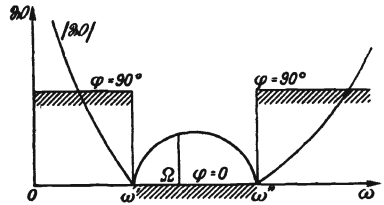


Fig. 10.

Der Verlauf des Wellenwiderstandes \mathfrak{B} als Funktion von ω ist also ähnlich dem der Wagnerschen Siebkette mit Reihencondensatoren zweiter Art. Nach diesem Verlauf sind beide Ketten geeignet zur Parallelschaltung bei der Mehrfachhochfrequenztelephonie und Wechselstromtelegraphie.

Die Berechnung der Konstanten L, M, C der Kette aus vorgeschriebenen Werten der Resonanzfrequenz (mittleren Frequenz) Ω , der relativen Lochbreite b und des Wellenwiderstandes $\mathfrak{B}_{\omega=\Omega}$ erfolgt nach den Gleichungen (1), (2), (3). In der praktischen Ausführung wird man die beiden Kondensatoren C durch einen gemeinsamen Kondensator $K = \frac{C}{2}$ darstellen. Da Ω unabhängig von M und $b = f\left(\frac{L}{M}\right)$ ist, so kann man durch Variation von M allein die Lochbreite ändern, ohne Änderung von Ω , was in praktischen Fällen von Wichtigkeit sein kann, wenn die dadurch bewirkte Änderung von $\mathfrak{B}_{\omega=\Omega}$ nicht besonders störend ist. In der Ausführungsform der Fig. 4 mit variablem Induktionskoeffizienten M wird man Störungen erhalten durch Kopplung nicht benachbarter Glieder miteinander wegen der Streuung des Übertragers. Deshalb wird folgende Ausführungsform mit Gliedern nach Fig. 11 vorzuziehen sein.

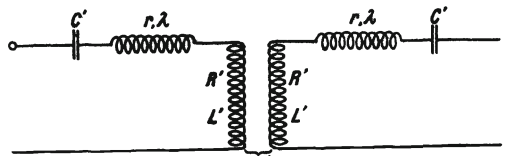


Fig. 11.

Für so feste Kopplung der Übertrager, daß $M' = L'$ ist, wird diese Schaltung äquivalent einem Gliede der Fig. 4, falls folgende Beziehungen erfüllt sind:

$$C' = C; \quad L' = M; \quad \lambda = L - M; \quad r + R' = R.$$

Die 4. Gleichung folgt aus der 3. Gleichung, falls $\tau = \frac{L}{R} = \frac{L'}{R'} = \frac{\lambda}{r}$ ist. Diese Äquivalenz folgt ohne weiteres aus den oben bewiesenen Äquivalenzen.

In dieser Ausführungsform kann $\frac{L}{M}$, d. h. die relative Lochbreite, geändert werden durch Änderung von λ . Da der Übertrager jetzt feste Kopplung besitzt, kann er als streuungsloser Ringübertrager (ebenso die Spule λ als Ringspule) ausgeführt werden. Die ganze Kette in dieser Ausführungsform hat dann die Gestalt der Fig. 12 bei möglichst fester Kopplung der Übertrager.

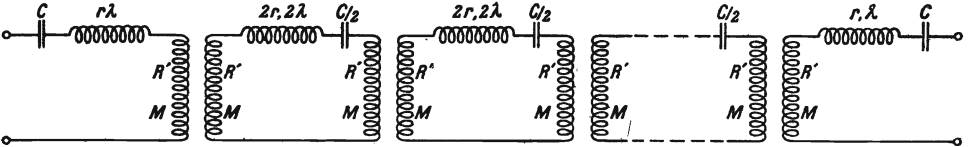


Fig. 12.

Bei Vernachlässigung aller Ohmschen Widerstände ist ferner ein Glied nach Fig. 11 äquivalent dem Gliede der Campbellschen Siebkette nach Fig. 11, falls man setzt:

$$M_1 = L' = M;$$

$$\frac{L_1}{2} = \lambda = L - M;$$

$$2 K_1 = C.$$

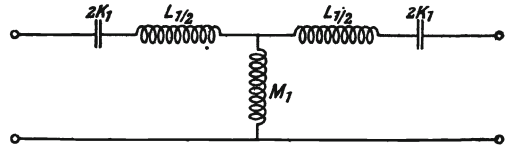


Fig. 13.

Diese Äquivalenz ist aber in dem praktisch stets vorliegenden Fall, daß der Ohmsche Widerstand der Spule M_1 nicht Null ist, nicht mehr vorhanden.

Zweiter Fall $R \neq 0$.

Für $R \neq 0$ gibt die Gleichung $\cos \gamma = A + jB$ die Gleichungen:

$$\sin^2 \beta = -\frac{1 - A^2 - B^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 - A^2 - B^2}{2}\right)^2 + B^2}$$

und
$$\sin^2 \alpha = +\frac{1 - A^2 - B^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{1 - A^2 - B^2}{2}\right)^2 + B^2},$$

wobei gilt:
$$A = \frac{L}{M} \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right) = Z \left[1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right] = Z \left(1 - \frac{1}{\vartheta^2}\right),$$

$$B = -\frac{R}{\omega M} = -\frac{Z}{\tau \omega} = -\frac{Z}{T} \cdot \frac{1}{\vartheta}.$$

Hierin ist gesetzt $\frac{L}{R} = \tau$; $\frac{L}{M} = z$; $\tau \Omega = T$; $\frac{\omega}{\Omega} = \vartheta$.

β als Funktion von ϑ hat also die beiden Parameter z (d. h. b) und T für $R \neq 0$, während für $R = 0$ nur der eine Parameter z bzw. b auftritt. Zur Untersuchung des Einflusses des Ohmschen Widerstandes R auf den Verlauf von β als Funktion von ϑ ist also für jede gegebene Lochbreite b die Kurvenschar $\beta = f(\vartheta)$ für verschiedene τ bzw. T zu berechnen. Diese Kurvenscharen geben dann auch für den Fall der Anpassung über die durch die Kette bewirkte Sprachverzerrung Aufschluß.

Für den Wellenwiderstand \mathfrak{W} erhält man aus

$$\mathfrak{W} = \sqrt{\Re' \left(\frac{1}{\mathfrak{G}} + \frac{1}{4} \Re' \right)}$$

die Beziehung:

$$\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}^0} = \vartheta \sqrt{B^2 - A^2 + 1 - j 2AB} = \vartheta \sqrt{(B^2 - A^2 + 1)^2 + (2AB)^2} e^{j\varphi/2},$$

wobei

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-2AB}{B^2 - A^2 + 1}; \quad \mathfrak{W}^0 = \mathfrak{W} \Big|_{R=0}^{\omega=\Omega} = M \cdot \Omega.$$

Für $\omega = \Omega$ wird $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}^0 \sqrt{1 + B^2} = M \cdot \Omega \cdot \sqrt{1 + B^2}$.

Aus $\gamma = \beta + j\alpha$ und \mathfrak{W} kann man dann auch in bekannter Weise beim Anschluß einer aus n Gliedern bestehenden Kette an einem Generator mit der EMK \mathcal{E} und dem inneren Widerstand R_0 den Strom J_e durch eine an das andere Ende der Siebkette angeschlossene Impedanz R_e berechnen als $F(\omega)$ nach der Gleichung:

$$\mathfrak{S}_e = \frac{\mathcal{E}}{\mathfrak{D}}, \quad \text{wo } \mathfrak{D} = (R_0 + R_e) \mathfrak{C} \operatorname{of} n\gamma + \left(\mathfrak{W} + \frac{R_0 R_e}{\mathfrak{W}} \right) \mathfrak{S} \operatorname{in} n\gamma.$$

Zusammenfassung.

Aus der Auffassung einer Kette, die aus einer beliebigen Anzahl von induktiv gekoppelten gleichen Schwingungskreisen mit gleicher Kopplung besteht, als Wagnersche Kettenleitung wird der Verlauf der Dämpfungskonstanten, der Wellenlängenkonstanten und des Wellenwiderstandes als Funktion der Frequenz bei eingeschwungenen, erzwungenen Sinusschwingungen sowohl bei Vernachlässigung des Ohmschen Widerstandes als bei Berücksichtigung desselben abgeleitet. Daraus ergibt sich auch der Verlauf des Stromes im letzten Schwingungskreis als Funktion der Frequenz für eine Wechsel-EMK konstanter Amplitude bei beliebiger Belastung der Kette am Anfang und am Ende. Es wird gezeigt, daß sich eine solche Kette verhält wie eine Wagnersche Siebkette mit einem gewissen Durchlässigkeitsgebiet der Frequenzen, außerhalb dessen alle Frequenzen stark gedämpft werden. Es werden Formeln aufgestellt zur Berechnung der Konstanten einer solchen Kette aus gegebener mittlerer Frequenz und Breite des Durchlässigkeitsgebietes und aus gegebenem Wellenwiderstand.

Einschaltvorgänge bei ein- und zweigliedrigen Siebketten beim Anlegen einer sinusförmigen EMK.

Von

Georg Krause und Arthur Clausing.

Mit 6 Textfiguren, 3 Kurvenblättern und 1 Tafel.

Mitteilung aus dem Zentral-Laboratorium des Wernerwerkes der Siemens & Halske A.G.

Eingegangen am 26. September 1921.

Zum Aussondern von einzelnen Frequenzen oder einem Bereich von Frequenzen aus einem Gemisch von eingeschwungenen Sinusschwingungen werden in der Wechselstromtechnik Resonanzgebilde benutzt. Spezielle Formen von solchen Resonanzgebilden hat Wagner¹⁾ konstruiert und als Siebketten bezeichnet. Für den eingeschwungenen Zustand wurden diese Siebketten unter Vernachlässigung des Ohmschen Widerstandes von Wagner und unter Berücksichtigung des Ohmschen Widerstandes von Salinger²⁾ eingehend untersucht. In vielen Fällen ist es, wie z. B. bei der Telegraphie mit Wechselströmen, notwendig, den Verlauf des Einschaltvorganges bei Siebketten zu kennen. Im allgemeinen liegen die Verhältnisse so, daß die Schnelligkeit des Einschwingens eine Verminderung der Selektivität bedeutet, so daß man für die gegebenen praktischen Fälle ein Kompromiß zwischen Selektivität und Schnelligkeit des Einschwingungsvorganges schließen muß. Die nachfolgenden Untersuchungen über die Einschwingvorgänge in Siebketten beim Anlegen einer sinusförmigen EMK sollen hierüber nähere Aufklärung geben; sie behandeln speziell

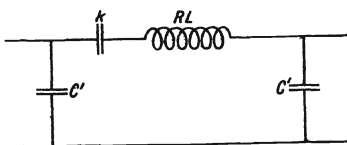


Fig. 1.

die ein- und zweigliedrige Siebkette mit Reihenkondensatoren erster Art, deren Schaltung für ein Glied Fig. 1 zeigt.

Legt man an den Siebkettenanfang einen Generator mit einem gewissen inneren Widerstand und einer sinusförmigen EMK von der Resonanzfrequenz der Siebkette, so kann man in einem am

Kettenende angeschlossenen Widerstand beobachten, daß der Strom nicht sofort seine maximale Amplitude erreicht, sondern sich aufschwingt (siehe Oszillogramme). Dieser Aufschwingungsvorgang ist verschieden bei ein- und zweigliedrigen Siebketten, weshalb auch die Lösungen getrennt durchgeführt wurden.

Zum besseren Verständnis der später häufig vorkommenden Bezeichnungen sollen vorerst die Siebketteneneigenschaften bei eingeschwungenen Zuständen kurz erläutert werden. Eine Siebkette kann nach Wagner für eine bestimmte Frequenz als homogene Leitung aufgefaßt werden mit einer Dämpfungskonstanten β und einem

¹⁾ K. W. Wagner, Archiv f. Elektrotechnik 8, 61 (1919).

²⁾ Nicht veröffentlicht.

Wellenwiderstand \mathfrak{Z} . Trägt man β als Funktion der Frequenz ω in ein Koordinatensystem ein, so erhält man ein Bild nach Kurve a in Fig. 2, wenn der Spulenwiderstand $R = 0$ ist. Kurve b ergibt sich, wenn $R \neq 0$ ist.

Bei Siebketten mit widerstandslosen Spulen — in der Praxis ist R klein — werden demnach Wechselströme mit den Frequenzen ω_2 bis ω_3 ungedämpft hindurchgelassen. Im folgenden sollen die von Salinger eingeführten und später noch genauer definierten Begriffe benutzt werden. Es soll die Differenz $\omega_3 - \omega_2$ als absolute Lochbreite und $\frac{\omega_3 - \omega_2}{\Omega}$ als relative Lochbreite bezeichnet

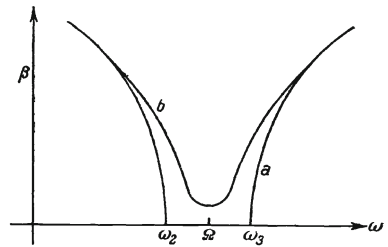


Fig. 2.

werden. Dabei bedeutet Ω eine mittlere Frequenz im Durchlässigkeitsbereich. Der vorher erwähnte Wellenwiderstand ist für die mittlere Frequenz Ω angenähert ein Ohmscher Widerstand. Diese Tatsache veranlaßte dazu, auch die Einschaltvorgänge solcher Siebketten mit rein Ohmschen Belastungswiderständen am Anfang und Ende der Kette zu untersuchen.

Die eingliedrige Siebkette.

Legt man an den Siebkettenanfang zur Zeit $t = 0^-$ eine sinusförmige EMK $E \cdot \sin \omega \cdot t$ mit einem inneren Ohmschen Widerstand r , so soll der Verlauf des Stromes i_4 in einem am Kettenende angeschlossenen Ohmschen Widerstand berechnet werden (s. Fig. 3).

Die Rechnung soll nach einer von Deutsch¹⁾ angegebenen Methode durchgeführt werden. Zu der dort angegebenen Stammgleichung kann man auch dadurch kommen, daß man den Endstrom unter Ersetzung von $j\omega$ durch p in der gewöhnlichen komplexen Rechnungsweise für eingeschwingene, erzwungene Schwingungen errechnet, so daß man ihn in der Form erhält

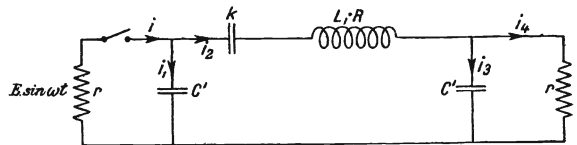


Fig. 3.

$$\mathfrak{I}_4 = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{Z}(j\omega)} = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{Z}(p)}$$

Dann liefert die Stammgleichung $\mathfrak{Z}(p) = 0$ die Eigenwerte p_x des Systems. Man erhält dann nach Deutsch den Endstrom J_4 in komplexer Form durch den Ausdruck

$$J_4 = \frac{E \cdot e^{j\omega t}}{\mathfrak{Z}(j\omega)} + \sum_x \frac{E \cdot e^{p_x \cdot t}}{(p_x - j\omega) \left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dp} \right)_{p=p_x}} \quad (1)$$

Der rein imaginäre Teil von J_4 gibt den Momentanwert i_4 .

¹⁾ Deutsch, Archiv für Elektrotechnik 1918, Heft 8.

Für eingeschwingene, erzwungene Schwingungen bestehen für eine Siebkette nach Fig. 3 folgende Beziehungen:

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{S} \cdot r = \mathfrak{S}_1 \cdot \frac{1}{pC'} \quad (2)$$

$$\mathfrak{S}_1 \cdot \frac{1}{pC'} = \mathfrak{S}_2 \left(R + pL + \frac{1}{pK} \right) + \mathfrak{S}_3 \cdot \frac{1}{pC'} \quad (3)$$

$$\mathfrak{S}_3 \cdot \frac{1}{pC'} = \mathfrak{S}_4 \cdot r \quad (4)$$

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 \quad (5)$$

$$\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_3 + \mathfrak{S}_4 \quad (6)$$

Aus diesen 5 Gleichungen erhält man durch Elimination

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{S}_4 \cdot (1 + rpC') \left[(1 + rpC') \left(R + pL + \frac{1}{pK} \right) + 2r \right] \quad (7)$$

Es ist also:

$$\mathfrak{Z}(p) = (1 + rpC') \left[(1 + rpC') \left(R + pL + \frac{1}{pK} \right) + 2r \right].$$

Für $\mathfrak{Z}(p) = 0$ ergeben sich die Eigenwerte p_x . Eine Wurzel dieser Gleichung liefert $1 + rpC' = 0$, nämlich:

$$p = p_1 = -\frac{1}{rC'}. \quad (8)$$

Die drei anderen Wurzeln der Gleichung $\mathfrak{Z}(p) = 0$ erhält man, indem man die eckige Klammer gleich Null setzt. Formt man diese noch etwas um, so erhält man:

$$p^3 + \frac{RrC' + L}{rLC'} p^2 + \frac{K(R + 2r) + rC'}{rLC'K} p + \frac{1}{rLC'K} = 0 \quad (9)$$

Nach Einführung neuer Konstanten lautet diese Gleichung

$$p^3 + ap^2 + bp + c = 0. \quad (10)$$

Hierin ist

$$a = \frac{RrC' + L}{rLC'}, \quad b = \frac{K(R + 2r) + rC'}{rLC'K}, \quad c = \frac{1}{rLC'K}.$$

Die drei Lösungen der Gleichung (10) lauten dann:

$$p_2 = u + v - \frac{a}{3} \quad (11)$$

$$p_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{a}{3} + j \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{u-v}{2} = -\delta + j\omega_0 \quad (12)$$

$$p_4 = -\frac{u+v}{2} - \frac{a}{3} - j \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{u-v}{2} = -\delta - j\omega_0 \quad (13)$$

In diesen Gleichungen bedeuten:

$$u = \sqrt[3]{-e + \sqrt{e^2 + d^3}} \quad \text{und} \quad v = \sqrt[3]{-e - \sqrt{e^2 + d^3}}.$$

Die Größen d und e haben hierin folgende Bedeutung:

$$d = -\frac{a^2}{9} + \frac{b}{3} \quad \text{und} \quad e = \frac{a^3}{27} - \frac{ab}{6} + \frac{c}{2}.$$

Da die Wurzeln p_1 und p_2 reelle Größen sind, so kann man sagen, daß das erste und zweite Summenglied in Gleichung (1) zeitlich nach einem Exponentialgesetz verläuft, und zwar sind es, wie das Einsetzen von Zahlenwerten zeigt, rasch abklingende e -Funktionen. Die Werte p_3 und p_4 sind konjugiert komplexe Größen. Das dritte und vierte Summenglied wird also den Charakter einer gedämpften Schwingung bekommen. Die Summenglieder haben folgende Form:

1. Glied: $a_1 \cdot E \cdot e^{-\frac{1}{rC'} \cdot t} (\cos \alpha_1 + j \sin \alpha_1);$
2. Glied: $a_2 \cdot E \cdot e^{-\left(\frac{\alpha}{3} - u - v\right) \cdot t} \cdot (\cos \alpha_2 + j \sin \alpha_2);$
3. Glied: $a_3 \cdot E \cdot e^{-\delta \cdot t} [\cos (\omega_0 t + \alpha_3) + j \sin (\omega_0 t + \alpha_3)];$
4. Glied: $a_4 \cdot E \cdot e^{-\delta \cdot t} [\cos (-\omega_0 t + \alpha_4) + j \sin (-\omega_0 t + \alpha_4),]$

Hierin sind die Größen a_x und α_x definiert durch die Gleichung:

$$\frac{1}{(p_x - j\omega) \left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dp} \right)_{p=p_x}} = a_x \cdot e^{j\alpha_x}$$

wo

$$\frac{d\mathfrak{Z}}{dp} = (1 + rpC')^2 \cdot \left(L - \frac{1}{p^2 K} \right) + 2rC' \left(R + pL + \frac{1}{pK} \right) (1 + rpC') + 2r^2C'.$$

Die Größe $-\delta$ ist der reelle Teil und ω_0 der imaginäre Teil von Gleichung (12). Beim zahlenmäßigen Ausrechnen — allgemein lassen sich die Ausdrücke nicht diskutieren — zeigt sich, daß das erste und zweite Summenglied klein gegen das dritte und vierte ist. Faßt man das dritte und vierte Glied zu einem mit einer Amplitude b_0 und einer Phase φ_2 zusammen, so kann man für die Summe in Gleichung (1) schreiben:

$$b_0 \cdot E \cdot e^{-\delta t} \cdot [\cos (\omega_0 t - \varphi_2) + j \sin (\omega_0 t - \varphi_2)]$$

Es ist also

$$J_4 = \frac{E}{\mathfrak{Z}(j\omega)} \cdot (\cos \omega t + j \sin \omega t) + b_0 \cdot E \cdot e^{-\delta t} \cdot [\cos (\omega_0 t - \varphi_2) + j \sin (\omega_0 t - \varphi_2)],$$

worin

$$\mathfrak{Z}(j\omega) = (1 + jr\omega C') \left\{ (1 + jr\omega C') \left[R + j \left(\omega \mathfrak{L} - \frac{1}{\omega K} \right) \right] + 2r \right\}$$

Setzt man für $\frac{1}{\mathfrak{Z}(j\omega)} = a_0 \cdot e^{j\varphi_1}$, und berücksichtigt in J_4 nur die imaginäre Komponente, so erhält man die Lösung unseres Einschaltvorganges:

$$\underline{i_4 = a_0 \cdot E \cdot \sin (\omega t + \varphi_1) + b_0 \cdot E \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin (\omega_0 t - \varphi_2)} \quad (14)$$

Diskussion des Einschaltvorganges.

Für den Fall, daß die eingepreßte Frequenz $\omega =$ der Eigenfrequenz ω_0 ist, läßt sich zeigen, daß $a_0 = b_0$ und $\varphi_1 = \varphi_2$ ist. Die Amplitude von i_4 nimmt also nach einem Exponentialgesetz zu. Die Schnelligkeit der Zunahme ist ein Maß dafür, ob ein Wechselstromwellenzug beim Durchgang durch das Siebgebilde verstümmelt wird oder nicht. Je größer der δ -Wert ist, um so schneller erreicht die Amplitude von i_4 ihren endgültigen Wert.

Gleichung (12) zeigt, daß der Dämpfungsfaktor δ abhängig ist von den fünf Größen r, R, L, K und C' . Für die Diskussion ist es praktisch, hierfür fünf neue Variable einzuführen, die allgemein bei Siebketten benutzt werden, und zwar:

$$\tau = \frac{L}{R}; \quad \Omega^2 = \frac{2K + C}{LC'K}; \quad b = \frac{\omega_3 \cdot \omega_2}{\Omega} = f(C; K; L); \quad Z = \sqrt{\frac{L}{C'}} \cdot \sqrt{\frac{2}{u}} \text{ und } r.$$

Dabei bedeuten: τ die Zeitkonstante der Spule, b die relative Lochbreite, $\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{LK}}$ die untere Lochgrenze und $\omega_3 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ die obere Lochgrenze, worin $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ und $C = 2C'$ ist. Die Größe Ω liegt zwischen ω_2 und ω_3 , da $\omega_2^2 = \Omega^2 - \frac{\omega_1^2}{2}$ und $\omega_3^2 = \Omega^2 + \frac{\omega_1^2}{2}$ ist. Der Wellenwiderstand Z der Kette mit Spulenwiderstand stimmt näherungsweise bei $\omega = \Omega$ mit dem Wellenwiderstand ohne Spulenwiderstand überein, und zwar besteht dann die Beziehung

$$Z = \sqrt{\frac{2L}{uC'}}$$

wo

$$u = 1 + \frac{C}{2K} \text{ ist.}$$

In der folgenden Diskussion soll die Zeitkonstante der Spule τ immer 0,04 sein.

1. Einfluß der Widerstände r auf δ bei gegebenem τ, Ω, b und Z .

Der Einfluß der Größe von r auf δ wurde für zwei Lochbreiten (2 vH und 9 vH), zwei Werte, Z (200 und 1500) und $\Omega = 2900$ durchgerechnet (s. Kurvenblatt I). Für diese verschiedenen Fälle erhält man folgende Kettenkonstanten:

	C'	K	L	R	
bei 1,96% Lochbreite	$Z = 200$	$1,72 \cdot 10^{-6}$	$0,0345 \cdot 10^{-6}$	3,52	88
	$Z = 1500$	$0,23 \cdot 10^{-6}$	$0,0046 \cdot 10^{-6}$	26,4	660
bei 9,1% Lochbreite	$Z = 200$	$1,725 \cdot 10^{-6}$	$5,1726 \cdot 10^{-6}$	0,76	19
	$Z = 1500$	$0,23 \cdot 10^{-6}$	$0,023 \cdot 10^{-6}$	5,70	142

Es zeigt sich, wie aus Kurvenblatt 1 ersichtlich, daß es einen für die Abklingzeit günstigsten Widerstand r_0 gibt, der gleich dem Wellenwiderstand für $\omega = \Omega$ ist.

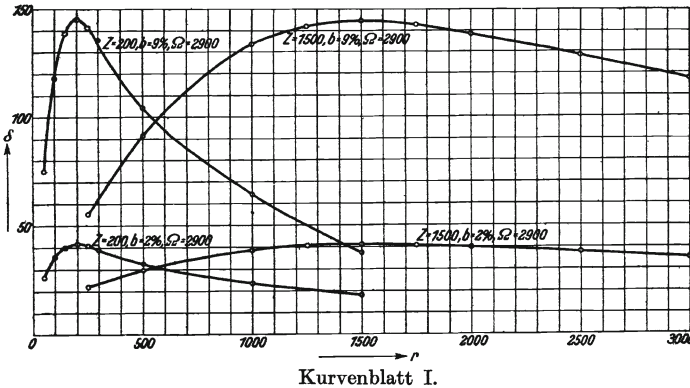
Bei diesem günstigsten Widerstand r_0 hat der Dämpfungsfaktor δ seinen größten Wert δ_0 .

Es ist

$$\frac{1}{\Omega C'} = Z.$$

Da aus Kurvenblatt 1 sich bei $\omega = \Omega$ der Wert $r_0 = Z$ ergab, so folgt auch

$$r_0 = \frac{1}{\Omega C'} \tag{15}$$



Kurvenblatt I.

Numerisch zeigt sich in den behandelten Fällen, daß die in Gleichung (14) auftretende Eigenfrequenz ω_0 übereinstimmt mit Ω . Im folgenden soll versucht werden, den δ_0 -Wert auf einfachere Weise zu gewinnen. Man ersetzt für eingeschwungene, erwungene Schwingungen in den behandelten Fällen (relativ kleine Lochbreite) die in der Siebkette auftretenden Gebilde r parallel C' durch eine äquivalente Reihenschaltung eines Ohmschen Widerstandes r_1 und einer Kapazität C_1 , wobei folgende Beziehungen bestehen

$$r_1 = \frac{r}{1 + (\omega r C')^2} \quad \text{und} \quad C_1 = \frac{C'}{(\omega r C')^2} + C'$$

Hieraus erhält man bei $\omega = \Omega$ für $r = r_0 = \frac{1}{\Omega C'}$

$$r_1 = \frac{r_0}{2} \tag{16}$$

und

$$C_1 = 2 C' . \tag{17}$$

Durch diese Beziehungen wird eine Siebkette auf einen einfachen Schwingungskreis nach Fig. 4 zurückgeführt. Die Dämpfungskonstante eines solchen Kreises ist

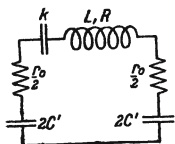


Fig. 4.

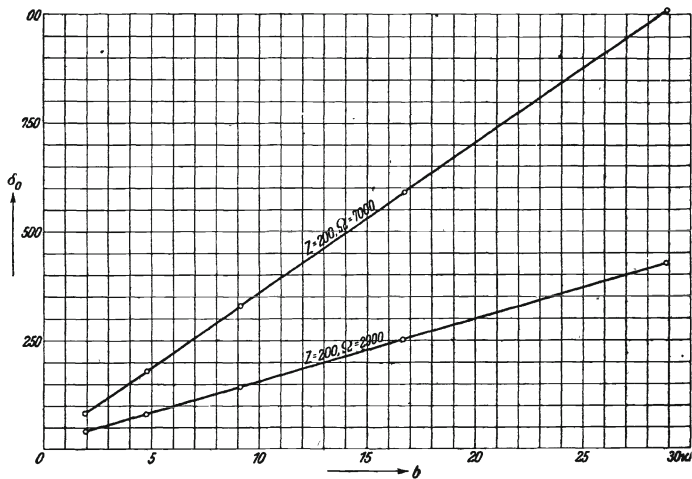
$$\delta_0 = \frac{R + 2 r_1}{2 L} \tag{18}$$

Die so errechneten Werte stimmen mit den streng gewonnenen überein.

2. Einfluß der Lochbreite b auf δ_0 bei gegebenem Ω (2900 resp. 7000) und Z .

Diesen Einfluß zeigen die Kurvenblätter 1 und 2. Danach hat ein Verdoppeln der relativen Lochbreite ungefähr ein Halbieren der günstigsten Einschwingzeit zur Folge. Ketten mit kleiner Lochbreite haben also gegenüber solchen mit großer Lochbreite lange Einschwingvorgänge.

3. Die Abhängigkeit des günstigsten Dämpfungsfaktor δ_0 von Ω bei verschiedenen Lochbreiten b und gegebenem $Z=200$ zeigt ebenfalls Kurvenblatt 2. Danach verhalten sich die günstigsten δ -Werte zweier Ketten mit gleicher Lochbreite und gleichem Wellenwiderstand wie die Frequenzen.



Kurvenblatt II.

4. Ketten mit gleicher Lochbreite, gleichem Ω , aber verschiedenem Wellenwiderstand haben in den behandelten Fällen nach Kurvenblatt 1 gleiches δ_0 .

Zur Veranschaulichung der Einflüsse der Lochbreite und der Belastungswiderstände auf die Einschwingzeit wurde der Strom im Ausgangswiderstand der Kette oszillographisch aufgenommen. Oszillogramme 1 bis 3 zeigen den Einschwingvorgang einer eingliedigen Kette von 9 vH Lochbreite, $Z = 200$ und $\Omega = 2900$ für verschiedene Belastungswiderstände $r = 50$, $r = r_0 = 200$ und $r = 400$ Ohm. Man sieht deutlich, daß die Kette bei 200 Ohm schnell auf seinen maximalen Wert eingeschwungen ist, während der Einschwingvorgang bei 50 resp. 400 Ohm wesentlich langsamer vor sich geht in Übereinstimmung mit Kurvenblatt 1. Oszillogramme 4 bis 6 zeigen den Einschwingvorgang einer eingliedigen Kette von 2 vH Lochbreite, $Z = 200$, $\Omega = 2900$ für verschiedene Belastungswiderstände $r = 50$, $r = r_0 = 200$ und $r = 400$ Ohm. Auch hier ist die Abhängigkeit der Einschwingvorgänge von den Belastungswiderständen zu bemerken, bei $r = 200$ Ohm sind diese am kürzesten, bei 50 und 400 Ohm sehr lang. Der Vergleich der Oszillogramme 2 und 5 zeigt die günstigstenfalls zu erreichenden Einschwingvorgänge für Ketten mit 9 vH und 2 vH Lochbreite. Die Oszillogramme bestätigen die Rechnung, daß nämlich Ketten mit kleiner Lochbreite wesentlich längere Zeit zum Einschwingen brauchen als solche mit großer Lochbreite. Auch die errechneten δ -Werte stimmen mit den aus den Oszillogrammen zu ermittelnden überein.

Die zweigliedrige Siebkette.

Ein Generator mit einer sinusförmigen EMK $E \cdot \sin \omega t$ mit einem inneren Ohmschen Widerstand r wird zur Zeit $t = 0$ an eine zweigliedrige Siebkette (s. Fig. 5) gelegt. Es soll der Verlauf des Stromes in einem am Kettenende angeschlossenen Ohmschen Widerstand r berechnet werden. Da die strenge Durchführung auf Schwierigkeiten stößt, soll hier der für eingliedrige Siebketten als statthaft erkannte Ersatz der tatsächlichen Schaltung (Fig. 5) durch eine vereinfachte (Fig. 6) versucht werden.

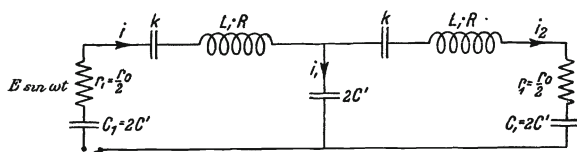


Fig. 5.

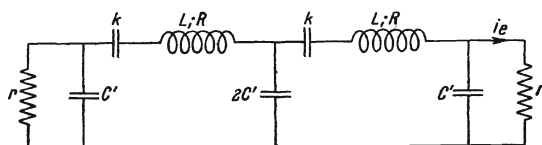


Fig. 6.

Bezüglich der für Schnelligkeit des Einschwingens günstigsten Belastungswiderstände r an kann man nach den Ergebnissen des ersten Teiles folgendes sagen: Das Einschwingen und Abklingen erfolgt nach denselben Gesetzen. Hinsichtlich des letzteren kann man aber sagen, daß die in der Siebkette aufgespeicherte Energie dann am schnellsten verzehrt wird, wenn die Energieabgabe nach außen ein Maximum ist. Das tritt aber ein, wenn die Endwiderstände r gleich dem Wellenwiderstand Z der Siebkette gewählt werden. Man hat also auch hier für die günstigsten Belastungswiderstände r den Wert $r_0 = Z = \frac{1}{\omega C'}$ zu nehmen.

Dann gilt für den äquivalenten Widerstand $r_1 = \frac{r_0}{2}$ und für die äquivalente Kapazität $C_1 = 2C'$. Dann hat man analog den Ergebnissen bei eingliedrigen

Ketten den gleichen Verlauf der Ströme i_e in Fig. 5 wie i_2 in Fig. 6 zu erwarten.

Denkt man sich also einen Generator mit einem inneren Widerstand r_1 und einer EMK $E \cdot \sin \omega t$ durch Einschalten des in Fig. 6 gezeigten Schalters plötzlich an das Siebgebilde gelegt, so soll der Stromverlauf i_2 nach Einschalten im zweiten Siebkettenglied bestimmt werden. Beide Kreise sollen die gleichen Kapazitäten, Selbstinduktionen und Widerstände haben.

Es müssen folgende Beziehungen gelten (vgl. Fig. 6):

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{I} \left[\left(R + \frac{r_0}{2} \right) + pL; + \frac{1}{p} \left(\frac{1}{2C'} + \frac{1}{K} \right) \right] = \mathfrak{I}_1 \cdot \frac{1}{2pC'} \quad (19)$$

$$\mathfrak{I}_1 \frac{1}{2pC'} = \mathfrak{I}_2 \left[\left(R + \frac{r_0}{2} \right) + pL + \frac{1}{p} \left(\frac{1}{2C'} + \frac{1}{K} \right) \right] \quad (20)$$

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 \quad (21)$$

Eliminiert man aus diesen drei Gleichungen \mathfrak{I}_2 , so erhält man:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{I}_2 \left[R + \frac{r_0}{2} + pL + \frac{1}{p} \left(\frac{1}{2C'} + \frac{1}{K} \right) \right] \left[2 + 2pC' \left\{ R + \frac{r_0}{2} + pL + \frac{1}{p} \left(\frac{1}{2C'} + \frac{1}{K} \right) \right\} \right] = \mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}_1(p) \quad (22)$$

Für $\mathfrak{I}_1(p) = 0$ ergeben sich die Eigenwerte p_x . Zwei Wurzeln der Gleichung $\mathfrak{I}_1(p) = 0$ liefert die Gleichung

$$R + \frac{r_0}{2} + pL + \frac{1}{p} \left(\frac{1}{2C'} + \frac{1}{K} \right) = 0 \quad \text{oder} \quad p^2 + p \frac{R + \frac{r_0}{2}}{L} + \frac{2C' + K}{2LC'K} = 0.$$

Hieraus ergibt sich

$$p_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{R + \frac{r_0}{2}}{2L} \right)^2 - \frac{2C' + K}{2LC'K}} - \frac{R + \frac{r_0}{2}}{2L}. \quad (23)$$

Die Werte p_3 und p_4 ergeben sich, wenn man die zweite eckige Klammer in Gleichung $\mathfrak{I}_1(p) = 0$ setzt. Es ist also

$$2 + 2pC' \left\{ R + \frac{r_0}{2} + pL + \frac{1}{p} \left(\frac{1}{2C'} + \frac{1}{K} \right) \right\} = 0 \quad \text{oder} \quad p^2 + p \frac{R + \frac{r_0}{2}}{L} + \frac{2C' + 3K}{2LC'K} = 0.$$

Hieraus ergibt sich

$$p_{3,4} = \pm \sqrt{\left(\frac{R + \frac{r_0}{2}}{2L} \right)^2 - \frac{2C' + 3K}{2LC'K}} - \frac{R + \frac{r_0}{2}}{2L}. \quad (24)$$

Da für die hier in Betracht kommenden Fälle die Ausdrücke unter den Wurzeln in Gleichung (23) und (24) beide negativ sind, so ist p_1, p_2, p_3 und p_4 komplex. Man kann die Lösungen dann schreiben:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_1 \quad \text{und} \quad p_{3,4} = -\delta \pm j\omega_2,$$

wo

$$\delta = \frac{R + \frac{r_0}{2}}{2L} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{2C' + K}{2LC'K} - \delta^2} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2C' + 3K}{2LC'K} - \delta^2}$$

ist. Daraus folgt, daß das erste und zweite Summenglied gedämpfte Schwingungen von der Frequenz ω_1 , das dritte und vierte solche von der Frequenz ω_2 sind, die nach ein und derselben e -Funktion abklingen.

Die Glieder der Summe haben die Form:

1. Glied: $E \cdot a_1 \cdot e^{-\delta t} [\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + j \sin(\omega_1 t + \alpha_1)],$
2. Glied: $E \cdot a_2 \cdot e^{-\delta t} [\cos(-\omega_1 t + \alpha_2) + j \sin(-\omega_1 t + \alpha_2)],$
3. Glied: $E \cdot a_3 \cdot e^{-\delta t} [\cos(\omega_2 t + \alpha_3) + j \sin(\omega_2 t + \alpha_3)],$
4. Glied: $E \cdot a_4 \cdot e^{-\delta t} [\cos(-\omega_2 t + \alpha_4) + j \sin(-\omega_2 t + \alpha_4)].$

Die Größen a_x und α_x ergeben sich aus der Gleichung

$$\frac{1}{(p_x - j\omega) \left(\frac{d\mathfrak{Z}_1}{dp} \right)_{p=p_x}} = a_x \cdot e^{j\alpha_x},$$

wo

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{Z}_1}{dp} = & \left[2C' \left\{ \left(R + \frac{r_0}{2} \right)^2 + L \left(\frac{1}{2C'} + \frac{1}{K} \right) \right\} + L \left(3 + \frac{2C'}{K} \right) + 8LC'p \left(R + \frac{r_0}{2} \right) \right. \\ & \left. + 6LC'p^2 - \frac{\left(\frac{1}{K} + \frac{1}{2C'} \right) \left(3 + \frac{2C'}{K} \right)}{p^2} \right]. \end{aligned}$$

In den untersuchten Fällen ist a_2 klein gegen a_1 und a_4 klein gegen a_3 . Dann besteht der Summenausdruck nur aus dem ersten und dritten Gliede. Da nun

$$\mathfrak{Z}_1(j\omega) = \left[R + \frac{r_0}{2} + j \left\{ \omega L - \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{2C'} \right) \right\} \right] \left[3 + \frac{2C'}{K} - 2\omega^2 LC' + j 2\omega C' \left(R + \frac{r_0}{2} \right) \right]$$

so kann man für $\frac{1}{\mathfrak{Z}_1(j\omega)}$ in Gleichung 1 den Wert $a_0 \cdot e^{j\varphi_1}$ setzen.

Gleichung (1) lautet mit diesen Werten

$$\begin{aligned} J_2 = & a_0 \cdot E \cdot [\cos(\omega t + \varphi_1) + j \sin(\omega t + \varphi_1)] + a_1 \cdot E \cdot e^{-\delta t} \cdot [\cos(\omega_1 t + \alpha_1) \\ & + j \sin(\omega_1 t + \alpha_1)] + a_3 \cdot E \cdot e^{-\delta t} \cdot [\cos(\omega_2 t + \alpha_3) + j \sin(\omega_2 t + \alpha_3)]. \end{aligned}$$

Wir brauchen aus dieser Gleichung nur die imaginäre Komponente zu berücksichtigen, um den wirklichen Stromverlauf i_2 zu erhalten. Es ist dann

$$i_2 = a_0 \cdot E \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + E \cdot e^{-\delta t} \cdot [a_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + a_3 \cdot \sin(\omega_2 t + \alpha_3)] \quad (25)$$

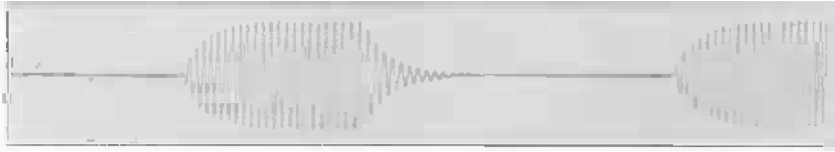
Nach dieser Gleichung verläuft der Einschaltvorgang einer zweigliedrigen Kette.

Diskussion des Einschaltvorganges.

Die Gleichung (25) sagt, daß der freie Strom [also die Glieder in der eckigen Klammer in Gleichung (25)] aus zwei voneinander verschiedenen Frequenzen besteht, die man zu einer Schwebung zusammensetzen kann. Sie klingt nach einer e -Funktion.

ab. Je größer bei gegebenem τ , Ω und Z die Lochbreite b , d. h. $\frac{K}{C}$ ist, um so weiter

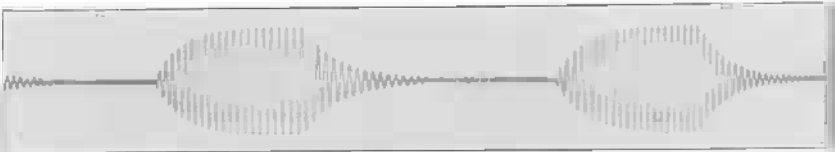
liegen ω_1 und ω_2 auseinander [vgl. Gleichung (23) und (24)]: Großer Lochbreite entspricht also feste Kopplung. Die Schwebungen werden also bei größerer Lochbreite schneller aufeinander folgen, sie werden aber auch schneller abklingen, da δ_0 mit wachsender Lochbreite wächst und die L - und C' -Werte bei gegebenem τ , Ω und Z , fallen. Für einige Fälle wurde $i_2 = F(t)$ einer zweigliedrigen Kette mit $\omega = 2900$, $Z = 120$, $\Omega = 2900$ für 16 vH Lochbreite errechnet und graphisch aufgetragen. Kurvenblatt 3 Kurve 1 zeigt diese Abhängigkeit. Von den beiden entstehenden Eigenfrequenzen ist die eine größer als die eingeprägte Frequenz ($\omega = 2900$) und zwar 3055, und die andere kleiner als diese, und zwar 2774. Der δ -Wert, der im Falle der eingliedrigen Kette unter gleichen Verhältnissen die Größe 280 hatte, ist bei der zwei-



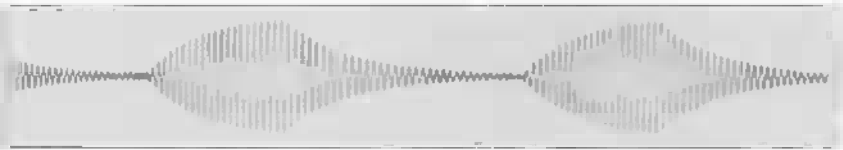
Oszillogramm 1.



Oszillogramm 2.



Oszillogramm 3.



Oszillogramm 4.



Oszillogramm 5.



Oszillogramm 6.



Oszillogramm 7.

gliedrigen Kette nur 143. Man sieht, daß der Einschwingvorgang nicht nach einer einfachen e -Funktion zunimmt, sondern langsamer. Die Amplitudenkurve der entsprechenden eingliedrigen Kette $i = 7,5 \cdot 10^{-3} (1 - e^{-143 \cdot t})$ ist zum Vergleich mit dem wirklichen Einschaltvorgang der zweigliedrigen Kette mit in das Kurvenblatt III als Kurve 2 eingetragen. Beim Ausschaltvorgang

ist bei einer zweigliedrigen Kette ein sofortiges Abfallen der Schwingung nach einer e -Funktion zu bemerken, bei der zweigliedrigen Kette bleibt die Schwingung nach dem Abschalten noch kurze Zeit in fast voller Stärke bestehen und fällt dann erst ab. Es wird also von der ersten Kette an die dahinterliegende zweite noch Energie nachgeliefert, wodurch die Schwingung nicht sofort abfällt. Oszillogramm 7 zeigt den Einschwingvorgang einer zweigliedrigen Kette mit 9 vH Lochbreite bei $r = r_0 = 200$. Die Nulllinie, die bei eingliedrigen Ketten frei von irgendwelchen Schwingungen ist, zeigt hier Wellenzüge von kleiner Amplitude. Dies ist die schon starkgedämpfte Schwebung, die hier noch deutlich erkennbar ist.

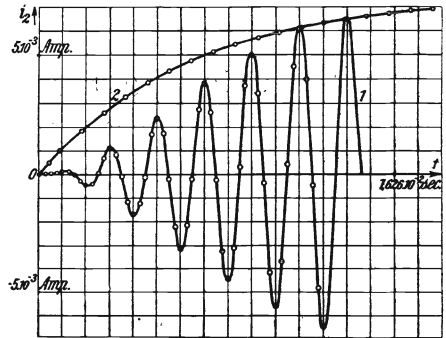
Die nach obiger Theorie berechneten δ -Werte wurden in mehreren Fällen mit den oszillographisch aufgenommenen Werten in Übereinstimmung gefunden.

Zusammenfassung.

Es wurde im Vorstehenden eine strenge Theorie der Einschaltvorgänge für eingliedrige und eine angenäherte Lösung der Einschaltvorgänge für zweigliedrige Ketten gegeben.

Für eingliedrige Ketten ist gezeigt worden, daß der Einschwingvorgang nach einer e -Funktion vor sich geht. Die günstigste Einschwingzeit ist abhängig von der Größe der Belastungswiderstände, der Lochbreite und der Frequenz, auf welche die Kette abgestimmt ist. Es gibt einen günstigsten Belastungswiderstand, mit dem die kürzeste Einschwingzeit zu erreichen ist. Dieser erweist sich in den behandelten Fällen von der Größe des Wellenwiderstandes Z . Ketten mit kleiner Lochbreite haben längere Einschwingvorgänge als solche mit großer Lochbreite. Den Einfluß der Lochbreite auf den Dämpfungsfaktor δ_0 bei konstantem Z und Ω zeigt Kurvenblatt I und II. Die δ -Werte bei II auf verschiedene Frequenzen abgestimmten eingliedrigen Siebketten mit gleicher Lochbreite und gleichem Wellenwiderstand verhalten sich wie die Resonanzfrequenzen. Ketten mit verschiedenem Wellenwiderstand, aber gleicher Lochbreite und gleicher Resonanzfrequenz haben gleiche δ_0 -Werte, also auch gleiche Einschwingzeiten.

Der Einschwingvorgang bei zweigliedrigen Ketten stellt sich als Summe einer konstanten Schwingung und einer nach einer e -Funktion abklingenden Schwebung dar. Der Dämpfungsfaktor δ erreicht günstigstenfalls den halben Wert des unter gleichen Bedingungen für eingliedrige Ketten bestimmten. Bei zweigliedrigen Ketten mit größerer Lochbreite ergeben sich schnellere Schwebungen. Zur Erzielung schneller Einschwingvorgänge sind die Widerstände am Ketteneingang und -ausgang wie bei eingliedrigen Siebketten zu bemessen.



Kurvenblatt III.

Zur Theorie und Messung des Nebensprechens in Spulenleitungen.

Von

Karl Küpfmüller.

Mit 18 Textfiguren.

Mitteilung aus dem Zentral-Laboratorium des Wernerwerkes der Siemens & Halske A. G.

Eingegangen am 26. September 1921.

1. Allgemeines.

Die Theorie derjenigen Störungen in mehrfachen Fernsprechleitungen, die durch elektrische und magnetische Kopplung zwischen je zwei Doppelleitungen hervorgerufen werden und die man als Nebensprechen bezeichnet, bildet, entsprechend der Bedeutung, welche der Frage nach ihrer Beseitigung in der Technik zukommt, den Gegenstand mehrerer in neuerer Zeit veröffentlichten eingehenden Arbeiten¹⁾. Die Mannigfaltigkeit der Umstände jedoch, die bei dieser Art von Induktionserscheinungen eine Rolle spielen, ist der Anlaß dazu, daß man, um zu einem durchsichtigen analytischen Bild der hierbei auftretenden elektrischen Vorgänge zu gelangen, erhebliche Vereinfachungen und Vernachlässigungen machen muß. Insbesondere sind in allen bis jetzt bekannt gewordenen Untersuchungen über diesen Gegenstand die Leitungen sowohl hinsichtlich ihrer elektrischen Konstanten als auch hinsichtlich der das Nebensprechen verursachenden Kopplungen als homogen vorausgesetzt worden. Bei den für die Sprachübertragung auf große Entfernungen vor allem in Frage kommenden pupinisierten Leitungen ist schon der erste Teil dieser Voraussetzung nur in roher Annäherung erfüllt, noch weniger natürlich der zweite. Es wird im folgenden eine Theorie des Nebensprechens in Spulenleitungen mitgeteilt, die den wirklichen Verhältnissen dadurch möglichst nahezukommen sucht, daß die Spulenleitung als Kettenleiter aufgefaßt wird, indem Kapazität und Widerstand des zwischen je zwei Spulen liegenden Leitungsstückes konzentriert gedacht werden. Die von K. W. Wagner begründete Theorie solcher Gebilde²⁾ ermöglicht es dann, die Verhältnisse auch in dem vorliegenden Fall zweier gekoppelten Leitungen übersichtlich und mit hinreichender Genauigkeit darzustellen. Unsere Betrachtungen gelten also folgendem Modell: Zwei Kettenleiter, bestehend aus Längsspulen L_1 , R_1 , L_2 , R_2 und Querkondensatoren C_1 und C_2 ³⁾, sind nach der in Fig. 1 dargestellten

¹⁾ Siehe besonders: L. Lichtenstein, Das Nebensprechen in kombinierten Fernsprechkreisen. J. Springer, Berlin 1920. F. Breisig, ETZ, 1921, S. 933.

²⁾ Archiv für Elektrotechnik, Bd 3, 1915, S. 315 u. Bd. 8, 1919, S. 61.

³⁾ Die Ableitung bleibt in den folgenden Betrachtungen unberücksichtigt.

Weise durch Kondensatoren k_1, k_2 gekoppelt. Diese Kopplung soll lose sein und zwar derart, daß die Ausbreitung von Wechselströmen auf jeder der beiden Leitungen praktisch so vor sich geht, als ob die andere nicht vorhanden wäre, daß also die Rückwirkung der induzierten auf die induzierende Leitung vernachlässigt werden darf. Die Zulässigkeit dieser Annahme in den wirklich vorkommenden Fällen hat auch Lichtenstein in der angeführten Arbeit ausgenutzt. Den Ergebnissen Lichtensteins folgend, lassen wir ferner die magnetische Kopplung zwischen den zwei Leitungen außer acht. Für die Rechnung werden die beiden Kondensatoren k_1 und k_2 durch einen einzigen ersetzt, dessen Kapazität k deren Serienkapazität entsprechen soll. Die Größe k stellt demnach im Modell die gesamte kapazitive Kopplung zweier entsprechenden Glieder dar; da sie von Glied zu Glied im allgemeinen verschieden sein wird, kennzeichnen wir sie näher durch k_ν für das ν te Glied vom Anfang der Kette aus und betrachten k_ν als willkürliche Funktion von ν . Die Zusammenfassung der zwischen zwei Spulen liegenden kapazitiven Kopplung durch eine punktförmige Kapazität k_ν ist in demselben Maße statthaft wie der Ersatz der Betriebskapazitäten der Spulenzwischenstücke durch die Kondensatoren C_1 und C_2 ; deren Größen sollen übrigens ebenso wie die der Spulen und Widerstände als unabhängig vom Ort, also von ν , vorausgesetzt werden. Eine weitere vereinfachende Annahme machen wir zunächst bezüglich der Leitungslänge; die Dämpfung jeder der beiden Leitungen soll nämlich so groß sein, daß unabhängig von der Belastung am fernen Ende der Scheinwiderstand jeder Leitung wesentlich gleich ihrem Wellenwiderstande ist. Die Betrachtungen gelten daher streng auch für den Fall, daß die fernen Enden durch angepaßte, d. h. den Wellenwiderständen gleiche, Scheinwiderstände abgeschlossen sind. Da das letztere mehr oder weniger praktisch immer zutreffen wird, behalten dann die Ergebnisse auch für Leitungen endlicher Länge weitgehende Gültigkeit. Die Voraussetzung loser Kopplung kann man in der Weise zur Vereinfachung der Rechnung benutzen, daß man die Wirkung von nur einer einzigen Kopplung k_ν betrachtet. Die Gesamtwirkung entsteht durch ungestörte Überlagerung aller Einzelwirkungen. Die Berechnung des Stromes, der im Empfänger der Leitung 2 durch eine auf der gleichen Leitungsseite an den Anfang der Leitung 1 gelegte Wechselspannung V_a hervorgerufen wird, geschieht daher durch Bildung der Summe $\sum_\nu I_{n\nu}$, wobei $I_{n\nu}$ den durch die Kopplung k_ν verursachten Elementarstrom im Empfänger 2 bedeutet. Die Betrachtungen beschränken sich auf sinusförmige Wechselströme und -spannungen der Kreisfrequenz ω ; zur Abkürzung wird gesetzt $\omega\sqrt{-1} = \omega j = p$.

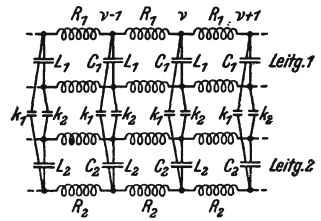


Fig. 1.

2. Berechnung des induzierten Elementarstromes.

In Fig. 2 sind die gekoppelten Kettenleiter 1 und 2 schematisch dargestellt; am Anfang der Leitung 1 liegt ein Wechselstromsender, am Anfang von Leitung 2 der beliebige Scheinwiderstand \mathfrak{R} , welcher von dem induzierten Strom I_n durchflossen wird. Nach den gemachten Voraussetzungen erfolgt die Ausbreitung längs der Leitungen im wesentlichen so, als ob sie unendlich lang wären, d. h. es ist

$$V_1 = V_a e^{-\gamma_1 r}, \tag{1}$$

wobei die Fortpflanzungskonstante γ_1 nach der Theorie der Kettenleiter¹⁾ bestimmt ist durch die Beziehung

$$\mathfrak{Cof} \gamma_1 = 1 - 2 \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 + \frac{1}{2} j \omega R_1 C_1. \quad (2a)$$

ω_1 ist die Grenzfrequenz der Leitung 1, das ist diejenige Frequenz, oberhalb

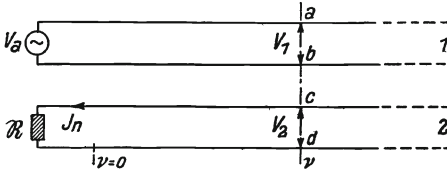


Fig. 2.

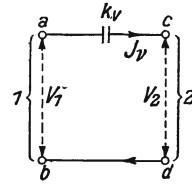


Fig. 3.

welcher die Leitung für Sprechströme undurchlässig ist; sie wird berechnet nach der Formel

$$\omega_1 = \frac{2}{\sqrt{L_1 C_1}}. \quad (2b)$$

Fig. 3 stellt einen Schnitt durch das Modell an der Stelle ν dar. Die Spannung V_1 verursacht den über die Punkte c und d fließenden Strom I_ν . Da der zwischen c und d liegende Scheinwiderstand, der mit r_ν bezeichnet werden soll, klein ist gegen den des Kondensators k_ν , so ist es hinreichend genau, wenn man setzt

$$I_\nu = V_1 k_\nu p,$$

oder mit Gleichung (1)

$$I_\nu = V_a k_\nu p e^{-\gamma_1 \nu}. \quad (3)$$

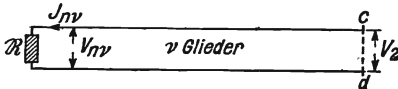


Fig. 4.

Damit wird die Spannungsdifferenz zwischen c und d

$$V_2 = I_\nu r_\nu = V_a r_\nu k_\nu p e^{-\gamma_1 \nu}. \quad (4)$$

Es handelt sich nun zunächst darum, die Größe r_ν zu berechnen. Für den ν -gliedrigen Kettenleiter zwischen $\nu = 0$ und cd , Fig. 4, gelten wie bei homogenen Leitungen die bekannten Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} V_2 &= V_{n\nu} \mathfrak{Cof} \gamma_2 \nu + I_{n\nu} \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Sin} \gamma_2 \nu, \\ I_2 &= I_{n\nu} \mathfrak{Cof} \gamma_2 \nu + \frac{V_{n\nu}}{\mathfrak{B}_2} \mathfrak{Sin} \gamma_2 \nu, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

wobei jedoch

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_2 &= \sqrt{\frac{R_2 + j \omega L_2}{j \omega C_2}} \frac{1}{\mathfrak{Cof} \frac{\gamma_2}{2}}, \\ \mathfrak{Cof} \gamma_2 &= 1 - 2 \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 + \frac{1}{2} j \omega R_2 C_2, \\ \omega_2 &= \frac{2}{\sqrt{L_2 C_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Setzt man $\frac{V_2}{I_2} = r'_\nu$, so ergibt sich mit Gleichung (5) und der Beziehung $V_{n\nu} = \Re I_{n\nu}$,

$$r'_\nu = \mathfrak{B}_2 \frac{\Re \mathfrak{Cof} \gamma_2 \nu + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{Sin} \gamma_2 \nu}{\mathfrak{B}_2 \mathfrak{Cof} \gamma_2 \nu + \Re \mathfrak{Sin} \gamma_2 \nu} \quad (7)$$

¹⁾ Siehe K. W. Wagner a. a. O.

als Scheinwiderstand des zwischen cd und dem Anfang liegenden Teiles vom Kettenleiter 2. Nach Fig. 2 liegt rechts von cd der unendlich lange Kettenleiter (bzw. die durch einen angepaßten Widerstand abgeschlossene Leitung von endlicher Länge) mit dem Scheinwiderstand r'_v . Man bemerkt, daß

$$r'_v = \mathfrak{B}_2. \quad (8)$$

Aus r'_v und r''_v folgt r_v durch Parallelschaltung:

$$r_v = \frac{r'_v r''_v}{r'_v + r''_v}.$$

Hieraus ergibt sich mittels der Gleichungen (7) und (8)

$$r_v = \frac{\mathfrak{B}_2 \Re \mathcal{C}o[\gamma_2 \nu] + \mathfrak{B}_2 \Im \sin \gamma_2 \nu}{\mathfrak{B}_2 \mathcal{C}o[\gamma_2 \nu] + \Re \Im \pi \gamma_2 \nu},$$

$$\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}_2 \frac{\Re \mathcal{C}o[\gamma_2 \nu] + \mathfrak{B}_2 \Im \pi \gamma_2 \nu}{\mathfrak{B}_2 \mathcal{C}o[\gamma_2 \nu] + \Re \Im \pi \gamma_2 \nu},$$

oder nach einer einfachen Umformung

$$r_v = \frac{\mathfrak{B}_2}{\Re + \mathfrak{B}_2} e^{-\gamma_2 \nu} [\Re \mathcal{C}o[\gamma_2 \nu] + \mathfrak{B}_2 \Im \sin \gamma_2 \nu].$$

Dadurch kann man nach Gleichung (4) die zwischen den Punkten c und d hervorgerufene Spannungsdifferenz V_2 ermitteln zu

$$V_2 = V_a \frac{\mathfrak{B}_2}{\Re + \mathfrak{B}_2} k_\nu p [\Re \mathcal{C}o[\gamma_2 \nu] + \mathfrak{B}_2 \Im \sin \gamma_2 \nu] e^{-(\gamma_1 + \gamma_2) \nu}. \quad (9)$$

In dem ν -gliedrigen Kettenleiter (Fig. 4) besteht in bekannter Weise die Beziehung

$$V_2 = V_{n\nu} \mathcal{C}o[\gamma_2 \nu] + I_{n\nu} \mathfrak{B}_2 \Im \sin \gamma_2 \nu,$$

oder

$$V_2 = I_{n\nu} [\Re \mathcal{C}o[\gamma_2 \nu] + \mathfrak{B}_2 \Im \sin \gamma_2 \nu],$$

$$I_{n\nu} = \frac{V_2}{\Re \mathcal{C}o[\gamma_2 \nu] + \mathfrak{B}_2 \Im \sin \gamma_2 \nu}. \quad (10)$$

$I_{n\nu}$ ist der durch die Kopplung k_ν verursachte Elementarstrom im Empfänger der induzierten Leitung; nach den Gleichungen (9) und (10) ergibt er sich zu

$$I_{n\nu} = V_a \frac{\mathfrak{B}_2}{\Re + \mathfrak{B}_2} k_\nu p e^{-(\gamma_1 + \gamma_2) \nu}. \quad (11)$$

3. Die Größe des Nebensprechens.

Wegen der vernachlässigbaren Rückwirkung der in Leitung 2 induzierten Ströme und Spannungen auf die Stromverteilung in Leitung 1 superponieren sich die einzelnen Elementarströme $I_{n\nu}$ nach dem Gesetz

$$I_n = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} I_{n\nu};$$

n ist dabei die Anzahl der Leitungsglieder einer Leitung. Unter Benutzung von Gleichung (11) wird daher

$$I_n = V_a \frac{\mathfrak{B}_2}{\Re + \mathfrak{B}_2} \sum_{\nu} k_\nu p e^{-(\gamma_1 + \gamma_2) \nu}. \quad (12)$$

Die hier auftretende Summe, die sich dann auswerten läßt, wenn die Funktion k_v in ihrer Abhängigkeit von v bekannt ist, ist kennzeichnend für die Wirkung der kapazitiven Kopplung der beiden Leitungen; wir setzen abkürzend

$$\sum k_v p e^{-(\gamma_1 + \gamma_2)v} = \psi; \tag{13}$$

ψ ist für eine gegebene Leitung eine bestimmte Funktion der Frequenz. Um ein Bild über den Verlauf dieser Funktion zu erhalten, betrachten wir einige einfachen Fälle.

1. Es sei k_v für alle v konstant gleich k , d. h. es werde der Fall betrachtet, auf den sich die früheren Untersuchungen beschränkten. Die Leitungen sollen in der Mitte eines Spulenzwischenstückes beginnen und enden; es muß daher für $v = 0$ $k_v = \frac{1}{2} k$ gesetzt werden. Die Funktion k_v hat etwa den durch Fig. 5 vorgeschriebenen Verlauf. Es handle sich um das Übersprechen von

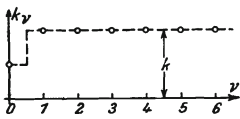


Fig. 5.

Stamm auf Stamm in einem Kabelvierer, sodaß also

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma, \quad \mathfrak{Z}_1 = \mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{Z}$$

gesetzt werden kann. Es wird dann nach Gleichung (13)

$$\psi = \frac{k}{2} p + k p \sum_{v=1}^{v=n} e^{-2\gamma v}.$$

Die Summierung der geometrischen Reihe liefert

$$\psi = k p \left[\frac{1 - e^{-2\gamma(n+1)}}{1 - e^{-2\gamma}} - \frac{1}{2} \right],$$

oder

$$\psi = \frac{k p}{2} \left[\frac{1 + e^{-2\gamma}}{1 - e^{-2\gamma}} - 2 \frac{e^{-2\gamma(n+1)}}{1 - e^{-2\gamma}} \right],$$

$$\psi = \frac{k p}{2} \left[\mathfrak{C} \cotg \gamma - 2 \frac{e^{-2\gamma(n+1)}}{1 - e^{-2\gamma}} \right].$$

Setzen wir der Einfachheit halber Leitungen voraus, deren Gesamtdämpfung so groß ist, daß hier der Beitrag des zweiten Gliedes gegen das erste praktisch verschwindet, so ergibt sich

$$\psi = \frac{k p}{2} \mathfrak{C} \cotg \gamma.$$

Da der Ohmsche Leitungswiderstand im allgemeinen eine untergeordnete Rolle spielt, kann man ihn zunächst vernachlässigen und Gleichung (2a) einsetzen. Damit wird

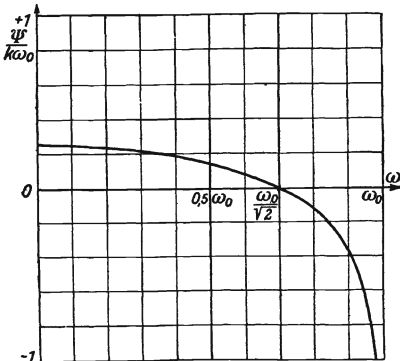


Fig. 6a.

$$\psi = \frac{k \omega_0}{4} \frac{1 - 2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \quad \left(\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{LC}} \right). \tag{13a}$$

Diese Beziehung gilt mit großer Annäherung. Der Verlauf von ψ ist in Fig. 6a aufgezeichnet. An der Stelle $\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ ist das Winkelmaß α der Leitung gleich $\frac{\pi}{2}$, daher heben sich die Wirkungen aller Kopplungskondensatoren auf, an der Stelle

$\omega = \omega_0$ ist $\alpha = \pi$, die Elementarströme liegen alle in gleicher Phase. Berücksichtigt man den Ohmschen Widerstand, also die Dämpfung β , so besitzt ψ einen im allgemeinen kleinen imaginären Anteil, ferner bleibt diese Größe für $\omega = \omega_0$ endlich. Im einzelnen ist dann für

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} & \psi &\approx j \frac{\omega_0}{2\sqrt{2}} k \Im g \beta, \\ \omega &= \omega_0 & \psi &\approx j \frac{\omega_0}{2\sqrt{2}} k \Im \cotg \beta. \end{aligned}$$

Der Verlauf des Betrages von ψ ist bei Berücksichtigung der Verluste in Fig. 6 b aufgezeichnet.

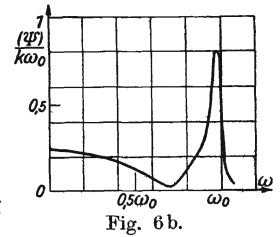


Fig. 6 b.

2. Die Kopplung k_ν sei nach einem Gesetz verteilt, das in Fig. 7 dargestellt ist. Es sei demnach:

$$\begin{aligned} k_\nu &= +k \text{ für geradzahlige } \nu, \\ k_\nu &= -k \text{ für ungeradzahlige } \nu, \\ k &= \frac{1}{2} k \text{ für } \nu = 0. \end{aligned}$$

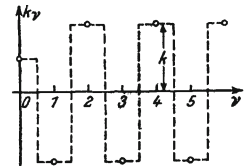


Fig. 7.

Nach Gleichung (13) ist wieder unter der vereinfachenden Annahme zweier gleichen Leitungen von großer Länge:

$$\begin{aligned} \psi &= kp [1 - e^{-2\gamma} + e^{-4\gamma} - \dots - \frac{1}{2}], \\ \psi &= kp \left[\frac{1}{1 + e^{-2\gamma}} - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} kp \Im g \gamma. \end{aligned}$$

Unter Benützung von Gleichung (2a) folgt hieraus bei Vernachlässigung der Verluste

$$\psi = -k\omega_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}}{1 - 2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}. \tag{13 b}$$

Der Verlauf dieser Funktion ist in Fig. 8a dargestellt. Man hat hier wieder die beiden kritischen Frequenzen ω_0 und $\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$; nunmehr unterstützen sich die Wirkungen jedoch in der Umgebung von $\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$, sie kompensieren sich für $\omega = \omega_0$. Auch hier erhält man bei diesen Frequenzstellen endliche Werte von ψ , wenn man die Verluste nicht vernachlässigt. Man findet leicht für

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} & \psi &\approx j \frac{k\omega_0}{2\sqrt{2}} \Im \cotg \beta, \\ \omega &= \omega_0 & \psi &\approx j \frac{k\omega_0}{2\sqrt{2}} \Im g \beta. \end{aligned}$$

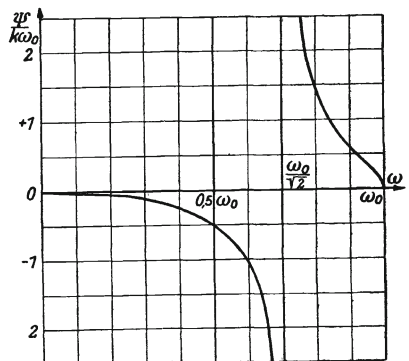


Fig. 8 a.

Fig. 8 b zeigt wiederum den Verlauf des Betrages von ψ bei Berücksichtigung der Verluste in den Leitungen.

3. Für die zweigliedrige Leitung nach Fig. 9 sei $k_2 = k_0$, $k_1 = 3 k_0$. Aus Gleichung (13) folgt bei Vernachlässigung der Verluste

$$\psi = k_0 \omega_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) [(1 + 3 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha)j + 3 \sin 2\alpha + \sin 4\alpha],$$

wobei $\cos \alpha = 1 - 2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2$. In Fig. 10 ist der hieraus berechnete Betrag von ψ in seiner Abhängigkeit von ω aufzeichnet. Schon bei zwei Gliedern ist also ein

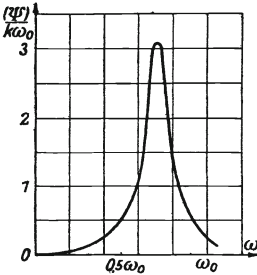


Fig. 8b.

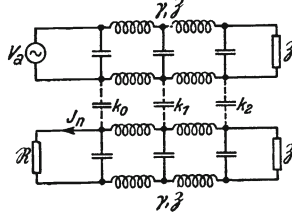


Fig. 9.

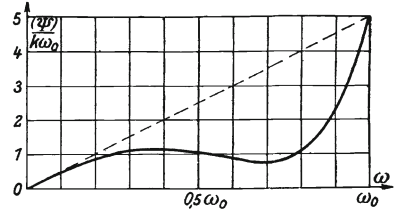


Fig. 10.

beträchtlicher Einfluß der Spulen auf das Nebensprechen bemerkbar. Die erhöhte Induktivität bewirkt im allgemeinen eine Verminderung des Nebensprechens. Die Funktion ψ würde bei der nicht pupinisierten Leitung gleicher Länge und gleicher Kopplung so verlaufen, wie es die gestrichelte Kurve andeutet.

4. Die Messung der „Dämpfungszahl β_n des Nebensprechens“.

Aus den soeben behandelten einfachen und wichtigen Fällen ersieht man, daß die Funktion ψ und damit die Stromstärke des Nebensprechens in ihrer Frequenzabhängigkeit den mannigfachsten Verlauf aufweisen kann. Dieser Verlauf ist wesentlich abhängig von der Art der Verteilung der k , längs der Leitung, die natürlich ganz willkürlich sein kann. Daraus geht hervor, daß die Nachbildung der Verzerrung des

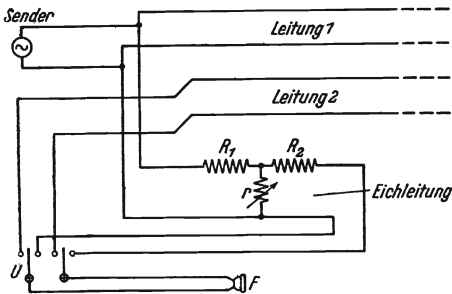


Fig. 11.

Nebensprechens in langen Spulenleitungen, wie sie zur Anwendung der bekannten Methode der vergleichenden Dämpfungsbestimmung¹⁾ zwecks lauttreuer Wiedergabe der Sprache erforderlich wäre, in einfacher Weise nicht möglich ist, und daß man daher auf die Messung mit Sinusströmen angewiesen ist. Für eine solche Messung, deren Anordnung in Fig. 11 dargestellt ist, kann man dann die bekannten sog. verzerrungsfreien Eichleitungen verwenden, die aus

Ohmschen Widerständen r , R_1 , R_2 zusammengesetzt sind. Die Meßmethode besteht bekanntlich darin, daß man die Eichleitung in ihrer Dämpfung solange verändert, bis in beiden Stellungen des Umschalters U im Fernhörer F gleiche Lautstärke wahrnehmbar ist. Die Dämpfung β_0 der Eichleitung wird dann als Maß für die Stärke des Nebensprechens angesehen. Es ist durch die früheren Untersuchungen bekannt geworden,

¹⁾ F. Breisig, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges., 1910, Nr. 5.

daß die Angabe der Eichleitung in hohem Maße abhängig ist von ihrer Dimensionierung; diese Untersuchungen haben gezeigt, daß zur Erzielung einer einwandfreien Messung die Eingangswiderstände der Eichleitung übereinstimmen müssen mit denen der beiden Leitungen 1 und 2, daß also etwa für den vorliegenden Fall $R_1 = \mathfrak{Z}_1$ und $R_2 = \mathfrak{Z}_2$ sein müssen. Wegen der Frequenzabhängigkeit des Wellenwiderstandes bei Spulenleitungen sind hier diese Bedingungen nicht einfach zu erfüllen. Es bietet sich indessen ein einfacher Ausweg, den man auffindet, wenn man den Fehler berechnet, der sich einstellt, wenn die Scheinwiderstände der Eichleitung verschieden von denjenigen der Leitung sind. Dazu ist folgende kleine Betrachtung nötig.

Zunächst muß die „Dämpfungszahl des Nebensprechens“ β_n , an Hand der gewonnenen Beziehungen definiert werden. Nach den Gleichungen (12) und (13) ist

$$I_n = V_a \frac{\mathfrak{Z}_2 \psi}{\mathfrak{R} + \mathfrak{Z}_2}, \tag{14}$$

ferner besteht die Beziehung $\mathfrak{R} = \frac{V_n}{I_n}$. In Gleichung (14) eingesetzt, ergibt das

$$V_n + I_n \mathfrak{Z}_2 = \psi V_a \mathfrak{Z}_2 \psi,$$

oder

$$\left. \begin{aligned} V_a &= \frac{1}{\mathfrak{Z}_2 \psi} V_n + \frac{1}{\psi} I_n, \\ I_a &= \frac{1}{\mathfrak{Z}_1 \psi} I_n + \frac{1}{\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2 \psi} V_n. \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

ferner

In der herkömmlichen Weise definiert man nun β_n durch den Ansatz²⁾

$$\frac{1}{2} e^{\beta_n} \approx \left| \sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2} \right| = \left| \frac{1}{\psi \sqrt{\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2}} \right|. \tag{16}$$

Wir wollen zunächst den Fall zweier Leitungen mit gleichen Eigenschaften ins Auge fassen; hierfür wird

$$\frac{1}{2} e^{\beta_n} = \left| \frac{1}{\psi \mathfrak{Z}} \right|; \quad e^{-\beta_n} = \left| \frac{\psi \mathfrak{Z}}{2} \right|. \tag{17}$$

Diese Beziehung, in Gleichung (14) eingesetzt, liefert

$$\left| I_n \right| = \left| V_a \right| \frac{2 e^{-\beta_n}}{\left| \mathfrak{R} + \mathfrak{Z} \right|}. \tag{18}$$

Für die Dämpfungszahl β_0 der Eichleitung (Fig. 12) gilt ferner wegen der hier vorkommenden großen Dämpfungen genügend genau

$$\frac{1}{2} e^{\beta_0} = 1 + \frac{R}{r}.$$

Die Spannung V_a hat am Ende der Eichleitung einen Strom I_e zur Folge von der Größe

$$I_e = V_a \frac{r}{(r + R)(\mathfrak{R} + R)}$$

oder

$$I_e = V_a \frac{2 e^{-\beta_0}}{\mathfrak{R} + R}.$$

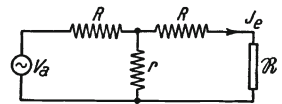


Fig. 12.

¹⁾ Daß hier die bekannte Beziehung $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = 1 + \mathfrak{B} \mathfrak{C}$ ersetzt ist durch $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B} \mathfrak{C}$, rührt daher, daß durch die gemachten Vernachlässigungen bereits die Relation $\mathfrak{B} \mathfrak{C} \gg 1$ berücksichtigt wurde.

²⁾ Siehe F. Breisig, Theoretische Telegraphie, 1910, S. 297.

