

Die Berechnung der Sohldruckverteilung unter Gründungskörpern

Von

Joh. Ohde



ISBN 978-3-662-30296-5 ISBN 978-3-662-30329-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-30329-0

Sonderabdruck aus „DER BAUINGENIEUR“.

Zeitschrift für das Gesamte Bauwesen

XXIII. Jahrgang 1942, Heft 14/16, S. 99—107 u. Heft 17/18, S. 122—127.

(Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH)

Mitteilungen

der Preußischen Versuchsanstalt für Wasser-, Erd- und Schiffbau

Berlin

1942

Sonderheft

DIE BERECHNUNG DER SOHLDRUCKVERTEILUNG UNTER GRÜNDUNGSKÖRPERN.

Von Joh. Ohde, Neuenhagen bei Berlin¹.

DK 624.131.522.3

Übersicht: Kritische Betrachtung über die Verteilung des Sohldruckes. Versuchsergebnisse und die Zulässigkeit der Annahme linearer Spannungssumierung. Neues Verfahren für die Berechnung der Sohldruckverteilung unter biegsamen Gründungskörpern, Vergleich mit dem „Bettungsziffer“-Verfahren. Rechnerische Berücksichtigung der besonderen Eigenschaften des Baugrundes und Andeutung der Lösung für die räumliche Aufgabe (Platte). Näherungslösung für die Berechnung der Einspannungswirkung von Spundwänden.

Der Sohldruck unter Gründungskörpern ist bekanntlich nur selten gleichmäßig verteilt. Auch bei symmetrischer Belastung ist seine Verteilung mehr oder weniger ungleichmäßig, meistens sogar in starkem Maße. Eine wirtschaftliche, aber trotzdem ausreichend sichere Bemessung von Gründungsbauten ist erst dann möglich, wenn die Verteilung des Sohldruckes in jedem Falle einigermaßen richtig angegeben oder berechnet werden kann. Die Klärung der Frage nach der Sohldruck-Verteilung unter Grundplatten ist von großer wirtschaftlicher Bedeutung — es sei hier nur an Flachgründungen sowie an Schleusen- und Dockböden erinnert —, worauf im Schrifttum schon verschiedentlich hingewiesen wurde².

Im Schrifttum stehen sich hauptsächlich zwei Auffassungen gegenüber: Auf der einen Seite läßt man die Ergebnisse der Theorie des gleichmäßig-federnden Halbraumes mit nur geringen Einschränkungen auch für Baugrund gelten (theoretische Richtung, vertreten z. B. durch F. Schleicher³), während man auf der anderen Seite auf die Widersprüche hinweist, die zwischen den Ergebnissen der Theorie und den Versuchsergebnissen für Sand-schüttungen bestehen, und die durch Rechnung erhaltene Druckverteilung allenfalls noch für stark verfestigten Ton und ähnliche Erdarten gelten läßt, nicht aber für wenig verfestigten oder sandigen Untergrund (versuchstechnische Richtung, vertreten z. B. durch Kögler und Scheidig⁴).

Anläßlich baupraktischer Aufgaben, die eine Klärung dieser Fragen dringend notwendig erscheinen ließen, habe ich den Standpunkt beider Richtungen in allen Einzelheiten sowohl theoretisch als auch durch Versuche überprüft und bin dadurch zu dem Ergebnis gekommen, daß die Theorie des gleichmäßig-federnden Halbraumes (Schleicher) dem wirklichen Verhalten des Baugrundes am nächsten kommt. Aus Mangel an Zeit kann ich diese Untersuchungen leider augenblicklich nicht ausführlich zusammenstellen und muß mich mit den nachstehenden Angaben begnügen.

Bei der Theorie des gleichmäßigen Halbraumes wird angenommen, daß der Untergrund bis in große Tiefen völlig gleichartig

ist und dem linearen Verformungsgesetz nach Hooke gehorcht. Die für Einzelwirkungen berechneten Spannungen können dann einfach addiert werden, um die Gesamtwirkung zu erhalten (lineare Spannungsüberlagerung). — Der „Baugrund“ ist nun freilich nur selten bis in größere Tiefen hinab hinreichend gleichmäßig, weil die Zusammendrückbarkeit meistens mit der Tiefe abnimmt und weil bei wechselnder Erdschichtung auch die einzelnen Schichten ganz verschiedene Eigenschaften haben können. Außerdem gehorchen die Erdstoffe meistens nicht dem Gesetz der Verhältnigleichheit zwischen Spannungen und Formänderungen. Abweichungen von diesem Gesetz treten z. B. auch bei sonst einheitlichem Untergrund aus folgenden Gründen auf:

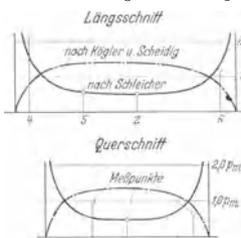


Abb. 1. Die Sohldruckmessungen unter der Rheinbrücke zwischen Ludwigshafen und Mannheim. (Bauing. 14 (1933) S. 242.)

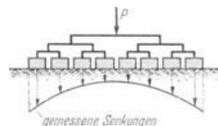


Abb. 2. Einsenkungsversuch für Sandbelastung nach Kögler und Scheidig. (Bautechnik 7 (1929) S. 829.)

1. infolge der Abnahme der Zusammendrückbarkeit der Erdstoffe mit wachsendem Druck;
2. infolge von Vorbelastung der Erdschichten und
3. durch Überschreitung der Grenztragfähigkeit unter dem Rande der belastenden Platte.

Aber alle diese Abweichungen lassen sich rechnerisch einigermaßen erfassen (vgl. den Schluß dieses Aufsatzes), solange die Annahme linearer Spannungsüberlagerung beibehalten werden kann. Diese letztere Annahme ist nun tatsächlich in den meisten Fällen genügend genau erfüllt, was man sowohl durch theoretische Untersuchungen als auch durch Versuche nachweisen kann. In theoretischer Hinsicht sei hier nur erwähnt, daß sich schließlich jede einzelne Kraftwirkung irgendwie im Untergrund verteilen muß, wobei die Möglichkeiten für die Verteilungslinie — wie sich heute schon übersehen läßt — nicht sehr weit auseinander liegen. Versuchsmäßig wird durch Abb. 3 u. 4 der Beweis geliefert (s. nachstehend).

Wie schon Schleicher bemerkt⁵, kommt man mit der Annahme einfacher Spannungsüberlagerung zwangsläufig zu Ergebnissen im Sinne der Halbraumtheorie. Dem stehen folgende Versuchsergebnisse von Kögler und Scheidig u. a. entgegen:

1. Die unmittelbare Messung der Sohlpressungen auf lockeren Sandschüttungen von 30—50 cm Dicke durch Meßböden ergab eine annähernd parabolförmige Verteilung mit dem Größtwert in der Mitte (bei größeren Flächen mehr abgeflacht, vgl. Abb. 1).
2. Ein Einsenkungsversuch mit gleichmäßiger Belastung lieferte nach Abb. 2 am Rande der Lastfläche bedeutend größere Einsenkungen als in der Mitte.

⁵ Bauing. 14 (1933) S. 483.

¹ Aus der Erdbauabteilung der Berliner Versuchsanstalt für Wasser-, Erd- und Schiffbau.

² Siehe z. B. Scheidig, A.: Bautechn. 9 (1931) S. 275.

³ Schleicher, F.: Bauing. 14 (1933) S. 242.

⁴ Kögler, F.: Bauing. 14 (1933) S. 473. — *Zuschrift Scheidig und Erwiderung Schleicher in:* Bauing. 14 (1933) S. 482 u. 483. — Scheidig äußert sich vorsichtiger als Kögler. Wenn er z. B. sagt: Neuerdings untersuchte „versenkte Lastplatten . . . verhalten sich hinsichtlich Einsenkung, Formänderungen und Spannungsverteilung durchaus anders als Körper an der Oberfläche“ oder: „Ein Schüttungselement kann, wenn es unter alleseitigem Druck steht, im Superpositionsfall auch gewisse Zugspannungen aufnehmen, solange ein kritisches Hauptspannungsverhältnis nicht überschritten wird“. Danach „würde auch im Kiessandboden bei versenkten Lastkörpern und niedrigen Sohlrücken eine Sohl-druckverteilung mit größeren Randrücken grundsätzlich möglich sein . . .“, so kommt er der nachstehend vertretenen Auffassung schon sehr nahe, und es erscheint mir in dieser Hinsicht nicht ganz folgerichtig, daß Scheidig die Beweiskraft der von Schleicher angeführten Sohl-druckmessungen unter einem Pfeiler der Ludwigshafen-Mannheimer Rheinbrücke (Abb. 1) so sehr bestreitet.

Die gemessenen Sohlspannungen lassen sich jedoch durch die besonderen Versuchsbedingungen hinreichend erklären und dürfen deshalb m. E. nicht auf wirkliche Grundkörper übertragen werden:

- a) Es ist mit mittleren Sohlrücken bis zu 1,0 kg/cm² gearbeitet worden, was für die benutzten ziemlich lockeren Sandschüttungen einer Beanspruchung von etwa 50—20% der Grenzbelastung (je nach Plattengröße) entspricht. Größere Gründungskörper werden demgegenüber meist nur mit 5—10% der Bruchlast des Untergrundes beansprucht.
- b) Es handelt sich um Oberflächenbelastung, während in Wirk-

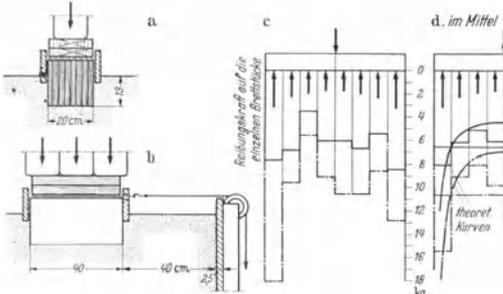


Abb. 3. Messung der Druckverteilung unter einer starren Lastplatte.

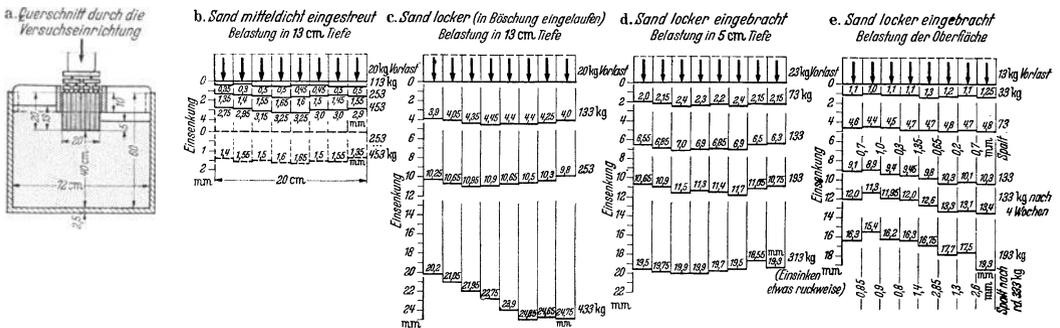
lichkeit jedes Fundament den Baugrund in einer gewissen Tiefe belastet (vgl. auch die Äußerung Scheidigs hierz u⁴).

- c) Die geringe Schichtdicke ist ebenfalls von Einfluß; es läßt sich rechnerisch zeigen, daß der Sohldruck bei beschränkter Schichtdicke in der Mitte der Lastfläche stärker ausfällt als für einen Untergrund großer Ausdehnung.

Um vollständig sicher zu gehen, habe ich in der Berliner Versuchsanstalt für Wasser-, Erd- und Schiffbau den in Abb. 3 a u. b

Zu dem Einsenkungsversuch nach Abb. 2 möchte ich bemerken, daß keine näheren Versuchsdaten angegeben sind; es ist weder über die Größenverhältnisse der Einrichtung noch über die absolute Größe der Belastung und der Einsenkungen wie auch über die Lagerungsdichte des Versuchsandes irgend etwas mitgeteilt. Wenn schon Scheidig diesen Versuch als „überzeugenden Beweis“ [Bautechn. 9 (1931) S. 277] seiner Anschauung anführt, so muß man aber m. E. eine eingehende Beschreibung erwarten, damit der Versuch jederzeit an anderer Stelle wiederholt oder auch zahlenmäßig überprüft werden kann. Ich vermag daher dem Einsenkungsversuch nach Abb. 2 vorläufig keine Beweiskraft beizumessen, da ja ohne weiteres möglich ist, daß das wiedergegebene Einsenkungsbild schon einem weit fortgeschrittenen Gleitzustand entspricht (Nähe der Bruchlast). — Ich habe jedoch auch in dieser Frage den eigenen Versuch noch zu Rate gezogen. Die vorhin beschriebene Versuchseinrichtung ließ sich verhältnismäßig leicht für annähernd gleichmäßige Belastung umbauen (Abb. 4a). Die in Abb. 4 b bis 4 e aufgetragenen Ergebnisse liegen mit Ausnahme der Oberflächenbelastung durchaus im Sinne linearer Spannungs- und Setzungsüberlagerung, wenn man bedenkt, daß der lotrechten Beweglichkeit der einzelnen Brettstücke gewisse Hemmungen widerstanden (Reibung zwischen den Brettern durch seitlichen Druck, Verformungswiderstand durch die Stufenbildung der Setzungslinie, beschränkte Länge der Brettstücke). Aber auch der in Abb. 4 e aufgetragene Versuch für Oberflächenbelastung bestätigt nicht den Versuch nach Abb. 2⁶.

Wenn auch die Versuchsergebnisse nach Abb. 3 und 4 mit primitiven und relativ kleinen Vorrichtungen erhalten wurden, so sind sie m. E. trotzdem noch zuverlässig genug, um bisher bekannte und für einwandfrei gehaltene Versuchsergebnisse als fehlerhaft oder zumindest als einseitig bedingt erkennen zu lassen. Eine Nachprüfung meiner Ergebnisse in größerem Maßstabe unter möglichst natürlichen und außerdem wechselnden Verhältnissen würde wohl sehr zu einer endgültigen Klärung beitragen. — Nach den mitgeteilten Versuchsergebnissen darf die Annahme linearer Spannungsummierung als eine recht brauchbare Arbeitshypothese für die Berechnung der Sohldruckverteilung betrachtet werden.



und nennt die Konstante C die „Bettungsziffer“ des Baugrundes⁷. C wird je nach dem Untergrund und der Größe der Belastungsfläche verschieden angenommen; man erhält es hauptsächlich aus Versuchsmessungen, neuerdings auch aus Setzungsrechnungen.

Bei dem Bettungsziffer-Verfahren wird der Einfluß der Biegsamkeit des Trägers oder Grundkörpers in einwandfreier Weise berücksichtigt, nicht aber der Verformungseinfluß des Untergrundes. Der einfache Ansatz (1) wird leider dem wirklichen Verhalten des Untergrundes nicht gerecht, weil die Einsenkung ζ an einer beliebigen Stelle der Baugrundsohle nicht nur von dem Sohldruck q an dieser Stelle, sondern auch von den benachbarten Spannungen und somit letzten Endes von der ganzen Verteilung des Sohldruckes abhängig ist. Hinzu kommt, daß die Bettungszahl nicht nur von der Erdart und -schichtung sowie der Lagerungsdichte der Erdstoffe abhängig ist, sondern auch von der Größe und Form der Lastfläche und der Verbiegung der Fundamentsohle. Ein allgemeines Rezept, nach dem die Bettungszahl C für jeden beliebigen Fall einwandfrei gefunden werden könnte, gibt es nicht und dürfte es auch in Zukunft schwerlich geben.

