THEODOR VAHLEN

DEVIATION UND KOMPENSATION

NEUE GRUNDLEGUNG DER THEORIE
NEUE ANWENDUNG AUF DIE PRAXIS

MIT 27 ABBILDUNGEN

VERLAG VON FRIEDR. VIEWEG & SOHN AKT.-GES.
BRAUNSCHWEIG 1929

ISBN 978-3-322-98102-8 ISBN 978-3-322-98753-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-322-98753-2

GEDRUCKT IN DER
BUCHDRUCKEREI HANS ADLER, INH.: E. PANZIG & CO., GREIFSWALD.

GEWIDMET
DEM ANDENKEN MEINES BRUDERS

MAXIMILIAN VAHLEN

SEEKADETTEN DER KAISERLICHEN MARINE

Vorwort.

„Der Zustand, in dem gegenwärtig die nautische Astronomie sich befindet, ist namentlich in praktischer Hinsicht ein ganz und gar unbefriedigender, ein höchst beklagenswerter, ja gradezu beschämender." Daß dieser Klageruf des Astronomen Doellen (Dorpat 1895) auch in Bezug auf andere Teile der Nautik angebracht wäre, kam mir 1905 bei der Abfassung von „Seglers Vademecum" zum Bewußtsein. Aber hier, wie später bei meinen nautischen Vorlesungen an der Universität Greifswald verbot sich ein Eingehen auf die Bedenken, die mir besonders in der Deviationstheorie entgegengetreten waren. Erst meine 1927 erfolgte Enthebung vom Amte und damit von der pflichtmäßigen Vertretung anderer Gebiete, gab mir hierzu die Zeit, und ein Forschungs-Stipendium der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft ermöglichte mir wissenschaftliche Arbeit durch Bewahrung vor wirtschaftlicher Not, der ich durch Entziehung des Ruhegehalts preisgegeben war. Denn nicht 30 pflichterfüllte Dienstjahre, nicht vier opfervolle Frontjahre milderten das harte Urteil, das mich traf, weil ich als Prorektor am 11. August 1924 die Fahnen von den Universitätsgebäuden niederholte.

Die Lehrbücher der Navigation haben teils das Bestreben, dem Seemann alles Nötige selbst an die Hand zu geben, und werden dadurch fast zu Abrissen der Geometrie und Astronomie mit einem nautischen Anhang. Teils wollen sie dem Seemann möglichst wenig zumuten und geben ihm die Formeln ohne Ableitung, die Sätze ohne Beweise. Dann hat er zwar „die Teile in der Hand, fehlt leider nur das geistige Band". Eine innerlich beherrschende, nicht bloß äußerlich mechanische Aneignung des Stoffes wird unmöglich, unklare Sätze, fehlerhafte Formeln pflanzen sich mangels der nachprüfbaren Beweise von einem Buch in das andere fort. Hinzu kommt eine „Unübersichtlichkeit und Fülle, sodaß der Eindruck eines systemlosen, verwickelten und schwierigen Gebietes entsteht, während es sich um wenige klassische Formeln handelt, denen die bedeutendsten Mathematiker und Astronomen mit der Schönheit bereits die größte Zweckmäßigkeit für den Seegebrauch gegeben haben“, wie der Praktiker Knipping (Ann. d. Hydrogr. 1905) treffend ausführt.

Demgegenüber wende ich mich in dem vorliegenden Buch zwar an den Seemann mit „besseren Vorkenntnissen“, wie ihn auch Knipping wünscht, leite ihm aber alles her. Dabei werden die einfachsten Wege aufgesucht und, wo es möglich war, das Anschauliche gegenüber dem unbeliebten Rechnerischen betont. Raum gewinne ich, indem ich auf Beschreibungen und Abbildungen von Instrumenten verzichte; man findet sie in den Verzeichnissen der Instrumentenmacher und ihren Gebrauch erlernt man nur durch die Praxis, nicht aus Büchern. Ordnung und Zusammenhang der Teile, folgerechter Aufbau und Abrundung des Ganzen waren die architektonischen Gesichtspunkte, die mich leiteten. Was das Reichsmarineamt für sein Lehrbuch der Navigation 1900 fast entschuldigend anführt, mache ich auch für mein Buch geltend; „Das Werk enthält manches, was für die praktische Navigierung nicht unbedingt nötig ist“.

Zwei Physiker, zwei Nautiker unterstützten mich beim Korrekturenlesen. Hierfür, sowie für manchen nützlichen Wink schulde ich Dank den Herren Dr. v. Auwers, Berlin, Prof. Dr. Reinkober, Greifswald, Observator Staben, Danzig, Prof. Dr. Wendt, Bremen.

Eldena bei Greifswald, den 18. Januar 1929.

Dr. Theodor Vahlen
weiland o. ö. Prof. a. d. Universität Greifswald.

Inhalts-Verzeichnis.

Einleitung.

Die Deviation d. i. die Ablenkung der Kompaß-Nadel vom magnetischen Meridian hat mit dem Wachsen der Schiffahrt und der Verwendung des Eisens als Baustoff an Bedeutung gewonnen. Sicherheit und Schnelligkeit erfordern möglichst genaue Erforschung und Beseitigung der Deviation. Der kostspielige Kreiselkompaß, der nur zögernd den neuen Kurs aufnimmt, hat den Magnetkompaß trotz dessen Mängel nicht verdrängen können. Für die transozeanische Schiffahrt mit ihren geringen Kursänderungen ist er zwar unentbehrlich; bei starken und häufigen Kursänderungen, also in der mittleren und Kleinschiffahrt, sowie bei Kriegsschiffen behauptet der Magnetkompaß seinen Platz.

Die wissenschaftliche Erforschung der Deviation beginnt 1801 mit den australischen Küsten-Vermessungen des engl. Kriegsschiffkapitäns Flinders. Von ihm stammt auch der erste Vorschlag zu einer Kompensation, nämlich die Kompensation der Vertikalkomponente des induzierten Magnetismus durch eine senkrechte Weicheisenstange, die „Flindersbar.“ Demnächst sind bemerkenswert die Untersuchungen von Barlow (1820), der den Einfluß des induzierten Schiffsmagnetismus auf den Kompaß durch eine induzierte Weicheisen-Kugel, bzw. -Kreis-Scheibe zwar nicht kompensierte, aber darstellte. An Barlow's Untersuchungen schließen sich diejenigen Poisson's über den Einfluß von Kugeln auf die Magnetnadel. Für den Einfluß des Erd- und Schiffsmagnetismus macht Poisson den bekannten linearen Ansatz. Diese sog. Poissonsche Deviationstheorie hat Archibald Smith für die Praxis brauchbar und durch seine Theorie der die Deviation darstellenden neun Stäbe anschaulich gemacht. Diese gehört wie die Poisson'sche Theorie der Deviation heute zum eisernen Bestand jeder Behandlung dieses Abschnittes der Nautik. Unabhängig von der Poisson'schen Theorie der Deviation geht Airy vor allem auf Kompensation des Kompasses aus. Er entdeckt, daß auf Eisenschiffen dem festen Magnetismus die höchste Bedeutung zukommt, neben dessen Betrag der des induzierten nur gering ist. Auf Holzschiffen war der feste Magnetismus bis dahin unbemerkt geblieben. Airy kompensiert den festen durch Stabmagnete, einschließlich der Krängungsdeviation. Die Horizontalkomponente des induzierten Magnetismus kompensiert Airy durch ein Kugelpaar aus weichem Eisen.

Die Kompensation des festen Magnetismus durch Airys Stabmagnete, die Kompensation des induzierten Magnetismus durch den Flinders-Stab und die Airy-Kugeln aus Weicheisen[1]) ergeben nicht, wie man anfänglich hoffte, eine vollständige Kompensation. Dies ist auch dann nicht der Fall, wenn man der Aenderung des Magnetismus Rechnung trägt, und wenn man dem Einfluß der Nadelinduktion durch Mehrnadelrosen begegnet (Aschnitt 43). So wird eine Nachprüfung und Vervollständigung der Theorie erforderlich. Eine solche wird im Folgenden unternommen. Es ergiebt sich, daß die sog. Poissonsche Theorie an gewisse Voraussetzungen geknüpft ist, deren Bestehen beim Schiff nicht ohne Weiteres angenommen werden kann. Deshalb wird einerseits gezeigt, daß auch, wo die Poissonsche Theorie nicht gilt, doch vollständige Kompensation möglich sein kann. Andererseits wird, da immerhin die Poissonsche Theorie oft mit einer praktisch brauchbaren Annäherung zu gelten scheint, untersucht, ob auf Grund dieser Theorie mit den bisher angewandten Mitteln: Stäben, Kugeln, Kreisscheiben, vollständige Kompensationen bewirkt werden können. Das erweist sich in mehrfacher Weise als möglich. Unter den vorgeschlagenen Wegen muß die Praxis den im Einzelfalle besten auswählen.

---

1) Eisen heißt (mgn.) weich oder hart, je nach seiner Aufnahmefähigkeit für Induktionsmagnetismus.

Für das Schrifttum und den derzeitigen Stand dieses Gebietes sei verwiesen auf die Abhandlung: Nautik (M e l d a u) in der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. VI, Teil I, S. 320ff. Ziemlich vollständige Schriftenverzeichnisse findet man in: Der Kompaß an Bord eiserner Schiffe, hrsg. von der Deutschen Seewarte, Hamburg (2. Aufl.) 1906, und in F. C o r b a r a, Trattato sul Magnetismo delle navi in ferro e sulle bussole marine, Genova 1907.

Das sehr umfangreiche Schrifttum und die vielen Bemühungen um Verbesserungen lassen die Bedeutung und die Notwendigkeit von Untersuchungen auf diesem Gebiet erkennen.

1. Grundbegriffe.

Die Wirkung eines mgn. Körpers ist in jedem Punkte des Raumes nach Größe, Richtung und Sinn durch eine frei bewegliche Magnetnadel bestimmt, wird also dort durch einen Vektor mit Richtungssinn, die „Feldstärke“ dargestellt. Sämtliche derartigen Vektoren bilden das mgn. „Vektorfeld“ des Körpers.

Eine Linie, bei der das Linienelement jedes ihrer Punkte in die Feldstärke dieses Punktes fällt, heißt eine „Kraftlinie“ des Feldes. Die Kraftlinie hat einen Richtungssinn, entsprechend dem Richtungssinn der Feldstärken in ihren Punkten.

Felder heißen mgn. „ähnlich“, wenn in geometrisch homologen Punkten die Feldstärken gleichgerichtet und proportional sind. Aehnliche Felder sind „gleich- oder gegensinnig“, jenachdem dies bei homologen Feldstärken der Fall ist. Auch die erzeugenden Körper mgn. ähnlicher Felder sollen mgn. ähnlich heißen; oder auch mgn. Modelle von einander.

Sofern nur die Wirkung in einem bestimmten Punkt O in Betracht kommt, heißen Felder „äquivalent in Bezug auf O“, wenn ihre Feldstärken in O gleich und gleichsinnig sind; sie heißen „kompensierend in Bezug auf O“, wenn ihre Feldstärken in O gleich und gegensinnig sind. Jedes Feld wird durch jedes äquivalente „dargestellt“.

Zwei Felder haben in O zwei Feldstärken I und II. Sind beide klein und ihre Wirkung auf einander zu vernachlässigen, so besteht „Superposition“: die beiden Vektoren I und II setzen sich nach dem Parallelogrammsatz zu einem resultierenden III zusammen (Abb. 1). Ein Feld, das in O die Feldstärke III hat, heißt aus den beiden gegebenen „zusammengesetzt in Bezug auf O“ oder in die beiden gegebenen „zerlegt in Bezug auf O“.

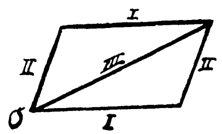


Abb. 1

Sind zwei Felder „kompensierend in Bezug auf O“, so hat das aus ihnen zusammengesetzte Feld in O die Feldstärke Null.

Zwei ähnliche und in Bezug auf O ähnlich gelegene Felder haben in O gleichgerichtete Feldstärken, die sich also wie Strecken addieren, bzw. subtrahieren.

2. Fester Magnetismus.

Es sei das Feld zunächst das eines festmagnetischen Körpers. Dies Feld ist äquivalent in Bezug auf O dem Felde eines Magnetstabes NS. Denn man kann einen solchen Stab so legen, daß irgend eine seiner Kraftlinien mit irgend einem ihrer Punkte durch O geht und dort die gegebene Feldstärkenrichtung hat. Und man kann zweitens den Stab NS von solcher Stärke wählen, daß seine Feldstärke in O grade der gegebenen gleich ist (Abb. 2).

Derselbe Magnetstab an dieselbe Stelle im umgekehrten Sinn gelegt, kompensiert das Feld in Bezug auf O.

Ein Stab heißt in Bezug auf die Feldstärke, die er in O erzeugt oder kompensiert, in erster, zweiter oder dritter Hauptlage, jenachdem er bzw. in derselben, in einer parallelen oder in einer zur Feldstärke in O senkrechten Graden liegt (Abb. 3, 4, 5). Die dritte Hauptlage, hier zum ersten Mal eingeführt, erweist sich weiterhin als grundlegend wichtig.

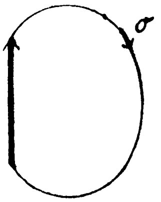


Abb. 2
allgemeine Lage

Abb. 3
erste Hauptlage

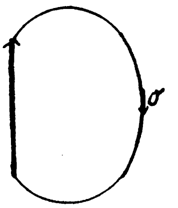


Abb. 4
zweite Hauptlage

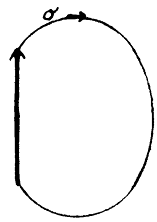


Abb. 5
dritte Hauptlage

Ueberhaupt kann eine vorgeschriebene Feldstärke in O durch einen Stab vorgeschriebener Richtung erzeugt oder kompensiert werden. Zu dem Zweck wähle man auf den Kraftlinien eines Stabes eine Feldstärke der gegebenen Größe, die mit dem Stabe den vorgeschriebenen Winkel bildet. Dann lege man den Stab so, daß diese Feldstärke durch O geht und dort die vorgeschriebene Richtung hat. Schließlich drehe man die Kraftlinie mit dem Stabe um das Linienelement als Drehaxe, bis der Stab in die vorgeschriebene Richtung kommt.

Man kann auch erst die Feldstärke in O in Komponenten zerlegen, z. B. in drei P, Q, R nach den drei Koordinatenaxen, und dann jede Komponente durch einen Magnetstab kompensieren. Will man über die Fernwirkung des Magnetismus, also den Verlauf der Kraftlinien nichts voraussetzen, so verwende man nur erste und zweite Hauptlagen. Dann braucht man nur die Entfernung des Kompensationsmagneten zu vergrößern oder zu verkleinern, geeignete Stärke vorausgesetzt, um Kompensation zu bewirken. Beim Schiff kompensierte A i r y durch drei Magnete in zweiter Hauptlage, den senkrechten R mittschiffs vor dem Kompaß. Heute legt man statt dessen nach L o r d K e l v i n diesen Magneten senkrecht unter den Kompaß in erster Hauptlage. Aber diese Lagen sind nach dem Vorhergehenden keineswegs zwingend, wie z. B. im Admiralty Manual 1920, S. 81 oder in „Der Kompaß an Bord", 1889, S. 164, Z. 27 und 1906, S. 143, Z. 17 angenommen wird. Mit Rücksicht auf die Praxis kann eine freiere Verfügung über die Orte der Kompensationsmagneten vorteilhaft sein. Den senkrechten Magneten z. B. könnte man an der Wand des Steuerhauses in Höhe der Rose anbringen, statt in der Kompaß-Säule, wo man nur einen geringen Spielraum für etwa notwendig werdende Verschiebung dieses Magneten hat.

3. Flüchtiger Magnetismus.

Nunmehr sei das Feld das eines Körpers, der durch Induktion „flüchtigen" Magnetismus aufnimmt, eines „flüchtigen" Magneten. Das induzierende Feld sei das erdmagnetische Feld. Dieses Feld kann als „homogen" vorausgesetzt werden, d. h. seine Feldstärke T soll bei allen in Betracht kommenden Punkten nach Größe, Richtung und Sinn dieselbe sein. Das „flüchtige" Feld hat in O eine Feldstärke, die bei jeder anderen Lage des Körpers zum induzierenden Feld eine andere sein wird. Sind X, Y, Z die Komponenten des induzierenden Vektors T in Bezug auf drei im Körper feste rechtwinklige Koordinatenaxen mit dem Anfangspunkt O, und sind U, V, W die Komponenten der flüchtigen Feldstärke in O in Bezug auf dasselbe Koordinatensystem, so sind U, V, W Funktionen von X, Y, Z.

Aehnliche Körper, die zur Richtung von T die gleiche (gleich- oder gegensinnige) Lage haben, werden (gleich- oder gegensinnig) ähnlich induziert und erzeugen (gleich- oder gegensinnig) ähnliche Felder. Ist O Aehnlichkeitspunkt zweier solcher Felder, so werden die Feldstärken beider Felder in O bei jeder Richtung von T immer ähnlich sein; oder auch gleich, wenn der Unterschied infolge verschiedener Entfernungen durch die verschiedene Aufnahmefähigkeit der Körper grade ausgeglichen wird. Es gibt also auch bei flüchtigem Magnetismus ähnliche und in Bezug auf O äquivalente Felder.

Die Zusammensetzung der Felder ist wie bei festem Magnetismus zu erklären. Bei festem Magnetismus konnte ein beliebig zusammengesetztes Feld in Bezug auf O durch einen äquivalenten Magnetstab dargestellt, also auch durch einen solchen kompensiert werden. Bei flüchtigem Magnetismus gelten in dieser Hinsicht zunächst nur folgende Betrachtungen.

Der Induktionsmagnetismus in einem Stabe kann außer von einem von der Beschaffenheit des Stabes abhängigen Faktor nur abhängen von der Lage des Stabes zu dem Erdvektor T. Der Induktionsmagnetismus in 2 parallelen Stäben steht also in einem von der Lage der Stäbe zu T unabhängigen Verhältnis. Dasselbe gilt mithin für ihre Feldstärken in O. Diese lassen sich demnach zu einer Feldstärke in O zusammensetzen, die eine feste Richtung hat und deren Größe von der Lage der Stäbe zu T abhängt. Findet man zu dieser Feldstärke bei *gegebener* Lage zu T einen sie erzeugenden Stab, der den beiden gegebenen parallel ist, was nach S. 5 immer möglich ist, so wird dieser Stab bei *jeder* Lage zu T aus den beiden andern zusammengesetzt sein. Also: *parallele Stäbe sind zusammensetzbar in Bezug auf O.*

Bei parallelen Stäben findet auch Kompensation in Bezug auf O statt. Man betrachte einen Stab mit einer bestimmten seiner Kraftlinien wie ein starres Gebilde. Zwei solcher Gebilde kann man in einer Ebene, die Stäbe parallel, in mannigfacher Weise so legen, daß die beiden Kraftlinien sich in O gegensinnig berühren (Abb. 6). Durch geeignete Wahl der Aufnahmefähigkeiten beider Stäbe erreicht man dann, daß die Feldstärken in O gegensinnig gleich sind, zunächst bei einer bestimmten Lage zu T, dann sind sie es auch bei jeder.

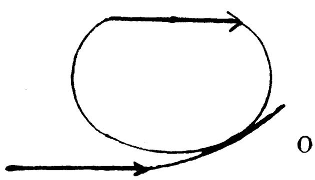


Abb. 6

Nur Stäbe zeigen dies einfache Verhalten in Bezug auf Kompensation. Schon zwei Kreis-Scheiben also auch Kugeln, die sich bei der Induktionsrichtung T_1 in O kompensieren, also dort gegensinnig berührende Kraftlinien haben, kompensieren sich bei der Induktionsrichtung T_2 sicher nicht, sondern haben in O sich schneidende Kraftlinien (Abb. 7). Kompensation bei beiden Induktionsrichtungen ist nämlich selbst dann nicht möglich, wenn man nur kleine oder ferne Scheiben oder Kugeln nimmt. Solche sind als Stäbe in der Richtung T_1 bzw. T_2 anzusehen, zu denen die sich kompensierenden Feldstärken in O in dritter Hauptlage sein müßten. Aber solche Feldstärken liegen, wie wir in Abschnitt 23 zeigen, vom Stabe aus in graden Linien, die mit der Stabrichtung den Winkel arc tang $\sqrt{2}$ bilden, und das ist nicht bei beiden Richtungen T_1 und T_2 dieselbe Grade. (Abb. 11, 12). Nur kreisförmige Kraftlinien, Wirkung umgekehrt proportional der Entfernung, geben Kompensation bei jeder T-Richtung.

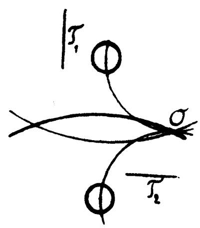


Abb. 7

4. Das Induktionsgesetz.

Von nun ab erst brauchen wir das Gesetz, nach dem ein Stab im erdmagnetischen Feld induktionsmagnetisch, ein „flüchtiger“ Magnetstab wird. Nämlich denjenigen Faktor des Induktionsmagnetismus, der nicht von der Beschaffenheit des Stabes, sondern von seiner Lage gegen T abhängt, also von dem Winkel des Stabes gegen T oder von dessen Kosinus

$$\frac{Xx + Yy + Zz}{T},$$

wo mit x, y, z die Richtungskosinus des Stabes bezeichnet sind.

Jetzt machen wir die Annahme, daß die Stärke des von einem Körper aufgenommenen Induktionsmagnetismus der des induzierenden Magnetismus proportional ist. Diese Annahme wird immer mehr oder weniger stillschweigend gemacht. Wir machen diese Annahme bei den nur in Betracht kommenden kleinen Werten von T. Demgemäß ist die Induktion des Stabes gleich:

$$T \cdot F\left(\frac{Xx + Yy + Zz}{T}\right),$$

wo F eine noch unbekannte Funktion ist. Steht der Stab senkrecht zum Felde, so ist kein Grund vorhanden, daß er an dem einen oder an dem andern Ende seinen Nordpol bekommen soll. Er muß also unmagnetisch bleiben. Da in diesem Fall $Xx + Yy + Zz = 0$ ist, bedeutet dies, daß

$$F\left(\frac{Xx + Yy + Zz}{T}\right) = \frac{Xx + Yy + Zz}{T} M,$$

also die Induktion selbst gleich $(Xx + Yy + Zz) M$ ist, wo M eine Funktion von cos (Stab, T) ist. Nach der üblichen, durch die Erfahrung hinlänglich bestätigten Annahme ist M eine Konstante. Unter dieser Annahme gilt also das Gesetz:

Die Induktion ist proportional der in die Stabrichtung fallenden Komponente von T.

Die Feldstärke in O des flüchtigen Magnetstabes hat eine feste Richtung, deren Richtungscosinus u, v, w seien, aber eine mit der Richtung von T veränderliche Stärke, die proportional $(Xx + Yy + Zz) M$ sein muß. Sie sei gleich $(Xx + Yy + Zz) m$, wo m proportional M ist und außerdem von der Lage des Punktes O zum Stabe abhängt.

Ist die Feldstärke in O von der Größe $(Xx + Yy + Zz) m$ und der Richtung (u, v, w) gegeben, so läßt sich in jeder Entfernung von O ein flüchtiger Magnetstab der Richtung (x, y, z) angeben, der in O grade die Feldstärke von der Richtung (u, v, w) und auch von der vorgeschriebenen Größe bekommt, wenn man dem flüchtigen Magnetstab die mit Rücksicht auf die Entfernung erforderliche Aufnahmefähigkeit gibt. Alle diese in Bezug auf O äquivalenten Stäbe liegen mit O in einer Ebene und haben in O sich gleichsinnig berührende Kraftlinien (Abb. 8).

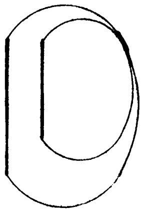


Abb. 8

5. Die neun Stäbe.

Wir zerlegen die Feldstärke in O von der Größe m (Xx + Yy + Zz) und der Richtung (u, v, w) nach drei gegebenen, nicht einer Ebene parallelen Richtungen, z. B. nach den Richtungen der drei Koordinatenaxen in drei Komponenten:

$$\begin{aligned} U &= m\,(Xx + Yy + Zz)\,u, \text{ Richtung } (1, 0, 0), \\ V &= m\,(Xx + Yy + Zz)\,v, \text{ Richtung } (0, 1, 0), \\ W &= m\,(Xx + Yy + Zz)\,w, \text{ Richtung } (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Da sich die Feldstärken in O von mehreren Stäben nach Voraussetzung nach dem Parallelogrammsatz superponieren, erhält man die Komponenten der Resultante durch Addition der Komponenten der einzelnen Feldstärken. Die Komponenten der Feldstärke in O eines Stabsystems sind also:

$$\begin{aligned} U &= X\Sigma mxu + Y\Sigma myu + Z\Sigma mzu, \text{ Richtung } (1,0,0), \\ V &= X\Sigma mxv + Y\Sigma myv + Z\Sigma mzv, \text{ Richtung } (0,1,0), \\ W &= X\Sigma mxw + Y\Sigma myw + Z\Sigma mzw, \text{ Richtung } (0,0,1). \end{aligned}$$

U, V, W sind also Linearformen von X, Y, Z. Die neun Koëffizienten dieser Linearformen werden mit a, b, c, d, e, f, g, h, k bezeichnet und nennen wir die „Elemente der Deviation", ihre Matrize

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

die „Deviationsmatrize". Für Deviationsmatrizen besteht gemäß ihrer Bedeutung die Zusammensetzung bzw. Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & k' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'' & b'' & c'' \\ d'' & e'' & f'' \\ g'' & h'' & k'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'+a'' & b'+b'' & c'+c'' \\ d'+d'' & e'+e'' & f'+f'' \\ g'+g'' & h'+h'' & k'+k'' \end{pmatrix}$$

und wird demgemäß die Multiplikation festgesetzt:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} j = \begin{pmatrix} aj & bj & cj \\ dj & ej & fj \\ gj & hj & kj \end{pmatrix}.$$

Die Quadratsumme der neun Elemente nennen wir die „Norm". Eine Matrize heiße „normirt", wenn ihre Norm gleich Eins ist. Man normiert eine Matrize, indem man ihre Elemente durch die Quadratwurzel der Norm dividiert. Für einen Stab wird die Deviationsmatrize

$$\begin{pmatrix} mxu & myu & mzu \\ mxv & myv & mzv \\ mxw & myw & mzw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xu & yu & zu \\ xv & yv & zv \\ xw & yw & zw \end{pmatrix} m.$$

m, die positive Quadratwurzel der Norm, heiße das „mgn. Maß" des Stabes.

Wir zerlegen eine Deviationsmatrize erstens nach Zeilen

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & k \end{pmatrix}.$$

Die erste Matrize

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gehört zu einer Feldstärke mit den Komponenten:

$$\begin{aligned} U &= aX + bY + cZ \\ V &= 0 \\ W &= 0, \end{aligned}$$

die also die Richtung (1, 0,0) der X-Axe hat, und zu einem Stabe der Richtung (a : b : c) gehört. Die zweite Matrize

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gehört zu einer Feldstärke mit den Komponenten

$$\begin{aligned} U &= 0 \\ V &= dX + eY + fZ \\ W &= 0, \end{aligned}$$

die also die Richtung (0, 1, 0) der Y-Axe hat, und zu einem Stabe der Richtung (d : e : f) gehört. Die dritte Matrize

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

gehört zu einer Feldstärke:

$$\begin{aligned} U &= 0 \\ V &= 0 \\ W &= gX + hY + kZ, \end{aligned}$$

die also die Richtung (0, 0, 1) der Z-Axe hat, und zu einem Stabe der Richtung (g : h : k) gehört. Das Stabsystem ist also äquivalent drei Stäben, also auch kompensierbar durch drei Stäbe, deren Feldstärken in O in die drei Axenrichtungen fallen. Wir zerlegen zweitens nach Spalten:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Die erste Matrize

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gehört zu einer Feldstärke

$$U = aX$$
$$V = dX$$
$$W = gX$$

der Richtung (a : d : g), die zu einem Stabe der X-Richtung (1, 0, 0) gehört. Die zweite Matrize

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

gehört zu einer Feldstärke

$$U = bY$$
$$V = eY$$
$$W = hY$$

der Richtung (b : e : h), die zu einem Stabe der Y-Richtung (0, 1, 0) gehört. Die dritte Matrize

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

gehört zu einer Feldstärke

$$U = cZ$$
$$V = fZ$$
$$W = kZ$$

der Richtung (c : f : k), die zu einem Stabe der Z-Richtung (0,0,1) gehört. Das Stabsystem ist also auch äquivalent drei Stäben, also auch kompensierbar durch drei Stäbe, die die Axenrichtungen haben.

Wir zerlegen drittens in neun Matrizen:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Die erste Matrize

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} a$$

gehört zu einer Feldstärke

$$\begin{aligned} U &= aX \\ V &= 0 \\ W &= 0 \end{aligned}$$

der X-Richtung (1, 0, 0) bzw. (— 1, 0, 0), erzeugt durch einen Stab der X-Richtung des Maßes a (bzw. — a) in der ersten (zweiten) Hauptlage, also kompensierbar durch einen Stab in der X-Richtung in der zweiten (ersten) Hauptlage. In den Abbildungen 9 und 10 entspricht das obere Vorzeichen der Erzeugung, das untere der Kompensation.

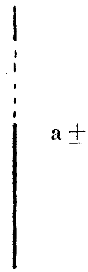


Abb. 9

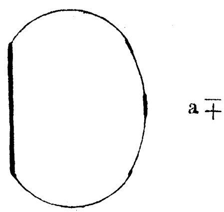


Abb. 10

Die zweite Matrize

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} b$$

gehört zu einer Feldstärke

$$\begin{aligned} U &= bY \\ V &= 0 \\ W &= 0 \end{aligned}$$

der X-Richtung (1, 0, 0) bzw. (— 1, 0, 0); erzeugt durch einen Stab der Y-Richtung des Maßes b (bzw. — b) in dritter Hauptlage; also auch kompensierbar durch einen Stab der Y-Richtung in dritter Hauptlage. Der erzeugende und der kompensierende Stab liegen symmetrisch zur Feldstärke in O, was auf zwei Arten möglich ist (Abb. 11 und 12). Usw.

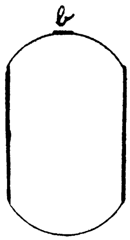


Abb. 11

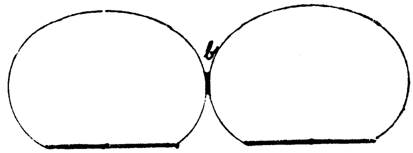


Abb. 12

Demnach werden die in den drei Axen liegenden Feldstärken a X, d X, g X durch drei Stäbe in der X-Richtung, die in den drei Axen liegenden Feldstärken b Y, e Y, h Y durch drei Stäbe in der Y-Richtung, die in den drei Axen liegenden Feldstärken c Z, f Z, k Z durch drei Stäbe in der Z-Richtung erzeugt. Das Stabsystem kann also durch neun solche Stäbe erzeugt, also auch durch neun entsprechende Stäbe kompensiert werden.

Setzt man je drei parallele Stäbe zusammen, so erhält man die obige Darstellung durch drei Stäbe in den Axenrichtungen. Setzt man je drei gleichgerichtete Feldstärken (in O) zusammen (S. 4), und sucht nach S. 9 einen die zusammengesetzte Feldstärke erzeugenden Stab, so erhält man die obige Darstellung durch drei Stäbe, deren Feldstärken in O in die Axenrichtungen fallen.

Die Möglichkeit dieser Zerlegungen und Kompensationen eines Stabsystems beruhte darauf, daß U, V, W für ein Stabsystem Linearformen von X, Y, Z sind, und dies beruhte darauf, daß der Induktionsmagnetismus eines flüchtigen Magnetstabes eine solche Linearform ist.

Ein Stab mit der Deviationsmatrize

$$m \begin{pmatrix} ux & uy & uz \\ vx & vy & vz \\ wx & wy & wz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

ist in erster oder zweiter Hauptlage, wenn die Stabrichtung (x, y, z) mit der Feldstärkenrichtung (u, v, w) übereinstimmt, wenn also das vektorielle Produkt (v z—w y, w x—u z, u y—v x), also f—h, g—c, b—d verschwinden. Ein Stab ist in dritter Hauptlage, wenn die Stabrichtung auf der Feldstärkenrichtung senkrecht steht, wenn also das skalare Produkt

$$ux + vy + wz \text{ oder } a + e + k$$

verschwindet.

Allgemein werden wir den Skalar (ungerichtete Größe) $a + e + k$ als die Divergenz, und den Vektor $(f - h,\ g - c,\ b - d)$ als die Rotation des Vektors (U, V, W) bezeichnen.

Ein System von Stäben, das die Deviation

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

erzeugt oder kompensiert, heißt in erster oder zweiter Hauptlage, wenn die Rotation verschwindet, es heißt in dritter Hauptlage, wenn die Divergenz verschwindet. Für die erste (zweite) Hauptlage ist die Divergenz positiv (negativ).

6. Singuläre Deviationsmatrizen.

Die Deviationsmatrize eines einzelnen Stabes

$$\begin{pmatrix} ux, & uy, & uz \\ vx, & vy, & vz \\ wx, & wy, & wz \end{pmatrix} m.$$

ist vom Range 1, d. h. alle Subdeterminanten zweiter Ordnung verschwinden. Umgekehrt, wenn in einer normierten Matrize

$$\begin{pmatrix} a, & b, & c \\ d, & e, & f \\ g, & h, & k \end{pmatrix}$$

die neun Determinanten zweiter Ordnung verschwinden, so ist es die normierte Deviationsmatrize eines Stabes. Man bestimme zunächst bis auf die Vorzeichen u, v, w, x, y, z aus den Gleichungen

$$\begin{array}{ll} a^2+b^2+c^2=u^2 & a^2+d^2+g^2=x^2 \\ d^2+e^2+f^2=v^2 & b^2+e^2+h^2=y^2 \\ g^2+h^2+k^2=w^2 & c^2+f^2+k^2=z^2 \end{array}$$

Dann sind, wie es sein muß, die Gleichungen erfüllt:

$$u^2+v^2+w^2=1 \qquad x^2+y^2+z^2=1,$$

also u, v, w und ebenso x, y, z die Richtungskosinus zweier Richtungen. Ferner, weil nach Voraussetzung

$$bd=ae,\ bg=ah,\ cd=af,\ cg=ak \text{ ist, wird:}$$
$$u^2x^2=(a^2+b^2+c^2)(a^2+d^2+g^2)=$$
$$a^4+a^2d^2+a^2g^2+a^2b^2+a^2c^2+a^2e^2+a^2h^2+a^2f^2+a^2k^2=a^2,$$

also $ux=a$, ebenso $uy=b$, $uz=c$, $vx=d$, $vy=e$, $vz=f$, $wx=g$, $wy=h$, $wz=k$, indem man die Vorzeichen so wählt. Natürlich kann man die Vorzeichen aller sechs Richtungskosinus u, v, w, x, y, z zugleich umkehren; das gibt denselben Stab und dieselbe Feldstärke in O.

Bei einem System von zwei Stäben:

$$m\,(x, y, z;\ u, v, w) \text{ und } m'\,(x', y', z';\ u', v', w')$$

wird die Deviationsmatrize:

$$\begin{array}{lll} mux+m'u'x', & muy+m'u'y', & muz+m'u'z' \\ mvx+m'v'x', & mvy+m'v'y', & mvz+m'v'z' \\ mwx+m'w'x', & mwy+m'w'y', & mwz+m'w'z' \end{array}$$

vom Range zwei, d. h. ihre Determinante ist Null. Denn die Entwicklung dieser Determinante nach den Teilspalten gibt acht Determinanten, deren jede mindestens zwei Spalten des einen oder zwei Spalten des anderen Stabes enthält, also Null ist.

Umgekehrt, ist die Matrize

$$\begin{pmatrix} a, b, c \\ d, e, f \\ g, h, k \end{pmatrix}$$

vom Range zwei, verschwindet also ihre Determinante, so läßt sich die Matrize in zwei zerlegen:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & k' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'' & b'' & c'' \\ d'' & e'' & f'' \\ g'' & h'' & k'' \end{pmatrix},$$

die vom Range Eins sind, sodaß eine Matrize vom Range zwei durch zwei Stäbe dargestellt werden kann. Um eine solche Zerlegung zu bewerkstelligen, nehmen wir an, daß a von Null verschieden ist. Andernfalls können wir durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen ein nichtverschwindendes Element an die erste Stelle bringen. Alsdann wählen wir:

$$\begin{array}{lll} a' = a & b' = b & c' = c \\ d' = d & e' = bd:a & f' = cd:a \\ g' = g & h' = bg:a & k' = cg:a \\ a'' = 0 & b'' = 0 & c'' = 0 \\ d'' = 0 & e'' = e - bd:a & f'' = f - cd:a \\ g'' = 0 & h'' = h - bg:a & k'' = k - cg:a. \end{array}$$

Dann wird offenbar die erste Matrize vom Range Eins, aber auch die zweite, denn es wird:

$$a^2 \begin{vmatrix} e'' & f'' \\ h'' & k'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & k \end{vmatrix} \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = 0 \text{ nach Voraussetzung.}$$

Zusammenfassend haben wir also den Satz:

Eine Deviationsmatrize kann bzw. durch einen, durch zwei oder durch drei Stäbe sowohl dargestellt, als auch kompensiert werden, jenachdem sie vom Range eins, zwei oder drei ist.

7. Der Poissonsche Satz.

Für ein System von Stäben wurden unter den angegebenen Voraussetzungen die Komponenten U, V, W der Feldstärke in O Linearformen der Komponenten X, Y, Z des Erdmagnetismus:

$$\begin{aligned} U &= aX + bY + cZ \\ V &= dX + eY + fZ \\ W &= gX + hY + kZ \end{aligned}$$

Dieselbe Behauptung für ein System von Körpern werden wir als Poisson's Satz bezeichnen. Poisson spricht diesen Satz einmal so aus: „En effet, α, β, γ étant toujours ces trois composantes rectangulaires de l'action exercée sur un point quelconque par un système aimantés par l'influence de cette force, seront dans tous les cas, des fonctions linéaires de ces trois quantités . . ." (Mém. de l'acad. 5, 1821/22, S. 532) und ein anderes Mal so:

„les composantes de l'action magnétique de tout système de corps aimantés par la seule influence de la terre, sont des fonctions linéaires des composantes de la force directrice du globe". (Mém. de l'acad. 16, 1838, S. 527).

Poisson macht also keine einschränkenden Voraussetzungen für die Gültigkeit dieses Satzes. Nur spricht er ausdrücklich von der Wirkung des Induktionsmagnetismus auf einen Punkt. Bei der Anwendung auf den Schiffskompaß ist das System von Körpern, die durch den Erdmagnetismus induktionsmagnetisch werden, die Gesamtheit der Eisenteile eines Schiffes, und der Punkt, auf den der Magnetismus wirkt, ist die Kompaßnadel. Demnach setzt Poisson stillschweigend voraus, daß die Länge der Nadel gegenüber den Entfernungen der einwirkenden Körper[1]) soll vernachlässigt werden können. Erst zwei Jahrzehnte nach der ersten Poissonschen Veröfferntlichung hebt Sabine (Phil. Trans. 1843, S. 147) dies ausdrücklich hervor: „M. Poisson has shown that if the dimensions of the needle are very small

1) Entfernung „der störenden Kräfte" (Kompaß an Bord, 1906, S. 142) ist ein zu beanstandender Ausdruck, da man von einer Entfernung der Kräfte nicht reden kann. Genau gefaßt müßte man sagen, das Magnetfeld soll im Bereich der Nadel als homogen gelten können.

compared to its distance from the iron by which it is affected, the following equations are true . . .".

Eine merkliche Abweichung von Poisson's Satze entdeckt zuerst Evans (Superintendent of the Compass Departement of H. M. Navy) nach fast weiteren zwanzig Jahren auf dem Great Eastern (Phil. Trans. 1861, S. 161), die Archibald Smith in der Tat auf die ungewöhnliche Länge der Nadeln zurückführte. Seitdem erst wird diese Voraussetzung bewußt und deutlich hervorgehoben. Z. B. heißt es im Archiv der Deutschen Seewarte VII (1884) Nr. 3, S. 1: „. . . daß die Entfernung der magnetischen Kräfte (Pole) im Schiff vom Kompaß als eine so beträchtliche gegenüber der Ausdehnung der Kompaßnadel angesehen wurde, daß letztere als verschwindend betrachtet werden kann. Nur für diese Voraussetzung gelten die bislang entwickelten Formeln".

Aber diese Voraussetzung ist nicht, wie es hiernach scheinen möchte, die einzige. M. H. Faye (Cours d'astronomie nautique, Paris 1880, S. 226) fügt zu der Voraussetzung: „les formules supposent que la demi-longeur de l'aiguille est une quantité évanouissante vis-à-vis des distances qui séparent le compas des pièces de fer les plus voisines . . ."

eine zweite:

„Ces formules supposent encore que le fer du navire ne se compose que de fer absolument doux et de fer absolument aigre et coercitif . . .".

Diese letztere Voraussetzung, daß nur fester und flüchtiger Magnetismus in Betracht kommen soll, ist keine grundsätzliche: wie der flüchtige ist auch der halbfeste Magnetismus auf Grund des Poissonschen Satzes zu behandeln (s. u.), sofern überhaupt die Voraussetzungen für diesen Satz zutreffen.

Dagegen hatte schon der Admiralty Manual 1869 (Appendix Nr. 1 (1)), auf eine andere Voraussetzung hingewiesen, die später meist stillschweigend gemacht wird. Dort heißt es:

„These equations were first given by M. Poisson in the year 1824 in the fifth volume of the memoirs of the Institute, p, 513. They result from the hypothesis that the magnetism of the ship is partly the permanent magnetism of hard iron, and partly the transient induced magnetism of soft iron; that the latter is proportional to the intensity of the inducing force, and that the length of the needle is infinitesimally small compared to the distance of the nearest iron, and on this hypothesis they are exact".

Die Voraussetzung, der induzierte Magnetismus sei proportional dem induzierenden, ist, wie wir schon oben hervorhoben, keineswegs selbstverständlich, aber wohl im Bereich „kleiner" Kräfte zulässig. Würden wir sie nicht machen, so träfe der Poisson'sche Satz schon bei Stäben nicht zu. Das Induktionsgesetz nebst der Konstanz von M ist als der Poisson'sche Satz für Stäbe anzusehen.

Die Voraussetzung, daß die in Betracht kommenden Kräfte klein sein sollen, wird ausgesprochen von Ripoll (Revue maritime 176, Paris 1908, S. 5):

„Nous ne ferons qu'une hypothèse, sauf à la vérifier ultérieurement par l'expérience, nous admettrons que les forces magnétiques qui s'exercent sur un navire et qui dérivent toutes de la force terrestre, sont infiniments petites. Cette hypothèse a pour conséquence mathématique les formules de Poisson, qu'une expérience d'un siècle a vérifiées; elle est donc pratiquement exacte. — Or, quand des forces infiniments petites agissent sur un corps, leurs effets se superposent . . .".

Ripoll schließt nun richtig, daß, wenn der Erdmagnetismus (X, Y, Z), der im Schiff feste Magnetismus (P, Q, R) und der im Schiff induzierte flüchtige Magnetismus (U, V, W) klein sind, daß dann ihre gemeinsame Wirkung auf den Kompaßort durch Superposition erhalten wird:

$$X' = X + U + P$$
$$Y' = Y + V + Q$$
$$Z' = Z + W + R.$$

Aber es ist falsch aus der Kleinheit von X, Y, Z und von U, V, W schließen zu wollen, U, V, W seien Linearformen von X, Y, Z; dies ist falsch, auch wenn man die oben hervorgehobene Voraussetzung hinzunimmt, daß der induzierte dem induzierenden Vektor der Größe nach proportional ist, daß also U, V, W Formen ersten Grades von X, Y, Z sind. Denn wäre z. B. U eine durch T geteilte quadratische Form von X, Y, Z, also eine Form ersten Grades von X, Y, Z, so läßt sich diese keineswegs, auch bei noch so kleinen X, Y, Z durch eine Linearform auch nur angenähert darstellen, wenn diese Darstellung nach allen Richtungen X : Y : Z gelten soll. Beim Schiff liegen insofern einfachere Verhältnisse vor, als man nur geringe Aenderungen der mgn. Breite und nur geringe Abweichungen von der aufrechten Lage in Betracht zu ziehen pflegt; auch ist die Verteilung der Eisenmassen in gewisser Weise eine besondere. Es könnte also immerhin sein, daß in diesem begrenzten Umfang die betr. Formen ersten Grades sich praktisch genau genug durch Linearformen annähern lassen. Das ist in jedem Einzelfalle empirisch zu entscheiden (Abschnitt 17).

Stets wird die Theorie der neun Stäbe von Archibald Smith als Beweis des Poisson'schen Satzes angesehen. Archibald Smith stellt diese Theorie folgendermaßen dar (Admiralty Manual. App. I. Nr. V. 1864, S. 114/15):

„There is a physical representation of Poisson's fundamental equations so simple, and which gives us so great a power of estimating the effect on the compass of different arrangements of iron in a ship, as well as of tracing to their causes any peculiarities in the observed deviation, that it is of great importance to make ourselves masters of it.

If an infinitly thin straight rod of soft iron be magnetized by the earth, the effect will be the same as if each end became a pole having an intensity proportional to the component of the earth's force resolved in the direction of the rod, and to the section and capacity for induction of the rod.

Let us now suppose nine soft iron rods placed as in Plate I[1]). It will be seen that for each rod we must distinguish the two cases, that in which its coefficient is +, and that in which it is —. It will also be seen that in the three cases, viz., —a, —e, —k, in which the rod passes through the compass we may consider both ends as acting, but that in other cases it is convenient to consider only the action of the near end, and that the far end is at an infinite distance.

The rod a, it will be observed, can only be magnetized by the component X, b only by Y, and c only by Z; and if we call a X, b Y, and c Z the force with which these rods attract the north end of the needle, and if we suppose, as we are at liberty to do, the rods beeing imaginary, that they exercise no action on one another, a, b, and c will produce a force to head

$$= aX + bY + cZ.$$

So d, e, and f will produce a force to starboard

$$= dX + eY + fZ,$$

and g, h, and k will produce a force to keel

$$= gX + hY + kZ$$

By comparing these results with Poisson's formula we see that for the soft iron of the ship, however complicated its arrangement may be, we may substitute the nine soft iron rods".

Archibald Smith stellt also seine neun Stäbe nicht als einen Beweis des Poisson'schen Satzes hin, sondern

1) Smith's Plate I ist hier wie in vielen andern Veröffentlichungen wiedergegeben, s. z. B. Encyklopädie a. a. O. S. 335, Rottok a. a. O. S. 28, Corbara a. a. O. S. 53. Nur die irreführende Bezeichnung +a, —a, +b, .. ist ersetzt durch a+, a—, b+, ..., da mit a, b, .. die Deviationskoëffizienten einschließlich ihrer Vorzeichen bezeichnet sind. Noch besser wäre die Bezeichnung von Abb. 21, aber der Raum ist beengt und die neue sollte der alten Bezeichnung möglichst nahe kommen.

Plate I.

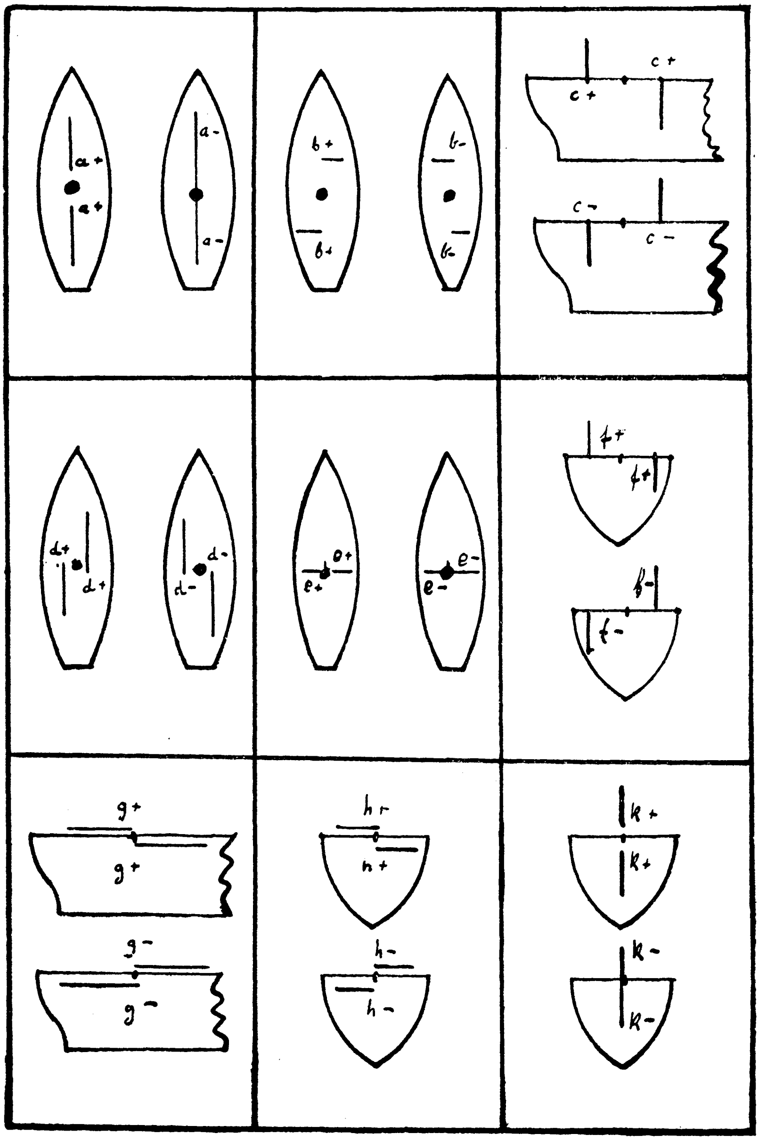


Abb. 13

als eine „physical representation". Der Inhalt seiner Ausführungen ist: „Wenn der P o i s s o n'sche Satz gilt, dann kann man dieselbe Wirkung des Eisens im Schiff auf den Kompaßort durch neun Stäbe darstellen."

Die Begründung der Theorie der Stäbe ist bei A r c h i b a l d S m i t h unbefriedigend. R i p o l l bemerkt (a. a. O.): „Les Anglais aiment à matérialiser leurs pensées, c'est dans leur nature. Seulement les barreaux d'A r c h i b a l d S m i t h, qui n'était pas homme à s'y méprendre, n'étaient que des êtres fictifs . . .". Im Sinne dieser negativen Kritik von R i p o l l läßt sich mehr sagen. Daß ein Stab nur proportional der in seiner Richtung verlaufenden Komponente des Erdmagnetismus magnetisch wird, nimmt A r c h i b a l d S m i t h ohne weiteres an. An seiner Verwendung unendlich langer Stäbe und von Stäben, die durch den Kompaß hindurchgehen, nimmt niemand Anstoß. Vielmehr reproduziert man diese „Theorie" fast unverändert, oft noch verschlechtert durch Vermengung mit denjenigen Ausführungen S m i t h's, die er selbst als einen Beweis des P o i s s o n'schen Satzes bezeichnet. Unsere obige Theorie der Stäbe ist frei von den erwähnten Bedenken; nur endlich lange Stäbe werden gebraucht, an Stelle der durch den Kompaß gehenden Stäbe für die Diagonalglieder a, e, k mit (bzw. ohne) Unterbrechung treten Stäbe in der ersten (bzw. zweiten) Hauptlage; an Stelle der Stäbe für die Nicht-Diagonalglieder b, c, d, f, g, h treten Stäbe in der von uns eingeführten dritten Hauptlage, von der die bei S m i t h verwendete lediglich der Grenzfall für unendlich lange Stäbe ist. (Abb. 14). Außerdem fügt unsere

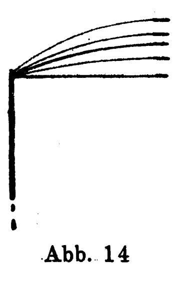


Abb. 14

Theorie der neun Stäbe die Kompensation hinzu, was bei Smith's unendlich langen und durch den Kompaß gehenden Stäben nicht geht, da diese „being imaginary" (Smith) oder „des ètres fictifs" (Ripoll) sind.

Der Smith'sche „Beweis" des Poisson'schen Satzes sei hier im Wortlaut wiedergegeben (s. Admiralty Manual, 1869, S. 109/10, Appendix, I, Nr. 1). ,,These equations may be obtained from the following considerations — The magnetism induced in the soft iron by a uniform force X produces a force on the north point of the compass, proportional to X = (say) l X (l being a constant, depending only on the soft iron in the ship). This force does not in general act towards the head, but in some other direction in the ship, of which the direction cosines are (say) a/l, d/l, g/l (a, d, g being constants, depending only on the soft iron in the ship), and the resolved parts of which force are, thereforce, aX to head, dX to starboard, and gX downwards.

Similarly Y produces a force b Y to head, e Y to the starboard, and h Y downwards, and Z produces a force c Z to head, f Z to starboard, and k Z downwards. The hypothesis that the magnetism induced is proportional to the intensity of the inducing force, allows us to combine by simple addition the forces in the three directions which each component of the Earth's force would produce separately. Adding than, therefore, together and adding to them the force from the permanent magnetism, we get·

Disturbing force to head	$= X' - X = aX + bY + cZ + P$
„ „ „ starboard	$= Y' - Y = dX + eY + fZ + Q$
„ „ downwards	$= Z' - Z = gX + hY + kZ + R,$

which are Poissons equations."

Wie man sieht, haben in diesem „Beweise" die Stäbe nichts zu suchen; es wird nur mit den Feldstärken in O operiert. Die wesentliche Voraussetzung, die Smith hier als selbstverständlich einführt, ist: „die von T in O bewirkte Feldstärke ist die Resultante der von X, Y, Z einzeln in O bewirkten Feldstärken", oder die Funktionen U, V, W haben die Eigenschaft:

$$U(X,Y,Z) = U(X,0,0) + U(0,Y,0) + U(0,0,Z)$$
$$V(X,Y,Z) = V(X,0,0) + V(0,Y,0) + V(0,0,Z)$$
$$W(X,Y,Z) = W(X,0,0) + W(0,Y,0) + W(0,0,Z);$$

woraus dann freilich folgt, daß die Formen ersten Grades U, V, W Linearformen von X, Y, Z sind. Denn eine Form ersten Grades einer Veränderlichen ist eine Linearform dieser.

Der entscheidende Punkt bei Smith ist also die Superposition der Wirkungen von X, Y, Z. Smith nimmt diese ohne Weiteres an, während Ripoll hierzu ausdrücklich die Voraussetzung der Kleinheit der Kräfte X, Y, Z macht. Daß diese Voraussetzung nicht ausreicht, ist oben bereits gezeigt worden.

In späteren Beweisversuchen fehlt die Ripollsche Voraussetzung, aber man macht die irrige Annahme, daß jede Komponente X, Y, Z des Erdmagnetismus nur in ihrer Richtung Magnetismus induziere. (S. z. B. E. Rottock, Die Deviationstheorie und ihre Anwendung in der Praxis, Berlin, 1903, S. 26; Der Kompaß an Bord, Hamburg 1889, S. 91 und 95). Das Beispiel einer Scheibe macht klar, daß die Induktionsaxe aus der induzierenden Richtung durch die Form des Körpers nach der größeren Ausdehnung des Körpers hin abgelenkt wird. Am augenfälligsten sieht man das am Stabe, der immer nur in seiner Richtung magnetisch wird. Die Annahme ein solcher Stab sei äquivalent drei Stäben in den Axenrichtungen, ist die Annahme des Induktionsgesetzes für Stäbe. Jede Komponente X, Y, Z induziert nicht in ihrer Richtung Magnetismus, sondern bewirkt ihrer Größe proportionale Feldstärken in O, worin aber, wie oben bemerkt, eine Vorwegnahme des Poissonschen Satzes liegt.

Die Annahme, man könnte den horizontalen und den vertikalen Teil des flüchtigen Magnetismus je für sich, den ersteren durch die Airy-Kugeln, den letzteren durch den Flinders-Stab, und dadurch den gesamten flüchtigen Magnetismus kompensieren, wird im Abschnitt 31 ihre Klarstellung finden.

Wenn man von dem Smithschen „Beweise“ absieht, hat Ripoll (a. a. O.) recht, wenn er sagt: „On ne fait jamais cette démonstration, et c'est un très grand tort; il est indispensable de connaître à fond les principes sur lesquels la théorie est étayée, et ces principes sont ici beaucoup plus simples qu'on ne le pense.“ Ripoll bringt immerhin eine vielleicht notwendige, aber sicher nicht hinreichende Voraussetzung hinzu. Jedoch kommt in dem Smithschen „Beweise“, wie es scheint zum ersten Male, zum Ausdruck, daß der Poissonsche Satz noch bewiesen werden muß und daß die bisher hierzu gemachten Voraussetzungen nicht ausreichen. Um diese Voraussetzungen zu finden und um den Weg der empirischen Nachprüfung gehen zu können, müssen wir zunächst aus dem Poissonschen Satze eine Reihe rechnerischer Folgerungen ziehen.

8. Die Formeln.

Zum Anfang O eines rechtwinkligen Koordinatensystems werde der Berührpunkt der Pinne des Kompaßkessels und des Hütchens der Rose genommen. Die Z-Axe sei senkrecht, positiv nach unten, die X-Axe gehe wagerecht durch die Steuermarke des Kompaßkessels, positiv nach vorn; dadurch ist auch die Y-Axe bestimmt, sie sei positiv nach Steuerbord. Diese Koordinatenaxen mögen Kompaßkoordinatenaxen heißen. Die Schiffskoordinatenaxen decken sich mit diesen, solange das Schiff nicht „Lage“ hat, sondern auf „ebenem Kiel“ schwimmt; sie sind durch diese Festsetzung, da sie im Schiff fest sein sollen, bestimmt. Zunächst und im Allgemeinen möge das Schiff nicht Lage haben.

