

Forschungshefte aus dem  
**Gebiete des Stahlbaues**

Herausgegeben vom  
Deutschen Stahlbau-Verband, Berlin

---

Heft 3

**Zur Berechnung stählerner Brücken  
mit gekrümmten, auf konzentrischen  
Kreisen liegenden Hauptträgern**

Von

Professor Dr. **J. Wanke**  
Prag

Mit 6 Textabbildungen



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH  
1941

Forschungshefte aus dem  
**Gebiete des Stahlbaues**

Herausgegeben vom  
Deutschen Stahlbau-Verband, Berlin

---

Heft 3

**Zur Berechnung stählerner Brücken  
mit gekrümmten, auf konzentrischen  
Kreisen liegenden Hauptträgern**

Von

Professor Dr. J. Wanke  
Prag

Mit 6 Textabbildungen



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH  
1941

ISBN 978-3-7091-5148-8      ISBN 978-3-7091-5296-6 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-7091-5296-6

**Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung  
in fremde Sprachen, vorbehalten.**

Copyright 1941 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg  
Ursprünglich erschienen bei Verlag von Julius Springer, Berlin 1941

## Vorwort.

Sowohl bei Eisenbahn- als auch bei Straßenbrücken in Krümmungen ist die Verwendung von Tragwerken mit gekrümmten Hauptträgern empfehlenswert. Die Vorteile, die diese Systeme in baulicher und schönheitlicher Hinsicht gegenüber den Ausführungen mit geraden Einzeltragwerken bieten, sind bekannt. Ihrer Anwendung steht aber oft die langwierige statische Berechnung entgegen.

In der Regel können Brücken in Krümmungen mit zwei Hauptträgern, deren Achsen auf konzentrischen Kreisen liegen, einem Windverband und gleichen Querträgerabständen ausgeführt werden. Für derartige Brücken läßt sich die Berechnung vereinfachen und durch Benützung von Tabellen weniger zeitraubend gestalten. Die gemachten Vernachlässigungen beeinflussen, wie gezeigt wird, bei statisch bestimmten Systemen das Rechenergebnis nur unbedeutend; bei Systemen mit durchlaufenden Hauptträgern ohne Gelenke fallen sie gegenüber den Fehlern, die bei der Annahme der Steifigkeitsverhältnisse gemacht werden können, nicht ins Gewicht.

Die vorliegende Arbeit entstand aus zwei Abhandlungen, die im „Stahlbau“ erscheinen sollten und wurde auf Vorschlag des Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Klöppel in die „Forschungshefte“ aufgenommen. Dem Deutschen Stahlbau-Verband, der das Erscheinen dieses Heftes mitten im Krieg ermöglichte, danke ich dafür besonders. Mein Dank gebührt auch der Verlagsbuchhandlung Julius Springer für die gewohnt gute Ausstattung.

Möge die Arbeit der Praxis gute Dienste leisten und zu einer ausgedehnteren Verwendung von Brücken mit gekrümmten Hauptträgern beitragen!

Prag, im März 1941.

**J. Wanke.**

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
<b>Einleitung</b> . . . . .	1
<b>A. Brücken mit einer Öffnung</b> . . . . .	3
I. Zusatzmomente . . . . .	4
1. Genaue Rechnung . . . . .	4
a) Die Momentenlinie der Hauptbelastung ist eine Gerade . . . . .	5
b) Die Momentenfläche der Hauptbelastung ist ein Dreieck . . . . .	5
c) Die Momentenlinie der Hauptbelastung ist eine Parabel . . . . .	6
2. Näherungsrechnung für die Belastungsfälle a) bis c) . . . . .	6
3. Tabellen zur Näherungsrechnung . . . . .	7
II. Gesamtmomente . . . . .	8
1. Einflußlinien . . . . .	8
2. Gleichmäßige Vollbelastung . . . . .	10
3. Beispiel . . . . .	11
III. Formänderungen . . . . .	12
<b>B. Brücken mit mehreren Öffnungen und durchlaufenden Hauptträgern ohne Gelenke</b> . . . . .	14
I. Die Hauptträger haben beliebig veränderliche Trägheitsmomente . . . . .	14
1. Allgemeines Berechnungsverfahren . . . . .	14
2. Gleichmäßige Vollbelastung . . . . .	18
3. Einflußlinien . . . . .	19
II. Die Trägheitsmomente der Hauptträger sind auf die Länge einer Brückenöffnung unveränderlich	21
1. Berechnung der Beiwerte der Unbekannten . . . . .	22
2. Berechnung der Belastungsgrößen bei gleichmäßiger Vollbelastung . . . . .	23
3. Berechnung der Einflußwerte der Unbekannten . . . . .	24
4. Beispiel . . . . .	25
III. Die über mehrere gleiche Öffnungen durchlaufenden Hauptträger haben auf die ganze Länge der Brücke unveränderliches Trägheitsmoment . . . . .	28
1. Aufstellung der simultanen Differenzgleichungen und ihre Lösung im allgemeinen . . . . .	28
2. Gleichmäßige Vollbelastung . . . . .	29
3. Einflußlinien der Unbekannten . . . . .	30
4. Beispiel . . . . .	31
<b>Schlußbetrachtung</b> . . . . .	33

## Einleitung.

Unter den Brücken mit gekrümmten Hauptträgern spielen die Systeme, deren Hauptträgerachsen in einer Ebene — waagrecht oder geneigt — auf konzentrischen Kreisen liegen, eine verhältnismäßig große Rolle. Namentlich in den letzten Jahren ist eine Reihe solcher Brücken ausgeführt worden, wobei man sich durchweg mit einer bereits 1914 von Kapsch<sup>1</sup> angegebenen näherungsweise Berücksichtigung des Einflusses der Krümmung begnügte. Über die genaue Berechnung derartiger Brücken mit einem Windverband und Zwischenquerverbänden oder zwei Wind- und zwei Endquerverbänden liegen schon einige Arbeiten vor<sup>2</sup>. In allgemeinsten Form ist das Problem der statisch bestimmten räumlich gekrümmten Stahlbrücken mit einem Windverband von E. Kühl unter der Annahme behandelt worden, daß die Hauptträger polygonal mit Querträgeranschlüssen in den Eckpunkten ausgeführt sind<sup>3</sup>.

Die genaue Berechnung solcher statisch bestimmten Raumsysteme führt zu Viermomentengleichungen mit je drei aufeinanderfolgenden Momenten des einen und einem Moment des andern Hauptträgers. Sie lassen sich zu zwei Systemen von Gleichungen umformen, in denen im allgemeinen je fünf aufeinanderfolgende Momente eines Hauptträgers vorkommen. Die Auflösung der Viermomentengleichungen vereinfacht sich, wenn man, wie Stüssi vorschlägt, die Summe und die Differenz gegenüberliegender Momente der beiden Hauptträger als neue Unbekannte einführt; man erhält so zwei Systeme dreigliedriger Gleichungen, die nacheinander gelöst werden können<sup>4</sup>. Zu einfachen Dreimomentengleichungen gelangt man, wenn, wie gezeigt werden wird, die Gesamtmomente der Hauptträger in die Momente der geraden Träger (Momente der Hauptbelastung) und die von der Krümmung herrührenden Zusatzmomente zerlegt und letztere getrennt berechnet werden. Bei radial gestellten Querträgern und gleicher Felderteilung lassen sich für die Zusatzmomente geschlossene Lösungen der Differenzgleichungen zweiter Ordnung angeben.

Diese genaue Berechnung ist zeitraubend, da sie für jede Laststellung vorgenommen und infolge der starken Fehlerempfindlichkeit mit größerer Stellenzahl als sonst üblich durchgeführt werden muß. Man kann sich aber bei einer für die Praxis ausreichenden Genauigkeit mit einer Näherungsrechnung begnügen, die die Zusatzmomente in einfacher Weise als Vielfache der Momente des geraden Balkens liefert, auf den in den Querträgeranschlußpunkten die Momente der Hauptbelastung der beiden Hauptträger wirken. Für den Regelfall gleicher Felderteilung erhält man dabei Lösungen, die aus zwei Faktoren bestehen, von denen der eine von den Krümmungsverhältnissen, der andere von Momenten- und Lastort unabhängig ist. Der erstere kann, wie für den geraden Träger, in Tabellen zusammengestellt werden, der letztere drückt den Einfluß von Feldweite, Brückenbreite und Krümmungshalbmesser aus und ist im konkreten Falle eine Konstante. Mit diesen Tabellenwerten und den ebenfalls von der Krümmung unabhängigen, in Tabellenform gebrachten Momenten der Hauptbelastung sind die Gesamtmomente leicht und rasch zu ermitteln.

<sup>1</sup> Kapsch: Die Eisenkonstruktionen der Viadukte und Brücken der Hamburger Hochbahn. Dtsch. Bauztg. 1914, S. 591.

<sup>2</sup> Gottfeld, H.: Die Berechnung räumlich gekrümmter Stahlbrücken. Bautechn. Bd. 10 (1932) S. 715. Einflußlinien für räumlich gekrümmte Stahlbrücken. Stahlbau Bd. 6 (1933) S. 57. — Melan, J.: Zur Berechnung räumlich gekrümmter Stahlbrücken. Bauingenieur Bd. 14 (1933) S. 463. — Fuchs, G. A.; Kinematische Ermittlung der Einflußlinien gekrümmter Brücken. Stahlbau Bd. 10 (1937) S. 37. — Während der Drucklegung erschien Melan, E.: Die Berechnung gekrümmter Blechträgerbrücken. Stahlbau Bd. 13 (1940) S. 121.

<sup>3</sup> Kühl, E.: Über die Berechnung räumlich gekrümmter Stahlbrücken. Bauingenieur Bd. 18 (1937) S. 160.

<sup>4</sup> Stüssi, F.: Zur Berechnung von Stahlbrücken mit gekrümmten Hauptträgern. Denkschrift der ETH zum hundertjährigen Bestehen des SIA. Zürich 1937.

Während bei den Brücken über eine Öffnung die Zusatzmomente bei gegebener Felderzahl außer von der Belastungsart nur von den Krümmungsverhältnissen (Feldweite, Brückenbreite und Krümmungshalbmesser) abhängen, führt die genaue Berechnung der statisch unbestimmten gekrümmten Brücken mit durchlaufenden gelenklosen Hauptträgern zu simultanen Differenzgleichungen zweiter Ordnung, deren Beiwerte und Belastungsglieder Formänderungsgrößen des Raumtragwerks sind und somit von den Steifigkeitsverhältnissen der Hauptträger und Querverbände beeinflußt werden. Diese Berechnung ist sehr langwierig, so daß man sich bis in die letzte Zeit noch meist damit begnügte, die Hauptträger als ebene durchlaufende Träger zu berechnen und den Einfluß der Krümmung näherungsweise nach dem von Kapsch beschriebenen Verfahren zu berücksichtigen. Da aber so die statisch Überzähligen mit Außerachtlassung der Abhängigkeit der Formänderungen von den Krümmungsverhältnissen bestimmt werden, muß eine solche Berechnungsweise zu beträchtlichen, im einzelnen nicht abschätzbaren Abweichungen von den tatsächlichen Werten führen; zudem ist zu beachten, daß mit der Änderung der Momente durch die Krümmung auch die jeweils ungünstigste Laststellung sich ändert.

Die genaue Berechnung ist daher, außer bei Brücken mit sehr großen Krümmungshalbmessern, nicht zu umgehen. Diese aber ist, wenn sie in der bisher bekannten Weise durchgeführt wird, infolge der außerordentlich großen Zahl von Produkt- und Summenbildungen sehr zeitraubend und birgt zahlreiche Fehlerquellen.

Während die früher genannten Verfasser von Aufsätzen, die das Problem der durchlaufenden gekrümmten Brücken ohne Gelenke behandeln, sich mit dem erforderlichen großen Zeitaufwand abfinden oder es bei der Aufstellung der Bestimmungsgleichungen der Unbekannten bewenden lassen, wird in dieser Arbeit das für Brücken über eine Öffnung aufgestellte Verfahren auch zur Berechnung durchlaufender Brücken verwendet und so — ähnlich wie dort — die für die Praxis erwünschte Vereinfachung der Rechenarbeit erzielt. Durch Zerlegung der Momente in eine Konstante, in der die Krümmungsverhältnisse berücksichtigt sind, und eine Veränderliche, die bei bestimmter Felderzahl und Belastung nur vom Bezugsort abhängig ist, werden bei der Berechnung der Formänderungsgrößen — Beiwerte und Belastungsglieder in den Bestimmungsgleichungen der Unbekannten — Teilsommen gebildet, die sich für bestimmte Felderzahlen in Tabellen zusammenfassen lassen. Ähnliche Teilsommen, die für die einzelnen Knotenpunkte einer Öffnung in Tabellen zusammengestellt sind oder sich ein für allemal ermitteln lassen, können zur Berechnung der Einflußlinien der Unbekannten verwendet werden.

Durch geeignete Gruppenzusammenfassung der unbekannt Stützenmomente gelingt es, die Bestimmungsgleichungen zu vereinfachen und die Beiwerte der Unbekannten so abzustimmen, daß die Gleichungen auch durch Iteration gelöst werden können. Die Anwendung dieses Verfahrens ist auch bei gleichen Öffnungen mit unveränderlichem Trägheitsmoment der Hauptträger möglich. Da aber in diesem Falle die Beiwerte unveränderlich sind und daher geschlossene Lösungen der simultanen Differenzgleichungen zweiter Ordnung angegeben werden können, empfiehlt es sich, bei größerer Zahl der Brückenöffnungen, diese Lösungen auszuwerten.

## A. Brücken mit einer Öffnung.

Die Hauptträger werden im Grundriß nach Polygonen geformt angenommen, deren Eckpunkte auf konzentrischen Kreisen mit den Halbmessern  $r^a$  und  $r^i$  liegen (Abb. 1). Die bei allfälliger stetiger Krümmung entstehenden zusätzlichen Verdrehungsbeanspruchungen werden vernachlässigt. Das aus den zwei Hauptträgern, einem Windverband und radial gestellten einfachen Querverbänden bestehende Raumtragwerk mit vier Lagern ist für lotrechte Belastung stets statisch bestimmt. Wenn es auch für waagerechte Kräfte statisch bestimmt gelagert sein soll, dürfen nur drei waagerechte Auflagerkräfte hinzukommen, eine Forderung, die baulich erfüllt werden kann, wenn sie auch eine Erschwerung bedeutet.

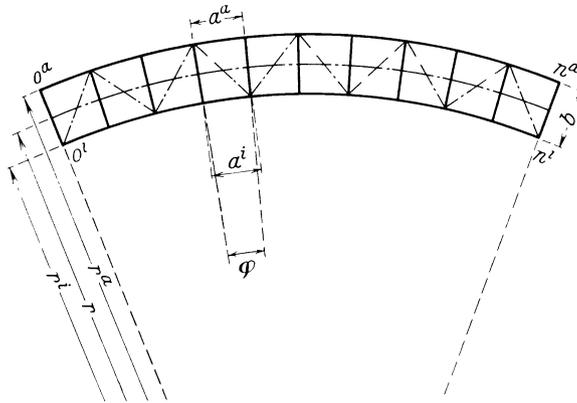


Abb. 1.

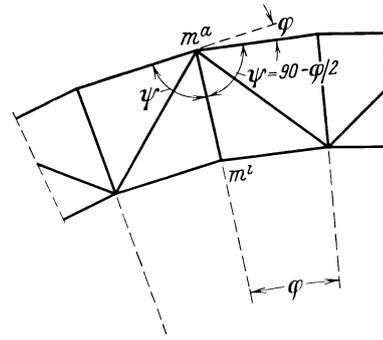


Abb. 2.

Waagerechte Kräfte, die in der Ebene des Windverbandes wirken, beanspruchen die Hauptträger nur insoweit, als Teile derselben zum Windverband gehören. Dagegen erzeugen außerhalb der Windverbandebene angreifende waagerechte Kräfte in den beiden Hauptträgern gleich große entgegengesetzt gerichtete Zusatzlasten; bei den durch diese Belastung hervorgerufenen Hauptträgermomenten ist aber, wie leicht nachzuweisen ist, der Einfluß der Krümmung gering. Wir beschränken uns deshalb bei der folgenden Untersuchung vorerst auf die Wirkung der lotrechten Kräfte.

Da zur Bestimmung der vier lotrechten Auflagerkräfte nur drei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stehen, können sie im allgemeinen nicht unmittelbar berechnet werden. Man muß deshalb vom Gleichgewicht in den Knickpunkten der Hauptträger, die zugleich Knotenpunkte des Windverbandes sind, ausgehen. Für eine Last  $P_m^a$  im Punkte  $m^a$  bzw.  $P_m^i$  im Punkte  $m^i$  lauten diese Bedingungen mit den Bezeichnungen der Abb. 2 (nach Kühl):

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & M_m^a = M_{m-1}^a + V_{m-1}^a a^a, \\
 (2) \quad & V_m^a = V_{m-1}^a - \frac{\sin \varphi}{b \cdot \cos \varphi/2} \cdot (M_m^a + M_m^i) - P_m^a, \\
 (1a) \quad & M_m^i = M_{m-1}^i + V_{m-1}^i a^i, \\
 (2a) \quad & V_m^i = V_{m-1}^i + \frac{\sin \varphi}{b \cdot \cos \varphi/2} \cdot (M_m^a + M_m^i) - P_m^i.
 \end{aligned}$$

Dabei bedeuten

- $M_m^a$  das Moment des äußeren Trägers unmittelbar links vom Knoten  $m^a$ ,
- $V_m^a$  die Querkraft des äußeren Trägers zwischen den Knoten  $m^a$  und  $m_{m+1}^a$ ,
- $P_m^a$  die lotrechte Belastung im Knotenpunkt  $m^a$ .

Bei den ähnlichen Bezeichnungen des inneren Trägers ist der Zeiger  $a$  durch  $i$  ersetzt.

Wie aus Abb. 1 hervorgeht, ist  $\sin \varphi/2 = \frac{a}{2r}$ ; somit wird

$$(3) \quad \frac{\sin \varphi}{b \cdot \cos \varphi/2} = \frac{2 \sin \varphi/2}{b} = \frac{a}{br}.$$

Für den geraden Träger mit gleichen Feldweiten  $a$  bestehen bekanntlich zwischen den Momenten und Querkräften folgende Beziehungen:

$$(4) \quad M_m = M_{m-1} + V_{m-1} \cdot a,$$

$$(5) \quad V_m = V_{m-1} - P_m.$$

Der Vergleich mit (1) und (2) bzw. (1a) und (2a) läßt erkennen, daß man die Momente des eckig gekrümmten Trägers wie die des geraden Trägers gleicher Länge berechnen kann, wenn man in den Punkten  $m$  zusätzliche Knotenlasten  $\pm \frac{a}{br} (M_m^a + M_m^i)$  aufbringt, wobei das obere Vorzeichen für den äußeren, das untere für den inneren Träger gilt. Die genaue direkte Bestimmung der Momente  $M_m$  führt zu fünfgliedrigen Gleichungen oder einem zweistufigen Berechnungsverfahren mit dreigliedrigen Gleichungen auf jeder Stufe. Einfacher ist es, die Momente der Hauptbelastung ( $\mathfrak{M}$ ) und der Zusatzlasten ( $\mu$ ) getrennt zu ermitteln:

$$(6) \quad \begin{cases} M_m^a = \mathfrak{M}_m^a + \mu_m^a, \\ M_m^i = \mathfrak{M}_m^i - \mu_m^i. \end{cases}$$

Die Hauptbelastung ist bekannt, die Größe der Zusatzlasten hängt von den erst zu bestimmenden Momenten  $M_m$  ab.

## I. Zusatzmomente.

### 1. Genaue Rechnung.

Wird der Hauptträger einer geraden Brücke nur in den Querträgeranschlußpunkten belastet, so besteht bekanntlich zwischen den Momenten in drei aufeinanderfolgenden Knotenpunkten die folgende aus (4) und (5) hergeleitete Beziehung (Querkräftgleichung):

$$(7) \quad M_{m-1} - 2M_m + M_{m+1} = -P_m a.$$

Somit gilt die gleiche Beziehung auch für die Momente  $\mu_m$  und die Zusatzlast im Knoten  $m$  eines Trägers mit der Stützweite  $n \cdot a$ :

$$(8) \quad \mu_{m-1} - 2\mu_m + \mu_{m+1} = -\frac{a^2}{br} (M_m^a + M_m^i).$$

Da die Zusatzlasten an den beiden Hauptträgern mit den Feldweiten  $a \frac{ra}{r}$  bzw.  $a \frac{ri}{r}$  wirken, sind die bezüglichen Momente:

$$(9) \quad \begin{cases} \mu_m^a = \frac{ra}{r} \mu_m, \\ \mu_m^i = -\frac{ri}{r} \mu_m. \end{cases}$$

Mit  $\overline{\mathfrak{M}}_m = \mathfrak{M}_m^a + \mathfrak{M}_m^i$  folgt aus (6) und (9)

$$(10) \quad M_m^a + M_m^i = \overline{\mathfrak{M}}_m + \frac{b}{r} \mu_m.$$

Führt man weiter die abkürzenden Bezeichnungen

$$p = 2 - \frac{a^2}{r^2},$$

$$q = \frac{a^2}{br}$$

ein, so nimmt die Bestimmungsgleichung der  $\mu$  folgende Gestalt an:

$$(11) \quad \mu_{m-1} - p \mu_m + \mu_{m+1} = -q \overline{\mathfrak{M}}_m.$$

Da die Wurzeln der charakteristischen Gleichung  $k^2 - pk + 1 = 0$  komplex sind, ist die Lösung der homogenen Gleichung

$$(12) \quad \mu_m^0 = C_1 \cos m \varphi + C_2 \sin m \varphi,$$

wobei  $\varphi$  zu bestimmen ist aus

$$(13) \quad \cos \varphi = \frac{p}{2} = 1 - \frac{a^2}{2r^2}.$$

Das die partikuläre und damit auch die vollständige Lösung bestimmende Belastungsglied hängt von der Form der  $\overline{\mathfrak{M}}$ -Linie ab.