Am sichersten erhält man die Bettungszahl C durch Versuche (z. B. durch Probelastungen, deren Ergebnisse auf Bauwerkgröße umgerechnet werden) oder durch die Berechnung der mittleren Bauwerksetzung auf Grund sorgfältiger Erdröhen-Untersuchungen. Jedoch erhält man auf diese Weise immer nur eine untere Grenze von C. Denn für die Abweichungen der Sohlspannungen q von ihrem Mittelwert q_m ist eine größere Bettungszahl maßgebend als für q_m selber, weil die Unterschiede ($q - q_m$) wegen ihrer geringeren Breitenausdehnung geringer in die Tiefe wirken als die Gesamtlast. Hierüber hat Terzaghi in der „Österr. Bauztg.“ 8 (1932) S. 302 ausführlich berichtet. Terzaghi versucht, die anzunehmende Bettungszahl der jeweiligen Wellenlänge der Verformungslinie anzupassen, für ein und dieselbe Aufgabe also mit mehreren Bettungszahlen zu arbeiten und im übrigen „bei Böden mit sehr hoher Kohäsion die Konzentration der Drücke in den Randgebieten der Platte schätzungsweise zu berücksichtigen“. Ein solches Vorgehen läßt in der Hand eines erdbaumechanisch gut durchgebildeten Ingenieurs richtige Ergebnisse erwarten; ob es aber zur allgemeinen Benutzung empfohlen werden kann, bleibe dahingestellt. Zumindest für „kurze“ Tragwerke mit nur einer halben Biegevolle (z. B. bei Schleusenböden) dürfte der richtige Ansatz der Bettungszahl nach wie vor unsicher bleiben.

Im Schrifttum ist schon des öfteren auf die Unzulänglichkeit des Bettungszahl-Verfahrens hingewiesen worden⁸. Was mich besonders bewegen hat, dieses Verfahren abzulehnen, ist die immer wieder anzutreffende falsche Sicherheit, die mit dem bequemen Begriff „Bettungszahl“ einhergeht. Bei der meist fehlenden Vertrautheit mit den strittigen Fragen und im Hinblick auf die zahlreichen theoretischen Arbeiten über das Bettungszahl-Verfahren hat man oft die Meinung, man rechne nach dem besten und anerkanntesten Verfahren, während man sich bei der Begründung der oft nur geschätzten Bettungszahl, von der doch das Rechnungsergebnis in erster Linie abhängt, vielfach noch mit wenigen oberflächlichen Sätzen über die vorhandene Unsicherheit hinweghilft. — In dieser Hinsicht ist die oft anzutreffende Beliebtheit des Bettungszahl-Verfahrens freilich durchaus zu verstehen. Dem Ingenieur, der die erdstatische Berechnung durchzuführen hat, bleibt oft nur wenig Zeit, tiefer in die wahren Zusammenhänge einzudringen; auch fehlt ihm vielfach noch die Gelegenheit, die grundlegenden Eigenschaften des Baugrundes näher kennenzulernen. Unter diesen Umständen ist er meist froh, daß ihm die Vorarbeiten, die für eine genauere Feststellung der Eigenschaften des Untergrundes erforderlich wären, durch ein Berechnungsverfahren abgenommen werden, bei dem man durch eine einzige, oft nur schätzungsweise angenommene Zahl den Einfluß des Untergrundes leidlich gut berücksichtigen kann — wie man meint. Kein Wunder, daß es dann

oft auch mit der Abhängigkeit der Bettungszahl von der Größe der Lastfläche, der Erdschichtung usw. nicht so genau genommen wird. Ich habe es z. B. erlebt, daß eine Bettungszahl, die für die Berechnung einer Schleusensohle einigermaßen zutreffend gewählt war, auch für die Berechnung der Einspannungswirkung einer Spundwand herangezogen wurde u. a. m. Das vortreffliche Bettungsziffer-Verfahren ist eben ein „Mädchen für alles“ und muß über die vorhandene Unkenntnis der wirklichen Zusammenhänge in äußerlich eleganter Weise hinweghelfen! — Bedenkt man außerdem, daß es möglich ist — wie nachstehend gezeigt wird —, mit fast demselben Aufwand an Rechenarbeit eine bedeutend einwandfreiere Berechnung durchzuführen, so dürften kaum noch ernsthafte Gründe für die Beibehaltung des Bettungsziffer-Verfahrens anzugeben sein.

Man hat versucht, die Verteilung des Sohldruckes mehr oder weniger gefühlsmäßig anzunehmen, wobei die Erfahrung an ausgeführten Bauten und andere Beobachtungen mit herangezogen werden können. Es sei hier ein angeblickt auf Ellerbeck zurückgehendes Verfahren zur Ermittlung der Bodenpressungen unter Schleusenkörpern genannt, das Pietrkowski durch handliche Formeln ergänzt hat⁹. Hierbei wird angenommen, daß sich der Sohldruck für jede Hälfte der Sohle trapezförmig verteilt (Kleinstwert in der Mitte), wodurch die zunächst für gleichmäßige Verteilung berechnete Durchbiegung f um ein bestimmtes Maß $\mu \cdot f$ zurückgeht. Der sog. „Reduktionsfaktor“ μ wird nach dem örtlichen Befund des Baugrundes und der Wertigkeit der erbohrten Erdröhen geschätzt. — Bei diesem Vorgehen hängt letzten Endes alles von der richtigen Annahme des Faktors μ ab, für den eine noch größere Unsicherheit vorhanden ist als für eine Bettungszahl C. Man sagt sich zwar, daß die wirklich auftretende Sohldruck-Verteilung zwischen zwei Grenzfällen liegen muß: dem einen Grenzfall eines schlammigen, also stark festigkeitslosen Untergrundes mit halbwegs schwimmendem Fundament (gleichmäßige Sohldruck-Verteilung) und dem anderen Grenzfall eines praktisch unnachgiebigen Felsuntergrundes (keinerlei Verteilung des Sohldruckes und daher auch keine Biegebeanspruchung der Sohle), daß also der Faktor μ zwischen 1,0 und 0,0 liegen muß; jedoch liegen diese Grenzfälle viel zu weit auseinander, als daß man dazwischenliegende Fälle genügend genau einschalten könnte. Nach den bisher bekannt gewordenen Zahlen für μ ¹⁰ hängt dieser Faktor außerdem gar nicht von der Steifigkeit der Schleusensohle ab (es ist gleichgültig, wie dick diese ist!), was aber doch unbedingt gefordert werden müßte. Ich kann daher in diesem Verfahren nur eine ganz rohe Einschätzung der Spannungen sehen; eine Verbesserung oder auch nur ein Ersatz des Bettungsziffer-Verfahrens ist es keinesfalls.

Bei einer genaueren Berechnung der Sohldruck-Verteilung unter Gründungkörpern ist von folgendem Gedankengang auszugehen: Unter der Wirkung der äußeren Kräfte (Eigengewicht, Erd- und Wasserdruck, Nutzlasten usw.) entstehen Sohlspannungen, die je nach ihrer Verteilung einerseits eine bestimmte Form der Biegelinie des Gründungstragwerkes zur Folge haben (oder mit einer solchen verknüpft sind), andererseits aber auch den Untergrund belasten und in bestimmter Weise verformen. Da normalerweise vorausgesetzt werden kann, daß die Sohle überall auf dem Baugrund aufliegt, muß die Verformung des Untergrundes längs der Sohle in jedem Punkte der Biegelinie der Sohle entsprechen. Durch diese Bedingung ist die Verteilung der Sohlspannungen festgelegt; diese ist so anzunehmen oder zu berechnen, daß die Biegelinie der Sohle mit der Senkungslinie des Untergrundes zur Deckung gebracht werden kann.

Die unmittelbare Lösung dieser Aufgabe ist im Schrifttum bisher nur für wenige Sonderfälle angegeben worden, wobei vorausgesetzt wurde, daß der Untergrund bis in sehr große Tiefe vollständig gleichmäßig ist (gleichmäßig federnder Halbraum). Eine allgemeinere Lösung der Aufgabe gelingt durch Reihenentwicklungen, doch ist der Aufwand an Rechenarbeit dabei verhältnismäßig groß [vgl. z. B. H. Borowicka: Ing.-Arch. 10 (1939) S. 113],

⁷ Besser wäre die Bezeichnung „Bettungszahl“ oder „Verformungszahl“ des Baugrundes.

⁸ Siehe z. B. Wieghardt, K.: Z. angew. Math. Mech. 2 (1922) S. 168 — Scheidig, A.: Bautechn. 9 (1931) S. 275 u. 277. — Fröhlich, O. K.: Beton u. Eisen 34 (1935) S. 192.

⁹ Pietrkowski: Bauing. 10 (1929) S. 139.

¹⁰ Bautechn. 18 (1940) S. 467.

so daß ein solches Vorgehen für die besonderen Fälle der Baupraxis nicht in Frage kommt. — Man könnte versuchen, durch Probieren (schrittweise Änderung der Spannungslinie) zum Ziel zu kommen, jedoch ist auch ein solches Vorgehen wohl noch zu umständlich.

In einem interessanten Aufsatz in „Beton u. Eisen“ 34 (1935) S. 189 versucht O. K. Fröhlich eine Näherungslösung, indem er die zunächst für gleichmäßige Sohlbruck-Verteilung ermittelte Biegelinie durch zusätzliche Kräfte (die sowohl auf den Grundkörper als auch auf den Baugrund wirken) so verändert, daß die neue Biegelinie wenigstens in den wichtigsten Punkten mit der entsprechenden Setzung des Untergrundes übereinstimmt. Die Einsenkungen ermittelt Fröhlich näherungsweise, indem er längere Strecken der Sohlfläche durch eine inhaltgleiche Kreislastfläche ersetzt und für diese Ersatzfläche die Setzung berechnet, wobei er die Zusammendrückungszahl des Untergrundes verhältnismäßig mit der Tiefe zunehmen läßt.

Dieses Vorgehen von Fröhlich mag auf den ersten Blick recht anpassungsfähig und vielleicht sogar ausreichend erscheinen; es ist aber doch mancherlei daran auszusetzen. Die Annahme einer geradlinig mit der Tiefe z zunehmenden Zusammendrückungszahl entspricht nach meinen Erfahrungen nur selten den wirklichen Verhältnissen. Eine Zunahme mit \sqrt{z} dürfte in den meisten Fällen der Wirklichkeit näher kommen; doch könnte die Fröhlichsche Berechnungsart natürlich auch für diesen Fall ohne weiteres durchgeführt werden. Schwieriger ist es m. E., daß die benutzten kreisförmigen Ersatzlastflächen nicht unmittelbar nebeneinander liegen und deshalb die gegenseitige Beeinflussung der Sohlpressungen fast gar nicht mehr zum Ausdruck bringen. Es werden daher auch kaum genaue Ergebnisse erhalten als nach der Bettungsziffer-Theorie¹¹. Fröhlich ist sich dieses Einwandes wohl auch bewußt, da er sein Verfahren selbst als „grobe Schätzung“ bezeichnet, weil „der Zusammenhang zwischen Grundbaukörper und Baugrund nur in den wichtigsten Sohlpunkten und nicht durchlaufend zur Bedingung gemacht“ wäre.

Als vielleicht letzte Möglichkeit einer hinreichend genauen Lösung bleibt die Anwendung der Differenzrechnung. Hierbei wird die Sohle des Gründungskörpers in eine Anzahl rechteckiger Einzelflächen aufgeteilt, die nur so groß sein dürfen, daß der Sohlbruck q innerhalb jeder Einzelfläche als gleichbleibend angenommen werden kann. In dieser Weise hat z. B. F. Schleicher die Berechnung der Sohlbruck-Verteilung unter starren Fundamenten erstmals gezeigt [Bauing. 14 (1933) S. 244], und A. Habel hat für biegsame Gründungsplatten die Rechnung durchgeführt [Bauing. 18 (1937) S. 188 und 19 (1938) S. 76]. Beide haben zwar als Unterlage den gleichmäßigen Halbraum vorausgesetzt, doch ist ein wesentlicher Unterschied zwischen diesem Halbraum und dem wirklichen Baugrund in rechnerischer Hinsicht nicht vorhanden, solange man mit linearer Spannungsüberlagerung rechnen kann.

Schleicher berechnet zunächst die Einsenkungen für die Belastung nur einer Teilfläche mit $q = 1,0$. Die sich hierfür ergebende Senkungsmulde ist die Einflußfläche für die Gesamtsetzungen; letztere werden durch Summieren der Einflüsse aller Einzelflächen-Lasten erhalten¹². Auf diese Weise können für jede beliebige Verteilung der Pressungen die zugehörigen Einsenkungen gefunden werden. Die zu einem starren Gründungskörper gehörende Sohlbruck-Verteilung wird dann durch die Bedingung erhalten, daß die Senkungen ζ der einzelnen Sohlpunkte alle in einer Ebene liegen müssen. — Der Rechnungsgang nach Schleicher erfordert die Auflösung von n -Gleichungen für die unbekanntes q -Werte der n -Einzelflächen und ist damit einfach genug, um für baupraktische Berechnungen in Frage zu kommen. Es sind lediglich noch die schon erwähnten Abweichungen der Eigenschaften des „Baugrundes“ von denen des „gleichmäßigen Halbraumes“ rechnerisch zu berücksichtigen.

¹¹ Man gewinnt den Eindruck, daß das von Fröhlich durchgerechnete Zahlenbeispiel eher eine Rechtfertigung als eine Verurteilung des Bettungszifferverfahrens ergibt.

¹² Vgl. auch Engler, Fr.: Zbl. Bauverw. 13 (1893) S. 307. Dieser seiner Zeit vorausliegende und sich durch klare Gedankengänge auszeichnende Aufsatz verdient auch heute noch volle Beachtung.

Gegenüber der Näherungslösung von O. K. Fröhlich versucht Habel, die Bedingung streng zu erfüllen, daß die Einsenkung in jedem Punkte des Gründungskörpers der Durchbiegung der Gründungssohle entsprechen muß. Die Senkungen des Untergrundes berechnet Habel in derselben Weise wie Schleicher. Zur Berücksichtigung des Biegeinflusses schreibt er die Differentialgleichung der elastischen Linie als Differenzgleichung an. — Das Habelsche Verfahren ist hinsichtlich des Aufwandes an Rechenarbeit genügend einfach, so daß es zur Anwendung im Grundbau empfohlen werden könnte, wenn es nicht einen recht fühlbaren Mangel besäße: es gibt die Druckverteilung in der Nähe des Randes der Sohlfläche nicht richtig wieder. Man erkennt das deutlich an dem von Habel gezeigten Berechnungsergebnis für einen gleichmäßig belasteten Träger [Bauing. 19 (1938) S. 79, Abb. 8]. Während eine von K. Wieghardt für diesen Sonderfall durchgeführte genauere Berechnung¹³ die in Abb. 5 voll ausgezogene Sohlspannungslinie ergab, erhielt Habel die gestrichelte Spannungslinie. Dabei ist nicht nur ein unrichtiges Bild von der Verteilung der Sohlspannungen erhalten, sondern es ist auch das Gleichgewicht in lotrechter Richtung nicht erfüllt, worauf Habel auch selbst hinweist¹⁴. Für andere Zahlenbeispiele, bei denen der „Randeinfluß“ nur geringe Bedeutung hat, werden von Habel richtige Ergebnisse erhalten. — Das Habelsche Verfahren erscheint deshalb m. E. nur für verhältnismäßig biegsame Tragkörper als zulässig, bei denen der „Randeinfluß“ nur gering ist; für steifere Gründungskörper, wie sie im Grundbau meistens vorkommen (z. B. durchgehende Schleusensohlen), ist es nicht geeignet.