Der erdmagnetische Vektor T (X, Y, Z) durch O habe einen Neigungswinkel θ gegen die XY-Ebene; seine Projektion auf diese mache einen Winkel ζ mit der X-Axe. Die mgn. Breite oder Inklination θ geht bei Nordbreite von 0^0 bis

90^0, bei Südbreite von 0^0 bis -90^0. Der mgn. Kurs ζ zählt von Norden mit 0^0 beginnend über Osten, 90^0, bis $360^0 =$ Nord. Durch ζ und θ wird die Lage von T zum Schiff oder auch die Lage des Schiffes zu T bestimmt.

Die Horizontal- und die Vertikalkomponenten von T sind

$$H = T\cos\theta,\quad Z = T\sin\theta$$

und infolgedessen die Komponenten in den Axenrichtungen

$$\begin{aligned} X &= H\cos\zeta = T\cos\zeta\cos\theta \\ Y &= -H\sin\zeta = -T\sin\zeta\cos\theta\,^{1)} \\ Z &= H\,\mathrm{tg}\,\theta = T\sin\theta. \end{aligned}$$

Die Komponenten der Gesamtmagnetischen Kraft $T'(X', Y', Z')$ in O werden nach dem Poissonschen Satze

$$\begin{aligned} X' &= X + aX + bY + cZ + P \\ Y' &= Y + dX + eY + fZ + Q \\ Z' &= Z + gX + hY + kZ + R, \end{aligned}$$

und es wird

$$\begin{aligned} H' &= T'\cos\theta', \quad Z' = T'\sin\theta' \\ X' &= H'\cos\zeta' = T'\cos\zeta'\cos\theta' \\ Y' &= -H'\sin\zeta' = -T'\sin\zeta'\cos\theta' \\ Z' &= H'\,\mathrm{tg}\,\theta' = T'\sin\theta', \end{aligned}$$

wo H' die Horizontalkomponente von T', ζ' deren Winkel mit der X-Axe, der Kompaßkurs ist, und sinngemäß θ' die Kompaßbreite heißen möge, d. h. die Inklination, wie man sie am Kompaßort durch eine Inklinationsnadel erhalten würde. Die Werte von ζ', θ' hängen von ζ, θ ab.

Der Unterschied

$$\zeta - \zeta' = \delta$$

heißt die Deviation, die zum mgn. Kurs ζ oder zum Kp.-Kurs ζ' und der mgn. Breite θ gehört. Ist δ positiv (negativ), so heißt die Deviation östlich (westlich). Schreibt man die Poissonschen Gleichungen jetzt

$$\begin{aligned} H'\cos\zeta' &= (1+a)H\cos\zeta - bH\sin\zeta + cH\,\mathrm{tg}\,\theta + P \\ H'\sin\zeta' &= -dH\cos\zeta + (1+e)H\sin\zeta - fH\,\mathrm{tg}\,\theta - Q \\ H'\,\mathrm{tg}\,\theta' &= gH\cos\zeta - hH\sin\zeta + (1+k)H\,\mathrm{tg}\,\theta + R \end{aligned}$$

---

1) Das Minuszeichen, weil bei $0^0 < \zeta < 180^0$ ($180^0 < \zeta < 360^0$) $\sin\zeta > 0$ ($\sin\zeta < 0$), aber $Y < 0$ ($Y > 0$) ist.

und komponiert die beiden ersten einmal mit cos ζ, sin ζ, und ein zweites Mal mit sin ζ, $-$cos ζ, so erhält man die beiden Gleichungen:

$$H' \cos \delta = (c\, H \operatorname{tg} \theta + P) \cos \zeta - (f\, H \operatorname{tg} \theta + Q) \sin \zeta - \tfrac{1}{2}(b+d) H \sin 2\zeta$$
$$+ \tfrac{1}{2}(1+a) H (1 + \cos 2\zeta) + \tfrac{1}{2}(1+e) H (1 - \cos 2\zeta)$$
$$H' \sin \delta = (c\, H \operatorname{tg} \theta + P) \sin \zeta + (f\, H \operatorname{tg} \theta + Q) \cos \zeta + \tfrac{1}{2}(a-e) H \sin 2\zeta$$
$$- \tfrac{1}{2} b H (1 - \cos 2\zeta) + \tfrac{1}{2} d H (1 + \cos 2\zeta)$$

oder

$$\frac{H' \sin \delta}{H} = \frac{d-b}{2} + (c \operatorname{tg} \theta + \frac{P}{H}) \sin \zeta + (f \operatorname{tg} \theta + \frac{Q}{H}) \cos \zeta +$$
$$\frac{a-e}{2} \sin 2\zeta + \frac{d+b}{2} \cos 2\zeta$$

$$\frac{H' \cos \delta}{H} = 1 + \frac{a+e}{2} + (c \operatorname{tg} \theta + \frac{P}{H}) \cos \zeta - (f \operatorname{tg} \theta + \frac{Q}{H}) \sin \zeta +$$
$$\frac{a-e}{2} \cos 2\zeta - \frac{d+b}{2} \sin 2\zeta$$

oder, wenn man

$$1 + \frac{a+e}{2} = \lambda, \quad \frac{d-b}{2} = \lambda \mathfrak{A}, \quad \frac{a-e}{2} = \lambda \mathfrak{D}, \quad \frac{d+b}{2} = \lambda \mathfrak{E}$$
$$c \operatorname{tg} \theta + \frac{P}{H} = \lambda \mathfrak{B}, \quad f \operatorname{tg} \theta + \frac{Q}{H} = \lambda \mathfrak{C}$$

setzt:

$$\frac{H' \sin \delta}{\lambda H} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \sin \zeta + \mathfrak{C} \cos \zeta + \mathfrak{D} \sin 2\zeta + \mathfrak{E} \cos 2\zeta$$
$$\frac{H' \cos \delta}{\lambda H} = 1 + \mathfrak{B} \cos \zeta - \mathfrak{C} \sin \zeta + \mathfrak{D} \cos 2\zeta - \mathfrak{E} \sin 2\zeta$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man durch Division:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \sin \zeta + \mathfrak{C} \cos \zeta + \mathfrak{D} \sin 2\zeta + \mathfrak{E} \cos 2\zeta}{1 + \mathfrak{B} \cos \zeta - \mathfrak{C} \sin \zeta + \mathfrak{D} \cos 2\zeta - \mathfrak{E} \sin 2\zeta}$$

und durch Komposition mit cos δ, $-$ sin δ:

$$\sin \delta = \mathfrak{A} \cos \delta + \mathfrak{B} \sin \zeta' + \mathfrak{C} \cos \zeta' + \mathfrak{D} \sin (2\zeta' + \delta) + \mathfrak{E} \cos (2\zeta' + \delta),$$

wenn man berücksichtigt, daß $\zeta - \delta = \zeta'$ und $2\zeta - \delta = 2\zeta' + \delta$ ist. Ferner durch Komposition mit sin δ, cos δ:

$$\frac{H'}{\lambda H} = \cos \delta + \mathfrak{A} \sin \delta + \mathfrak{B} \cos \zeta' - \mathfrak{C} \sin \zeta' + \mathfrak{D} \cos (2\zeta' + \delta) - \mathfrak{E} \sin (2\zeta' + \delta).$$

Aus den beiden ersten Poissonschen Gleichungen, die man schreiben kann:

$$\frac{H'}{\lambda H}\cos\zeta' = (1+\mathfrak{D})\cos\zeta + (\mathfrak{A}-\mathfrak{E})\sin\zeta + \mathfrak{B}$$
$$-\frac{H'}{\lambda H}\sin\zeta' = -(1-\mathfrak{D})\sin\zeta + (\mathfrak{A}+\mathfrak{E})\cos\zeta + \mathfrak{C},$$

erhält man noch durch Division:

$$\operatorname{tg}\zeta' = \frac{(1-\mathfrak{D})\sin\zeta - (\mathfrak{A}+\mathfrak{E})\cos\zeta - \mathfrak{C}}{(1+\mathfrak{D})\cos\zeta + (\mathfrak{A}-\mathfrak{E})\sin\zeta + \mathfrak{B}}$$

In diesen letzteren Formeln ist

$$1+a = \lambda(1+\mathfrak{D}), \qquad d = \lambda(\mathfrak{A}+\mathfrak{E})$$
$$1+e = \lambda(1-\mathfrak{D}), \quad -b = \lambda(\mathfrak{A}-\mathfrak{E})$$

eingesetzt. Die drei Formeln für den Zusammenhang zweier der drei Größen δ, ζ, ζ' sind natürlich nur in der Form verschieden, im Grunde übereinstimmend. Die Formel zwischen δ und ζ' wird als die exakte Formel bezeichnet zum Unterschied von der später zu behandelnden Näherungsformel. Exakt ist die Formel natürlich nur unter der Voraussetzung des Poissonschen Satzes.

Die Formel für den Zusammenhang von δ mit ζ (bzw. ζ') läßt erkennen, daß δ höchstens auf 4 Kursen Null sein kann; sonst ist es durchweg Null. Denn ist δ auf den 5 Kursen $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ (bzw. $\zeta'_0, \zeta'_1, \zeta'_2, \zeta'_3, \zeta'_4$ Null, so ist die Determinante des Systems von 5 linearen Gleichungen, denen die Koeffizienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ genügen,

$$|\,1\ \sin\zeta\ \cos\zeta\ \sin 2\zeta\ \cos 2\zeta\,| \qquad (\zeta = \zeta_h \text{ bezw. } \zeta'_h,\ h = 0,1,2,3,4)$$
$$= -{}^1\!/_4\,|\,1\ e^{i\zeta}\ e^{-i\zeta}\ e^{2i\zeta}\ e^{-2i\zeta}\,|$$
$$= -{}^1\!/_4 \prod e^{-2i\zeta.}\,|\,1\ e^{i\zeta}\ e^{2i\zeta}\ e^{3i\zeta}\ e^{4i\zeta}\,|$$
$$= -{}^1\!/_4 \prod e^{-2i\zeta.} \prod (e^{i\zeta_h} - e^{i\zeta_k}) \neq 0, \qquad \begin{matrix}(h > k)\\ (h,k = 0,1,2,3,4)\end{matrix}$$

also $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \mathfrak{D} = \mathfrak{E} = 0$, d. h. es ist δ durchweg Null. Ebenso kann δ einen gegebenen Wert höchstens 4 mal annehmen, ohne unveränderlich zu sein.

Die Formel für den Zusammenhang von δ mit ζ' wird im Lehrb. d. Nav. (hrsg. v. Reichsmarineamt, 2. Aufl., Berlin 1906, Bd. I, S. 133) fälschlich so angegeben:

$$\sin\delta = \mathfrak{A}\cos\delta + \mathfrak{B}\sin(\zeta'+\delta) + \mathfrak{C}\cos(\zeta'+\delta) + \mathfrak{D}\sin(2\zeta'+\delta) + \mathfrak{E}\cos(2\zeta'+\delta)$$

Wäre diese Formel richtig, so wäre tg δ, wie es explizit durch ζ darstellbar ist, auch durch ζ' darstellbar, nämlich durch die Formel:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\sin\zeta' + \mathfrak{C}\cos\zeta' + \mathfrak{D}\sin 2\zeta' + \mathfrak{E}\cos 2\zeta'}{1 - \mathfrak{B}\cos\zeta' + \mathfrak{C}\sin\zeta' - \mathfrak{D}\cos 2\zeta' + \mathfrak{E}\sin 2\zeta'}.$$

Aber der Zusammenhang zwischen δ und ζ' ist wesentlich verwickelter, wofür die Gründe weiter unten deutlich werden.

Wir setzen

$$\delta = \delta^0 + \delta^1,$$

wo δ^0 die halbe Summe, δ^1 der halbe Unterschied der zum Kurs ζ' und zum Gegenkurs $\zeta' + 180^0$ gehörenden Deviationen sei. Ersetzt man nun in der Formel für ζ' und δ zugleich ζ' durch $\zeta' + 180^0$ und $\delta = \delta^0 + \delta^1$ durch die Deviation $\delta^0 - \delta^1$ des Gegenkurses, so erhält man durch Addition:

$$\sin\delta^0 = \mathfrak{A}\cos\delta^0 + \mathfrak{D}\sin(2\zeta' + \delta^0) + \mathfrak{E}\cos(2\zeta' + \delta^0)$$

und daraus

$$\operatorname{tg}\delta^0 = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{D}\sin 2\zeta' + \mathfrak{E}\cos 2\zeta'}{1 - \mathfrak{D}\cos 2\zeta' + \mathfrak{E}\sin 2\zeta'}.$$

Dadurch ist der Winkel δ^0, sofern er klein ist, eindeutig bestimmt. Denn diese Formel enthält nur induktionsmagnetische, also kleine, nicht die festmagnetischen Elemente P, Q, R, die auch größer sein können.

Aus jener Formel erhält man weiter

$$\sin\delta^0 = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{D}\sin 2\zeta' + \mathfrak{E}\cos 2\zeta'}{\mathfrak{N}}, \quad \cos\delta^0 = \frac{1 - \mathfrak{D}\cos 2\zeta' + \mathfrak{E}\sin 2\zeta'}{\mathfrak{N}}$$

$$\text{mit } \mathfrak{N}^2 = (\mathfrak{A} + \mathfrak{D}\sin 2\zeta' + \mathfrak{E}\cos 2\zeta')^2 + (1 - \mathfrak{D}\cos 2\zeta' + \mathfrak{E}\sin 2\zeta')^2$$
$$= 1 + \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{D}^2 + \mathfrak{E}^2 + 2(\mathfrak{A}\mathfrak{D} + \mathfrak{E})\sin 2\zeta' + 2(\mathfrak{A}\mathfrak{E} - \mathfrak{D})\cos 2\zeta'.$$

Für $\mathfrak{N}$ ist der positive Wert zu nehmen, da für kleine $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ auch δ^0 klein, also $\cos \delta^0$ nahe $+1$, δ^0 nahe gleich $\mathfrak{A}$ werden muß.

In der exakten Formel, entwickelt:

$$\sin\delta\,(1-\mathfrak{D}\cos 2\zeta'+\mathfrak{E}\sin 2\zeta')-\cos\delta\,(\mathfrak{A}+\mathfrak{D}\sin 2\zeta'+\mathfrak{E}\cos 2\zeta') \\ =\mathfrak{B}\sin\zeta'+\mathfrak{C}\cos\zeta'$$

wird links

$$\sin\delta\cos\delta^0-\cos\delta\sin\delta^0=\sin\delta^1,$$

also erhält man für δ^1 die Gleichung:

$$\sin\delta^1=\frac{\mathfrak{B}\sin\zeta'+\mathfrak{C}\cos\zeta'}{\mathfrak{N}}.$$

Um aber hieraus δ^1 reell berechnen zu können, muß

$$(\mathfrak{B}\sin\zeta'+\mathfrak{C}\cos\zeta')^2\leqq\mathfrak{N}^2$$

sein für jeden Wert von ζ'. Das bedeutet, indem man für $\mathfrak{N}^2$ seinen Wert einsetzt, daß die Gleichung für $\operatorname{tg}\zeta'$

$$\begin{aligned}&\sin^2\zeta'\,[\mathfrak{B}^2-(1+\mathfrak{A}^2+\mathfrak{D}^2+\mathfrak{E}^2)+2(\mathfrak{A}\mathfrak{E}-\mathfrak{D})]\\&+2\sin\zeta'\cos\zeta'\,[\mathfrak{B}\mathfrak{C}-2(\mathfrak{A}\mathfrak{D}+\mathfrak{E})]\\&+\cos^2\zeta'\,[\mathfrak{C}^2-(1+\mathfrak{A}^2+\mathfrak{D}^2+\mathfrak{E}^2)-2(\mathfrak{A}\mathfrak{E}-\mathfrak{D})]\quad=0\end{aligned}$$

höchstens eine reelle Wurzel haben darf. D. h. die Discriminante dieser Gleichung, also:

$$[\mathfrak{B}^2-\mathfrak{S}^2+2(\mathfrak{A}\mathfrak{E}-\mathfrak{D})]\,[\mathfrak{C}^2-\mathfrak{S}^2-2(\mathfrak{A}\mathfrak{E}-\mathfrak{D})]-[\mathfrak{B}\mathfrak{C}-2(\mathfrak{A}\mathfrak{D}+\mathfrak{E})]^2,$$

worin zur Abkürzung

$$1+\mathfrak{A}^2+\mathfrak{D}^2+\mathfrak{E}^2=\mathfrak{S}^2$$

gesetzt ist, darf nicht negativ sein. Diese Bedingung kann man in die Form setzen:

$$[1+\mathfrak{A}^2-\mathfrak{D}^2-\mathfrak{E}^2]^2-[\mathfrak{B}(1-\mathfrak{D})+\mathfrak{C}(\mathfrak{A}-\mathfrak{E})]^2- \\ [\mathfrak{B}(\mathfrak{A}+\mathfrak{E})-\mathfrak{C}(1+\mathfrak{D})]^2\geqq 0.$$

Das ist zugleich die Bedingung dafür, daß zu jedem ζ' ein ζ gehört. Die Bedingung ist nicht erfüllt, wenn z. B. die festmagnetischen Elemente P, Q, also $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zu groß werden. Die Kompaßnadel kommt dann aus einem bestimmten Sektor nicht heraus, der durch die Wurzeln der Gleichung für $\operatorname{tg}\zeta'$ begrenzt wird.

Wir wollen δ in **Fourier-Reihen** nach Cosinus und Sinus der Vielfachen von ζ (bzw. ζ') entwickeln oder wenigstens die oft gebrauchten ersten Glieder dieser Entwicklungen berechnen.

Aus der Formel für $\mathrm{tg}\,\delta$ bilden wir:

$$\frac{1+i\,\mathrm{tg}\,\delta}{1-i\,\mathrm{tg}\,\delta} = \frac{(1+i\mathfrak{A}) + (\mathfrak{B}+i\mathfrak{C})\,e^{i\zeta} + (\mathfrak{D}+i\mathfrak{E})\,e^{2i\zeta}}{(1-i\mathfrak{A}) + (\mathfrak{B}-i\mathfrak{C})\,e^{-i\zeta} + (\mathfrak{D}-i\mathfrak{E})\,e^{-2i\zeta}} =$$

$$\frac{1+i\mathfrak{A}}{1-i\mathfrak{A}} \cdot \frac{1+\dfrac{(\mathfrak{B}+i\mathfrak{C})\,e^{i\zeta}+(\mathfrak{D}+i\mathfrak{E})\,e^{2i\zeta}}{1+i\mathfrak{A}}}{1+\dfrac{(\mathfrak{B}-i\mathfrak{C})\,e^{-i\zeta}+(\mathfrak{D}-i\mathfrak{E})\,e^{-2i\zeta}}{1-i\mathfrak{A}}}.$$

Der durch $2i$ geteilte Logarithmus ergibt[1]):

$$\begin{aligned}
\delta = {} & \mathrm{arc\,tg}\,\mathfrak{A} + \sin\zeta\,\frac{\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\mathfrak{C}}{1+\mathfrak{A}^2} + \cos\zeta\,\frac{\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{1+\mathfrak{A}^2} \\
& + \sin 2\zeta\left\{\frac{\mathfrak{D}+\mathfrak{A}\mathfrak{E}}{1+\mathfrak{A}^2} - \tfrac{1}{2}\,\frac{(\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\mathfrak{C})^2-(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\mathfrak{B})^2}{(1+\mathfrak{A}^2)^2}\right\} \\
& + \cos 2\zeta\left\{\frac{\mathfrak{E}-\mathfrak{A}\mathfrak{D}}{1+\mathfrak{A}^2} - \tfrac{1}{2}\,\frac{2(\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\mathfrak{C})(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{(1+\mathfrak{A}^2)^2}\right\} \\
& + \sin 3\zeta\left\{-\frac{[(\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\mathfrak{C})(\mathfrak{D}+\mathfrak{A}\mathfrak{E}) - (\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\mathfrak{B})(\mathfrak{E}-\mathfrak{A}\mathfrak{D})]}{(1+\mathfrak{A}^2)^2}\right. \\
& \qquad \left. + \tfrac{1}{3}\,\frac{(\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\mathfrak{C})^3 - 3(\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\mathfrak{C})(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\mathfrak{B})^2}{(1+\mathfrak{A}^2)^3}\right\} \\
& + \cos 3\zeta\left\{-\frac{[(\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\mathfrak{C})(\mathfrak{E}-\mathfrak{A}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\mathfrak{B})(\mathfrak{D}+\mathfrak{A}\mathfrak{E})]}{(1+\mathfrak{A}^2)^2}\right. \\
& \qquad \left. + \tfrac{1}{3}\,\frac{3(\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\mathfrak{C})^2(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\mathfrak{B}) - (\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\mathfrak{B})^3}{(1+\mathfrak{A}^2)^3}\right\} \\
& + \sin 4\zeta\cdot\left\{-\tfrac{1}{2}\,\frac{(\mathfrak{D}+\mathfrak{A}\mathfrak{E})^2 - (\mathfrak{E}-\mathfrak{A}\mathfrak{D})^2}{(1+\mathfrak{A}^2)^2}\right. \\
& \qquad + \frac{[(\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\mathfrak{C})^2-(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\mathfrak{B})^2](\mathfrak{D}+\mathfrak{A}\mathfrak{E}) - 2(\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\mathfrak{C})(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\mathfrak{B})(\mathfrak{E}-\mathfrak{A}\mathfrak{D})}{(1+\mathfrak{A}^2)^3} \\
& \qquad \left. - \tfrac{1}{4}\,\frac{(\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\mathfrak{C})^4 - 6(\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\mathfrak{C})^2(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\mathfrak{B})^2 + (\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\mathfrak{B})^4}{(1+\mathfrak{A}^2)^4}\right\} \\
& + \cos 4\zeta\cdot\left\{-\tfrac{1}{2}\,\frac{2(\mathfrak{D}+\mathfrak{A}\mathfrak{E})(\mathfrak{E}-\mathfrak{A}\mathfrak{D})}{(1+\mathfrak{A}^2)^2}\right. \\
& \qquad + \frac{[(\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\mathfrak{C})^2-(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\mathfrak{B})^2](\mathfrak{E}-\mathfrak{A}\mathfrak{D}) + 2(\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\mathfrak{C})(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\mathfrak{B})(\mathfrak{D}+\mathfrak{A}\mathfrak{E})}{(1+\mathfrak{A}^2)^3} \\
& \qquad \left. - \tfrac{1}{4}\,\frac{4(\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\mathfrak{C})^3(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\mathfrak{B}) - 4(\mathfrak{B}+\mathfrak{A}\mathfrak{C})(\mathfrak{C}-\mathfrak{A}\mathfrak{B})^3}{(1+\mathfrak{A}^2)^4}\right\} + \ldots
\end{aligned}$$

1) Die Entwicklung im Admiralty Manual liefert die Entwicklungs-Koëffizienten nicht wie oben in geschlossener Form, sondern nur in unendlichen Reihen.

Die Koëffizienten sind, bis auf den ersten, rationale Funktionen von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ mit Nennern, die Potenzen von $(1+\mathfrak{A}^2)$ sind. Ihren allgemeinen Ausdruck findet man, indem man vor dem Logarithmieren Zähler und Nenner in Faktoren, linear in $e^{i\zeta}$ bzw. in $e^{-i\zeta}$, zerlegt.

In der Bezeichnung

$$\delta = \operatorname{arctg}\mathfrak{A} - \sum_n \frac{B_n \sin n\zeta + C_n \cos n\zeta}{n} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

werden $B_n + i\,C_n$ die n-ten Potenzsummen der Wurzeln der Gleichung

$$(1 + i\,\mathfrak{A})\,\sigma^2 + (\mathfrak{B} + i\,\mathfrak{C})\,\sigma + (\mathfrak{D} + i\,\mathfrak{E}) = 0,$$

in bekannter Weise ganz und rational ausdrückbar durch

$$\frac{\mathfrak{B} + i\,\mathfrak{C}}{1 + i\,\mathfrak{A}} = -(B_1 + i\,C_1),\ \frac{\mathfrak{D} + i\,\mathfrak{E}}{1 + i\,\mathfrak{A}} = {}^1/_2\,(B_1 + iC_1)^2 - {}^1/_2\,(B_2 + i\,C_2).$$

Daraus folgt insbesondere, daß mit B_1, C_1, B_2, C_2 auch alle folgenden B_n, C_n verschwinden, daß also die Deviation konstant wird.

Zweitens soll δ in eine Fourier-Reihe nach ζ' entwickelt werden:

$$\delta = A + B \sin\zeta' + C \cos\zeta' + D \sin 2\zeta' + E \cos 2\zeta' + \cdots$$

Setzen wir den Gegenkurs $\zeta' + 180^0$ ein und bilden wir die halbe Summe δ^0 und den halben Unterschied δ^1, so bekommen wir:

$$\delta^0 = A + D \sin 2\zeta' + E \cos 2\zeta' + H \sin 4\zeta' + K \cos 4\zeta'$$
$$\delta^1 = B \sin\zeta' + C \cos\zeta' + F \sin 3\zeta' + G \cos 3\zeta' + \cdots$$

Nun geht die Formel für $\operatorname{tg}\delta^0$ aus der für $\operatorname{tg}\delta$ hervor, indem man $\delta, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \zeta$ bzw. ersetzt durch $\delta^0, \mathfrak{A}, 0, 0, -\mathfrak{D}, \mathfrak{E}, -\zeta'$, oder auch durch $\delta^0, \mathfrak{A}, -\mathfrak{D}, \mathfrak{E}, 0, 0, -2\zeta'$. Durch dasselbe Verfahren erhält man also aus der Fourier-Reihe von δ nach ζ die Fourier-Reihe von δ^0 nach ζ':

$$\delta^0 = \operatorname{arc\,tg}\mathfrak{A} + \sin 2\zeta' \frac{\mathfrak{D} - \mathfrak{A}\mathfrak{E}}{1 + \mathfrak{A}^2} + \cos 2\zeta' \frac{\mathfrak{E} + \mathfrak{A}\mathfrak{D}}{1 + \mathfrak{A}^2}$$
$$+ \sin 4\zeta' \frac{(\mathfrak{D} - \mathfrak{A}\mathfrak{E})^2 - (\mathfrak{E} + \mathfrak{A}\mathfrak{D})^2}{2(1 + \mathfrak{A}^2)^2} + \cos 4\zeta' \frac{2(\mathfrak{D} - \mathfrak{A}\mathfrak{E})(\mathfrak{E} + \mathfrak{A}\mathfrak{D})}{2(1 + \mathfrak{A}^2)^2} + \cdots$$

Demnach ist

$$A = \operatorname{arc\,tg} \mathfrak{A}$$
$$D = \frac{\mathfrak{D} - \mathfrak{A}\,\mathfrak{E}}{1 + \mathfrak{A}^2}$$
$$E = \frac{\mathfrak{E} + \mathfrak{A}\,\mathfrak{D}}{1 + \mathfrak{A}^2}$$
$$H = \frac{(\mathfrak{D} - \mathfrak{A}\,\mathfrak{E})^2 - (\mathfrak{E} + \mathfrak{A}\,\mathfrak{D})^2}{2\,(1 + \mathfrak{A}^2)^2} = \frac{D^2 - E^2}{2}$$
$$K = \frac{(\mathfrak{D} - \mathfrak{A}\,\mathfrak{E})\,(\mathfrak{E} + \mathfrak{A}\,\mathfrak{D})}{(1 + \mathfrak{A}^2)^2} = D\,E$$

also umgekehrt[1])

$$\mathfrak{A} = \operatorname{tg} A$$
$$\mathfrak{D} = D + \mathfrak{A}\,E$$
$$\mathfrak{E} = E - \mathfrak{A}\,D\ .$$

Sind irgend drei der sechs Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, A, D, E gegeben, so kann man die drei andern berechnen. Denn ist $\mathfrak{A}$ oder A unter den drei gegebenen, so findet man zu zweien der vier Größen D, E, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ die zwei andern aus zweien der vier Gleichungen:

$$D + \mathfrak{A}\,E - \mathfrak{D} = 0 \qquad \mathfrak{D} - \mathfrak{A}\,\mathfrak{E} - (1 + \mathfrak{A}^2)\,D = 0$$
$$E - \mathfrak{A}\,D - \mathfrak{E} = 0 \qquad \mathfrak{E} + \mathfrak{A}\,\mathfrak{D} - (1 + \mathfrak{A}^2)\,E = 0.$$

Sind aber irgend drei von D, E, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ gegeben, so findet man zunächst $\mathfrak{A}$ aus derjenigen dieser vier Gleichungen, die die drei gegebenen enthält. Ist die betr. Gleichung quadratisch in $\mathfrak{A}$, so ist die Lösung zweideutig.

Um δ^1 zu entwickeln, müssen wir zunächst in

$$\sin \delta^1 = \frac{\mathfrak{B} \sin \zeta' + \mathfrak{C} \cos \zeta'}{\mathfrak{N}}$$

die Entwicklung von $\mathfrak{N}^{-1}$ einsetzen. Setzen wir $\mathfrak{N}^2$ in die Form:

$$\mathfrak{N}^2 = (1 + \mathfrak{A}^2)\left(1 - s e^{2 i \zeta'}\right)\left(1 - t e^{-2 i \zeta'}\right),$$

wo zur Abkürzung:

$$\frac{\mathfrak{D} + i\,\mathfrak{E}}{1 - i\,\mathfrak{A}} = D + i\,E = s,\quad \frac{\mathfrak{D} - i\,\mathfrak{E}}{1 + i\,\mathfrak{A}} = D - i\,E = t$$

1) Guyou i. d. Annales Hydrographiques 15 (1893) S. 156. Ripoll i. d. Revue maritime 176 (1908) S. 321.

gesetzt ist, so ergibt der binomische Satz für die $-\,^1/_2$ te Potenz:

$$\frac{\sqrt{1+\mathfrak{A}^2}}{\mathfrak{N}} = \left(1 + {}^1/_2\, s\, e^{2i\zeta'} + {}^1/_2 \cdot {}^3/_4\, s^2 e^{4i\zeta'} + \ldots\right)$$

$$\left(1 + {}^1/_2\, t\, e^{-2i\zeta'} + {}^1/_2 \cdot {}^3/_4 \cdot t^2 e^{-4i\zeta'} + \cdots\right)$$

$$= S + S'\left(s\,e^{2i\zeta'} + t\,e^{-2i\zeta'}\right) + S''\left(s^2 e^{4i\zeta'} + t^2 e^{-4i\zeta'}\right) + \cdots,$$

$$\text{wo } S = 1 + ({}^1/_2)^2\, s\,t + ({}^1/_2 \cdot {}^3/_4)^2\, (s\,t)^2 + \cdots$$

$$S' = {}^1/_2 + {}^1/_2 \cdot {}^3/_4 \cdot {}^1/_2\, s\,t + {}^1/_2 \cdot {}^3/_4 \cdot {}^5/_6 \cdot {}^1/_2 \cdot {}^3/_4\, (s\,t)^2 + \cdots$$

$$S'' = {}^1/_2 \cdot {}^3/_4 + {}^1/_2 \cdot {}^3/_4 \cdot {}^5/_6 \cdot {}^1/_2\, s\,t + {}^1/_2 \cdot {}^3/_4 \cdot {}^5/_6 \cdot {}^7/_8 \cdot {}^1/_2 \cdot {}^3/_4\, (s\,t)^2 + \cdots$$

usw. Potenzreihen von $s\,t = D^2 + E^2$ sind.

Setzen wir

$$\left.\begin{matrix} s^h \\ t^h \end{matrix}\right\} = (D \pm i\,E)^h = D_h \pm i\,E_h\,, \quad \left(\frac{\mathfrak{C} \pm i\,\mathfrak{B}}{2}\right)^n = \frac{\mathfrak{C}_n \pm i\,\mathfrak{B}_n}{2},$$

$$(\mathfrak{C}_n D_h + \mathfrak{B}_n E_h)\cos(n+2h)\zeta' - (\mathfrak{C}_n E_h - \mathfrak{B}_n D_h) \cdot \sin(n+2h)\zeta'$$
$$+ \ (\mathfrak{C}_n D_h - \mathfrak{B}_n E_h)\cos(n-2h)\zeta' + (\mathfrak{C}_n E_h + \mathfrak{B}_n D_h) \cdot \sin(n-2h)\zeta'$$

gleich $A_n^{(h)}$, bzw. für $h = 0$ gleich $2\,A_n^{(o)}$, so wird $\sin \delta^1 = \cos A \times$

$$\left[\frac{\mathfrak{C} - i\,\mathfrak{B}}{2} e^{i\zeta'} + \frac{\mathfrak{C} + i\,\mathfrak{B}}{2} e^{-i\zeta'}\right] \quad \Sigma\, S^{(h)} \cdot \left(s^h e^{2hi\zeta'} + t^h e^{-2hi\zeta'}\right)$$
$$= \cos A\, \Sigma\, S^{(h)}\, A_1^{(h)}$$

Um aus dieser Fourier-Reihe für $\sin \delta^1$ diejenige für

$$\delta^1 = \sin \delta^1 + {}^1/_2 \cdot \frac{\sin^3 \delta^1}{3} + {}^1/_2 \cdot {}^3/_4 \cdot \frac{\sin^5 \delta^1}{5} + \cdots$$

zu gewinnen, bilden wir erstens die Potenzen:

$$\left(\frac{\mathfrak{C} - i\,\mathfrak{B}}{2} e^{i\zeta'} + \frac{\mathfrak{C} + i\,\mathfrak{B}}{2} e^{-i\zeta'}\right)^n$$

$$= \left(\frac{\mathfrak{C}_n - i\,\mathfrak{B}_n}{2} e^{in\zeta'} + \frac{\mathfrak{C}_n + i\,\mathfrak{B}_n}{2} e^{-in\zeta'}\right)$$

$$+ \binom{n}{1} \frac{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}{4} \left(\frac{\mathfrak{C}_{n-2} - i\,\mathfrak{B}_{n-2}}{2} e^{i(n-2)\zeta'} + \frac{\mathfrak{C}_{n-2} + i\,\mathfrak{B}_{n-2}}{2} e^{-i(n-2)\zeta'}\right)$$

$$+ \binom{n}{2} \left(\frac{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}{4}\right)^2 \left(\frac{\mathfrak{C}_{n-4} - i\,\mathfrak{B}_{n-4}}{2} e^{i(n-4)\zeta'} + \frac{\mathfrak{C}_{n-4} + i\,\mathfrak{B}_{n-4}}{2} e^{-i(n-4)\zeta'}\right)$$

$$+ \cdots$$

und zweitens die Potenzen

$$\left(1 - s e^{2 i \zeta'}\right)^{-\frac{1}{2} n} \left(1 - t e^{-2 i \zeta'}\right)^{-\frac{1}{2} n} =$$
$$\left[S + S'\left(s e^{2 i \zeta'} + t e^{-2 i \zeta'}\right) + S''\left(s^2 e^{4 i \zeta'} + t^2 e^{-4 i \zeta'}\right) + \cdots\right]^n$$
$$= S_n + S'_n\left(s e^{2 i \zeta'} + t e^{-2 i \zeta'}\right) + S''_n\left(s^2 e^{4 i \zeta'} + t^2 e^{-4 i \zeta'}\right) + \cdots.$$

Hier ist

$$S_n^{(h)} = n_0\, n_h + n_1\, n_{h+1} st + n_2\, n_{h+2}\, s^2 t^2 + \cdots,$$

wenn mit n_h der positive Wert des h-ten Binomialkoëffizienten von $-\frac{1}{2} n$ bezeichnet wird.

Nunmehr wird[1])

$$\begin{aligned}
\delta^1 &= \cos A\, \Sigma\, S_1^{(h)} A_1^{(h)} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\cos^3 A}{3} \left\{ \Sigma\, S_3^{(h)} A_3^{(h)} + 3\, \frac{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}{4}\, \Sigma\, S_3^{(h)} A_1^{(h)} \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{\cos^5 A}{5} \left\{ \Sigma\, S_5^{(h)} A_5^{(h)} + 5\, \frac{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}{4}\, \Sigma S_5^{(h)} A_3^{(h)} \right. \\
&\qquad\qquad \left. + 10 \left(\frac{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}{4}\right)^2\, \Sigma S_5^{(h)} A_1^{(h)} \right\} \\
&+ \cdots
\end{aligned}$$

In dieser Formel ist das Bildungsgesetz noch deutlich zu erkennen; aus ihr sind die Koëffizienten B, C, F, G, .. durch Sammeln der betr. Glieder zu gewinnen. Z. B. werden die Koëffizienten von sin ζ' und cos ζ':

$$\begin{aligned}
B &= \cos A \cdot \left\{ S_1 \cdot \mathfrak{B} - S'_1 (\mathfrak{C}\, E + \mathfrak{B}\, D) \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^3 A}{3} \left\{ S_3 \cdot 3\, \frac{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}{4}\, \mathfrak{B} \right. \\
&\qquad \left. + S'_3 [(\mathfrak{C}_3\, E + \mathfrak{B}_3\, D) \; - 3\, \frac{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}{4} (\mathfrak{C}\, E + \mathfrak{B}\, D)] \right\} + \cdots \\
C &= \cos A \left\{ S_1 \cdot \mathfrak{C} + S'_1 (\mathfrak{C}\, D - \mathfrak{B}\, E) \right\} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\cos^3 A}{3} \left\{ S_3 \cdot 3\, \frac{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}{4} \cdot \mathfrak{C} \right. \\
&\qquad \left. + S'_3 [(\mathfrak{C}_3 D - \mathfrak{B}_3 E) + 3\, \frac{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}{4} (\mathfrak{C}\, D \quad \mathfrak{B}\, E)] \right\} + \cdots
\end{aligned}$$

---

1) Der Admiralty Manual (1920, S. 114) sagt: „The expansion of δ in terms of sines and cosines of multiples of ζ' does not appear to be capable of being obtained in any simple mode.“ Danach muß man die obigen Entwicklungen als einfach genug ansehen.

Die Koëffizienten der Fourier-Reihe für δ^1 werden also Potenzreihen, die von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ nur die ungraden, von D, E auch die graden Potenzen und von A nur die ungraden Potenzen von cos A enthalten.

Die Fourier-Reihe von δ^0 nach ζ' läßt sich jetzt mit Benutzung von D_n, E_n einfach schreiben

$$\delta^0 = A + \Sigma \frac{1}{n}(D_n \sin 2n\zeta' + E_n \cos 2n\zeta').$$

Daraus schließen wir insbesondere: wenn die quadrantalen Glieder

$$D \sin 2\zeta' + E \cos 2\zeta'$$

fortfallen, dann verschwinden auch alle folgenden Koëffizienten D_n, E_n. Dann wird also $\delta^0 = A$, $\delta^1 = \delta - A$, $\mathfrak{N}^2 = 1 + \mathfrak{A}^2$. Setzen wir in diesem Falle

$$\left|\sqrt{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2}\right| = \mathfrak{N}\, q,\quad \zeta' + \operatorname{arc\,tang} \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}} = \zeta^I,$$

so wird

$$\sin \delta^1 = q \sin \zeta^I,$$

also

$$\delta^1 = q \sin \zeta^I + {}^1/_2 \frac{q^3 \sin^3 \zeta^I}{3} + {}^1/_2 \cdot {}^3/_4 \frac{q^5 \sin^5 \zeta^I}{5} + \cdots$$

$$= \sin \zeta^I \left(q + \frac{1}{2^3} q^3 + \frac{3}{2^6} q^5 + \frac{25}{2^{10}} q^7 + \cdot\cdot\right) + \sin 3\zeta^I (\cdot\cdot) + \cdot\cdot$$

$$= \cos A\, (\mathfrak{B} \sin \zeta' + \mathfrak{C} \cos \zeta')\, (1 + {}^1/_8\, q^2 + \cdot\cdot) + \cdot\cdot$$

Verschwinden also außer D, E auch noch die semizirkularen Koëffizienten

$$B = \cos A \cdot \mathfrak{B}\, (1 + {}^1/_8\, q^2 + \cdot\cdot), \qquad C = \cos A \cdot \mathfrak{C}\, (1 + {}^1/_8\, q^2 + \cdot\cdot),$$

so verschwinden auch $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. Demnach wird die Deviation konstant, wenn in der Fourier-Reihe von δ nach ζ' die semizirkularen und die quadrantalen Glieder fortfallen.

In Bezug auf die Abkürzung dieser Formeln kommt es auf die Größenordnung der Koëffizienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ an-

Wie im folgenden Abschnitt gezeigt wird, kann man bei guter Kompaßaufstellung annehmen, daß b und d, also, wenn nicht etwa $2+a+e$ klein ist, daß

$$\mathfrak{A}=\frac{d-b}{2+a+e},\ \mathfrak{E}=\frac{d+b}{2+a+e}$$

klein sind[1]). Nicht in demselben Maaße kann man dies von

$$\mathfrak{D}=\frac{a-e}{2+a+e}$$

annehmen. Also auch nicht von

$$D=\frac{\mathfrak{D}-\mathfrak{A}\,\mathfrak{E}}{1+\mathfrak{A}^2}$$

und nicht sicher von

$$E=\frac{\mathfrak{E}+\mathfrak{A}\,\mathfrak{D}}{1+\mathfrak{A}^2}.$$

Dagegen kann man es von

$$\mathfrak{B}=\frac{1}{\lambda}\left(c\operatorname{tg}\theta+\frac{P}{H}\right)\qquad \mathfrak{C}=\frac{1}{\lambda}\left(f\operatorname{tg}\theta+\frac{Q}{H}\right)$$

sowohl wegen des festen Magnetismus P, Q, der unkompensiert beträchtlich sein kann, als auch wegen des kleinen H im Nenner und des in hohen Breiten großen tg θ sicher nicht voraussetzen, selbst wenn P und Q, und, wie man meist annimmt, c und f klein sein sollten. Die Abkürzung der Formeln darf daher nur von Fall zu Fall vorgenommen werden. Vernachlässigt man z. B. wie in den obigen Formeln für B, C die Glieder, die in $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ von mindestens vierter Ordnung sind, und nunmehr noch die Glieder, die in A, D, E von mindestens zweiter Ordnung sind, so wird

$$\cos A=1,\ S_1=1,\ S'_1={}^1/_2,\ S_3=1,\ S'_3={}^3/_2,$$

und bis zur vierten Ordnung ausschließlich

$$B=\mathfrak{B}\,[1-{}^1/_2\,D+{}^1/_8\,(\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2)]-{}^1/_2\,\mathfrak{C}\,E$$
$$C=\mathfrak{C}\,[1+{}^1/_2\,D+{}^1/_8\,(\mathfrak{B}^2+\mathfrak{C}^2])-{}^1/_2\,\mathfrak{B}\,E,$$

ebenso für die sextantalen Koëffizienten

$$F={}^1/_2\,(\mathfrak{B}\,D-\mathfrak{C}\,E)-{}^1/_{24}\,(\mathfrak{B}^3-3\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}^2)$$
$$G={}^1/_2\,(\mathfrak{B}\,E+\mathfrak{C}\,D)-{}^1/_{24}\,(3\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{B}^2-\mathfrak{C}^3)\,,$$

während die folgenden L, M usw. fortfallen.

---

1) Das trifft z. B. nicht zu bei Kompassen unter Panzer. S. Guyou i. d. Annales hydrographiques 15 (1893) S. 158.

Aus den beiden ersten Formeln folgt umgekehrt

$$\mathfrak{B} = B\,[1 + \tfrac{1}{2}\,D - \tfrac{1}{8}\,(B^2 + C^2)] + \tfrac{1}{2}\,C\,E$$
$$\mathfrak{C} = C\,[1 - \tfrac{1}{2}\,D - \tfrac{1}{8}\,(B^2 + C^2)] + \tfrac{1}{2}\,B\,E,$$

dann aus den beiden andern

$$F = \tfrac{1}{2}\,(B\,D - C\,E) - \tfrac{1}{24}\,(B^3 - 3\,B\,C^2)$$
$$G = \tfrac{1}{2}\,(B\,E + C\,D) - \tfrac{1}{24}\,(3\,C\,B^2 - C^3).$$

In allen diesen Formeln sind die darin vorkommenden Größen δ, A, B, ·· in Bogenmaß zu verstehen. Man hat also in ihnen, wenn z. B. B, C, D, E in Graden gegeben sind, dafür zu nehmen

$$\operatorname{arc} B = \frac{2\pi}{360} \cdot B \text{ usw.}$$

wofür bei kleinen Größen meist sin B, usw. genommen wird. Für B^2, C^2, .. wird z. B. auch 2 sin vers $B = 2(1 - \cos B)$, .., genommen. Bei minder kleinen Größen, z. B. bei D nimmt man dafür

$$\sin D\left(1 + \frac{1}{3}\sin\operatorname{vers} D\right) = D - \frac{1}{30}\,D^5 + \cdots.$$

Methodisch und rechnerisch besser sind in solchen Fällen die Näherungsausdrücke

$$\frac{2\sin D + \operatorname{tg} D}{3} = D + \frac{1}{20}\,D^5 + \cdots$$

oder (logarithmisch)

$$\sqrt[3]{\sin^2 D\operatorname{tg} D} = D + \frac{1}{45}\,D^5 + \cdots$$

(s. d. Verfs. Konstruktionen und Approximationen, Leipzig u. Berlin 1911, S. 189, 192). Zweckmäßig verwendet man solche Näherungsausdrücke nur für die numerische Rechnung; ihre Einführung in die Formeln zwischen den Koëffizienten der Näherungs- und denen der exakten Formel verdunkelt nur das Wesen dieser Formeln und ihren Geltungsbereich. Man vergleiche z. B. die Formeln im Lehrb. d. Nav., hrsg. v. Reichs-Marine-Amt, I (Berlin 1906), S. 143 oder bei Rottok (a. a. O. S. 73 oder bei Corbara (a. a. O. S. 66)). Die dortige Angabe, daß diese Formeln für Deviationen bis 40^0

genau genug sind, ist mindestens in Bezug auf die Formel $\mathfrak{A} = \sin A$ falsch, die überdies gegenüber der genauen Formel $\mathfrak{A} = \operatorname{tg} A$ keinerlei Vorteil bietet. Es ist $\sin 40^0 = 0{,}64$ aber $\operatorname{tg} 40^0 = 0{,}84$.

Um aus nicht homogenen Formeln, z. B.

$$H = {}^1\!/_2 (D^2 - E^2),\quad K = D\,E$$

die Größen H, K in Graden zu bekommen, darf man in den Produkten D^2, D E, E^2 nur einen Faktor in Graden nehmen.

Außerdem enthalten die Formeln für $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ an allen drei angegebenen Stellen falsche Zahlenfaktoren in den Gliedern B^3, C^3. Näherungsformeln für $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ sind unberechtigt, da die strengen Formeln einfach genug sind.

Die Koëffizienten D, E, H, K, $\cdot\cdot$ ließen sich rational durch $\mathfrak{A}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ ausdrücken; umgekehrt $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ rational durch $\mathfrak{A}$, D, E. Die Darstellung von B, C, F, G, $\cdot\cdot$ durch $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ folgte verwickelteren Gesetzen. Deshalb ist es bemerkenswert, daß sich umgekehrt $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ entwickelt durch A, B, C, D, E, F, G, $\cdot\cdot$ ausdrücken lassen. Setzt man nämlich in der Formel $\mathfrak{N} \cdot \sin \delta^1 = \mathfrak{B} \sin \zeta' + \mathfrak{C} \cos \zeta'$ erst $\zeta' = 90^0$, dann $\zeta' = 0^0$, so erhält man

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{N} \sin (B - F + L - \cdot\cdot),\quad \mathfrak{N} = \sec A \sqrt{(1 + D)^2 + E^2}$$
$$\mathfrak{C} = \mathfrak{N} \sin (C + G + M + \cdot\cdot),\quad \mathfrak{N} = \sec A \sqrt{(1 - D)^2 + E^2}$$

Man kann auch $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ausdrücken durch A, D, E oder, was auf dasselbe hinausläuft durch $\mathfrak{A}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$, wenn man außerdem zwei Wertepaare δ, ζ' kennt. Dann liefert nämlich die exakte Formel zwei lineare Gleichungen für $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$. Nimmt man speziell

$$\zeta' = 0,\ \zeta = \delta_0 \text{ und } \zeta' = 90^0,\ \zeta = 90^0 - \delta_{90},$$

so bekommt man:

$$\mathfrak{B} = (1 + \mathfrak{D}) \sin \delta_{90} + (\mathfrak{E} - \mathfrak{A}) \cos \delta_{90}$$
$$\mathfrak{C} = (1 - \mathfrak{D}) \sin \delta_0 - (\mathfrak{E} + \mathfrak{A}) \cos \delta_0.$$

Hier kann man $\delta_0 = A + C + E + \cdot\cdot$
$\delta_{90} = A + B - E - \cdot\cdot$ einsetzen.

Wenn die Entwicklung von δ in eine Fourier-Reihe nach ζ' möglich ist, drückt sie natürlich nichts anderes aus, als den Zusammenhang von δ und ζ', wie ihn die exakte Formel ausdrückt. Davon zu unterscheiden ist eine fünfgliedrige Näherungsformel

$$\delta = A + B \sin \zeta' + C \cos \zeta' + D \sin 2 \zeta' + E \cos 2 \zeta',$$

deren fünf Koëffizienten A, B, C, D, E aus gegebenen Zahlenpaaren δ, ζ' numerisch bestimmt werden. Deren sind mindestens fünf nötig; hat man mehr, so findet man die besten Werte für A, B, C, D, E durch kleinste Fehlerquadratsummen. Die so gefundenen A, B, C, D, E sind nicht die ersten fünf Koëffizienten der Entwicklung von δ aus der exakten Formel in eine Fourier-Reihe. Daß dies nicht beachtet wurde, führte zu Mißverständnissen. (s. Ann. d. Hydrographie, Bd. 33, S. 471; Bd. 34, S. 182, 246.)

9. Der Kompaß-Ort.

In der älteren Zeit, vor Kenntnis der Kompensationstheorie, bemühte man sich durch zweckmäßige Wahl des Kompaß-Ortes die Deviationen zu vermeiden, oder wenigstens möglichst zu verkleinern. Man glaubte vielleicht auch, daß dadurch allein die Deviationen beseitigt werden könnten. Später, nachdem man die Deviationen kompensieren gelernt hatte, überschätzte man die Möglichkeit des Kompensierens und legte der Wahl des Kompaß-Ortes deshalb nicht mehr dieselbe hohe Bedeutung bei. Ihn möglichst fern von störenden Eisenmassen, womöglich hoch über Deck zu wählen, war der wichtigste in dieser Hinsicht gegebene Rat. Die Frage ist, wie weit kann durch Wahl des Kompaß-Ortes Kompensation erzielt werden.

Sind die Eisenmassen des Schiffes zu beiden Seiten der XZ-Ebene gleichmäßig verteilt, so wird eine Vorzeichenänderung von Y lediglich eine Vorzeichenänderung von V nach sich ziehen. Also müssen die Elemente b, d, f, h verschwinden. Wir nennen diesen Fall den regulären. Bei Kompassen, die nahe der Symmetrie-Ebene stehen, findet man für b und d, f und h kleine Werte.

Bei einer in der Längsrichtung günstigen Aufstellung des Kompasses wird auch eine annähernd gleichmäßige Verteilung der Eisenmassen in Bezug auf die Y Z-Ebene vorhanden sein. Die gleichmäßige Verteilung ist nur in magnetischem Sinne zu verstehen. Verschiedene Eisenmassen vorn und achtern, aber in geeigneten Entfernungen vom Kompaß können doch eine gleichmäßige Verteilung bedeuten. Bei einem so gewählten Kompaß-Ort wird eine Vorzeichenänderung von X lediglich eine solche von U nach sich ziehen, d. h. es müssen b, c, d, g verschwinden (regulärer Fall zweiter Art). In der Tat findet man für c und g bei Mittschiffskompassen kleine Werte.

Genügt der Kompaß-Ort beiden Bedingungen, ist also das Eisen um den Kompaß verteilt etwa wie bei einer horizontalen elliptischen oder rechteckigen Scheibe um den Mittelpunkt, so ist $b = c = d = f = g = h = 0$. Wir nennen eine solche Kompaß-Aufstellung voll-regulär. Bei den üblichen Kompaß-Aufstellungen werden diese sechs Elemente z. T. kompensiert, z. T. vernachlässigt, sodaß die Aufstellung schließlich annähernd voll-regulär wird. Daß durch Wahl des Kompaß-Ortes im Allgemeinen auch die Diagonalglieder a, e, k zum Verschwinden gebracht werden können, wird schon durch das Beispiel des Feldes eines Stabes widerlegt. Die Matrize eines Stabes kann sich für keinen Punkt auf die Glieder Null reduzieren. Vielmehr bilden die Diagonalglieder grade denjenigen Teil der Deviation, der im Allgemeinen nicht durch Wahl des Kompaß-Ortes, sondern eben durch Kompensation zu beseitigen ist.

Werte von Deviationskoëffizienten findet man für viele Handelsschiffe zusammengestellt in Der Kompaß an Bord, 1889, S. 130 ff., für Kriegsschiffe bei C o r b a r a S. 78, 91, 96.

Bei der üblichen Aufstellung an Deck werden a und e negativ, k positiv. Bei Kompassen in Zwischendecks, in Panzertürmen, in eisernen Steuerhäusern wird auch k negativ und die horizontale Richtkraft kann auf einen so kleinen Bruchteil von H sinken, daß die Aufstellung eines Kompasses zwecklos wird. Vgl. z. B. T i s s o t i. d. Annales hydrographiques 15 (1893) S. 150.

10. Richtkräfte.

Aus der dritten Poissonschen Gleichung (ohne R)

$$Z' = g X + h Y + (1 + k) Z$$

erhält man den Mittelwert von Z′ bei gegebenem Z und allen Werten von X und Y. Weil Mittel X = 0, Mittel Y = 0 ist, wird

$$\text{Mittel } Z' = (1 + k) Z.$$

Wir nennen 1 + k deshalb die mittlere (relative) Vertikalkraft (nach der Richtung von Z) des Erd- und des flüchtigen Schiffsmagnetismus. Nimmt man R mit, so ist

$$1 + k + \frac{R}{Z} = \mu$$

die mittlere (relative) Vertikalkraft des Erd- und gesamten (festen und flüchtigen) Schiffsmagnetismus.

Aus den beiden ersten Poissonschen Gleichungen erhält man:

$$X'X + Y'Y =$$
$$(1 + a) X^2 + (1 + e) Y^2 + (b + d) X Y + c X Z + f Y Z + P X + Q Y.$$

Wir bilden das Mittel für alle Werte von X, Y, dann kommt links: Mittel $H' H \cos \delta$ und rechts verschwinden die Mittel von XY, XZ, YZ, X, Y und es wird Mittel X^2 = Mittel Y^2 = $^1/_2$ Mittel $X^2 + Y^2 = {}^1/_2 H^2$, also wird

$$\text{Mittel } \frac{H' \cos \delta}{H} = 1 + \frac{a + e}{2}.$$

Wir setzten diese Größe bereits gleich λ uud nennen sie jetzt die mittlere (relative) Horizontalkraft (nach der Richtung von H). Aus allen drei Poissonschen Gleichungen ergibt sich:

$$X'X + Y'Y + Z'Z = (1 + a) X^2 + (1 + e) Y^2 + (1 + k) Z^2 +$$
$$(b + d) X Y + (c + g) X Z + (f + h) Y Z + P X + Q Y + R Z,$$

also durch Mittelbildung:

$$\text{Mittel}\,\frac{T' \cos T'T}{T} = 1 + \frac{a + e + k}{3}$$

die mittlere (relative) Totalkraft (nach der Richtung von T).

Entsprechend der Vertikal- und der Horizontalkraft gibt es natürlich in jeder Richtung und in jeder Stellung eine mittlere Richtkraft. Fester Magnetismus beeinflußt nur die ersteren. Stehen Richtung und Stellung senkrecht zu einander, so ergibt $^1/_3$ der ersteren $(1 + k)$ mit $^2/_3$ der letzteren

$$1 + \frac{a + e}{2}$$

zusammen die Totalkraft

$$\left(1 + \frac{a + e + k}{3}\right),$$

wenn vom festen Magnetismus abgesehen wird.

Man mißt Vertikalkräfte durch die Vertikalkraftwage: einen mgn. Wagebalken mit Skala und Laufgewicht. Ersetzt man das Gewicht durch Federkraft, so kann man die Richtkraft nach jeder gegebenen Richtung messen. Also kann man durch Mittelbildung aus Messungen im Rundschwojen die mittlere Richtkraft nach gegebener Richtung finden. An dem Schwojen nimmt die Kraftwage nätürlich nicht Teil, d. h. sie muß relativ zum Schiff in entgegengesetztem Drehsinn schwojen.

Man mißt Horizontalkräfte durch Nadelschwingungen: die Kräfte an Bord und an Land sind den Quadraten der Schwingungsanzahlen proportional. Eine Inklinationsnadel kann man in jeder Stellung schwingen lassen, also in jeder Stellung die Richtkraft, also auch die mittlere Richtkraft durch Schwojen und Mittelbildungen ermitteln.

Verbindet man beide Verfahren, so kann man die Richtkraft in jeder Richtung einmal mit, einmal ohne den festen Magnetismus, also durch Bildung des Unterschiedes die Komponenten des letzteren ermitteln: so trennt man den festen und den flüchtigen Magnetismus im Poissonschen Fall.

Eine Deviation

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

ist richtkraft-stärkend, -erhaltend, -schwächend, wenn die Divergenz $a + e + k \gtreqless 0$ ist.

11. Deviation durch Lage.

Die Schiffskoordinaten mögen sich mit den Kompaßkoordinaten nicht decken.