Dabei ist r gegen $\Re + R$ vernachlässigt. Macht man gemäß der Meßmethode $|I_e| = |I_n|$, so wird nach Gleichung (18):

$$\frac{e^{-\beta_n}}{|\Re + \Im|} = \frac{e^{-\beta_0}}{|\Re + R|}; \quad e^{\beta_n} = \left| \frac{\Re + R}{\Re + \Im} \right| e^{\beta_0}.$$

Im allgemeinen ist $R = \Im + z$; dann wird

$$e^{\beta_n} = e^{\beta_0} \left| \left(1 + \frac{z}{\Re + \Im} \right) \right|. \quad (19)$$

Die Messung des Dämpfungsfaktors in der vorausgesetzten Weise liefert also nicht nur in dem bekannten Falle, daß $z = 0$, $R = \Im$, richtige Werte, sondern auch dann, wenn \Re sehr groß ist. Da die erste dieser beiden Möglichkeiten bei Spulenleitungen nur schwer zu erfüllen ist, empfiehlt es sich daher, zur Messung Empfangsapparate mit möglichst hohem Scheinwiderstand (hochohmige Telephone, Verstärker) zu benützen. Läßt man einen Fehler in der Bestimmung von β_n von höchstens 0,2 zu, so ergibt sich aus Gleichung (19), daß es genügt, R kleiner als $2|\Im|$ und $|\Re|$ etwa gleich viermal $|\Im|$ zu machen. Die Verwendung der üblichen verzerrungsfreien Eichleitungen und Sinusströmen liefert unter Beachtung dieser Regel einwandfreie Resultate beim Messen des Übersprechens.

Der Fall, daß \Im_1 von \Im_2 verschieden ist, macht eine besondere Betrachtung erforderlich. Es wäre erwünscht, daß man hierbei, beispielsweise wenn es sich um die Bestimmung des Mitsprechens in Kabelvierern handelt, ebenfalls Eichleitungen nach Fig. 12, bei denen also $R_1 = R_2$ ist, verwenden könnte. Das ist in der Tat möglich. An Hand der Gleichung (15) definieren wir zwei verschiedene Größen β_{n_1} und β_{n_2} , die das Nebensprechen von Leitung 1 auf Leitung 2 bzw. von Leitung 2 auf Leitung 1 charakterisieren sollen, vermittels der Ansätze

$$\frac{1}{2} e^{\beta_{n_1}} = \frac{1}{|\Im_2 \psi|}, \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} e^{\beta_{n_2}} = \frac{1}{|\Im_1 \psi|}. \quad (21)$$

Nach Gleichung (14) läßt sich dann $|I_n|$ darstellen durch

$$|I_n| = |V_a| \frac{2 e^{-\beta_{n_1}}}{|\Re + \Im_2|}; \quad (22)$$

ganz entsprechend natürlich für das Nebensprechen 2 auf 1. Hieraus ersieht man, daß für die Größen β_{n_1} und β_{n_2} genau das gleiche gilt, was oben für die Messung von β_n ermittelt wurde. Es genügt, eine in weiten Grenzen willkürlich dimensionierte Eichleitung zu verwenden, wenn man darauf achtet, daß das Empfangsorgan einen im Vergleich zu den Wellenwiderständen \Im_1 und \Im_2 hohen Scheinwiderstand besitzt. Für das Mitsprechen bekommt man in diesem Falle also zwei verschiedene Dämpfungszahlen. Aus diesen läßt sich in einfachster Weise die wie üblich definierte Dämpfungsgröße β_n , Gleichung (16), berechnen. Nach den Gleichungen (20) und (21) ist nämlich:

$$\frac{1}{4} e^{\beta_{n_1} + \beta_{n_2}} = \left| \frac{1}{\Im_1 \Im_2 \psi^2} \right|, \quad \frac{1}{2} e^{\frac{\beta_{n_1} + \beta_{n_2}}{2}} = \left| \frac{1}{\psi \sqrt{\Im_1 \Im_2}} \right|;$$

oder

$$\beta_n = \frac{\beta_{n_1} + \beta_{n_2}}{2}. \quad (23)$$

Man hat also aus den beiden gemessenen Werten das arithmetische Mittel zu bilden.

Wegen der in Abschnitt 3 dargelegten komplizierten Frequenzabhängigkeit der Größen β_n empfiehlt es sich, die Messungen bei mindestens drei Frequenzen vorzunehmen, etwa bei $\omega = 3000, 5000$ und 8000 .

5. Die Störwirkung des Nebensprechens.

Maßgebend für die Wirkung des Nebensprechens auf den Empfänger der induzierten Leitung ist zunächst die Stärke des Stromes I_n , der gemäß Gleichung (22) hervorgebracht wird durch die am Anfange der sendenden Leitung tätige Wechsel-EMK V_a :

$$|I_n| = |V_a| \frac{2}{|\Re + \Im_2|} e^{-\beta_{n1}}.$$

Aus dieser Beziehung ist ersichtlich, daß hierbei neben dem Dämpfungsexponenten β_{n1} auch die Größe des Wellenwiderstandes \Im_2 eine wesentliche Rolle spielt; je größer \Im_2 ist, um so kleiner wird I_n . Da die Störwirkung indessen durch das Verhältnis der Stärke des Störstromes zur Stärke des ankommenden Sprechstromes bestimmt wird, ist dieser Einfluß nur ein scheinbarer. Die folgende kleine Rechnung gibt darüber Aufschluß.

Eine am entfernten Ende der begrenzten Leitung 2 mit dem Dämpfungsmaß $\beta_2 l$ vorhandene Sendespannung V_a erzeugt nach den bekannten Ausbreitungsgesetzen im Empfänger \Re unter den angenommenen Grenzbedingungen einen Strom von der Stärke:

$$|I_0| = |V_a| e^{-\beta_2 l} \frac{2}{|\Re + \Im_2|};$$

daher wird mit Gleichung (22)

$$\frac{|I_n|}{|I_0|} = e^{-(\beta_{n1} - \beta_2 l)}. \quad (24)$$

Die Größe der Störwirkung des Nebensprechens von Leitung 1 auf Leitung 2 ist also nur bestimmt durch die Differenz der durch Gleichung (20) definierten und meßbaren Dämpfungszahl β_{n1} des Nebensprechens von Leitung 1 auf Leitung 2 und der Dämpfung der Leitung 2 selbst. Diese Differenz werde mit η_1 bezeichnet,

$$\eta_1 = \beta_{n1} - \beta_2 l.$$

Ihre Kenntnis ist notwendig und reicht hin zur Beurteilung der Güte einer Leitung in bezug auf das Nebensprechen. Es ist bemerkenswert, daß den Größen β_{n1} und β_{n2} hier eine tiefere physikalische Bedeutung zukommt, als ihrem sonst gebräuchlichen arithmetischen Mittelwert.

6. Eichleitung zum Messen hoher Dämpfungszahlen.

Es wurde gezeigt, daß die Bestimmung der Stärke des Nebensprechens in Spulenleitungen mit verzerrungsfreien Eichleitungen unter Verwendung von Sinusströmen erfolgen kann, wenn man darauf achtet, daß die Eingangswiderstände der Eichleitung grob angenähert gleich sind dem Wellenwiderstande der induzierten Leitung, und der Scheinwiderstand des Empfangsorgans groß gegen diesen gewählt wird. Als Eich-

leitungen kommen dann die beiden gleichwertigen Formen Fig. 13 und 14 in Frage. Wegen der hier vorkommenden großen Dämpfungszahlen stellt sich jedoch beim Bau solcher Eichleitungen eine Schwierigkeit heraus. Es ist bekanntlich angenähert für große β_0

$$\frac{1}{2} e^{\beta_0} = \frac{R}{r},$$

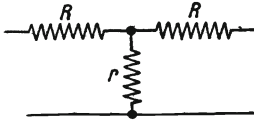


Fig. 13.

beispielsweise für:

$$\beta_0 = 8 \quad \frac{R}{r} = 1490,$$

$$\beta_0 = 10 \quad \frac{R}{r} = 11\,015.$$

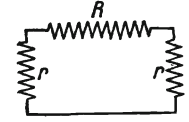


Fig. 14.

Handelt es sich etwa um Leitungen mit einem mittleren Wellenwiderstand von $\mathfrak{Z} = 1000 \Omega$, so muß für die Eichleitung (Fig. 13) sein $R = 1000 \Omega$.

Hieraus für:

$$\beta_0 = 8 \quad r = 0,675 \Omega,$$

$$\beta_0 = 10 \quad r = 0,09 \Omega.$$

Da r veränderlich gemacht werden muß, also Kontakte vorhanden sind, eignen sich diese Werte ihrer Kleinheit wegen schlecht zur praktischen Ausführung.

Für die Eichleitung (Fig. 14) folgt $r = 1000 \Omega$, ferner für:

$$\beta_0 = 8 \quad R = 1\,490\,000 \Omega,$$

$$\beta_0 = 10 \quad R = 11\,015\,000 \Omega.$$

Hier werden die Werte für R unausführbar groß.

Um diese Unzulänglichkeiten zu beseitigen, wird im folgenden eine Schaltung beschrieben, die zu praktisch ausführbaren Werten führt und allgemein in den Fällen

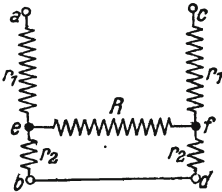


Fig. 15.

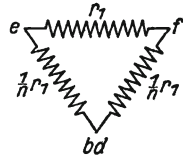


Fig. 16a.

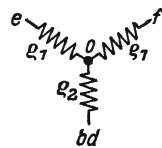


Fig. 16b.

verwendet werden kann, wo es sich um die Nachbildung hoher Dämpfungszahlen handelt. Sie beruht darauf, daß die Widerstände r in der Eichleitung (Fig. 13) unterteilt sind und der Widerstand R zwischen die Teilpunkte gelegt wird (Fig. 15). Dabei muß r_2 klein gegen r_1 gemacht werden. Um ein Bild von der Wirkung dieser Anordnung zu bekommen, setze man R gleich r_1 , $r_1 = n r_2$, wobei n groß gegen 1. Dann verwandle man das Dreieck efb (Fig. 16a) in den sog. widerstandstreuern Stern¹⁾ (Fig. 16b). Dessen Schenkel ergeben sich in bekannter Weise zu:

$$\varrho_1 = \frac{\frac{1}{n} r_1}{\frac{2}{n} r_1 + r_1}, \text{ oder da } n \gg 1, \quad \varrho_1 \approx \frac{r_1}{n};$$

$$\varrho_2 \approx \frac{r_1}{n^2}.$$

¹⁾ Siehe z. B. Herzog u. Feldmann, Die Berechnung elektr. Leitungsnetze, Berlin 1903, S. 205.

Die Eichleitung kann also ersetzt gedacht werden durch die Schaltung nach Fig. 17. Hierfür gilt aber der bekannte Ansatz:

$$\frac{1}{2} e^{\beta_0} \approx \frac{r_1}{r_1/n^2} = n^2. \tag{25}$$

Dadurch, daß die Zahl n sich hier als gleich der Quadratwurzel von $\frac{1}{2} e^{\beta_0}$ erweist, erhält man für die Widerstände praktisch ausführbare Werte, deren Größenordnungen sich ergeben zu:

$$\begin{aligned} r_1 &\approx |\mathfrak{B}|, & R &\approx |\mathfrak{B}|, \\ r_2 &= |\mathfrak{B}| \sqrt{2 e^{-\beta_0}}. \end{aligned}$$

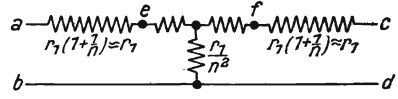


Fig. 17.

Beispielsweise ist in dem obenbetrachteten Fall:

$$|\mathfrak{B}| \approx r_1 \approx R = 1000 \Omega,$$

und für:

$$\beta_0 = 8 \quad r_2 = 26 \Omega,$$

$$\beta_0 = 10 \quad r_2 = 9,5 \Omega.$$

Zweckmäßig macht man r_2 fest und R veränderlich. Dann gilt nach Fig. 18:

$$\begin{aligned} Q_2 &\approx \frac{r_2^2}{R}; & \frac{1}{2} e^{\beta_0} &= \frac{r_1}{Q_2}, \\ e^{\beta_0} &= 2 \frac{r_1}{r_2^2} R. \end{aligned} \tag{26}$$

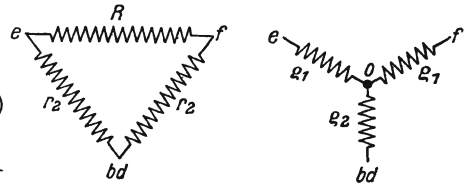


Fig. 18.

Den Wert r_2 wählt man aus einem maximalen β_0 nach der Beziehung

$$r_2 = r_1 \sqrt{2 e^{-\frac{1}{2}\beta_0}} \tag{27}$$

und macht

$$r_1 \approx |\mathfrak{B}|.$$

Die Dämpfung berechnet sich dann aus den beiden angenommenen Größen r_1 und r_2 nach Gleichung (26) in ihrer Abhängigkeit von der Veränderlichen R . Macht man etwa für das obige Beispiel $r_1 = 1000 \Omega$, so ergibt sich für $\beta_0 = 10$ beispielsweise $r_2 = 10 \Omega$. Daher gilt nach Gleichung (26) die Beziehung:

$$e^{\beta_0} = 2 \frac{2000}{400} R; \quad \beta_0 = \ln R + 4,6.$$

7. Zusammenfassung.

Eine den wirklichen Verhältnissen nahekommende Theorie des Nebensprechens in Spulenleitungen, die sich der Darstellung der Leitung durch einen Kettenleiter bedient, ergibt, daß es wegen der komplizierten Frequenzabhängigkeit der induzierten Ströme notwendig ist, Messungen des Nebensprechens an solchen Leitungen mit sinusförmigen Strömen vorzunehmen, womöglich bei mehreren Frequenzen, mindestens etwa bei $\omega = 3000, 5000$ und 8000 . Die bisher übliche Methode der Dämpfungsbestimmung durch Vergleich mit verzerrungsfreien Eichleitungen kann

dann mit genügender Genauigkeit angewendet werden, wenn man darauf achtet, daß der Scheinwiderstand des Empfangsorganes (Fernhörer, Verstärker) groß ist gegen den Wellenwiderstand der Leitungen. Die fernen Enden der Leitungen sollen während der Messung durch Widerstände abgeschlossen sein, die angenähert gleich den Wellenwiderständen der Leitungen sind; je größer die Dämpfung der Leitungen ist, um so weniger schadet hierbei eine Ungenauigkeit. Handelt es sich um Leitungen ungleicher Eigenschaften, wie etwa beim Bestimmen des Mitsprechens in Kabelvierern, so erhält man auf diese Weise zwei verschiedene Dämpfungszahlen für das Nebensprechen 1 auf 2 bzw. 2 auf 1; die gesuchte Dämpfungszahl ergibt sich streng als arithmetisches Mittel dieser beiden Werte. Eine verzerrungsfreie Eichleitung für hohe Dämpfungszahlen wird beschrieben.

Primäre und sekundäre Rekristallisation.

Von

Georg Masing.

Mit 1 Tafel.

Mitteilung aus dem ehemaligen Glühlampenwerk der Siemens & Halske A. G.

1.

In einer vor kurzem veröffentlichten Arbeit¹⁾ war darauf hingewiesen worden, daß, wenn ein Metall in hohem Maße einer gewissen Deformation ausgesetzt gewesen ist und dann einer kleinen, anders gearteten Deformation unterzogen wird, die Rekristallisationserscheinungen dadurch in charakteristischer Weise verändert werden. Man erhält oft ganz abnorm große und außerordentlich schnell anwachsende Kristalle. Aus der Art des Auftretens dieser Kristalle und aus der Abhängigkeit ihrer Entwicklung von den Rekristallisationsbedingungen war geschlossen worden, daß ihre Entstehung durch Kernbildung erfolgt. Um diese Art der Rekristallisation von der normalen primären, nach einer wiederholten einheitlichen Deformation eintretenden zu unterscheiden, wurde sie als sekundäre Rekristallisation bezeichnet. Die weitgehende Deformation, die zur primären Rekristallisation führt, wurde als primäre Deformation, und die geringe anders geartete Deformation, die zur sekundären Rekristallisation führt, als sekundäre Deformation bezeichnet.

Es war auch darauf hingewiesen worden, daß die Erscheinung der sekundären Rekristallisation nicht neu und bereits vielfach beobachtet worden war; der Einfluß der sekundären Deformation war jedoch bisher gänzlich übersehen worden, und die auffallenden Erscheinungen der sekundären Rekristallisation wurden meistens einfach als Folge einer geringen Deformation schlechthin, nach welcher das Rekristallisationskorn ja bekanntlich viel größer ist als nach starker Deformation, gedeutet.

In der angeführten Arbeit des Verfassers war zwar der positive experimentelle Beweis erbracht worden, daß eine sekundäre Deformation die sekundäre Rekristallisation hervorruft²⁾. Es fehlte jedoch — abgesehen von einer indirekten Beobachtung von Robin³⁾ — der sichere experimentelle Nachweis, daß die Wirkung einer sekundären Deformation, wie sie sich in der sekundären Rekristallisation äußert, tatsächlich für eine sekundäre, d. h. einer primären folgenden, Deformation charakteristisch und nicht vielleicht ebenso auch mit einer der sekundären Deformation ähnlichen geringen primären, d. h. also an einem Gußstück ausgeführten Deformation identisch ist.

Dieser Nachweis soll nunmehr erbracht werden.

¹⁾ Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern, I. Bd., 2. Heft, S. 96; Zeitschrift für Metallkunde **12**, 457. 1920.

²⁾ Diese tritt unter gewissen Bedingungen auf, die zum Teil noch nicht geklärt sind.

³⁾ Robin, Revue de Métallurgie **11**, 489, 1914.

2.

Es wurde eine Reihe kleiner Gußplatten durch Ausgießen geringer Mengen reinen Zinnes auf Glasplatten hergestellt. Die Dicke der Platten betrug ca. 0,5 mm. Alle diese Platten wurden etwa in der Mitte mit einem konisch zugespitzten Stahl gelocht und dann gemeinsam einer von 90° an stetig steigenden Temperatur ausgesetzt. Der Temperaturanstieg ist in der Tabelle I angegeben. Bei den angeführten Temperaturen wurde aus dem Ofen jeweils eine Platte herausgenommen und nach der Ätzung photographiert. Die den Temperaturangaben gegenüberstehenden Zahlen bedeuten die Nummern der Photogramme der bei dieser Temperatur aus dem Ofen entfernten Stücke. Die Erhitzung erfolgte an der Luft.

Als Parallelserie wurde aus einer auf 0,5 mm heruntergewalzten Gußstange Zinn eine Reihe von Stücken geschnitten, diese Stücke alsdann genau wie die Gußstücke gelocht und gemeinsam zur Rekristallisation gebracht. In der Tabelle I sind die Nummern der Photogramme dieser Serie gleichfalls angeführt.

Tabelle I.

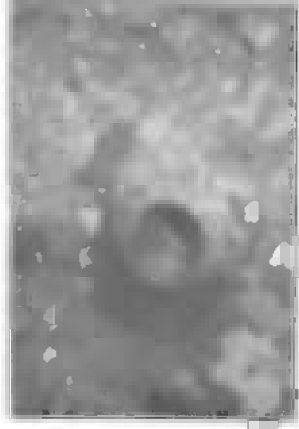
Zeit	Temperatur	gegossen	gewalzt
0 Min.	90°		
7 „	100°		
13 „	110°		
20 „	120°		
27 „	131°	Nr. 1	Nr. 5
33 „	140°		
43 „	151°	Nr. 2	Nr. 6
48 „	161°		
54 „	175°	Nr. 3	
59 „	190°		
64 „	210°	Nr. 4	

Auf den Photogrammen sieht man folgendes: Die gewalzte und auf 131° erhitzte Platte (Phot. Nr. 5) zeigt um das Loch herum einen charakteristischen Kranz von großen Kristallen, die von den Stellen stärkerer sekundärer Deformation in unmittelbarer Nähe des Loches zu den weiter davon entfernten Stellen geringerer sekundärer Deformation größer werden, um dann in der für sekundäre Rekristallisation charakteristischen Weise unvermittelt durch die normale feinere primäre Kristallstruktur ersetzt zu werden. Die gewalzte und auf 151° erhitzte Platte (Phot. Nr. 6) zeigt dieselben Erscheinungen in verstärktem Maße. Die sekundären Kristalle sind größer und bilden um das Loch herum einen größeren Kranz. Der Schwellenwert der sekundären Deformation, der zur sekundären Rekristallisation führt, sinkt eben mit steigender Temperatur.

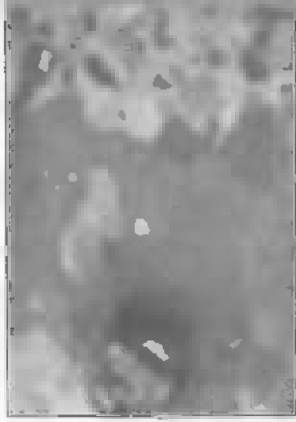
Ein gänzlich davon verschiedenes Bild zeigt Phot. Nr. 1 des gegossenen und auf 131° erhitzten Stückes. Die stattgehabte Lochdeformation markiert sich in der Umgebung des Loches in Gestalt von zahlreichen Deformationszwillingen, die die primären Gußkristalle durchsetzen. Von einer Entstehung neuer größerer Kristalle ist noch nichts wahrzunehmen. Allerdings ist die allernächste Umgebung des Loches der Beobachtung nicht zugänglich.

Da beim Zinn sich keine Rekristallisationszwillinge bilden, so beweisen die vorhandenen Zwillinge, daß die von ihnen durchsetzten Kristalle ursprüngliche Gußkristallite sind.

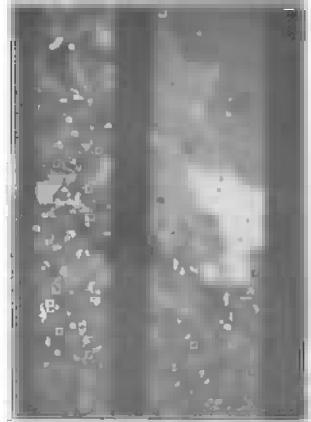
Tafel zu: Masing, Primäre und sekundäre Rekristallisation.



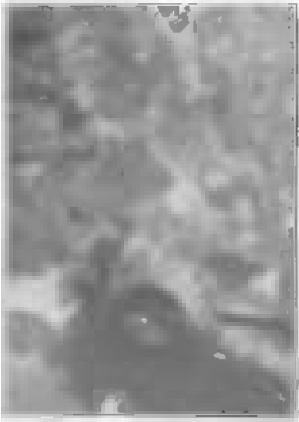
Nr. 3. gegossen, gelocht auf 170° erhitzt.



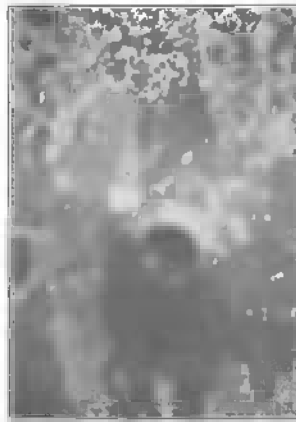
Nr. 6. gewalzt, gelocht, auf 151° erhitzt.



Nr. 9. oben: gegossen, unten: gewalzt, auf 167° erhitzt.



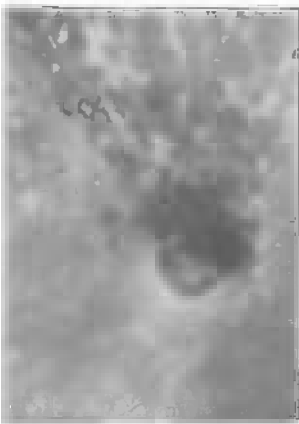
Nr. 2. gegossen, gelocht auf 151° erhitzt.



Nr. 5. gewalzt, gelocht, auf 133° erhitzt.



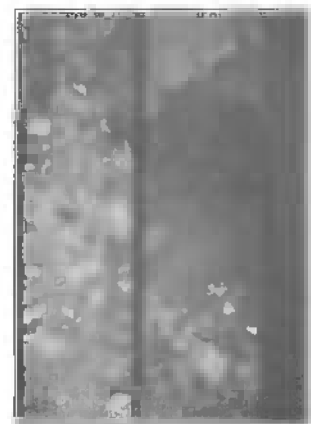
Nr. 8. oben: gegossen, unten: gewalzt, auf 177° erhitzt.



Nr. 1. gegossen, gelocht, auf 131° erhitzt.



Nr. 4. gegossen, gelocht auf 210° erhitzt.



Nr. 7. oben: gegossen, unten: gewalzt, auf 167° erhitzt.

Auf einem gelochten Zinnstück, das nachträglich auf 151° erhitzt wurde (Phot. Nr. 2), sieht man, daß unmittelbar um das Loch herum die Zwillinge verschwunden sind. Es findet sich hier ein Kranz etwas größerer Kristalle, als es der Gußstruktur entspricht. Um diesen engen Kranz herum, in dem die durch die Lochdeformation hervorgerufene Rekristallisation die Zwillinge bereits aufgezehrt hat, findet sich ein weiterer Ring von Deformationszwillingen, innerhalb dessen die Wirkung der Lochdeformation zwar ausgereicht hat, um zu Deformationszwillingen zu führen, aber noch nicht, um durch Rekristallisation dieselben zu beseitigen. An diesen grenzt das unveränderte Gußgefüge.

Mit Erhöhung der Rekristallisationstemperatur (Phot. Nr. 3 und 4, 175° und 210°) wird der innere Kranz, innerhalb dessen durch Rekristallisation größere Kristalle ohne Zwillinge entstanden sind, immer weiter, während die Zone der Zwillinge zu geringeren Deformationswerten zurückweicht und schließlich ganz verschwindet (bei 210°). Gleichzeitig werden die Kristalle des inneren Kranzes immer größer.

Auf eine vergleichende Aufnahme der gewalzten, gelochten und auf die höheren Temperaturen (175 bis 210°) erhitzten Platten ist verzichtet worden, weil auf diesen nichts prinzipiell Neues zu sehen ist. Der Kranz der sekundären Kristalle wird immer größer und würde den Rahmen der Platte überschreiten. Seine Grenze nähert sich allmählich der Grenze der plastischen Deformation.

Der verschiedene Empfindlichkeitsgrad der Gußstruktur und einer verlagerten Walzstruktur geringeren Deformationen gegenüber tritt deutlich hervor. Noch charakteristischer tritt dieser Unterschied in der folgenden Versuchsserie auf, bei der Guß- und Walzplättchen von ca. 0,1 mm Stärke um einen Durchmesser von 2 mm zusammengerollt, wieder aufgerollt und dann erhitzt wurden.

Gußplatten dieser und ähnlicher Stärken erhält man leicht, indem man eine Zinnstange in die Flamme eines Bunsenbrenners hält und die Schmelztropfen aus verschiedener Höhe (20 bis 40 cm) auf Unterlagen aus Glas oder Metall fallen läßt. Die so erhaltenen Gußplättchen wurden mit der Schere in Blättchen von 2 bis 4 mm Breite geschnitten und dann gebogen. Die gewalzten Vergleichsstücke wurden vor dem Biegen einer primären Rekristallisation bei 100° während 5 Minuten unterworfen. Sie wurden dann jeweils zusammen mit den Vergleichsgußplättchen, die immer etwas stärker gewählt wurden, als die Walzstücke, um somit sicher zu sein, daß die letzteren nicht eine größere Biegedeformation erlitten hatten als die Gußstücke, langsam auf 165 bis 180° , etwa nach dem Schema der Tabelle I, erhitzt und geätzt.

Auf den Photogrammen Nr. 7, Nr. 8 und Nr. 9 sieht man derartige Vergleichspaare. Die Photographien sind in allen Fällen so hergestellt, daß nur ein Teil des Plättchens gebogen worden war und daß die Grenze, bis zu der das geschehen war, sich ungefähr in der Mitte der Photographie befand. Auf der Walzplatte sieht man an dieser Stelle den unvermittelten Übergang von der feinen primären zur enorm groben sekundären Struktur, während auf den Gußplättchen sich an den betreffenden Stellen gar keine auffallenden Erscheinungen zeigen. Die auf den Gußplatten am Rande wahrnehmbaren größeren Kristalle rühren von der Deformation des Abschneidens her. — Man sieht, daß, während auf den Walzplättchen die Biegung und die darauffolgende Erhitzung auf 165 bis 180° die üppigste sekundäre Rekristallisation hervorgerufen haben, auf den Gußplatten sich unter denselben Bedingungen noch überhaupt keine Rekristallisation zeigt. Die Deformation des Biegens war zu gering, um die Ent-

stehung von Zwillingen auf den Gußplatten hervorzurufen, hat aber auf den gewalzten Plättchen bereits eine außerordentliche Kornvergrößerung zur Folge gehabt.

Aus diesen Versuchen geht hervor, daß die in der angeführten Arbeit vertretene Ansicht über den Zusammenhang der sekundären Deformation sich voll aufrecht erhalten läßt. Die sekundäre Rekristallisation verläuft anders und mit einer Lebhaftigkeit, die bei der primären Rekristallisation niemals angetroffen wird.

Es sei auf die außerordentliche Ähnlichkeit der Rekristallisationsbilder der Phot. Nr. 5 resp. 6 und Nr. 4 hingewiesen. Die Bilder, die hier die sekundäre und die normale primäre Rekristallisation liefern, sind sich zum Verwechseln ähnlich. Hieraus darf jedoch nicht die Identität beider Rekristallisationsvorgänge gefolgert werden. Erstens sind beide Strukturen bei ganz verschiedenen Bedingungen entstanden. Zweitens ist bereits in der angeführten Arbeit darauf hingewiesen worden, daß die unmittelbare Beobachtung eines Strukturbildes noch keinen sicheren Aufschluß über seine Entstehung bieten kann, und daß insbesondere die Frage der Kernbildung bei der Rekristallisation nur auf indirektem Wege durch Verfolgung der Abhängigkeit der Rekristallisation von den Bedingungen erforscht werden kann. — Diese Ähnlichkeit des äußeren Bildes beider Rekristallisationsarten hat vermutlich viel zu ihrer bisherigen Verwechslung beigetragen.

Wenn die Bedingtheit der sekundären Rekristallisation durch eine vorangegangene sekundäre Deformation somit völlig sicher erwiesen erscheint, so bedarf die schwierige Frage der Entwicklung der sekundären Rekristallisation in Abhängigkeit von den Bedingungen noch eines weiteren eingehenden Studiums.

Berichtigung.

In der Arbeit des Verfassers „Über die Rekristallisation bei kalt gerecktem Zinn“, Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern, 1. Bd., 2. Heft, S. 96, findet sich der Satz:

„Im Gegensatz zu den Feststellungen von Czochralski muß darauf hingewiesen werden, daß das kalt gewalzte Zinn bereits bei gewöhnlicher Temperatur rekristallisiert.“

Auf Wunsch von Herrn Czochralski wird darauf hingewiesen, daß in seiner zitierten Arbeit (Int. Z. f. Met. VIII, 1, 1916) sich die Stelle findet:

„Ob die untere Rekristallisationstemperatur des Zinns noch unterhalb der hier angegebenen Grenze (bei 30° wurde nach 1700 Minuten noch keine Rekristallisation wahrgenommen. Masing) herabgedrückt werden kann, erscheint immerhin nicht unwahrscheinlich. Bei 20 bis 25° konnte nach dreimonatiger Versuchsdauer bei sehr stark gestauchtem Metall (Höhenabnahme 98 vH) eine Rekristallisation noch eben beobachtet werden.“

Zwischen meinen Feststellungen und den seinigen besteht demnach prinzipiell kein Gegensatz. Die quantitativ nicht unbeträchtlichen Unterschiede in den Versuchsergebnissen lassen sich vermutlich durch die verschiedene Art der Kaltreckung erklären.

Über Stromaufnahme in Metallrohrleitungen und verwandte Erdungsfragen.

Von

Fritz Noether.

Mit 4 Textfiguren.

Mitteilung aus der Zentral-Werksverwaltung der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H.

Eingegangen am 29. August 1921.

In der elektrotechnischen Praxis spielen vielfach Aufgaben der Fortleitung von Strömen — seien es Betriebsströme oder Kapazitätströme — durch die Erde eine große Rolle, ohne daß noch eine theoretisch befriedigende Behandlungsweise dieser Fragen vorliegt. Gerade in diesem Gebiet aber ist, wie wir sehen werden, die Erfassung der Vorgänge auf Grund der Vorstellungen der theoretischen Elektrizitätslehre nicht zu entbehren. Die praktischen Gesichtspunkte, die wir dabei im Auge haben, sind u. a. folgende: Der Weg des aus den Schienen elektrischer Bahnen oder geerdeter Leitungsanlagen austretenden Stromes wird in der Erde mitbestimmt durch die in der Erde sonst vorhandenen Metallmassen, wie Wasserleitungsrohre und andere. Der Übertritt des Stromes hat einerseits eine Gefährdung dieser Anlagen zur Folge und verdient deshalb Beachtung, andererseits beeinflußt er auch rückwärts die Verhältnisse an den Stromaustrittsstellen, den Erdungen der Leitungen bzw. der Schienen. Für die Güte der Erdungen ist es z. B. günstig, wenn durch nahe vorbeiziehende Rohrstränge der „Erdwiderstand“ der Erdung herabgesetzt wird. Eine ähnliche Wirkung hat es, wenn absichtlich, wie dies neuerdings vorgeschlagen wird, die zu erdenden Masten mit im Boden verlegten Eisenbändern verbunden werden. Man kann damit eine erhebliche Herabsetzung der im Erdschlußfall im Mast verbleibenden Spannung „gegen Erde“, die als Gefahrenspannung bei Berührung in Betracht kommt, erreichen¹⁾.

Die Fragen des Stromübertrittes aus Schienen sind theoretisch behandelt z. B. von R. Ulbricht²⁾ und in einem anregenden Buch von C. Michalke³⁾ nach folgendem Ansatz: Der aus einer Elektrode in die Erde übertretende Strom erzeugt primär eine gewisse Spannungsverteilung in der Erde (gemessen gegen entfernte Punkte der letzteren), die von dem sog. „Übergangswiderstand“ der Elektrode (Erdungsplatte oder Schiene) abhängt. Hier entsteht schon die Frage, was in jedem Falle

¹⁾ Vgl. L. Lichtenstein, Erdstromfragen in Theorie und Praxis, E. T. Z. 1921. Die dort mitgeteilten ziffernmäßigen Resultate sind zum Teil mit Hilfe der im vorliegenden Aufsatz ausgearbeiteten Methoden berechnet worden.

²⁾ Gefährdungen von Metallrohrleitungen durch elektrische Bahnen, E. T. Z. 23 (1902).

³⁾ Die vagabundierenden Ströme elektrischer Bahnen (Elektrotechnik in Einzeldarstellungen IV). Braunschweig 1904.

unter dem Übergangswiderstand zu verstehen ist. Den in der Erde liegenden Rohren wird nun wegen ihrer großen Ausdehnung die Spannung o (gegen entfernte Punkte der Erde) zugeschrieben und an jeder Stelle der Rohroberfläche der übertretende Strom bestimmt aus dem Unterschied der primär von der Elektrode erzeugten Spannung gegen diese Spannung o einerseits und dem „Übergangswiderstand“ des Rohres andererseits nach dem Ohmschen Gesetze. Dieser Übergangswiderstand wird hierbei als eine bestimmte meßbare Größe, die der Längeneinheit des Rohres zukommt, aufgefaßt. Hier entsteht wieder die Frage, wie er eigentlich zu definieren und zu messen ist. Am nächsten läge es, ihn theoretisch aus dem Fall eines sehr (unendlich) langen Rohres, das überall gleichmäßig Strom aufnimmt, zu bestimmen. Das ist aber in Wahrheit ein unmöglicher Strömungsfall, ebenso wie das Feld eines unendlich langen zylindrischen Leiters, mit einem endlichen Spannungsabfall gegen „unendlich“ gar nicht möglich ist. Um einen endlichen Widerstand pro Längeneinheit zu erhalten, müßte man das Rohr von bestimmter endlicher Länge annehmen und ihn dann theoretisch oder durch eine entsprechende Messung bestimmen. So wird aber die Länge Einfluß auf das Resultat gewinnen, während es sich doch, der ganzen Überlegung nach, um eine von der Rohrlänge unabhängige Größe handeln soll. Ein einfaches Beispiel möge eine Konsequenz dieser Schwierigkeit erläutern.

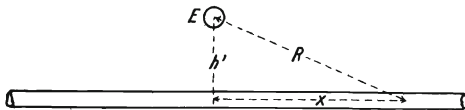


Fig. 1.

Im homogenen Erdreich soll aus der kugelförmigen Elektrode E der Strom J austreten. Er erzeugt primär die Potentialverteilung

$$V = \frac{kJ}{R},$$

wo R den Abstand eines beliebigen Punktes P von der Elektrode E bezeichnet. Im Abstand h' von der Elektrode liege ein Leitungsrohr, längs dessen die Koordinate x gemessen werde. Längs des Rohres ist also

$$R = \sqrt{h'^2 + x^2}.$$

Ist W der als konstant angenommene „Übergangswiderstand“ pro Längeneinheit, so ist nach dem oben formulierten Ansatz die Stromaufnahme im Element der Länge dx des Rohres:

$$di = \frac{V}{W} dx,$$

also die ganze Stromaufnahme des Rohres, wenn dieses die Länge $2l$ hat (E in der Mitte angenommen):

$$i = \int_{-l}^{+l} \frac{V}{W} dx = \frac{kJ}{W} \int_{-l}^{+l} \frac{dx}{\sqrt{h'^2 + x^2}} = \frac{kJ}{W} 2 \operatorname{Ar} \operatorname{Sin} \frac{l}{h'}.$$

Dieser Strom i wächst mit wachsender Länge l beständig (allerdings nur logarithmisch) und überschreitet für unendliche l alle Grenzen, während er doch in Wirklichkeit sicher nur ein Bruchteil des aus der Elektrode austretenden Stromes J sein kann. Es muß sich in Wirklichkeit im Grenzfalle eines unendlich langen Rohres ein bestimmter endlicher Grenzwert für den aufgenommenen Strom ergeben, und das ist gerade der Wert, der auch für endliche, sehr lange Rohre in Betracht kommen wird. Der besprochene Ansatz kann also auch für Rohre endlicher Länge nicht zu einem richtigen Resultat führen.

Die eben gestellte einfache Frage, noch erweitert durch Berücksichtigung der Erdoberfläche, hat aber große Bedeutung deshalb, weil sie die Grundlage für die Behandlung des Stromübertrittes aus Schienen in Rohrnetze sein muß. Die unmittelbare Betrachtung ausgedehnter Schienenanlagen, für die man den Stromaustritt etwa gleichmäßig annimmt, würde auf ähnliche Schwierigkeiten, wie die oben skizzierten, stoßen. Man muß vielmehr die Verteilung des Stromaustrittes aus den Schienen zunächst näherungsweise ermitteln und dann den übertretenden Strom aus den aus kleinen Stücken der Schienen austretenden Strömen zusammensetzen. Als Vorbereitung auf solche kompliziertere Aufgaben soll daher die obige Frage exakter formuliert und gelöst werden, und weitere verwandte Fragen besprochen werden, die sich im Anschlusse daran ergeben. Wir stellen uns dabei auf den Standpunkt, daß es nicht nötig ist, einen besonderen „Übergangswiderstand“ einzuführen; daß es sich vielmehr um den räumlichen Ausbreitungswiderstand in der Erde handelt, der nur in der Nähe der Metalleitungen wegen der Konzentrierung der aus- oder eintretenden Stromfäden und der geringen spezifischen Leitfähigkeit der Erde, nicht wegen besonderer physikalischer Eigenschaften einer Übergangsschicht, hohe Werte annimmt. Unmittelbare Bedeutung hat die Aufgabe insbesondere auch für die oben genannten Erdungsprobleme.

Vom mathematischen Gesichtspunkt ist es von Interesse, daß einer der in der Physik nicht seltenen Fälle vorliegt, deren Behandlung unmittelbar auf eine Integralgleichung führt, und daß diese Gleichung hier explizite gelöst werden kann, da ihre Eigenwerte und Eigenfunktionen sich angeben lassen¹⁾.

1. Der allgemeine Ansatz.

Der Strom trete an der Stelle O der Erdoberfläche in die Erde über. In der Tiefe h unter der Erdoberfläche, und solchem seitlichen Abstand von O, daß der senkrechte Abstand h' ($\geq h$) wird, liegt das Leitungsrohr (äußerer Radius ρ , innerer ρ_1 , Metallquerschnitt $f = 2\pi(\rho - \rho_1)$). Die Tiefe h sei zunächst erheblich neben den Abmessungen der Elektrode angenommen.

Dann ist die von dem austretenden Strome J_0 primär erzeugte Potentialverteilung in den für uns in Betracht kommenden Gebieten als praktisch unabhängig von der Form der Elektrode anzusehen, nämlich, mit Berücksichtigung der Wirkung der Erdoberfläche, der zufolge die „Potentialflächen“ Halbkugeln um O sind:

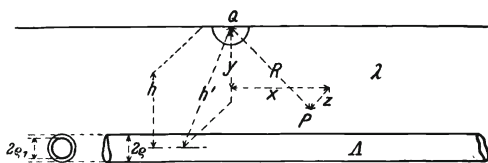


Fig. 2.

$$(1) \quad V_0 = \frac{J_0}{2\pi\lambda R}.$$

$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist der Abstand eines beliebigen Punktes P von O, λ die

¹⁾ Es liegt in der Natur dieser Aufgaben, daß sie nicht ohne etwas weitergehende mathematische Hilfsmittel gelöst werden können. Um die Schwierigkeiten, die sich daraus für den Leser ergeben, herabzusetzen, sind im folgenden die (innerhalb der physikalischen Voraussetzungen) strengen mathematischen Ableitungen in den §§ 2 und 3 abgeschlossen behandelt, und können vielleicht von dem vorwiegend technisch interessierten Leser übergangen werden. Die aus den strengen Lösungen abzuleitenden Näherungen, die erst zu technisch handlichen Formeln führen, sind dann in §§ 4, 5 getrennt ausgeführt, während die physikalischen Voraussetzungen und die Bedeutung der Bezeichnungen, soweit sie nicht noch später wiederholt werden, aus § 1 zu ersehen sind.

elektrische Leitfähigkeit des als homogen angenommenen Erdbodens. Die Richtung x (bzw. als Integrationsvariable ξ) ist parallel dem Rohre gerechnet, y vertikal, z horizontal senkrecht zum Rohr. Der einfache Ansatz (I) trifft natürlich nicht mehr zu, wenn die Dimensionen der Elektrode nicht mehr klein neben der Tiefe h sind, (z. B. kann eine Rohrerdung unter Umständen bis zur üblichen Tiefe der Wasserleitungsrohre eingetrieben sein), oder wenn es sich um ein Erdungsband handelt, das unmittelbar an einen Mast angeschlossen ist. Auf solche Fälle werden wir weiter unten noch zurückkommen. Für den Fall des Stromaustrittes aus Schienen kommt es uns im allgemeinen nur darauf an, daß die Schienenhöhe klein ist neben der Tiefe h ; dann treffen die Voraussetzungen des Ansatzes (I) zu.

Wir betrachten zunächst auch die Leitfähigkeit λ des Rohres als endlich, wenn auch sehr groß gegenüber λ . Von der Leitfähigkeit der das Rohrinne erfüllenden Substanz sehen wir ab, sie wird immer klein neben λ (wenn auch nicht neben λ) sein und wäre übrigens durch eine unwesentliche Abänderung des Querschnittes zu berücksichtigen. Wegen des nicht verschwindend angenommenen Rohrwiderstandes für die Längeneinheit $w = 1/\lambda f$ wird das Rohr Spannung gegen sehr ferne Punkte behalten. Es tritt daher nicht nur Strom in das Rohr ein, sondern im weiteren Verlauf auch wieder aus. Sowohl Strom als Feldstärke seien positiv gerechnet, wenn sie nach außen gerichtet sind. Die Summe aus ein- und austretendem Strom sei pro Längeneinheit i . Sie ist gleich dem über den Umfang der Längeneinheit genommenen Integral der Normalkomponente der Stromdichte an der Oberfläche.

$$(2) \quad i = \int i_n dS = \lambda \int F_n dS,$$

wenn F_n die dort herrschende normale Feldstärke bedeutet. Im Rohr sei J (x) der gesamte den Querschnitt x durchfließende Strom. Zu ihm tragen nur die (wegen des großen Verhältnisses λ/λ weit überwiegenden) Längskomponenten bei. Die quer austretenden Stromkomponenten ergeben in ihrer Gesamtheit:

$$(2') \quad i = -\frac{dJ}{dx}.$$

Andererseits steht wegen der Stetigkeit der normal austretenden Stromkomponenten an der Oberfläche die Normalkomponente der Feldstärke $F_n^{(e)}$ im Innern in dem bestimmten, übrigens sehr kleinen Verhältnis λ/λ zu der im Äußern. Es ist daher die Ladung, die auf der Längeneinheit des Rohres sitzt:

$$(3) \quad q = \frac{1}{4\pi} \int (F_n - F_n^{(e)}) dS = \frac{1 - \lambda/\lambda}{4\pi} \int F_n dS.$$

Diese Ladung auf dem Umfange des Rohres erzeugt ihrerseits ein elektrostatisches Feld, das mit ganz geringfügigem Fehler¹⁾ so angesetzt werden kann, als ob q in der Mittellinie des Rohres (an der Stelle ξ) vereinigt wäre. Sein Potential hätte in der Entfernung R_ξ , falls homogener Erdboden sich nach allen Richtungen ins Unendliche erstrecken würde, den Wert:

$$(4) \quad V_1 = \frac{q(\xi)}{R_\xi}.$$

¹⁾ Durch Durchführung der Untersuchung, ohne diese Vernachlässigung, habe ich mich überzeugt, daß es kein Interesse hat, hier an der wahren Ladungsverteilung festzuhalten.

Wegen der Spiegelung an der Erdoberfläche ist es indessen nach bekannten Sätzen:¹⁾

$$(4^1) \quad V_1 = \frac{q(\xi)}{R_\xi} + \frac{q(\xi)}{R'_\xi},$$

worin R'_ξ den Abstand vom Spiegelpunkt des Punktes ξ an der Erdoberfläche, also dem um $2h$ höher gelegenen Punkt bedeutet. Im Punkte x der Rohroberfläche ist nach Voraussetzung:

$$R_\xi = \sqrt{(x - \xi)^2 + \varrho^2};$$

$$R'_\xi = \sqrt{(x - \xi)^2 + 4h^2}.$$

Das gesamte, aus dem ursprünglichen Strom J_0 und diesen Ladungen gebildete Potentialfeld ist also:

$$(5) \quad V = V_0 + \int V_1(\xi) d\xi = \frac{J_0}{2\pi\lambda R} + \int q(\xi) \left(\frac{1}{R_\xi} + \frac{1}{R'_\xi} \right) d\xi,$$

wobei das Integral längs der Rohrxaxe zu erstrecken ist.

Die Ladungsverteilung muß sich nun so einstellen, daß diese Spannungsverteilung längs der Oberfläche übereinstimmt mit der durch Ohmschen Spannungsabfall im Rohrrinnern erzeugten. Wäre der letztere vernachlässigt (d. h. $\lambda = \infty$), so handelte es sich einfach um die elektrostatische Aufgabe, die Ladungsverteilung $q(\xi)$ zu berechnen, die im Rohre dem von außen gegebenen Potentialfeld V_0 Gleichgewicht hält, d. h. $V = 0$ erzeugt. Wenn $q(\xi)$ bekannt ist, so ist damit nach (2), (3) auch die Stromaufnahme pro Längeneinheit $i(\xi) = 4\pi\lambda q(\xi)$ bestimmt. Dies ist die richtige Formulierung für die Frage der Stromaufnahme in dem Leitungsrohr, die sich hiernach auf das ganze Rohr verteilt, aber keineswegs nach dem einfachen in der Einleitung besprochenen Ansatz. Will man dagegen auch den Wiederaustritt des Stromes in die Erde²⁾ finden, so darf man den Ohmschen Spannungsabfall nicht vernachlässigen (λ endlich). Er ist pro Längeneinheit:

$$(6) \quad \frac{\partial V}{\partial \xi} = -wJ(\xi) = -\frac{J(\xi)}{\lambda f}.$$

Nach (2), (2'), (3), (6) wird, (wenn man in (3) das neben 1 belanglose Glied λ/λ der Einfachheit halber vernachlässigt).

$$(3') \quad q(\xi) = \frac{1}{4\pi\lambda} i(\xi) = -\frac{1}{4\pi\lambda} \frac{\partial J}{\partial \xi} = \frac{\lambda f}{4\pi\lambda} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2}.$$

Statt (5) erhält man dann die Gleichung:

$$(5') \quad V(x) - \frac{\lambda f}{4\pi\lambda} \int \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{R_\xi} + \frac{1}{R'_\xi} \right) d\xi = \frac{J_0}{2\pi\lambda R(x)}.$$

Das ist eine lineare Integrodifferentialgleichung für die Spannungsverteilung längs des Leiters. In den für Erdungszwecke hauptsächlich interessierenden Fällen konzentriert sich der Strom Eintritt auf eine kurze Strecke des Leiters und Gleichung (5') mit (6) und (2') regelt dann hauptsächlich den Wiederaustritt des

¹⁾ Bei Anwendung der Spiegelung sind die für technische Wechselstromperioden sehr kleinen Ströme vernachlässigt, die der Erzeugung der an der Erdoberfläche sitzenden Ladungen entsprechen.

²⁾ Es handelt sich nicht etwa um den Rücktritt des Stromes in die Schienen an einem negativen Schienenspeisepunkt (dieser wäre genau entsprechend dem obigen Ansatz, nur mit umgekehrtem Vorzeichen von J_0 zu behandeln), sondern um den längs des Leiters verteilten Übertritt in die Erde, wie er besonders bei Erdungsfragen eine Rolle spielt.

Stromes in die Erde. Daß wir den Leiter als unendlich lang annehmen werden, macht praktisch keinen Fehler, wenn der Leiter nur hinreichend lang ist, daß am Ende nur noch sehr wenig Strom fließt. Wenn diese Voraussetzung, was aber wohl nicht in Betracht kommt, nicht zulässig wäre, so müßte man noch den konzentrierten Stromaustritt am Ende berücksichtigen, an Stelle der Gleichung (5') tritt dann eine ähnliche aber „belastete“ inhomogene Integrodifferentialgleichung.

2. Stromeintritt in ein Leitungsrohr¹⁾.

Wir betrachten das Rohr als unendlich lang (im Vergleich zum Abstand h' von der Elektrode). Nach der physikalischen Formulierung des § 1 ist dann die Ladungsverteilung aus der elektrostatischen Gleichung (Integralgleichung 1. Art):

$$(5'') \quad \int_{-\infty}^{+\infty} q(\xi) \left(\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \varrho^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + 4h^2}} \right) d\xi = - \frac{J_0}{2\pi\lambda\sqrt{x^2 + h'^2}}$$

zu ermitteln. Wir führen ein:

$$\frac{x}{\varrho} = s; \quad \frac{\xi}{\varrho} = \sigma; \quad \frac{h}{\varrho} = \eta; \quad \frac{h'}{\varrho} = \eta'$$

und erhalten, wenn wir etwa $q(\xi) = \bar{q}(\sigma)$ setzen:

$$(7) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{q}(\sigma) \left(\frac{1}{\sqrt{(s-\sigma)^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{(s-\sigma)^2 + 4\eta^2}} \right) d\sigma = - \frac{J_0}{2\pi\lambda\varrho\sqrt{s^2 + \eta'^2}}.$$

Eine inhomogene Integralgleichung 1. Art, wie sie hier vorliegt, ist, wie sich zeigen wird, lösbar, wenn die Funktion auf der rechten Seite gewisse Bedingungen hinsichtlich Stetigkeit und Verhalten im Unendlichen erfüllt. Wir suchen zu diesem Zwecke die Lösungen der allgemeinen, homogenen Integralgleichung (2. Art):

$$(8) \quad \psi(s) - k \int_{-\infty}^{+\infty} K(\sigma - s) \psi(\sigma) d\sigma = 0,$$

worin $K(\sigma - s)$ zur Vereinfachung den aus (7) ersichtlichen Kern bezeichnet. Als Eigenlösungen unserer Aufgabe sind solche Lösungen von (8) zu bezeichnen (die bekanntlich nicht für alle k existieren werden), die überall, auch im Unendlichen der reellen Variablen s , endlich bleiben.

Da der Kern (8) nur von $(\sigma - s)^2$ abhängt, und die Integrationsgrenzen $-\infty$ bis $+\infty$ sind, so verhalten sich alle Werte s in bezug auf die Gleichung (8) gleich wertig, (d. h. wenn $\varphi(s)$ eine Lösung ist, so ist auch $\varphi(s + c)$ eine solche für beliebige c). Man kann dann zeigen, daß jede Lösung sich aus solchen der Form

$$\sin \tau s, \quad \cos \tau s$$

zusammensetzt und braucht nur Eigenlösungen dieser Form zu suchen (analog der Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten). Wir fordern demnach, indem wir zugleich $\sigma - s = \zeta$ setzen:

$$\begin{aligned} \left. \begin{matrix} \sin \tau s \\ \cos \tau s \end{matrix} \right\} &= k \int_{-\infty}^{+\infty} K(\zeta) \left\{ \begin{matrix} \sin \tau(\zeta + s) \\ \cos \tau(\zeta + s) \end{matrix} \right\} d\zeta \\ &= k \left\{ \begin{matrix} \sin \tau s \\ \cos \tau s \end{matrix} \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\zeta) \cos \tau \zeta d\zeta + \left\{ \begin{matrix} \cos \tau s \\ -\sin \tau s \end{matrix} \right\} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\zeta) \sin \tau \zeta d\zeta. \end{aligned}$$

¹⁾ Zu diesem Paragraph vergleiche die Fußnote am Schlusse der Einleitung.

Mit Rücksicht darauf, daß $K(\zeta)$ eine gerade Funktion ist, verschwindet das letzte Integral, und beide Fälle geben übereinstimmend:

$$(9) \quad 1 = k \int_{-\infty}^{+\infty} K(\zeta) \cos \tau \zeta d\zeta.$$

Diese Gleichung bestimmt zu jedem τ eindeutig einen Parameter k . Für $\tau = 0$ ist das Integral unendlich; wie wir gleich zeigen werden, nimmt es ständig ab, wenn τ wächst und konvergiert (wie schon aus (9) unmittelbar zu sehen ist), für $\tau = \infty$ gegen 0. Somit ist umgekehrt auch τ eindeutig durch k bestimmt, wenn k von 0 bis ∞ geht. Es gibt also zu jedem zwischen 0 und ∞ gelegenen Parameter k gerade zwei Eigenlösungen unserer Integralgleichung.

Der Nachweis der monotonen Abnahme des Integrals in (9) folgt im vorliegenden Falle am leichtesten aus einer Umformung, die es weiterhin durch bekannte Funktionen (Hankelsche) von τ darstellen läßt.

Nach (7) besteht $K(\zeta)$ aus 2 Teilen. Der erste sei $p(\tau)$ genannt. Er ergibt in dem Integral in (9):

$$p(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \tau \zeta}{\sqrt{\zeta^2 + 1}} d\zeta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\tau \zeta}}{\sqrt{\zeta^2 + 1}} d\zeta.$$

Der Integrationsweg ist der in Fig. 3 mit I bezeichnete reelle Weg. Wir können ihn in den mit II bezeichneten komplexen Weg überführen und bekommen so (Einführung der Integrationsvariablen $\bar{\zeta} = -i\zeta$) wieder die reelle Form:

$$p(\tau) = 2 \cdot \int_1^{\infty} \frac{e^{-\tau \bar{\zeta}}}{\sqrt{\bar{\zeta}^2 - 1}} d\bar{\zeta}$$

oder, mittels der Substitution $\zeta = 2\bar{\zeta} + 1$:

$$p(\tau) = 2e^{-\tau} \int_1^{\infty} \frac{e^{-2\tau \zeta}}{\sqrt{\zeta(\zeta + 1)}} d\zeta.$$

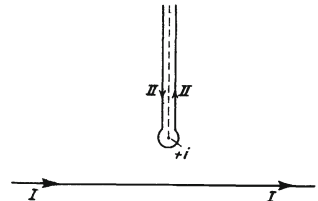


Fig. 3.

Aus dieser Form, in der der Integrand nicht mehr oszillierend ist, ist schon die monotone Abnahme von $p(\tau)$ deutlich.

Das Integral hat jetzt die Normalform des ersten Hankelschen Integrals 0ter Ordnung. Es ist (vgl. Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen, § 57, S. 152, und setze dort $\Gamma'(-\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$):

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-2\tau \zeta}}{\sqrt{\zeta(1 + \zeta)}} d\zeta = \frac{\pi}{2} e^{\tau} i H_0^{(1)}(i\tau),$$

also:

$$(10) \quad p(\tau) = \pi i H_0^{(1)}(i\tau).$$

Für $H_0^{(1)}$ gilt die Potenzreihenentwicklung, die bei kleinem τ rasch konvergiert (vgl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln S. 95):

$$\begin{aligned} p(\tau) &= -2 \left[Y_0(i\tau) + \ln \frac{\gamma}{2i} J_0(i\tau) \right] \\ &= -2 \left[J_0(i\tau) \ln(i\tau) + P_0(i\tau) + \ln \frac{\gamma}{2i} J_0(i\tau) \right] \end{aligned}$$

$$= -2 \left[J_0(i\tau) \ln \left(\frac{\gamma}{2} \tau \right) + P_0(i\tau) \right]$$

($\ln \gamma = 0,577 =$ Eulersche Konstante, $\ln \frac{\gamma}{2} = -0,116$).

$$J_0(i\tau) = 1 + \frac{(\tau/2)^2}{(1!)^2} + \frac{(\tau/2)^4}{(2!)^2} + \frac{(\tau/2)^6}{(3!)^2} + \dots$$

$$P_0(i\tau) = - \left[\left(\frac{\tau}{2} \right)^2 + \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{(\tau/2)^4}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{(\tau/2)^6}{(3!)^2} + \dots \right]$$

Also

$$(10') \quad p(\tau) = -2 \ln \frac{\gamma}{2} \tau \cdot \left(1 + \frac{(\tau/2)^2}{(1!)^2} + \frac{(\tau/2)^4}{(2!)^2} + \frac{(\tau/2)^6}{(3!)^2} \right) + \dots \\ - \left[\left(\frac{\tau}{2} \right)^2 + \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{(\tau/2)^4}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{(\tau/2)^6}{(3!)^2} \right] + \dots$$

Für große τ dagegen ist die asymptotische Entwicklung zweckmäßig (Jahnke - Emde, S. 100):

$$(10'') \quad p(i\tau) = \pi i H_0^{(1)}(i\tau) = \sqrt{\frac{2\pi}{\tau}} e^{-\tau} \left(1 - \frac{1}{8\tau} + \frac{9}{2!(8\tau)^2} + \dots \right)$$

Der zweite Teil des Kernes nach (7) ergibt durch Einführung von $\zeta/2\eta$ als Integrationsvariable an Stelle von ζ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \tau \zeta}{\sqrt{\zeta^2 + 4\eta^2}} d\zeta = p(2\eta\tau).$$

Also ist nach (9):

$$(9') \quad \frac{1}{k} = p(\tau) + p(2\eta\tau).$$

Zur Lösung der Integralgleichung (7) haben wir nun ihre rechte Seite nach den gefundenen Eigenfunktionen zu entwickeln. Das kommt ersichtlich darauf hinaus, daß wir die rechte Seite als Fouriersches Integral nach den Funktionen $\cos \tau s$ darstellen. Wir haben zu setzen:

$$(11) \quad \frac{1}{\sqrt{s^2 + \eta'^2}} = \int_0^{\infty} A(\tau) \cos \tau s d\tau$$

mit

$$(11') \quad A(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \tau s}{\sqrt{s^2 + \eta'^2}} d\tau.$$

Hier haben wir es wieder mit dem nämlichen Hankelschen Integral zu tun, das schon im vorstehenden besprochen war, nämlich:

$$(11'') \quad A(\tau) = \frac{1}{\pi} p(\eta'\tau).$$

Unsere Integralgleichung lautet somit:

$$(7') \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{q}(\sigma) K(\sigma - s) d\sigma = -\frac{J_0}{2\pi^2 \lambda \varrho} \int_0^{\infty} p(\eta'\tau) \cos \tau s d\tau.$$

Die Lösung suchen wir gleichfalls nach unseren Eigenfunktionen zu entwickeln, also in der Form:

$$(12) \quad \bar{q}(s) = \int_0^{\infty} B(\tau) \cos \tau s d\tau$$

zu bestimmen. Setzt man dies in (7') ein, so erhält man links nach Vertauschung der Integrationsordnung (daß dies erlaubt ist, folgt aus der sich ergebenden Konvergenz):

$$\int_0^{\infty} B(\tau) d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} K(\sigma - s) \cos \tau \sigma d\sigma = \int_0^{\infty} \frac{B(\tau)}{k(\tau)} \cos \tau s d\tau.$$

Also ergibt (7') die Bestimmung von $B(\tau)$:

$$(12') \quad B(\tau) = -\frac{J_0}{2\pi^2 \lambda \varrho} k(\tau) p(\eta' \tau).$$

Schließlich ist die Lösung unserer Gleichung:

$$(12'') \quad \bar{q}(s) = -\frac{J_0}{2\pi^2 \lambda \varrho} \int_0^{\infty} k(\tau) p(\eta' \tau) \cos \tau s d\tau = -\frac{J_0}{2\pi^2 \lambda \varrho} \int_0^{\infty} \frac{p(\eta' \tau)}{p(\tau) + p(2\eta\tau)} \cos \tau s d\tau.$$

Für die nachfolgenden technischen Anwendungen handelt es sich darum, diese Lösung für verschiedene Werte des Parameters η und η' zu diskutieren, wobei praktisch etwa Werte von η zwischen 20 und 100 in Betracht kommen werden. Wir wollen zunächst nur bestätigen, daß der gesamte, vom Rohr aufgenommene Strom sich bei unserer Lösung in der Tat als endlich erweist im Gegensatz zu dem in der Einleitung besprochenen elementaren Ansatz, der ihn als unendlich ergab. Dieser Gesamtstrom ist:

$$(13) \quad J = -\int_{-\infty}^{+\infty} i(x) dx = -\varrho \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{i}(s) ds = -4\pi \lambda \varrho \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{q}(s) ds.$$

Nun ist die Funktion $\bar{q}(s)$ in (11) als ein konvergentes, Fouriersches Integral dargestellt. Für ein solches ist bekanntlich der Grenzwert, dem der Integrand sich für $\tau = 0$ nähert, das $\frac{1}{\pi}$ fache des von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckten Integrals der Funktion. Es ist also (vgl. die Entwicklungsformeln 10):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{q}(s) ds &= -\frac{J_0}{2\pi^2 \lambda \varrho} \lim_{\tau=0} \frac{p(\eta' \tau)}{p(\tau) + p(2\eta\tau)} \\ &= -\frac{J_0}{2\pi^2 \lambda \varrho} \lim_{\tau=0} \frac{2 \ln \frac{\gamma}{2} \eta' \tau}{2 (\ln \frac{\gamma}{2} \tau + \ln \frac{\gamma}{2} 2\eta\tau)} = -\frac{J_0}{4\pi^2 \lambda \varrho} \end{aligned}$$

Somit

$$(13') \quad J = -4\pi \lambda \varrho \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{q}(s) ds = J_0.$$

Er ist in der Tat endlich. Es könnte paradox erscheinen, daß er gleich dem ganzen aus der Elektrode austretenden Strom J_0 wird. Das rührt aber daher, daß wir die Leitfähigkeit des Rohres als unendlich neben der des Erdbodens betrachtet haben; in dem Fall nimmt in der Tat das Rohr den

ganzen Strom auf. Anders natürlich, wenn noch andere Rohre im Boden verlegt sind oder das in Wahrheit endliche Maß der Leitfähigkeit des Rohres beachtet wird. Dann tritt der Strom, wie wir im folgenden sehen werden, auch wieder aus dem Rohre in den Boden aus. Immerhin wird, wenigstens wenn das Rohr nicht sehr weit von der Elektrode entfernt ist, auf gewisse Strecken hin fast der ganze Strom J_0 in dem Rohre fließen. Wir wollen diese Verhältnisse in § 4 näher diskutieren. Zunächst behandeln wir den mathematischen Ansatz (5'), der Stromaus- und -eintritt vereinigt darstellt.

3. Stromaustritt aus einem in Erde verlegten Leiter¹⁾.

In einem Fall ist die Formel (12'') für die Stromaufnahme von besonders einfacher Gestalt: das ist der Fall $\eta = \frac{1}{2}$; $\eta' = 1$. Dann wird nämlich:

$$\bar{i}(s) = 4\pi\lambda q(s) = -\frac{J_0}{\pi\rho} \int_0^{\infty} \cos \tau s d\tau.$$

Dieses Integral ist die Fourier-Darstellung derjenigen Funktion (Zackenfunktion), die im allgemeinen 0 ist, an der Stelle $s = 0$ aber so unendlich wird, daß ihr Integral von einem negativen zu einem positiven Wert erstreckt endlich und zwar gleich π ist. Wir haben also:

$$J = \rho \int_{-a}^{+a} \bar{i}(s) ds = J_0$$

für beliebiges (nicht verschwindendes) a . Der ganze Strom J_0 wird von dem Rohr aufgenommen, und zwar ist die Aufnahme auf den Punkt $s = 0$ konzentriert. Wir können daher den jetzigen Fall als die analytische Darstellung desjenigen betrachten, in dem das Rohr an der Erdoberfläche liegt und die Elektrode dem Rohr unmittelbar benachbart ist oder auch metallische Verbindung mit ihm hat. Daß die Lage an der Erdoberfläche, für die unsere Einführung der Tiefe h nicht mehr möglich ist, gerade auf den Kern (7) mit $\eta = \frac{1}{2}$ führt, läßt sich auch durch unmittelbare neue Ableitung der Integralgleichung bestätigen. Man muß dabei beachten, daß der Stromübertritt zwischen Rohr und Erde nur durch die untere Rohrhälfte erfolgt. Dagegen ist für die zweite Besonderheit der Lage, die unmittelbare Nähe der Elektrode, das Primärpotential V_0 , nicht leicht unmittelbar abzuleiten; die voranstehenden analytischen Betrachtungen zeigen, daß es so aufzustellen wäre, als ob der ganze Strom aus der Elektrode in dem Punkt der metallischen Berührung mit dem Rohr austräte. Auf den Fall, daß der Leiter in bestimmter Tiefe h liegt, aber gleichwohl metallische Verbindung mit der Elektrode hat, kommen wir weiter unten noch zurück. Wir fragen nun, wie nach der konzentrierten Aufnahme der Wiederaustritt des Stromes in die Erde erfolgt. Diese Frage ist von unmittelbarer Wichtigkeit für die „Banderdung“ von Leitungsmasten. Nach dem am Ende des § 2 gefundenen Ergebnis (13') kommt es bei einer solchen Erdung nicht sehr wesentlich darauf an, ob das Band metallische Verbindung mit dem Mast hat oder nur sehr nahe an ihm vorbeigeführt ist.

Wir gehen wieder aus von dem allgemeinen Fall ($\eta' > 1$, $\eta > \frac{1}{2}$), um die analytische Lösung aufzustellen. Erst in der Diskussion (§ 5) kehren wir zu dem vorliegenden speziellen zurück. Eine gewisse Schwierigkeit, die sich bei seiner unmittel-

¹⁾ Vgl. die Fußnote am Ende der Einleitung.

baren Behandlung ergeben würde, wird so umgangen. In der allgemeinen Lösung dieses Paragraphen ist also Stromeintritt und -wiederaustritt enthalten, nur in der Diskussion beschränken wir uns auf Betrachtung des letzteren. Unsere Grundlage ist jetzt die Integrodifferentialgleichung (5'):

$$(5') \quad V(x) - \frac{A f}{4 \pi \lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} \left(\frac{1}{R_\xi} + \frac{1}{R'_\xi} \right) d\xi = \frac{J_0}{2 \pi \lambda R(x)}$$

$$R_\xi = \sqrt{(x - \xi)^2 + \varrho^2}; \quad R'_\xi = \sqrt{(x - \xi)^2 + 4 h^2}; \quad R(x) = \sqrt{x^2 + h'^2}.$$

Wir führen wieder ein:

$$s = \frac{x}{\varrho}; \quad \eta = \frac{h}{\varrho}; \quad \eta' = \frac{h'}{\varrho}; \quad \sigma = \frac{\xi}{\varrho}.$$

Ferner sei $\varphi(s)$ das Verhältnis des Potentials V zu dem primär an der Stelle x erzeugten V_0 :

$$(14) \quad \varphi(s) = V(s) \cdot \frac{2 \pi \lambda h'}{J_0}$$

und κ^2 ein unbenannter, positiver, praktisch immer großer Parameter:

$$(15) \quad \kappa^2 = \frac{A}{\lambda} \frac{f}{4 \pi \varrho^2}.$$

Dann ist:

$$(5'') \quad \varphi(s) - \kappa^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \sigma^2} \left(\frac{1}{\sqrt{(s - \sigma)^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{(s - \sigma)^2 + 4 \eta^2}} \right) d\sigma = \frac{\eta'}{\sqrt{s^2 + \eta'^2}}.$$

Genau wie oben suchen wir die „Eigenlösungen“ der zu (5'') gehörigen homogenen Integrodifferentialgleichung, deren Definition genau analog zu der oben auf S. 40 für die Gleichung (5') ist und entwickeln nach diesen zunächst die rechte Seite von (5'') und sodann auch $\varphi(s)$. Es handelt sich also um die Lösungen von:

$$(16) \quad \psi(s) - k \int_{-\infty}^{+\infty} K(\sigma - s) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} d\sigma = 0,$$

worin $K(\sigma - s)$ aus (5'') ersichtlich ist. Wir suchen sie wieder in der Form

$$\psi(s) = \begin{Bmatrix} \cos \tau s \\ \sin \tau s \end{Bmatrix},$$

die wie oben die allgemeinsten Eigenlösungen enthalten muß. Als Integrationsvariable führen wir wieder $\zeta = \sigma - s$ ein und bekommen genau wie dort (vgl. den Übergang von (8) zu (9)) eine Bestimmungsgleichung für τ (bzw. k):

$$(17) \quad 1 + k \tau^2 \int_{-\infty}^{+\infty} K(\zeta) \cos \tau \zeta d\zeta = 0.$$

Sie unterscheidet sich von (9) nur durch das Vorzeichen vor k und den Faktor τ^2 vor dem Integral. Wir stellen jetzt fest: Gleichung (17) bestimmt zu jedem τ eindeutig einen Parameter k . Um umzukehren, führen wir den oben schon berechneten Wert des Integrals in (17) ein (vgl. 9'). Es wird:

$$(17') \quad \frac{1}{k} = -\tau^2 [p(\tau) + p(2\eta\tau)].$$

Die Eigenwerte k sind demzufolge immer negativ. Da $p(\tau)$ und $p(2\eta\tau)$ bei $\tau = 0$ nur logarithmisch unendlich werden, ist $\frac{1}{k} = 0$ für $\tau = 0$ (in dieser Hinsicht verhält sich unsere Integrodifferentialgleichung wie eine Differentialgleichung). Für große τ geht aber der zweite Faktor in (17') zufolge der asymptotischen Formeln (10'') zu 0 und zwar exponentiell. Für große τ wird also $1/k$ wieder 0. (In dieser Hinsicht verhält sich die Integrodifferentialgleichung wie eine Integralgleichung.) Der Betrag von $1/k$ nimmt somit einen Maximalwert zwischen $\tau = 0$ und $\tau = \infty$ an. Mittels unserer Näherungsformeln (oder nach den Tafeln) kann man ihn numerisch berechnen, wobei das zweite Glied $p(2\eta\tau)$ wesentlichen Einfluß nur hat, wenn 2η gleich oder wenig größer als 1 ist. Im Fall $2\eta = 1$ ist $1/k = -2\tau^2 p(\tau)$; das Maximum von $-1/k$ wird für $\tau = 1,6$ zu annähernd 1,9 gefunden. Es ergibt sich immer ungefähr für diesen Wert von τ , wird aber bei größerem η kleiner und für große η gleich 0,95. Also: Alle Eigenwerte k sind negativ und stetig verteilt zwischen $-\infty$ und einer oberen Grenze, die, je nach Größe von η zwischen etwa -1 und $-\frac{1}{2}$ liegt. Zu jedem Eigenwert k gehören 2 verschiedene Werte τ , zu jedem τ 2 Eigenfunktionen, zu jedem k also 4 Eigenfunktionen. Die erste Reihe von Eigenfunktionen ($\tau < 1,6$) kann als „differentialgleichungsartig“, die zweite Reihe ($\tau > 1,6$) als „integralgleichungsartig“ aufgefaßt werden. Nach allgemeinen Regeln folgt dann: Die inhomogene Integrodifferentialgleichung (5'') hat mit positivem Parameter immer eine überall, auch im Unendlichen der reellen Variablen s , endliche Lösung. (Positive Eigenwerte von (16) wären ein Widerspruch gegen das Energieprinzip. Sie bedeuteten einen stationären Stromzustand mit Ohmschem Widerstand, aber ohne Energiezufuhr.) Nachdem die Eigenfunktionen ψ als rein harmonische Funktionen bekannt sind, können wir die Lösung φ von (5'') wieder direkt in Fourierscher Darstellung angeben. Die rechte Seite von (5') sei wieder geschrieben:

$$(18) \quad F(s) = \int_0^{\infty} A(\tau) \cos \tau s d\tau.$$

Dabei ist nach (11') in unserem speziellen Fall:

$$(18') \quad A(\tau) = \frac{\eta'}{\pi} p(\eta'\tau).$$

Es sei gesetzt:

$$(19) \quad \varphi(s) = \int_0^{\infty} B(\tau) \cos \tau s d\tau,$$

so daß (5'') die Gestalt annimmt:

$$(20) \quad \int_0^{\infty} B(\tau) \cos \tau s d\tau + \kappa^2 \int_{-\infty}^{+\infty} K(\sigma - s) \int_0^{\infty} B(\tau) \cos \tau \sigma d\tau d\sigma = \int_0^{\infty} A(\tau) \cos \tau s d\tau.$$

Durch die Vertauschung der Integrationsordnung in dem Doppelintegral (daß dies erlaubt ist, folgt aus der Konvergenz der sich ergebenden Reihe) wird nach (16):

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} K(\sigma - s) \int_0^{\infty} \tau^2 B(\tau) \cos \tau \sigma d\tau d\sigma = \int_0^{\infty} \frac{B(\tau)}{k(\tau)} \cos \tau s d\tau;$$

also ergibt gliedweise Vergleichung in (20):

$$(19') \quad B(\tau) = \frac{A(\tau)}{1 - \frac{\kappa^2}{k(\tau)}} = \frac{A(\tau)}{1 + \kappa^2 \tau^2 [p(\tau) + p(2\eta\tau)]}.$$

Es ist beachtenswert, daß die Konvergenz der in (19) gefundenen Darstellung nicht unabhängig von dem Charakter der Funktion $F(s)$ ist, sondern die Konvergenz der Integraldarstellung (18) voraussetzt. Denn für große τ wird der Nenner in (19') zu 1, die Darstellung (19) konvergiert daher in gleicher Weise wie (18). Dagegen ist die Darstellung der Funktion $\varphi(s) - F(s)$ an viel weniger Voraussetzungen gebunden. Es wird nämlich:

$$\varphi(s) - F(s) = -\kappa^2 \int_0^\infty A(\tau) \frac{\tau^2 [p(\tau) + p(2\eta\tau)] \cos \tau s \, d\tau}{1 + \kappa^2 \tau^2 [p(\tau) + p(2\eta\tau)]},$$

wegen des asymptotischen Verhaltens des Zählers konvergent, wenn nur $A(\tau)$ nicht exponentiell zunimmt. Setzen wir hier für $A(\tau)$ seine Entwicklung:

$$A(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\sigma) \cos \tau \sigma \, d\sigma$$

ein, so wird, wegen des asymptotischen Verhaltens von $p(\tau)$ und $p(2\eta\tau)$, die Integrationsordnung vertauschbar, und es ergibt sich

$$(21) \quad \varphi(s) = F(s) - \kappa^2 \int_{-\infty}^{+\infty} G(\sigma - s) F(\sigma) \, d\sigma.$$

Darin ist:

$$(21') \quad G(\sigma - s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau^2 [p(\tau) + p(2\eta\tau)]}{1 + \kappa^2 \tau^2 [p(\tau) + p(2\eta\tau)]} \cos \tau (\sigma - s) \, d\tau$$

für unseren Fall der „lösende Kern“¹⁾.