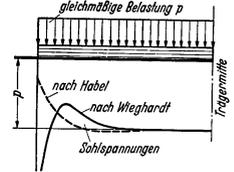


Abb. 5.

Auf der Suche nach einer besseren Lösung habe ich gefunden, daß man zu einem sehr brauchbaren Verfahren gelangt, wenn man zur rechnerischen Erfassung der Verbiegung des Grundkörpers nicht die Differenzgleichung der elastischen Linie benutzt, sondern die Dreimomentengleichung des durchlaufenden Trägers für ungleiche Stützsenkungen. Dieses nachstehend vorgeführte Berechnungsverfahren liegt damit etwa in der Mitte zwischen dem Verfahren von Habel und dem von Fröhlich. Von Habel (oder Schleicher) wird die Berechnung der Einsenkungen des Untergrundes übernommen und von Fröhlich die Erfassung des Biegeinflusses mit Hilfe der Dreimomentengleichung. Dadurch werden die Nachteile beider Verfahren vermieden.

Ein einfaches, für die Baupraxis geeignetes Berechnungsverfahren. Als Unterlage des Grundkörpers sei vorläufig der gleichmäßige federnde Halbraum vorausgesetzt. Dieser Sonderfall ist beispielsweise vorhanden, wenn der Untergrund aus einer stark verfestigten Tonschicht großer Mächtigkeit besteht. — Außerdem sei die Berechnung zunächst auf die ebene Aufgabe beschränkt. Die Sohlfläche des Gründungskörpers von der Länge $l = n \cdot a$ und der Breite b wird nach Abb. 6a in n gleiche Einzelflächen $a \cdot b$ aufgeteilt gedacht. Die Mittelpunkte dieser einzelnen Flächen seien mit $1, 2, 3, \dots, n$ und deren Setzungen (Einsenkungen) mit $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_n$ bezeichnet (Abb. 6b). Denkt man sich nun eine Einzelfläche $a \cdot b$ mit den Sohlspannungen $q = 1,0$ gleichmäßig belastet und berechnet für diesen Sonderfall die Senkungslinie des Untergrundes (Abb. 6c), so ist diese Linie, wie oben bereits bemerkt wurde, die Einflußlinie für die Ermittlung der Gesamtsetzungen. Die Einsenkungen für die Belastung einer Einzelfläche können nach Schleicher [Bauing. 7 (1926) S. 934] durch folgende Ansätze wiedergegeben werden:

Ein einfaches, für die Baupraxis geeignetes Berechnungsverfahren.

Als Unterlage des Grundkörpers sei vorläufig der gleichmäßige federnde Halbraum vorausgesetzt. Dieser Sonderfall ist beispielsweise vorhanden, wenn der Untergrund aus einer stark verfestigten Tonschicht großer Mächtigkeit besteht. — Außerdem sei die Berechnung zunächst auf die ebene Aufgabe beschränkt.

Die Sohlfläche des Gründungskörpers von der Länge $l = n \cdot a$ und der Breite b wird nach Abb. 6a in n gleiche Einzelflächen $a \cdot b$ aufgeteilt gedacht. Die Mittelpunkte dieser einzelnen Flächen seien mit $1, 2, 3, \dots, n$ und deren Setzungen (Einsenkungen) mit $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_n$ bezeichnet (Abb. 6b). Denkt man sich nun eine Einzelfläche $a \cdot b$ mit den Sohlspannungen $q = 1,0$ gleichmäßig belastet und berechnet für diesen Sonderfall die Senkungslinie des Untergrundes (Abb. 6c), so ist diese Linie, wie oben bereits bemerkt wurde, die Einflußlinie für die Ermittlung der Gesamtsetzungen. Die Einsenkungen für die Belastung einer Einzelfläche können nach Schleicher [Bauing. 7 (1926) S. 934] durch folgende Ansätze wiedergegeben werden:

$$(2) \quad \zeta_{x=0} = c_0 \cdot \frac{q \cdot a}{E'}; \quad \zeta_{x=a} = c_1 \cdot \frac{q \cdot a}{E'}; \quad \zeta_{x=2a} = c_2 \cdot \frac{q \cdot a}{E'} \text{ usw.}$$

¹³ Wieghardt, K.: Z. angew. Math. Mech. 2 (1922) S. 165.

¹⁴ Es ist anzuerkennen, daß Habel seine Abb. 8 trotz des fehlerhaften Ergebnisses veröffentlicht hat; dadurch wird der Überblick über die Anwendungsgrenzen seines Verfahrens sehr erleichtert.

mit
$$E' = \frac{m^2}{m^2 - 1} \cdot \bar{E},$$

wenn \bar{E} die Elastizitätszahl und m die Querdehnungszahl des Untergrundes bedeuten. Die unbenannten Beiwerte c_0, c_1, c_2 usw. entsprechen der Senkungslinie für $q = a = E' = 1, 0$. — Die innerhalb jeder Einzelfläche als gleichmäßig verteilt angenommenen Sohlrücke seien q_1, q_2, \dots, q_n und die äußeren Belastungen P_1, P_2, \dots, P_n (Abb. 6 d). Die Belastungen $p \cdot a$ und die Sohlkräfte $q \cdot a$ können durch Einzelkräfte P und Q ersetzt werden, die in der Mitte jeder Teilfläche angreifen (Abb. 6e). — Bei gleich-

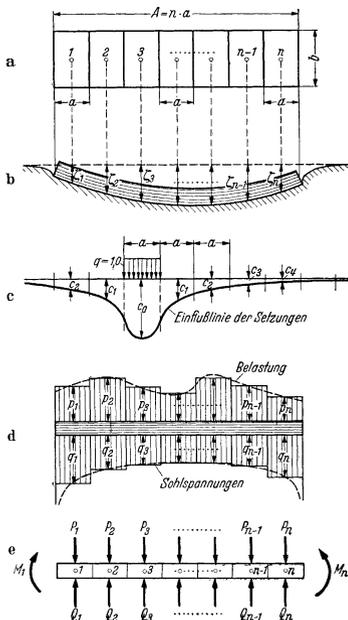


Abb. 6.

zeitiger Wirkung sämtlicher Sohlspannungen erhält man durch Überlagerung der Einzelwirkungen für die einzelnen Setzungen ζ_1 bis ζ_n folgende sog. „Summgleichungen“:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= (c_0 \cdot q_1 + c_1 \cdot q_2 + c_2 \cdot q_3 + c_3 \cdot q_4 + \dots + c_{n-1} \cdot q_n) \cdot \frac{a}{E'} \\ \zeta_2 &= (c_1 \cdot q_1 + c_0 \cdot q_2 + c_1 \cdot q_3 + c_2 \cdot q_4 + \dots + c_{n-2} \cdot q_n) \cdot \frac{a}{E'} \\ \zeta_3 &= (c_2 \cdot q_1 + c_1 \cdot q_2 + c_0 \cdot q_3 + c_1 \cdot q_4 + \dots + c_{n-3} \cdot q_n) \cdot \frac{a}{E'} \\ &\dots \dots \dots \\ \zeta_n &= (c_{n-1} \cdot q_1 + c_{n-2} \cdot q_2 + \dots + c_1 \cdot q_{n-1} + c_0 \cdot q_n) \cdot \frac{a}{E'} \end{aligned} \quad (3)$$

Dieselben Einsenkungen ζ gelten auch für die Verformung des Gründungkörpers, so daß man — wenn zunächst gleichbleibendes $E \cdot J$ des Fundamentes vorausgesetzt wird — für die Punkte 2, 3, 4 usw. folgende Dreimomentengleichungen aufstellen kann:

$$\begin{cases} M_1 + 4M_2 + M_3 = (-\zeta_1 + 2\zeta_2 - \zeta_3) \cdot \frac{6EJ}{a^2} \\ M_2 + 4M_3 + M_4 = (-\zeta_2 + 2\zeta_3 - \zeta_4) \cdot \frac{6EJ}{a^2} \dots \dots \text{usw.} \end{cases} \quad (4)$$

Für die einzelnen Momente hat man nach Abb. 6e:

$$\begin{cases} M_2 = M_1 + (Q_1 - P_1) a \\ M_3 = M_1 + (Q_1 - P_1) 2a + (Q_2 - P_2) a \\ M_4 = M_1 + (Q_1 - P_1) 3a + (Q_2 - P_2) 2a + (Q_3 - P_3) a \\ M_5 = M_1 + (Q_1 - P_1) 4a + (Q_2 - P_2) 3a + (Q_3 - P_3) 2a + \\ \quad + (Q_4 - P_4) a \\ M_6 = \dots \text{ usw.} \end{cases} \quad (5)$$

Nimmt man noch die beiden Gleichgewichtsbedingungen hinzu:

$$\begin{aligned} (6a) \quad \Sigma Q &= \Sigma P \text{ oder } q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n = P_1 + P_2 + P_3 + \\ &\quad + \dots + P_n \\ \text{und} \quad \Sigma M &= 0 \text{ oder} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6b) \quad &\left\{ (n-1)(q_1 - P_1 - q_n + P_n) + (n-3)(q_2 - P_2 - q_{n-1} + P_{n-1}) + \right. \\ &\quad \left. + (n-5)(q_3 - P_3 - q_{n-2} + P_{n-2}) + \dots + R = 0 \right. \\ \text{mit} \quad R &= 1 \cdot \left(\frac{q_n - P_n}{2} - \frac{q_{n-1}}{2} + \frac{q_{n-1} + P_{n-1}}{2} \right) \end{aligned}$$

für gerades n und

$$R = 2 \cdot \left(\frac{q_{n-1} - P_{n-1} - q_{n+1} + P_{n+1}}{2} \right)$$

für ungerades n , so hat man damit alle Gleichungen zur Hand, die zur Berechnung der unbekanntenen Sohlrücke q benötigt werden.

Die Einsetzung der Gl. (5) in die Gl. (4) ergibt:

$$\begin{cases} M_1 + 4M_2 + M_3 = 6M_1 + 6a(Q_1 - P_1) + a(Q_2 - P_2) \\ M_2 + 4M_3 + M_4 = 6M_1 + 12a(Q_1 - P_1) + 6a(Q_2 - P_2) + \\ \quad + a(Q_3 - P_3) \\ M_3 + 4M_4 + M_5 = 6M_1 + 18a(Q_1 - P_1) + 12a(Q_2 - P_2) + \\ \quad + 6a(Q_3 - P_3) + a(Q_4 - P_4) \\ M_4 + 4M_5 + M_6 = 6M_1 + 24a(Q_1 - P_1) + 18a(Q_2 - P_2) + \\ \quad + 12a(Q_3 - P_3) + 6a(Q_4 - P_4) + a(Q_5 - P_5) \\ \dots \text{ usw.} \end{cases} \quad (7)$$

Andererseits findet man mit Hilfe der Gl. (3):

$$\begin{aligned} -\zeta_1 + 2\zeta_2 - \zeta_3 &= [(-c_0 + 2c_1 - c_2)q_1 + (-c_1 + 2c_0 - c_1)q_2 + \\ &\quad + (-c_2 + 2c_1 - c_0)q_3 + \dots] \frac{a}{E'} \\ -\zeta_2 + 2\zeta_3 - \zeta_4 &= [(-c_1 + 2c_2 - c_3)q_1 + (-c_0 + 2c_1 - c_2)q_2 + \\ &\quad + (-c_1 + 2c_0 - c_1)q_3 + \dots] \frac{a}{E'} \text{ usw.} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{cases} -\zeta_1 + 2\zeta_2 - \zeta_3 = [-C_1q_1 + C_0q_2 - C_1q_3 - C_2q_4 - C_3q_5 - \dots] \frac{a}{E'} \\ -\zeta_2 + 2\zeta_3 - \zeta_4 = [-C_2q_1 - C_1q_2 + C_0q_3 - C_1q_4 - C_2q_5 - \dots] \frac{a}{E'} \\ -\zeta_3 + 2\zeta_4 - \zeta_5 = [-C_3q_1 - C_2q_2 - C_1q_3 + C_0q_4 - C_1q_5 - \dots] \frac{a}{E'} \end{cases} \quad (8)$$

mit

$$(8a) \quad \begin{cases} C_0 = 2(c_0 - c_1); \quad C_1 = c_0 - 2c_1 + c_2; \\ C_2 = c_1 - 2c_2 + c_3; \quad C_n = c_{n-1} - 2c_n + c_{n+1}. \end{cases}$$

Die Einsetzung der Gl. (7) und (8) in die Gl. (4) liefert schließlich:

$$\begin{aligned} [-C_1q_1 + C_0q_2 - C_1q_3 - C_2q_4 - C_3q_5 - \dots] \frac{a}{E'} = \\ = \frac{a^3b}{EJ} \left[\frac{M_1}{a^2b} + (q_1 - P_1) + \frac{1}{6}(q_2 - P_2) \right] [-C_2q_1 - C_1q_2 + \\ + C_0q_3 - C_1q_4 - C_2q_5 - \dots] \frac{a}{E'} = \frac{a^4b}{EJ} \left[\frac{M_1}{a^2b} + 2(q_1 - P_1) + \right. \\ \left. + (q_2 - P_2) + \frac{1}{6}(q_3 - P_3) \right] \text{ usw.} \end{aligned}$$

der mit

$$(9a) \quad \alpha = \frac{a^3b}{J} \cdot \frac{E'}{E} \text{ und } m_1 = \frac{M_1}{a^2b} :$$

$$\begin{cases} -(C_1 + \alpha)q_1 + \left(C_0 - \frac{\alpha}{6}\right)q_2 - C_1q_3 - C_2q_4 - C_3q_5 - \dots = \\ = -\alpha \left(P_1 + \frac{P_2}{6} - m_1 \right) - (C_2 + 2\alpha)q_1 - (C_1 + \alpha)q_2 + \\ + \left(C_0 - \frac{\alpha}{6}\right)q_3 - C_1q_4 - C_2q_5 - \dots = -\alpha(2P_1 + P_2 + \\ + \frac{P_3}{6} - m_1) - (C_3 + 3\alpha)q_1 - (C_2 + 2\alpha)q_2 - (C_1 + \alpha)q_3 + \\ + \left(C_0 - \frac{\alpha}{6}\right)q_4 - C_1q_5 - \dots = -\alpha(3P_1 + 2P_2 + P_3 + \\ + \frac{P_4}{6} - m_1) - (C_4 + 4\alpha)q_1 - (C_3 + 3\alpha)q_2 - (C_2 + \\ + 2\alpha)q_3 - (C_1 + \alpha)q_4 + \left(C_0 - \frac{\alpha}{6}\right)q_5 - C_1q_6 - C_2q_7 - \dots = \\ = -\alpha(4P_1 + 3P_2 + 2P_3 + P_4 + \frac{P_5}{6} - m_1) \text{ usw.} \end{cases} \quad (9)$$

Diese Gleichungen werden zweckmäßig von beiden Enden bis zur Mitte fortschreitend angeschrieben. Man hat also z. B. auch:

$$-(C_1 + \alpha) q_n + \left(C_0 - \frac{\alpha}{6}\right) q_{n-1} - C_1 q_{n-2} - C_2 q_{n-3} - \dots - C_{n-2} \cdot q_1 = -\alpha \left(p_n + \frac{p_{n-1}}{6} - m_n\right) \text{ usw.}$$

Die Gl. (9) ergeben zusammen mit den Gl. (6) n-Gleichungen für die unbekanntes Sohlrücke q_i bis q_n .