Erstens sei das Schiffskoordinatensystem um die X-Axe um einen Winkel i gedreht worden, i positiv bei einer solchen Krängung nach Steuerbord. Die Komponenten der erdmagnetischen und der gesamtmagnetischen Kraft in Bezug auf diese Schiffskoordinaten werden mit dem Index i versehen. Also ist

$$\begin{aligned} X_i &= X & X'_i &= X' \\ Y_i &= Y \cos i + Z \sin i & Y'_i &= Y' \cos i + Z' \sin i \\ Z_i &= - Y \sin i + Z \cos i & Z'_i &= - Y' \sin i + Z' \cos i\,. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} X'_i &= (1 + a)\, X_i + b\, Y_i + c\, Z_i + P \\ Y'_i &= d\, X_i + (1 + e)\, Y_i + f\, Z_i + Q \\ Z'_i &= g X_i + h\, Y_i + (1 + k)\, Z_i + R\,, \end{aligned}$$

denn dies war der Zusammenhang zwischen dem erdmagnetischen und dem gesamtmagnetischen Vektor in Bezug auf Schiffskoordinaten. Setzt man für X_i, Y_i, Z_i, X'_i, Y'_i, Z'_i ihre Werte ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} X' &= (1 + a_i) X + b_i\, Y + c_i\, Z + P_i, \\ Y' &= d_i\, X + (1 + e_i)\, Y + f_i\, Z + Q_i \\ Z' &= g_i\, X + h_i\, Y + (1 + k_i)\, Z + R_i \end{aligned}$$

worin
$$P_i = P$$
$$Q_i = Q \cos i - R \sin i$$
$$R_i = P \sin i + R \cos i \quad \text{und}$$
$$a_i = a \qquad b_i = b \cos i - c \sin i \qquad c_i = c \cos i + b \sin i$$
$$d_i = d \cos i - g \sin i,\ e_i = e \cdot \cos^2 i - (f+h) \cdot \sin i \cdot \cos i + k \cdot \sin^2 i,$$
$$f_i = f \cdot \cos^2 i + (e-k) \cdot \sin i \cdot \cos i - h \,.\, \sin^2 i$$
$$g_i = g \cos i + d \sin i,\ h_i = h \cdot \cos^2 i + (e-k) \cdot \sin i \cdot \cos i - f \cdot \sin^2 i,$$
$$k_i = k \cdot \cos^2 i + (f+h) \cdot \sin i \cdot \cos i + e \cdot \sin^2 i \text{ ist.}$$

Also wird nach den Formeln S. 30:

$$\lambda_i = \lambda - {}^1\!/_2 (f+h) \sin i \cdot \cos i - {}^1\!/_2 (e-k) \sin^2 i,$$
$$\lambda_i \mathfrak{A}_i = \lambda \mathfrak{A} \cos i + {}^1\!/_2 (c-g) \sin i,$$
$$\lambda_i \mathfrak{B}_i = \lambda \mathfrak{B} + (b \cdot \sin i - c \cdot (1 - \cos i)) \operatorname{tg} \theta,$$
$$\lambda_i \mathfrak{C}_i = \lambda \mathfrak{C} + \left((e-k) \cdot \sin i \cdot \cos i - \frac{R}{Z} \sin i - (f+h) \sin^2 i\right) \operatorname{tg} \theta + \frac{Q}{Z}(1 - \cos i),$$
$$\lambda_i \mathfrak{D}_i = \lambda \mathfrak{D} + {}^1\!/_2 (f+h) \sin i \cos i + {}^1\!/_2 (e-k) \sin^2 i,$$
$$\lambda_i \mathfrak{E}_i = \lambda \mathfrak{E} \cos i - {}^1\!/_2 (c+g) \sin i.$$

Im regulären Fall $b = d = f = h = \mathfrak{A} = \mathfrak{E} = 0$ und, wenn i klein, $\cos i = 1$, $\sin i = i$ gesetzt werden kann, wird:

$$\lambda_i = \lambda,\ \mathfrak{A}_i = \frac{c-g}{2\lambda} i,\ \mathfrak{B}_i = \mathfrak{B},\ \mathfrak{C} = \mathfrak{C} + \frac{1}{\lambda}\left(e - k - \frac{R}{Z}\right) \operatorname{tg} \theta \cdot i,$$
$$\mathfrak{D}_i = \mathfrak{D},\ \mathfrak{E}_i = -\frac{c+g}{2\lambda} i.$$

Im vollregulären Fall wird

$$\lambda_i = \lambda,\ \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A},\ \mathfrak{B}_i = \mathfrak{B},\ \mathfrak{C}_i = \mathfrak{C} + \frac{e - k - \frac{R}{Z}}{\lambda} \operatorname{tg} \theta \cdot i,\ \mathfrak{D}_i = \mathfrak{D},\ \mathfrak{E}_i = \mathfrak{E}, \text{ also}$$
$$\delta_i = \delta + \frac{1}{\lambda}\left(e - k - \frac{R}{Z}\right) \operatorname{tg} \theta \cdot i \cdot \cos \zeta'.$$

Der Faktor
$$\left(e - k - \frac{R}{Z}\right) \frac{\operatorname{tg} \theta}{\lambda}$$

heißt der Krängungsfaktor. Man ermittelt ihn, indem man auf einem Kurs ζ' die Deviation δ auf ebenem Kiel und die Deviation δ_i bei Krängung um den kleinen Winkel i ermittelt, und den Unterschied $\delta_i - \delta$ durch $i \cdot \cos \zeta'$ teilt. Hat man so den Krängungsfaktor ermittelt, so berechnet man die Krängungsdeviation nach der obigen Formel. Das Verfahren ist streng nur im vollregulären Fall, den man annähernd als verwirklicht annimmt.

Zweitens seien die Schiffskoordinaten um die Y-Axe um einen Winkel u gedreht worden; u positiv bei einer solchen Vertrimmung nach vorn. Dann wird entsprechend, wie oben:

$$
\begin{aligned}
X_u &= X \cos u + Z \sin u, \\
Y_u &= Y \\
Z_u &= -X \sin u + Z \cos u, \\
X'_u &= X' \cos u + Z' \sin u, \\
Y'_u &= Y' \\
Z'_u &= -X' \sin u + Z' \cos u, \\
P_u &= P \cos u - R \sin u, \\
Q_u &= Q \\
R_u &= P \sin u + R \cos u.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_u &= a \cos^2 u - (c + g) \sin u \cos u + k \sin^2 u \\
b_u &= b \cos u - h \sin u \\
c_u &= c \cos^2 u + (a - k) \sin u \cos u - g \sin^2 u \\
d_u &= d \cos u - f \sin u \\
e_u &= e \\
f_u &= f \cos u + d \sin u \\
g_u &= g \cos^2 u + (a - k) \sin u \cos u - c \sin^2 u \\
h_u &= h \cos u + b \sin u \\
k_u &= k \cos^2 u + (c + g) \sin u \cos u + a \sin^2 u. \quad \text{Also}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_u &= \lambda - {}^1/_2 (c + g) \sin u \cos u - {}^1/_2 (a - k) \sin^2 u, \\
\lambda_u \mathfrak{A}_u &= \lambda \mathfrak{A} \cos u + {}^1/_2 (h - f) \sin u, \\
\lambda_u \mathfrak{B}_u &= \lambda \mathfrak{B} + \left((a - k) \sin u \cdot \cos u - \frac{R}{Z} \sin u - (c + g) \sin^2 u \right) \operatorname{tg} \theta \\
&\qquad \left[+ \frac{P}{Z} (1 - \cos u) \right. \\
\lambda_u \mathfrak{C}_u &= \lambda \mathfrak{C} + (d \sin u - f (1 - \cos u)) \operatorname{tg} \theta, \\
\lambda_u \mathfrak{D}_u &= \lambda \mathfrak{D} - {}^1/_2 (c + g) \sin u \cos u - {}^1/_2 (a - k) \sin^2 u, \\
\lambda_u \mathfrak{E}_u &= \lambda \mathfrak{E} \cos u - {}^1/_2 (f + h) \sin u.
\end{aligned}
$$

Im vollregulären Fall $b = d = c = f = g = h = \mathfrak{A} = \mathfrak{E} = 0$ wird, wenn wir u klein, $\cos u = 1$, $\sin u = u$ nehmen:

$$\lambda_u = \lambda,$$

$$\mathfrak{A}_u = \mathfrak{A},$$

$$\mathfrak{B}_u = \mathfrak{B} + \frac{1}{\lambda}\left(a - k - \frac{R}{Z}\right) \operatorname{tg} \theta \cdot u,$$

$$\mathfrak{C}_u = \mathfrak{C},\ \mathfrak{D}_u = \mathfrak{D},\ \mathfrak{E}_u = \mathfrak{E}, \text{ also}$$

$$\delta_u = \delta + \frac{1}{\lambda}\left(a - k - \frac{R}{Z}\right) \operatorname{tg} \theta \cdot u \cdot \sin \zeta'.$$

Der Faktor

$$\left(a - k - \frac{R}{Z}\right)\frac{\operatorname{tg} \theta}{\lambda}$$

ist der Vertrimmungsfaktor. Er hat geringere Bedeutung wie der Krängungsfaktor, ist aber gegebenenfalls ebenso zu behandeln. Bei Luftfahrzeugen kommen große Trimmänderungen vor.

12. Kurs und Deviation bei Lage.

Auf ebenem Kiel ist der Kurswinkel ζ (bzw. ζ') bestimmt einerseits durch den Schenkel H (bzw. H'), andererseits durch die Schiffs-X-Axe, gehend durch die Steuermarke. Bei bloßer Krängung ändert sich hieran nichts. Bei bloßer Vertrimmung bleibt die X-Axe in der vertikalen XZ-Ebene; der den Kurs bestimmende Schenkel ist der Horizontalschnitt der XZ-Ebene, oder, was dasselbe ist, die Horizontalprojektion der X-Axe. Bei gleichzeitiger Krängung und Vertrimmung ist es fraglich, welche durch die Lage des Schiffes bestimmte horizontale Grade (Steuerlinie) den Kurswinkel (mit H bzw. H') bilden soll, die Horizontalprojektion der X-Axe oder der Horizontalschnitt der XZ-Ebene oder eine irgendwie anders zu bestimmende Grade. Aber der Kompaß zeigt einen Kurs an. Wie ist dieser bestimmt?

Der Kompaßkessel drehe sich im Kardanring um eine Queraxe, während sich der Kardanring im Kompaß-Stand, der mit dem Schiff fest verbunden ist, um eine Längsaxe drehen möge. Bei jeder Lage des Schiffes geht die XZ-Ebene des Kompaßkessels durch die Schiffs-X-Axe. Da die XZ-Ebene des Kompaßkessels sich senkrecht stellt, ist die Steuerlinie die Horizontalprojektion der Schiffs-X-Axe.

Der Kompaßkessel drehe sich im Kardanring um eine Längsaxe, während sich der Kardanring im Kompaß-Stand um eine Queraxe drehen möge. Die Steuerlinie des Kompaßkessels bleibt immer in der Schiffs-XZ-Ebene. Die Steuerlinie ist also der Horizontalschnitt der Schiffs-XZ-Ebene.

Bei anderen kardanischen Aufhängungen ergeben sich andere Bedingungen für die Steuerlinie. Diese ist nicht an sich bestimmbar; es gibt keine absolute, von der besonderen Aufhängung unabhängige.

Infolgedessen ist auch der Begriff: „Deviation bei Lage" unbestimmt. Nur wenn Krängungswinkel i und Vertrimmungswinkel u so klein sind, daß Superposition ihrer Einflüsse statt hat, kann man davon reden. Dann sind die Änderungen der Deviationselemente nach oben abgeleiteten Formeln:

$$\Delta a = -(c+g)\,u \qquad \Delta b = -ci - hu \qquad \Delta c = bi + (a-k)\,u$$
$$\Delta d = -gi - fu \qquad \Delta e = -(f+h)\,i \qquad \Delta f = (e-k)\,i + du$$
$$\Delta g = di + (a-k)\,u \qquad \Delta h = (e-k)\,i + bu \qquad \Delta k = (f+h)i + (c+g)\,u.$$

Also die Änderung der exakten Formel abzuleiten aus:

$$\Delta\lambda = -\tfrac{1}{2}(f+h)\,i - \tfrac{1}{2}(c+g)\,u \qquad \Delta\lambda\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}(c-g)\,i + \tfrac{1}{2}(h-f)\,u$$
$$\Delta\lambda\mathfrak{B} = \left(bi + \left(a - k - \frac{R}{Z}\right) u\right) \operatorname{tg}\theta \qquad \Delta\lambda\mathfrak{C} = \left(\left(e - k - \frac{R}{Z}\right) i + du\right) \operatorname{tg}\theta$$
$$\Delta\lambda\mathfrak{D} = \tfrac{1}{2}(f+h)\,i - \tfrac{1}{2}(c+g)\,u \qquad \Delta\lambda\mathfrak{E} = -\tfrac{1}{2}(c+g)\,i - \tfrac{1}{2}(f+h)\,u.$$

Die oben behandelte „vollständige" Kompensation durch neun (bzw. drei) Stäbe und drei (bzw. einen) Magneten kompensiert alle zwölf Elemente a, b, c, d, e, f, g, h, k, P, Q, R zu Null. Für die Praxis legt man besonders darauf Wert, daß die horizontale Deviation δ verschwindet, daß also die Koëffizienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ der exakten Formel zu Null kompensiert werden. Das erfordert nach S. 30 $a - e = 0$, $d = b = 0$, $cZ + P = 0$, $fZ + Q = 0$, also, wenn es in mehreren mgn. Breiten stattfinden soll: $c = f = 0$, $P = Q = 0$.

Soll δ bei jeder Krängung Null sein, so folgt aus dem Verschwinden von $\mathfrak{A}_i$ und $\mathfrak{E}_i$ das von $c-g$ und $c+g$, also von c und g, aus dem von $cZ+P$ das von P; aus dem von $\mathfrak{D}_i$ das von $f+h$ und von $e-k$; aus dem von $\mathfrak{C}_i$ das von Q und R, aus dem von $fZ+Q$ das von f, aus dem von $f+h$ das von h, also folgt im Ganzen, daß

$a-e=e-k=b=d=c=g=f=h=P=Q=R=0$ sein muß.

Soll δ bei jeder Trimmlage Null sein, so folgt aus dem Verschwinden von $\mathfrak{A}_u$ und $\mathfrak{E}_u$ das von $f-h$ und $f+h$, also von f und h; also aus dem von $fZ+Q$ das von Q, aus dem von $\mathfrak{D}_u$ das von $c+g$ und von $a-k$, aus dem von $\mathfrak{B}_u$ das von P und R, aus dem von $cZ+P$ das von c, aus dem von $c+g$ das von g, also folgt im Ganzen, daß wieder

$a-e=e-k=b=d=c=g=f=h=P=Q=R=0$ sein muß.

Soll δ nur bei kleinen Lageänderungen Null sein, so folgt aus den hierfür auf S. 51 angegebenen Formeln für die Diagonalglieder nur

$$a=e=k+\frac{R}{Z}.$$

In allen drei Fällen ist dann δ auch in jeder mgn. Breite Null, im dritten nur bis auf Größen zweiter Ordnung in i bzw. in u. Die Trennung von

$$k \text{ und } \frac{R}{Z}$$

erfordert also entweder eine Änderung der mgn. Breite oder eine nicht-kleine Lagenänderung, bei der $\cos i$ und $\cos u$ nicht beide gleich Eins gesetzt werden dürfen, oder Richtkraftmessungen im Rundschwojen (S. 46) oder ohne Rundschwojen, wie wir im Abschnitt „Unmittelbare Kompensation“ zeigen werden.

Hat man alle 12 Elemente zu Null, bzw. die Diagonalelemente a, e, k auf den gemeinsamen Wert j kompensiert, so wird

$$X'=(1+j)X,\ Y'=(1+j)Y,\ Z'=(1+j)Z,\ T'=(1+j)T,$$

d. h. die Kompaß-Nadel wird bei keinem Kurs, bei keiner Lage und in keiner Breite abgelenkt, nur die Kraft, mit der sie eingestellt wird, ist an Bord $1 + j$ mal so groß, wie an Land. Eine solche Deviation nennen wir eine Richtkraft-Änderung und zwar eine Ricktkraft-Stärkung bzw.-Schwächung, jenachdem j positiv oder negativ ist.

Kann man die Matrize

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

vollständig, also zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kompensieren, so kann man sie auch zu einer vorgeschriebenen Richtkraftänderung

$$\begin{pmatrix} j & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}$$

kompensieren, indem man die Matrize

$$\begin{pmatrix} a-j & b & c \\ d & e-j & f \\ g & h & k-j \end{pmatrix}$$

vollständig kompensiert. Denn zufolge der Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-j & b & c \\ d & e-j & f \\ g & h & k-j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}$$

bleibt dann von der gegebenen Matrize nur die Richtkraftänderung übrig. Die vollständige Kompensation ist also das Hauptproblem. Seine Lösung macht besondere „Richtkraft-Stärker“ überflüssig, wie man sie bei Kompassen, deren Richtkraft durch umgebende Eisenmassen geschwächt ist, für erforderlich hält.

Bestimmt man j aus der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a-j & b & c \\ d & e-j & f \\ g & h & k-j \end{vmatrix} = 0,$$

was immer reell möglich ist, so ist die Matrize

$$\begin{pmatrix} a-j & b & c \\ d & e-j & f \\ g & h & k-j \end{pmatrix}$$

nach S. 18 durch höchstens zwei Stäbe darstellbar und kompensierbar; also ist jede Matrize

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

bis auf eine Richtkraftänderung durch höchstens zwei Stäbe darstellbar und kompensierbar.

13. Deviation durch Kompaß- und andere Fehler.

Es seien die Schiffskoordinatenaxen um die Z-Axe gedreht um einen Winkel α, positiv bei einer Drehung im Uhrzeigersinne. Eine solche Drehung kann erstens hervorgerufen, also auch kompensiert werden durch einen Indexfehler, d. h. eine unrichtige Lage der Steuermarke infolge ungenauer Anbringung derselben im Kompaß-Kessel oder ungenauer Aufstellung des Kompasses. Oder zweitens durch einen Collimationsfehler, d. h. eine Abweichung der NS-Linie der Rose von der mgn. Axe des Nadelsystems. Bei einer umlegbaren Rose kann man einen Collimationsfehler durch Umlegen ermitteln und dann beseitigen.

Eine solche Drehung der Schiffs- gegen die Kompaß-Axen ergibt:

$$\begin{aligned}
X_\alpha &= X \cos\alpha + Y \sin\alpha, \\
Y_\alpha &= -X \sin\alpha + Y \cos\alpha, \\
Z_\alpha &= Z, \\
X'_\alpha &= X' \cos\alpha + Y' \sin\alpha, \\
Y'_\alpha &= -X' \sin\alpha + Y' \cos\alpha, \\
Z'_\alpha &= Z', \\
P_\alpha &= P \cos\alpha - Q \sin\alpha, \\
Q_\alpha &= P \sin\alpha + Q \cos\alpha, \\
R_\alpha &= R.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_\alpha &= a \cos^2\alpha - (b+d)\sin\alpha\cos\alpha + e\sin^2\alpha,\\
b_\alpha &= b \cos^2\alpha + (a-e)\sin\alpha\cos\alpha - d\sin^2\alpha,\\
c_\alpha &= c\cos\alpha - f\sin\alpha,\\
d_\alpha &= d\cos^2\alpha + (a-e)\sin\alpha\cos\alpha - b\sin^2\alpha,\\
e_\alpha &= e\cos^2\alpha + (b+d)\sin\alpha\cos\alpha + a\sin^2\alpha,\\
f_\alpha &= f\cos\alpha + c\sin\alpha,\\
g_\alpha &= g\cos\alpha - h\sin\alpha,\\
h_\alpha &= h\cos\alpha + g\sin\alpha,\\
k_\alpha &= k.
\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}
\lambda_\alpha &= \lambda,\\
\lambda_\alpha \mathfrak{A}_\alpha &= \lambda \mathfrak{A},\\
\lambda_\alpha \mathfrak{B}_\alpha &= \lambda \mathfrak{B}\cos\alpha - \lambda \mathfrak{C}\sin\alpha,\\
\lambda_\alpha \mathfrak{C}_\alpha &= \lambda \mathfrak{C}\cos\alpha + \lambda \mathfrak{B}\sin\alpha,\\
\lambda_\alpha \mathfrak{D}_\alpha &= \lambda \mathfrak{D}\cos 2\alpha - \lambda \mathfrak{E}\sin 2\alpha,\\
\lambda_\alpha \mathfrak{E}_\alpha &= \lambda \mathfrak{E}\cos 2\alpha + \lambda \mathfrak{D}\sin 2\alpha,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{gathered}
\sin\delta_\alpha = \mathfrak{A}\cos\delta_\alpha\\
+ \mathfrak{B}\sin(\zeta' + \alpha) + \mathfrak{C}\cos(\zeta' + \alpha)\\
+ \mathfrak{D}\sin(2\zeta' + 2\alpha + \delta_\alpha) + \mathfrak{E}\cos(2\zeta' + 2\alpha + \delta_\alpha),
\end{gathered}$$

d. h. der Kp.-Kurs hat den Fehler α.

Sind $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ Null, so wird

$$\sin\delta_\alpha = \mathfrak{A}\cos\delta_\alpha,\ \delta_\alpha = \operatorname{arc\,tg}\mathfrak{A} = A,$$

die Deviation konstant und durch Versetzen der Steuermarke zu kompensieren. Bei positivem (negativem) A ist die Steuermarke nach rechts (links) zu versetzen.

Ein Ausgleich zwar nicht der Deviation aber der Mißweisung durch einen künstlichen Collimationsfehler — Verdrehung der Rose gegen die Nadel — war schon zu Kolumbus' Zeiten bekannt. In seinen Tagebüchern wird z. B. erwähnt, daß die flamändischen Rosen um $^3/_4$ Strich westlicher zeigten, als die genuesischen. Man sehe hierüber Wolkenhauer, „Beiträge zur Geschichte der Kartographie und Nautik des 15. bis 17. Jahrhunderts" i. d. Münchener geographischen Blättern, und Meldau i. d. Ann. d. Hyd. 1905, S. 84.

Andere Fehler der Rose: Exzentrizität, Schiefhängen und Teilungsfehler rufen bzw. semizirkulare, quadrantale u. a. Glieder hervor. Umgekehrt könnte man solche durch künstliche Kompaßfehler kompensieren, wie man die konstante Deviation durch Versetzen der Steuermarke kompensiert. Wollte man diesen Weg beschreiten, so wäre das einfachste, die Rose entsprechend den tatsächlichen Kursen aufzuzeichnen, also z. B. den N-Punkt der Rose so zu legen, daß der Kompaß beim mgn. Kurs N tatsächlich Nord zeigt. Eine solche Kompensation wäre mit der Lage und Breite veränderlich, womit man sich auch sonst meist begnügt.

Jeder Fehler in einer Beobachtung oder Berechnung, z. B. ein Fehler in einer beobachteten oder aus der Karte fehlerhaft entnommenen Peilung trägt zur Deviation bei. Durch Mittelbildung aus zahlreichen Werten verringert man den Einfluß dieser Fehlerquelle. Von Beobachtungs-, Rechnungs-, Karten- und Instrumentalfehlern sieht man ab, wenn man die Fehler aus magnetischen Ursachen behandelt.

14. Die Beobachtung der magnetischen Elemente.

Den Kompaßkurs ζ' liest man am Kompaß ab, während gleichzeitig der mgn. Kurs ζ durch Landpeilungen (am besten Deckpeilungen) oder Stern-Azimuthe ermittelt wird. θ' liefert die Inklinationsnadel, θ die Karte der Isoklinen. Braucht man eine Richtkraft, H' oder Z', so wird sie durch Horizontal- oder Vertikalkraftmessungen ermittelt. Durch Deflektor (Ablenker), Kraftwage oder Nadelschwingungen (S. 46). H und T entnimmt man der Karte der Isodynamen. Dann sind die Komponenten X, Y, Z und X', Y', Z' zu berechnen (S. 29).

Käme es nur darauf an, die Abhängigkeit der horizontalen Deviation δ vom Kurs ζ (bzw. ζ') zu ermitteln, so könnte man sich auf bloße Winkelbeobachtungen beschränken.

Aber unsichtiges Wetter und die Notwendigkeit alle 12 Elemente der totalen Deviation zu kennen, nötigen zu Richtkraftmessungen, die überdies den Vorzug haben, von der Voraussetzung der Kleinheit der Nadel unabhängig zu sein. Durch Winkelmessungen allein kann man nicht alle 12 Elemente der totalen Deviation ermitteln, wohl aber durch Richtkraftmessungen allein. Man bringe die Drehungsaxe der Inklinationsnadel in O der Reihe nach in die X-, Y-, Z-Axe des Schiffes, so ergibt die Abzählung der Schwingungsanzahlen an Bord und an Land (oder im Boot) in parallelen Axen die Richtkraftverhältnisse bzw. für die YZ-, XZ-, XY-Ebene, also quadriert die Werte

$$\begin{gathered} Y'^2 + Z'^2 \\ Z'^2 + X'^2 \\ X'^2 + Y'^2. \end{gathered}$$

deren halbe Summe ergibt T'^2. Dies vermindert um die drei quadrierten Beträge gibt bzw.

$$X'^2,\ Y'^2,\ Z'^2.$$

Dadurch sind X', Y', Z' bis auf die Vorzeichen bestimmt. Die Vorzeichen ergeben sich aus den Quadranten, in denen das nordweisende Ende der Nadel schwingt. Schwingt es z. B. in der XY-Ebene steuerbord achteraus, so ist X' negativ, Y' positiv. Dies Verfahren ist einfach, einheitlich und fast immer anwendbar.

Die Beobachtung von T' (X', Y', Z') nennen wir eine „vollständige" Beobachtung, gleichgültig, aus welchen unmittelbar beobachteten Elementen θ', ζ', X', Z', . . und dgl. sie errechnet ist.

Durch Deviationsmessungen allein kann man nur die 11 Verhältnisse der 12 Deviationselemente ermitteln. Dazu braucht man 11 Gleichungen, also mindestens drei Lagen des Schiffes gegen T, da jede einzelne Lage nur 5 von einander unabhängige lineare Gleichungen für die 5 Koëffizienten der exakten Formel, also nur 5 homogene lineare Gleichungen für die 11 Verhältnisse

$$1 + a : b : c : d : 1 + e : f : g : h : 1 + k : P : Q : R \text{ ergibt.}$$

15. Berechnung der Deviationselemente.

In der ersten Poissonschen Gleichung

$$X' = (1 + a) X + b Y + c Z + P$$

sind X', X, Y, Z die bekannten Größen, a, b, c, P die gesuchten. Demnach braucht man mindestens vier zusammengehörige Werte von X', X, Y, Z. Dasselbe gilt von den beiden andern Poissonschen Gleichungen. Kennt man also für mindestens vier verschiedene Lagen des Schiffes zum erdmagnetischen Vektor T (X, Y, Z) den gesamtmagnetischen Vektor T' (X', Y', Z'), was im Ganzen mindestens vier vollständige, also zwölf Einzelbeobachtungen erfordert, so kann man die zwölf Elemente a, b, c, d, e, f, g, h, k, P, Q, R aus 3 Systemen von linearen Gleichungen mit je vier Unbekannten berechnen. Sind

$$X_0, Y_0, Z_0; X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3$$

die Schiffskomponenten des Erdvektors bei den vier Lagen des Schiffes, so muß, damit je vier lineare Gleichungen nach den gesuchten Größen eindeutig lösbar sind, die Determinante

$$\begin{vmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 & 1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

von Null verschieden sein. D. h. es dürfen die Endpunkte der vier von O aus gezogenen Vektoren T nicht in einer Ebene liegen. Das findet z. B. statt, und das ist der praktisch wichtigste Fall, wenn das Schiff in den vier Lagen sich erstens auf ebenem Kiel, zweitens in derselben mgn. Breite befindet. Dann ist nämlich $Z_0 = Z_1 = Z_2 = Z_3$. In diesem Fall ist z. B. die erste Poissonsche Gleichung eine Gleichung für bloß drei Unbekannte a, b, $cZ + P$, die also durch drei Beobachtungen ermittelt werden können. Dabei kommt der Umstand zu statten, daß für die drei Beobachtungen

$X^2 + Y^2$ denselben Wert H^2 hat. Eine vierte Beobachtung muß entweder bei Lage oder in anderer mgn. Breite erfolgen, damit $cZ + P$ noch für einen andern Wert von Z ermittelt wird. Dann hat man zwei Gleichungen für c und P, aus denen diese zu berechnen sind. Ist auch die vierte Beobachtung eine vollständige, so erhält man ebenso aus der zweiten Poissonschen Gleichung f und Q, aus der dritten k und R. Also eine einzige vollständige Beobachtung bei Lage oder in anderer mgn. Breite trennt die Werte von c und P, von f und Q, von k und R.

Beobachtungen in merklich anderer Breite sind nicht immer ausführbar, auch unzuverlässig wegen der Veränderung von P, Q, R durch trägen Magnetismus. Man muß auch wünschen, daß das Schiff schon vor Fahrten in andere Breiten seine Deviationselemente ermittelt hat, wenn sie auch dauernder Nachprüfung bedürfen. Beobachtungen bei Lage, meistens bei Krängung, scheut man wegen der Umstände und Kosten, weil man meint, es wäre dazu eine Reihe von Beobachtungen (mindestens fünf) im Rundschwojen erforderlich, (s. z. B. Encyklopädie a. a. O. S. 343, Anm. 109 und S. 344, Anm. 111), während nach Obigem eine einzige vollständige Beobachtung genügt, eine Mehrzahl nur zwecks Ausgleichung erwünscht ist. Beobachtungen im Rundschwojen sollte man schon wegen der durch trägen Magnetismus in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ hervorgerufenen Fehler (erreur Gaussin) nicht mehr als unbedingt nötig vornehmen. Muß man sie aber anwenden, so genügen Richtkraftmessungen auf ebenem Kiel, wie wir oben gezeigt haben. Es ist auch garnicht nötig, eine Lage erst durch besondere Mittel eigens zum Zwecke der Deviationsbestimmung herbeizuführen. Vielmehr bieten das Laden und Löschen, das Auf- und Abschleppen, Kielholen, Segeln, usw. oft Gelegenheit Beobachtungen bei Lage zu machen, die man nur auszunutzen braucht.

Man beobachte z. B. auf ebenem Kiel auf den vier Hauptkursen. Da ist bzw. $X = \pm H$, $Y = 0$; $X = 0$ $Y = \pm H$. Demnach giebt die erste Poissonsche Gleichung die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} 4(cZ+P) &= X'_n + X'_o + X'_s + X'_w \\ 2((1+a)H+(cZ+P)) &= X'_n \qquad - X'_s \\ 2((bH+(cZ+P)) &= \qquad X'_o \qquad - X'_w \\ 0 &= X'_n - X'_o + X'_s - X'_w. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung giebt den Wert von $cZ+P$, dann die zweite den von a, die dritte den von b. Zum Ausgleich hat man noch die vierte. Alsdann mache man bei einer Krängung um den Winkel i eine Beobachtung; die ergibt (S. 47).

$$X'_i = (1+a)\,X_i + b\,Y_i + cZ_i + P.$$

Da a und b schon bekannt sind, erhält man cZ_i+P und hieraus in Verbindung mit dem auf ebenem Kiel gefundenen Werte von $cZ+P$ die beiden Werte c und P; ebenso für f und Q, für k und R.

Hat man, was meist der Fall und immer anzustreben ist, mehr Gleichungen

$$\sum_i l_i\, x_i = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \cdot\cdot, n; x_0 = 1 \\ l = 1, 2, \cdot\cdot, m; m > n \end{pmatrix}$$

als Unbekannte x_i, so sind solche Werte x_i aufzusuchen, daß die Summe der Fehlerquadrate

$$\sum_l \left[\sum_i l_i\, x_i\right]^2$$

möglichst klein wird. Das erfolgt, wenn man die n Werte x_i aus den n Gleichungen

$$\sum_l l_j \sum_i l_i\, x_i = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdot\cdot, n)$$

berechnet. Dann wird nämlich die Fehlerquadratsumme für die Werte $x_i + \Delta x_i$

$$\sum_l \left[\sum_i l_i\,(x_i + \Delta\, x_i)\right]^2 = \sum_l \left[\sum_i l_i\, x_i\right]^2 + \sum_l \left[\sum_j l_j\, \Delta x_j\right]^2,$$

weil die Koëffizienten der in den Δx_j linearen Glieder zufolge der n erfüllten Gleichungen fortfallen, also größer als die für die Werte x_i. Die Auflösung der n Gleichungen ergibt

$$|0|^2\, x_i + |i|\,|0| = 0,$$

wenn $|i|$ die Matrize bezeichnet, deren l-te Spalte aus den Koëffizienten der l-ten Gleichung unter Auslassung des Koëffizienten von x_i gebildet ist. Z. B. gibt die dritte Poissonsche Gleichung, (dem Fall $n = 3$ entsprechend)

$$g X + h Y + \mu Z - Z' = 0,$$

wo die mittlere Vertikalkraft $(1 + k) Z + R = \mu Z$ gesetzt ist, für μ

$$\begin{vmatrix} \cdot X_1 \cdot \\ \cdot Y_1 \cdot \\ \cdot Z_1 \cdot \end{vmatrix} \mu = \begin{vmatrix} \cdot X_1 \cdot \\ \cdot Y_1 \cdot \\ \cdot Z_1' \cdot \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cdot X_1 \cdot \\ \cdot Y_1 \cdot \\ \cdot Z_1 \cdot \end{vmatrix};$$

entsprechend für g und h. Sind alle Beobachtungen in derselben mgn. Breite gemacht, also alle Z_1 einander gleich, so wird der Zähler von μZ die Summe aller Produkte der Form

$$[Z'_1 \sin(\zeta_2 - \zeta_3) + Z'_2 \sin(\zeta_3 - \zeta_1) + Z'_3 \sin(\zeta_1 - \zeta_2)]$$
$$\times [\sin(\zeta_2 - \zeta_3) + \sin(\zeta_3 - \zeta_1) + \sin(\zeta_1 - \zeta_2)],$$

und der Nenner die Summe aller Quadrate der Form

$$[\sin(\zeta_2 - \zeta_3) + \sin(\zeta_3 - \zeta_1) + \sin(\zeta_1 - \zeta_2)]^2.$$

Für $m = 3$ findet sich diese letztere Formel bei Rottok, Deviationstheorie, S. 113. Sie ist in diesem Fall leicht zu konstruieren. Ist $h = o$, so erhält man aus obigen Formeln für $n = 2$:

$$[m \Sigma \cos^2 \zeta - (\Sigma \cos \zeta)^2] \mu Z = \Sigma Z' \Sigma \cos^2 \zeta - \Sigma Z' \cos \zeta \Sigma \cos \zeta$$
$$[m \Sigma \cos^2 \zeta - (\Sigma \cos \zeta)^2] g H = m \Sigma Z' \cos \zeta - \Sigma Z' \quad \Sigma \cos \zeta.$$

Diese Formeln stehen bei Rottok S. 114 (3), S. 115 (2) ohne Ableitung und ohne den Zusatz $h = o$, ohne den sie falsch sind.

16. Trennung des festen und flüchtigen Magnetismus im Nicht-Poissonschen Fall.

Die Elemente a, b, c, d, e, f, g, h, k haben nur Bedeutung unter der Annahme des Poissonschen Satzes, die Komponenten P, Q, R des festen und U, V, W des flüchtigen Magnetismus auch unabhängig davon. Deshalb ist es erwünscht, die Trennung von P, Q, R und U, V, W, die wir im Abschnitt 9 für den Poissonschen Fall beschrieben, nunauch unabhängig vom Poissonschen Satz durchzuführen. Dazu gehen wir von den Gleichungen aus

$$X' = X + U + P$$
$$Y' = Y + V + Q$$
$$Z' = Z + W + R,$$

in denen wir von U, V, W nur voraussetzen, daß es Formen ersten Grades von X, Y, Z sind.

Machen wir erstens auf ebenem Kiel in der mgn. Breite θ auf dem Kurs ζ' eine vollständige Beobachtung X', Y', Z', so werden die obigen drei Gleichungen, da auch X, Y, Z bekannt sind, drei lineare Gleichungen für U, V, W, P, Q, R.

Machen wir zweitens in der mgn. Breite $\theta + \Delta\theta$ auf dem Kurs ζ'', aber bei Lage eine zweite vollständige Beobachtung in Schiffskoordinaten X'', Y'', Z''. Der Erdvektor sei jT. Die Lage (Krängung und Vertrimmung) richten wir so ein, daß der Erdvektor wieder dieselbe Richtung im Schiff hat, wie bei der ersten Beobachtung. Seine Schiffs-Komponenten sind also dann

$$jX,\ jY,\ jZ;$$

und da U, V, W Formen ersten Grades von X, Y, Z sind, werden diese gleich

$$jU,\ jV,\ jW,$$

sodaß wir die Gleichungen bekommen:

$$\begin{aligned} X'' &= jX + jU + P \\ Y'' &= jY + jV + Q \\ Z'' &= jZ + jW + R; \end{aligned}$$

ein zweites System von drei Gleichungen für die sechs Unbekannten U, V, W, P, Q, R, sodaß diese berechnet werden können. Da j nicht gleich 1 ist, verschwindet die Determinante $1 - j$ nicht. Schon bei durchaus zugänglichen Breitenänderungen nimmt j von 1 hinreichend verschiedene Werte an. Von den Canarischen bis zu den Shetland-Inseln ändert sich z. B. die Totalintensität etwa von 0,4 bis 0,5.

Am meisten und weil, wie oben (S. 51) auseinandergesetzt, der Begriff „Kurs“ bei allgemeiner Lage (Krängung und Vertrimmung) begrifflich unbestimmt wird, empfiehlt es sich, außer der Lage auf ebenem Kiel nur solche Lagen zu verwenden, die bloße Krängungen oder bloße Vertrimmungen sind. Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, indem man sich zunächst auf mgn. Kurse ζ in den vier Hauptstrichen beschränkt. Bei West-(Ost-)Kurs und positivem $\Delta\theta$ muß man eine Krängung nach Steuer-(Back-)Bord um den Winkel $\Delta\theta$ machen, damit der Erdvektor wieder dieselbe Lage zum Schiff hat. Bei Nord-(Süd-)Kurs muß man eine kopflastige (steuerlastige) Vertrimmung um den Winkel $\Delta\theta$ machen, damit der Erdvektor wieder dieselbe Lage zum Schiff hat.

Am einfachsten ist das Verfahren in niedrigen mgn. Breiten, da man dann in derselben Breite dieselbe Lage zwischen dem Schiff und dem Erdvektor T, nur mit umgekehrten Sinn herstellen kann. Man liege z. B. unter 5^0 mgn. Breite auf mgn. Ostkurs, um $5^0 - 2^0 = 3^0$ nach Backbord gekrängt. Darauf schwoje man auf mgn. West, kränge um $5^0 + 2^0 = 7^0$ nach Steuerbord, so hat T dieselbe Lage zum Schiff (0, cos 2^0, — sin 2^0), nur der Sinn ist umgekehrt. Die halben Summen und die halben Unterschiede der gefundenen Werte von X'-X, Y'-Y, Z'-Z ergeben bzw. die Werte von U, V, W, P, Q, R.

Die so von der Annahme des Poissonschen Satzes unabhängig ermittelten Werte von P, Q, R sind besser als die sonstigen, da sie nicht beeinflußt sind von der Zwangsapproximierung der U, V, W durch Linearformen von X, Y, Z.

17. Prüfung des Poissonschen Satzes.

Hat man erst, wie oben beschrieben, P, Q, R ermittelt und evtl. kompensiert, so liefert jede vollständige Beobachtung die Werte von U, V, W, die zu gegebenen X, Y, Z gehören. Dann ist es leicht nachzuprüfen, ob den zusammengehörigen Wertsystemen U, V, W, X, Y, Z durch lineare Gleichungen

$$\begin{aligned} U &= aX + bY + cZ \\ V &= dX + eY + fZ \\ W &= gX + hY + kZ \end{aligned}$$

genügt werden kann, wie es der Poissonsche Satz erfordert.

Ein elektromagnetisches Feld sei so stark gemacht, daß es in einer solchen Entfernung vom Schiff, in der es für die Ausdehnung des Schiffes als homogen angesehen werden kann, noch stark genug ist, den Erdmagnetismus zu kompensieren. Durch Stellungsänderung des Elektromagneten kann man dann das Schiff einem homogenen Felde jeder Richtung aussetzen. Um diesem künstlichen Felde in jeder Richtung etwa die Stärke des Erdfeldes geben zu können, muß man das elektromagnetische Feld äußersten Falls doppelt so stark machen können, nämlich, wenn man ein dem erdmagnetischen gegensinnig gleiches Feld braucht.

In niedrigen mgn. Breiten wird es am ehesten möglich sein, solche homogene Felder jeder Richtung künstlich herzustellen. Zu möglichst vielen Lagen des künstlichen Feldes beobachtet man die Werte von U, V, W und prüft das Bestehen linearer Gleichungen zwischen U, V, W und den Komponenten des vereinigten Erd- und künstlichen Feldes.

18. Berechnung der exakten Formel.

Man geht sonst nicht auf die Ermittelung der Elemente a, b, c, d, · · P, Q, R aus, sondern nur auf die der Koëffizienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ der exakten Formel, da für die Kenntnis der horizontalen Deviation δ in ihrer Abhängigkeit vom Kp. Kurs ζ' diese genügen. Fünf zusammengehörige Werte von irgend zweien der drei Größen δ, ζ, ζ' genügen hierzu theoretisch; praktisch sind mehr erwünscht zum Ausgleich. In jedem Fall, gleich, ob man die Formel zwischen δ und ζ, oder die zwischen δ und ζ', oder die zwischen ζ und ζ' anwendet, sind lineare Gleichungssysteme mit fünf Unbekannten aufzulösen. Die Determinante des Gleichungssystems besteht nach S. 30 aus fünf solchen Zeilen

$$\left| \cos(\zeta - \zeta'),\ \sin\zeta',\ \cos\zeta',\ \sin(\zeta + \zeta'),\ \cos(\zeta + \zeta') \right|$$

Eine solche Determinante verschwindet nicht, d. h. nicht für je fünf Wertepaare ζ, ζ'. Denn wir haben S. 31 bewiesen, daß sie jedenfalls für fünf solche Wertepaare nicht verschwindet, für die $\zeta - \zeta' = 0$ ist. Infolgedessen verschwindet sie auch dann nicht, wenn für jedes der fünf Wertepaare $\zeta - \zeta' = \delta$ klein ist. Solche Wertepaare eignen sich also zur Ermittelung von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$.

Aber das Auflösen von Systemen linearer Gleichungen mit fünf Unbekannten ist umständlich. Eine wesentliche Vereinfachung in dieser Hinsicht erzielt man folgendermaßen. Man führe die halbe Summe δ^0 und den halben Unterschied δ^1 der Deviationen zum Kurs ζ' und zum Gegenkurs $\zeta' + 180^0$ ein. Dann hat man zunächst nur Systeme linearer Gleichungen

$$\sin\delta^0 = \mathfrak{A}\cos\delta^0 + \mathfrak{D}\sin(2\zeta' + \delta^0) + \mathfrak{E}\cos(2\zeta' + \delta^0)$$

für die drei Unbekannten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ aufzulösen. Das Nicht-Verschwinden der Determinante ist wie oben zu beweisen.

Am einfachsten wird die Auflösung für $\zeta' = 0, 2, 4, 6$ Striche, da dann $\sin(2\zeta' + \delta^0)$, $\cos(2\zeta' + \delta^0)$ nur die Werte $\cos\delta^0$, $\pm\sin\delta^0 \pm (\cos\delta^0 \pm \sin\delta^0)\sqrt{1/2}$ annehmen.

Damit ist auch $\mathfrak{N}$ für jeden Wert von ζ' bekannt, und man findet die beiden letzten Koëffizienten $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ aus linearen Gleichungen mit nur zwei Unbekannten

$$\mathfrak{N}\cdot\sin\delta^1 = \mathfrak{B}\sin\zeta' + \mathfrak{C}\cos\zeta',$$

mit nicht verschwindender Determinante.

Am einfachsten wird die Auflösung für Hauptkurse $\zeta' = 0^0, 90^0, 180^0, 270^0$, da dann $\sin\zeta'$ und $\cos\zeta'$ nur die Werte 0 und ± 1 annehmen.

Für den wichtigen Fall, daß die acht Deviationen an den Haupt- und Hauptzwischenkursen gleichmäßig herangezogen werden sollen, können wir so verfahren:

Die acht Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\sin\delta_n &= \mathfrak{A}\cos\delta_n && && +\mathfrak{C} && +\mathfrak{D}\sin\delta_n && +\mathfrak{E}\cos\delta_n\\
\sin\delta_{no} &= \mathfrak{A}\cos\delta_{no} && +\mathfrak{B}\sqrt{1/2} && +\mathfrak{C}\sqrt{1/2} && +\mathfrak{D}\cos\delta_{no} && -\mathfrak{E}\sin\delta_{no}\\
\sin\delta_o &= \mathfrak{A}\cos\delta_o && +\mathfrak{B} && && -\mathfrak{D}\sin\delta_o && -\mathfrak{E}\cos\delta_o\\
\sin\delta_{so} &= \mathfrak{A}\cos\delta_{so} && +\mathfrak{B}\sqrt{1/2} && -\mathfrak{C}\sqrt{1/2} && -\mathfrak{D}\cos\delta_{so} && +\mathfrak{E}\sin\delta_{so}\\
\sin\delta_s &= \mathfrak{A}\cos\delta_s && && -\mathfrak{C} && +\mathfrak{D}\sin\delta_s && +\mathfrak{E}\cos\delta_s\\
\sin\delta_{sw} &= \mathfrak{A}\cos\delta_{sw} && -\mathfrak{B}\sqrt{1/2} && -\mathfrak{C}\sqrt{1/2} && +\mathfrak{D}\cos\delta_{sw} && -\mathfrak{E}\sin\delta_{sw}\\
\sin\delta_w &= \mathfrak{A}\cos\delta_w && -\mathfrak{B} && && -\mathfrak{D}\sin\delta_w && -\mathfrak{E}\cos\delta_w\\
\sin\delta_{nw} &= \mathfrak{A}\cos\delta_{nw} && -\mathfrak{B}\sqrt{1/2} && +\mathfrak{C}\sqrt{1/2} && -\mathfrak{D}\cos\delta_{nw} && +\mathfrak{E}\sin\delta_{nw}
\end{aligned}$$

ergeben, wenn wir die halben Summen und die halben

Unterschiede der zu einem Kurs ζ' und zum Gegenkurs $\zeta' + 180^0$ gehörenden Gleichungen bilden:

$$\begin{aligned}
(1+\mathfrak{E})\,\Delta^0_{no} &= (\mathfrak{A}+\mathfrak{D})\,\Gamma^0_{no}\\
(1+\mathfrak{E})\,\Delta^1_{no} &= (\mathfrak{A}+\mathfrak{D})\,\Gamma^1_{no} + (\mathfrak{B}+\mathfrak{C})\sqrt{1/2}\\
(1-\mathfrak{E})\,\Delta^0_{so} &= (\mathfrak{A}-\mathfrak{D})\,\Gamma^0_{so}\\
(1-\mathfrak{E})\,\Delta^1_{so} &= (\mathfrak{A}-\mathfrak{D})\,\Gamma^1_{so} + (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\sqrt{1/2}\\
(1-\mathfrak{D})\,\Delta^0_{n} &= (\mathfrak{A}+\mathfrak{E})\,\Gamma^0_{n}\\
(1-\mathfrak{D})\,\Delta^1_{n} &= (\mathfrak{A}+\mathfrak{E})\,\Gamma^1_{n} + \mathfrak{C}\\
(1+\mathfrak{D})\,\Delta^0_{o} &= (\mathfrak{A}-\mathfrak{E})\,\Gamma^0_{o}\\
(1+\mathfrak{D})\,\Delta^1_{o} &= (\mathfrak{A}-\mathfrak{E})\,\Gamma^1_{o} + \mathfrak{B},
\end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{\sin\delta_{\zeta'} \pm \sin\delta_{\zeta'+180^0}}{2} = \begin{cases}\Delta^0_{\zeta'}\\ \Delta^1_{\zeta'}\end{cases} \qquad \frac{\cos\delta_{\zeta'} \pm \cos\delta_{\zeta'+180^0}}{2} = \begin{cases}\Gamma^0_{\zeta'}\\ \Gamma^1_{\zeta'}\end{cases}$$

gesetzt ist. Setzen wir ferner für alle Indices:

$$\Delta^1\Gamma^0 - \Delta^0\Gamma^1 = B,\ \frac{\Delta^0}{\Gamma^0} = E,\ \frac{B}{\Gamma^0} = A,$$

und setzen hier, wie im Folgenden, das Nicht-Verschwinden der auftretenden Nenner voraus, so bekommen wir, wenn wir aus den von $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ freien Gleichungen, die Größen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}+\mathfrak{E} &= (1-\mathfrak{D})\,E_n & \qquad \mathfrak{A}+\mathfrak{D} &= (1+\mathfrak{E})\,E_{no}\\
\mathfrak{A}-\mathfrak{E} &= (1+\mathfrak{D})\,E_o & \qquad \mathfrak{A}-\mathfrak{D} &= (1-\mathfrak{E})\,E_{so}
\end{aligned}$$

in die mit $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ behafteten Gleichungen einsetzen:

$$\begin{aligned}
(1+\mathfrak{D})\,A_o &= \mathfrak{B} & \qquad (1+\mathfrak{E})\,A_{no} &= (\mathfrak{B}+\mathfrak{C})\sqrt{1/2}\\
(1-\mathfrak{D})\,A_n &= \mathfrak{C} & \qquad (1-\mathfrak{E})\,A_{so} &= (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\sqrt{1/2}
\end{aligned}$$

und hieraus durch Entfernung von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$:

$$\begin{aligned}
(1+\mathfrak{E})\,A_{no}\cdot\sqrt{2} &= (1+\mathfrak{D})\,A_o + (1-\mathfrak{D})\,A_n\\
(1-\mathfrak{E})\,A_{so}\cdot\sqrt{2} &= (1+\mathfrak{D})\,A_o - (1-\mathfrak{D})\,A_n\\
(1+\mathfrak{D})\,A_o\cdot\sqrt{2} &= (1+\mathfrak{E})\,A_{no} + (1-\mathfrak{E})\,A_{so}\\
(1-\mathfrak{D})\,A_n\cdot\sqrt{2} &= (1+\mathfrak{E})\,A_{no} - (1-\mathfrak{E})\,A_{so},
\end{aligned}$$

woraus für $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ folgt:

$$\pm 2\sqrt{2}\, A_{no} A_{so} \mp 2 A_{so} A_{\substack{n\\o}} + 2 A_{no} A_{\substack{n\\o}}$$

$$= (1 \pm \mathfrak{D}) \cdot (A_o A_{so} - A_n A_{so} + A_o A_{no} + A_n A_{no}$$

$$\pm 2\sqrt{2}\, A_o\, A_n \mp 2 A_n\, A_{\substack{so\\no}} + 2 A_o\, A_{\substack{so\\no}}$$

$$= (1 \pm \mathfrak{E}) \cdot (A_o A_{so} - A_n A_{so} + A_o A_{no} + A_n A_{no}.$$

Haben wir hieraus $1 \pm \mathfrak{D}$, $1 \pm \mathfrak{E}$ berechnet, so bekommen wir für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ je zwei Werte, nämlich

$$2\mathfrak{A}_I = (1 + \mathfrak{D}) E_o + (1 - \mathfrak{D}) E_n$$

$$\mathfrak{B}_I = (1 + \mathfrak{D}) A_o$$

$$\mathfrak{C}_I = (1 - \mathfrak{D}) A_n$$

$$2\mathfrak{A}_{II} = (1 + \mathfrak{E}) E_{no} + (1 - \mathfrak{E}) E_{so}$$

$$\mathfrak{B}_{II} = (1 + \mathfrak{E}) A_{no} \sqrt{\tfrac{1}{2}} + (1 - \mathfrak{E}) A_{so} \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\mathfrak{C}_{II} = (1 + \mathfrak{E}) A_{no} \sqrt{\tfrac{1}{2}} - (1 - \mathfrak{E}) A_{so} \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

und daraus durch Mittelbildung:

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{A}_I + \mathfrak{A}_{II}}{2} \qquad \mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{B}_I + \mathfrak{B}_{II}}{2} \qquad \mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{C}_I + \mathfrak{C}_{II}}{2}.$$

Die mit dem Index I (II) behafteten Größen enthalten außer der Größe $\mathfrak{D}$ ($\mathfrak{E}$) nur die Deviationen an den Haupt- (Hauptzwischen-)Kursen. Man führt die Rechnung sonst nicht durch, sondern nimmt vorher Abkürzungen mit Rücksicht auf die Kleinheit der Größen vor (s. z. B. in Admiralty Manual). Solche Abkürzungen kann man nur machen, wenn gegebene Zahlenwerte vorliegen, sonst könnten die gewonnenen Formeln auf auftretende Fälle unter Umständen nicht anwendbar sein. Dies ist besonders mit Rücksicht auf die vorkommenden Nenner zu beachten, die für besondere Zahlenwerte klein werden können.

Sind alle Deviationen δ so klein, daß $\sin \delta = \delta$, $\cos \delta = 1$, $\mathfrak{D}\delta = 0$, $\mathfrak{E}\delta = 0$ gesetzt werden kann, so geht die exakte in die fünfgliedrige Näherungsformel, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ in A, B, C, D, E über, und es wird für alle Indices:

$$\Delta^0 = \delta^0,\ \Delta^1 = \delta^1,\ \Gamma^0 = 1,\ \Gamma^1 = 0,\ B = \Delta^1 = \delta^1,\ E = \delta^0,\ A = \delta^1,$$

also ergeben die für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ abgeleiteten Formeln,

$$
\begin{aligned}
4\,A_{I} &= 2\,\delta^{0}{}_{o} + 2\,\delta^{0}{}_{n} = \delta_{o} + \delta_{w} + \delta_{n} + \delta_{s},\\
2\,B_{I} &= \delta_{o} - \delta_{w}\\
2\,C_{I} &= \delta_{n} - \delta_{s}\\
4\,A_{II} &= 2\,\delta^{0}{}_{no} + 2\,\delta^{0}{}_{so} = \delta_{no} + \delta_{sw} + \delta_{so} + \delta_{nw}\\
2\sqrt{2}\,B_{II} &= 2\,\delta^{1}{}_{no} + 2\,\delta^{1}{}_{so} = \delta_{no} - \delta_{sw} + \delta_{so} - \delta_{nw}\\
2\sqrt{2}\,C_{II} &= 2\,\delta^{1}{}_{no} - 2\,\delta^{1}{}_{so} = \delta_{no} - \delta_{sw} - \delta_{so} + \delta_{nw}\,,
\end{aligned}
$$

während man für D, E aus

$$\mathfrak{A} \pm \mathfrak{E} = (1 \mp \mathfrak{D})\, E_{\substack{n\\o}} \qquad \mathfrak{A} \pm \mathfrak{D} = (1 \pm \mathfrak{E})\, E_{\substack{no\\so}}$$

bekommt:

$$4\,D = \delta_{no} + \delta_{sw} - \delta_{so} - \delta_{nw}, \qquad 4\,E = \delta_{n} + \delta_{s} - \delta_{o} - \delta_{w}.$$

Diese wichtigen Formeln werden wir weiter unten unmittelbar ableiten.

19. Berechnung von Näherungsformeln.

Die **Smith**sche exakte Formel hat für die praktische Verwendung den Nachteil, daß sie die Deviation δ nicht explizit durch den Kp. Kurs ζ' ausdrückt. Deshalb gebraucht man statt ihrer meist Näherungsformeln und begnügt sich in der Regel mit der fünfgliedrigen

$$\delta = A + B \sin \zeta' + C \cos \zeta' + D \sin 2\,\zeta' + E \cos 2\,\zeta'.$$

Es entsteht die Aufgabe aus einer hinreichenden Anzahl zusammengehöriger Wertepaare δ, ζ' die besten Werte der Koëffizienten A, B, C, D, E zu berechnen.

Sind die Deviationen auf den Hauptkursen N, O, S, W bekannt, so erhält man die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\delta_{0} &= A \phantom{{}+B} + C + E\\
\delta_{8} &= A + B \phantom{{}+C} - E\\
\delta_{16} &= A \phantom{{}+B} - C + E\\
\delta_{24} &= A - B \phantom{{}+C} - E
\end{aligned}
$$

und daraus

$$\begin{aligned}
4\,A &= \delta_0 + \delta_8 + \delta_{16} + \delta_{24} \\
2\,B &= \phantom{\delta_0 +{}} \delta_8 \phantom{{}+ \delta_{16}} - \delta_{24} \\
2\,C &= \delta_0 \phantom{{}+ \delta_8} - \delta_{16} \\
4\,E &= \delta_0 - \delta_8 + \delta_{16} - \delta_{24}
\end{aligned}$$

während D hierdurch nicht bestimmt wird. Bezeichnen wir die so ermittelten Werte mit dem Index I, so hat die Formel

$$\delta_I = A_I + B_I \sin \zeta' + C_I \cos \zeta' + D \sin 2\,\zeta' + E_I \cos 2\,\zeta'$$

bei jedem D auf den vier Hauptkursen die vorgeschriebenen Werte. Aus irgend einer fünften Bedingung, z. B. dem Werte von δ auf einem Hauptzwischenkurse NO, SO, SW, NW kann man D bestimmen. Sind die Deviationen auf diesen vier Kursen bekannt, so erhalten wir aus den Gleichungen (mit $\sin 45^0 = S_4$)

$$\begin{aligned}
\delta_4 &= A + S_4\,B + S_4\,C + D \\
\delta_{12} &= A + S_4\,B - S_4\,C - D \\
\delta_{20} &= A - S_4\,B - S_4\,C + D \\
\delta_{28} &= A - S_4\,B + S_4\,C - D
\end{aligned}$$

die Werte

$$\begin{aligned}
4\,A &= \delta_4 + \delta_{12} + \delta_{20} + \delta_{28} \\
4\,S_4\,B &= \delta_4 + \delta_{12} - \delta_{20} - \delta_{28} \\
4\,S_4\,C &= \delta_4 - \delta_{12} - \delta_{20} + \delta_{28} \\
4\,D &= \delta_4 - \delta_{12} + \delta_{20} - \delta_{28}\;,
\end{aligned}$$

während E hierbei nicht bestimmt wird. Bezeichnen wir die so gefundenen Werte mit dem Index II, so nimmt die Formel

$$\delta_{II} = A_{II} + B_{II} \sin \zeta' + C_{II} \cos \zeta' + D_{II} \sin 2\,\zeta' + E \cos 2\,\zeta'$$

bei jedem E auf den vier Hauptzwischenkursen die vorgeschriebenen Werte an. Aus irgend einer fünften Bedingung, z. B. dem Werte von δ auf einem Hauptkurse kann man E bestimmen.