Für jeden positiven endlichen Parameter κ^2 ist diese Darstellung konvergent. Sowohl die Darstellung (19) als auch (21) hat für die Anwendung ihre eigentümlichen Vorzüge.

Aus der Darstellung (21) leiten wir hier noch am unmittelbarsten die Potentialverteilung in großer Entfernung (große s) ab. Hier muß der ganze übergetretene Strom aus dem Rohre wieder ausgetreten, der Einfluß des Rohres auf die Potentialverteilung daher verschwunden sein. Das heißt, das Potentialfeld muß das des Primärstromes, es muß $\varphi(s) = F(s)$ sein.

In der Tat: In (21') ist der „lösende Kern“ $G(\zeta)$ durch seine Fouriersche Integraldarstellung gegeben, deren Koeffizient den gleichen Charakter hat wie die oben diskutierte Funktion $\frac{1}{k(\tau)}$: er ist 0 für $\tau = 0$, wächst zu einem Maximum an und geht bei großem τ wieder zu 0.

Die so dargestellte Funktion $G(\zeta)$ ist, wie man leicht überlegt, eine überall endliche oszillierende Funktion abnehmender Amplitude. Die Oszillations-

¹⁾ Vgl. z. B. A. Kneser, Die Integralgleichungen. Braunschweig 1911, S. 56.

zahl hängt mit der Lage des Maximums zusammen. Wesentlich für uns ist, daß aus dem Grenzwert des Koeffizienten für $\tau = 0$ folgt:

$$(22) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} G(s - \sigma) ds = 0.$$

Wir bilden nun aus (21)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) ds - k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} G(\sigma - s) F(\sigma) d\sigma.$$

Wegen des angegebenen Verhaltens des Kernes $G(\sigma - s)$ und der monotonen Abnahme von $F(\sigma)$ können wir hier in dem Doppelintegral die Grenzen $\mp \infty$ mit beliebig kleinem Fehler durch endliche Grenzen ersetzen. Die Integrationsordnung kann dann vertauscht werden, also folgt mittels (22):

$$(22') \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(s) ds = \int_{-\infty}^{+\infty} F(s) ds.$$

Da $F(s)$ für große s sich verhält wie $\frac{\eta}{s}$, ist hier das Integral der rechten Seite aber unendlich. Die Beziehung (22') kann also nur bestehen, wenn asymptotisch für große s :

$$\varphi(s) = F(s),$$

was zu zeigen war. Man könnte auch direkt zeigen, daß in (21) rechts der zweite Teil klein wird neben dem ersten. Bevor wir auch, durch entsprechende Näherungen, den Stromaustritt längs des Rohres verfolgen, ist eine allgemeine Bemerkung zu machen zu dem Fall, den wir als den des „konzentrierten“ Stromeintrittes festgestellt haben:

In dem Fall haben wir, nach der jetzt zweckmäßigen Darstellung (19), (19'):

$$(23) \quad \varphi(s) = \int_0^{\infty} \frac{A(\tau) \cos \tau s}{1 + 2\kappa^2 \tau^2 p(\tau)} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{p(\tau)}{1 + 2\kappa^2 \tau^2 p(\tau)} \cos \tau s d\tau.$$

Da wir den Stromeintritt auf einen Punkt konzentriert voraussetzten, erwartet man, daß der Spannungsabfall, der dem Strom proportional ist, an dieser Stelle unstetig von positiven zu negativen Werten übergeht. Eine gleiche Unstetigkeit sollte $\frac{d\varphi}{ds}$ haben. Das wäre der Fall, wenn in der Fourierdarstellung (23) die Koeffizienten für große τ mit $\frac{1}{\tau^2}$ zu Null gingen. Das ist mit $\kappa^2 = \infty$ nach (23) in der Tat so für die Funktion $\kappa^2 \varphi(s)$. Wenn aber κ^2 wohl sehr groß, aber endlich ist, so haben die Koeffizienten für ein gewisses Gebiet in τ annähernd dieses Verhalten, aber für unendliche τ gehen sie wegen der asymptotischen Werte des Zählers $p(\tau)$ exponentiell zu 0. $\frac{d\varphi}{ds}$ hat dann bei $s = 0$ einen raschen, aber stetigen Übergang von positiven zu negativen Werten. Wir schließen, daß mit Rücksicht auf den Wiederaustritt des Stromes die konzentrierte Stromaufnahme nicht streng erfüllbar ist¹⁾.

¹⁾ Beim direkten Ausgang vom Problem der konzentrierten Stromaufnahme müßte man als Randbedingung fordern, daß $\varphi'(+\alpha) - \varphi'(-\alpha)$, für eine kleine Größe α , einen vorgeschriebenen Wert habe. Da aber die resultierende Lösung in Wirklichkeit stetig ist, bliebe zunächst unbestimmt, wie groß α zu wählen ist. Das ist die oben erwähnte Schwierigkeit, die wir durch den Ausgang von dem Problem der verteilten Stromaufnahme umgangen haben.

Immerhin wird sich bei großem κ^2 das Übergangsgebiet so klein erweisen, daß praktisch von einer konzentrierten Stromaufnahme gesprochen werden kann. Mit entsprechender Näherung werden wir (23) diskutieren.

4. Stromaufnahme in einem Leitungsrohr; Diskussion.

Im § 2 war die strenge Lösung für das Problem des Stromübertrittes aus einer Einzelelektrode in ein (unendlich langes) Leitungsrohr gegeben. Im Gegensatz zu dem elementaren, in der Einleitung erwähnten Ansatz, der auf einen offenbaren Widerspruch führt — nämlich Unendlichwerden des gesamten aufgenommenen Stromes —, gibt die Lösung einen bestimmten endlichen Gesamtwert. Daß er gleich dem ganzen aus der Elektrode austretenden Strom ausfiel, lag daran, daß wir in diesem Paragraphen noch den Wiederaustritt des Stromes in die Erde unberücksichtigt gelassen haben. Man könnte daran denken, auf Grund der strengen Resultate den „Übergangswiderstand“ zu bestimmen, der der elementaren Methode zugrunde liegt, dessen Wert aber dort unbekannt bleibt. Aus obigem wesentlichen Unterschied der Resultate geht aber hervor, daß eine solche Bestimmung nur formalen, keinen praktischen Nutzen hätte. Der an der Stelle s des Rohres pro Längeneinheit über tretende Strom ergab sich in der Form:

$$\bar{i}(s) = -4\pi\lambda\bar{q}(s),$$

worin $\bar{q}(s)$ die in (12'') angegebene Funktion von $s = x/\varrho$ bedeutet. Nach dem elementaren Ansatz sollte er als $i = \frac{V_0}{W}$ durch die primäre Potentialverteilung V_0 und den „Übergangswiderstand“ W berechnet sein. Es wäre also formal:

$$W = -\frac{V_0}{4\pi\lambda\bar{q}(s)}$$

zu definieren. Diese Größe ist aber so stark von der Lage des Rohres und der Lage auf dem Rohr abhängig, daß es nicht möglich ist, den etwa an einem Rohr gewonnenen Wert auf ein anderes, oder eine andere Stelle des gleichen Rohres zu übertragen. Am deutlichsten ist das in dem schon erwähnten Grenzfall sehr kleinen Abstandes zwischen Elektrode und Rohr: Die Stromaufnahme ergab sich dort nahezu auf einen Punkt konzentriert, während sie bei konstantem W entsprechend dem Abfall des Primärpotentials auf das ganze Rohr verteilt sein müßte. Damit entfällt überhaupt die Berechtigung, den Begriff des „Übergangswiderstandes“ einzuführen.

Von größtem Interesse ist aber praktisch die Frage, wie sich die Stromaufnahme in jedem Falle längs des Rohres verteilt. Mit der in (10') und (10'') durch Entwicklungsformeln dargestellten Funktion $p(\tau)$ war die Stromaufnahme pro Längeneinheit des Rohres $\left(\eta = \frac{h}{\varrho}, \eta' = \frac{h'}{\varrho}, s = \frac{x}{\varrho}\right)$ nach (12'') gegeben zu

$$(24) \quad -i(s) = \frac{2J_0}{\pi\varrho} \int_0^\infty \frac{p(\eta'\tau)}{p(\tau) + p(2\eta\tau)} \cos \tau s d\tau.$$

Die Verteilung der Stromaufnahme läßt sich im gegebenen Fall hiernach, etwa durch graphische Integration, berechnen, und durch nochmalige Integration findet sich auch der gesamte, in einem bestimmten Stück des Leiters aufgenommene Strom. Für technische Zwecke kommt es aber meist weniger auf eine solche ausführliche

zahlenmäßige Bestimmung an (die schon im Hinblick auf die Unkenntnis anderer Verhältnisse zu mühsam erscheint), sondern mehr auf einen allgemeinen, wenn auch weniger genauen Überblick über die Abhängigkeit der fraglichen Größe von den vorkommenden Parametern. Einen solchen Überblick ergibt schon unmittelbar die Integraldarstellung (24) der Lösung. Es besteht nämlich ein gewisser Parallelismus zwischen den Koeffizienten der Integraldarstellung und dem uns interessierenden Integral der Stromaufnahme in einem Teil des Rohres, etwa zwischen den Grenzen $s = \pm a$. Dieser fragliche Strom ist:

$$(25) \quad J_a = -\rho \int_{-a}^{+a} i(s) ds.$$

— $i(s)$ liegt nun in (24) vor in der Form einer Fourierreihe (die Koeffizienten seien mit $\beta(\tau)$ bezeichnet). Nach bekannten Regeln ist also:

$$(26) \quad \beta(\tau) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} i(s) \cos \tau s ds.$$

Aus physikalischer Überlegung (die sich auch nach (24) mathematisch begründen ließe) wissen wir nun, daß — $i(s)$ eine mit wachsendem s ständig abnehmende Größe ist (die Stromaufnahme pro Längeneinheit um so kleiner, je größer die Entfernung von der Elektrode). Wir wissen außerdem aus (24), daß die Koeffizienten $\beta(\tau)$ sämtlich positiv sind (da die Funktion $p(\tau)$ durchweg positiv ist bei positivem τ). Teilen wir nun den Koeffizienten $\beta(\tau)$ in der Darstellung (26) in 2 Teile:

$$(26') \quad \beta(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} -i(s) \cos \tau s ds = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2\tau} -i(s) \cos \tau s ds + \int_{\pi/2\tau}^{\infty} -i(s) \cos \tau s ds.$$

Der erste Teil ist sicher positiv, da sein Integrand immer positiv ist. Der zweite Teil ist negativ, da er eine Summe von abwechselnd negativen und positiven Teilen abnehmender absoluter Größe ist (nämlich das Integral von $\frac{\pi}{2\tau}$ bis $\frac{3\pi}{2\tau}$, $\frac{3\pi}{2\tau}$ bis $\frac{5\pi}{2\tau}$ usw. Da die ganze Summe positiv ist, ist sie daher ihrem Betrage nach kleiner als der erste Teil, d. h.:

$$\beta(\tau) < -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2\tau} i(s) \cos \tau s ds$$

oder auch

$$\beta(\tau) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\varepsilon\pi}{2\tau}}^{+\frac{\varepsilon\pi}{2\tau}} i(s) \cos \tau s ds,$$

worin ε einen echten Bruch bedeutet. Soweit sind unsere Folgerungen noch streng. Der richtige Wert von ε läßt sich nun nur im einzelnen Fall ermitteln. Wie sich zeigen wird, kommt es aber praktisch nicht sehr wesentlich auf den genauen Wert an. Für einen Überschlag, der sich für Funktionen vom Charakter der vorliegenden kontrollieren läßt, schlage ich auf Grund näherer Überlegung vor, $\varepsilon = \frac{1}{2}$ zu wählen. In dem so abgebrochenen Integral ist dann immer $\cos \tau s$ um weniger als 0,3 kleiner

als 1, und außerdem kommen, wegen der Abnahme von $-i(s)$ hauptsächlich Integrationsgebiete in Betracht, in denen $\cos \tau s$ noch weniger von 1 abweicht. Wir benutzen daher die weitere Näherung (deren Fehler sich unschwer abschätzen läßt):

$$\beta(\tau) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\varepsilon\pi}{2\tau}}^{+\frac{\varepsilon\pi}{2\tau}} i(s) ds.$$

Der Koeffizient $\beta(\tau)$ gibt also einen Näherungswert für den uns interessierenden Strom J_0 nach (25), wenn $\frac{\varepsilon\pi}{2\tau} = a$ gewählt wird. Es wird nämlich

$$(25') \quad J_a = \varrho \pi \beta(\tau) = J_0 \frac{2p(\eta'\tau)}{p(\tau) + p(2\eta\tau)}, \quad \tau = \frac{\varepsilon\pi}{2a}.$$

Dieser Näherungswert ist leicht tabellarisch in Abhängigkeit von η , η' und a zu berechnen. Er ist natürlich immer kleiner als J_0 und wird nur im Grenzfall $a = \infty$ ($\tau = 0$) gleich J_0 . Eine Ausnahme bildet nur der schon erwähnte Fall der konzentrierten Stromaufnahme (unmittelbare Berührung von Elektrode und Rohr, das dann an der Erdoberfläche liegt), der durch $\eta' = 1$, $\eta = \frac{1}{2}$ charakterisiert ist. In dem Falle ergibt (25'), wie es sein muß, immer:

$$J_a = J_0.$$

Numerisches Beispiel.

Es sei angenommen: $\eta = \eta' = 100$, entsprechend etwa einem in 2 m Tiefe verlegten Gasrohr von $\varrho = 2$ cm Halbmesser, das gerade unter der Elektrode durchläuft. Für ε wählen wir $\frac{1}{2}$. Formel (25) ist dann, wenn man die Entwicklungsformeln (10') benutzt (oder nach den Tafeln von Jahnke - Emde, S. 135) ohne Mühe zu berechnen. Für die praktisch interessierenden Grenzen der Entfernung $a\varrho$ ist es völlig ausreichend, das erste Entwicklungsglied

$$p(\tau) = 2 \ln \frac{1}{\tau} + 0,23$$

zu benutzen; führt man noch zur bequemeren Rechnung Briggsche Logarithmen (log) ein, so wird:

$$(25'') \quad J_a = J_0 \frac{\log a - \log \eta' + 0,1}{\log a - \frac{1}{2} \log \eta + 0,15} = J_0 \frac{\log 1,25 \frac{a}{\eta'}}{\log 1,4 \frac{a}{\eta} + \frac{1}{2} \log \eta}.$$

Diese Näherungsform kann angewendet werden, solange etwa $\frac{a}{\eta}$ und $\frac{a}{\eta'} > 2$ (Fehler 10 vH). Unsere willkürliche Wahl $\varepsilon = \frac{1}{2}$ hat in dieser Form nur auf die ohnehin unbedeutenden Zusatzglieder 0,1, 0,15 im Zähler bzw. Nenner Einfluß. Bemerkenswert ist, daß bei festem Verhältnis $\frac{a}{\eta'}$ und $\frac{a}{\eta}$ der Wert $\frac{J_a}{J_0}$ um so kleiner ausfällt, je größer η ist. Die Strecke $x = a\varrho$, auf der ein bestimmter Bruchteil des Gesamtstromes aufgenommen wird, wächst also mit wachsender Tiefe nicht proportional der Tiefe, sondern stärker. Die Stromaufnahme ist nicht nur

absolut, sondern auch relativ um so langsamer, je tiefer der Leiter liegt. Für den angenommenen Fall $\eta = \eta' = 100$ wird numerisch:

$$a = 100 \quad 200 \quad 400 \quad 1000 \quad 10000$$

$$\frac{J_a}{J_0} = 0,22 \quad 0,37 \quad 0,48 \quad 0,59 \quad 0,73.$$

$\frac{3}{4}$ des gesamten Stromes würde also erst bei $a = 10000$, also $x = 200$ m aufgenommen sein. Auf diese Strecke kann aber schon ein merklicher Teil des Stromes wieder in die Erde übergetreten sein. Zur Vervollständigung des Bildes muß also auch der Wiederaustritt des Stromes eingehend diskutiert werden.

Vorher sei noch der im bisherigen noch nicht enthaltene Fall angeführt, der bei Erdungen eine Rolle spielt, daß der Leiter zwar in der Tiefe h unter der Erdoberfläche liegt, aber doch mit der Elektrode metallische Verbindung hat oder wenigstens nahezu von ihr berührt wird. In diesem Falle wird der Stromaustritt aus der Elektrode merklich auf den Berührungspunkt zusammengedrängt, der also wie eine Stromquelle wirkt. Ihr Potential ergibt sich durch Hinzunahme ihres Spiegelbildes an der Erdoberfläche jetzt zu

$$(26) \quad V_0 = \frac{J_0}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + \rho^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4h^2}} \right).$$

Die der früheren ganz analoge Durchführung gibt dann die Stromaufnahme

$$J_a = J_0 \frac{p(\tau) + p(2\eta\tau)}{p(\tau) + p(2\eta\tau)} = J_0,$$

also in der Tat Konzentration des ganzen Stromeintrittes auf den einen Punkt $x = 0$. Auf den entsprechenden Wiederaustritt kommen wir unten noch zurück.

5. Stromaustritt aus einem in der Erde verlegten Leiter; Diskussion.

Wir schließen an die Darstellung (23) des Potentialverlaufes im Rohr an, der auch den Stromaustritt bestimmt; sie gilt für den Fall, daß der Leiter an der Erdoberfläche liegt und unmittelbare oder nahezu unmittelbare Berührung mit der Elektrode hat:

$$(27) \quad V(s) = \frac{J_0}{2\pi\lambda\rho} \varphi(s); \quad \kappa^2 = \frac{\Lambda}{\lambda} \frac{f}{4\pi\rho^2}.$$

$$(23) \quad \varphi(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{p(\tau)}{1 + 2\kappa^2\tau^2 p(\tau)} \cos \tau s d\tau.$$

Wir haben oben schon erwähnt, daß nach dieser Gleichung die Stromaufnahme auf ein gewisses sehr kleines Gebiet um die Stromquelle sich konzentriert. An der Grenze dieses Gebietes muß nun der Leiter den ganzen Strom J_0 (d. h. $\frac{J_0}{2}$ nach jeder Seite) führen. Es muß daher für kleine s der Spannungsabfall nach (6) sein:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{J_0}{2\Lambda f},$$

also nach (27):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{2\pi\lambda\rho}{J_0} \frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{\lambda\pi\rho^2}{\Lambda f} = -\frac{1}{4\kappa^2},$$

während sich für kleine negative s der entgegengesetzte Wert ergeben muß. Zur formelmäßigen Bestätigung dieser Forderung aus (23) führen wir zweckmäßig $\vartheta = \pi\tau$ als Integrationsvariable ein, also:

$$(28) \quad \varphi(s) = \frac{1}{\pi\kappa} \int_0^\infty \frac{p\left(\frac{\vartheta}{\kappa}\right) \cos \frac{\vartheta s}{\kappa}}{1 + 2\vartheta^2 p\left(\frac{\vartheta}{\kappa}\right)} d\vartheta.$$

Daraus leiten wir ab:

$$(28') \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\frac{1}{\pi\kappa^2} \int_0^\infty \frac{\vartheta p\left(\frac{\vartheta}{\kappa}\right) \sin \frac{\vartheta s}{\kappa}}{1 + 2\vartheta^2 p\left(\frac{\vartheta}{\kappa}\right)} d\vartheta$$

und beachten nun, daß κ eine sehr große Zahl ($\approx 10^4$) ist. Das Glied $\sin \frac{\vartheta s}{\kappa}$ im Integranden ist hier sehr klein, solange nicht ϑ groß von der Ordnung $\frac{\kappa}{s}$ ist. Wenn z. B. $s = 10$, so heißt das, daß im Integranden erst Werte ϑ von der Ordnung $\frac{\kappa}{10}$ maßgebend sind. Für diese Werte ist aber $p\left(\frac{\vartheta}{\kappa}\right)$ nach den Entwicklungsformeln (10') von der Ordnung 1 oder größer als 1, also im Nenner das zweite Glied stark über das erste überwiegend. Dann ist annähernd

$$(28'') \quad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\frac{1}{2\pi\kappa^2} \int_0^\infty \frac{\sin \frac{\vartheta s}{\kappa}}{\vartheta} d\vartheta = -\frac{1}{2\pi\kappa^2} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha.$$

Dieses letzte Integral ist aber bekanntlich $= \frac{\pi}{2}$. Also wird in der Tat für kleine (nicht verschwindende) s

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\frac{1}{4\kappa^2},$$

wie oben verlangt. Daß in Wirklichkeit $p\left(\frac{\vartheta}{\kappa}\right)$ für große Werte von $\frac{\vartheta}{\kappa}$ wieder exponentiell abnimmt, kommt praktisch (d. h. wenn z. B. Fehler von 5 vH zugelassen werden) nicht in Betracht, da auch das Integral in (28'') mit solchen Fehlern für das Beispiel $s = 10$ etwa bei $\vartheta = \kappa$ abgebrochen werden kann. Durch genauere numerische Diskussion, die wir hier nur angedeutet haben, kann man schließen, daß mindestens 95 vH der Stromaufnahme auf das Gebiet $s < 10$, d. h. $x < 10\varrho$, konzentriert sind.

Durch entsprechende Näherung läßt sich nun auch für größere s aus (28) oder (28') ein übersichtlicher Ausdruck für $\varphi(s)$ ableiten. Wesentlich ist dabei immer, daß wegen des Gliedes ϑ^2 im Nenner des Integranden, mit geringem (abschätzbarem) Fehler nur Gebiete der Integrationsvariablen ϑ (etwa $\vartheta < \vartheta'$) in Betracht kommen, für die $\frac{\vartheta}{\kappa}$ sehr klein ist. In diesem Gebiete kann $p\left(\frac{\vartheta}{\kappa}\right)$ durch seinen Näherungswert nach (10'): $2 \ln \frac{2\kappa}{\gamma\vartheta}$ ersetzt werden. Andererseits kann mit abschätzbarem kleinen Fehler auch die untere Grenze des Integrals, wegen des Faktors $\vartheta \sin \frac{\vartheta s}{\kappa}$

in (28'), als ein fester kleiner Wert, $\vartheta = \vartheta' > 0$ festgesetzt werden. In dem so abgegrenzten Gebiet ist nun der Wert und die Veränderlichkeit des Wertes von $\ln \vartheta$ nur klein neben der Größe $\ln \kappa$. Wir können daher $p\left(\frac{\vartheta}{\kappa}\right)$ in den Integralen durch einen konstanten Mittelwert $\frac{1}{2} b^2$ ersetzen, den wir jetzt noch näher bestimmen wollen. Wir setzen also:

$$(29) \quad \varphi(s) = \frac{b^2}{2\pi\kappa} \int_0^{\infty} \frac{\cos \frac{\vartheta s}{\kappa}}{1 + b^2 \vartheta^2} d\vartheta$$

und betrachten zuerst, da auch $\ln \frac{2}{\gamma}$ nur $= 0,11, 4 \ln \kappa$ als den Mittelwert b^2 (1. Näherung). Durch Umformung des Integrals zwecks komplexer Integration

$$(29') \quad \varphi(s) = \frac{b^2}{4\pi\kappa} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{i\vartheta s}{\kappa}}}{1 + b^2 \vartheta^2} d\vartheta$$

und Residuenbildung erhält man:

$$(30) \quad \varphi(s) = \frac{b}{4\kappa} e^{-\frac{s}{b\kappa}} \quad \text{für } s > 0$$

$$\text{bzw. } \varphi(s) = \frac{b}{4\kappa} e^{\frac{s}{b\kappa}} \quad \text{für } s < 0.$$

Um für b noch einen genaueren Näherungswert anzugeben, schätzen wir ab, welcher Teil des Integrationsgebiets etwa 90 vH zum Integralwert beiträgt. Das Resultat hängt von s ab. In Anbetracht der geringen Wichtigkeit der Korrektur geben wir nur die für kleine s sich ergebende Grenze: $\vartheta = \frac{6}{b} = \frac{3}{\sqrt{\ln \kappa}}$. Wir bekommen also die zweite Näherung:

$$(30') \quad b^2 = 4(\ln \kappa - \ln \vartheta) = 4 \ln \kappa + 2 \ln \ln \kappa - 4 \ln 3.$$

Die weitere Fortsetzung des Näherungsverfahrens hätte keinen Vorteil mehr. Mit (30), (30') ist eine handliche Näherungsformel für den Spannungsverlauf im Leiter gewonnen, die, soweit diese Spannung überhaupt merklich ist, praktisch ausreichend ist. Außer (30) haben wir oben, S. 48, schon einen weiteren für sehr große s asymptotisch gültigen Näherungsausdruck gefunden, der im vorliegenden Falle ($\eta' = 1$) lautet:

$$\varphi(s) = \bar{F}(s) = \frac{1}{s}.$$

Man erhält daher leicht ein anschauliches Bild des ganzen Verlaufes, indem man beide Darstellungen, die φ_1, φ_2 heißen mögen, kontinuierlich ineinander überführt. Zu dem Zwecke suchen wir die Schnittpunkte beider Kurven. Schreiben wir $t = \frac{s}{\kappa b}$, so trennen diese Schnittpunkte die Gebiete, in denen

$$e^{-t} \leq \frac{4}{b^2 t}.$$

Zunächst: Wäre $\frac{b^2}{4} < e$, so bestände immer das $<$ -Zeichen, es gäbe keine Schnittpunkte. Wenn $\frac{b^2}{4} = e$, so fallen 2 Schnittpunkte bei $t = 1$ zusammen. Für unseren Fall ist aber nach (30) wegen $\kappa = 10^4$: $\frac{b^2}{4} \approx \ln \kappa \approx 10$, es gibt also 2 Schnittpunkte (vgl. Fig. 4). Als wirklichen Verlauf des Potentials betrachten wir den der Kurve φ . Sie verläuft bei kleinerem s nach dem Exponentialgesetz etwa bis zum zweiten Schnittpunkt der Kurven φ_1, φ_2 ; dann nähert sie sich asymptotisch der Kurve φ_2 , die den ungestörten Potentialabfall in großer Entfernung darstellt, wie er auch einer kugelförmigen Elektrode entspricht, wenn kein ausgehnter Leiter vorhanden ist. Man sieht: Durch die Verbindung mit dem Erdleiter wird das Potential am Anfang (in der Nähe der Elektrode) stark herabgesetzt; aber es wird ausgebreitet; in größerer Entfernung, wo es allerdings praktisch schon Null ist, ist es größer als im Fall der radialen Ausstrahlung. Diese Fragen spielen für die Praxis der Erdungen eine große Rolle, da von der Höhe der Spannung „gegen Erde“ die Gefahren der Erdung abhängen¹⁾.

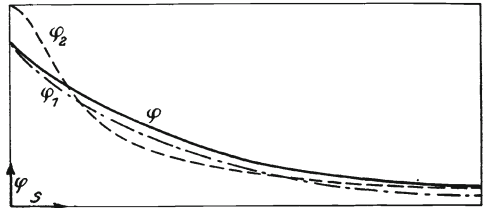


Fig. 4.

Die annähernd exponentielle Form des Spannungsabfalles läßt sich übrigens auch durch elementare Betrachtungen, die den in der Einleitung für den Stromübertritt mitgeteilten ähnlich sind, verständlich machen, aber es bleibt auf diesem Wege die Größe des Exponentialkoeffizienten (Dekrements) aus ähnlichen Gründen unbestimmbar, aus welchen wir auch die elementare Behandlung des Übertrittproblems ablehnten. Dagegen kann man auch den Weg einschlagen, den Ansatz

$$\varphi(s) = \varphi(0) \cdot e^{-u|s|}$$

direkt in die Integrodifferentialgleichung (5'') einzuführen und bei gegebenem numerischen Wert von κ dann u zu bestimmen. Diese Berechnung ist aber ziemlich mühsam und wird durch die Formel (30') unnötig gemacht.

Nachdem das Gesetz der Spannungsverteilung in einfacher Weise bekannt ist, lassen sich leicht zusammengesetzte Probleme behandeln, z. B. der Fall, daß der Erdleiter an einer Stelle ($s = -l$) an einen positiven, an einer anderen ($s = +l$) an einen negativen Pol angeschlossen ist. Die Spannungsverteilung hat dann in dem Gebiet zwischen beiden Polen die Form

$$(31) \quad \begin{aligned} V(s) &= V(e^{-u(s+l)} - e^{-u(l-s)}) \\ &= -2V e^{-ul} \sin \eta u s. \end{aligned}$$

Die Konstante V bestimmt sich aus der Größe des an den Polen in das verbindende Leitungstück ein- (bzw. aus ihm aus-) tretenden Stromes $\frac{J_0}{2}$ mittels (27) und (30) zu:

$$(31') \quad V = \frac{J_0 \varrho}{2 A f u} = \frac{J_0 b}{4 \sqrt{\pi A \lambda f}}.$$

¹⁾ Vgl. H. Behrend, Ladeströme und Schutzerdungen in Überlandzentralen. E. T. Z. 1917, S. 329.

In ähnlicher Weise läßt sich unsere ursprüngliche Aufgabe der kombinierten Stromaufnahme und -abgabe, die in § 3 streng gelöst ist, übersichtlich näherungsweise so behandeln, daß man den Stromeintritt pro Längeneinheit nach den Annäherungsformeln, z. B. (25') des § 4, ermittelt. Die resultierende Spannungsverteilung ergibt sich dann durch Summierung der diesen einzelnen Stromquellen entsprechenden Verteilungen.

In Gleichung (31') ist noch bemerkenswert, daß von den Längendimensionen des Leiterquerschnittes unmittelbar nur f , die leitende Fläche, eingeht. Das Verhältnis $\sqrt{\frac{f}{\varrho}}$ ist allerdings nach (30') in b enthalten, da es in \varkappa vorkommt, aber hier, wegen der logarithmischen Form, nur additiv neben größeren Zahlen. Sein Einfluß ist also unbedeutend. Das gleiche gilt auch für den Koeffizienten von x in dem Exponentialgesetz

$$e^{-us} = e^{-\frac{u}{c}x} = e^{-2b\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda}}\sqrt{\frac{\pi}{f}}x}$$

Genau entsprechendes trifft auch zu, wenn es sich nicht um kreisringförmige, sondern beliebig geformte Querschnitte, z. B. bandförmige Leiter, handelt. Die Bestimmung des „Radius“ ϱ , der in unsere Grundgleichungen einzuführen wäre, ist hier eine gewisse elektrostatische Aufgabe. Sie ist aber von geringer Wichtigkeit, da im Resultat das Verhältnis $\frac{\sqrt{f}}{\varrho}$, also die Gestalt des Querschnittes, nur ganz sekundäre Bedeutung hat. Wesentlich ist nur die leitende Fläche f des Querschnittes oder auch deren Ersatzradius $\sqrt{\frac{f}{\pi}}$.

Endlich seien noch einige ergänzende Aufgaben erwähnt: In (26) haben wir bereits den Ansatz für den Fall angegeben, daß der Leiter in der Tiefe h liegt, der Strom aber hier konzentriert eintritt. Für die entsprechende Spannungsverteilung hat man zu setzen:

$$V(s) = \varphi(s) \frac{J_0}{4\pi\lambda\varrho}$$

und erhält statt (23) die strenge Lösung:

$$\varphi(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{[p(\tau) + p(2\eta\tau)] \cos \tau s}{1 + 2\varkappa^2 \tau^2 [p(\tau) + p(2\eta\tau)]} d\tau.$$

Die Diskussion kann in gleicher Weise wie im früheren Falle erfolgen, nur in der Nähe der Stromquelle ergeben sich die Verhältnisse etwas verändert. Im wesentlichen ist der Spannungsabfall wieder durch das Exponentialgesetz darstellbar; für den Koeffizienten desselben, $\frac{b}{\varkappa}$, ergibt sich der gegen (30') unwesentlich veränderte Wert:

$$b^2 = 4 \ln \varkappa + 2 \ln \ln \varkappa - 4 \ln 3 - 2 \ln \eta.$$

Weiter ist bei eisernen Leitern, z. B. bei Bänderdungen, nicht nur wie bisher der Ohmsche, sondern auch der induktive Widerstand pro Längeneinheit zu berücksichtigen. Seine Bestimmung ist eine gesonderte Aufgabe, die neben dem Querschnitte die Gestalt des Leiters und die Stromverdrängung berücksichtigen muß. Auf die Behandlung der ganzen Aufgabe wirkt aber der induktive Widerstand nur

in dem Sinn, daß der Parameter κ eine komplexe Größe wird. Das bewirkt, daß der Spannungsabfall im Leiter rascher wird, und außerdem, daß Phasenverschiebungen der Spannung eintreten.

Für Meßzwecke ist es auch von Interesse, den Spannungsabfall quer zum Leiter zu kennen. Wenn die Spannung im Leiter nach dem Exponentialgesetz angesetzt wird, ist nach der Gleichung (3') auf S. 39 auch die Ladung pro Längeneinheit des Rohres durch ein Exponentialgesetz gegeben. Durch Summation der von den Ladungen erzeugten Felder läßt sich dann das Feld in der Erde bestimmen.

Numerisches Beispiel.

Wir behandeln den Fall, daß ein bandförmiger, eiserner Leiter (Querschnitt $f = 2 \times 40 \text{ mm}^2$) unmittelbar an der Erdoberfläche ausgebreitet ist, an eine Elektrode angeschlossen, die den Strom J_0 liefert. Für Eisen ist:

$$\frac{1}{A} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ Ohm cm } (= 1,2 \cdot 10^4 \text{ cgs}).$$

Der mittlere spezifische Widerstand des Erdbodens wird zu

$$\frac{1}{\lambda} = 10^4 \text{ Ohm cm } (= 10^{13} \text{ cgs})$$

angenommen. Also $\frac{A}{\lambda} = 8 \cdot 10^8$. Für κ haben wir nach (27)

$$\kappa = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{\lambda} \frac{\sqrt{f}}{\pi}} = 1,4 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{f}{\pi}}.$$

Für ϱ ergibt sich hier auf elektrostatischem Wege (nämlich durch Behandlung des elektrostatischen Feldes eines bandförmigen Leiters der Länge l und Vergleich desselben mit einem drahtförmigen Leiter gleicher Länge) etwa $1/4$ der Breite, also

10 mm; somit wird $\frac{\sqrt{f}}{\pi} = \frac{\sqrt{80}}{10} = \frac{1}{2}$. Wie wir schon erwähnten, kommt es auf einen genauen Wert dieses Verhältnisses nicht an. Es wird $\kappa = 0,7 \cdot 10^4$. Nach (30') ist dann

$$b = 2\sqrt{\ln \kappa + \frac{1}{2} \ln \ln \kappa - \ln 3} = 6.$$

In dem Exponentialgesetz (30) bringen wir zum Ausdruck, daß der „Ersatzradius“ $\sqrt{\frac{f}{\pi}}$ der für die Verhältnisse wesentlich in Betracht kommende Längemaßstab ist, indem wir statt s einführen:

$$(32) \quad s' = \frac{s \varrho}{\sqrt{\frac{f}{\pi}}} = \frac{x}{\sqrt{\frac{f}{\pi}}}.$$

Dann ist nach (30):

$$(33) \quad V = \frac{J_0}{2\pi \lambda \varrho} \varphi(s) = \frac{J_0 b}{4 \sqrt{A \lambda \pi f}} e^{-\frac{2}{b} \sqrt{\frac{\lambda}{A}} s'} \\ = J_0 \cdot 0,33 e^{-1,2 \cdot 10^{-5} s'} \text{ (Volt).}$$

Der erwähnte Schnittpunkt der Exponentialkurve φ_1 mit der asymptotischen Näherungskurve φ_2 , bis zu dem das Exponentialgesetz gilt, liegt hier bei $s' = 2,5 \cdot 10^5$. Der Abfall des Potentials auf $\frac{1}{e}$ seines Anfangswertes ist aber schon bei $s' = 8 \cdot 10^4$. Für $f = 80 \text{ mm}^2$, $\sqrt{\frac{f}{\pi}} = 5 \text{ mm}$ entspricht dem $x = 400 \text{ m}$.

Am Anfangspunkt wird die Spannung „gegen Erde“:

$$(33') \quad V(o) = \frac{J_0 b}{4 \sqrt{\Lambda \lambda \pi f}} = 0,33 J_0 \text{ (Volt)}.$$

Träte der gleiche Strom aus einer halbkugelförmigen Elektrode vom Radius r aus, so wäre die Spannung gegen Erde:

$$V(o) = \frac{J_0}{2 \pi \lambda r}.$$

Durch die Verbindung mit dem Erdleiter wird sie also im Verhältnis $\frac{b}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\Lambda} \frac{\pi}{f}} r$ herabgesetzt. Das ist z. B. für $r = 50 \text{ cm}$: $3 \cdot \frac{50}{\sqrt{8 \cdot 10^8} \cdot 0,5} = 10^{-2}$, also auf den hundertsten Teil. Der Faktor $\frac{b}{4 \sqrt{\Lambda \lambda \pi f}}$ in (33') muß als „Widerstand“ der Erdung aufgefaßt werden. Er ist in unserem Falle nur $\frac{1}{100}$ des Widerstandes der verglichenen halbkugelförmigen Elektrode, nämlich $\frac{1}{3}$ Ohm.

Der bisher nicht berücksichtigte induktive Widerstand des eisernen Leiters ändert die Verhältnisse etwas ab. Unter der Selbstinduktion pro Längeneinheit eines über Erde geschlossenen Leiters von kreisförmigem Querschnitt (Radius ϱ , Länge l) versteht man bekanntlich¹⁾ einen Ausdruck der Form:

$$2 \ln \frac{l}{\varrho} + \frac{\mu}{2} + c.$$

Hierin ist μ die Permeabilität des Leiters, c eine neben den anderen Gliedern immer sehr kleine Konstante, die, da sie vom Verlauf der Stromlinien in der Erde abhängt, nur schwer genau bestimmbar ist. Das Glied $\frac{\mu}{2}$, das von der magnetischen Induktion im Innern des Eisenleiters herrührt, ist aber das bei weitem überwiegende, wenn, wie in unserem Falle, eine stromdurchflossene Länge von höchstens einigen 100 Metern in Betracht kommt und die Ströme so klein sind, daß das Eisen praktisch ungesättigt bleibt. Dann ist $\frac{\mu}{2}$ etwa 500 bis 1000. Die Bestimmung der entsprechenden Glieder bei einem Eisenbände von der Breite a , Dicke d erfordert die Bestimmung des magnetischen Feldes im Innern, mit Rücksicht darauf, daß die magnetischen Kraftlinien am Umfang des Eisenbandes mit großer Näherung tangential (längs des Umfanges) verlaufen müssen. Die Durchführung, die ich hier nicht im einzelnen mitteilen will, ergibt den Ausdruck: $\frac{\mu d}{a}$, solange d klein gegen a ist. Der entsprechende induktive Widerstand pro Längeneinheit, der neben den Ohmschen $\frac{1}{\Lambda f}$ tritt, ist bei der Kreisfrequenz ω bekanntlich $\frac{\mu \omega d}{a}$. Während bei unserem Querschnitte von

¹⁾ Zum Beispiel F. Breisig, Theoretische Telegraphie (Braunschweig 1910). §§ 119, 120.

$2 \cdot 40 \text{ mm}^2$ der Ohmsche Widerstand $\frac{1,2 \cdot 10^{-5}}{0,8} = 1,5 \cdot 10^{-5}$ Ohm/cm beträgt, ist dieser induktive für den mittleren Wert $\mu = 1000$ und die Frequenz 50/sk: $1000 \cdot \frac{100\pi}{20} = 1,57 \cdot 10^4 (cgs) = 1,57 \cdot 10^{-5}$ Ohm/cm, also praktisch von gleicher Größe wie der Ohmsche. Es ist aber ferner eine sekundäre Wirkung der Induktivität zu berücksichtigen, das ist die Stromverdrängung und die dadurch bewirkte Vergrößerung des Ohmschen Widerstandes. Die Durchführung, die ich hier gleichfalls übergehe, ergibt, daß hauptsächlich nicht die Verdrängung nach den Kanten, sondern nur die vom Innern des Bandes nach der Oberfläche hin in Betracht kommt. Das Verhältnis der Widerstandserhöhung zum Grundbetrag wird:

$$\frac{1}{45} \pi^2 \gamma^2; \quad \text{mit} \quad \gamma = A \mu \omega d^2.$$

Das ergibt für unsere Annahme: $\frac{1}{4}$. Der Ohmsche Widerstand erhöht sich also auf rund $2 \cdot 10^{-5}$ Ohm/cm. Die Rückwirkung der Stromverdrängung auf den induktiven Widerstand ergibt sich als eine unbedeutende Verringerung, im Verhältnis $\frac{2}{315} \pi^2 \gamma^2 = \frac{1}{14}$, also der ganze induktive Widerstand rund $1,5 \cdot 10^{-5}$ Ohm/cm $= \frac{3}{4}$ des Ohmschen Widerstandes.

Der Einfluß dieser Korrekturen auf unsere Berechnungen ist der, daß an Stelle von $\frac{1}{A f}$ der komplex zusammengesetzte Widerstand einzusetzen ist, numerisch der Wert (mit $j = \sqrt{-1}$):

$$(2 + j 1,5) 10^{-5} \text{ Ohm/cm} \quad \text{statt} \quad 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ Ohm/cm}.$$

Der oben berechnete Gesamtwiderstand der Bänderung vergrößert sich damit im Verhältnis

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2^2 + 1,5^2}}{1,5}} = 1,3.$$

Gegenüber der halbkugelförmigen Erdung von 50 cm Radius ist er aber immer noch auf den rund 75. Teil herabgesetzt. Das Exponentialgesetz des Spannungsabfalles ist jetzt $e^{-1,2 \cdot 10^{-5} (1,2 + j 0,4) s'}$. Bei der Bestimmung des Wertes b nach (31'), der ja nur in geringerem Maße mit κ veränderlich ist, haben wir hierbei von dem Einfluß der Induktivität abgesehen. Der komplexe Teil des Exponenten bedeutet bekanntlich eine Phasenverschiebung der Spannung längs des Leiters, die aber von geringerer Bedeutung ist. Wichtiger ist der Betrag der Spannungsabfalles, der jetzt durch den reellen Teil des Exponenten bestimmt wird: $e^{-1,2 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} s'}$. Die oben zu 400 m angegebene Strecke des Abfalles der Spannung auf $\frac{1}{e}$ ihres Betrages verkleinert sich damit auf $\frac{400}{1,2} = 330 \text{ m}$.

Zusammenfassung.

Die in der technischen Literatur üblichen Ansätze für das Problem des Übertrittes von Strömen aus Schienen in benachbarte Leitungsrohre operieren mit dem Begriff des „Übergangswiderstandes“. Die willkürliche Annahme, daß dieser einen

bestimmten, der Längeneinheit des Rohres zukommenden Wert habe, führt zu Widersprüchen und macht damit diese Behandlungsweise illusorisch schon in dem einfachen Fall, daß der Strom aus einer Einzelelektrode austritt. Aus der Vorstellung, daß kein gesonderter Übergangswiderstand, sondern nur der räumliche Erdwiderstand existiert, wird das Problem mathematisch formuliert in Gestalt einer Integralgleichung. Diese wird streng gelöst und daraus eine technisch brauchbare Näherungslösung für die Verteilung der Stromaufnahme abgeleitet.

In ähnlicher Weise wird die Frage des Wiederaustrittes des Stromes aus einem in Erde verlegten Leiter behandelt. Seine mathematische Formulierung ist eine Integrodifferentialgleichung, die gleichfalls streng gelöst wird. Einfache Näherungsausdrücke der Lösung gestatten die Behandlung verschiedener technischer Fragen. Am wichtigsten ist die der „Bänderdung“. In einem numerischen Beispiel zeigt sich, daß eine solche Erdung nur den 75. Teil des Widerstandes einer halbkugelförmigen Erdung gewisser, den technischen Verhältnissen entsprechenden Abmessungen hat. Im gleichen Verhältnis werden die Gefahrenspannungen herabgesetzt.

Über den räumlichen Verlauf von Erdschlußströmen.

Von Reinhold Rüdberg.

Mit 11 Textfiguren.

Mitteilung aus der Rechnungsabteilung des Dynamowerkes der Siemens-Schuckert-Werke G. m. b. H.

Eingegangen am 16 Juni 1921.

Wenn in einer größeren Wechselstrom-Hochspannungsanlage ein Isolator eines eisernen Mastes durchschlägt, so fließt an der Durchschlagsstelle ein Strom vom Transformator her über die Leitung durch den Mast zur Erde, der sich in ihr längs der Leitungsstrecke ausbreitet und von der Erdoberfläche als Verschiebungsstrom zu den ungestörten Leitungen übergeht, um von dort in den Transformator zurückzufließen.

Fig. 1 stellt den Verlauf eines derartigen Fehlerstromes dar. Der speisende Drehstromtransformator wird durch diesen Strom in *V*-Schaltung unsymmetrisch belastet. Die Stärke des entstehenden Erdschlußstromes läßt sich aus der Erdkapazität der ungestörten Leitungen und dem Widerstande und der Induktanz des Erdschlußkreises berechnen. Im allgemeinen sind Widerstand und Induktanz so klein, daß sie neben der Wirkung der Kapazität keine erhebliche Rolle spielen, so daß diese

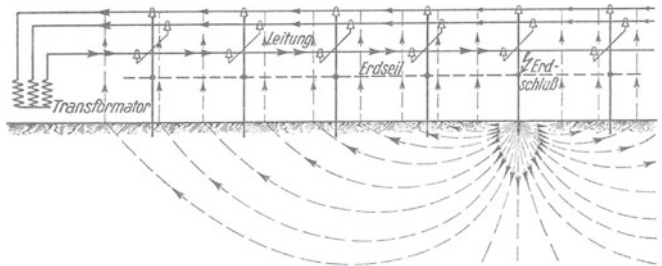


Fig. 1.

allein ausschlaggebend für die Größe des Erdschlußstromes ist. Die Bestimmung der Kapazität ist für die meisten praktisch vorkommenden Leiteranordnungen bekannt, die Größe des Erdschlußstromes soll daher als gegeben angesehen werden¹⁾. Er ist stets proportional sowohl der Kapazität als auch der Spannung des Netzes. In größeren Verteilungsnetzen kann die Kapazität der Leitungen so groß und die Spannung so hoch sein, daß der Erdschlußstrom sehr beträchtliche Werte annimmt, die bis zu 50 Amp. und darüber betragen können. Dieser Strom fließt an der Durchschlagsstelle vom Mastfuß in die Erde und kann dort gefährliche Stromkonzentrationen hervorrufen. In größeren Entfernungen vom Mastfuß ist die Stromdichte wegen der Ausbreitung des Stromes auf eine große

¹⁾ Vgl. K. Kuhlmann, E. T. Z. 1908, S. 316; H. Behrend, E. T. Z. 1916, S. 114; W. Petersen, E. T. Z. 1916, S. 493.

Fläche nur gering und auch der Verschiebungsstrom von der Erdoberfläche zu den ungestörten Leitungen ist nicht so dicht, daß er direkte Unannehmlichkeiten im Luftraum hervorrufen könnte. Er kann jedoch Störungen in benachbarten Schwachstromleitungen bewirken.

Um die in Fig. 1 dargestellte starke Stromkonzentration zu vermeiden, kann man die eisernen Masten entweder in einzelnen Schutzgebieten streckenweise oder auch sämtlich untereinander durch ein Erdungsseil leitend verbinden, was in Fig. 1 gestrichelt angedeutet ist. Dadurch erhält der Erdschlußstrom mehrere parallele Wege zur Erde, so daß der Strom durch den Erdschlußmast geringer wird. Alle Mastfüße in der Nähe der Erdschlußstelle bilden jetzt zwar Konzentrationspunkte für den Stromeintritt in die Erde und stellen damit Gefährpunkte dar. Da der Strom des einzelnen Mastes jedoch durch die gemeinsame Verbindung sehr viel kleiner geworden ist, so ist die maximale Gefährdung wesentlich geringer als vorher.

In den letzten Jahrzehnten sind verschiedenartige Mittel entwickelt, um die Erdschlußströme nach Möglichkeit zu unterdrücken¹⁾. Da dieselben jedoch nicht überall im vollen Maße anwendbar sind, und sie die Ströme natürlich erst nach erfolgtem Durchschlag, also nach mindestens kurzzeitigem Auftreten, verringern können, so dürften die folgenden Ausführungen Interesse bieten, in denen versucht ist, das Maß der Gefährdung zahlenmäßig zu erfassen, die durch den konzentrierten Übertritt des Stromes vom Mast in die Erde hervorgerufen wird.²⁾

I. Die Ausbreitung der Erdschlußströme um den Mastfuß.

a) Tiefenwirkung.

Der Erdschlußstrom tritt beim Isolatordurchschlag oder -überschlag durch den Fuß des eisernen Mastes in die Erde ein, so wie es in Fig. 2 dargestellt ist; er breitet sich bei homogener Erde in der näheren Umgebung der Erdschlußstelle gleichmäßig nach allen Seiten aus und erzeugt im Erdboden, der den endlichen spezifischen Leitungswiderstand³⁾ ρ besitzt, ein erhebliches Spannungsgefälle, dessen Verlauf in Fig. 2 dargestellt ist. Bei allseitig gleichmäßiger Ausbreitung des Stromes ist auf jeder Halbkugelfläche, die im Erdinnern um den Eintrittspunkt geschlagen wird, die gleiche Stromdichte i vorhanden.

Der Gesamtstrom ist daher für jeden Abstand x vom Mastfuß

$$J = 2\pi x^2 \cdot i. \quad (1)$$

Die Stromdichte ist daher

$$i = \frac{J}{2\pi x^2} \quad (2)$$

und die elektrische Feldstärke, das ist die Spannung pro Längeneinheit

$$e = \rho i = \frac{\rho J}{2\pi x^2}. \quad (3)$$

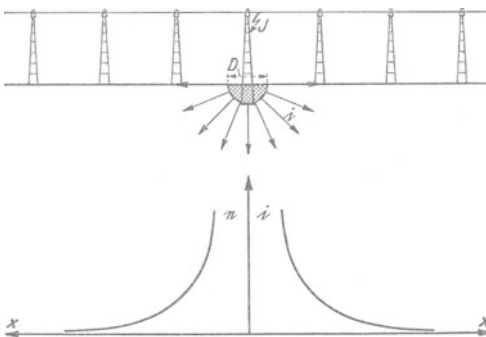


Fig. 2.

¹⁾ W. Petersen, E. T. Z. 1918, S. 341; Derselbe, E. T. Z. 1919, S. 1.

²⁾ L. Lichtenstein, E. T. Z. 1921, S. 841 behandelt in einem während der Drucklegung erschienenen Aufsatz ähnliche Fragen der Stromausbreitung.

³⁾ Seine Größenordnung ist für feuchten Boden $\rho = 10^4 \Omega \text{ cm}$; vgl. M. Abraham, Physikal. Zeitschr. 20, 145 (1919).

Wir wollen für unsere Berechnung annehmen, der Strom trete durch eine gut leitende, in die Erdoberfläche versenkte Halbkugel vom Durchmesser D an Stelle des Mastfußes ein. Das entspricht der Wirklichkeit zwar nicht genau, jedoch kann man durch einfache Messungen für jede Elektrodenform leicht den gleichwertigen Kugeldurchmesser feststellen. Die durch den Erdwiderstand des Stromes J hervorgerufene Spannung E am Mast gegenüber einem beliebigen Punkte im Innern oder an der Oberfläche der Erde mit der Entfernung x ist dann

$$E = \int_{\frac{D}{2}}^x e dx = \frac{\rho J}{2\pi} \int_{\frac{D}{2}}^x \frac{dx}{x^2} = \frac{\rho J}{2\pi} \left[\frac{2}{D} - \frac{1}{x} \right]. \quad (4)$$

Für Entfernungen, die groß sind gegenüber dem Eintritts-Kugeldurchmesser verschwindet das zweite Klammernglied gegenüber dem ersten. Man erhält

$$E = \frac{\rho J}{\pi D} = R J. \quad (5)$$

Darin ist

$$R = \frac{\rho}{\pi D} \quad (6)$$

eine Größe, die unabhängig vom Strom und von der Entfernung x ist und nur durch den spezifischen Widerstand der Erde und den Eintritts-Kugeldurchmesser gegeben ist. Man nennt sie den Ausbreitungswiderstand oder Übergangswiderstand der Erdung¹⁾.

Für jede beliebige Form der Erdelektrode ist die Spannung gegenüber weit entfernten Punkten und daher der Übergangswiderstand durch eine ähnliche Formulierung gegeben. Er ist stets proportional dem spezifischen Leitungswiderstand ρ des Erdbodens und umgekehrt proportional der Hauptabmessung z. B. D der Elektrode. So erhält man beispielsweise für kreisförmige Platten vom Durchmesser d , die auf dem Erdboden liegen, den Übergangswiderstand¹⁾

$$r = \frac{\rho}{2d}. \quad (7)$$

Schreitet ein Mensch oder ein Tier entsprechend Fig. 3 die Umgebung der Erdschlußstelle ab, so erhält er vom Erdboden her Spannung aufgedrückt, die ihn unter Umständen beschädigen kann. Nennt man die Schrittweite s , so ist die Schrittspannung das Linienintegral der Feldstärke über die Schrittweite, also mit Gleichung (3)

$$e_s = \int_x^{x+s} e dx = \frac{\rho J}{2\pi} \int_x^{x+s} \frac{dx}{x^2} = \frac{\rho J}{2\pi} \frac{s}{x(x+s)}. \quad (8)$$

Für Entfernungen vom Mast, die groß gegen die Schrittweite sind, nimmt die Schrittspannung nach der Näherungsformel

$$e_s = \frac{\rho J}{2\pi} \frac{s}{x^2} \quad (9)$$

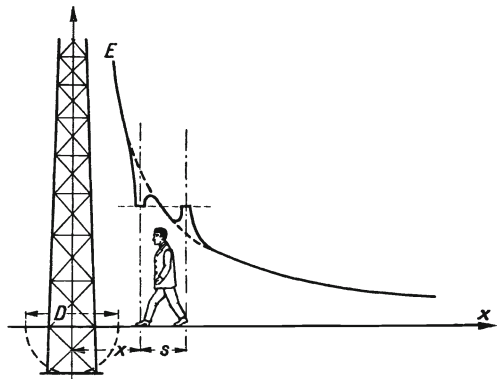


Fig. 3.

¹⁾ G. Kirchhoff, Vorlesungen über theoretische Physik Bd. III, S. 125; Kalender f. Elektrotechn. 1915, S. 76.

umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung ab. In der Nähe des Mastes kann sie bis zu einem Höchstwert ansteigen, der durch $x = \frac{D}{2}$ gegeben ist zu

$$e_s = \frac{2}{\pi} \frac{s}{D(D+2s)} \rho J. \quad (10)$$

Die Schrittspannung ist außer vom Erdstrom und der Mastentfernung noch abhängig von der Schrittweite und dem spezifischen Widerstand der Erde und wird um so stärker, je größer diese beiden Werte sind.

Für die Gefährdung der Lebewesen kommt nun aber in Wirklichkeit nicht die Größe der Spannung in Betracht, sondern der Strom, der den Körper durchfließt. Derselbe hängt erheblich vom Leitungswiderstand des Körpers ab, dessen Größe sehr variabel ist. Wir wollen den gefährlichsten Fall betrachten, daß der Körperwiderstand = 0 ist, so daß unter der Wirkung der Schrittspannung der denkbar größte Strom durch den Körper fließt. Dieser Kurzschlußstrom beeinflusst natürlich die Spannungsverteilung in der Umgebung der Fußpunkte, und zwar muß er sich so groß einstellen, daß unter der Wirkung seines eigenen Feldes und des vom Mast ausgehenden Erdstromfeldes die Spannungsdifferenz zwischen den beiden Fußpunkten gleich 0 wird. Wenn wir zur Vereinfachung der Anschauung die Fußpunkte als Kreisplatten vom Durchmesser d auffassen, der klein gegenüber der Schrittweite sein möge, so verteilt sich der Strom jedes Fußes nach ganz ähnlichen Gesetzen wie der Maststrom im Erdboden und besitzt unter jedem Fuß einen Ausbreitungswiderstand nach Gleichung (7), durch dessen Wirkung der Spannungsverlauf unter den Füßen soweit gehoben oder gesenkt wird, daß kein Spannungsunterschied zwischen den Füßen mehr besteht. In Fig. 2 sind diese Verhältnisse dargestellt.

Da der Kurzschlußstrom i_s durch den Körper in den beiden Ausbreitungswiderständen r zusammengenommen der ursprünglichen Schrittspannung e_s das Gleichgewicht halten muß, so ist seine Größe gegeben durch die Bedingung

$$2r i_s = e_s. \quad (11)$$

Er wird also nach Einsetzen von Gleichung (7) und (8)

$$i_s = \frac{ds}{x(x+s)} \frac{J}{2\pi}. \quad (12)$$

Das Verhältnis dieses gefährlichsten Körperstromes zum Erdstrom des Mastes hängt also lediglich ab von der Schrittweite s , dem gleichwertigen Fußplattendurchmesser d und der Entfernung x vom Mastmittelpunkt. Es ist dagegen gänzlich unabhängig von der Leitfähigkeit des Erdbodens. Für Mastentfernungen, die groß gegen die Schrittweite sind, erhält man wieder die Näherungsformel

$$\frac{i_s}{J} = \frac{1}{2\pi} \frac{ds}{x^2}. \quad (13)$$

Für Berührung des einen Fußes mit dem gleichwertigen Mastfußdurchmesser D erhält man

$$\frac{i_s}{J} = \frac{2}{\pi} \frac{ds}{D(D+2s)}. \quad (14)$$

Wenn der Strom nicht durch beide Füße in den Körper ein- und austritt, sondern wenn man in Schrittweite vom Mast steht und denselben mit der Hand berührt,

so kann man deren Übergangswiderstand zum eisernen Mast vernachlässigen, so daß der Kurzschlußstrom nur durch einen einzigen Fußwiderstand bestimmt wird. In Gleichung (11) fällt dann der Faktor 2 fort und man erhält für Mastberührung mit der Hand den doppelten Strom der Gleichung (14). Steht man dabei nicht nur mit einem, sondern mit beiden Füßen um die Schrittweite vom Mast entfernt, so wird der den Körper durchfließende Strom wegen des verringerten Fußwiderstandes sogar noch größer. In allen diesen Fällen kann jedoch andererseits der Eigenwiderstand des Körpers eine gewisse Abschwächung bewirken. Man kann dieselbe berücksichtigen, indem man den Strom nach diesen Formeln verringert im Verhältnis des Ausbreitungswiderstandes beider Füße zum Gesamtwiderstand von Körper und Füßen. Genaue Zahlenwerte hierfür sind aber schwer zu bestimmen.

Für einen gleichwertigen Mastfußdurchmesser¹⁾ von $D = 2$ m, eine Schrittweite $s = 1$ m und einen gleichwertigen Fußplattendurchmesser $d = 0,2$ m erhält man für den Fall der Gleichung (14) einen höchstmöglichen Körperstrom von

$$\frac{i_s}{J} = \frac{1}{20\pi} = 1,6 \text{ vH.} \quad (15)$$

Sieht man einen Körperstrom von 0,1 Amp. als tödlich an, so muß der Erdschlußstrom im Maste unterhalb 6,3 Amp. bleiben.

b) Oberflächenwirkung.

Bisher haben wir angenommen, daß der spezifische Leitungswiderstand ρ der Erde in der näheren und weiteren Umgebung des geerdeten Mastes an jeder Stelle der Oberfläche und der Tiefe den gleichen Wert besitzt. Dies ist nun in Wirklichkeit fast nie der Fall. Im allgemeinen sind in der Nähe der Erdoberfläche Schichten verschiedener Leitfähigkeit vorhanden, die bewirken, daß der Strom sich nicht mehr so gleichförmig verteilt, wie es in Fig. 1 und Gleichung (2) angesetzt wurde. Sehr häufig leitet die Schicht unmittelbar an der Erdoberfläche den Strom wesentlich schlechter als die tieferen Schichten, die stärker von Grundwasser durchsetzt sind. Der Strom fließt dann vom Mastfuß aus zum größeren Teil nach unten in die gut leitenden Schichten und nur ein geringerer Teil, als bisher berechnet, bleibt an der Erdoberfläche haften. Die Schrittspannung und damit auch der gefährliche Körperstrom kann dadurch erheblich verringert werden. Es treten aber auch Fälle ein, in denen die Schichten der Leitfähigkeit umgekehrt verlaufen. Beispielsweise kann sich in einem gewissen Abstand unter der Oberfläche eine nicht leitende Horizontalschicht befinden. Der Erdstrom kann dann nur in der mehr oder weniger gut leitenden Oberschicht von begrenzter Tiefe fließen und entwickelt hier eine Stromdichte und damit ein Spannungsgefälle, das größer ist, als es den bisherigen Gleichungen entspricht, so daß die Gefährdung der Lebewesen an der Erdoberfläche steigt. Besonders ungünstig liegen die Verhältnisse, wenn nur die äußerste Schicht der Oberfläche durch kräftige Regenschauer stark durchfeuchtet ist und verhältnis-

¹⁾ Nach einigen Messungen an Modellen kann man für den gleichwertigen Fußdurchmesser eines vollen quadratischen Mastes mit der Seitenlänge a und der Eindringungstiefe b in den Erdboden setzen:

$$D = 1,72 \sqrt{ab},$$

während man für den gleichwertigen Durchmesser eines menschlichen Fußes von der Fläche f den des flächengleichen Kreises annehmen darf, also:

$$d = 1,13 \sqrt{f}.$$

mäßig hohe Leitfähigkeit besitzt, während sich darunter eine dickere schlecht leitende Bodenschicht, etwa von ausgetrocknetem Sande, befindet. Der Erdstrom konzentriert sich dann zum großen Teil an der gut leitenden Erdoberfläche.

Wir wollen den gefährlichsten Grenzfall betrachten, daß nur eine dünne Oberflächenschicht von der Stärke h leitend ist, während der Widerstand der darunter liegenden Erdmasse so groß sein möge, daß zum mindesten in der Gefahrzone der näheren Umgebung des Mastes keine erhebliche Strommenge in sie übertritt. Der Erdstrom des Mastes breitet sich dann in dieser leitenden Schicht radial vom Maste aus, wie dies in Fig. 4 dargestellt ist. Auf jedem Kreis an der Erdoberfläche um den Mastfuß herum herrscht dann die gleiche Stromdichte. Der Gesamtstrom ist daher für den Abstand x vom Mittelpunkt

$$J = 2\pi x \cdot h \cdot i. \quad (16)$$

Die Stromdichte ist daher

$$i = \frac{J}{2\pi h x}. \quad (17)$$

Sie nimmt ebenso wie auch die elektrische Feldstärke

$$e = \rho i = \frac{\rho J}{2\pi h x} \quad (18)$$

umgekehrt wie die erste Potenz der Entfernung x ab, also wesentlich langsamer wie bei gleichförmigem Erdwiderstände, wo die Abnahme gemäß

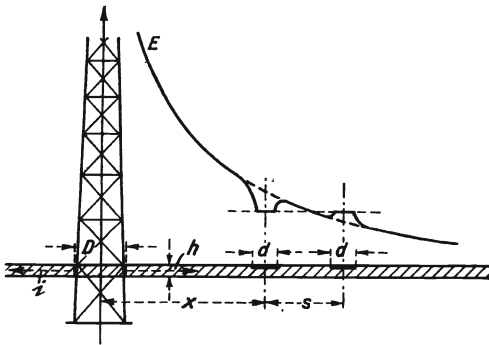


Fig. 4.

der zweiten Potenz der Entfernung erfolgt.

Wenn wir den Mastfuß für den Stromübergang zur leitenden Erdschicht durch einen gleichwertigen Kreiszyylinder vom Durchmesser D ersetzt denken, so ist die durch den Erdstrom J hervorgerufene Spannung E am Mast gegenüber einem beliebigen Punkt der Erdoberfläche mit der Entfernung x

$$E = \int_{\frac{D}{2}}^x e dx = \frac{\rho J}{2\pi h} \int_{\frac{D}{2}}^x \frac{dx}{x} = \frac{\rho J}{2\pi h} \ln \left(\frac{2x}{D} \right). \quad (19)$$

Diese Spannung wird selbst für große Entfernungen niemals konstant, sondern wächst logarithmisch weiter an. Ein bestimmter Ausbreitungswiderstand eines einzelnen Mastes, der sich bei Tiefenwirkung des Stromes ergab, läßt sich daher bei Oberflächenverlauf des Stromes nicht mehr angeben. Der Widerstand hängt vielmehr hier von der Größe des gesamten Spannungsfeldes ab.

Legt man jedoch nicht nur eine sondern zwei Elektroden, etwa zwei Kreisplatten vom Durchmesser d , an die leitende Oberfläche, die die Entfernung s haben mögen, wodurch sich zwei Füße in Schrittweite darstellen lassen, durch die der gleiche Strom ein- und austritt, so ergibt sich natürlich ein bestimmter Übergangs- oder Ausbreitungswiderstand. Man findet auf ähnliche Weise wie bei der letzten Gleichung für beide Elektroden zusammen

$$2r = \frac{\rho}{\pi h} \ln \left(\frac{2s}{d} \right) \quad (20)$$

sofern s groß gegen d ist.

Dieser Widerstand ist nicht wie der Ausbreitungswiderstand nach Gleichung (7) bei Tiefenwirkung des Stromes nur durch den Erdwiderstand ρ und Plattendurchmesser d gegeben, sondern er hängt auch von der Stärke h der leitenden Schicht und vor allem von der Entfernung s der beiden Plattenelektroden in starkem Maße ab und wird selbst bei sehr großen Plattenabständen nicht konstant.

Obwohl die Spannung E am Mast nach Gleichung (19) sich nicht bestimmen läßt, ohne zu wissen, bis zu welchen Entfernungen x sich der Strom in der Oberflächenschicht ausbreitet, können wir das Spannungsgefälle, das der Erdstrom J in der Umgebung des Mastes hervorruft, nach Gleichung (18) doch berechnen. Die Schrittspannung zwischen 2 Füßen im Abstand x und $x + s$ ergibt sich daraus zu

$$e_s = \int_x^{x+s} e dx = \frac{\rho J}{2\pi h} \int_x^{x+s} \frac{dx}{x} = \frac{\rho J}{2\pi h} \ln\left(1 + \frac{s}{x}\right). \quad (21)$$

Man kann den Logarithmus in einer Reihe entwickeln und erhält für große Entfernungen vom Mast unter Vernachlässigung der weiteren Glieder mit höheren Potenzen als Näherungsformel für die Schrittspannung

$$e_s = \frac{\rho J}{2\pi h} \frac{s}{x}. \quad (22)$$

Da die Oberflächenschichtdicke h klein ist, so erkennt man durch Vergleich dieser Beziehung mit Gleichung (9), daß in erheblichen Entfernungen vom Mast bei Oberflächenleitung eine viel größere Schrittspannung entsteht als bei Tiefenleitung.

Der größtmögliche Körperstrom ist wieder der Kurzschlußstrom, der sich bei widerstandsloser Verbindung der beiden Fußplatten unter der Wirkung dieser Schrittspannung entwickelt. Er berechnet sich auch hier nach Gleichung (11) in Verbindung mit (20) und (21) zu

$$i_s = \frac{e_s}{2r} = \frac{\ln\left(1 + \frac{s}{x}\right) J}{\ln\left(\frac{2s}{d}\right) \cdot 2}. \quad (23)$$

Das Verhältnis dieses gefährlichsten Körperstromes zum Erdstrom des Mastes hängt auch hier lediglich von geometrischen Längenverhältnissen ab, nämlich von dem Verhältnis Schrittweite zum Mastabstand und Schrittweite zum Fußdurchmesser. Es ist dagegen völlig unabhängig von der Dicke und dem spezifischen Widerstand der leitenden Oberflächenschicht. Für sehr große Entfernungen vom Mast erhält man als Näherungsformel für das Stromverhältnis nach Gleichung (22):

$$\frac{i_s}{J} = \frac{1}{2} \frac{s}{x \cdot \ln\left(\frac{2s}{d}\right)}. \quad (24)$$

Für Berührung des einen Fußes mit dem Mastfußdurchmesser D erhält man

$$\frac{i_s}{J} = \frac{1}{2} \frac{\ln\left(1 + \frac{2s}{D}\right)}{\ln\left(\frac{2s}{d}\right)}. \quad (25)$$

Eine direkte Berührung des Mastes mit den Händen vergrößert den Körperstrom noch weiter, während der tatsächlich stets vorhandene Körperwiderstand den Strom verkleinert. Durch Vergleich des Körperwiderstandes mit dem Fußwiderstand nach Gleichung (20) kann man unter Umständen auch hier das Maß der Verringerung abschätzen.

Der Logarithmus im Nenner der letzten drei Formeln wird nur durch Schrittweite und Fußgröße des Menschen bestimmt. Für eine Schrittweite $s = 1$ m und einen gleichwertigen Fußplattendurchmesser $d = 0,2$ m erhält man den Logarithmus zu 2,3. Nimmt man auch hier einen gleichwertigen Mastfußdurchmesser von $D = 2$ m an, so erhält man für den Fall der Gleichung (25) einen höchstmöglichen Körperstrom von

$$\frac{i_s}{J} = \frac{\ln 2}{2 \ln 10} = 15 \text{ vH.} \quad (26)$$

Dies ist ein außerordentlich hoher Betrag, der fast das 10fache des in Gleichung (15) für die Tiefenausbreitung berechneten Körperstromes darstellt. Er wird bedingt durch vollständige Flächenkonzentration des gesamten Maststromes an der Erdoberfläche, durch die die Gefährdung von Lebewesen auf ein hohes Maß gebracht werden kann.

Bei einphasigem Erdschluß von Wechselstromleitungen entwickeln sich Erdströme, die durch die Kapazität der anderen gesunden Phasenleitungen ins Netz zurückfließen müssen. Sie sind daher proportional der Leitungskapazität und können im allgemeinen nur mäßige Werte erreichen, die meist unter 50 Amp. liegen. Dennoch können, wie die vorausgehenden Rechnungen zeigen, schon hierbei starke Gefährdungen eintreten. Außerordentlich starke Erdströme treten jedoch dann auf, wenn gleichzeitig zwei Erdschlüsse in verschiedenen Phasen des Netzes eintreten. Dann ist nämlich die volle Netzspannung nur über die Erdwiderstände zweier Masten und die Induktanz der Leitungen kurzgeschlossen. Dabei entwickeln sich außerordentlich große plötzliche und dauernde Kurzschlußströme, deren Größe im allgemeinen ein Vielfaches der Kapazitätsströme ist. Sie können so stark sein, daß sie sogar die Feuchtigkeit in der Nähe der Masten zum Verdampfen bringen und die Erdoberfläche im weiten Umkreise von den Erdungsstellen unter gefährliche Spannungen setzen können.

II. Die Wirkung des Erdungsseiles bei Erd- und Kurzschlüssen.

Will man das Auftreten von gefährlichen Schrittspannungen in der Nähe des Erddurchschlages von Freileitungen vermeiden, so muß man dafür sorgen, daß die Ströme in der Umgebung des mit Erdschluß behafteten Mastes, in der hohe Stromkonzentration und daher gefährliche Spannungen auftreten, in metallischen Leitern fließen können und erst in größeren Abständen vom geerdeten Maste ihren Weg durch die Erde nehmen müssen. Man pflegt dies entweder dadurch zu erreichen, daß man die Erdungsströme von jedem Mastfuß in ein unterirdisch möglichst ausgedehntes weitmaschiges Drahtnetz fließen läßt, das den Mast umgibt, oder indem man die eisernen Masten der Leitungsstrecke durch ein besonderes Erdungsseil miteinander verbindet, so daß den Erdschlußströmen nicht nur der mit Erdschluß behaftete Mast, sondern auch sämtliche andere Masten zum Übertritt in die Erde zur Verfügung stehen. Da nun aber das Erdungsseil einen

gewissen Leitungswiderstand besitzt, so wird durch weit entfernte Masten nicht soviel Strom in die Erde fließen, als durch Masten, die dem Erdschluß nahe liegen. Der größte Strom wird stets durch den Erdschlußmast selbst zur Erde übertreten.

Um die Verteilung des Stromes zu finden, können wir entsprechend Fig. 5 für den n ten Mast, vom Erdungsmast aus gerechnet, aussagen, daß der in ihm zur Erde übertretende Strom J_n gleich sein muß der Differenz der Ströme i_n und i_{n+1} in den ihm benachbarten Teilen des Erdungsseiles

$$J_n = i_n - i_{n+1}. \quad (27)$$

Wir wollen den Widerstand des Erdseil-

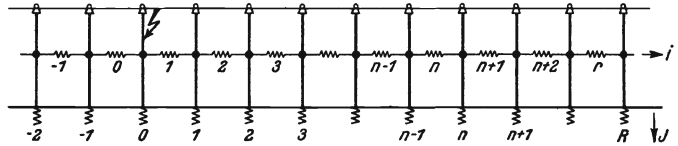


Fig. 5.

abschnittes zwischen zwei Masten r und den Erdungswiderstand jedes Mastes R nennen und dabei annehmen, daß alle Masten gleichen Erdwiderstand und einen Abstand besitzen, der groß genug gegenüber dem Mastfuß ist, so daß ihre Stromverteilungen sich in der Erde gegenseitig nicht merklich beeinflussen. Dann können wir die Umlaufspannung für den Stromkreis anschreiben, der aus den n ten Teil des Erdungsseiles und dem n ten und $n-1$ ten Mast der Strecke gebildet wird zu

$$J_n R - J_{n-1} R + i_n r = 0. \quad (28)$$

Diese beiden Gleichungen (27) und (28) beherrschen das Gesetz der Stromverteilung auf alle Masten und Erdseilabschnitte vollständig, wenn man für n nacheinander die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 usw. einsetzt, die angeben, den wievielten Mast vom Erdschlußmast aus man betrachten will.

Um die Unbekannten i und J in Gleichung (27) und (28) zu trennen, kann man nach Gleichung (28) schreiben

$$i_n = \frac{R}{r} (J_{n-1} - J_n). \quad (29)$$

Diese Gleichung gilt für den n ten Streckenabschnitt des Erdseiles. Wendet man sie auf den $n + 1$ ten Erdseilabschnitt an, so muß man in ihr n durch $n + 1$ ersetzen und erhält

$$i_{n+1} = \frac{R}{r} (J_n - J_{n+1}). \quad (30)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (29) und (30) in Gleichung (27) entsteht alsdann

$$\frac{r}{R} J_n = J_{n+1} - 2J_n + J_{n-1}, \quad (31)$$

eine Beziehung, die eine lineare Differenzgleichung zweiter Ordnung für den Maststrom J darstellt.

Eine ähnliche Beziehung erhält man für den Erdseilstrom i , indem man die Gleichung (27) für den $n - 1$ ten Mast anschreibt zu

$$J_{n-1} = i_{n-1} - i_n. \quad (32)$$

Wenn man Gleichung (27) und (32) in Gleichung (28) einsetzt, dann entsteht

$$\frac{r}{R} i_n = i_{n+1} - 2i_n + i_{n-1}, \quad (33)$$

also dieselbe Differenzgleichung wie für J .

Zur Lösung dieser Differenzgleichungen müssen wir einen Ansatz machen, in welcher Weise der Strom von der Ordnungszahl n der Masten abhängt. Wir versuchen den Ansatz

$$J_n = A \cdot \varepsilon^{\alpha n}, \quad (34)$$

in dem A eine willkürliche noch zu bestimmende Konstante bedeutet, ε die Basis der natürlichen Logarithmen ist und α ein Zahlenwert ist, dessen Größe sich durch Einsetzen in die Differenzgleichung (31) ergibt.