Die bisherigen Formeln gelten für gleichbleibendes Trägheitsmoment. Für feldweise verschiedenes Trägheitsmoment nach Abb. 7a sind die Gl. (4) zu ersetzen durch:

$$(4a) \begin{cases} \frac{J_2}{J_1} \cdot M_{r-1} + 2 \left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right) M_r + \\ + M_{r+1} = (-\zeta_{r-1} + 2\zeta_r - \\ - \zeta_{r+1}) \frac{6EJ_2}{a^2} \end{cases}$$

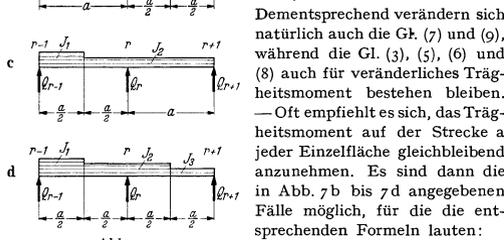


Abb. 7.

Dementsprechend verändern sich natürlich auch die Gl. (7) und (9), während die Gl. (3), (5), (6) und (8) auch für veränderliches Trägheitsmoment bestehen bleiben. — Oft empfiehlt es sich, das Trägheitsmoment auf der Strecke a jeder Einzelfläche gleichbleibend anzunehmen. Es sind dann die in Abb. 7b bis 7d angegebenen Fälle möglich, für die die entsprechenden Formeln lauten:

$$(4b) \begin{cases} \frac{J_2}{J_1} \cdot M_{r-1} + \frac{1}{4} \left(15 \frac{J_2}{J_1} + 1\right) M_r + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right) M_{r+1} = (-\zeta_{r-1} + \\ + 2\zeta_r - \zeta_{r+1}) \frac{6EJ_2}{a^2} \end{cases}$$

für Abb. 7c:

$$(4c) \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right) M_{r-1} + \frac{1}{4} \left(15 + \frac{J_2}{J_1}\right) M_r + M_{r+1} = (-\zeta_{r-1} + \\ + 2\zeta_r - \zeta_{r+1}) \frac{6EJ_2}{a^2} \end{cases}$$

für Abb. 7d:

$$(4d) \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{J_2}{J_1}\right) M_{r-1} + \frac{1}{4} \left(\frac{J_2}{J_1} + 14 + \frac{J_2}{J_3}\right) M_r + \\ + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{J_2}{J_3}\right) M_{r+1} = (-\zeta_{r-1} + 2\zeta_r - \zeta_{r+1}) \frac{6EJ_2}{a^2} \end{cases}$$

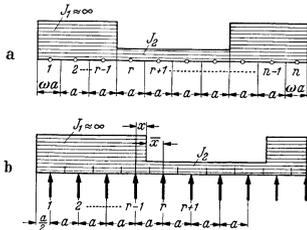


Abb. 8.

Für eine durchgehende Schleusensole besitzt beispielsweise nur der mittlere Teil gleichmäßige Biegesteifigkeit; die Seitenmauern sind als vollständig starr anzusehen ($J = \infty$). Teilt man die Einzelflächen nach Abb. 8a ein, so erhält man für die Punkte $r-1$ und r mit Hilfe der Formeln (4b) und (4c) folgende Momentengleichungen:

$$(4e) \begin{cases} \frac{1}{4} M_{r-1} + \frac{1}{2} M_r = (-\zeta_{r-2} + 2\zeta_{r-1} - \zeta_r) \frac{6EJ}{a^2} \\ \frac{1}{2} M_{r-1} + \frac{15}{4} M_r + M_{r+1} = (-\zeta_{r-1} + 2\zeta_r - \zeta_{r+1}) \frac{6EJ}{a^2} \end{cases}$$

Für Punkte links von $r-1$ gelten an Stelle der Gl. (4) die einfachen Bedingungen:

$$(4f) \left\{ \zeta_{r-1} - \zeta_{r-2} = \zeta_{r-2} - \zeta_{r-3} = \zeta_{r-3} - \zeta_{r-4} = \dots = \frac{2(\zeta_2 - \zeta_1)}{1 + \omega} \right.$$

Für $\omega \neq 1$ gelten für den Punkt i andere Beiwerte c als für die übrigen Punkte; damit verändern sich dann auch die Gl. (3), (5), (6) und (8), wodurch die Ausrechnung verwickelter wird. In solchem Falle kann es vorteilhafter sein, eine Einteilung der Sohlfläche nach Abb. 8b vorzunehmen. An Stelle der Gl. (4e) hat man dann:

$$(4g) \begin{cases} 2 \frac{x^3}{a^3} \cdot M_{r-1} + \frac{x^2}{a^2} \left(3 - 2 \frac{x}{a}\right) \cdot M_r \\ = (-\zeta_{r-2} + 2\zeta_{r-1} - \zeta_r) \frac{6EJ}{a^2} \\ \frac{x^2}{a^2} \left(3 - 2 \frac{x}{a}\right) \cdot M_{r-1} + 2 \left(2 - \frac{x^3}{a^3}\right) \cdot M_r + M_{r+1} \\ = (-\zeta_{r-1} + 2\zeta_r - \zeta_{r+1}) \frac{6EJ}{a^2} \end{cases}$$

Zahlenbeispiele.

Der einfacheren Rechnung halber sei eine Sohlfläche von 10 Quadraten ($a = b, l = 10a$) untersucht. Das Trägheitsmoment sei unveränderlich. Die Senkungslinie nach Abb. 6c für eine quadratische Lastfläche kann nach den Formeln von Schleicher [Baug. 7 (1926) S. 934] wie folgt berechnet werden: für den Mittelpunkt der Lastfläche gilt

$$\zeta_{x=0} = \frac{4}{\pi} \ln(\sqrt{2} + 1) \cdot \frac{qb}{E'} = 1,122 \frac{qb}{E'}, \text{ d. h. } c_0 = 1,122$$

Die Mitte der Seite b eines gleichmäßig belasteten Rechtecks $a \cdot b$ hat nach Schleicher die Senkung (mit unseren Bezeichnungen):

$$\zeta_{x=\frac{a}{2}} = \frac{1}{\pi} \left[b \ln \frac{b}{\sqrt{4a^2 + b^2} - 2a} + a \ln \frac{\sqrt{4a^2 + b^2} + b}{\sqrt{4a^2 + b^2} - b} \right] \frac{q}{E'}$$

Die Senkung im Abstände x vom Mittelpunkt einer belasteten Rechteckfläche $a \cdot b$ findet man als den Unterschied der Einsenkungen zweier Rechteckflächen der Breite b und der Längen x_2 und x_1 (Abb. 9). Man erhält:

$$\zeta_x = \frac{1}{\pi} \left[\frac{b}{a} \cdot \ln \frac{\sqrt{4x_1^2 + b^2} - 2x_1}{\sqrt{4x_2^2 + b^2} - 2x_2} + \frac{x_2}{a} \ln \frac{\sqrt{4x_2^2 + b^2} + b}{\sqrt{4x_2^2 + b^2} - b} - \frac{x_1}{a} \ln \frac{\sqrt{4x_1^2 + b^2} + b}{\sqrt{4x_1^2 + b^2} - b} \right] \frac{qa}{E'}$$

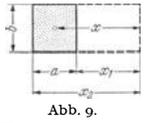


Abb. 9.

z. B. für $x = a$ für $a = b$:

$$\zeta_{x=a} = \frac{1}{\pi} \left[\ln \frac{\sqrt{4 \cdot 0,5^2 + 1} - 2 \cdot 0,5}{\sqrt{4 \cdot 1,5^2 + 1} - 2 \cdot 1,5} + 1,5 \ln \frac{\sqrt{4 \cdot 1,5^2 + 1} + 1}{\sqrt{4 \cdot 0,5^2 + 1} + 1} - 0,5 \ln \frac{\sqrt{4 \cdot 0,5^2 + 1} + 1}{\sqrt{4 \cdot 0,5^2 + 1} - 1} \right] \frac{qa}{E'}$$

$$\zeta_{x=a} = 0,330 \cdot \frac{qa}{E'}, \text{ also } c_1 = 0,330$$

Ebenso findet man die übrigen c -Werte. Für größere Entfernung x von der Mitte der Lastfläche kann man $Q = q \cdot ab$ als Einzellast ansehen und hat dann einfacher nach Boussinesq:

$$\zeta = \frac{P}{\pi x E'} = \frac{pab}{\pi x E'} = \frac{b}{\pi x} \frac{pa}{E'}, \text{ also } c = \frac{b}{\pi x}$$

Man findet folgende Zahlen:

| | | | | | | | | | |
|-------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $x = 0$ | a | $2a$ | $3a$ | $4a$ | $5a$ | $6a$ | $7a$ | $8a$ | $9a$ |
| $c = 1,122$ | $0,330$ | $0,161$ | $0,107$ | $0,080$ | $0,064$ | $0,053$ | $0,046$ | $0,040$ | $0,035$ |
| $C = 1,584$ | $0,623$ | $0,115$ | $0,027$ | $0,011$ | $0,005$ | $0,004$ | $0,001$ | $0,001$ | |

Beispiel 1. Gleichmäßig verteilte Belastung.

Die Steifigkeit des Grundträgers sei nach Gl. (9a) gegeben durch:

a) $\alpha = 1,0$. Hierfür liefern die Gl. (9) mit den obigen Werten für C und mit $m_1 = 0$:

$$\begin{aligned} -1,623 q_1 + 1,417 q_2 - 0,623 q_3 - 0,115 q_4 - 0,027 q_5 - 0,011 q_6 \\ - 0,005 q_7 - 0,004 q_8 - 0,001 q_9 - 0,001 q_{10} = \\ = -1,0 \cdot \frac{7}{6} p = -1,167 p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2,115 q_1 - 1,623 q_2 + 1,417 q_3 - 0,623 q_4 - 0,115 q_5 - 0,027 q_6 \\
 & \quad - 0,011 q_7 - 0,005 q_8 - 0,004 q_9 - 0,001 q_{10} = \\
 & \quad = -1,0 \cdot \frac{19}{6} p = -3,167 p \\
 & -3,027 q_1 - 2,115 q_2 - 1,623 q_3 + 1,417 q_4 - 0,623 q_5 - 0,115 q_6 \\
 & \quad - 0,027 q_7 - 0,011 q_8 - 0,005 q_9 - 0,004 q_{10} = \\
 & \quad = -1,0 \cdot \frac{37}{6} p = -6,167 p \\
 & -4,011 q_1 - 3,027 q_2 - 2,115 q_3 - 1,623 q_4 + 1,417 q_5 - 0,623 q_6 \\
 & \quad - 0,115 q_7 - 0,027 q_8 - 0,011 q_9 - 0,005 q_{10} = \\
 & \quad = -1,0 \cdot \frac{61}{6} p = -10,167 p
 \end{aligned}$$

oder mit $q_1 = q_{10}$, $q_2 = q_9$, $q_3 = q_8$ usw. wegen der Symmetrie und nach Einsetzen des Wertes für q_1 :

$$\begin{aligned}
 -q_1 &= q_2 + q_3 + q_4 + q_5 - 5 p: \\
 3,040 q_2 + 0,997 q_3 + 1,504 q_4 + 1,586 q_5 &= 6,953 p \\
 0,489 q_2 + 3,528 q_3 + 1,482 q_4 + 1,974 q_5 &= 7,413 p \\
 0,911 q_2 + 1,397 q_3 + 4,421 q_4 + 2,293 q_5 &= 8,988 p \\
 0,978 q_2 + 1,874 q_3 + 2,278 q_4 + 4,810 q_5 &= 9,913 p.
 \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen geschieht am einfachsten durch Probieren oder schrittweise Näherung. Man findet:

$$q_2 = 0,940 p; \quad q_3 = 0,983 p; \quad q_4 = 1,004 p; \quad q_5 = 1,011 p$$

und $q_1 = 1,062 p$.

Diese Werte sind in Abb. 10 gestrichelt aufgetragen und durch eine stetig verlaufende (gestrichelte) Kurve nach Gutdünken so aus-

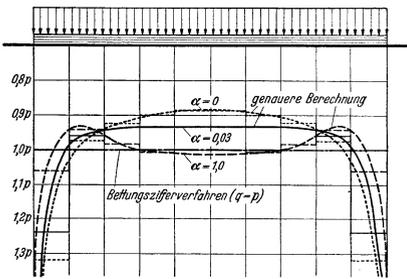


Abb. 10.

geglichen, daß die einzelnen Spannungsflächen jeweils den gleichen Inhalt behalten. Die erhaltene Form der Sohlrucklinie entspricht völlig der von Wiegardt und Borowicka gefundenen. Dieses Ergebnis ist um so bemerkenswerter, als es für eine verhältnismäßig grobe Unterteilung der Sohlfläche ($n = 10$, gegenüber $n = 16$ bei Habel) erhalten wurde. Die Brauchbarkeit des angegebenen Verfahrens dürfte damit wohl erwiesen sein.

b) $\alpha = 0,03$. In derselben Weise wie vorstehend gelangt man zu den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 +2,232 q_2 + 0,027 q_3 \\
 + 0,534 q_4 + 0,616 q_5 &= \left(3,27 - 0,03 \cdot \frac{7}{6}\right) p = 3,235 p \\
 -0,481 q_2 + 1,750 q_3 \\
 -0,458 q_4 + 0,034 q_5 &= \left(0,88 - 0,03 \cdot \frac{19}{6}\right) p = 0,785 p \\
 -0,059 q_2 - 0,543 q_3 \\
 + 1,673 q_4 - 0,617 q_5 &= \left(0,605 - 0,03 \cdot \frac{37}{6}\right) p = 0,420 p \\
 + 0,008 q_2 - 0,066 q_3 \\
 - 0,632 q_4 + 1,092 q_5 &= \left(0,680 - 0,03 \cdot \frac{61}{6}\right) p = 0,375 p
 \end{aligned}$$

deren Auflösung liefert:

$$q_2 = 0,958 p; \quad q_3 = 0,937 p; \quad q_4 = 0,933 p; \quad q_5 = 0,933 p;$$

$q_1 = 1,239 p$.

Das Ergebnis ist in Abb. 10 voll ausgezogen.

c) $\alpha = 0$ (vollständig starrer Grundkörper). Für diesen Sonderfall muß die Einsenkung ζ überall gleich groß sein. Mit der

Abkürzung

$$\zeta \cdot \frac{E'}{a} = \bar{C}$$

erhält man unmittelbar aus den Gl. (3):

$$\begin{aligned}
 1,157 q_1 + 0,370 q_2 + 0,207 q_3 + 0,160 q_4 + 0,144 q_5 &= \bar{C} \\
 0,370 q_1 + 1,168 q_2 + 0,383 q_3 + 0,225 q_4 + 0,187 q_5 &= \bar{C} \\
 0,207 q_1 + 0,383 q_2 + 1,186 q_3 + 0,410 q_4 + 0,268 q_5 &= \bar{C} \\
 0,160 q_1 + 0,225 q_2 + 0,410 q_3 + 1,229 q_4 + 0,491 q_5 &= \bar{C} \\
 0,144 q_1 + 0,187 q_2 + 0,268 q_3 + 0,491 q_4 + 1,452 q_5 &= \bar{C}
 \end{aligned}$$

und als Auflösung dieser Gleichungen:

$$q_1 = 0,561 \bar{C}; \quad q_2 = 0,415 \bar{C}; \quad q_3 = 0,393 \bar{C}; \quad q_4 = 0,382 \bar{C};$$

$q_5 = 0,377 \bar{C}$.