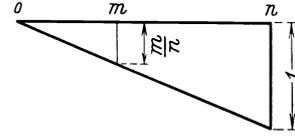
a) Die Momentenlinie der Hauptbelastung ist eine Gerade:  $\overline{\mathfrak{M}} = \frac{m}{n}$  (Abb. 3).

$$(11a) \quad \mu_{m-1} - p\mu_m + \mu_{m+1} = -q \frac{m}{n}.$$

Eine zugehörige partikuläre Lösung hat die Form  $A m + B$ . Durch Einsetzen in (11a) findet man die Konstanten

$$A = \frac{-q}{n(2-p)} = -\frac{r}{bn},$$

$$B = 0$$



und damit die vollständige Lösung

$$(14) \quad \mu_m = C_1 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi - \frac{r}{bn} m. \quad \text{Abb. 3.}$$

Die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  ergeben sich aus den Bedingungen  $\left. \begin{matrix} m=0 \\ m=n \end{matrix} \right\} \mu = 0$  mit

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{r}{b \sin n\varphi},$$

somit ist

$$(15) \quad \mu_m = \frac{r}{b} \left[ \frac{\sin m\varphi}{\sin n\varphi} - \frac{m}{n} \right].$$

Die von der Zusatzbelastung herrührenden Auflagerkräfte berechnen sich aus den Momenten  $\mu_1$  und  $\mu_{n-1}$ .

$$(16) \quad \begin{cases} A = \frac{\mu_1}{a} = \frac{r}{ab} \left[ \frac{\sin \varphi}{\sin n\varphi} - \frac{1}{n} \right], \\ B = \frac{\mu_{n-1}}{a} = \frac{r}{ab} \left[ \frac{\sin(n-1)\varphi}{\sin n\varphi} - \frac{n-1}{n} \right]. \end{cases}$$

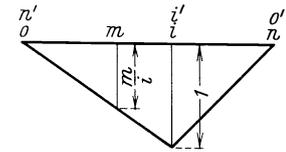


Abb. 4a.

b) Die Momentenfläche der Hauptbelastung ist ein Dreieck (Abb. 4a).

$$\overline{\mathfrak{M}} = \frac{m}{i} \cdots m \leq i,$$

$$\overline{\mathfrak{M}} = \frac{m'}{i'} \cdots m' \leq i',$$

$$(11b) \quad \mu_{m-1} - p\mu_m + \mu_{m+1} = \begin{cases} -q \frac{m}{i} \cdots m \leq i \\ -q \frac{m'}{i'} \cdots m' \leq i'. \end{cases}$$

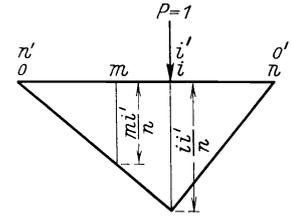


Abb. 4b.

Das Belastungsglied läßt erkennen, daß die  $\mu$ -Linie sich aus zwei Teilen entsprechend (14) zusammensetzt:

$$(17) \quad \begin{cases} \mu_{im} = C_1 \cos m\varphi + C_2 \sin m\varphi - \frac{r}{b} \frac{m}{i}, \\ \mu_{im'} = C_3 \cos m'\varphi + C_4 \sin m'\varphi - \frac{r}{b} \frac{m'}{i'}. \end{cases}$$

Aus den Randbedingungen  $\left. \begin{matrix} m=0 \\ m'=0 \end{matrix} \right\} \mu = 0$  folgt  $C_1 = C_3 = 0$ ; die übrigen Konstanten ergeben sich aus den Übergangsbedingungen für den Punkt  $i$ :

$$(18) \quad \begin{cases} \text{Querkraftsgleichung } \mu_{i-1} - p\mu_i + \mu_{i+1} = -q, \\ \text{Momentengleichung } \mu_i = \mu_{i'}, \end{cases}$$

die mit  $\mu$  aus (17) wie folgt lauten:

$$(19) \quad \begin{cases} C_2 [\sin(i-1)\varphi - p \sin i\varphi] + C_4 \sin(i'-1)\varphi = -\frac{r}{b} \frac{n}{i i'}, \\ C_2 \sin i\varphi - C_4 \sin i'\varphi = 0. \end{cases}$$

Nach entsprechender Umformung erhält man schließlich die Konstanten

$$(20) \quad \begin{cases} C_2 = \frac{r}{b} \frac{n}{i i'} \cdot \frac{\sin i'\varphi}{\sin \varphi \sin n\varphi}, \\ C_4 = \frac{r}{b} \frac{n}{i i'} \cdot \frac{\sin i\varphi}{\sin \varphi \sin n\varphi}, \end{cases}$$

$$(21) \quad \begin{cases} \mu_{im} = \frac{r}{b} \left[ \frac{n}{i i'} \frac{\sin i' \varphi \sin m \varphi}{\sin \varphi \sin n \varphi} - \frac{m}{i} \right] \cdots m \leq i, \\ \mu_{im'} = \frac{r}{b} \left[ \frac{n}{i i'} \frac{\sin i \varphi \sin m' \varphi}{\sin \varphi \sin n \varphi} - \frac{m'}{i'} \right] \cdots m' \leq i'. \end{cases}$$

Die zugehörigen Auflagerkräfte sind

$$(22) \quad \begin{cases} A_{i\mu} = \frac{r}{ab} \left[ \frac{n}{i i'} \frac{\sin i' \varphi}{\sin n \varphi} - \frac{1}{i} \right], \\ B_{i\mu} = \frac{r}{ab} \left[ \frac{n}{i i'} \frac{\sin i \varphi}{\sin n \varphi} - \frac{1}{i'} \right]. \end{cases}$$

Handelt es sich bei der  $\overline{\mathfrak{M}}$ -Linie um die Momentenlinie eines einfachen Balkens mit der Stützweite  $n \cdot a$ , der im Punkte  $i$  durch  $P = 1$  belastet wird (Abb. 4b), so sind die zugehörigen Zusatzmomente gleich den  $\frac{i i'}{n} \cdot a$ -fachen Werten (21).

$$(23) \quad \begin{cases} \mu_{im} = \frac{ar}{b} \left[ \frac{\sin i' \varphi \sin m \varphi}{\sin \varphi \sin n \varphi} - \frac{i'}{n} \cdot m \right], \\ \mu_{im'} = \frac{ar}{b} \left[ \frac{\sin i \varphi \sin m' \varphi}{\sin \varphi \sin n \varphi} - \frac{i}{n} \cdot m' \right]. \end{cases}$$

In gleicher Weise sind auch die Auflagerkräfte nach (22) zu vergrößern.

c) Die Momentenlinie der Hauptbelastung ist eine Parabel (Momente eines einfachen Balkens für gleichmäßige Vollbelastung mit  $g/m$ ).

$$(11c) \quad \begin{aligned} \overline{\mathfrak{M}} &= \frac{1}{2} g a^2 m (n - m) = k m m', \\ \mu_{m-1}^g - p \mu_m^g + \mu_{m+1}^g &= -k q m m'. \end{aligned}$$

Die Konstanten der partikulären Lösung  $A m^2 + B m + C$  findet man durch Einsetzen in (11c) und Vergleichen gleicher Potenzen von  $m$ . Damit ist die vollständige Lösung

$$(24) \quad \mu_m^g = C_1 \cos m \varphi + C_2 \sin m \varphi - \frac{r}{b} k m (n - m) + 2 \left( \frac{r}{a} \right)^2,$$

die mit den aus den Randbedingungen  $\left. \begin{matrix} m=0 \\ m=n \end{matrix} \right\} \mu = 0$  erhaltenen Konstanten  $C_1 = \frac{2r}{b} k$  und  $C_2 = C_1 \frac{1 - \cos n \varphi}{\sin n \varphi}$  nach Umformung der Winkelfunktionen übergeht in

$$(25) \quad \mu_m^g = \frac{r}{b} k \left[ \frac{\sin m \varphi / 2 \sin m' \varphi / 2}{\sin^2 \varphi / 2 \cos n \varphi / 2} - m m' \right]$$

und die zugehörigen Auflagerkräfte sind

$$(26) \quad A_\mu^g = B_\mu^g = \frac{r}{ab} k \left[ \frac{\operatorname{tg} n \varphi / 2}{\operatorname{tg} \varphi / 2} - n \right].$$

Die aus (6) und (9) zusammengesetzten Gesamtmomente  $M_m^a$  und  $M_m^i$  stimmen mit den bezüglichen Werten der in der Fußnote 2, S. 1, an erster Stelle genannten Arbeit überein; sie wurden hier einfacher hergeleitet.

## 2. Näherungsrechnung für die Belastungsfälle a) bis c)!

Den genauen Lösungen haftet der Nachteil an, daß sie die Differenzen zweier fast gleicher Zahlenwerte enthalten, so daß die Rechnung sehr fehlerempfindlich ist und mit einer größeren Stellenzahl als sonst üblich durchgeführt werden muß. Bei kleinem Krümmungsradius bzw. ungünstigem Verhältnis  $a/r$  empfiehlt es sich auch,  $\varphi$  stets aus (13) oder  $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{a}{2r}$  genau zu bestimmen, da der Näherungswert  $\varphi = \frac{a}{r}$  zu Ungenauigkeiten führen kann, die das Ergebnis unbrauchbar machen.

Es ist deshalb die folgende, in der Regel genügend genaue Näherungsrechnung vorzuziehen. Der von den Zusatzmomenten herrührende Teil des Belastungsgliedes (10) ist im allgemeinen

so klein, daß er vernachlässigt werden kann. Dann wird  $p = 2$  und die neue Bestimmungsgleichung der  $\mu$  lautet:

$$(27) \quad \mu_{m-1} - 2\mu_m + \mu_{m+1} = -q \overline{\mathfrak{M}}.$$

Der Vergleich mit (7) zeigt, daß die Zusatzmomente  $\mu$  als Momente eines Trägers mit der Stützweite  $l = n \cdot a$  und den Knotenlasten  $\frac{a}{b r} \overline{\mathfrak{M}}_m$  berechnet werden können. Diese Momente lassen sich auch in geschlossener Form als Lösungen der Differenzgleichung (27) darstellen. Da die charakteristische Gleichung die Doppelwurzel 1 hat, ist die Lösung der homogenen Gleichung

$$(12a) \quad \mu_m^0 = C_1 + C_2 m.$$

Die vollständige Lösung ist wieder abhängig von der Form des Belastungsgliedes  $q \overline{\mathfrak{M}}$ . Die Konstanten bestimmen sich aus den gleichen Bedingungen wie bei den Lösungen von (11).

$$a) \quad \overline{\mathfrak{M}} = \frac{m}{n}:$$

$$(14a) \quad \mu_m = C_1 + C_2 m - \frac{q}{6} \frac{m^3}{n},$$

$$(15a) \quad \mu_m = \frac{q}{6} \left[ n m - \frac{1}{n} m^3 \right] = \frac{q}{6} \alpha_m,$$

$$(16a) \quad \begin{cases} A_\mu = \frac{q}{6a} \frac{n^2 - 1}{n}, \\ B_\mu = \frac{q}{6a} \frac{(n-1)(2n-1)}{n}. \end{cases}$$

$$b) \quad \overline{\mathfrak{M}} = \begin{cases} \frac{m}{i} \cdots m \leq i \\ \frac{m'}{i'} \cdots m' \leq i' \end{cases}$$

$$(17a) \quad \begin{cases} \mu_{im} = C_1 + C_2 m - \frac{q}{6} \frac{m^3}{i}, \\ \mu_{im'} = C_3 + C_4 m' - \frac{q}{6} \frac{m'^3}{i'}. \end{cases}$$

$$(21a) \quad \begin{cases} \mu_{im} = \frac{q}{6} \left[ \left( n + i' + \frac{1}{i} \right) m - \frac{1}{i} m^3 \right] = \frac{q}{6} \beta_{im}, \\ \mu_{im'} = \frac{q}{6} \left[ \left( n + i + \frac{1}{i'} \right) m' - \frac{1}{i'} m'^3 \right] = \frac{q}{6} \beta_{im'}. \end{cases}$$

$$(22a) \quad \begin{cases} A_{i\mu} = \frac{q}{6a} (n + i'), \\ B_{i\mu} = \frac{q}{6a} (n + i). \end{cases}$$

$$c) \quad \overline{\mathfrak{M}} = k m (n - m):$$

$$(24a) \quad \mu_m^g = C_1 + C_2 m + \frac{q}{12} k m^2 (m^2 - 2 n m - 1),$$

$$(25a) \quad \mu_m^g = \frac{q}{12} k [n (n^2 + 1) m - (1 + 2 n m - m^2) m^2] = \frac{q k}{12} \gamma_m,$$

$$(26a) \quad A_\mu^g = B_\mu^g = \frac{q}{12a} k n (n^2 - 1).$$

### 3. Tabellen zur Näherungsrechnung.

Die Näherungsrechnung bietet außer einfacheren Formeln noch den Vorteil, daß die Klammerausdrücke der  $\mu$  von Feldweite, Brückenbreite und Krümmungshalbmesser unabhängig sind und daher für bestimmte Felderzahlen in Tabellen zusammengestellt werden

können. Für die Auswertung empfiehlt es sich, die Klammerausdrücke  $\alpha_m$ ,  $\beta_{im}$  und  $\gamma_m$  auf eine Form zu bringen ähnlich den bekannten  $\omega$ -Werten Müller-Breslaus:

$$(15b) \quad \alpha_m = n^2 \left[ \frac{m}{n} - \left( \frac{m}{n} \right)^3 \right],$$

$$(21b) \quad \beta_{im} = \left( 2nm + \frac{m}{i} \right) - i^2 \left[ \frac{m}{i} + \left( \frac{m}{i} \right)^3 \right],$$

$$(25b) \quad \gamma_m = n^2 \left[ \frac{m}{n} - \left( \frac{m}{n} \right)^2 \right] + n^4 \left[ \frac{m}{n} + \left( \frac{m}{n} \right)^4 - 2 \left( \frac{m}{n} \right)^3 \right].$$

Die folgenden Tabellen sind für die gebräuchlichsten Felderzahlen 8 und 10 berechnet.

		$\alpha_m$ .								
$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
8	7,875	15,000	20,625	24,000	24,375	21,000	13,125	—	—	
10	9,900	19,200	27,300	33,600	37,500	38,400	35,700	28,800	17,100	

		$i i' \beta_{im}$ für $n = 8$ .						
$i \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	
1	105	168	195	192	165	120	63	
2	168	300	360	360	312	228	120	
3	195	360	465	480	423	312	165	
4	192	360	480	528	480	360	192	
5	165	312	423	480	465	360	195	
6	120	228	312	360	360	300	168	
7	63	120	165	192	195	168	105	

		$i i' \beta_{im}$ für $n = 10$ .								
$i \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	171	288	357	384	375	336	273	192	99	
2	288	528	672	732	720	648	528	372	192	
3	357	672	903	1008	1005	912	747	528	273	
4	384	732	1008	1176	1200	1104	912	648	336	
5	375	720	1005	1200	1275	1200	1005	720	375	
6	336	648	912	1104	1200	1176	1008	732	384	
7	273	528	747	912	1005	1008	903	672	357	
8	192	372	528	648	720	732	672	528	288	
9	99	192	273	336	375	384	357	288	171	

		$\gamma_m$ .								
$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
8	504	924	1200	1296	1200	924	504	—	—	
10	990	1872	2562	3000	3150	3000	2562	1872	990	

## II. Gesamtmomente.

### 1. Einflußlinien.

Die Gesamtmomente  $M$  ergeben sich, wie bereits erwähnt, nach (6) unter Berücksichtigung von (9) aus den Momenten  $\mathfrak{M}$  der Hauptbelastung und den Zusatzmomenten  $\mu$ . Die Größtmomente in einem bestimmten Punkte eines Hauptträgers können genau nur mittels Einflußlinien bestimmt werden, da nur so die ungünstigsten Laststellungen gefunden werden können. Diese sind für den äußeren und inneren Hauptträger verschieden.

Eine Last  $P = 1$  im Punkte  $i$  des äußeren Hauptträgers erzeugt in diesem Träger Momente

$$\mathfrak{M}_m^a = \overline{\mathfrak{M}}_m = \frac{r^a}{r} \frac{a i'}{n} \cdot m \dots m \leq i.$$

Die zugehörigen genauen Zusatzmomente  $\mu_m$  entsprechen den  $r^a/r$ -fachen Werten (23); somit sind die Gesamtmomente

$$(28) \quad \begin{cases} M_m^{aa} = \frac{a r a}{r} \left[ \frac{i'}{n} m + \frac{r a}{b} \left( \frac{\sin i' \varphi \sin m \varphi}{\sin \varphi \sin n \varphi} - \frac{i'}{n} m \right) \right], \\ = \frac{a r a}{b r} \left[ r^a \frac{\sin i' \varphi \sin m \varphi}{\sin \varphi \sin n \varphi} - r^i \frac{i'}{n} m \right], \\ M_m^{ia} = -\frac{a r a r i}{b r} \left[ \frac{\sin i' \varphi \sin m \varphi}{\sin \varphi \sin n \varphi} - \frac{i'}{n} m \right]. \end{cases}$$

In diesen Ausdrücken sind  $i'$  und  $m$  vertauschbar; sie stellen also auch die Einflußwerte des Momentes im Punkte  $i$  dar, und zwar für die Punkte  $m \leq i$ , also den linken Teil der Einflußlinie. Den rechten Ast ( $M_m^{aa}$  und  $M_m^{ia}$ ) erhält man dadurch, daß man  $i'$  durch  $i$  und  $m$  durch  $m'$  ersetzt.

In ähnlicher Weise ergeben sich die Einflußlinien für den inneren Träger:

$$(29) \quad \begin{cases} M_m^{ai} = \frac{a}{b} \frac{r a r i}{r} \left[ \frac{\sin i' \varphi \sin m \varphi}{\sin \varphi \sin n \varphi} - \frac{i'}{n} m \right] = -M_m^{ia}, \\ M_m^{ii} = \frac{a r i}{b r} \left[ r^a \frac{i'}{n} m - r^i \frac{\sin i' \varphi \sin m \varphi}{\sin \varphi \sin n \varphi} \right]. \end{cases}$$

Der zweite obere Zeiger der Momente gibt jeweils an, auf welchem Träger die Last steht.

Die Einflußlinien der Auflagerdrücke  $A_a$  und  $A_i$  des äußeren und inneren Trägers können aus den Momenteneinflußlinien für die Punkte  $1^a$  und  $1^i$  hergeleitet werden. Die bezüglichen Einflußwerte im Punkt  $i$  sind:

$$(30) \quad \begin{cases} A_a^a = \frac{1}{a^a} M_1^{aa} = \frac{1}{b} \left[ r^a \frac{\sin i' \varphi}{\sin n \varphi} - r^i \frac{i'}{n} \right], \\ A_a^i = \frac{1}{a^a} M_1^{ai} = \frac{r^i}{b} \left[ \frac{\sin i' \varphi}{\sin n \varphi} - \frac{i'}{n} \right], \end{cases}$$

$$(31) \quad \begin{cases} A_i^a = \frac{1}{a^i} M_1^{ia} = -\frac{r a}{b} \left[ \frac{\sin i' \varphi}{\sin n' \varphi} - \frac{i'}{n} \right] = -\frac{r a}{r^i} A_a^i, \\ A_i^i = \frac{1}{a^i} M_1^{ii} = \frac{1}{b} \left[ r^a \frac{i'}{n} - r^i \frac{\sin i' \varphi}{\sin n \varphi} \right]. \end{cases}$$

Für  $i' = n$  ist  $A_a^a = A_i^i = 1$  und  $A_a^i = A_i^a = 0$ . Bei den Bezeichnungen der Auflagerdrücke deuten die oberen Zeiger  $a$  bzw.  $i$  an, daß die Last am äußeren bzw. inneren Träger wirkt.

In gleicher Weise ergeben sich aus (1) und (1a) auch die Einflußlinien der Querkräfte.

Führt man für die Zusatzmomente statt der Ausdrücke (23) deren in der Regel genügend genauen Näherungswerte  $\frac{i'}{n} a \cdot \mu_{im}$  aus (21a) und  $\mathfrak{M}_{im} = \begin{cases} i' m \dots m \leq i \\ i m' \dots m' \leq i' \end{cases}$  ein, so erhält man für die Einflußlinien der Momente und Auflagerdrücke

$$(28a) \quad \begin{cases} M_m^{aa} = \frac{a r a}{n r} \left[ \mathfrak{M}_{im} + \frac{r a q}{r 6} i i' \beta_{im} \right], \\ M_m^{ia} = -\frac{a r a r i}{n r^2} \frac{q}{6} i i' \beta_{im}, \end{cases}$$

$$(29a) \quad \begin{cases} M_m^{ai} = -M_m^{ia} = \frac{a r a r i}{n r^2} \frac{q}{6} i i' \beta_{im}, \\ M_m^{ii} = \frac{a r i}{n r} \left[ \mathfrak{M}_{im} - \frac{r i q}{r 6} i i' \beta_{im} \right], \end{cases}$$

$$(30a) \quad \begin{cases} A_a^a = \frac{i'}{n} \left[ 1 + \frac{r a}{r} \frac{q}{6} i (n + i') \right], \\ A_a^i = -\frac{i' r i}{n r} \frac{q}{6} i (n + i'), \end{cases}$$

$$(31a) \quad \begin{cases} A_i^a = -\frac{r a}{r^i} A_a^i, \\ A_i^i = \frac{i'}{n} \left[ 1 - \frac{r i}{r} \frac{q}{6} i (n + i') \right]. \end{cases}$$

Für  $i' = n$  sind, wie bei den genauen Ausdrücken, die Einflußwerte der Auflagerdrücke gleich 1 bzw. 0.