Wir bilden zu dem Zweck durch Einsetzen von $n + 1$ und $n - 1$ an Stelle von n in Gleichung (34):

$$J_{n+1} = A \cdot \varepsilon^{\alpha(n+1)} = A \cdot \varepsilon^\alpha \cdot \varepsilon^{\alpha n} \quad (35)$$

und

$$J_{n-1} = A \cdot \varepsilon^{\alpha(n-1)} = A \cdot \varepsilon^{-\alpha} \cdot \varepsilon^{\alpha n}. \quad (36)$$

Damit wird aus Gleichung (31), wenn wir die gemeinsamen Faktoren aller Glieder streichen:

$$\frac{r}{R} = \varepsilon^\alpha - 2 + \varepsilon^{-\alpha} = \left(\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}} - \varepsilon^{-\frac{\alpha}{2}} \right)^2 = \left(2 \operatorname{Sh} \frac{\alpha}{2} \right)^2, \quad (37)$$

und daraus erhält man für die Exponentialziffer α die Bestimmungsgleichung:

$$\operatorname{Sh} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{R}}. \quad (38)$$

Da die Widerstände r und R stets bekannt sind, so kann man α aus einer Tafel der hyperbolischen Funktion leicht berechnen und erkennt aus Gleichung (34), daß der von den Masten in die Erde übertretende Strom J sich mit zunehmender Entfernung vom Erdschlußmaste nach einem Exponentialgesetz ändert. Da sowohl positive wie negative Werte von α der Bedingungsgleichung (37) genügen, so können wir als vollständige Lösung der Differenzgleichung in Erweiterung von Gleichung (34) schreiben:

$$J_n = A \varepsilon^{\alpha n} + B \varepsilon^{-\alpha n}. \quad (39)$$

Die beiden willkürlichen Konstanten A und B entsprechen der Tatsache, daß in der Differenzgleichung (31) recht die zweite Differenz von J_n steht, nämlich:

$$(J_{n+1} - J_n) - (J_n - J_{n-1}) = J_{n+1} - 2J_n + J_{n-1}. \quad (40)$$

Häufig ist der Widerstand r des Erdseiles zwischen zwei Masten relativ klein gegenüber dem Erdungswiderstand R jedes Mastes. Dann ist der Sh in der Gleichung (38) sehr klein, und man kann für ihn das Argument setzen. Man erhält damit die Näherungsformel für α :

$$\alpha \cong \sqrt{\frac{r}{R}}, \quad (41)$$

die bis zu Werten von etwa $\frac{r}{R} = 0,1$ anwendbar ist. Die Wurzel aus dem Verhältnis von Widerstand des Erdseiles zwischen zwei Masten zum Erdwiderstand jedes Mastes ist also charakteristisch für die Verteilung der Ströme in den gesamten Leitungen.

Da wir für den Erdseilstrom i_n in Gleichung (33) dieselbe Differenzgleichung erhalten haben wie für den Maststrom J_n in Gleichung (31), so erhalten wir in

Analogie mit der Lösung für den letzteren nach Gleichung (39) für den Erdseilstrom:

$$i_n = a \varepsilon^{\alpha n} + b \varepsilon^{-\alpha n}, \tag{42}$$

in der nur a und b andere Konstanten bedeuten.

Da die Ströme durch die Beziehung (27) miteinander verknüpft sind, so sind die Konstanten AB und ab nicht unabhängig voneinander. Man erhält vielmehr durch Einsetzen der Lösungen (39) und (42) in Gleichung (27):

$$A \varepsilon^{\alpha n} + B \varepsilon^{-\alpha n} = a \varepsilon^{\alpha n} (1 - \varepsilon^\alpha) + b \varepsilon^{-\alpha n} (1 - \varepsilon^{-\alpha}), \tag{43}$$

und daraus, weil diese Beziehung für jedes n gelten muß:

$$\left. \begin{aligned} A &= a(1 - \varepsilon^\alpha) \\ B &= b(1 - \varepsilon^{-\alpha}) \end{aligned} \right\} \tag{44}$$

Für den Erdseilstrom wird damit nach Gleichung (42):

$$i_n = \frac{A \varepsilon^{\alpha n}}{1 - \varepsilon^\alpha} + \frac{B \varepsilon^{-\alpha n}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}}. \tag{45}$$

In den beiden Gleichungen (39) und (45) sind jetzt nur noch zwei Konstanten A und B enthalten, deren Größe aus den Grenzbedingungen des Problems bestimmt werden muß.

Wir wollen drei verschiedene Fälle untersuchen:

a) Erdschluß am Ende einer langen Leitungsstrecke.

Der Erdschlußstrom J , der bei einphasigem Erdschluß im wesentlichen durch die Kapazität der Netzteile bedingt ist, gabelt sich nach Fig. 6 in den Mastfußstrom J_0 und den Erdseilstrom i_1 . Es ist also:

$$J = J_0 + i_1. \tag{46}$$

Dies ist die Grenzbedingung an einem Ende der Strecke mit $n = 0$.

Für sehr große Abstände n vom Erdschlußmast können die Ströme nicht über alle Maßen groß werden, sie müssen vielmehr mit wachsendem n kleiner und kleiner werden. Für den Grenzfall sehr langer Leitungen muß daher in Gleichung (39) und (45):

$$A = 0 \tag{47}$$

werden. Es bleibt dann in beiden Gleichungen nur das zweite Glied mit B stehen. Es ist:

$$\left. \begin{aligned} J_n &= B \varepsilon^{-\alpha n} \\ i_n &= \frac{B \varepsilon^{-\alpha n}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} \end{aligned} \right\} \tag{48}$$

Durch Einsetzen dieser Werte in Gleichung (46), wobei für J_n : $n = 0$ und für i_n : $n = 1$ zu setzen ist, erhält man den Ausdruck:

$$J = B + \frac{B \varepsilon^{-\alpha}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} = \frac{B}{1 - \varepsilon^{-\alpha}}. \tag{49}$$

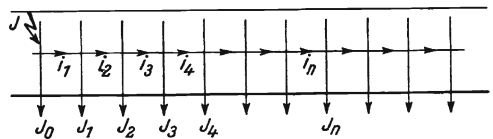


Fig. 6.

Die Konstante B ist also im Verhältnis zum Erdschlußstrom J :

$$\frac{B}{J} = 1 - \varepsilon^{-\alpha} = 1 - \frac{1 - \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2}}{1 + \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2}}{1 + \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2}}. \quad (50)$$

Der größte in die Erde fließende Strom herrscht natürlich am Erdschlußmast mit $n = 0$. Er ist nach Gleichung (48) mit B von Gleichung (50):

$$J_0 = \frac{2 \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2}}{1 + \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2}} J. \quad (51)$$

Der größte Erdseilstrom ist in der am Erdschlußmast anliegenden Strecke vorhanden mit $n = 1$. Er ist aus Gleichung (46) oder (48) zu errechnen zu:

$$i_1 = J - \frac{2 \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2}}{1 + \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2}} J = \frac{1 - \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2}}{1 + \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2}} J = \varepsilon^{-\alpha} J. \quad (52)$$

Zur Zahlenrechnung ist es bequem, die transzendenten Funktionen zu vermeiden. Man kann dazu unter Berücksichtigung von Gleichung (38) schreiben:

$$\mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2} = \frac{\mathfrak{S}in \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \mathfrak{S}in^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\frac{r}{R}}{1 + \frac{1}{4} \frac{r}{R}}} \quad (53)$$

und erhält dadurch für die am meisten interessierenden Ströme nach Gleichung (51) und (52) einfach zu berechnende Ausdrücke. In Tabelle 1 sind dieselben für verschiedene Werte von $\frac{r}{R}$ angeschrieben. Man erkennt, daß man durch Ver-

Tabelle 1.

$\frac{r}{R}$	$\frac{J_0}{J}$	$\frac{i_1}{J}$
0	0	1
0,01	0,096	0,904
0,03	0,159	0,841
0,1	0,271	0,729
0,3	0,416	0,584
1	0,618	0,382

binden der Masten durch ein Erdseil mit relativ kleinem Widerstande den vom Erdschlußmast in die Erde überfließenden Strom auf einen geringen Bruchteil vermindern kann, daß man daher durch Anwendung von Erdseilen die Gefährdung durch Erdströme erheblich verkleinert. Wesentlich ist dabei die richtige Wahl des Verhältnisses von Erdseilwiderstand zu Masterdungswiderstand. Nach unseren Berechnungen kommt die Wurzel dieses Verhältnisses als Maßstab in Betracht.

Das Erdseil entlastet den Erdschlußmast und führt die Erdströme auch den anderen Masten zu. Wie sie sich auf die einzelnen Masten und die einzelnen Erdseilabschnitte verteilen, geht aus Formel (48) hervor und ist in Fig. 7 für den Fall

$\frac{r}{R} = 0,03$ bildlich dargestellt.

Wir wollen den Mastabstand n bestimmen, in dem der Erdstrom auf 1 vH des Anfangswertes abgeklungen ist. Dafür ist:

$$\varepsilon^{-\alpha n} = \frac{1}{100} \tag{54}$$

und demnach

$$n_{1 \text{ vH}} = \frac{\ln 100}{\alpha} = 4,6 \sqrt{\frac{R}{r}}. \tag{55}$$

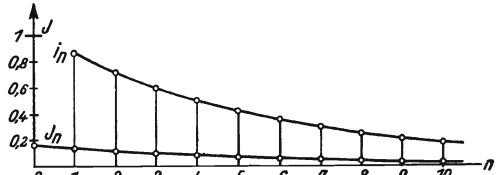


Fig. 7.

Darin ist der Näherungswert (41) für α eingesetzt. Man erkennt, daß der Ausbreitungsbereich der Erdströme auf die Masten sich nahezu umgekehrt wie die Wurzel aus dem Widerstand des Erdseiles ausdehnt. Für $\frac{r}{R} = 0,03$ erhält man demnach am 26. Mast vom Streckenende nur noch einen Erdstrom von 1 vH des Erdstromes an der Erdschlußstelle. Hierdurch ist gleichzeitig ausgedrückt, wann man die Leitung als lang genug ansehen kann, um nach Gleichung (47) die ersten Glieder von Gleichung (39) und (45) zu streichen. Es muß, um keinen erheblichen Fehler in der Rechnung zu begehen, mindestens die durch Gleichung (55) gegebene Mastzahl vorhanden sein. Praktisch ist dies wohl stets der Fall. Tabelle 2 zeigt die zu verschiedenen Werten von $\frac{r}{R}$ gehörigen Zahlenwerte von α und $n_{1 \text{ vH}}$.

Tabelle 2.

$\frac{r}{R}$	α	$n_{1 \text{ vH}}$
0	0	∞
0,01	0,100	46
0,03	0,173	26,5
0,1	0,316	14,5
0,3	0,547	8,5
1	0,980	4,7

b) Erdschluß auf der freien Leitungstrecke.

Der Erdschlußstrom breitet sich hier im Erdseil zu beiden Seiten des gestörten Mastes aus, wie es Fig. 8 darstellt. Für jede Seite gilt Gleichung (39) und (45) für die Verteilung der Ströme, jedoch mit verschiedenen Konstanten A und B . Auch hier sind die Erdschlußströme in den Masten und Erdseilen für große

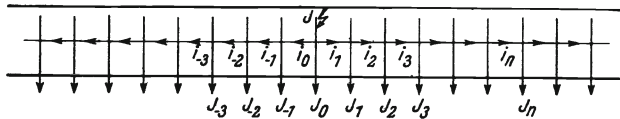


Fig. 8.

Mastentfernungen n verschwindend klein, sofern die Leitung mindestens so lang ist, wie es Gleichung (55) angibt. Daher ist für die Strecke rechts vom Erdschlußmast wieder $A = 0$ zu setzen, denn sonst würde man mit n wachsende Ströme erhalten. Dagegen ist für die Strecke links vom Erdschlußmast $B = 0$ zu setzen, denn sonst würde man mit minus n ansteigende Ströme erhalten.

Man erhält daher:

Links vom Erdschlußmast für negative n	Rechts vom Erdschlußmast für positive n
---	--

Für den Erdstrom der Masten:

$$J_n = A \varepsilon^{\alpha n} \tag{56} \quad | \quad J_n = B \varepsilon^{-\alpha n}, \tag{57}$$

Links vom Erdschlußmast für negative n	Rechts vom Erdschlußmast für positive n
---	--

Für den Strom im Erdseil:

$$i_n = \frac{A \varepsilon^{\alpha n}}{1 - \varepsilon^{\alpha}} \quad (58) \quad \left| \quad i_n = \frac{B \varepsilon^{-\alpha n}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}}, \quad (59)$$

Der Strom im Erdschlußmast mit $n = 0$ ist daher:

$$J_0 = A \quad (60) \quad \left| \quad J_0 = B \quad (61)$$

Der Strom im Erdungsseil unmittelbar am Erdschlußmast wird nach Fig. 4:

$$i_0 = \frac{A}{1 - \varepsilon^{\alpha}} \quad (62) \quad \left| \quad i_1 = \frac{B \varepsilon^{-\alpha}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} = \frac{B}{\varepsilon^{\alpha} - 1}. \quad (63)$$

Der Strom J_0 im Erdschlußmast ist beiden Seiten gemeinsam, daher wird nach Gleichung (60) und (61):

$$A = B = J_0. \quad (64)$$

Hierdurch werden die ersten Erdseilstrome von Gleichung (62) und (63) einander entgegengesetzt gleich, wie es aus Symmetriegründen nach Fig. 8 auch sein muß.

Der gesamte Erdschlußstrom J gabelt sich nach Fig. 8 in drei Teile. Ein Teil fließt durch den Erdschlußmast direkt zur Erde, zwei andere Teile fließen in die Erdseile nach rechts und links. Es ist also

$$J = J_0 + i_1 - i_0, \quad (65)$$

worin beachtet werden muß, daß allein i_0 negativ anzusetzen ist, weil die Ströme i in der Richtung wachsender n als positiv gezählt werden. Setzt man Gleichung (62) und (63) unter Beachtung von Gleichung (64) in Gleichung (65) ein, so erhält man

$$J = J_0 \left(1 + \frac{2}{\varepsilon^{\alpha} - 1} \right) = J_0 \frac{\varepsilon^{\alpha} + 1}{\varepsilon^{\alpha} - 1} = J_0 \operatorname{Cotg} \frac{\alpha}{2}, \quad (66)$$

und daher für den Erdstrom des Erdschlußmastes:

$$J_0 = \operatorname{Zg} \frac{\alpha}{2} J. \quad (67)$$

Den größten Erdseilstrom erhält man am einfachsten aus Gleichung (65) zu:

$$i_1 = -i_0 = \frac{J - J_0}{2} = \frac{1 - \operatorname{Zg} \frac{\alpha}{2}}{2} J. \quad (68)$$

Durch Vergleich der beiden letzten Beziehungen mit Gleichung (51) und (52) erkennt man, daß die größten auftretenden Erdströme und Erdseilstrome beim Erdschluß auf der freien Strecke wesentlich kleiner sind als beim Erdschluß am letzten Streckenmast. Sie sind nahezu, jedoch nicht ganz, halb so groß geworden, da $\operatorname{Zg} \frac{\alpha}{2}$ im allgemeinen ein kleiner Bruch ist. Zur zahlenmäßigen Berechnung der Ströme kann man auch hier die Gleichung (53) benutzen. In allen Fällen, in denen $\frac{r}{R}$ geringer als der oben bereits genannte Wert 0,1 ist, genügt es sogar, die Näherungsformel (41) anzuwenden und in Gleichung (53) den Nenner unter der Wurzel gleich 1

zu setzen. Man erhält dann aus Gleichung (67) die Näherungsgleichung für den größten Masterdstrom:

$$J_0 \cong \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{R}} J, \tag{69}$$

und für den größten Erdseilstrom:

$$i_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{R}} \right) J. \tag{70}$$

In Tabelle 3 sind die genauen Werte für verschiedene $\frac{r}{R}$ eingetragen.

Die Verteilung der Mastströme und Erdseilströme längs der Leitung auf beiden Seiten des Erdschlußmastes ist in Fig. 9 bildlich für $\frac{r}{R} = 0,03$ dargestellt. Auch hier gilt das gleiche Abklingungsgesetz der Gleichung (55).

Tabelle 3.

$\frac{r}{R}$	$\frac{J_0}{J}$	$\frac{i_1}{J}$
0	0	0,5
0,01	0,050	0,475
0,03	0,086	0,456
0,1	0,156	0,421
0,3	0,264	0,368
1	0,446	0,276

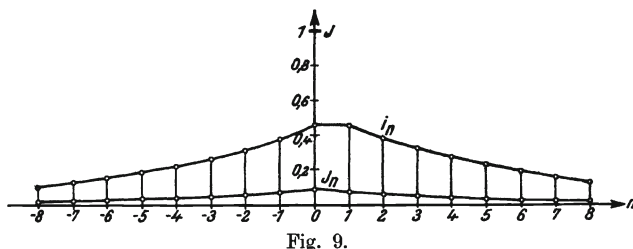


Fig. 9.

Im allgemeinen ist bei Erdschluß einer Phase eines größeren Leitungsnetzes der Erdstrom im wesentlichen durch die Erdkapazität der anderen Phasen bestimmt, durch die er in das Netz zurückfließt. Der Widerstand der Erde und der Ausbreitungswiderstand der Masten ist meistens so gering, daß er gegenüber dem Blindwiderstand der Kapazität keine erhebliche Rolle spielt. Dennoch kann es Interesse haben, den Widerstand der hier betrachteten Anordnungen, bei dem zahlreiche Masten parallel geschaltet sind, zu kennen, da von seiner Größe die Höhe der Spannung im Erdschlußmaste selbst abhängt. Da der Strom im Erdschlußmaste durch die Wirkung des Erdseiles geringer wird als der gesamte Erdschlußstrom, und zwar je nachdem um das Maß der Gleichung (51) oder (67), so wird auch die Spannung im Erdschlußmaste und daher der Widerstand der Gesamtanordnung um das gleiche Maß geringer. Im hier behandelten Falle des Erdschlusses auf der freien Strecke ist demnach der gesamte Widerstand der verketteten Stromleitung nach Fig. 8:

$$\sum R, r = R \cdot \mathfrak{Zg} \frac{\alpha}{2} \cong \frac{1}{2} \sqrt{Rr}. \tag{71}$$

Er läßt sich also näherungsweise durch das halbe geometrische Mittel des Mastwiderstandes und der Erdseilwiderstände bestimmen.

Nimmt man als Zahlenbeispiel einen Mastwiderstand von $R = 50$ Ohm und einen Erdseilwiderstand zwischen zwei Masten von $r = 0,5$ Ohm an, so erhält man nach Gleichung (67) oder (69) durch Anwendung des Erdseiles eine Reduktion des Erdstromes im gestörten Mast auf $\frac{1}{20}$ des Stromes ohne Erdseil, und ebenso sinkt auch der Widerstand der gesamten Leitungskette auf $\frac{1}{20}$ des Übergangswiderstandes eines Mastfußes.

c) Kurzschluß durch Erdschluß zweier Phasen.

Wenn in einem Leitungsnetze zwei verschiedenpolige Leitungen gleichzeitig Erdschluß besitzen, so stellt dieser doppelte Erdschluß einen mehr oder weniger vollständigen Kurzschluß der beiden Leitungen dar. Der Strom fließt, wie es in Fig. 10 dargestellt ist, aus der einen Leitung durch den einen Erdschlußmast an der Stelle $n = 0$ in die Erde hinein und durch den anderen Erdschlußmast an der Stelle $n = a$ wieder aus der Erde

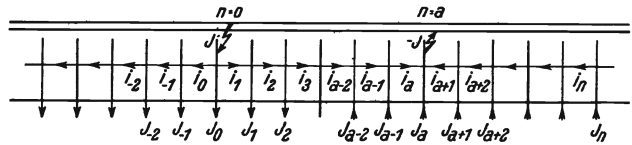


Fig. 10.

heraus in die zweite Leitung. Ist kein Erdseil vorhanden, so hat er auf seinem Lauf durch die Erde nur den doppelten Ausbreitungswiderstand $2R$ der beiden Erdschlußmasten zu überwinden, der unabhängig von der Mastentfernung a ist. Sind die Masten jedoch durch ein Erdungsseil verbunden, so fließen zahlreiche parallele Ströme durch das Erdseil und die anderen Masten in die Erde hinein und aus ihr heraus, so daß der Widerstand der gesamten Leitungsverkettung wesentlich kleiner ist. Bei großem Abstand a der gleichzeitig geerdeten Maste, der größer ist als der doppelte Wert nach Gleichung (55), stören sich die beiden Stromausbreitungssysteme nicht. Man kann sie daher nach den Gesetzen des vorigen Abschnittes behandeln und erhält nach Gleichung (71) als gesamten Erdwiderstand des Doppelerdschlusses näherungsweise das geometrische Mittel aus Erdwiderstand des Mastes und Widerstand des Erdseilabschnittes zwischen 2 Masten. Liegt der Mastabstand a nur über dieser Grenze, so ist seine wirkliche Größe gleichgültig. Der Strom breitet sich in den Erdschichten zwischen den Erdschlußmasten auf so große Querschnitte aus, daß deren Widerstand keinen Beitrag liefert.

Ist die Mastentfernung a jedoch nur klein, so beeinflussen sich die Stromsysteme beider Erdschlußmasten erheblich, so daß man die Stromverteilung von neuem bestimmen muß. Wir müssen dann drei verschiedene Leitungsabschnitte unterscheiden: links von einem Erdschlußmast, in der Mitte zwischen den beiden Erdschlußmasten und rechts vom anderen Erdschlußmast. In jedem Abschnitt gelten dieselben prinzipiellen Gleichungen für die Stromverteilung und daher auch die gleichen Lösungen für Maststrom und Erdseilstrom nach Gleichung (39) und (45); jedoch sind die Konstanten A und B der Lösungen in den drei Abschnitten verschieden.

Wir wollen annehmen, daß die Leitung sich links und rechts von den beiden Erdschlußmasten auf größere Längen als nach Gleichung (55) erstreckt. Dann ist ebenso wie im letzten Abschnitt links von beiden Masten $B = 0$ und rechts von beiden Masten $A = 0$ zu setzen. Im Mittelabschnitt treten beide Konstanten auf. Man erhält daher, wenn man die Konstanten in den drei Abschnitten durch Striche unterscheidet:

Links	Mitte	Rechts
	Für den Maststrom:	
$J_n = A' \varepsilon^{\alpha n} \quad (72)$	$J_n = A \varepsilon^{\alpha n} + B \varepsilon^{-\alpha n} \quad (73)$	$J_n = B'' \varepsilon^{-\alpha n} \quad (74)$
	Für den Erdseilstrom:	
$i_n = \frac{A' \varepsilon^{\alpha n}}{1 - \varepsilon^{\alpha}} \quad (75)$	$i_n = \frac{A \varepsilon^{\alpha n}}{1 - \varepsilon^{\alpha}} + \frac{B \varepsilon^{-\alpha n}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} \quad (76)$	$i_n = \frac{B'' \varepsilon^{-\alpha n}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} \quad (77)$

Links	Mitte	Rechts
-------	-------	--------

Damit wird der Strom im Erdschlußmast $n = 0$:

$$J_0 = A' \quad (78) \quad \left| \quad J_0 = A + B \quad (79) \quad \right| \quad -$$

und im Erdschlußmast $n = a$:

$$- \quad \left| \quad J_a = A \varepsilon^{\alpha a} + B \varepsilon^{-\alpha a} \quad (80) \quad \right| \quad J_a = B' \varepsilon^{-\alpha a} \quad (81)$$

Der dem Erdschlußmast $n = 0$ benachbarte Erdseilstrom ist:

$$i_0 = \frac{A'}{1 - \varepsilon^\alpha} \quad (82) \quad \left| \quad i_1 = \frac{A \varepsilon^\alpha}{1 - \varepsilon^\alpha} + \frac{B \varepsilon^{-\alpha}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} \quad (83) \quad \right| \quad -$$

und der dem Erdschlußmast $n = a$ benachbarte Erdseilstrom ist:

$$- \quad \left| \quad i_a = \frac{A \varepsilon^{\alpha a}}{1 - \varepsilon^\alpha} + \frac{B \varepsilon^{-\alpha a}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} \quad (84) \quad \right| \quad i_{a+1} = \frac{B' \varepsilon^{-\alpha(a+1)}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} \quad (85)$$

Da die beiden Formelausdrücke für die Ströme in den Erdschlußmasten je den gleichen Wert ergeben müssen, so ist für den linken Erdschlußmast nach Gleichung (78) und (79):

$$A' = A + B, \quad (86)$$

und für den rechten Erdschlußmast nach Gleichung (80) und (81):

$$B' = B + A \varepsilon^{2\alpha a}. \quad (87)$$

Ferner ergibt die Aufteilung des gesamten Kurzschlußstromes J in Maststrom und die beiden Erdseilströme beim linken Erdschlußmast:

$$J = J_0 - i_0 + i_1, \quad (88)$$

und beim rechten Erdschlußmast:

$$- J = J_a + i_{a+1} - i_a. \quad (89)$$

Diese vier Gleichungen (86) bis (89) sind ausreichend zur Bestimmung der noch unbekanntenen Konstanten A und B , A' und B' . Setzt man in Gleichung (88) die Teilströme nach Gleichung (78), (82) und (83) ein, so erhält man:

$$J = A' \left(1 - \frac{1}{1 - \varepsilon^\alpha} \right) + \frac{A \varepsilon^\alpha}{1 - \varepsilon^\alpha} + \frac{B}{\varepsilon^\alpha - 1} = \frac{-\varepsilon^\alpha}{1 - \varepsilon^\alpha} (A' - A + B \varepsilon^{-\alpha}), \quad (90)$$

und wenn man Gleichung (86) beachtet:

$$J = \frac{1}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} (B + B \varepsilon^{-\alpha}) = \frac{1 + \varepsilon^{-\alpha}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} B = \text{Cotg} \frac{\alpha}{2} \cdot B. \quad (91)$$

Daher wird die erste Konstante:

$$B = \text{Zg} \frac{\alpha}{2} \cdot J. \quad (92)$$

Setzt man andererseits in Gleichung (89) die Teilströme nach Gleichung (81), (85) und (84) ein, so erhält man:

$$- J = B' \varepsilon^{-\alpha a} \left(1 + \frac{\varepsilon^{-\alpha}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} \right) - \frac{A \varepsilon^{\alpha a}}{1 - \varepsilon^\alpha} - \frac{B \varepsilon^{-\alpha a}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} = \frac{\varepsilon^{-\alpha a}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} (B' - B) - \frac{A \varepsilon^{\alpha a}}{1 - \varepsilon^\alpha}. \quad (93)$$

und wenn man Gleichung (87) beachtet:

$$- J = \frac{\varepsilon^{\alpha a}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} (A + A \varepsilon^{-\alpha}) = \varepsilon^{\alpha a} \frac{1 + \varepsilon^{-\alpha}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} A = \varepsilon^{\alpha a} \text{Cotg} \frac{\alpha}{2} A. \quad (94)$$

Daraus folgt für die zweite Konstante:

$$A = -\varepsilon^{-\alpha a} \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2} J. \quad (95)$$

Aus Gleichung (86) folgt nunmehr mit Gleichung (92) und (95) die dritte Konstante zu:

$$A' = (1 - \varepsilon^{-\alpha a}) \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2} J, \quad (96)$$

und aus Gleichung (87) die vierte Konstante zu:

$$B'' = (1 - \varepsilon^{\alpha a}) \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2} J. \quad (97)$$

Um das Verhältnis der Konstanten zueinander besser zu überblicken, bezieht man A' und B am besten auf den Mast $n = 0$, dagegen A und B'' auf den Mast $n = a$, und schreibt:

$$\left. \begin{aligned} B &= \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2} J = -A \varepsilon^{\alpha a} \\ A' &= (1 - \varepsilon^{-\alpha a}) \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2} J = -B'' \varepsilon^{-\alpha a} \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Wie der Vergleich mit Formel (67) zeigt, werden also die Erdströme vom linken Erdschlußmast durch den Einfluß des zweiten Erdschlusses

etwas verringert, sofern man die Mastströme auf einen gegebenen Erdschlußstrom J bezieht. Da dieser beim Doppelerdschluß der stets einen Kurzschluß darstellt, viel größer ist als beim einpoligen Erdschluß, so ist der wirkliche Wert der Erdströme in diesem Falle

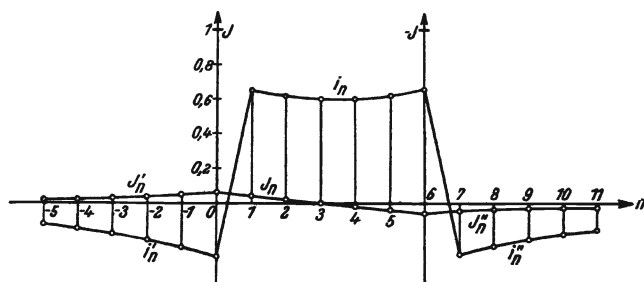


Fig. 11.

natürlich sehr viel größer als beim Einzelerdschluß. Fig. 11 stellt den Verlauf der Ströme für $\frac{r}{R} = 0,03$ und einen Abstand der beiden Erdschlüsse von $a = 6$ Masten dar.

Die Erdströme in den beiden Erdschlußmasten sind nach Gleichung (78), (79) und (80), (81):

$$J_0 = -J_a = A' = -B'' \varepsilon^{-\alpha a} = (1 - \varepsilon^{-\alpha a}) \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2} J. \quad (99)$$

Für großen Mastabstand a ist das Exponentialglied in der Klammer sehr klein und man erhält den Wert der Formel (67). Für geringeren Mastabstand wirkt es vermindern auf den Erdstrom.

Beim Mastabstand $a = 1$, also bei Erdschluß zweier Phasen auf benachbarten Masten, kann man den Maststrom unter Berücksichtigung der Umformung nach Gleichung (50) ausdrücken zu:

$$J_0^{a=1} = \frac{2 \mathfrak{I}g^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2}} J, \quad (100)$$

und für $a = 0$, also Kurzschluß, auf dem gleichen Mast wird der Erdstrom zu Null.

Umgekehrtes Verhalten zeigt der Strom im Erdungsseil in den Nachbarabschnitten der Erdschlußmasten und zwischen diesen. Der größte Strom dort ist nach Gleichung (76) für $n = 1$:

$$i_1 = \frac{A e^\alpha}{1 - e^\alpha} + \frac{B e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} = J \cdot \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2} \left(\frac{e^{-\alpha a}}{1 - e^{-\alpha}} + \frac{e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \right). \quad (101)$$

Dies läßt sich umformen zu:

$$i_1 = \frac{1}{2} (1 + e^{-\alpha(a-1)}) \left(1 - \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2} \right) J. \quad (102)$$

für $a = \infty$ verschwindet das Exponentialglied und man erhält denselben Ausdruck wie in Gleichung (68).

Für $a = 1$ dagegen wird das Exponentialglied gleich 1 und daher:

$$i_1^{a=1} = \left(1 - \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2} \right) J, \quad (103)$$

so daß man für den Erdschluß zweier Phasen auf benachbarten Masten gerade die doppelte Strombelastung des Erdseiles erhält wie für große Entfernung der Erdschlußmasten, immer vorausgesetzt, daß der Doppelerschlußstrom J gegeben ist.

Während dieser Teilstrom (103) direkt durch das Erdseil von einem Erdschlußmast zum anderen fließt, fließt der Reststrom

$$J - i_1^{a=1} = \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2} J \quad (104)$$

unter Vermittlung der außerhalb der Erdschlußzone liegenden Erdseile durch die ganze linke Mastenreihe zur Erde und durch die rechte Reihe wieder heraus. Dieser totale Erdstrom aller Masten ist in diesem Falle, $a = 1$, nur ebenso groß wie der Erdstrom des Erdschlußmastes selbst nach Gleichung (67) im Falle sehr großer Entfernung der Erdschlußstellen.

Entsprechend der Formel (102) für den Erdseilstrom zwischen den Erdschlußmasten kann man für den größten äußeren Erdseilstrom außerhalb der Erdschlußmasten aus Gleichung (82) die Beziehung herleiten:

$$-i_0 = \frac{1}{2} (1 - e^{-\alpha a}) \left(1 - \mathfrak{I}g' \frac{\alpha}{2} \right) J. \quad (105)$$

Für große Mastabstände a geht auch dieses in die frühere Formel (68) über. Für kleine a und vor allem für $a = 1$ führt der äußere Erddraht weniger, der innere entsprechend mehr Strom.

Im Falle des Doppelerdschlusses ist die Größe des Widerstandes für den Erdschlußstrom von besonderem Interesse, da die sich entwickelnden starken Kurzschlußströme im gewissen Grade von diesem Widerstand abhängen. Der gesamte Widerstand zwischen den beiden Erdschlußpunkten der Fig. 10 verhält sich zum Widerstand $2R$ der beiden Erdschlußmasten allein wie der Strom in diesen Masten mit und ohne Erdseil. Er ist also nach Formel (99):

$$\sum R, r = 2R (1 - e^{-\alpha a}) \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2}. \quad (106)$$

Das ergibt für den Mastabstand $a = \infty$ das Doppelte der früheren Formel (71), wie es auch sein muß.

Für den Mastabstand $a = 0$, also für mehrfachen Erdschluß auf einem Mast, wird der Widerstand natürlich zu 0, und für $a = 1$ erhält man:

$$\sum R, r = 2 R (1 - \varepsilon^{-\alpha}) \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2} = r \left(1 - \mathfrak{I}g \frac{\alpha}{2} \right). \quad (107)$$

Der letztere einfache Ausdruck ist dabei durch Umformung der Exponentialfunktion in eine hyperbolische Funktion unter Verwendung von Gleichung (38) gewonnen. Er zeigt, daß der Widerstand im wesentlichen durch die einfache Erdseilstrecke zwischen den beiden Masten bestimmt ist und noch durch den parallel geschalteten Erdstrom der ganzen Mastenreihe nach Gleichung (104) um ein gewisses Maß verkleinert wird.

Wir haben in allen Überlegungen nur den Widerstand des Stromkreises als maßgebend für die Stromverteilung angesehen. Das entspricht natürlich der Wirklichkeit nicht genau, da auch die Induktanz der Leitungen eine gewisse Rolle spielt. Dieselbe ist jedoch im starken Maße abhängig von der Art, wie die Fernleitung über die Erde geführt ist, und zwar nicht nur bezüglich des Abstandes von der Erdoberfläche, sondern auch hinsichtlich der Streckenführung. Es wäre wohl möglich, die Induktanz der Leitungen unter gewissen Annahmen in die Rechnung einzubeziehen. Für den ersten Überblick über die Verteilung der Erdschlußströme auf die Masten und Erdseile und die Abschätzung der Gefährdung durch die Erdschlußströme dürften die vorstehenden Rechnungen jedoch ausreichen.

Zusammenfassung.

Es wird die Ausbreitung des Erdschlußstromes in der Umgebung des mit Erdschluß behafteten Mastes untersucht, und es werden Formeln entwickelt, aus denen sich der höchstmögliche Strom berechnen läßt, der unter der Wirkung des Erdschlusses in Lebewesen fließt, die in der Umgebung des Mastfußes schreiten. Dieser Strom ist unabhängig vom spezifischen Widerstand der Erde. Er beträgt wenige Prozent des Erdschlußstromes, wenn die Erde gleichmäßig leitet; dagegen liegt er in der Größenordnung von 15 vH, wenn die sonst trockene Erde an der Oberfläche stark durchfeuchtet ist.

Es wird weiter berechnet, in welchem Maße die Konzentration der Erdströme durch ein die Masten verbindendes Erdungsseil vermindert werden kann, und es werden Formeln für den höchsten noch bestehenbleibenden Maststrom hergeleitet für die verschiedenen Fälle eines einphasigen Erdschlusses am Ende und in der Mitte der Strecke und für gleichzeitigen Erdschluß in verschiedenen Phasen. Durch niedrigen Widerstand des Erdungsseiles läßt sich der Maststrom auf einige Prozent des früheren Wertes erniedrigen.

Beiträge zur Kenntnis des Schleichens der Drehstrom-Asynchronmotoren.

Von **Erich Wandenberg.**

Mit 17 Textfiguren und einer Tafel.

Mitteilung aus dem Charlottenburger Werk der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H.
zu Charlottenburg.

Eingegangen am 10. August 1921.

Einleitung.

Der Drehstrom-Asynchronmotor zählt zu den weitverbreitetsten Kraftmaschinen. Er hat sich diese Stellung durch eine Reihe ins Gewicht fallender Vorzüge erworben, die kurz erwähnt werden sollen.

Die Übertragung großer Leistungen auf weite Entfernungen ist in technisch und wirtschaftlich einfacher Form durch die Anwendung des Drehstroms gelöst worden. Im synchronen, als auch im asynchronen Drehstrommotor besitzt die Technik zwei vorzügliche Hilfsmittel zur Umwandlung der elektrischen in mechanische Energie. Alle anderen Maschinen, welche an ein Drehstromnetz angeschlossen werden können, gehören mehr oder weniger zu einer der genannten Hauptvertreter dieser beiden Gruppen.

Synchronmotoren können erst nach dem Erreichen völliger Übereinstimmung von Periodenzahl, Phase und Spannung auf das Netz geschaltet werden. Auch ist das Vorhandensein eines Gleichstromnetzes für die Felderregung und das Anlassen der Maschine erforderlich. Nur einigermaßen geschultes Personal vermag den Motor in Betrieb zu setzen. Für kleinere Kraftanlagen, wie sie z. B. in erster Linie den Bedürfnissen des flachen Landes entsprechen, kommt die Synchronmaschine nicht in Betracht. Hier herrscht der Asynchronmotor, der sich durch einfaches Schalten auf das Netz, leer, wie unter voller Last, anfahren läßt. Er stellt eine in der Handhabung einfache Maschine dar, die bei Ausführung des Läufers mit dauernd kurzgeschlossener Wicklung, also ohne Verwendung von Schleifringen, allein funkenfrei arbeitet.

Die ersten Asynchronmotoren wurden gleichzeitig von der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft Berlin und den Oerlikonwerken gebaut und 1887 auf der Frankfurter Ausstellung vorgeführt. Bereits in den Jahren 1885 und 1886 hatten unabhängig voneinander G. Ferraris und Nicola Tesla einfache kleine Versuchsmaschinen ohne Läuferwicklung hergestellt, ohne jedoch diese der Öffentlichkeit zu zeigen.

Nach der Art der Läuferwicklung unterscheidet man Asynchronmotoren mit Phasen- und solche mit Käfiganker.

Die Enden der einzelnen Phasen der ersten Gruppe können an Schleifringe geführt oder in sich kurzgeschlossen werden. Die Wicklung dieser Maschinen ist im Läufer und im Ständer gleichartig. Die Windungszahlen werden für beide Teile verschieden gewählt, um die EMK des Läufers im Stillstand klein zu halten. Der Läufer gleicht dem Anker einer Synchronmaschine mit Außenpolen.

Wesentlich einfacher ist der Aufbau des Käfigankers, bei dem die Schleifringe fortfallen. In die vorher entsprechend isolierten Nuten des aus Blechen zusammengesetzten Läufers werden Stäbe eingeführt, die durch beiderseitig aufgenietete und verlötete Ringe miteinander verbunden werden. Man hat sich mit dieser einfachen Herstellungsart indessen nicht begnügt und in neuerer Zeit die „Wicklung“ durch Eingießen von Aluminium in die Nuten gefertigt. Die schwache Oxydschicht der gegossenen Stäbe isoliert hinreichend gegen Körper.

Kleinere Motoren können leer, wie unter Last durch unmittelbares Anlegen an Spannung in Betrieb gesetzt werden. Größere jedoch erfordern einfache Anlaßvorrichtungen, die ein langsames Erhöhen der Spannung ermöglichen.

Das Gesagte zeigt die Überlegenheit des Drehstromasynchronmotors im allgemeinen und des Motors mit Käfiganker im besonderen. Die Einfachheit der Herstellung und Bedienung bedingen seine weite Verbreitung und immer umfangreichere Anwendung in Industrie, Kleinbetrieb und Landwirtschaft. Den obigen Vorzügen steht eine Verschlechterung des Leistungsfaktors des Netzes gegenüber, die aber in Kauf zu nehmen ist.

Die bauliche Durchbildung des Asynchronmotors mit Käfiganker hat auf eine eigentümliche Erscheinung Rücksicht zu nehmen, die seine Brauchbarkeit völlig in Frage stellen kann: nämlich das Auftreten des „Schleichens“.

Das „Schleichen“ ist durch eine Störung des Anlaßvorganges gekennzeichnet. Der Läufer kann hierbei eine bestimmte niedrige Umlaufzahl, die weit unter der synchronen liegt, nicht überschreiten, sofern er nicht durch Einwirkung äußerer Kräfte über diesen mit großer Beharrlichkeit festgehaltenen Punkt hinweggebracht wird. Es tritt dabei ein Erzittern und Brummen der ganzen Maschine auf, das zum Lösen der Schraubverbindungen und zur Zerstörung des ganzen Aufbaues führen kann. Die große Schlüpfung bedingt im Läufer große Stromstärken, die unzulässige Erwärmungen zur Folge haben.

So wichtig und lehrreich die Erscheinung des Schleichens ist, so dunkel und schwierig sind dessen Grundlagen. In den einschlägigen Fachschriften sind nur einige wenige Stellen zu finden, welche die „merkwürdige“ Erscheinung des Schleichens nebenbei erwähnen. Unserer Kenntnis nach haben in der Literatur Heubach („Der Drehstrommotor“, II. Kapitel), Arnold (V. Band, I. Teil, „Die Induktionsmaschinen“) und Punga (Elektrotechnik und Maschinenbau, Wien 1912, Heft 49, S. 1017, „Über das Anlassen von Drehstrommotoren. Spezielle Erscheinungen beim Anlassen“) dieses Gebiet näher behandelt¹⁾. Der erstere teilt einige Beobach-

¹⁾ Vorliegende Arbeit wurde im Januar 1918 der Technischen Hochschule Berlin überreicht. 1919 erschien die Arbeit „Experimentelle Untersuchung der Drehmomentenverhältnisse von Drehstrom-Asynchronmotoren mit Kurzschlußrotoren verschiedener Stabzahl“ von W. Stiel als Heft 212 der Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, herausgegeben vom V. D. I. Stiel bespricht die bekannten Arbeiten auf diesem Gebiet von Arnold, Heubach, Punga und Rey und versucht an Hand einer größeren Reihe beim Anlassen bzw. Festbremsen aufgenommener Drehmomentenlinien die Bildung von Satteln in der Drehmomentenlinie auf das Vorhandensein des Ständer-Zahnfeldes zurückzuführen. Die Arbeit enthält wertvollen Beobachtungsstoff. Ihr Erscheinen ist daher sehr zu begrüßen. Eine vollständige Lösung der Frage der Entstehung der einzelnen Sattel oder des Schleichens ist ihr jedoch nicht gelungen.

tungen über Schleicherscheinungen mit, während Arnold den Grundlagen nachgeht. Die neuesten Untersuchungen stammen von Punga und befassen sich mit diesem Stoff schon eingehender, wenn auch ihnen eine Lösung der Frage noch nicht gelungen ist.

Professor Kloss hat die Erscheinung des Schleichens einer eingehenden Untersuchung unterzogen und die Ergebnisse dieser Arbeiten zum Teil in seinen Vorlesungen für Elektromaschinenbau an der Technischen Hochschule zu Berlin, zum Teil in einer kurzen Veröffentlichung im „Archiv für Elektrotechnik“, Jahrgang 1916, Bd. 5, Heft 3, bekanntgegeben. Seine Forschungen haben dem Verfasser vorliegender Abhandlung die erste Anregung zur Bearbeitung dieses Stoffes gegeben. Es soll im folgenden nach kurzer Streifung der Arnoldschen Theorien im Anschluß an die Kloss'schen Betrachtungen versucht werden, die Bedingungen, unter denen das Schleichen auftritt, eingehender zu behandeln und an Hand einiger Meßreihen zu erläutern.

I. Die Grundlagen der Schleicherscheinung bei Asynchronmotoren mit Käfiganker.

A. Das Wesen des Schleichens.

Die Wechselstrommaschinen werden in synchrone und asynchrone unterschieden.

Synchronmotoren laufen bis zu einer Höchstgrenze der Belastung mit gleichbleibender, synchroner Drehzahl. Erst, wenn die Belastung eine bestimmte Größe überschreitet, fällt der Motor außer Tritt und kommt zum Stillstand.

Asynchronmotoren laufen nur unbelastet angenähert synchron mit dem Netz. Schon bei verhältnismäßig geringer Belastung nimmt die Umlaufzahl ab. Dieses Zurückbleiben der Motordrehzahl hinter der des Netzes wird als Schlüpfung bezeichnet. Mathematisch ist unter Schlüpfung zu verstehen das Verhältnis der hinter dem Synchronismus zurückgebliebenen, „geschlüpften“ Drehzahl zur synchronen Drehzahl. Es ist also

$$s = \frac{n_1 - n}{n_1},$$

wenn n_1 die Netz- oder synchrone Drehzahl und n die jeweilige Läufer-Umlaufzahl darstellt. Im Synchronismus ist die Schlüpfung $s = 0$ und im Stillstand $s = 1$. Die Stillstandsschlüpfung wird oft gleich 100 vH gesetzt, um für die einzelnen Schlüpfungen handliche ganze Zahlen zu erhalten. Wird ein Asynchronmotor über eine bestimmte Grenze hinaus belastet, so bleibt auch er stehen. Man bezeichnet die Schlüpfung, bei der diese Erscheinung eintritt, als Abfallsschlüpfung. Das Abfallen des Motors nach Überschreiten der Abfallsschlüpfung wird dadurch verursacht, daß das Motordrehmoment mit wachsender Abbremsung der Motorwelle nicht mehr zunimmt, sondern kleiner wird. Das höchste Drehmoment heißt auch Kippmoment.

Nach der rechnerischen Ermittlung des primären ideellen Kurzschlußstromes J_{k_i} , des Magnetisierungsstromes J_μ und der Eisenverluste bei Leerlauf, ferner der primären und sekundären Kupferwiderstände läßt sich unter Zuhilfenahme des Heylandkreises die Drehmomentenlinie, d. h. das Drehmoment in Abhängigkeit von der Schlüpfung s bzw. der Umlaufzahl n , bildlich darstellen. Bei der versuchsmäßigen Ermittlung

der für die Aufstellung des Heylandkreises erforderlichen Werte tritt an Stelle des ideellen Kurzschlußstromes der wirkliche primäre Kurzschlußstrom J_{k_1} mit dem zugehörigen Leistungsfaktor $\cos \varphi_{k_1}$.

In Fig. 1 ist die volle rechnerisch ermittelte Drehmomentenlinie eines Drehstrom- asynchronmotors dargestellt. Mit M'_d möge das im Luftspalt auftretende Drehmoment benannt werden, gegenüber dem rechnerischen Nutzdrehmoment M_d , welches an

der Welle meßbar ist. M_d ist um das Reibungsmoment M_r kleiner als M'_d .

Bei Synchronismus ($s = 0$) ist M'_d in einer ideellen, störungsfreien Maschine gleich Null, um bei steigender Schlüpfung rasch bis zu einem Höchstwert, dem Kippdrehmoment, zuzunehmen („stabiler“ Teil der

Drehmomentenlinie). Die Größe dieses Kippmomentes

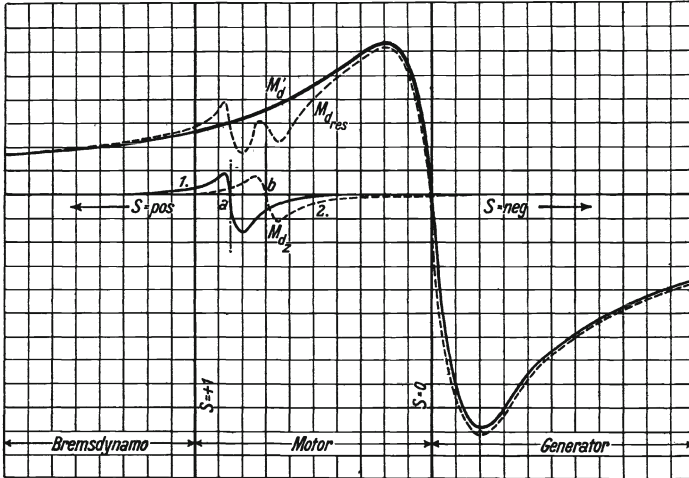


Fig. 1.

$M'_{d_{max}}$ ist unabhängig vom Läuferwiderstand r_2 . Es ändert seine Größe im umgekehrten Sinne wie der Primärwiderstand r_1 und die Streuungen im Ständer und Läufer. Die drei letztgenannten wirken auf Schwächung des Läufer- oder Nutzflusses Φ_2 hin und erzielen dadurch die Erzeugung einer kleineren EMK im Läufer und, da mit der EMK der Läuferstrom I_2 abnimmt, auch eines kleineren M'_d . Die Drehmomentenlinie muß also niedriger liegen. Dagegen kann bei größer werden dem r_2 vom Motor ein gleichgroßes Drehmoment erzeugt werden, wenn, wie die Gleichung

$$M'_d = \text{prop.} \cdot (\Phi_2 \cdot J_2) \tag{1}$$

erkennen läßt, das Produkt aus Nutzfluß und Läuferstrom konstant bleibt. Diese Bedingung kann unter Vergrößerung der Schlüpfung erfüllt werden. Es wird hierbei im Läufer eine höhere EMK induziert, welche das Zustandekommen des erforderlichen Stromes ermöglicht. Der Läuferwiderstand ist hiernach ohne Einfluß auf die Größe des M'_d , ändert aber die zugehörige Schlüpfung.

Ist das höchste Drehmoment erreicht, so nimmt bei steigendem s das Drehmoment wieder ab („labiler“ Teil der Drehmomentenlinie), um bei Stillstand ($s = 1$) einen bestimmten positiven Wert zu erreichen. (Hierzu sei nebenbei bemerkt, daß beim Einphasenmotor für $s = 1$ $M'_d = 0$ wird, unter welchen Umständen ein Anlauf des Einphasenmotors ohne Hilfseinrichtung [Kunstphase, Anwurfmotor] unmöglich ist.)

Wird die positive Schlüpfung $s > 1$, so nähert sich M'_d asymptotisch dem Wert Null. In diesem Wirkungsbereich muß der Läufer unter mechanischer Arbeits-

zuführung von außen gegen das Drehfeld bewegt werden. Der Motor wirkt als Bremse; man bezeichnet ihn daher in diesem Bereich als Bremsdynamo. Praktisch ist dieser Zustand bei Käfigankermotoren bedeutungslos, da er infolge der eintretenden hohen Erwärmungen hier keine Anwendung findet.

Treibt man dagegen den Läufer von außen übersynchron an, ist also $s < 0$, d. h. negativ geworden, so kann die Maschine Leistung an das Netz abgeben und ist dann als Generator tätig. Hierbei muß das Netz gleichzeitig von einer Synchronmaschine gespeist werden, die als „Takthalter“ den für die Erregung des Asynchronmotors erforderlichen Blindstrom zu liefern hat. Das Drehmoment ist negativ. Die Gestalt der Drehmomentenlinie ist ähnlich dem um den Synchronismus-Nullpunkt in der Bildebene um 180° gedrehten positiven Ast. Die Abmessungen sind andere; der negative Höchstwert des Drehmomentes — $M'_{d_{\max}}$ ist dem absoluten Werte nach größer als der positive.

Im vorliegenden Falle lenkt das Gebiet der Drehmomentenlinie, in welchem die Maschine als Motor läuft, besondere Aufmerksamkeit auf sich. Es wird begrenzt durch $s = 1$ und $s = 0$. Dieser Teil wurde in der Fig. 1 durch eine stärkere Linienführung besonders kenntlich gemacht.

Wird eine im stabilen Arbeitsbereich laufende Asynchronmaschine innerhalb der zulässigen Grenze stärker belastet, so nimmt unter Schlüpfungserhöhung die Größe des Drehmomentes zu und die Maschine läuft unter neuen Gleichgewichtsbedingungen weiter.

Ist das Belastungsmoment größer als das Anlaufmoment (im Stillstand), so kommt der Motor überhaupt nicht zum Anlaufen. Wird das Belastungsmoment während des Anlaufens im labilen Bereich der Drehmomentenlinie plötzlich über das jeweilige Motordrehmoment erhöht, so muß der Motor wieder zum Stillstand kommen, da hier mit steigender Schlüpfung eine Erhöhung des Motordrehmomentes nicht stattfindet. Nur dann, wenn das Belastungsmoment in diesem Teil stets kleiner als das Motordrehmoment ist, kann ein Anlauf stattfinden.

Durch besondere Kunstgriffe ist es möglich, auch im labilen Teil einen Gleichgewichtszustand zu schaffen. Man braucht nur den Versuchsmotor mit einer solchen Maschine zu kuppeln, deren Verbrauchs-drehmomentenlinie einen steileren Verlauf als das erzeugte Drehmoment hat. Diese Bedingungen werden z. B. vom Ventilator und von der Gleichstromnebenschlußmaschine erfüllt.

Während allgemein betrachtet ein Asynchronmotor ohne Hilfsmittel im labilen Teil nicht dauernd zu laufen vermag, wird doch bei Motoren mit Käfiganker manchmal außer der angenähert synchronen noch eine weitere ganz geringe stabile Drehzahl beobachtet. Bei geschickter Wahl des Bremsmomentes und äußerem Antrieb der Maschinen über die zuerst beobachtete stabile Umlaufzahl hinaus kann gelegentlich sogar noch ein zweiter und dritter ähnlicher Punkt festgestellt werden. Diese Erscheinung des anormalen stabilen Laufes bei einer verhältnismäßig kleinen Umlaufzahl nennt man das „Schleichen“.

Da ein stabiler Lauf bei annähernd gleichbleibendem Belastungsmoment nur dann möglich ist, wenn bei zunehmender Schlüpfung ein Steigen der Drehmomentenlinie stattfindet, so muß an den Schleichstellen in der Drehmomentenlinie ein Wendepunkt bzw. eine Sattelbildung vorliegen, die durch den Heylandkreis unberücksichtigt bleibt und durch zusätzliche Drehmomente verursacht wird.

In der Fig. 1 sind zwei zusätzliche Drehmomentenlinien (M_{d_z} -Linien) dargestellt.

Die ausgezogene zeigt die Eigentümlichkeit einer Drehstrom-, die gestrichelte die einer Einphasen-Drehmomentenlinie. Beide Arten können bei ein und demselben Motor gleichzeitig auftreten. In a und b befindet sich der Motor mit den erzeugenden Zusatzfeldern in Synchronismus. Die algebraische Addition der Hauptlinie mit den zusätzlichen ergibt bei Berücksichtigung der Momentenverluste durch Luft- und Lagerreibung die gestrichelte (resultierende) Linie $M_{a_{res}}$. Sie weist im Beispiel zwei Sattelbildungen auf. Diese können bei genügender Größe sogar die Abszissenachse in mindestens zwei Punkten schneiden. Der Motor muß in diesem Falle nach dem Überschreiten des ersten dieser Punkte zeitweise als Generator laufen und kann nur dann weiter unter üblichen Verhältnissen auf Geschwindigkeit kommen, wenn man ihn von außen soweit beschleunigt, daß er bei kleinerer Schlüpfung wieder in das Gebiet der positiven Drehmomente kommt. Ein Schleichen kann schon früher eintreten; es braucht das zusätzliche negative Drehmoment nur so groß zu sein, daß das resultierende $M_{a_{res}}$ kleiner wird als das Widerstandsmoment des anlaufenden Motors, das sich aus Belastungs- und Reibungsmomenten zusammensetzt. Kommen die synchronen Punkte eines großen und eines kleinen zusätzlichen Drehmomentes sehr nahe aneinander zu liegen, so kann ihre Addition mit einer steil verlaufenden Hauptmomentenlinie eine resultierende Linie ergeben, die, wie das die Fig. 1 erkennen läßt, einen verwischten Charakter aufweist. Die Untersuchung einer so entstandenen Drehmomentenlinie ist schwierig. Die Zahl der Sattel und deren synchrone Umlaufzahl kann nicht genau bestimmt werden. Messung und Rechnung weisen scheinbare Abweichungen auf, die sich nicht zu widersprechen brauchen.

Die Erscheinung des Schleichens kann nur bei Motoren mit Käfigankern auftreten. Nur in dessen Stäben können induzierte zusätzliche EMK eine Ausgleich finden und dadurch, wie später gezeigt werden wird, die zur Bildung zusätzlicher Drehmomente erforderlichen zusätzlichen Ströme entstehen. Jeder Stab kann unabhängig von allen anderen Stäben von mehreren übergelagerten Strömen durchflossen werden, die beliebig nach Größe, Phase und Frequenz veränderlich sind. Dagegen werden im Phasenanker die in den Leitern induzierten zusätzlichen EMK infolge der zwangsweisen Hintereinanderschaltung der Stäbe gegenseitig restlos aufgehoben. Sie können somit nicht den für die Bildung zusätzlicher Drehmomente erforderlichen zusätzlichen Strom hervorrufen, so daß ein Schleichen nicht eintreten kann.

In den nächsten Abschnitten soll versucht werden, die verschiedenen Ursachen zu behandeln, die in der Drehmomentenlinie zu Sattelbildungen führen können.

B. Die Ursachen des Schleichens.

1. Von der Nutung unabhängige Sattelbildungen.

α) Der Einfluß der zeitlichen und räumlichen Oberfelder. Das theoretische Verhalten der Asynchronmotoren kann für deren gesamtes Arbeitsgebiet zeichnerisch aus dem Heylandkreis ermittelt werden. Dieser gilt streng nur für sinusförmig veränderliche Spannungen, Ströme und Flüsse. In der Praxis kann ohne weiteres auch in der sonst als störungsfrei angenommenen Maschine mit Abweichungen im Verlauf des Drehmomentes vom theoretisch ermittelten gerechnet werden, denn kein Netz ist in der Lage, ihr eine reine sinusförmige Spannung aufzudrücken.

Die aufgedrückte, nichtsinusförmige Spannung kann in eine Grundwelle und eine Reihe Oberwellen zerlegt gedacht werden. Diese Oberwellen erzeugen im Asynchronmotor zeitliche Oberfelder, die sich in gleicher oder gegenläufiger Richtung mit dem Grund- oder Hauptfelde bewegen. Ihre Geschwindigkeit hängt von der Ordnung der Oberwelle ab. Berücksichtigt man, daß zur Speisung neuzeitlicher Mehrphasennetze fast ausschließlich dreiphasige Drehstromgeneratoren Verwendung finden, deren Phasen zur Vermeidung von Ankerausgleichströmen 3., 9. usw. Ordnungen in Stern geschaltet sind und daß Unsymmetrien in der Spannungslinie durch den Aufbau der Maschine vermieden werden, so läßt sich die Ordnung c der möglichen zeitlichen Oberwellen aus der Gleichung

$$c = (2xm \pm 1) \quad (2)$$

bestimmen. Hierin bedeutet m die Zahl der Motorphasen und x eine beliebige positive ganze Zahl.

Die Grundwelle des Drehfeldes legt während einer Periode den Weg einer doppelten Polteilung gleich $2\tau_p$ zurück. Hat die Maschine $2p$ Polpaare, so wird die Grundwelle des Feldes bei einer Frequenz von ν_1 Perioden in der Sekunde mit der minutlichen Drehzahl n_1 umlaufen. Es ist:

$$n_1 = \frac{60 \cdot \nu_1}{p} \quad (3)$$

Bewegt sich der Läufer mit einer, der Grundwelle des Drehfeldes gleichen Geschwindigkeit, so befindet er sich mit demselben in Synchronismus und es können in den Läuferstäben keine von der Grundwelle abhängigen EMKe induziert werden. Da dann im Läufer auch keine Ströme fließen, so wird nach Gleichung (1) das Drehmoment gleich Null.

Auch die von den höheren Harmonischen der aufgedrückten Spannung hervorgerufenen Oberwellen des Drehfeldes erzeugen im Läufer Ströme, und zwar sind auch diese so gerichtet, daß sie auf die Oberfelder selbst schwächend einwirken. Bewegt sich der Läufer mit den schneller als das Grundfeld umlaufenden zeitlichen Oberfeldern synchron, so erzeugen diese keine Läuferströme und keine zusätzlichen Drehmomente.

Die größten Beträge erreicht ein Drehmoment in Nähe der synchronen Bewegung von Läufer und Feld. Für die im gleichen Sinne mit dem Hauptfelde laufenden Oberfelder ist die synchrone minutliche Umlaufzahl des Läufers

$$n_c = \frac{60 \cdot (\nu_1 \cdot c)}{p} = n_1 \cdot c \quad (4)$$

und für die gegenläufigen

$$n_c = \frac{60 \cdot (\nu_1 \cdot c)}{p} - n_1 = n_1 \cdot (c - 1). \quad (5)$$

Diese Punkte liegen für die behandelten Zusatzmomente zu weit außerhalb des praktischen Arbeitsgebietes, um für gewöhnlich noch einen entscheidenden Einfluß auf den Gang des Motors ausüben zu können. Bei stark ausgeprägten zeitlichen Oberfeldern kann aber durch diese eine im Stillstand und Synchronismus doch noch merkliche Verschiebung des Luftspalt-Drehmomentes je nach Richtung der Oberfeldbewegung nach oben oder unten bewirkt werden. Ein sonst schon schwach zum Schleichen neigender Motor kann dann durch Verringerung des nutzbaren Drehmomentes vollends zum Schleichen gebracht werden.

Die Form der zeitlichen Oberfeld-Zusatzdrehmomentenlinie wird im Drehstrommotor derjenigen eines Drehstrommotors entsprechen, d. h. es wird bei der auf das Oberfeld bezogenen Schlüpfung $s_e = 1$ das zusätzliche Drehmoment einen bestimmten positiven Wert haben.

Neben den betrachteten zeitlichen Oberfeldern treten im Luftspalt noch räumliche Oberfelder auf. Ihre Entstehung kann auf die Abflachung des Feldes zurückgeführt werden. Diese Abflachung entsteht besonders in stark gesättigten Maschinen infolge der verschiedenen örtlichen Leitfähigkeit des magnetischen Kraftlinienweges der Zähneschicht. Die so entstandene Feldlinie läßt sich wieder in ein Grundfeld und eine Reihe Oberfelder zerlegen. Die örtlichen Oberfelder unterscheiden sich aber von den zeitlichen durch ihre stets synchrone Bewegung mit dem Grundfelde. Ihr Vorhandensein ist daher ohne Bedeutung für die Drehmomentenbildung.

Den hier geschilderten Unterschied zwischen zeitlichen und räumlichen Oberfeldern hat Arnold in seinem Werk „Die Induktionsmaschinen“ noch nicht streng durchgeführt. Kloss hat in seinen Vorlesungen als erster auf die grundverschiedenen Eigenschaften der zeitlichen und örtlichen Oberfelder besonders hingewiesen.

β) Die Phasenablösung. Das in Drehstrommotoren umlaufende Hauptdrehfeld ist seiner Größe und Form nach nicht konstant, sondern periodischen Schwankungen unterworfen, deren Größe in erster Linie von der Phasenzahl m_1 und im geringeren Maße von der Zahnung in Ständer und Läufer abhängt. Die Frequenz dieser Schwankungen ist durch die Phasenzahl des Ständers und die Netzfrequenz festgelegt.

Führt im Dreiphasenmotor die Phase „1“ den Höchstwert des Stromes $J_{1_{\max}}$, so führen nach dem Sinusgesetz im gleichen Augenblick die in der Drehrichtung räumlich folgenden Phasen „3“ und „2“ den Strom $0,5 J_{1_{\max}}$. Das Feld entspricht dem in Fig. 2 dargestellten, später erläuterten Treppendiagramm, dessen Form einem Fünfeck ähnelt.

Nachdem der Strom in Phase „1“ den Wert 1 erreicht hat, nimmt er wieder ab. Gleichzeitig wächst der Strom in Phase „3“, wogegen er in Phase „2“ allmählich auf Null sinkt. Im Augenblick seines Durchganges durch Null beträgt die Größe der Ströme in den Phasen „3“ und „1“ je 0,866 des Höchstwertes. Das Feld weist jetzt die in Fig. 3 dargestellte Trapezform auf.

Nach Verlauf der Zeit des sechsten Teiles einer Grundperiode hat nun der Strom in Phase „3“ den Wert 1 erreicht; die Ströme in den Phasen „2“ und „1“ betragen je $0,5 J_{1_{\max}}$. Die Form des Feldes ist mit der zuerst betrachteten identisch. Es hat jedoch eine räumliche Verschiebung des Hauptfeldes um die Breite einer Spulenseite, entsprechend q_1 Nuten ($q_1 =$ Zahl der Ständernuten pro Pol und Phase) stattgefunden.

Die notwendige Folge der wechselnden Feldform sind Schwankungen des Feldes, die auf die Läuferwicklung in ähnlicher Weise wie Oberfelder wirken. Da nach je q_1 Nuten immer wieder die gleiche Form des Hauptfeldes entsteht, so besitzt das Oberfeld an diesen Stellen immer das gleiche Vorzeichen und die gleiche Größe. Es entspricht somit die Breite einer Spulenseite einem vollen Wechsel des Oberfeldes. Die Ordnung des Oberfeldes ergibt sich aus der innerhalb einer doppelten Hauptpolteilung liegenden Anzahl primärer Spulenseiten $2 m_1$.

Aus dieser Beziehung läßt sich eine Art Synchronismus zweiten Grades durch folgende Betrachtung ableiten.

Bei streng synchroner Bewegung von Läufer und Feld befinden sich beide stets in der gleichen relativen Lage zueinander. Eine Art Synchronismus zweiten Grades wird nun gebildet, wenn diese Gleichheit der gegenseitigen relativen Lage gleichzeitig sowohl für das Haupt- als auch für das vorerwähnte Oberfeld nach vorübergehender Unterbrechung periodisch wiederkehrt. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn in der Zeit, in welcher der Läufer an einer Spulenseite vorübergleitet, das Hauptfeld außer der (einer Netzperiode entsprechenden) doppelten Polteilung, d. h. $2\tau_p = 2m_1$ Spulenseiten, ebenfalls noch die vom Läufer überwundene Strecke einer Spulenseite zurücklegt. (Erfüllt wird sie übrigens auch, wenn am gleichen Ort nach zwei und mehr Netzperioden ein Zusammentreffen im dargestellten Sinne erfolgt. Da hierbei die Zeiten des reinen, ununterbrochenen synchronen Laufes und dessen Wirkungen abnehmen, so können die weiteren Fälle unberücksichtigt bleiben.) Da hiernach die in gleichen Zeiten zurückgelegten Wege für Hauptfeld und Läufer sich verhalten wie $\frac{2m_1 + 1}{1}$, so ergibt sich hieraus die „Satteldrehzahl der Phasenablösung“ zu

$$n_{sPh} = \frac{n_1}{2m_1 + 1}, \quad (6)$$

bei der Synchronismus zwischen Anker und Zusatzfeld vorhanden ist. In der Drehmomentenlinie wird hierbei durch Hinzukommen zusätzlicher Momente eine Sattelbildung entstehen.

Beim Dreiphasenmotor wird unabhängig von allen Konstruktionseinzelheiten stets bei

$$n_{sPh} = \frac{n_1}{2 \cdot 3 + 1} = \frac{n_1}{7} \quad (7)$$

eine Sattlung vorhanden sein müssen.

2. Von der Nutung abhängige Sattelbildungen.

a) Der Einfluß der Ständernutung.

Die magnetische Leitfähigkeit der Zähneschicht ist nicht an allen Stellen gleich groß, sondern wiederkehrenden, von den Abmessungen der Zähne und Nuten abhängigen Schwankungen unterworfen.

Bei den folgenden Überlegungen soll von der hier zu vernachlässigenden, verzerrenden Wirkung der Läuferzahnung abgesehen werden.

Infolge der örtlich wechselnden magnetischen Leitfähigkeit drängen sich die Kraftlinien an den Ständerzähnen zusammen und entlasten die Ständernuten und den vor ihnen liegenden Teil des Luftspaltes, so daß in der Feldlinie Einsattlungen entstehen. Je größer die örtliche Sättigung ist, desto größer werden die absoluten Störungen der Luftspaltfeldlinie.

Das Luftspaltfeld kann in der üblichen Weise in ein Grund- und ein Zusatzfeld — letzteres „Ständerzahnfeld“ genannt — zerlegt gedacht werden. Das Zahnfeld ist ein räumlich feststehendes, mit der Netzfrequenz ν_1 pulsierendes Wechselfeld. Es unterscheidet sich jedoch grundsätzlich dadurch von einem gewöhnlichen Wechselfeld, daß seine Wellen nicht in gleicher Phase schwingen, sondern untereinander eine Phasenverschiebung aufweisen. Die Phasenverschiebung hängt von dem elektrischen Winkel der räumlichen Anordnung der zugehörigen Ständerzähne ab. Jeder Ständerzahn bildet einen Zusatzpol, jede Ständernut einen Zusatzgegenpol. Die doppelte Pol-

teilung des Zusatzfeldes ist somit gleich der Zahnteilung τ_{n_1} . Hieraus ergibt sich die Gesamtzahl der über den ganzen Maschinenumfang verteilten Zusatzpolpaare zu

$$Z_1 = 2 p \cdot q_1 \cdot m_1, \quad (8)$$

worin Z_1 die Zähnezahzahl im Ständer bedeutet.

Würde das Ständerzahnfeld ein gewöhnliches Wechselfeld sein, so müßte der Läufer sich zu diesem Felde in Synchronismus befinden, wenn er während der Dauer einer Netzperiode die Strecke τ_{n_1} zurücklegt. Das Hauptfeld legt in der gleichen Zeit

$$t' = \frac{1}{\nu_1} = \frac{60}{n_1 p} \quad (9)$$

die Strecke einer doppelten Hauptpolteilung gleich $\frac{Z_1}{p} = 2 q_1 \cdot m_1$ zurück. Es befindet sich wieder in der gleichen räumlichen Lage wie vor der betrachteten Bewegung. Bedingung für den Synchronismuszustand ist jedoch gemäß den auf Seite 89 entwickelten Gedanken, daß jeder Läuferpunkt wieder in die alte gegenseitige Lage zum Zusatzfeld kommt. Es muß unbedingt wieder ein gleichgestaltetes Zusatzfeld der betrachteten Stelle gegenüberstehen. Diese Bedingung wird nur dann erfüllt, wenn das Hauptfeld in der gleichen Zeit außer der doppelten Polteilung noch die vom Läufer zurückgelegte Strecke τ_{n_1} überwindet. Es muß das Hauptfeld die Strecke $(2 \cdot q_1 \cdot m_1 + 1) \cdot \tau_{n_1}$ zurücklegen, während der Läufer eine Bewegung über nur eine Zahnteilung τ_{n_1} vollführt. Es bewegt sich demnach der Läufer $(2 \cdot q_1 \cdot m_1 + 1)$ mal langsamer als das mit $n_1 = \frac{\nu_1 \cdot 60}{p}$ Umdr. i. d. M. umlaufende Hauptfeld.

Hieraus ergibt sich die „Ständersatteldrehzahl“, d. h. diejenige Drehzahl, bei der in der Drehmomentenlinie ein vom Ständerzahnfeld abhängiger Sattel entsteht, zu

$$n_{ss} = \frac{n_1}{2 \cdot q_1 \cdot m_1 + 1} \quad (10)$$

Für die übliche Dreiphasen-Dreilochwicklung kann nach Gleichung (10) ein Sattel bei etwa $n_{ss} = \frac{n_1}{2 \cdot 3 \cdot 3 + 1} = \frac{n_1}{19}$ erwartet werden. Wie die später beschriebenen Versuchsergebnisse zeigen, konnte nur an einem der drei untersuchten Motorzusammenstellungen (L. I.) ein derartiger Sattel beobachtet werden. Dieser wies jedoch infolge weiterer Einflüsse eine bedeutende Größe auf. Hiernach scheint das Ständerzahnfeld allein keinen großen Einfluß auf die Verzerrung der Drehmomentenlinie auszuüben.

Zu einem etwas abweichenden Ergebnis kommt Kloss.

Kloss betrachtet jeden Ständerzahn als kleinen Pol, der ein dem Hauptfeld übergelagertes Zusatzfeld erzeugt. Für dieses Feld ist $\tau_p = \tau_{n_1}$. Synchronismus besteht, wenn während der Dauer einer Periode $t_1 = \frac{1}{\nu_1} = \frac{60}{p \cdot n_1}$ der Läufer die doppelte Strecke τ_{n_1} zurücklegt. Die hierbei auftretende Geschwindigkeit bedingt

¹⁾ Stiel findet für sein „Nutzungsmoment“ die Synchrondrehzahl zu $n_p' = \frac{60 \cdot \nu_1}{p \cdot (n_1 + 1)}$, worin n_1 die über $2\tau_p$ verteilte Ständerzähnezahzahl bedeutet. Setzt man $n_1 = 2 \cdot q_1 \cdot m_1$ in obige Gleichung ein, so erhält man den gleichen Wert für die Synchronzahl des Nutzungsmomentes, wie er in Gleichung (10) für die Ständersatteldrehzahl abgeleitet wird.

nach Kloss eine „erste Ständersatteldrehzahl“, die mit $n_{s_{s_1 k}}$ bezeichnet werden möge. Der Weg einer Läuferumdrehung ist gleich $Z_1 \cdot \tau_{n_1}$. Die vom Läufer in einer Sekunde zurückgelegte Strecke ergibt sich zu $\frac{n_{s_{s_1 k}}}{60} \cdot Z_1 \cdot \tau_{n_1}$. Während einer Periode

beträgt der zurückgelegte Weg $\frac{n_{s_{s_1 k}}}{60} \cdot Z_1 \cdot \tau_{n_1} \cdot \frac{60}{p \cdot n_1} = 2 \tau_{n_1}$, woraus

$$n_{s_{s_1 k}} = \frac{2 p \cdot n_1}{Z_1} = \frac{n_1}{m_1 \cdot q_1}$$

wird.

Für den Dreiphasenmotor mit Dreilochwicklung ergibt diese Gleichung eine

$$\text{erste Ständersatteldrehzahl } n_{s_{s_1 k}} = \frac{n_1}{3 \cdot 3} = \frac{n_1}{9}.$$

Wird zum anderen mal jeder Ständerzahn als Pol und jede Ständernut als Gegenpol eines weiteren, gleichfalls mit der Netzfrequenz schwingenden Zusatzfeldes betrachtet, so ergibt sich in ähnlicher Weise, wie oben abgeleitet, eine „zweite Ständersatteldrehzahl“:

$$n_{s_{s_2 k}} = \frac{n_1}{2 \cdot q_1 \cdot m_1}.$$

Hierin wie früher $q_1 = 3$ und $m_1 = 3$ eingesetzt, ergibt $n_{s_{s_2 k}} = \frac{n_1}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{n_1}{18}$, welcher Wert fast mit dem des Verfassers zusammenfällt.

Zum gleichen Ergebnis für die Synchrondrehzahl $\frac{n_1}{2 \cdot q_1 \cdot m_1}$ des vom Ständerzahnfeld erzeugten Zusatzmomentes kommt auch Punga. (E. u. M. 1912 S. 1017.)

b) Einfluß der beiderseitigen Nutenverhältnisse von Ständer und Läufer.

a) Die Entstehung von Zusatzpolen. Die folgenden Untersuchungen setzen einen sinusförmigen Verlauf der Spannungen und damit auch der Kraftflüsse voraus. Das Eisen hat als sättigungsfrei zu gelten.

Während der Bewegung des Läufers ändert sich dauernd die gegenseitige Lage der Ständer- und Läuferntung. Als besonders bemerkenswert können zwei Augenblicksfälle herausgegriffen werden:

- I. Es steht in der neutralen Ständerzone des AW-Druckdiagrammes eine Läuferntut.
- II. Es steht in der neutralen Ständerzone des AW-Druckdiagrammes ein Läuferzahn.

Diese beiden Fälle müssen weiter je nach der Größe der Augenblickswerte des Ständerstromes unter zwei Grenzbedingungen untersucht werden:

- a) der Strom einer Phase weist seinen zeitlichen Höchstwert auf,
- b) der Strom einer Phase ist gleich Null.

Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, daß vier Untersuchungen Ia und Ib bzw. IIa und IIb erfolgen müssen.

Bei synchroner Bewegung des Läufers mit dem Hauptfelde steht dauernd ein bestimmter Teil des Läufers, z. B. ein Zahn, in der neutralen Zone.

Während eines von Synchronismus verschiedenen Laufes findet ein stetiger Wechsel zwischen den vier bemerkenswerten Zuständen statt. In jedem Augenblick sucht die Maschine durch ein anderes Verhalten den wechselnden Bedingungen

Genüge zu leisten. Für das betriebsmäßige Verhalten ist jedoch der aus den Einzeluntersuchungen ermittelte Mittelwert maßgebend.

Untersuchung Ia.

In der Fig. 2 ist die Anzahl der primären Nuten pro Pol und Phase q_1 gleich 3, die primäre Nutenzahl $Z_1 = 36$ und die sekundäre $Z_2 = 40$ gewählt. Die eine Ständerphase führt den zeitlichen Höchstwert des Stromes. Für den Ständer sei über $2\tau_p$ das Treppendiagramm gezeichnet, dessen Fläche proportional dem Hauptflusse ist.