Damit ist $\frac{1}{2} \Sigma q = 2,128 \bar{C} = 5 p$ oder $p = 0,4256 \bar{C}$

und nach Einsetzung dieses Wertes:

$$q_1 = 1,318 p; \quad q_2 = 0,975 p; \quad q_3 = 0,923 p; \quad q_4 = 0,898 p;$$

$q_5 = 0,886 p$.

Abb. 10 zeigt das Ergebnis als punktierte Linie.

Nach dem Bettungsziffer-Verfahren würde man unabhängig von der Biegesteifigkeit des Grundträgers immer nur eine gleichmäßige Sohlruckverteilung erhalten (strichpunktierte Linie in Abb. 10). Da sich hierfür das Biegemoment zu Null ergibt, gelingt es also mit Hilfe des Bettungsziffer-Verfahrens nicht, einen Anhalt für die Beanspruchung oder Bemessung des Grundträgers zu bekommen.

Beispiel 2. Einzellast P in Trägermitte, $\alpha = 0,03$.

Wie man am Aufbau der Gl. (9) sofort erkennt, bleiben die Festwerte der rechten Seite unverändert. Mit p_m als mittlerer Sohlspannung gilt:

$$P = 10 p_m \cdot ab \text{ oder } p_m = \frac{P}{10 ab}$$

Da wieder gilt: $-q_1 = q_2 + q_3 + q_4 + q_5 - 5 p_m$, so können auch die Festwerte der rechten Seite der unter Beispiel 1b erhaltenen Gleichungen teilweise übernommen werden. Man hat damit:

$$\begin{aligned}
 2,232 q_2 + 0,027 q_3 + 0,534 q_4 + 0,616 q_5 &= 3,27 p_m \\
 -0,481 q_2 + 1,750 q_3 - 0,458 q_4 + 0,034 q_5 &= 0,88 p_m \\
 -0,059 q_2 - 0,543 q_3 + 1,673 q_4 - 0,617 q_5 &= 0,605 p_m \\
 0,008 q_2 - 0,066 q_3 - 0,623 q_4 + 1,092 q_5 &= 0,68 p_m
 \end{aligned}$$

und als Auflösung:

$$q_2 = 0,78 p_m; \quad q_3 = 1,00 p_m; \quad q_4 = 1,22 p_m; \quad q_5 = 1,38 p_m;$$

$q_1 = 0,62 p_m$.

Dieses Ergebnis — in Abb. 11 als gestrichelte Treppennlinie und voll ausgezogene Kurve dargestellt — soll jetzt mit dem Ergebnis nach dem Bettungsziffer-Verfahren verglichen werden. Die Bettungszahl C kann aus der mittleren Senkung ζ_m eines gleichmäßig belasteten Streifens von der Länge $l = 10 b$ wie folgt erhalten werden: nach Schleicher gilt:

$$\zeta_m = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{b} \ln \frac{\sqrt{l^2 + b^2} + b}{\sqrt{l^2 + b^2} - b} + \ln \frac{\sqrt{l^2 + b^2} + l}{\sqrt{l^2 + b^2} - l} \cdot \frac{2}{3} \frac{(l^2 + b^2)^{\frac{3}{2}} - (l^3 + b^3)}{l b^2} \right] \cdot \frac{p b}{E'}$$

in Zahlen:

$$\zeta_m = \frac{1}{\pi} \left[10 \ln \frac{\sqrt{101} + 1}{\sqrt{101} - 1} + \ln \frac{\sqrt{101} + 10}{\sqrt{101} - 10} \cdot \frac{2}{3} \frac{\sqrt{1001^3} - 1001}{10} \right] \frac{p b}{E'} = 2,2465 \frac{p b}{E'}$$

Mit $\zeta_m = C \cdot p$ (nach Gl. (1)) ist also $C = \frac{p}{\zeta_m} = \frac{E'}{2,2465 b}$.

Beachtet man noch den aus Gl. (9a) folgenden Zusammenhang:

$$\frac{EJ}{b \cdot E'} = \frac{a^3}{\alpha}$$

so erhält man für die charakteristische Länge L der Bettungsziffer-Theorie:

$$L = \sqrt[4]{\frac{4 EJ}{b \cdot C}} = \sqrt[4]{\frac{4 EJ}{b} \cdot \frac{2,2465 b}{E'}} = \sqrt[4]{\frac{4 a^3}{\alpha} \cdot 2,2465} b = a \cdot \sqrt[4]{\frac{4 \cdot 2,2465}{\alpha} \left(\frac{b}{a}\right)}$$

und für $a = b$ und $\alpha = 0,03$:

$$L = 4,16a \quad \text{oder} \\ \lambda = 1 : L = 10 a : 4,16 a = 2,404.$$

Wie man sieht, entspricht jeder α -Wert nach Gl. (9a) unter festliegenden Verhältnissen einem bestimmten λ -Wert der Bettungsziffer-Theorie, was ja auch von vornherein erwartet werden muß.

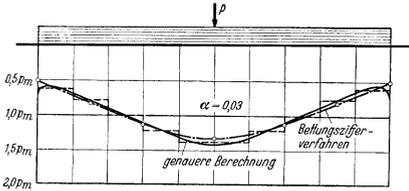


Abb. 11.

Nach K. Hayashi: Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage, S. 43—45, Berlin 1921, gilt für eine Einzellast in Trägermitte: für die Mitte: $q_M = \frac{1}{2} (1 + \alpha) \frac{P}{bL}$, für das Ende: $q_0 = 2c \frac{P}{bL}$ und für beliebiges $\xi = \frac{x}{L}$ (von der Mitte aus gezählt):

$$q = \frac{1}{2} \left[\cos \xi [(1 + \alpha) \text{Co} \xi - \text{Si} \xi] + \sin \xi [\text{Co} \xi - (1 - \alpha) \text{Si} \xi] \right] \frac{P}{bL}$$

$$\text{mit } a = \frac{2 + \cos \lambda - \sin \lambda + e^{-\lambda}}{\text{Si} \lambda + \sin \lambda}; \quad b = \frac{\cos \lambda + \sin \lambda - e^{-\lambda}}{\text{Si} \lambda + \sin \lambda};$$

$$\text{Co} \xi = \frac{\lambda}{2} \cdot \cos \frac{\lambda}{2}$$

$$c = \frac{\text{Si} \lambda + \sin \lambda}{2}$$

$$\text{Für } P = 10 p_m \cdot a \cdot b \text{ und } L = \frac{1}{\lambda} = \frac{10 a}{\lambda} \text{ ist}$$

$$\frac{P}{bL} = \frac{10 p_m \cdot a \cdot b \cdot \lambda}{b \cdot 10 a} = \lambda \cdot p_m.$$

Für $\lambda = 2,404$ erhält man damit:

$$a = \frac{2 - 0,7401 - 0,6725 + 0,0904}{5,489 + 0,672} = 0,110;$$

$$b = \frac{-0,7401 + 0,6725 - 0,0904}{6,161} = -0,0245;$$

$$c = \frac{1,8137 \cdot 0,3605}{6,161} = 0,1061;$$

$$q_M = \frac{1}{2} \cdot 1,110 \cdot 2,404 p_m = 1,335 p_m;$$

$$q_0 = 2 \cdot 0,1061 \cdot 2,404 p_m = 0,510 p;$$

$$\text{für } \xi = \frac{2 a}{4,16 a} = 0,481:$$

$$q = \frac{1}{2} [0,8865 (1,110 - 1,1179 - 0,4998) + 0,4627 (1,1179 - 1,0245 \cdot 0,4998)] \cdot 2,404 p_m = 1,125 p_m;$$

$$\text{für } \xi = \frac{3,5 a}{4,16 a} = 0,841:$$

$$q_2 = \frac{1}{2} [0,6667 (1,110 - 1,3750 - 0,9437) + 0,7453 (1,3750 - 1,0245 \cdot 0,9437)] \cdot 2,404 p_m = 0,833 p_m.$$

Größtes Moment nach Hayashi:

$$M_{\max} = \frac{1}{4} (1 - b) \cdot PL = \frac{1}{4} (1 - b) \cdot p_m lb \cdot \frac{1}{\lambda} = \frac{1 - b}{4 \lambda} \cdot p_m l^2 b = \frac{1,0245}{9,616} p_m l^2 b = 0,1065 p_m l^2 b.$$

Nach der genaueren Berechnung erhält man (mit $l = 10 a$):

$$M_{\max} = (0,62 \cdot 4,5 + 0,78 \cdot 3,5 + 1,0 \cdot 2,5 + 1,22 \cdot 1,5 + 1,38 \cdot 0,5) p_m \cdot a \cdot b \cdot a = 0,1054 p_m l^2 b.$$

Es ist $0,1065 \approx 1,01 \cdot 0,1054$; das Moment ist nach dem B.-Verfahren also um 1% zu groß erhalten. $M_{\max} = 0,1054 p_m$ findet man für $\lambda \approx 2,45$. Die Bettungszahl C müßte danach um das $\left(\frac{2,45}{2,404}\right)^4$ -fache, d. i. das 1,079-fache größer angenommen werden (Einsetzen von 92,7% der berechneten mittleren Setzung).

Die nach dem B.-Verfahren erhaltene Sohlgedrucktverteilung ist in Abb. 11 strichpunktiert eingetragen. Es ergibt sich in diesem Fall eine gute Übereinstimmung mit der genaueren Berechnung. Der Vergleich der Ergebnisse kann jedoch in anderen Fällen wesentlich ungünstiger ausfallen, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 3. Einzellasten P an den Trägerenden, $\alpha = 0,03$.

In den Momentengleichungen (5) ist eine beliebig angreifende Einzelkraft nicht berücksichtigt worden; man erkennt jedoch unschwer an Abb. 6e, daß die Momente aus der am Rande angreifenden Kraft P durch ein veränderliches M_1 berücksichtigt werden können, indem man setzt:

$$\text{für Punkt 1: } M_1 = -P \cdot \frac{a}{2}; \quad \text{für Punkt 2: } M_1 = -P \cdot \frac{3}{2} a \text{ usw.}$$

Mit $P = 5 p_m \cdot a \cdot b$ erhält man damit für den Einfluß der Momente aus P in den Gl. (7):

$$M_1 + 4 M_2 + M_3 = -5 p_m \cdot a \cdot b \left(\frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{3}{2} + \frac{5}{2} \right) a = -6 \cdot 7,5 p_m \cdot a^2 b$$

$$M_2 + 4 M_3 + M_4 = -5 p_m \cdot a \cdot b \left(\frac{3}{2} + 4 \cdot \frac{5}{2} + \frac{7}{2} \right) a = -6 \cdot 12,5 p_m \cdot a^2 b \text{ usw.}$$

Diese Werte sind in Gl. (7) an Stelle von $6 M_1$ einzusetzen; man muß sie also noch durch $6 a^2 b$ teilen, um die m_1 -Werte der Gl. (9) zu erhalten. Die linke Seite der Gleichungen des vorigen Beispiels bleibt wieder unverändert. Man erhält damit:

$$2,232 q_2 + 0,027 q_3 + 0,534 q_4 + 0,616 q_5 = (3,27 - 0,03 \cdot 7,5) p_m = 3,045 p_m \\ -0,481 q_2 + 1,750 q_3 - 0,458 q_4 + 0,034 q_5 = (0,88 - 0,03 \cdot 12,5) p_m = 0,505 p_m \\ -0,059 q_2 - 0,543 q_3 + 1,673 q_4 - 0,617 q_5 = (0,605 - 0,03 \cdot 17,5) p_m = 0,08 p_m \\ 0,008 q_2 - 0,066 q_3 - 0,632 q_4 + 1,092 q_5 = (0,68 - 0,03 \cdot 22,5) p_m = 0,005 p_m$$

und als Lösungen:

$$q_2 = 1,17 p_m; \quad q_3 = 0,72 p_m; \quad q_4 = 0,43 p_m; \quad q_5 = 0,29 p_m \\ q_1 = 2,39 p_m.$$

Größtes Moment:

$$M_{\max} = (-5,0 \cdot 5,0 + 2,39 \cdot 4,5 + 1,17 \cdot 3,5 + 0,72 \cdot 2,5 + 0,43 \cdot 1,5 + 0,29 \cdot 0,5) p_m \cdot a \cdot b \cdot a = -0,0757 p_m l^2 b.$$

Vergleich mit dem Bettungsziffer-Verfahren:

Nach Hayashi, S. 129, ist, wenn $\xi = x : L$ vom Ende aus gezählt wird:

$$q = 2 \frac{\text{Co} \xi (\lambda - \xi) \cos \xi + \cos (\lambda - \xi) \text{Co} \xi}{\text{Si} \lambda + \sin \lambda} \frac{P}{bL};$$

$$q_m = 4 \frac{\text{Co} \xi \frac{\lambda}{2} \cdot \cos \frac{\lambda}{2}}{\text{Si} \lambda + \sin \lambda} \frac{P}{bL}; \quad q_0 = 2 \frac{\text{Co} \lambda + \cos \lambda}{\text{Si} \lambda + \sin \lambda} \frac{P}{bL}.$$

Mit $\frac{P}{bL} = \frac{1}{2} \lambda p_m$ ist zahlenmäßig (vgl. Beispiel 2):

$$q_M = 4 \frac{1,8137 \cdot 0,3605}{6,161} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,404 p_m = 0,510 p_m;$$

$$q_0 = 2 \frac{5,579 - 0,7401}{6,161} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,404 p_m = 1,888 p_m;$$

$$q_\xi = 0,721 = 2 \frac{2,784 \cdot 0,7512 - 0,1120 \cdot 1,2714}{6,161} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,404 p_m = 0,761 p_m;$$

$$q_2 = 2 \cdot \frac{3,923 \cdot 0,9357 - 0,4552 \cdot 1,0657}{6,161} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2,404 p_m = 1,243 p_m.$$

Für das Moment findet man allgemein:

$$M = - \frac{\text{Si} (\lambda - \xi) \sin \xi + \sin (\lambda - \xi) \text{Si} \xi}{\text{Si} \lambda + \sin \lambda} \cdot P \cdot L;$$

$$P \cdot L = \frac{P_m \cdot l b}{2} \frac{1}{\lambda} = \frac{P_m \cdot l^2 b}{2 \lambda}$$

Das größte Moment erhält man für $\xi = \frac{\lambda}{2}$:

$$M_{\max} = -2 \cdot \frac{\int \sin \frac{\lambda}{2} \cdot \sin \frac{\lambda}{2}}{\int \sin \lambda + \sin \lambda} \cdot P L =$$

$$= -2 \cdot \frac{1,5131 \cdot 0,9328}{6,161} \cdot \frac{P_m l^2 b}{2 \cdot 2,404} = -0,0953 P_m \cdot l^2 b$$

Das Moment wird also nach dem B.-Verfahren um das $\frac{0,0953}{0,0757} \approx 1,26$ -fache, also um 26% zu groß erhalten. Für übereinstimmende Größtmomente müßte die Bettungszahl um das $\left(\frac{2,865}{2,404}\right)^4$ -fache, d. i. um das 2,017-fache größer angenommen werden (Einsetzen von 49,6% der berechneten mittleren Setzung). — Die Verteilungslinien der Sohlspannungen sind in Abb. 12 aufgetragen.

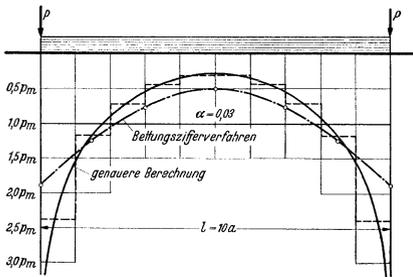


Abb. 12.