Die zur Berechnung der Einflußlinien der Gesamtmomente erforderlichen  $\mathfrak{M}_{im}$ -Werte sind für die Felderzahlen 8 und 10 in den folgenden Tabellen zusammengestellt:

 $\mathfrak{M}_{im}$  für  $n = 8$ .

$i \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7
1	7	6	5	4	3	2	1
2	6	12	10	8	6	4	2
3	5	10	15	12	9	6	3
4	4	8	12	16	12	8	4
5	3	6	9	12	15	10	5
6	2	4	6	8	10	12	6
7	1	2	3	4	5	6	7

 $\mathfrak{M}_{im}$  für  $n = 10$ .

$i \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	9	8	7	6	5	4	3	2	1
2	8	16	14	12	10	8	6	4	2
3	7	14	21	18	15	12	9	6	3
4	6	12	18	24	20	16	12	8	4
5	5	10	15	20	25	20	15	10	5
6	4	8	12	16	20	24	18	12	6
7	3	6	9	12	15	18	21	14	7
8	2	4	6	8	10	12	14	16	8
9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

## 2. Gleichmäßige Vollbelastung.

Auch für gleichmäßige Vollbelastung lassen sich geschlossene Ausdrücke für die Gesamtmomente herleiten; diese können auch als Kontrolle der Momenten-Einflußlinien dienen. Bezeichnen

$g^a$  die Belastung des äußeren Trägers für den lfd.  $m$ ,

$g^i$  die Belastung des inneren Trägers für den lfd.  $m$ ,

$$k^a = \frac{1}{2} g^a a^2 \left( \frac{r^a}{r} \right)^2,$$

$$k^i = \frac{1}{2} g^i a^2 \left( \frac{r^i}{r} \right)^2 \text{ und}$$

$$k = k^a + k^i,$$

so sind die Momente der Hauptbelastung

$$(32) \quad \begin{cases} \mathfrak{M}_m^a = k^a m m', \\ \mathfrak{M}_m^i = k^i m m', \end{cases}$$

und die Summe dieser Momente

$$(33) \quad \overline{\mathfrak{M}}_m = k m m'.$$

Damit errechnen sich nach (25) die Zusatzmomente und aus (6), (9) und (32) die Gesamtmomente

$$M_m^a = k^a m m' + \frac{r^a}{b} k \left[ \frac{\sin m \varphi/2 \sin m' \varphi/2}{\sin^2 \frac{1}{2} \varphi \cos n \varphi/2} - m m' \right],$$

$$M_m^i = k^i m m' - \frac{r^i}{b} k \left[ \frac{\sin m \varphi/2 \sin m' \varphi/2}{\sin^2 \frac{1}{2} \varphi \cos n \varphi/2} - m m' \right],$$

oder durch Zusammenziehung der Beiwerte von  $m'$

$$(34) \quad \begin{cases} M_m^a = \frac{r^a}{b} k \frac{\sin m \varphi/2 \sin m' \varphi/2}{\sin^2 \frac{1}{2} \varphi \cos n \varphi/2} - \frac{r^a k^i + r^i k^a}{b} m m', \\ M_m^i = \frac{r^a k^i + r^i k^a}{b} m m' - \frac{r^i}{b} k \frac{\sin m \varphi/2 \sin m' \varphi/2}{\sin^2 \frac{1}{2} \varphi \cos n \varphi/2}. \end{cases}$$

In ähnlicher Weise ergeben sich auch die Auflagerkräfte aus der Haupt- und Zusatzbelastung [(26)]

$$(35) \quad \begin{cases} A_a = B_a = \frac{1}{a} \left[ \frac{r k}{b} \operatorname{tg} \frac{n \varphi}{2} - \left( \frac{k}{b} - \frac{k^a}{r a} \right) n r \right], \\ A_i = B_i = \frac{1}{a} \left[ \left( \frac{k}{b} + \frac{k^i}{r i} \right) n r - \frac{r k}{b} \operatorname{tg} \frac{n \varphi}{2} \right]. \end{cases}$$

Ersetzt man (25) und (26) durch die Näherungswerte (25a) und (26a), so erhält man

$$(34a) \quad \begin{cases} M_m^a = k^a m m' + \frac{r^a k q}{r 12} \gamma_m, \\ M_m^i = k^i m m' - \frac{r^i k q}{r 12} \gamma_m, \end{cases}$$

$$(35a) \quad \begin{cases} A_a = B_a = \frac{r k^a}{r a} n + \frac{q k}{12 a} [n (n^2 - 1)], \\ A_i = B_i = \frac{r k^i}{r i a} n - \frac{q k}{12 a} [n (n^2 - 1)]. \end{cases}$$

Die Werte  $m \cdot m'$  können für die Felderzahlen von 8 und 10 der folgenden Tabelle entnommen werden:

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	7	12	15	16	15	12	7	—	—
10	9	16	21	24	25	24	21	16	9

Ist  $n$  eine gerade Zahl, so treten die größten Momente in  $m = n/2$  auf. Dafür ergeben sich mit den vereinfachenden Annahmen  $g^a = g^i = g/2$ ,  $r^a = r^i = r$ ,  $l^a = l^i = l = n a$  und bei Vernachlässigung von  $n^2$  gegenüber  $n^4$  die in der in Fußnote 2, S. 1, erstgenannten Arbeit auf anderem Wege gefundenen, für Überslagsrechnungen geeigneten Näherungsausdrücke

$$(34b) \quad M_{\max} = \frac{g l^2}{12} \left( 1 \pm \frac{5}{24} \frac{l^2}{b r} \right).$$

Mit den gleichen Vereinfachungen und bei Vernachlässigungen von  $n$  gegenüber  $n^3$  erhält man für die Auflagerdrücke

$$(35b) \quad A_g = B_g = \frac{g l}{4} \left( 1 \pm \frac{l^2}{6 b r} \right).$$

Das obere Vorzeichen in der Klammer gilt dabei für den äußeren, das untere für den inneren Träger.

### 3. Beispiel.

Der Genauigkeitsgrad der Näherungsrechnung kann nach dem folgenden Beispiel beurteilt werden:

Gegeben:  $r = 200$  m,  $b = 5$  m,  $a = 4$  m,  $l = 10 a = 40$  m;

$$g^a = g^i = 1 \text{ t/m.}$$

Die benötigten Winkelfunktionen sind aus  $\sin \frac{1}{2} \varphi = 0,01$  und  $\cos \varphi = 1 - \frac{a^2}{2 r^2} = 0,9998$  berechnet und in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

$m$	$\sin m \varphi$	$\cos m \varphi$	$\operatorname{tg} m \varphi$	$m$	$\sin m \varphi$	$\cos m \varphi$	$\operatorname{tg} m \varphi$
$\frac{1}{2}$	0,0100000	0,9999500	0,0100005	5	0,0499800	0,9987501	
1	0,0199990	0,9998000		2	0,0998350	0,9995003	0,1003410
2	0,0399900	0,9992001		5	0,0998350	0,9995003	
				10	0,1986724	0,9800650	

a) Berechnung der Einflußwerte  $M_5^{aa}$ ,  $M_5^{ai}$ ,  $M_5^{ia}$  und  $M_5^{ii}$ .

$$\frac{\sin^2 5 \varphi}{\sin \varphi \sin 10 \varphi} = 2,5085339.$$

Damit ergeben sich nach (28) und (29) die genauen Werte und aus (28a) und (29a) die eingeklammerten Näherungswerte

$$\begin{aligned} M_5^{aa} &= 11,5248 \quad (11,5192), \\ M_5^{ai} &= -M_5^{ia} = 1,3652 \quad (1,3598), \\ M_5^{ii} &= 8,5435 \quad (8,5488). \end{aligned}$$

b) Berechnung der von der ständigen Belastung herrührenden Momente  $M_5^a$  und  $M_5^i$  sowie der zu der gleichen Belastung gehörenden Auflagerdrücke.

$$\begin{aligned} k^a &= 8,20125 & r^a k^i &= 1579,753 \\ k^i &= 7,80125 & r^i k^a &= 1619,749 \\ \hline k &= 16,00250 & r^a k^i + r^i k^a &= 3199,502 \\ \frac{k}{b} &= 3,2005 & \frac{r^a k^i + r^i k^a}{b} &= 639,9 \\ \frac{\sin^2 \frac{5}{2} \varphi}{\sin^2 \frac{1}{2} \varphi \cos 5 \varphi} &= 25,10544; & m(n-m) &= 25,0. \end{aligned}$$

Mit diesen Werten berechnen sich aus (34) die genauen Momente und aus (34a) ihre in Klammer gesetzten Näherungswerte:

$$\begin{aligned} M_5^a &= 273,361 \quad (273,081), \\ M_5^i &= 127,883 \quad (128,661). \end{aligned}$$

Die Unterschiede sind also selbst bei den ungünstigen Verhältnissen des Beispiels verhältnismäßig gering, so daß man sich in der Regel mit der Näherungsrechnung begnügen kann. Ihr Genauigkeitsgrad ist um so größer, je kleiner das Verhältnis  $b/r$  ist.

Die Verwendung von (34b) ist aber nur für Überschlagsrechnungen zulässig. Die Auswertung liefert

$$\left. \begin{array}{l} M_5^a \\ M_5^i \end{array} \right\} = \frac{2 \cdot 1600}{16} \left( 1 \pm \frac{5}{24} \frac{1600}{1000} \right) = \left\{ \begin{array}{l} 266,667 \text{ tm} \\ 133,333 \text{ tm} \end{array} \right.$$

Die aus (35) bzw. (35a) berechneten Auflagerdrücke sind:

$$\begin{aligned} A_g^a &= B_g^a = 25,627 \text{ t} \quad (25,531), \\ A_g^i &= B_g^i = 14,373 \text{ t} \quad (14,469). \end{aligned}$$

Auch der vereinfachte Ausdruck (35b) liefert hier genügend genaue Werte:

$$\begin{aligned} A_g^a &= B_g^a = 25,333 \text{ t}, \\ A_g^i &= B_g^i = 14,667 \text{ t}. \end{aligned}$$

### III. Formänderungen.

Bezeichnet  $M_m^x$  das Moment im Punkte  $m$  eines beliebig belasteten frei aufliegenden Trägers,  $M_m$  das Moment im gleichen Punkte, wenn der Träger im Punkte  $i$  durch eine Last  $P=1$  bzw. ein Moment  $M=1$  belastet wird, so ist — bei indirekter Lasteintragung und gleichen Feldweiten  $a$  — bekanntlich die Durchbiegung  $\delta_i$  bzw. die Querschnittsverdrehung  $\varphi_i$

$$(36) \quad \left. \begin{array}{l} E \delta_i \\ E \varphi_i \end{array} \right\} = \frac{a}{6} \sum w_m^x M_m = \frac{a}{6} \sum w_m M_m^x,$$

wobei  $w_m^x$  bzw.  $w_m$  die den reduzierten Momenten  $\frac{I_c}{I_m} M_m^x$  bzw.  $\frac{I_c}{I_m} M_m$  entsprechenden Gewichte bedeuten:

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_m^x = \frac{I_c}{I_{m-1}} M_{m-1}^x + 4 \frac{I_c}{I_m} M_m^x + \frac{I_c}{I_{m+1}} M_{m+1}^x, \\ w_m = \frac{I_c}{I_{m-1}} M_{m-1} + 4 \frac{I_c}{I_m} M_m + \frac{I_c}{I_{m+1}} M_{m+1}. \end{array} \right.$$

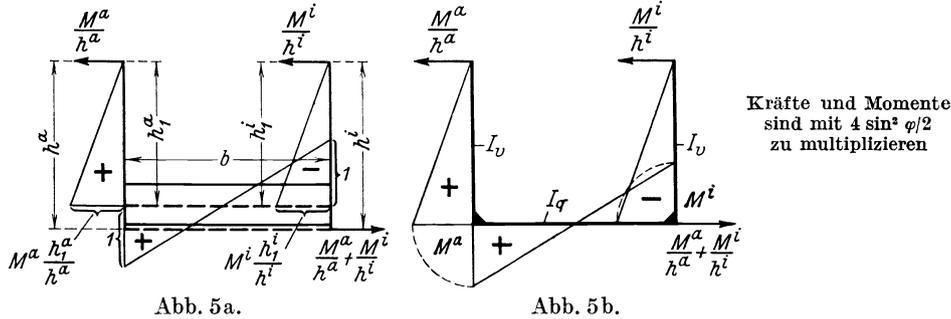
Die zugehörigen Randgewichte sind

$$w_{0(n)}^x = 2 \frac{I_c}{I_{0(n)}} M_{0(n)}^x + \frac{I_c}{I_{1(n-1)}} M_{1(n-1)}^x,$$

$$w_{0(n)} = 2 \frac{I_c}{I_{0(n)}} M_{0(n)} + \frac{I_c}{I_{1(n-1)}} M_{1(n-1)}.$$

Damit ist auch eine absatzweise Veränderlichkeit des Trägheitsmoments genügend genau berücksichtigt. Als Vergleichsträgheitsmoment  $I_c$  kann ein mittleres Trägheitsmoment der Hauptträger oder 1 angenommen werden.

Die Formel (36) gilt auch für das Raumsystem der gekrümmten Brücke. Es ist aber zu beachten, daß die Summen sich auf beide Hauptträger erstrecken und auch die Querverbände hierzu Beiträge liefern. Der Anteil eines Querrahmens beträgt bei den in Abb. 5a



eingetragenen Steifigkeitsverhältnissen — bei der Geringfügigkeit dieses Formänderungsanteiles genügt es, das vereinfachte Momentenbild (Abb. 5b) der Berechnung zugrunde zu legen — und mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$(38) \quad \begin{cases} h^a = \frac{I_c}{I_v} h^a + \frac{I_c}{I_q} b, \\ h^i = \frac{I_c}{I_v} h^i + \frac{I_c}{I_q} b, \\ b' = \frac{I_c b}{I_q 2}, \end{cases}$$

$$4/3 \sin^2 \varphi/2 [h^a \sum M_m^{ax} M_m^a + h^i \sum M_m^{ix} M_m^i - b' \sum (M_m^{ax} M_m^i + M_m^{ix} M_m^a)].$$

Dabei deutet, wie bereits bekannt [vgl. (1), (2) usw.], der obere Momentenzeiger  $a$  ( $i$ ) an, daß die Momente sowie die daraus gebildeten Gewichte sich auf den äußeren (inneren) Träger beziehen.

Da die Querrahmen infolge der Kleinheit von  $\sin^2 \varphi/2$  nur einen geringen Beitrag zu den Formänderungen liefern, können mit ausreichender Genauigkeit diese Summen dem 6. Teil der bezüglichen Summen der Hauptträger gleichgesetzt werden:  $\sum M_m^x M_m = 1/6 \sum w_m^x M_m$ . Dabei ist vorausgesetzt, daß im Summenbereich das mittlere Trägheitsmoment  $I_r$  des Hauptträgers mit dem Vergleichsträgheitsmoment  $I_c$  annähernd übereinstimmt. Bei größeren Abweichungen muß  $\alpha_r/6$  statt  $1/6$  gesetzt werden (vgl. Abschnitt B II). Wenn weiter durch einen zweiten oberen Momentenzeiger  $a$  ( $i$ ) ausgedrückt wird, daß die Last  $P=1$  bzw. das Moment  $M=1$  im Punkte  $i$  des äußeren (inneren) Hauptträgers angreift, so ist die  $EI_c$ -fache Durchbiegung  $\delta_i^a$  ( $\delta_i^i$ ) bzw. Verdrehung  $\varphi_i^a$  ( $\varphi_i^i$ ) im Punkte  $i$  des äußeren (inneren) Trägers

$$(39) \quad \begin{cases} \frac{E I_c \delta_i^a}{E I_c \varphi_i^a} = \frac{1}{6} \left[ \left( a \frac{r^a}{r} + \frac{4}{3} h^a \sin^2 \varphi/2 \right) \sum w_m^{ax} M_m^{aa} + \left( a \frac{r^i}{r} + \frac{4}{3} h^i \sin^2 \varphi/2 \right) \sum w_m^{ix} M_m^{ia} - \frac{4}{3} b' \sin^2 \varphi/2 \left( \sum w_m^{ax} M_m^{ia} + \sum w_m^{ix} M_m^{aa} \right) \right], \\ \frac{E I_c \delta_i^i}{E I_c \varphi_i^i} = \frac{1}{6} \left[ \left( a \frac{r^a}{r} + \frac{4}{3} h^a \sin^2 \varphi/2 \right) \sum w_m^{ax} M_m^{ai} + \left( a \frac{r^i}{r} + \frac{4}{3} h^i \sin^2 \varphi/2 \right) \sum w_m^{ix} M_m^{ii} - \frac{4}{3} b' \sin^2 \varphi/2 \left( \sum w_m^{ax} M_m^{ii} + \sum w_m^{ix} M_m^{ai} \right) \right]. \end{cases}$$

Sind die Trägheitsmomente der Hauptträger jeweils auf die Länge einer Brückenöffnung gleichbleibend, so kann man bei der Ermittlung der Momente  $M_m^{aa}$ ,  $M_m^{ai}$ ,  $M_m^{ia}$  und  $M_m^{ii}$  mit Vorteil die  $\beta_{im}$ -Werte der Tabelle benutzen.

## B. Brücken mit mehreren Öffnungen und durchlaufenden Hauptträgern ohne Gelenke.

Sind die Hauptträger durchlaufende, statisch bestimmte Gelenkträger, so ist auch das Raumsystem statisch bestimmt und das für einfache Balkenbrücken aufgestellte Berechnungsverfahren kann, wie aus anderen Arbeiten bereits bekannt ist, sinngemäß auch auf solche Systeme übertragen werden. Haben die durchlaufenden Hauptträger keine Gelenke, so ist das Raumsystem  $2(n-1)$ -fach statisch unbestimmt, wenn  $n$  die Zahl der Öffnungen bezeichnet. Die Bestimmungsgleichungen der unbekanntenen Stützenmomente enthalten im allgemeinen sechs Unbekannte, so daß die Berechnung umständlicher ist als beim ebenen System mit drei Unbekannten je Gleichung.

Durch Einführung neuer Unbekannter, die durch geeignete Gruppierungszusammenfassung der Stützenmomente entstehen, gelingt es, wie im folgenden gezeigt wird, zwei Systeme simultaner fünfgliedriger Gleichungen zu erhalten und die Berechnung der Beiwerte der Unbekannten teilweise zu vereinfachen. Dieses Sondersystem simultaner Differenzgleichungen mit den Ordnungszahlen 2 kann ebenso wie das Regelsystem mit sechsgliedrigen Gleichungen durch Elimination in eine einfache Differenzgleichung vierter Ordnung verwandelt werden, wobei auch hier das fehlende sechste Glied eine Vereinfachung bedeutet. Im allgemeinen bietet aber die Aufstellung dieser einfachen Differenzgleichung keine Vorteile; die Auflösung der simultanen Differenzgleichungen durch Iteration führt in der Regel rascher zum Ziel.

### I. Die Hauptträger haben beliebig veränderliche Trägheitsmomente.

#### 1. Allgemeines Berechnungsverfahren.

Es seien  $X_r^a$  die Stützenmomente des äußeren,  $X_r^i$  die des inneren Hauptträgers. Die Unbekannten  $Y_r$  und  $Z_r$  sind durch die in Abb. 6a u. b dargestellten Selbstspannungszustände gekennzeichnet. Felderzahl und Feldweite sind in den benachbarten Öffnungen verschieden angenommen:

$$\begin{aligned} l_r &= n_r \cdot a_r, \\ l_{r+1} &= n_{r+1} \cdot a_{r+1}. \end{aligned}$$

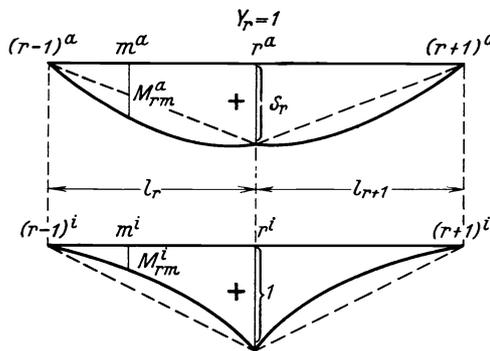


Abb. 6a.

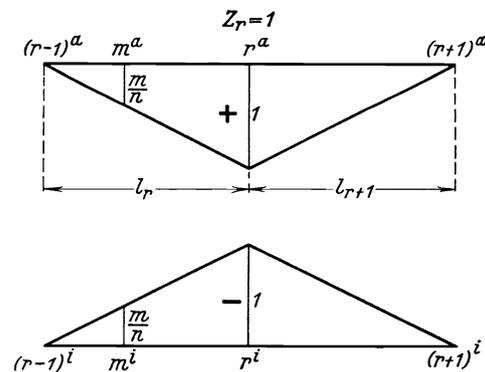


Abb. 6b.