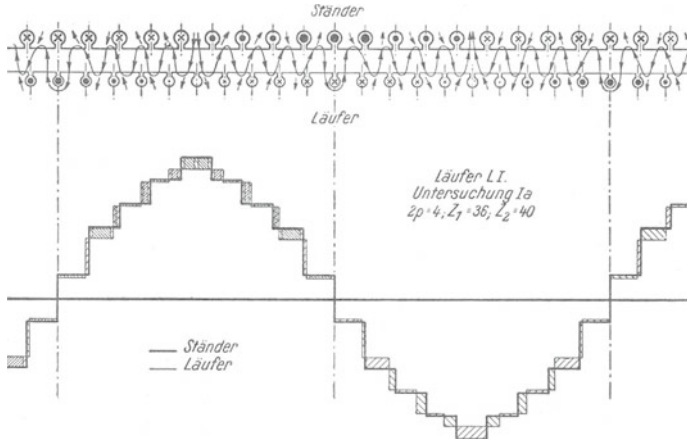


Fig. 2. Treppendiagramm für den Läufer L. I. Untersuchung Ia.
 $2p = 4; Z_1 = 36; Z_2 = 40.$

Die Form des Treppendiagramms ist identisch mit der Form der idealen Feldlinie. Die neutrale Zone geht durch die Mitte der Spulenseite, welche den höchsten Strom führt.

Steht der neutralen Ständernut eine Läufernut gegenüber, so wird in dieser auch der höchste zeitliche Läuferstrom J_{2max} fließen. Die Größe der Durchflutung (Strom mal Stäbe z_2) dieser Nut ergibt sich aus der Gleichung:

$$(J_{2max} \cdot z_2) = \frac{J_{1max} \cdot z_1 \cdot Z_1}{Z_2} \tag{11}$$

Die Durchflutung der anderen Läufernten ändert sich mit dem Sinus des elektrischen Winkels ihrer räumlichen Verteilung.

Wird in dasselbe Bild auch das Läufer-treppendiagramm eingezeichnet, so muß dieses dem ersten flächengleich sein, wenn nur jene Komponente des Primärstromes betrachtet wird, welche dem Sekundärstrom das Gleichgewicht hält. Es ist also hier J_1 gleich dem auf die Ständerseite bezogenen Läuferstrom J'_2 zu setzen.

Wie Fig. 2 zu erkennen gibt, fallen die Umrißlinien der beiderseitigen Treppendiagramme nicht genau zusammen, sondern überragen einander abwechselnd. Da die Treppendiagrammordinaten den magnetischen Potentialen an den betreffenden Maschinenstellen proportional sind, so geht aus dieser Erscheinung hervor, daß zwischen zwei gegenüberliegenden Zähnen des Ständers und Läufers allgemein ein Potentialunterschied vorhanden ist. Als Folge müssen örtliche Ausgleichflüsse auftreten, die von Zahn zu Zahn ihre Richtung und Größe ändern. Die Größe des örtlichen Ausgleichflusses ist proportional den Überschußflächen, wobei allerdings nur

diejenigen Teile zu berücksichtigen sind, die beiderseitig zwischen Zahnflächen zu liegen kommen. An den Stellen, wo einem Zahn eine Nut gegenüber steht, ist die magnetische Leitfähigkeit infolge des großen Luftweges so gering, daß der überschüssige, kleine AW-Druck zur Durchtreibung eines nennenswerten Zusatzflusses durch den Luftspalt hindurch nicht genügt. In Fig. 2 sind in der linken Hälfte des Treppendiagramms diese für die Bildung der Ausgleichflüsse in Frage kommenden Teile der Überschußflächen durch engere Strichelung kenntlich gemacht. Da solche Einzelheiten im Druck schlecht wiedergegeben werden, so ist hiervon an anderen Stellen Abstand genommen worden.

Die Überschußflächen haben als solche einen anderen Maßstab als die Gesamtflächen. Hauptfluß und Ausgleichfluß sind phasenverschoben. Ihr Maßstab kann für jede beliebige Läufergeschwindigkeit aus der Größe der Diagrammfläche und der zahlenmäßigen Stärke des zugehörigen Flusses ermittelt werden. Der letztere Wert kann im Heylandkreis (s. Fig. 18) abgegriffen werden. Die Richtung der Ausgleichflüsse ist durch die relative Größe der magnetischen Potentiale gegeben.

Werden die Ausgleichflüsse ihrer Größe und Richtung nach in den Luftspalt eingezeichnet, so fällt deren zickzackartiger Verlauf ins Auge. Man nennt diese Erscheinung, da sie ihr Dasein einer Streuung verdankt, die „Zickzackstreuung“. Ihr Vorhandensein hat eine Reihe Sattelbildungen zur Folge.

Ist die Anzahl der in einen Zahn eintretenden Zickzacklinien größer als die der austretenden, so wird der Überschuß durch den Zahn in das Joch eindringen. Im anderen Falle muß aus diesen ein entsprechender Fluß durch den Zahn hindurch in den Luftspalt übertreten. Im allgemeinen kehrt ein Teil der eintretenden örtlichen Zickzackstreuung schon innerhalb eines Zahnes um und nur ein Rest durchsetzt das Joch, um nach Umschlingung einer oder mehrerer Nuten an anderer Stelle wieder in den Luftspalt zurückzutreten.

Es zeigt sich also, daß die Ungleichheiten der beiderseitigen AW-Druckdiagramme als unabwendbare Nebenerscheinung Zusatzflüsse in den Zähnen zur Folge haben. In Wirklichkeit werden die scharfen Kanten der Treppendiagramme eine Abrundung oder Verschmierung erfahren, die eine Abweichung der Zusatzflüsse in Form und Größe von den errechneten Werten veranlassen.

In der neutralen Zone der AW-Druckdiagramme der Fig. 2 stehen sich gerade zwei Nuten gegenüber. In den rechts von ihr stehenden Läuferzahn fließt ein zusätzlicher Fluß hinein. Diese Richtung möge entsprechend der Richtung des Hauptflusses positiv genannt werden.

Untersuchung Ib.

In Fig. 3 sind die beiden Treppendiagramme für den zweiten Grenz Zustand der Stromverteilung dargestellt. Die Phase „1“, die früher den Strom $J_{1\max}$ führte, wird jetzt nur noch von 0,866 dieses Betrages durchflossen. Die gleiche Höhe besitzt der Strom in der Nebenphase „3“. In Phase „2“ ist er gleich Null. Die neutrale Zone erscheint räumlich um $\frac{q_1}{2}$ in Richtung des beweglichen Hauptfeldes nach rechts verschoben. In ihr steht gerade eine Läufernut. Statt der Fünfeckform besitzt das fiktive Ständer- bzw. Läuferfeld, kurz Hauptfeld genannt, jetzt die Form eines Trapezes.

Die Untersuchungen IIa und IIb führen zu ähnlichen Treppendiagrammen. Auf ihre Wiedergabe kann hier verzichtet werden.

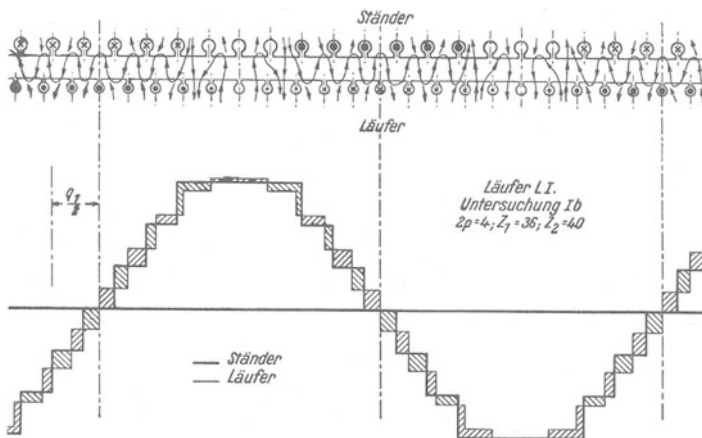


Fig. 3. Treppendiagramm für den Läufer L. I. Untersuchung I b.

Durch die ungleiche Größe der in einen Zahn ein- und wieder austretenden Zickzackstreuung entstehen, wie bereits festgestellt werden konnte, innerhalb der Zähne örtliche zusätzliche Flüsse, deren Größe und Richtung von Zahn zu Zahn verschieden ist. Die zusätzlichen Flüsse können durch gleichwertige Zusatzpole ersetzt gedacht werden.

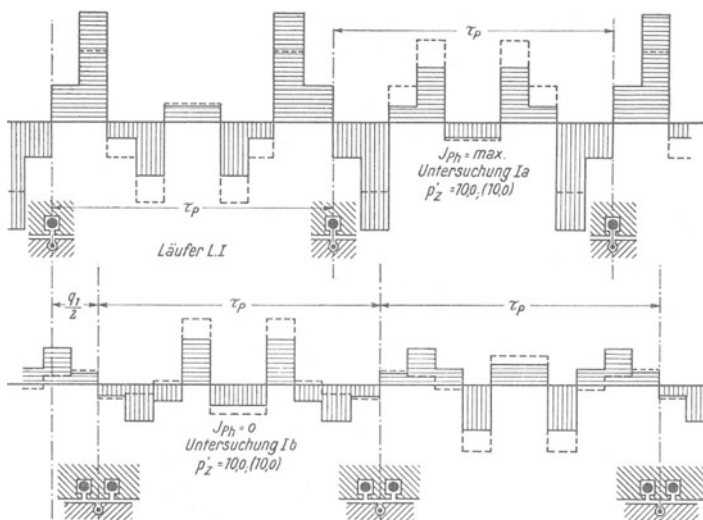


Fig. 4.

Zusatzfeldverteilung. Läufer L. I. In der neutralen Zone steht eine Läufernut.

In Fig. 4 sind die in den Läuferzähnen auftretenden und aus den Fig. 2 und 3 ermittelten zusätzlichen Luftflüsse in Gestalt von rechteckigen Feldern über den gestreckten mittleren Luftspaltumfang aufgetragen. Die ausgezogenen Linien gelten für die Untersuchung unter Berücksichtigung der Nutenöffnungen. Die gestrichelten Linien zeigen zum Vergleich das Zusatzfeld, wie es unter Vernachlässigung der Nutenöffnungen ermittelt wird. Die Ergebnisse der Untersuchungen IIa und IIb führen zu ähnlichen Feldbildern, die in der Fig. 5 dargestellt sind.

Die ersten Schaulinien der beiden Fig. 4 und 5 gelten für den ersten Grenzzustand der Stromverteilung, wo die Phase „1“ den Höchstwert des Stromes führt, und die darunter gezeichneten Schaulinien für den zweiten Grenzzustand, wo der Strom der Phase „2“ gleich Null ist.

Ist die Anzahl der Zähne des Ständers und des Läufers durch $2p$ teilbar, so müssen, wie im Beispiel, vier Zusatzfeldverteilungsbilder entworfen werden. Die Zahl dieser Untersuchungen vermindert sich auf zwei, wenn der Läufer eine ungerade Zähnezahl besitzt. In diesem Falle wird gegenüber der untersuchten neutralen Zone auf der anderen Seite der Maschine (also um räumliche 180° weiter) ein zweiter Sonderfall eintreten und bei der Untersuchung des einen Falles ohne weiteres mit berücksichtig-

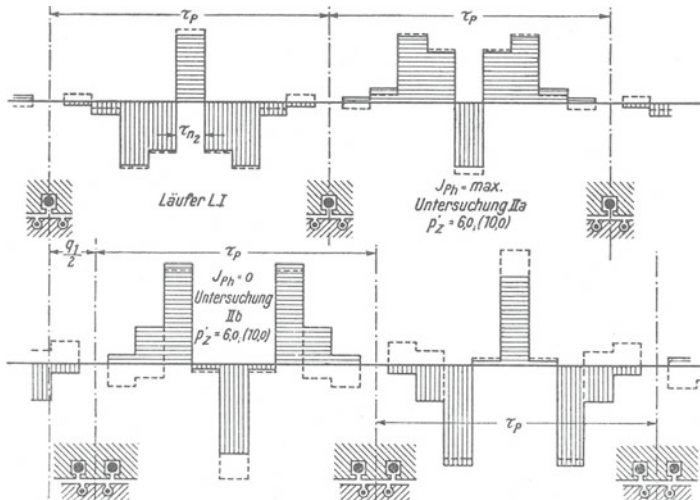


Fig. 5.

Zusatzfeldverteilung. Läufer L. I. In der neutralen Zone steht ein Läuferzahn.

sichtigt. So steht beispielsweise in Fig. 16 bei einem Läufer „L. II“ mit $Z_2 = 57$ Zähnen in der linken neutralen Zone eine Läufernut und in der rechten ein Läuferzahn. Ebenso genügen zwei Untersuchungen, wenn die Läuferzähnezahl derart gewählt wird, daß gleichzeitig in einer der neutralen Zonen des AW-Druckdiagrammes die Mitte einer Läufernut und in der folgenden oder überfolgenden die Mitte eines Läuferzahnes zu stehen kommt.

Allgemein betrachtet, ändert das Zusatzfeld von Zusatzpolteilung zu Zusatzpolteilung seine Form und Größe. Zwei nebeneinanderliegende Zusatzpole gehören für gewöhnlich nicht zusammen; der entsprechende Gegenpol von gleicher Größe und Form ist dann auf der anderen Symmetriehälfte der Maschine zu suchen. Dieser Umstand zeigt, daß, von Sonderfällen abgesehen, mindestens für eine ganze Symmetriehälfte die Zusatzfeldverteilungslinie zu zeichnen ist. Die über den Maschinenumfang verteilten zusätzlichen Pole rufen ähnlich den Feldoberwellen der entsprechenden Ordnung gleichfalls zusätzliche Drehmomente hervor.

Bei den zu untersuchenden vier ausgezeichneten Grenzzuständen kann aus jeder der Zusatzfeldverteilungslinien eine neue zusätzliche Polpaarzahl ermittelt werden, womit ebenso viele Satteldrehzahlen gegeben sind. Während der Bewegung findet ein dauernder Übergang aus dem einen in den anderen Zustand statt. In

jedem Augenblick will die Maschine entsprechend der zusätzlichen Polpaarzahl mit einer anderen Geschwindigkeit laufen und entsprechend der wechselnden Größe des Zusatzfeldes ein anderes Zusatzmoment bilden. Aber keine dieser Einzelercheinungen kommt zur vollkommenen Ausbildung. Sie alle wirken zusammen und führen zu einem gemeinsamen Mittelwert, der dann allein für die Wirkungsweise der Maschine in Betracht kommt.

Eine nähere Betrachtung der in Fig. 4 und 5 dargestellten zusammengehörigen Verteilungslinien des zusätzlichen Feldes zeigt, daß die Entstehung der zusätzlichen Pole von zweifacher Wirkung sein kann. Erstens wird die Anzahl der Zusatzpole Veranlassung zu einer Sattlbildung geben; zweitens muß auch eine eventuelle drehende Bewegung des ganzen Systems der Zusatzpole eine weitere Sattlung hervorrufen.

Wird vorläufig von der kleinen Drehbewegung des Zusatzpolsystems abgesehen, d. h. betrachtet man die Pole als im Raume stillstehend, so zeigt sich, daß die Zusatzpole keineswegs etwa mit ruhenden Gleichstrompolen verglichen werden dürfen. Sie ändern gesetzmäßig in stets wiederkehrender Reihenfolge, jedoch mit einer von der Drehzahl des Hauptfeldes und des Läufers abhängenden Geschwindigkeit, ihre Form und Größe. Diese Bedingungen können durch ein Wechselfeld erfüllt werden, welches beim Durchgang durch den Nullwert, d. h. nach jeder Halbwelle, umgeschaltet wird. Hierbei tritt eine Erscheinung ein, die einer Verdoppelung der Polpaarzahl gleichkommt. Es wird bei einer aus der mittleren Zusatzpolpaarzahl ermittelten halben Drehzahl eine Sattlung entstehen.

Nennt man die aus den vier Untersuchungen errechnete mittlere Anzahl der über den ganzen Maschinenumfang verteilten Zusatzpolpaare p'_{zm} , so erhält man eine „Satteldrehzahl der Zusatzpolbildung“ bei

$$n_{s-zp} = \frac{\nu_1 \cdot 60}{2 \cdot p'_{zm}}. \quad (12)$$

Wesentlich handlicher wird die Gleichung (12), wenn nicht p'_{zm} , sondern p_{zm} , die Anzahl der Zusatzpolpaare für die doppelte Hauptfeldpolteilung $2\tau_p$, eingesetzt wird. Gleichung (12) verwandelt sich dann in

$$n_{s-zp} = \frac{\nu_1 \cdot 60}{2p \cdot p_{zm}} = \frac{n_1}{2 \cdot p_{zm}}. \quad (13)$$

Für den als Beispiel angeführten Motor ergibt sich dann unter Vernachlässigung des Einflusses der Nutenöffnungen

$$n_{s-zp} = \frac{1500}{2 \cdot 5} = 150 \text{ Uml./Min.},$$

und unter Berücksichtigung der Nutenöffnungen

$$n_{s-zp} = \frac{1500}{2 \cdot 4} = 188 \text{ Uml./Min.}$$

Man kann das zusätzliche Feld als ein Oberfeld betrachten, dessen Ordnung gleich der Anzahl der über $2\tau_p$ gebildeten zusätzlichen Pole ist. Wird

$$\frac{Z_2}{2p_{zm} \cdot p} = 2, \quad (14)$$

so hat der Käfiganker, der in jeder Nut nur einen Leiter führt, für jede Halbwelle des Oberfeldes, d. h. hier für jeden Zusatzpol, einen Stab. Jeder einzelne Stab des Käfigankers verhält sich wie eine einachsige Läuferwicklung im Hauptfelde eines Drehstrommotors. Görges fand zuerst bei Drehstrommotoren mit einachsiger Läuferwicklung die Möglichkeit des Auftretens einer weiteren Sattlung bei etwa der halben Drehzahl des ersten Sattels.

Die Ausbildung eines großen zusätzlichen Feldes kann unter solchen Umständen sehr begünstigt werden. Ja, es kann so groß werden, daß in der Nähe der synchronen Drehzahl des Läufers mit dem zusätzlichen Felde das negative Drehmoment so stark anwächst, daß das vom erzeugten ideellen Hauptdrehmoment nach hessen algebraischen Addition mit dem Zusatzdrehmoment übrigbleibende Hochlaufmoment nicht mehr genügt, um das ihm entgegenwirkende Reibungs- und Widerstandsmoment zu überwinden und den Motor zum Anlauf zu bringen. Der Motor wird hierdurch gezwungen, nicht nur unter Last, sondern möglicherweise sogar schon im Leerlauf zu schleichen.

Einen Schritt weiter geht Weidig in seiner Arbeit „Die Wechselstrominduktionsmaschine mit einachsiger Sekundärwicklung“, indem er nachweist, daß unter gleichen Bedingungen nicht nur bei $\frac{1}{2}$, sondern auch bei $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ usw., kurz bei allen einfachen Teilen der synchronen Drehzahl, also hier des Grundsattels, eine weitere Sattlung in Erscheinung treten kann. Unter den vorliegenden besonderen Bedingungen dürfte ein neuer Sattel nur noch bei $\frac{1}{2} \cdot n_{s-zp}$ gebildet werden, da bei den sehr nahe aneinanderliegenden weiteren rechnerischen Satteldrehzahlen die ohnedies schon kleinen Sattlungen eine gegenseitige fast restlose Aufhebung finden.

Unter Berücksichtigung des Gesagten kann die Gleichung (13) auf die besondere Form

$$n_{s-zp} = \frac{n_1}{2 \cdot x \cdot p_{zm}} \quad (15)$$

gebracht werden, worin x jede positive ganze Zahl bedeutet.

Die in diesem Abschnitt untersuchten zusätzlichen Drehmomentenlinien haben einphasigen Charakter. Ihr Einfluß auf das Verhalten des Motors beim Anlauf kann bedeutend sein.

β) Die Bewegung der Zusatzpole. Anlässlich der Untersuchung des Einflusses der „Phasenablösung“ wurde gezeigt, daß das Ersatzfeld der Phasenablösung während der Dauer einer ganzen Hauptwelle $4m_1$ mal das Vorzeichen wechselt. Während das primäre Treppendiagramm, wie die Fig. 2 und 3 erkennen lassen, abwechselnd seine Form ändert, kann die Form des nur wenig beweglichen sekundären Treppendiagrammes als gleichbleibend gelten. Es wird also in der gleichen Zeit auch das mittlere Zusatzpolsystem $4m_1$ mal sein Vorzeichen ändern. Die Anzahl der über $2\tau_p$ infolge der Verschiedenheit der magnetischen Potentialunterschiede entstehenden Zusatzpole ist jedoch im allgemeinen von $4m_1$ verschieden. Als unabwendbare Folge dieser sich scheinbar widersprechenden Bedingungen muß ein Wandern des ganzen Zusatzpolsystems in einer bestimmten Richtung eintreten (man betrachte hierzu die im vorigen Abschnitt in den Fig. 4 und 5 dargestellten Zusatzfeldverteilungslinien).

Ist $2p_{zm} < 4m_1$, so wird eine Rückwanderung des Zusatzfeldes um den Unterschied $4m_1 - 2p_{zm}$ stattfinden. Der synchron laufende Anker bewegt sich dann mit einer negativen Drehzahl, d. h. in entgegengesetzter Richtung zum Hauptfeld.

In der unten wiedergegebenen Bewegungsgleichung (16) erscheint aus diesem Grunde auf der rechten Seite vor dem Bruchstrich ein Minuszeichen.

Das in Fig. 4 für eine bestimmte Stellung des Läufers zur neutralen Zone dargestellte Zusatzfeld veranschaulicht in übersichtlicher Weise dessen rückläufige Bewegung. Die Zahl der über $2\tau_p$ verteilten Zusatzpole ist gleich 10, also kleiner als $4m_1$.

Die besonderen Nutzenverhältnisse des Ständers und des Läufers bedingen im vorliegenden Falle ein äußerst einfaches und gleichmäßiges Bild der Zusatzfeldverteilung. Allgemein braucht die Breite der Polteilung des Zusatzfeldes, wie z. B. Fig. 5 erkennen läßt, nicht durchweg eine gleich große zu sein; sie kann starken Schwankungen unterworfen sein.

Ist $p_{zm} > 4m_1$, so tritt der umgekehrte Fall der Vorwärtsbewegung des Zusatzfeldes ein.

Das rückläufige (inverse) als auch das mit dem Hauptfelde gleichlaufende Zusatzfeld muß nach früheren Darlegungen ein weiteres zusätzliches Drehmoment erzeugen, welches die eigentümliche Form der M_q -Linie eines Mehrphasenmotors haben wird.

Die synchrone Drehzahl der Zusatzfeldbewegung n_{s-zb} kann aus dem Verhältnis der in der Zeiteinheit zurückgelegten Wege des Hauptfeldes und des Zusatzfeldes ermittelt werden. Wird der während der Dauer einer Periode des Hauptfeldes zurückgelegte Weg in Anzahl Zusatzpole ausgedrückt, so ist

$$\frac{n_{s-zb}}{n_1} = - \frac{4m_1 - \frac{2p'_{zm}}{p}}{\frac{2p'_{zm}}{p}} = - \frac{4m_1 - 2p_{zm}}{2p_{zm}}. \quad (16)$$

Durch Umstellung erhält man hieraus die „Satteldrehzahl der Zusatzpolbewegung“:

$$n_{s-zb} = - \frac{4m_1 - 2p_{zm}}{2p_{zm}} \cdot n_1. \quad (17)$$

Auf das Rechenbeispiel des Läufers L. I angewandt, wäre hiernach eine weitere Satteldrehzahl bei $n_{s-zb} = - \frac{12-10}{10} \cdot 1500 = -300$ Uml./Min. zu erwarten. (Näheres siehe Zahlentafel II).

Die zur Ermittlung der Zusatzfelder erforderlichen vier Untersuchungen brauchen weder für sich allein, noch als Mittelwert eine durch p teilbare Zahl Zusatzpole zu ergeben. $2p_{zm}$ kann jede beliebige ganze oder gebrochene Zahl sein.

Hierfür ein physikalisches Beispiel zur Erläuterung.

Auf eine gemeinschaftliche Welle mögen entsprechend den voneinander abweichenden Rechnungsergebnissen vier Asynchronmotoren arbeiten, deren Wicklung verschiedenpolig ausgeführt sei, z. B. $p = 2, 3, 4$ und 6 Polpaare aufweisen. Wird jede dieser Maschinen abwechselnd an eine Spannung bestimmter Frequenz gelegt, so wird die Welle ruckweise mit verschiedenen Geschwindigkeiten zu laufen suchen. Sind die einzelnen Zeiten sehr klein, so wird sich eine mittlere Geschwindigkeit einstellen. Diese kann bei kleinen zu beschleunigenden Massen angenähert aus der Frequenz und einem mittleren $p = \frac{2+3+4+6}{4} = \frac{15}{4} = 3,75$, also einer gebrochenen Polpaarzahl, errechnet werden.

II. Versuche.

A.

1. Vorwort.

Im vorliegenden Teil soll an Hand von Versuchsergebnissen festgestellt werden, inwieweit die im ersten Teil zusammengestellten Theorien die wirklichen Fälle erfassen. Erst, wenn es gelingt, die Entstehung der wichtigsten Sattelbildungen zu ergründen, können Mittel und Wege ausfindig gemacht werden, um die Sattel ganz zu vermeiden oder doch so schwach zu halten, daß ihr Vorhandensein ohne Einfluß auf den Gang der Maschine bleibt. Die Lösung der ersten Aufgabe kann als erreicht bezeichnet werden. Für die zweite sind einige neue Gesichtspunkte behandelt. Die Versuche an einem Motor mit drei verschieden genuteten Läufern zeigen, daß sich die Ursachen der Sattelbildungen nahezu vollständig ermitteln lassen. Ein Vergleich der punktweise aufgenommenen Drehmomentenlinien mit den rechnerisch aus dem Heylandkreis bestimmten ergibt die auffallende Tatsache, daß bei Schlüpfungen, die größer als 1 sind, bedeutende Sattlungen entstehen können, die nicht nur in der Lage sind, das Stillstandmoment fühlbar zu verringern, sondern darüber hinaus einen entscheidenden Einfluß auf den Gang der Maschine auszuüben.

2. Versuchsanordnung.

Kuppelt man den asynchronen Drehstrommotor mit einer Gleichstrom-Nebenschlußmaschine und führt letzterer bei möglichst voller Erregung veränderliche Spannungen zu, so läßt sich jede beliebige Drehzahl bis nahe zum Stillstand einstellen, wobei die Drehzahl des Maschinensatzes auch bei stoßweiser Belastung durch den Asynchronmotor nur ganz unmerklich schwankt.

Hierauf fußend wurde die nachfolgend beschriebene Versuchsanordnung zusammengestellt. Bei ganz kleinen Drehzahlen mußte eine zusätzliche mechanische Bremsung mit einem Pronyschen Zaum stattfinden, um einen einwandfreien stabilen Betrieb des Versuchsmaschinensatzes bis herunter zu etwa 5 Uml./Min. leicht und sicher zu ermöglichen.

Die folgenden Versuche wurden im Elektrotechnischen Versuchsfelde der Technischen Hochschule zu Berlin ausgeführt. Als Drehstromquelle (s. Fig. 6) stand die mit einer Einlochwicklung versehene Maschine M. 7 von 60 kVA-Leistung zur Verfügung. Der Generator ließ sich durch

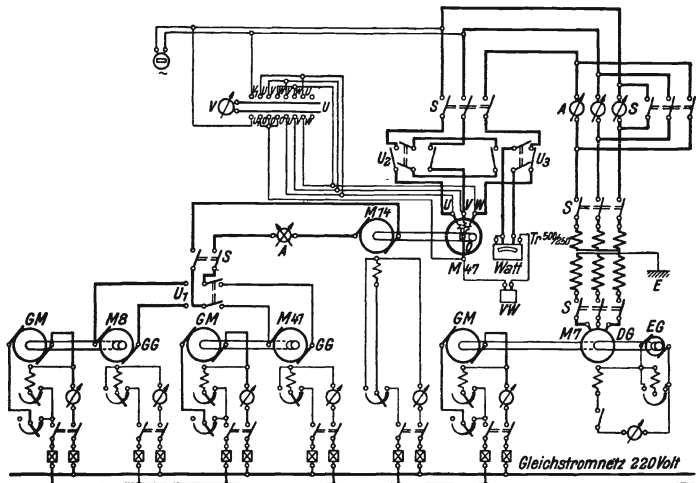


Fig. 6. Schaltbild der Versuchsanordnung.

eine angekuppelte Erregermaschine bis zu 500 V erregen. Diese Spannung wurde durch einen Transformator auf 250 V herabgesetzt. Der Drehstromgenerator wurde, wie auch alle anderen Hilfseinheiten, durch einen 220-V-Gleichstrom-Nebenschlußmotor angetrieben. Der Betriebsstrom wurde meist dem Netz, für wichtige Messungen einer Akkumulatorenbatterie entnommen.

Zur Lieferung des gleichstromseitigen Antriebstromes und zur Aufnahme des Bremsstromes konnten die beiden Maschinen M. 8 und M. 41 herangezogen werden. M. 8 fand hauptsächlich für die Messungen Verwendung; M. 41 wurde zum Antrieb des Versuchssatzes mit hoher Umdrehungszahl während der Abkühlung benutzt. Durch diese doppelte Anordnung wurde ein einfaches und schnelles Einstellen jedes gewünschten Meßpunktes ermöglicht. Die 3-kW-Gleichstrom-Nebenschlußmaschine M. 14 diente bei den Versuchen als Bremsdynamo für den Versuchsmotor M. 47.

M. 47 ist ein A.E.G.-Drehstrom-Asynchronmotor offener Bauart (Listenbezeichnung: D 30/4 Kf Nr. 226). Die Angaben des Leistungsschildes lauten: Verkettete Spannung: 215 Volt; 50 Perioden; Schaltung: Stern; $n = 1440$ Uml./Min.; Leistung: 2,2 kW; Strom: 8 Ampere. Der Ständer besitzt 36 Nuten bei einem lichten Durchmesser von 155,0 mm. Die dreiphasige Wicklung ist vierpolig angeordnet, so daß $q_1 = 3$ Nuten pro Pol und Phase ist. Für die Versuche wurde dieser Motor mit drei gegeneinander auswechselbaren Käfigankern „L. I“, „L. II“ und „L. III“ mit verschiedenen Nutenzahlen ausgerüstet. Der Ankerdurchmesser beträgt bei allen Läufern 154,2 mm, somit der Luftspalt 0,4 mm. Die für einen mittleren Luftspalt gerechnete Ständerpolteilung beträgt $\tau_p = 121,5$ mm.

Der Läufer L.	I	besitzt	40	Nuten,
„	„	L. II	57	„
und „	„	L. III	63	„

Der Läufer L. II entspricht der listenmäßigen Ausführung, die beiden anderen Anker sind auf besonderen Wunsch hergestellt.

Die Drehzahl wurde mit Hilfe eines Tachometers und eines Tachoskopes bestimmt. Eine anfangs benutzte Turendynamo M. 33, die durch biegsame Welle mit dem Versuchsmaschinensatz verbunden war, wurde ausgebaut, nachdem sich bei kleinen Drehzahlen der Einfluß ihrer Ankernutung durch starkes Pendeln unangenehm bemerkbar gemacht hatte.

Bei der betriebsmäßigen Lagerung der Welle in den Lagern des Motors wirken auf das Gehäuse außer dem Gegenmoment des Unterbaues gleichzeitig zwei Drehmomente. Das eine ist das Luftspaltmoment. Seine Richtung ist der Bewegung des Läufers entgegengesetzt. Das andere Moment wird von der Luft- und Lagerreibung gestellt und versucht umgekehrt, den Ständer in gleicher Richtung mit der Welle zu bewegen. Das vom Motor abgegebene Nutzdrehmoment ergibt sich aus dem Unterschied des Luftspalt-Drehmomentes und des demselben entgegenwirkenden Momentes der Luft- und Lagerreibung.

Bei den Versuchen wurde das Motorgehäuse durch eine zweite Lagerung der vorragenden Wellenstümpfe drehbar angeordnet und an den Füßen mit einem 400 mm langen Hebel versehen. Durch Bestimmung der am Hebel wirkenden Kraft mittels einer besonders geeichten Federwage kann unmittelbar das Nutzdrehmoment des Motors abgelesen werden. Das in der zusätzlichen Lagerung der Wellenstümpfe entstehende, dem Nutzdrehmoment entgegenwirkende Lagerreibungsmoment stellt einen

Tafel zu: Wandenberg, Das Schleichen von Drehstromasynchronmotoren.

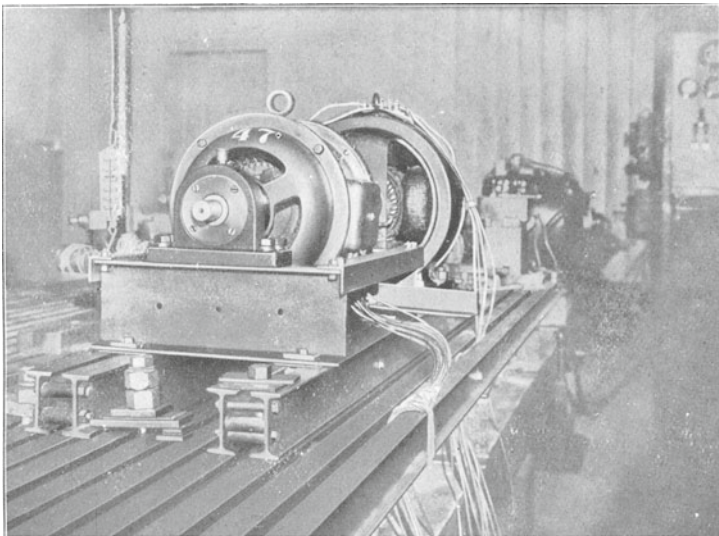


Fig. 7.

Aufbau des Versuchsmotors. Seitenansicht.

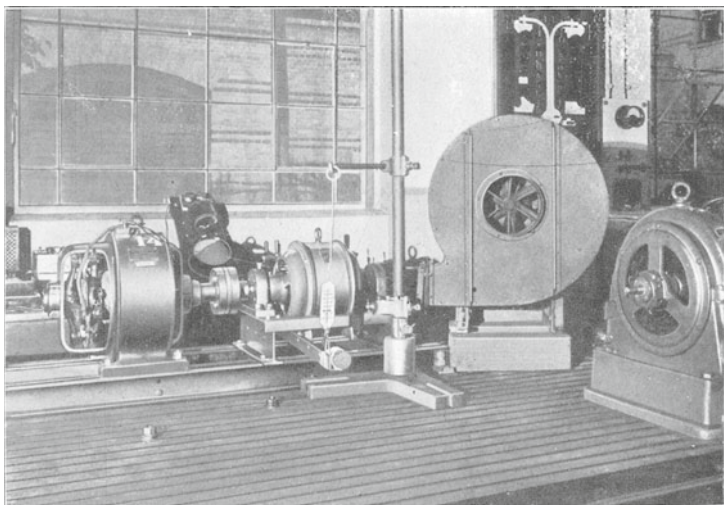


Fig. 8.

Versuchsmaschinensatz. Vorderansicht.

Teil des äußeren Belastungsdrehmomentes dar. Fig. 7 und 8 (siehe Tafel) zeigen den Aufbau der Drehmoment-Meßvorrichtung.

Das am Hebelarm gemessene Nutzdrehmoment kann mit dem theoretisch gerechneten Luftspaltdrehmoment nach Zuschlag des jeweiligen Luft- und Lagerreibungsmomentes verglichen werden. Zu diesem Zwecke wurde bei verschiedenen minutlichen Umlaufzahlen die Leistungsaufnahme des einmal leerlaufenden, das andere Mal mit der betriebsmäßig aufgestellten Versuchsmaschine gekuppelten Gleichstrommotors gemessen und daraus der in Fig. 9 dargestellte Linienzug bestimmt. Dieser zeigt die Luft- und Lagerreibung des Versuchsmotors im normalen betriebsmäßigen Zustande in Abhängigkeit von der Drehzahl.

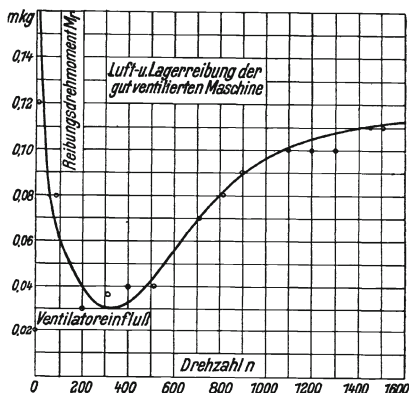


Fig. 9.

Die Schaltung wurde so gewählt, daß außer den Phasenleistungen, -spannungen und -strömen auch die verketteten Spannungen gemessen werden konnten. Das umschaltbare Voltmeter lag unmittelbar an den Klemmen der Maschine, die Netzspannung konnte bei geöffnetem Maschinenschalter bestimmt werden. Das durch die Umschalter U_2 und U_3 umschaltbare Wattmeter lag dicht an den Klemmen der Maschine. Der Querschnitt der vom Motor zum Wattmeter führenden Kabel war so reichlich bemessen, daß in ihnen nur mit einem ganz unwesentlichen Spannungsabfall gerechnet werden brauchte. Im Schaltbild Fig. 6 ist der zur eigentlichen Messung gehörige Aufbau durch stärkere Zeichnung hervorgehoben.

Der Drehstrommotor war für eine verkettete Spannung von 215 V bestimmt. Die Durchrechnung der Maschine zeigte, daß für den Kurzschlußfall Strom und Erwärmung sehr hohe Werte erreichen, so daß ein längeres Verweilen bei den größeren Schlüpfungen unzulässig erschien. Als zweckmäßige Spannung wurden 170 V gewählt und mit ihr der größere Teil der Hauptmessungen durchgeführt.

Mit Hilfe des für die gewählte Versuchsspannung errechneten Heylandkreises wurden die Läufer- und Ständerströme in Abhängigkeit von der Schlüpfung ermittelt, dann aus den Stromlinien mehrere Punkte herausgegriffen und für diese die Übertemperaturen im Beharrungszustand berechnet. Nach Ermittlung der Zeitkonstante konnte eine Schar von Erwärmungslinien gezeichnet werden, aus der die zulässige Belastungsdauer entnommen wurde. Als höchste Übertemperatur wurden 80°C zugelassen. In

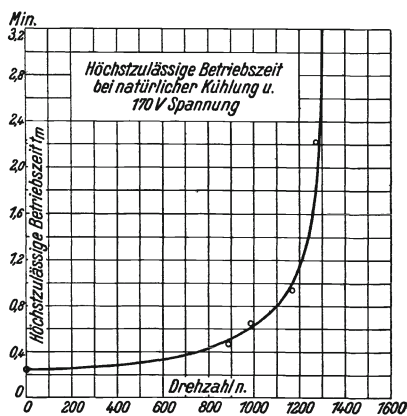


Fig. 10.

Fig. 10 ist die nach diesem Verfahren für den Läufer L. I ermittelte höchste Betriebsdauer, und zwar bei natürlicher Kühlung, in Abhängigkeit von der Schlüpfung, dargestellt. Hiernach konnte der Motor bei Stillstand nur etwa 15 Sekunden

untersucht werden. Da diese Zeitdauer zu knapp war, mußte der Motor mit einem Ventilator künstlich gekühlt werden, wodurch die zulässige Meßzeit auf mehr als den dreifachen Betrag erhöht wurde. Um etwa den gleichen Betrag ließ sich auch die Kühldauer verkürzen. Der Einfluß der verstärkten Luftreibung ist bereits im Schaubild Fig. 9 berücksichtigt.

Die elektrischen Ablesungen wurden bei gleichbleibender Maschinentemperatur in einer bestimmten Reihenfolge vorgenommen.

B. Versuchsergebnisse.

a) Das Drehmoment.

Die stabilen Teile der Drehmomentenlinie (siehe die Zusammenstellung der Hauptschaulinien in den Fig. 11, 12 und 13) konnten bei allen Läufern mit Leichtigkeit durch stufenweises Herabsetzen der Drehzahl des Versuchssatzes aufgenommen werden.

Bei Schlüpfungen von 80 v. H. und mehr machte sich die hohe Erwärmung des

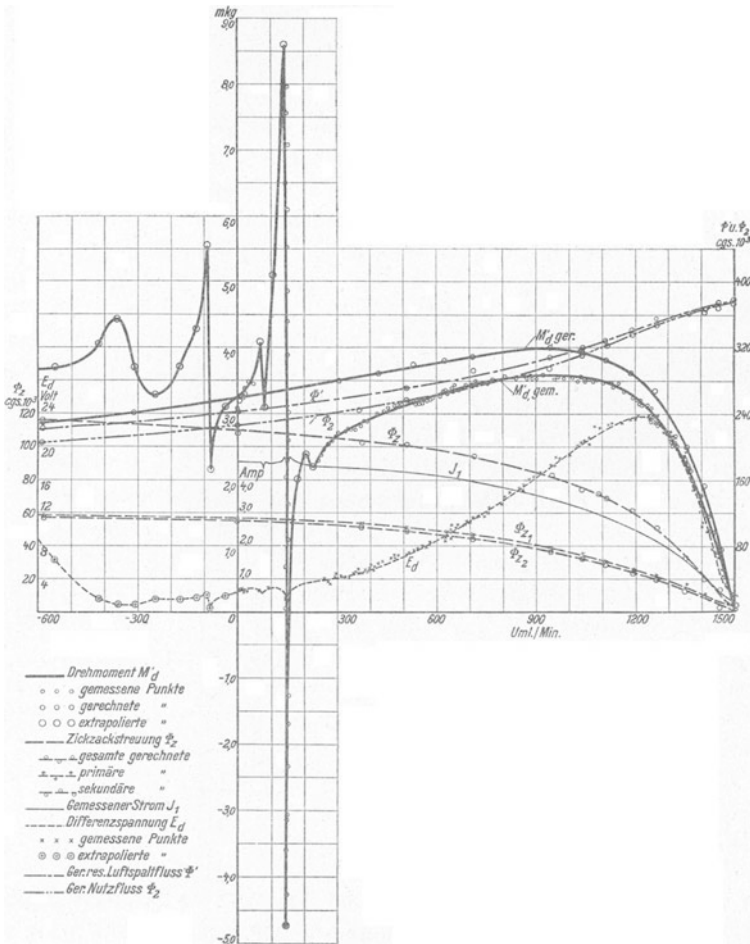


Fig. 11. Zusammengestellte Schaulinien für den Läufer L. I.

Läufers unangenehm bemerkbar und setzte den Versuchen bei etwa — 600 Uml./Min. eine Grenze, die mit den angeführten Mitteln nicht überschritten werden konnte.

Eine weitere Schwierigkeit stellte sich der Untersuchung des Läufers L. I entgegen. Zwischen 0 und 250 minutlichen Umdrehungen wurde der Maschinensatz beim Einschalten des Drehstrommotors sofort in etwa 150 Uml./Min. hineingerissen, wobei bei dieser Drehzahl die verschiedensten positiven und negativen Drehmomente gemessen werden konnten. Es mußte daher von vornherein mit dem Vorhandensein eines Sattels von besonders steiler Form und bedeutender Größe gerechnet werden. Wiederholte Messungen bei ganz geringen Netzspannungen bis hinunter auf 35 V bestätigten diese Annahme. Bereits bei 100 V ließ sich an der gedachten Stelle ein Sattel mit großer Genauigkeit zeichnen. Außer dieser Sattlung konnten zwei weitere kleine Sattelbildungen bei $n = 75$ und $n =$ etwa 250 Uml./Min. wahrgenommen werden. Nach Aufnahme mehrerer Meßreihen bei 35, 50, 70, 90, 100, 150 und 170 V wurden für bestimmte Schlüpfungen Schaulinienscharen (Drehmoment u. a. in Abhängigkeit von der Spannung) aufgezeichnet und aus ihnen durch Extrapolieren eine Vervollständigung der bei 170 V gemessenen Schaulinien herbeigeführt.

Der positive sowie auch der negative Scheitel des bei 150 Uml./Min. auftretenden Sattels (Fig. 11) ist um ein Vielfaches größer als das größte positive Hauptdrehmoment. Arbeitet der (anfänglich leerlaufende) Maschinensatz in der Nähe der Satteldrehzahl, so wird er beim Einschalten des Drehstrommotors durch die starke synchronisierende Wirkung des Sattels in dessen zugehörige Drehzahl hineingerissen. Erst bei kleineren Spannungen, wenn der Asynchronmotor nur noch wenig oder kein Nutzdrehmoment abgibt und somit der Bremsgenerator als Motor läuft, kann eine Beeinflussung der eingestellten Drehzahl durch den plötzlich hinzugeschalteten Drehstrommotor nicht mehr eintreten.

Beim Läufer L. I traten bei 150 Uml./Min. hammerschlagähnliche Erschütterungen des ganzen Zusammenbaues der Maschine auf, die zu wiederholten Malen die reichlich bemessenen, sonst anstandslos arbeitenden Kupplungsbolzen zum Bruch brachten. Hervorgerufen wurden diese Stöße durch die unvermeidlichen kleinen Frequenzschwankungen, die bei dem steilen Sattel genühten, um ein Pendeln der Maschinen zu verursachen. Weit auffälliger und gefährlicher wurde dieses Verhalten, wenn bei entfernten Fußschrauben der nur lose auf dem Unterbau stehende Motor durch schnelles Abbremsen vom Synchronismus zum Stillstand gebracht wurde. Beim Überschreiten der Satteldrehzahl traten nicht nur die beschriebenen starken Erschütterungen ein, sondern der Maschinensatz begann auf dem Aufspannrost sprungweise zu wandern. Wurde der stillstehende, mit der abgeschalteten Gleichstrom-Bremsdynamo gekuppelte Motor an Spannung gelegt, so gelangte er nur auf etwa 150 Uml./Min. — die Schleichdrehzahl — und ließ bei dieser Umlaufzahl ein recht lautes, mit periodisch wiederkehrenden Erschütterungen verbundenes Brummen hören. Eine ähnliche, aber bedeutend abgeschwächte Erscheinung, konnte noch bei etwa der doppelten Drehzahl beobachtet werden. Durch besondere Versuche bei festgekeiltem Ständer wurde die Unabhängigkeit dieser Erscheinungen von der drehbaren Ständeranordnung nachgewiesen.

Über gleichartige Beobachtungen findet man in der Literatur unseres Wissens nur eine einmalige Veröffentlichung. So beschreibt Heubach im XIII. Kapitel seines Werkes „Der Drehstrommotor“ ein „sehr merkwürdiges Phänomen“ wörtlich wie folgt: „... Alle Motoren liefen gut mit Ausnahme eines einzigen, der vierpolig

im Stator 48 im Rotor 43 Nuten hatte. Dieser Motor kam nicht hoch, brummte sehr stark und wurde heftig in Vibrationen versetzt, daß er auf dem Fundament entlang rutschte, wenn er nicht angeschraubt war. Er lief tadellos an, nachdem er mit einem Rotor von 41 Nuten versehen war. Wenn der Motor mit seinem ersten Rotor künstlich hochgebracht wurde, arbeitete er sehr gut, nur war er nicht zum Anlauf zu bringen“. An gleicher Stelle schreibt Heubach weiter: „Dieselbe Erscheinung zeigte ein vierpoliger Einphasenmotor, der im Stator 46, im Käfiganker 41 Nuten hatte. Dieser Motor lief vorzüglich an, nachdem er mit einem Rotor von 39 Nuten versehen war. Der günstige Anlauf wurde nicht etwa dadurch erzielt, daß der Rotorwiderstand durch die Reduktion der Nutenzahl etwas vergrößert wurde, denn es wurde, um diese Möglichkeit zu untersuchen, derselbe Stator mit einem Rotor von 43 Nuten versehen, und auch hierbei lief er tadellos an.

Das einzige charakteristische an den Zahlen 48 und 43, resp. 46 und 41 ist ihre Differenz von 5, wenigstens konnte bisher etwas anderes nicht gefunden werden. Es scheint daher, daß das Auftreten irgendwelcher sekundärer Erscheinungen in diesem Falle besonders begünstigt wird, und man wird jedenfalls gut tun, um 5 verschiedene Nutenzahlen zu vermeiden. Es wäre sehr zu wünschen, daß von anderer Seite diesbezügliche Erfahrungen ebenfalls veröffentlicht würden, nur auf diese Weise dürfte es möglich sein, genügend Unterlagen zu schaffen, um die Ursache dieser Erscheinung zu finden. — In allen übrigen Fällen hat es sich vorzüglich bewährt, für die Nutenzahlen des Stators und des Rotors relative Primzahlen zu wählen“.

Die generelle Anweisung, ohne Rücksicht auf die Zahnung: „jedenfalls um fünf verschiedene Nutenzahlen zu vermeiden“ erscheint nicht empfehlenswert. Genaue Aufschlüsse über die jeweilige Brauchbarkeit der gewählten Zähnezahlen können stets nur individuelle Untersuchungen mit Hilfe der aus den Treppendiagrammen entwickelten Zusatzfelder geben. Die Wahl relativer Primzahlen führt allgemein zu günstigen Ergebnissen. Soweit die Untersuchungen von Heubach.

Als unmittelbare Ursache des Schleichens und der Erschütterungen kann, wie aus der Drehmomentenlinie Fig. 11 ersichtlich, der überaus große und steile Sattel bei 150 Uml./Min. angesehen werden. Diese unerwünschte Erscheinung wird durch die Verkettung einer Reihe ungünstiger Einflüsse hervorgerufen, die ihrerseits durch die Wahl der Zahnung gegeben sind.

So ist nach Gleichung (13) die Satteldrehzahl der Zusatzpolbildung

$$n_{s-zp} = \frac{n_1}{2 \cdot p_{zm}} = \frac{1500}{10} = 150$$

bzw. 188 Uml./Min., je nachdem die bereits im Zahlenbeispiel für den Läufer L. I ohne oder mit Berücksichtigung der Nutenöffnungen gewonnenen Werte eingesetzt werden.

Bei der gleichen Umlaufzahl entsteht noch ein weiterer Sattel.

Es ist nach Kloss die „Erste Ständersatteldrehzahl“:

$$n_{s_{s,k}} = \frac{n_1}{q_1 \cdot m_1} = \frac{n_1}{9} = \frac{1500}{9} = 167 \text{ Uml./Min.}$$

Das Zusammenfallen mehrerer Sattel auf annähernd ein und dieselbe Drehzahl ist ungünstig und muß beim Entwurf durch entsprechende Wahl der Zahnung vermieden werden.

Das Stillstandmoment nimmt innerhalb gewisser Grenzen, je nach der augenblicklichen gegenseitigen Lage der Zähne, also der veränderlichen magnetischen Leitfähigkeit des Luftspaltes, verschiedene Werte an. Im vorliegenden Falle kann das Stillstandmoment durch einfache Verbindung der zu beiden Seiten gemessenen Kennlinienteile genau ermittelt werden.

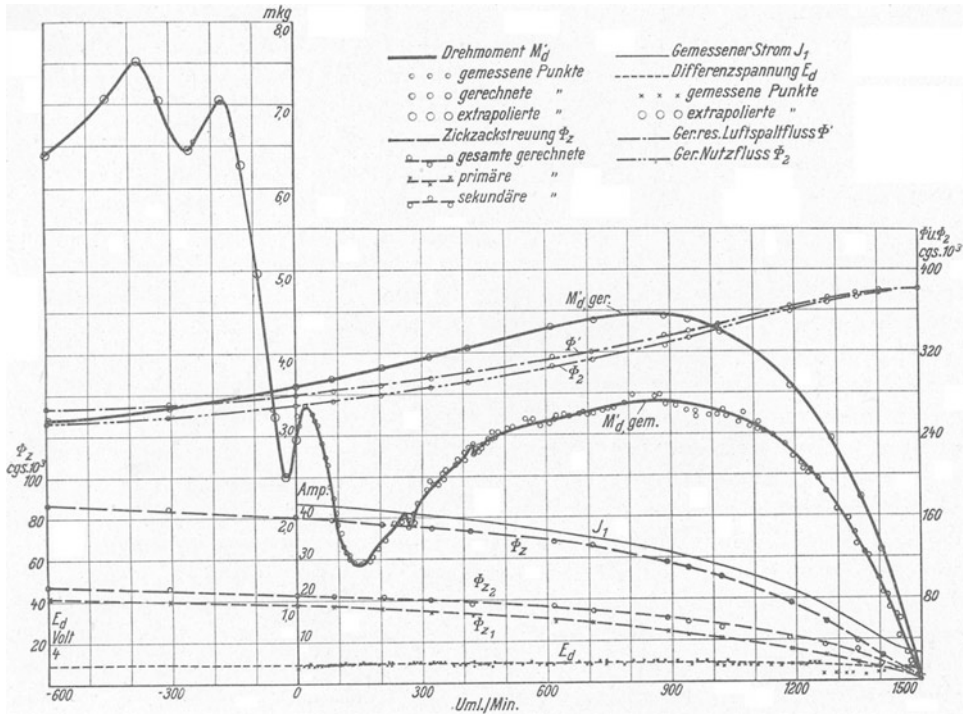


Fig. 12. Zusammengestellte Schaulinien für den Läufer L. II.

Betrachtet man zunächst die in den Fig. 11, 12 und 13 dargestellten rechnerischen und gemessenen Drehmomentenlinien und vergleicht sie miteinander, so fällt bei den Läufern L. II und L. III der recht bedeutende Einfluß der zwischen 100 und 150 Uml./Min. liegenden großen Sattlungen auf die Gestalt der Drehmomentenlinie und die Größe des Kippmomentes $M_{d_{max}}$ auf. Beim Läufer L. I ist diese Beeinflussung infolge des sehr steil verlaufenden großen Sattels nur gering.

Die gerechneten Kennlinien sind mit Hilfe des Heylandkreises ohne Berücksichtigung des Ständerwiderstandes gewonnen. Die Anwendung des einfachen Verfahrens läßt die Verringerung der Ständer-EMK mit steigender Belastung unberücksichtigt. Bei Versuchen läßt sich jedoch nur die Klemmenspannung, nicht aber die EMK, gleichhalten — ein Umstand, der beim Vergleich beider Schaulinien wohl zu berücksichtigen ist.

Weiter ist bei den Läufern L. II und L. III die recht starke Verkleinerung des Anfahrmomentes zu vermerken. Die Ursache liegt in der Größe der bei etwa — 100 Uml./Min. liegenden großen Sattlungsfläche. Beim Läufer L. I verläuft der an gleicher Stelle auftretende Sattel wieder recht steil, wodurch seine Wirkung rein örtlich beschränkt bleibt.

Endlich wäre allgemein festzustellen, daß durch die Sattelbildungen im Wirkungsgebiet der Asynchronmaschine als Motor eine fast durchgehend starke Herabsetzung des Drehmomentes und somit auch der Nutzleistung stattfindet.

Nach Besprechung der äußeren Gestaltung der M_d -Linie soll durch Anwendung der im theoretischen Teil zusammengestellten Erkenntnisse nachgeprüft werden,

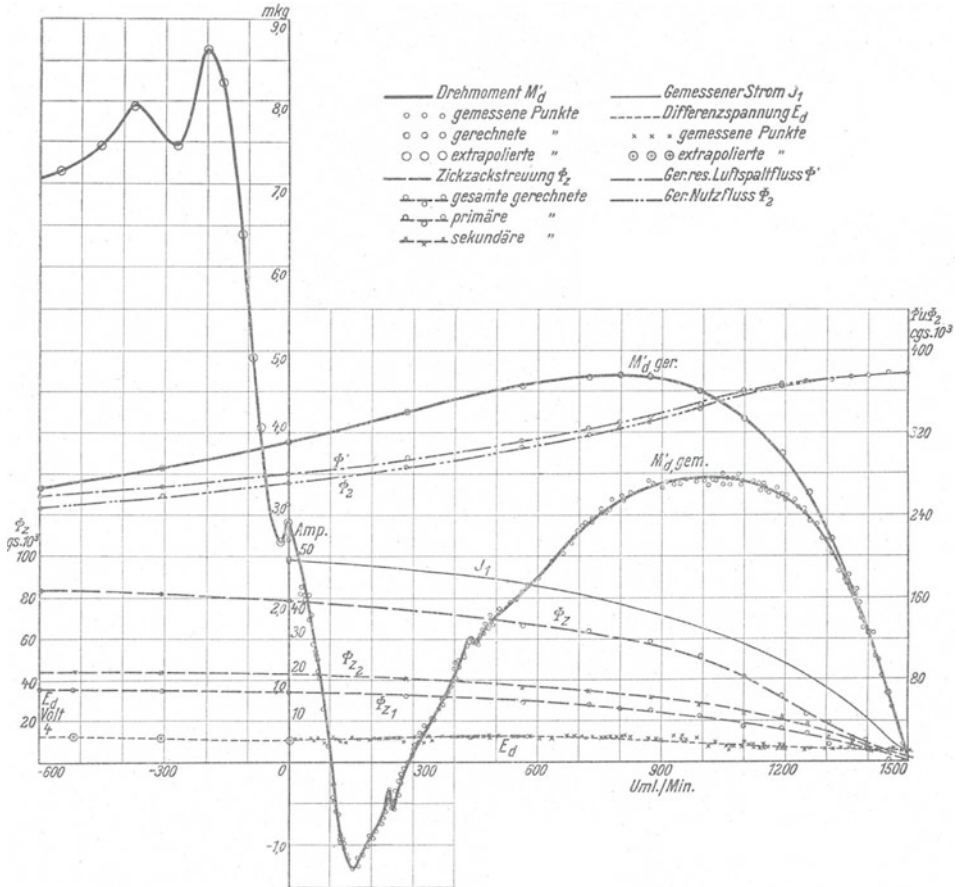


Fig. 13. Zusammengestellte Schaulinien für den Läufer L. III.

mit welcher Genauigkeit und Vollständigkeit das Vorhandensein von Sattlungen im voraus bestimmbar ist.

Zu diesem Zweck müssen in erster Linie die Treppendiagramme gezeichnet und aus ihnen die Zusatzfeldverteilungen bestimmt werden. Für den Läufer L. I ist dieses bereits früher geschehen (siehe die Treppendiagramme Fig. 2 und 3 und die zugehörigen Zusatzfeldverteilungen Fig. 4 und 5). Für den Läufer L. I müssen nach den früheren Ausführungen vier Treppendiagramme und vier Zusatzfeldverteilungslinien gezeichnet werden. Für die Läufer L. II und L. III genügen je zwei Untersuchungen.

Die Fig. 14 und 15 zeigen die Treppendiagramme für den Läufer L. II.

In der ersten neutralen Zone des AW-Druckdiagrammes (links) der Untersuchung Ia (in der neutralen Zone steht gerade eine Läufernut; die eine Ständerphase

führt den Höchstwert des Stromes) stehen sich zwei Nuten gegenüber; in der letzten neutralen Zone (rechts) dagegen (entsprechend dem Sonderfall IIa) Zahn und Nut. Es werden also, wie bereits erwähnt wurde, bei ungeraden Läuferzähnezahlen durch eine Untersuchung zwei Fälle (I und II, a und b) gleichzeitig berücksichtigt.

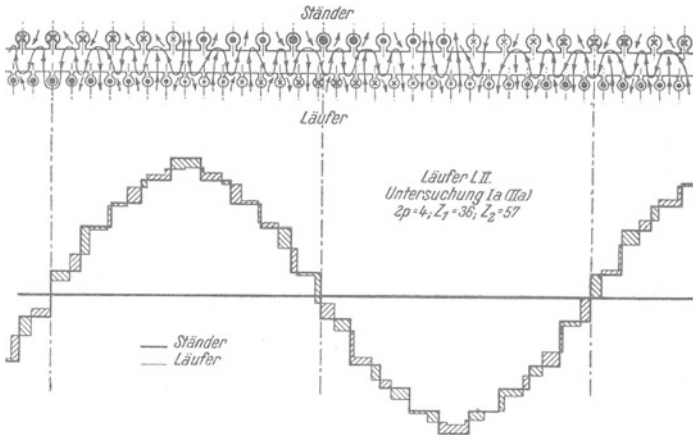


Fig. 14.

Treppendiagramm für den Läufer L. II. Untersuchung Ia (und IIa).
 $2p = 4; Z_1 = 36; Z_2 = 57.$

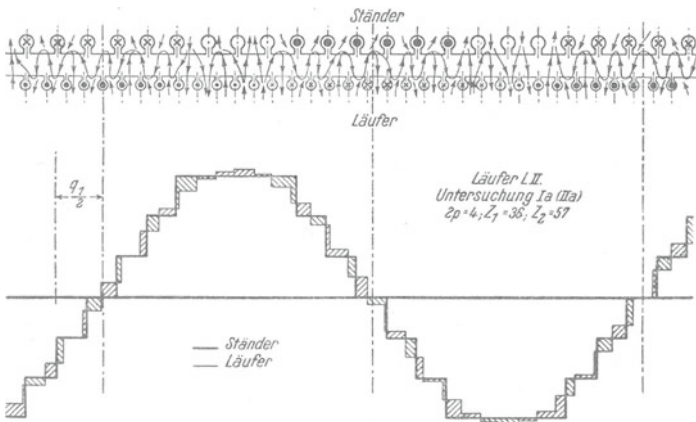


Fig. 15.

Treppendiagramm für den Läufer L. II. Untersuchung Ib und (IIb).
 $2p = 4; Z_1 = 36; Z_2 = 57.$

Durch das räumlich getrennte, gemeinschaftliche Auftreten zweier Grenzzustände wird eine zerrissene, stark schwankende Verteilung der Zickzackstreuung und der Zusatzfelder hervorgerufen. Als Beispiel hierfür sind in den Fig. 14 und 15 die beiden Treppendiagramme und in der Fig. 16 die Zusatzfeldverteilung des Läufers L. II ($Z_2 = 57$) wiedergegeben.

Auch für den Läufer L. III ist $Z_2 (= 63)$ eine ungerade Zahl. Die Treppendiagramme weisen nichts Neues auf. Es kann daher auf eine Wiedergabe an dieser Stelle verzichtet werden. Die Zusatzfeldverteilung ist aus der Fig. 17 ersichtlich und zeigt gegenüber Fig. 16 keine wesentlichen Abweichungen.

Aus den Zusatzfeldverteilungslinien sind für jeden ausgezeichneten Zustand die Polpaarzahlen des Zusatzfeldes zu entnehmen.

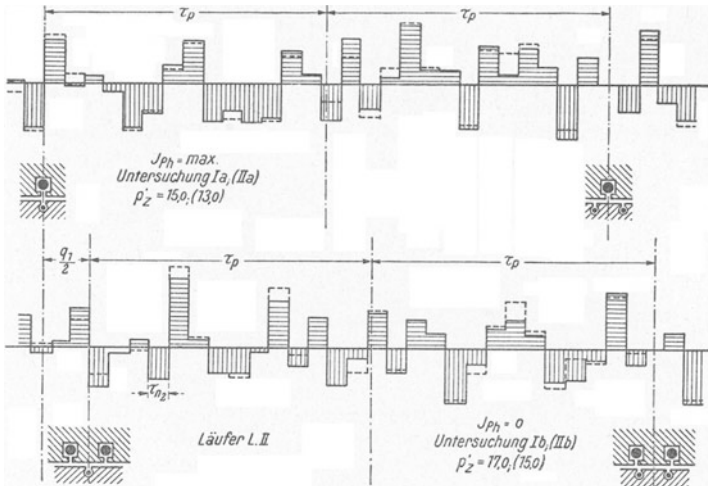


Fig. 16. Zusatzfeldverteilung. Läufer L. II. In der ersten neutralen Zone (links) steht eine Läufernut.

Bei synchroner Bewegung des Läufers mit dem Grundfelde findet eine dauernde Ablösung der Zustände a und b statt, wobei die einmal eingenommene Lage des Läufers zur neutralen Zone bestehen bleibt.

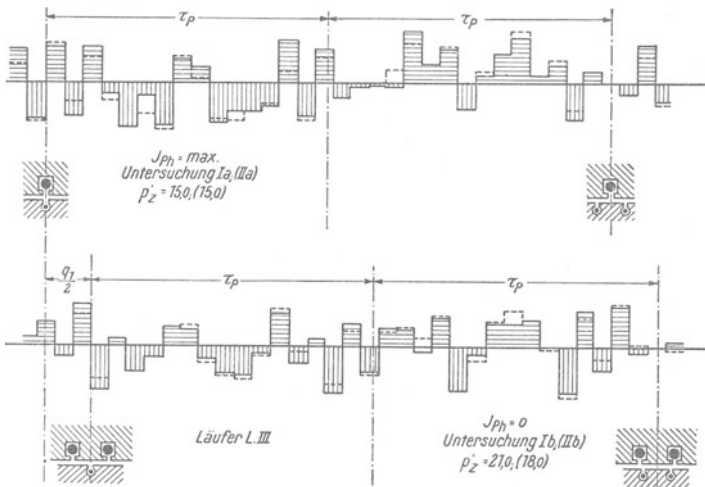


Fig. 17. Zusatzfeldverteilung. Läufer L. III. In der ersten neutralen Zone (links) steht eine Läufernut.

Bei einem vom Synchronismus abweichenden Lauf findet ein dauernder Übergang aller Grenzlagen und Zustände statt. Die mittlere Polpaarzahl des Zusatzfeldes p'_{zm} ist aus den Ergebnissen aller vier Untersuchungen zu bilden. Die Rechnung kann, wie bereits erwähnt, gelegentlich für p'_{zm} bzw. die auf $2\tau_p$ bezogene Anzahl Zusatzpolpaare p_{zm} auch gebrochene Zahlen ergeben.

Die rechnerischen Untersuchungen wurden außer an den drei Versuchsmaschinen an vier weiteren Motoren durchgeführt, bei denen ein bestimmtes Verhalten bekannt war oder doch angenommen werden konnte. Durch Wiedergabe der hauptsächlichsten Ergebnisse soll gezeigt werden, inwieweit Rechnung und Messung einander decken, welchen Einfluß die Nutung des Läufers bei gleichbleibender Ständerzähnezahl auf die Satteldrehzahlen hat und ob es möglich ist, die Neigung zum Schleichen mit den angegebenen Mitteln voraus zu bestimmen. Es wurde gewählt:

Zahlentafel I.

Läufer	Z_1	Z_2	Grund der Wahl
L. VI	36	29	Müßte gut anlaufen, günstiges Zähneverhältnis.
L. IV	36	33	Punga (E. u. M. 1912) teilt mit, daß gut anläuft.
L. VII	36	36	Müßte kleben, also schlecht anlaufen.
L. I	36	40	Versuchsmotor; schleicht!
L. V	36	47	Punga (E. u. M. 1912) teilt mit, daß „noch“ anläuft.
L. II	36	57	Versuchsmotor; läuft gut a. n. Soll nach Punga (E. u. M. 1912) ausgeprägte Bremswirkung haben!
L. III	36	63	Versuchsmotor; schleicht!

Leider kann Punga in seiner Arbeit für die Motoren L. IV, L. V und L. II keine Drehmomentenlinien angeben, so daß ein Vergleich nicht möglich ist.

Die Aufstellung der Treppendiagramme kann, da hiervon unabhängig, ohne Berücksichtigung der Bauart vorgenommen werden. Für die sonstige Durchrechnung der gewählten Maschinen L. VI, L. IV, L. VII und L. V wurde der Versuchsständer angenommen. Die Maße der Läufer mußten, um Vergleiche ziehen zu können, den Größen der Versuchsläufer angepaßt werden. Für die Läufer L. I, L. II und L. III wurden die bekannten Abmessungen der Nuten, Stäbe, Ringe u. a. in Abhängigkeit von der Läuferzähnezahl aufgetragen, aus diesen Schaulinien die unbekanntenen Größen der anderen Maschinen als wahrscheinliche Werte abgelesen und den Rechnungen zugrunde gelegt.

Die Treppendiagramme in Verbindung mit den Schaulinien des Zusatzfeldes ergeben die im oberen Teil der Zahlentafel II wiedergegebene mittlere Zahl der über den Maschinenumfang verteilten Zusatzpolpaare p'_{zm} .

Mit Hilfe dieser Größen lassen sich unter Anwendung der früher gegebenen Gleichungen die Satteldrehzahlen rechnerisch bestimmen. Sie sind im unteren Teil der Zahlentafel II vergleichsweise mit den gemessenen Werten zusammengestellt.

Zu der Zahlentafel II ist allgemein zu bemerken, daß zur Stromlieferung die Versuchsfeldmaschine 7, ein Drehstromgenerator mit Einlochwicklung, herangezogen wurde, dessen Spannungslinie recht bedeutende Harmonische der 5. und 7. Ordnung aufweist. Durch diese Harmonischen werden zeitliche Feldoberwellen hervorgerufen, die mit einer von n_1 verschiedenen Geschwindigkeit (siehe Seite 87) umlaufen. Sie können die Größe des Drehmomentes mehr oder weniger beeinflussen. Eine Sattelfeldbildung kommt jedoch im untersuchten Gebiet des Motors nicht zustande.

Ein Vergleich der in Zahlentafel II wiedergegebenen Werte mit den aufgenommenen Drehmomentenlinien läßt einige bemerkenswerte Tatsachen erkennen.

Der durch die Phasenablösung hervorgerufene, beim Dreiphasenmotor bei $\frac{n_1}{7}$ liegende Sattel ist im vorliegenden Falle nur von geringer Bedeutung. Die Überein-

Zahlen-

Nr.	Bezeichnung	Grundgleichung	Satteldrehzahlen der					
			L. VI ($Z_1 = 29$)		L. IV ($Z_2 = 33$)		L. VII ($Z_3 = 36$)	
			gerechnet, Nutenöffnungen		gerechnet, Nutenöffnungen		gerechnet, Nutenöffnungen	
			vernach- lässigt	berück- sichtigt	vernach- lässigt	berück- sichtigt	vernach- lässigt	berück- sichtigt
1	Gesamte mittlere Zusatzpolpaarzahl	p'_m	10,0	9,0	10,5	10,5	10,5	9,0
2	Satteldrehzahl der Phasenablösung (siehe Seite 89)	$n_{s-pk} = \frac{n_1}{2m_1 + 1} = \frac{n_1}{7}$	215		215		215	
3	Ständersatteldreh- zahl des Verfassers (s. S. 90)	$n_{ss} = \frac{n_1}{2q_1 m_1 + 1} = \frac{n_1}{19}$	79		79		79	
4	Erste Ständer- satteldrehzahl n. K l o s s (S. 91)	$n_{s_1 k} = \frac{n_1}{q_1 \cdot m_1} = \frac{n_1}{9}$	167		167		167	
5	Zweite Ständer- satteldrehzahl n. K l o s s (S. 91)	$n_{s_2 k} = \frac{n_{s_1 k}}{2} = \frac{n_1}{18}$	83		83		83	
6	Satteldrehzahl der Zusatzpolbildung (S. 96)	$n_{s-zp} = \frac{n_1}{2p_{zm}}$	150	167	143	143	143	167
7	Desgleichen in- folge besonderen Z_2 - G ö r g e s s e s Phänomen (s. S. 97)	$n'_{s-zp} = \frac{n_{s-zp}}{2}$						
8	Satteldrehzahl der Zusatzpolbewegung (s. S. 98)	$n_{s-zb} =$ $= -\frac{4m_1 - 2p_{zm}}{2p_{zm}} \cdot n_1$	-300	-500	-214	-214	-214	-500
9	Sattelbildungen, deren Entstehung aus aufgenomme- ner Differenzspan- nungslinie auf Zu- satzfeld zurück- geführt wird (S. 114)							
10	Unerforscht ge- bliebene Sattelbil- dungen der unter- suchten Motoren							

tafel II.

Läufer in Umdr./Min.											Bemerkungen
L. I (Z ₂ = 40)			L. V (Z ₃ = 47)		L. II (Z ₃ = 57)			L. III (Z ₃ = 63)			
gerechnet, Nutenöffnungen		gemessener Sattel bei	gerechnet, Nutenöffnungen		gerechnet, Nutenöffnungen		gemessener Sattel bei	gerechnet, Nutenöffnungen		gemessener Sattel bei	
vernachlässigt	berücksichtigt		vernachlässigt	berücksichtigt	vernachlässigt	berücksichtigt		vernachlässigt	berücksichtigt		
10,0	8,0		10,0	11,0	14,0	16,0		16,5	18,0		
215		220	215		215		265	215		245	
79		75	79		79		90	79		90	
167		150	167		167			167			
83		75	83		83		90	83		90	
150	188	150	150	136	107	94	90	91	83	90	
84	75	75									Nur, wenn $\frac{Z_2}{2 p'_m} = 2$
-300	-750	-300	-300	-136	214	375	420	408	500	445	
		-90 -300					1)			1)	1) Die Sattel der Läufer L. II und L. III bei - 100 und - 300 U./M. dürften auch, wie beim Läufer L. I, auf das Zustandekommen des Zusatzfeldes zurückzuführen sein. Die Differenzspannungslinie läßt das hier jedoch nicht mit Sicherheit erkennen.
							-100 ¹⁾ -300 ¹⁾			-100 ¹⁾ -300 ¹⁾	

stimmung von Rechnung und Messung ist als gut zu bezeichnen. Auch Arnold, Heubach, Punga und Kloss haben an den von ihnen untersuchten Dreiphasenmotoren, unabhängig von der Zahnung, bei $\frac{n_1}{7}$ Sattelbildungen beobachtet. Die ersten geben hierfür aber andere Erklärungen.

Der Einfluß der Ständernutzung auf die Drehmomentenlinie ist gering. Beim Läufer L. I tritt bei der errechneten Drehzahl ein starker Sattel auf, der aber durch weitere Ursachen verstärkt wird. Bei den Läufers L. II und L. III können an dieser Stelle keine Sattelbildungen festgestellt werden.

Die in der Zahlentafel unter 6., 7. und 8. angeführten, durch die Zickzackstreuung verursachten Sattlungen sind durch die Rechnungsvorgänge wieder gut erfaßt. Zwischen den unter Vernachlässigung und den unter Berücksichtigung der Nutenöffnung ermittelten Satteldrehzahlen sind Abweichungen festzustellen. Die unter Berücksichtigung der Nutenöffnungen entwickelte Rechnung stellt einen idealen Fall dar. In Wirklichkeit wird dadurch ein Zwischenzustand herbeigeführt, daß ein Teil der Zickzackkraftlinien nach teilweiser Durchdringung der Nuten seitlich in den Zahn eintritt. Das Zusatzfeld wird dann mehr dem unter Vernachlässigung der Nuten ermittelten ähneln. Eine weitere Abweichung des Zusatzfeldes vom ideell gerechneten wird infolge von Verschmieren der scharfen Kanten der Treppendiagramme eintreten. Am ehesten kann die Wirklichkeit, was auch die Zahlentafel II bestätigt, etwa durch einen Mittelwert aus beiden Rechnungen berücksichtigt werden.

Die wichtigen großen Sattel des Läufers L. I bei -90 und -300 Uml./Min. können, wie auf Seite 114 an Hand der aufgenommenen Differenzspannungslinie gezeigt wird, auf das Vorhandensein der Zusatzfelder zurückgeführt werden. Die Differenzspannungslinie weist an diesen Stellen, ähnlich wie bei Geschwindigkeiten, bei denen sich der Läufer nachweislich in einem Zustande des Synchronismus zum Zusatzfelde befindet, Unregelmäßigkeiten auf.

Auch bei den Läufers L. II und L. III dürften die Sattel bei -100 und -300 minutlichen Umläufen auf die gleiche Ursache zurückführbar sein, obwohl die normalerweise schwach ausgeprägte Differenzspannungslinie dieses nicht erkennen läßt. (Näheres im zweitnächsten Abschnitt über die Differenzspannung.) Trotz vieler Tastversuche ist es leider nicht gelungen, die Entstehung dieser, besonders für die Größe des Hochlaufmomentes wichtigen Sattel ganz zu erkennen.

Aus der Zusammenstellung geht hervor, daß für den größeren Teil der gemessenen Sattlungen die Entstehung richtig erkannt ist. Für einen kleinen, allerdings sehr wichtigen Rest kann auf Grund besonderer Beobachtungen auf die wahrscheinliche Ursache zurückgeschlossen werden.

Die Ergebnisse der Untersuchungen lassen die Abhängigkeit der wichtigsten Sattelbildungen von der Zickzackstreuung erkennen. Die Scheitelgröße der Zusatzdrehmomente hängt von der Größe der Zusatzfelder ab, die ihrerseits von der Zickzackstreuung Φ_z und dem Nutenverhältnis beeinflußt werden. Hiermit soll aber nicht gesagt werden, daß eine kleine Zickzackstreuung auch ein günstiges Verhalten der Maschine beim Anlaufen zeitigt. Allerdings ist bei sonst richtiger Wahl der Zahnung eine im Verhältnis zum Nutzfluß geringe Zickzackstreuung vorteilhaft.

b) Der Strom.