Die Abb. 10 und 12 zeigen, daß das Ergebnis nach der Bettungsziffer-Theorie in manchen Fällen erheblich von dem Ergebnis der genaueren Berechnung abweicht und zwar hinsichtlich von M_{\max} sowohl nach der günstigen als auch nach der ungünstigen Seite hin. Wie außerdem zu ersehen ist, erfordert die genauere Berechnung kaum einen größeren Aufwand an Zahlenrechnung als das B.-Verfahren.

Man könnte freilich auch das B.-Verfahren nach der Differenzenrechnung behandeln, wodurch es etwas einfacher zu handhaben wäre als die genauere Berechnung. Die abgeleiteten Gleichungen gelten auch für diesen Fall, wenn man setzt:

$$c_0 = \frac{1}{C}; \quad c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0; \quad C_0 = 2 c_0 = \frac{2}{C}; \quad C_1 = c_0 = \frac{1}{C};$$

$$C_2 = C_3 = \dots = C_n = 0.$$

Aus angedeuteten Gründen sei aber nicht weiter darauf eingegangen.

Der Unterschied zwischen „Baugrund“ und „gleichmäßigem Halbraum“.

Bei den bisherigen Berechnungen ist vorerst als Untergrund der gleichmäßige Halbraum vorausgesetzt worden. Der Gültigkeitsbereich der abgeleiteten Gleichungen ist jedoch keineswegs auf diesen Halbraum beschränkt, weil über die Gestalt der Senkungseinflußlinie des Untergrundes (Abb. 6 c) keine Einschränkungen gemacht worden sind.

Wirklicher „Baugrund“ hat freilich meistens eine andere Druckverteilung als der „Halbraum“, und die Zusammendrückbarkeit des Untergrundes weicht von der des Halbraumes ab, weil die Formänderungen der Erdschichten je nach ihrer Tiefenlage verschieden sind und auch nicht immer verhältnismäßig mit der Belastung anwachsen; jedoch kommen diese Abweichungen schon zum großen Teil in der veränderten Form der Senkungseinfluß-

linie rechnerisch zum Ausdruck, ohne daß es in jedem Falle notwendig wird, die bisherigen Gleichungen zu ergänzen. Durch die — besonders in ihrem Verhältnis untereinander — veränderten c-Werte der Gl. (3) wird eben das wahre Verhalten des Baugrundes rechnerisch schon vielfach ausreichend erfaßt. Man erkennt jedenfalls schwer, daß die abgeleiteten Formeln solange richtig sind, als die Einsenkungen verhältnismäßig mit der Belastung zunehmen. Dies trifft in vielen praktischen Fällen auch genügend genau zu, wie man des öfteren an Probebelastungen des Baugrundes beobachten kann. Die abgeleiteten Formeln werden daher — zumindest näherungsweise — sehr oft in der Baupraxis ausreichen.

Die Gl. (3) können allerdings nicht mehr mit dem auf S. 103 angegebenen Ansatz angeschrieben werden; es muß jetzt heißen:

$$(3a) \quad \begin{cases} z_1 = c_0 \cdot q_1 + c_1 \cdot q_2 + c_2 \cdot q_3 + \dots \\ z_2 = c_1 \cdot q_1 + c_0 \cdot q_2 + c_1 \cdot q_3 + \dots \text{ usw.} \end{cases}$$

d. h. die Beiwerte c sind jetzt keine unbenannten Zahlen mehr, sondern sind gebunden an die gerade vorliegenden Verhältnisse des Untergrundes und der Lastflächengröße. Dadurch ändern sich jedoch nur die Konstanten der Gl. (8) und (9), indem in Gl. (8) die Faktoren $\frac{a}{E}$ fortfallen und in Gl. (9) der Wert a durch $\frac{a^{4b}}{EJ}$ zu ersetzen ist¹⁵.

In einigen Fällen sind allerdings die Abweichungen der Formänderungen des Untergrundes vom Gesetz der Verhältnismäßigkeit zwischen Spannungen und Formänderungen so groß, daß genauere Berechnungen notwendig werden können. Wie bereits eingangs bemerkt, kommen für die Abweichungen von geradlinigem Verlauf der Senkungslinie folgende drei Ursachen in Betracht:

- die Abnahme der Zusammendrückbarkeit der Erdstoffe mit wachsendem Druck;
- die Vorbelastung der Erdschichten und
- die Überschreitung der Grenztragfähigkeit des Untergrundes am Rande der belastenden Fläche.

Während die erste Ursache bei wachsender Belastung eine abnehmende Neigung der Setzungslinie zur Folge hat (Abb. 13a), ist es bei den anderen beiden Ursachen umgekehrt (Abb. 13b und c).

Zusammendrückungsversuche mit behinderter und unbehinderter seitlicher Ausdehnung zeigen, daß eine Verringerung der

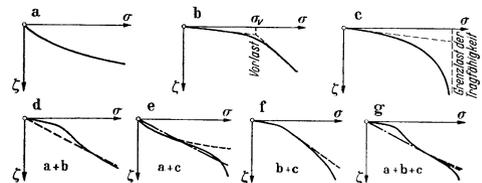


Abb. 13. Die verschiedenen Möglichkeiten für den Verlauf der Setzungslinie.

Zusammendrückbarkeit (Vergrößerung der Verdichtungszahl V und der Zusammendrückungszahl Z) mit wachsendem Druck (Abb. 13a) nur eintritt, wenn die seitliche Ausdehnung der einzelnen Erdteilchen ganz oder teilweise behindert wird. Unmittelbar unter der Sohlfläche ist die seitliche Ausdehnung der Erdteilchen durch die bei einer waagrecht Bewegung sofort einsetzende Sohlreibung gänzlich behindert; mit zunehmender Tiefe wird die Behinderung der seitlichen Ausdehnung immer geringer, bis sie in

¹⁵ Nur wenn für die Tiefenabhängigkeit der Zusammendrückungszahl $Z = c^z \cdot z^w$ (z = Tiefe) gilt, kann angesetzt werden: $\dot{z} = (Zc^q) \cdot a^{1-w}$ mit c als unbenannten Zahlen.

einer Tiefe gleich der Lastflächenbreite praktisch ganz aufhört. Die Behinderung der seitlichen Ausdehnung, die mit zunehmendem Druck eine Verringerung der Zusammendrückbarkeit zur Folge hat (Abb. 13a), ist also nur in der Nähe der Lastfläche vorhanden.

Man hört mitunter den Einwand, die seitliche Ausdehnung eines Erdteilchens in größerer Tiefe sei doch durch die angrenzenden Erdteilchen ebenfalls behindert. Dieser Einwand ist jedoch nicht richtig, weil sich die Nachbarpartien nicht nur lotrecht setzen, sondern — infolge der strahlenförmigen Druckausstrahlung von der Lastfläche her — sich auch waagrecht etwas verschieben (vgl. Abb. 14), wodurch dann die ungehinderte seitliche Ausdehnung ermöglicht wird. — Eine Behinderung der Seitendehnung ist bekanntlich immer mit einer Erhöhung der waagrecht Spannungen σ_x verbunden, denn diese zusätzlichen waagrecht Spannungen bewirken ja gerade erst das Ausbleiben der seitlichen Ausdehnung. Wie nun die Druckverteilungsformeln zeigen¹⁶, nehmen die durch eine Belastung verursachten zusätzlichen Spannungen σ_x mit wachsender Tiefe unter der Lastfläche schnell ab, woraus ebenfalls folgt, daß eine Behinderung der seitlichen Ausdehnung nur in der Nähe der Lastfläche vorhanden ist.

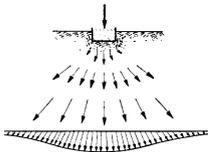


Abb. 14.

Ähnlich ist es mit dem Überschreiten der Vorbelastung. Als Vorbelastung bezeichnet man den Höchstwert der Belastung, die eine Erdschicht seit ihrer Entstehung irgendwann einmal hinreichend lange zu tragen hatte (Belastung durch Gletschereis oder durch Erdschichten, die später wieder fortbewegt wurden, oder durch Kapillarkräfte infolge Austrocknung). Solange die Erdspannungen unterhalb der Vorlast bleiben, treten nur geringe federnde (elastische) Setzungen auf; erst nach dem Überschreiten der Vorbelastung kommt es zu größeren Setzungen (Abb. 13b). Hat also die Setzungslinie einen (leicht ausgerundeten) Knick, so

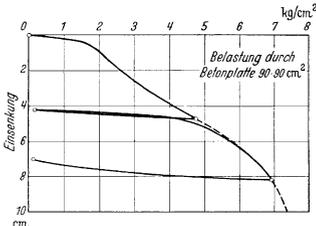


Abb. 15. Probebelastung auf schlickigem Feinsand.

ist das Überschreiten der Vorbelastung als die Ursache dieser Erscheinung anzusehen. — Wenn nun auch die zusätzlichen lotrechten Spannungen σ_z nach unten hin nicht ganz so schnell abklingen wie die waagrecht Spannungen σ_x , so werden sie mit zunehmender Tiefe doch bald so klein, daß auch eine geringe Vorbelastung nicht mehr überschritten wird. Die Abweichungen vom linearen Formänderungsgesetz sind also auch hier wieder auf die Nähe der Lastfläche beschränkt.

Bei stark belastetem Baugrund weichen die Erdschichten in der Nähe des Randes der Lastfläche bei weiterhin zunehmendem Druck immer stärker seitlich aus, weil der Erdwiderstand — vom Rande der Lastfläche her beginnend — für eine immer größere Breite überwunden wird. Es entsteht dadurch die in Abb. 13c gezeichnete Setzungskurve.

Vielfach wird man es nicht mit einem einzigen der aufgeführten Punkte zu tun haben, sondern mit einem Zusammenwirken von zwei oder drei Ursachen. So muß z. B. beim Vorliegen sowohl der ersten als auch der zweiten Ursache bei andauernd zunehmender

Belastung schließlich die Grenzlast der Tragfähigkeit erreicht werden, wodurch der Setzungsverlauf nach Abb. 13c hinzukommt (Abb. 13e u. f.). Schließlich können auch alle drei Ursachen gleichzeitig vorhanden sein (Abb. 13g).

Alle aufgeführten Typen von Setzungskurven kann man gelegentlich bei Probebelastungen des Baugrundes beobachten. So zeigt z. B. Abb. 15 eine Setzungskurve nach Abb. 13g. Es handelt sich um einen jungen humosen Feinsand der Nordseeküste, der in rd. 13 m Tiefe im Senkkasten mit Hilfe einer Betonplatte 90 x 90 cm belastet wurde.

Die Umrechnung der bei einer Probebelastung erhaltenen Daten auf Bauwerkgröße setzt eine einwandfreie Deutung der Probebelastung nach den in Abb. 13 veranschaulichten Einflüssen voraus. Zu diesem Zweck muß versucht werden, die einzelnen Einflüsse rechnerisch zu erfassen, was nach dem heutigen Stande der Erdbau-Forschung auch schon befriedigend möglich ist. Aus dem eingangs genannten Grunde kann in diesem Aufsatz auf solche Berechnungen aber nicht ausführlich eingegangen werden; es können nur die nachstehenden Andeutungen gemacht werden.

Am einfachsten kann der Einfluß der Überschreitung der Tragfähigkeit am Rande der Lastfläche (Abb. 13c) rechnerisch

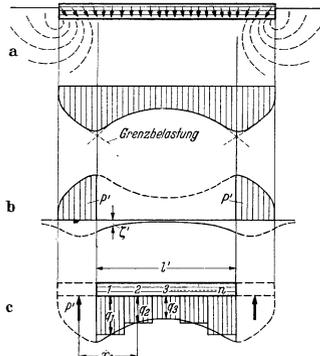


Abb. 16.

berücksichtigt werden. Wenn im Randbereich der Lastfläche der größtmögliche Widerstand des Baugrundes erreicht wird (Ausweichen der Erde auf kurvenförmigen Gleitflächen), so kann der Sohldruck in diesem Randbereich bei weiterhin zunehmender Belastung nicht mehr anwachsen. Er wirkt damit gleichsam wie eine konstante äußere Last. Schätzt man also auf Grund einer überschläglichen Berechnung die Breite der beiden Sohlstreifen, die für das Ausweichen des Untergrundes etwa in Frage kommt (Abb. 16a), und setzt die Randstreifen-Grenzlasten vorweg als äußere Kräfte ein¹⁷, so kann dann die Berechnung der Sohlrücke für den restlichen Teil der Sohlfläche nach den bisherigen Formeln durchgeführt werden. Nur müssen die durch die „Randlasten“ verursachten Einsenkungen ζ' des mittleren Teiles der Sohlfläche (Abb. 16b) berücksichtigt werden. Man rechnet also gleichsam mit einem um die Randstreifen verkürzten Grundkörper (Abb. 16c). Die früheren Gl. (3) sind damit zu ersetzen durch:

$$(3b) \quad \begin{cases} \zeta_1 = \zeta_1' + c_0q_1 + c_1q_2 + c_2q_3 + \dots \\ \zeta_2 = \zeta_2' + c_1q_1 + c_0q_2 + c_1q_3 + \dots \text{ usw.} \end{cases}$$

Hierdurch verändern sich natürlich auch die Gl. (8) und (9). Die linke Seite der Gl. (9) bleibt unverändert, nur daß an Stelle von α wieder der Wert

$$\alpha = \frac{a^2b}{E_j}$$

einzusetzen ist (auch rechts); die rechte Seite der Gl. (9) dagegen

¹⁷ Die Grenzbelastung (Grenze der Tragfähigkeit) kann durch Probebelastung des Baugrundes oder — bei bekanntem Gleitwiderstand — rechnerisch mit Hilfe kurvenförmiger Gleitflächen ermittelt werden.

¹⁶ Fröhlich, O. K.: Druckverteilung im Baugrunde. Wien 1934 — Ohde, J.: Bauging. 20 (1939) S. 451.

ist zu ergänzen durch die Werte

$$-\zeta_2'' \text{ für die 1. Gl., } -\zeta_3'' \text{ für die 2. Gl., } -\zeta_4'' \text{ für die 3. Gl., usw.}$$

$$\text{mit } \zeta_n'' = 2\zeta_n - \zeta_{n-1} - \zeta_{n+1}.$$

Für M_1 ist einzusetzen: $M_1 = P' \cdot x$, wenn P' die „Randlast“ und x die Entfernung der Randlast von dem betreffenden Punkt angibt, für den die Gleichung gilt (z. B. Punkt 2 für die 1. Gleichung).

Schwerer und vorerst wohl nur näherungsweise zu berücksichtigen ist der Einfluß der Vorlast (Abb. 13 b) und der Einfluß der Zunahme der Zusammendrückungszahl Z mit wachsendem Druck (Abb. 13 a). In grober Weise mag man sich durch gefühlsmäßiges Abändern der für mittlere Zusammendrückungswerte errechneten Sohldruckverteilungslinie helfen können, indem man diese in der Nachbarschaft der Größtwerte beim Überschreiten der Vorlast (Abb. 13 b) etwas verkleinert, beim Vorliegen einer Zusammendrückungskurve nach Abb. 13 a dagegen etwas vergrößert und den übrigen Teil der Verteilungslinie in geringem Maße so vergrößert oder verkleinert, daß die lotrechten Kräfte im Gleichgewicht bleiben.