Wir wollen in der Formel für δ_I den noch fehlenden Wert von D so wählen, daß die Quadratsumme der Fehler auf den Hauptzwischenkursen möglichst klein wird, d. h. als Mittel der aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\delta_4 &= A_I + S_4 B_I + S_4 C_I + D \\
\delta_{12} &= A_I + S_4 B_I - S_4 C_I - D \\
\delta_{20} &= A_I - S_4 B_I - S_4 C_I + D \\
\delta_{28} &= A_I - S_4 B_I + S_4 C_I - D
\end{aligned}$$

folgenden Werte für D, d. h. es ist $D = D_{II}$ zu nehmen.

Wir wollen in der Formel für δ_{II} den noch fehlenden Wert von E so wählen, daß die Quadratsumme der Fehler auf den Hauptkursen möglichst klein wird, d. h. als Mittel der aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
\delta_0 &= A_{II} \qquad\quad + C_{II} + E \\
\delta_8 &= A_{II} + B_{II} \qquad\quad - E \\
\delta_{16} &= A_{II} \qquad\quad + C_{II} + E \\
\delta_{24} &= A_{II} - B_{II} \qquad\quad - E
\end{aligned}$$

folgenden Werte für E, d. h. es ist $E = E_I$ zu nehmen. Nunmehr wollen wir aus den zwei Formeln

$$\begin{aligned}
\delta_I &= A_I + B_I \sin\zeta' + C_I \cos\zeta' + D_{II} \sin 2\zeta' + E_I \cos 2\zeta' \\
\delta_{II} &= A_{II} + B_{II} \sin\zeta' + C_{II} \cos\zeta' + D_{II} \sin 2\zeta' + E_I \cos 2\zeta'
\end{aligned}$$

eine neue

$$\delta = \lambda\,\delta_I + \mu\,\delta_{II} \qquad (\lambda + \mu = 1)$$

mit der Bedingung bilden, daß die Quadratsumme der Fehler auf den acht Haupt- und Hauptzwischenkursen möglichst klein werde. Diese Summe

$$\Sigma(\lambda\,\delta_I + \mu\,\delta_{II} - (\lambda + \mu)\,\delta)^2$$

gibt auf den Hauptkursen, weil hier $\delta = \delta_I$ ist, den Anteil

$$\mu^2\,\Sigma(\delta_{II} - \delta_I)^2,$$

auf den Hauptzwischenkursen, weil hier $\delta = \delta_{II}$ ist, den Anteil

$$\lambda^2\,\Sigma(\delta_I - \delta_{II})^2.$$

Demnach muß $\lambda^2 + \mu^2$ möglichst klein, also $\lambda = \mu = {}^1/_2$ sein. Die beste fünfgliedrige Näherungsformel, abgeleitet aus den Deviationen auf den acht Haupt- und Hanptzwischenkursen ist demnach

$$\delta = \tfrac{1}{2}(A_I + A_{II}) + \tfrac{1}{2}(B_I + B_{II}) \sin \zeta' + \tfrac{1}{2}(C_I + C_{II}) \cos \zeta' + D_{II} \sin 2\zeta' + E_I \cos 2\zeta'.$$

Geht man gleich von den acht Gleichungen aus

$$\begin{aligned}
\delta_0 &= A \phantom{{}+S_4 B} + C \phantom{{}+D} + E \\
\delta_4 &= A + S_4 B + S_4 C + D \\
\delta_8 &= A + B \phantom{{}+S_4 C+D} - E \\
\delta_{12} &= A + S_4 B - S_4 C - D \\
\delta_{16} &= A \phantom{{}+S_4 B} - C \phantom{{}+D} + E \\
\delta_{20} &= A - S_4 B - S_4 C + D \\
\delta_{24} &= A - B \phantom{{}+S_4 C+D} - E \\
\delta_{28} &= A - S_4 B + S_4 C - D
\end{aligned}$$

und bestimmt die Koëffizienten A, B, C, D, E durch kleinste Fehlerquadratsummen, so erhält man, da $S_4^2 = {}^1/_2$ ist, ebenso

$$8A = 4A_I + 4A_{II},\ 4B = 2B_I + 2B_{II},\ 4C = 2C_I + 2C_{II}.$$
$$4D = 4D_{II},\ 4E = 4E_I.$$

Will man die acht gegebenen Deviationen voll ausnutzen, so muß man die Koëffizienten der neungliedrigen Näherungsformel, außer H, daraus berechnen. Durch Zusammensetzen der acht Gleichungen:

$$(\delta = \delta_{4h},\ \zeta' = h \cdot 45^0,\ h = 0, 1, 2, \cdots, 7)$$
$$\delta = A + B \sin \zeta' + C \cos \zeta' + D \sin 2\zeta' + E \cos 2\zeta' + F \sin 3\zeta' + G \cos 3\zeta' + H \sin 4\zeta' + K \cos 4\zeta'$$

erhält man, wenn man sin h Strich $= S_h$ setzt:

$$\begin{aligned}
&A = \delta_0^{000},\quad B = S_4\,\delta_4^{10} + \tfrac{1}{2}\delta_8^{1},\quad C = S_4\,\delta_4^{11} + \tfrac{1}{2}\delta_0^{1} \\
D = \delta_4^{01},\quad &E = \delta_0^{01},\quad F = S_4\,\delta_4^{10} - \tfrac{1}{2}\delta_8^{1},\quad G = -S_4\,\delta_4^{11} + \tfrac{1}{2}\delta_0^{1} \\
&K = \delta_0^{010}
\end{aligned}$$

Hier bedeuten

$$\delta_i^0,\ \delta_i^1;\quad \delta_i^{00},\ \delta_i^{01};\quad \delta_i^{10},\ \delta_i^{11};\quad \delta_i^{000},\ \delta_i^{001};\cdots$$

die halbe Summe und Differenz von bzw.

$$\delta_i, \delta_{i+16}; \quad \delta_i^0, \delta^0_{i+8}; \quad \delta_i^1, \delta^1_{i+8}; \quad \delta_i^{00}, \delta^{00}_{i+4};$$

usw. Die Werte für A, B, C, D, E sind dieselben, wie oben.

Ebenso erhält man aus den Deviationen auf den acht Nebenzwischenkursen NNO, ONO, OSO, SSO, SSW, WSW, WNW, NNW für die Koëffizienten der neungliedrigen Näherungsformel außer K die Werte:

$$\begin{array}{lll} A = \delta_2^{000} & 2B = S_2(\delta_2^1 + \delta_{14}^1) + S_6(\delta_6^1 + \delta_{10}^1) & D = S_4 \cdot \delta_2^{010} \\ & 2C = S_6(\delta_2^1 - \delta_{14}^1) + S_2(\delta_6^1 - \delta_{10}^1) & E = S_4\, \delta_2^{011} \\ & 2F = S_6(\delta_2^1 + \delta_{14}^1) - S_2(\delta_6^1 + \delta_{10}^1) & H = \delta_2^{101} \\ & 2G = S_2(\delta_2^1 - \delta_{14}^1) - S_6(\delta_6^1 - \delta_{10}^1). & \end{array}$$

Sind die 16 Deviationen

$$\delta_{2h} \qquad (h = 0, 1, \cdot\cdot, 15)$$

gegeben, so findet man A, B, C, D, E, F, G als Mittel der für $h = 0, 2, 4, \ldots, 14$ und für $h = 1, 3, 5, \ldots, 15$ gefundenen Werte, während

$$H = \delta_2^{101}, \quad K = \delta_0^{010}$$

zu nehmen ist.

Für siebengliedrige Näherungsformeln führt man zweckmäßig statt der Teilung in Striche zu $11^1/_4{}^0$ die Teilung in Stunden zu 15^0 ein (s. z. B. Corbara a. a. O. S. 71). Bezeichnet man jetzt die Deviation und den sinus zu $h \,.\, 15^0$ mit δ_h und $\mathfrak{S}_h$, so erhält man aus den δ_h ($h = 0, 4, 8, 12, 16, 20$) die Werte:

$$\begin{aligned} 3A &= \delta_0^0 + \delta_4^0 + \delta_8^0 \\ 3B &= 2\,\mathfrak{S}_4(\delta_4^1 + \delta_8^1) \\ 3C &= 2\,\delta_0^1 + 2\,\mathfrak{S}_3(\delta_4^1 - \delta_8^1) \\ 3D &= 2\,\mathfrak{S}_4(\delta_4^0 - \delta_8^0) \\ 3E &= 2\,\delta_0^1 - 2\,\mathfrak{S}_4(\delta_4^0 + \delta_8^0) \\ 3G &= 2(\delta_0^1 + \delta_4^1 + \delta_8^1) \end{aligned}$$

und aus den δ_h ($h = 2, 6, 10, 14, 18, 22$) die Werte:

$$\begin{aligned} 3A &= \delta_2^0 + \delta_{10}^0 + \delta_{18}^0 \\ 3B &= 2\,\mathfrak{S}_2(\delta_2^1 + \delta_{10}^1) - 2\,\delta_{18}^1 \\ 3C &= 2\,\mathfrak{S}_4(\delta_2^1 - \delta_{10}^1) \\ 3D &= 2\,\mathfrak{S}_4(\delta_2^0 - \delta_{10}^0) \\ 3E &= 2\,\mathfrak{S}_2(\delta_2^0 + \delta_{10}^0) + 2\,\delta_{18}^1 \\ 2F &= 2\,(\delta_2^1 + \delta_{10}^1 + \delta_{18}^1) \end{aligned}$$

Die Mittel von A, B, C, D, E aus beiden Systemen, dazu der Wert von F aus dem zweiten, von G aus dem ersten ergeben die besten Werte von A, B, C, D, E, F, G, wenn die 12 Deviationen δ_h $(h = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22)$ bekannt sind.

Allgemein sind von der $(2m + 1)$ gliedrigen Näherungsformel

$$\delta = \sum_n B_n \sin n\,\zeta' + C_n \cos n\,\zeta' \qquad (n = 0, 1, \cdot\cdot, m)$$

wenn die Deviationen δ_h auf $2m$ Kp. Kursen

$$\zeta' = h\frac{\pi}{m}$$

gegeben sind, einmal für $h = 0, 1, 2, \ldots, 2m-1$ die Koëffizienten außer B_m, ein zweites Mal für $h = {}^1/_2, {}^3/_2, {}^5/_2, \ldots, 2m - {}^1/_2$ die Koëffizienten außer C_m, wie folgt zu bestimmen.

Die Gleichungen

$$\delta_h = \sum_n B_n \sin\frac{h\,n\,\pi}{m} + C_n \cos\frac{h\,n\,\pi}{m}$$

ergeben zusammengesetzt mit

$$\sin\frac{h\,n'\,\pi}{m}, \text{ bzw. } \cos\frac{h\,n'\,\pi}{m}:$$

$$\sum_h \delta_h \sin\frac{h\,n'\,\pi}{m} = \sum_n B_n \sum_h \sin\frac{h\,n\,\pi}{m}\sin\frac{h\,n'\,\pi}{m} + C_n \sum_h \cos\frac{h\,n\,\pi}{m}\sin\frac{h\,n'\,\pi}{m}$$

$$\sum_h \delta_h \cos\frac{h\,n'\,\pi}{m} = \sum_n B_n \sum_h \sin\frac{h\,n\,\pi}{m}\cos\frac{h\,n'\,\pi}{m} + C_n \sum_h \cos\frac{h\,n\,\pi}{m}\cos\frac{h\,n'\,\pi}{m}$$

Summen und Differenzen der Koëffizienten von B_n, C_n werden:

$$\sum_h \sin\frac{h\,n\,\pi}{m}\cos\frac{h\,n'\,\pi}{m} \pm \cos\frac{h\,n\,\pi}{m}\sin\frac{h\,n'\,\pi}{m} = \sum_h \sin\frac{h\,(n \pm n')\,\pi}{m} = 0$$

$$\sum_h \cos\frac{h\,n\,\pi}{m}\cos\frac{h\,n'\,\pi}{m} \mp \sin\frac{h\,n\,\pi}{m}\sin\frac{h\,n'\,\pi}{m} = \sum_h \cos\frac{h\,(n \pm n')\,\pi}{m} = 0 \text{ od. } 2\,m,$$

letzteres für $n - n' = 0$, denn es wird für $l \neq 0$

$$\sum_h \cos\frac{h\,l\,\pi}{m} + i\sin\frac{h\,l\,\pi}{m} = \sum_h e^{\frac{h\,l\,\pi\,i}{m}} = \left(e^{2\,l\,\pi\,i} - 1\right) : \left(e^{\frac{l\,\pi i}{m}} - 1\right)$$

$$\text{bzw. } e^{\frac{l\,\pi\,i}{2\,m}}\left(e^{2\,l\,\pi\,i} - 1\right) : \left(e^{\frac{l\,\pi\,i}{m}} - 1\right),$$

jenachdem $h = 0, 1, \ldots$ oder $h = {}^1/_2, {}^3/_2, \ldots$ ist; also gleich Null.

Also erhält man die zwei Auflösungs-Systeme:

$$m\,B_n = \sum_h \delta_h \sin\frac{h\,n\,\pi}{m}$$

$$m\,C_n = \sum_h \delta_h \cos\frac{h\,n\,\pi}{m}, \text{ bzw. } 2\,m\,C_0 = \Sigma\,\delta_h.$$

Aus beiden erhält man durch Mittelbildung die Auflösung:

$$2\,m\,B_n = \sum_h \delta_h \sin\frac{h\,n\,\pi}{m}$$

$$2\,m\,C_n = \sum_h \delta_h \cos\frac{h\,n\,\pi}{m}$$

$$4\,m\,A = \sum_h \delta_h,$$

wenn die $4\,m$ Deviationen δ_h ($h = 0, {}^1/_2, 1, {}^3/_2, \ldots, 2\,m - {}^1/_2$) gegeben sind. Die oben behandelten Fälle entsprechen den Werten $m = 1, 2, 3, 4$.

Die Werte der Koëffizienten hängen nicht von der Gliederzahl, sondern von der Deviationenzahl ab. Man wird also, wenn man die beste Näherungsformel aus den gegebenen Deviationen berechnen will, die Gliederzahl nicht von vornherein festsetzen, sondern die Koëffizienten

$$A,\ B_1,\ C_1,\ B_2,\ C_2,\ \ldots$$

soweit berechnen, als sie noch Werte bekommen, die nicht unterhalb der Größe der Beobachtungsfehler liegen.

Das Verfahren läßt sich leicht ausdehnen auf äquidistante Kurse

$$\alpha + \frac{h\,\pi}{m},$$

indem man alle $B_n \sin n\zeta' + C_n \cos n\zeta'$ in die Form bringt $B'_n \sin n(\zeta' - \alpha) + C'_n \sin n(\zeta' - \alpha)$, wo nunmehr $\zeta' - \alpha$ die Werte

$$\frac{h\,\pi}{m}$$

annimmt.

Verwendet man nur Deviationen auf vollen Strichen zu $11^1/_4{}^0$ oder auf vollen Stunden zu 15^0, so treten als Multi-

plikatoren nur die Zahlen $S_h = \sin h \cdot 11^1/_4{}^0$ bzw. die Zahlen $\mathfrak{S}_h = \sin h \cdot 15^0$ auf. Die Berechnung wird durch Multiplikationstafeln erleichtert:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	
1	0,20	0,38	0,56	0,71	0,83	0,92	0,98	1
2	0,39	0,77	1,11	1,41	1,66	1,85	1,96	2
3	0,59	1,15	1,67	2,12	2,49	2,77	2,94	3
4	0,78	1,53	2,22	2,83	3,33	3,70	3,92	4
5	0,98	1,91	2,78	3,54	4,16	4,62	4,90	5
6	1,17	2,30	3,33	4,24	4,99	5,54	5,88	6
7	1,37	2,68	3,89	4,95	5,82	6,47	6,87	7
8	1,56	3,06	4,44	5,66	6,65	7,39	7,85	8
9	1,76	3,44	5,00	6,36	7,48	8,31	8,83	9

	$\mathfrak{S}_1$	$\mathfrak{S}_2$	$\mathfrak{S}_3$	$\mathfrak{S}_4$	$\mathfrak{S}_5$	
1	0,26	0,50	0,71	0,87	0,97	1
2	0,52	1,00	1,41	1,73	1,93	2
3	0,78	1,50	2,12	2,60	2,90	3
4	1,04	2,00	2,83	3,46	3,86	4
5	1,29	2,50	3,54	4,43	4,83	5
6	1,55	3,00	4,24	5,20	5,80	6
7	1,81	4,50	4,95	6,06	6,76	7
8	2,07	5,00	5,66	6,93	7,73	8
9	2,33	5,50	6,36	7,79	8,69	9

Die Winkel $h \cdot 15^0$ sind zu Peilungszwecken ebenso brauchbar, wie die Winkel $h \cdot 11^1/_4{}^0$, da man sich dieselben mittels eines gleichseitigen Dreiecks (z. B. aus der Lotleine) an Deck anmerken kann, wie Peilungslinien für Heck-, Bug-, Dwars-, Vierstrich-Peilungen durch die Aufbauten geliefert werden. So lange Peilungslinien sind genauer, wie die kurzen am Steuer- oder Peil-Kompaß.

Weniger bekannt als die Methode der kleinsten Quadrate ist eine zweite Methode[1]), die zunächst an den acht Gleichungen S. 71 erklärt sei. Man erhält jeden Koëffizienten, indem man wie bei den vier Hauptkursen alle Gleichungen mit solchen Zeichen genommen addiert, daß der betr. Koëffizient nur positive Faktoren bekommt. Also:

1) „La méthode de Mayer" nennt sie Guyou i. d. Annales hydrographiques 15, 1893, S. 173.

$$
\begin{aligned}
8\,A &= \delta_0 + \delta_4 + \delta_8 + \delta_{12} + \delta_{16} + \delta_{20} + \delta_{24} + \delta_{28}\\
(2 + 2\,S_4)\,B &= \delta_4 + \delta_8 + \delta_{12} - \delta_{20} - \delta_{24} - \delta_{28}\\
(2 + 2\,S_4)\,C &= \delta_0 + \delta_4 - \delta_{12} - \delta_{16} - \delta_{20} + \delta_{28}\\
4\,D &= \delta_4 - \delta_{12} + \delta_{20} - \delta_{28}\\
4\,E &= \delta_0 - \delta_8 + \delta_{16} - \delta_{24}.
\end{aligned}
$$

Dies sind die Formeln die „Der Kompaß an Bord" 1889, S. 114 angibt, ohne Begründung und mit Druckfehlern in der Formel für D, nicht im Zahlenbeispiel. Nach demselben Verfahren berechnet Faye (a. a. O. S. 201) eine fünfgliedrige Formel aus den Deviationen bei den 32 Kursen $\zeta' = h \cdot 11^1/_4{}^0$ des Trident (Admiralty Manual). Faye hebt die Einfachheit der Rechnung hervor, da die sonst nötigen Multiplikationen fortfallen. Aber diese Einfachheit hört bei mehr als fünf Gliedern auf, wie auch Faye nur fünf Glieder so, die sextantalen Glieder

$$F \sin 3\,\zeta' + G \cos 3\,\zeta'$$

aus den verbliebenen Deviations-Resten berechnet. Im Allgemeinen kann man zwar durch dieses Verfahren durch bloße Addition der mit passenden Zeichen genommenen Gleichungen soviel Gleichungen bilden, als Koëffizienten zu bestimmen sind, aber diese Gleichungen enthalten zunächst nicht, wie bei der fünfgliedrigen Formel, immer bloß einen dieser Koëffizienten. Auch bliebe festzustellen, welcher Minimaleigenschaft eine so berechnete Formel genügt.

Immerhin bleibt dieses Verfahren besonders dann beachtenswert, wenn die Deviationen unregelmäßig verteilt sind, da dann die Berechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate umständlich wird. Diese ergibt nur für äquidistante Kurse einfache Rechnungsschemata. Sind die Kurse zwar nicht äquidistant, aber hinreichend dicht, so leitet man aus den beobachteten Deviationen zunächst durch Interpolation die Deviationen auf äquidistanten Kursen her. Diese Interpolationen führt man am einfachsten graphisch, z. B. vermittelst des weiter unten beschriebenen Napier-Diagramms aus.

Ohne die Methode der kleinsten Quadrate kommt man aus, wenn die Anzahl der gegebenen Deviationen der Anzahl der gesuchten Koëffizienten gleich ist. So bestimmt Weyer i. d. Ann. d. Hydrogr. 17, 1882, S. 315 für den Warrior, für welchen der Admiralty Manual die Deviationen auf 48 gut verteilten Kursen angibt, 4 fünfgliedrige Näherungsformeln aus den Deviationen erstens auf den fünf äquidistanten Kursen:

$$h \cdot 36^0 = h \cdot \frac{\pi}{5} \qquad (h = 0, 2, 4, 6, 8)$$

zweitens auf den Kursen: $(h + 1)\, 36^0$, drittens auf den Kursen $(h + {}^1/_2)\, 36^0$, viertens auf den Kursen $(h + {}^3/_2)\, 36^0$. Aus den vier Formeln bildet er dann das Mittel und wendet die Methode der kleinsten Quadrate nur an, um die sextantalen und oktantalen Glieder zu berechnen.

Ebenso könnte man die neungliedrige Formel berechnen aus den Deviationen auf den neun äquidistanten Kursen

$$h \cdot 20^0 = h \cdot \frac{\pi}{9}$$

$(h = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16)$. Diese Kurse verwendet z. B. Ripoll i. d. Revue maritime 176, 1908, S. 11, aber nicht zur Berechnung einer neungliedrigen Näherungsformel, sondern zur Berechnung der exakten Formel. Er verwendet auch nicht Deviationen, sondern durch Nadelschwingungen ermittelte Horizontalkraftverhältnisse

$$\frac{H'}{H}$$

eine bemerkenswerte Abweichung von der sonst fast allein üblichen Deviationsbeobachtung (s. o.).

Interpoliert man eine Deviations-Tafel graphisch, so kennt man für jeden Kurs ζ' die Deviation $\delta\zeta'$ und es steht nichts im Wege in den Formeln S. 74 die Zahl m beliebig groß zu wählen. Setzt man also

$$\frac{h\,\pi}{m} = \zeta', \quad \frac{\pi}{2\,m} = d\,\zeta',$$

so gehen für $m \rightarrow \infty$ die Summen in Integrale über und man erhält:

$$2A = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \delta_{\zeta'} d\zeta'$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \delta_{\zeta'} \sin n\zeta' d\zeta'$$

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \delta_{\zeta'} \cos n\zeta' d\zeta'.$$

Die Integrale kann man durch mechanische Integratoren[1]) ermitteln. Den so zu berechnenden Koëffizienten kommen die aus den entsprechenden Summenformeln hervorgehenden um so näher, je kleiner das Intervall

$$\frac{\pi}{2m}$$

genommen wird.

20. Vergleich der Formeln mit der Erfahrung.

Damit eine Funktion in eine Fourier-Reihe entwickelbar ist, müssen gewisse Voraussetzungen erfüllt sein. Insbesondere muß zu jedem Wert der Variablen ein Wert der Funktion gehören. Für die Funktion δ von der Variablen ζ' ist diese Voraussetzung nicht ohne Weiteres erfüllt. Schon für den Fall, daß die Abhängigkeit der Deviation δ vom Kp. Kurs ζ' durch die exakte Formel gegeben ist, kann es eintreten, daß bei einem Rundschwojen ζ' die Werte von 0^0 bis 360^0 nur mit Auslassung eines bestimmten Sektors annimmt. Dann besteht keine Fourier-Reihe, also auch keine Näherungsformel, da jede solche nur eine abgebrochene

1) Enc. d. math. Wiss, II, I, I, S. 133.

Fourier-Reihe mit verschlechterten Koëffizienten ist. Die Rechnungen des vorigen Abschnitts liefern aber in jedem Fall solche Näherungsformeln. Um einer solchen trauen zu können, ist also mindestens nötig, daß kein von ζ'-Werten freier Sektor vorhanden ist. Auch bei dichten Deviationsbeobachtungen kann ein solcher Sektor, wenn er klein ist, der Beobachtung entgehen. Man beachtet dies sonst nicht, obwohl die Deviationsunterschiede beim schnellen Schwojen rechts und links herum nicht nur vom trägen Magnetismus, sondern auch von einem solchen Sektor herrühren können.

Im Admiralty Manual findet sich die Behauptung, daß die fünfgliedrige Näherungsformel brauchbar sei, wenn die Deviationen einige 20^0 nicht überschritten. Diese Behauptung findet sich seitdem an vielen Stellen, z. B. bei Rottok, a.a.O. S. 43, im Lehrb. d. Nav., hrsg. v. Reichsmarineamt, I, 1906, S. 133, in Corbara, Trattato, 1907, S. 66, in der Enc. a.a.O. S. 337 mit dem einschränkenden Zusatz, daß A und E klein, D kleiner als 5^0 sein müßte und man nur eine Genauigkeit von $0{,}5^0$ anstrebt. Aber schon Faye hatte gezeigt (Astronomie nautique, 1880, S. 201), daß die im Adm. Man. mitgeteilten Deviationen des engl. Panzers Trident, die sich von ihrem Mittel um $\pm 22^0{,}5$ entfernen, durch eine fünfgliedrige Näherungsformel

$$\delta = -12' - 21^0\,49' \sin\zeta' + 3^0\,27' \cos\zeta' + 3^0\,42' \sin 2\zeta' + 13' \cos 2\zeta'$$

nur bis auf Fehler, die $\pm 1^0$ übersteigen, dargestellt werden. Erst bei einer siebengliedrigen Näherungsformel sanken die Fehler auf das Maaß der Beobachtungsfehler.

Ebenso hatte Weyer (Ann. d. Hydrogr. 17, 1889, S. 315) durch eine sehr gründliche Rechnung gezeigt, daß die 48 vom Adm. Man. für den engl. Panzer Warrior angegebenen Deviationen, die sich von ihrem Mittel allerdings um $\pm 27^0{,}5$ entfernen, durch eine fünfgliedrige Näherungsformel nur bis auf Fehler $\pm 3^0\,11'$, vom Mittel ab gerechnet, darstellen lassen. Erst bei einer neungliedrigen Näherungsformel sanken die Fehler auf ein zulässiges Maaß, außer bei dem Kurs $\zeta' = 154^0\,40'$, bei dem Weyer eine Störung vermutet.

Guyou behandelt (Annales hydrographiques, 15, 1893, S. 173) außer Trident und Warrior zwei französische Panzer Amiral-Baudin und Le Requin mit Kompassen unter Panzer. Bei den letzteren sind im Gegensatz zu den ersteren nicht B und C sondern D und E überwiegend. Bei Le Requin haben A und E infolge nicht regulärer Kompaß-Aufstellung die beträchtlichen Werte $4^0 23'$ uud $5^0 56'$. Die Fehler einer fünfgliedrigen Näherungsformel erreichten $\pm 3^0,5$, obwohl die Deviationen $\pm 20^0$ nicht überschritten. Mit einer neungliedrigen Formel, berechnet aus 16 äquidistanten Kp.-Kursen kommt Guyou in allen Fällen aus. Für den Trident ergibt sich in Bestätigung der von Faye berechneten siebengliedrigen Formel, daß H und K sehr klein sind.

Man wird also zweckmäßig eine neungliedrige Formel berechnen und die oktantalen bzw. auch die sextantalen Glieder nur weglassen, wenn die Koëffizienten H und K (wie beim Trident) bzw. auch die Koëffizienten F und G klein sind. Sich von vornherein auf die fünfgliedrige Formel zu beschränken, ist nicht angängig.

Bei Handelsschiffen überschreitet D manchmal den Wert 9^0 und hat im Mittel etwa die Hälfte dieses Wertes, wie die Tafeln in „Der Kompaß an Bord", 1889, S. 130ff. erkennen lassen. Hat B, was nichts ungewöhnliches ist, einen Bogenwert von etwa $^1/_4$, so wird $F = {}^1/_2\,(B\,D - C\,E)$ etwa $0,5^0$; die fünfgliedrige Näherungsformel also nicht anwendbar. In dem Beispiel, das Der Kompaß an Bord S. 114 gibt, ist $A = 0$, $B = 12,8^0$, $C = -0,7^0$, $D = 4,4^0$, $E = -0,2^0$, also F etwa $0,5^0$, wird also zu Unrecht vernachlässigt, während G, H, K und die höheren Koëffizienten wie beim Trident vernachlässigt werden können. Dasselbe gilt für das Beispiel bei Rottok a. a. O. S. 74, wo F etwa $0,77^0$ wird.

Bei Kriegsschiffen sind Werte $D > 20^0$ nicht selten und B kann den Bogenwert 1 erreichen. Man vergleiche hierzu die Tafeln für A, B, C, D, E, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ bei Corbara S. 78, 79, 93, 97. Bei den dort aufgeführten Kompassen beträgt F oft mehrere Grade. In einem Fall ist,

$$A = -1^0 12',\ B = -26^0 18',\ C = 4^0 28',\ D = 25^0 49',\ E = -1^0 10'$$

also F fast 6^0. Die Beschränkung auf eine fünfgliedrige Näherungsformel ist irreführend.

Die Prüfung der Näherungsformeln hat praktischen Wert, die Prüfung der exakten Formel hat theoretischen Wert für die Beurteilung des Poissonschen Satzes, aus dem die exakte Formel folgt. Faye berechnet (a. a. O. S. 219) für den Trident, Weyer (a. a. O. S. 327) für den Warrior eine exakte Formel. Beim Trident bleiben die Fehler unter $\pm {}^1/_2{}^0$, beim Warrior überschreiten sie einige Male $\pm 1^0$ und haben dieselbe Quadratsumme, wie die neungliedrige Näherungsformel, während sie bei der siebengliedrigen um fast die Hälfte größer, bei der fünfgliedrigen fast vier mal so groß ist. Guyou (a. a. O. S. 174—177) vergleicht die von ihm für die zwei englischen und zwei französischen Panzer abgeleiteten neungliedrigen Näherungsformeln mit denjenigen neungliedrigen Formeln, die sich aus der Entwicklung von δ aus der exakten Formel in eine Fourier-Reihe ergeben (S. 38). Für diese ist streng

$$H = \tfrac{1}{2}(D^2 - E^2), \quad K = DE,$$

(S. 36) und angenähert

$$F = \tfrac{1}{2}(BD - CE), \quad G = \tfrac{1}{2}(CD + BE),$$

(S. 41). Die hiernach berechneten Werte von F, G, H, K stimmen bei allen vier Panzern bis auf wenige Minuten mit denjenigen Werten von F, G, H, K überein, die aus den 16 Deviationen auf den Kursen $h \cdot 22{,}5^0$ nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet waren. Die neungliedrigen Formeln

$$\begin{aligned}\delta = A &+ B \sin \zeta' + C \cos \zeta' + D \sin 2\zeta' + E \cos 2\zeta' \\ &+ {}^1/_2 (BD - CE) \sin 3\zeta' + {}^1/_2 (CD + BE) \cos 3\zeta' \\ &+ {}^1/_2 (D^2 - E^2) \sin 4\zeta' + DE \cos 4\zeta'\end{aligned}$$

gaben die 16 gegebenen Deviationen beim Amiral-Baudin mit Höchstfehlern $\pm 60'$, beim Le Requin mit Höchstfehlern $\pm 80'$ wieder. Da mithin höhere als oktantale Glieder zu vernachlässigen sind, kann man aus einer so zu einer neungliedrigen ergänzten fünfgliedrigen Formel die Koëffizienten

𝔄, 𝔇, 𝔈 nach den strengen Formeln von S. 36 und 𝔅, ℭ nach den strengen Formeln von S. 42 unter Vernachlässigung höherer als oktantaler Koëffizienten mit genügender Annäherung berechnen, wobei H und K nicht zur Verwendung kommen. Wenn man aber schon aus einer fünfgliedrigen Näherungsformel 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, 𝔈 durch Näherungsformeln berechnet (s. z. B. Lehrb. d. Nav. a. a. O.; Rottok a. a. O.; Corbara a. a. O.), so erhält man eine exakte Formel, die noch schlechter ist als die fünfgliedrige Näherungsformel. Eine exakte Formel hat aber nur Zweck, wenn dem Nachteil, daß sie die Deviation nicht explizit liefert, die größere Genauigkeit gegenüber steht. Eine schlechte exakte Formel erschwert es, ein Urteil über die Tragweite der exakten Formel zu gewinnen.

Was bedeutet gute Übereinstimmung der exakten Formel mit der Erfahrung? Da die exakte Formel aus dem Quotienten der beiden ersten Poissonschen Gleichungen folgt, ergibt sich für die Gültigkeit dieser beiden Gleichungen eine teilweise, für die dritte Gleichung gar keine Bestätigung. Es wären, wie in Abschnitt 16 und 17 erörtert, Beobachtungen bei Lage oder in verschiedenen mgn. Breiten nötig. Der einfache Analogieschluß von der exakten Formel auf den Poissonschen Satz ist nicht beweiskräftig, denn vertikal ist die Verteilung der ablenkenden Massen wesentlich anders, wie horizontal. Massen mit großer Horizontalkomponente liegen allseitig und meist fern vom Kompaß; Massen nahe dem Kompaß mit großer Vertikalkomponente liegen meist nur einseitig, nämlich unter ihm. Diese, z. B. ein fester oder flüchtiger Magnetstab in der Z-Axe, beeinflussen aber die Deviationen auf ebenem Kiel nicht, sondern erst bei Lage. Wir können also nur sagen: Die Erfahrung spricht nicht gegen die exakte Formel, wenn die Entfernungen der horizontalen Eisenmassen vom Kompaß groß sind. Die strengere Fassung dieses Satzes wird sich weiter unten ergeben. Eine Ergänzung nach der negativen Seite bedeuten die Versuche von Ripoll (Revue maritime 176, 1908, S. 12.) Erstens prüft Ripoll die mit der exakten gleichbedeutende Formel

$$\operatorname{tg}\zeta' = \frac{(1-\mathfrak{D})\sin\zeta - (\mathfrak{E}+\mathfrak{A})\cos\zeta - \mathfrak{C}}{(1+\mathfrak{D})\cos\zeta - (\mathfrak{E}-\mathfrak{A})\sin\zeta + \mathfrak{B}},$$

indem er als ablenkenden Körper einen in der XY-Ebene in zweiter Hauptlage liegenden Flinders-Stab in 21 cm kürzesten Abstand von O nimmt. Er bemerkt, das die Übereinstimmung wohl besser wäre, wenn der Abstand hätte größer genommen werden können. In Übereinstimmung mit der Behauptung, daß die ablenkenden Massen fern sein müssen. Für Stäbe gilt freilich der Poissonsche Satz, auch wenn sie nahe liegen. Aber der von Ripoll gebrauchte Stab war kein Stab, sondern eine Walze von 60 cm Länge und 7,8 cm Dicke.

Zweitens prüft Ripoll (S. 15) dieselbe Formel an der Deviations-Tafel des Fleurus, die sich in Guyou, Manuel des instruments nautiques, befindet. Es ergiebt sich eine wenig befriedigende Übereinstimmung, die Fehler wachsen bis $1^0,8$. Der Grund ist teils in Beobachtungsfehlern, wie Ripoll vermutet, teils in den starken eisernen Aufbauten des Fleurus zu suchen, also in zu nahen horizontal ablenkenden Eisenmassen. Früher schon fand Jeanniot (Revue maritime, 154, 1902, S. 1199) bei demselben Fleurus einen erheblichen Krängungsfaktor, der durch die D-Kugeln (Abschnitt 30) noch von 1^0 auf $1,7^0$ wuchs. Jeanniot erwähnt, daß Fleurus ziemlich rank ist und geringe Krängungen große Deviationsänderungen bewirken. Das zieht natürlich Beobachtungsfehler nach sich.

21. Graphische Methoden.

Man kann die entsprechenden Werte von δ und ζ' in einer Deviationstafel oder durch eine dem Gesetz zwischen δ und ζ' gemäße Formel darstellen. Ebenso kann man den Zusammenhang zwischen δ und ζ' durch eine empirische oder durch eine dem Gesetz gemäße Kurve darstellen. Von empirischen Darstellungen ist das Napier-Diagramm (Abschnitt 32) die wichtigste. Der exakten Formel entsprechende

Darstellungen werden in dem vorliegenden Abschnitt behandelt.

Durch Komposition der beiden Gleichungen ($\zeta + \zeta' = \sigma$ gesetzt):

$$0 = -\sin\delta + \mathfrak{A}\cos\delta + \mathfrak{B}\sin\zeta' + \mathfrak{C}\cos\zeta' + \mathfrak{D}\sin\sigma + \mathfrak{E}\cos\sigma$$

$$\frac{H'}{\lambda H} = \cos\delta + \mathfrak{A}\sin\delta + \mathfrak{B}\cos\zeta' - \mathfrak{C}\sin\zeta' + \mathfrak{D}\cos\sigma - \mathfrak{E}\sin\sigma$$

(S. 30) mit i und 1 erhält man die Gleichung

$$\frac{H'}{\lambda H} = (1 + i\mathfrak{A})e^{-i\delta} + (\mathfrak{D} + i\mathfrak{E})e^{i\sigma} + (\mathfrak{B} + i\mathfrak{C})e^{i\zeta'},$$

die man auch in die folgenden Formen setzen kann:

$$\frac{H'}{\lambda H}e^{i\delta} = (1 + i\mathfrak{A}) + (\mathfrak{B} + i\mathfrak{C})e^{i\zeta} + (\mathfrak{D} + i\mathfrak{E})e^{2i\zeta}$$

$$\frac{H'}{\lambda H}e^{-i\zeta'} = (1 + i\mathfrak{A})e^{i\zeta} + (\mathfrak{B} + i\mathfrak{C}) + (\mathfrak{D} + i\mathfrak{E})e^{i\zeta}$$

$$\frac{H'}{\lambda H}e^{-i\sigma} = (1 + i\mathfrak{A})e^{-2i\zeta} + (\mathfrak{B} + i\mathfrak{C})e^{-i\zeta} + (\mathfrak{D} + i\mathfrak{E})$$

Diese Gleichungen besagen: Durch Zusammensetzung von drei Vektoren $1 + i\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} + i\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D} + i\mathfrak{E}$, so daß 1 und $\mathfrak{B}$ den Winkel ζ, ebenso $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{D}$ den Winkel ζ bilden, entsteht ein Viereck, dessen Schlußseite die Länge

$$\frac{H'}{\lambda H}$$

hat und bzw. die Winkel δ mit 1, $-\sigma$ mit $\mathfrak{D}$, $-\zeta'$ mit $\mathfrak{B}$ bildet. (Abb. 15). Unwesentlich ist, in welcher Folge man die drei Vektoren zusammensetzt, welchen der drei Vektoren man festhält, während man die beiden andern aus ihrer Anfangslage ($\zeta = 0$) um die Winkel ζ, 2ζ (erste Gleichung), ζ, $-\zeta$ (zweite Gleichung), $-\zeta$, -2ζ (dritte Gleichung) dreht. Hält man z. B. $1 + i\mathfrak{A}$ fest, dreht $\mathfrak{B} + i\mathfrak{C}$ um den Anfang von $1 + i\mathfrak{A}$ um den Winkel ζ, $\mathfrak{D} + i\mathfrak{E}$ um das Ende von $1 + i\mathfrak{A}$ um den Winkel 2ζ, so hat die Schlußseite RS des Vierecks die Länge

$$\frac{H'}{\lambda H}$$

(relative Richtkraft) und den Winkel δ gegen die reelle Axe. (Abb. 15).

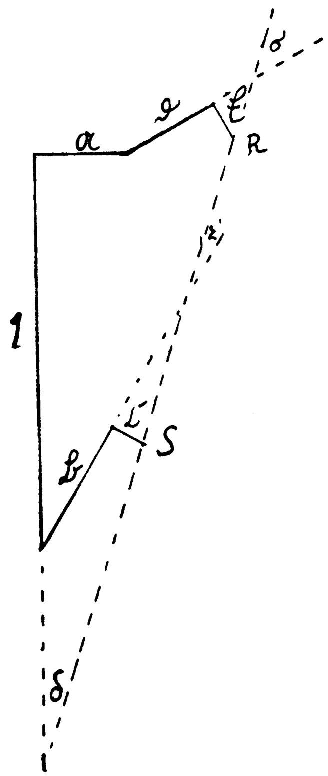


Abb. 15

Da die beiden in Betracht kommenden Drehwinkel immer in sehr einfacher Beziehung zu einander stehen, kann man die Zeichnung durch einfache Mechanismen ersetzen (Dromoskope)[1]), die zu jedem ζ das zugehörige δ (oder ζ', oder σ) liefern, oder umgekehrt.

Trägt man die Schlußseiten RS von einem Koordinatenanfang in den Richtungen δ (bzw. ζ', bzw. σ) an, so erhält

1) Enc. a. a. O. S. 352: E. Fournier, Déviations des compas, Paris 1873. E. Gelcich i. d. Ztschr. f. Instrumentenkunde 3, 1883, S. 345. Kérilles-Calloch, Revue maritime 101, 1889, S. 455. F. Paugger, Lehrb. d. terr. Teiles d. Naut. Triest 1874 (2. Aufl.).

man Kurven, die den Zusammenhang zwischen ζ einerseits und δ (bzw. ζ', bzw. σ) andrerseits vermitteln. Solche Kurven heißen Dygogramme[1]). (Dynamo-gonio-gramme).

Es gibt also nur 3 solche Dygogramme.

Die rechtwinkligen Koordinaten des ersten werden als Funktionen von ζ:

$$\frac{H'}{\lambda H}\cos\delta = 1 + \mathfrak{B}\cos\zeta - \mathfrak{C}\sin\zeta + \mathfrak{D}\cos 2\zeta - \mathfrak{E}\sin 2\zeta$$

$$\frac{H'}{\lambda H}\sin\delta = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}\sin\zeta + \mathfrak{C}\cos\zeta + \mathfrak{D}\sin 2\zeta + \mathfrak{E}\cos 2\zeta.$$

Dieses Dygogramm wird also durch eine epicyklische Bewegung erzeugt, bei der das Verhältnis der beiden Winkelgeschwindigkeiten $2:1$ ist: es ist die Pascalsche Schnecke, die bekanntlich zugleich Kreis-Konchoide ist. Der Erzeugerkreis hat den Mittelpunkt $(1, \mathfrak{A})$ und den Halbmesser

$$\sqrt{\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{E}^2};$$

die Verschiebungsstrecke ist

$$\sqrt{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2};$$

ihr Drehpol der Punkt Q (Abb. 16).

Die rechtwinkligen Koordinaten des dritten werden

$$\frac{H'}{\lambda H}\cos\sigma = \mathfrak{D} + \mathfrak{B}\cos\zeta + \mathfrak{C}\sin\zeta + \cos 2\zeta + \mathfrak{A}\sin 2\zeta$$

$$-\frac{H'}{\lambda H}\sin\sigma = \mathfrak{E} + \mathfrak{C}\cos\zeta - \mathfrak{B}\sin\zeta - \sin 2\zeta + \mathfrak{A}\cos 2\zeta.$$

Dies Dygogramm geht also aus dem ersten Dygogramm durch Vertauschen von $\zeta, \delta, 1, \mathfrak{A}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ mit $-\zeta, -\sigma, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, 1, \mathfrak{A}$ hervor; ist also nichts neues. Durch diese Symmetrie der exakten Formel erhält man aus den Formeln für δ des Abschnitts 7 Formeln für σ.

---

1) Vgl. besonders den Adm. Man., ferner F. Lauffer, Graphische Lösung der Deviationsprobleme, Pola 1908; M. E. Guyou, Manuel des instruments nautiques, 2. éd. Paris 1907; S. W. B. Diehl, Pract. probl. and the compensation of the compas in the U. S. Navy, Washington 1893; Corbara a. a. O.

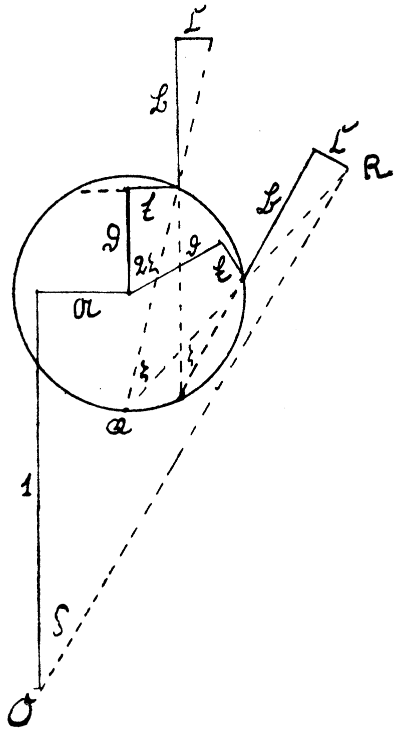


Abb. 16

Die rechtwinkligen Koordinaten des zweiten sind

$$\frac{H'}{\lambda H} \cos \zeta' = \mathfrak{B} + (1 + \mathfrak{D}) \cos \zeta + (\mathfrak{A} - \mathfrak{C}) \sin \zeta$$

$$-\frac{H'}{\lambda H} \sin \zeta' = \mathfrak{C} - (1 - \mathfrak{D}) \sin \zeta + (\mathfrak{A} + \mathfrak{C}) \cos \zeta \,.$$

Das Dygogramm ist also eine Ellipse (Abb. 17).

Setzen wir

$$\begin{aligned} x &= (1 + \mathfrak{D}) \cos \zeta + (\mathfrak{A} - \mathfrak{C}) \sin \zeta \\ y &= -(1 - \mathfrak{D}) \sin \zeta + (\mathfrak{A} + \mathfrak{C}) \cos \zeta, \end{aligned}$$

so folgt

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A} + \mathfrak{C})\, x - (1 + \mathfrak{D})\, y &= (\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{C}^2 + 1 - \mathfrak{D}^2) \sin \zeta \\ (1 - \mathfrak{D})\, x + (\mathfrak{A} - \mathfrak{C})\, y &= (\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{C}^2 + 1 - \mathfrak{D}^2) \cos \zeta \end{aligned}$$

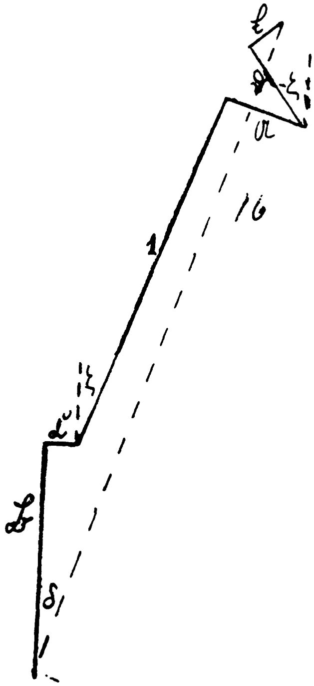


Abb. 17

also:

$$[(\mathfrak{A}+\mathfrak{E})\,x-(1+\mathfrak{D})\,y]^2+[(1-\mathfrak{D})\,x+(\mathfrak{A}-\mathfrak{E})\,y]^2=(1+\mathfrak{A}^2-\mathfrak{D}^2-\mathfrak{E}^2)^2$$

als Gleichung der Ellipse. Der Anfangspunkt der Schlußseite

$$\frac{H'}{\lambda H}\cos\zeta',\ -\frac{H'}{\lambda H}\sin\zeta'$$

hat die Koordinaten $-\mathfrak{B}$ und $-\mathfrak{C}$. Daß dieser Anfangspunkt nicht außerhalb der Ellipse liegt, gibt die schon oben (S. 33) gefundene Bedingung:

$$[(\mathfrak{A}+\mathfrak{E})\,\mathfrak{B}-(1+\mathfrak{D})\,\mathfrak{C}]^2+[(1-\mathfrak{D})\,\mathfrak{B}+(\mathfrak{A}-\mathfrak{E})\,\mathfrak{C}]^2\leqq(1+\mathfrak{A}^2-\mathfrak{D}^2-\mathfrak{E}^2)^2,$$

die erfüllt sein muß, damit zu jedem ζ' ein Wert ζ gefunden werden kann. Durch dies Dygogramm wird diese Bedingung anschaulich. Nur, wenn der Punkt $(-\mathfrak{B}, -\mathfrak{C})$ nicht im Äußeren der Ellipse liegt, schneidet jeder von ihm ausgehende Strahl die Ellipse in einem reellen Punkt, liefert also einen Wert ζ.

Dies Dygogramm entsteht, indem die Strecke $\sqrt{1+\mathfrak{A}^2}$ sich um den Anfangspunkt um den Winkel $+\zeta$ dreht und sich zugleich um deren Endpunkt die Strecke $\sqrt{\mathfrak{D}^2+\mathfrak{E}^2}$ um den Winkel $-\zeta$ dreht; der Endpunkt dieser Strecke beschreibt die Ellipse. Die Axen der Ellipse findet man als Parallelen zu den Winkelhalbierenden der Strecken $\sqrt{1+\mathfrak{A}^2}$ und $\sqrt{\mathfrak{D}^2+\mathfrak{E}^2}$. Die Länge der Halbaxen ist $\sqrt{1+\mathfrak{A}^2} \pm \sqrt{\mathfrak{D}^2+\mathfrak{E}^2}$. Die Ellipse wird also auch durch einen Punkt beschrieben, der eine Strecke gleich der Halbaxen-Summe (bzw. -Differenz) im Verhältnis der Halbaxen von innen (bzw. von außen) teilt, während die Endpunkte der Strecke die Axen beschreiben (Abb. 18). Das hierauf beruhende Dromoskop ist also nichts

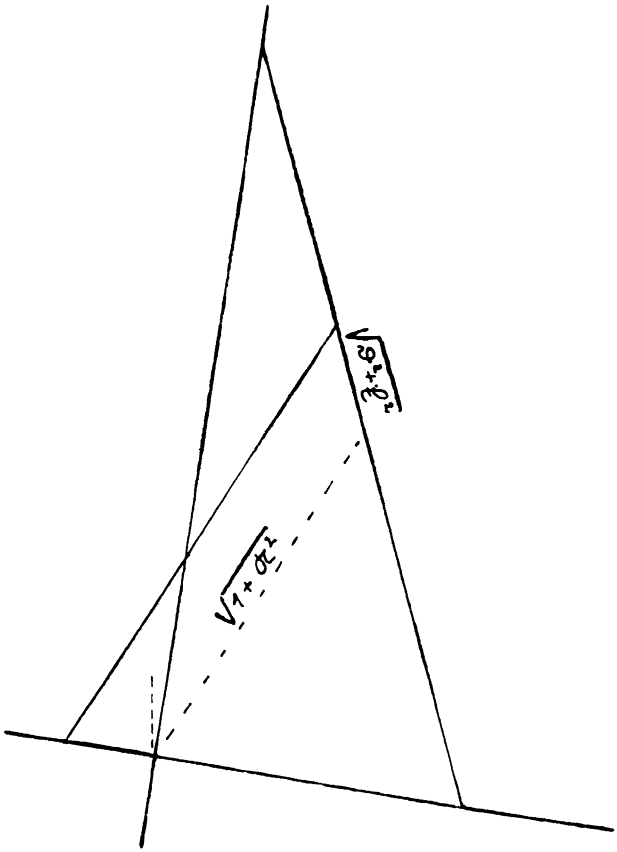


Abb. 18

anderes als der Ellipsenzirkel oder — den beweglichen und den festen Teil vertauscht — das Ovaldrehwerk des Lionardo da Vinci. (Vgl. des Verfs.: Konstruktionen und Approximationen, Leipzig 1911, S. 65 und S. 138.)

Bei bekannten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ wird durch ein Dygogramm oder ein Dromoskop zu jedem ζ das zugehörige

$$\zeta' \text{ und } \frac{H'}{\lambda H},$$

zu jedem ζ' das zugehörige ζ gefunden. Wichtiger sind die umgekehrten Aufgaben: aus mehreren gegebenen Werten

$$\zeta, \zeta', \frac{H'}{\lambda H}$$

die Koëffizienten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ oder einige von ihnen zu finden. Sind z. B. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gesucht, $\mathfrak{A}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ und zwei Paare ζ, ζ' gegeben, so zeichne man

$$(1+i\mathfrak{A})e^{-i\zeta}+(\mathfrak{D}+i\mathfrak{E})e^{i\zeta}$$

und ziehe vom Endpunkt von $\mathfrak{E}$ die Schlußseite in der durch δ gegebenen Richtung. Auf dieser liegt der Endpunkt von $\mathfrak{B}+i\mathfrak{C}$, der also durch eine zweite solche Konstruktion bestimmt ist (Abb. 15). Ebenso findet man $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$, wenn $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ gegeben sind; und ebenso findet man 1 und $\mathfrak{A}$, wenn die Verhältnisse von $\mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ gegeben sind. Die erste dieser drei Konstruktionen ist mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ von praktischer Bedeutung (Abschnitt 36).

Setzt man in der Reihenfolge

$$(1+i\mathfrak{A})+(\mathfrak{D}+i\mathfrak{E})e^{2i\zeta}+(\mathfrak{B}+i\mathfrak{C})e^{i\zeta}$$

den Streckenzug OR zusammen (Abb. 16), so erkennt man, daß R auf einer Graden liegt, die von dem Punkte $(1+i\mathfrak{A}) + (\mathfrak{D}-i\mathfrak{E})$ den Abstand $\mathfrak{B}$ hat, und auf einer Graden, die vom Punkte $(1+i\mathfrak{A}) - (\mathfrak{D}-i\mathfrak{E})$ den Abstand $\mathfrak{C}$ hat. R ist also der Scheitel eines rechten Winkels, dessen Schenkel zwei Kreise berühren, die bzw. um die Mittelpunkte $(1+i\mathfrak{A})$

$\pm(\mathfrak{D}-i\mathfrak{E})$ mit den Radien $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ geschlagen sind. Daraus ergibt sich die Lösung der Aufgabe:

Gegeben zu drei mgn. Kursen ζ die zugehörigen Kp. Kurse ζ' und Richtkräfte

$$\frac{H'}{\lambda H}$$

Gesucht die Koëffizienten der exakten Formel.

Man hat drei Punkte R, und, da $\mathfrak{B}$ immer den Winkel ζ mit der reellen Axe macht, hat man von jedem der beiden Kreise je drei Tangenten. Dadurch sind die Kreise bestimmt. Ihre Radien ergeben $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, die Mitte ihrer Mittelpunkte gibt $1+i\mathfrak{A}$, der halbe Abstand ihrer Mittelpunkte gibt $\mathfrak{D}-i\mathfrak{E}$. (Adm. Man.).

Um aber die Koëffizienten der exakten Formel allein aus Winkelmessungen zu bestimmen, was möglich und angemessen ist, setzen wir die beiden Formeln des zweiten Dygogramms (S. 87) in folgende Gestalt:

$$\frac{H'}{\lambda H}\cos(\zeta'+\varepsilon') =$$

$$(\sqrt{1+\mathfrak{A}^2}) + \sqrt{\mathfrak{D}^2+\mathfrak{E}^2})\cos(\zeta+\varepsilon) + (\mathfrak{B}\cos\varepsilon' + \mathfrak{C}\sin\varepsilon')$$

$$\frac{H'}{\lambda H}\sin(\zeta'+\varepsilon') =$$

$$(\sqrt{1+\mathfrak{A}^2} - \sqrt{\mathfrak{D}^2+\mathfrak{E}^2})\sin(\zeta+\varepsilon) + (\mathfrak{B}\sin\varepsilon' - \mathfrak{C}\cos\varepsilon'),$$

wo ε und ε' bestimmt sind durch:

$$\operatorname{tg}(\varepsilon'-\varepsilon) = \mathfrak{A},\ \operatorname{tg}(\varepsilon'+\varepsilon) = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{D}}.$$

Zum Beweise berechne man aus den beiden Formeln $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, so erhält man die Ausgangsformeln.

Es sei nun erstens $\mathfrak{B} = \mathfrak{C} = 0$, also:

$$\operatorname{tg}(\zeta'+\varepsilon') = \frac{\sqrt{1+\mathfrak{A}^2} - \sqrt{\mathfrak{D}^2+\mathfrak{E}^2}}{\sqrt{1+\mathfrak{A}^2} + \sqrt{\mathfrak{D}^2+\mathfrak{E}^2}}\operatorname{tg}(\zeta+\varepsilon)$$

und es seien drei Wertepaare

$$\zeta_1, \zeta_1';\ \zeta_2, \zeta_2';\ \zeta_3, \zeta_3'$$

gegeben.

Man bilde mit Doppeltransporteur oder zeichne auf Pauspapier ein Strahlentripel (Abb. 19) mit den gegebenen

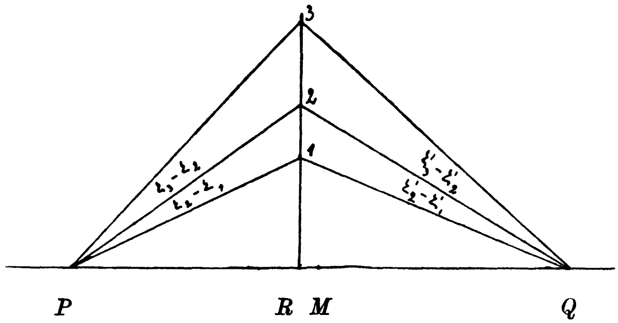


Abb. 19

Winkeln $\zeta_2 - \zeta_1$, $\zeta_3 - \zeta_2$. Man drehe dieses Strahlentripel um seinen Scheitel P. Durch die jedesmaligen Schnitte 1, 2, 3 desselben mit der in R auf PR senkrechten Graden, lege man ein Strahlentripel mit den Winkeln

$$\zeta_3' - \zeta_2', \; \zeta_2' - \zeta_1'.$$

Dann beschreibt dessen Scheitel eine Bahn, deren Schnitt Q mit PR aufgesucht wird. Nunmehr sind ε, ε' bestimmt aus:

$$\begin{aligned} i\,PR &= \zeta_i + \varepsilon \\ i\,QR &= \zeta_i' + \varepsilon' \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

Wegen

$$\operatorname{tg}(\zeta' + \varepsilon') = \frac{PR}{QR} \operatorname{tg}(\zeta + \varepsilon)$$

kann man setzen:

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\mathfrak{A}^2} - \sqrt{\mathfrak{D}^2+\mathfrak{C}^2} &= PR \\ \sqrt{1+\mathfrak{A}^2} + \sqrt{\mathfrak{D}^2+\mathfrak{C}^2} &= QR, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\mathfrak{A}^2} &= {}^1\!/_2\, PQ = PM = MQ, \\ \sqrt{\mathfrak{D}^2+\mathfrak{C}^2} &= {}^1\!/_2\,(QR - PR) = MR. \end{aligned}$$

d. h. es ergeben sich die Strecken 1 und $\mathfrak{A}$ als Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypothenuse PM und dem Winkel $\varepsilon' - \varepsilon$; und es ergeben sich die Strecken $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ als Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypothenuse MR und dem Winkel $\varepsilon' + \varepsilon$.