Dem Selbstspannungszustande  $Y_r=1$  entsprechen in den beiden Hauptträgern folgende Momente:

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} r\text{-tes Feld: } M_{rm}^a = s_r \frac{m}{n_r} + \frac{r^a}{r} (1 + s_r) \mu_{r,m}, \\ M_{rm}^i = \frac{m}{n_r} - \frac{r^i}{r} (1 + s_r) \mu_{r,m}, \\ (r+1)\text{-tes Feld: } M_{rm}^a = s_r \frac{m}{n_{r+1}} + \frac{r^a}{r} (1 + s_r) \mu_{r+1,m}, \\ M_{rm}^i = \frac{m}{n_{r+1}} - \frac{r^a}{r} (1 + s_r) \mu_{r+1,m}. \end{array} \right.$$

Die zu  $Z_r=1$  gehörigen Momente können Abb. 6b entnommen werden. Die aus diesen Selbstspannungszuständen hergeleiteten Bestimmungsgleichungen der Unbekannten  $Y_r$  und  $Z_r$  lauten nach Multiplikation mit  $E I_c$ :

$$(41) \quad \begin{cases} \delta_{r,r-1} Y_{r-1} + \delta_{r,r} Y_r + \delta_{r,r+1} Y_{r+1} + \zeta_{r,r-1} Z_{r-1} + \zeta_{r,r} Z_r + \zeta_{r,r+1} Z_{r+1} = \delta_{r,0}, \\ \eta_{r,r-1} Y_{r-1} + \eta_{r,r} Y_r + \eta_{r,r+1} Y_{r+1} + \varepsilon_{r,r-1} Z_{r-1} + \varepsilon_{r,r} Z_r + \varepsilon_{r,r+1} Z_{r+1} = \varepsilon_{r,0}. \end{cases}$$

Mit den Einzelgewichten

$$(42) \quad \begin{cases} w_{M_m}^a = \frac{I_c}{I_{m-1}} M_{m-1}^a + 4 \frac{I_c}{I_m} M_m^a + \frac{I_c}{I_{m+1}} M_{m+1}^a, \\ w_{M_m}^i = \frac{I_c}{I_{m-1}} M_{m-1}^i + 4 \frac{I_c}{I_m} M_m^i + \frac{I_c}{I_{m+1}} M_{m+1}^i. \end{cases}$$

$$(42a) \quad \begin{cases} w_m^a = \frac{I_c(m-1)}{I_{m-1}^a} + 4 \frac{I_c m}{I_m^a} + \frac{I_c(m+1)}{I_{m+1}^a}, \\ w_m^i = \frac{I_c(m-1)}{I_{m-1}^i} + 4 \frac{I_c m}{I_m^i} + \frac{I_c(m+1)}{I_{m+1}^i}, \end{cases}$$

und mit der Bezeichnung  $\sum_r$  für alle über das  $r$ -te Feld sich erstreckenden Summen erhält man für die Beiwerte folgende Ausdrücke:

$$(43) \quad \begin{cases} \delta_{r,r-1} = \frac{1}{6} \left[ \left( a_r \frac{r^a}{r} + \frac{4}{3} h^{a'} \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r \right) \sum_r w_{M_m}^a M_m^a + \left( a_r \frac{r^i}{r} + \frac{4}{3} h^{i'} \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r \right) \times \right. \\ \quad \left. \times \sum_r w_{M_m}^i M_m^i - \frac{4}{3} b' \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r \sum_r (w_{M_m}^a M_m^i + w_{M_m}^i M_m^a) \right], \\ \delta_{r,r} = \frac{1}{6} \left[ \left( a_r \frac{r^a}{r} + \frac{4}{3} h^{a'} \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r \right) \sum_r w_{M_m}^a M_m^a + \left( a_r \frac{r^i}{r} + \frac{4}{3} h^{i'} \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r \right) \times \right. \\ \quad \left. \times \sum_r w_{M_m}^i M_m^i - \frac{4}{3} b' \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r \sum_r (w_{M_m}^a M_m^i + w_{M_m}^i M_m^a) + \right. \\ \quad \left. + \left( a_{r+1} \frac{r^a}{r} + \frac{4}{3} h^{a'} \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{r+1} \right) \sum_{r+1} w_{M_m}^a M_m^a + \left( a_{r+1} \frac{r^i}{r} + \frac{4}{3} h^{i'} \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{r+1} \right) \times \right. \\ \quad \left. \times \sum_{r+1} w_{M_m}^i M_m^i - \frac{4}{3} b' \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{r+1} \sum_{r+1} (w_{M_m}^a M_m^i + w_{M_m}^i M_m^a) \right], \\ \delta_{r,r+1} = \frac{1}{6} \left[ \left( a_{r+1} \frac{r^a}{r} + \frac{4}{3} h^{a'} \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{r+1} \right) \sum_{r+1} w_{M_m}^a M_m^a + \left( a_{r+1} \frac{r^i}{r} + \right. \right. \\ \quad \left. \left. + \frac{4}{3} h^{i'} \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{r+1} \right) \sum_{r+1} w_{M_m}^i M_m^i - \frac{4}{3} b' \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{r+1} \sum_{r+1} (w_{M_m}^a M_m^i + w_{M_m}^i M_m^a) \right], \end{cases}$$

$$(44) \quad \begin{cases} \varepsilon_{r,r-1} = \frac{1}{6 n_r^2} \left[ \left( a_r \frac{r^a}{r} + \frac{4}{3} (h^{a'} + b') \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r \right) \sum_r w_m^a m' + \right. \\ \quad \left. + \left( a_r \frac{r^i}{r} + \frac{4}{3} (h^{i'} + b') \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r \right) \sum_r w_m^i m' \right], \\ \varepsilon_{r,r} = \frac{1}{6 n_r^2} \left[ \left( a_r \frac{r^a}{r} + \frac{4}{3} (h^{a'} + b') \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r \right) \sum_r w_m^a m + \right. \\ \quad \left. + \left( a_r \frac{r^i}{r} + \frac{4}{3} (h^{i'} + b') \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r \right) \sum_r w_m^i m + \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{6 n_{r+1}^2} \left[ \left( a_{r+1} \frac{r^a}{r} + \frac{4}{3} (h^{a'} + b') \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{r+1} \right) \sum_{r+1} w_m^a m + \right. \right. \\ \quad \left. \left. + \left( a_{r+1} \frac{r^i}{r} + \frac{4}{3} (h^{i'} + b') \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{r+1} \right) \sum_{r+1} w_m^i m \right], \\ \varepsilon_{r,r+1} = \frac{1}{6 n_{r+1}^2} \left[ \left( a_{r+1} \frac{r^a}{r} + \frac{4}{3} (h^{a'} + b') \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{r+1} \right) \sum_{r+1} w_m^a m' + \right. \\ \quad \left. + \left( a_{r+1} \frac{r^i}{r} + \frac{4}{3} (h^{i'} + b') \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{r+1} \right) \sum_{r+1} w_m^i m' \right], \end{cases}$$

$$(45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta_{r, r-1} = \frac{1}{6 n_r} \left[ \left( a_r \frac{r^a}{r} + \frac{4}{3} (h^a + b') \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r \right) \sum_r w_{M_m}^a m' - \right. \\ \quad \left. - \left( a_r \frac{r^i}{r} + \frac{4}{3} (h^i + b') \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r \right) \sum_r w_{M_m}^i m' \right], \\ \zeta_{r, r} = \frac{1}{6 n_r} \left[ \left( a_r \frac{r^a}{r} + \frac{4}{3} (h^a + b') \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r \right) \sum_r w_{M_m}^a m - \right. \\ \quad \left. - \left( a_r \frac{r^i}{r} + \frac{4}{3} (h^i + b') \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r \right) \sum_r w_{M_m}^i m \right] + \\ \quad + \frac{1}{6 n_{r+1}} \left[ \left( a_{r+1} \frac{r^a}{r} + \frac{4}{3} (h^a + b') \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{r+1} \right) \sum_{r+1} w_{M_m}^a m - \right. \\ \quad \left. - \left( a_{r+1} \frac{r^i}{r} + \frac{4}{3} (h^i + b') \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{r+1} \right) \sum_{r+1} w_{M_m}^i m \right], \\ \zeta_{r, r+1} = \frac{1}{6 n_{r+1}} \left[ \left( a_{r+1} \frac{r^a}{r} (h^a + b') \sin^2 \varphi_{r+1} \right) \sum_{r+1} w_{M_m}^a m' - \right. \\ \quad \left. - \left( a_{r+1} \frac{r^i}{r} + \frac{4}{3} (h^i + b') \sin^2 \varphi_{r+1} \right) \sum_{r+1} w_{M_m}^i m' \right], \end{array} \right.$$

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta_{r, r} = \zeta_{r, r}, \\ \eta_{r, v} = \zeta_{v, r} \dots v = r-1, r+1. \end{array} \right.$$

Werden in der  $r$ -ten Öffnung die von einer beliebigen Belastung herrührenden Momente des äußeren Hauptträgers mit  $M_m^{ax}$ , die des inneren Trägers mit  $M_m^{ix}$ , die zugehörigen, nach (37) gebildeten Einzelgewichte mit  $w_M^{ax}$  und  $w_M^{ix}$  bezeichnet, so sind die Belastungsglieder der Bestimmungsgleichungen (41):

$$(47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_{r, 0} = \frac{1}{6} \left[ \left( a_r \frac{r^a}{r} + \frac{4}{3} h^a \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r \right) \sum_r w_M^{ax} M_m^a + \left( a_r \frac{r^i}{r} + \frac{4}{3} h^i \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r \right) \sum_r w_M^{ix} M_m^i + \right. \\ \quad + \left( a_{r+1} \frac{r^a}{r} + \frac{4}{3} h^a \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{r+1} \right) \sum_{r+1} w_M^{ax} M_m^a + \\ \quad + \left( a_{r+1} \frac{r^i}{r} + \frac{4}{3} h^i \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{r+1} \right) \sum_{r+1} w_M^{ix} M_m^i - \\ \quad - \frac{4}{3} b' \left\{ \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r \sum_r (w_M^{ax} M_m^i + w_M^{ix} M_m^a) + \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{r+1} \times \right. \\ \quad \left. \times \sum_{r+1} (w_M^{ax} M_m^i + w_M^{ix} M_m^a) \right\} \Big], \\ \varepsilon_{r, 0} = \frac{1}{6 n_r} \left[ \left( a_r \frac{r^a}{r} + \frac{4}{3} (h^a + b') \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r \right) \sum_r w_M^{ax} m - \right. \\ \quad \left. - \left( a_r \frac{r^i}{r} + \frac{4}{3} (h^i + b') \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r \right) \sum_r w_M^{ix} m \right] + \\ \quad + \frac{1}{6 n_{r+1}} \left[ \left( a_{r+1} \frac{r^a}{r} + \frac{4}{3} (h^a + b') \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{r+1} \right) \sum_{r+1} w_M^{ax} m - \right. \\ \quad \left. - \left( a_{r+1} \frac{r^i}{r} + \frac{4}{3} (h^i + b') \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{r+1} \right) \sum_{r+1} w_M^{ix} m \right]. \end{array} \right.$$

In den Ausdrücken (43) bis (45) sind in der gleichen Weise und unter den gleichen Voraussetzungen wie in (39) die von den Querrahmen herrührenden Summen näherungsweise durch die entsprechenden Summen der Hauptträger ausgedrückt; der dadurch begangene Fehler ist meistens unbedeutend.

Führt man noch die den Zusatzmomenten  $\mu$  entsprechenden Einzelgewichte  $w_{\mu m}$  ein, die nach (37) zu bilden sind, so können die Summen  $\sum w_{M_m} M_m$  und  $\sum w_{M_m} m$  in den Ausdrücken der Beiwerte von  $\delta$ ,  $\zeta$  und  $\eta$  aus den Teilsommen  $\sum w_m m$ ,  $\sum w_{\mu m} m$  und  $\sum w_{\mu m} \mu m$  folgendermaßen berechnet werden:

$$(48) \left\{ \begin{aligned} \sum_r w_{M_m}^a M_m^a &= \frac{s_r^2}{n_r^2} \sum_r w_m^a m + 2 \frac{s_r(1+s_r)}{n_r} \frac{r^a}{r} \sum_r w_{\mu m}^a m + (1+s_r)^2 \left(\frac{r^a}{r}\right)^2 \sum_r w_{\mu m}^a \mu_m, \\ \sum_r w_{M_m}^i M_m^i &= \frac{1}{n_r^2} \sum_r w_m^i m - 2 \frac{1+s_r}{n_r} \frac{r^i}{r} \sum_r w_{\mu m}^i m + (1+s_r)^2 \left(\frac{r^i}{r}\right)^2 \sum_r w_{\mu m}^i \mu_m, \\ \sum_r w_{M_m}^a M_m^{a'} &= \frac{s_r s_{r-1}}{n_r^2} \sum_r w_m^a m' + \frac{2 s_r s_{r-1} + s_r + s_{r-1}}{n_r} \left(\frac{r^a}{r}\right) \sum_r w_{\mu m}^a m' + \\ &\quad + (1+s_r)(1+s_{r-1}) \left(\frac{r^a}{r}\right)^2 \sum_r w_{\mu m}^a \mu_m, \\ \sum_r w_{M_m}^i M_m^{i'} &= \frac{1}{n_r^2} \sum_r w_m^i m' - \frac{2 + s_r + s_{r-1}}{n_r} \left(\frac{r^i}{r}\right) \sum_r w_{\mu m}^i m' + (1+s_r)(1+s_{r-1}) \times \\ &\quad \times \left(\frac{r^i}{r}\right)^2 \sum_r w_{\mu m}^i \mu_m, \\ \left. \begin{aligned} \sum_r w_{M_m}^a M_m^i \\ \sum_r w_{M_m}^i M_m^a \end{aligned} \right\} &= \frac{s_r}{n_r^2} \sum_r w_m^a m + \left(\frac{1+s_r}{n_r}\right) \frac{r^a - s_r r^i}{r} \sum_r w_{\mu m}^a m - (1+s_r)^2 \frac{r^a r^i}{r^2} \sum_r w_{\mu m}^a \mu_m, \\ \sum_r w_{M_m}^a M_m^{i'} &= \frac{s_r}{n_r^2} \sum_r w_m^a m' + \frac{1}{n_r} \left[ (1+s_r) \frac{r^a}{r} - s_r (1+s_{r-1}) \frac{r^i}{r} \right] \sum_r w_{\mu m}^a m' - \\ &\quad - (1+s_r)(1+s_{r-1}) \frac{r^a r^i}{r^2} \sum_r w_{\mu m}^a \mu_m, \\ \sum_r w_{M_m}^i M_m^{a'} &= \frac{s_{r-1}}{n_r^2} \sum_r w_m^i m' + \frac{1}{n_r} \left[ (1+s_{r-1}) \left(\frac{r^a}{r}\right) - s_{r-1} (1+s_r) \frac{r^i}{r} \right] \sum_r w_{\mu m}^i m' - \\ &\quad - (1+s_{r-1})(1+s_r) \frac{r^a r^i}{r^2} \sum_r w_{\mu m}^i \mu_m, \end{aligned} \right.$$

$$(49) \left\{ \begin{aligned} \sum_r w_{M_m}^a m &= \frac{s_r}{n_r} \sum_r w_m^a m + (1+s_r) \frac{r^a}{r} \sum_r w_{\mu m}^a m, \\ \sum_r w_{M_m}^a m' &= \frac{s_r}{n_r} \sum_r w_m^a m' + (1+s_r) \frac{r^a}{r} \sum_r w_{\mu m}^a m', \\ \sum_r w_{M_m}^i m &= \frac{1}{n_r} \sum_r w_m^i m - (1+s_r) \frac{r^i}{r} \sum_r w_{\mu m}^i m, \\ \sum_r w_{M_m}^i m' &= \frac{1}{n_r} \sum_r w_m^i m' - (1+s_r) \frac{r^i}{r} \sum_r w_{\mu m}^i m'. \end{aligned} \right.$$

Durch geeignete Wahl von  $s_r$  werden die Beiwerte

$$(50) \quad \zeta_{r,r} = \eta_{r,r} = 0,$$

wodurch sich die Bestimmungsgleichungen vereinfachen. Man erzielt damit gleichzeitig, daß die übrigen Beiwerte  $\zeta_{r,v}$  und  $\eta_{r,v}$  beträchtlich kleiner werden und den Charakter von Verbesserungsgliedern annehmen.

Mit den abkürzenden Bezeichnungen

$$(51) \left\{ \begin{aligned} c_r &= \frac{a_r}{n_r} \left[ \frac{1}{n_r} \frac{r^a}{r} \sum_r w_m^a m + \left(\frac{r^a}{r}\right)^2 \sum_r w_{\mu m}^a m + \left(\frac{r^i}{r}\right)^2 \sum_r w_{\mu m}^i m \right], \\ d_r &= \frac{4}{3} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r}{n_r} \left[ \frac{h^a + b'}{n_r} \sum_r w_m^a m + (h^a + b') \frac{r^a}{r} \sum_r w_{\mu m}^a m + (h^i + b') \frac{r^i}{r} \sum_r w_{\mu m}^i m \right], \\ e_r &= \frac{a_r}{n_r} \left[ \left(\frac{r^a}{r}\right)^2 \sum_r w_{\mu m}^a m + \left(\frac{r^i}{r}\right)^2 \sum_r w_{\mu m}^i m - \frac{1}{n_r} \left(\frac{r^i}{r}\right) \sum_r w_m^i m \right], \\ f_r &= \frac{4}{3} \frac{\sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r}{n_r} \left[ (h^a + b') \frac{r^a}{r} \sum_r w_{\mu m}^a m + (h^i + b') \frac{r^i}{r} \sum_r w_{\mu m}^i m - \frac{(h^i + b')}{n_r} \sum_r w_m^i m \right] \end{aligned} \right.$$

erhält man aus (50)

$$(52) \quad s_r = -\frac{e_r + e_{r+1} + f_r + f_{r+1}}{c_r + c_{r+1} + d_r + d_{r+1}}.$$

Damit lauten die vereinfachten Bestimmungsgleichungen:

$$(41a) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_{r,r-1} Y_{r-1} + \delta_{r,r} Y_r + \delta_{r,r+1} Y_{r+1} + \zeta_{r,r-1} Z_{r-1} &+ \zeta_{r,r+1} Z_{r+1} = \delta_{r,0}, \\ \eta_{r,r-1} Y_{r-1} + &\eta_{r,r+1} Y_{r+1} + \varepsilon_{r,r-1} Z_{r-1} + \varepsilon_{r,r} Z_r + \varepsilon_{r,r+1} Z_{r+1} = \varepsilon_{r,0}. \end{aligned} \right.$$

Da die Beiwerte  $\zeta$  und  $\eta$  verhältnismäßig klein sind, führt ein Iterationsverfahren rasch zum Ziel. Man vernachlässigt im ersten Gleichungssystem die Glieder mit  $Z$ , berechnet die  $Y$  aus den verbleibenden dreigliedrigen Gleichungen und setzt sie in das andere Gleichungssystem ein. Mit den daraus ermittelten  $Z$  ergeben sich aus dem ersten System verbesserte Werte  $Y$  usw. Diesen Weg wird man immer einschlagen, wenn anzunehmen ist, daß die  $Z$  klein sein werden, z. B. wenn beide Hauptträger annähernd gleich belastet sind. Sonst kann man auch mit dem zweiten Gleichungssystem beginnen und in der gleichen Weise verfahren.

Die genauen Werte liefert ein Eliminationsverfahren, das zu einem System sechsgliedriger Gleichungen führt. Rascher zum Ziel kommt man, ähnlich wie bei den einfachen Differenzgleichungen, mit einer mehrstufigen Substitution<sup>1</sup>.

Mit den aus den beiden Gleichungssystemen errechneten Unbekannten  $Y_r$  und  $Z_r$  ergeben sich die Momente im Querschnitt  $m$  des  $r$ -ten Feldes:

$$(53) \quad \begin{cases} \mathbf{M}_{rm}^a = M_{rm}^{ax} + Y_r M_{rm}^a + Y_{r-1} M_{rm}^{a'} + Z_r \frac{m}{n_r} + Z_{r-1} \frac{m'}{n_r}, \\ \mathbf{M}_{rm}^i = M_{rm}^{ix} + Y_r M_{rm}^i + Y_{r-1} M_{rm}^{i'} - Z_r \frac{m}{n_r} - Z_{r-1} \frac{m'}{n_r}. \end{cases}$$

Die Stützenmomente sind:

$$(54) \quad X_r^a = s_r Y_r + Z_r, \quad X_r^i = Y_r - Z_r.$$

Die Querkkräfte ergeben sich, wie beim geraden Träger, aus den Momenten gemäß (1) und (1a):

$$(55) \quad V_{r,m-1}^a = \frac{1}{a_r^a} [M_{rm}^a - M_{r,m-1}^a], \quad V_{r,m-1}^i = \frac{1}{a_r^i} [M_{rm}^i - M_{r,m-1}^i].$$

Mit den Querkkräften über den Stützen sind auch die Stützenkräfte bestimmt:

$$(56) \quad A_r^a = V_{r+1,0}^a - V_{rn}^a, \quad A_r^i = V_{r+1,0}^i - V_{rn}^i.$$

Die vorstehenden Untersuchungen gelten allgemein; im folgenden werden als Sonderfälle die gleichmäßige Vollbelastung und die Belastung durch eine Einzellast über einem Hauptträger (Einflußlinien) behandelt werden.