Beim Läufer L. I hat die gemessene Stromkennlinie (s. Fig. 11) im Gebiet der durch das Zusatzfeld erzeugten Sattel bei $n = 75$ bzw. 150 Uml./Min. einen unregelmäßigen Verlauf. An diesen Stellen wird durch einen übergelagerten zusätzlichen Ständerstrom eine recht starke Ausbuchtung hervorgerufen, die den eigentümlichen Verlauf der Stromlinie in der Nähe eines Synchronismus aufweist. Der Ständerstrom nimmt hier mit geringer werdender Schlüpfung erst langsam, dann immer schneller ab, bis bei Synchronismus mit dem Felde die unterste Grenze erreicht wird. Bei Synchronismus mit dem Hauptfelde ist diese durch den Magnetisierungsstrom und die Eisenverluste gegeben. Für den übergelagerten Zusatzstrom wird der gleiche Punkt durch die entsprechenden zusätzlichen Werte bestimmt. Bei negativ werdender Schlüpfung, d. h. übersynchronem Lauf, findet in symmetrischer Weise wieder ein Anstieg des Stromes statt. Die in Abhängigkeit von der Schlüpfung aufgetragene Stromkennlinie hat somit an diesen Stellen einen V-ähnlichen Verlauf. Eine gleiche Erscheinung tritt entsprechend auch bei den hier nicht wiedergegebenen Leistungs-, Phasenverschiebungs- und anderen Kennlinien auf. Die Kennlinien der beiden anderen Läufer L. II und L. III (siehe Fig. 12 und 13) zeigen einen als üblich zu bezeichnenden ununterbrochenen Verlauf.

Das abweichende Verhalten des ersten Läufers ist durch die gewählte, durch $2p$ teilbare Zähnezah Z_2 bedingt. Es entfallen bei ihm auf jede Ständerpolteilung $\frac{Z_2}{2p} = \frac{40}{4} = 10$ Läuferzähne, die in symmetrischer Weise vom Zusatzfluß durchdrungen werden. Der Zusatzfluß erzeugt in den Stäben des Läufers zusätzliche EMK-e verschiedener Frequenz, die sich zum Teil im Gleichgewicht halten und zum Teil zum Ausgleich kommen. In diesem besonderen Falle entsteht, von den hohen Ausgleichströmen herrührend, für alle Polteilungen ein gleiches, und zwar symmetrisch ausgebildetes, zusätzliches Läuferfeld, welches in der Ständerwicklung generatorisch EMK-e erzeugt. Finden diese einen Ausgleich, so entstehen im Verlauf des Ständerstromes die beobachteten Sattel.

Bei den Läufern L. II und L. III, bei denen $\frac{Z_2}{2p}$ keine ganze Zahl ist, hat das Zusatzfeld einen unregelmäßigen Verlauf. Die im Läufer zum Ausgleich kommenden Zusatzströme sind nicht in der Lage, ein symmetrisches Läuferfeld, wie beim Läufer L. I (vgl. die Fig. 16 und 17 mit den Fig. 4 und 5) hervorzurufen. Die im Ständer induzierten EMK-e heben sich zum größten Teil auf, so daß eine nennenswerte Beeinflussung des Ständerstromes nicht stattfindet.

c) Die Differenzspannung.

Im ersten Teil wurde bereits nachgewiesen, daß in den Stäben des Läufers übergelagerte Zusatzströme höherer Ordnung entstehen. Die Frequenz der Zusatzströme ist verschieden und hängt von mehreren Bedingungen ab. Zu nennen ist von diesen neben dem Einfluß der Netzfrequenz und der Läuferschlüpfung der Einfluß der Zusatzpolzahl, ferner die Gleichmäßigkeit der räumlichen Verteilung der Zusatzpole sowie der Veränderlichkeitsgrad der Form der einzelnen Zusatzfelder.

Die Größe des Zusatzflusses ist proportional der Zickzackstreuung, in Annäherung auch den Strömen in Läufer und Ständer. Die Zusatzflüsse und der zusätzliche Läuferstrom stehen in ähnlicher Abhängigkeit zur Schlüpfung s wie der Haupt-

strom. Es wird also der zusätzliche Läuferstrom mit zunehmender Schlüpfung erst schnell anwachsen, um dann bei größerer Schlüpfung nur noch eine geringe Steigerung zu erfahren (vgl. auch in den Fig. 11, 12 und 13 die Linien für Φ_z und J_1).

Die zusätzlichen Läuferströme erzeugen ähnlich wie die Ströme in einer Erregerwicklung bei Bewegung des Ankers in der stillstehenden Ständerwicklung EMK-e, deren Frequenz von der Frequenz der Zusatzströme und der Eigenfrequenz des Läufers abhängt. Die Größe der zusätzlichen Ständer EMK ist proportional der jeweiligen Größe und Frequenz des Zusatzfeldes Φ_{Zu_2} und der Drehfrequenz ν des Läufers (nicht zu verwechseln mit der Netzfrequenz ν_1 oder der Schlüpfungsfrequenz ν_2 des Läufers. ν ist hier in Analogie zur Umlaufzahl n ohne Index eingeführt). Letztere ist im Stillstand gleich null und wächst linear mit zunehmender Drehzahl des Läufers.

Wird die Frequenz des zusätzlichen Läuferstromes als gleichbleibend angenommen oder die Gleichung nur für eine bestimmte Frequenz aufgestellt, so ist die Größe der zusätzlichen Ständer-EMK durch $c \cdot \nu \cdot \Phi_{Zu_2}$ bestimmt. Es wird somit die Zusatz-EMK für $s = 1$ und $s = 0$ in beiden Fällen null sein; im ersten Falle weil $\nu = 0$ und im zweiten weil $\Phi_{Zu_2} = 0$ ist. Die in Abhängigkeit von s aufgetragene zusätzliche EMK muß einen Verlauf zeigen, der sich mit dem der E_d -Linie in Fig. 11 deckt. Weist der Läuferzusatzstrom Unregelmäßigkeiten, wie Sattelbildungen, auf, so müssen diese auch im Verlauf der EMK-Linie in Erscheinung treten.

Bei einer durch $2p$ unteilbaren Läuferzähnezahl halten sich die zusätzlichen EMK-e sowohl im Läufer wie auch im Ständer größtenteils im Gleichgewicht und nur ein geringer Teil kommt zum Ausgleich. Der umgekehrte Fall tritt ein, wenn $\frac{Z_2}{2p}$ eine ganze Zahl ist. Natürlich erreicht dadurch auch die zum Ausgleich kommende induzierte EMK im Ständer einen höheren Betrag.

Die in der angedeuteten Weise hervorgerufene zusätzliche Spannung kann als eine Oberwelle angesehen werden.

Bei Sternschaltung der Ständerwicklung finden solche Oberwellen, deren Ordnung durch xm_1 teilbar ist, keinen Ausgleich. In diesem Falle kann eine höhere Phasenspannung gemessen werden, als sie der gemessenen verketteten entsprechen würde. Der algebraische Unterschied zwischen der gemessenen und der berechneten Spannung soll mit „Differenzspannung E_d “ bezeichnet werden. Die im Ständer erzeugte Zusatzspannung braucht mit der Phasenspannung nicht in Phase zu liegen. Die Differenzspannung ist somit kleiner als diese Zusatzspannung, wozu noch kommt, daß letztere im allgemeinen auch Oberwellen enthalten wird, deren Ordnung nicht durch xm_1 teilbar ist.

Der Läufer L. I läßt bei 75 bzw. 150 Uml./Min. in der Kennlinie der Differenzspannung (Fig. 11) und der Kennlinie des Ständerstromes deutliche Sattelbildungen erkennen. Beide Sattel verdanken ihre Entstehung den Zusatzflüssen. Weitere Sattlungen in der E_d -Linie können bei dem Läufer L. I. im Wirkungsgebiet der Maschine als Motor nicht mehr festgestellt werden. Tatsächlich könnten auch keine weiteren entstehen, da die anderen Drehmomentensattlungen von den Zusatzfeldern unabhängig sind. Der Drehmomentensattel bei -300 Uml. i. d. Min. entsteht durch das Wandern der Zusatzpole, ist also wieder vom Zusatzfeld abhängig. Eine Beeinflussung der Differenzspannung im geschilderten Sinne kann auch hier beobachtet werden. Bei -90 Uml. i. d. Min. ist in der E_d -Linie eine weitere starke Sattlung vorhanden. Es kann nun umgekehrt mit großer Wahrscheinlichkeit zurückge-

geschlossen werden, daß auch die bedeutende Sattelbildung dieser Stelle durch das Zusatzfeld mindestens stark beeinflusst wird.

Bei den Läufern L. II und L. III ist $\frac{Z_2}{2p}$ nicht restlos teilbar und somit die Bildung einer wesentlichen Differenzspannung nach dem Gesagten nicht zu erwarten, was die Versuche auch bestätigen. In den gemessenen Differenzspannungslinien können mit Sicherheit Sattlungen nicht festgestellt werden. Wie jedoch die eingetragenen Meßpunkte erkennen lassen, ist die Differenzspannung an mehreren Stellen, bei denen die Drehmomentenlinien Sattel aufweisen, Schwankungen unterworfen. Diese Schwankungen lassen mit großer Wahrscheinlichkeit erkennen, daß auch bei den Läufern L. II und L. III die Entstehungsursache der Drehmomentensattel bei -100 und -300 Uml. i. d. Min. auf das Zustandekommen von Zusatzflüssen der untersuchten Art zurückzuführen sind.

Die besondere Gestaltung der Differenzspannungslinie bestätigt, daß die wichtigsten Sattlungen durch die aus der Zickzackstreuung entstandenen Zusatzflüsse hervorgerufen werden.

d) Die Flüsse.

Durch Konstruktion des Heylandkreises kann man das Verhalten der Maschine bei verschiedenen Schlüpfungen vorausbestimmen. Während bei Motoren mit Phasenanker die Übereinstimmung von Messung und Rechnung befriedigend ist, ergibt der Heylandkreis bei Käfigankermaschinen für größere Schlüpfungen meist stärkere Abweichungen gegenüber den Meßwerten, da die Neigung zur Sattelbildung unberücksichtigt bleibt. Als mittelbare Ursache der Sattelbildungen wurden die aus der Zickzackstreuung entstehenden Zusatzflüsse erkannt.

Sind in üblicher Weise aus den Eisen- und mechanischen Leerlaufverlusten der Wirkstrom und der blindwirkende Magnetisierungsstrom bestimmt, so kann nach

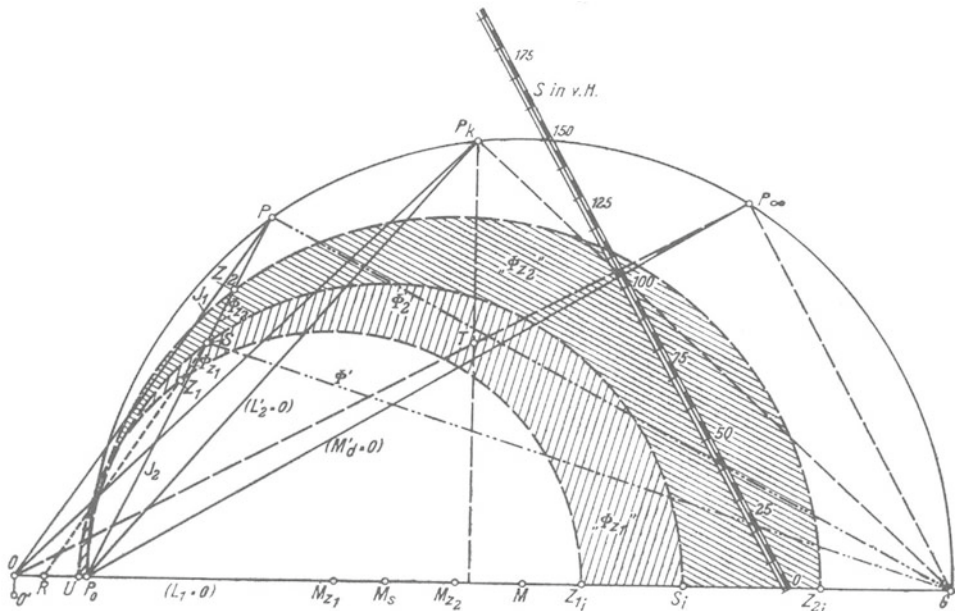


Fig. 18. Heylandkreis für den Läufer L. III.

Fig. 18 durch Auftragung des ersteren von O' nach O und des letzteren von O nach P_0 ein Punkt — der Leerlaufpunkt — des Heylandkreises gewonnen werden. Die Strecken $\overline{O'O}$ und $\overline{OP_0}$ wurden der Deutlichkeit wegen verzerrt groß aufgetragen.

In der als verlustlos zu betrachtenden Maschine wird im Stillstand die gesamte aufgedrückte Phasenspannung E_{Ph} zur Erzeugung von Streuflüssen Φ_{s_1} und Φ_{s_2} verbraucht. Der primäre Kraftfluß ist

$$\Phi_1 = \frac{E_{Ph}}{4,44 f_{w_1} \cdot N_1 \cdot v_1 \cdot 10^{-8}} = \Phi_{s_1} + \Phi_{s_2}, \quad (18)$$

wo N_1 die gesamte in Reihe geschaltete Windungszahl einer Phase bedeutet. Nun ist aber der primäre Streufluß

$$\Phi_{s_1} = 0,4\pi \cdot q_1 \cdot z_1 \cdot J_{k_{i_1}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sum A_1 = c_1 \cdot J_{k_{i_1}} \cdot \sum A_1 \quad (19)$$

und der sekundäre

$$\Phi_{s_2} = 0,4\pi \cdot q_2' \cdot z_2 \cdot J_{k_{i_2}}' \cdot \sqrt{2} \cdot \sum A_2 = c_2 \cdot J_{k_{i_2}}' \cdot \sum A_2. \quad (20)$$

Hierin sind A_1 und A_2 die Leitfähigkeiten der Streuwege, bezogen auf dreiachsige Wicklung. z_1 und z_2 bedeuten die Anzahl der in Reihe geschalteten Stäbe einer Nut und q_1 bzw. q_2' die Nutenzahlen pro Pol und Ständerphase; $q_1 = \frac{Z_1}{2 \cdot p \cdot m_1}$ und $q_2' = \frac{Z_2}{2 \cdot p \cdot m_1}$. $J_{k_{i_1}}$ ist der primäre und $J_{k_{i_2}}'$ der auf die Primärseite bezogene sekundäre ideelle Kurzschlußstrom. Aus dem Sekundärstrom berechnet, ergibt sich

$$J_{k_{i_2}} = J_{k_{i_2}}' \cdot \frac{m_2 \cdot N_2 \cdot f_{w_2} \cdot p}{m_1 \cdot N_1 \cdot f_{w_1}}. \quad (21)$$

Hierin bedeutet $m_2 = \frac{Z_2}{2p}$ die Phasenzahl und $N_2 = 1$ die Zahl der in Reihe geschalteten Windungen einer Phase des Käfigankers. $J_{k_{i_2}}$ ist etwa um den halben Magnetisierungsstrom größer als der auf die Primärseite umgerechnete Sekundärstrom $J_{k_{i_2}}'$. Setzt man angenähert

$$J_{k_{i_2}} = 0,97 \cdot J_{k_{i_1}}, \quad (22)$$

so geht unter Berücksichtigung der Gleichungen (19), (20), (21) und (22) die Bedingung (18) über in

$$\begin{aligned} \Phi_1 = \Phi_{s_1} + \Phi_{s_2} &= 0,4\pi \cdot q_1 \cdot z_1 \cdot J_{k_{i_1}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sum A_1 + 0,4\pi \cdot q_2' \cdot z_2 \cdot 0,97 \cdot J_{k_{i_1}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sum A_2 \\ &= c_1 \cdot J_{k_{i_1}} \cdot \sum A_1 + c_2 \cdot J_{k_{i_1}} \cdot \sum A_2 = J_{k_{i_1}} \cdot (c_1 \cdot \sum A_1 + c_2 \cdot \sum A_2). \end{aligned} \quad (23)$$

In Gleichung (23) sind die beiden unveränderlichen Größen c_1 und c_2 in erster Linie von der baulichen Ausführung abhängig. Werden die Summen der Leitfähigkeiten der Streuwege bestimmt, so kann aus Gleichung (23) der primäre ideelle Kurzschlußstrom $J_{k_{i_1}}$ ermittelt und nach Fig. 18 im Schaubild von O nach G aufgetragen werden. G ist sodann ein zweiter Punkt des Heylandkreises.

Durch beide Punkte ist der Heylandkreis eindeutig bestimmt. Der Kreismittelpunkt liegt im Halbierungspunkt M der Strecke $\overline{P_0G}$.

Für den ideellen Kurzschlußzustand ergibt sich der Blindwiderstand aus

$$r_0 = \frac{E_{Ph}}{J_{k_{i_1}}}. \quad (24)$$

Der wirkliche Kurzschlußpunkt im Heylandkreis ist durch das Hinzukommen des

Ohmschen Kurzschlußwiderstandes $r_k = r_1 + r_2'$ festgelegt. Aus beiden Teilwerten ergibt sich der Scheinwiderstand

$$r_s = \sqrt{r_0^2 + r_k^2} \quad (25)$$

und somit der wirkliche primäre Kurzschlußstrom J_{k_1} zu

$$J_{k_1} = \frac{E_{Ph}}{r_s}, \quad (26)$$

bei einem

$$\cos \varphi_{k_1} = \frac{r_k}{r_s}. \quad (27)$$

J_{k_1} unter $\cos \varphi_{k_1}$ aufgetragen ergibt den wirklichen Kurzschlußpunkt P_k . Wird vom Punkte P_k ein Lot auf die Gerade $\overline{P_0G}$ gefällt und dieses in T im Verhältnis der Ständer- und entsprechend bezogenen Läuferwiderstände (also $\frac{r_1}{r_2'}$) geteilt, und zwar so, daß oben r_2' und unten r_1 aufgetragen wird, so läßt sich nach Verbindung von 0 mit T und Verlängerung dieser Linie bis zum Schnitt mit dem Kreise in P_∞ der Unendlichkeitspunkt ermitteln.

Für einen bestimmten Kreispunkt P kann dann in üblicher Weise ein Teil der wichtigsten Motoreigenschaften abgegriffen werden. So ist \overline{OP} der primäre, $\overline{P_0P}$ mit großer Annäherung der auf die Primärseite bezogene sekundäre Strom J_2' . Streng ist $\overline{P_0P} = \frac{J_2'}{1 + \tau_1}$, worin τ_1 eine Unveränderliche ist, die auch als Heylandscher Streufaktor bezeichnet wird. τ_1 ergibt sich aus

$$\frac{\tau_1}{1 + \tau_1} = \frac{\Phi_{s_1}(\text{Leerlauf})}{\Phi_1} \quad \text{zu} \quad \tau_1 = \frac{\Phi_{s_1}(\text{Leerlauf})}{\Phi_1 - \Phi_{s_1}(\text{Leerlauf})} = \frac{\Phi_{s_1}(\text{Leerlauf})}{\Phi'}$$

worin Φ' , der Luftspaltkraftfluß im Leerlauf, dem Durchmesser $\overline{P_0G}$ des Kreisdiagrammes entspricht. Die Ordinatenhöhe des Punktes P bis zur Linie ($L_2' = 0$) ergibt die theoretisch vom Läufer abgegebene Nutzleistung, wogegen die gesamte Höhe von P bis zur Linie ($L_1 = 0$) die vom Ständer aufgenommene Leistung darstellt. Das Stück dieses Lotes von P bis zum Schnitt mit der Geraden ($M_d' = 0$) ist gleich dem Luftspaltdrehmoment M_d' . Das vom Motor abgegebene Drehmoment M_d ist stets um das jeweilige Moment der Luft- und Lagerreibung geringer. Die Schlüpfung wird durch ein Strahlenbündel dargestellt, dessen Scheitel auf dem Kreise im Punkte G liegt. Die Punkte der Schlüpfungslinie „s in v.H.“ für Null bzw. 100 v.H. Schlüpfung sind durch den Schnitt der beiden Strahlen $\overline{GP_0}$ bzw. $\overline{GP_k}$ mit einer beliebigen Parallelen zu $\overline{GP_\infty}$ festgelegt. Wird die Schlüpfungslinie zwischen den Strahlen für Synchronismus bzw. Stillstand in hundert gleiche Teile geteilt und ein beliebiger Strahl \overline{PG} gezogen, so kann für den Punkt P auf der Schlüpfungslinie die zugehörige Schlüpfung in v.H. abgelesen werden.

Endlich können dem Heylandkreise bekanntlich auch Flüsse und Streuungen entnommen werden.

Bei Synchronismus entspricht die Streuung im Ständer der Strecke $\overline{RP_0}$; im stromlosen Läufer ist $\Phi_{s_1} = 0$, so daß der sekundäre Nutzfluß $\Phi_2 = \Phi'$ gleich dem Kreisdurchmesser $\overline{P_0G}$ wird. Φ_1 wird somit gleich $\Phi' + \Phi_{s_1} = (1 + \tau_1) \cdot \Phi'$. Hieraus kann die Strecke \overline{RG} für den Primärfluß Φ_1 zu $\Phi' \cdot (1 + \tau_1)$ bestimmt werden. R ist ein fester Punkt. Φ_1 durch \overline{RG} geteilt ergibt den Flußmaßstab.

\overline{RG} ist im ideellen Kurzschluß proportional der Summe der primären und sekundären Streuungen. Es ist hier also $\Phi_{s_1} + \Phi_{s_2} = \Phi_1$. Wird die Strecke \overline{RG} im Punkte S_i im Verhältnis der Streuflüsse Φ_{s_1} und Φ_{s_2} geteilt und um M_s mit $\frac{P_0 S_i}{2}$ ein Kreis durch die Punkte P_0 und S_i gelegt, so können weitere Motoreigenschaften abgelesen werden. P mit P_0 verbunden ergibt die Größe $\frac{J'_2}{1 + \tau_1}$, woraus der Läuferstrom bestimmt werden kann. Der Abschnitt der Strecke von P bis zum Schnitt mit dem Kreise im Punkte S ist der sekundären Streuung Φ_{s_2} proportional. Φ_{s_1} ist proportional J_1 und wird auf einer zum Primärstrom parallel verlaufenden Geraden \overline{SR} abgelesen. \overline{SG} ist dem Luftspaltkraftfluß Φ' und \overline{PG} dem Nutzfluß Φ_2 proportional.

Die Ständer- und die Läuferstreuung Φ_{s_1} bzw. Φ_{s_2} setzen sich aus der Nutenstreuung, der Stirnkopfstreuung und der Zickzackstreuung zusammen.

Die einfachste Form der Streuung ist die Nutenstreuung. Für die angenähert rechteckigen Ständernuten (s. Fig. 19) wird die Leitfähigkeit des Nutenstreuweges für 1 cm Maschinenlänge aus

$$\lambda_{n_1} = \frac{h_1}{2a_1} + \frac{h_2}{a_1} + \frac{2h_3}{a_1 + n_1} + \frac{h_4}{n_1} \quad (28)$$

berechnet. Für die gewöhnlich halbgeschlossenen, runden Läufernuten ist die spezifische Leitfähigkeit, d. h. für 1 cm Maschinenlänge,

$$\lambda = 0,623 + \frac{h_4}{n_2} \quad (29)$$

von den Abmessungen der eigentlichen Nut unabhängig. Hieraus ergibt sich — je Polpaar berechnet —

die gesamte Leitfähigkeit der Nutenstreuung für die ganze Maschinenlänge l_e im Ständer

$$A_{n_1} = 2 \cdot \frac{\lambda_{n_1}}{q_1 \cdot f_{w_1}} \cdot l_e \quad (30)$$

und im Läufer

$$A_{n_2} = 2 \cdot \frac{\lambda_{n_2}}{q'_2} l_e. \quad (31)$$

Die primäre Nutenstreuung ist in allen Nuten gleich groß und mit allen Leitern verkettet. Aus diesem Grunde erscheint in der Gleichung (30) der Wicklungsfaktor f_{w_1} . Die sekundäre Nutenstreuung ist im Käfiganker für jede Nut verschieden, eine Verkettung mit allen Leitern der Primärwicklung liegt nicht vor, so daß der Wicklungsfaktor, und zwar f_{w_1} in Gleichung, (31) wegfällt¹⁾.

Eine zweite Art ist die Stirnstreuung, deren Leitfähigkeit für dreiphasige Wicklung und je Polpaar allgemein durch die Gleichung

$$A_s = 2 \cdot (0,7 l_s - 0,4 \tau_p) \cdot K \quad (32)$$

¹⁾ Auf eine eingehende Behandlung dieser von Kloss untersuchten Verhältnisse soll an dieser Stelle verzichtet werden. Professor Kloss beabsichtigt, diese Frage in einer späteren Veröffentlichung besonders zu behandeln.

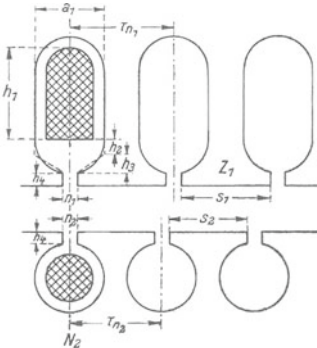


Fig. 19.

bestimmt ist. Hierin bedeutet l_s die gestreckte Länge einer aufgeschnitten gedachten Spule und τ_p' die in Mitte Nut gemessene Polteilung. K ist eine Zahl, durch welche der Einfluß der Läuferbauart auf diese Streuung Berücksichtigung findet. Sie beträgt nach Kloss bei Käfigankern mit weit abstehenden Ringen 0,8 und bei solchen mit enganliegenden Ringen 0,9 bis 1,0.

Die dritte — die Zickzackstreuung — ist maßgebend für die Erscheinung des Schleichens.

Aus den Zahnköpfen treten stets Streulinien aus, welche bei Maschinen, deren doppelter Luftspalt größer als eine einfache Nutenöffnung ist, wieder in den benachbarten Zahn eintreten, ohne den Luftspalt zweimal zu durchdringen und den anderen Maschinenteil zu berühren. Zu dieser Maschinengattung gehören hauptsächlich die Synchronmaschinen. Bei Asynchronmaschinen wird der Luftspalt sehr gering gehalten, so daß ein großer Teil dieser Streuung nach dem Durchdringen des Luftspaltes erst ein Stück der gegenüberliegenden Maschinenhälfte durchfließt, bevor er an einer beliebigen, dauernd wechselnden, aber periodisch wiederkehrenden Stelle in den Ursprungteil zurücktritt. In diesem Falle geht die Zahnkopfstreuung in die Zickzackstreuung über. Steht der Mitte eines Ständerzahnes von der Breite s_1 eine Läufernut der Breite n_2 gegenüber, so erreicht die Leitfähigkeit der Zickzackstreuung ihren Höchstwert. Es ist

$$\lambda_{z_{\max}} = \frac{s_1 - n_2}{2 \cdot 2 \cdot \delta} = \frac{s_1 - n_2}{4 \cdot \delta}. \quad (33)$$

Stehen sich dagegen, wie in der Fig. 19 in N_2 , 2 Nuten gegenüber, so ist

$$\lambda_{z_{\min}} = 0. \quad (34)$$

Aus beiden Grenzbedingungen ergibt sich der Mittelwert

$$\lambda_{z_m} = \frac{s_1 - n_2}{2 \cdot 4 \cdot \delta} = \frac{s_1 - n_2}{8 \cdot \delta}. \quad (35)$$

Die Zickzackstreuung wird angenähert zur Hälfte vom Ständer und zur Hälfte vom Läufer bestritten, so daß sich für den Ständer

$$\lambda_{z_1} = \frac{s_2 - n_1}{2 \cdot 8 \cdot \delta \cdot f_{w_1}} = \frac{s_2 - n_1}{16 \cdot \delta \cdot f_{w_1}} \quad (36)$$

ergibt. Die primäre Zickzackstreuung ist ähnlich der Nutenstreuung mit allen Ständerleitern verkettet, so daß in Gleichung (36) wieder der Wicklungsfaktor erscheinen muß. Für den Käfiganker wird einfach

$$\lambda_{z_2} = \frac{s_1 - n_2}{16 \cdot \delta}. \quad (37)$$

Aus den Gleichungen (36) und (37) läßt sich die gesamte Leitfähigkeit der Zickzackstreuung pro Polpaar und einem Übersetzungsverhältnis 1:1 aus

$$A_z = \left[2 \cdot \frac{s_2 - n_1}{q_1 \cdot f_{w_1}} + 2 \cdot \frac{s_1 - n_2}{q'_2} \right] \cdot \frac{l_e}{16 \cdot \delta} \quad (38)$$

bestimmen.

Nun ist

$$\sum A_1 = A_{n_1} + A_{s_1} + A_{z_1} \quad (39)$$

und

$$\sum A_2 = A_{n_2} + A_{z_2}. \quad (40)$$

Werden diese Werte in Gleichung (23) eingesetzt, so kann jetzt J_{k_i} aus Φ_1 ermittelt werden.

Nun wieder zum Heylandkreis zurückkehrend.

Der in Fig. 18 dargestellte Strahl $\overline{P_0P}$ steht mit dem einen Endpunkte in P_0 auf dem Kreisbogen $\widehat{P_0G}$ fest, während der andere Punkt P auf diesem Kreise wandert. Jeder Punkt der Geraden, jede Begrenzung eines proportionalen Teilbetrages von ihr muß einen ähnlichen Linienzug beschreiben. Im ideellen Kurzschluß fällt $\overline{P_0P}$ mit $\overline{P_0G}$ zusammen; der sekundäre Streufluß wird $= \overline{S_iG}$. Wird diese Strecke so aufgeteilt, daß $\overline{S_iZ_2}$ dem Anteil der sekundären Zickzackstreuung entspricht, so ist der geometrische Ort für die Punkte Z_2 ebenfalls ein Kreis. Für einen beliebigen Punkt P wird Φ_{z_2} durch die Strecke $\overline{SZ_2}$ dargestellt und ist bei Synchronismus gleich null.

Φ_{z_1} ist proportional J_1 und wird für den ideellen Kurzschluß durch $\overline{RS_i}$ und für Synchronismus durch $\overline{RP_0}$ dargestellt. Für den ideellen Kurzschluß kann, ähnlich wie bei der sekundären Zickzackstreuung, die primäre Zickzackstreuung als Teilbetrag der Gesamtstreuung $\overline{RS_i}$ von S_i nach Z_{1_i} aufgetragen werden. Bei Synchronismus ist der von $\overline{RP_0}$ auf die Zickzackstreuung entfallende Teilbetrag von P_0 nach U einzutragen.

Der eine Endpunkt des Strahles $\overline{RS_i}$, der die Veränderlichkeit der primären Streuung Φ_{i_1} wiedergibt, bewegt sich auf einem Kreise von S_i nach P_0 ; jede Begrenzung eines proportionalen Teilbetrages dieses Strahles beschreibt einen ähnlichen Linienzug, d. h. einen Kreis. Wird demgemäß um M_{z_1} mit $\frac{\overline{UZ_{1_i}}}{2}$ als Radius ein Kreis geschlagen, so ist dieser der geometrische Ort für Z_1 . Es ist dann die primäre Zickzackstreuung für einen beliebigen Punkt P gleich $\overline{SZ_1}$.

Durch Einführung der beiden um M_{z_1} und M_{z_2} als Mittelpunkte gezeichneten Kreise in den Heylandkreis wird die Ermittlung der Zickzackstreuungen wesentlich vereinfacht. Für einen beliebigen Punkt P ist das innerhalb der enggestrichelten mit „ Φ_{z_2} “ bezeichneten Kreissichel liegende Stück der sekundären Streuung gleich der sekundären Zickzackstreuung Φ_{z_2} . Die Größe der primären Zickzackstreuung Φ_{z_1} wird von der weitgestrichelten Kreissichel „ Φ_{z_1} “ auf der von R aus gemessenen Primärstreuung abgeschnitten. Die beiden Einzelstreuungen setzen sich vektoriell zusammen und ergeben dann die gesamte Zickzackstreuung Φ_z .

Nach dem angegebenen Verfahren lassen sich leicht sämtliche Flüsse getrennt in Abhängigkeit von der Schlüpfung ermitteln. In den Fig. 11, 12 und 13 sind der Luftspaltfluß Φ' , der Sekundärfluß Φ_2 , ferner die Einzelwerte und die Summe der Zickzackstreuungen Φ_{z_1} , Φ_{z_2} und Φ_z dargestellt.

Mit Hilfe dieser Schaulinien läßt sich für jede beliebige Umlaufzahl der Maßstab der Treppendiagramme und der Überschußflächen berechnen und die absolute Größe der Zusatzfelder ermitteln. Am meisten interessieren die Verhältnisse bei den Satteldrehzahlen. Streng genommen müßten hierbei die Zustände im Gebiet der großen Sattlungen ins Auge gefaßt werden. Da aber alle Flußlinien in der Nähe des Stillstandes stets einen sehr flachen Verlauf haben, so kann sich der Einfachheit halber die Untersuchung auf den Kurzschluß allein erstrecken. Die hierbei in Erscheinung tretenden Abweichungen betragen beim durchgerechneten Motor weniger als ± 3 v. H.

Je geringer im Verhältnis zum Nutzfluß der Zusatzfluß ist, desto größer ist die Aussicht, daß nur schwache Sattel entstehen und störungsfreies Anlaufen stattfindet. Natürlich dürfen hierbei weder die Frequenz der Schwankungen des Zusatzfeldes, noch die Größe dieser Schwankungen oder weitere Einzelheiten eine Änderung des Verhaltens in ungünstigem Sinne bewirken. Wie die Verhältnisse hier liegen, ist noch nicht klar zu übersehen.

Unter Zugrundelegung der in vorliegender Arbeit erwähnten Gesichtspunkte und Rechnungsverfahren wurde eine Durchrechnung des Versuchsmotors und der vier angenommenen Läufer durchgeführt und die Ergebnisse für $n = 0$ in der Zahlentafel III zusammengestellt.

Zahlentafel III.

(Bemerkung: Die fettgedruckten Werte gelten für die untersuchte Maschine.)

Nr.	Bezeichnung	L. VI	L. IV	L. VII	L. I	L. V	L. II	L. III	Ständer	
1	Zähnezahl	29	33	36	40	47	57	63	36	
2	Nutenöffnung mm	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	2,5	
3	Zahnbreite mm	16,16	14,13	12,98	11,55	9,74	7,93	7,13	11,00	
4	Läufernutendurchmesser . . mm	7,2	6,8	6,6	6,2	5,6	4,7	4,2	—	
5	Nutzfluß $\Phi_2 10^3$ cgs.	205	210	217	230	246	270	281	—	
6	Zickzackstreuung $\Phi_z 10^3$ cgs. . . .	144	130	122	113	98	81	72	—	
7	In den Läufer über $2r_p$ ein- bzw. austretender mittlerer Zusatzfluß $\Phi_{Zu_2m} 10^3$ cgs.	42	45	43	40	41	42	41	Mittelwert 42	
8	$100 \cdot \Phi_{Zu_2m} / \Phi_2$	20,5	21,4	19,8	17,4	16,7	15,5	14,6	kein klares Bild	
9	Wirklicher primärer Kurzschlußstrom J_{k_1} Amp.	{ gerechnet	41	43	45	47	50	47	52	—
		{ gemessen	—	—	—	46	—	40	49	—
10	$\cos \varphi_k$	{ gerechnet ¹⁾	0,68	0,71	0,73	0,75	0,78	0,82	0,84	—
		{ gemessen	—	—	—	0,73	—	0,80	0,72	—

Die Zusammenstellung in Zahlentafel III läßt für den Kurzschlußstrom eine gute Übereinstimmung der gemessenen mit den berechneten Werten erkennen. Die gemessenen Ströme sind durchweg etwas kleiner als die gerechneten. Die Rechnung wurde für gleichbleibende EMK durchgeführt. Beim Versuch nimmt sie jedoch mit wachsender Belastung ab. Das gerechnete $\cos \varphi_k$ stellt die Phasenverschiebung zwischen Primärstrom und Klemmenspannung dar. Die zusätzlichen Verluste haben hierbei keine Berücksichtigung gefunden. Die Abweichung des gemessenen $\cos \varphi_k$ zwischen Primärstrom und Klemmenspannung ist nicht groß. Die in den Spalten 5, 6, 7 und 8 aufgeführten Werte lassen keine Bevorzugung eines bestimmten Ankers erkennen.

Eine genaue, von Fall zu Fall anzustellende Vorausberechnung dürfte erst dann möglich sein, wenn es gelingt, mit Hilfe des aus der Zickzackstreuung abgeleiteten, auf den Läufer wirkenden mittleren Zusatzflusses Φ_{Zu_2m} , der mittleren Anzahl Zusatzpole und der Frequenz der Zusatzfelder für jede Sattelbildung mit einfachen Mitteln einen neuen Heylandkreis zu zeichnen, aus dem sich dann das zusätzliche Drehmoment bestimmen ließe.

¹⁾ Ohne zusätzliche Verluste.

Jedenfalls ist es unbedingt nötig, nicht nur die Zickzackstreuung klein zu halten und den Hauptfluß groß zu machen, sondern es muß der schädliche Fluß der Zusatzpole nach Möglichkeit verringert werden. Hierzu ist nach Kloss erforderlich, daß im Treppendiagramm die aneinanderstoßenden wirksamen kleinen Überschußflächen möglichst gleich groß werden, in welchem Falle überhaupt nur geringe Teile der Zickzackstreuung in den Läufer eintreten können. Beides kann durch geeignete Wahl der Nutenöffnungen und besonders der Zähnezahle stark beeinflußt werden. Es wächst durch Verringern der Nutenöffnungen [Gleichungen (28) und (29)] beispielsweise nicht nur die Nuten-, sondern auch die Zickzackstreuung [Gleichung (35)]. Der Zusatzfluß braucht aber hiermit nicht zu wachsen, denn bei einem in bezug auf die Nutenöffnungen verhältnismäßig großen Luftspalt geht die Zickzackstreuung in die Zahnkopfstreuung über, die aber für das Schleichen bedeutungslos ist. Dieser Fall kommt beim Asynchronmotor kaum vor, denn bei ihm wird der Luftspalt stets möglichst klein gehalten. Weit wichtiger und fühlbarer ist eine Änderung der Zähnezahleverhältnisse, über deren Einfluß die Treppendiagramme Aufschluß erteilen.

Schon bei den ersten Entwurfsannahmen empfiehlt es sich, Rücksicht auf eine Reihe ungünstiger Zähneverhältnisse zu nehmen.

So zeigen vielfache Erfahrungen, daß eine gleiche oder angenähert gleiche Zähnezahle sowohl im Läufer als auch im Ständer schädlich wirkt. Im ersteren Falle „klebt“ der Läufer und läuft überhaupt nicht an; im anderen Falle neigt er zum „Schleichen“. Letztere Erscheinung findet eine Erklärung durch die Art des Auftretens der Zickzackstreuung. Bei einer fast gleichen oder mit großen gemeinschaftlichen Teilern behafteten Zahl der Ständer- und Läuferzähne wird durch die an mehreren Stellen gleichzeitige und gleichmäßige Änderung der Zickzackstreuung die Ausbildung starker Zusatzfelder begünstigt. Aus diesem Grunde sind die Zähnezahle beider Maschinenhälften von vornherein so zu wählen, daß sie gegenseitig stark abweichen und möglichst keinen gemeinschaftlichen Teiler besitzen, also relative Primzahle sind. Unter Berücksichtigung der Nutenöffnungen dürfen gleichzeitig stets nur wenige Lücken zur Überdeckung gelangen. Unter diesen Umständen werden bei einer allerdings größeren Zusatzpolpaarzahl örtlich nur kleine Zusatzfelder entstehen. Eine Vergrößerung der Anzahl der Zusatzpolpaare ist nicht gefahrdrohend.

Eine unter den geschilderten Gesichtspunkten angestellte Betrachtung des untersuchten Motors zeigt, daß sich die Zähnezahle verhalten beim Einbau

des Läufers	L. VI	wie	$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{36}{29} = \frac{36}{29}$,	also günstig,
„	„	L. IV	„ $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{36}{33} = \frac{12}{11}$,	also ungünstig,
„	„	L. VII	„ $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{36}{36} = 1$,	also ungünstig (klebt),
„	„	L. I	„ $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{36}{40} = \frac{9}{10}$,	also ungünstig (schleicht),
„	„	L. V	„ $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{36}{47} = \frac{36}{47}$,	also günstig,
„	„	L. II	„ $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{36}{57} = \frac{12}{19}$,	also günstig (läuft gut an),
„	„	L. III	„ $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{36}{63} = \frac{4}{7}$,	also ungünstig (schleicht).

Tritt bei bereits ausgeführten Motoren Schleichen ein, so kann beim Vorhandensein kleiner Sattelbildungen schon durch Abdrehen der Kurzschlußringe, also durch Erhöhung des Läuferwiderstandes, oder Vergrößerung des Luftspaltes, d. h. Um-

wandlung eines Teiles der Zickzackstreuung in die unschädlichere Form der Zahnkopfstreuung, die unliebsame Erscheinung behoben werden. Bei großen, ausgedehnten Sattlungen hilft dagegen nur das altbekannte Radikalmittel — Aufschneiden der Kurzschlußringe an je p Stellen, die um τ_p gegeneinander versetzt sind. Es findet hierbei eine Umwandlung des Käfigankers in einen Phasenanker statt. Dem Läuferstrom werden jetzt bestimmte Bahnen vorgeschrieben; das Übersetzungsverhältnis erfährt eine Änderung. Das Hochlaufmoment, die Läufererwärmung und die Schlüpfung nehmen infolgedessen andere Werte an, die unter Umständen den abgeänderten Motor für einen bestimmten Zweck unbrauchbar erscheinen lassen können.

Um die Schleichmöglichkeit bereits beim Entwurf auszuschneiden, wird von vielen Autoren als einzig sicher die Ausführung schräger Läuferfalten empfohlen. Dieses Verfahren macht den Zusammenbau schwerfällig, und stellt wegen der entstehenden scharfen Zackungen an den Wänden der Falten große mechanische Anforderungen an die Wicklungsisolierung.

Zusammenfassung und Schluß.

Entgegen den bekannten Vorzügen baulicher und wirtschaftlicher Natur haftet den Käfigankermotoren oft der Nachteil eines unsicheren Anlaufes an. Die hierbei auftretenden Störungen können derartige Bedeutung erlangen, daß der Motor auch im unbelasteten Zustand nicht auf die durch Frequenz und Polpaare festgelegte Umlaufzahl kommt, sondern mit großer Beharrlichkeit mit ganz geringer Geschwindigkeit läuft. Diese Erscheinung, die mit Schleichen bezeichnet wird, kann von starken Erschütterungen und lautem Brummen begleitet sein.

Das Schleichen wird durch eine eigentümliche Beeinflussung des mit der Schlüpfung veränderlichen Drehmomentes bedingt, die darin besteht, daß sich dem eigentlichen Hauptmoment zusätzliche Drehmomente überlagern. Hierdurch entstehen an bestimmten Stellen der Drehmomentenlinie Sattelbildungen, die gegebenenfalls das Motordrehmoment derart absenken, daß es kleiner als das entgegenwirkende Moment der Luft- und Lagerreibung wird oder sogar negative Werte annimmt. Es kann dann eine weitere Beschleunigung der drehenden Massen nicht stattfinden, und der Motor ist gezwungen, an dieser Stelle dauernd, d. h. mit kleiner Drehzahl zu laufen. Nicht besonders hierfür berechnete Motoren müssen infolge bedeutender Stromaufnahme durch Verbrennen zugrunde gehen.

Als Ursache des Entstehens überlagerter Drehmomente wurden von Arnold und Kloss und aufbauend auf die Untersuchungen des letzteren bzw. diese bestätigend auch vom Verfasser zusätzliche Flüsse von verschiedener Herkunft erkannt, die in den kurzgeschlossenen Stäben des Läufers EMK-e beliebiger Frequenz hervorrufen, welche zum Ausgleich kommen. In einer Phasenwicklung finden zusätzliche EMK-e keinen Ausgleich, so daß zusätzliche Drehmomente nicht entwickelt werden. Nur Käfigankermotoren weisen die angeführten, hierfür nötigen Vorbedingungen zum Schleichen auf.

Ein Teil der zusätzlichen Felder kann in einfacher Weise durch Abweichung der aufgedrückten Spannung von der reinen Sinusform bedingt werden. Arnold zerlegt die Spannungslinie in eine Grund- und eine Reihe von Oberwellen, ohne jedoch einen Unterschied zwischen örtlichen und zeitlichen Oberwellen zu machen. Nur die letzteren sind in der Lage zusätzliche EMK-e im Läufer zu erzeugen. Arnolds

Betrachtungen stellen mehr eine allgemeine Beurteilung dar, ohne auf die individuellen Einzelheiten jeder einzelnen Maschine einzugehen. Die wichtigsten Ursachen für das schlechte Anlassen sind durch die Arnoldsche Lehre unberücksichtigt geblieben.

Punga sucht schon, einen großen Schritt weiterkommend, eine Erklärung des Schleichens in Oberfeldern, die durch Verschiedenheit der magnetischen Leitfähigkeit, durch die Nutenöffnungen und die Sättigung der Zahnspitze hervorgerufen werden¹⁾.

Tiefer in den Gegenstand eindringend, zeigt Kloss, daß die im Luftspalt durch das örtlich nicht genaue Zusammenfallen der gegeneinanderwirkenden Ständer- und Läuferamperewindungsdrücke entstehende Zickzackstreuung Anlaß zu weiteren Sattelbildungen gibt.

Dadurch, daß die Zahl der in einen Zahn ein- bzw. austretenden Zickzackstreuungslinien nicht gleich groß ist, entstehen Zusatzflüsse, die von den gegebenen Verhältnissen der Maschine abhängig und als kleine Zusatzpole zu betrachten sind. Die zusätzliche Polpaarzahl führt zu einer, ihre räumliche Bewegung zu einer anderen Sattelbildung.

Die Klosssche Lehre wird erweitert und findet Bestätigung durch ausgedehnte Versuche an einem Motor mit drei verschieden genuteten Käfigankern. Es werden einige Gleichungen abgeleitet, mit deren Hilfe nach vorhergehender Ermittlung des Zusatzfeldes die Vorausberechnung der synchronen Umlaufzahl mehrerer Drehmomentensattel möglich ist. Die Übereinstimmung von Rechnung und Messung und die Erfassung der Ursache kann als gut bezeichnet werden. Den Einfluß der Zusatzfelder auf die Größe der Sattelspitzenwerte zu ermitteln ist nicht gelungen.

Die Versuche wurden durch stufenweises Abbremsen des Motors unter gleichzeitiger Ablesung des Nutzdrehmomentes, des Ständerstromes, der Spannungen und sonstiger Werte bis nahezu 140 v. H. Schlüpfung ausgedehnt.

Während im Motorgebiet der Maschine die Ursache der Sattelbildungen unmittelbar durch mathematische Überlegungen gewonnen und für die wichtigsten Abweichungen vom üblichen Verlauf der Drehmomentenlinie in der Zusatzfeldbildung und somit der Zickzackstreuung erkannt wurde, ließ sich bei den untersuchten Motoren der bei etwa — 100 Uml./Min. liegende bedeutende Sattel nur mittelbar durch Beobachtung der sog. „Differenzspannung“ erklären und gleichfalls auf die Zickzackstreuung zurückführen.

Mit Differenzspannung wird der Betrag bezeichnet, um welchen die gemessene Phasenspannung größer ist als der aus der gleichfalls gemessenen verketteten Spannung berechnete Wert. Die Entstehung der Differenzspannung, die eine Zusatzspannung ist, wird auf das Auftreten der von den Zusatzfeldern erzeugten zusätzlichen Läuferströme zurückgeführt. Bedeutende Beträge nimmt die Differenzspannung an, wenn die Zähnezahl des Läufers durch $2p$ teilbar ist. In diesem Falle wirkt die $2p$ mal symmetrisch wiederkehrende Zusatzfeldverteilung wie das Polrad einer Synchronmaschine generatorisch auf den Ständer und erzeugt in dessen Wicklung übergelagerte zusätzliche EMK-e höherer Ordnung, die sich nicht gegenseitig aufheben und bei Sternschaltung der Phasen nur zum Teil einen Ausgleich finden. Der andere Teil macht sich erst beim Vergleich der gemessenen Phasenspannung mit der aus dem verketteten Wert berechneten bemerkbar. Die Differenzspannung ändert sich gesetzmäßig mit der Schlüpfung etwa

¹⁾ Nach Fertigstellung dieser Arbeit, nachdem sie bereits mehr als ein Jahr der Technischen Hochschule Berlin vorgelegen hatte, wurden die Stielschen Forschungsergebnisse bekannt. Stiel schreibt, ähnlich Punga, die zum Schleichen führende Beeinflussung des Drehmomentes in erster Linie dem Ständerzahnfeld zu, das er als Nutungsfeld bezeichnet.

in Art der sekundären Leistungslinie. Die Differenzspannung ist von den Zusatzfeldern bzw. von der Zickzackstreuung abhängig, deren jeweilige Größe durch die Maschinenströme bestimmt wird. Bewegt sich der Läufer annähernd synchron mit einem durch die Zickzackstreuung bedingten Zusatzfelde, so verschwindet im Läufer der betreffende Zusatzstrom. Der Läuferstrom nimmt ab und die Linie der Differenzspannung weist an dieser Stelle eine Absenkung oder einen Sattel auf. Aus dem Vorhandensein eines solchen Sattels in der gemessenen Differenzspannungslinie kann nach dieser Feststellung umgekehrt auf die Entstehungsursache des Drehmomentensattels zurückgeschlossen werden.

Eine volle Erklärung der äußerst verwickelten Erscheinung ist in der vorliegenden Arbeit nicht erreicht, jedoch gelang es, zur Kenntnis des Schleichens einen größeren Beitrag zu liefern.

Die umfassende Vorausberechnung eines einwandfrei anlaufenden Motors dürfte erst dann ermöglicht werden, wenn es mit Hilfe der zusätzlichen Läuferflüsse gelingt, „zusätzliche Heylandkreise“ zu zeichnen.

Über Kettenleiter.¹⁾

Von
Hans Riegger.

Mit 21 Textfiguren.

Mitteilung aus dem Forschungs-Laboratorium Siemensstadt.

Eingegangen am 25. August 1921.

§ 1. Einleitung. Will man aus einem Spektrum von Wellen bestimmte Wellen bevorzugen, so benutzt man allgemein resonierende Systeme. Als Maß für die Auswahl dient die Resonanzbreite. Da dieselbe, gemessen in prozentueller Verstimmung, bei ungedämpften Wellen proportional dem Dekrement ist, lassen sich alle Resonanzkurven eines einwelligen Systems auf eine gemeinschaftliche Form bringen, wenn man als Abszisse nicht die prozentuelle Verstimmung x , sondern das

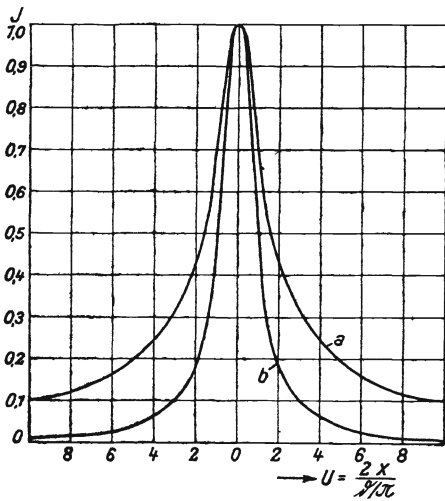


Fig. 1. Ungedämpfte Wellen.

Verhältnis von x zum Dekrement δ aufträgt (vgl. Fig. 1a). Die Kurve ist an der Resonanzstelle spitz und verläuft bei größerer Verstimmung recht flach. Kurven, die an der Resonanzstelle nahezu ebenso breit sind, aber mit der Verstimmung viel rascher fallen, erhält man durch Hintereinanderschalten mehrerer Schwinger (Fig. 1 b gilt für zwei Systeme). Bezeichnen wir bei Resonanz den Wert der Ordinate mit 1, so ergibt sich für sehr lose Kopplung die Resonanzkurve der in Serie geschalteten Schwinger durch Multiplikation der Ordinaten der Einzelkurven²⁾. Dieses Rechenverfahren ist annähernd gültig bis

zu einer Kopplung $K = \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2}{2\pi^2}}$. Für

noch engere Kopplung verbreitert sich die Kurve an der Resonanzstelle sehr stark, während sie in den unteren Teilen zunächst nahezu gleichbleibt, dann tritt in der Mitte eine Senkung auf und man erhält schließlich die beiden voneinander getrennten Maxima der Kopplungswellen. Bei n hintereinander geschalteten Schwingern ist die Siebwirkung naturgemäß immer größer, aber das System wird bei enger Kopplung n wellig und die Form der Resonanzkurve ist schwer zu übersehen.

Für kontinuierliche Wellen hat K. W. Wagner³⁾, auf dessen Arbeiten fußend das mehrfache System zu Siebzwecken in letzter Zeit in Aufschwung kam, nach der Methode der Leitungstheorie die Lösung des n fachen Systems gegeben. Sie stellt

¹⁾ Nach einem Vortrag im Wernerwerk vom 1. Juli 1921.

²⁾ J. Zenneck, Lehrbuch für drahtlose Telegraphie, 2. Auflage, S. 384.

³⁾ K. W. Wagner, Archiv für Elektrotechnik, 3, 315 (1915), 61 (1919).

sich in einfacher Weise durch hyperbolische Funktionen einer komplexen GröÙe dar; die Resonanzkurve ergibt sich unter Berücksichtigung des Wellenwiderstandes. Wagner nennt das System einen Kettenleiter und unterscheidet einzelne Glieder desselben. Der Leitungstheorie charakteristisch ist die Unterscheidung in Kettenleiter erster und zweiter Art, je nach den Anfangs- und Endbedingungen. Ein Vorzug dieser Theorie ist, daß die Lösung für eine große Gliederzahl fast ebenso einfach ist wie für wenige, wenn die Kette aus lauter gleichartigen Gliedern besteht, d. h. homogen ist, wobei allerdings der Übergang zu reellen Werten unter Berücksichtigung der Ohmschen Widerstände viel Rechenarbeit erfordert. Die Diskussion führt bei Vernachlässigung der Ohmschen Widerstände auf eine einfache Definition der Lochbreite, in der nur die Kopplung vorkommt. Man kann von vornherein sagen, daß diese Definition bei loser Kopplung keinen praktischen Wert hat, da in diesem Falle die Resonanzkurve ausschließlich durch das Dekrement bedingt ist.

Die Lösung des n -fachen Systems bei kontinuierlichen Wellen läßt sich indes auch nach der gewöhnlichen Schwingungstheorie geben. Die Methode ist ja bekannt, und es fragt sich nur, ob die Endformeln für Berechnungszwecke genügend einfach sind. Im folgenden, wo dieser Weg eingeschlagen wird, wird sich zeigen, daß man das Resultat durch Rekursionsformeln bequem ausdrücken kann, und daß namentlich der Übergang von der komplexen zur reellen Form leicht ist. Der Wellenwiderstand steckt dabei bereits in den Endformeln. Als Vorzug dieser Betrachtungsweise möchte ich es ansehen, daß die Berechnung für beliebig inhomogene Ketten nahezu ebenso schnell geht, wie für homogene. Die Einteilung in Kettenleiter erster und zweiter Art fällt weg. Dagegen wird sich zeigen, daß nach der Form der Resonanzkurven zweckmäßig unterschieden wird in Ketten mit rein magnetischer bzw. rein elektrischer Kopplung und in solche mit gemischter Kopplung, in denen elektrische und magnetische Kopplung nahezu gleich groß sind. Für die Rechnung und die Endformeln fällt diese Unterscheidung allerdings weg.

Die Ohmsche Kopplung soll gegenüber den beiden anderen vernachlässigt werden, d. h. also, die Resultate gelten nur, wenn dies der Fall ist.

Die ganze Darstellung zerfällt in zwei Teile, von denen der erste nur die Ableitung der Formeln enthält, während der zweite sich mit der praktischen Auswertung derselben befaßt. Es wird im letzteren Falle besonderer Wert darauf gelegt werden, Kurven zu finden, deren Form sich der rechteckigen Resonanzkurve möglichst nähert. Sodann wird der Anschluß des Kettenleiters an eine normale Telefonleitung behandelt werden.

I. Teil.

Die Ausgangsgleichungen.

§ 2. Die Differentialgleichungen für die n -fache Kette seien in folgender Form benutzt:

$$(1) \begin{cases} \frac{d^2 J_1}{dt^2} + 2 \delta_1 \frac{dJ_1}{dt} + \omega_1^2 J_1 = -\left\{ \gamma_{10} \omega_1^2 J_0 + \alpha_{10} \frac{d^2 J_0}{dt^2} \right\} - \left\{ \gamma_{12} \omega_1^2 J_2 + \alpha_{12} \frac{d^2 J_2}{dt^2} \right\}, \\ \frac{d^2 J_2}{dt^2} + 2 \delta_2 \frac{dJ_2}{dt} + \omega_2^2 J_2 = -\left\{ \gamma_{21} \omega_2^2 J_1 + \alpha_{21} \frac{d^2 J_1}{dt^2} \right\} - \left\{ \gamma_{23} \omega_2^2 J_3 + \alpha_{23} \frac{d^2 J_3}{dt^2} \right\}, \\ \dots \\ \frac{d^2 J_n}{dt^2} + 2 \delta_n \frac{dJ_n}{dt} + \omega_n^2 J_n = -\left\{ \gamma_{n n-1} \cdot \omega_n^2 J_{n-1} + \alpha_{n n-1} \cdot \frac{d^2 J_{n-1}}{dt^2} \right\}. \end{cases}$$

Darin ist:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} 2\delta_1 = \frac{\mathfrak{R}_1}{\Omega_1} \text{ usw.} & \\ \omega_1^2 = \frac{1}{\Omega_1 \mathfrak{C}_1} \text{ usw.} & \\ \gamma_{10} = \frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_{10}} & \gamma_{12} = \frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_{12}}, \\ \gamma_{21} = \frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{C}_{21}} & \gamma_{23} = \frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{C}_{23}} \text{ usw.} \\ \kappa_{10} = \frac{\Omega_{10}}{\Omega_1} & \kappa_{12} = \frac{\Omega_{12}}{\Omega_1} \\ \kappa_{21} = \frac{\Omega_{21}}{\Omega_2} & \kappa_{23} = \frac{\Omega_{23}}{\Omega_2} \text{ usw.} \end{array} \right.$$

Die \mathfrak{R} sind Ohmsche Widerstände, die Ω Selbstinduktionen und die \mathfrak{C} Kapazitäten, mit Doppelindex gegenseitige Selbstinduktionen bzw. Kapazitäten.

Wir setzen:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} J_0 = \mathfrak{J}_0 e^{j\omega t} & \mathfrak{J}_0 = J_{00} e^{j\varphi_0}, \\ J_1 = \mathfrak{J}_1 e^{j\omega t} & \text{und } \mathfrak{J}_1 = J_{10} e^{j\varphi_1}, \\ J_2 = \mathfrak{J}_2 e^{j\omega t} & \mathfrak{J}_2 = J_{20} e^{j\varphi_2}, \\ \dots & \dots \\ J_n = \mathfrak{J}_n e^{j\omega t} & \mathfrak{J}_n = J_{n0} e^{j\varphi_n}. \end{array} \right.$$

Da die Anfangsphase φ_0 gleichgütig ist, können wir \mathfrak{J}_0 als reell betrachten. Es soll unabhängig von ω sein; das bedeutet, daß die elektromotorische Kraft proportional zu ω gesetzt wird. Man erhält dabei für die Stromresonanzkurve symmetrischere Formen. Betrachtet man — wie gewöhnlich — die elektromotorische Kraft als unabhängig von der Frequenz, so müssen die späteren Werte für den Strom einfach mit $(1 + x)$ multipliziert werden. Die elektromotorische Kraft soll in einem aperiodischen Kreise oder auch in einer Fernleitung liegen. Die Kopplung damit ist in den dadurch veränderten Werten von \mathfrak{R}_1 , Ω_1 und \mathfrak{C}_1 zu berücksichtigen. Liegt die elektromotorische Kraft im ersten Gliede selber, so ist: $J_0 = \frac{E_0}{\omega \Omega_1}$.

Es wird nun:

$$(4) \quad \left| \begin{array}{l} 1. \quad \mathfrak{J}_1 (\omega_1^2 - \omega^2 + 2\delta_1 \omega j) = (\kappa_{10} \omega^2 - \gamma_{10} \omega_1^2) \mathfrak{J}_0 + (\kappa_{12} \omega^2 - \gamma_{12} \omega_1^2) \mathfrak{J}_1 \\ 2. \quad \mathfrak{J}_2 (\omega_2^2 - \omega^2 + 2\delta_2 \omega j) = (\kappa_{21} \omega^2 - \gamma_{21} \omega_1^2) \mathfrak{J}_1 + (\kappa_{23} \omega^2 - \gamma_{23} \omega_2^2) \mathfrak{J}_2 \\ \dots \\ n) \quad \mathfrak{J}_n (\omega_n^2 - \omega^2 + 2\delta_n \omega j) = (\kappa_{n,n-1} \omega^2 - \gamma_{n,n-1} \omega_n^2) \mathfrak{J}_{n-1} \end{array} \right|$$

Die Gleichungen sollen mit ω^2 durchdividiert und es soll die prozentuelle Verstimmung x und das logarithmische Dekrement δ eingeführt werden. Es sei:

zahl statt der Rekursionsformel die aufgelöste Formel berechnen. Indes ist der Gebrauch der Rekursionsformel bei größerer Gliederzahl vorzuziehen

Aus 11b gelangt man beim Übergang zu reellen Werten noch zu einer besonders für Rechnungszwecke inhomogener Ketten brauchbaren Formel, nämlich zu:

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_n = N_{n-1} \cdot \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \\ \text{oder:} \\ N_n = \sqrt{(\alpha_1^2 + \beta_1^2) (\alpha_2^2 + \beta_2^2) \dots (\alpha_n^2 + \beta_n^2)} \end{array} \right.$$

wo zur Bestimmung der α und β gilt:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \begin{cases} \alpha_1 = U_1 \\ \beta_1 = 1 \end{cases} \\ 2. \begin{cases} \alpha_2 = U_2 - m_2^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \\ \beta_2 = 1 + m_2^2 \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \\ \dots \dots \dots \end{cases} \\ n) \begin{cases} \alpha_n = U_n - m_n^2 \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}^2 + \beta_{n-1}^2} \\ \beta_n = 1 + m_n^2 \frac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}^2 + \beta_{n-1}^2} \end{cases} \end{array} \right.$$

In den Gleichungen (14) und (16) steckt somit das eigentliche Resultat der Rechnung, und zwar ganz allgemein ohne irgendwelche Spezialisierung.

Wir wenden uns jetzt spezielleren Fällen zu.

Die homogene Kette.

§ 5. Wir wollen eine Kette homogen nennen, wenn bei ihr alle U und m gleich sind, also wenn:

$$U_1 = U_2 = \dots = U_n = U;$$

$$m_2 = m_3 = \dots m_n = m$$

ist. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die Eigenfrequenzen und Dekremente der einzelnen Glieder und ebenso die Kopplung zwischen denselben gleich groß sind. Dagegen ist nicht verlangt, daß Selbstinduktion und Kapazität in allen Gliedern identisch seien, nur ihr Produkt muß gleich groß sein. Der Begriff des Gliedes stimmt ja bei uns nicht genau mit dem Begriff desselben bei Wagner überein.

Dann erhalten wir statt 14:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1. \begin{cases} A_1 = U \\ B_1 = 1 \end{cases} \\ 2. \begin{cases} A_2 = U^2 - (1 + m^2) \\ B_2 = 2 U \end{cases} \\ 3. \begin{cases} A_3 = U \{U^2 - (3 + 2 m^2)\} \\ B_3 = 3 U^2 - (1 + 2 m^2) \end{cases} \\ 4. \begin{cases} A_4 = U^4 - U^2 (6 + 3 m^2) + m^4 + 3 m^2 + 1 \\ B_4 = 2 U \{2 U^2 - (2 + 3 m^2)\} \end{cases} \\ 5. \begin{cases} A_5 = U \{U^4 - U^2 (10 + 4 m^2) + 3 m^4 + 12 m^2 + 5\} \\ B_5 = 5 U^4 - U^2 (10 + 12 m^2) + 3 m^4 + 4 m^2 + 1 \end{cases} \text{ usw.} \end{array} \right.$$

Die Rekursionsformel wird:

$$(18) \quad n) \begin{cases} A_n = U A_{n-1} - B_{n-1} - m^2 A_{n-2} \\ B_n = A_{n-1} + U B_{n-1} - m^2 B_{n-2} \end{cases}$$

Der Zähler Z_n in Gleichung (10) wird:

$$(19) \quad Z_n = g_{10} \cdot m^{n-1}.$$

Aus den Gleichungen (16) bekommt man:

$$(20) \quad \left| \begin{array}{l} 1. \begin{cases} \alpha_1 = U \\ \beta_1 = 1 \end{cases} \\ 2. \begin{cases} \alpha_2 = U - m^2 \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \\ \beta_2 = 1 + m^2 \frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \end{cases} \\ \dots \dots \dots \\ n) \begin{cases} \alpha_n = U - m^2 \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_{n-1}^2 + \beta_{n-1}^2} \\ \beta_n = 1 + m^2 \frac{\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1}^2 + \beta_{n-1}^2} \end{cases} \end{array} \right|$$

Von dem Gleichungssystem 9 ausgehend wollen wir für die homogene Kette noch einen ganz anderen Weg der Lösung einschlagen. Die g werden alle gleich m . Nur g_{10} kann, obwohl die Kette homogen ist, einen anderen Wert erhalten. Wir dürfen indes auch $g_{10} = m$ setzen, wenn wir dann \mathfrak{I}_0 statt $\frac{g_{10}}{m} \cdot \mathfrak{I}_0$ schreiben. Wir dividieren mit m durch und schreiben:

$$a = \frac{U + j}{m}$$

und gelangen zu:

$$(21) \quad \left| \begin{array}{l} 1. a \mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}_0 + \mathfrak{I}_2 \\ 2. a \mathfrak{I}_2 = \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_3 \\ 3. a \mathfrak{I}_3 = \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{I}_4 \\ \dots \dots \dots \\ n-1) a \mathfrak{I}_{n-1} = \mathfrak{I}_{n-2} + \mathfrak{I}_n \\ n) a \mathfrak{I}_n = \mathfrak{I}_{n-1} \end{array} \right|$$

Wir haben in den Gleichungen (21) nur noch eine einzige komplexe Größe a als Koeffizient.

Setzt man hier für das l te Glied:

$$(22) \quad \mathfrak{I}_l = \mathfrak{A} e^{-l\gamma} + \mathfrak{B} e^{l\gamma} \quad \text{wo} \quad \gamma = \beta + \alpha j \quad \text{ist,}$$

so findet man mit diesen Werten für die Stromstärke System 21 erfüllbar, wenn $\cos \gamma = \frac{a}{2}$ ist. Für die Größen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} ergibt sich:

$$\mathfrak{B} = - \mathfrak{A} e^{-2(n+1)\gamma}$$

und

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{I}_0}{1 - e^{-2(n+1)\gamma}}$$

Damit kann man dann den Wert für die Stromstärke \mathfrak{I}_l im l ten Glied einer n fachen Kette auf folgende einfache Form bringen:

$$(23) \quad \mathfrak{I}_l = \frac{\mathfrak{S}in(n-l+1)\gamma}{\mathfrak{S}in(n+1)\gamma} \cdot \mathfrak{I}_0,$$

wo

$$(24) \quad \mathfrak{C}os\gamma = \frac{U+j}{2m}.$$

Für das letzte Glied der Kette wird:

$$(25) \quad \mathfrak{I}_n = \frac{\mathfrak{S}in\gamma}{\mathfrak{S}in(n+1)\gamma} \cdot \mathfrak{I}_0.$$

Der Wert für γ stimmt mit dem Wagnerschen überein. Im übrigen sind aber die Formeln 23 bis 25 einfacher als die Wagnerschen, entsprechend der einfacheren Ausgangsgleichung (21). In Gleichung (21) sind nämlich nur die Stromstärken vorhanden, während bei den Ausgangsgleichungen von Wagner Ströme und Spannungen vorkommen. Zu beachten ist, daß in den Gleichungen (23 bis 25) \mathfrak{I}_0 , wie immer bisher, als eine von ω unabhängige Größe zu betrachten ist und daher eine ganz andere Bedeutung hat als \mathfrak{I}_0 in der Wagnerschen Untersuchung.

Zur Bestimmung von α und β gelten auch hier:

$$(26) \quad \begin{cases} \cos\alpha \mathfrak{C}os\beta = \frac{U}{2m} = A \\ \sin\alpha \mathfrak{S}in\beta = \frac{1}{2m} = B \end{cases}$$

$$(27) \quad \begin{cases} \sin^2\alpha = \frac{(4m^2 - U^2 - 1) + \sqrt{(4m^2 - U^2 - 1)^2 + 16m^2}}{8m^2} \\ \mathfrak{S}in^2\beta = \frac{-(4m^2 - U^2 - 1) + \sqrt{(4m^2 - U^2 - 1)^2 + 16m^2}}{8m^2} \end{cases}$$

Stromstärke und Phase bei Resonanz.

§ 6. Es soll vorausgesetzt werden, daß, wie bei der homogenen Kette, die Eigenfrequenzen der einzelnen Glieder gleich seien, die Dekremente brauchen es nicht zu sein. Es werden dann für $x = 0$ alle $U = 0$ und man erhält für den Nenner des Endgliedes einer n fachen Kette:

$$(28) \quad \begin{cases} N_1 = 1 \\ N_2 = 1 + m_2^2 \\ N_3 = 1 + m_2^2 + m_3^2 = N_2 + m_3^2 \\ N_4 = 1 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_2^2 m_4^2 = N_3 + m_4^2 N_2 \\ \dots \\ N_n = N_{n-1} + m_n^2 N_{n-2} \end{cases}$$

Sind auch die Dekremente alle einander gleich, wie bei der homogenen Kette, so wird:

$$(29) \quad \left| \begin{array}{l} N_1 = 1 \\ N_2 = 1 + m \\ N_3 = 1 + 2 m^2 \\ N_4 = 1 + 3 m^2 + m^4 \\ N_5 = 1 + 4 m^2 + 3 m^4 \\ N_6 = 1 + 5 m^2 + 6 m^4 + m^6 \\ N_7 = 1 + 6 m^2 + 10 m^4 + 4 m^6 \text{ usw.} \end{array} \right.$$

Da nach Gleichung (13) $\operatorname{tg} \varphi_n = -\frac{B_n}{A_n}$ ist und nach Gleichung (17) gilt:

$$\begin{aligned} B &= 0, & \text{wenn } n \text{ gerade,} \\ A &= 0, & \text{wenn } n \text{ ungerade,} \end{aligned}$$

wird für die Phase φ_n im letzten Glied für $U = 0$:

$$(30) \quad \varphi_n = -n \frac{\pi}{2}$$

Stromstärke und Phase in den übrigen Kettengliedern.

§ 7. Die Rekursionsformeln, die wir kennen gelernt haben, geben uns immer nur die Stromstärke im Endglied einer Kette. Nur Formel (23) gibt auch den Strom in irgendeinem anderen Glied der Kette an. Die Ströme außer im Endglied interessieren nun meistens nicht. Sie können jedoch in ähnlicher Weise wie \mathfrak{I}_n abgeleitet werden, und zwar am besten unter Benutzung von \mathfrak{I}_n . Man erhält nämlich aus Gleichung (9):

$$(31) \quad \left| \begin{array}{l} \mathfrak{I}_n = \mathfrak{I}_n \\ \mathfrak{I}_{n-1} = \frac{\mathfrak{N}'_{n-1}}{Z'_{n-1}} \cdot \mathfrak{I}_n \\ \mathfrak{I}_{n-2} = \frac{\mathfrak{N}'_{n-2}}{Z'_{n-2}} \cdot \mathfrak{I}_n \\ \mathfrak{I}_{n-3} = \frac{\mathfrak{N}'_{n-3}}{Z'_{n-3}} \cdot \mathfrak{I}_n \text{ usw.} \end{array} \right.$$

wo für die Z' gilt:

$$(31a) \quad \begin{aligned} Z'_{n-1} &= g_{nn-1} \\ Z'_{n-2} &= g_{nn-1} \cdot g_{n-1n-2} \\ Z'_{n-3} &= g_{nn-1} \cdot g_{n-1n-2} \cdot g_{n-2n-3} \text{ usw.} \end{aligned}$$

und für die \mathfrak{N}' :

$$(31b) \quad \begin{aligned} \mathfrak{N}'_{n-1} &= U_n + j \\ \mathfrak{N}'_{n-2} &= (U_{n-1} + j) \mathfrak{N}'_{n-1} - m_n^2 \\ \mathfrak{N}'_{n-3} &= (U_{n-2} + j) \mathfrak{N}'_{n-2} - m_{n-1}^2 \mathfrak{N}'_{n-1} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Natürlich werden auch sie wieder besonders einfach für den Resonanzfall und die homogene Kette. Wir können dann überall (außer g_{10}) die $g = m$ schreiben und alle $U = 0$ setzen, und erhalten für Ketten mit

ergibt als Produkt von $N_l \cdot N_{n-l}$, wobei der Zähler Z_n aus dem Spiel gelassen werden kann. Wir bedienen uns der Gleichungen (15) und (16). Es wird:

$$N_n = \sqrt{(\alpha_1^2 + \beta_1^2) \dots (\alpha_l^2 + \beta_l^2)} \cdot \sqrt{(\alpha_{l+1}^2 + \beta_{l+1}^2)^2 \dots (\alpha_n^2 + \beta_n^2)}.$$

also

$$N_n = N_l \cdot N_{n-l},$$

wo hier

$$N_l = \sqrt{(\alpha_1^2 + \beta_1^2) \dots (\alpha_l^2 + \beta_l^2)}$$

$$N_{n-l} = \sqrt{(\alpha_{l+1}^2 + \beta_{l+1}^2) \dots (\alpha_n^2 + \beta_n^2)}$$

Es braucht nur untersucht zu werden, wie weit der hier vorkommende Ausdruck für N_{n-l} mit dem entsprechenden der zweiten Kette mit $n-l$ Gliedern, wenn diese allein ist, übereinstimmt. Im letzteren Falle wird das erste Glied:

$$\begin{aligned} \alpha_{l+1} &= U_{l+1} \\ \beta_{l+1} &= 1. \end{aligned}$$

Im obigen Fall ist:

$$\begin{aligned} \alpha_{l+1} &= U_{l+1} - m_{l+1}^2 \cdot \frac{\alpha_l}{\alpha_l^2 + \beta_l^2} \\ \beta_{l+1} &= 1 + m_{l+1}^2 \cdot \frac{\beta_l}{\alpha_l^2 + \beta_l^2}. \end{aligned}$$

Beide stimmen überein, wenn $m_{l+1}^2 = 0$, also die Kopplung zwischen beiden Ketten sehr lose ist.

Wird $m_{l+1}^2 = 1$, so bleiben auch im ungünstigsten Falle die zweiten Teile der obigen Gleichung für α_{l+1} und β_{l+1} kleiner als 1, und zwar um so mehr, je größer α_l und β_l der ersten Kette sind, d. h. wenn die Kopplung zwischen den einzelnen Gliedern der ersten Kette größer als 1 ist.

Bei größerer Verstimmung, also großem U_{l+1} , spielt das zweite Glied des obigen Ausdruckes noch bis zu engerer Kopplung eine untergeordnete Rolle.

Es wird später an Beispielen gezeigt werden, wie tatsächlich oft bis zu engerer Kopplung als $m = 1$ die nach der abgekürzten Methode berechnete Formel mit der tatsächlichen übereinstimmt. Das abgekürzte Rechenverfahren hat seine Bedeutung, weil man mit seiner Hilfe bequem die Form der Resonanzkurve einer zusammengesetzten Kette aus der einfacheren der Komponenten voraussagen kann.

Große Anfangs- und Enddekremente.