Ist zweitens nicht $\mathfrak{B} = \mathfrak{C} = 0$, so ziehe man die Formel

$$\sin \delta^0 = \mathfrak{A} \cos \delta^0 + \mathfrak{D} \sin (2\zeta' + \delta^0) + \mathfrak{E} \cos (2\zeta' + \delta^0)$$

heran für die halbe Summe δ^0 der Deviationen zum Kurs ζ' und zum Gegenkurs $\zeta' + 180^0$. Setzt man $\zeta^0 = \zeta' + \delta^0$, wie $\zeta = \zeta' + \delta$ ist, so besteht demnach zwischen ζ^0 und ζ' dieselbe Beziehung wie zwischen ζ und ζ', aber mit $\mathfrak{B} = \mathfrak{C} = 0$. Kennt man also zu drei Kursen ζ'_1, ζ'_2, ζ'_3 und den drei Gegenkursen $\zeta'_1 + 180^0$, $\zeta'_2 + 180^0$, $\zeta'_3 + 180^0$ die Deviationen, also auch die Werte δ_i^0 und ζ_i^0 $(i = 1, 2, 3)$, so kann man $\mathfrak{A}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}$ wie oben konstruieren und dann $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, wie S. 90 gezeigt worden ist.

Verglichen mit dem sonst erforderlichen Aufwand an Rechnung (Abschnitt 18, 19) müssen diese Konstruktionen noch als einfach bezeichnet werden.

Die erforderlichen sechs Deviationen auf drei Kursen und ihren drei Gegenkursen wird man am einfachsten durch graphische Interpolation vermittelst des Napier-Diagramms aus den beobachteten Deviationen gewinnen (Abschnitt 36).

22. Induzierte Körper.

Ein Körper werde im homogenen Erdfeld T (X, Y, Z) induktionsmagnetisch, d. h. in jedem Punkte desselben besteht ein nach Größe, Sinn und Richtung bestimmter mgn. Zustand. Im Äußern des Körpers wird der Zustand durch das Vektorfeld geschildert. Wir betrachten nur Körper, bei denen die nordmagnetischen, wie die südmagnetischen Teilchen je einen einfach zusammenhängenden Raum erfüllen. Der (mgn.) Schwerpunkt der nord (süd)-magnetischen Teilchen heißt der Nord-(Süd)-Pol. Ein solcher Körper hat also nur einen Nord- und einen Süd-Pol. Die Richtungskosinus der durch die beiden Pole gehenden Graden multipliziert mit der Stärke der Magnetisierung heißen die Komponenten des Vektors der Induktion und seien mit $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ bezeichnet.

Bei einem Stabe, Richtungskosinus x, y, z, ist dieser Vektor im wesentlichen, nämlich bis auf einen vom Stab abhängigen positiven Faktor bekannt: er ist seiner Größe nach proportional der in die Stabrichtung fallenden Komponente von T, also proportional $Xx + Yy + Zz$, seine Komponenten sind mithin bis auf einen positiven Faktor gleich den Größen:

$$\begin{aligned} &x^2\, X + xy\, Y + xz\, Z, \\ &xy\, X + y^2\, Y + yz\, Z, \\ &xz\, X + yz\, Y + z^2\, Z. \end{aligned}$$

Es gibt einige andere Körper, bei denen der Vektor $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ von vornherein, abgesehn von einem positiven Faktor, der empirisch zu bestimmen ist, angegeben werden kann.

Bei einer (mgn. homogenen) Kugel fällt der Vektor $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ in die Richtung des induzierenden Vektors T. Es ist also $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ bis auf einen positiven Faktor gleich X, Y, Z.

Bei einer (mgn. homogenen) Kreis-Scheibe, Stellungskosinus x, y, z, fällt der Vektor $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ in sie, also ist erstens

$$\mathfrak{U}\,x + \mathfrak{V}\,y + \mathfrak{W}\,z = 0.$$

Zweitens liegen die Vektoren (X, Y, Z), $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W})$ mit der Scheiben-Normalen, Richtungskosinus x, y, z, einer Ebene parallel, also ist zweitens

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \mathfrak{U} & \mathfrak{V} & \mathfrak{W} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0.$$

Demnach sind $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ bis auf einen positiven Faktor gleich:

$$\begin{aligned} &-X(x^2-1) - Y\,xy \quad - Z\,xz &&= X - x\,\Sigma Xx \\ &-X\,xy \quad - Y(y^2-1) - Z\,yz &&= Y - y\,\Sigma Xx \\ &-X\,xz \quad - Y\,yz \quad - Z(z^2-1) &&= Z - z\,\Sigma Xx \end{aligned}$$

Daß der Faktor positiv ist, erkennt man an dem Fall, in dem die Richtung von T der Scheibe parallel, also

$Xx + Yy + Zz = 0$ ist; in diesem werden die Komponenten $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ nach Obigem bis auf einen positiven Faktor gleich X, Y, Z, wie es sein muß.

Den Formeln für Stab, Kugel und Kreis-Scheibe zufolge ist der Vektor einer Scheibe mit dem Vektor eines zu ihr senkrechten Stabes zusammen gleich dem Vektor einer Kugel.

Bei einem Ellipsoid, dessen Axen die Richtungen der Koordinatenaxen haben, wird[1])

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{l}\,X,\ \mathfrak{V} = \mathfrak{m}\,Y,\ \mathfrak{W} = \mathfrak{n}\,Z,$$

wo $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ von der Form und Aufnahmefähigkeit des Ellipsoides abhängende Faktoren sind; positive Faktoren, wie man bzw. für $T = X$, $T = Y$, $T = Z$ erkennt.

Der Fall der Kugel ist hierin enthalten für $\mathfrak{l} = \mathfrak{m} = \mathfrak{n}$; für das Drehellipsoid werden nur zwei der drei Faktoren einander gleich. Für eine elliptische Scheibe wird einer der drei Faktoren Null, für eine Kreis-Scheibe überdies die beiden andern einander gleich. Für einen Stab werden zwei Faktoren gleich Null.

Ein dreiaxiges Ellipsoid wird also induktionsmagnetisch wie ein System von drei Stäben in den Ellipsoid-Axenrichtungen mit geeigneten Aufnahmefähigkeiten, wenn Wirkungen zwischen den Stäben nicht stattfinden.

Bei allgemeiner Lage des Ellipsoides zu den Koordinaten-Axen werden die Komponenten des induzierten Vektors ($\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$) proportional Linearformen von X, Y, Z. Das Koëffizientensystem dieser drei Linearformen wird symmetrisch, wie wir dies auch bei Stab, Kugel und Scheibe sahen.

Ein Körper, für den

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} &= \mathfrak{a}\,X + \mathfrak{b}\,Y + \mathfrak{c}\,Z \\ \mathfrak{V} &= \mathfrak{d}\,X + \mathfrak{e}\,Y + \mathfrak{f}\,Z \\ \mathfrak{W} &= \mathfrak{g}\,X + \mathfrak{h}\,Y + \mathfrak{k}\,Z \end{aligned}$$

ist, heiße ein „Poissonscher Körper“.

1) S. z. B. Graetz, Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus. IV. Leipzig 1920. S. 150.

Hat der induzierte Vektor ($\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$) die Richtung des induzierenden T (X, Y, Z), so nennen wir die Grade, in der er liegt, eine „Axe".

Ein Stab ist immer ein Poissonscher Körper, seine Grade ist Axe.

Ein ebener Poissonscher Körper, eine Scheibe, liege in der XY-Ebene und werde durch den Vektor (X, Y, 0) induziert. Der induzierte Vektor ($\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, 0)

$$\begin{aligned}\mathfrak{U} &= \mathfrak{a}\,X + \mathfrak{b}\,Y\\ \mathfrak{V} &= \mathfrak{d}\,X + \mathfrak{e}\,Y\end{aligned}$$

hat die Richtung des induzierenden, wenn

$$\mathfrak{U} : \mathfrak{V} = X : Y, \text{ also } \frac{X}{Y} = \frac{\mathfrak{a}\,X + \mathfrak{b}\,Y}{\mathfrak{d}\,X + \mathfrak{e}\,Y}$$

oder

$$\mathfrak{d}\,X^2 + (\mathfrak{e} - \mathfrak{a})\,X\,Y - \mathfrak{b}\,Y^2 = 0$$

ist. Eine Poissonsche Scheibe kann also zwei Axen haben. Hat sie mehr, so ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mathfrak{a} - \mathfrak{e} = 0$, d. h.

$$\begin{aligned}\mathfrak{U} &= \mathfrak{a}\,X\\ \mathfrak{V} &= \mathfrak{a}\,Y;\end{aligned}$$

die Scheibe ist einer Kreis-Scheibe äquivalent.

Für einen Poissonschen Körper erhält man die Richtungen der Axen aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}\mathfrak{a}\,X + \mathfrak{b}\,Y + \mathfrak{c}\,Z &= \mathfrak{j}\,X\\ \mathfrak{d}\,X + \mathfrak{e}\,Y + \mathfrak{f}\,Z &= \mathfrak{j}\,Y\\ \mathfrak{g}\,X + \mathfrak{h}\,Y + \mathfrak{k}\,Z &= \mathfrak{j}\,Z,\end{aligned}$$

nachdem man $\mathfrak{j}$ aus der kubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a} - \mathfrak{j} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{d} & \mathfrak{e} - \mathfrak{j} & \mathfrak{f} \\ \mathfrak{g} & \mathfrak{h} & \mathfrak{k} - \mathfrak{j} \end{vmatrix} = 0$$

bestimmt hat. Also: ein Poissonscher Körper hat eine und kann drei Axen haben. Hat er mehr, dann müssen wenigstens für einen Wert von $\mathfrak{j}$ die Gleichungen für X : Y : Z mehr als eine Lösung haben. Sind für ein $\mathfrak{j}$ zwei Lösungen, also zwei Axen vorhanden, dann sind auch alle mit deren beiden Richtungen einer Ebene parallelen die Richtungen von Axen, die Matrize mit diesem Wert von $\mathfrak{j}$

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{a}-\mathfrak{j} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{d} & \mathfrak{e}-\mathfrak{j} & \mathfrak{f} \\ \mathfrak{g} & \mathfrak{h} & \mathfrak{k}\ \ \mathfrak{j} \end{pmatrix}$$

ist vom Range Eins, die Linearformen

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}-\mathfrak{j}\,X &= (\mathfrak{a}-\mathfrak{j})\,X + \mathfrak{b}\,Y + \mathfrak{c}\,Z \\ \mathfrak{V}-\mathfrak{j}\,Y &= \mathfrak{d}\,X + (\mathfrak{e}-\mathfrak{j})\,Y + \mathfrak{f}\,Z \\ \mathfrak{W}-\mathfrak{j}\,Z &= \mathfrak{g}\,X + \mathfrak{h}\,Y + (\mathfrak{k}-\mathfrak{j})\,Z, \end{aligned}$$

sind Vielfache einer: $\alpha X+\beta Y+\gamma Z$, der induzierte Vektor wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} &= \mathfrak{l}\,(\alpha X+\beta Y+\gamma Z)+\mathfrak{j}\,X \\ \mathfrak{V} &= \mathfrak{m}\,(\alpha X+\beta Y+\gamma Z)+\mathfrak{j}\,Y \\ \mathfrak{W} &= \mathfrak{n}\,(\alpha X+\beta Y+\gamma Z)+\mathfrak{j}\,Z. \end{aligned}$$

$\alpha X+\beta Y+\gamma Z=0$ ist die Stellung, der diese Axen parallel sind. Ferner ist $\mathfrak{l}:\mathfrak{m}:\mathfrak{n}$ Richtung einer Axe.

Sind für ein $\mathfrak{j}$ mehr als zwei Axen vorhanden, die nicht einer Ebene parallel liegen, so ist jede Richtung Axe, die Matrize

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{a}-\mathfrak{j} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} \\ \mathfrak{d} & \mathfrak{e}-\mathfrak{j} & \mathfrak{f} \\ \mathfrak{g} & \mathfrak{h} & \mathfrak{k}-\mathfrak{j} \end{pmatrix}$$

ist vom Range Null; es ist also $\mathfrak{j}=\mathfrak{a}=\mathfrak{e}=\mathfrak{k}$, $\mathfrak{b}=\mathfrak{c}=\mathfrak{d}=\mathfrak{f}=\mathfrak{g}=\mathfrak{h}=0$, der induzierte Vektor wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} &= \mathfrak{j}\,X \\ \mathfrak{V} &= \mathfrak{j}\,Y \\ \mathfrak{W} &= \mathfrak{j}\,Z\ , \end{aligned}$$

der Körper ist einer Kugel äquivalent. Körper mit mehr als drei, aber nicht unendlich vielen Axen sind Nicht-Poissonsche Körper. Es gibt Nicht-Poissonsche Körper, z. B. regelmäßige Vielecke und Vielflache.

23. Fernwirkung.

Die bisherigen Betrachtungen waren unabhängig von einem Fernwirkungsgesetz. Von jetzt ab führen wir das Coulombsche Gesetz ein: Wirkung umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung.

Ein Polpaar NS habe in Bezug auf O die Koordinaten

$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} \pm r x, \quad \mathfrak{r}\mathfrak{y} \pm r y, \quad \mathfrak{r}\mathfrak{z} \pm r z,$$

so daß $\mathfrak{r}$ der Abstand seines Mittelpunktes von O, r der Abstand desselben von N und S ist, während $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Richtungskosinus von $\mathfrak{r}$, und x, y, z diejenigen von r sind. Derjenige Winkel $\mathfrak{r}r$ sei mit φ bezeichnet, für den $\cos\varphi = \mathfrak{x}x + \mathfrak{y}y + \mathfrak{z}z$ ist.

Der Pol N (bzw. S) wirkt auf O in der Richtung ON (bzw. OS) mit einer Kraft proportional

$$\frac{1}{ON^2}\left(\text{bzw. } \frac{1}{OS^2}\right),$$

deren Komponenten mithin proportional sind den Größen

$$\frac{1}{ON^2}\,\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{x}+rx}{ON}, \quad \frac{1}{ON^2}\,\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{y}+ry}{ON}, \quad \frac{1}{ON^2}\,\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{z}+rz}{ON},$$

bzw. den Größen

$$\frac{1}{OS^2}\,\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{x}-rx}{OS}, \quad \frac{1}{OS^2}\,\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{y}-ry}{OS}, \quad \frac{1}{OS^2}\,\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{z}-rz}{OS} \;.$$

Da diese Wirkungen von N und S im entgegengesetzten Sinn erfolgen, sind die Komponenten der Resultante die Differenzen jener Komponenten, also proportional

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{r}\mathfrak{x}\left(\frac{1}{ON^3}-\frac{1}{OS^3}\right)+rx\left(\frac{1}{ON^3}+\frac{1}{OS^3}\right)\\
&\mathfrak{r}\mathfrak{y}\left(\frac{1}{ON^3}-\frac{1}{OS^3}\right)+ry\left(\frac{1}{ON^3}+\frac{1}{OS^3}\right)\\
&\mathfrak{r}\mathfrak{z}\left(\frac{1}{ON^3}-\frac{1}{OS^3}\right)+rz\left(\frac{1}{ON^3}+\frac{1}{OS^3}\right) \;.
\end{aligned}$$

Es ist ON^2 bzw. OS^2 gleich

$$\mathfrak{r}^2\left(1 \pm 2\frac{r}{\mathfrak{r}}\cos\varphi + \left(\frac{r}{\mathfrak{r}}\right)^2\right),$$

also entwickelt ON^{-3} bzw. OS^{-3} gleich

$$\mathfrak{r}^{-3}\left\{1 - {}^{3}/_{2}\left[\pm 2\frac{r}{\mathfrak{r}}\cos\varphi + \left(\frac{r}{\mathfrak{r}}\right)^{2}\right] + {}^{15}/_{8}\left[\pm 2\frac{r}{\mathfrak{r}}\cos\varphi + \left(\frac{r}{\mathfrak{r}}\right)^{2}\right]^{2} - \cdot\cdot\right\}.$$

Also sind die Komponenten der Wirkung des Polpaares NS auf O proportional

$$-\frac{r\mathfrak{x}}{\mathfrak{r}^3}\left\{6\frac{r}{\mathfrak{r}}\cos\varphi - 15\left(\frac{r}{\mathfrak{r}}\right)^3\cos\varphi + \cdot\right\} + \frac{r\,x}{\mathfrak{r}^3}\left\{2 - 3\left(\frac{r}{\mathfrak{r}}\right)^2 + 15\left(\frac{r}{\mathfrak{r}}\cos\varphi\right)^2 + \cdot\right\}$$

$$-\frac{r\mathfrak{y}}{\mathfrak{r}^3}\left\{6\frac{r}{\mathfrak{r}}\cos\varphi - 15\left(\frac{r}{\mathfrak{r}}\right)^3\cos\varphi + \cdot\right\} + \frac{r\,y}{\mathfrak{r}^3}\left\{2 - 3\left(\frac{r}{\mathfrak{r}}\right)^2 + 15\left(\frac{r}{\mathfrak{r}}\cos\varphi\right)^2 + \cdot\right\}$$

$$-\frac{r\mathfrak{z}}{\mathfrak{r}^3}\left\{6\frac{r}{\mathfrak{r}}\cos\varphi - 15\left(\frac{r}{\mathfrak{r}}\right)^3\cos\varphi + \cdot\right\} + \frac{r\,z}{\mathfrak{r}^3}\left\{2 - 3\left(\frac{r}{\mathfrak{r}}\right)^2 + 15\left(\frac{r}{\mathfrak{r}}\cos\varphi\right)^2 + \cdot\right\}$$

Oder abgesehn von dem Faktor

$$-\frac{2}{\mathfrak{r}^3}$$

und unter Beschränkung auf die ersten Glieder sind diese Komponenten proportional

$$\begin{aligned}
(3\,\mathfrak{x}\cos\varphi - x)\,r &= [\,(3\,\mathfrak{x}^2 - 1)\,x + 3\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,y + 3\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{z}\,z]\,r\\
(3\,\mathfrak{y}\cos\varphi - y)\,r &= [\,3\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,x + (3\,\mathfrak{y}^2 - 1)\,y + 3\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,z]\,r\\
(3\,\mathfrak{z}\cos\varphi - z)\,r &= [\,3\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{z}\,x + 3\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,y + (3\,\mathfrak{z}^2 - 1)\,z]\,r
\end{aligned}$$

und ihre Resultante, die Quadratwurzel aus der Quadratsumme der Komponenten ist proportional $\sqrt{1+3\cos^2\varphi}$. Dieser Formel zufolge, die auch durch den Erdmagnetismus bestätigt wird, wächst die Totalintensität von $\varphi = 90^0$ bis $\varphi = 0^0$ auf das Doppelte, bei der Erde etwa von $^1/_3$ bis etwa $^2/_3$ Deka-Gauß-Einheiten des C. G. S.-Systems[1]).

Die Komponenten sind Linearformen von rx, ry, rz. Das gilt aber nur unter der Voraussetzung, daß höhere Potenzen von r vernachlässigt werden können, daß also der Polabstand NS = 2r klein ist im Vergleich zur Entfernung $\mathfrak{r}$ von O. Behält man höhere Potenzen von r bei, so treten auch solche von $r\cos\varphi$, also von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ auf.

Ein Magnetstab kann als ein System von Polpaaren ns entsprechend den Werten von ns gleich 0 bis NS und von verschiedenen Stärken dm angesehen werden. Die Integration

1) Enc. VI, 1, 10. S. 268, 330, 357.

der Komponenten dieser Polpaare gibt die Komponenten für den Magnetstab. Da bei dem Polpaar die Komponenten Linearformen von $r = {}^1/_2$ NS sind, sind sie bei dem Magnetstab Linearformen des Integrals über ${}^1/_2$ ns dm. Bezeichnen wir dieses Integral mit

$$r\int dm,$$

so ist das so erklärte r der Abstand der Pole des Magnetstabes von dessen Mitte. Ein Magnetstab ist also als Polpaar anzusehen. Der Nord-(Süd-)Pol ist, wie bereits oben gesagt, der Schwerpunkt der nord-(süd-)magnetischen Teilchen. Nur bei fernen Magnetstäben kann man von mgn. Schwerpunkten unabhängig von O reden und solche Stäbe als Polpaare auffassen[1]).

Dieselbe Betrachtung gilt für einen flüchtigen Magnetstab, nur daß der zu den obigen Komponenten hinzuzufügende Proportionalitätsfaktor nunmehr die mit der Richtung veränderliche Stärke desselben enthält, nämlich die in die Stabrichtung (x, y, z) fallende Komponente von T (X, Y, Z), d. i. Xx + Yy + Zz. Die Komponenten der Feldstärke eines flüchtigen Magnetstabes sind also Linearformen von X, Y, Z, gleich, wieviel Glieder der Entwicklungen man beibehält. Unter Beschränkung auf die ersten Glieder werden die Komponenten mithin gleich

$$\begin{aligned} U &= (X\,x + Y\,y + Z\,z)\,u\,m \\ V &= (X\,x + Y\,y + Z\,z)\,v\,m \\ W &= (X\,x + Y\,y + Z\,z)\,w\,m\ , \end{aligned}$$

wo die Richtungskosinus u, v, w der Feldstärke proportional sind den Größen

$$\begin{aligned} &3\,\mathfrak{x}\cos\varphi - x \\ &3\,\mathfrak{y}\cos\varphi - y \\ &3\,\mathfrak{z}\cos\varphi - z \end{aligned}$$

Für einen Stab oder ein Polpaar, fest oder flüchtig,

1) Vergl. jedoch d. Verfs. Ausführungen über Zusammensetzung gebundener Kräfte i. d. Jahresber. d. deutschen Math. Ver. 16, 1907, S. 321.

werden die Komponenten für die zweite Hauptlage, d. h. für $\cos\varphi = 0$ proportional

$$-x,\ -y,\ -z,$$

und für die erste Hauptlage, d. h. für

$$\mathfrak{x} = x,\ \mathfrak{y} = y,\ \mathfrak{z} = z,\ \cos\varphi = 1,$$

proportional

$$2x,\ 2y,\ 2z,$$

also doppelt so groß und entgegengerichtet, wie für die zweite Hauptlage. Das gilt aber nur in Bezug auf die Wirkung auf einen fernen Punkt. Die Wirkung ist nämlich nach Coulombs Gesetz in der ersten Hauptlage proportional

$$\frac{1}{(\mathfrak{r}-r)^2} - \frac{1}{(\mathfrak{r}+r)^2} = 4\frac{r}{\mathfrak{r}^3} + 8\frac{r^3}{\mathfrak{r}^5} + \cdot\cdot$$

und in der zweiten Hauptlage proportional

$$2\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{r}^2+r^2}^{\,2}}\frac{r}{\sqrt{\mathfrak{r}^2+r^2}} = 2\frac{r}{\mathfrak{r}^2} - 3\frac{r^3}{\mathfrak{r}^5} + \cdot\cdot,$$

sodaß das Verhältnis zwei zu eins nur für die ersten Glieder statthat.

Die relative mittlere Totalkraft eines Stabes ist seiner Matrize zufolge gleich $1 + {}^1/_3\, m\,(ux + vy + wz)$; in erster (zweiter) Hauptlage wird $ux + vy + wz$ positiv (negativ), nämlich proportional $2(x^2 + y^2 + z^2)$ (bzw. $-(x^2 + y^2 + z^2)$), also der Stab richtkraftstärkend (– schwächend). Die dritte Hauptlage, $ux + vy + wz = 0$, ist richtkrafterhaltend. Auf jeder Kraftlinie trennen die Punkte dritter Hauptlage diejenigen mit Richtkraftschwächung von denjenigen mit Richtkraftstärkung.

Die beiden auf die erste und zweite Hauptlage bezüglichen Sätze genügen, um die Wirkung im Fall einer allgemeinen Lage des Stabes zu O zu ermitteln, so daß man nur diese beiden Sonderfälle empirisch nachzuprüfen braucht.

Sei nämlich (Abb. 20) in S ein Stab, Richtung SO_1, Rich-

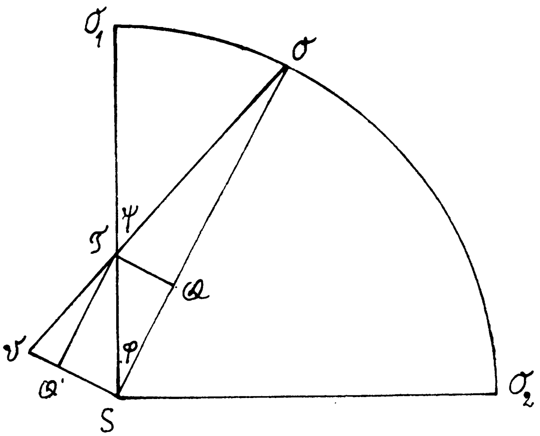


Abb. 20

tungskosinus (x, y, z), Wirkung auf O_1 proportional 2 ST, auf O_2 proportional ST. Die Komponenten SQ und SQ' wirken auf O. Der Maßstab sei so gewählt, daß SQ $= {}^1/_3$ SO ist. Die Wirkung von SQ auf O ist proportional 2 SQ $=$ QO. Die Wirkung von SQ' auf O ist proportional QT. Die Gesamtwirkung des Stabes auf O ist also proportional OT. (Adm. Man.). Nimmt man SO zur Einheit, und sind $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Koordinaten von S in Bezug auf O, dann hat die erste Komponente bis auf einen positiven Faktor die Komponenten

$$2\,\mathfrak{x} \cos\varphi,\ 2\,\mathfrak{y} \cos\varphi,\ 2\,\mathfrak{z} \cos\varphi,$$

und die zweite bis auf denselben Faktor die Komponenten

$$\mathfrak{u} \sin\varphi,\ \mathfrak{v} \sin\varphi,\ \mathfrak{w} \sin\varphi,$$

wo $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ die mit passendem Zeichen genommenen Richtungskosinus von TQ sind. Nun ist

$$\mathfrak{u}\,\mathfrak{x} + \mathfrak{v}\,\mathfrak{y} + \mathfrak{w}\,\mathfrak{z} = 0$$

und

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{u} & \mathfrak{v} & \mathfrak{w} \\ \mathfrak{x} & \mathfrak{y} & \mathfrak{z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0,$$

also $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}$ proportional

$$-x + \mathfrak{x} \Sigma \mathfrak{x} x, \quad -y + \mathfrak{y} \Sigma \mathfrak{x} x, \quad -z + \mathfrak{z} \Sigma \mathfrak{x} x,$$

also diese drei Größen, da ihre Quadratsumme $\sin^2 \varphi$ ist, bis auf das noch unbestimmt bleibende Zeichen gleich,

$$\mathfrak{u} \sin \varphi, \quad v \sin \varphi, \quad \mathfrak{w} \sin \varphi.$$

Die Komponenten von TO, bis auf einen positiven Faktor gleich

$$2 \mathfrak{x} \cos \varphi + \mathfrak{u} \sin \varphi, \quad 2\mathfrak{y} \cos \varphi + \mathfrak{v} \sin \varphi, \quad 2 \mathfrak{z} \cos \varphi + \mathfrak{w} \sin \varphi$$

werden also proportional

$$3 \mathfrak{x} \cos \varphi - x, \quad 3 \mathfrak{y} \cos \varphi - y, \quad 3 \mathfrak{z} \cos \varphi - z,$$

wo die Unbestimmtheit des Zeichens durch die erste und zweite Hauptlage beseitigt wird; in Übereinstimmung mit dem früheren Ergebnis.

Liegt insbesondere O so, daß OT senkrecht ST ist, so findet dritte Hauptlage statt. Dann ist $OT^2 : ST^2 = OQ : SQ = 2 : 1$, d. h. in der dritten Hauptlage ist die Wirkung $\sqrt{2}$ mal so groß, wie in der zweiten. Und es ist $\operatorname{tg} OST = \pm \sqrt{2}$. Dadurch ist es möglich einen Stab gegebener Richtung in dritte Hauptlage zu O zu bringen.

Überhaupt ist aus dieser Zeichnung zu entnehmen, in welcher Richtung OS von O aus ein Stab gegebener Richtung ST liegen muß, damit er in O eine Feldstärke gegebener Richtung OT erzeugt. Aus OT und der Graden TS findet man nämlich S als Schnitt dieser Graden mit einem Kreis durch O, dessen Durchmesser $OV = {}^3/_2\, OT$ ist. Der Kreis liefert zwei Schnitte, die zugehörigen Stäbe liegen kompensatorisch, wie in Abb. 11, 12. Der Stab in S ist richtkraftstärkend (-schwächend) für O, wenn $\operatorname{tg}^2 OST$ kleiner (größer) als 2 ist.

Die Zeichnung gibt ferner

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi - {}^1/_3 \sec \varphi} = \frac{3\,x\,y}{2\,x^2 - y^2}$$

und hieraus durch Integration y^4 prop. $(x^2 + y^2)^3$, die Gleichung der Kraftlinien; oder in Polarkoordinaten r prop. $\sin^2 \varphi$. Nur wenn der Stab klein ist zur Entfernung, gilt diese Gleichung. Sonst erhält man die Differentialgleichung der Kraftlinien eines Polpaares ($\pm 1, 0$) aus der Gleichung der Niveaulinien (Äquipotentiallinien):

$$\frac{1}{\sqrt{y^2+(x+l)^2}}-\frac{1}{\sqrt{y^2+(x-l)^2}}=\text{konst.}$$

Diese ergibt differenziiert:

$$(y\,dy+x\,dx)\left(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right)+l\,dx\left(\frac{1}{r_1^3}+\frac{1}{r_2^3}\right)=0.$$

Ersetzt man

$$\frac{dy}{dx}\text{ durch }-\frac{dx}{dy},$$

so erhält man die Differentialgleichung der orthogonalen Trajektorien, also der Kraftlinien

$$(y\,dx-x\,dy)\left(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right)-l\,dy\left(\frac{1}{r_1^3}+\frac{1}{r_2^3}\right)=0,$$

die man andrerseits durch Differentiation erhält aus

$$\frac{x+l}{\sqrt{y^2+(x+l)^2}}-\frac{x-l}{\sqrt{y^2+(x-l)^2}}=\text{konst.},$$

der Gleichung der Kraftlinien.

Die Differentialgleichung der Kraftlinien entwickelt nach Potenzen von l:

$$\frac{y\,dx-x\,dy}{dy}=-l\,\frac{r_1^3+r_2^3}{r_1^3-r_2^3}=-l\,\frac{\left(1+3\frac{lx}{x^2+y^2}+.\right)+\left(1-3\frac{lx}{x^2+y^2}+.\right)}{\left(1+3\frac{lx}{x^2+y^2}+.\right)-\left(1-3\frac{lx}{x^2+y^2}+\cdot\right)}$$
$$=-{}^1/_3\,\frac{x^2+y^2}{x}+\cdot$$

geht für kleine l in die oben abgeleitete über $3xy\,dx=(3x^2\;\;(x^2+y^2))\,dy$, aus der für $dx=0$ die Gleichung $y^2=2x^2$ des Gradenpaares folgt, auf dem die Feldstärken dritter Hauptlage liegen. Hiervon haben wir im Abschnitt 3 Gebrauch gemacht. Allgemeiner erhält man für

$$\frac{dy}{dx}=J$$

die Gleichung des Gradenpaares, auf dem die Feldstärken der gegebenen Richtung J liegen.

Eine kleine Kugel kann als Polpaar aufgefaßt werden, dessen Axe immer in die Richtung T (X, Y, Z) fällt. Die Komponenten U, V, W ihrer Wirkung auf O werden also proportional

$$3\,\mathfrak{x}\,\Sigma\,\mathfrak{x}\,X - X,\ 3\,\mathfrak{y}\,\Sigma\,\mathfrak{x}\,X - Y,\ 3\,\mathfrak{z}\,\Sigma\,\mathfrak{x}\,X - Z.$$

Sie seien demnach

$$\begin{aligned} U &= ((3\,\mathfrak{x}^2 - 1)\,X + 3\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,Y + 3\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{z}\,Z)\,m \\ V &= (3\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,X + (3\,\mathfrak{y}^2 - 1)\,Y + 3\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,Z)\,m \\ W &= (3\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{z}\,X + 3\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,Y + (3\,\mathfrak{z}^2 - 1)\,Z)\,m, \end{aligned}$$

wo m das (mgn.) Maß der Kugel ist. U, V, W sind also Linearformen von X, Y, Z, und es verschwinden Divergenz und Rotation. Infolgedessen sind U, V, W die Ableitungen der Potentialfunktion

$$\Phi = {}^3/_2\,(\mathfrak{x}\,X + \mathfrak{y}\,Y + \mathfrak{z}\,Z)^2 - {}^1/_2\,(X^2 + Y^2 + Z^2),$$

die der Laplaceschen Differentialgleichung genügt

$$\frac{d^2\,\Phi}{d\,X^2} + \frac{d^2\,\Phi}{d\,Y^2} + \frac{d^2\,\Phi}{d\,Z^2} = 0.$$

Bei einer Kreisscheibe, Stellungskosinus x, y, z fanden wir die Komponenten des induzierten Vektors bis auf einen positiven Faktor gleich (S. 94):

$$X - x\,\Sigma\,X\,x,\ Y - y\,\Sigma\,X\,x,\ Z - z\,\Sigma\,X\,x.$$

Setzen wir diese in die Formeln für die Feldstärke in O eines Stabes ein, so erhalten wir die Komponenten der Feldstärke in O einer Kreisscheibe, Mittelpunkt in Richtung ($\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$), Stellungskosinus (x, y, z), bis auf einen positiven Faktor, das „mgn. Maß“ der Scheibe, gleich:

$$\begin{aligned} &(3\mathfrak{x}^2 - 1)(X - x\Sigma X x) + 3\mathfrak{x}\mathfrak{y}(Y - y\Sigma X x) + 3\mathfrak{x}\mathfrak{z}(Z - z\Sigma X x) \\ &3\mathfrak{x}\mathfrak{y}(X - x\Sigma X x) + (3\mathfrak{y}^2 - 1)(Y - y\Sigma X x) + 3\mathfrak{y}\mathfrak{z}(Z - z\Sigma X x) \\ &3\mathfrak{x}\mathfrak{z}(X - x\Sigma X x) + 3\mathfrak{y}\mathfrak{z}(Y - y\Sigma X x) + (3\mathfrak{z}^2 - 1)(Z - z\Sigma X x), \end{aligned}$$

oder auch gleich:

$$\begin{aligned} &(3\,\mathfrak{x}^2 - 1)\,X + 3\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,Y + 3\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{z}\,Z - \Sigma\,X\,x\,(3\,\mathfrak{x}\,\Sigma\,\mathfrak{x}\,x - x) \\ &3\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,X + (3\,\mathfrak{y}^2 - 1)\,Y + 3\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,Z - \Sigma\,X\,x\,(3\,\mathfrak{y}\,\Sigma\,\mathfrak{x}\,x - y) \\ &3\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{z}\,X + 3\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\,Y + (3\,\mathfrak{z}^2 - 1)\,Z - \Sigma\,X\,x\,(3\,\mathfrak{z}\,\Sigma\,\mathfrak{x}\,x - z), \end{aligned}$$

mit der Deviations-Matrize:

$$\begin{matrix} (3\mathfrak{x}^2-1)-x(3\mathfrak{x}\Sigma\mathfrak{x}x-x), & 3\mathfrak{x}\mathfrak{y}-y(3\mathfrak{x}\Sigma\mathfrak{x}x-x), & 3\mathfrak{x}\mathfrak{z}-z(3\mathfrak{x}\Sigma\mathfrak{x}x-x) \\ 3\mathfrak{x}\mathfrak{y}-x(3\mathfrak{y}\Sigma\mathfrak{x}x-y), & (3\mathfrak{y}^2-1)-y(3\mathfrak{y}\Sigma\mathfrak{x}x-y), & 3\mathfrak{y}\mathfrak{z}-z(3\mathfrak{y}\Sigma\mathfrak{x}x-y) \\ 3\mathfrak{x}\mathfrak{z}-x(3\mathfrak{z}\Sigma\mathfrak{x}x-z), & 3\mathfrak{y}\mathfrak{z}-y(3\mathfrak{z}\Sigma\mathfrak{x}x-z), & (3\mathfrak{z}^2-1)-z(3\mathfrak{z}\Sigma\mathfrak{x}x-z) \end{matrix}$$

Für $\Sigma Xx = 0$, d. h. wenn die Scheibe dem Erdvektor parallel ist, gehen die Komponenten in die einer Kugel über, wie es sein muß.

Wenn die Scheibenaxe durch O geht, also $(x, y, z) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ ist, so werden die Komponenten bis auf einen positiven Faktor gleich:

$$\begin{matrix} (x^2-1)X + & xyY + & xzZ \\ xyX + & (y^2-1)Y + & yzZ \\ xzX + & yzY + & (z^2-1)Z. \end{matrix}$$

Ein kleines oder fernes Ellipsoid kann als Polpaar aufgefaßt werden, dessen Komponenten Linearformen von X, Y, Z sind:

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} &= \mathfrak{a}X + \mathfrak{b}Y + \mathfrak{c}Z \\ \mathfrak{V} &= \mathfrak{d}X + \mathfrak{e}Y + \mathfrak{f}Z \\ \mathfrak{W} &= \mathfrak{g}X + \mathfrak{h}Y + \mathfrak{k}Z. \end{aligned}$$

Zufolge der Formeln für einen Stab werden demnach auch die Komponenten U, V, W der Wirkung des Ellipsoides auf O Linearformen von X, Y, Z:

$$\begin{aligned} U &= aX + bY + cZ \\ V &= dX + eY + fZ \\ W &= gX + hY + kZ. \end{aligned}$$

In einem magnetischen Körper sei, wie oben, N der Schwerpunkt der nordmagnetischen, S der Schwerpunkt der südmagnetischen Teilchen. Dann kann die Wirkung des Körpers auf einen f e r n e n Punkt O angesehen werden als Wirkung eines Polpaares NS. Ist der Körper magnetisch durch Induktion des erdmagnetischen Feldes, so ändern sich seine Pole NS nach Lage und Stärke bei einer Änderung der Lage des Körpers gegen den Vektor T (X, Y, Z). Die Mittelpunkte sämtlicher Polpaare NS liegen mit Rücksicht auf die Kleinheit des Körpers im Vergleich zur Entfernung von O so eng beieinander, daß man annehmen kann, sie fallen in einen $(\mathfrak{r}\mathfrak{x}, \mathfrak{r}\mathfrak{y}, \mathfrak{r}\mathfrak{z})$ zusammen. Bei einem Körper mit mgn. Mittelpunkt ist diese Annahme streng richtig. Demnach sind die Komponenten der Wirkung des Körpers auf den fernen Punkt O proportional:

$$3\,\mathfrak{x}\,\Sigma\,\mathfrak{x}\,x\,r - x\,r, \quad 3\,\mathfrak{y}\,\Sigma\,\mathfrak{x}\,x\,r - y\,r, \quad 3\,\mathfrak{z}\,\Sigma\,\mathfrak{x}\,x\,r - z\,r.$$

Soll der Poissonsche Satz gelten, sollen also diese Ausdrücke Linearformen von X, Y, Z sein, so müssen, da $\mathfrak{r}\mathfrak{x}, \mathfrak{r}\mathfrak{y}, \mathfrak{r}\mathfrak{z}$ die festen Mittelpunktskoordinaten des Körpers sind, die Komponenten des in ihm induzierten Magnetismus, die proportional rx, ry, rz sind, selbst Linearformen von X. Y, Z sein, d. h. ein ferner Körper, für den der Poissonsche Satz gilt, muß ein Poissonscher Körper sein.

Die betrachteten besonderen Körper Stab, Kugel, Kreisscheibe, Ellipsoid brauchen nicht mgn. homogen zu sein. Es genügt, daß sie mgn. homogen geschichtet sind, wie wir beim Stabe über die Stärke der Polpaare, aus denen er als zusammengesetzt angesehen wurde, nichts vorauszusetzen brauchten, als daß die Polpaare konzentrisch sind, was hier der Annahme der homogenen Schichtung entspricht. Insbesondere können diese Körper auch hohl sein, wobei das Punktpaar dem Stabe, der Kreisring der Kreisscheibe entspricht.

Die Voraussetzung der Ferne bedeutet, daß man es nur mit annähernden Sätzen zu tun hat. Demnach brauchen auch die Körper nur annähernd Poissonsche Körper zu sein. Eine Walze, wie die Schraubenwelle, ist ein angenähertes Voll-Ellipsoid, eine Röhre, wie ein Schornstein, auch mit elliptischem Querschnitt, ist ein angenähertes Hohl-Ellipsoid. Diese Körper sind also angenäherte Poissonsche Körper; für sie gilt, wenn sie fern genug sind, der Poissonsche Satz.

24. Umschluß-Körper.

Der Kompaß-Ort O befinde sich nunmehr nicht fern, sondern nahe der Mitte des Polpaares

$$\mathfrak{r}\mathfrak{x} \pm r\,x, \quad \mathfrak{r}\mathfrak{y} \pm r\,y, \quad \mathfrak{r}\mathfrak{z} \pm r\,z,$$

so daß jetzt $\mathfrak{r}$ klein ist im Verhältnis zu r. Durch Vertauschung von $\mathfrak{r}$ und r in den betr. Formeln des vorhergehenden Abschnitts bekommt man die Entwicklungen von ON^{-3} und OS^{-3} nach Potenzen von

$$\frac{\mathfrak{r}}{r}$$

und daraus die Komponenten der Wirkung des Polpaares NS auf O proportional

$$-\frac{\mathfrak{r}\,\mathfrak{x}}{r^3}\left\{6\frac{\mathfrak{r}}{r}\cos\varphi - \cdots\right\} + \frac{r\,x}{r^3}\left\{2 - 3\left(\frac{\mathfrak{r}}{r}\right)^2 + 15\left(\frac{\mathfrak{r}}{r}\cos\varphi\right)^2 + \cdots\right\}$$

$$-\frac{\mathfrak{r}\,\mathfrak{y}}{r^3}\left\{6\frac{\mathfrak{r}}{r}\cos\varphi - \cdots\right\} + \frac{r\,y}{r^3}\left\{2 - 3\left(\frac{\mathfrak{r}}{r}\right)^2 + 15\left(\frac{\mathfrak{r}}{r}\cos\varphi\right)^2 + \cdots\right\}$$

$$-\frac{\mathfrak{r}\,\mathfrak{z}}{r^3}\left\{6\frac{\mathfrak{r}}{r}\cos\varphi - \cdots\right\} + \frac{r\,z}{r^3}\left\{2 - 3\left(\frac{\mathfrak{r}}{r}\right)^2 + 15\left(\frac{\mathfrak{r}}{r}\cos\varphi\right)^2 + \cdots\right\}$$

also proportional den mit der Stärke des Polpaares zu multiplizierenden Ausdrücken

$$-\left\{1 - {}^3/_2\left(\frac{\mathfrak{r}}{r}\right)^2\left(1 - 5\cos^2\varphi\right)\right\}\frac{x}{r^2} + 3\left(\frac{\mathfrak{r}}{r}\right)^2\cos\varphi\cdot\frac{\mathfrak{x}}{r^2}$$

$$-\left\{1 - {}^3/_2\left(\frac{\mathfrak{r}}{r}\right)^2\left(1 - 5\cos^2\varphi\right)\right\}\frac{y}{r^2} + 3\left(\frac{\mathfrak{r}}{r}\right)^2\cos\varphi\cdot\frac{\mathfrak{y}}{r^2}$$

$$-\left\{1 - {}^3/_2\left(\frac{\mathfrak{r}}{r}\right)^2\left(1 - 5\cos^2\varphi\right)\right\}\frac{z}{r^2} + 3\left(\frac{\mathfrak{r}}{r}\right)^2\cos\varphi\cdot\frac{\mathfrak{z}}{r^2}$$

Dieses Polpaar sei in einen den Kompaß-Ort O derart fern umschließenden Hohlkörper induziert, daß bei jeder Richtung des induzierenden Erdvektors T (X, Y, Z) der Mittelpunkt des induzierten Polpaares NS dem Kompaß-Ort O nahe liegt, d. h. daß seine Entfernung $\mathfrak{r}$ von O immer klein ist im Verhältnis zur Entfernung $^1/_2$ NS = r. Soll nun der Poissonsche Satz gelten, d. h. sollen die Komponenten der Wirkung des Polpaares NS auf O bei hinreichend kleinem

$$\frac{\mathfrak{r}}{r}$$

Linearformen von X, Y, Z sein, so müssen den obigen Ausdrücken zufolge unter Vernachlässigung der mit

$$\frac{\mathfrak{r}}{r}^{\,2}$$

multiplizierten Glieder die mit der Stärke des Polpaares multiplizierten Größen

$$\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}, \frac{z}{r^2},$$

d. h. die durch r^2 dividierten Komponenten $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ des induzierten Vektors selbst Linearformen von X, Y, Z sein. Dies ist jedenfalls dann erfüllt, wenn erstens der Körper ein Poissonscher ist, d. h. wenn $\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ selbst Linearformen von X, Y, Z sind. Und wenn zweitens die Polabstände 2r bei allen Richtungen von T nicht sehr verschiedene Werte annehmen, sondern ihre Unterschiede innerhalb der Größenordnung der vernachlässigten Glieder

$$\frac{\mathfrak{r}}{r}$$

liegen.

Den Begriff „ferner Körper“ können wir so erklären: Ein Körper heißt fern von O, wenn die Entfernungen seiner Punkte von O groß sind im Verhältnis zu den Unterschieden dieser Entfernungen. Diese Erklärung läßt sich auch auf Umschlußkörper übertragen, während die sonstige Erklärung: ein Körper ist fern von O, wenn seine Abmessungen klein sind im Verhältnis zu den Entfernungen von O, bei Umschlußkörpern versagt.

Bei Umschlußkörpern findet also der Poissonsche Satz jedenfalls dann statt, wenn der Umschlußkörper erstens ein Poissonscher Körper und wenn er zweitens fern ist in dem oben erklärten Sinn.

Vergegenwärtigt man sich den Verlauf der Kraftlinien eines Polpaares und die Lage der Punkte mit Richtkrafterhaltung auf ihnen, so ist deutlich, daß ein Umschlußkörper auf einen ihm fernen Punkt in seinem Innern nur richtkraftschwächend wirkt. Dasselbe gilt für eine flache Umschlußscheibe, einen Ring; ein solcher wird die Richtkraft in seiner Ebene in O schwächen.

Die unendlichen durch den Kompaß gehenden Stäbe von Smith (Abschnitt 5) sind gewißermaßen stabförmige

Umschlußkörper, von Smith zu dem Zweck fingiert, ferne induzierte Pole in fester Lage darzustellen. Dasselbe erreicht man einfacher und anschaulicher durch Stäbe in zweiter Hauptlage, da es nicht auf die Lage der Pole, sondern auf die Richtung der Feldstärke in O ankommt.

Bei Eisenschiffen und der üblichen Kompaßaufstellung an Deck wird, unter Annahme der Gültigkeit des Poissonschen Satzes, in der Tat immer $a + e$ negativ, der Schiffskörper wirkt als horizontale Umschlußscheibe richtkraftschwächend. k ist in diesen Fällen positiv, da der Schiffskörper in vertikaler Beziehung den Kompaß nicht umschließt. Auch k wird negativ bei Kompassen in eisernen Brückenhäusern, in Kommandotürmen, in Zwischendecks; obiger Theorie entsprechend. Andrerseits kann das meist negative a auch gelegentlich positiv werden, wenn Eisenmassen auf den Kompaß sehr ungleich von vorn und von achtern wirken. Soweit es sich im Vorstehenden um Werte von a und e handelt, sind die schon erwähnten Tafeln bei Corbara S. 78 lehrreich, die nur negative e, aber etwa ein Drittel positive a aufweisen. Deren absolute Beträge sind stets kleiner als die der e, da sie von ferneren Eisenmassen herrühren.

25. Die Voraussetzungen des Poissonschen Satzes.

Die bisher bekannten Voraussetzungen des Poissonschen Satzes sind die folgenden. Erstens hatte schon Poisson stillschweigend, später Smith ausdrücklich die Kleinheit der Nadel vorausgesetzt, d. h. das mgn. Feld sollte im Bereich der Nadel homogen sein.

Zweitens hatte zuerst Ripoll die Voraussetzung eingeführt, daß für die wirkenden Kräfte infolge ihrer Kleinheit Superposition nach dem Parallelogrammsatz gelten solle.

Drittens war das Bestehen des Induktionsgesetzes notwendig, d. h. es mußte der induzierte dem induzierenden Vektor der Größe nach proprotional sein.

Viertens können wir nun nach den Ausführungen der beiden vorhergehenden Abschnitte die Voraussetzung hinzuzufügen: der ablenkende Körper muß ein Poissonscher Körper sein. Diese Voraussetzung ist notwendig. Diese vier Voraussetzungen sind sogar hinreichend, wenn man noch hinzunimmt:

Fünftens soll der ablenkende Körper fern sein, in der im Abschnitt 23 und 24 erklärten Bedeutung.

Diese fünfte Bedingung, der Körper solle fern sein, ist wohl zu unterscheiden von der ersten, oft so ausgesprochenen (Abschnitt 7): die Entfernung der mgn. Kräfte (Pole) soll beträchtlich sein gegenüber der Ausdehnung der Kompaßnadel. Diese Bedingung läßt sich in jedem Punkte O des Kraftfeldes eines Körpers durch eine hinreichend kleine Nadel erfüllen. Unsere fünfte Bedingung dagegen erfordert, daß der Punkt O in einem Gebiete des Kraftfeldes liegt, in welchem die vereinfachte Differentialgleichung der Kraftlinien eines Stabes gilt: $3\,x\,y\,d\,x = (2\,x^2 - y^2)\,dy$. Die besondere Struktur dieses fernen Kraftfeldes ist dadurch gekennzeichnet, daß die Feldstärken gegebener Richtung auf Gradenpaaren liegen.

26. Nahe Körper.

Nahe Körper, für die der Poissonsche Satz gilt, müssen Poissonsche Körper sein. Die Entscheidung, ob für einen gegebenen nahen Poissonschen Körper der Poissonsche Satz gilt, setzt die genaue Kenntnis des Verlaufs der Kraftlinien bei jeder Lage des Körpers zum erdmagnetischen Feld voraus. Nur in einfachen Fällen kann diese Entscheidung unmittelbar getroffen werden. Einen solchen Fall hatten wir unter den im Abschnitt 4 gemachten Voraussetzungen in den Stäben vor uns, einen andern Fall geben die Kreisscheiben oder -ringe, wenn der Punkt O auf ihrer Axe liegt. Um diesen Fall zu behandeln, schicken wir folgendes voraus. Die Richtungskosinus eines Stabes in erster (zweiter) Hauptlage in der XY-Ebene seien $(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$; die

Richtungskosinus der von ihm in O erzeugten Feldstärke sind dieselben mit positivem (negativem) Zeichen. Demnach ist seine Matrize

$$\begin{pmatrix} \cos^2\varphi & \cos\varphi\sin\varphi & 0 \\ \cos\varphi\sin\varphi & \sin^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} m,$$

wien m das positive (negative) Maß des Stabes ist. Ersetzt man φ durch $\varphi + 90^0$, so erhält man die Matrize eines zu diesem Stabe senkrechten Stabes in der XY-Ebene

$$\begin{pmatrix} \sin^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & 0 \\ -\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} m.$$

Beide Stäbe bilden ein „Stabkreuz" erster (zweiter) Hauptlage, dessen Matrize

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} m$$

vom Winkel φ unabhängig ist. Ein solches Stabkreuz erster (zweiter) Hauptlage wirkt horizontalkraftstärkend (-schwächend).

Ein Kreisring, dessen Axe die Z-Axe sei, ist kompensatorisch (äquivalent) einem solchen Stabkreuz erster (zweiter) Hauptlage. Denn von dem Erdvektor T kommt für den Ring, wie für das Stabkreuz nur die Horizontalkomponente H in Betracht. Dann aber ist die Kompensation (Äquivalenz) augenscheinlich, da der Ring in O nur einen induzierten Vektor hat, wie ein in ihm in der H-Richtung liegender Stab; ebenso das Stabkreuz, wenn man es mit dem einen Stab parallel, also mit dem anderen senkrecht zur H-Richtung legt.

Allgemeiner, zwei Stäbe in erster (zweiter) Hauptlage haben die Matrizen

$$\begin{pmatrix} x^2_i & x_i y_i & x_i z_i \\ x_i y_i & y^2_i & y_i z_i \\ x_i z_i & y_i z_i & z^2_i \end{pmatrix} m \qquad (i = 1, 2)$$

und bilden ein Stabkreuz, wenn sie senkrecht zu einander sind, wenn also $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$ ist. Wir bestimmen, was deshalb möglich ist, drei Richtungskosinus x, y, z so, daß das System

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

orthogonal ist. Ein Kreisring, Stellungskosinus x, y, z, Axe durch O, ist dem Stabkreuz kompensatorisch (äquivalent), hat also eine Matrize

$$\begin{pmatrix} -x_1^2 - x_2^2 & -x_1 y_1 - x_2 y_2 & -x_1 z_1 - x_2 z_2 \\ -x_1 y_1 - x_2 y_2 & -y_1^2 - y_2^2 & -y_1 z_1 - y_2 z_2 \\ -x_1 z_1 - x_2 z_2 & -y_1 z_1 - y_2 z_2 & -z_1^2 - z_2^2 \end{pmatrix} |m| = \begin{pmatrix} x^2 - 1 & x y & x z \\ x y & y^2 - 1 & y z \\ x z & y z & z^2 - 1 \end{pmatrix} |m|,$$

wie wir im Abschnitt 23 bereits für ferne Kreisscheiben oder -Ringe gefunden haben. Für solche Kreisscheiben oder Ringe gilt also auch, wenn sie nahe sind, der Poissonsche Satz, da sie einem Stabkreuz erster (zweiter) Hauptlage kompensatorisch (äquivalent) sind. Sie wirken totalkraftschwächend und in horizontaler Lage horizontalkraftschwächend.

Umschlußringe sind in diese Betrachtung für den Fall einbegriffen, daß die Ringebene durch O geht.

Ein Panzerturm mit kreisförmigem Grundriß wirkt in horizontaler Beziehung wie ein System übereinander liegender Ringe, muß also stark horizontalkraftschwächend wirken. In einem Beispiel von Tissot (Annales hydrographiques 15, 1893, S. 155) sinkt die Richtkraft H′ auf weniger als ein Zehntel von H.

27. Erzeugung Nicht-Poissonscher Deviationen.

Wir betrachten hier nur die horizontale Deviation δ auf ebenem Kiel und beibehaltener mgn. Breite und leiten zunächst einige allgemeine Eigenschaften für ihre Fourier-Reihe nach dem mgn. Kurs ζ ab.

Es wirke zunächst ein einzelner festmagnetischer Nordpol. Die Fourier-Reihe für die durch ihn erzeugte Deviation kehrt ihr Zeichen um, wenn der Nordpol durch einen gleichstarken Südpol an derselben Stelle ersetzt wird. Die Reihe bleibt ungeändert, wenn man den Nordpol durch sein Spiegelbild an der XY-Ebene ersetzt. Ersetzt man ihn aber durch sein Spiegelbild an der Z-Axe, oder, was dasselbe ist, geht man zum mgn. Gegenkurs $\zeta + 180^0$ über, so wechseln nur die Glieder mit den ungraden Vielfachen von ζ ihr Zeichen. Dasselbe findet demnach statt, wenn man beide Spiegelungen zusammensetzt oder also den Nordpol durch sein Spiegelbild am Punkte O ersetzt. Dann aber kehrt seine Wirkung auf O nur ihren Sinn um, d. h. die durch ihn bewirkte Deviation ändert nur ihr Zeichen, was also durch bloße Zeichenänderung der Glieder mit ungraden Vielfachen von ζ erfolgen muß. Demnach kann die Fourier-Reihe für einen einzelnen festmgn. Pol, also auch für mehrere solche, nur die Glieder mit ungraden Vielfachen von ζ enthalten. In der Tat fanden wir im Poissonschen Fall, daß die Größen P, Q nur in diesen Gliedern vorkommen.

Ein flüchtiger Magnetstab stehe zunächst senkrecht zur XY-Ebene. Schwojt man das Schiff auf den mgn. Gegenkurs, so wird der Stab seinen flüchtigen Magnetismus nicht ändern, er verhält sich wie ein festmagnetischer, die zugehörige Fourier-Reihe enthält nur die Glieder mit ungraden Vielfachen von ζ. In der Tat fanden wir im Poissonschen Fall, daß die durch senkrechte Stäbe darstellbaren Größen c, f nur in diesen Gliedern vorkommen.

Ein flüchtiger Magnetstab liege wagerecht. Auf dem mgn. Gegenkurs wird er in derselben Stärke magnetisch, aber wo vorher sein N-(S-)Pol war, ist jetzt sein S-(N-)Pol. Demnach tritt im Vergleich zu einem festmagnetischen Stab hierbei nicht Zeichenänderung ein, d. h. die zugehörige Fourier-Reihe enthält nur die Glieder mit graden Vielfachen von ζ. In der Tat fanden wir im Poissonschen Fall, daß die durch wagerechte Stäbe darstellbaren Größen a, b, d, e nur in diesen Gliedern vorkommen.

Ein flüchtiger Magnetstab liege schräg. Der Gegenkurs bringt zwar jeden Pol in sein Spiegelbild zur Z-Axe, aber seine Stärke ändert sich, weil sich der Winkel des Stabes gegen den Erdvektor T geändert hat; wobei wir von der mgn. Breite $\pm 90^0$ absehen. Demnach enthält die Fourier-Reihe im Allgemeinen alle Glieder, die Koëffizienten der graden verschwinden mit dem Sinus, die der ungraden mit dem Cosinus des Winkels zwischen Stab und Z-Axe.

Eine flüchtig magnetische Kugel, Mittelpunkt in der XY-Ebene, und ihre Lage für den Gegenkurs sind bezüglich der Z-Axe Spiegelbilder voneinander, derart, daß dem N-(S-) Pol der einen der S-(N-)Pol der andern entspricht. Die Fourier-Reihe enthält also nur die graden Glieder. Liegt ihr Mittelpunkt nicht in der XY-Ebene, so ergibt ihr Spiegelbild am Punkte O einen N-(S-)Pol als Spiegelbild des S-(N-) Pols; die Deviation bleibt dieselbe, die Koëffizienten der Fourier-Reihe enthalten von den Mittelpunktkoordinaten der Kugel nur grade Potenzen. Mit der z-Koordinate verschwinden die ungraden Glieder.