## 2. Gleichmäßige Vollbelastung.

### (Äußerer Hauptträger $g^a$ t/m, innerer Hauptträger $g^i$ t/m.)

Für diesen Fall der ständigen Belastung werden die Momente  $M_m^{ax}$  und  $M_m^{ix}$  nach (34) oder (34a) berechnet; daraus bestimmen sich die Einzelgewichte  $w_{rm}^{ax}$  und  $w_{rm}^{ix}$ , die zur Berechnung der Belastungsglieder nach (47) dienen. Die dort vorkommenden Summen werden unmittelbar aus den Momenten  $M_m^{ax}$  und  $M_m^{ix}$  bzw. deren Gewichten ermittelt. Sie können aber auch — wenn im Sonderfalle sich dadurch Vorteile ergeben — aus Teilsummen nach folgenden Ausdrücken berechnet werden:

$$(57) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_r w_{rm}^{ax} M_m^a &= \frac{s_r}{n_r} k_r^a \sum_r w_m^a m m' + \left[ (1 + s_r) k_r^a \sum_r w_{\mu m}^a m m' + \frac{s_r}{n_r} \sum_r w_{\mu m}^{ag} m \right] \frac{ra}{r} + \\ &\quad + (1 + s_r) \left( \frac{ra}{r} \right)^2 \sum_r w_{\mu m}^a \mu_m^g, \\ \sum_r w_{rm}^{ix} M_m^i &= \frac{k_r^i}{n_r} \sum_r w_m^i m m' - \left[ (1 + s_r) k_r^i \sum_r w_{\mu m}^i m m' + \frac{1}{n_r} \sum_r w_{\mu m}^{ig} m \right] \frac{ri}{r} + \\ &\quad + (1 + s_r) \left( \frac{ri}{r} \right)^2 \sum_r w_{\mu m}^i \mu_m^g, \\ \sum_r w_{rm}^{ax} M_m^i &= \frac{k_r^a}{n_r} \sum_r w_m^a m m' - (1 + s_r) k_r^a \frac{ri}{r} \sum_r w_{\mu m}^a m m' + \frac{1}{n_r} \frac{ra}{r} \sum_r w_{\mu m}^{ag} m - \\ &\quad - (1 + s_r) \frac{ra ri}{r^2} \sum_r w_{\mu m}^a \mu_m^g, \\ \sum_r w_{rm}^{ix} M_m^a &= \frac{s_r}{n_r} k_r^i \sum_r w_m^i m m' + (1 + s_r) k_r^i \frac{ra}{r} \sum_r w_{\mu m}^i m m' - \frac{s_r}{n_r} \frac{ri}{r} \sum_r w_{\mu m}^{ig} m - \\ &\quad - (1 + s_r) \frac{ra ri}{r^2} \sum_r w_{\mu m}^i \mu_m^g. \end{aligned} \right.$$

<sup>1</sup> Vgl. den Aufsatz des Verfassers „Zweckmäßige Auflösung der gewöhnlichen und Differenzgleichungen“, Bauingenieur Bd. 18 (1937) S. 38.

$$(58) \quad \begin{cases} \sum_r w_m^{ax} m = k_r^a \sum_r w_m^a m m' + \frac{r^a}{r} \sum_r w_m^{ag} m, \\ \sum_r w_m^{ix} m = k_r^i \sum_r w_m^i m m' - \frac{r^i}{r} \sum_r w_m^{ig} m. \end{cases}$$

Dabei sind die Zusatzmomente der Dreieckbelastung nach (15a) mit  $\mu$ , die der Parabelbelastung mit  $\mu^g$ , die zugehörigen Gewichte mit  $w_{\mu m}$  bzw.  $w_{\mu m}^g$  und die der entsprechenden Hauptbelastung mit  $w_m$  bzw.  $w_m^g$  bezeichnet.

Nach Auflösung der Gleichungen (41a) sind aus (53) und (54) die Momente, aus (55) die Querkräfte und damit die Stützenkräfte zu berechnen.

### 3. Einflußlinien.

Sind mehrere Belastungsfälle zu untersuchen oder handelt es sich um die Bestimmung der größten Momente oder Querkräfte in irgendeinem Querschnitt, wofür die ungünstigste Laststellung erst gefunden werden muß, so empfiehlt es sich, die Einflußlinien der Unbekannten  $Y$  und  $Z$  und daraus die der anderen Lastwirkungen zu ermitteln. Hierfür stehen zwei Verfahren zur Verfügung:

1. Für jede Laststellung  $P=1$  in einem Punkte  $i$  des äußeren oder inneren Hauptträgers werden die Belastungsglieder  $\delta_{r,0}$  und  $\varepsilon_{r,0}$  bestimmt. Die Auflösung der Gleichungen (41a) liefert die Einflußwerte der Unbekannten im Punkte  $i$ .

2. Die Unbekannte  $U_r=1$  ( $Y_r$  oder  $Z_r$ ) wirkt am  $(2n-3)$ -fach statisch unbestimmtem System. Die zugehörige Biegelinie mit den Ordinaten  $\delta_r^u$  bezogen auf die Einheit  $\delta_{r,r}^u$  ist die Einflußlinie für  $U_r$ :  $U_r = -\frac{\delta_r^v}{\delta_{r,r}^u}$ . Dabei bedeutet  $\delta_{r,r}^u$  die Verschiebung am  $(2n-3)$ -fach statisch unbestimmtem System in der Richtung von  $U_r$  infolge von  $U_r=1$ .

Wir wählen das zweite Verfahren und bestimmen zuerst die Einflußlinien für  $Y_r$ . Im zugehörigen  $(2n-3)$ -fach statisch unbestimmtem System fehlt in (41a) die Gleichung mit dem Gliede  $\delta_{r,r} Y_r$ . Wie leicht einzusehen, sind die Belastungsglieder der übrigen Gleichungen

$$(59) \quad \begin{cases} \delta_{r-1,0} = -\delta_{r,r-1}, & \varepsilon_{r-1,0} = -\eta_{r,r-1}, \\ \delta_{r+1,0} = -\delta_{r,r+1}, & \varepsilon_{r+1,0} = -\eta_{r,r+1}, \\ \delta_{v,0} = 0 \dots v < r-1, & \varepsilon_{r,0} = 0 \dots v \neq r+1. \end{cases}$$

Mit diesen Belastungsgliedern ergeben sich aus den Bestimmungsgleichungen alle  $Y_{vr}^y$  ( $v \neq r$ ) und  $Z_{vr}^y$  ( $v=1$  bis  $n-1$ ) und daraus nach (53) mit  $M_{vm}^{ax} = M_{vm}^{ix} = 0$  in der  $v$ -ten Öffnung die Momente  $M_{vm}^a$  und  $M_{vm}^i$ . In der  $r$ -ten und  $(r+1)$ -ten Öffnung ist  $Y_r=1$  einzusetzen.

Diesen Momenten entsprechen in den Punkten  $i$  einer beliebigen Öffnung  $v$  Durchbiegungen  $\delta_i^a$  und  $\delta_i^i$  ( $\delta_r^y$ ), die aus (39) zu bestimmen sind. Die Einheit  $\delta_{r,r}^y$  errechnet sich aus der gleichen Formel, wenn man statt der Momente  $M_m^{aa}$ ,  $M_m^{ia}$  bzw.  $M_m^{ai}$ ,  $M_m^{ii}$  die über die  $r$ -te und  $(r+1)$ -te Öffnung sich erstreckenden Momente  $M_{rm}^a$  bzw.  $M_{rm}^i$  des Selbstspannungszustandes  $Y_r=1$  einführt. Man erhält schließlich, wie auch aus den Selbstspannungszuständen der Unbekannten hervorgeht, die einfache Formel:

$$(60) \quad \delta_{r,r}^y = \delta_{r,r-1} Y_{r-1} + \delta_{r,r} + \delta_{r,r+1} Y_{r+1} + \zeta_{r,r-1} Z_{r-1} + \zeta_{r,r+1} Z_{r+1}.$$

In ähnlicher Weise sind auch die Einflußwerte für  $Z_r$  zu bestimmen. Die Belastungsglieder sind:

$$(61) \quad \begin{cases} \delta_{r-1,0} = -\zeta_{r,r-1}, & \varepsilon_{r-1,0} = -\varepsilon_{r,r-1}, \\ \delta_{r+1,0} = -\zeta_{r,r+1}, & \varepsilon_{r+1,0} = -\varepsilon_{r,r+1}, \\ \delta_{v,0} = 0 \dots v < r-1, & \varepsilon_{r,0} = 0 \dots v > r+1. \end{cases}$$

Aus den Bestimmungsgleichungen erhält man alle  $Y_{vr}^z$  ( $v=1$  bis  $n-1$ ) und  $Z_{vr}^z$  ( $v \neq r$ ) und damit nach (53) die Momente  $M_{vm}^a$  und  $M_{vm}^i$ . Dabei ist wieder  $M_{vm}^{ax} = M_{vm}^{ix} = 0$  und in der  $r$ -ten und  $(r+1)$ -ten Öffnung  $Z_r=1$  einzusetzen.

Damit ergeben sich die zugehörigen Durchbiegungen  $\delta_i^a$  und  $\delta_i^z$  ( $\delta_r^z$ ) aus (39). Ersetzt man in der gleichen Formel  $M_m^{aa}$ ,  $M_m^{ia}$  bzw.  $M_m^{ai}$ ,  $M_m^{ii}$  durch die zum Selbstspannungszustande  $Z_r=1$  gehörigen Momente  $\frac{m}{n}$  bzw.  $-\frac{m}{n}$ , so erhält man in der gleichen Weise wie  $\delta_{r,r}^y$  die Einheit  $\delta_{r,r}^z$  aus

$$(62) \quad \delta_{r,r}^z = \eta_{r,r-1} Y_{r-1} + \eta_{r,r+1} Y_{r+1} + \varepsilon_{r,r-1} Z_{r-1} + \varepsilon_{r,r} + \varepsilon_{r,r+1} Z_{r+1}.$$

Die in (39) vorkommenden Summen sind für jede Laststellung aus den Gewichten  $w_m^{ax}$  und  $w_m^{ix}$  zu berechnen. Sie können aber auch ohne Ausrechnung der Momente  $M_m^{ax}$  und  $M_m^{ix}$  aus Teilsommen und den Unbekannten bestimmt werden. Mit den Momenten  $M_m^{aa}$ ,  $M_m^{ia}$  aus (28a) und  $M_m^{ai}$ ,  $M_m^{ii}$  aus (29a) erhält man:

$$(63^1) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_r w_m^{ax} M_m^{aa} &= \frac{a_r r^a}{n_r r} \left\{ \left[ \frac{s_r}{n_r} \left( \sum_r w_m^a \mathfrak{M}_{im} + \frac{r^a}{r} i i' \sum_r w_m^a \mu_{im} \right) + (1 + s_r) \frac{r^a}{r} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left( \sum_r w_{\mu_m}^a \mathfrak{M}_{im} + \frac{r^a}{r} i i' \sum_r w_{\mu_m}^a \mu_{im} \right) \right]_1 Y_r + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \quad \quad \quad \right]'_1 Y_{r-1} \right\} + \\ &\quad + \frac{a_r r^a}{n_r^2 r} \left\{ \left[ \sum_r w_m^a \mathfrak{M}_{im} + \frac{r^a}{r} i i' \sum_r w_m^a \mu_{im} \right]_2 Z_r + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \quad \quad \quad \right]'_2 Z_{r-1} \right\}, \\ \sum_r w_m^{ix} M_m^{ia} &= - \frac{a_r r^a r^i}{n_r r^2} i i' \left\{ \left[ \frac{1}{n_r} \sum_r w_m^i \mu_{im} - (1 + s_r) \frac{r^i}{r} \sum_r w_{\mu_m}^i \mu_{im} \right]_3 Y_r - \right. \\ &\quad \left. - \left[ \quad \quad \quad \right]'_3 Y_{r-1} \right\} + \\ &\quad + \frac{a_r r^a r^i}{n_r^2 r^2} i i' \left[ Z_r \sum_r w_m^i \mu_{im} + Z_{r-1} \sum_r w_m^i \mu_{im} \right], \\ \sum_r w_m^{ax} M_m^{ai} &= \frac{a_r r^a r^i}{n_r r^2} i i' \left\{ \left[ \frac{s_r}{n_r} \sum_r w_m^a \mu_{im} + (1 + s_r) \frac{r^a}{r} \sum_r w_{\mu_m}^a \mu_{im} \right]_4 Y_r + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \quad \quad \quad \right]'_4 Y_{r-1} \right\} + \\ &\quad + \frac{a_r r^a r^i}{n_r^2 r^2} i i' \left[ Z_r \sum_r w_m^a \mu_{im} + Z_{r-1} \sum_r w_m^a \mu_{im} \right], \\ \sum_r w_m^{ix} M_m^{ii} &= \frac{a_r r^i}{n_r r} \left\{ \left[ \frac{1}{n_r} \left( \sum_r w_m^i \mathfrak{M}_{im} - \frac{r^i}{r} i i' \sum_r w_m^i \mu_{im} \right) - (1 + s_r) \frac{r^i}{r} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left( \sum_r w_{\mu_m}^i \mathfrak{M}_{im} - \frac{r^i}{r} i i' \sum_r w_{\mu_m}^i \mu_{im} \right) \right]_5 Y_r + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \quad \quad \quad \right]'_5 Y_{r-1} \right\} - \\ &\quad - \frac{a_r r^i}{n_r^2 r} \left\{ \left[ \sum_r w_m^i \mathfrak{M}_{im} - \frac{r^i}{r} i i' \sum_r w_m^i \mu_{im} \right]_6 Z_r - \right. \\ &\quad \left. - \left[ \quad \quad \quad \right]'_6 Z_{r-1} \right\}, \\ \sum_r w_m^{ix} M_m^{aa} &= \frac{a_r r^a}{n_r r} \left\{ \left[ \frac{1}{n_r} \left( \sum_r w_m^i \mathfrak{M}_{im} + \frac{r^a}{r} i i' \sum_r w_m^i \mu_{im} \right) - (1 + s_r) \frac{r^i}{r} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left( \sum_r w_{\mu_m}^i \mathfrak{M}_{im} + \frac{r^a}{r} i i' \sum_r w_{\mu_m}^i \mu_{im} \right) \right]_7 Y_r + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \quad \quad \quad \right]'_7 Y_{r-1} \right\} - \\ &\quad - \frac{a_r r^a}{n_r^2 r} \left\{ \left[ \sum_r w_m^i \mathfrak{M}_{im} + \frac{r^a}{r} i i' \sum_r w_m^i \mu_{im} \right]_8 Z_r - \right. \\ &\quad \left. - \left[ \quad \quad \quad \right]'_8 Z_{r-1} \right\}, \end{aligned} \right.$$

<sup>1</sup> Die Klammerausdrücke  $[ ]'_k$  werden aus den Ausdrücken  $[ ]_k$  erhalten, indem  $s_r$  durch  $s_{r-1}$  und die  $w$ -Gewichte durch die entsprechenden  $w'$ -Gewichte ersetzt werden.

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_r w_m^{ax} M_m^{ii} &= \frac{a_r r^i}{n_r r} \left[ \left[ \frac{s_r}{n_r} \left( \sum_r w_m^a \mathfrak{M}_{im} - \frac{r^i}{r} i i' \sum_r w_m^a \mu_{im} \right) + (1 + s_r) \frac{r^a}{r} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left( \sum_r w_m^a \mathfrak{M}_{im} - \frac{r^i}{r} i i' \sum_r w_m^a \mu_{im} \right) \right]_9 Y_r + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \right]_9' Y_{r-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_r r^i}{n_r^2 r} \left[ \left[ \sum_r w_m^a \mathfrak{M}_{im} - \frac{r^i}{r} i i' \sum_r w_m^a \mu_{im} \right]_{10} Z_r + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[ \right]_{10}' Z_{r-1}, \right. \right. \\ \sum_r w_m^{ix} M_m^{ia} &= - \sum_r w_m^{ix} M_m^{ia}, \\ \sum_r w_m^{ax} M_m^{ia} &= - \sum_r w_m^{ax} M_m^{ia}. \end{aligned} \right.$$

Die Einflußlinien der Momente in einem Punkte  $i$  einer beliebigen Öffnung  $\nu$  sind durch (53) gegeben, wenn man  $r$  durch  $\nu$  ersetzt und für  $M_\nu^{ax}$  die zur Last 1 im Punkte  $i^a$  bzw.  $i^i$  gehörigen Momente  $M_m^{aa}$  bzw.  $M_m^{ai}$ , für  $M_\nu^{ix}$  die den gleichen Laststellungen entsprechenden Momente  $M_m^{ia}$  bzw.  $M_m^{ii}$  einführt.

In gleicher Weise sind die Einflußlinien der Querkräfte aus (55) und daraus die der Stützenkräfte zu ermitteln.

Will man die Einflußlinien der Unbekannten nach dem anderen, an erster Stelle angeführten Verfahren berechnen, so können dabei die Summenausdrücke (63) verwendet werden. Wie leicht nachzuweisen ist, erhält man für eine Laststellung  $P=1$  in der  $\nu$ -ten Öffnung die Belastungsglieder  $\delta_{\nu,0}$  und  $\varepsilon_{\nu,0}$ , indem man die Faktoren von  $Y_\nu$  und  $Z_\nu$  dieser Summenausdrücke in (39) einsetzt. In gleicher Weise ergeben sich mit den Faktoren von  $Y_{\nu-1}$  und  $Z_{\nu-1}$  die Belastungsglieder  $\delta_{\nu-1,0}$  und  $\varepsilon_{\nu-1,0}$ ; die übrigen Belastungsgrößen zu (41a) sind gleich 0. Die Auflösung der Gleichungen liefert unmittelbar die Einflußwerte der Unbekannten.

## II. Die Trägheitsmomente der Hauptträger sind auf die Länge einer Brückenöffnung unveränderlich.

In diesem Falle ergeben sich beträchtliche Vereinfachungen, auch wenn die beiden Hauptträger verschiedene Trägheitsmomente haben. Bezeichnen  $I_c$  das Vergleichsträgheitsmoment,  $I_r^a$  bzw.  $I_r^i$  die Trägheitsmomente des äußeren bzw. des inneren Hauptträgers in der  $r$ -ten Öffnung,

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_r^a &= \frac{I_c}{I_r^a}, \\ \alpha_r^i &= \frac{I_c}{I_r^i}, \end{aligned} \right.$$

$w_m^{ax}$ ,  $w_m^{ix}$  die aus den reduzierten Momenten  $M_m^a$ ,  $M_m^i$  einer beliebigen Belastung nach (37) gebildeten Einzelgewichte,

$$(65) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{w}_m^{ax} &= M_{m-1}^a + 4 M_m^a + M_{m+1}^a, \\ \bar{w}_m^{ix} &= M_{m-1}^i + 4 M_m^i + M_{m+1}^i, \end{aligned} \right.$$

die den nicht reduzierten Momenten entsprechenden Gewichte, so gilt allgemein:

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_r w_m^{ax} M_m^{a0} &= \alpha_r^a \sum_r \bar{w}_m^{ax} M_m^{a0}, \\ \sum_r w_m^{ix} M_m^{i0} &= \alpha_r^i \sum_r \bar{w}_m^{ix} M_m^{i0}. \end{aligned} \right.$$

Beziehen sich die Momente und Gewichte, wie bei den Beiwerten und Belastungsgliedern der Bestimmungsgleichungen, auf das statisch bestimmte Grundsystem, die Brücke über eine Öffnung, so können die Summen (66), da jedes Moment sich nach (6) aus Haupt- und Zusatzmoment zusammengesetzt, aus 2 bis 4 Teilsummen gebildet werden. Da in den behandelten Fällen dreieckiger ( $a$ ,  $b$ ) und parabelförmiger ( $c$ ) Hauptmomente die Zusatzmomente

sich nach (15a), (21a) und (25a) aus einer von Krümmung, Feldweite und Brückenbreite abhängigen Konstanten  $\left(\frac{q}{6}, \frac{qk}{12}\right)$  und einer von den Krümmungsverhältnissen unabhängigen Veränderlichen zusammensetzen, sind auch die Teilsummen von der Krümmung unabhängig; sie können also für bestimmte Felderzahlen  $n$  in Tabellen zusammengestellt werden.