§ 9. Legt man auf möglichst günstige Energieübertragung Wert, so wird man das Dekrement des ersten Gliedes durch die Kopplung etwa mit der Leitung, und das des letzten Gliedes durch den Anschluß an die Empfangseinrichtung, stärker dämpfen als die Zwischenglieder. In einer Kette von nur zwei Gliedern, aber verschiedenen Dekrementen, erhält man, wenn die Eigenfrequenzen einander gleich sind, bekanntlich eine Resonanzkurve bei enger Kopplung, als ob jedes Glied ein Dekrement gleich der halben Summe der beiden tatsächlichen Dekremente hätte. Mit einem solchen mittleren Dekrement kann man auch noch bei mehreren Gliedern rechnen, wenn es gilt, nur die Form der Resonanzkurve zu erhalten. Man begeht dabei nur einen kleinen Fehler, wenn die Kettenzahl nicht zu groß und die Dekremente nicht zu verschieden sind. (Vgl. später § 20.)

Sind die beiden Dekremente einer zweifachen Kette stark voneinander verschieden, so wird indes das Maximum der Energieübertragung bei enger Kopplung

nicht mehr erreicht, wenn man die Eigenfrequenzen gleich groß macht, sondern, wenn sie in bestimmter, vom Verhältnis der Dekremente abhängiger Weise verstimmt sind¹⁾).

Es ergibt sich aus Gleichung (14) die günstigste Energieübertragung, wenn:

$$U_1 = U_2 = m^2 - 1 \tag{32}$$

ist. Die Bedingungen sind identisch mit den früher gefundenen. Das stärker gedämpfte Glied kann bei enger Kopplung um mehrere Oktaven in seiner Eigenfrequenz gegenüber dem anderen verstimmt werden müssen.

Ein solches System zweier eng gekoppelter Schwinger, bei welchem das eine Maximum der Resonanzkurve sehr weit von dem andern entfernt ist, kann in der Kette als einfaches System aufgefaßt werden mit einer Eigenfrequenz, die sich aus 32 ergibt, und einem Dekrement, das nur doppelt so groß ist wie das Dekrement des schwächer gedämpften Gliedes.

Es gilt dies sowohl, wenn das enggekoppelte zweifache System am Anfang einer Kette oder am Ende einer Kette steht.

Maxima und Minima bei der enggekoppelten Kette. (Die Eigenfrequenzen einer Kette).

§ 10. Auch eine homogene Kette ist im allgemeinen ein n welliges Gebilde, obwohl Voraussetzung der Homogenität ist, daß alle einzelnen Glieder für sich betrachtet dieselbe Eigenfrequenz haben. Die n -Welligkeit kommt in der Resonanzkurve zum Ausdruck dadurch, daß dieselbe Maxima aufweist. Dieses äußere Merkmal der Mehrwelligkeit tritt jedoch erst auf, wenn die Kopplung eng genug, nämlich, wenn $K > \frac{\delta}{\pi}$ ist, also bei um so engerer Kopplung je größer das Dekrement ist.

Wir wollen die Lage dieser Maxima bestimmen, und zwar zunächst für verschwindende Dekremente, sodann bei endlichem Dekrement für Ketten mit kleinerer Gliederzahl.

Für ein Dekrement $\delta = 0$ werden die Ausdrücke 8 alle unendlich. Wir wollen daher, bevor wir zum Dekrement 0 übergehen, die Gleichungen 9 mit dem Dekrement multiplizieren.

Im Ausdruck 10 erscheint das Dekrement dann nur noch im Nenner, und zwar ist dort ausschließlich das imaginäre j damit multipliziert. Lassen wir jetzt $\delta = 0$ werden, so erscheint der Nenner bereits reell, und wir bekommen statt der Gleichung (12) die Gleichung (33):

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1 = x(2 + x) = X \\ N_2 = X^2 - K^2 \\ N_3 = X(X^2 - 2K^2) \\ N_4 = X^2(X^2 - 3K^2) + K^4 \\ N_5 = X[X^2(X^2 - 4K^2) + 3K^4] \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ N_n = X \cdot N_{n-1} - K^2 N_{n-2} \end{array} \right.$$

Es sollen nun diejenigen Werte von X gefunden werden, für welche die Stromstärke ein Maximum wird. Da wir verschwindendes Dekrement voraussetzen, muß

¹⁾ Vgl. Hans Riegger, Jahrbuch für drahtlose Telegraphie.

an dieser Stelle der Strom direkt unendlich werden. Dies ist nur möglich, wenn der Nenner gleich Null wird. Daher können wir aus Gleichung (32) die einzelnen Werte von X , für welche der Strom unendlich wird, leicht finden, indem wir die N alle gleich 0 setzen.

Zunächst sehen wir, daß der größte Exponent von X mit der Gliederzahl übereinstimmt. Wir erhalten also für jede Kette von n Gliedern n Wurzeln von X .

Für jede ungeradgliedrige Kette ist dabei immer ein Wert vorhanden: $X_1 = 0$.

Schafft man dieses X weg, so bleibt noch ein Rest zurück, der, ebenso wie alle geradgliedrigen Ketten, X nur in gerader Potenz enthält, d. h. also, zu jedem positiven Wert von X gehört auch der entsprechend negative.

Es geht ferner aus (32) hervor, daß, da die Gleichungen in X und K homogen sind, nur das Verhältnis von $\frac{X}{K}$ eine Rolle spielt, so daß wir die Werte von X proportional zu K erhalten.

Wir finden so folgende Tabelle für diejenigen X , welche die Stromstärke zu einem Maximum machen:

Gliederzahl	X_1	$\pm X_2$	$\pm X_3$	$\pm X_4$	X_∞
1	0				
2		K			
(34) 3	0	$1,414 K$			
4		$0,618 K$	$1,618 K$		
5	0	K	$1,73 K$		
6		$0,444 K$	$1,247 K$	$1,802 K$	
7	0	$0,765 K$	$1,414 K$	$1,85 K$	
∞					$2 K$

Der Wert, der noch angegeben ist, für $n = \infty$, stimmt mit dem überein, was Wagner als Lochbreite definiert hat.

Man gelangt zu genau derselben Tabelle, wenn man von Gleichung (25) ausgeht. Auch hiernach muß \mathfrak{J}_n bei endlichem \mathfrak{J}_0 und immer kleiner werdendem Dekrement schließlich unendliche Werte annehmen. Wir brauchen nur diejenigen Werte von γ zu suchen (unter Ausschluß von $\gamma = 0$, wo Zähler und Nenner gleich Null werden), für welche $\mathfrak{S}in(n+1)\gamma = 0$ ist. Haben wir diese γ Werte bestimmt, so können wir unter Vermittlung von Gleichung (24) die zugehörigen Verstimmungen X finden.

Zunächst wird Gleichung (24), wenn man das Dekrement gleich Null setzt:

$$(35) \quad \mathfrak{C}o\mathfrak{f} \gamma = \frac{X}{2K}.$$

Also reell. Daraus ist zu schließen, daß γ rein imaginär sein muß, also

$$\gamma = \alpha \cdot j.$$

Dann wird aber (35) zu:

$$(35) \quad \cos \alpha \cdot j = \cos \alpha = \frac{X}{2K}$$

und

$$\sin(n+1)\alpha \cdot j = j \cdot \sin(n+1)\alpha = 0$$

$$(36) \quad \sin(n+1)\alpha = 0.$$

Setzen wir:

$$(n+1)\alpha = k\pi,$$

also:

$$\alpha = \frac{k\pi}{n+1},$$

wo k eine ganze Zahl (unter Ausschluß von $k=0$) ist, so wird:

$$(37) \quad \alpha_1 = \pm \frac{\pi}{n+1}$$

$$\alpha_2 = \pm \frac{2\pi}{n+1}$$

$$\alpha_3 = \pm \frac{3\pi}{n+1} \quad \text{usw}$$

und also:

$$(38) \quad \pm X_1 = 2K \cdot \cos \frac{\pi}{n+1}$$

$$\pm X_2 = 2K \cdot \cos \frac{2\pi}{n+1}$$

$$\pm X_3 = 2K \cdot \cos \frac{3\pi}{n+1} \quad \text{usw.}$$

Wir bekommen so n voneinander verschiedene Werte, die mit denen der Tabelle genau übereinstimmen.

§ 11. Bei endlicher Dämpfung können die Ströme bei endlichem \mathfrak{J}_0 nirgends unendlich groß werden. Dementsprechend ist es auch nicht mehr möglich, Werte von X zu finden, für welche der Nenner verschwindet. Wir wollen den Zähler von (10) als nur wenig von der Frequenz abhängig betrachten. Dann wird \mathfrak{J}_n ein Maximum oder Minimum, je nachdem N_n ein Minimum oder Maximum wird. Hierfür gilt als Bedingung:

$$(39) \quad \frac{\partial N_n}{\partial \omega} = 0$$

und wenn $X_1 = X_2 = \dots X_n$ angenähert:

$$(39a) \quad A_n \frac{\partial A_n}{\partial X} + B_n \frac{\partial B_n}{\partial X} = 0$$

und für homogene Ketten:

$$(39c) \quad A_n \frac{\partial A_n}{\partial U} + B_n \cdot \frac{\partial B_n}{\partial U} = 0$$

Die Gleichung (25) würde als Bedingung für einen Extremwert ergeben:

$$(40) \quad \mathfrak{I}g(n+1)\gamma = (n+1)\mathfrak{I}g\gamma,$$

wobei man wiederum zur Bestimmung von X die Gleichung (24) zu Hilfe nehmen müßte.

Die Gleichungen (39) sind in X bzw. U nicht mehr vom n ten, sondern vom $(2n - 1)$ ten Grad. Wir erhalten daher nicht nur n , sondern $(2n - 1)$ Werte, und zwar n Wurzeln für die Maximum- und $n - 1$ für die Minimumstellen.

Das Maximum an der Stelle $X = 0$ bei ungeradgliedriger Kette bleibt bestehen, dagegen erhält man bei enger Kopplung für die geradgliedrige Kette an der Stelle $X = 0$ ein Minimum.

Da die Gleichung (39) zur Bestimmung der Extremwerte nicht mehr in X und K homogen wird, können die Wurzeln für X nicht mehr proportional zu K sein.

Bei loser Kopplung sind die Wurzeln bis auf $X = 0$ imaginär.

Für zwei Kreise erhält man von $m = 1$ an drei reelle Werte.

Bei Ketten mit mehreren Gliedern beginnen die reellen Wurzeln bei noch etwas engerer Kopplung. Sie erscheinen nicht alle gleichzeitig.

Die Werte für die Wurzeln sind natürlich außer von der Kopplung auch noch von den Dekrementen beeinflusst.

Erst bei sehr enger Kopplung stimmt die Lage der Maxima wieder überein mit derjenigen, welche wir für verschwindende Dekremente berechnet haben.

Man erhält für eine z w e i g l i e d r i g e K e t t e :

$$(40a) \quad \begin{cases} U_1 = 0 \\ U_2 = \pm \sqrt{m^2 - 1} \end{cases}$$

oder:

$$(40b) \quad \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = \pm \sqrt{K^2 - \frac{d^2}{\pi^2}} \end{cases}$$

und für eine d r e i g l i e d r i g e K e t t e :

$$U_1 = X_1 = 0$$

und für die 4 weiteren Wurzeln:

$$(41) \quad \begin{cases} U^2 = \frac{8m^2 - 6 \pm 4m\sqrt{m^2 - 6}}{6} & \text{oder} \\ X^2 = \frac{8K^2 - 6\frac{d^2}{\pi^2} \pm 4K\sqrt{K^2 - 6\frac{d^2}{\pi^2}}}{6} \end{cases}$$

Allgemeinere Problemstellung.

§ 12. Wir haben im bisherigen immer vorausgesetzt, daß die elektromotorische Kraft im ersten Gliede der Kette sitzt, ferner nahmen wir an, daß jedes Glied nur mit den zwei benachbarten Gliedern gekoppelt ist. Setzen wir in jedes Glied der Kette eine elektromotorische Kraft von beliebiger Anfangsphase, und nehmen wir an, daß jedes Glied der Kette mit jedem anderen Gliede gekoppelt wäre, so haben wir den allgemeinsten Fall. Die Differentialgleichungen hierfür können ohne weiteres der Gleichung (1) nachgebildet werden. Haben die elektromotorischen Kräfte verschiedene Frequenzen, so müssen in den Systemen entsprechende Schwebungen auftreten.

Haben die elektromotorischen Kräfte alle dieselbe Frequenz, so erhalten wir die Ausgangsgleichungen, wenn wir ähnlich wie durch Gleichung (3) Werte für die

Parameter, nämlich m vorkommt, während U an Stelle von x die Veränderliche der Kurve bedeutet. Dabei ist:

$$(vgl. 8) \quad U = \frac{x(2+x)}{d/\pi(1+x)} \quad \text{und} \quad m = \frac{K}{d/\pi}$$

Wenn x klein ist, so daß wir es gegen 1 vernachlässigen können, wird:

$$U = \frac{2x}{d/\pi}$$

Hierin ist die prozentuale Verstimmung x bequem aus U zu berechnen. m , das als einziger Parameter übrig bleibt, wird unabhängig von x .

Bei großer Verstimmung wird die Resonanzkurve unter Anwendung der genauen Formel etwas unsymmetrisch. Indes zeigt eine eingehendere Diskussion und Berechnung praktischer Beispiele, daß die Gesamtbreite der Resonanzkurve, auf welche es meistens ankommt, nur um wenige Prozent verschieden ausfällt bei genauer und abgekürzter Berechnung, selbst wenn man mit der Verstimmung bis etwa 30 vH geht.

Die abgekürzte Formel für die Werte von U und m kann daher für die meisten praktischen Fälle zur Berechnung der Resonanzkurve verwandt werden. Die im folgenden vorkommenden Kurven sind abgekürzt berechnet.

Die Resonanzkurve der homogenen Kette.

§ 14. Die Fig. 2 bis 7 zeigen nunmehr Beispiele von Resonanzkurven für Ketten von 2 bis 7 Gliedern. Sie umfassen ein Kopplungsgebiet, welches beim Arbeiten mit Ketten als wichtigstes gelten muß, und liefern damit ein genügend allgemeines Bild der Resonanzkurve bei der homogenen Kette. Sie wurden nach den Formeln (17) bzw. (20) berechnet.

Als Abszisse ist bei allen Kurven der Wert von U aufgetragen, als Ordinate der Strom im Endglied der Kette.

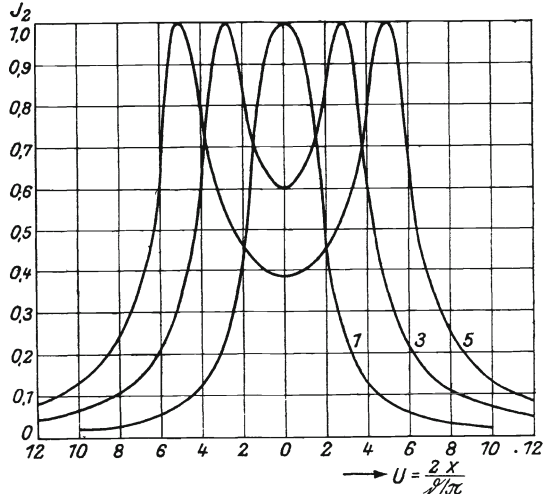


Fig. 2. Homogene Kette mit 2 Gliedern.

1) $m = \frac{K}{d/\pi} = 1$, 3) $m = 3$ und 5) $m = 5$.

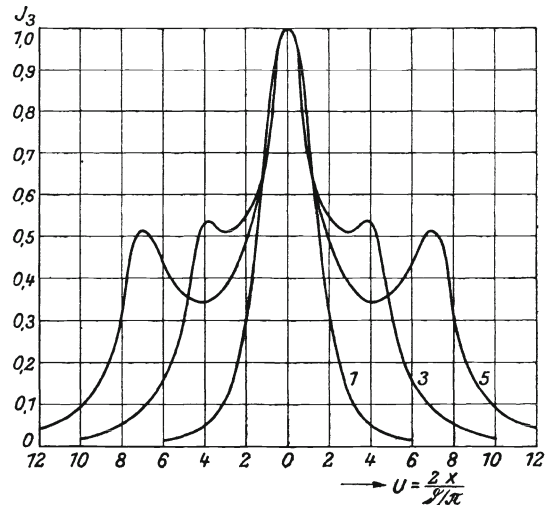


Fig. 3. Homogene Kette mit 3 Gliedern.

1) $m = \frac{K}{d/\pi} = 1$, 3) $m = 3$ und 5) $m = 5$.

Die verschiedenen Kurven 1, 3 und 5 der einzelnen Figuren entsprechen den Werten $m = 1, m = 3$ und $m = 5$, d. h. also, die Kurven 1 gelten, wenn die Kopplung

gleich $\frac{b}{\pi}$, die Kurven 2, wenn sie dreimal, und die Kurven 5, wenn sie fünfmal so groß als $\frac{b}{\pi}$ ist.

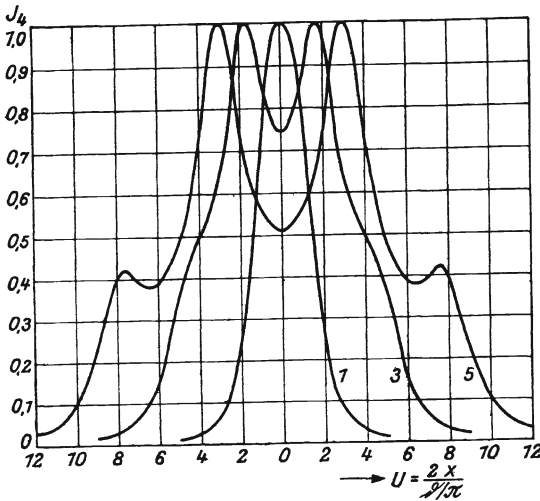


Fig. 4. Homogene Kette mit 4 Gliedern.
1) $m = \frac{K}{b/\pi} = 1$, 3) $m = 3$ und 5) $m = 5$.

Es geht aus den Figuren hervor, daß der Parameter m und die Variable U nur als kleine Zahlen auftreten. Bei der Berechnung der Kurven selber kann man sich nahezu auf ganzzahlige Werte von U beschränken, so daß die Anwendung unserer Rekursionsformeln nicht viel Rechenarbeit verlangt.

Die Höhe der Ordinate aller Kurven ist im Hauptmaximum gleich 1 gesetzt. Dies entspricht nicht der tatsächlichen relativen Stromstärke, ermöglicht aber einen genauen Vergleich der Form und Resonanzbreite der einzelnen Kurven bei verschiedenen Ketten. Die tatsächliche relative Größe der Ströme wird in einem späteren Abschnitt behandelt werden.

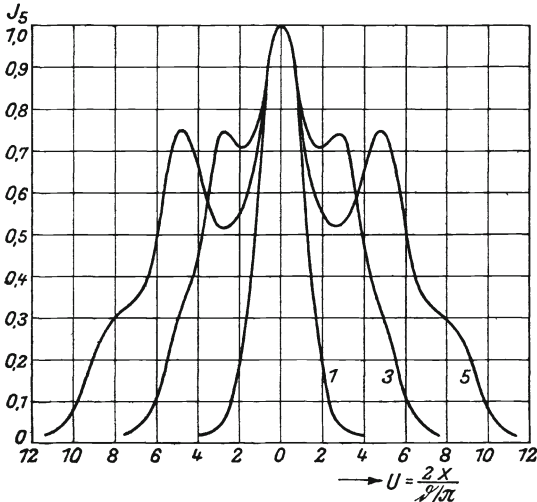


Fig. 5. Homogene Kette mit 5 Gliedern.
1) $m = \frac{K}{b/\pi} = 1$, 3) $m = 3$ und 5) $m = 5$.

Für $m = 1$ gilt bei allen Ketten unabhängig von der Gliederzahl, daß die Resonanzkurven noch einwellig sind. Sie gleichen demnach derjenigen eines einfachen Systems. Indes sind doch alle voneinander verschieden, so daß sie nicht miteinander zur Deckung gebracht werden können, wenn man die Werte ihrer Abszisse variiert. Sie sind nämlich in den unteren Partien verhältnismäßig zu den oberen um so schmaler, je größer die Gliederzahl ist.

Für $m = 3$ sind für alle Ketten mehrere Maxima vorhanden. Bei größerer Gliederzahl treten indes auch für $m = 5$ noch nicht alle, der Gliederzahl nach möglichen, Maxima in die Erscheinung; sie machen sich aber durch entsprechende Ausbuchtung der Kurven bemerkbar.

Das Hauptmaximum für ungeradgliedrige Ketten liegt an der Seite $U = 0$, für geradgliedrige Ketten sind es die beiden gleichwertigen Maxima unmittelbar links und rechts von $U = 0$.

Die Höhe der übrigen Maxima fällt um so mehr, je weiter dieselben von $U = 0$ wegliegen.

Die Täler zwischen den einzelnen Maxima sind umso tiefer, je enger die Kopp- lung ist.

Die Lochbreite.

§ 15. Vergleicht man die Breite der Kurven bei kleiner Stromstärke, so findet man sie um so geringer, je größer die Gliederzahl der Kette ist.

Die Lochbreite für den Strom- abfall auf $1/50$, d. h. also diejenigen Werte von U , bei welchen der Strom auf $1/50$ seines maximalen Wertes fällt, findet sich in Fig. 8 als Funktion von m dargestellt.

Die einzelnen Kurven gelten für verschiedene Gliederzahl der Kette.

Für große Gliederzahl und große m ergibt sich dabei annähernd, daß $U = 2m$ ist.

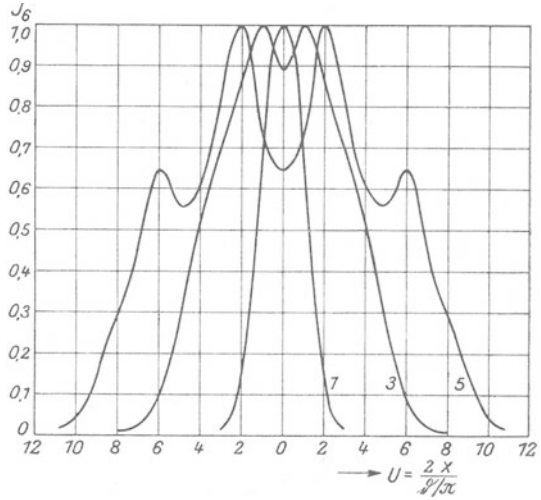


Fig. 6. Homogene Kette mit 6 Gliedern.

1) $m = \frac{K}{d/\pi} = 1$, 3) $m = 3$ und 5) $m = 5$.

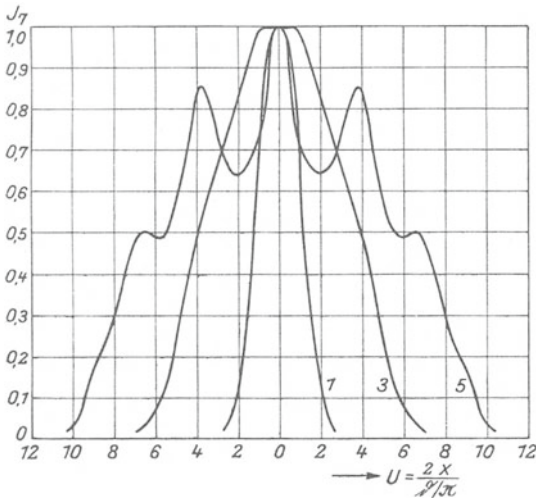


Fig. 7. Homogene Kette mit 7 Gliedern.

1) $m = \frac{K}{d/\pi} = 1$, 3) $m = 3$ und 5) $m = 5$.

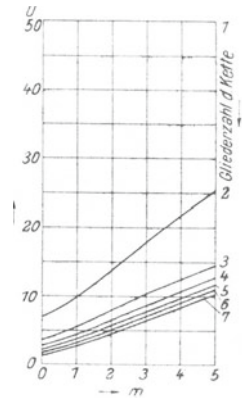


Fig. 8.

Lochbreite bei Strom- abfall auf $1/50$.

$$U = \frac{2x}{d/\pi} \quad m = \frac{K}{d/\pi}$$

Für kleinere Gliederzahl und allgemein bei kleinerem m ist dies nicht mehr gültig, da die allerdings nahezu geradlinigen Kurven nicht auf Null zulaufen.

Ähnliche Kurven kann man den Fig. 2 bis 7 auch für andere Stromabfälle, z. B. $1/10$, entnehmen.

Die Kurven der Fig: 8 rücken dann etwas näher zusammen und erhalten kleinere Ordinaten. Als rohe Annäherung kann man für einen Stromabfall auf $1/10$ die Formel

$U = 2m$ von dreigliedriger Kette und $m = 1$ an verwenden, bei enger Kopplung ist die Formel dann allerdings schlechter als oben.

Wir kommen hiernach zu verschiedenen Lochbreiten, je nachdem wir, entsprechend dem Verwendungszweck, als Grenze des Loches einen bestimmten Stromabfall voraussetzen. Es ist dabei jedoch zu beachten, daß für größere Gliederzahl und engere Kopplung diese Lochbreiten sich wegen des steilen Anstieges der Resonanzkurven nicht zu sehr voneinander unterscheiden.

Nach Wagners Definition der Lochbreite findet man als Grenze der Durchlässigkeit in unserer Schreibweise $x = K$ oder $U = 2m$, was mit dem vorigen in bestimmten Gebieten übereinstimmt.

In der Wagnerschen Definition ist das Dekrement nicht berücksichtigt.

Das oben Gesagte gibt den Gültigkeitsbereich dieser prägnanten Formel an. Obwohl in der Formel selber das Dekrement keine Rolle spielt, ist der Gültigkeitsbereich derselben nur mit Hilfe des Dekrements angebar. Nur unter Berücksichtigung des Dekrements ist physikalisch die Grenze zwischen loser und enger Kopplung ohne Willkür bestimmt, nämlich durch $m = 1$.

Es wird sich im folgenden Kapitel zeigen, daß für Siebzwecke Kopplungen entsprechend $m = 1$ bis $m = 3$ und kleinere Gliederzahl der Kette praktisch fast ausschließlich in Betracht kommen, ein Gebiet, in dem die Anwendung der Wagnerschen Definition der Lochbreite nicht mehr zulässig ist.

Die verhältnismäßig richtige Stromstärke.

§ 16. Die besprochenen Resonanzkurven gaben uns keinen Aufschluß über die tatsächlich in den n ten Kreis übertragene Stromstärke. Sie sind ja zum Zweck der Diskussion ihrer Form alle so gezeichnet, daß der maximale Wert einer Kurve gleich 1 wird.

Wenn nunmehr die Stromstärken in relativ richtiger Höhe angegeben werden,

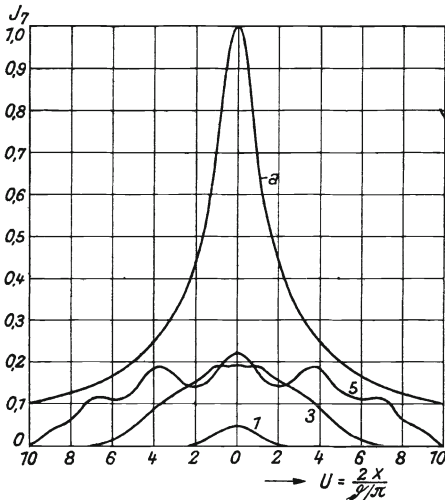


Fig. 9.

Strom bei Kette mit 7 Gliedern (Kurve 1, 3 und 5) bezogen auf den Strom in Kette mit 1 Glied (Kurve a). 1) $m = 1$, 3) $m = 3$, 5) $m = 5$.

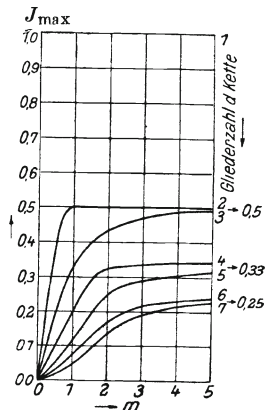


Fig. 10.

Maximale Stromstärke im letzten Glied bei homogener Kette.

$$m = \frac{K}{d/\sqrt{x}}$$

so wird dabei noch vorausgesetzt, daß die Ketten nicht nur homogen, sondern auch Selbstinduktion und Kapazität aller Glieder gleich groß seien, also:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= \Omega_2 = \dots \Omega \\ \mathfrak{C}_1 &= \mathfrak{C}_2 = \dots \mathfrak{C}.\end{aligned}$$

Ist diese Bedingung für ein Glied nicht erfüllt, obwohl die Kette homogen ist, so müssen die für dieses Glied angegebenen Stromstärken noch mit $\sqrt{\frac{\Omega}{\Omega_i}}$ multipliziert werden, wenn Ω_e seine Selbstinduktion bedeutet.

Der tatsächliche Strom für eine siebengliedrige Kette ist in Fig. 9 angegeben.

Als 1 wird dabei der Strom angesehen, den man bei Resonanz und Anwendung eines einzigen, Kettengliedes, aber natürlich derselben elektromotorischen Kraft erhält. Man sieht aus der Figur, wie stark namentlich bei loserer Kopplung ($m = 1$) die Kette den Strom schwächt und daß auch bei engster Kopplung ($m = 5$) der Strom um ein Vielfaches kleiner ist als in einer Kette von nur einem Glied.

Eine allgemeinere Darstellung dieser Verhältnisse gibt uns Fig. 10.

Jede der einzelnen Kurven gilt für eine Kette mit bestimmter Gliederzahl. Die Gliederzahl ist am rechten Ende der Kurve angegeben. Sie zeigen die maximale Stromstärke in einer Kette als Funktion von m . Man kann aus ihnen den Faktor entnehmen, mit dem man die einzelnen bisherigen Kurven multiplizieren muß, um zur tatsächlichen Stromstärke zu gelangen.

Während bei einer zweigliedrigen Kette der maximal mögliche Strom schon für $m = 1$ erreicht wird, muß man bei einer vielgliedrigen Kette wesentlich enger koppeln. Eine Kette mit geraden Gliedern und die darauffolgende ungeradgliedrige Kette, scheinen bei engerer Kopplung demselben Grenzwert zuzustreben. Dieser ist für eine zweigliedrige Kette 0,5, für eine viergliedrige 0,33, für eine sechsgliedrige 0,25 des Stromes im einfachen System.

Die Ströme in den übrigen Gliedern der Kette.

§ 17. Es kommen auch Möglichkeiten vor, wo man nicht nur den Strom im Endglied einer Kette kennen möchte, sondern auch denjenigen in den übrigen Kettengliedern braucht, z. B. bei der Berechnung der gesamten Energieaufnahme des Systems.

Für $U = 0$, also bei Resonanz, erlauben uns die Formeln (29) und (32) einen schnellen Überblick über diese Verhältnisse. Mit ihrer Hilfe sind die Schaulinien der Fig. 11 und 12 berechnet. Die Zahlen bei den einzelnen Kurven geben die Gliednummer an. Für $n = \infty$ wurde der Rechnung die Formel (22) zugrunde gelegt. Darin wird für diesen Fall $B = 0$ und $A = \mathfrak{J}_0$.

Oder unter Berücksichtigung der Bedeutung, welche J_0 in dieser Formel hat:

$A = \frac{g_{10}}{m} \mathfrak{J}_0$, worin dann jetzt \mathfrak{J}_0 die normale Bedeutung unserer sonstigen Formeln hat.

Es wird außerdem:

$$\gamma = \beta + \alpha j \quad \text{und} \quad \alpha = -l \frac{\pi}{2},$$

und wenn $m > 1$ ist:

$$\beta = \frac{1}{2m},$$

so daß man für die Berechnung für $n = \infty$ und $U = 0$ den Strom im l ten Gliede der Kette nach folgender Gleichung erhält:

$$(45) \quad \mathfrak{I}_l = \frac{g_{10} \cdot \mathfrak{I}_0}{m} \cdot e^{-l\beta},$$

wo

$$\beta = \frac{1}{2m} \text{ ist.}$$

Nach den Schaulinien der Fig. 11 und 12 fällt der Strom des ersten Gliedes bei allen Kurven stark mit zunehmender Kopplung.

Bei Ketten mit ungerader Gliederzahl sind bei enger Kopplung die Ströme in den ungeraden Kettengliedern größer als in den geraden. Bei Ketten mit gerader

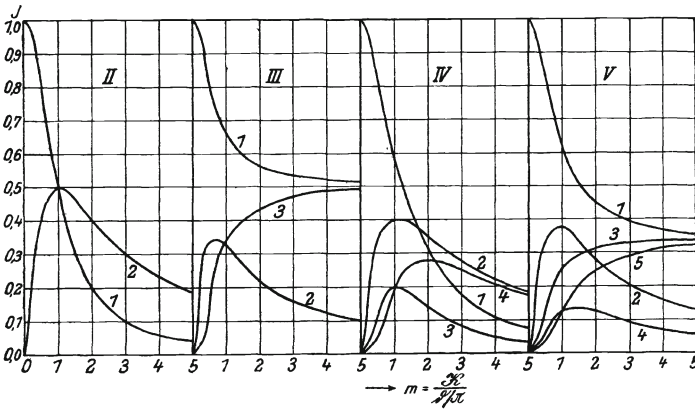


Fig. 11.

Ströme in den einzelnen Gliedern der homogenen Kette für $U = 0$. Die römischen Zahlen geben die Gliederzahl der Kette, die arabischen Ziffern die Gliednummer an.

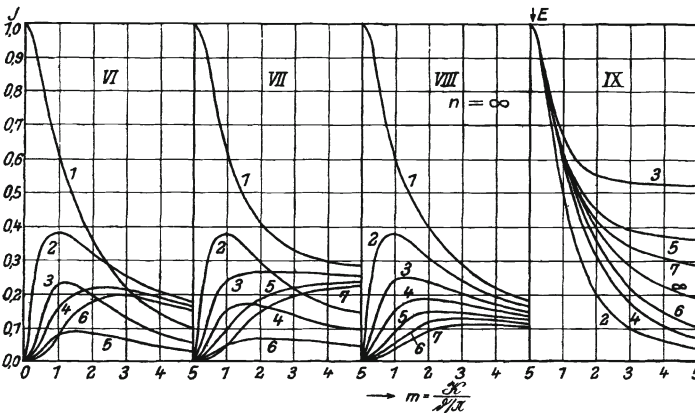


Fig. 12.

Ströme in den einzelnen Gliedern der homogenen Kette für $U = 0$. VIII: Kette mit unendlich vielen Gliedern. IX: Aufgenommene Energie der ganzen Kette.

Gliederzahl ist es umgekehrt. In letzterem Falle sind alle Ströme naturgemäß kleiner, da die zugehörigen Resonanzkurven für $U = 0$ ein Minimum haben.

Die Ströme im 1., 3., 5. Glied usw. einer ungeradgliedrigen Kette nähern sich bei enger Kopplung bis auf kleine Differenzen. Ihre Reihenfolge entspricht aber der Gliednummer. Dasselbe gilt für die geraden Glieder.

Vergleicht man jedoch die Ströme in den geraden Gliedern mit denen in den ungeraden, so findet man recht große Differenzen. Es können so Ströme von Gliedern, die am Anfang einer Kette stehen, wesentlich kleiner sein als die Ströme in den späteren Gliedern der Kette.

Für Ketten mit unendlich vielen Gliedern sind die Ströme in den einzelnen Gliedern natürlich in der Reihenfolge ihres Abstandes vom Anfang.

ern natürlich in der Reihenfolge ihres Abstandes vom Anfang.

In dieser Beziehung ist selbst eine Kette mit sieben Gliedern noch sehr weit von derjenigen mit unendlich vielen Gliedern entfernt. Es macht sich hier das endliche Ende der Kette noch im Strom des ersten Gliedes bemerkbar.

Bei loserer Kopplung $m < 1$ ist die Rückwirkung der späteren Glieder selbstverständlich viel geringer, so daß hier schon eine Kette mit wenig Gliedern sich bezüglich der Ströme einer Kette mit unendlich vielen Gliedern nähert.

Die Energieaufnahme der Ketten.

§ 18. Die gesamte Energieaufnahme einer Kette läßt sich für $U = 0$ aus den Stromkurven (Fig. 11 und 12) oder den Formeln (32) berechnen; man braucht nur die Quadrate der Stromstärken in den einzelnen Gliedern zu summieren. Da wir bereits vorausgesetzt haben, daß die Ketten nicht nur homogen seien, sondern auch Selbstinduktion und Kapazität in den verschiedenen Gliedern übereinstimmt, müssen auch die Ohmschen Widerstände gleich sein. Wir können dann bei der Berechnung der Energie den Widerstand als Konstante weglassen, da es nur auf relative Werte ankommt. Führen wir diese Summierung durch, so erhalten wir für die gesamte Energieaufnahme Fig. 12, IX.

Es ist wiederum zu beachten, daß für die geradgliedrigen Ketten an Stelle $U = 0$ die Resonanzkurve des letzten Gliedes ein Minimum hat. Würde man für diese nicht an der Stelle $U = 0$, sondern an der Stelle ihrer Maxima die Energiekurven berechnen, so würden sich ihre Energiekurven in richtiger Reihenfolge an diejenigen der ungeradlinigen anreihen.

Die im günstigsten Fall aufgenommene Gesamtenergie fällt demnach mit zunehmender Gliederzahl und nähert sich bei gegebener Kopplung für $n = \infty$ einem bestimmten Grenzwert. Für enge Kopplung ($m = 5$) ist derselbe etwa fünfmal kleiner als wenn die Kette nur ein einziges Glied enthält, natürlich unter der Voraussetzung, daß die elektromotorische Kraft, die auf den ersten Kreis wirkt, in allen Fällen konstant ist.

Es ist bemerkenswert, daß die Energiekurven der Fig. 12, IX, identisch sind mit den entsprechenden Stromkurven des ersten Gliedes. Durch die Kopplung ist das erste Glied gezwungen, Energie an die späteren abzugeben. Dies entspricht einer Zunahme seiner Dämpfung. Da nun der Strom umgekehrt proportional zu seinem Gesamtdекреment ist, können wir den Abfall seines Stromes durch Zunahme seines Dekrements erklären und auch formell die Vergrößerung seines Dekrements aus seinem Stromabfall berechnen. Quadrieren wir nun die Stromstärke im ersten Kreis und multiplizieren mit dem vermehrten Dekrement, so erhalten wir eine Kurve, die der Stromkurve genau entspricht, wenn wir auch für diese Energiekurve an der Stelle $m = 0$ der Ordinate den Wert 1 geben.

Die Betrachtungen über die homogene Kette sind damit abgeschlossen.

Gemischte Kopplung.

§ 19. Die bisher angestellten Untersuchungen gelten alle nur, wenn entweder die elektrische oder die magnetische Kopplung stark vorherrscht. Sind für $U = 0$ bei Resonanz beide von derselben Größenordnung, aber doch soviel verschieden, daß nach den Formeln (8) noch ein genügend großer Kopplungsfaktor K herauskommt, kann dieser schon bei kleiner Verstimmung zu Null werden, während er bei

entgegengesetzter Verstimmung wächst. Die Kopplung ist dann also von der erregenden Frequenz abhängig.

Die Ursache hierfür liegt darin, daß für die Kopplung die verhältnismäßige Spannung maßgebend ist, welche zwischen den zwei Punkten herrscht, an welchen die gemeinschaftliche Strombahn zweier Glieder beginnt. Diese Spannung ist Null, wenn die erregende Frequenz der Eigenfrequenz entspricht, welche die zwischen den beiden Punkten liegende entweder parallel- oder hintereinandergeschaltete Kapazität und Selbstinduktion hat. Es ist dabei vorausgesetzt, daß der rein Ohmsche Spannungsabfall klein, also der Ohmsche-Widerstand, in dem gemeinschaftlichen Stromstück vernachlässigt werden kann.

Wie weit von der normalen Resonanzkurve abweichende Formen bei gemischter Kopplung möglich sind, sollen einige Beispiele illustrieren. Fig. 13a gilt für eine

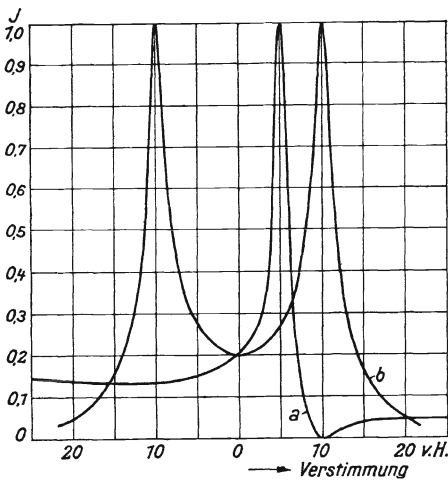


Fig. 13.

a) Gemischte Kopplung.

b) Magnetische Kopplung.

Für $x = 0$ haben beide den Kopplungsfaktor $K = 0,2$.

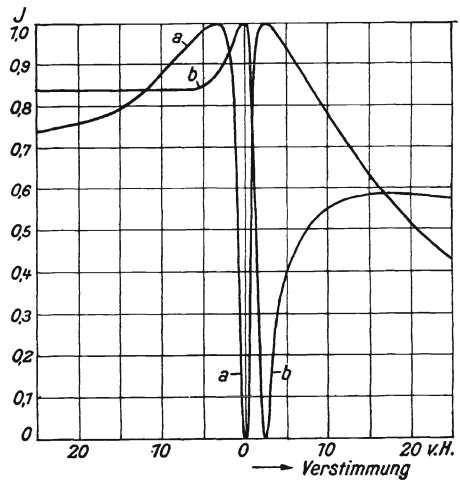


Fig. 14.

Gemischte Kopplung.

gewisse gemischte Kopplung, während bei b rein magnetische Kopplung vorausgesetzt ist. Für a sowohl wie für b ist die Eigenfrequenz des ersten und zweiten Gliedes gleich groß, und in beiden ist die Kopplung an der Stelle $x = 0$ gleich 20 v.H. Bei der gemischten Kopplung fällt das Maximum auf der linken Seite ganz weg, dagegen verläuft der Strom über einen großen Bereich fast geradlinig. Das rechte Maximum liegt an einer Stelle, die einer Kopplung von 10 v.H. entspricht. Da wo die normale Kurve rechts ihr Maximum hat, ist für a die Nullstelle verlegt.

Noch größere Abweichungen zeigen die Schaulinien der Fig. 14. Bei der Kurve a werden die Wellen in einem großen Bereich fast gleichmäßig aufgenommen, nur ein schmaler Streifen an der Stelle $x = 0$ ist von der Aufnahme ausgeschlossen. In der Kurve b ist die Nullstelle etwas verschoben und die linke und rechte Seite von derselben sind stark unsymmetrisch.

Die Ohmsche Kopplung kann bei einer solchen gemischten Kopplung störend wirken. Bei ihr, wie bei der elektrischen Kopplung überhaupt, sind außerdem noch Resonanzmöglichkeiten vorhanden, die wir in den bisherigen Betrachtungen aus

geschaltet haben, weil wir voraussetzten, daß man praktisch Ketten so bauen kann, wie sie unseren Betrachtungen zugrunde gelegt sind.

Man kann diese Schwierigkeiten bei gemischter Kopplung teilweise beseitigen, wenn man für sie statt der Schaltung Fig. 15a diejenige der Fig. 15b oder noch besser 15c anwendet.

Es ist manchmal erwünscht, die beiden Transformatorwicklungen dieser Schaltung mit verschiedener Windungszahl zu versehen. Wir können dies tun, ohne dadurch die Kette inhomogen zu machen.

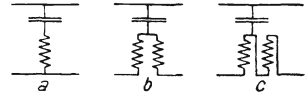


Fig. 15.
Kopplungsglieder bei gemischter Kopplung.

Herstellung möglichst rechteckiger Resonanzkurven.

§ 20. Bei der Anwendung der Kette zu Siebzwecken besteht die Absicht, dieselbe als ein Gebilde zu verwenden, das einen vorgeschriebenen Frequenzbereich nahezu gleichmäßig durchläßt, alle übrigen Frequenzen aber vollständig am Durchtritt verhindert. Die ideale Resonanzkurve würde demnach die Form eines Rechtecks haben.

Eine vollkommene Undurchlässigkeit wird man bei Schwingungsgebilden nie erreichen. Es hängt von dem Verwendungszweck ab, auf welchen Bruchteil des maximalen Wertes der Strom abfallen muß, damit man ihn praktisch als Null betrachten kann, d. h. damit er nicht mehr stört.

Die homogene Kette erfüllt diese Anforderungen nur sehr mäßig. Im Innern des Durchlässigkeitsbereiches ist der Strom außerdem auch nicht annähernd überall gleich groß.

Um nun im Innern des Durchlässigkeitsbereiches eine praktisch nahezu gleichmäßige Durchlässigkeit zu erreichen, verbunden mit einem sehr großen Steilabfall des Stromes an den Grenzen des Bereiches, seien im folgenden drei voneinander prinzipiell verschiedene Wege beschrieben.

a) Kombination verschiedener Ketten.

Eine Kette nannten wir homogen, wenn für ihre Glieder:

1. die Eigenfrequenzen,
2. die Dekremente,
3. die Kopplungen,

alle gleich sind.

Man kann nun versuchen, durch Veränderung der drei Größen einzeln oder zusammen die gewünschte Resonanzkurve zu erreichen.

Zunächst wollen wir sie nur einzeln verändern.

Wir wollen die Eigenfrequenzen verschieden wählen, beschränken uns aber auf kleine Änderungen derselben.

Bei zwei Kreisen erhalten wir aus Gleichung (14) für A_2 und B_2 folgende Werte:

$$A_2 = U_1 U_2 - (1 + m_2^2)$$

$$B_2 = U_1 + U_2.$$

U_1 und U_2 sind dabei nur um eine kleine additive Zahl verschieden. Wir können daher schreiben:

$$U_1 = U + U_0$$

$$U_2 = U - U_0,$$

wo $U_0 = \frac{2x_0}{\frac{d}{\pi}}$ und $2x_0$ die prozentuelle gegenseitige Verstimmlung der beiden Kreise

ist, und erhalten:

$$(46) \quad \begin{aligned} A_2 &= U^2 - (1 + m_2^2 + U_0^2) \\ B_2 &= 2U, \end{aligned}$$

während bei der homogenen Kette war:

$$(17_2) \quad \begin{aligned} A_2 &= U^2 - (1 + m^2) \\ B_2 &= 2U. \end{aligned}$$

Gleichung (46) hat genau dieselbe Form wie die Gleichung (17₂) bei der homogenen Kette, nur daß die Kopplungen etwas verschieden sein müssen, nämlich so, daß:

$$(47) \quad m^2 = m_2^2 + U_0^2$$

Wir erhalten daher keine neue Form der Resonanzkurve.

Für drei Kreise wird entsprechend:

$$(48) \quad \begin{aligned} A_3 &= U_1 U_2 U_3 - (U_1 + U_2 + U_3) - U_1 m_3^2 - U_3 m_2^2 \\ B_3 &= U_1 U_2 + U_2 U_3 + U_3 U_1 - (1 + m_2^2 + m_3^2). \end{aligned}$$

Setzen wir:

$$U_1 = U + U_0, \quad U_2 = U, \quad U_3 = U - U_0, \quad m_2 = m_3,$$

so wird:

$$(49) \quad \begin{aligned} A_3 &= U[U^2 - (3 + 2m_2^2 + U_0^2)] \\ B_3 &= 3U^2 - (1 + 2m_2^2 + U_0^2), \end{aligned}$$

während für die homogene Kette gilt:

$$(17_3) \quad \begin{aligned} A_3 &= U[U^2 - (3 + 2m^2)] \\ B_3 &= 3U^2 - (1 + 2m^2). \end{aligned}$$

Da gemacht werden kann:

$$(50) \quad 2m^2 = 2m_2^2 + U_0^2,$$

so ergibt sich auch für drei Systeme eine Resonanzkurve, die derjenigen einer homogenen Kette völlig entspricht.

Wir wollen nun die Dekremente variieren. Die in der Praxis vorkommenden Ketten unterscheiden sich insofern meist von der homogenen Kette, als bei ihnen das Anfangs- und Enddekrement wegen des Anschlusses an die Leitung bzw. an den Detektor größer ist als die Dekremente der mittleren Glieder.

Da sich bei Verschiedenheit der Dekremente die U nicht nur um ein additives Glied, sondern um einen Faktor ändern, und ebenso m , wollen wir die Verstimmlung, die Kopplung und die Dekremente einführen und schreiben:

$$X = 2x \quad \mathfrak{D} = \frac{d}{\pi}$$

Wir erhalten für zwei Kreise:

$$(51) \quad \begin{aligned} \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 A_2 &= X^2 - (\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 + K_2^2) \\ \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 B_2 &= (\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{D}_2) X. \end{aligned}$$

Für die Resonanzkurve kommt es nur auf die rechten Seiten an. Bei der homogenen Kette erhalten wir ähnlich:

$$(52) \quad \begin{aligned} \mathfrak{D}^2 A_2 &= X^2 - (\mathfrak{D}^2 + K^2) \\ \mathfrak{D}^2 B_2 &= 2\mathfrak{D} X. \end{aligned}$$

Man bekommt also für die inhomogene Kette genau die gleiche Resonanzkurve wie bei einer homogenen, wenn man macht:

$$(53) \quad \mathfrak{d} = \frac{\mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2}{2}$$

$$K^2 = K_2^2 - \left(\frac{\mathfrak{d}_1 - \mathfrak{d}_2}{2\pi} \right)^2,$$

also wieder keine neue Kurvenform.

Für drei Glieder ergibt sich:

$$(54) \quad \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_3 A_3 = X \{ X^2 - (\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_3 + \mathfrak{D}_3 \mathfrak{D}_1 + K_2^2 + K_3^2) \}$$

$$\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_3 B_3 = (\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_3) X^2 - (\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_3 + \mathfrak{D}_3 K_2^2 + \mathfrak{D}_1 K_3^2).$$

Für die homogene Kette gilt:

$$(55) \quad \mathfrak{D}^3 A_3 = X \{ X^2 - (3 \mathfrak{D}^2 + 2 K^2) \}.$$

$$\mathfrak{D}^3 B_3 = 3 \mathfrak{D} X^2 - (\mathfrak{D}^3 + 2 \mathfrak{D} K^2).$$

Auch jetzt haben wir für die inhomogene Kette dieselbe Form wie für eine homogene, wenn wir \mathfrak{D} und K nach folgenden Gleichungen bestimmen:

$$(56a) \quad 3 \mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_3$$

$$(56b) \quad 3 \mathfrak{D}^2 + 2 K^2 = \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_3 + \mathfrak{D}_3 \mathfrak{D}_1 + K_2^2 + K_3^2$$

$$(56c) \quad \mathfrak{D}^3 + 2 \mathfrak{D} K^2 = \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_3 + \mathfrak{D}_3 K_2^2 + \mathfrak{D}_1 K_3^2$$

Diese drei Gleichungen sind indes nicht für alle Werte von K_2 und K_3 möglich, sie sind es z. B. nicht, wenn $K_2 = K_3$ ist, aber die Dekremente verschieden sind.

Man bekommt demnach bei Verschiedenheit der Dekremente im allgemeinen Kurvenformen, die nicht durch eine homogene Kette erreichbar sind. und wir können versuchen, auf diesem Wege zur gewünschten rechteckigen Kurvenform zu gelangen. Dies werden wir unten mit richtiger Wahl der Kopplung weiter verfolgen.

Es sei zunächst noch eine Feststellung gemacht, die von Wichtigkeit ist. Wenn uns drei verschiedene $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$ gegeben sind, so können wir mit Hilfe des mittleren Dekrementes, das nach Gleichung (56a) zu bestimmen ist, und einem beliebigen K die Resonanzkurve einer homogenen Kette berechnen. Es ist uns dann mit Hilfe von Gleichung (56b und c) möglich, solche Werte für K_2 und K_3 zu finden, daß für diese inhomogene Kette mit den Werten $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3, K_2$ und K_3 genau dieselbe Resonanzkurve herauskommt, wie bei der eben genannten homogenen Kette.

Für größere K , ungefähr wenn $m = \frac{K}{\mathfrak{D}} > 2$ ist, gelten zur Bestimmung von K_2 und K_3 die abgekürzten Formeln:

$$(57) \quad K_2^2 = \frac{2}{3} K^2 \frac{2 \mathfrak{d}_1 - (\mathfrak{d}_2 + \mathfrak{d}_3)}{\mathfrak{d}_1 - \mathfrak{d}_3},$$

$$K_3^2 = \frac{2}{3} K^2 \frac{\mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2 - 2 \mathfrak{d}_3}{\mathfrak{d}_1 - \mathfrak{d}_3},$$

und wenn $\mathfrak{d}_2 = \mathfrak{d}_3, \mathfrak{d}_1 \leq \mathfrak{d}_2$:

$$(58) \quad K_2^2 = \frac{4}{3} K^2$$

$$K_3^2 = \frac{2}{3} K^2,$$

Man kann nach Gleichung (54) \mathfrak{d}_1 und \mathfrak{d}_3 und gleichzeitig K_2 und K_3 miteinander vertauschen, d. h. es ist gleichgültig, welches Anfang und Ende der Kette ist.

Die Größe der Verschiedenheit der Dekremente ist in Gleichung (58) nicht enthalten. Sie kann also auch bei Gleichheit der Dekremente angewandt werden. Es ist dabei zu beachten, daß nach Gleichung (58): $2 K^2 = K_2^2 + K_3^2$ wird.

Bei Gleichheit der Dekremente und Eigenfrequenzen kommt es, wie das folgende zeigt, nur auf diese Summe an.

Wir erhalten dann nämlich für drei Systeme bei Verschiedenheit der Kopplungen:

$$(59) \quad \begin{aligned} A_3 &= U[U^2 - (3 + m_2^2 + m_3^2)] \\ B_3 &= 3 U^2 - (1 + m_2^2 + m_3^2), \end{aligned}$$

also dieselbe Resonanzkurve wie bei einer homogenen Kette, für welche m zu bestimmen ist, aus:

$$(60) \quad 2 m^2 = m_2^2 + m_3^2.$$

Bei Ketten mit mehr als drei Gliedern läßt sich jedoch bei Verschiedenheit der einzelnen Kopplungen, aber gleichen Dekrementen und Eigenfrequenzen, nur in speziellen Fällen eine gleichwertige homogene Kette angeben.

Wir wollen jetzt an Hand praktischer Beispiele erläutern, wie man durch passende Wahl der Dekremente und Kopplungen zur gewünschten Kurvenform gelangen kann.

Es handelt sich im wesentlichen um Kombination einer zweigliedrigen mit einer eingliedrigen oder einer dreigliedrigen mit einer zweigliedrigen Kette oder, allgemeiner, einer ungeradgliedrigen Kette mit einer geradgliedrigen, die durch verhältnismäßig lose Kopplung miteinander verbunden sind.

Man hat hier die Möglichkeit, die Minima der einen Kette mit den Maxima der anderen zusammenfallen zu lassen durch passende Wahl der Dekremente und der Kopplung in jeder Kette.

Nach den Erörterungen des § 8 ist die Resonanzkurve der Kombination bei loser Kopplung zwischen den zwei Ketten berechenbar durch Multiplikation der Ordinaten ihrer Resonanzkurven. Letztere sind, da diese Ketten praktisch nur aus einem, zwei oder drei Gliedern bestehen, ohnedies leicht angebbar.

Das erste Beispiel (Fig. 16) gilt für die Kombination einer eingliedrigen und einer zweigliedrigen Kette. Es ist für die Resonanzkurve gleichgültig, welche der beiden Ketten als erste oder zweite dient.

Kurve *a* der Fig. 16 ist die Resonanzkurve eines einfachen Schwingungskreises. Die Kurve *b* diejenige einer Kette mit zwei Gliedern. Die Kurve *c* gibt die Resonanzkurve der kombinierten Kette an, die wir auch so zeichnen, daß ihr Maximum den Wert 1 hat.

Wir haben die Kurven *a* und *b* so gewählt, daß in der Nähe der Stelle $U = 0$ der Abfall von *a* dem Anstieg von *b* entspricht. Dies setzt voraus, daß das Dekrement von *a* doppelt so groß ist wie das mittlere Dekrement von *b*. Sind daher die Abszissenwerte U für *b* richtig, so müssen sie für *a* mit 2 dividiert werden; wenn wir die Abszissen in prozentueller Verstimmung auftragen, sind sie dann für beide Kurven identisch. Der raschere Abfall des Stromes in der Kurve *c*

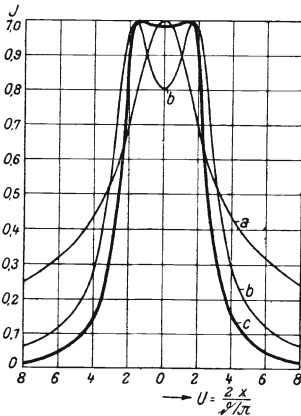


Fig. 16.

Zusammengesetzte Kette.

- a) einfaches System; Dekrement: d_1 .
- b) zweifaches System; Dekremente: d_1 und d_2 .

Es muß sein: $d_1 = d_2 + d_3 = 2d$.

gegenüber desjenigen der Kurve *b* macht sich besonders bei größerem *U* bemerkbar. So ist z. B. für $U = 6$ der Strom nach Kurve *c* nur $\frac{1}{3}$ von demjenigen bei *b*.

Es ist hier außerdem noch hervorzuheben, daß Kreis 3 stark gedämpft ist, also den Detektor enthalten kann. Setzen wir das Dekrement des zweiten Kreises gleich *d*, dasjenige des ersten Kreises gleich $3d$, also das mittlere Dekrement gleich $2d$, so müssen wir nach dem Vorhergehenden das Dekrement des dritten Gliedes gleich $4d$ machen, um zur Kurve *c* zu gelangen.

Wenden wir statt 3 Glieder nur 2 Glieder an, dämpfen aber jetzt durch den Detektor das zweite Glied so, daß sein Dekrement wieder $4d$ wird, dann erhalten wir zwar wiederum die Kurvenform von *b*, wenn wir jetzt aber als Abszisse die Verstimmung *x* auftragen, ist sie beinahe doppelt so breit wie nach der Kurve *c* sich ergibt.

Ein Beispiel von einer kombinierten Kette, die aus zwei Teilen besteht, deren einer drei und der andere zwei Glieder enthält, zeigt Fig. 17.

Die beiden Kurven *a* und *b* sind die Resonanzkurven der zu kombinierenden Teile. Die ausgezogene Kurve diejenige der zusammengesetzten Kette. Die dick ausgezogene ist durch genaue Berechnung erhalten für $m = 1$, die gestrichelte nach dem abgekürzten Verfahren.

Beide sind in den äußeren Partien identisch. Der kleine Unterschied innerhalb des Durchlässigkeitsbereiches ist nicht sehr wesentlich.

Damit der Strom in der Nähe von $U = 0$ möglichst gleichmäßig sei, müssen auch hier wieder die Verhältnisse so gewählt werden, daß der Anstieg von *a* mit dem Abfall von *b* nahe übereinstimmt. Dies erfordert für *a* ein mittleres Dekrement, das gleich dem 0,6fachen desjenigen von *b* ist.

Die kombinierten Teile *a* und *b* fallen mit ihrem Steilabfall außerdem nahezu zusammen.

Die Kurve *c* stellt eine bemerkenswerte Annäherung an die gewünschte rechteckige Kurvenform dar.

Obwohl bereits eine zweifache Kette bei $m = 1,5$ oder eine dreifache Kette nach Fig. 16c an der Resonanzstelle über ein gewisses Gebiet gleichmäßige Durchlässigkeit zeigen, liegen die Vorteile größerer Gliederzahl in der wesentlich geringeren Breite der unteren Partien der Resonanzkurve.

Es soll noch an einem Beispiel gezeigt werden, wie man auf Grund des Vorhergehenden praktisch eine Kette baut, wenn als Bedingung gestellt wird, daß nach 10 Proz. Verstimmung der Strom auf $\frac{1}{60}$ seines maximalen Wertes falle.

Es ist nach Fig. 17c für diesen Stromabfall $U = 5$, wobei die angeschriebenen Abszissenwerte für die dreigliedrige Kette richtig sind.

Also wird das mittlere Dekrement der Kurve *b*:

$$d = \frac{2 \cdot 0,1 \cdot \pi}{5} = 0,1256,$$

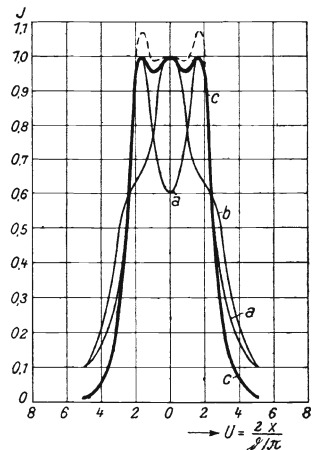


Fig. 17.

Kombinierte Kette.

a) zweifaches System (d_1, d_2).

b) dreifaches System (d_3, d_4, d_5).

$\frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{0,6}{3}(d_3 + d_4 + d_5) = 0,6d$.

oder, wenn die Schwingungskreise ein Verlustdekrement

$$d_0 = d_2 = d_3 = d_4 = 0,04$$

haben, wird rund

$$d_1 = 0,3.$$

Das mittlere Dekrement von a ist dann: $0,1256 \cdot 0,6 = 0,07536$ und daher:

$$d_5 = 0,11.$$

Ferner wird:

$$K_2 = 0,106, \quad K_3 = 0,054, \quad K_4 = 0,04, \quad K_5 = 0,083.$$

b) Gemischte Kopplungen an mindestens zwei Stellen.

Fig. 18 zeigt eine schematische Darstellung einer vierfachen Kette. Die einzelnen Systeme sollen gleiche Eigenfrequenz besitzen. Die Kopplung K_2 zwischen 1 und 2, ebenso diejenige K_4 zwischen 3 und 4, ist gemischt. Die Kopplung K_3 zwischen 2 und 3 dagegen rein magnetisch.

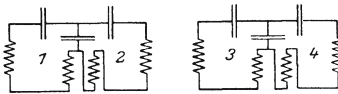


Fig. 18.
Vierfache Kette mit gemischter Kopplung.

Die Fig. 19 zeigt die Resonanzkurve des ganzen Systems, und zwar die ausgezogene Kurve für $K_3 = 10 \text{ vH}$, die gestrichelte für $K_3 = 5 \text{ vH}$. Die gemischten Kopplungen sind beide so gewählt, daß bei $x = 0$ eine Kopplung von 10 vH herauskommt, während die eine Kopplung für $x = 10 \text{ vH}$ verschwindet, die andere für $x = -12,5 \text{ vH}$.

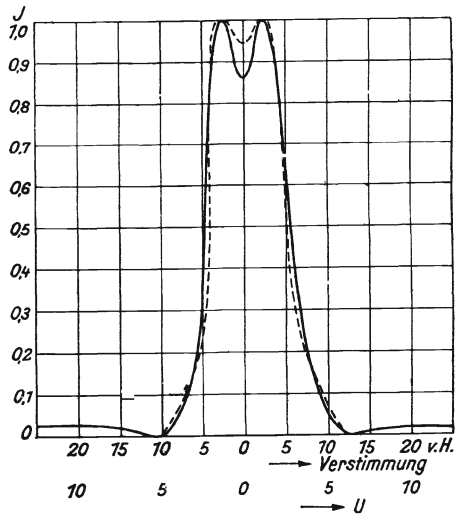


Fig. 19.
Vierfache Kette mit gemischter Kopplung.

Die Dekremente der Kurve sind:

$$d_1 = d_4 = 0,187$$

$$d_2 = d_3 = 0,0628.$$

Nach den beiden Nullstellen kann bei solchen Ketten der Strom wieder merklich ansteigen. Die Verhältnisse sind in dem Beispiel so gewählt, daß dieser Anstieg unbedeutend ist.

c) Die elektromotorische Kraft soll nicht nur im ersten Kreise sitzen.

Die Differenzkette.

Es wurden noch im letzten Paragraphen des ersten Teiles Formeln angegeben für den Fall, daß die elektromotorische Kraft nicht ausschließlich im ersten Kreise der Kette sitzt.

Um zu einer gewünschten Resonanzkurvenform zu kommen, hat man dann außer den im vorigen besprochenen Möglichkeiten noch die Wahl der richtigen Phase der elektromotorischen Kräfte.

Wenn wir außerdem noch die einzelnen Kreise nicht nur in der Reihenfolge miteinander koppeln, wie bei der normalen bisher betrachteten Kette, so werden die Verhältnisse sehr unübersichtlich. Eine einfache Möglichkeit wollen wir besprechen.

Es ist in der Praxis bekannt, daß, wenn man zwei voneinander unabhängige, aber etwas gegeneinander verstimmt Systeme gleichzeitig von derselben elektromotorischen Kraft speist, bei großen Verstimnungen der elektromotorischen Kraft gegenüber den Eigenfrequenzen der Kreise der Differenzstrom beider Systeme wesentlich schneller abfällt als derjenige einer einfachen Resonanzkurve.

Es soll im folgenden der allgemeine Fall behandelt werden, daß die beiden Systeme, deren Differenzstrom zur Verwendung kommt, noch miteinander gekoppelt sind.

Wir bedienen uns der Formel (44) und erhalten:

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{a_2 g_{10} + g_{20} g_{12}}{a_1 a_2 - g_{12} \cdot g_{21}} \cdot \mathfrak{J}_0$$

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{a_1 g_{20} + g_{10} g_{21}}{a_1 a_2 - g_{12} \cdot g_{21}} \cdot \mathfrak{J}_0$$

Es soll $g_{10} = g_{20}$ sein. Ferner machen wir die Dekremente gleich, so daß $g_{12} = g_{21}$ ist.

U_1 und U_2 seien nur wenig voneinander verschieden, ihre Differenz sei $2 U_0$; wir setzen:

$$U_1 = U - U_0$$

$$U_2 = U + U_0.$$

Man bekommt nach oben den Differenzstrom:

$$(61) \quad \mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2 = \frac{(a_2 - a_1) \cdot g_{10}}{a_1 a_2 - g_{12} \cdot g_{21}} \cdot \mathfrak{J}_0.$$

Der Zähler ist eine von ω unabhängige Konstante, die indes für $a_1 = a_2$ zu Null wird.

Der Nenner hat hier genau die Form, die wir früher bei zwei Systemen kennen gelernt haben.

Wir bekommen daher eine Resonanzkurve, die völlig derjenigen zweier hinter einander geschalteter Kreise entspricht, wenn diese eine kleine Verstimmung gegen einander haben. Führen wir U in (61) ein, so wird (vgl. 46):

$$(62) \quad (J_1 - J_2)_0 = \frac{2 U_0}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot g_{10} \mathfrak{J}_0$$

$$A = U^2 - (1 + m^2 + U_0^2)$$

$$B = 2 U.$$

Ist die Verstimmung sehr klein, dann wird der Strom auch sehr klein, von $U_0 = 1$ an erhalten wir jedoch dieselbe Größenordnung des Stromes wie für ein normal gekoppeltes zweifaches System. Die Form der Resonanzkurve entspricht ebenfalls derjenigen eines normalen zweifachen Systems, und wir können so die Kurve 16b durch das Differenzsystem erhalten.

Lassen wir die beiden Systeme entgegengesetzt auf ein drittes wirken, das die Resonanzkurve der Fig. 16a hat, so erhalten wir als Resonanzkurve eines derartigen dreifachen Systems die Fig. 16c wieder.

Durch Hintereinanderschaltung mehrerer derartiger Differenzsysteme, eventuell unter Vermittlung eines aperiodischen Kreises, ergibt sich eine neuartige Kette, die ich Differenzkette nennen möchte. Die Fig. 20a und b zeigt das Schema von Differenzketten.

Die allgemeine Behandlung der Differenzkette ist nach dem Vorherigen möglich. Wir wollen aber nicht näher darauf eingehen.

Die Differenzsysteme haben gegenüber den normalen den Vorzug, bei gleicher Gesamtgliederzahl etwas kleinere Anspruchszeiten bei Stromänderungen zu ergeben.

Das Differenzsystem kann sich auch, statt auf der Verschiedenheit der Eigenfrequenzen, auf der Verschiedenheit der Dekremente aufbauen.

Wir erhalten nämlich bei Gleichheit der Eigenfrequenzen, aber Verschiedenheit der Dekremente, für den Differenzstrom, wenn $K_{10} = K_{20}$ ist:

$$(63) \quad (J_1 - J_2)_0 = \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot g_{10} \mathfrak{J}_0$$

$$A = U^2 - (1 + m^2)$$

$$B_2 = 2U.$$

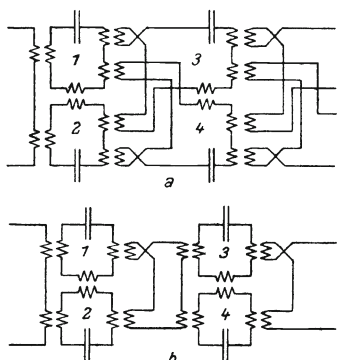


Fig. 20.
Schema für Differenzkette.

U und m sind für das mittlere d und K nach Gleichung (53) zu bestimmen.

Statt nur zwei Systeme parallel zu schalten und ihren Differenzstrom zu benutzen, können wir auch drei (oder mehrere) Systeme parallel schalten, etwa nach

Fig. 21, und alle Systeme auf einen aperiodischen Kreis wirken lassen. Nach der Gleichung (43b) sind dann für die Ströme in den einzelnen Kreisen die Nenner alle gleich, und zwar entsprechen sie genau dem früheren Nenner einer dreifachen Kette. Durch passende Wahl der Kopplungen, Dekremente und Eigenfrequenzen ist es erreichbar, daß die Zähler der Ströme, die wir nach Gleichung (43a) erhalten, so miteinander kombiniert werden können, daß der kombinierte Strom im aperiodischen Kreis einen Zähler erhält, der von ω unabhängig ist. Der Strom im aperiodischen Kreis entspricht dann demjenigen im letzten Glied einer dreifachen normalen Kette.

Es wird:

$$-Z_1 = g_{10} a_2 a_3 + g_{20} g_{12} a_3 - g_{10} g_{23} g_{32} + g_{30} g_{12} g_{23}$$

$$Z_2 = -g_{20} a_1 a_3 - g_{30} g_{23} a_1 - g_{10} g_{21} a_3$$

$$-Z_3 = g_{30} a_2 a_1 + g_{20} g_{32} a_1 - g_{30} g_{21} g_{12} + g_{10} g_{32} g_{21}$$

und für: $a_1 = a_2 = a_3, \quad g_{10} = g_{30} = \frac{1}{2} g_{20}, \quad g_{12} = g_{21} = -g_{23} = -g_{22}$

wird:

$$(64) \quad \mathfrak{J}_2 - (\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_3) = \frac{-4g_{10} g_{12}^2}{N} \cdot \mathfrak{J}_0,$$

d. h. man erhält die Resonanzkurve der normalen homogenen Kette von drei Gliedern.

Ähnlich ist die Form der rechteckigen Kurve (Fig. 16c) erreichbar durch richtige Wahl der a und g .

Man verfährt in genau derselben Weise, wenn man, analog der Fig. 21, noch mehr als drei Glieder parallel schaltet, und kommt dabei zu einer Kette, die ich Parallelkette nennen möchte.

Anschluß der Kette an eine Leitung.

§ 21. Vom Standpunkt der Leitungstheorie aus wird man, um die günstigste Energieübertragung von der Leitung auf die Kette zu bekommen, den Wellenwiderstand der Kette bei Resonanz gleich der Charakteristik der Leitung machen.

Wir haben uns bisher ausschließlich an die Methoden der Schwingungstheorie gehalten und werden daher im folgenden auch den günstigsten Anschluß an die Leitung von diesem Standpunkt aus zu erreichen suchen.

Das Eigendekrement einer Antenne sei \mathfrak{d}_v , das Strahlungsdekrement derselben \mathfrak{d}_s und das Nutzdekrement \mathfrak{d}_n ; das Gesamtdekrement der Antenne ist dann

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_s + \mathfrak{d}_v + \mathfrak{d}_n.$$

Die gesamte Energieaufnahme bei Resonanz:

$$E = C \cdot \frac{\mathfrak{d}_s}{\mathfrak{d}},$$

wovon ein Teil wieder ausgestrahlt, ein Teil nutzlos verbraucht und nur ein Teil dem Detektor zugeführt wird. Der Teil, welcher dem Detektor zugeführt wird, beträgt:

$$(65) \quad E_n = C \cdot \frac{\mathfrak{d}_s}{\mathfrak{d}} \cdot \frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{d}}$$

Wenn wir nun die Möglichkeit haben, sowohl \mathfrak{d}_s wie auch \mathfrak{d}_n zu variieren bei konstantem \mathfrak{d}_v , so bekommen wir bei ungedämpften Wellen in den Detektor am meisten Energie, wenn

$$\mathfrak{d}_s = \mathfrak{d}_n = \infty$$

ist. Indes ist es nicht notwendig, daß die beiden Dekremente sehr große Werte annehmen müssen, um schon einen namhaften Bruchteil der möglichen Energie dem Detektor zuzuführen. Wir erhalten nämlich aus obiger Formel (65) für die Detektorenergie die Tabelle 2:

Tabelle 2.

$\mathfrak{d}_n = \mathfrak{d}_s =$	$1/8 \mathfrak{d}_v$	$1/4 \mathfrak{d}_v$	$1/2 \mathfrak{d}_v$	\mathfrak{d}_v	$2 \mathfrak{d}_v$	$3 \mathfrak{d}_v$	$10 \mathfrak{d}_v$
$E =$	0,04	0,11	0,25	0,45	0,64	0,74	0,91

also schon für $\mathfrak{d}_s = \mathfrak{d}_v$ fast 50 vH und für $\mathfrak{d}_s = 3 \mathfrak{d}_v$ 75 vH der möglichen Energie, die gleich 1 gesetzt ist, in den Detektor.

Wir übertragen diese Ergebnisse auf den Anschluß eines Schwingungskreises an eine Telephonleitung, indem wir unter \mathfrak{d}_s dasjenige Dekrement verstehen, welches der Schwingungskreis infolge seiner Kopplung mit der Leitung erhält. Diese Übertragungsmöglichkeit folgt aus dem Reziprozitätsgesetz. Wenn man den Strom im Schwingungskreis konstant hält, so ist die von ihm an die Leitung abgegebene Energie proportional zu \mathfrak{d}_s und demnach auch die in einer Empfangsstation aufgenommene Energie proportional zu \mathfrak{d}_s . Wenn man daher den Strom in dieser Station konstant hält, also mit ihr sendet, so muß nach dem Reziprozitätsgesetz jetzt die vom Schwingungskreis aufgenommene Energie proportional zu \mathfrak{d}_s sein.

Wir verbinden rein praktisch einen elektrischen Schwingungskreis mit der Leitung in der Weise, daß wir solange seine Kopplung mit ihr variieren, bis das Dekrement des Schwingungskreises einen gewünschten Wert hat, z. B. das Dreifache des ursprünglichen wird, und koppeln den Detektor mit diesem Schwingungskreis ebenso. Man erhält dann für $d_s = 3 d_v$, 75 vH der überhaupt möglichen Energie dem Detektor zugeführt. Begnügt man sich mit 50 vH, so braucht man nach dem Vorhergehenden das Strahlungs- und Nutzdekrement nur gleich dem Verlustdekrement zu machen.

Wie die evtl. notwendigen Zwischentransformatoren oder Kapazitäten, wenn ihre Ohmschen Verluste klein sind, gebaut werden, ist bei dieser Kopplungsvorschrift an sich gleichgültig. Es ist nur notwendig, daß sich das vorgeschriebene Strahlungsdekrement erreichen läßt.

Die Energie, die ein solcher Schwingungskreis aufnimmt, wird zum Teil dem Detektor zugeführt, zum Teil wertlos verbraucht, zum Teil aber in die Leitung zurückgestrahlt, und zwar letzteres entsprechend der Größe des Strahlungsdekrements im Verhältnis zum Gesamtdenkrement. Ein abgestimmtes System bedeutet demnach immer eine Reflektionsstelle in der Leitung; es wird zum mindesten die Hälfte der Energie der Welle zurückgeworfen, da natürlich auch der Teil reflektiert wird, den der Schwingungskreis überhaupt nicht aufnimmt.

Bei einer Kette mit mehreren Gliedern sind die Verhältnisse etwas anders. Das Nutzdekrement liegt dann im letzten Gliede. Aus der Fig. 12, IX wissen wir, daß bei der homogenen Kette die gesamte Energieaufnahme mit steigender Gliederzahl und engerer Kopplung fällt.

Beide bedingen nämlich eine schnellere Energiewegnahme aus dem ersten Kreise, und dies kann formell als Zunahme der Dämpfung des ersten Gliedes behandelt werden, wie sich aus der Identität der Fig. 12, IX mit den Stromkurven im ersten Kreis der Fig. 11 und 12 ergab. Als Energieaufnahme des ganzen Systems, abzüglich der reflektierten Energie, haben wir dann:

$$E = C \cdot \frac{d_s}{d_s + d_1} \cdot \frac{d_1}{d_s + d_1},$$

wo jetzt d_1 das Dekrement des ersten Kreises d_v plus dem Dekrement, das seiner Energieabgabe an die Kette entspricht, darstellt. Man erhält formell nach dieser Gleichung bei Änderung des Strahlungsdekrements die dem System zugeführte Energie die Tabelle 3:

Tabelle 3.