Ein flüchtig magnetischer Körper sei in der Art regelmäßig, daß er bei einer Drehung um die Z-Axe um einen Winkel von

$$\frac{360^0}{n}$$

mit sich selbst zur Deckung kommt. Die Fourier-Reihe kann nur Glieder mit Vielfachen von $n\zeta$ enthalten, die niedrigsten sind $\sin n\zeta$ und $\cos n\zeta$, von einem etwaigen konstanten abgesehen. Durch Verschieben längs der Z-Axe, und durch Drehen des Körpers um die Z-Axe kann man den Koëffizienten von $\sin n\zeta$ und $\cos n\zeta$ vorgeschriebene Werte geben. Wählt man n der Reihe nach gleich 1, 2, 3, . ., so bildet man ein System von Körpern, dessen horizontale Deviation durch eine beliebig gegebene Fourier-Reihe nach ζ vorgeschrieben oder von einer vorgeschriebenen verschieden ist. Die vorgeschriebene kann z. B. die aus der exakten Formel, also aus dem Poissonschen Satze folgende sein. Natürlich sind die Körper in solchen

Entfernungen von einander anzuordnen, daß gegenseitige Beeinflussungen nicht erfolgen. Da es sich bei der Erzeugung einer Nicht-Poissonschen Deviation für jeden Körper nur um die Erfüllung von Ungleichungen handelt, ist das stets zu erreichen.

Am einfachsten nimmt man $n = 3$, also z. B. ein gleichseitiges Dreieck mit der Z-Axe als Mittel-Lot. Entweder schließt man so: die Deviation ist Null, wenn die Horizontalkraft H senkrecht einer Dreiecksseite ist, also sechsmal, also durchweg nach S. 31, wenn die exakte Formel gilt. Oder man schließt so: die Deviation hat eine Fourier-Entwicklung nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von 3ζ. Eine solche Entwicklung geht, wie auf S. 39 bewiesen ist, nie aus der exakten Formel hervor, außer in dem trivialen Fall konstanter Deviation. Daß aber ein solches Dreieck keine konstante, also verschwindende Deviation bewirkt, zeigen Anschauung und Versuch, sowie Zeichnung und Rechnung. Letzteres am einfachsten, indem man statt des Dreiecks drei gleiche horizontale Kreisringe um seine Ecken nimmt, deren Deviation, wie die von drei Polpaaren der Richtung H nach den unverkürzten Formeln von S. 98 berechnet werden kann.

Diese Überlegungen genügen, um zu schließen, daß die exakte Formel, also die ihr zu Grunde liegenden ersten zwei Poissonschen Gleichungen im Allgemeinen nicht gelten. Ebenso kann man allgemeiner U, V, W nach Kugelfunktionen von X, Y, Z entwickeln und zeigen, daß durch zweckmäßige Anordnungen der ablenkenden Körper jede vorgeschriebene Entwicklung hergestellt werden kann.

Auch kann man Deviationen herstellen, die durch eine Näherungsformel von vorgeschriebener Gliederzahl nicht mit vorgeschriebener Genauigkeit approximiert werden können. Dadurch werden die Untersuchungen des Abschnittes 20 dahin ergänzt, daß man nicht sagen kann, man könne immer die Deviationen durch eine fünf- oder sieben- oder neungliedrige Näherungsformel hinreichend genau darstellen.

Unsere Theorie der Deviation und Kompensation ist hiermit in der Hauptsache vollendet. Bevor wir zu den praktischen Anwendungen übergehen, sei ein Wort von Faye (a. a. O. S. 207) hervorgehoben, das die Bedeutung einer solchen Theorie und ihre Notwendigkeit für die Praxis treffend bezeichnet:

„Ces considérations montrent toute la difficulté d'une véritable théorie physique de ces phénomènes, mais elles prouvent mieux encore combien une telle théorie est indispensable pour éclairer et guider la pratique".

28. Darstellung und Kompensation durch magnetische Modelle.

Drei Magnetstäbe gleichgroß, gleichstark, gleichgerichtet, gleichentfernt von O, deren Entfernungen von O ein rechtwinkliges Dreibein bilden, sollen „in Kubatur", je zwei von ihnen „in Quadratur" befindlich genannt werden. Sind $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$; $(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}')$; $(\mathfrak{x}'', \mathfrak{y}'', \mathfrak{z}'')$ die Richtungen der drei Entfernungen, (x, y, z) die Richtung der Stäbe, so sind die Wirkungen der drei Stäbe proportional (S. 99).

$$\begin{array}{rrr}
(3\,\mathfrak{x}^2 - 1)\,x + & 3\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\;y + & 3\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{z}\;z \\
3\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\;x + & (3\,\mathfrak{y}^2 - 1)\,y + & 3\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\;z \\
3\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{z}\;x + & 3\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}\;y + & (3\,\mathfrak{z}^2 - 1)\,z \\[1ex]
(3\,\mathfrak{x}'^2 - 1)\,x + & 3\,\mathfrak{x}'\,\mathfrak{y}'\;y + & 3\,\mathfrak{x}'\,\mathfrak{z}'\;z \\
3\,\mathfrak{x}'\,\mathfrak{y}'\;x + & (3\,\mathfrak{y}'^2 - 1)\,y + & 3\,\mathfrak{y}'\,\mathfrak{z}'\;z \\
3\,\mathfrak{x}'\,\mathfrak{z}'\;x + & 3\,\mathfrak{y}'\,\mathfrak{z}'\;y + & (3\,\mathfrak{z}'^2 - 1)\,z \\[1ex]
(3\,\mathfrak{x}''^2 - 1)\,x + & 3\,\mathfrak{x}''\,\mathfrak{y}''\;y + & 3\,\mathfrak{x}''\,\mathfrak{z}''\;z \\
3\,\mathfrak{x}''\,\mathfrak{y}''\;x + & (3\,\mathfrak{y}''^2 - 1)\,y + & 3\,\mathfrak{y}''\,\mathfrak{z}''\;z \\
3\,\mathfrak{x}''\,\mathfrak{z}''\;x + & 3\,\mathfrak{y}''\,\mathfrak{z}''\;y + & (3\,\mathfrak{z}''^2 - 1)\,z
\end{array}$$

Zufolge der vorausgesetzten Orthogonalitätsbedingungen des Systems

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{x} & \mathfrak{x}' & \mathfrak{x}'' \\ \mathfrak{y} & \mathfrak{y}' & \mathfrak{y}'' \\ \mathfrak{z} & \mathfrak{z}' & \mathfrak{z}'' \end{pmatrix}$$

ist das skalare Produkt zweier verschiedener (identischer) Zeilen gleich Null (Eins), demnach kompensieren sich die drei Stäbe einander. Das gilt aber nur für ferne Stäbe. Nimmt man z. B. die drei Stäbe in den Axen in der Richtung (1, 0, 0), also in der ersten bzw. zweiten Hauptlage, so sind ihre Wirkungen proportional

$$\begin{array}{ccc} 4\frac{r}{\mathfrak{r}} + 8\frac{r^3}{\mathfrak{r}^3}\cdots & -2\frac{r}{\mathfrak{r}} + 3\frac{r^3}{\mathfrak{r}^3}\cdots & -2\frac{r}{\mathfrak{r}} + 3\frac{r^3}{\mathfrak{r}^3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\,, \end{array}$$

also kompensieren sich nur die ersten Glieder der Entwicklungen. Der Satz von der Kompensation dreier Stäbe in Kubatur gilt zunächst für festmagnetische Stäbe. Dann aber auch für flüchtige, da diese bei jeder Lage zum Erdvektor T (X, Y, Z) in derselben Weise magnetisch werden. Und er gilt auch für drei mgn. kongruente Körper, die immer in gleicher Weise magnetisch werden, also bei jeder Lage zu T immer drei Stäbe in Kubatur ergeben. Also:

Drei Körper in Kubatur kompensieren einander. Dieser Satz gilt nach seiner Herleitung unabgängig davon, ob die Körper Poissonsche sind; aber, daß sie klein sind im Verhältnis zur Entfernung ist wesentliche Voraussetzung.

Jeder der drei Körper kann durch einen ähnlichen und in Bezug auf O ähnlich gelegenen ersetzt werden, wenn zugleich seine Aufnahmefähigkeit entsprechend geändert wird. Auch dann sollen die drei Körper in Kubatur heißen. Demnach ist der Einfluß des Schiffes zu kompensieren, indem man zwei mgn. Modelle von ihm zu ihm in Kubatur bringt. Gilt der Poissonsche Satz, so genügen als solche Modelle vielleicht schon Ellipsoide oder elliptische oder rechteckige Platten oder Röhren od. dgl., da die Zahl der Parameter (drei Mittelpunktskoordinaten, drei Axenlängen, drei Stellungswinkel) grade ausreicht.

Während also der feste Magnetismus durch einen Festmagneten kompensiert werden kann, erfordert der flüchtige Magnetismus zwei Körper zur Kompensation. Daran liegt es, daß die älteren Bemühungen z. B. von Barlow 1823 eine solche Kompensation durch einen Körper zu erreichen, ergebnislos bleiben mußten[1]). Auch das in der Einleitung

1) Eine Vermutung in dieser Hinsicht wird zum ersten Mal geäußert von Lauffer i. d. Ann. d. Hydrogr. 33, 1905, S. 77.

erwähnte Verfahren von Barlow, die Deviation zwar nicht zu kompensieren, aber durch eine passend gelegte Kugel oder Kreisscheibe darzustellen, wird nunmehr verständlich. Seine Kugel oder Scheibe ist ein (unvollkommenes) Modell des Schiffes. Hätte er statt dessen zwei andere in Kubatur dazu genommen, so hätte er (unvollkommene) Kompensation erreicht. Die Zahl der Parameter einer Kugel ist drei, einer Kreisscheibe fünf; während im Poissonschen Fall neun Elemente zu kompensieren sind. Eine solche Kompensation muß also selbst im Poissonschen Fall unvollkommen bleiben und ebenso unvollkommen mußte die Barlowsche Darstellung bleiben. Allerdings, die horizontale Deviation $\delta = \zeta - \zeta'$, wie sie Barlow nur ins Auge faßte, hängt im Poissonschen Fall von nur fünf Parametern, den Koëffizienten der exakten Formel ab. Demnach wäre vielleicht ihre Darstellung durch eine Kreisscheibe, aber in allgemeiner Lage, möglich, während Barlow nur spezielle Lagen verwendet. Dann wäre die Kompensation der horizontalen Deviation durch zwei Kreisscheiben in Quadratur möglich. Nach der bloßen Parameter-Abzählung wäre mit zwei Kreisscheiben sogar die Kompensation der totalen Deviation möglich. Daß aber diese Schlußweise nicht genügt, sieht man an dem Beispiel von zwei Stäben, die zwar zehn Parameter enthalten, aber doch für eine vollständige Kompensation nur in besonderen Fällen ausreichen (S. 18). Bringt man ein Modell des Schiffes in eine zum Punkte O der Lage des Schiffes ähnliche Lage (in „Konjunktion" zum Schiff), und ist dann ζ'' der Kompaß-Kurs, so ist, da das Modell dieselbe Deviation, wie das Schiff bewirkt

$$\zeta - \zeta' = \zeta' - \zeta''.$$

Da man ζ' vor Anbringung, ζ'' nach Anbringung des Modells abliest, ist durch diese Gleichung der mgn. Kurs ζ und die Deviation $\zeta - \zeta'$ bekannt. Bei bekannter Deviation gibt dies umgekehrt das Mittel, um ein Modell und seine Lage auszuproben. Man muß das Modell so legen, daß der neue Kp. Kurs ζ'' auf möglichst vielen Kursen der obigen Gleichung genügt. Hat man danach zwei Modelle gefunden, so bringe man sie in Kubatur zu der ausgeprobten Lage. Dann hat man Kompensation. Eine solche Kompensation ist ihrer Herleitung zufolge lagen- und breitenfest, sie lohnt also die Mühe[1]).

Wann diese Kompensation bei Eisenschiffen anwendbar ist, muß die Erfahrung entscheiden. Es kommt darauf an, ob die Voraussetzung, daß die ablenkenden Teile des Schiffes fern vom Kompaß sind, genau genug zutrifft. Das ist voraussichtlich der Fall, wenn die neuerdings vom Schiffbau verlangte Forderung eines auf zwei bis drei Meter Umkugel eisenfreien Kompaß-Ortes erfüllt ist. Da dann trotzdem der Poissonsche Satz nicht zu gelten braucht, wird die oben vorgeschlagene Kompensation auch in diesem Fall nicht überflüssig. (Vgl. Abschnitt 31.)

Während Barlow bei der Verwendung der Scheibe zur Darstellung der Deviation stehen blieb und die Kompensation mit ihrer Hilfe noch 1823 für unausführbar gefunden hatte, entdeckte Foster 1824 an Bord des Griper auf einer Reise nach Spitzbergen die Möglichkeit der Kompensation mit einer Scheibe[2]). Hatte Barlow seine Scheibe an eine Stelle (x, y, z) mit etwa $x = z > o$, $y = 0$ gebracht[3]), so brachte Foster sie ebensoweit von O an eine Stelle mit etwa $-x = z > 0$, $y = 0$. Da beide Scheiben parallel der YZ-Ebene waren, waren sie nach unserer Ausdrucksweise in Quadratur. Die zu beiden in Kubatur befindliche Scheibe ist in der Y-Axe zu denken. Stellte die Barlow-Scheibe den flüchtigen Schiffsmagnetismus dar, so mußte die Foster-Scheibe mit der gedachten dritten zusammen denselben kompensieren. In hohen mgn. Breiten ist die Induktionsaxe in den drei Scheiben nahe senkrecht, also die Horizontalkomponente in O der dritten Scheibe sehr klein. So kommt

---

1) Mit Modellen hinreichender Größe wäre der Versuch von S. 63/64 schon mit heute verfügbaren Mitteln zu verwirklichen. Bei festliegendem Modell wirkt der Erdmagnetismus wie fester. Das künstliche Feld braucht mit dem Erdfeld nicht von vergleichbarer Stärke zu sein.

2) Edinb. Phil. Journal 1924. Popular view of Mr. Barlow's Discoveries. Vgl. hierzu 2) S. 121.

3) Barlow, Magnetic Attractions, London 1824, Plate 2, Fig. 8.

es, daß für die bloß horizontale Deviation die Foster-Scheibe allein bereits eine angenäherte Kompensation ergibt, aber nur in hohen mgn. Breiten. In der Tat ist die Barlow-Scheibe in niedrigen mgn. Breiten zur Darstellung der Deviation, die Foster-Scheibe in hohen mgn. Breiten zur Kompensation der Deviation bei Holzschiffen bis in die Mitte des 19. Jahrhunderts in Gebrauch geblieben.

Die großen Verdienste Barlows erkennt Airy mit den Worten an[1]: „Barlow verdanken wir fast alle experimentelle Kenntnis, die wir über die von Eisenmassen ausgehenden Störungen besitzen ... Ohne den von Barlow vorgeschlagenen Apparat würde ich niemals zu dem vollkommeneren gekommen sein; nach ihm war die Erfindung von etwas Vollkommenerem leicht[2]."

Daß auch Poisson an Barlow anknüpfte und so zu seinem grundlegenden Ansatz gekommen ist, haben wir bereits in der Einleitung hervorgehoben.

Fände Anziehung umgekehrt proportional der n-ten Potenz der Entfernung statt, so wäre in den oben verwendeten Formeln für die Komponenten der Wirkung eines Polpaares auf O der Faktor 3, in der Differentialgleichung der Kraftlinien (S. 104) der Exponent 3 durch $n+1$ zu ersetzen und die Differentialgleichung für ferne Kraftlinien würde $(n+1)\,xy\,dx = (nx^2 - y^2)\,dy$, integriert y^{2n} prop. $(x^2+y^2)^{n+1}$ oder r prop. $\sin^n \varphi$. Für $n=1$ liegen also die Feldstärken dritter Hauptlage auf den Graden $y = \pm x$, die fernen Kraftlinien werden Kreise $(x^2+y^2):y = \text{konst.}$, zwei Scheiben einer Ebene in Quadratur kompensieren einander; dies zur Erläuterung des Schlusses von Abschnitt 4.

29. Ein Zahlenbeispiel.

Die Kompensation durch mgn. Modelle beruhte auf dem Satz von den drei Körpern in Kubatur und dieser darauf, daß man aus einer orthogonalen Matrize drei andere ableiten

1) Phil. Trans. Roy. Soc. 1839.

2) Meldau i. d. Ann. d. Hydrographie 33, 1905, S. 410—416.

kann, die sich kompensieren. Hierauf beruht auch die im folgenden Abschnitt gebrauchte Darstellung und Kompensation einer Matrize mit verschwindender Divergenz und Rotation durch höchstens zwei Kugeln. Deshalb wird es gut sein, diesen Satz durch ein Zahlenbeispiel zu erläutern. Mit dessen Hilfe ist es leicht Zahlenbeispiele für die in den folgenden beiden Abschnitten behandelten Kompensationen zu bilden.

Die orthogonale Matrize bildet man nach den bekannten Eulerschen Formeln. Die rationalen Brüche sind im Folgenden nicht in Dezimalbrüche abgekürzt, um die genaue Erfüllung der Kompensationsbedingungen noch erkennen zu lassen. Die Matrize

$$\begin{pmatrix} 159 & 732 & 664 \\ 612 & -601 & 516 \\ 776 & 324 & -543 \end{pmatrix} : 1001 = \begin{pmatrix} \mathfrak{x} & \mathfrak{y} & \mathfrak{z} \\ \mathfrak{x}' & \mathfrak{y}' & \mathfrak{z}' \\ \mathfrak{x}'' & \mathfrak{y}'' & \mathfrak{z}'' \end{pmatrix}$$

erfüllt die Orthogonalitätsbedingungen:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{x}'^2 + \mathfrak{x}''^2 = 1 \qquad && \mathfrak{y}\mathfrak{z} + \mathfrak{y}'\mathfrak{z}' + \mathfrak{y}''\mathfrak{z}'' = 0 \\ &\mathfrak{y}^2 + \mathfrak{y}'^2 + \mathfrak{y}''^2 = 1 && \mathfrak{x}\mathfrak{z} + \mathfrak{x}'\mathfrak{z}' + \mathfrak{x}''\mathfrak{z}'' = 0 \\ &\mathfrak{z}^2 + \mathfrak{z}'^2 + \mathfrak{z}''^2 = 1 && \mathfrak{x}\mathfrak{y} + \mathfrak{x}'\mathfrak{y}' + \mathfrak{x}''\mathfrak{y}'' = 0 . \end{aligned}$$

Bildet man daraus die drei Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 3\,\mathfrak{x}^2 - 1 & 3\,\mathfrak{x}\mathfrak{y} & 3\,\mathfrak{x}\mathfrak{z} \\ 3\,\mathfrak{x}\mathfrak{y} & 3\,\mathfrak{y}^2 - 1 & 3\,\mathfrak{y}\mathfrak{z} \\ 3\,\mathfrak{x}\mathfrak{z} & 3\,\mathfrak{y}\mathfrak{z} & 3\,\mathfrak{z}^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3\,\mathfrak{x}'^2 - 1 & 3\,\mathfrak{x}'\mathfrak{y}' & 3\,\mathfrak{x}'\mathfrak{z}' \\ 3\,\mathfrak{x}'\mathfrak{y}' & 3\,\mathfrak{y}'^2 - 1 & 3\,\mathfrak{y}'\mathfrak{z}' \\ 3\,\mathfrak{x}'\mathfrak{z}' & 3\,\mathfrak{y}'\mathfrak{z}' & 3\,\mathfrak{z}'^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3\,\mathfrak{x}''^2 - 1 & 3\,\mathfrak{x}''\mathfrak{y}'' & 3\,\mathfrak{x}''\mathfrak{z}'' \\ 3\,\mathfrak{x}''\mathfrak{y}'' & 3\,\mathfrak{y}''^2 - 1 & 3\,\mathfrak{y}''\mathfrak{z}'' \\ 3\,\mathfrak{x}''\mathfrak{z}'' & 3\,\mathfrak{y}''\mathfrak{z}'' & 3\,\mathfrak{z}''^2 - 1 \end{pmatrix}$$

so erhält man:

$$\begin{pmatrix} -926\,158 & 349\,164 & 316\,728 \\ 349\,164 & 605\,471 & 1\,458\,144 \\ 316\,728 & 1\,458\,144 & 320\,687 \end{pmatrix} : 1001^2$$

$$\begin{pmatrix} 121\,631 & -1\,103\,436 & 947\,376 \\ -1\,103\,436 & 81\,602 & -930\,348 \\ 947\,376 & -930\,348 & -203\,233 \end{pmatrix} : 1001^2$$

$$\begin{pmatrix} 804\,527 & 754\,272 & -1\,264\,104 \\ 754\,272 & -687\,073 & -527\,796 \\ -1\,264\,104 & -527\,796 & -117\,454 \end{pmatrix} : 1001^2$$

Diese drei Matrizen ergeben zusammen eine Matrize, deren neun Elemente Null sind.

30. Darstellung und Kompensation durch Kugeln.

Die Deviationsmatrize für eine kleine oder ferne Kugel, Mittelpunktsrichtung $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$, fanden wir gleich

$$\begin{pmatrix} 3\mathfrak{x}^2-1 & 3\mathfrak{x}\mathfrak{y} & 3\mathfrak{x}\mathfrak{z} \\ 3\mathfrak{x}\mathfrak{y} & 3\mathfrak{y}^2-1 & 3\mathfrak{y}\mathfrak{z} \\ 3\mathfrak{x}\mathfrak{z} & 3\mathfrak{y}\mathfrak{z} & 3\mathfrak{z}^2-1 \end{pmatrix} m.$$

Die Norm der Matrize ist $6\,m^2$; m ist das mgn. Maß der Kugel. Für eine solche Kugel, also auch für ein System solcher Kugeln (ohne Wechselwirkungen) verschwinden Rotation und Divergenz, sie sind richtkrafterhaltend, Hinzufügen oder Fortnehmen von Kugeln ändert Rotation und Divergenz, also Richtkraft eines Systems von Körpern nicht.

Umgekehrt kann jede Matrize mit verschwindender Rotation und Divergenz durch höchstens zwei Kugeln dargestellt und durch höchstens zwei Kugeln kompensiert werden. Um dies zu beweisen, sei

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

die Matrize mit verschwindender Rotation und Divergenz. Wir wollen dieselbe zunächst zerlegen in

$$j'\begin{pmatrix} p'^2 & p'q' & p'r' \\ q'p' & q'^2 & q'r' \\ r'p' & r'q' & r'^2 \end{pmatrix} + j''\begin{pmatrix} p''^2 & p''q'' & p''r'' \\ q''p'' & q''^2 & q''r'' \\ r''p'' & r''q'' & r''^2 \end{pmatrix} + j'''\begin{pmatrix} p'''^2 & p'''q''' & p'''r''' \\ q'''p''' & q'''^2 & q'''r''' \\ r'''p''' & r'''q''' & r'''^2 \end{pmatrix},$$

wobei das System

$$\begin{pmatrix} p' & p'' & p''' \\ q' & q'' & q''' \\ r' & r'' & r''' \end{pmatrix}$$

den Orthogonalitätsbedingungen genügen soll: skalares Produkt zwei verschiedener (identischer) Zeilen gleich Null (Eins). Infolgedessen bestehen erstens die 6 Gleichungen

$$\begin{aligned}
a - j &= (j'-j)\,p'^2 + (j''-j)\,p''^2 + (j'''-j)\,p'''^2 \\
e - j &= (j'-j)\,q'^2 + (j''-j)\,q''^2 + (j'''-j)\,q'''^2 \\
k - j &= (j'-j)\,r'^2 + (j''-j)\,r''^2 + (j'''-j)\,r'''^2 \\
b = d &= (j'-j)\,p'q' + (j''-j)\,p''q'' + (j'''-j)\,p'''q''' \\
c = g &= (j'-j)\,p'r' + (j''-j)\,p''r'' + (j'''-j)\,p'''r''' \\
f = h &= (j'-j)\,q'r' + (j''-j)\,q''r'' + (j'''-j)\,q'''r''' ,
\end{aligned}$$

aus denen

$$\begin{vmatrix} a-j & b & c \\ d & e-j & f \\ g & h & k-j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{j'-j}\,p' & \sqrt{j''-j}\,p'' & \sqrt{j'''-j}\,p''' \\ \sqrt{j'-j}\,q' & \sqrt{j''-j}\,q'' & \sqrt{j'''-j}\,q''' \\ \sqrt{j'-j}\,r' & \sqrt{j''-j}\,r'' & \sqrt{j'''-j}\,r''' \end{vmatrix}^2 = (j'-j)(j''-j)(j'''-j)$$

folgt, d. h. j', j'', j''' sind die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} a-j & b & c \\ d & e-j & f \\ g & h & k-j \end{vmatrix} = 0.$$

Die drei Wurzeln sind reell, weil die Rotation verschwindet, sie haben die Summe Null, weil die Divergenz verschwindet. Nachdem so j', j'', j''' gefunden sind, ergeben zweitens die verträglichen Gleichungen

$$\begin{aligned}
(a-j')\,p' + b\,q' + c\,r' &= (j''-j')\,p''(p'p''+q'q''+r'r'') + \\
&\quad (j'''-j')\,p'''(p'p'''+q'q'''+r'r''') = 0 \\
d\,p' + (e-j')\,q' + f\,r' &= (j''-j')\,q''(p'p''+q'q''+r'r'') + \\
&\quad (j'''-j')\,q'''(p'p'''+q'q'''+r'r''') = 0 \\
g\,p' + h\,q' + (k-j')\,r' &= (j''-j')\,r''(p'p''+q'q''+r'r'') + \\
&\quad (j'''-j')\,r'''(p'p'''+q'q'''+r'r''') = 0
\end{aligned}$$

die Verhältnisse und wegen $p'^2 + q'^2 + r'^2 = 1$ die Werte von p', q', r' bis auf ein gemeinsames unwesentliches Zeichen. Ebenso erhält man p'', q'', r'' und ebenso p''', q''', r'''. Mit Rücksicht auf $j' + j'' + j''' = 0$ läßt sich die gefundene Zerlegung schreiben:

$$\frac{j'}{3}\begin{pmatrix} 3p'^2-1 & 3p'q' & 3p'r' \\ 3q'p' & 3q'^2-1 & 3q'r' \\ 3r'p' & 3r'q' & 3r'^2-1 \end{pmatrix} + \frac{j''}{3}\begin{pmatrix} 3p''^2-1 & 3p''q'' & 3p''r'' \\ 3q''p'' & 3q''^2-1 & 3q''r'' \\ 3r''p'' & 3r''q'' & 3r''^2-1 \end{pmatrix} +$$
$$\frac{j'''}{3}\begin{pmatrix} 3p'''^2-1 & 3p'''q''' & 3p'''r''' \\ 3q'''p''' & 3q'''^2-1 & 3q'''r''' \\ 3r'''p''' & 3r'''q''' & 3r'''^2-1 \end{pmatrix}.$$

Die drei Matrizen sind kompensatorisch wie die im vorhergehenden Abschnitt. Subtrahiert man ihre $^1/_3 j'''$-fache Summe, so erhält man:

$$\frac{j'-j'''}{3}\begin{pmatrix} 3p'^2-1 & 3p'q' & 3p'r' \\ 3q'p' & 3q'^2-1 & 3q'r' \\ 3r'p' & 3r'q' & 3r'^2-1 \end{pmatrix} + \frac{j''-j'''}{3}\begin{pmatrix} 3p''^2-1 & 3p''q'' & 3p''r'' \\ 3q''p'' & 3q''^2-1 & 3q''r'' \\ 3r''p'' & 3r''q'' & 3r''^2-1 \end{pmatrix}.$$

Wählt man für j''' die kleinste der drei Zahlen j', j'', j''', so sind $j'-j'''$, $j''-j'''$ positiv und man erhält die Darstellung der gegebenen Matrize durch zwei Kugeln mit den Maßen

$$\frac{j'-j'''}{3}, \quad \frac{j''-j'''}{3},$$

deren Mittelpunktsrichtungen (p', q', r') und (p'', q'', r'') senkrecht auf einander stehen. Wählt man für j''' die größte der drei Zahlen j', j'', j''', so sind $j'-j'''$, $j''-j'''$ negativ und man erhält die Kompensation der gegebenen Matrize durch zwei Kugeln mit den Maßen

$$\frac{j'''-j'}{3}, \quad \frac{j'''-j''}{3}$$

und denselben Mittelpunktsrichtungen.

In dem singulären Fall, daß zwei der drei Wurzeln j', j'', j''' gleich sind, seien die drei Wurzeln entweder $j, j, -2j < 0$ oder $-j, -j, 2j > 0$.

Im ersten Fall erhält man für

$$j' = j, \quad j'' = j, \quad j''' = -2j$$

die Darstellung durch zwei Kugeln in Quadratur, für

$$j' = -2j, \quad j'' = j, \quad j''' = j$$

die Kompensation durch eine Kugel.

Im zweiten Fall erhält man für

$$j' = 2j, \quad j'' = -j, \quad j''' = -j$$

die Darstellung durch eine Kugel, und für

$$j' = -j, \quad j'' = -j, \quad j''' = 2j$$

die Kompensation durch zwei Kugeln in Quadratur. Die darstellende (bzw. kompensierende) Kugel ist mit dem kompensierenden (bzw. darstellenden) Kugelpaar in Kubatur.

Eine Kugel stärkt die Richtkraft in ihrer Mittelpunktsrichtung, zwei Kugeln in Quadratur stärken die Richtkraft in ihrer Ebene. Legt man z. B. die beiden Mitten in die XY-Ebene ($r' = 0$, $r'' = 0$), so wird die Matrize

$$\begin{pmatrix} 3p'^2-1+3p''^2-1 & 3p'q'+3p''q'' & 0 \\ 3p'q'+3p''q'' & 3q'^2-1+3q''^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} m,$$

woraus für die relative Horizontalkraft

$$\lambda = 1 + \frac{a+e}{2}$$

in der Tat der Zuwachs m folgt.

Hängt man die beiden Kugeln in Quadratur oder besser zum Gewichtausgleich vier symmetrisch verteilt am Kompaßhaus außen kardanisch auf, so erhält man Horizontalkraftstärkung bei jeder Lage des Schiffes.

Die nach Airy übliche Kompensation mit einer Kugel können wir mit unsern Mitteln jetzt so darstellen.

Man geht nur darauf aus, den größten Koëffizienten

$$\mathfrak{D} = \frac{a-e}{2\lambda}$$

zu kompensieren. Nimmt man eine Kugel mit dem Mittelpunkt in der Richtung (p, q, 0) mit $p^2 + q^2 = 1$, so ändert sich die Deviationsmatrize in

$$\begin{pmatrix} a + m(3p^2-1) & b + 3mpq & c \\ d + 3mpq & e + m(3q^2-1) & f \\ g & h & k - m \end{pmatrix}.$$

Demnach hat man der Gleichung zu genügen:

$$a - e + 3m(p^2 - q^2) = 0.$$

Das kann man bei gegebenen p, q und gegebener Kugel (passender Aufnahmefähigkeit) durch Wahl von m, also der Entfernung erreichen, sofern nur die Vorzeichen von p^2-q^2 und $a-e$ verschieden sind. Bei positivem (negativem) $a-e$ wählt man $p=0$, $q=\pm 1$ ($q=0$, $p=\pm 1$), also den Kugelmittelpunkt auf der Y-Axe (auf der X-Axe). Durch Nähern oder Entfernen der Kugel auf der Y-Axe (auf der X-Axe) wird $a-e-3m$ ($a-e+3m$) zu Null gemacht. Eine solche Kugel nennen wir eine $\mathfrak{D}$-Kugel mit

$$m_{\mathfrak{D}} = \left|\frac{a-e}{3}\right|$$

Die Kompensationsfähigkeit der Kugel in Abhängigkeit von der Entfernung kann man vorher an Land feststellen. Derartige Versuche haben in Übereinstimmung mit den Ausführungen auf S. 105 ergeben, daß für eine Kugel vom Halbmesser r in der

$$\text{Y - (bzw. X -) Axe} \quad a\ (\text{bzw. } e) = -2\left(\frac{r}{\mathfrak{r}}\right)^3, \quad e\ (\text{bzw. } a) = 4\left(\frac{r^3}{\mathfrak{r}}\right)$$

ist[1]). Dadurch wird bestätigt, daß eine kleine oder ferne Kugel wie ein Polpaar wirkt.

Man kann die Kompensationsmöglichkeiten einer Kugel besser ausnutzen, indem man zugleich

$$\mathfrak{D} = \frac{a - e}{2\lambda} \text{ und } \mathfrak{E} = \frac{b + d}{2\lambda},$$

was jetzt von Null verschieden vorausgesetzt werden kann, zu Null kompensiert. Das erfordert die Erfüllung der zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} a - e + 3\,m\,(p^2 - q^2) &= 0 \\ b + d + 6\,m\,p\,q &= 0. \end{aligned}$$

Setzt man $p = \sin\varphi$, $q = \cos\varphi$, so hat man die zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} 3\,m \cos 2\,\varphi &= a - e \\ 3\,m \sin 2\,\varphi &= -(b + d). \end{aligned}$$

Also ist φ eindeutig zu bestimmen aus

$$\operatorname{tg} 2\,\varphi = -\frac{b + d}{a - e}, \qquad (b + d) \sin 2\,\varphi < 0,$$

und m positiv aus

$$m = -\frac{(b + d)}{3 \sin 2\,\varphi} = {}^1/_3 \sqrt{(b + d)^2 + (a - e)^2}$$

Statt hier zwei Kompensationen. die von a—e und die von b + d, durch eine Kugel zu bewirken, können wir sie auf zwei Kugeln verteilen, wie wir den festen Magnetismus durch drei, statt durch einen festmagnetischen Stab, den

1) Encykl. a. a. O. S. 361, Anmk. 148.

flüchtigen durch neun statt durch drei flüchtigmagnetische Stäbe kompensiert haben. Dazu müssen wir zu der $\mathfrak{D}$-Kugel eine $\mathfrak{E}$-Kugel hinzunehmen; darunter verstehen wir eine Kugel, deren Mittelpunkt in einer Richtung $(\pm\sqrt{1/2}, \pm\sqrt{1/2}, 0)$, also auf einer der beiden um 45^0 gegen die X- und Y-Axe geneigten Graden liegt. Mit einer solchen $\mathfrak{E}$-Kugel ist in jedem Fall der Gleichung

$$b + d + 6\,m\,p\,q = 0$$

d. h., da hier $\pm p = \pm q = \sqrt{1/2}$ ist, der Gleichung

$$b + d \pm 3\,m = 0, \text{ mit } m_{\mathfrak{E}} = \left|\frac{b+d}{3}\right|$$

zu genügen. Ist $b + d$ positiv, so muß pq negativ, also die $\mathfrak{E}$-Kugel im zweiten oder vierten Quadranten, ist $b + d$ negativ, so muß pq positiv, also die $\mathfrak{E}$-Kugel im ersten oder dritten Quadranten gewählt werden.

Hat man die $\mathfrak{D}$-Kugel und die $\mathfrak{E}$-Kugel gefunden, so kann man sie beide zu der A i r y - Kugel vereinigen, deren m und φ bestimmt sind durch

$$m^2 = \left(\frac{a-e}{3}\right)^2 + \left(\frac{b+d}{3}\right)^2 = m^2_{\mathfrak{D}} + m^2_{\mathfrak{E}}$$
$$m \cdot \cos 2\varphi = m_{\mathfrak{D}}$$
$$m \cdot \sin 2\varphi = m_{\mathfrak{E}}$$

Wir nennen zwei Kugeln „in Opposition", wenn sie gleiches Maß haben und sich in konträren Richtungen von O befinden. Zwei Kugeln in Opposition haben die gleiche Matrize, da ihre Elemente die Mittelpunktskoordinaten nur in zweiter Ordnung enthalten, also von deren Vorzeichenänderung unberührt bleiben. Man kann also eine Kompensationskugel durch ein Paar in Opposition ersetzen, deren Maß m man halb so groß wählt. Nicht Symmetriegründe[1]) sind hierfür maßgebend, denn die mgn. (!) Symmetrie wird durch eine Kugel so wenig gestört, wie durch ein Oppositionspaar.

1) S. z. B. Der Kompaß an Bord, 1889, S. 163, Z. 39. Über den Nicht-Poissonschen Fall s. u.

Aber die Möglichkeit m halb so groß, also die Kugeln kleiner, die Entfernung größer nehmen zu können, ist von Vorteil.

Arbeitet man nur mit Kugeln einer (passend gewählten) Größe, verlegt man also die Änderungen des m nur in die Entfernungen, so kann man die zuerst als $\mathfrak{D}$- und $\mathfrak{E}$-Kugel verwendeten Kugeln nachher als das erforderliche Kugelpaar in Opposition gebrauchen. Der Umweg hat den Vorteil, daß man besser mit zwei Kugeln je eine Entfernung als mit einer Kugel eine Entfernung und eine Richtung durch Versuch ermittelt.

Durch die Airy-Kugeln wird in der neuen Matrize nicht nur $a - e = b + d = 0$, sondern noch der Koëffizient k um den Betrag m verkleinert, also die Deviation bei Lage verändert. Jedem Grad kompensierter Deviation entspricht in unsern Breiten ein Krängungsfehler nach Lee von etwa 6' für jeden Grad Krängung (Adm. Man. 1920, S. 78; Rottok, a. a. O. S. 136). Die Verkleinerung von a und k um

$$m = \frac{a-e}{3} = \frac{2}{3}\lambda\mathfrak{D}\,,$$

die Vergrößerung von e um 2 m vergrößert λ in $\lambda\,(1 + {}^1\!/_3\,\mathfrak{D})$ und verändert den Krängungsfaktor

$$\mathfrak{J} = \left(e - k - \frac{R}{Z}\right)\frac{\operatorname{tg}\theta}{\lambda} \text{ in } \left(a - k - \frac{R}{Z}\right)\frac{\operatorname{tg}\theta}{\lambda(1+{}^1\!/_3\mathfrak{D})} = \frac{\mathfrak{J} + 2\,\mathfrak{D}\operatorname{tg}\theta}{1 + {}^1\!/_3\,\mathfrak{D}}\,.$$

Da $\operatorname{arc} 1^0 = 0{,}0175$ und $2 \operatorname{tg}\theta$ etwa gleich 3 ist, spricht die Angabe des Adm. Man. gegen den Poissonschen Satz. Die Veränderung des $\mathfrak{J}$ kann auch eine Verschlechterung sein.

Dieser Fall tritt z. B. ein bei eisernen Steuerhäusern. Jeanniot gibt an (Revue maritime 154, 1902, S. 1195), daß beim Fleurus der Krängungsfaktor durch die $\mathfrak{D}$-Kugeln von $1^0{,}03$ auf $1^0{,}7$ wuchs! In solchen Fällen ist es richtiger, die Kugeln durch Kreisscheiben oder -Ringe in der XY-Ebene zu ersetzen, da diese keine senkrechte Komponente in O ergeben[1]).

1) Solche Ringe verwendet Magnaghi, s. Enc. a. a. O. S. 366.

Statt dessen nimmt man, weil die Aufnahmefähigkeit flacher Scheiben nicht ausreicht, dicke Scheiben in Gestalt von Kugelzonen. Dann muß man wieder mit einer, wenn auch kleinen Vertikalkomponente rechnen. Flache Scheiben, aber aus einer aufnahmestarken Eisenmischung, wären vorzuziehen.

Solange man von der Deviationsänderung durch Lage und mgn. Breitenänderung absieht, oder für diese eine besondere Kompensation beabsichtigt, könnte man statt der Kugeln, Kugelzonen, Kreisscheiben oder -Ringe beliebige Drehkörper mit senkrechter Axe verwenden, die in horizontaler Hinsicht Poissonsche Körper sind. Da für solche die Horizontalkomponente immer eine konstante Größe und die Richtung von H hat, ist ihr Einfluß auf den Kompaß nach einem Versuch zur Feststellung des Maßes von vornherein anzugeben. In der Theorie wie in der Praxis minder einfach sind die oft angewandten Röhren oder Walzen mit horizontaler, durch O gehender Axe. Solche Körperpaare wären auf Grund der Fourier-Reihe zu behandeln[1]. Allgemein ist jedes Körperpaar anwendbar, das durch Drehung um 180° um die Z-Axe mit sich zur Deckung kommt. Dessen Fourier-Reihe nach dem mgn. Kurs ζ fängt, von einer Konstanten abgesehen, mit den Gliedern $\sin 2\zeta$, $\cos 2\zeta$ an, die mithin zur Kompensierung entsprechender Glieder zu benutzen sind.

Das Auftreten höherer Glieder kann man durch Wahl einer hinreichend großen Entfernung vermeiden, wenn die Aufnahmefähigkeit des Körperpaares entsprechend groß genommen werden kann.

Zur Vermeidung des Einflusses auf den Krängungsfaktor wäre das Zylinderpaar durch ein Stäbepaar zu ersetzen, wenn man es in hinreichender Entfernung stark genug machen kann. Wenn man aber sagt, eine Kugel, Mittelpunkt auf der Y-Axe, sei vom Typus $+ e$[2], so ist das ungenau. Eine solche Kugel hat die Matrize

1) Von a, e, .. kann man hier nicht reden, wie z. B. Lehrb. d. Nav. a. d. Kais. Marineschule 1917, S. 451/52.

2) Z. B. Enc. der math. Wiss. VI, I. S. 361. Z. 27.

$\begin{pmatrix} -m & 0 & 0 \\ 0 & 2m & 0 \\ 0 & 0 & -m \end{pmatrix}$, während die eines e-Stabes ist: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ein solcher Stab in erster Hauptlage ($e > 0$ ist also gleich einer Kugel mit $m = {}^1/_3 e$ plus einer Totalkraftstärkung

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

Ebenso ist ein solcher Stab in zweiter Hauptlage ($e < 0$) mit einer Kugel ($m = -{}^1/_3 e$) zusammen gleich einer Totalkraftschwächung.

Einen solchen Stab in zweiter Hauptlage in der Y-Richtung unter dem Kompaß verwendet Florian[1]). Das ist aber kein kleiner oder ferner Stab; auf ihn ist nicht die spezielle, sondern höchstens die allgemeine Theorie der Stäbe des Abschnittes 5 anwendbar.

Allgemein gilt bei einem Stabe in erster (zweiter) Hauptlage, bei dem also $u : v : w = x : y : z$ ist, die Zerlegung in Kugel und Richtkraftstärkung (-schwächung)

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix} 3m = \begin{pmatrix} 3x^2-1 & 3xy & 3xz \\ 3xy & 3y^2-1 & 3yz \\ 3xz & 3yz & 3z^2-1 \end{pmatrix} m + \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}.$$

wo $m > 0$ ($m < 0$) ist.

Stäbe in erster Hauptlage haben mit Kugeln die leichte Anwendbarkeit gemein, weil sie auch nur von drei Parametern abhängen. Dasselbe gilt von Stäben in zweiter Hauptlage, die zwar von vier Parametern abhängen, von denen aber je eine einfache Schar einander äquivalent, nämlich zu einem in erster Hauptlage kompensierend, ist. Jede aus Stäben in erster oder zweiter Hauptlage zusammengesetzte Matrize hat verschwindende Rotation. Umgekehrt ist jede Matrize

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & k \end{pmatrix}$$

1) Mitteilungen aus dem Gebiete des Seewesens 25, 1897, S. 27. Stupar, Lehrbuch der terrestrischen Navigation, Fiume 1905.

mit verschwindender Rotation durch höchstens drei solche Stäbe darstellbar und kompensierbar. Denn man braucht nur die am Anfang dieses Abschnittes gemachte Zerlegung einer Matrize mit verschwindender Rotation in drei Matrizen vom Range Eins vorzunehmen. Jedem positiven (negativen) Wert einer der drei Größen j', j'', j''' entspricht ein Stab in erster (zweiter) Hauptlage.

31. Darstellung und Kompensation durch Stäbe und Kugeln.

Die Kompensation des flüchtigen Magnetismus durch die zwei A i r y - Kugeln wird, wenn größere Änderungen der mgn. Breite θ berücksichtigt werden sollen, ergänzt durch einen Stab vom c-Typus, den F l i n d e r s - Stab. Er liegt senkrecht, Richtung (0, 0, 1), in der XZ-Ebene, das obere Ende in der X-Axe, hinter (vor) dem Kompaß, wenn c negativ (positiv) ist. (Abb. 13.) Soll, wie es beabsichtigt ist, seine Feldstärke in O in die X-Axe fallen, so muß er entweder dünn und lang, ein Stab im Sinne S m i t h's sein. Dann liegt seine durch O gehende Kraftlinie in der X-Axe. Oder, ist er nicht lang, so muß man ihn in dritte Hauptlage zu einem in O in der X-Axe liegenden Linienelement bringen, was nach Abschnitt 23 zu bewerkstelligen wäre. (S. 103).

In der Praxis nimmt man, um hinreichende Aufnahmefähigkeit zu erreichen, nicht Stäbe, sondern Walzen oder Röhren, von z. B. 8 cm Durchmesser. Infolgedessen liegen die Pole nicht in den Enden. Deshalb legt man das obere Ende um etwa ein Zwölftel der Länge des Stabes über die XY-Ebene „zur Vermeidung vertikaler Kräfte“ (Enc. der math. Wiss., VI, I, S. 362). In Der Magnetkompaß an Bord eiserner Schiffe, Bremen 1924, S. 60 gibt M e l d a u statt dessen an: „2 cm, damit die von der F l i n d e r s stange auf die Rose ausgeübte Kraft parallel zum Deck ist.“ Bei einer so summarischen Festsetzung treten im Allgemeinen in O vertikale Komponenten auf und man täte besser die vertikale Lage des F l i n d e r s - Stabes so zu bestimmen, daß dadurch der noch nicht kompensierte Teil von e—k mitkompensiert würde. Durch seitliche Verschiebung des Flinders-Stabes könnte man ferner eine Komponente in Y-Richtung zur Kompensation von f erzielen. Ein solcher Stab, Richtung Z-Axe, Mittelpunktsrichtung (c : f : k) ist schon durch die Theorie der Stäbe nahegelegt. Es ist einer der drei Stäbe, durch die die Deviation bei der zweiten Art Zerlegung dargestellt oder kompensiert werden kann. (Abschnitt 5).

Die übliche Kompensation des flüchtigen Magnetismus durch die Airy-Kugeln und den Flinders-Stab macht also $a = e$, $b + d = o$, $c = o$ und vermindert k um m, was nicht immer eine Verbesserung ist. Die übrigen Elemente bleiben unberücksichtigt. Demgegenüber zeigen wir, daß mit denselben Hilfsmitteln, zwei Kugeln und einem Stab, sogar eine vollständige Kompensation des flüchtigen Magnetismus bewirkt werden kann. Da die Kugeln Divergenz und Rotation nicht ändern, muß der Stab aus Divergenz und Rotation bestimmt werden.

Wir wählen die Richtungskosinus x, y, z des Stabes so, daß sie der Gleichung genügen:

$$(f - h)\,x + (g - c)\,y + (b - d)\,z = 0$$

(d. h. Stab senkrecht zur Rotation), und dann die mit dem Maß des Stabes multiplizierten Richtungen der Komponenten der Feldstärke in O so:

$$\begin{aligned} m\,u &= -(a + e + k)\,x - (b - d)\,y + (g - c)\,z = x' \\ m\,v &= (b - d)\,x - (a + e + k)\,y - (f - h)\,z = y' \\ m\,w &= -(g - c)\,x + (f - h)\,y - (a + e + k)\,z = z'. \end{aligned}$$

Durch Hinzunahme dieses Stabes wird die Deviationsmatrize:

$$\begin{pmatrix} a + x'x & b + x'y & c + x'z \\ d + y'x & e + y'y & f + y'z \\ g + z'x & h + z'y & k + z'z \end{pmatrix}.$$

Diese Matrize hat erstens die Divergenz

$$a + e + k + x'x + y'y + z'z = a + e + k - (a + e + k)\,(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

und hat zweitens auch die Rotation gleich Null, denn es ist:

$$\begin{aligned} b + x'y - d - y'x &= b - d + (g - c)yz - (b-d)y^2 - (b-d)x^2 + (f-h)xz \\ &= (b-d)(1 - x^2 - y^2) + (-b+d)z^2 = 0, \end{aligned}$$

und ebenso wird

$$c + x'z - g - z'x = 0, \quad f + y'z - h - z'y = 0.$$

Eine solche Matrize ist aber sowohl darstellbar wie kompensierbar durch höchstens zwei Kugeln, wie wir im Abschnitt 30 gezeigt haben.

Im Bereich der Stäbe und Kugeln kann man ferner zeigen, daß auch durch eine Kugel und zwei Stäbe vollständige Kompensation erreicht werden kann. Dazu muß die Kugel so bestimmt werden, daß die neue Deviationsmatrize

$$\begin{pmatrix} a + m(3x^2 - 1) & b + 3mxy & c + 3mxz \\ d + 3mxy & e + m(3y^2 - 1) & f + 3myz \\ g + 3mxz & h + 3myz & k + m(3z^2 - 1) \end{pmatrix}$$

eine für ein positives m verschwindende Determinante bekommt, also vom Range 2 wird; denn für diesen Fall erwies sich eine Matrize durch zwei Stäbe darstellbar (Abschnitt 6). Ist nun erstens

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} < 0,$$

so hat die kubische Gleichung für m, da ihr höchster Koëffizient

$$\begin{vmatrix} 3x^2 - 1 & 3xy & 3xz \\ 3xy & 3y^2 - 1 & 3yz \\ 3xz & 3yz & 3z^2 - 1 \end{vmatrix}$$

bei beliebig gewählten x, y, z (mit $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) den positiven Wert 2 hat, sicher eine positive Wurzel.

Ist aber zweitens

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} > 0,$$

so bestimmen wir zunächst m reell und positiv aus

$$\begin{vmatrix} a-m & b & c \\ d & e-m & f \\ g & h & k-m \end{vmatrix} = 0,$$

alsdann x, y, z aus den drei linearen homogenen Gleichungen

$$\begin{vmatrix} x & b & c \\ y & e-m & f \\ z & h & k-m \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a-m & x & c \\ d & y & f \\ g & z & k-m \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a-m & b & x \\ d & e-m & y \\ g & h & z \end{vmatrix} = 0,$$

was möglich ist, da die Determinante dieses Gleichungssystems dem Quadrat der Determinante

$$\begin{vmatrix} a-m & b & c \\ d & e-m & f \\ g & h & k-m \end{vmatrix}$$

gleich, also Null ist. Diese letztere, vermehrt um die bzw. mit 3 mx, 3 my, 3 mz multiplizierten drei vorhergehenden, gibt aber die Determinante, die zu Null gemacht werden sollte.

Wendet man den Satz auf die Matrize mit umgekehrtem Zeichen an, so ergibt sich, daß jede Matrize durch eine Kugel und zwei Stäbe darstellbar ist.

Im Falle $m = 0$ fällt die Kugel fort.

Die beschriebenen Kompensationen setzten im Poissonschen, wie im Nicht-Poissonschen Fall voraus, daß die angewendeten Kompensationskörper klein sind im Verhältnis zu ihrer Entfernung vom Kompaßort O. Bei alsdann nicht ausreichenden Aufnahmefähigkeiten müßte man zu Eisenlegierungen mit starken Aufnahmefähigkeiten greifen: „In Panzertürmen entstehen wesentliche Schwierigkeiten dadurch, daß bei den großen Werten des D der Raum für die Anbringung genügend großer Kugeln schlechterdings fehlt. Ferner würden an solchen Orten, da an ihnen gewöhnlich ein großer negativer Wert des k vorhanden ist, die D-Kugeln den Krängungsfehler in höchst ungünstiger Weise beeinflussen." Diese Worte aus der Enc. a. a. O. S. 365[1]) beweisen, daß auch aus Gründen der Raumfrage kleinere Kompensationskör-

1) Vgl. auch Guyou, Annales hydrographiques 15, 1893, S. 157.

per aus aufnahmestarken Eisenmischungen erwünscht wären. Die Bemühungen zur Vermeidung großer Kompensationskörper zwei Kompasse nebeneinander aufzustellen (Enc. a. a. O. S. 365, Anm. 153), haben keinen Erfolg gehabt.

Ueber den oben erwähnten Einfluß der D-Kompensatoren auf k ist in Abschnitt 30, über das Vorzeichen von k in Abschnitt 24 das Erforderliche gesagt worden. Bei großen quadrantalen Gliedern werden auch die sextantalen und die oktantalen Glieder beträchtlich. Im Poissonschen Fall haben die ersteren angenähert die Werte

$$\tfrac{1}{2}(B\,D - C\,E)\sin 3\,\zeta' + \tfrac{1}{2}(C\,D + B\,E)\cos 3\,\zeta',$$

die letzteren genau die Werte

$$\tfrac{1}{2}(D^2 - E^2)\sin 4\,\zeta' + D\,E\cos 4\,\zeta'.$$

Zur Kompensation großer quadrantaler Glieder verwendet man nahe Weicheisenmassen, deren Wirkung durch die infolge der Nähe mitwirkende Nadelinduktion verstärkt wird. Auch hier kann man von a, e, usw. natürlich nicht reden. Man hat hier sein Augenmerk nicht darauf zu richten, daß die mit auftretenden sextantalen und oktantalen Glieder verschwinden, sondern daß sie die bereits vorhandenen Glieder dieser Art kompensieren. Kompensation mit Nadelinduktion wird angewendet bei den Kompassen von Peichl, Magnaghi und Florian (Enc. a. a. O. S. 365).

Betreffs Aequivalenzen zwischen Stäben und Kugeln heben wir noch folgenden Satz hervor. Man spiegele einen Stab und seine Feldstärke in O an einer Graden durch O, parallel einer Winkelhalbierenden zwischen Stab und Feldstärke, so erhält man den „transponierten" Stab; seine Matrize entsteht aus der des Stabes durch Transposition der Zeilen und Spalten. Dann gilt der Satz: Zwei transponierte Stäbe sind äquivalent dem Unterschied zweier Kugeln, also auch gleich einem Stab in erster, einem in zweiter Hauptlage. Die Gleichungen

$$\begin{array}{lll} 2xu = 2(p^2 - p'^2), & yu + xv = 2(pq - p'q'), & zu + xw = 2(pr - p'r') \\ xv + yu = 2(pq - p'q'), & 2yv = 2(q^2 - q'^2), & zv + yw = 2(qr - q'r') \\ xw + zu = 2(pr - p'r'), & yw + zv = 2(qr - q'r'), & 2zw = 2(r^2 - r'^2) \end{array}$$

sind nämlich erfüllt durch

$$x = p + p' \quad y = q + q' \quad z = r + r'$$
$$u = p - p' \quad v = q - q' \quad w = r - r'.$$

32. Konstante Deviation.

Die Matrize

$$\begin{pmatrix} a & b & c + \frac{P}{Z} \\ d & e & f + \frac{Q}{Z} \end{pmatrix}$$

enthält nur die Elemente, von denen die horizontale Deviation δ zufolge der Formeln abhängt:

$$\lambda\mathfrak{A} = \frac{d - b}{2}, \quad \lambda\mathfrak{D} = \frac{a - e}{2}, \quad \lambda\mathfrak{B} = \left(c + \frac{P}{Z}\right) \operatorname{tg}\theta$$
$$\lambda\mathfrak{E} = \frac{d + b}{2}, \quad \lambda - 1 = \frac{a + e}{2}, \quad \lambda\mathfrak{C} = \left(f + \frac{Q}{Z}\right) \operatorname{tg}\theta\ .$$

Insbesondere gehört zur Matrize

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

die horizontale Deviation Null, die für $a \neq 0$ richtkraftändernd ist, und zur Matrize

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

eine konstante horizontale Deviation

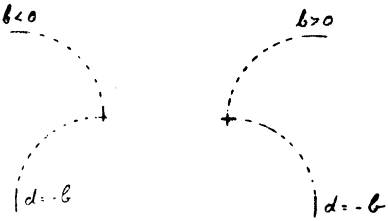
$$\operatorname{arc\,tg} \mathfrak{A} = \operatorname{arc\,tg} \frac{-b}{1 + a}\ ,$$

mit oder ohne Richtkraftänderung, jenachdem a ungleich oder gleich Null ist. Zerlegen wir die Matrize in die zwei

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und sehen wir von der bloß richtkraftändernden ab, so ist die konstante Deviation darstellbar (und kompensierbar) als Unterschied zweier transponierter Stäbe in dritter Hauptlage (Abb. 21):

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Konst. Dev. Ost $\mathfrak{A} = \frac{-b}{\lambda} > 0$ $\zeta > \zeta'$

Konst. Dev. West $\mathfrak{A} = \frac{-b}{\lambda} < 0$ $\zeta < \zeta'$

Abb. 21

Allgemeiner, die „schiefe" Matrize

$$\begin{pmatrix} 0 & b & -g \\ -b & 0 & f \\ g & -f & 0 \end{pmatrix}$$

ergibt:

$$U = bY - gZ, \quad V = fZ - bX, \quad W = gX - fY,$$
$$fU + gV + bW = 0$$
$$XU + YV + ZW = 0,$$

d. h. der Vektor (U, V, W) steht sowohl senkrecht auf T wie auf der festen Richtung (f : g : b) (Abb. 22). Macht man

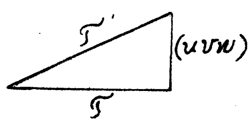


Abb. 22

diese durch orthogonale Transformation zur Z-Axe, so liegt der Vektor (U, V, W) in der neuen XY-Ebene, es ist $U = bY$, $V = -bX$, $W = 0$, $U^2 + V^2 = b^2 (X^2 + Y^2)$, die „schiefe" Deviation

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

wird konstant, die schiefe Matrize durch ein Paar transponierte Stäbe darstellbar oder auch kompensierbar. Hierdurch wird das Wesen der konstanten Deviation aufgehellt, soweit sie magnetischen Ursprungs ist. Ihre Kompensation durch einen künstlichen Indexfehler (S. 55) ist ein unangemessenes Hilfsmittel, das sich bei einer vollständigen, nicht bloß horizontalen Kompensation erübrigt.