### 1. Berechnung der Beiwerte der Unbekannten.

Für die Beiwerte in den Gleichungen (41a) kommen, wie aus (43) bis (46), (48) und (49) unter Beachtung von (15a) hervorgeht, folgende Teilsummen in Betracht:  $\sum \bar{w}_m m$ ,  $\sum \bar{w}_m m'$ ,  $\sum \bar{w}_{\alpha_m} m$ ,  $\sum \bar{w}_{\alpha_m} m'$ ,  $\sum \bar{w}_{\alpha_m} \alpha_m$  und  $\sum \bar{w}_{\alpha_m} \alpha_m'$ , die in der folgenden Tabelle für  $n=8$  und  $n=10$  zusammengestellt sind:

$n$	$\sum \bar{w}_m m$	$\sum \bar{w}_m m'$	$\sum \bar{w}_{\alpha_m} m$	$\sum \bar{w}_{\alpha_m} m'$	$\sum \bar{w}_{\alpha_m} \alpha_m$	$\sum \bar{w}_{\alpha_m} \alpha_m'$
8	1024	512	3213	2835	14573	14155
10	2000	1000	7900	6950	44918	43588

Für die folgenden Teilsummen lassen sich auch einfache geschlossene Ausdrücke angeben:

$$(67) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \bar{w}_m m = 2n^3, \\ \sum \bar{w}_m m' = n^3, \\ \sum \bar{w}_{\alpha_m} m = \frac{1}{5}(4n^4 - 5n^2 + 1), \\ \sum \bar{w}_{\alpha_m} m' = \frac{1}{10}(7n^4 - 5n^2 - 2). \end{array} \right.$$

Mit den Teilsummen  $\sum \bar{w}_m m$  und  $\sum \bar{w}_{\alpha_m} m$  läßt sich der Ausdruck für  $s_r$  auf die Form bringen:

$$(52a) \quad \left\{ s_r = - \frac{A_r \sum_r \bar{w}_m m + A_{r+1} \sum_{r+1} \bar{w}_m m + B_r \sum_r \bar{w}_{\alpha_m} m + B_{r+1} \sum_{r+1} \bar{w}_{\alpha_m} m}{C_r \sum_r \bar{w}_m m + C_{r+1} \sum_{r+1} \bar{w}_m m + B_r \sum_r \bar{w}_{\alpha_m} m + B_{r+1} \sum_{r+1} \bar{w}_{\alpha_m} m} \right.$$

Darin bedeuten die Beiwerte der Teilsummen:

$$(52b) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_r = -\frac{1}{6n_r^2} \left[ \alpha_r^i a_r \frac{r^i}{r} + \frac{4}{3} (h^{i'} + b') \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r \right], \\ B_r = \frac{q}{36n_r} \left\{ a_r \left[ \alpha_r^a \left( \frac{ra}{r} \right)^2 + \alpha_r^i \left( \frac{ri}{r} \right)^2 \right] + \frac{4}{3} \left[ (h^{a'} + b') \frac{ra}{r} + (h^{i'} + b') \frac{ri}{r} \right] \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r \right\}, \\ C_r = \frac{1}{6n_r^2} \left[ \alpha_r^a a_r \frac{ra}{r} + \frac{4}{3} (h^{a'} + b') \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_r \right]. \end{array} \right.$$

Aus (48) und (49) folgt, daß auch die Beiwerte der Unbekannten in den Gleichungen (41a) sich durch die Teilsummen ausdrücken lassen:

$$(43a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_{r, r-1} = C_{r, r-1}^r \sum_r \bar{w}_m m' + D_{r, r-1}^r \sum_r \bar{w}_{\alpha_m} m' + E_{r, r-1}^r \sum_r \bar{w}_{\alpha_m} \alpha_m', \\ \delta_{r, r} = C_{r, r}^r \sum_r \bar{w}_m m + D_{r, r}^r \sum_r \bar{w}_{\alpha_m} m + E_{r, r}^r \sum_r \bar{w}_{\alpha_m} \alpha_m + \\ \quad + C_{r, r}^{r+1} \sum_{r+1} \bar{w}_m m + D_{r, r}^{r+1} \sum_{r+1} \bar{w}_{\alpha_m} m + E_{r, r}^{r+1} \sum_{r+1} \bar{w}_{\alpha_m} \alpha_m, \\ \delta_{r, r+1} = C_{r, r+1}^{r+1} \sum_{r+1} \bar{w}_m m + D_{r, r+1}^{r+1} \sum_{r+1} \bar{w}_{\alpha_m} m + E_{r, r+1}^{r+1} \sum_{r+1} \bar{w}_{\alpha_m} \alpha_m, \end{array} \right.$$

$$(44a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{r, r-1} = F_r^r \sum_r \bar{w}_m m', \\ \varepsilon_{r, r} = F_r^r \sum_r \bar{w}_m m + F_r^{r+1} \sum_{r+1} \bar{w}_m m, \\ \varepsilon_{r, r+1} = F_r^{r+1} \sum_{r+1} \bar{w}_m m', \end{array} \right.$$

$$(45a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta_{r, r-1} = G_r^r \sum_r \bar{w}_m m' + H_r^r \sum_r \bar{w}_{\alpha_m} m' = \eta_{r-1, r}, \\ \zeta_{r, r+1} = G_r^{r+1} \sum_{r+1} \bar{w}_m m' + H_r^{r+1} \sum_{r+1} \bar{w}_{\alpha_m} m' = \eta_{r+1, r}. \end{array} \right.$$

Die Beiwerte der Teilsummen sind aus folgenden Ausdrücken zu berechnen:

$$(43b) \left\{ \begin{array}{l} C_{r,v}^{\alpha} = \frac{1}{6n_{\alpha}^2} \left\{ a_{\alpha} \left[ \alpha_{\alpha}^a \frac{r^a}{r} s_r s_v + \alpha_{\alpha}^i \frac{r^i}{r} \right] + \frac{4}{3} [h^{a'} s_r s_v + h^{i'} - b' (s_r + s_v)] \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{\alpha} \right\}, \\ D_{r,v}^{\alpha} = \frac{q_{\alpha}}{36n_{\alpha}} \left\{ a_{\alpha} \left[ \alpha_{\alpha}^a \{s_r (1 + s_v) + s_r (1 + s_r)\} \left(\frac{r^a}{r}\right)^2 - \alpha_{\alpha}^i (2 + s_r + s_v) \left(\frac{r^i}{r}\right)^2 \right] + \right. \\ \quad + \frac{4}{3} \left[ h^{a'} \{s_r (1 + s_v) + s_v (1 + s_r)\} \frac{r^a}{r} - h^{i'} (2 + s_r + s_v) \frac{r^i}{r} - \right. \\ \quad \left. \left. - b' \left\{ (2 + s_r + s_v) \frac{r^a}{r} - [s_r (1 + s_v) + s_v (1 + s_r)] \frac{r^i}{r} \right\} \right] \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{\alpha} \right\}, \\ E_{r,v}^{\alpha} = \frac{q_{\alpha}^2}{216} (1 + s_r) (1 + s_v) \left\{ a_{\alpha} \left[ \alpha_{\alpha}^a \left(\frac{r^a}{r}\right)^3 + \alpha_{\alpha}^i \left(\frac{r^i}{r}\right)^3 \right] + \right. \\ \quad \left. + \frac{4}{3} \left[ h^{a'} \left(\frac{r^a}{r}\right)^2 + h^{i'} \left(\frac{r^i}{r}\right)^2 + 2b' \frac{r^a r^i}{r^2} \right] \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{\alpha} \right\}. \end{array} \right.$$

$$(44b) \quad F_r^{\alpha} = \frac{1}{6n_{\alpha}^2} \left\{ a_{\alpha} \left[ \alpha_{\alpha}^a \frac{r^a}{r} + \alpha_{\alpha}^i \frac{r^i}{r} \right] + \frac{4}{3} [h^{a'} + h^{i'} + 2b'] \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{\alpha} \right\},$$

$$(45b) \left\{ \begin{array}{l} G_r^{\alpha} = \frac{1}{6n_{\alpha}^2} \left\{ a_{\alpha} \left[ \alpha_{\alpha}^a \frac{r^a}{r} s_r - \alpha_{\alpha}^i \frac{r^i}{r} \right] + \frac{4}{3} [(h^{a'} + b') s_r - (h^{i'} + b')] \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{\alpha} \right\}, \\ H_r^{\alpha} = \frac{q_{\alpha}}{36n_{\alpha}} \left\{ a_{\alpha} (1 + s_r) \left[ \alpha_{\alpha}^a \left(\frac{r^a}{r}\right)^2 + \alpha_{\alpha}^i \left(\frac{r^i}{r}\right)^2 \right] + \frac{4}{3} (1 + s_r) \left[ h^{a'} \frac{r^a}{r} + h^{i'} \frac{r^i}{r} + 2b' \right] \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{\alpha} \right\}. \end{array} \right.$$

## 2. Berechnung der Belastungsgrößen bei gleichmäßiger Vollbelastung.

Die Summen in den Belastungsgliedern für gleichmäßige Vollbelastung enthalten bei gleichbleibenden Trägheitsmomenten, wie aus (57) und (58) hervorgeht, die Teilsummen  $\sum \bar{w}_m m m'$ ,  $\sum \bar{w}_{\alpha m} m m'$ ,  $\sum \bar{w}_m \gamma_m$  und  $\sum \bar{w}_{\alpha m} \gamma_m$ , die bei gegebener Felderzahl unveränderlich sind. In der folgenden Tabelle sind sie für  $n=8$  und  $n=10$  berechnet.

$n$	$\sum \bar{w}_m m m'$	$\sum \bar{w}_{\alpha m} m m'$	$\sum \bar{w}_m \gamma_m$	$\sum \bar{w}_{\alpha m} \gamma_m$
8	2016	9576	157248	754056
10	4950	29502	599940	3612708

Mit diesen Teilsummen kann man die Belastungsglieder wie folgt berechnen:

$$(47a) \left\{ \begin{array}{l} \delta_{r,0} = C_r^{rg} \sum_r \bar{w}_m m m' + D_r^{rg} \sum_r \bar{w}_{\alpha m} m m' + E_r^{rg} \sum_r \bar{w}_m \gamma_m + F_r^{rg} \sum_r \bar{w}_{\alpha m} \gamma_m + \\ \quad C_r^{r+1,g} \sum_{r+1} \bar{w}_m m m' + D_r^{r+1,g} \sum_{r+1} \bar{w}_{\alpha m} m m' + E_r^{r+1,g} \sum_{r+1} \bar{w}_m \gamma_m + F_r^{r+1,g} \sum_{r+1} \bar{w}_{\alpha m} \gamma_m, \\ \varepsilon_{r,0} = G_r^{rg} \sum_r \bar{w}_m m m' + H_r^{rg} \sum_r \bar{w}_m \gamma_m + \\ \quad G_r^{r+1,g} \sum_{r+1} \bar{w}_m m m' + H_r^{r+1,g} \sum_{r+1} \bar{w}_m \gamma_m, \end{array} \right.$$

$$(47b) \left\{ \begin{array}{l} C_r^{\alpha g} = \frac{1}{6n_{\alpha}} \left\{ a_{\alpha} \left[ \alpha_{\alpha}^a k_{\alpha}^a s_r \frac{r^a}{r} + \alpha_{\alpha}^i k_{\alpha}^i \frac{r^i}{r} \right] + \frac{4}{3} [h^{a'} k_{\alpha}^a s_r + h^{i'} k_{\alpha}^i - b' (k_{\alpha}^a + s_r k_{\alpha}^i)] \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{\alpha} \right\}, \\ D_r^{\alpha g} = \frac{q_{\alpha}}{36} (1 + s_r) \left\{ a_{\alpha} \left[ \alpha_{\alpha}^a k_{\alpha}^a \left(\frac{r^a}{r}\right)^2 - \alpha_{\alpha}^i k_{\alpha}^i \left(\frac{r^i}{r}\right)^2 \right] + \frac{4}{3} \left[ h^{a'} k_{\alpha}^a \frac{r^a}{r} - h^{i'} k_{\alpha}^i \frac{r^i}{r} + \right. \right. \\ \quad \left. \left. + b' \left( k_{\alpha}^a \frac{r^i}{r} - k_{\alpha}^i \frac{r^a}{r} \right) \right] \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{\alpha} \right\}, \\ E_r^{\alpha g} = \frac{k_{\alpha} q_{\alpha}}{72 n_r} \left\{ a_{\alpha} \left[ \alpha_{\alpha}^a s_r \left(\frac{r^a}{r}\right)^2 - \alpha_{\alpha}^i \left(\frac{r^i}{r}\right)^2 \right] + \frac{4}{3} \left[ h^{a'} s_r \frac{r^a}{r} - h^{i'} \frac{r^i}{r} - b' \left( r - s_r \frac{r^i}{r} \right) \right] \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{\alpha} \right\}, \\ F_r^{\alpha g} = \frac{k_{\alpha} q_{\alpha}^2}{432} (1 + s_r) \left\{ a_{\alpha} \left[ \alpha_{\alpha}^a \left(\frac{r^a}{r}\right)^3 + \alpha_{\alpha}^i \left(\frac{r^i}{r}\right)^3 \right] + \frac{4}{3} \left[ h^{a'} \left(\frac{r^a}{r}\right)^2 + \right. \right. \\ \quad \left. \left. + h^{i'} \left(\frac{r^i}{r}\right)^2 + 2b' \frac{r^a r^i}{r^2} \right] \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{\alpha} \right\}, \\ G_r^{\alpha g} = \frac{1}{6n_{\alpha}} \left\{ a_{\alpha} \left[ \alpha_{\alpha}^a k_{\alpha}^a \frac{r^a}{r} - \alpha_{\alpha}^i k_{\alpha}^i \frac{r^i}{r} \right] + \frac{4}{3} [h^{a'} k_{\alpha}^a - h^{i'} k_{\alpha}^i + b' (k_{\alpha}^a - k_{\alpha}^i)] \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{\alpha} \right\}, \\ H_r^{\alpha g} = \frac{k_{\alpha} q_{\alpha}}{72 n_{\alpha}} \left\{ a_{\alpha} \left[ \alpha_{\alpha}^a \left(\frac{r^a}{r}\right)^2 + \alpha_{\alpha}^i \left(\frac{r^i}{r}\right)^2 \right] + \frac{4}{3} \left[ h^{a'} \frac{r^a}{r} + h^{i'} \frac{r^i}{r} + 2b' \right] \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_{\alpha} \right\}. \end{array} \right.$$

### 3. Berechnung der Einflußwerte der Unbekannten.

Die bei der Ermittlung der Einflußlinien erforderlichen Belastungsgrößen sind nach (59) und (61) aus (43a) bis (45a) bereits bekannt.

Die Ausdrücke für die Einflußwerte  $\delta_i^{v a}$  und  $\delta_i^{v i}$  können, wie aus (39) und (63) folgt, auch nach den Unbekannten geordnet werden:

$$(68) \quad \begin{cases} \delta_i^{v a} = C_v^{v a} Y_v + C_{v-1}^{v a} Y_{v-1} + D_v^{v a} Z_v + D_{v-1}^{v a} Z_{v-1}, \\ \delta_i^{v i} = C_v^{v i} Y + C_{v-1}^{v i} Y_{v-1} + D_v^{v i} Z + D_{v-1}^{v i} Z_{v-1}. \end{cases}$$

In (63) treten nach Einführung von  $\mu_{im}$  aus (21a) die Teilsummen  $\sum \bar{w}_m \mathfrak{M}_{im}$ ,  $i i' \sum \bar{w}_m \beta_{im}$ ,  $\bar{w}_{am} \mathfrak{M}_{im}$  und  $i i' \bar{w}_{am} \beta_{im}$  auf, die bei bestimmter Felderzahl feste Werte sind. Die folgende Tabelle enthält diese Werte für die Felderzahlen 8 und 10.

	$n \setminus i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sum \bar{w}_m \mathfrak{M}_{im}$	8	504	960	1320	1536	1560	1340	840	—	—
	10	990	1920	2730	3360	3750	3840	3570	2880	1710
$i i' \sum \bar{w}_m \beta_{im}$	8	22680	42336	56232	62208	58968	46368	25704	—	—
	10	69498	133056	185094	220752	236250	229248	199206	147744	79002
$\sum \bar{w}_{am} \mathfrak{M}_{im}$	8	2772	5172	6864	7584	7176	5628	3108	—	—
	10	6851	13114	18236	21739	23250	22541	19564	14486	7729
$i i' \sum \bar{w}_{am} \beta_{im}$	8	113238	209844	275418	299808	278694	214524	116586	—	—
	10	435877	830650	1146741	1353413	1429650	1366387	1167880	853990	449183

Mit diesen Teilsummen können die Beiwerte der Unbekannten in (68) wie folgt berechnet werden:

$$(68a) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_x^{v \sigma} = [C_{x1}^{v \sigma} \sum_v \bar{w}_m^{\sigma} \mathfrak{M}_{im} + C_{x2}^{v \sigma} i i' \sum_v \bar{w}_m^{\sigma} \beta_{im} + C_{x3}^{v \sigma} \sum_v \bar{w}_{am}^{\sigma} \mathfrak{M}_{im} + C_{x4}^{v \sigma} i i' \sum_v \bar{w}_{am}^{\sigma} \beta_{im}] a, \\ D_x^{v \sigma} = [D_{x1}^{v \sigma} \sum_v \bar{w}_m^{\sigma} \mathfrak{M}_{im} + D_{x2}^{v \sigma} i i' \sum_v \bar{w}_m^{\sigma} \beta_{im}] a. \end{array} \right.$$

$\sigma$	$x$	$\bar{w}^{\sigma}$
$a$	$v-1$	$\bar{w}'$
	$v$	$\bar{w}$
$i$	$v$	$\bar{w}$
	$v+1$	$\bar{w}'$

Die Summen mit  $\bar{w}'$ -Gewichten sind gleich den  $i'$ -Werten ( $i' = n - i$ ) der vorstehenden Tabelle.

$$(68b) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{x1}^{v a} = \frac{1}{6 n_x^2} \frac{r^a}{r} \left\{ a_v \alpha_v^a \frac{r^a}{r} s_x + \frac{4}{3} (h^{a'} s_x - b') \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_v \right\}, \\ C_{x1}^{v i} = \frac{1}{6 n_x^2} \frac{r^i}{r} \left\{ a_v \alpha_v^i \frac{r^i}{r} + \frac{4}{3} (h^{i'} - b' s_x) \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_v \right\}, \\ C_{x2}^{v a} = \frac{1}{36 n_v^2} \frac{r^a}{r} q_v \left\{ a_v \left[ \alpha_v^a \left( \frac{r^a}{r} \right)^2 s_x - \alpha_v^i \left( \frac{r^i}{r} \right)^2 \right] + \frac{4}{3} \left[ h^{a'} \frac{r^a}{r} s_x - h^{i'} \frac{r^i}{r} - b' \left( \frac{r^a}{r} - \frac{r^i}{r} s_x \right) \right] \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_v \right\}, \\ C_{x2}^{v i} = \frac{r^i}{r^a} C_{x2}^{v a}, \\ C_{x3}^{v a} = \frac{1}{36 n_v} \frac{r^a}{r} (1 + s_x) q_v \left\{ a_v \alpha_v^a \left( \frac{r^a}{r} \right)^2 + \frac{4}{3} \left( h^{a'} \frac{r^a}{r} + b' \frac{r^i}{r} \right) \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_v \right\}, \\ C_{x3}^{v i} = -\frac{1}{36 n_v} \frac{r^i}{r} (1 + s_x) q_v \left\{ a_v \alpha_v^i \left( \frac{r^i}{r} \right)^2 + \frac{4}{3} \left( h^{i'} \frac{r^i}{r} + b' \frac{r^a}{r} \right) \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_v \right\}, \\ C_{x4}^{v a} = \frac{1}{216 n_v} \frac{r^a}{r} (1 + s_x) q_v^2 \left\{ a_v \left[ \alpha_v^a \left( \frac{r^a}{r} \right)^3 + \alpha_v^i \left( \frac{r^i}{r} \right)^3 \right] + \frac{4}{3} \left[ h^{a'} \left( \frac{r^a}{r} \right)^2 + h^{i'} \left( \frac{r^i}{r} \right)^2 + 2b' \frac{r^a r^i}{r^2} \right] \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_v \right\}, \\ C_{x4}^{v i} = \frac{r^i}{r^a} C_{x4}^{v a}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{\times 1}^{va} = \frac{1}{6n_v^2} \frac{ra}{r} \left[ a_v \alpha_v^a \frac{ra}{r} + \frac{4}{3} (h^{a'} + b') \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_v \right], \\ D_{\times 1}^{vi} = -\frac{1}{6n_v^2} \frac{ri}{r} \left[ a_v \alpha_v^i \frac{ri}{r} + \frac{4}{3} (h^{i'} + b') \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_v \right], \\ D_{\times 2}^{va} = \frac{1}{36n_v^2} \frac{ra}{r} q_v \left\{ a_v \left[ \alpha_v^a \left( \frac{ra}{r} \right)^2 + \alpha_v^i \left( \frac{ri}{r} \right)^2 \right] + \frac{4}{3} \left[ h^{a'} \frac{ra}{r} + h^{i'} \frac{ri}{r} + 2b' \right] \sin^2 \frac{1}{2} \varphi_v \right\}, \\ D_{\times 2}^{vi} = \frac{ri}{ra} D_{\times 2}^{va}. \end{array} \right.$$

Diese Berechnungsart bietet namentlich bei gleichen Öffnungen große Vorteile, da dann die Beiwerte  $C$  und  $D$  in allen Öffnungen gleich sind und mit ihnen in jeder Öffnung die Einflußwerte  $\delta_i^a$  und  $\delta_i^i$  nach (68) ermittelt werden können.

Die so bestimmten Einflußwerte müssen durch die nach (60) bzw. (62) ermittelten Einheiten dividiert werden, um ihre Absolutwerte zu erhalten.

Bei der Berechnung der Einflußwerte der Unbekannten nach dem anderen Verfahren sind, wie aus den Bemerkungen am Schluß von BI 3 hervorgeht, die Belastungsglieder  $\delta_{v-1,0}$ ,  $\delta_{v,0}$ ,  $\varepsilon_{v-1,0}$ ,  $\varepsilon_{v,0}$  gleich den nach (68a) ermittelten Werten  $C_{v-1}^\sigma$ ,  $C_v^\sigma$ ,  $D_{v-1}^\sigma$ ,  $D_v^\sigma$ . Für  $\sigma$  ist  $a$  oder  $i$  zu setzen, je nachdem, ob die Last  $P=1$  am äußeren oder inneren Träger wirkt.