$d_s =$	$\frac{1}{4} d_1$	$\frac{1}{2} d_1$	d_1	$2 d_1$	$4 d_1$
$E =$	0,64	0,88	1	0,88	0,64

d. h. ein flaches Maximum für $d_s = d_1$.

Das Dekrement d_1 wird für $n = \infty$ nach Fig. 12, IX zwischen $m = 1$ und $m = 5$ in roher Annäherung:

$$d_1 = d_v + m d_v$$

Für endliche Gliederzahl ist d_1 kleiner. Wir können aber dann das Detektordekrement so wählen, daß es ebenfalls ungefähr diesem Wert entspricht.

Die aufgenommene Energie wird, bei jedesmal richtiger Einstellung von $d_s = d_1$, unabhängig von der Kopplung und Gliederzahl.

Wählen wir indes d_v für alle Fälle etwa 2- bis 3mal so groß wie d_v , so ist der Unterschied in der Gesamtenergieaufnahme des Systems nach der Tabelle 2 nicht beträchtlich verschieden von derjenigen bei günstigster Einstellung.

Die Energie des Detektors, der im letzten Gliede sitzt, muß natürlich bei großer Gliederzahl sinken.

Ausgehend von der homogenen Kette machten wir die vorangehenden Betrachtungen auf Grund der Tatsache, daß die Kopplung der Kette mit dem ersten Glied formell als Zunahme seiner Dämpfung betrachtet werden kann. Eine genauere Behandlung mit Hilfe der Formeln (31) kann zu keinem wesentlich anderen Resultat führen.

Bei sehr enger Kopplung und größter Energieausnutzung muß man das Strahlungsdekrement unter Umständen so groß machen, daß wir § 9 anzuwenden haben. Nach diesem Paragraphen soll dann das erste Glied eine sehr viel kleinere Eigenfrequenz haben als die übrigen Glieder und wir dürfen die Kette so behandeln, als ob sie beim zweiten Glied beginnen würde. Dieses stark gedämpfte erste Glied kann auch aus Kapazität und Selbstinduktion bestehen, die direkt in die Leitung eingeschaltet sind.

Die Einschwingvorgänge.

§ 22. Eine genaue Behandlung der Ein- und Ausschaltvorgänge des n -fachen Systems ist mathematisch recht kompliziert. Wir werden daher im folgenden versuchen, durch einfache Überlegungen auf Grund unserer bisherigen Kenntnisse über die Ströme in den einzelnen Systemen im stationären Zustand uns ein rohes Bild über diesen Gegenstand zu machen.

Wenn wir die elektromotorische Kraft, die auf das erste System wirkt, einer plötzlichen Änderung unterwerfen und dann wieder konstant halten, so wird es eine gewisse Zeit dauern, bis in allen Kreisen praktisch der neue stationäre Zustand erreicht ist. Dabei interessieren wir uns hauptsächlich um die Vorgänge im letzten System, in welchem der Detektor sitzt.

Wir können aber nicht auf die Einzelheiten während des Überganges eingehen, vielmehr wollen wir nur versuchen, festzustellen, welches Dekrement ein einzelner Schwingungskreis haben müßte, damit bei ihm die Übergangsvorgänge praktisch dieselbe Zeit brauchen, wie diejenigen im Detektorkreis unserer Kette. Man muß sich bewußt sein, daß die Übergangsvorgänge selber nicht gleich verlaufen. Für ein einziges System mit bestimmter Dämpfung sind aber die Ausgleichsvorgänge bekannt und leicht berechenbar.

Schaltet man bei ihm die elektromotorische Kraft plötzlich aus, so klingt sein Strom entsprechend der Dämpfung exponentiell ab.

Bei einem zweifachen System ist die Energie, wenn die erregende Frequenz einem Maximum entspricht, in beiden Systemen während des stationären Zustandes dieselbe. Nach dem Ausschalten der Energiezufuhr treten bei enger Kopplung Pendelerscheinungen auf, wobei der Gesamtenergieverbrauch nach längerer Zeit einem Dekrement entspricht, das gleich dem arithmetischen Mittel der Eigendekremente beider Kreise ist.

Bei drei Systemen enthält das erste und dritte Glied bei enger Kopplung ungefähr dieselbe Energie, während die des zweiten dagegen klein ist. Beim Ausschalten der elektromotorischen Kraft werden wiederum Pendelerscheinungen auftreten, wobei

sich schließlich die Energie auf alle drei Systeme verteilt und darin absorbiert werden muß gemäß einem Dekrement, das etwa dem Mittel der drei Dekremente entspricht. Im dritten Kreis allein wird die Energie zunächst eher noch etwas schneller sinken, da hier auch die Abgabe der Energie an den zweiten Kreis, der im stationären Zustand nur wenig enthält, in Betracht zu ziehen ist. Bei loserer Kopplung liegen die Verhältnisse etwas anders. Hier ist sowohl im ersten wie im zweiten Kreis die Energie größer als im eben betrachteten Fall enger Kopplung, während diejenige im dritten Kreis kleiner ist. Hier kann der Energieverbrauch im dritten Kreis noch eine Zeitlang von der Energie der beiden ersten zehren, so daß sein Abfall etwas langsamer erfolgen muß.

Für Ketten mit mehr als drei Gliedern können wir ähnliche Betrachtungen anstellen.

Unsere Ketten mit möglichst rechteckiger Kurvenform hatten Kopplungen, die einem $m = 1$ bis $m = 3$ entsprechen. Wir wollen für diese nicht sehr enge Kopplung für die Ausgleichsvorgänge im Detektorkreis mit einem Ersatzdekrement rechnen, das bei drei Systemen gleich $\frac{3}{4}$ des mittleren Dekrementes der Kette ist und bei fünf Systemen gleich $\frac{2}{3}$ desselben.

Bei näherem Eingehen auf die Einschaltvorgänge kommt man auf ähnliche Ergebnisse.

Mit Hilfe dieser Vorstellungen berechnen wir die Dekremente, welche für eine dreifache und fünffache Kette notwendig sind, damit wir bei Träger-Stromtelephonie, wo sowohl bei Beginn wie am Ende der Leitung eine Siebkette eingeschaltet sei, mindestens anwenden müssen, um deutliche Sprache zu erhalten. Der Trägerstrom soll die Frequenz 20000 pro Sekunde haben. Da beide Siebketten vollständig voneinander unabhängig sind, müssen wir das Ersatzdekrement etwas kleiner wählen als für eine Kette allein. Wir wollen das 0,75fache nehmen.

Eine Telephonmembran mit einem Eigendekrement 0,3 liefert keine gute Sprache, während dieselbe bei einem Dekrement 0,6 sehr gut ist. Rechnen wir mit einer mittleren Sprachfrequenz pro Sekunde von 1000, so brauchen wir für die Siebketten ein Ersatzdekrement $d = 0,03$, um die mittlere Sprachfrequenz ebenso gut wiederzugeben wie eine Telephonmembran von einem Dekrement 0,6, falls Verzerrungen nicht auch noch anderweitig hereinkommen. Daraus berechnet man für eine dreifache Kette nach Fig. 16 c folgende Dekremente: $d_1 = 0,08$, $d_2 = 0,02$, $d_3 = 0,06$, und für eine fünffache Kette nach Fig. 17 c $d_1 = 0,135$, $d_2 = 0,04$, $d_3 = 0,04$, $d_4 = 0,02$, $d_5 = 0,072$, worin dann jedesmal Anfangs- und Enddekrement mit Absicht größer gemacht sind als die andern, aber so, daß das Ersatzdekrement dem Wert 0,03 entspricht.

Es geht aus diesen Darlegungen hervor, daß man eine Kette bis zu fünf Gliedern mit Dekrementen von normaler Größe bauen kann, ohne befürchten zu müssen, daß die Sprachgüte bei dieser Gliederzahl leidet.

Sicherlich werden Sprachverzerrungen bei nicht gleichmäßiger Durchlässigkeit innerhalb des Loches eine größere Rolle spielen.

Es muß noch darauf hingewiesen werden, daß bei Anwendung gemischter Kopplung, wenn dieselbe eine Nullstelle in der Nähe der Arbeitsfrequenz für den Strom ergibt, Grund zu Sprachverzerrungen dadurch hereinkommen kann, daß dabei für die verschiedenen Frequenzen des Trägerstromes die Kopplungen der Kette stark variieren und daher die Einschwingzeiten für verschiedene Trägerstromfrequenzen etwas verschieden sein können.

Über die Ableitung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik und verwandte Fragen.

(Schluß.)

Von Hermann von Siemens.

Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium zu Siemensstadt.

10. Rückblick.

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit ¹⁾ wurde der statistische Sinn des zweiten Hauptsatzes und seine Beziehung zur kausalen Denkweise erörtert. Dabei wurde am Schluß der Einleitung auch eine Betrachtung der Lebensvorgänge versprochen, insofern sie dem Gesetz von der Zunahme der Wahrscheinlichkeit des Zustandes widersprechen und somit eine teleologische Erklärung erheischen. Diese Betrachtung soll hiermit nachgeliefert werden, und es sei daher erlaubt, die loc. cit. gewonnenen Ergebnisse kurz zu rekapitulieren.

Es wurde gezeigt, daß kein logischer Grund zu der Annahme vorliegt, daß der unwahrscheinlichere von zwei zeitlich benachbarten Zuständen eines Systems der frühere und der wahrscheinlichere der spätere sein muß. Es liegt vielmehr so, daß der unwahrscheinlichere Zustand gegeben sein muß, wenn man ihn kennen soll, während der wahrscheinlichere aus dem anderen statistisch abgeleitet werden kann. Die Voraussetzung hierfür ist der an einem Beispiel festgestellte Satz, daß von einem gegebenen Zustand mehr Übergangsmöglichkeiten zu wahrscheinlicheren Nachbarzuständen vorhanden sind als zu unwahrscheinlicheren. Der unwahrscheinlichere Zustand ist also erkenntnismäßig die Bedingung, der wahrscheinlichere das Bedingte. Setzt man die Bedingung zeitlich vor das Bedingte, so ist erstere die Gelegenheitsursache und letzteres die Wirkung. Wählt man die umgekehrte Reihenfolge, so wird die Bedingung zum Zweck, das Bedingte zum Mittel. Das erste Verfahren wurde als „kausales“, das zweite als „teleologisches“ Denken bezeichnet. Da der Mensch beide Verfahren zum Erkennen benützt, kann nicht das erstere allein a priori richtig sein und aus ihm rückwärts die Richtung des Zeitablaufs konstruiert werden. Dieser muß vielmehr mit den ursprünglichen Wahrnehmungen mitempfunden und die Entscheidung zwischen kausalem und teleologischem Denken der Erfahrung überlassen werden. Beide Methoden sind statistisch und geben für die Richtigkeit der Erkenntnis keine Sicherheit, sondern nur eine gewisse Wahrscheinlichkeit. Schaltet man die Statistik aus, indem man das System in allen Einzelheiten genau kennt, so kann man aus einem beliebigen gegebenen Zustand als Bedingung sowohl die früheren als die späteren Zustände mit Sicherheit ableiten. Das kausale und teleologische Denken vereinigen sich dann zum „konditionalen“.

¹⁾ Wissenschaftliche Veröffentlichungen aus dem Siemens-Konzern I, 1, S. 154 ff.

Der zweite Hauptsatz ist der molekularkinetische Spezialfall eines allgemeinen Gesetzes, das aussagt, daß die Zustandswahrscheinlichkeit eines sich selbst überlassenen Systems im Laufe der fortschreitenden Zeit zunimmt. Als sich selbst überlassen gilt dabei ein System, dessen Zustandswahrscheinlichkeit nicht mit der eines anderen Systems zwangsläufig verbunden ist. Ist dies doch der Fall, so müssen beide Systeme als ein Ganzes dem Gesetze unterworfen werden. Dieses Gesetz, das sich aus der Annahme eines besonders unwahrscheinlichen Anfangszustandes der Welt im Anfang seiner Geltungsdauer statistisch ableiten läßt, entscheidet in seiner allgemeinen Fassung für die allgemeine Richtigkeit des kausalen Verfahrens.

11. Die belebte Materie vom statistischen Standpunkt aus gesehen.

Nun wird aber das teleologische Verfahren ebenfalls angewendet, es muß also auch ein adäquates Objekt haben. Es entsteht also die Frage, ob es Systeme gibt, die dem allgemeinen Wahrscheinlichkeitsgesetz nicht gehorchen, sondern im Fortschritt der Zeit einer höheren Ordnung zustreben, ohne daß diese Zunahme durch eine entsprechende Abnahme in einem damit gekoppelten System erzwungen wird. Solche Systeme müssen aus dem allgemeinen kausalen Rahmen herausfallen, zur teleologischen Betrachtung zwingen und dadurch eine auffallende, von allem übrigen scharf abgegrenzte Erscheinung bilden.

Alle diese Forderungen erfüllt die belebte Materie. Sie tritt in den allerverschiedensten Formen auf, zwischen denen sich doch unmerkliche Übergänge herstellen lassen. Aber das primitivste Lebewesen und die komplizierteste Erscheinung der unbelebten Natur trennt eine Kluft, die sich nicht überbrücken läßt. Und wer die Lebensvorgänge systematisch beschreiben und ihre Zusammenhänge übersehen will, wird immer wieder zu dem Begriff des Zweckes gedrängt, wenn sich auch eine zunehmende Zahl von Einzelvorgängen rein kausal erklären läßt. Es soll deshalb das Lebensproblem von der statistischen Seite angefaßt werden, und zwar als rein materielles Problem, ohne Rücksicht auf metaphysische oder Bewußtseinsfragen. Es sollen die Gesetze betrachtet werden, denen die Materie folgt, insofern sie zu einem Lebewesen organisiert ist.

Schopenhauer sagt, daß mit dem Leben eine neue Art von Kausalität auftritt, nämlich das Reagieren auf Reize. In der Tat ist die Reizreaktion ein treffendes Charakteristikum der Lebewesen. Es gilt nun, das besondere Merkmal von Reiz und Reaktion im Gegensatz zu Ursache und Wirkung zu finden. Da wegen des komplizierten Aufbaues eines Organismus der genaue Tatbestand des Vorgangs nicht bekannt ist, läßt sich im einzelnen Falle nichts gegen die Behauptung erwidern, daß alles genau so vor sich geht, wie in der unbelebten Natur. Faßt man dagegen eine größere Zahl von Reizreaktionen zusammen, so verschieden auch die einzelnen Reize und Reaktionen seien, so findet man in ihnen etwas Gemeinsames, das auf dem Erfolg beruht. In einem weit über das Zufallsmaß hinausgehenden Prozentsatz führt die Reaktion zur Förderung der vitalen Ordnung des reagierenden Organismus in dem Sinne, daß der reizende Vorgang nach der Reaktion die Ordnung des Organismus weniger schädigt oder mehr fördert, als es ohne die Reaktion der Fall gewesen wäre. Das Besondere eines Lebensvorgangs ist also statistischer Art, und das Bestimmende für ihn ist die Steigerung der Ordnung, also die Verminderung der Zustandswahrscheinlichkeit, die auf diesen Vorgang für das reagierende materielle System folgt. Durch diesen, der gewöhnlichen Massenwirkung entgegengesetzten

statistischen Effekt wird die Aufrechterhaltung der Lebensordnung gegenüber dem dauernden Abbau durch die Außenwelt überhaupt erst möglich. Der Effekt ist darum so offenbar vorhanden, daß er nicht abgestritten werden kann, wie weit man auch im einzelnen mit der mechanischen Erklärung der Lebensvorgänge kommen mag.

Es fragt sich jetzt, ob ein Organismus überhaupt ein sich selbst überlassenes System ist. Molekularkinetisch zweifellos nicht. Es werden immer freie Energien als Licht oder Nahrung zugeführt, die für das Leben notwendig sind, und deren Verbrauch vollauf genügt, um den Stoffwechsel und die Bewegung aufrecht zu erhalten. Der zweite Hauptsatz als Speziatsatz wird also nicht verletzt. Aber es ist etwas anderes, ob die freie Energie des Lichtes genügt, um aus Wasser, Kohlensäure, Salzen und Stickstoff organische Verbindungen herzustellen, oder ob diese Verbindungen so zusammengefügt werden, daß sie eine Apparatur bilden, um neue Mengen heranzuschaffen und mit Hilfe des Lichtes zu verarbeiten. Es ist auch etwas anderes, ob die so gebildeten Substanzen die hinreichende freie Verbrennungsenergie haben, um gewisse Massenbewegungen herbeizuführen, oder ob die Bewegungen so ausfallen, daß dadurch günstigere Lebensbedingungen geschaffen werden. Erst wenn man beweisen kann, daß durch einen über das thermodynamisch Notwendige hinausgehenden Verbrauch freier Energie (der natürlich immer festgestellt werden kann) die zu zweit genannten Vorgänge erzwungen werden, kann man den unwahrscheinlichen Vorgang der vitalen Ordnung organischer Materie als mit photochemischen oder oxydativen Prozessen zwangläufig verbunden ansehen.

12. Die Erhaltung eines Mechanismus ist kausal nicht zu verstehen.

Ist das System einer Pflanze bezüglich seiner organischen Synthese zwangläufig verbunden mit dem Verbrauch geordneter Lichtenergie, so wird die Synthese thermodynamisch möglich. Aber die Gegenwart des Lichtes allein genügt nicht dazu. Man sollte im allgemeinen erwarten, daß das System Pflanze-Licht in den wahrscheinlichsten Zustand übergehen würde, indem die Lichtenergie in niedrig temperierte Wärme verwandelt wird. Soll ein wesentlicher Teil in Form von freier chemischer Energie wiedergewonnen werden, so muß das Licht unter Bedingungen gesetzt werden, die ihm die Verwandlung in Wärme abschneiden und ihm eine andere Umsetzung aufzwingen. Das ist das Wesen der Zwangläufigkeit. Denn eine natürliche Hemmung, wie für die Vereinigung von Wasserstoff und Sauerstoff, besteht hier nicht. Die Erfüllung einer solchen einschränkenden Bedingung bedeutet aber das Vorhandensein einer gewissen Ordnung im System, also eine Einschränkung seiner Komplexionen, d. h. eine Unwahrscheinlichkeit. Ein derartig geordnetes System heißt ein Mechanismus. Die zwangläufige Verknüpfung von Licht und Synthese in der Pflanze erfolgt also durch einen Mechanismus, der als solcher etwas Unwahrscheinliches ist. Die Unwahrscheinlichkeit ist hier allerdings nicht mehr thermodynamischer Natur, sondern bezieht sich auf die räumliche Verteilung der Materie in einer größeren Größenordnung. Es wäre hierauf also nicht mehr der zweite Hauptsatz im thermodynamischen Sinne, wohl aber im allgemeinen Sinne anzuwenden. Gemäß diesem Satze kann ein geordneter Mechanismus den Grad seiner Ordnung theoretisch höchstens aufrecht erhalten, wird ihn aber in der Praxis immer allmählich vermindern, d. h. er nutzt sich ab, wodurch die Ausbeute zurückgeht. Soll er wieder auf die anfängliche Ordnung gebracht oder dauernd auf ihr erhalten werden, so muß er sich hier in einem Wahrscheinlichkeitsgleichgewicht befinden. Das ist aber nur durch Koppelung mit

einem weiteren geordneten System durch einen zweiten Mechanismus möglich. Von diesem letzteren läßt sich aber alles wiederholen, was von dem ersten gesagt ist. Man erhält schließlich eine unendliche Reihe hintereinanderstehender Mechanismen, ohne der Erklärung an Hand des Wahrscheinlichkeitsgesetzes näherzukommen, wie es möglich ist, daß die Lebensmechanismen im Lauf der Zeit erhalten bleiben und sich sogar vergrößern und an Zahl vermehren.

Es ergibt sich also, daß gegen die Lebensvorgänge ein thermodynamischer Einwand nicht gemacht werden kann, und daß es prinzipiell möglich ist, die biologische Chemie durchzuführen bis zur restlosen Aufklärung aller vorkommenden Umsetzungen. Dagegen ist es nicht möglich, auf analoge Weise die Bildung, Erhaltung und Vermehrung der Apparatur zu verstehen, welche die Lebensvorgänge untereinander und mit der unbelebten Außenwelt zwangsläufig verknüpft. Das ist auch dann nicht möglich, wenn der Verbrauch an freier Licht- und Verbrennungsenergie quantitativ mehr als ausreichend ist, um als Äquivalent dieser Ordnungssteigerung zu dienen.

13. Zwei Erklärungsmöglichkeiten: Zufall oder Freiheit.

Um dennoch zu einem Verständnis zu kommen, liegt es nahe, auf Grund der früheren Überlegungen anzunehmen, daß hier einmal der logisch nicht unmögliche Fall realisiert ist, daß sich die Zustandswahrscheinlichkeit im Fortschritt der Zeit vermindert, ohne daß ein Zwang dazu besteht. Aber es gibt dagegen ein schweres Bedenken, das allerdings nicht unbedingt durchschlagend ist. Wenn man nämlich den zweiten Hauptsatz begreift aus der Annahme eines sehr geordneten Weltzustandes im Anfang seiner Geltung, so macht man eine sehr allgemeine und umfassende Annahme ohne irgendwelche Unterteilungen. Dadurch gewinnt der zweite Hauptsatz die Eigenschaft eines allgemeinen Naturgesetzes. Will man gegenläufige Vorgänge verstehen, so muß man einen geordneten Endzustand annehmen. Es liegt am nächsten, diesen ebenfalls allgemein zu wählen. Es würden sich dann Vorgänge mit steigender und abnehmender Wahrscheinlichkeit überkreuzen, ohne daß doch besondere Regeln darüber aufgestellt oder besondere Gebiete den einen oder anderen Vorgängen vorbehalten würden. Das Gegenteil ist aber der Fall. Die teleologischen Vorgänge sind beschränkt auf den Apparatebau für die organische Chemie, und sie sind gebunden an die Anknüpfung an bereits bestehende Apparate, was auch aus einem entsprechend beschränkten geordneten Endzustand durchaus nicht verständlich wäre. Man muß also den Endzustand stark spezialisieren und andererseits vorschreiben, daß auch der Weg zu seiner Erreichung nur eine bestimmte Breite haben darf, daß aber auf diesem Wege ein sehr folgerichtiger Fortschritt erzielt wird. Es heißt das aber, die Gebiete des Abbaues und des Aufbaues streng zu trennen, also dem Spiel des Zufalles ein hohes Maß von Systematik zuzuschreiben. Das ist natürlich keine strenge Unmöglichkeit, denn solche gibt es nicht in der Statistik, aber es ist eine außerordentlich unwahrscheinliche Annahme.

Die eben diskutierte Möglichkeit läuft daraus hinaus, daß die tatsächlich realisierte Komplexion der Verteilung von Materie und Energie in der Welt nun einmal so beschaffen ist, daß in einem bestimmten Gebiet ein systematischer Aufbau von Ordnung stattfindet, während sie auf allen anderen Gebieten abgebaut wird. Will man diesen Weg wegen der Unwahrscheinlichkeit seiner Voraussetzung nicht gehen, so muß man annehmen, daß auch auf diesem speziellen Gebiet die tatsächlich verwirklichte Komplexion zum Abbau der Ordnung fortschreitet. Dann aber bleibt für das Zustande-

kommen von aufbauenden Vorgängen überhaupt kein Raum mehr, es sei denn, daß für den Ablauf einer gegebenen Konstellation nicht nur die zwischen den Einheiten wirksamen Kraftgesetze maßgebend sind, sondern daß der Ablauf durch ein neu hinzutretendes Moment verändert werden kann. Dieses Moment würde dann nur bei Vorgängen in lebenden Systemen wirksam werden, während es bei allen unbelebten Prozessen fehlt. Nun ist aber der Ablauf einer gegebenen Konstellation durch die Kraftgesetze eindeutig bestimmt. Man muß sich also darüber klar sein, daß sich das neue Moment nicht einfach diesen Gesetzen superponieren kann, sondern daß es sie gelegentlich durchbrechen muß. Eine Einwirkung auf das Zustandekommen eines makroskopischen Zustandes kann nur in der Beeinflussung des statistischen Verteilung der ihn herbeiführenden Einzelvorgänge bestehen. Entweder stellt sich nun die Verteilung nach dem zweiten Hauptsatz von selber ein (das war im vorigen Kapitel verworfen worden), oder sie stellt sich entgegen dem zweiten Hauptsatz von selber her (das sollte als unwahrscheinlich versuchsweise abgelehnt werden), oder sie muß „künstlich“ herbeigeführt werden (das ist die noch verbleibende Möglichkeit). In diesem Falle müßten sich die Moleküle anders bewegen, als es die zwischen ihnen bestehenden Kräfte erheischen würden. Man kommt also um den Eingriff in die Kraftgesetze nicht herum. Freilich müßte die Gesetzwidrigkeit gegenüber den Kräften ihrerseits wieder gesetzmäßig vor sich gehen, sonst könnte ihr statistischer Effekt nicht gefunden werden.

Nach dieser Auffassung wird eine naturgesetzlich gegebene Bedingung fallengelassen, wodurch ein gewisser Grad von Freiheit oder Unbestimmtheit entsteht. Die Eindeutigkeit wird aber wiederhergestellt durch Einfügung einer neuen Bedingung. Diese ist insofern nichtstatistischer Art, als sie an Stelle einer außer Funktion gesetzten Kraft tritt und am einzelnen Massenelement angreift. Sie ist aber nicht, wie die Kraft, neutral gegen das Vorzeichen des Zeitinkrements, sondern sie ergibt den Eintritt einer bestimmten statistischen, und zwar geordneten, Verteilung, muß also doch einen wesentlichen Zusammenhang mit der Statistik haben, und zwar einen teleologischen. Die ganze Vorstellung ist natürlich sehr gewagt. Immerhin rechtfertigt die besondere Eigenart der Lebensvorgänge und ihre scharfe Absonderung innerhalb der Naturerscheinungen auch eine sehr durchgreifende Annahme zu ihrer Erklärung. Und die Vorstellung einer Freiheit gegenüber den Kraftgesetzen, geregelt durch ein teleologisches Gesetz, hat gegenüber der vorigen Vorstellung den entschiedenen Vorteil, daß sie vom systematischen Zufall befreit und für die Systematik ein Gesetz verantwortlich macht. Aus diesem Grunde soll die zuletzt besprochene Möglichkeit trotz ihrer Kühnheit weiter verfolgt werden.

14. Wie man sich die Freiheit vorstellen kann.

Wenn wir überhaupt zu einer annehmbaren Vorstellung gelangen wollen, müssen wir die Freiheit so beschränken, daß sie gewisse Erfahrungstatsachen bestehen läßt. Es darf keine Möglichkeit offen sein, welche die Erhaltung der Energie, der Bewegungsgröße, des Drehmoments usw. oder den zweiten Hauptsatz im engeren Sinne umstößt. Man kann sich z. B. vorstellen, daß ein aufgehängter Stein nach Durchtrennung des Bindfadens nicht herunterfällt, sondern seinen Platz behält (infolge einer „virtuellen“ Gegenkraft), solange, bis er ein darunter vorbeibewegtes Objekt treffen kann, daß er sich aber bei dessen Annäherung rechtzeitig mit der natürlichen Fallgeschwindigkeit in Bewegung setzt. Man darf sich jedoch nicht vorstellen, daß er schneller

oder langsamer als natürlich fällt, weil dann die Zusatzkraft Arbeit leisten oder aufnehmen würde, oder daß er auf einer schiefen Ebene abrutscht, weil dann das System Stein-Erde ein zusätzliches Drehmoment bekommen würde. Mit anderen Worten, es handelt sich darum, daß ein an sich möglicher Vorgang nicht eintritt bis zu dem „nützlichen“ Zeitpunkt. Man kann sich auch vorstellen, daß die als belebt gedachte Erde auf ihrer Ellipsenbahn um die Sonne im Punkte des maximalen oder minimalen Radius vector in eine Kreisbahn übergeht mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit, daß sie aber in einem beliebigen Punkte der Kreisbahn wieder in eine Ellipse von der alten Form, aber von anderer Lage übergeht, um einem Kometen auszuweichen. Man darf sich jedoch nicht vorstellen, daß der Übergang in die Kreisbahn an einem beliebigen Punkt der Ellipse erfolgt.

In der Chemie kennt man das Ausbleiben einer an sich möglichen Reaktion und ihr Zustandekommen durch den Eingriff der Katalyse. Nun spielt die Katalyse durch Fermente in den Lebensvorgängen eine große Rolle, und die meisten vitalen Reaktionen werden katalytisch hervorgebracht. Zur Erklärung, daß Ferment und Reaktionsmasse im allgemeinen gleichzeitig in einer Zelle gefunden werden, aber nur in besonderen Momenten aufeinander wirken, hat man dem Protoplasma eine Mizellarstruktur zugeschrieben, so daß in einer Schaumkammer das Ferment und in einer andern das Substrat vorhanden wäre. Platzt gelegentlich die Schaumwand aus Plasma, so fließen beide Teile zusammen und reagieren. Nun ist solche Struktur bei dem kolloidalen Zustand des Zelleninhalts jedenfalls vorhanden, sie erklärt aber nicht den statistischen Effekt, daß gerade im günstigen Augenblick das Plasma den Weg freigibt. Soll das Platzen nicht dem Zufall überlassen bleiben, so muß für das Auseinanderfließen chemische Arbeit aufgewendet werden. Es wäre also im Inneren der Plasmawand wieder Enzym und Reaktionsstoff nötig und dafür abermals verschiedene Kammern usf. ad infinitum. Eine solche Entwicklung muß, abgesehen davon, daß sie das Problem nur hinausschiebt, an den molekularen Dimensionen ihr Ende finden. Schließlich wird sich doch Ferment und Substrat in Berührung vorfinden und dennoch nicht reagieren, bis der Augenblick dafür gekommen ist. Eine solche Hemmung in der Wirkung eines Katalysators ist ebenfalls bekannt als Vergiftung. Aber es kann nicht erklärt werden, warum die Vergiftung gerade im günstigen Moment verschwindet. Letzten Endes wird also doch über die Aktivität oder Passivität des Ferments durch eine teleologische Regel entschieden.

Die Sache liegt insofern anders als im Versuch *in vitro*, als dort der immer aktive Katalysator vom Substrat getrennt ist, und der Augenblick des Zusammenbringens vom Willen des Experimentators als *deus ex machina* bestimmt wird. In der Zelle dagegen hat man mit einer kleinen Verschiebung des Vergleichspunktes den „*deus in machina*“ vor sich. Die Verlegung des Eingriffspunktes in die Aktivität eines Katalysators ist natürlich nur eine naheliegende Möglichkeit der Lösung und bietet nur ein allgemeines Schema, das über die Bewegung des einzelnen Moleküls nichts aussagt. Die Erfahrung mag andere Wege weisen. Immer wird aber die rein mechanische Erklärung der Lebensvorgänge haltmachen müssen vor dem letzten Punkt, der den Grund angeben soll für das unnatürlich häufige Auftreten der „unwahrscheinlichen Vorgänge“, die zu einer Ordnungssteigerung führen.

Daß die natürliche Empfindung ein belebtes System nicht als thermodynamisch normal auffaßt, mögen folgende zwei Beispiele zeigen.

1. Als Clausius die Thermodynamik der Gase behandelte, wurde ihm folgender

Einwand gemacht: Man denke sich ein Gas von ausgeglichenem Zustande in einem geschlossenen Kasten, der durch eine Scheidewand in zwei Teile geteilt ist. In der Wand befinden sich Öffnungen, verschlossen durch masselose Türen. An jeder Tür sitzt ein Dämon, der die Tür (arbeitslos) öffnet, wenn von links nach rechts ein besonders schnelles oder von rechts nach links ein besonders langsames Molekül ankommt. Im entgegengesetzten Fall schließt er die Tür. Dann muß sich das Gas auf der rechten Seite erwärmen und auf der linken Seite abkühlen, was dem zweiten Hauptsatz zuwider ist. Clausius antwortete, er beschreibe die Eigenschaften eines Gases nicht als von Dämonen beeinflusst, sondern als die eines sich selbst überlassenen Systems.

2. Ein Haushalt strebt unter dem Einfluß der Hausfrau einem Zustande von geringerer Wahrscheinlichkeit und größerer Ordnung zu. Wenn die Hausfrau verweist, ist er ein sich selbst überlassenes System, das sich im günstigsten Fall auf dem bisherigen Zustand halten kann, im allgemeinen aber in einen Zustand von größerer Wahrscheinlichkeit und geringerer Ordnung übergeht.

Beide Beispiele zeigen freilich den Einfluß des bewußten Willens, und man könnte ihnen vorwerfen, daß sie die Bewußtseinsfrage mit hineinziehen. Aber erstens ist der Wille das normale Objekt der Teleologie, wodurch die Beispiele anschaulich wirken. Zweitens wird von dem inneren Wesen des Willens kein Gebrauch gemacht, sondern nur von der durch ihn bewirkten Korrektur der statistischen Verteilung von günstigen und ungünstigen Fällen. Man sieht, daß die Systeme materiell so und auch anders können, daß also die Freiheit des Handelns vorhanden ist, und daß die Entscheidung in dieser Freiheit herbeigeführt wird durch eine Bedingung, welche als wesentlichen Bestandteil die zukünftige Ordnung des Systems enthält. Man lehnt es ab, solche Systeme als sich selbst überlassen zu bezeichnen und betrachtet sie als beeinflusst. Der Einfluß stammt aber nicht von einer Koppelung mit einem Energieverbrauch, sondern er wirkt ohne „anderweitige Kompensation“.

15. Das Werkzeug.

Wenn nun auch die Freiheit für den unmittelbaren Eingriff sehr beschränkt ist, so löst doch der primär eingeleitete Vorgang sekundäre und tertiäre Vorgänge auf rein kausalem Wege aus, welche das Verhältnis des Lebewesens zur Außenwelt ändern. Der erste Weg der Einstellung auf die Außenwelt ist, daß sich das Lebewesen dem Einfluß der Außenwelt hingibt oder entzieht. Der zweite Weg führt zu einer aktiven Änderung der äußeren Lebensbedingungen und hinterläßt seine Spuren in der unbelebten Materie (z. B. ein Karnickelbau, ein Vogelnest). Der Affe, der vom Baum aus seinen Verfolger bewirft, benützt dazu eine Kokosnuß, die hier die Rolle eines unbelebten Körpers spielt. Sie fliegt, einmal angestoßen, nur nach den Gesetzen der Mechanik, aber sie hat doch eine im vitalen Sinne geordnete Bewegung, weil sie in richtiger Weise angestoßen war. Die Flugbahnen dieser Geschosse häufen sich in weit höherem Maße um den Kopf des Verfolgers, als es dem Zufall entsprechen würde. Ein solcher unbelebter Körper, der von einem Lebewesen angestoßen, eine lebenswichtige Funktion auf rein kausalem Wege ausübt, ist ein Werkzeug. Ohne selbst belebt zu sein, zeigt er — eben in Verbindung mit dem richtigen Anstoß — die statistischen Eigentümlichkeiten, wie sie an der lebenden Materie beobachtet werden. Er ist gewissermaßen ein Verlängerungsansatz für die vitale Apparatur. Zur eindeutigen Definition eines Werkzeugs genügt es daher nicht, Gestalt, Kräfte

oder Zustandsgrößen anzugeben. Es muß vielmehr der Zweck desselben im Sinne des Verfertigers oder Benutzers mit angegeben werden. Die Definition eines Tisches z. B., die wirklich alles umfassen soll, was man als Tisch bezeichnen kann, ist nicht imstande, die Unterscheidung von allerhand anderen horizontalen Oberflächen zu geben, wenn nicht der Zweck angegeben wird, Gebrauchsgegenstände in handlicher Höhe auf dieser Oberfläche bereitzustellen.

Wenn nun auch unbelebte Materie gewisse statistische Lebensmerkmale tragen kann, sobald sie zu einem Lebewesen in Beziehung getreten ist, so fragt es sich, wo denn eigentlich die Grenze zwischen dem Belebten und dem Unbelebten zu ziehen ist, also ob nicht manches, was man für belebt ansieht, nur ein Werkzeug ist. Die Zellwand ist zwar von der Zelle abgeschieden und besteht aus organischen Verbindungen, aber ihre Funktion der Formerhaltung, Elastizität und Diffusion ist eine rein mechanische. Vom Zellinhalt ist das Wasser mit den in ihm gelösten Salzen und Nahrungsstoffen auch nicht belebt, sondern stellt eher die inneren Lebensbedingungen dar, welche die eigentlich lebende Substanz nach ihren Bedürfnissen einstellt. Nun ist es einfacher, etwas, das das Merkmal des Zweckes an sich trägt, in das belebte System einzubeziehen, als es als Werkzeug zu erkennen. Dazu muß man schon den Mechanismus genauer kennen. So ist zu erwarten, daß die Erforschung der Lebensvorgänge die Grenze der belebten gegen die unbelebte Materie immer mehr nach innen verschiebt. Je mehr das aber geschieht, um so deutlicher muß sich die wahre Grenze abheben, über die man auf kausalem Wege nicht hinauskommt. Und es ist zu hoffen, daß man einmal alle kausal arbeitenden Werkzeuge, die ein lebendes System an und in sich mitschleppt, soweit fortpräparieren kann, daß der Angriffspunkt des Zielstrebens auf die Materie sichtbar wird. Der einzige Weg, der dazu führt, ist der systematische Versuch, alle Lebensvorgänge kausal zu erklären und da, wo der höherer Ordnung zustrebende Verlauf eine solche Erklärung unmöglich macht, die Verantwortung für diesen Verlauf dem geordneten Anstoß durch einen dahinterliegenden Mechanismus zuzuschreiben. Nur wenn man zunächst finale Erklärungen ablehnt und die dadurch entstehenden Schwierigkeiten soweit zurück-schiebt wie irgend möglich, kann man den primären finalen Gesetzen beikommen.

16. Die teleologische Regel.

Wir haben bisher gesehen, daß die vitale Freiheit eine sehr beschränkte ist. Zur natürlichen Möglichkeit tritt diejenige hinzu, das Zustandekommen eines an sich möglichen Vorganges, also eine Energieumsetzung, zu verhindern. Da es sich um Beeinflussung der Bahn eines einzelnen Massenelements handelt, so läßt sich die zweite Möglichkeit durch das Auftreten einer zusätzlichen Kraft darstellen. Diese darf aber keine Energie produzieren oder verbrauchen und die Bewegungsgröße nicht ändern. Die Kraft wurde deshalb „virtuell“ genannt. Das ist nur denkbar in einem Augenblick, wo das Bahndifferential des Massenelementes in einer Äquipotentialfläche verläuft. Für die Zusatzkraft ist dann nur ein Wert denkbar, der das Teilchen auf dieser Ebene festhält. Die Unbestimmtheit bezieht sich nur darauf, ob die Kraft auftritt oder nicht; ihre Größe, wenn sie auftritt, ist festgelegt. Insofern kann man wohl von einer „Lebenskraft“ sprechen. Die Aufgabe, die Bewegung des Massenteilchens zu beschreiben, hat also in gewissen Punkten zwei Lösungen, von denen die eine ($K = 0$) für die unbelebte Materie allein gilt, während der belebten auch die andere Lösung zur Verfügung steht. Die Entscheidung zwischen beiden

erfolgt auf Grund der statistischen Lage durch eine teleologische Regel. Auf diese Weise ist es möglich, daß der „Eingriff in die Naturgesetze“ sowohl einen kraftartigen als auch einen statistischen Charakter hat. Die lebende Materie hat eine Macht (*potentia vitalis*), und diese ist keine Kraft (*vis vitalis*), sondern sie benutzt die ihr zur Verfügung stehende Kraft. Wie sie sie benutzt, das hängt vom Willen ab, oder, materiell gesprochen, vom statistischen Auswahlprinzip. Die virtuelle Lebenskraft ist die zur Verfügung stehende Kraft. Sie schafft die Freiheit des Handelns, ist also der passive Teil der Lebensbetätigung. Der aktive Teil ist das Auswahlprinzip, von dem im folgenden weiter die Rede sein soll.

Die Entscheidung zwischen den verschiedenen Möglichkeiten erfolgt in einer gewissen Richtung, und das gesuchte Gesetz kann nur der Ausdruck der Erfahrung über diese Richtung sein. Da wir hier nur die materielle Frage erörtern, kann sich die Richtung nur auf die Zustandsfolgen der belebten Materie beziehen. Die entscheidende Beobachtung war die Erhaltung, Vergrößerung und Vermehrung der Apparatur, durch welche eine auffällige, aber innerhalb der Grenzen des zweiten Hauptsatzes bleibende Erhaltung von freier Energie stattfindet. Unabhängig davon gibt sich die Apparatur zu erkennen durch einen eigenartig kompliziert geordneten räumlichen Aufbau der Materie. Die Entwicklungsgeschichte der Lebewesen gibt noch weitere Erfahrungen, nämlich den Übergang von der Erhaltung des Individuums zur Erhaltung von anderen Individuen einer Gruppe durch ein Mitglied derselben unter Opferung seiner selbst, und die „Verbesserung“ der Apparatur, d. h. eine allmähliche Komplizierung unter Aufgabe gewisser Freiheitsgrade und Gewinnung neuer. Wir finden hier die Spezialisierung, die Zusammenfassung verschieden spezialisierter Einheiten zu einer höheren Einheit unter Arbeitsteilung und andererseits die Konzentrierung auf das spezifisch Vitale, indem die unbelebte Natur in die Apparatur einbezogen wird für die mechanischen und peripheren Funktionen, wie ein Motor mit Wellenstumpf, der durch verschiedene Werkzeuge verlängert werden kann. Die Spezialisierung vermindert die Zustandsbreite, innerhalb deren der Apparat arbeitet, verbessert aber die Güte der Wirkung. Die Arbeitsteilung und Vergesellschaftung erhält die Spezialisierung und schaltet ihre Nachteile aus. Der Aufbau der Ordnung höheren Grades ist aber eine neu hinzutretende Aufgabe, deren Erfüllung Schwierigkeiten macht. Der Neubau gelingt zwar vollkommen, aber die Reparatur des beschädigten Systems ist unvollkommen, und zwar um so mehr, je weiter die Differenzierung geht. Dagegen ist infolge der besseren Funktion die Gefahr der Beschädigung geringer. Die Konzentrierung mit Werkzeugbenutzung bringt eine Vergrößerung der brauchbaren Zustandsbreite durch aktive Einwirkung auf die Umwelt unter Ausnützung der verstärkten vitalen Leistung.

Alle diese Entwicklungsergebnisse sind aber nur Ausführungsformen desselben Grundvorganges. Immer wird die Organisation so aufgebaut, daß sie sich selbst erhalten und vermehren kann. Das ist insofern unbefriedigend, als man die Ordnung in der belebten Materie durch sich selber beschreiben muß, wenn man die Erscheinung in ihrer Allgemeinheit erfassen will. Es fragt sich natürlich, ob eine solche Beschreibung einen Sinn hat, und ob eine derartig rückbezüglich definierte Ordnung überhaupt noch eine Ordnung ist, oder ob man sich auf einem *Circulus vitiosus* befindet. Nun ist nicht zu bezweifeln, daß tatsächlich ein geordneter Mechanismus vorliegt, gekennzeichnet durch die konservative Umwandlung freier Energie, wie für die Lichtenergie gezeigt wurde, und schon rein äußerlich durch den geordneten geometrischen

Aufbau. Aber die Aufspeicherung von Energie und der Aufbau komplizierter und labiler Moleküle ist im wesentlichen auf die Pflanze beschränkt, während beim Tier der Abbau überwiegt und seinen Höhepunkt im Menschen findet, der die in Jahrhunderttausenden aufgespeicherte Kohlenenergie mit Macht dem Boden entreißt, um für eine verhältnismäßig kurze Spanne Zeit eine höhere Lebenshaltung und Vermehrung zu erzielen. Man findet also an speziellen Beispielen Gelegenheit, das Vorhandensein und die Vermehrung einer besonderen Ordnung, also einen teleologischen Prozeß, einwandfrei festzustellen, kann diesen Prozeß aber in seiner Allgemeinheit nicht anders als rückbezüglich beschreiben.

Das Gesetz also, nach dem über die Freiheit gegenüber den Naturkräften verfügt wird, ist ein teleologisches. Aber der Zweck, durch den es dargestellt werden kann, ist das Weiterwirken eben dieses Gesetzes. Man kann es auch anders ausdrücken. Die Entscheidung fällt so, daß die Freiheit, die an bereits bestehende belebte Systeme geknüpft ist, erhalten und verstärkt wird. In dieser Form ausgedrückt, scheint sich der Zirkel nicht mehr zu schließen. Das Ziel des Zielstrebens ist die Freiheit. Freiheit ist ihrem Wesen nach Unordnung. Es handelt sich aber nicht um die Unordnung der Elemente einer zusammengesetzten Menge, sondern um den Mangel an Ordnung in einem elementaren Vorgang. Man käme so zu einer Erweiterung des zweiten Hauptsatzes über seine statistische Bedeutung hinaus in das Reich der Einzelvorgänge. Aber die Freiheit ist geknüpft an ein hochgeordnetes System und wird ausgenützt zur Steigerung der Systemordnung und nicht zur Verbreitung von Unordnung. Daß im belebten System die Ordnung über die Unordnung überwiegt, ist zu sehen aus der Erscheinung des Todes als eines von selbst verlaufenden Vorganges, der also den Ordnungsgrad vermindert. Wenn das Spiel des Zufalles so auf die belebte Materie einwirkt, daß sie ihre Freiheit nicht zur Gegenwirkung benutzen kann, dann wird die vitale Ordnung zerstört, und mit ihr verschwindet die Freiheit. Die verschwundene Ordnung muß also größer sein als die gewonnene. Es kommt schließlich doch so heraus, daß die Freiheit ein Mittel zur Erzeugung von Ordnung, und die Ordnung ein Mittel zur Erzeugung von Freiheit ist. Der Kreis ist wieder geschlossen. Der Schwerpunkt liegt aber in der Ordnung, denn ob kausal oder final, es kann die Freiheit, also Unordnung aus der Ordnung, aber nicht die Ordnung aus der Freiheit erklärt werden. Die Freiheit kann nur als Zweck auftreten, wenn sie integrierender Bestandteil einer Ordnung ist. Das Ziel der Lebensvorgänge ist also Ordnung, aber eine Ordnung, die nur auf dem Wege über Freiheit zustande kommen kann. Daher degeneriert der Lebensvorgang sowohl, wenn die Ordnung so straff wird, daß sie die Freiheit übermäßig einschränkt und sich die Existenzmöglichkeit untergräbt, als auch wenn sie soweit zurücktritt, daß sie nicht mehr die Richtung der Entscheidung bestimmt. Welcher Art die Ordnung ist, läßt sich jedoch nur rückbezüglich angeben. Man muß das, was man verstehen will, schon kennen. Das macht das erste Hineinkommen unmöglich, und die Frage nach dem „Sinn“ oder „Zweck“ des Lebens bleibt ein ungelöstes Problem, wenigstens wenn man es nur von der materiellen Seite anfaßt. Auch von der psychischen Seite her konnte der Ring bisher nicht gesprengt werden. Das Sittengesetz als Zweck des Daseins ist ohne die Wirkung seiner Durchführung eben auf das Leben nicht zu verstehen, und die christliche Ethik stellt als Ziel dieses Lebens ein jenseitiges Leben auf und verlangt bei auftretenden Zweifeln am Sinn des Ganzen das Vertrauen auf die höhere Weisheit der göttlichen Führung, sie verzichtet also bewußt auf die Lösung der Aufgabe mit dem menschlichen Verstand.

17. Die Reizreaktion.

Auf Grund der bisher gewonnenen Anschauungen ist noch die eingangs aufgeworfene Frage zu beantworten, aus welchen Schritten eine Reizreaktion besteht, und welches ihr Verhältnis zur Folge von Ursache und Wirkung ist. Man kann sich vorstellen, daß eine normale Reaktion auf durchaus kausal-zwangläufigem Wege zustande kommt, etwa ebenso wie das Ansprechen eines Relais. Das Zweckmäßige der Reaktion, der konservative Energieumsatz usw., ist bedingt durch das Vorhandensein eines zweckmäßigen Mechanismus. Es ist auch verständlich, daß nicht alle Reaktionen zweckmäßig verlaufen, sondern nur ein über das Zufallsmaß hinausgehender Prozentsatz. Ein Mechanismus kann eben nicht für alle Fälle vorteilhaft eingerichtet sein, sondern nur für die normalen. Unter diese Vorstellung lassen sich alle Reaktionen bringen, die das Verhältnis des Lebewesens zur Außenwelt regulieren. Sie sind Reflexe, der Reiz ist die Ursache der Reaktion, und an ihnen ist nichts weiter auffallend als der Mechanismus, der sie zustande bringt.

Anders aber verhalten sich plastische Reaktionen, also solche, die den Mechanismus selber aufbauen. Tritt eine Störung im Apparat ein, so beginnt ein Prozeß der Regeneration, der sich fortsetzt, bis die normale Ordnung wieder hergestellt ist. Wer die Störung als Ursache der Regeneration ansieht, erklärt die Ordnungssteigerung durch Ordnungsmangel. Das ist aber keine Erklärung. Die Krankheit ist nicht die Ursache der Genesung, sondern höchstens der Gebrechlichkeit oder des Todes. Die Kriegsverwüstungen sind nicht die Ursache des Wiederaufbaues, sondern höchstens der Armut. Genesung und Wiederaufbau sind Vorgänge des Zielstrebens und lassen sich nur vom Ziel, aber nicht vom Anfang aus begreifen. Aber freilich ohne Krankheit keine Genesung, ohne Krieg kein Wiederaufbau. Die Störung ist also eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für ihre Beseitigung. Das dauernde Vorhandensein von Störungen ist aber das Normale, weil der Organismus mit der dem zweiten Hauptsatz unterworfenen Außenwelt in Berührung steht. Unter diesen Umständen ist die hinreichende Bedingung für das Auftreten der ordnenden Vorgänge in ihrem Ziel zu suchen. Nach der hier durchgeführten Anschauung ist also der Ablauf einer plastischen Reaktion folgender. Zunächst tritt auf kausalem Wege eine Störung der Ordnung in der organisierten Materie auf. Dieser stehen nun mehrere Möglichkeiten des Ablaufs offen, und von ihnen wird diejenige Möglichkeit realisiert, welche in ihrem weiteren Verlauf zur Verbesserung der gestörten Ordnung führen muß.

Man kann die Sache auch anders darstellen. Betrachtet man das teleologische Auswahlprinzip im Bereich des Lebens als zeitlos bestehende allgemeine Regel, so wird es zu einer *Causa efficiens*, allerdings einer gegen die Zeitrichtung nicht indifferenten, die außerdem Bezug hat auf die Ordnung des Ganzen, also auf die Statistik. Beides steht im Gegensatz zu den übrigen *Causae efficientes*, den Kräften. Aus der beides gemeinsamen Funktion als *Causa efficiens* versteht man sowohl die Bildung des Begriffes von der *Vis vitalis* als ihre Fehlerhaftigkeit. Es handelt sich eben nicht um eine selbständige Massenbeschleunigung unter Verletzung der grundlegenden Naturgesetze, sondern um die Entscheidung zwischen zwei Beschleunigungen, welche beide diesen Gesetzen gehorchen. Das Auswahlprinzip ergibt im Verein mit den Kräften und den in der Umgebung bestehenden statistischen Bedingungen ein neues „biologisches“ Wahrscheinlichkeitsgleichgewicht, das nicht dem relativen Minimum an Ordnung, sondern einer bestimmten Höhe derselben entspricht. Jede Abweichung

nach oben oder nach unten kann jetzt zur *Causa occasionalis* werden für Vorgänge, welche das Gleichgewicht wieder herstellen. In diesem Sinne kann man die Ordnungsstörung, den plastischen Reiz, doch als Ursache der Reaktion bezeichnen. Die notwendige Bedingung wird hinreichend, wenn man die übrigen Bedingungen als allgemeine Regeln vorwegnimmt. Diese Art Ursache hat mit der im Sinne des zweiten Hauptsatzes das gemein, daß der Endpunkt und die Richtung des Vorganges auf ihn festgelegt ist, und daß der Anfangspunkt als am weitesten entfernt vom Endpunkt die beste Übersicht über den Vorgang gewährt, also eine Erklärung darstellt. Der Unterschied besteht aber darin, daß im Falle des zweiten Hauptsatzes der Endpunkt mangels eines besseren Anhaltspunktes rein verstandesmäßig erraten wird, während hier durch Erfahrung eine Abweichung des Endzustandes von seinem erratbaren Wert festgestellt und durch ein besonderes teleologisches Gesetz ausgedrückt ist. Im ersteren Fall wird also nur der Anfang des Vorganges erfahrungsmäßig festgestellt, im letzteren Anfang und Ende. Daß hier überhaupt ein Anfangszustand festgelegt werden muß, liegt daran, daß kausal und teleologisch funktionierende Vorgänge einander überkreuzen. Ist nun aber die teleologische Funktion ein Gesetz, so wird der besondere Fall gekennzeichnet durch die Anfangsbedingung. Man muß aber nicht glauben, weil man auch für eine plastische Reaktion eine Ursache konstruieren kann, daß die Reaktion deshalb rein mechanisch erklärt ist. Die Anfangsbedingung wird hinreichend erst, nachdem das teleologische Gesetz eingesetzt ist und dem Vorgang damit seinen mechanischen Charakter bereits genommen hat. An sich ist die Anfangsbedingung nur ein Mangel an Bedingung. Sie wird zu einer Bedingung erst im Hinblick auf das neu vorgeschriebene Gleichgewicht. Das Ordnungsstreben, nicht die Ursache ist es, die die abzuleitende Ordnung des Endzustandes als Prämisse enthält.

Die letzte Darstellung des Sachverhaltes ist insofern nützlich, als man doch nicht umhin kann, einer Verletzung eine gewisse Ursächlichkeit für die Heilung zuzuschreiben. Sie ist übrigens im Wesen mit der vorigen Darstellung identisch. Diese tritt aber da wieder in ihr volles Recht, wo plastische Reaktionen ohne Reiz, also ohne Störung, erfolgen. Hier fehlt die Durchkreuzung mit kausalen Vorgängen und infolgedessen die Veranlassung zur Konstruktion einer Ursache. Dies ist der Fall beim normalen Wachstum und der Vermehrung der Lebewesen, wobei nicht mehr ein gestörtes Gleichgewicht wieder hergestellt, sondern neue Substanz in dasselbe einbezogen wird.

Im bisherigen wurde die *Potentia vitalis* nicht weiter ausgedehnt, als zum Zustandekommen plastischer Vorgänge nötig ist, und zwar aus Gründen der geistigen Ökonomie, weil nur diese Vorgänge sich dem kausalen Verständnis systematisch entzogen. Wenn aber die vitale Freiheit überhaupt als vorhanden angenommen wird, so ist es denkbar, daß eine freie Entscheidung auch bei Vorgängen stattfindet, welche das Lebewesen auf die Außenwelt einstellen. Dieser Fall ergibt sich übrigens als Spezialfall der plastischen Reaktion, wenn eine Organisationshöhe erreicht ist, bei der Teile der unbelebten Materie in den Apparat mit einbezogen werden, um die mechanischen Funktionen zu übernehmen, während die belebte Materie sich mehr auf die spezifisch vitalen Funktionen beschränkt, welche Entwicklungsrichtung als Konzentration bezeichnet worden war. In die Erhaltung der Ordnung des Apparates ist jetzt auch die aktive Einwirkung auf die Außenwelt einbegriffen. Der Eintritt dieser Möglichkeit liegt also konsequent im Entwicklungszuge der belebten Materie.

Besteht aber die Fähigkeit erst, so kann sie auch eine über ihren ursprünglichen Bereich erweiterte Anwendung finden. Es wird dann auch die einzelne Reaktion auf die Veränderung der Umgebung nicht mehr zwangsläufig erfolgen, sondern unter Einschaltung einer Entscheidungsmöglichkeit. An Stelle der reflexmäßigen Reizreaktion hat man dann die Handlung aus einem Motiv. Dieser Ausdruck soll keine psychische Bedeutung haben, sondern die Bezeichnung sein für eine besondere Gesetzmäßigkeit in den Vorgängen in der belebten Materie.

18. Letzte Erklärungsmöglichkeit: Selbsterregung der Systemordnung.

Die beiden Erklärungsversuche der Lebensvorgänge durch gegen den zweiten Hauptsatz rückläufige Vorgänge und durch Freiheit mit Auswahlprinzip basieren auf der Unverständlichkeit der Erhaltung eines komplizierten Mechanismus vom Standpunkt des zweiten Hauptsatzes aus. Diese Unverständlichkeit aber ist an eine Voraussetzung geknüpft, die früher an einem Beispiel erläutert war und wohl den Consensus omnium für sich hat, die aber nicht exakt bewiesen wurde. Es ist der Satz, daß die Summe der Übergangsmöglichkeiten zwischen einem gegebenen Zustand und seinen wahrscheinlicheren Nachbarzuständen größer ist, als zwischen diesem Zustand und seinen unwahrscheinlicheren Nachbarzuständen. Das heißt im Sinne des zweiten Hauptsatzes, daß von einem gegebenen Anfangszustand aus der Übergang zu wahrscheinlicheren Nachbarzuständen der wahrscheinlichere Vorgang ist. Wenn der zweite Hauptsatz, der im Grunde doch aussagen soll, daß der wahrscheinlichere Vorgang eintritt, dargestellt wird durch die Vermehrung der Zustandswahrscheinlichkeit, so ist das eine allgemeine Anwendung der besprochenen Regel. Es handelt sich hier um ein rein mathematisches Problem. Deshalb muß es möglich sein, zu entscheiden, ob unser Satz streng beweisbar ist oder ob es spezielle Lösungen gibt, die anders lauten, als die allgemeine, und an welche Voraussetzungen sie geknüpft sind. Sollte es tatsächlich möglich sein, daß der wahrscheinlichere Vorgang zum unwahrscheinlicheren Zustand führt, so wäre ein Verständnis der belebten Materie ohne fremdartige Voraussetzungen möglich. Es müßte nur angenommen werden, daß in der belebten Materie die Bedingungen für die spezielle Lösung erfüllt sind, und zwar so, daß als unwahrscheinlicherer Zustand eben die Verstärkung der bereits vorhandenen Ordnung herauskommt. Vielleicht ist gerade die Rückbezüglichkeit der Systemordnung für das Zustandekommen des besonderen Ablaufes von Wichtigkeit. In diesem Falle würde die Rückbezüglichkeit nicht Gegenstand des Bedenkens sein, sondern ein integrierender Bestandteil der ganzen Konstruktion. Die Lebensvorgänge würden dann vergleichbar werden mit einer Verstärkerröhre, die durch Rückkoppelung einen negativen Widerstand bekommt und sich selbst zu elektrischen Schwingungen erregt. Es fragt sich also, ob man die belebte Materie als statistisch rückgekoppeltes System ansehen kann, dessen Zustandsordnung auf dem Wege des wahrscheinlichsten Vorganges sich selbst erregt.

Diese Möglichkeit würde eine vollkommen natürliche Erklärung der Lebensvorgänge geben. Ob sie besteht, ist eine Frage, welche der Mathematiker beantworten muß. Auf einen weiteren Punkt muß aber noch geachtet werden. Der psychophysische Parallelismus ist eine Tatsache, wie man ihn sich auch vorstellen mag. Bei der Erklärung durch Freiheit und Auswahlprinzip ergibt er sich von selber. Obwohl alles nur materiell-statistisch abgeleitet wurde, konnten die gefundenen Gesetzmäßigkeiten immer, und zwar am verständlichsten, in psychologischer Sprache

ausgedrückt werden. Wenn die Erklärung durch Selbsterregung sich behaupten soll, muß sie in der Weise sein, die Teleologie, welche in der Psychologie eine große Rolle spielt, in zwangloser Weise als Korrelat von Vorgängen darzustellen, welche im Sinne des zweiten Hauptsatzes von selbst verlaufen.

Das Lebensproblem, wenigstens seine materielle Seite, ist ein statistisches Problem. Die besondere Eigentümlichkeit der belebten Materie besteht darin, daß sie einen Mechanismus bildet, der sich nicht abnutzt, sondern sich selbsttätig erhält, ja sogar ausbreitet und allmählich durchkonstruiert. Der Aufbau eines Mechanismus ist der Übergang der Materie in einen unwahrscheinlicheren Zustand. Nach den gewöhnlichen Vorstellungen ist ein solcher Übergang nur möglich durch zwangsläufige Verbindung mit dem Abbau von Ordnung an anderer Stelle, setzt also einen weiteren Mechanismus voraus, der sich ebenfalls nicht abnutzen darf usw. ad infinitum. Die unendliche Reihe zeigt, daß man mit den gewöhnlichen Vorstellungen das Zustandekommen und die Erhaltung der belebten Systeme auch bei Gegenwart von hinreichenden Kompensationsobjekten nicht verstehen kann. Diese Vorstellungen müssen daher abgeändert werden, und es ergibt sich dafür folgende Alternative. Entweder gibt es wahrscheinliche Vorgänge im Sinne des zweiten Hauptsatzes, die zu unwahrscheinlicheren Zuständen führen, oder der zweite Hauptsatz trifft hier nicht zu. In diesem Falle treten entweder inverse Vorgänge auf Grund der bereits bekannten Kraftgesetze auf, d. h. eine Komplexion, die zu ihnen führt, ist nun einmal die reale, oder es tritt hier ein neues Moment auf, das den Ablauf der realen, dem zweiten Hauptsatz an sich gehorchenden Komplexion im inversen Sinne verändert. Dazu muß aber eine Bewegungsfreiheit postuliert werden, welche auf Grund der Kraftgesetze nicht vorhanden ist, und ferner ein Auswahlprinzip, welches die Unbestimmtheit in dem Sinne zum Verschwinden bringt, daß der statistische Effekt der selbsttätigen Erhaltung und Erweiterung des Lebensmechanismus zustande kommt. Diese drei Möglichkeiten sind die einzigen Arten, in denen die gewöhnlichen Vorstellungen so abgeändert werden können, daß sie mit der Erfahrung zur Deckung gebracht werden. Man muß sich also entschließen, eine von ihnen als die richtige Beschreibung der Vorgänge in der belebten Materie anzuerkennen.

Über den Nachweis von Fluor.

Von Bruno Fetkenheuer.

Mitteilung aus dem anorganisch-chemischen Laboratorium des Forschungslaboratoriums Siemensstadt.

Bekanntlich ist es nicht leicht, mit den üblichen Reaktionen auf Fluor¹⁾ eindeutige Resultate zu erhalten, sobald es sich um den Nachweis geringerer Quantitäten dieses Elementes handelt. Verfasser möchte nun auf eine sehr einfache und empfindliche, aber scheinbar wenig bekannte Fluorprobe hinweisen, die er einer Privatmitteilung des leider im Kriege gefallenen Herrn Dr. Schwer verdankt.

Erhitzt man nämlich etwa 2 g der zu untersuchenden Substanz mit Sand und einigen Kubikzentimetern H_2SO_4 im Reagenzglas auf ca. 90° , so ändert sich durch die Ätzwirkung des bei Anwesenheit von Fluor entstehenden HF bzw. SiF_4 die Oberflächenspannung des Glases derart, daß beim Umschütteln die H_2SO_4 nicht mehr an der Glaswand adhärirt, sondern an dieser, zu Tröpfchen zusammengeballt, wie Wasser an einer mit Öl benetzten Fläche abfließt.

Zur Orientierung über die Empfindlichkeit der Probe wurden Versuche mit einigen Fluorverbindungen ausgeführt, die jeweils mit Sand auf den in der Tabelle angegebenen Fluorgehalt verdünnt waren.

F-Verbindung	% F	Ergebnis
Na_2SiF_6	$\frac{1}{10}$	Reaktion trat sofort ein.
„	$\frac{1}{100}$	Reaktion nach 1 Min. deutlich sichtbar.
K_2SiF_6	$\frac{1}{10}$	Reaktion trat sofort ein.
„	$\frac{1}{100}$	Reaktion nach 1 Min. deutlich sichtbar.
MgF_2	$\frac{1}{10}$	Reaktion trat sofort ein.
„	$\frac{1}{100}$	Reaktion nach 1 Min. deutlich sichtbar.
CaF_2	$\frac{1}{10}$	Reaktion trat sofort ein.
„	$\frac{1}{100}$	Reaktion nach 1 Min. deutlich sichtbar.
NH_4F	$\frac{1}{10}$	Reaktion trat sofort ein.
„	$\frac{1}{100}$	Reaktion nach 1 Min. deutlich sichtbar.

Es erscheint wesentlich, den Reagenzglasinhalt nicht über $90-100^\circ$ zu erhitzen, da bei höheren Temperaturen die Empfindlichkeit der Reaktion abnimmt. Das gleiche trat ein, wenn die in der Tabelle angeführten Verbindungen mit Gips statt mit Sand verdünnt wurden. Da manche Fluoride, wie geglühtes AlF_3 , beim Erwärmen mit H_2SO_4 nur schwer zersetzt werden, so empfiehlt es sich in diesen Fällen, den Aufschluß der Substanz mit $\text{Na}_2\text{CO}_3 + \text{SiO}_2$ nach dem angegebenen Verfahren zu prüfen.

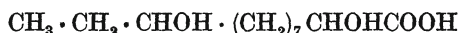
¹⁾ Über die Empfindlichkeit der Tetrafluoridreaktion und der Ätzprobe vgl. Howard, J. Am. Chem. Soc. 28, 1238; und Woodman und Talbot, J. Am. Chem. Soc. 28, 1437.

Zur Kenntnis der Aleuritinsäure.

Von C. Harries und W. Nagel.

Mitteilung aus dem Forschungslaboratorium zu Siemensstadt.

In der Chemischen Umschau, herausgegeben von Dr. Fahrion, Jahrg. XXI, S. 99, findet sich eine Notiz über den Nachweis von Schellack in Harzgemischen. Als beweisend für das Vorhandensein von Schellack wird die Abscheidung der „charakteristischen“ Aleuritinsäure angesehen, als deren Formel



betrachtet wird. Begründet ist diese Methode des Nachweises in der Arbeit Tschirchs über den Stocklack¹⁾. Indessen hat Tschirch die oben wiedergegebene Formel der Aleuritinsäure nur nach den Ergebnissen der Elementaranalyse und des Äquivalent- und Molgewichts aufgestellt. Er hat sie selbst wohl nur als hypothetisch angesehen, allerdings ohne darauf besonders hinzuweisen. Nach ihm hat Endemann²⁾ die Vermutung ausgesprochen, daß in der Aleuritinsäure eine Trioxypalmitinsäure vorliege.

Da aber die einzelnen Autoren von auf verschiedene Weise aus dem Ursprungsmaterial isoliertem Harz ausgingen und da ferner bekannt ist, daß in solchen Harzen einander nahestehende Oxysäuren vorkommen, so war die Möglichkeit vorhanden, daß Endemann eine andere Säure in der Hand gehabt hatte. Es erschien daher zunächst von Interesse, die Konstitution der Aleuritinsäure selbst genauer zu ermitteln. Wir bedienten uns hierbei, im Gegensatz zu den früheren Autoren, die die Oxydationsmethode benutzten und dabei keine klaren Ergebnisse erzielten, der Reduktionsmethode. Indessen wurde es auch nicht unterlassen, noch einmal ausdrücklich die gesättigte Natur der Säure festzulegen. Mit Ozon wurde kein Ozonid gewonnen, dagegen konnte die Bildung eines stark reduzierenden Ketons beobachtet werden, welches offenbar der oxydierenden Wirkung des Ozons seine Entstehung verdankt.

Zur Darstellung der Säure wurde erst die Methode von Tschirch befolgt, der dieselbe im Gegensatz zu Endemann nur aus dem ätherunlöslichen Teil des Schellackharzes isoliert. Sein Verfahren ist mühselig und in Anbetracht des zäh-sirupösen Materials nicht ganz einfach. Durch wochenlanges Einleiten von Wasserdampf in die alkalische Lösung des Harzes erzielt er eine Verseifung, die zu Aleuritinsäure in 15 prozentiger Ausbeute führt.

Obwohl Tschirch ausdrücklich betont hat, daß einfaches Kochen mit verdünnten Alkalien zur Abspaltung der Aleuritinsäure nicht genüge, stellten wir fest, daß schon 12stündiges Stehenlassen mit 5fach normaler Kalilauge die Säure in einer

¹⁾ Tschirch: Die Harze und Harzbehälter. Bd. II. 251.

²⁾ Ztschr. f. angew. Chemie 20, 1776/78.

Ausbeute von etwa 30% gewinnen läßt¹⁾. Man vermeidet dabei die tiefgehende Zersetzung des Harzes, wie sie nach dem oben angeführten Verfahren zu beobachten ist. Die Säure scheidet sich dann in Form ihres Kaliumsalzes ab, welches abgepreßt, wieder in Wasser gelöst und mit Schwefelsäure zerlegt wird. Da das auskristallisierte Salz viel Harzbestandteile mitreißt, ist ein zweimaliges Umkristallisieren der freien Säure aus Essigäther und Alkohol unter Zusatz von Tierkohle erforderlich.

Der Schmelzpunkt liegt dann bei 100—101° (Tsch. 101,5°). Die Analyse lieferte folgende Resultate:

I.	0,1510 g i. V. getr.	gaben	0,1407 g H ₂ O	und	0,3491 g CO ₂	
II.	0,1800 g „ „ „		0,1686 g H ₂ O	„	0,4171 g CO ₂	
III.	0,1368 g „ „ „	„	0,1288 g H ₂ O	„	0,3180 g CO ₂	
Gef. demnach:			I	II	III	
			C	63,08	63,21	63,40
			H	10,43	10,49	10,50

Tschirch findet C: 63,49, H: 10,52 und folgert daraus, daß eine Dihydroxytridezylsäure C₁₃H₂₆O₄ vorliege, für die sich C = 63,37, H = 10,63 berechnet. Jedoch stimmen die gefundenen Werte auch genau, wie schon Endemann bemerkt hat, auf eine Trihydroxypalmitinsäure,

$$\text{ber. für C}_{16}\text{H}_{32}\text{O}_5: \text{C} = 63,11, \text{H} = 10,60.$$

Eindeutig erscheint aber das Äquivalentgewicht für die Trihydroxypalmitinsäure zu sprechen, man findet:

$$0,3309 \text{ g verbrauchen } 10,75 \text{ ccm } \frac{n}{10}\text{-KOH}$$

$$0,3756 \text{ g } \quad \quad \quad 12,25 \quad \quad \quad \frac{n}{10}\text{-KOH}$$

$$\text{M also gef. } 307,8 \text{ und } 306,6, \text{ ber. für C}_{16}\text{H}_{32}\text{O}_5 = 304.$$

Dihydroxytridezylsäure würde aber nur 246 verlangen.

Die Säure ist, was bisher nicht bekannt war, optisch inaktiv gemessen an einer 30 proz. alkoholischen Lösung im Dem-Rohr. Sie zeigt die von Tschirch angegebenen Löslichkeitsverhältnisse. Auch ist über ihre Salze nichts Neues hinzuzufügen. Nur das Bariumsalz ist im Gegensatz zu der bisherigen Angabe in kaltem Wasser ziemlich schwer löslich.

Aleuritinsäuremethylester.



5 g Säure wurden mit 100 g 5 proz. methylalkoholischer Salzsäure drei Tage lang stehengelassen, im Vakuum eingedunstet, mit wässriger Bikarbonatlösung versetzt und filtriert. Die auf dem Filter zurückbleibenden Flocken wurden in Äther gelöst und mehrfach mit wässrigem Bikarbonat durchgeschüttelt. Nach Abdunsten des Äthers wurde noch zweimal aus Benzol umkristallisiert. Ausbeute 4,8 g.

Weißer Nadeln, löslich in Äther, Alkohol, Chloroform, Azeton, schwerer in Benzol, unlöslich in Ligroin, Schmelzpunkt 69—70°.

¹⁾ Allerdings bisher nicht in einer Operation.

Analyse: 0,1734 g i. V. getr. gaben 0,1633 g H₂O und 0,4068 g CO₂;

Proz. ber. C ₁₇ H ₃₄ O ₃	C 64,11	H 10,76
C ₁₄ H ₂₈ O ₄	C 64,57	H 10,84
	gef. C 64,01	H 10,67

Anschließend an die Untersuchung des Esters sei hingewiesen auf die aus Jalapenharz isolierte Ipurolsäure, der Power, Rogerson¹⁾ die Formel C₁₄H₂₈O₄ zuschreiben. Sie besitzt den Schmelzpunkt 100 — 101°, ihr Ester den von 68—69°.

Ob Identität vorliegt, läßt sich auf Grund dieser Daten allein noch nicht sagen, da eine Mischprobe mit dem Vergleichsmaterial nicht untersucht wurde. Dasselbe gilt von der Endemannschen Säure.

Triacetylaleuritinsäure.

Um die Anzahl der Hydroxylgruppen festzustellen, wurde die Azetylzahl bestimmt.

2 g Säure wurden mit 2 g geschmolzenem Natriumazetat und 20 g Azetanhydrid 5 Stunden am Rückflußkühler im gelinden Sieden erhalten, dann in viel Wasser gegossen und mit Äther aufgenommen. Nach dem Abdunsten des Lösungsmittels hinterblieb ein braunroter Sirup, der eine Woche im Vakuumexsikkator über Ätzkali getrocknet wurde. Nach dieser Zeit blieb sein Gewicht konstant. Die Acetylzahl wurde nach der Phosphorsäuremethode bestimmt.

1,7979 g Subst. ergaben nach dem Verseifen eine 122,3 ccm ⁿ/₁₀-KOH entsprechende Menge Essigsäure:

ber. auf 3 CH ₃ CO	30,00%
„ „ 2 CH ₃ CO	22,16%
	gef. 29,27%.

Reduktion der Aleuritinsäure zu Palmitinsäure.

Ein endgültiger Beweis für die Konstitution der Säure konnte dadurch bewirkt werden, daß man sie auf die zugrundeliegende Fettsäure zurückführte. Diese wurde durch Reduktion mit Jodwasserstoffsäure erhalten.

2 g Säure wurden mit 40 g konz. wässriger Jodwasserstoffsäure versetzt, wobei völlige Lösung eintrat. Nach Zugabe von 1 g rotem Phosphor wurde 5 Stunden am Rückflußkühler gekocht. Es schied sich allmählich ein Öl ab, das beim Stehen über Nacht kristallinisch erstarrte. Es wurde abfiltriert, in Äther gelöst und zur Entfernung der Jodwasserstoffsäure sowie des freien Jods mit Wasser und Quecksilber durchgeschüttelt. Nach Abdunsten der ätherischen Lösung hinterblieb ein leicht gelb gefärbtes Kristallgemenge, das am Kupferdraht intensive Grünfärbung der Flamme ergab. Ausbeute 2 g. Es wurde in Methylalkohol gelöst und unter portionsweisem Zusatz von Salzsäure und 10 g Zinkstaub 2 Stunden am Rückflußkühler gekocht, abfiltriert, eingedunstet und mit Wasser ausgefällt. Der sich abscheidende feste Ester schmolz bei Handwärme. Durch alkoholische Kalilauge wurde er zerlegt und die zugrundeliegende Säure mit Schwefelsäure in Freiheit gesetzt. Sie schmolz roh bei 66—68° und nach einmaligem Umkristallisieren aus Ligroin bei 71—72° (Smp. der Palmitinsäure 71,5°). Mischprobe mit reiner Palmitinsäure: 70—71°.

¹⁾ C. 1908, II., 1887.

Analyse: 0,1485 g i. V. gaben 0,4070 g CO₂ und 0,1648 g H₂O;

ber. C₁₆H₃₂O₂: C 74,93% H 12,58

gef. C 74,78% H 12,42.

Eine Versuchsreihe zur Bestimmung der Stellung der Hydroxylgruppen in der Trihydroxypalmitinsäure ist in Arbeit.

Berichtigung

In Bd. I, Heft 2, S. 95, ist in der Zusammenfassung der Satz: „Daraus würde der weitere Schluß zu ziehen sein, daß der Naturkautschuk selbst ein Polymerisationsprodukt dieser Kohlenwasserstoffe und ihm folgende Struktur zuzuerteilen ist“ folgendermaßen zu verbessern: „Daraus würde der weitere Schluß zu ziehen sein, daß der Naturkautschuk selbst ein Polymerisationsprodukt der nichtreduzierten Kohlenwasserstoffe ist und ihm folgende Struktur zuerteilt werden kann.“