Einwandfreier ist folgendes Vorgehen: Man ermittelt die Spannungsverteilung im Untergrund mit Hilfe des (nur noch näherungsweise gültigen) Grundsatzes einfacher Summierung der Einzelwirkungen, berechnet aber die Zusammendrückungen (Setzungen)

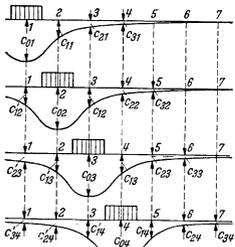


Abb. 17.

nach dem wirklichen Verlauf der Formänderungen. Die Setzungen nehmen dann allerdings nicht mehr geradlinig mit der Belastung zu, so daß die Gl. (3) wieder ihre Gültigkeit verlieren. Man kann sich aber durch Überlagerung von zwei Belastungszuständen helfen, von denen der erste möglichst nahe an das wirkliche Belastungsbild heranreicht, damit für den zweiten (ergänzenden) Belastungszustand nur kleine Änderungen der Sohlspannungen q übrigbleiben, für die die Setzungen genügend genau verhältnismäßig mit der weiteren Belastung zunehmen. — Für den ersten Belastungszustand wird die Verteilung der Sohlspannungen geschätzt (evtl. auf Grund einer vorläufigen Berechnung); am besten erfüllt man von vornherein die Bedingung des lotrechten Gleichgewichts. Die angenommenen Sohlspannungen seien q_1, q_2, \dots, q_n und die zugehörigen Einsenkungen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$. Letztere werden natürlich auf Grund der genauen (nicht linearen) Zusammendrückungskurven der Erdschichten bestimmt. Ebenso werden bei der Ermittlung der restlichen Einsenkungen $\Delta \zeta$ für den zweiten Lastzustand die durch die erste Belastung veränderten Formänderungszahlen zugrunde gelegt. Die hierzu gehörenden c -Werte für die Mittelpunkte der einzelnen Sohlflächen können damit für alle Punkte verschieden ausfallen. Werden die Bezeichnungen nach Abb. 17 gewählt, so erhält man damit an Stelle der früheren Gl. (3):

$$(3c) \quad \begin{cases} \zeta_1 = \bar{\zeta}_1 + c_{01} \cdot \Delta q_1 + c'_{12} \cdot \Delta q_2 + c'_{23} \cdot \Delta q_3 + c'_{34} \cdot \Delta q_4 + \dots \\ \zeta_2 = \bar{\zeta}_2 + c_{11} \cdot \Delta q_1 + c_{02} \cdot \Delta q_2 + c_{13} \cdot \Delta q_3 + c'_{14} \cdot \Delta q_4 + \dots \\ \zeta_3 = \bar{\zeta}_3 + c_{21} \cdot \Delta q_1 + c_{12} \cdot \Delta q_2 + c_{03} \cdot \Delta q_3 + c_{14} \cdot \Delta q_4 + \dots \\ \zeta_4 = \bar{\zeta}_4 + c_{31} \cdot \Delta q_1 + \dots \text{ usw.} \end{cases}$$

Auf die daraus folgenden Veränderungen der Gl. (8) und (9) noch näher einzugehen, lohnt sich nicht, weil diese Gleichungen für jede Aufgabe neu durchgerechnet werden müssen.

Die vorstehend angedeutete Berechnungsweise ist insofern nur angenähert, als noch mit der Annahme linearer Spannungsüberlagerung gerechnet wurde. Wie eingangs schon bemerkt wurde, gilt diese Annahme nicht mehr genau, sobald die Zusammendrückungen der einzelnen Erdteilchen nicht mehr geradlinig mit der Belastung zunehmen (Abb. 13 a u. b). Für eine genaue Berechnung müßte auch die Druckverteilung im Untergrund noch von den örtlich verschiedenen Formänderungen abhängig gemacht werden, wobei vom Grundsatz des Kleinstwertes der Formänderungsarbeit auszu-

gehen wäre. Voraussichtlich wird das vorstehend angedeutete Verfahren (Annahme linearer Spannungsüberlagerung) aber genügend genau sein, wenn man sich außerdem noch klar macht, nach welcher Richtung hin die genaue Berechnung von der näherungsweise Ermittlung der Sohlspannungs-Verteilung abweicht. Es ist leicht einzusehen, daß die zusätzlichen Erdspannungen an den härteren Stellen mit geringerer Nachgiebigkeit etwas größer sein werden, als sie nach den Druckverteilungsformeln berechnet werden. Denn an den weniger nachgiebigen Stellen ist ein stärkerer Widerstand gegen Verformung — also eine Art innerer Abstützung — vorhanden, und die Formänderungsarbeit ist infolgedessen für den gleichen Spannungszuwachs geringer als in weicheren Bereichen. Umgekehrt werden die Erdspannungen an den Stellen, wo die Vorbelastung der Erdteilchen überschritten wird, etwas geringer sein als nach der Berechnung, denn durch das vermehrte Nachgeben nach dem Überschreiten der Vorlast wird der betr. Erdbereich nachgiebiger als die Nachbarbereiche, in denen die Vorlast noch nicht überschritten ist. — Die vorstehend ausgesprochene Feststellung, daß die rechnerisch erhaltenen Sohlspannungen von den genauen Werten in einer ganz bestimmten Richtung etwas abweichen, wird bei der Erörterung der Sicherheitsfrage wohl einen ausreichenden Anhaltspunkt ergeben.

Die räumliche Aufgabe.

Die statische Berechnung einer Platte ist bekanntlich weit schwieriger als die eines Balkens. Dasselbe gilt auch für die rechnerische Ermittlung der Sohlruckverteilung.

Die Berechnung einer biegsamen Platte wäre noch verhältnismäßig einfach, wenn man sie als Trägerrost berechnen dürfte. Dabei wird die Platte nach beiden Richtungen hin in eine Anzahl nebeneinander liegender Streifen zerlegt gedacht, die sich gegenseitig durchdringen, aber sich im übrigen bei den Formänderungen nur soweit beeinflussen, als sie in den Kreuzungspunkten die gleiche Durchbiegung haben. Unter dieser Annahme kann das mitgeteilte Verfahren für die ebene Aufgabe ohne weiteres auch auf die räumliche Aufgabe übertragen werden, indem die Dreimomentengleichungen für beide Grundriß-Richtungen x und y angeschrieben werden. Die äußere Belastung verteilt sich allerdings in einem zunächst unbekanntem Verhältnis auf die Ersatzträger beider Richtungen. Wirkt z. B. an einer beliebigen Stelle der Platte auf einer (rechteckigen) Einzelfläche die äußere Belastung p , so belastet $\psi \cdot p$ Teil ψ der Träger der x -Richtung, der Restteil $(1 - \psi) \cdot p$ dagegen die Träger der y -Richtung. Der Anteil $\psi \cdot p$ ist dabei für jede Einzelfläche verschieden und zunächst unbekannt. Jedoch ist diese Schwierigkeit unschwer zu beheben; man braucht nur die ψ -Werte als neue Unbekannte anzusetzen und die Bedingungen gleicher Durchbiegung der Kreuzungspunkte der Ersatzträger in die Rechnung einzuführen. Dadurch erhält man zusammen mit den Gleichgewichtsbedingungen eine genügende Anzahl neu hinzukommender Gleichungen, mit deren Hilfe dann auch die ψ -Werte ermittelt werden können.

Bei der Annahme eines die Platte vertretenden Trägerrostes wird auf die Drillungsmomente der Platte keine Rücksicht genommen. Der Einfluß der Drillungsmomente darf aber nun leider nicht vernachlässigt werden, wie von der Plattentheorie her bekannt ist. Beispielsweise erhält man für einen quadratischen Trägerrost fast die doppelte Durchbiegung und etwa die $1 \frac{1}{2}$ fachen Werte der Größtmomente einer quadratischen Platte von gleichen Abmessungen. Die Drillungsmomente sind also immer zu berücksichtigen, wenn die Berechnung dadurch auch merklich umständlicher wird.

Die genaue Berechnung einer Platte ist nach dem Differenzenverfahren noch in verhältnismäßig einfacher Weise möglich, wie Marcus gezeigt hat¹⁸. Wollte man jedoch auch bei der Ermittlung der Sohlruck-Verteilung in dieser Weise vorgehen, so wird sich dabei m. E. die gleiche Unzulänglichkeit herausstellen, wie sie bei der Berechnung von Habel offenbar geworden ist: der

¹⁸ Marcus, H.: In Buchform: Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung elastischer Strukturen. 2. Aufl. Berlin 1932. — Armierter Beton 12 (1919) S. 107. — Die vereinfachte Berechnung biegsamer Platten. 2. Aufl. Berlin 1928.

„Randeinfluß“ läßt sich auf diese Weise nicht berücksichtigen. Es muß deshalb versucht werden, den Einfluß der Biegsamkeit einer Platte auf deren Sohldruckverteilung ebenso wie bei der ebenen Aufgabe mit Hilfe von Dreimomentengleichungen zu erfassen, wobei allerdings der Einfluß der Drillungsmomente nicht vernachlässigt werden darf. Eine solche Berechnung wird möglich, wenn man sich die Platte durch einen Trägerrost ersetzt denkt, dessen rechteckige „Träger“ in den Seitenflächen Drillungsmomente besitzen, die jeden einzelnen Träger so verdrehen, daß seine Querneigung den Biegelinien-Tangenten der kreuzweise hierzu liegenden Träger entspricht (Abb. 18).

Das Verfahren kann hier nur kurz angedeutet werden. Die Einsenkungen des Untergrundes werden selbstverständlich in der gleichen Weise gefunden wie bei der ebenen Aufgabe nach Gl. (3) (vgl. Schleicher³). Auch die Dreimomentengleichungen (4) werden ebenso angeschrieben, und zwar sowohl für die x- als auch für die y-Richtung. Dagegen werden die Gl. (5) für die einzelnen Momente jetzt umständlicher, weil die Drillungsmomente mit einzubeziehen sind.

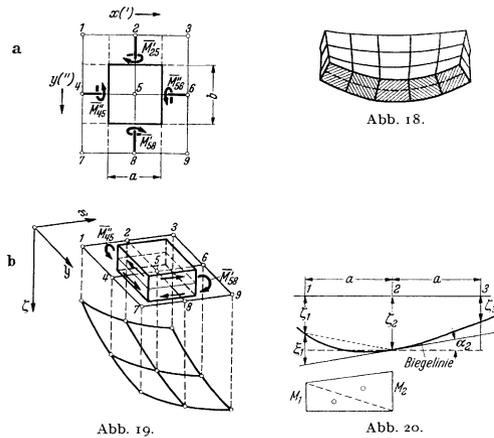


Abb. 18.

Abb. 19.

Abb. 20.

Der Zusammenhang zwischen der durch die Einsenkungen ζ gegebenen Plattenverformung und den Drillungsmomenten \bar{M} kann folgendermaßen gefunden werden (Bezeichnungen nach Abb. 19): der Unterschied der Biegelinientangenten der Träger 123 und 456 in den Punkten 2 und 5 muß der Verdrehung φ des Trägers 258 auf der Strecke 25 entsprechen. Hat das Drillungsmoment auf dieser Strecke den mittleren Wert $\bar{M}'_{2,5}$ und die zugehörige Schubspannung der äußersten Fasern den Wert $\tau'_{2,5}$, so gilt bekanntlich (mit h = Plattendicke):

$$(10) \quad \bar{M}'_{2,5} = \frac{1}{2} \tau'_{2,5} \cdot \frac{h}{2} \cdot a \cdot \frac{2}{3} h = \tau'_{2,5} \cdot \frac{ah^2}{6},$$

weil die Schubspannungen der Drillungsmomente die gleiche Verteilung haben wie die Biegespannungen¹⁸. Die gesamte Winkeländerung (Verdrehung) auf der Strecke 25 ist

$$\varphi = \frac{\Delta l}{2} \text{ mit } \Delta l = \frac{\tau'_{2,5}}{G} \cdot b, \text{ also } \varphi = \frac{2}{h} \cdot \frac{\tau'_{2,5} \cdot b}{G}$$

oder nach Einsetzung von Gl. (10) und mit $J'' = \frac{ah^3}{12}$ (Trägheitsmoment der y-Träger):

$$(11) \quad \varphi = \frac{b \cdot \bar{M}'_{2,5}}{G \cdot J''}$$

Andererseits ist aus Abb. 20 abzulesen:

$$\text{tg } \alpha_2 = \frac{\xi_1}{a} - \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{a}$$

Nun ist bekanntlich die Verbiegung ξ_1 gleich dem durch EJ'_y geübten statischen Moment der Momentenfläche, bezogen auf Punkt 1

(J'_y = Trägheitsmoment der x-Träger), also

$$\xi_1 = \frac{1}{EJ'} \left(\frac{M_1 a}{2} \cdot \frac{a}{3} + M_2 a \cdot \frac{2}{3} a \right) = \frac{a^3}{6EJ'} (M_1 + 2M_2);$$

mithin gilt:

$$(12a) \quad \text{tg } \alpha_2 = \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{a} + \frac{a}{6EJ'} (M_1 + 2M_2).$$

Ebenso findet man für Punkt 5 der Abb. 19:

$$(12b) \quad \text{tg } \alpha_5 = \frac{\zeta_4 - \zeta_5}{a} + \frac{a}{6EJ'} (M_4 + 2M_5).$$

Wie bereits bemerkt, gilt nun:

$$\varphi = \text{tg } \alpha_2 - \text{tg } \alpha_5$$

oder mit Hilfe der Gl. (12):

$$(13) \quad \varphi = \frac{1}{a} (\zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_4 + \zeta_5) + \frac{a}{6EJ'} (M_1 + 2M_2 - M_4 - 2M_5).$$

Die Gleichsetzung der Werte für φ nach Gl. (11) und (13) liefert schließlich:

$$(14) \quad \frac{ab}{G \cdot J''} \cdot \bar{M}'_{2,5} = \zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_4 + \zeta_5 + \frac{a^2}{6EJ'} (M_1 + 2M_2 - M_4 - 2M_5).$$

Dies ist die gesuchte Gleichung für die Ermittlung der Drillungsmomente, die für jedes Teilstück der Ersatzträger entsprechend angeschrieben werden kann. Z. B. gilt für den Trägerteil 58:

$$(14a) \quad \frac{ab}{G \cdot J''} \cdot \bar{M}'_{5,8} = \zeta_4 - \zeta_5 - \zeta_7 + \zeta_8 + \frac{a^2}{6EJ'} (M_4 + 2M_5 - M_7 - 2M_8).$$

Abgesehen von der Querkraft-Beeinflussung, auf die man keine Rücksicht zu nehmen braucht, besteht der günstige statische Einfluß der Drillungsmomente darin, daß der Unterschied der Drillungsmomente zu beiden Seiten eines gedachten Balkenstreifens einem Biegemoment des Balkens gleichkommt, d. h. durch den Unterschied der Drillungsmomente wird ein gewisser Anteil der Biegemomente des Balkens aufgenommen, so daß das Biegemoment M aus den Normalspannungen nicht mehr das gesamte Biegemoment des Ersatzbalkens aufzunehmen hat, sondern nur noch den verbleibenden Restbetrag. Für Punkt 5 des Trägers 456 in Abb. 19 beträgt z. B. die Differenz D der Drillungsmomente auf der Strecke a [(Gl. (14) und (14a)]:

$$(15a) \quad D'_5 = \bar{M}'_{2,5} - \bar{M}'_{5,8} = \frac{GJ''}{ab} [\zeta_1 - \zeta_2 - 2(\zeta_4 - \zeta_5) + \zeta_7 - \zeta_8] + \frac{a}{6b} \cdot \frac{GJ''}{EJ'} [M_1 + 2M_2 - 2(M_4 + 2M_5) + M_7 + 2M_8]$$

und entsprechend für den Träger 258 auf der Strecke b:

$$(15b) \quad D''_5 = \bar{M}'_{10,5} - \bar{M}'_{2,5} = \frac{GJ'}{ab} [\zeta_7 - \zeta_4 - 2(\zeta_8 - \zeta_5) + \zeta_9 - \zeta_6] + \frac{b}{6a} \cdot \frac{GJ'}{EJ''} [M_7 + 2M_4 - 2(M_6 + 2M_5) + M_9 + 2M_6].$$

Hierbei ist davon ausgegangen, daß in den Seitenflächen der einzelnen Ersatzbalken Schubspannungen wirken, deren Momente M genau genug den Mittelwerten nach Gl. (14) entsprechen. Für gleichbleibende Krümmung der Biegebalken gilt diese Annahme genau.