#### 4. Beispiel.

Die Vorteile, die das beschriebene Berechnungsverfahren bei öfFnungsweise gleich bleibendem Trägheitsmoment hinsichtlich Zeitaufwand und Übersichtlichkeit bietet, gehen aus dem folgenden Beispiel hervor: Die Brücke hat drei gleiche Öffnungen mit  $l=10$   $a=40$  m; die Hauptträger sind durchlaufende Träger mit unveränderlichem Trägheitsmoment und 2,5 m Höhe. Die Krümmungsverhältnisse sind die gleichen wie bei dem Beispiel der Brücke über eine Öffnung:  $ra=202,5$ ,  $r=200,0$ ,  $ri=197,5$ ,  $b=5$  m. Die Steifigkeitsverhältnisse sind durch folgende Annahmen festgelegt:  $I_a=I_i=I_c=6 \cdot 10^6$ ,  $I_v=15 \cdot 10^3$  und  $I_q=15 \cdot 10^4$  cm<sup>4</sup>. Somit ist  $\alpha^a=\alpha^i=1$ ,  $\frac{I_c}{I_b}=400$ ,  $\frac{I_c}{I_q}=40$ . Im folgenden sind die jeweils benützten Formeln in Klammer nachgesetzt.

$$\left. \begin{array}{l} h^{a'} = h^{i'} = 400 \cdot 2,5 + 40 \cdot 5 = 1200 \text{ m,} \\ b' = 40 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 = 100 \text{ m.} \end{array} \right\} \quad (38)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_r = -6872 \cdot 10^{-6}, \\ B_r = 3710 \cdot 10^{-6}, \\ C_r = 7039 \cdot 10^{-6}, \end{array} \right\} \quad (53b)$$

$$s_r = -\frac{3710 \cdot 9700 - 6872 \cdot 2000}{3710 \cdot 7900 + 7039 \cdot 2000} = -0,635753.$$

Da die  $s_r$  für alle Öffnungen gleich sind, entfällt bei den folgenden Beiwerten die Unterscheidung durch die Zeiger  $\varkappa$  und  $\nu$ .

$$\left. \begin{array}{l} C_r = 965775 \cdot 10^{-8} \\ D_r = -194654 \cdot 10^{-9} \\ E_r = 264809 \cdot 10^{-10} \end{array} \right\} \quad (43b)$$

$$F_r = 139111 \cdot 10^{-7} \quad (44b)$$

$$\left. \begin{array}{l} G_r = -239720 \cdot 10^{-8} \\ H_r = 606894 \cdot 10^{-9} \end{array} \right\} \quad (45b)$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta_{r,r-1} = \delta_{r,r+1} = 10^{-8} [965775 \cdot 1000 - 19465,4 \cdot 6950 + 2648,09 \cdot 43888] = 9,45916, \\ \delta_{r,r} = 2 \cdot 10^{-8} [965775 \cdot 2000 - 19465,4 \cdot 7900 + 2648,09 \cdot 44918] = 37,93452, \end{array} \right\} \quad (43a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{r,r-1} = \varepsilon_{r,r+1} = 139111 \cdot 10^{-7} \cdot 1000 = 13,9111 \\ \varepsilon_{r,r} = 2 \cdot 139111 \cdot 10^{-7} \cdot 2000 = 55,6444, \end{array} \right\} \quad (44a)$$

$$\zeta_{r,r-1} = \zeta_{r,r+1} = \eta_{r,r-1} = \eta_{r,r+1} = 10^{-8} [-239720 \cdot 1000 + 60689,4 \cdot 6950] = 1,82071. \quad (45a)$$

Auch bei den Beiwerten (47b) entfällt die Unterscheidung durch die Zeiger  $z$ .

$$\left. \begin{aligned} C_r^g &= 897\,307 \cdot 10^{-6}, \\ D_r^g &= 239\,848 \cdot 10^{-8}, \\ E_r^g &= -481\,414 \cdot 10^{-9}, \\ F_r^g &= 129\,450 \cdot 10^{-9}, \\ G_r^g &= 411\,576 \cdot 10^{-7}, \\ H_r^g &= 296\,860 \cdot 10^{-8}. \end{aligned} \right\} (47b)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{r,0} &= 2 \cdot 10^{-6} [897\,307 \cdot 4950 + 2398,48 \cdot 29\,502 - 481,414 \cdot 599\,940 + \\ &\quad + 129,45 \cdot 3\,612\,708] = 9382,81 \\ \varepsilon_{r,0} &= 2 \cdot 10^{-7} [411\,576 \cdot 4950 + 29\,686 \cdot 599\,940] = 3969,44. \end{aligned} \right\} (47a)$$

Wegen Symmetrie der Belastung ist  $Y_1^g = Y_2^g = Y^g$  und  $Z_1^g = Z_2^g = Z^g$ . Somit lauten die Bestimmungsgleichungen der Unbekannten:

$$\begin{aligned} 47,3937 Y^g + 1,8207 Z^g &= -9382,81 \\ 1,8207 Y^g + 69,5555 Z^g &= -3969,44 \\ \hline Y^g &= -195,9804 \text{ tm}, \quad Z^g = -51,9381 \text{ tm}. \end{aligned}$$

Zur Überprüfung dieser Werte kann die Bedingung dienen, daß die Verschiebung in der Richtung einer Unbekannten verschwinden muß. Diese Verschiebung rechnet sich aus (47), wenn in den Summen dieser Formeln Gewichte eingesetzt werden, die den nach (53) mit  $Y^g$  und  $Z^g$  berechneten Momenten  $M_{rm}^a$  und  $M_{rm}^i$  entsprechen. Der leichteren Rechnung wegen empfiehlt es sich, hierfür die Verschiebung in der Richtung einer Unbekannten  $Z_r$  zu wählen ( $\varepsilon_{r,0} = 0$ ). Im vorliegenden Beispiel lautet diese Bedingung:

$$\begin{aligned} &\left[ a \frac{r^a}{r} + \frac{4}{3} (h^{a'} + b') \sin^2 \varphi \right] \left\{ 2k^a \sum w_m m m' + \frac{kq}{6} \frac{r^a}{r} \sum w_m \gamma_m + Y^g \left[ \frac{s}{n} (2 \sum w_m m + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum w_m m') + (1+s) \frac{r^a q}{r 6} (2 \sum w_{\alpha m} m + \sum w_{\alpha m} m') \right] + \frac{Z^g}{n} [2 \sum w_m m + \sum w_m m'] \right\} = \\ &= \left[ a \frac{r^i}{r} + \frac{4}{3} (h^{i'} + b') \sin^2 \varphi \right] \left\{ 2k^i \sum w_m m m' - \frac{kq}{6} \frac{r^i}{r} \sum w_m \gamma_m + Y^g \left[ \frac{1}{n} (2 \sum w_m m + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum w_m m') - (1+s) \frac{r^i q}{r 6} (2 \sum w_{\alpha m} m + \sum w_{\alpha m} m') \right] - \frac{Z^g}{n} [2 \sum w_m m + \sum w_m m'] \right\}. \end{aligned}$$

Mit den aus den Tabellen genommenen Summen und den gefundenen Werten  $Y^g$  und  $Z^g$  ergibt die vorstehende Kontrollgleichung  $3561,01 = 3567,92$ , also die Richtigkeit der Lösungen. Damit errechnen sich die Stützenmomente

$$\left. \begin{aligned} X^{ag} &= -0,635753 \cdot 195,9804 - 51,9381 = -176,5332 \text{ tm}, \\ X^{ig} &= -195,9804 + 51,9381 = -144,0423 \text{ tm}. \end{aligned} \right\} (54)$$

Mit den Belastungsgliedern (59) lauten die Bestimmungsgleichungen zur Berechnung der Einflußwerte  $Y_1$ :

$$\begin{aligned} 37,9345 Y_2 + 1,8207 Z_1 &= -9,4592 \\ 1,8207 Y_2 + 55,6444 Z_1 + 13,9111 Z_2 &= 0 \\ 13,9111 Z_1 + 55,6444 Z_2 &= -1,8207 \\ \hline Y_1 = 1 & \quad Z_1 = +0,0174575 \\ Y_2 = -0,250194 & \quad Z_2 = -0,0370847 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}^y &= 37,9345 - 9,4592 \cdot 0,250194 - 1,8207 \cdot 0,0370847 \\ &= 35,50036, \end{aligned} \right\} (60)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta_{11}^y} Y_1 &= +0,0281687 & \frac{1}{\delta_{11}^y} Z_1 &= +0,000491756, \\ \frac{1}{\delta_{11}^y} Y_2 &= -0,00704765 & \frac{1}{\delta_{11}^y} Z_2 &= -0,00104463. \end{aligned}$$

Infolge Gleichheit der Öffnungen entfällt in den Ausdrücken (68 b) die Unterscheidung durch die Zeiger  $\nu$  und  $z$ .

$$\left. \begin{aligned} C_1^a &= 449\,415 \cdot 10^{-8} & C_1^i &= 675\,042 \cdot 10^{-8} \\ C_2^a &= -609\,201 \cdot 10^{-11} & C_2^i &= -594\,159 \cdot 10^{-11} \\ C_3^a &= 314\,736 \cdot 10^{-9} & C_3^i &= -292\,345 \cdot 10^{-9} \\ C_4^a &= 163\,911 \cdot 10^{-11} & C_4^i &= 159\,864 \cdot 10^{-11} \\ D_1^a &= 712\,687 \cdot 10^{-8} & D_1^i &= 678\,632 \cdot 10^{-8} \\ D_2^a &= 375\,656 \cdot 10^{-10} & D_2^i &= 366\,381 \cdot 10^{-10} \end{aligned} \right\} (68b)$$

Damit sind nach (68a) die Größen  $C^a$ ,  $C^i$ ,  $D^a$  und  $D^i$  bestimmt.

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C^a$	27,5860	53,2284	75,0420	91,2636	100,2996	100,7800	91,6092	72,0084	41,4904
$C^i$	19,8556	38,6572	55,3232	68,7124	77,5956	80,6168	76,2520	62,7748	38,1296
$D^a$	38,6652	74,6476	105,6384	128,9560	142,4028	143,9160	131,7048	104,3020	60,6192
$-D^i$	16,6888	32,6192	46,9808	58,8564	67,1720	70,6412	67,7148	56,5260	34,8404

Die gleichen Größen mit dem unteren Zeiger  $\nu-1$  sind gleich den Werten der vorstehenden Tabelle für  $i' = n - i$ .

Nach (68) berechnen sich daraus die Einflußwerte für  $Y_1$ :

$\nu \setminus i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$\delta_i^{r,a}$	1	0,79608	1,53612	2,16580	2,63420	2,89536	2,90960	2,64528	2,07968	1,19852
	2	0,96372	1,62660	2,00604	2,13168	2,03972	1,77360	1,38256	0,91968	0,44036
	3	0,35572	0,61644	0,78324	0,86060	0,85564	0,77792	0,63924	0,45308	0,23480
$\delta_i^{v,i}$	1	0,55112	1,07288	1,53528	1,90660	2,15272	2,23616	2,11464	1,74048	1,05696
	2	0,93448	1,50212	1,77384	1,81336	1,67600	1,41224	1,06860	0,68952	1,31880
	3	0,23232	0,38336	0,45868	0,49436	0,47672	0,42280	0,34080	0,23836	0,03062

Die Einflußwerte  $\delta_i^{3,a}$  und  $\delta_i^{3,i}$  sind negativ.

Die Richtigkeit der Einflußlinie kann geprüft werden an der Bedingung, daß die Auswertung mit  $g=1$  t/m den früher gefundenen Wert  $Y^g$  geben muß:  $a \left[ \frac{r^a}{r} \sum \delta_i^{r,a} + \frac{r^i}{r} \sum \delta_i^{r,i} \right] = Y^g$ . (Die Summen erstrecken sich über alle Öffnungen.) Die Auswertung liefert  $Y^g = 196,0245$  gegenüber dem früher gefundenen Werte von 195,9804.

In gleicher Weise erfolgt auch die Berechnung der in der folgenden Tabelle zusammengestellten Einflußwerte für  $Z_1$ .

$\nu \setminus i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$\delta_i^{v,a}$	1	0,75632	1,46016	2,06624	2,52212	2,78488	2,81420	2,57508	2,03904	1,18488
	2	0,96976	1,62376	1,98764	2,09748	1,99392	1,72336	1,33592	0,88232	0,42084
	3	0,33548	0,57784	0,73032	0,79876	0,79096	0,71672	0,58744	0,41528	0,21512
$\delta_i^{v,i}$	1	0,31084	0,60760	0,87532	1,09684	1,25220	1,31740	1,26332	1,05500	0,65052
	2	0,59088	0,93824	1,09472	1,10556	1,00956	0,84064	0,62868	0,40080	0,18520
	3	0,12804	0,20680	0,24664	0,25620	0,24264	0,21184	0,16860	0,11676	0,05964

Die Einflußwerte  $\delta_i^{1,i}$ ,  $\delta_i^{2,i}$  und  $\delta_i^{3,a}$  sind negativ.

Ausgewertet mit  $g=1$  t/m erhält man  $Z^g = 51,9166$  in sehr guter Übereinstimmung mit dem früher gefundenen Werte von 51,9381.

### III. Die über mehrere gleiche Öffnungen durchlaufenden Hauptträger haben auf die ganze Länge der Brücke unveränderliches Trägheitsmoment.

#### 1. Aufstellung der simultanen Differenzgleichungen und ihre Lösung im allgemeinen.

Wenn die Brückenöffnungen gleich und die Trägheitsmomente der durchlaufenden Hauptträger auf die ganze Länge der Brücke unveränderlich sind — die beiden Hauptträger können dabei verschieden sein —, so sind auch die Beiwerte der Unbekannten in den Gleichungen (41a) konstant:

$$(69) \quad \begin{cases} \delta_{r,r-1} = \delta_{r,r+1} = \delta', & \varepsilon_{r,r-1} = \varepsilon_{r,r+1} = \varepsilon', \\ \delta_{r,r} = \delta'', & \varepsilon_{r,r} = \varepsilon'', \\ \zeta_{r,r-1} = \zeta_{r,r+1} = \zeta', & \eta_{r,r-1} = \eta_{r,r+1} = \eta'. \end{cases}$$

Die Gleichungen vereinfachen sich, wenn man das erste System durch  $\delta'$ , das zweite durch  $\varepsilon'$  dividiert:

$$(41b) \quad \begin{cases} Y_{r-1} + \delta Y_r + Y_{r+1} + \zeta (Z_{r-1} + Z_{r+1}) = -\delta_r, \\ \eta (Y_{r-1} + Y_{r+1}) + Z_{r-1} + \varepsilon Z_r + Z_{r+1} = -\varepsilon_r, \end{cases}$$

$$(70) \quad \begin{cases} \delta = \frac{\delta''}{\delta'}, & \zeta = \frac{\zeta'}{\delta'}, & \eta = \frac{\eta'}{\varepsilon'}, & \varepsilon = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}, \\ \delta_r = \frac{\delta_{r,0}}{\delta'}, & \varepsilon_r = \frac{\varepsilon_{r,0}}{\varepsilon'}. \end{cases}$$

Die Stützenmomente des ebenen, über mehrere gleiche Öffnungen durchlaufenden Trägers mit unveränderlichem Trägheitsmoment lassen sich bekanntlich als Lösungen von Differenzgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Beiwerten darstellen. In ähnlicher Weise können auch die Unbekannten eines räumlichen Brückentragwerkes, dessen Hauptträger auf konzentrischen Kreisen liegen und mit unveränderlichem Trägheitsmoment über mehrere gleiche Öffnungen ohne Gelenke durchlaufen, als geschlossene Lösungen der simultanen Differenzgleichungen (41b) gefunden werden.

Setzt man  $Y_r = k^r$  und  $Z_r = \varkappa k^r$  in die homogenen Gleichungen ein, so erhält man

$$(71) \quad \begin{cases} k^2 + \delta k + 1 + \varkappa \zeta (k^2 + 1) = 0, \\ \eta (k^2 + 1) + \varkappa (k^2 + \varepsilon k + 1) = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination von

$$(72) \quad \varkappa = -\frac{k^2 + \delta k + 1}{\zeta (k^2 + 1)} = -\frac{\eta (k^2 + 1)}{k^2 + \varepsilon k + 1}$$

folgt nach Umformung die charakteristische Gleichung

$$(73) \quad k^4 + \frac{\delta + \varepsilon}{1 - \zeta \eta} k^3 + \left( 2 + \frac{\delta \varepsilon}{1 - \zeta \eta} \right) k^2 + \frac{\delta + \varepsilon}{1 - \zeta \eta} k + 1 = 0.$$

Dieser Ausdruck läßt sich in zwei Faktoren zerlegen:

$$(73a) \quad (k^2 + a k + 1) \cdot (k^2 + b k + 1) = 0.$$

Durch Ausführung der Multiplikation und Vergleich der Beiwerte gleicher Potenzen von  $k$  findet man

$$(74) \quad \begin{cases} a + b = \frac{\delta + \varepsilon}{1 - \zeta \eta}, \\ a b = \frac{\delta \varepsilon}{1 - \zeta \eta} \end{cases}$$

und daraus

$$(75) \quad \begin{cases} a \\ b \end{cases} = \frac{\delta + \varepsilon \pm \sqrt{(\delta - \varepsilon)^2 + 4 \delta \varepsilon \zeta \eta}}{2(1 - \zeta \eta)}.$$

Damit ergeben sich aus

$$(76) \quad \begin{cases} k^2 + a k + 1 = 0, \\ k^2 + b k + 1 = 0, \end{cases}$$

die Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$(77) \quad \begin{cases} k_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \\ k_{3,4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2}, \end{cases}$$

und aus (72) unter Beachtung von (76)

$$(78) \quad \begin{cases} \varkappa_1 = \varkappa_2 = \frac{\delta - a}{a \zeta} = \frac{a \eta}{\varepsilon - a}, \\ \varkappa_3 = \varkappa_4 = \frac{\delta - b}{b \zeta} = \frac{b \eta}{\varepsilon - b}. \end{cases}$$

Berücksichtigt man weiter, daß  $k_2 = \frac{1}{k_1}$  und  $k_4 = \frac{1}{k_3}$  ist, so sind die Lösungen der homogenen Gleichungen:

$$(79) \quad \begin{cases} Y_r^0 = C_1 k_1^r + C_2 k_1^{-r} + C_3 k_3^r + C_4 k_3^{-r}, \\ Z_r^0 = \varkappa_1 (C_1 k_1^r + C_2 k_1^{-r}) + \varkappa_3 (C_3 k_3^r + C_4 k_3^{-r}). \end{cases}$$

Die vollständige Lösung hängt von der Art der Belastungsglieder ab.

## 2. Gleichmäßige Vollbelastung.

Bei gleichmäßiger Vollbelastung sind alle nach (47a) ermittelten Belastungsglieder gleich und vom Ort unabhängig; somit sind auch die Partikularlösungen  $u_1$  und  $u_2$  konstant. Man erhält sie durch Einsetzen in (41b) aus den folgenden Gleichungen:

$$(80) \quad \begin{cases} (2 + \delta) u_1 + 2 \zeta u_2 = -\delta_r \\ 2 \eta u_1 + (2 + \varepsilon) u_2 = -\varepsilon_r \end{cases}$$

$$(80a) \quad \begin{cases} u_1 = \frac{-(2 + \varepsilon) \delta_r + 2 \zeta \varepsilon_r}{(2 + \delta)(2 + \varepsilon) - 4 \zeta \eta}, \\ u_2 = \frac{2 \eta \delta_r - (2 + \delta) \varepsilon_r}{(2 + \delta)(2 + \varepsilon) - 4 \zeta \eta}. \end{cases}$$

Damit lauten die vollständigen Lösungen:

$$(81) \quad \begin{cases} Y_r = C_1 k_1^r + C_2 k_1^{-r} + C_3 k_3^r + C_4 k_3^{-r} + u_1, \\ Z_r = \varkappa_1 (C_1 k_1^r + C_2 k_1^{-r}) + \varkappa_3 (C_3 k_3^r + C_4 k_3^{-r}) + u_2. \end{cases}$$

Aus der Bedingung, daß für  $r=0$  und  $r=n$  die Unbekannten verschwinden müssen (Randbedingungen)

$$(82) \quad \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = -u_1 \\ \varkappa_1 (C_1 + C_2) + \varkappa_3 (C_3 + C_4) = -u_2 \\ C_1 k_1^n + C_2 k_1^{-n} + C_3 k_3^n + C_4 k_3^{-n} = -u_1 \\ \varkappa_1 (C_1 k_1^n + C_2 k_1^{-n}) + \varkappa_3 (C_3 k_3^n + C_4 k_3^{-n}) = -u_2 \end{cases}$$

errechnen sich die Konstanten mit folgenden Werten:

$$(83) \quad \begin{cases} C_1 = \frac{p_1}{1 + k_1^n}, \\ C_2 = C_1 k_1^n, \\ C_3 = \frac{p_2}{1 + k_3^n}, \\ C_4 = C_3 k_3^n, \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 = \frac{\varkappa_3 u_1 - u_2}{\varkappa_1 - \varkappa_3}, \\ p_2 = \frac{-\varkappa_1 u_1 + u_2}{\varkappa_1 - \varkappa_3}. \end{cases}$$

Damit erhalten die Lösungen (81) folgende Form:

$$(81a) \quad \begin{cases} Y_r = C_1 (k_1^r + k_1^{n-r}) + C_3 (k_3^r + k_3^{n-r}) + u_1, \\ Z_r = \varkappa_1 C_1 (k_1^r + k_1^{n-r}) + \varkappa_3 C_3 (k_3^r + k_3^{n-r}) + u_2. \end{cases}$$

Die gleiche Berechnungsweise ist auch für jede beliebige Belastung durch Einzel- oder Streckenlasten gültig, wenn diese Belastung sich in jeder Brückenöffnung wiederholt. Dann sind auch die Belastungsglieder der Bestimmungsgleichungen und damit ebenso die Partikularlösungen  $u_1$  und  $u_2$  konstant.



für die Festwerte die Ausdrücke

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = -C_2 = \frac{\varrho_1 (\beta^{v'} \delta_v + \beta^{v'+1} \delta_{v-1}) + \varrho_2 (\beta^{v'} \varepsilon_v + \beta^{v'+1} \varepsilon_{v-1})}{\beta^v \beta^{v'+1} - \beta^{v-1} \beta^{v'}}, \\ C_3 = -C_4 = \frac{\varrho_3 (\gamma^{v'} \delta_v + \gamma^{v'+1} \delta_{v-1}) + \varrho_4 (\gamma^{v'} \varepsilon_v + \gamma^{v'+1} \varepsilon_{v-1})}{\gamma^v \gamma^{v'+1} - \gamma^{v-1} \gamma^{v'}}, \\ C'_1 = -C'_2 = \frac{\varrho_1 (\beta^v \delta_v + \beta^{v-1} \delta_{v-1}) + \varrho_2 (\beta^v \varepsilon_v + \beta^{v-1} \varepsilon_{v-1})}{\beta^v \beta^{v'+1} - \beta^{v-1} \beta^{v'}}, \\ C'_3 = -C'_4 = \frac{\varrho_3 (\gamma^v \delta_v + \gamma^{v-1} \delta_{v-1}) + \varrho_4 (\gamma^v \varepsilon_v + \gamma^{v-1} \varepsilon_{v-1})}{\gamma^v \gamma^{v'+1} - \gamma^{v-1} \gamma^{v'}}. \end{array} \right.$$

Damit erhält man die endgültigen Lösungen in der Form

$$\begin{aligned} Y_r &= C_1 \beta^r + C_3 \gamma^r, & r &\leq v-1 \\ Z_r &= \kappa_1 C_1 \beta^r + \kappa_3 C_3 \gamma^r, \\ Y_{r'} &= C'_1 \beta^{r'} + C'_3 \gamma^{r'}, & r' &\leq v' \\ Z_{r'} &= \kappa_1 C'_1 \beta^{r'} + \kappa_3 C'_3 \gamma^{r'}. \end{aligned}$$

#### 4. Beispiel.

Obwohl das Verfahren sich um so vorteilhafter erweist, je größer die Anzahl der Öffnungen ist, wird im folgenden — der Vergleichsmöglichkeit wegen — das in B II 4 gewählte Beispiel einer Brücke mit drei gleichen Öffnungen behandelt. Mit den dort gefundenen Beiwerten ergeben sich nach (70) die entsprechenden zu den Gleichungen (41 b) gehörigen Werte.