Die Deviation

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

kann man zerlegen in die folgenden drei:

$$\begin{pmatrix} \frac{a+e+k}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a+e+k}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a+e+k}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2a-e-k}{3} & \frac{b+d}{2} & \frac{c+g}{2} \\ \frac{d+b}{2} & \frac{2e-a-k}{3} & \frac{f+h}{2} \\ \frac{g+c}{2} & \frac{h+f}{2} & \frac{2k-a-e}{3} \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{b-d}{2} & \frac{c-g}{2} \\ \frac{d-b}{2} & 0 & \frac{f-h}{2} \\ \frac{g-c}{2} & \frac{h-f}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die erste ist eine bloße Richtkraftänderung, die letzte eine konstante schiefe Deviation, die mittelste hat Divergenz und Rotation gleich Null, ist also durch Kugeln darstellbar und kompensierbar.

Die Reibung zwischen Pinne und Hütchen kann „scheinbare“ konstante Deviation verursachen. Man kann die von ihr freie Lage der Nadel aus den Schwingungsausschlägen graphisch interpolieren, wie R i p o l l (Revue maritime, 175, 1907, S. 513) vorschlägt. Das setzt voraus, daß die Nadelschwingungen von Schiffsbewegungen ganz unbeeinflußt sind, was sich wohl selten verwirklichen läßt. Man kann aber an Land den Reibungsfehler in dieser Weise ermitteln.

Auch andere Kompaß- und Beobachtungsfehler beeinflussen das beobachtete A, aber nicht nur dieses, wie meist angenommen wird. (Garbich, Mitt. auf d. Gebiete des Seewesens 4, 1876, S. 41).

33. Unmittelbare Kompensation.

Die bisher beschriebenen Kompensationen setzten sich aus drei Schritten zusammen:

1. Beobachtung der mgn. Elemente,
2. Berechnung der Deviationselemente,
3. Kompensation dieser Elemente.

Neben dieses ausführliche Verfahren und auf Grund der dadurch gewonnenen Einsichten tritt ein abgekürztes Verfahren, das unmittelbar darauf ausgeht, die Kompensationskörper so anzubringen, daß die Deviation Null wird.

Die für den Nicht-Poissonschen Fall gegebene Kompensation durch mgn. Modelle war eine solche Kompensation durch Versuche (S. 119). Im Folgenden wird der Poissonsche Fall angenommen.

Es handelt sich zunächst um Kompensation der horizontalen Deviation δ. Man verfährt so: Ein Längsschiffsmagnet, Richtung X-Axe, in zweiter oder erster Hauptlage, werde in eine solche Entfernung vom Kompaß gebracht, daß derselbe den Kurs Ost (bzw. West) anzeigt, wenn das Schiff auf mgn. Ost (bzw. mgn. West) gelegt ist. Ein Querschiffsmagnet, Richtung Y-Axe, in zweiter oder erster Hauptlage werde in eine solche Entfernung vom Kompaß gebracht, daß derselbe den Kurs Nord (bzw. Süd) anzeigt, wenn das Schiff auf mgn. Nord (bzw. mgn. Süd) gelegt ist. Ein Kugelpaar in der Y-Axe wird in eine solche Entfernung vom Kompaß gebracht, daß derselbe den Kurs NO (bzw. SO, SW, NW) anzeigt, wenn das Schiff auf mgn. NO (bzw. mgn. SO, SW, NW) gelegt ist. Man nimmt an, daß mit diesen drei Schritten eine ausreichende Kompensation auf ebenem Kiel und in gegebener Breite bewirkt ist. Um das zu beurteilen, ziehen wir die Näherungsformel

$$\delta = A + B \sin \zeta' + C \cos \zeta' + D \sin 2\zeta' + E \cos 2\zeta'$$

heran. Soll für O, N, NO die Deviation Null sein, so bekommen wir für $\zeta = \zeta' = 90^0, 0^0, 45^0$:

$$\begin{aligned} A + B \qquad\qquad & - E = 0 \\ A + C \qquad\qquad & + E = 0 \\ A + (B + C)\sqrt{^1/_2} & + D = 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt $-\sqrt{2}\,(A + D) = B + C = -2A$, $B - C = 2E$. Also nur, wenn A und E bereits Null sind, bewirkt diese Kompensation, daß auch B, C, D Null werden. Der Längsmagnet kompensiert B, der Quermagnet kompensiert C, das Kugelpaar kompensiert D. Durch drei Schritte lassen sich eben nur drei Koëffizienten B, C, D kompensieren. Nun stehen noch zwei weitere Schritte zur Verfügung: das Verschieben der Steuermarke und das Drehen des Kugelpaares oder die Einführung einer $\mathfrak{E}$-Kugel nach S. 128. Wir wollen zeigen, daß man mit diesen 5 Schritten in der Tat alle 5 Koëffiztenten kompensieren kann. Und zwar führen wir das gleich für die exakte Formel durch:

$$\sin \delta = \mathfrak{A} \cos \delta + \mathfrak{B} \sin \zeta' + \mathfrak{C} \cos \zeta' + \mathfrak{D} \sin (2\zeta' + \delta) + \mathfrak{E} \cos (2\zeta' + \delta).$$

Wenn durch Nähern (Entfernen) des Längsmagneten auf Ostkurs ein Drehen der Kompaßnadel im Uhrzeigersinn erfolgt, dann auf Westkurs im entgegengesetzten Sinn, d. h. $\delta_o - \delta_w$ wächst. Also kann man durch Entfernungsänderung des Längsmagneten $\delta_o - \delta_w$ zu Null machen. Das geschieht bei einem zweiten Rundschwojen, nachdem auf einem ersten δ_o, δ_w beobachtet sind. Ebenso wird durch Entfernungsänderung des Quermagneten $\delta_n - \delta_s$ zu Null gemacht. Die Formel

$$\mathfrak{R} \cdot \sin \delta^1 = \mathfrak{B} \sin \zeta' + \mathfrak{C} \cos \zeta'$$

ergibt jetzt, wenn man in ihr erst

$$\zeta' = 90^0, \text{ also } \delta^1 = \frac{\delta_0 - \delta_w}{2} = 0,$$

dann

$$\zeta' = 0^\circ, \text{ also } \delta^1 = \frac{\delta_n - \delta_s}{2} = 0$$

einsetzt, daß nach dieser Kompensation $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$ ist. Also ist jetzt überhaupt $\delta^1 = 0$, d. h. auf jedem Kurs ζ' ist

$$\delta_{\zeta'} = \delta_{\zeta' + 180^\circ},$$

die Deviationen auf Kurs und Gegenkurs sind durchweg gleich. Die exakte Formel vereinfacht sich zu:

$$\sin\delta = \mathfrak{A}\cos\delta + \mathfrak{D}\sin(2\zeta' + \delta) + \mathfrak{E}\cos(2\zeta' + \delta).$$

Eine $\mathfrak{D}$-Kugel auf der X- oder Y-Axe wirkt auf Nord- oder Ostkurs wie ein Polpaar in erster oder zweiter Hauptlage, also auf δ_n im entgegengesetzten Sinn wie auf δ_o. Demnach kann man durch Entfernungsänderung einer $\mathfrak{D}$-Kugel $\delta_n - \delta_o$ vergrößern oder verkleinern, also zu Null kompensieren. Dann ist also

$$\delta_n = \delta_o = \delta_w = \delta_s\,.$$

Eine $\mathfrak{E}$-Kugel auf einer der Graden $X \pm Y = 0$ wirkt auf Nordost- oder auf Südostkurs wie ein Polpaar in erster oder zweiter Hauptlage, also auf δ_{no} in entgegengesetztem Sinn wie auf δ_{so}. Demnach kann man durch Entfernungsänderung einer $\mathfrak{E}$-Kugel $\delta_{no} - \delta_{so}$ vergrößern oder verkleinern, also zu Null kompensieren. Dann ist

$$\delta_{no} = \delta_{so} = \delta_{nw} = \delta_{sw}\,.$$

Die exakte Formel ergibt jetzt an den vier Hauptstrichen für die Deviation $\delta_n = \delta_o = \delta_s = \delta_w$:

$$\zeta' = 0^\circ, \quad \sin\delta - \mathfrak{A}\cos\delta = \mathfrak{D}\sin\delta + \mathfrak{E}\cos\delta$$
$$\zeta' = 90^\circ, \quad \sin\delta - \mathfrak{A}\cos\delta = -\mathfrak{D}\sin\delta - \mathfrak{E}\cos\delta\,.$$

Summe und Unterschied dieser Gleichungen ergeben

$$\sin\delta - \mathfrak{A}\cos\delta = 0$$
$$\mathfrak{D}\sin\delta + \mathfrak{E}\cos\delta = 0\,.$$

Die Entfernung von δ liefert:

$$\mathfrak{E} + \mathfrak{A}\,\mathfrak{D} = 0.$$

Die exakte Formel ergibt ebenso an den vier Hauptzwischenstrichen für die Deviation $\delta_{no} = \delta_{so} = \delta_{sw} = \delta_{nw}$:

$$\zeta' = 45^0, \ \sin\delta - \mathfrak{A}\cos\delta = \mathfrak{D}\cos\delta - \mathfrak{E}\sin\delta$$
$$\zeta' = 135^0, \ \sin\delta - \mathfrak{A}\cos\delta = -\mathfrak{D}\cos\delta + \mathfrak{E}\sin\delta.$$

Summe und Unterschied dieser Gleichungen ergeben

$$\sin\delta - \mathfrak{A}\cos\delta = 0$$
$$\mathfrak{D}\cos\delta - \mathfrak{E}\sin\delta = 0.$$

Die Entfernung von δ ergibt:

$$\mathfrak{D} - \mathfrak{A}\,\mathfrak{E} = 0.$$

Die beiden Gleichungen für $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$:

$$\mathfrak{E} + \mathfrak{A}\,\mathfrak{D} = 0 \quad \mathfrak{D} - \mathfrak{A}\,\mathfrak{E} = 0$$

haben die nicht verschwindende Determinante

$$1 + \mathfrak{A}^2,$$

also folgt $\mathfrak{D} = 0$, $\mathfrak{E} = 0$. Die exakte Formel vereinfacht sich zu

$$\sin\delta = \mathfrak{A}\cos\delta,$$

d. h. es ist $\operatorname{tg}\delta = \mathfrak{A}$, $\delta = A$, die Deviation ist auf allen Kursen dieselbe, ihr Einfluß auf den Kurs kann also durch Versetzen der Steuermarke, (einen künstlichen Indexfehler), berichtigt werden, bei positivem (negativem) A durch Versetzen der Steuermarke nach Steuer-(Back-)Bord. Das Versetzen der Steuermarke macht man natürlich nur an Steuerkompassen. Bei Peilkompassen müßte man, um die Peilungen von dem beständigen Fehler frei zu bekommen, der Rose einen entsprechenden künstlichen Kollimationsfehler geben. Statt die Rose mit einer Einrichtung hierfür zu versehen, berichtigt man den Fehler lieber durch Rechnung.

Das beschriebene Verfahren ist soweit exakt, wie die exakte Formel es ist. Die 5 erforderlichen Kompensationen sind durch 5 einzelne Schritte bewirkt: das Versetzen der $\mathfrak{B}$- und $\mathfrak{C}$-Magneten, der $\mathfrak{D}$- und $\mathfrak{E}$-Kugeln, der Steuermarke. Es ist nur wenig umständlicher, als das vorher beschriebene übliche, weil es durch das Versetzen der Stäbe und Kugeln nicht Deviationen, sondern Deviations-Unterschiede zu Null kompensiert. Die Anwendung zweier Kugeln, einer auf dem Gradenpaar $XY = 0$, einer auf dem Gradenpaar $X^2 - Y^2 = 0$, ist einfacher als die Anwendung einer Kugel (eines Kugelpaars in Opposition (S. 128)) in der XY-Ebene, da man im ersteren Fall nur Entfernungen, im letzteren eine Entfernung und einen Winkel durch Versuch zu finden hat.

Aber es ist hier nur die horizontale Deviation kompensiert. In Bezug auf Deviation durch Lage begnügt man sich, dem Schiff entweder Lage (meist Krängung) zu geben und die dadurch entstehende Deviation durch Entfernungsänderung eines Magneten in zweiter (Airy) oder erster (Lord Kelvin) Hauptlage aufzuheben. Oder, auf ebenem Kiel verfährt man so. Man legt das Schiff auf mgn. West- oder Ostkurs und bewirkt durch Entfernungsänderung des Krängungs-Magneten, daß eine Vertikalkraftwage am Kompaßort die $(1 + e)$fache Vertikalkraft anzeigt, wie an Land.

Die im Abschnitt 12 über Deviation bei Lage gegebenen Formeln lassen erkennen, daß das obige Verfahren bei Lage außer $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \mathfrak{D} = \mathfrak{E} = 0$ noch $c = g = f + h = 0$, i klein, bzw. $c + g = f = h = 0$, u klein, bzw. beides voraussetzt; dann wird durch das Verfahren

$$a - k - \frac{R}{Z} = e - k - \frac{R}{Z} = 0 ,$$

also der Lagenfaktor zu Null kompensiert.

Das obige Verfahren auf ebenem Kiel kompensiert

$$Z' = gX + hY + (1 + k) Z + R$$

zu $(1 + e) Z$, also eine vom Kurs unabhängige Größe nur, wenn gX und hY Null sind. Das Verschwinden von h nimmt man an, da man den regulären Fall für den Kompaßort voraussetzt. Von gX macht man sich frei, indem man das Schiff auf mgn. West oder Ost legt, also $X = 0$ macht. Dann wird durch das Versetzen des Magneten erreicht, daß $(1 + k) Z + R = (1 + e) Z$, demnach

$$e - k - \frac{R}{Z} = 0 ,$$

also der Krängungsfaktor zu Null kompensiert wird. Aber das Verschwinden der Lagendeviation erfordert natürlich wie oben noch den vollregulären Fall und daß i und u klein bleiben.

Schon Airy erklärte, daß die Kompensation der Krängungsdeviation die einzige sei, die wirkliche Schwierigkeiten mache[1]). Merkte er, daß die vertikale Massenverteilung wesentlich ungünstiger für die Kompensation ist, wie die horizontale? Selbst unter der hier zweifelhaften Annahme des Poissonschen Satzes, von dem übrigens Airy ausdrücklich keinen Gebrauch machen wollte[2]), wird eine Kompensation der Krängungsdeviation weitläufig, da sie erfordert, daß entweder alle 12 Deviationselemente, oder von den Diagonalelementen wenigstens die Unterschiede von

$$a,\ e,\ k+\frac{R}{Z}$$

zu Null gemacht werden.

Die oben beschriebene Kompensation ist aber nicht nur nicht „lagenfest", sondern auch nicht „breitenfest", vielmehr mit der mgn. Breite veränderlich[3]). Der $\mathfrak{B}$- und der $\mathfrak{C}$-Magnet kompensieren bzw.

$$\lambda\mathfrak{B} = c\operatorname{tg}\theta + \frac{P}{H},\quad \lambda\mathfrak{C} = f\operatorname{tg}\theta + \frac{Q}{H},$$

der Krängungs-Magnet kompensiert

$$(-a+k)\operatorname{tg}\theta + \frac{R}{H} = (-e+k)\operatorname{tg}\theta + \frac{R}{H}.$$

Demnach kann man durch Versetzen der drei Magnete dem Einfluß der Breitenänderung begegnen. Tritt nach veränderter

1) Die Ann. d. Hydrogr. 12, 1884, S. 80 bemerken: „Ueber Aenderung des Krängungsfehlers und Zerlegung der Ursachen derselben fehlt es auch in der engl. Marine an Beobachtungsmaterial."

2) „Ich würde gern die Berechnung nach Poissons Theorie gemacht haben.. Die Schwierigkeiten der Anwendung dieser Theorie auf verwickeltere Fälle sind groß, vielleicht unüberwindlich".

3) Eine lagenfeste Kompensation ist natürlich auch breitenfest, wie meist übersehen wird, z. B. von Lauffer, Ann. d. Hydrographie, 1905, S. 77.

Breite auf mgn. Nord- oder Südkurs ($\zeta = 0^0$ oder 180^0) eine Deviation auf, so ist der 𝕮-Magnet zu versetzen; tritt auf mgn. Ost- oder Westkurs ($\zeta = 90^0$ oder 270^0) eine Deviation auf, so ist der 𝕭-Magnet zu versetzen. Die Versetzung des Krängungsmagneten muß bei irgend einer Lage des Schiffes die auftretende Deviation aufheben. Durch Versetzen der drei Magneten paßt man sich also jeder mgn. Breite an, was angängig ist, da merkliche Breitenänderungen verhältnismäßig langsam erfolgen. Das ist der Grund, weshalb der Flinders-Stab zur Kompensation von c und evtl. f (und k) wenig Anwendung findet[1]). Viel lästiger sind, wie später noch besonders auseinandergesetzt wird, die Deviations-Änderungen durch die schnellen Änderungen der Lage infolge Gieren, Schlingern und Stampfen. Hier macht sich sehr störend bemerkbar, daß die Kompensation nicht „lagenfest" ist. Das nötigt dazu, sie durch eine vollständige, also lagen- und breitenfeste Kompensation zu ersetzen. Daß eine solche im Poissonschen Fall in verschiedener Art möglich ist, haben wir gezeigt. Unter gewissen Voraussetzungen ist aber auch vollständige Kompensation in unmittelbarer Weise ausführbar, wie wir jetzt zeigen wollen.

Solange man nur mit den drei Poissonschen Gleichungen, nicht mit der aus den beiden ersten abgeleiteten exakten Formel arbeitet, sind die Überlegungen von der Wahl der Schiffs-Koordinaten-Axen und ihrer Rechtwinkligkeit unabhängig. Die neun Stäbe haben, wenn wir jetzt schiefwinklige Axen einführen, nach wie vor, zu je dreien und von den drei Magneten je einer die Richtung einer Koordinatenaxe. Die Diagonalstäbe und Magnete erster Hauptlage liegen nach wie vor in den Axen. Die Diagonalstäbe und Magnete zweiter Hauptlage haben nach wie vor ihre Mitten in Ebenen, die zu den Axen in O senkrecht sind. Von den Nicht-Diagonalstäben fällt die Feldstärke in O in

1) S. z. B. Koldewey i. d. Ann. d. Hydrogr. 1905, S. 122. Gute Aufstellung des Kompasses fern von namentlich senkrechten Eisenmassen sei die Hauptsache.

eine Axe (Abb. 23). Diese 6 Stäbe liegen zu je zweien in einer der drei Koordinaten-Ebenen. Die Richtungen von O

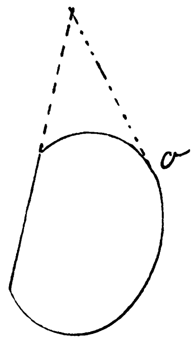


Abb. 23

aus, in denen sie liegen, ergeben sich aus den Ausführungen in Abschnitt 23.

Dies vorausgeschickt wählen wir die drei Schiffsaxen so, daß durch Schwojen, Krängen, Trimmen jede der Axen in die T-Richtung, eine, z.B. die Z-Axe auch in die —T-Richtung gebracht werden kann. Man bringt die Z-Axe erst in die T-, dann in die —T-Richtung und beobachtet beidemale die Richtkräfte in den Axenrichtungen, also erst die Werte $cZ+P$, $fZ+Q$, $kZ+R$, dann die Werte $-cZ+P$, $-fZ+Q$, $-kZ+R$. Die halben Summen der beiden Richtkräfte in der X-, (Y-, Z-)Richtung beseitigt man durch einen P-, (Q-, R-) Magneten. Die halben Unterschiede durch einen c-, (f-, k-)Stab. Bringt man dann die X- (Y-)Axe in die T-Richtung, und beobachtet die Richtkräfte in den Axenrichtungen, also aX, dX, gX, (bY, eY, hY), so hat man durch einen a-Stab zu bewirken, daß die X-Richtkraft an Bord dieselbe wird wie an Land, usw. Das erfordert bloße Entfernungsänderungen, da man die Richtungen der Stäbe und die Richtungen, in denen ihre Mittelpunkte liegen, von vornherein kennt. Es soll hier nur die theoretische Möglichkeit gezeigt, nicht die praktische Ausführbarkeit erörtert werden. Das Verfahren besteht im ganzen aus 12 einzelnen Schritten entsprechend den 12 erforderlichen Einzel-Kompensationen. Der Grundgedanke ist

10*

eine Anordnung, bei der jedes der 12 Deviationselemente einzeln in die Erscheinung tritt, also „Trennung der 12 Deviationselemente“, wie wir im Abschnitt 16 den festen Magnetismus P, Q, R vom flüchtigen Magnetismus U, V, W getrennt haben. Wie dort ist es in niedrigen mgn. Breiten ausführbar, eine Axe — die wagerechte Queraxe — in die T - Richtung und in die —T-Richtung zu bringen.

34. Reihenfolge der Kompensationen.

Der Erdmagnetismus, der feste und der flüchtige Schiffsmagnetismus erzeugen je ein Feld, von denen aber theoretisch nur die Feldstärken in O, praktisch auch die in der Umgebung von O in Betracht kommen. Unsere Theorie setzt, auch im Nicht-Poissonschen Fall voraus, daß die drei Felder schwach sind und sich deshalb einfach überlagern. Diese Voraussetzung ist weiter als die sonst übliche des Poissonschen Satzes und sie ist vorläufig jedenfalls ausreichend. Ein Ansatz, um ohne sie auszukommen, folgt weiter unten.

Wir haben gesehen, wie man den festen und den flüchtigen Schiffsmagnetismus (in O) getrennt ermitteln kann. Die Kompensation bezieht sich auf den Punkt O. D. h. man fügt zu dem festen (flüchtigen) schiffsmagnetischen Feld ein festes (flüchtiges) kompensationsmagnetisches Feld, das in O stets die konträrgleiche Feldstärke des ersteren hat. Die Kompensation ist also von der in O aufgehängten Rose theoretisch unabhängig, praktisch kann die Ausdehnung des Nadelsystems etwas ausmachen, wenn das Nadelsystem nicht ganz in derjenigen Umgebung von O liegt, in der die beiden Felder genau genug kompensiert sind.

Die Frage ist, soll man erst den festen oder erst den flüchtigen Schiffsmagnetismus, und von letzterem erst den horizontalen oder erst den vertikalen Teil kompensieren? Es wird empfohlen erst den flüchtigen Schiffsmagnetismus zu kompensieren, und zwar erst die Airy-Kugeln, dann den Flinders-Stab anzubringen.

Nach unsern Ausführungen kommt eine getrennte Ermittlung und Kompensierung des horizontalen und des vertikalen Teiles des flüchtigen Schiffsmagnetismus nicht in Frage, da wir „vollständige“ Kompensation fordern und im Poissonschen, wie im Nicht-Poissonschen Fall als erreichbar nachweisen. Für uns besteht also nur die Frage: soll man erst den festen oder erst den flüchtigen Schiffsmagnetismus kompensieren? Daß man erst den flüchtigen kompensieren soll, begründet man damit, daß sonst in den Kompensatoren durch die vorher angebrachten Festmagnete Magnetismus induziert werde, der wie fester wirkt. Dadurch werde das festmagnetische Feld geändert, sodaß dessen vorher erfolgte Kompensation verschlechtert werde.

Es ist zwar richtig, daß in den Kompensatoren Magnetismus induziert wird, der wie fester wirkt. Aber dies ist bei jeder Reihenfolge unvermeidlich. Bringt man die Kompensatoren vor den Festmagneten an, so werden sie nur durch den festen Schiffsmagnetismus induziert. Bringt man die Kompensatoren nach den Festmagneten an, so werden sie durch das Feld des festen Schiffsmagnetismus und durch das Feld der Festmagnete induziert. Da aber diese beiden Felder sich in O theoretisch genau, in der Umgebung von O noch annähernd kompensieren, ist es vorteilhafter, erst den festen Schiffsmagnetismus zu kompensieren, dann den flüchtigen. Für diese Reihenfolge spricht auch der Umstand, daß der feste Magnetismus der Hauptteil ist und daß die Aufnahmefähigkeit der Kompensatoren durch die Magnete verringert wird.

Diese Betrachtung macht noch zweierlei deutlich. Man muß mit den Kompensatoren möglichst in der Nähe von O bleiben. Also kleine, aufnahmestarke Körper sind großen, aufnahmeschwachen vorzuziehen; gleiche Wirkung in O vorausgesetzt. Dadurch wird einerseits, um mit kurzen Nadeln auszukommen, die Anwendung von Mehrnadelsystemen gefordert, andrerseits die schon oben befürwortete Anwendung aufnahmestarker Eisenmischungen nahe gelegt. Zweitens aber ist zu wünschen, daß die Kompensation des festen

Magnetismus, die streng nur im Punkte O erfolgt, noch mit leidlicher Annäherung in einer nicht zu kleinen Umgebung von O gilt, damit man mit den Kompensatoren nicht zu nahe an O heranzugehen genötigt ist. Dieser zweiten Forderung ist, wie folgt, zu entsprechen. Das feste schiffsmagnetische Feld ist in einer gewissen Umgebung von O (praktisch) homogen. Man wähle also das feste Kompensationsfeld so, daß es in etwa derselben Umgebung von O (praktisch) homogen ist. Dann findet nicht nur im Punkte O selbst (theoretisch) streng, sondern auch in dieser Umgebung von O angenähert Kompensation beider Felder statt. Innerhalb dieser Umgebung muß man dann die Kompensatoren möglichst anzubringen suchen.

Für die festen Kompensationsmagnete bedeutet das: es sind starke ferne Festmagnete nahen, schwachen vorzuziehen; bei gleicher Wirkung in O. Das spricht für die zweite Hauptlage des R-Magneten. Ob es lohnend ist, hier weiter zu gehen, also das feste schiffsmagnetische Feld über die homogene Umgebung von O hinaus zu ermitteln und durch ein künstliches festmagnetisches Feld in dieser weiteren Umgebung zu kompensieren, muß die Erfahrung entscheiden.

35. Auswechseln von Rosen oder Kompassen.

Die Ermittlung der Deviation ist unabhängig von dem verwendeten Kompaß, sogar ohne Kompaß ausführbar (Absch. 14), wenn auch Richtkräfte am besten durch Nadelschwingungen ermittelt werden. Dasselbe gilt also für die Kompensation, die ja darin besteht, durch geeignete Kompensationskörper eine zur ermittelten Deviationsmatrize entgegengesetzt gleiche herzustellen. Deviation und Kompensation beziehen sich eben nur auf den Kompaß-Ort O. Dabei ist aber wohl zu beachten, daß diese Überlegung nur gilt, wenn jede im Punkt O, sei es zum Peilen bei der Deviationsbestimmung, sei es zum Steuern nach erfolgter Kompensation aufgehängte Rose die Voraussetzung der Kleinheit der Nadel erfüllt, was z. B. bei Fluid-Kompassen meist nicht der Fall ist. Wird aber der ganze Kompaß ausgewechselt, so ist auch darauf zu achten, daß der Aufhängepunkt der Rose wieder an dieselbe Stelle kommt; das erfordert vor allem gleiche Höhe des Aufhängepunktes über der Grundfläche des Kompasses.

Aber auch, wenn alle diese Bedingungen erfüllt sind, ist das Auswechseln nur dann ohne Weiteres zulässig, wenn die Kompensation eine vollständige ist. Sind unkompensierte Deviationsreste vorhanden, die an Hand einer Steuertabelle oder eines Napier-Diagramms berücksichtigt werden, so sind diese wegen der Verschiedenheit der Richtkräfte zweier Rosen neu zu ermitteln. Meistens werden einige Beobachtungen genügen, da die neuen den alten Deviationen proportional sein werden.

36. Notwendigkeit vollständiger, Behelf bei unvollständiger Kompensation.

Wenn wir von einer vollständigen Kompensation reden, meinen wir natürlich, wie zur Vermeidung von Mißverständnissen hervorgehoben sei, folgendes: Es sollen erstens P, Q, R so genau wie möglich durch einen (bzw. drei) Festmagnete kompensiert sein. Zweitens sollen im Nicht-Poissonschen Fall U, V, W so genau wie möglich durch zwei mgn. Modelle, im Poissonschen Fall a, b, c, d, e, f, g, h, k so genau wie möglich durch drei (bzw. neun) Stäbe oder durch zwei Stäbe, eine Kugel oder durch einen Stab, zwei Kugeln zu Null, bzw. a, e, k auf einen gemeinsamen Wert j kompensiert sein. Selbstverständlich ist auch eine solche Kompensation, obwohl theoretisch streng, praktisch nur eine Annäherung, aber die beste erreichbare, und grundsätzlich zu unterscheiden von einer solchen, die von vornherein den Poissonschen Satz annimmt und nur b + d, nicht b, d selbst zu Null machen will, und welche g und h, meist auch c und f garnicht berücksichtigt, k nicht oder nicht getrennt von R kompensiert. Erst wenn man in der beschriebenen Art eine vollständige Kompensierung erstrebt hat, kann man ein Urteil darüber gewinnen, was auf diesem Wege überhaupt erreicht werden kann.

Die Notwendigkeit möglichst vollständiger Kompensation geht auch aus folgender Bemerkung Faye's hervor (a. a. O. S. 204), welche „s'adresse aux personnes qui jugeraient superflu d'étudier les déviations avec tant de soin, alors que dans maintes circonstances on a bien de la peine à gouverner à 2° près. L'angle de route dépend de plusieurs sortes de déterminations; si l'on traitait chacune d'elles à 2° ou 3° près, on s'exposerait à des accumulations d'erreurs allant bien plus loin, erreurs fatales au bout de quelques jours de brume ou de temps couvert."

Unkompensierten Teilen der Deviation trägt man durch eine Deviationstafel oder -Zeichnung Rechnung[1]). Eine Deviations-Tafel, wie sie zuerst Churchman, The Magnetic Atlas or Variation Charts, London 1794, anwendet, gibt zu jedem mgn. Kurs ζ die Deviation δ und den Kompaß-Kurs ζ' und umgekehrt. Von Deviations-Zeichnungen ist die älteste und verbreiteste Napiers Diagramm: Die Abszissen arc ζ und die um 60° dazu geneigten Ordinaten arc δ bestimmen die „Deviationskurve". Ein Punkt von ihr bildet mit den zugehörigen Punkten arc ζ, arc ζ' der Abszissenaxe ein gleichseitiges Dreieck. In Abb. 24 sind Tafel und Diagramm vereinigt. Von einem Kp. Kurs ζ' geht man auf einer unterbrochenen Graden zur Kurve, von dort auf einer ununterbrochenen Graden zum mgn. Kurs ζ; ebenso umgekehrt. In derselben Weise kann man vom mgn. Kurs zum rw. Kurs übergehen[2]). Die „Mißweisungskurve" ist eine Parallele zur Abszissenaxe, wie bei einer konstanten Deviation.

1) Eine Kurve gibt zu jedem Kp.-Kurs den mgn. Kurs und umgekehrt ohne Interpolation, eine Tafel nur zu den hingeschriebenen, zu den anderen erst durch Interpolation. Bei der Kurve ist die Interpolation ein für alle Mal vollzogen. Eine Tafel ist wie eine Kurve, von der nur einzelne Punkte gegeben sind.

2) Statt das den Übergang von ζ zu ζ' vermittelnde Dreieck gleichseitig zu machen, kann man ihm eine andere Form vorschreiben, z. B. macht man es bei dem sog. rechtwinkligen Diagramm rechtwinklig. Die einaxigen Diagramme sind raumsparender, wie diejenigen, bei denen ζ und ζ' auf zwei verschiedenen Koordinatenaxen abgelesen werden.

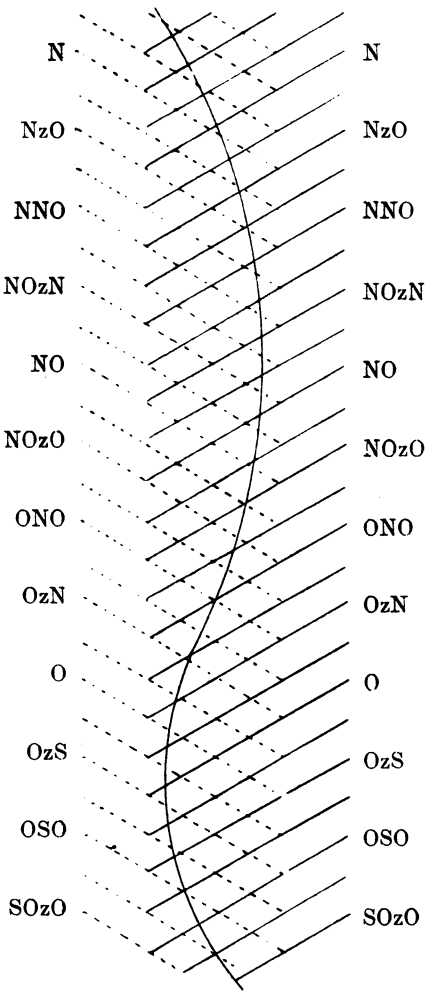


Abb. 24

In Bezug auf die Bezeichnung der halben, viertel, achtel Punkte — bei den ganzen steht sie eindeutig fest — sind zwei Bezeichnungssysteme in Gebrauch. Entweder man bezeichnet jeden Punkt nach dem nächstgelegenen Haupt-, Hauptzwischen-, Nebenzwischen-Punkt unter Angabe des Abstandes in Teilen eines Striches, z. B. NNO$^1/_2$N, NNO$^1/_2$O, OSO$^1/_2$O, SSO$^1/_2$S usw. Diese wenig gebräuchliche Bezeichnung findet man z. B. in den nautischen Tafeln von Domke angewendet. Oder man bezeichnet jeden Punkt, außer den Nebenzwischenpunkten, nach seinem nächstgelegenen Haupt- oder Hauptzwischenpunkt. z. B. NzO$^1/_2$O, NOzN$^1/_2$N, NOzO$^1/_2$O, OzN$^1/_2$N. Diese Bezeichnung wird aber nicht folgerichtig durchgeführt. Vielmehr wendet man in dem Strich von NNO bis NOzN (NNW bis NWzN, SSO bis SOzS, SSW bis SWzS) die ersterwähnte Bezeichnungsart an, sagt also NNO$^1/_2$O, nicht NOzN$^1/_2$N (NNW$^1/_2$W, nicht NWzN$^1/_2$N, SSO$^1/_2$O nicht SOzS$^1/_2$S, SSW$^1/_2$W nicht SWzS$^1/_2$S). Das macht sich z. B. störend bemerkbar beim Übergang von einem Kurs zu einer Dwars-Peilung, der sich sonst ganz mechanisch vollzieht. Zum Kurs NNO$^1/_2$O erhält man die Dwars-Peilung Steuerbord OSO$^1/_2$S, wofür man aber SOzO$^1/_2$O sagt. Zum Kurs SOzO$^1/_2$O erhält man die Dwars-Peilung Backbord NOzN$^1/_2$N, wofür man aber NNO$^1/_2$O sagt.

Daß man mit Hilfe von Deviations-Tafeln oder -Diagrammen die Deviation berücksichtigen kann, macht jedoch die Kompensation keinesweg überflüssig. Bei Kursänderungen ändert die Nadel ihre Richtung im Schiff nicht nur der Kursänderung, sondern auch der Deviationsänderung entsprechend. Das erschwert das Steuern und Peilen und das Feststellen des Kurses am Normalkompaß, besonders bei häufigen Kursänderungen, z. B. in gewundenem engem Fahrwasser oder bei Bewegungen im Geschwader. Noch schlimmer wird dies bei den kleinen gierenden Bewegungen des Schiffes, die auf die Rose so wirken, wie wenn eine ablenkende Masse in ihrer Nähe periodisch hin- und herbewegt wird. Die Unruhe der Rose hat ein unruhiges Steuern zur Folge, das den Übelstand noch vermehrt. Die negativen Werte von a und e bedeuten verminderte Richtkraft, verschlechterte Einstellungsfähigkeit der Rose. Die erwähnten Mängel sprechen zunächst für eine Kompensation der horizontalen Deviation. Der Änderung dieser mit der mgn. Breite könnte man, da sie nur langsam erfolgt, durch Tafeln genügen. Auch in Bezug auf die Deviation durch

Lage wäre dies möglich, wenn es sich um eine lange beibehaltene Schräglage (Schlagseite) durch Winddruck oder übergegangene Ladung etwa handelt. Aber bei den schnellen Veränderungen der Lage infolge Schlingerns und Stampfens des Schiffes ist das unmöglich. Wie beim Gieren muß dies ein Gieren der Rose nach sich ziehen. Diesem scheinbaren Gieren des Schiffes wird beim Steuern entgegengewirkt, dadurch wirkliches Gieren des Schiffes erzeugt oder vermehrt und der Übelstand verschlimmert. Infolge der dauernden Unruhe der Rose ist es auch unmöglich wenigstens in den Momenten aufrechter Lage des Schiffes den richtigen Kurs aufzunehmen, da die Rose sich erst wieder einschwingen müßte [1]).

Alle diese Gründe sprechen dafür, die bisher üblichen unvollkommenen Kompensationen aufzugeben, und in einer der beschriebenen Arten vollständige Kompensationen vorzunehmen [2]). Insbesondere, da dies schon mit den bisher üblichen Kompensationsmitteln ausführbar ist, die nötigen Rechnungen von der einfachsten Art und die notwendigen Beobachtungen nicht wesentlich umfangreicher sind.

Auch die sorgfältigste Kompensierung enthält Fehler und ist überdies mit der Zeit veränderlich. Das nötigt zu einer dauernden Überwachung der Kompasse. Es darf keine

---

1) Vgl. z. B. Lauffer, Ann. d. Hydrogr. 33, 1905, S. 76: „Die Unruhe der Kompaßrose ... verlangt gebieterisch die Aufhebung der wesentlichen verursachenden Kräfte, also auch des Krängungsfehlers, und zwar bereits in Fällen, bei welchen von einer Kompensation im allgemeinen noch ganz gut abgesehen werden kann."

Jeanniot, Revue maritime, 154, 1902, S. 1199, lenkt die Aufmerksamkeit auf die Fälle, in denen der Krängungsfehler $\mathfrak{J}$ erst durch die D-Kugeln beträchtlich wird: „L'effet de $\mathfrak{J}$ se manifeste dans le roulis et rend les oscillations de la rose très gênantes. Nous pensons que la plupart des mécomptes que l'on éprouve dans la conduite des compas viennent de cet effet de la bande. L'observateur, ignorant le faible défaut de verticalité du navire, attribue les anomalies apparentes de son compas à des causes imprévues et perd confiance en son instrument".

2) Qu'on ne parle pas d'impossibilité, car ce que parait aujourd'hui impossible ou seulement difficile devient souvent demain facile à réaliser. Ripoll, Revue maritime, 176, S. 283.

Gelegenheit unbenutzt bleiben, die Deviation des Kompasses durch Azimute oder Peilungen, auf ebenem Kiel oder bei Lage, unter Segel oder auf Schlip, beim Laden oder beim Löschen zu ermitteln[1]). Das Deviationstagebuch sollte mit derselben Sorgfalt geführt werden, wie das Chronometertagebuch. Die Auswertung der Beobachtungen durch den Schiffsführer wird sich meist darauf beschränken müssen, Korrekturen an den Koëffizienten A, B, C, D, E anzubringen. Ihre Auswertung zum Zwecke einer berichtigenden Versetzung der Kompensationskörper muß dem hierfür ausgebildeten Personal der Seewarte, der Navigationsschulen, der Reichsmarine überlassen werden.

Nur die Versetzung der horizontalen Magnete sollte stets ermittelt und ausgeführt werden, da sie einfach ist und den bei weitem wichtigsten Anteil bedeutet. Der veränderliche Teil der horizontalen Deviation wird nämlich hauptsächlich durch die Koëffizienten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ dargestellt. Diese Veränderlichkeit ist zufolge der Formeln $\lambda\,\mathfrak{B}\,H = P + cZ$, $\lambda\,\mathfrak{C}\,H = Q + fZ$ von zweierlei Art: erstens verändert sich Z mit der mgn. Breite, zweitens verändern sich P, Q mit der Zeit infolge des trägen Magnetismus. Ermittelt man, z. B. graphisch wie in Abschnitt 21 gezeigt, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$[2]), trägt die Punkte mit der Abszisse Z, der Ordinate $\lambda\,\mathfrak{B}\,H$ bzw. $\lambda\,\mathfrak{C}\,H$ auf Millimeterpapier auf, so müssen alle Punkte $(\lambda\,\mathfrak{B}\,H, Z)$,

---

1) Natürlich nur unter der Bedingung; daß das Schiff seeklar ist, d. h. wenn alle beweglichen Teile in derjenigen Lage sind, in der sie sich auf See befinden.

2) Trägt man von O aus in der Richtung ζ' die Strecke arc $\Delta\,\delta$ an, wo $\Delta\delta$ die durch Breitenänderung bewirkte Deviationsänderung $\Delta\,\mathfrak{B}\sin\zeta' + \Delta\,\mathfrak{C}\cos\zeta'$ ist, so liegen die Endpunkte dieser Strecken auf einem Kreise durch O, der also aus zwei Wertepaaren $(\Delta\,\delta, \zeta')$ zu finden ist. Zu $\zeta' = 0^0$ und 90^0 findet man dann $\Delta\,\mathfrak{C} = \Delta\,\delta_0$ und $\Delta\,\mathfrak{B} = \Delta\,\delta_{90}$. Durch Inversion in Bezug auf O geht der Kreis in eine Grade über, was für die graphische Interpolation bei mehr als zwei Wertepaaren vorteilhafter ist. Verfahren von Morel, s. P. Engel, Déviations des compas, Paris 1907, S. 54. Durch eine projektive Transformation, welche O ins Unendliche verlegt, werden die Graden durch O parallel und man erhält das Stücksche Diagramm (Marine-Rundschau 1909, S. 492).

bzw. ($\lambda\,\mathfrak{C}\,H, Z$) auf je einer Graden liegen, wenn keine Veränderung von P, c und von Q, f stattgefunden hat. Ändert sich P bzw. Q, so verschieben sich die betr. Punkte, also ein Bruchstück der Geraden um das entsprechende Stück in Ordinatenrichtung; ändert sich c bzw. f, so ändert sich der Richtungstangens der betr. Graden entsprechend, die Grade bekommt hier einen Knick (Perrin)[1]. Veränderungen von P und Q muß man durch Versetzen des Längs- und Quermagneten kompensieren; etwaige Veränderungen von c und f durch Versetzen des Flindersstabes. Nur die ersteren sind beträchtlich, eine Wirkung des trägen Magnetismus. Durch dasselbe graphische Verfahren verfolgt man die für Deviation bei Lage wichtigen Koëffizienten R und k, die mit der mittleren Vertikalkraft μZ durch die Gleichung verbunden sind: $\mu Z = R + (1+k)Z$. Die Punkte ($\mu Z, Z$) liegen also auf einer Graden, die eine Änderung von R durch einen Bruch, eine Änderung von k durch einen Knick anzeigt.

Die ständige Überwachung des Kompasses, namentlich außer Sicht von Land durch Azimut-Beobachtungen, vermittelt dem Schiffsführer zwar die jedesmalige Deviation, sodaß man eigentlich nach den Sternen steuert, der Kompaß nur als Übertragungs-Instrument dient. Trotzdem darf man sich hiermit nicht begnügen. Denn einerseits stehen nicht nach jeder Kurs-Änderung sofort Azimut-Beobachtungen zur Verfügung, andererseits bleibt ein unvollkommen kompensierter Kompaß, wie oben erörtert, unruhig und erschwert durch seine allzu großen Schwingungen das Einhalten des durch Azimut-Kontrolle ermittelten Kompaß-Kurses.

37. Mgn. Eichung der Körper.

Für die Anwendung kompensierender Körper ist es zweckmäßig, vorher festzustellen, welche Beträge sie in gegebenen Entfernungen kompensieren. In der Regel wird angegeben, welcher Betrag von D in Graden kompensiert wird.

---

1) P. Engel, a. a. O. S. 45. Mottez, Annales hydrogaphiques, 15, 1893, S. 388.

Für Kreisscheiben hatte schon Barlow Eichungen vorgenommen und in Tafeln gebracht, wie er in seinem Essay on magnetic attractions, 2. Aufl., London 1824, S. 102 berichtet. Barlow fand auch (S. 48ff.). daß die Wirkung von Hohlkugeln der von Vollkugeln nahezu gleich ist, wenn nur die Dicke der Kugelschale nicht zu gering, nicht geringer als ungefähr $^1/_{20}$ Zoll ist. Da Barlow die Wirkung dem Kugelinhalt proportional findet, muß man annehmen, daß die Mindestdicke dem Durchmesser proportional ist. In der Tat gibt Meldau in Der Magnet-Kompaß an Bord eiserner Schiffe, Bremen, 1924, S. 61 an: „Hohlkugeln sind ebenso wirksam wie Vollkugeln, wenn ihre Wandstärke mindestens $^1/_{10}$ des Kugeldurchmessers beträgt."

Nach Bolte, Neues Handbuch der Schiffahrtkunde, Hamburg 1914, S. 265 kompensiert eine Hohlkugel von 21 cm Durchmesser die Beträge $D = 4^0, 5^0, 6^0$, wenn O von der Innenwand der Kugel bzw. 26, $23^1/_2$, $21^1/_2$ cm entfernt ist.

Nach Meldau, a. a. O. S. 61 kompensiert ein Paar von Hohlkugeln, Durchmesser 17,7 cm, die Beträge $D = 2^0, 2{,}4^0, 2{,}9^0, 3{,}9^0$, wenn die Mitten der Kugeln bezw. 75, 70, 65, 60 cm von einander entfernt sind.

Der Verschiedenartigkeit solcher Angaben gegenüber wäre eine Standardisierung angebracht. Die Kompensationsfähigkeit einer Kugel wird durch eine unbenannte Zahl, das von uns vorgeschlagene Maß m gekennzeichnet, das zu einer bestimmten „Eichentfernung" gehört.

Die Matrize einer D-Kugel, Mitte auf der X-Axe, war

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathrm{m}\,.$$

Also ist für sie

$$\mathfrak{A} = 0,\ \mathrm{D} = \mathfrak{D} = \frac{\mathrm{a}-\mathrm{e}}{2\lambda} = \frac{\mathrm{a}-\mathrm{e}}{2+\mathrm{a}+\mathrm{e}} = \frac{3\,\mathrm{m}}{2+\mathrm{m}},$$

der Zusammenhang zwischen D und m. Hier ist D in Bogenmaß zu verstehen. Im Folgenden stellen wir einige Zahlenwerte zusammen.

D Grad	D arc	m	δ arc tg $\mathfrak{D}$
1°	0,017453	0,01170	1°
2°	0,034907	0,02354	2°
3°	0,052360	0,03253	2° 59′ 48″
4°	0,069813	0,03848	3° 59′ 36″
5°	0,087266	0,05992	4° 59′ 15″
6°	0,104720	0,07234	5° 58′ 40″
7°	0,122173	0,08490	6° 57′ 56″
8°	0,139626	0,09763	7° 56′ 55″
9°	0,157080	0,11051	8° 55′ 38″

Dabei nimmt man nach der fünfgliedrigen Näherungsformel $\delta = D \sin 2\zeta' = \pm D$ auf einem Kp.-Hauptzwischenkurs. Genauer ist bei größeren Beträgen nach der exakten Formel zu nehmen

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\mathfrak{D} \sin 2\zeta}{1 + \mathfrak{D} \cos 2\zeta},$$

also auf einem mgn. Hauptzwischenkurs $\delta = \pm \operatorname{arctg} \mathfrak{D}$. Zum Vergleich ist die vierte Spalte hinzugefügt.

Zu jeder Kugel gehört in einer bestimmten Eichentfernung ein bestimmtes Maß m, das durch Versuch ermittelt werden muß. Für jede andere Entfernung ergibt sich der zugehörige Wert m dann daraus, daß das Maß abnimmt (wächst), wie der Kubus der Entfernung wächst (abnimmt), also z. B. bei der doppelten Entfernung auf $^1/_8$ abnimmt. Dabei wird freilich gefordert, daß man nur ferne Kugeln anwendet. Die obigen Beispiele entsprechen dieser Forderung nur schlecht. Nahe Kugeln genügen nicht dem Poissonschen Satze, selbst wenn die Nadel so klein ist, daß man von Induktionswirkungen der Nadel auf die Kugel absehen kann. Bei nahen Kugelpaaren muß überdies Induktionswirkung zwischen den Kugeln durch hinreichend große Entfernung vermieden werden. Zur Verstärkung der Wirkung zieht man wohl die Induktionswirkungen hinzu, aber die geringen Vorteile derselben werden durch die Nachteile nicht aufgewogen (Meldau a. a. O. S. 62). Das Nichtbestehen des Poissonschen Satzes kommt u. a. darin zum Ausdruck, daß die Gleichung $-a = {}^1/_2 e$ durch gegenseitige Induktion der

Kugeln eine kleine Abänderung in $-a < {}^1/_2 e$, durch Nadelinduktion eine kleine Abänderung in $-a > {}^1/_2 e$ erleidet, wie Meldau, Ann. d. Hydrogr. 33, 1905, S. 171 findet.

Das zu einer bestimmten Eichentfernung gehörige Maß eines Körpers ist eine Zahl, die für den Körper selbst kennzeichnend sein soll. Wird es aber nötig für denselben Körper in derselben Eichentfernung bei verschiedenen Kompassen verschiedene Werte des Maßes oder von D anzugeben, so sind die Voraussetzungen nicht erfüllt. Die Tafeln bei Rottok, Deviationstheorie S. 209—214 zeigen solche Verschiedenheiten erstens zwischen Trocken- und Fluidkompassen, davon herrührend, daß bei letzteren die Voraussetzung „Kleinheit der Nadel" nicht erfüllt ist; zweitens aber auch zwischen 2 Fluidkompassen oder zwischen 2 Trockenkompassen, davon herrührend, daß die Voraussetzung „Kleinheit der Körper" nicht erfüllt ist. Folgender Auszug aus diesen Tafeln läßt das erkennen.

12,5 cm Kugelpaar.

Entfernung mm	D ($\lambda = 1$) Grad		
255	12,7	kleiner	Fluidkompaß
260	11,6	kleiner	Fluidkompaß
285	12,5	größer	Fluidkompaß
290	11,3	größer	Fluidkompaß

30 cm Kugelpaar.

Entfernung mm	Rose von Bamberg	Rose von Hechelmann
350	12,7	13,3
355	12,2	12,9
360	11,8	12,4

An solche Kompensationen kann man keine hohen Anforderungen stellen.

Archibald Smith hatte 1865 in den Phil. Trans. Roy. Soc. die Bemerkung gemacht: „Nach Webers Beobachtungen sind die Werte von $\varkappa$ für Stahl und weiches Eisen nahezu 5 und 36. Eine Stange oder dünne Platte aus weichem Eisen, in der Richtung ihrer Längsaxe magnetisiert, würde also eine mehr als siebenmal stärkere Wirkung haben, als eine Stange oder Platte von Stahl mit denselben Dimensionen; im Falle von Kugeln aber würden sich die Wirkungen verhalten wie

$$\frac{5}{5{,}24} : \frac{36}{36{,}24}\ ^{1)}$$

oder nahe wie 24:25 oder die Wirkung der härtesten Stahlkugel würde innerhalb 4 % dieselbe sein, wie die einer Weicheisenkugel, und innerhalb 5 % dieselbe, wie die einer gleichen Kugel aus unendlich stark magnetisierbarem Material, und das Hämmern einer derartigen Kugel würde keine merkliche Wirkung haben.“ Meldau knüpft hieran (a. a. O. S. 174) die wichtige Folgerung: „Was für die Kugel gilt, gilt auch für jeden anderen Körper, dessen Längsausdehnung nahe gleich der Querausdehnung ist; und von diesem Gesichtspunkte aus haben alle Versuche, Körper von starker mgn. Aufnahmefähigkeit zu konstruieren, um bei verhältnismäßig geringer Ausdehnung dieser Körper erhebliche Kompensationswirkungen auszuüben, von vornherein keine Aussicht auf Erfolg.“

Durch Wahl und Bearbeitung des Stoffes läßt sich also, solange man bei Eisen oder Stahl stehen bleibt, bei Kugeln keine nennenswerte Steigerung der Aufnahmefähigkeit bewirken. Man muß also entweder zu aufnahmestarken Eisenmischungen oder zu anderen Körperformen übergehen. Da einzelne Stäbe, Röhren, Scheiben nicht ausreichen, kann man Systeme paralleler Stäbe und Scheiben[2]), Mantelrohre u. dgl. versuchen. Daß man mit den bisherigen Stoffen und Formen nicht auskommt, beweisen auch die Worte (Enc. a. a. O S. 354): „man muß diese Weicheisenkörper innerhalb weniger Dezimeter vom Kompaßmittelpunkt anbringen, um ihre Dimensionen nicht gar zu sehr anschwellen zu lassen.“

Als Eichentfernung kann man die kleinste Entfernung wählen, im Verhältnis zu welcher der Körper noch als klein anzusehen ist. Das ist durch den Versuch zu entscheiden.

---

1) Nämlich wie die Werte von $\dfrac{\varkappa}{\varkappa + \dfrac{3}{4\pi}}$ für $\varkappa = 5$ und $\varkappa = 36$. S. z. B. Taschenb. d. Math. u. Phys. 1913, S. 278.

2) Barlow's Platten (a. a. O. S. 99-100) waren derart zusammengesetzt.

Man geht von einer größeren Entfernung aus, ermittelt für diese und für kleinere Entfernungen die Maße. Solange die Maße den Kuben der Entfernungen umgekehrt proportional sind, ist die kürzeste nicht unterschritten.

Stäbe bringe man zum Zweck der Eichung in die a-Lage, $a > 0$, erste Hauptlage in der X-Axe, und beobachte die Deviation auf einem Hauptzwischenkurs. Die Matrize

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{m ergibt } \mathfrak{D} = \frac{m}{2+m}.$$

Das gilt für ferne oder kurze Stäbe. Nach den Ausführungen des Abschnittes 5 sind auch nicht-kurze Stäbe zur Kompensation brauchbar. Während aber die Wirkungen eines kurzen Stabes in den drei Hauptlagen bei derselben Entfernung sich wie $2 : \sqrt{2} : 1$ verhalten, müssen nicht-kurze Stäbe für jede Hauptlage geeicht werden. Auch für jede in Betracht kommende Entfernung, da hier nicht die Wirkungen umgekehrt proportional den Kuben der Entfernungen sind. Alles erforderliche liefert eine „mgn. Karte“ eines Stabes, die die Kraftlinien und Isodynamen[1]) enthält.

Man verwendet statt dünner Stäbe, deren Aufnahmefähigkeit nicht genügt, Walzen oder Röhren, in Bezug auf deren Wandstärke schon bei Barlow (S. 51) dasselbe wie für Kugeln mitgeteilt wird. In 25,5 cm Querabstand von O und bei einer Länge von 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 cm kompensiert eine Walze von 8 cm Durchmesser bzw. $3^1/_2{}^0$, $8^1/_2{}^0$, 14^0, 20^0, 25^0, 30^0, 35^0; eine Röhre von 7,7 cm Durchmesser, 1,1 cm Wandstärke bzw. 3^0, 7^0, 11^0, $14^1/_2{}^0$, 18^0, $20^1/_2{}^0$, $22^1/_2{}^0$. (Meldau a. a. O. S. 60) Walzen und Röhren sind zwar angenäherte Poissonsche Körper, aber nur, wenn sie fern sind, gilt für sie der Poissonsche Satz. Auch Ripoll betont (Revue maritime 176, 1908, S. 15), daß für seinen Flinders-Stab von 7,8 cm Dicke, 60 cm Länge, 21 cm

1) Als Einheit dient wie S. 99 die Deka-Gauß-Einheit, die in der Physik Gauß-Einheit heißt, während die Nautik (s. z. B. Lehrb. d. Nav. f. d. kais. Marineschule, 1917, S. 342) hiermit die ursprüngliche Einheit des M. M. S.-Systems bezeichnet.

Abstand von O nicht mehr die Poissonschen Formeln gelten, aber er mißt dies der fehlenden Kleinheit der Nadeln, statt der fehlenden Kleinheit des Körpers zu. Der Vorteil eines Stabes als Flinders-Stab gegenüber einer Walze oder Röhre besteht darin, daß seine Pole immer eine (fast) feste Lage haben. Demnach hätte man ihn zur Erhöhung der Aufnahmefähigkeit nicht durch eine Walze oder Röhre, sondern durch eine spitze Spindel zu ersetzen oder durch eine um eine Seite spiralig aufgerollte Dreiecks-Scheibe.

38. Kompaß-Stand mit Einrichtung für vollständige Kompensation.

Die vollständige Kompensation des flüchtigen Magnetismus — den festen nehmen wir in bekannter Weise als kompensiert an — erfordert die Anbringung von höchstens drei Körpern (Modellen, Kugeln, Stäben) in Kompaß-Nähe in zu berechnenden Stellungen und Entfernungen. Eine derartige Anordnung wird durch Abb. 25 veranschaulicht. Die Kompaß-

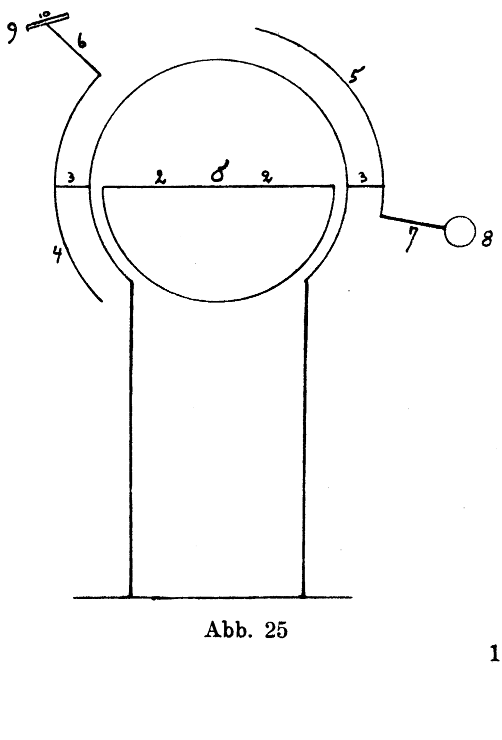


Abb. 25

Säule 1 trägt in der Höhe der Rose 2 und mit ihr konzentrisch einen wagerechten Ring 3 mit Kreisteilung. An ihm festklemmbar sind drei senkrechte Quadranten 4, 5 (nur zwei sind gezeichnet) mit demselben Mittelpunkt. Auch diese Quadranten tragen Kreisteilung. Mit jedem von ihnen ist am einen Ende ein Stab 6, 7 in radialer Richtung fest verbunden. Diese Stäbe tragen eine Entfernungsskala, wobei der Rosenmittelpunkt O zum Anfang genommen ist. Die Stäbe können erforderlichenfalls teleskopartig ausgezogen werden, jedoch kommen meist nur geringe Entfernungen in Betracht. Am Ende jeden Stabes wird der betr. Kompensationskörper 8, 9 befestigt. Handelt es sich um eine Kugel 8, so ist nichts weiter hinzuzufügen. Handelt es sich um einen Stab 9, so ist er vermittelst eines Kugelgelenkes 10 anzubringen, damit ihm jede Richtung gegeben werden kann.