Die Werte (15) für die Drillungsmomente sind jetzt in den früheren Ansätzen (5) für die einzelnen Normalspannungsmomente als entlastende Momente einzuführen. Z. B. erhält man für M'_5 nach Abb. 21 (Ersatzträger 5678):

$$(5a) \quad M'_5 = M_5 + \varphi_5 (Q_5 - P_5) 2a + \varphi_6 (Q_6 - P_6) a - D'_5 - D''_5 - \frac{1}{2} D'_5.$$

Das ange deutete Berechnungsverfahren erscheint ganz allgemein zur Berechnung von Platten geeignet. Es ist zwar umständlicher als das Verfahren von Marcus, hat aber den Vorteil, unmittelbar auf die zunächst gesuchten Durchbiegungen ζ loszusteuern, ohne die Vorstellung eines „elastischen Gewebes“ zu benötigen.

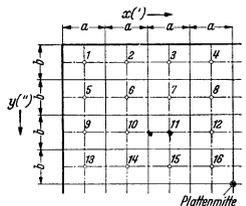


Abb. 21.

Die Einspannung der Spundwände im Baugrund.

Eine mit der Berechnung der Sohlbruck-Verteilung unter Gründungskörpern sehr verwandte Aufgabe ist die Ermittlung der Einspannungswirkung für tief gerammte Spundwände. Es ist ohne weiteres einzusehen, daß die Zusammendrückungszahl Z (oder Verdichtungszahl V) des Baugrundes hierbei die ausschlaggebende Rolle spielt; denn je stärker sich das Erdreich zusammendrücken läßt, um so weniger kann bei verankerten Spundwänden eine Einspannungswirkung zustande kommen, und um so größere Bewe-

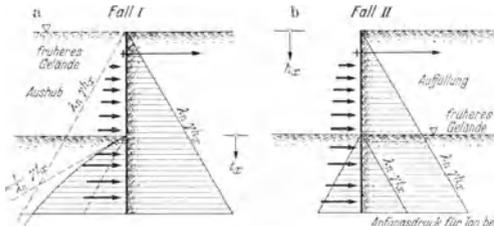


Abb. 22. Natürlicher Erddruck auf eine verankerte Spundwand vor der Bewegung. Zur Verhinderung der waagrechten Bewegung kann man sich die angedeuteten Kräfte denken, die mit zunehmender Bewegung auf Null zurückgehen.

gungen sind bei unverankerten Spundwänden erforderlich, um die zum Widerstehen notwendigen Kräfte wachzurufen. Die Zusammendrückungszahl wird aber bei den bisher meist üblichen Verfahren¹⁹ nicht berücksichtigt, und es ist deshalb dringend erforder-

Drehpunktes der Wand und die Ausdehnung der „plastischen“ Bereiche (d. s. die Wandstrecken, für die die Grenzwerthe des Erd-druckes und Erdwiderstandes in Frage kommen) vorweg nur un-sicher einzuschätzen sind. Hinzu kommt noch, daß die Form-änderungszahlen der Erde für Zusammendrückung (Belastung) und Ausdehnung (Entlastung) meistens stark voneinander verschieden sind; auch die Vorspannung des Erdreiches durch das Einrammen der Spundwand ist nicht sicher bekannt. Solange es sich nicht um außergewöhnlich tief gerammte Spundwände handelt (bei denen übrigens noch am ehesten nach dem für die Sohlbruck-Verteilung der Grundkörper vorgeschlagenen Verfahren gerechnet werden könnte), sei deshalb die nachstehende schrittweise Näherungs-ermittlung für die Verteilung der Erdspannungen längs der Ein-spannungsstrecke vorgeschlagen.

Es läßt sich übersehen, daß bei unverankerten Spund-wänden mit nicht allzu großer Biegsamkeit die Verteilung der Erdspannungen nur wenig von der absoluten Größe der Zusammen-drückungszahl abhängig ist; letztere bestimmt lediglich die Größe der Bewegung der Wand, worauf aber meistens keine Rücksicht genommen wird. Es interessiert deshalb vom praktischen Stand-punkte aus hauptsächlich nur die Ermittlung der Einspannungs-kräfte bei verankerten Spundwänden.

Auf die ursprünglich geradlinige, also zunächst noch unbelastete Spundwand wirkt zu beiden Seiten ein Druck, der um den durch das Eintreiben der Wand hinzugekommenen Druck größer ist als der natürliche Erddruck; es sei aber sicherheitsshalber nur mit dem natürlichen Erddruck gerechnet. Bei der allmählichen Belastung der Spundwand — sei es durch Abgraben der Erde vor der Spundwand (Fall I nach Abb. 22a) oder durch Erdauffüllung hinter der Spundwand (Fall II nach Abb. 22 b) — verändern sich

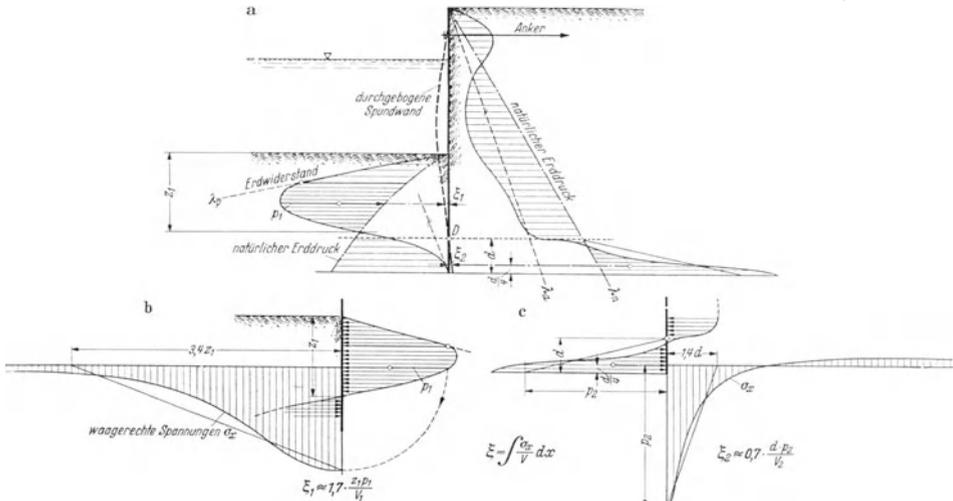


Abb. 23. Die nachgiebige Einspannung von Spundwänden.

lich, einwandfreiere Berechnungen durchzuführen, bei denen die Formänderungen des Erdreiches mit den Formänderungen der Spundwand übereinstimmen.

Eine genaue Berechnung im Sinne der vorstehenden Gedanken-gänge ist freilich bei Spundwänden schwierig, weil die Lage des

¹⁹ Siehe z. B. Lohmeyer, E.: Bautechn. 8 (1930) S. 60 oder Blum, H.: Einspannungsverhältnisse bei Bohlwerken. Berlin 1931. Neuerdings auch Jakoby, E.: Bautechn. 19 (1941) S. 88. Auf die Berechnung der Einspannungskräfte mit Hilfe von „Bettungsziffer“-Verfahren (siehe z. B. Freund, A.: Z. Bauwes. 69 (1919) S. 481 oder Rifaat, J.: Die Spundwand als Erddruckproblem. Zürich 1935) sei hier aus mehrfach genannten Gründen nicht weiter eingegangen.

die Erdspannungen im unteren Teil der Spundwand beträchtlich, wobei die Spundwand eine Bewegung ausführt, indem sie das an-grenzende Erdreich in bestimmten Bereichen etwas beiseite drückt.

Diese zur Wachrufung des Einspannungsmomentes erforder-liche seitliche Zusammendrückung des Erdreiches kann in derselben Weise berechnet werden, wie es bei der Ermittlung lotrechter Setzungen geschieht. Bei der Berechnung dieser Formänderungen dürfen selbstverständlich nur die zusätzlichen Erdspannungen an-gesetzt werden, die infolge der Belastung der Spundwand zum natürlichen Erddruck neu hinzukommen (in Abb. 23a geschrafft).

Oberhalb des Drehpunktes D ist die Verteilung des angreifen-

den Erddruckes als gegeben zu betrachten, weil die Durchbiegung der Wand nur in Ausnahmefällen nicht ausreicht, um den unteren Grenzstand eintreten zu lassen; ebenso ist vor der Spundwand unterhalb des Drehpunktes der Erddruck etwa umgekehrt dreieckförmig anzunehmen²⁰. Vor dem Fuß der Spundwand kann natürlich der Erdwiderstand nicht überschritten werden. Im übrigen kann die Verteilung der Erdspannungen im unteren Teil der Wand etwa nach Abb. 23a angenommen werden. Im Gegensatz zur Ermittlung der Sohlruck-Verteilung auf Grundkörper ist es nämlich nicht notwendig, die genaue Form der Verteilungslinie zu berechnen — was auch schwierig wäre —, es genügt schon, wenn man die Größe der widerstehenden Kräfte so ansetzt, wie es die Gleichgewichts- und Formänderungsbedingungen überschläglich erfordern. Dieser näherungsweise Ansatz der Erdspannungen ist etwa gleichbedeutend mit der Vernachlässigung der Krümmung der Biegelinie im unteren Teil der Wand.

Man geht am besten probeweise vor, indem man vorläufig eine nach Gutdünken geschätzte, die Gleichgewichtsbedingungen befriedigende Druckverteilung (einschließlich der zugehörigen Drehpunkt-lage) annimmt, hierfür sowohl die Biegelinie der Wand als auch das Nachgeben der Erde berechnet und dann nachsieht, ob die Formänderungen von Wand und Erdreich übereinstimmen. Ist das nicht der Fall, so muß die Erdspannungsverteilung solange abgeändert werden, bis die gewünschte Übereinstimmung erzielt ist. Da kleine Ungenauigkeiten keine Rolle spielen, genügt meistens schon eine zwei- oder dreimalige Wiederholung der Rechnung.

Die Biegelinie der Wand kann hierbei ohne weiteres nach bekannten Verfahren gefunden werden. Was die Formänderungen des Erdreiches anbelangt, so genügt es, die waagrechte Zusammenrückung für zwei Höhenlagen zu berechnen, die etwa durch die Schwerpunkte der in Abb. 23a eng geschrafften Spannungsflächen gegeben sind. Die Druckverteilung kann dabei genügend genau nach Abb. 23b u. c eingeschätzt werden²¹, womit sich für die seitlichen Zusammenrückungen des Erdreiches ergibt:

$$\xi_1 \approx 1,7 \cdot \frac{z_1 p_1}{V_1} \quad \text{und} \quad \xi_2 \approx 0,7 \cdot \frac{d \cdot p_2}{V_2},$$

wenn V_1 und V_2 die mittleren Verdichtungszahlen (z. B. in kg/cm^3) für die in Abb. 23 näher gekennzeichneten Schwerpunkthöhen angibt (strichpunktierte Linien, für die ξ_1 und ξ_2 ermittelt sind).

Der vorgeschlagene Ansatz der Einspannungskräfte des Erdreiches ist genauer, als es bei dem Näherungscharakter der Rechnung

zunächst erscheinen mag. Da hinsichtlich der Formänderungen grobe Widersprüche vermieden sind, können die wirklichen Kräfte nur noch wenig von den ermittelten abweichen. Besonders sei noch

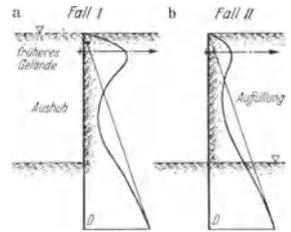


Abb. 24. Grundsätzliche Abhängigkeit der Erddruck-Verteilung von der Höhenlage der früheren Geländelinie (schematisch).

daß verschiedene Verhältnisse des Baugrundes für die beiden Fälle I und II nach Abb. 22 durch die Rechnung erfaßt wird²². Aus diesem Grunde ist das empfohlene Vorgehen bedeutend zuverlässiger als die Berechnung nach den bisherigen Verfahren, bei denen man — mit Ausnahme der Bettungsziffer-Verfahren — jeden Nachweis darüber vermisst, ob die untere Drehbewegung der Spundwand auch ausreicht, um die angesetzten Einspannungskräfte wirklich wachzurufen²³.

Eine genauere Berechnung wird möglich, wenn die seitliche Druckausbreitung eingehender verfolgt wird. Darauf komme ich an anderer Stelle zurück.

²² Im Falle I ist der natürliche Erddruck vor der Spundwand bedeutend größer als im Falle II, wodurch das Spannungsmoment größer ausfällt. Auch die Verteilung des Erddruckes ist in beiden Fällen verschieden (vgl. Abb. 24). Im Falle II ist nämlich kaum damit zu rechnen, daß der Erdwiderstand im oberen Teil der Wand erreicht wird, weil sich die Wand schon teilweise durchgebogen hat, bevor die obersten Schichten der Auffüllung eingebracht worden sind. Man erkennt jedenfalls, daß die Verhältnisse im Falle I bedeutend günstiger liegen als im Falle II, was aber bei den bisher bekannten Berechnungsverfahren unberücksichtigt bleibt.

²³ Auszunehmen ist hier ein kürzlich von H. Schütte angegebene Verfahren: Bauing. 22 (1941) S. 193 oder Jb. Hafenbautechn. Ges. 18/19 (1939/40). Schütte entnimmt den Erdwiderstandsversuchen von Franzus, „daß bei gleichartigem Boden ein gleichbleibendes, von der Wandhöhe unabhängiges Verhältnis zwischen dem Grenzwert E_p des Erdwiderstandes und der Verschiebung c_{gr} besteht, die mindestens eintreten muß, um diesen Grenzwert zu erreichen“: $E_p = v \cdot c_{gr}$ ($v =$ „Verschiebungskennwert“, durch Versuche zu ermitteln). Diese Annahme zum Kernpunkt der Ermittlung der unteren Einspannung von Spundwänden zu wählen, ist im Hinblick auf die sonst übliche Berechnung der Formänderungen von Erdkörpern sehr anfechtbar (der Widerstand des Untergrundes wird — wenn man von Versuchsdaten für den Erdwiderstand ausgeht — zu gering erhalten); es ist aber immerhin sicherer, mit Hilfe einer solchen durch Versuche gestützten Annahme die Berechnung einer Spundwand durchzuführen, als überhaupt nicht auf die Formänderungen des Untergrundes einzugehen.

²⁰ Vgl. Erddrucktheorie des Verfassers. Bautechn. 16 (1938) S. 758.

²¹ Die σ_x -Kurven sind nach Druckverteilungsformeln berechnet, auf die ich an anderer Stelle zurückkomme.