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{37,93452}{9,45916} = 4,01035, & \varepsilon &= \frac{55,6444}{13,9111} = 4,00000, \\ \zeta &= \frac{1,82071}{9,45916} = 0,19248, & \eta &= \frac{1,82071}{13,9111} = 0,13088. \end{aligned}$$

Mit  $\delta + \varepsilon = 8,01035$ ,  $\delta - \varepsilon = 0,01035$ ,  $4 \delta \varepsilon \zeta \eta = 1,61648$  und  $1 - \zeta \eta = 0,97481$  ergeben sich die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$\begin{aligned} k_1 &= -0,220235, & k_3 &= -0,318691, \\ k_2 &= k_1^{-1}, & k_4 &= k_3^{-1}, \end{aligned}$$

und damit aus (72)

$$\kappa_1 = \kappa_2 = -0,818978; \quad \kappa_3 = \kappa_4 = 0,832417.$$

Gleichmäßige Vollbelastung.

$$\begin{aligned} \delta_1 = \delta_2 &= \frac{9382,81}{9,45916} = 991,9284, \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 &= \frac{3969,44}{13,9111} = 285,3434, \\ 6,01035 u_1 + 0,38496 u_2 &= -991,9284 \\ 0,26176 u_1 + 6,00000 u_2 &= -285,3434 \\ \hline u_1 &= -162,4447 & u_2 &= -40,4702. \end{aligned}$$

Damit folgt aus (83)

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{-135,2217 + 40,4702}{-1,65139} = 57,3768, \\ p_2 &= \frac{-133,0386 - 40,4702}{-1,65139} = 105,0683, \\ C_1 &= \frac{57,3768}{0,989318} = 57,9963, \\ C_3 &= \frac{105,0683}{0,967632} = 108,5829, \end{aligned}$$

und aus (81a)

$$Y_1 = 57,9963 (k_1 + k_1^2) + 108,5829 (k_3 + k_3^2) - 162,4447 = -195,9808$$

$$(-195,9804),$$

$$Z_1 = -0,81898 \cdot 9,95982 - 0,83242 \cdot 23,57628 - 40,4702 = -51,9386$$

$$(-51,9381).$$

### Einflußlinien der Unbekannten.

Im folgenden sollen nur die Einflußwerte für  $Y_1$  und  $Z_1$  in den Punkten 4<sup>a</sup> der ersten und 6<sup>a</sup> der dritten Öffnung nachgeprüft werden. Bei Belastung der ersten Öffnung  $\nu = 1$ ,  $\nu' = 2$ .

Mit den für  $i = 4$  und 6 entnommenen Werten der Tabelle der  $C^a$  und  $D^a$  in B II 4 erhält man

$$\delta_{\nu-1} = \frac{100,7800}{9,45916} = 10,6542,$$

$$\delta_{\nu} = \frac{91,2636}{9,45916} = 9,64817,$$

$$\varepsilon_{\nu-1} = \frac{143,9160}{13,9111} = 10,3454,$$

$$\varepsilon_{\nu} = \frac{128,9560}{13,9111} = 9,27001.$$

Die benötigten  $\beta^{\nu}$ - und  $\gamma^{\nu}$ -Werte sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

$\nu$	0	1	2	3
$\beta^{\nu}$	0	4,320366	- 20,568554	93,603149
$\gamma^{\nu}$	0	2,819144	- 9,744445	30,862783

Die Hilfswerte (89) sind:

$$N = 0,84236 \cdot 0,96330 + 1,16022 \cdot 0,68810 = 1,60981,$$

$$\varrho_1 = 0,598393,$$

$$\varrho_2 = -0,720722,$$

$$\varrho_3 = 0,427439,$$

$$\varrho_4 = 0,523268.$$

Bei der Belastung der ersten Öffnung ( $\nu = 1$ ) verschwinden in den Ausdrücken (90) die Werte  $\beta^{\nu-1}$  und  $\gamma^{\nu-1}$ ; von den Konstanten werden nur  $C'_1$  und  $C'_3$  benötigt.

$$C'_1 = \frac{4,320366 \cdot (0,598393 \cdot 9,64817 - 0,720722 \cdot 9,27001)}{4,320366 \cdot 93,603144} = -0,00969731,$$

$$C'_3 = \frac{2,819144 \cdot (0,427439 \cdot 9,64817 - 0,523268 \cdot 9,27001)}{2,819144 \cdot 30,862782} = 0,290794.$$

Damit errechnen sich die Einflußwerte im Punkte 4<sup>a</sup> der ersten Öffnung

$$Y_1 = 0,00969731 \cdot 20,568855 - 0,290794 \cdot 9,744445 = -2,63417$$

$$(-2,63420),$$

$$Z_1 = -0,81898 \cdot 0,199460 - 0,83242 \cdot 2,833625 = -2,52211$$

$$(-2,52212).$$

Die Einflußwerte der gleichen Unbekannten im Punkte 6<sup>a</sup> der dritten Öffnung stimmen überein mit den Einflußwerten  $Y_2$  bzw.  $Z_2$  im Punkte 4<sup>a</sup> der ersten Öffnung.

$$Y_2 = C'_1 \beta + C'_3 \gamma = -0,00969731 \cdot 4,320366 + 0,290794 \cdot 2,819144 = 0,77789$$

$$(0,77792),$$

$$Z_2 = \kappa_1 C'_1 \beta + \kappa_3 C'_3 \gamma = 0,81898 \cdot 0,0418959 + 0,83242 \cdot 0,819790 = 0,71672$$

$$(0,71672).$$

Zum Vergleich sind jeweils die in B II 4 gefundenen Werte in Klammer angeführt.

## Schlußbetrachtung.

Die bei gekrümmten Stahlbrücken mit einem Windverband bisher angewandte Näherungsberechnung nach Kapsch ist nur bei Brücken über eine Öffnung oder sonstigen statisch bestimmten Raumsystemen am Platze. Hier liefert sie sogar, wenn die Bestimmung der Zusatzkräfte bzw. Zusatzmomente genügend oft wiederholt wird, genaue Werte der Momente. Unmittelbar erhält man die genauen Momente aus Differenzgleichungen, für die sich bei gleicher Felderteilung auch geschlossene Lösungen angeben lassen. Zu einfacheren Ausdrücken der Zusatzmomente gelangt man durch eine geringe Vernachlässigung in den Bestimmungsgleichungen. Da die Unterschiede zwischen diesen angenäherten und dem genauen Berechnungsverfahren in der Regel sehr gering sind, kann man sich mit der einfacheren Näherungsrechnung begnügen, zumal diese die Möglichkeit bietet, den Einfluß der Krümmung abzusondern und Tabellen zu benutzen. In den Ergebnissen deckt sie sich mit der ersten Näherung der Berechnung nach Kapsch, hat aber vor ihr den Vorteil des weit geringeren Zeitaufwandes voraus. Auch die Einflußlinien der Momente können darnach rasch ermittelt werden.

Bei gekrümmten Brücken mit durchlaufenden Hauptträgern ohne Gelenke verliert die Näherungsberechnung nach Kapsch ihre Berechtigung, da die unbekanntes Stützenmomente oder Stützenkräfte sowohl von der Krümmung als auch den Formänderungen beeinflusst werden. Sie kann auch nicht mehr angenähert die Größtwerte irgendeiner statischen Wirkung liefern, denn durch die Krümmung werden gegenüber dem ebenen durchlaufenden Träger die Einflußlinien und damit die ungünstigsten Laststellungen beträchtlich geändert. Bei der nicht zu umgehenden genaueren Berechnung ist es aber zulässig, die Trägheitsmomente der Hauptträger auf die Länge einer Öffnung unveränderlich anzunehmen und im statisch bestimmten Grundsystem, das aus einer Reihe von Brücken über eine Öffnung besteht, die Selbstspannungszustände der Unbekannten und die Einflüsse der äußeren Belastung nach dem erwähnten Näherungsverfahren zu bestimmen. Man erreicht damit den Vorteil, daß wieder Tabellen benutzt werden können; dadurch und durch eine günstige Gruppenzusammenfassung der unbekanntes Stützenmomente wird die Berechnung der Beiwerte und Belastungsglieder in den Elastizitätsgleichungen sehr erleichtert.

Bei der Berechnung der Einflußlinien der Unbekannten werden nach (68) die Einflußwerte als Summe von zwei oder vier Produkten erhalten. Die zugehörigen Beiwerte  $C_x^{p\sigma}$  bzw.  $D_x^{p\sigma}$  ergeben sich nach (68a) aus zwei bzw. vier Teilsommen, die in Tabellenform zur Verfügung stehen. Man kann aber auch die Momente  $M_{r,m}^a$  und  $M_{r,m}^i$ , die zu den durch die Belastungsglieder (59) bzw. (61) gekennzeichneten Belastungszuständen gehören, nach (53) ermitteln — dabei sind die Momente  $M_{r,m}^a$  und  $M_{r,m}^i$  mit Hilfe der Tabellen der  $\alpha$ -Werte zu berechnen — und in (39) einsetzen. Die so gefundenen Werte sind noch auf die Einheit  $\delta_{r,r}^y$  bzw.  $\varepsilon_{r,r}^z$  zu beziehen. Diese Rechnung kann zur Überprüfung der Einflußwerte der Unbekannten benutzt werden.

Stichprobenweise dient dem gleichen Zweck die Berechnung der Unbekannten für eine Einzellast  $P = 1$ . Für diesen im einzelnen nicht behandelten Fall sind, wie aus dem letzten Absatz von B II 3 hervorgeht, als Belastungsglieder  $\delta_{v-1,0}$ ,  $\delta_{v,0}$ ,  $\varepsilon_{v-1,0}$  und  $\varepsilon_{v,0}$  die nach (68a) ermittelten, zum Punkt  $i^\sigma$  der  $\nu$ -ten Öffnung gehörigen Werte  $C_{v-1}^{p\sigma}$ ,  $C_v^{p\sigma}$ ,  $D_{v-1}^{p\sigma}$  und  $D_v^{p\sigma}$  einzuführen. Je nachdem ob die Einzellast am äußeren oder inneren Hauptträger angreift, ist  $\sigma = a$  oder  $i$  einzusetzen. Diese Berechnung auf alle Punkte  $i^\sigma$  angewandt, ergibt ein zweites Verfahren zur Bestimmung der Einflußlinien der Unbekannten. Beide Verfahren erfordern etwa den gleichen Arbeitsaufwand.

Bei gleichen Öffnungen und unveränderlichem Trägheitsmoment der Hauptträger lassen sich auch geschlossene Lösungen der simultanen Differenzgleichungen angeben. Die Anwendung dieses Verfahrens erweist sich aber — ähnlich wie beim ebenen durchlaufenden Träger — nur für Brücken mit einer größeren Anzahl von Öffnungen als zweckmäßig.

Die Tabellen sind nur für  $n = 8$  und  $10$  aufgestellt; es bereitet aber keine Schwierigkeiten, sie im Bedarfsfalle nach den angegebenen Formeln für andere Felderzahlen zu ergänzen. Bei der Durchführung der Zahlenrechnung empfiehlt es sich, vor Beginn der Arbeit einen genauen Plan aufzustellen und die günstigste Reihenfolge der auf der Maschine vorzunehmenden Rechnungen festzulegen. Zum Schluß sind die Ergebnisse durch die bekannten Kontrollrechnungen, die sich aus der Bedingung ergeben, daß die Verschiebung in der Richtung einer Unbekannten verschwinden muß, zu überprüfen. Dabei können wieder vorteilhaft die Tabellen der  $\alpha$ -Werte oder der Teilsommen benützt werden. Für die Einflußwerte der Unbekannten wurden oben noch andere Kontrollen angegeben.

---

**Bewegliche Brücken.** Berechnung und Konstruktion. Von Professor Dr.-Ing. Alfred Hawranek, Brünn. Mit 412 Textabbildungen und 15 Tafeln. XII, 298 Seiten. 1936.  
Gebunden RM 48.—

---

**Der Eisenbau.** Teil I: Grundlagen der Konstruktion, feste Brücken. Von Professor Martin Grüning, Hannover. (Handbibliothek für Bauingenieure, IV. Teil, Bd. 4.) Mit 360 Textabbildungen. VIII, 441 Seiten. 1929.  
Gebunden RM 24.—

---

**Theorie und Berechnung vollwandiger Bogenträger** bei Berücksichtigung des Einflusses der Systemverformung. Von Dr.-Ing. Bernhard Fritz. Mit 75 Textabbildungen. VI, 143 Seiten. 1934.  
RM 12.—

---

**Der Eingelenkbogen für massive Straßenbrücken.** Eine statisch-wirtschaftliche Untersuchung. Von Dipl.-Ing. Dr. sc. techn. Ernst Burgdorfer. Mit 51 Abbildungen im Text und 10 Tafeln. VII, 160 Seiten. 1924.  
RM 6.75

---

**Rahmentragwerke und Durchlaufträger.** Von Dozent Dr.-Ing. Richard Guldán, Prag. Mit 307 Textabbildungen und 54 Tafeln. XI, 271 Seiten. 1940. (Verlag von Julius Springer-Wien.)  
RM 36.—; gebunden RM 37.80

---

**Statik der Tragwerke.** Von Professor Dr.-Ing. Walther Kaufmann, Hannover. Zweite, ergänzte und verbesserte Auflage. (Handbibliothek für Bauingenieure, IV. Teil, Bd. 1.) Mit 368 Textabbildungen. VIII, 322 Seiten. 1930.  
Gebunden RM 17.55

---

**Die Statik des ebenen Tragwerkes.** Von Professor Martin Grüning, Hannover. Mit 434 Textabbildungen. VII, 706 Seiten. 1935.  
Gebunden RM 24.—

---

**Trägheits- und Widerstandsmomente von Blechträgern.** Träger mit und ohne Gurtplatten. Hilfstafeln. Von Dipl.-Ing. P. Krugmann. X, 149 Seiten. 1932.  
Gebunden RM 27.—

---

**Die Methode der Festpunkte zur Berechnung der statisch unbestimmten Konstruktionen** mit zahlreichen Beispielen aus der Praxis, insbesondere ausgeführten Eisenbetontragwerken. Von Dr.-Ing. Ernst Suter †. Zweite, verbesserte und erweiterte Auflage, bearbeitet von Dipl.-Ing. O. Baumann und Dipl.-Ing. F. Häusler. In zwei Bänden. Mit 656 Figuren im Text und auf 19 Tafeln. XIV, 421 und 340 Seiten. 1932.  
Gebunden RM 69.—

---

**Rahmen und Balken.** Eine vollständige, leichtfaßliche Entwicklung gebrauchsfertiger Rahmenformeln auf rechnerischer Grundlage für 23 verschiedene Rahmenformen. Von Bauingenieur Jürgen Staack, Hamburg. Mit Formeln für die Berechnung von Balken auf 2 bis 6 Stützen mit freien und mit eingespannten Endauflagern nebst einem Anhang mit Durchbiegungsformeln, Bemessungstabellen für Eisenbeton und Tabellen über Pfahlrammungen. Mit mehr als 1000 Rahmen- und über 300 Balken-Belastungsfällen sowie 448 Abbildungen. VIII, 281 Seiten. 1931.  
RM 17.10; gebunden RM 18.—

---

**Stahl im Hochbau.** Taschenbuch für Entwurf, Berechnung und Ausführung von Stahlbauten. Mit Unterstützung durch den Stahlwerks-Verband Aktiengesellschaft, Düsseldorf, und Deutschen Stahlbau-Verband, Berlin, herausgegeben vom Verein Deutscher Eisenhüttenleute im NS.-Bund Deutscher Technik, Düsseldorf. Zehnte Auflage. Mit über 2000 Textabbildungen. XXII, 774 Seiten. 1938. Berichtigter Neudruck 1940. (Gemeinsam mit Verlag Stahleisen m. b. H., Düsseldorf.) Gebunden RM 12.—

---

**Der Stahlskelettbau** mit Berücksichtigung der Hoch- und Turmhäuser. Vom konstruktiven Standpunkte behandelt für Ingenieure und Architekten von Professor Dr.-Ing. Alfred Hawranek, Brünn. Mit 458 Textabbildungen. VIII, 286 Seiten. 1931. Gebunden RM 34.20

---

**Versuche an Eisenbetonbalken** unter ruhenden und herabfallenden Lasten. Von Professor Dr.-Ing. Rudolf Saliger und Dr.-Ing. Ernst Bittner, Wien. Mit 50 Abbildungen und 25 Tafeln. V, 79 Seiten. 1936. (Verlag von Julius Springer-Wien.) RM 12.—

---

**Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl.** Von Priv.-Doz. Dr. techn. Karl Ježek, Wien. Mit 120 Textabbildungen und 15 Zahlentafeln. VIII, 252 Seiten. 1937. (Verlag von Julius Springer-Wien.) RM 27.—; gebunden RM 28.80

---

**Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Trägern.** Theorie und Versuch über Spannungsverteilung als Scheibenproblem mit besonderer Berücksichtigung der lokalen Störung. Von Professor Akira Miura, Kioto. Mit 142 Abbildungen im Text und auf 6 Tafeln. V, 111 Seiten. 1928. RM 9.90

---

**Kerbspannungslehre.** Grundlagen für genaue Spannungsrechnung. Von H. Neuber. Mit 106 Abbildungen im Text und auf einer Tafel. VII, 160 Seiten. 1937. RM 15.—

---

**Spannungsoptik.** Von Dr. Gustav Mesmer, Aachen. Mit 197 zum Teil farbigen Abbildungen. XI, 222 Seiten. 1939. RM 28.50; gebunden RM 30.—

---

**Spannungszustand und Bruchausbildung.** Anschauliche Darstellung der spannungsmechanischen Grundlagen der Gestaltfestigkeit und der Gesetzmäßigkeiten der Bruchausbildung. Von Professor Dr. A. Thum, Darmstadt, und Dr.-Ing. K. Federn, Darmstadt. Mit 83 Abbildungen im Text. V, 78 Seiten. 1939. RM 9.60

---

**Dehnungsmessungen** und ihre Auswertung. Von Professor Dr.-Ing. F. Rötcher, Aachen, und Dr.-Ing. R. Jaschke, Aachen. Mit 191 Abbildungen im Text und einer Tafel. VI, 121 Seiten. 1939. RM 16.80

---

**Technische Statik.** Ein Lehrbuch zur Einführung ins technische Denken. Von Professor Dipl.-Ing. D. Dr. phil. Wilhelm Schlink, Darmstadt. Unter Mitarbeit von Dipl.-Ing. Heinrich Dietz, Darmstadt. Mit 463 Abbildungen im Text. IX, 386 Seiten. 1939. RM 27.60; gebunden RM 29.40

---