39. Gebrauch des Kompaß-Standes für vollständige Kompensation.

Alles für die Praxis erforderliche ist zwar in unseren theoretischen Entwicklungen enthalten, soll aber hier wenigstens für den wichtigsten Fall in allen einzelnen Schritten übersichtlich zusammengestellt werden. Es soll der feste Magnetismus durch drei Stabmagnete, der flüchtige durch zwei Kugeln und einen Stab aus Weicheisen oder besser einer aufnahmestarken Mischung vollständig, d. h. für alle Lagen und Breiten kompensiert werden. Zur Verfügung steht ein Satz geeichter Stahlmagnete, ein Satz geeichter Kugeln, ein Satz geeichter Stäbe, ein Kompaß-Stand für vollständige Kompensation.

I. Die Beobachtungen. Das Schiff liege zunächst auf ebenem Kiel. Der Schiffsort ist nach geogr. Länge und Breite bekannt. Die horizontale Komponente H und die vertikale Komponente Z des Erdmagnetismus wird den mgn. Karten entnommen. Ebenso die örtliche Mißweisung. Der rechtweisende (rw.) Kurs, auf dem das Schiff liegt, wird durch Peilungen nach Gegenständen, deren Lage nach der Karte feststeht, ermittelt. Die Peilungen müssen also vom Kompaß unabhängig ausgeführt werden, sei es mit einer Peilscheibe oder als Heck-, Dwars- oder Bug-Peilungen. Den Kompaß-Kurs ζ' liest man am Kompaß ab. Die horizontale Komponente H' und die vertikale Komponente Z' des Gesamt-Magnetismus am Kompaß-Ort O bestimmt man durch Horizontal- und Vertikal-Kraftmessungen. Alle diese bisher beschriebenen Feststellungen und Beobachtungen macht man auf mindestens drei verschiedenen Kursen des Schiffes, am einfachsten ohne Ortsveränderung dazwischen. Auf einem dieser Kurse, am besten dem letzten, gebe man dem Schiff Lage, also in der Regel Krängung. Der Krängungswinkel i wird am Klinometer abgelesen. Der Kompaß-Kurs ζ' am Kompaß. Wie auf ebenem Kiel werden die horizontale Komponente H' und die vertikale Komponente Z' des Gesamt-Magnetismus durch Kraftmessungen ermittelt.

II. Die Berechnung der Deviations-Elemente. Aus jedem rw. Kurs und der Mißweisung berechne man den mgn. Kurs ζ'. Aus jeder der (mindestens) vier ermittelten Wertreihen: $H, Z, \zeta, H', Z', \zeta'$ berechne man:

$$X = H\cos\zeta,\ Y = -H\sin\zeta,\ X' = H'\cos\zeta',\ Y' = -H'\sin\zeta',$$

und aus den der Krängung entsprechenden Werten noch:

$$X_i = X,\ Y_i = Y\cos i + Z\sin i,\ Z_i = -Y\sin i + Z\cos i,$$
$$X'_i = X',\ Y'_i = Y\cos i + Z'\sin i,\ Z'_i = -Y'\sin i + Z'\cos i.$$

Aus den zu ebenem Kiel gehörigen Gleichungen:

$$X' - X = aX + bY + cZ + P,$$

deren man also mindestens drei hat, berechne man die drei Größen a, b und $cZ + P$. Ebenso aus den Gleichungen: $Y' - Y = dX + eY + fZ + Q$ die drei Größen d, e und $fZ + Q$; und aus den Gleichungen: $Z' - Z = gX + hY + kZ + R$ die drei Größen g, h und $kZ + R$. Aus der Gleichung: $X'_i - X_i = aX_i + bY_i + cZ_i + P$ berechne man nunmehr $cZ_i + P$. Aus der Gleichung: $Y'_i - Y_i = dX_i + eY_i + fZ_i + Q$ berechne man ebenso $fZ_i + Q$. Aus der Gleichung: $Z_i' - Z_i = gX_i + hY_i + kZ_i + R$ berechne man schließlich $kZ_i + R$.

Aus den Werten von $cZ + P$ und $cZ_i + P$ berechne man c und P. Aus den Werten von $fZ + Q$ und $fZ_i + Q$ berechne man f und Q. Aus den Werten von $kZ + R$ und $kZ_i + R$ berechne man k und R. Damit sind die zwölf Deviations-Elemente

$$\begin{pmatrix} a & b & c & P \\ d & e & f & Q \\ g & h & k & R \end{pmatrix}$$

berechnet.

III. Die Berechnung der Kompensatoren. Man wähle drei Zahlen x, y, z, sodaß sie der Gleichung genügen:

$$(f - h)x + (g - c)y + (b - d)z = 0$$

und normiere sie, indem man sie durch die Quadratwurzel ihrer Quadratsumme dividiert. Mittelst der so normierten x, y, z berechne man x′, y′, z′ aus:

$$\begin{aligned} x' &= -(a + e + k)x - (b - d)y + (g - c)z \\ y' &= (b - d)x - (a + e + k)y - (f - h)z \\ z' &= -(g - c)x + (f - h)y - (a + e + k)z \end{aligned}$$

und dann m positiv aus:

$$m^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 .$$

Jetzt berechne man die neun Elemente der Matrize

$$\begin{pmatrix} a + x'x & b + x'y & c + x'z \\ d + y'x & e + y'y & f + y'z \\ g + z'x & h + z'y & k + z'z \end{pmatrix} .$$

Diese Matrize ist symmetrisch und hat die Diagonalsumme Null, wovon man sich zur Probe überzeugt. Einen etwaigen kleinen Fehler in der Diagonalsumme verteilt man gleichmäßig auf die drei Diagonalelemente. Entsprechend verfährt man bei etwaigen kleinen Fehlern in den drei Symmetriebedingungen. Alsdann bezeichne man die Elemente dieser Matrize der Kürze halber wieder mit

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$$

und berechne die drei Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a-j & b & c \\ d & e-j & f \\ g & h & k-j \end{vmatrix} = 0\,.$$

Diese Wurzeln sind reell, ihre Werte seien mit j, j', j'' bezeichnet. Und zwar so, daß j' und j'' nicht größer sind als j. Aus den drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} (a-j)\,p + b\,q + c\,r &= 0 \\ d\,p + (e-j)\,q + f\,r &= 0 \\ g\,p + h\,q + (k-j)\,r &= 0 \end{aligned}$$

berechne man drei Zahlen p, q, r.

Aus den drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} (a-j')\,p' + b\,q' + c\,r' &= 0 \\ d\,p' + (e-j')\,q' + f\,r' &= 0 \\ g\,p' + h\,q' + (k-j')\,r' &= 0 \end{aligned}$$

berechne man drei Zahlen p', q', r'.

Aus den drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} (a-j'')\,p'' + b\,q'' + c\,r'' &= 0 \\ d\,p'' + (e-j'')\,q'' + f\,r'' &= 0 \\ g\,p'' + h\,q'' + (k-j'')\,r'' &= 0 \end{aligned}$$

berechne man drei Zahlen p'', q'', r''.

Ferner berechne man

$$\frac{j-j'}{3} = m' \quad \frac{j-j''}{3} = m''.$$

Es ist

$$\frac{x\,x' + y\,y' + z\,z'}{m} = -\frac{a+e+k}{m}\,.$$

Die Berechnung der Mittelpunktsrichtung ($\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$) des Stabes erfolgt am einfachsten graphisch, indem man einen mit Gradteilung versehenen Kreis zu Grunde legt. Durch den Punkt T, der den Durchmesser OV im Verhältnis 1 : 2 teilt, legt man eine Grade, deren Winkel mit OV den Cosinus

$$\frac{a+e+k}{m}$$

hat. (Abb. 20). Derjenige der beiden Schnittpunkte S dieser Graden mit dem Kreise, für den tg^2 OST kleiner (bzw. größer) als 2 ist, liefert den Winkel φ, wenn $a+e+k$ negativ (bzw. positiv) ist. Im ersten Falle muß der hinzuzufügende Stab richtkraftstärkend, im zweiten richtkraftschwächend sein. Nunmehr sind die drei Kosinus der Richtung, in der der Stabmittelpunkt liegt, aus den drei Gleichungen zu berechnen (S. 99)

$$\sqrt{1+3\cos^2\varphi}\,\frac{x'}{m} = 3\,\mathfrak{x}\cos\varphi - x$$

$$\sqrt{1+3\cos^2\varphi}\,\frac{y'}{m} = 3\,\mathfrak{y}\cos\varphi - y$$

$$\sqrt{1+3\cos^2\varphi}\,\frac{z'}{m} = 3\,\mathfrak{z}\cos\varphi - z\quad,$$

in denen der Faktor links aus der Forderung bestimmt ist, daß die Quadratsumme beiderseits übereinstimmt. Die Quadratwurzel links läßt sich aber rational ausdrücken, wodurch die Ungewißheit über das Vorzeichen behoben wird. Setzt man nämlich die drei Gleichungen mit

$$\frac{x'}{m},\ \frac{y'}{m},\ \frac{z'}{m}$$

zusammen, so erhält man

$$\sqrt{1+3\cos^2\varphi} = 3\cos TSO\cdot\cos TOS - \cos STO,$$

mit

$$\cos TSO = \cos\varphi = \mathfrak{x}x + \mathfrak{y}y + \mathfrak{z}z$$

$$\cos TOS = \frac{\mathfrak{x}x' + \mathfrak{y}y' + \mathfrak{z}z'}{m}$$

$$\cos STO = \frac{xx' + yy' + zz'}{m} = -\frac{a+e+k}{m}$$

Über die Vorzeichen der beiden Glieder rechts besteht kein Zweifel, trotz der Unbestimmtheit in den Vorzeichen von $x, y, z, x', y', z', \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$. Denn bei den ersten sechs Größen darf man nur zugleich das Vorzeichen umkehren, und die drei Größen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ sind ebenfalls nur bis auf ein gemeinsames Vorzeichen unbestimmt.

Damit sind die Elemente des Stabes, nämlich seine Richtung (x, y, z), die Richtung, in der sein Mittelpunkt liegt ($\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$) und sein Maß m bestimmt.

IV. Anbringung der Kompensatoren. Man entnehme dem Satz geeichter Stahlmagnete einen mit P' geeichten und bringe ihn, Richtung X-Axe, entweder in erster Hauptlage in einer Entfernung an, die sich zur Eichentfernung verhält, wie die Kubikwurzel aus P' : P zu Eins. Oder in zweiter Hauptlage, für welche P' durch $^1/_2$P' zu ersetzen ist. Letzteres ist bequemer und üblich. Man prüft die Lage des Magneten nach und verbessert sie gegebenenfalls, indem man durch Messung der Richtkraft X' feststellt, ob sie durch Anbringung des Magneten um P abgenommen hat. Der Richtungssinn von P' ist gleich oder entgegen dem von X, jenachdem das Vorzeichen von P entgegen oder gleich dem von X ist. Ebenso ist bei der Kompensation von Q und R zu verfahren. Für die letztere bevorzugt man die erste Hauptlage; für die zweite wären etwa die Wände des Steuerhauses zu nehmen; aber der Magnet müßte stärker sein, als bei der üblichen Anbringung im Kompaß-Stand.

Man entnehme dem Satz geeichter Kugeln eine mit m' geeichte und bringe sie in dem Punkte mit den Koordinaten p', q', r' an. Durch das Verhältnis p' : q' ist der Tangens des Winkels bestimmt, bei welchem der Quadrant 4 an dem Kreise 3 (Abb. 25) festgeklemmt werden muß. Die Gradteilung auf 3 muß also zweckmäßig auf der X-Axe mit Null beginnen, auf der Y-Axe mit 90° endigen; auf allen vier Quadranten des Kreises 3. Sind p', q' gleichen Zeichens, so ist der erste oder dritte Quadrant zu nehmen, sind p', q' verschiedenen Zeichens, so ist der zweite oder vierte Quadrant zu nehmen. Der Punkt des Quadranten 4, mit dem dieser an dem Kreise 3 festgeklemmt werden muß, ergibt sich daraus, daß der Bogen von diesem Punkte bis zum Kugelhalter 6 einen Tangens gleich $r' : \sqrt{p'^2 + q'^2}$ haben muß. Ob dieser Gradbogen oberhalb oder unterhalb der Ebene des Kreises 3 zu nehmen ist, ergibt sich aus der weiter unten gegebenen Regel. Schließlich ist die Kugel m' im Endpunkt 8 des Kugelhalters 6 zu befestigen und dieser soweit auszuziehen, daß die Kugel die Eichentfernung von O bekommt. Hat die Kugel nicht das Maß m', weil eine solche nicht vorhanden ist, sondern das dem m′ nächstgelegene Maß n, so hat man dieser Kugel durch Veränderung der Länge des Kugelhalters 6 eine Entfernung von O zu geben, die sich zur Eichentfernung verhält, wie die Kubikwurzel aus n : m′ zu Eins. Ebenso ist in Bezug auf die Kugel mit dem Mittelpunkte (p″, q″, r″) und dem Maß m″ zu verfahren. Entsprechend auch mit dem Stabe, dem aber noch vermittelst des Kugelgelenks 10 die Richtung (x, y, z) zu geben ist. Diese Richtung stellt man vorher mit Hilfe des Kreises 3 und eines Quadranten 4, 5 fest.

Für die Lage der Mittelpunkte der beiden Kugeln und des Stabes gilt die Regel:

p	q	r		Oktant	
+	+	+	vorn	Steuerbord	unten
+	+	—	vorn	Steuerbord	oben
+	—	+	vorn	Backbord	unten
+	—	—	vorn	Backbord	oben
—	+	+	achtern	Steuerbord	unten
—	+	—	achtern	Steuerbord	oben
—	—	+	achtern	Backbord	unten
—	—	—	achtern	Backbord	oben .

Für jeden der drei Kompensationskörper hat man eine doppelte Möglichkeit der Anbringung entsprechend einer gleichzeitigen Vorzeichenänderung der Mittelpunktskoordinaten. Davon muß man Gebrauch machen, wenn ein Kompensationskörper mit der Kompaß-Säule, mit einer Kompaß-Laterne oder mit dem Blickfeld auf die Rose in Kollision käme.

Man hat dem Stab die Richtung (x, y, z) zu geben. Da für x, y, z nur eine lineare homogene Gleichung gegeben ist, kann man eine geeignete zweite solche Bedingung hinzunehmen, z. B. die Gleichung $z = 0$. Die Richtung des Stabes ist dann der XY-Ebene parallel und nur durch x : y bestimmt. Das läßt sich leichter bewerkstelligen.

V. Andere Möglichkeiten. Statt mit zwei Kugeln und einem Stabe kann man mit zwei Stäben und einer Kugel oder auch mit drei Stäben kompensieren. Die Verwendung von Stäben hat aber den Nachteil, daß nicht nur ihr Mittelpunkt, sondern auch ihre Richtung berechnet und eingestellt werden muß. Das bedeutet mehr Umstände und Fehlerquellen. Allerdings würde die Kompensation durch drei Stäbe dann sehr einfach sein, wenn man die drei Stäbe nähme:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix},$$

da diese einfach den drei Axen parallel sind, sodaß die Einstellung ihrer Richtung keine Schwierigkeiten macht. Aber es empfiehlt sich die Verwendung der Stäbe möglichst einzuschränken. Denn ein Stab hat, wenn man bei kleinen Stäben bleiben will, im Verhältnis zur Kugel in Folge seiner Form eine geringere Aufnahmefähigkeit. Man kann aber auch Stäbe verwenden, die nicht mehr kurz im Verhältnis zu ihrer Entfernung von O sind, da auch für solche der Poissonsche Satz gilt. Aber sowohl die Berechnung, wie die Anbringung werden infolge der neuen verfügbaren Größe weitläufiger und deshalb ungenauer. Man hätte so zu verfahren. Man berechne x, y, z, x', y', z' und die beiden Kugeln genau wie oben. Nach Anbringung der beiden Kugeln ist sicher, daß die Kompensation nunmehr durch einen Stab bewirkt werden kann. Die verbleibende, durch den Stab von der Richtung (x, y, z) zu kompensierende Feldstärke hat die Richtung (x', y', z'). Mit Hilfe eines Kartenblattes, auf dem der Verlauf der Kraftlinien des zu verwendenden Stabes verzeichnet ist, der „mgn. Karte" des Stabes, kann man dem Stabe die Richtung (x, y, z) und zugleich seiner Feldstärke in O die Richtung (x', y', z') geben. Durch Ändern der Entfernung des Stabes bewirkt man dann, daß die Deviation auf irgend einem Kurse mit nicht verschwindender Deviation zu Null kompensiert wird. Dieses Ändern der Entfernung erfolgt aber nunmehr, da es sich um einen nicht-kleinen Stab handelt, nicht mehr einfach gradlinig in Richtung auf O, sondern vermittelst der Isogonen auf der mgn. Karte des Stabes.

Über die Kompensationen durch zwei mgn. Modelle ist das Erforderliche in Abschnitt 28 gesagt worden. Nur im Nicht-Poissonschen Fall kommt sie in Betracht. Nach Ermittlung der Modelle ist ihre Anbringung einfach und erfordert keine Rechnung. Für die Herstellung der Modelle wird man die Erfahrungen ähnlicher Schiffe verwerten.

Sind die Deviationselemente

$$\begin{pmatrix} a & b & c & P \\ d & e & f & Q \\ g & h & k & R \end{pmatrix}$$

berechnet und kompensirt worden und erfolgt eine neue Deviationsbestimmung, so seien die neuen Elemente bezeichnet mit Δa, Δb, Δc, ΔP, usw. Man wird diese nicht durch neue Kompensationskörper kompensieren, sondern wird vielmehr die alten so versetzen, daß die Deviationselemente $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, $c + \Delta c$, $P + \Delta P$ usw. kompensiert werden. Sind die Elemente Δa, $\Delta b, \cdots$ klein, so vereinfacht sich die Berechnung der neuen Körper nach den Regeln für das Rechnen mit kleinen Größen. Die Entfernung des P-Magneten z. B. muß im Verhältnis der Kubikwurzel aus $(P + \Delta P) : P$ geändert werden, wofür bei kleinen ΔP gesetzt werden kann

$$1 + {}^1/_3 \frac{\Delta P}{P}.$$

40. Träger Magnetismus und seine Kompensation.

Der in einem Schiff bei einer bestimmten Lage zum Erdfeld induzierte Magnetismus verflüchtigt sich um so langsamer, je länger das Schiff diese Lage beibehalten hat: es verbleibt nach Eintreten mgn. Gleichgewichts ein Teil davon als träger, halbfester, remanenter Magnetismus, der einige Zeit abnehmend zu P, Q, R, hinzutritt. Diese Änderungen von P, Q, R, infolge von trägen Magnetismus nennen wir ΔP, ΔQ, ΔR. Ist nur unvollkommen kompensiert, wie das meist der Fall ist, so werden unter Annahme des Poissonschen Satzes ΔP, ΔQ, ΔR Linearformen von X, Y, Z, den Komponenten von T für die lange beibehaltene Lage. Die Änderungen von P und Q ziehen Änderungen von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, die Änderungen von P, Q, R ziehen Änderungen von $\mathfrak{B}_i$, $\mathfrak{C}_i$ und $\mathfrak{B}_u$, $\mathfrak{C}_u$ nach sich, wie aus den für Deviation bei Lage abgeleiteten Formeln folgt (S. 48, 49). Ein langsames Rundschwojen ändert zeitweilig die Koëffizienten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{E}$. Zwar könnte man ΔP, ΔQ, ΔR durch Versetzen der P-, Q-, R-Magnete kompensieren, wenn man diese Beträge kennen würde. Dazu müßte die ganze Ermittlung der Deviationselemente wiederholt werden. Da das im allgemeinen nicht möglich ist, empfiehlt sich auch aus diesem Grunde, daß man zunächst vollständig kompensiert, und mit dem trägen Magnetismus, der ein unsicheres Element bleibt, in folgender Weise fertig wird.

Zwei einander kompensierende Stäbe nehmen gleichen trägen Magnetismus auf. Kehrt man also den einen um, so wird sich der Anteil des trägen Magnetismus in beiden kompensieren, während sich vorher diese Anteile addierten. Der flüchtige Magnetismus beider Stäbe wird nach der Umkehrung des einen geradeso kompensiert, wie vor dieser Umkehrung.

Kehrt man also in einem Schiff die Kompensationsstäbe um, so wird der träge Magnetismus kompensiert; bis neuer entsteht. Dabei wird angenommen, daß die Stäbe den Magnetismus mit derselben Zähigkeit festhalten, wie die Eisenteile des Schiffes, daß sie also aus demselben Eisen bestehen und dieselbe Bearbeitung erlitten haben. Da diese Voraussetzung nie ganz erfüllt sein kann, bleibt ein durch die Stäbeumkehrung nicht kompensierter Rest von trägem Magnetismus zurück, der in einer Änderung von P, Q, R zum Ausdruck kommt. Mit diesem ist nach S. 172 zu verfahren.

Vielleicht empfiehlt es sich die Stäbe-Umkehrung periodisch, etwa täglich vorzunehmen und dabei zugleich die Reihenfolge der einzelnen Teile zu ändern, wenn sie wie der Flindersstab aus solchen zusammengesetzt sind.

Koldewey empfiehlt i. d. Ann. d. Hydrogr. 1905, S, 124, Ausglühen des Flinderstabes, wie es auch Barlow (a. a. O. S. 51) bei seinen Versuchen anwandte, während Meldau

(Kleines Kompaßlexikon, Hamburg 1921, S. 9) das nur bei völliger Neukompensation für zweckmäßig hält.

Das Weitere muß die Erfahrung lehren.

Kugeln halten, weil ihre Form der Entmagnetisierung günstig, trägen Magnetismus weniger fest als Stäbe. Man wird also mit Rücksicht auf den trägen Magnetismus mit zwei Kugeln und nur einem Stabe kompensieren, wie dies oben gezeigt wurde. Zur Kompensation des trägen Magnetismus muß man Kugeln um 180° um eine zu derjenigen Richtung senkrechte Axe drehen, in der der träge Magnetismus entstanden ist.

41. Deviation durch elektrischen Strom und deren Kompensation.

Durch Einschalten eines elektrischen Licht- oder Kraftstromes kann eine Zusatz-Deviation auftreten. Solange der Strom konstant ist, kann diese elektrische Deviation in nichts anderem bestehen als in einer konstanten Feldstärke (ΔP, ΔQ, ΔR), die zu den Feldstärken (X, Y, Z), (U, V, W), (P, Q, R) im Kompaß-Ort O hinzutritt. Sie wäre also durch drei Magnete nach Art der P-, Q-, R-Magnete zu kompensieren. Ersetzt man diese gedachten Zusatz-Magnete durch kleine Elektromagnete, umflossen von demselben Strom im richtigen Sinne, so treten diese nur in Kraft, wenn der Strom geschlossen wird, also nur, wenn die Kompensation erforderlich ist. Die drei Elektromagnete können auch durch einen ersetzt werden, genau, wie das bei den P-, Q-, R-Magneten der Fall war.

Änderungen des Stromes, solange sie klein sind, ist, zwar durch Trägheit verzögert, sowohl die Änderung der elektrischen Deviation, als auch die Stärke der Elektromagneten proportional, sodaß die Kompensation erhalten bleibt.

Wechselstrom gibt keine Deviation; auch Gleichstrom nicht, wenn Hin- und Rückleitung wenigstens in Kompaß-Nähe nahe zusammen liegen. Nach den Vorschriften des Germanischen Lloyd hat das bis zu 5 m Entfernung statt zu finden.

42. Kompensation im allgemeinen Fall.

Unsere Überlegungen bezogen sich in erster Linie auf den Fall, daß der Poissonsche Satz gilt. Gilt er in einem gegebenen Fall nicht, was nach Abschnitt 16 entschieden werden kann, so kann immerhin noch wenigstens die Voraussetzung zutreffen, daß die ablenkenden Massen als klein angesehen werden dürfen im Verhältnis zu ihrer Entfernung vom Kompaß-Ort O. Das wird man z. B. dann annehmen dürfen, wenn, wie das heute vom Schiffbau verlangt wird, der Kompaß-Ort in einer Umkugel von mindestens zwei Meter eisenfrei ist. Sind dann die Deviationen klein genug, so kann man verfahren, wie wenn der Poissonsche Satz angenähert gilt und kann demnach wie oben kompensieren. Die unkompensierbaren Deviationsreste, herrührend vom nicht genauen Bestehen des Poissonschen Satzes, berücksichtigt man an Hand einer Steuertabelle oder eines Napier-Diagramms. Gilt aber der Poissonsche Satz nicht mit einigermaßen genügender Annäherung, so kann man die Kompensation durch mgn. Modelle nach Abschnitt 28 anwenden. Wenn aber schon die Voraussetzung der Kleinheit der ablenkenden Massen vom Kompaß-Ort nicht zutrifft, dann kann man folgende Überlegungen machen.

Wir können zunächst nach Abschnitt 16 die Werte P, Q, R und die Funktionen U, V, W ermitteln, letztere für möglichst viele Wertsysteme von X, Y, Z. Die Werte P, Q, R werden, wie beschrieben, durch drei Stabmagnete kompensiert. Die Funktionen U, V, W werden aus den ermittelten Werten interpoliert, graphisch, tabellarisch oder durch Formeln, zweckmäßig durch Kugelfunktionen, dargestellt, sodaß man auch die Ableitungen der U, V, W nach den X, Y, Z für alle Werte von X, Y, Z kennt. Da U, V, W nach dem allgemein angenommenen Induktionsgesetz Formen ersten Grades von X, Y, Z sind, so ist nach dem Eulerschen Satze bekanntlich:

$$U = \frac{dU}{dX} X + \frac{dU}{dY} Y + \frac{dU}{dZ} Z$$
$$V = \frac{dV}{dX} X + \frac{dV}{dY} Y + \frac{dV}{dZ} Z$$
$$W = \frac{dW}{dX} X + \frac{dW}{dY} Y + \frac{dW}{dZ} Z \,.$$

Solange nur geringe Kurs-, Lage- und Breitenänderungen in Betracht kommen, also nur geringe Änderungen von X, Y, Z, solange sind auch die Ableitungen der U, V, W nach den X, Y, Z so wenig veränderlich, daß man wie bei angenäherter Geltung des Poissonschen Satzes verfahren, also z. B. durch neun Stäbe kompensieren kann. Größeren Änderungen muß man durch Änderung der Maße, also der Entfernungen und (oder) der Aufnahmefähigkeiten der Stäbe Rechnung tragen. Diese neun Maße sind jetzt neun Veränderliche.

Veränderliche Stäbe und Magnete sind in Bezug auf die Elemente c, (f, k) und R in Gebrauch. Der c-Stab von Flinders wird aus Stücken zusammengesetzt, um seine Länge und damit seine Aufnahmefähigkeit der mgn. Breite entsprechend ändern zu können. Der Lord Kelvin-Magnet in der Z-Axe, der den Lagenfaktor $(a-k)\,Z-R = (e-k)\,Z-R$ kompensieren soll, erhält eine veränderbare Entfernung[1]). Zur bloßen Kompensation von R wäre dies kaum nötig. Aber dieser Magnet soll zugleich das mit der mgn. Breite veränderliche Element $(a-k)\,Z = (e-k)\,Z$ kompensieren, während der natürliche Weg hierzu die Kompensation von $a-k = e-k$ durch einen k-Stab wäre, der dann mit dem c-Stab von Flinders und evtl. einem f-Stab zu dem in Abschnitt 5 erwähnten Stab

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

vereinigt werden könnte. Daß man zu einer Kompensation von $a-k = e-k$ durch einen k-Stab nicht gekommen ist, spricht für die Ungültigkeit des Poissonschen Satzes mindestens in vertikaler Hinsicht. Kommt man in horizontaler Beziehung mit veränderlichen Stäben und Magneten auch

1) Nach Admiralty Manual (s. z. B. Rottok a. a. O. S. 149, Lehrb. d. Nav. I, 1906, S. 182) soll der Krängungs-Magnet der Rose nicht näher als 75 cm kommen, sonst lieber ein Teil des Krängungsfehlers unkompensiert bleiben! — Das beweist wieder die Unvollkommenheit dieser Kompensation.

bei beliebigen Kursänderungen aus, so spricht dies für die Gültigkeit des Poissonschen Satzes in horizontaler Hinsicht.

Veränderbare Stäbe, wie der Flinders-Stab und der Lord Kelvin-Magnet genügen zwar, um geringen Lagenänderungen und den langsamen Änderungen der mgn. Breite zu folgen. Schnellen und großen Kurs- und Lagenänderungen durch Gieren, Schlingern, Stampfen kann man mit solchen veränderbaren Stäben nicht entsprechen. Man müßte denn die drei Magnete durch Elektromagnete ersetzen, und die erforderlichen Stromstärken durch die Schiffsbewegungen selbst derart regeln, daß die drei Elektromagnete die momentanen Werte $U + P$, $V + Q$, $W + R$ kompensieren. Das ist möglich, aber unpraktisch.

Man kann die bisherige Kompensation, z. B. durch zwei Kugeln und einen Stab als den ersten Schritt der vollständigen Kompensation ansehen, nämlich als die Kompensation der ersten Entwicklungskoëffizienten, und kann für die folgenden Koëffizienten das Entsprechende versuchen. Waren die ersten Kompensationskörper fern, so müssen die zweiten soweit nahe rücken, daß in den Entwicklungen ihrer Deviationselemente grade die durch T geteilten Glieder zweiter Ordnung noch mitzunehmen sind.

Wie aus der Potentialtheorie folgt, verschwinden auch für nicht-ferne Kugeln Divergenz und Rotation, sodaß nichtverschwindende Divergenz und Rotation nur durch Stäbe, nicht durch Kugeln zu kompensieren sind. Andrerseits enthält die Deviation eines Stabes nach Abschnitt 5 immer nur lineare Glieder. Demnach hat man nach den linearen Entwicklungskoëffizienten von U, V, W den Kompensations-Stab wie in Abschnitt 31 aufzusuchen. Nach dessen Anbringung verschwindet für die noch verbleibende Deviation die Divergenz und die Rotation. Diese Deviation muß nun durch Kugeln allein kompensiert werden. Für eine nicht-ferne Kugel kommen zu den im Abschnitt 23 abgeleiteten linearen Gliedern der Deviations-Komponenten U, V, W Glieder höherer Ordnung, zunächst der zweiten hinzu. Durch solche nichtfernen Kugeln in ausreichender Anzahl hätte man also zunächst die quadratischen Glieder zu kompensieren, wodurch sich die linearen ändern. Die linearen Glieder, wie sie nunmehr sind, hat man dann wie früher durch zwei ferne Kugeln zu kompensieren. Diese bloß theoretischen Überlegungen sollen hier nicht weiter ausgeführt werden.

43. Mehrnadelrosen.

An die Kompaßrose stellt man zunächst folgende Anforderungen. Die Rose soll erstens den Drehungen des Schiffes gegenüber in „Ruhe" verharren. Sie soll zweitens „Empfindlichkeit" gegen Ablenkungen aus ihrer Ruhelage besitzen, d. h. sie soll auch bei kleinen Ablenkungen in die Ruhelage zurückkehren. Ruhe und Empfindlichkeit erfordern beide (I) mechanisch: geringe Reibung zwischen Pinne und Hütchen, also, da die Reibung das Produkt aus Reibungsfaktor und Druck ist, (1) einen geringen Reibungsfaktor, also scharfe, harte Spitze (Platin, Iridium), hartes Hütchen (Rubin, Saphir, Beryll), (2) entweder eine leichte Rose (Trockenkompasse), oder eine Rose mit Schwimmkörper, der das Gewicht der Rose soweit erforderlich verringert (Fluidkompasse). Beim Trockenkompaß wirkt die Luft, beim Fluidkompaß in stärkerem Grade die Flüssigkeit einerseits dämpfend auf die Schwingungen, durch welche die abgelenkte Rose in ihre Ruhelage zurückkehrt, andrerseits bei Drehungen des Schiffes als ablenkende Reibung. Ersteres ist von Vorteil, letzteres von Nachteil. (II) magnetisch: hinreichend großes Produkt aus dem mgn. Moment und der Richtkraft H' am Kompaßort, da dem Verhältnis dieses Produktes zur Reibung das „Einstellungsvermögen proportional ist. Je geringer also die Reibung und je größer die Richtkraft H' ist, je kleiner darf das mgn. Moment sein, sofern es nur das erforderliche Einstellungsvermögen sichert. Andrerseits ist ein geringes mgn. Moment erwünscht, um Induktion der Rose auf die Kompensatoren zu vermeiden.

Den Drehungen der Rose wirkt ihr Trägheitsmoment (Beharrungsvermögen gegen Drehung) entgegen. Ein großes

Trägheitsmoment ist also für die Ruhe, ein kleines für die Empfindlichkeit günstig. Bei Steuerkompassen ist die erstere, bei Peilkompassen die letztere Eigenschaft die wichtigere.

Bei Fluidkompassen erzielt man großes mgn. Moment, das schon wegen der reibenden Flüssigkeit nötig ist, durch starke Nadeln. Das große Gewicht macht der Schwimmer unschädlich.

Bei Trockenkompassen kann man starke Nadeln wegen des erforderten geringen Gewichtes nicht anwenden. Wegen der geringen Luftreibung genügt ein geringes mgn. Moment, außer an Kompaßorten geringer Richtkraft H'. Wegen des geringen Gewichts kann man das Trägheitsmoment nur durch geeignete Massenverteilung vergrößern. Das geschieht durch mehrere leichte Nadeln in passender Anordnung.

Rosen mit großem mgn. Moment sind nötig an Kompaßorten, an denen die Richtkraft H' infolge umgebender Eisenmassen geschwächt ist und der Platz mangelt, um die Richtkraft durch Kompensatoren zu stärken. Rosen mit kleinem mgn. Moment haben eine große Schwingungsdauer, was nach Lord Kelvin gegenüber den periodischen Schiffsbewegungen vorteilhaft ist.

Die Deviationstheorie setzte voraus, daß die Nadeln klein sind im Verhältnis zur Entfernung der ablenkenden Massen, sodaß das Magnetfeld im Bereich der Nadel als homogen angesehen werden kann. Poisson hatte diese Annahme stillschweigend seiner Theorie zugrunde gelegt. Aber erst die Einführung von Kompensatoren machte auf die Notwendigkeit dieser Voraussetzung aufmerksam. In der Tat erkannte Archibald Smith diese Notwendigkeit, als auf dem Great Eastern die Theorie infolge der im Verhältnis zur Entfernung der Kompensatoren ungewöhnlichen Länge der Nadeln nicht stimmen wollte. Das war für Smith und Evans die Veranlassung, die schon früher zur Erhöhung des Trägheitsmomentes eingeführten Mehrnadelrosen auf ihre mgn. Eigenschaften zu untersuchen. Es ergab sich, daß bei zweckmäßiger Anordnung der Nadeln ein solches System sich wie eine viel kürzere Nadel verhält.

Es sei (Abb. 26) NS die mgn. Axe der Rose, m im Abstand r von O ein mgn. Teilchen der Rose, M in einem Abstand, den wir zur Einheit nehmen, ein Eisenteil des Schiffes. Der Winkel NOm sei α, der Winkel NOM sei φ. Die Wirkung zwischen M und m ist umgekehrt proportional Mm^2. Das Drehmoment ergibt sich hieraus durch Multiplikation mit dem Hebelarm, dem Abstand r sin OmM des Drehpunktes O von der Wirkungslinie Mm. Da dieser nach dem Sinussatz gleich

$$r \sin(\varphi-\alpha) \frac{OM}{Mm}$$

ist, wird das fragliche Moment proportional

$$r \sin(\varphi-\alpha) Mm^{-3} = r \sin(\varphi-\alpha)\,(1-2r\cos(\varphi-\alpha)+r^2)^{-3/2}\,.$$

Um dies in eine Fourier-Reihe nach Sinus und Cosinus der Vielfachen von $\varphi-\alpha$ zu entwickeln, entwickeln wir zunächst die $-^3/_2$te Potenz nach der Binomialreihe wie im Abschnitt 23, und wenden auf jedes Glied $\sin(\varphi-\alpha)\cdot\cos^n(\varphi-\alpha)$ die Formel an

$$2^n \sin\beta \cos^n\gamma = \sin(\beta+n\gamma) + \binom{n}{1}\sin(\beta+(n-2)\gamma) + \cdots + \sin(\beta-n\gamma)\,,$$

die, für $n=1$ bekannt, nach Multip ikation mit $2\cos\gamma$ durch den Schluß von n auf $n+1$ bewiesen wird. Dann ergiebt sich das Moment proportional

$$\begin{aligned} &\left(r+\frac{3}{8}r^3+\cdots\right)\sin(\varphi-\alpha)\\ +&\left(\frac{3}{2}r^2+\cdots\right)\sin 2(\varphi-\alpha)\\ +&\left(\frac{15}{8}r^3+\cdots\right)\sin 3(\varphi-\alpha)\\ +&\left(\frac{35}{16}r^4+\cdots\right)\sin 4(\varphi-\alpha)\\ +&\left(\frac{315}{128}r^5+\cdots\right)\sin 5(\varphi-\alpha)\\ +&\cdots \end{aligned}$$

Für ein gleiches Teilchen westlich vom N-Punkt der Rose ist das Vorzeichen von α umzukehren. Für zwei konträr gleiche, entsprechend beim S-Punkt der Rose gelegene Teilchen ist das Zeichen von r umzukehren. Fügt man die vier Momente mit Rücksicht auf ihren Drehungssinn zusammen, so erhält man das Vierfache von

$$\left(r + \frac{3}{8} r^3 + \cdots\right) \sin \varphi \cos \alpha$$
$$+ \left(\frac{15}{8} r^3 + \cdots\right) \sin 3\varphi \cos 3\alpha$$
$$+ \left(\frac{315}{128} r^5 + \cdots\right) \sin 5\varphi \cos 5\alpha \qquad + \cdots$$

Die vier Teilchen seien die vier Pole eines symmetrisch zu NS liegenden Nadelpaares. Aus der Entwicklung des Drehmomentes fällt das zweite Glied fort, wenn $\cos 3\alpha = 0$, $\alpha = 30^0$ gewählt wird. Dadurch werden Glieder der Form

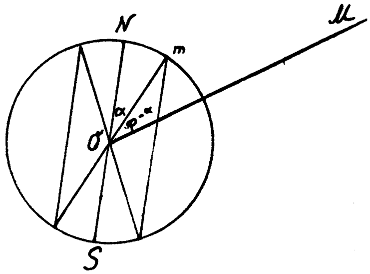


Abb. 26

$\sin 3\varphi$, soweit sie von der Rose herrühren, vermieden. Das Nadelpaar hat einen Winkelabstand seiner Pole von N und S gleich

$$\pm \frac{90^0}{3}.$$

Wir nehmen zwei Nadelpaare mit den Winkelabständen $\pm \alpha$ und $\pm \beta$. Die acht Drehmomente zusammen ergeben im Koëffizienten von $\sin 3\varphi$ den Faktor $\cos 3\alpha + \cos 3\beta$. Soll dies Glied fortfallen, so muß $3\alpha + 3\beta = 180^0$, also $\alpha = 30^0 + \alpha_1$, $\beta = 30^0 - \alpha_1$ sein; die beiden Nadelpaare müssen von dem zuerst ermittelten gleiche Winkelabstände haben.

Nehmen wir ein zweites Nadelquadrupel, bestimmt durch die Winkelabstände $30^0 + \beta_1$, $30^0 - \beta_1$. Die sechzehn Drehmomente zusammen ergeben für $\sin 3\varphi$ einen verschwindenden Koëffizienten, und für $\sin 5\varphi$ ebenfalls, wenn $\cos 5(30^0 + \alpha_1) + \cos 5(30^0 - \alpha_1) + \cos 5(30^0 + \beta_1) + \cos 5(30^0 - \beta_1) = 0$ gemacht wird. Das ergibt $5\alpha_1 + 5\beta_1 = 180^0$, also $\alpha_1 = 18^0 + \alpha_2$, $\beta_1 = 18^0 - \alpha_2$. Mit einem zweiten Oktupel zusammen kann man auch das Glied $\sin 7\varphi$ beseitigen, usw.

Allgemein, wählt man die Winkelabstände der N-Punkte der Nadeln vom N-Punkt der Rose (und ebenso der S-Punkte der Nadeln vom S-Punkt der Rose) gleich

$$\pm\frac{90^0}{3} \pm \frac{90^0}{5} \pm \frac{90^0}{7} \pm \cdots,$$

so werden dadurch beseitigt die Glieder $\sin 3\varphi$, $\sin 5\varphi$, $\sin 7\varphi$, usw.

Ein solches Nadelsystem wirkt also wie eine einzelne Nadel, deren Länge $2r$ so klein ist, daß man Glieder mit r^2 bereits vernachlässigen kann.

Statt

$$\pm\frac{90^0}{3} \pm \frac{90^0}{5}$$

bei Nadelquadrupeln nimmt man etwas einfacher

$$\pm\frac{90^0}{3} \pm \frac{90^0}{6}.$$

Außer mgn. Eigenschaften verlangt man von der Rose mechanische, nämlich eine gegen Störungen möglichst zweckmäßige Massenverteilung. Eine solche wird erreicht, wenn das Trägheitsmoment für alle Axen denselben Wert hat.

Ein Paar von Nadeln der Länge $2l$, vom Abstand $2s$, dessen Ebene um t unter dem Aufhängepunkt O liegt, hat bei Nordkurs in Bezug auf die drei Axen Trägheitsmomente proportional[1])

---

1) S. z. B. Handbuch der nautischen Instrumente, Reichs Marine-Amt 1890, S. 198.

$$4\int_0^l (t^2 + x^2)\,dx = 4l\,(t^2 + {}^1/_3\, l^2)$$

$$4\int_0^l (s^2 + t^2)\,dx = 4l\,(s^2 + t^2)$$

$$4\int_0^l (s^2 + x^2)\,dx = 4l\,(s^2 + {}^1/_3\, l^2).$$

Diese werden einander gleich, wenn $l = s \cdot \sqrt{3} = t \cdot \sqrt{3}$ wird. Ein solches Nadelpaar hat seine Pole in Winkelabständen $\pm 30^0$ von den Polen der Rose, wie es bei dem oben aus mgn. Gründen abgeleiteten Nadelpaar der Fall war. (Abb. 27).

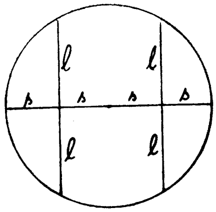


Abb. 27

Ein solches Paar vereinigt die mgn. und die mechanisch geforderten Eigenschaften.

Die Abweichung des mgn. Mittelpunktes vom Aufhängepunkt O fällt auch bei solchen Rosen noch in diejenige Umgebung von O, für die die Kompensation gilt. Uebrigens wäre sie durch eine geeignete Bauart der Rose zu vermeiden, doch gehen wir auf technische Einzelheiten betr. Rose und Kompaß nicht ein, sondern verweisen auf das angegebene Schrifttum.

44. Zusammenfassung der Ergebnisse.

Es war vor Allem notwendig die Grundlagen in einer dem besonderen Zweck angepaßten Form zur Darstellung zu bringen. Sonst fehlt es hier an einer Klarstellung der Unterschiede, die in Bezug auf festen und flüchtigen Magnetismus bestehen, wenn es sich um Fragen der Zusammensetzung und der Kompensation handelt.

Daß bei flüchtigem Magnetismus zwar ein Stab durch einen Stab, aber im Allgemeinen nicht ein Körper durch einen Körper kompensiert werden kann, scheint unbemerkt geblieben zu sein. Auf der gewonnenen Grundlage konnte die Theorie der neun Stäbe in einer von den ihr seit Smith anhaftenden Mängeln befreiten Form aufgebaut werden. Die unendlich langen und die durch den Kompaß gehenden Stäbe erwiesen sich als ersetzbar durch Stäbe erster und zweiter Hauptlage. Aber erst die Einführung der dritten Hauptlage brachte völlige Klärung und gab diesem so vielfach reproduzierten Abschnitt den erwünschten Abschluß. Auch die für Kompensationen wichtigen singulären Fälle wurden erledigt. Bei diesen einleitenden Sätzen schon zeigte sich, wie weiterhin dauernd die Deviationsmatrize als ein sehr nützliches Werkzeug der Forschung und Darstellung. Eine Reihe von Hilfsbetrachtungen war nötig, mit dem Ziele die Voraussetzungen des Poissonschen Satzes zu ergründen. So wurden die Fourier-Reihen für die Entwicklung der Deviation nach dem mgn. Kurs und nach dem Kp.-Kurs bis zu dem allgemeinen Bildungsgesetz der Glieder durchgeführt und hierbei einige viel gebrauchte und weit verbreitete falsche Formeln richtig gestellt. Wichtig für die Theorie ist die Einführung der Poissonschen Körper, für die Anwendung auf das Schiff die Behandlung der Umschlußkörper. Diese theoretischen Untersuchungen führten einerseits zu einem

System von Voraussetzungen für den Poissonschen Satz, andererseits wurden Wege angegeben, um durch Beobachtungen zu entscheiden, ob der Poissonsche Satz an Bord eines Schiffes gilt oder nicht gilt, sowie um Nicht-Poissonsche Deviationen zu erzeugen.

Die Aufklärung der Theorie führte zu praktisch wertvollen Einsichten. Im Gegensatz zu den sonst üblichen unvollständigen Kompensationen wurde grundsätzlich auf vollständige ausgegangen, deren Notwendigkeit begründet wurde. Da nach den gewonnenen Erkenntnissen auch der Nicht-Poissonsche Fall Berücksichtigung erforderte, wurde auch für diesen vollständige Kompensation angegeben, die auf dem bemerkenswerten Satze von den drei Körpern in Kubatur beruht. Durch diesen Satz finden auch die Barlow- und die Foster-Scheibe ihre späte Aufklärung. Im Nicht-Poissonschen Fall wird bei der Kompensation wie bei der Prüfung des Poissonschen Satzes die Anwendung von Modellen vorgeschlagen, wie sie schon bei der Erforschung des Wasserwiderstandes so gute Dienste geleistet haben.

Für die vollständige Kompensation im Poissonschen Fall wurden mehrere Methoden gefunden, von denen die mit einem Stab und zwei Kugeln besonders geeignet ist, die sonst mit denselben Hilfsmitteln übliche unvollkommene Kompensation zu ersetzen. Von den vielen sonstigen Ergebnissen mag noch die Richtkraftstärkung durch zwei Kugeln in Quadratur und die Kompensation des trägen Magnetismus hervorgehoben werden, sowie der Entwurf eines Kompaß-Standes mit vollständiger Kompensation.

Im Ganzen wird dieses wichtige Kapitel der Nautik durch die vorliegende Arbeit strenger begründet und in wichtigen Teilen ergänzt und vervollständigt.

Daß aber trotz des Kreiselkompasses eine eingehende Behandlung des Magnetkompasses auch heute noch erwünscht ist, dafür sei der beste Kenner dieses Gebietes, Meldau, angeführt, der in seinem kl. Kompaßlexikon (2. Aufl., Hamburg 1921, S. IV.) sagt: „Auf viele Jahre hinaus wird die große Mehrzahl unserer Schiffe auf den magnetischen Kompaß angewiesen sein. Ihm, seiner sachgemäßen Aufstellung und Behandlung sollte das Interesse nicht nur des Schiffsführers, sondern auch das des Schiffbauingenieurs, der Werften und der Reedereien gerade unter den heutigen Verhältnissen in erhöhtem Maße und mehr als bisher zugewendet sein. Nach wie vor ist ein guter und gut aufgestellter Kompaß das für die Sicherheit des Schiffes und die Schnelligkeit seiner Reisen wichtigste Instrument."

Der Praktiker, dem es der Theorie zu viel scheint, möge bedenken, daß der Baum der Wissenschaft die Früchte für die Praxis nicht ohne die Blätter der Theorie hervorbringen kann.

Erläuterungen nautischer, physikalischer und mathematischer Bezeichnungen.

Das Schiff hat drei Axen: eine senkrechte, eine wagerechte Längs-, eine wagerechte Queraxe. Die beiden ersteren liegen in der Symmetrieebene des Schiffes. Die Symmetrieebene teilt das Schiff in die Steuerbord- und in die Backbordseite. Das sind die Seiten, welche in der Richtung Achtersteven-Vorsteven oder bei Fahrt voraus bzw. rechts und links der Symmetrieebene liegen. Dem Schiff erteilte Drehungen um die drei Axen heißen bzw. Schwojen, Krängen, Trimmen. Vom Schiff vollführte Schwingungen um die drei Axen heißen bzw. Gieren, Schlingern (Rollen), Stampfen (Setzen, bei Fahrt über den Achtersteven oder achteraus, oder bei überholendem Seegang). Das Schiff schwimmt entweder auf ebenem Kiel oder es hat Lage. In letzterem Fall hat es entweder Schlagseite nach Steuer- oder Backbord, unabhängig vom Wind, oder es hat sich unter Winddruck auf die Lee-Seite gelegt, und hat die Luv-Seite gelüftet. Oder es ist nicht gleichlastig getrimmt, sondern kopflastig- oder achter-(steuer-)lastig vertrimmt.

Die an zwei Gegenpunkten des Kompaßkessels angebrachten Steuermarken bestimmen die Steuerlinie. Der Winkel der Steuerlinie mit der Nordrichtung ist der Kurs. Der Kurs heißt rechtweisend oder mißweisend (magnetisch), je nachdem die geographische oder die magnetische Nordrichtung genommen wird; er heißt Kompaß-Kurs, wenn man die Nordrichtung der Kompaßrose nimmt. Der Unterschied: rw. Kurs weniger mw. Kurs heißt Mißweisung (Deklination, Variation). Der Unterschied: mgn. Kurs weniger Kp.-Kurs heißt Deviation. Beim Schiff in Fahrt ist außerdem der gesegelte vom gesteuerten Kurs zu unterscheiden. Der Unterschied: gesegelter weniger gesteuerter Kurs ist die Abtrift.

Über die schwankenden Bezeichnungen der verschiedenen Arten von Magnetismus vgl. z. B. E. W. Creak, Elementary manual for the deviations of the compass in iron ships, London 1903, S. 132. Die im vorliegenden Buch gebrauchten Bezeichnungen: fester, flüchtiger, träger Magnetismus lassen keinen Zweifel über ihre Bedeutung. Genau genommen sind fester und flüchtiger Magnetismus nur die idealen Grenzfälle des trägen Magnetismus; jeder Magnetismus ist mehr oder weniger träge. Dem nautischen Sprachgebrauch folgend ist als Aufnahmefähigkeit bezeichnet die Eigenschaft, abhängig von Stoff und Form, schnell Magnetismus aufzunehmen, nicht die Eigenschaft viel Magnetismus aufzunehmen. Das genügt vorläufig für die Nautik. Eisenmischung statt -legierung ist ungewöhnlich, aber unzweideutig. Über die physikalischen Begriffe der Permeabilität, Suszeptibilität, Remanenz, Koërzitivkraft, Hysteresis vgl. z. B. das Taschenbuch für Mathematiker und Physiker, 1913, S. 278ff. Walzen und Röhren sind Voll- und Hohl-Zylinder, Stäbe haben nur Länge nicht Dicke. Meine Stäbe sind im Gegensatz zu Smith's kurz, Elementarstäbe, Repräsentanten aller derjenigen, die in O dieselbe Feldstärke haben.

In Bezug auf mathematische Vorkenntnisse geht das Buch kaum über das hinaus, was anspruchsvollere Bücher, etwa der Admiralty manual bei ihrem Leser voraussetzen. Von den Matrizen werden die Rechnungsregeln erklärt; nur die einfachsten kommen vor, weshalb auch auf die vielleicht heute üblichere Bezeichnung: Tensoren verzichtet wurde. Mit $|m|$ wird der absolute (positive) Betrag von m bezeichnet.

Von demselben Verfasser:

Abstrakte Geometrie

Leipzig 1905.

„Das erste Werk, das die in den letzten Jahrzehnten gewonnenen Ergebnisse über die Grundlagen der Geometrie zu einer systematischen Entwicklung der Geometrie verarbeitet. — Ein in sich zusammenhängendes und im wesentlichen lückenloses Gebäude der Geometrie. — Eine Leistung, die aller Anerkennung wert ist.“ Literarisches Centralblatt 1906.

„Das Werk Vahlens sei von vornherein bestens empfohlen. — Eine Arbeit, die viel Originelles in der Untersuchung der Grundlagen und Beziehungen der euklidischen und nicht-euklidischen Geometrie aufweist. — Besonders schätzenswert für jene, die sich ohne weitläufiges Fachstudium über den Gegenstand informieren wollen.“ Allgemeines Literaturblatt, XVI. Jahrgang.

„It is attractively got up and contains much suggestiv matter.“ Mathematical gazette 1906.

Konstruktionen und Approximationen

Leipzig 1911.

„Das Buch verrät eine geradezu erstaunliche Kenntnis der ungeheuren Literatur, viele Zusammenhänge, Korrekturen und Verbesserungen werden gegeben.“
Zeitschrift für Mathematik und Physik 1914.

„Das Verdienst des Verfassers ist nicht nur die Zusammenstellung und kritische Sichtung des weitverstreuten Materials, vielfach mußte er noch für Dinge, die in den Rahmen gehörten, neue, elementare Beweisführungen aufsuchen, um sie dem Ton des Ganzen anzupassen.“ Fortschritte der Mathematik Bd. 42.

„Nicht nur die Systematik und der elementare Gang sind hervorzuheben, sondern ebenso der Reichtum des Inhalts, der an alle Phasen der Probleme durch Völker und Zeiten hindurch anknüpft.“ Literarisches Centralblatt 1912.

Wert und Wesen der Mathematik

Rektoratsrede, Universität Greifswald 1923.

Seglers Vademecum.

(mit Prof. E. Kühl) Berlin 1906 (vergriffen)

Ballistik.

Berlin und Leipzig 1922.

„Das Buch kann als musterhafte Darstellung eines schön durchgearbeiteten abgeschlossenen Problemkreises empfohlen werden.
Ztschr. f. ang. Math. u. Mech. Bd. III.

„Vorliegendes Buch gibt eine klare, übersichtliche Darstellung der gesamten theoretischen Ballistik. — Durch den einheitlichen systematischen Aufbau unterscheidet sich das Buch vorteilhaft von andern Darstellungen der Ballistik, und eine Anzahl neuer Formeln machen das Buch für den Ballistiker von Fach unentbehrlich.“
Allgem. Schweiz. Militärzeitung, Jahrg. 69. 6. Jan. 1923.

„Als geradezu erfreuliches Ergebnis kann das Erscheinen obigen Werkes bezeichnet werden. — Die Behandlung des Stoffes zeichnet sich vornehmlich durch einen streng systematischen Aufbau und durch die Anwendung der einfachsten und kürzesten Methoden der Mathematik, namentlich der angewandten Mathematik aus. Besonders bemerkenswert sind die Abhandlungen über die Flugbahnstörungen, die kosmische Ballistik, die konische Pendelung und die neue Theorie der Schußfaktoren. Das vorliegende Werk sollte daher in keiner ballistischen Bücherei fehlen.“
Militärwiss. u. techn Mitteil. Jahrg. 53. 1922. Heft 9/10.

„Das Werk ist streng wissenschaftlich geschrieben. — Was Vahlen in seinem Werke niedergelegt hat, ist Theorie, gewonnen aus der Praxis, und für die Praxis durchgearbeitet und erweitert. Das Buch erhält schließlich seinen besonderen Wert dadurch, daß die jüngsten Forschungsgebiete und Probleme (Ballistik in großen Flughöhen, Luftzielbeschießung) abgehandelt worden sind.“ Marine-Rundschau 1922. Heft 6.

„Das vorliegende Buch zeigt, daß eine wesentliche Lücke der ball. Lit. noch auszufüllen war. — Man findet stets, daß der Verf. aus der Praxis heraus und für die Praxis die Probleme gestellt und gelöst, also im besten Sinne angewandte Mathematik getrieben hat.“

„So bleibt es besonders dankenswert, daß mit Vahlen ein Mathematiker von Fach, der als Artillerieoffizier an der Front stand, seine mannigfachen, dabei empfangenen Anregungen in dem vorliegenden Buch verwertet hat. Für den mathematisch Geschulten liest sich das Vahlensche Buch klar und glatt. Besonders erfreut die vielfach kurze und prägnante Ableitung der Gesetze, die teilweise vollkommen neue systematische Gliederung und die Fülle von neuen mathematischen Entwicklungen für ballistische Vorgänge, bei denen eine mathematische Theorie bis jetzt fast gänzlich fehlte. — Der Ballistiker von Fach wird das Buch künftighin nicht entbehren wollen“.
Technik u. Wehrmacht 1922. Heft 9/10.

„Eine wertvolle Bereicherung der ballistischen Literatur.“
Militär-Wochenblatt 1922. Nr. 13.

„Fraglos enthält das Buch eine große Reihe von Anregungen der verschiedensten Art; sie sind nicht allein in theoretisch-mathematischer Beziehung bemerkenswert, sondern einige werden zu diesen oder jenen praktischen Verbesserungen führen.“
Ztschr. f. d. ges. Schieß- u. Sprengstoffwesen. Jahrg. 18. 1923. Heft 2.

„Die gedrängte Darstellung gibt dem Buch einen sehr reichhaltigen und vielseitigen Inhalt.“ Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Mathematik 1926.

Karte zur zeichnerischen Ermittlung der Sumnerlinie.

Kartographie und Druck von Georg Westermann, Braunschweig 1929