

ANSCHAULICHE QUANTENTHEORIE

EINE EINFÜHRUNG IN DIE MODERNE AUFFASSUNG
DER QUANTENERSCHEINUNGEN

VON

DR. PASCUAL JORDAN
O. Ö. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ROSTOCK



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1936

Copyright vested in the Alien Property Custodian, 1944, pursuant to law.

**Published and distributed in the Public Interest by Authority of the
Alien Property Custodian under License No. A-792**

**Published by
J. W. EDWARDS**

**Lithoprinted by
EDWARDS BROTHERS, INC.
Ann Arbor, Michigan, U.S.A.
1946**

**ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG
IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.**

COPYRIGHT 1936 BY JULIUS SPRINGER IN BERLIN.

ISBN-13: 978-3-642-89909-6

e-ISBN-13: 978-3-642-91766-0

DOI: 10.1007/978-3-642-91766-0

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1936

Vorbemerkungen.

Wer in der Praxis der akademischen Lehrtätigkeit der Aufgabe gegenübersteht, einem weiteren Kreise von Studierenden sowohl als auch Kollegen aus der Experimentalphysik und den chemischen oder technischen Nachbarwissenschaften die moderne Quanten- und Wellenmechanik näher zu bringen, wird trotz des Vorhandenseins so vieler wertvoller Bücher oft in Verlegenheit sein, wenn er Literatur für das Eindringen in das neue Gebiet empfehlen soll. Gerade im Erwerb einer Grundlage für das Verständnis und einer sicheren Ausgangsbasis weiteren Studiums liegt die Schwierigkeit, die nur dann zu überwinden ist, wenn man nicht in kühnen und gewagten Sprüngen, sondern auf einer breiten Brücke die tiefe Kluft zwischen der gewohnten makroskopisch-klassischen Welt und der fremdartigen Welt der Quanten überschreitet.

Daß ein Verständnis der neuen Theorie nur nach vorausgegangener gründlicher Beschäftigung mit der älteren Form der Quantentheorie erreichbar ist, wird nicht bezweifelt werden. Die Matrizen- theorie der Quantenmechanik ist ja gar nichts anderes, als die Erfüllung und Durchführung der im BOHRschen Korrespondenzprinzip ausgedrückten Tendenzen, und kann ihrem Sinne nach nicht verstanden werden ohne vorheriges Verständnis des Korrespondenzprinzipes selbst. Wenn andererseits die Wellenmechanik zunächst den Eindruck erwecken kann, daß man es auch billiger haben und das Studium korrespondenzmäßiger Übersetzungen umgehen könnte, so liegt es doch so, daß ohne sichere Beherrschung der älteren Theorie nur ein Scheinverständnis der Wellenmechanik zu erreichen ist, das zu Fehldeutungen führen muß.

Aber man darf nicht verkennen, welche Zumutung darin liegt, wenn jemand, der nicht schon vor 1925 die ältere Theorie studiert hat, jetzt noch mit ausdauernder Gründlichkeit Dingen nachgehen soll, die damals auf Schritt und Tritt den Reiz unaufgedeckter Geheimnisse bargen, die heute aber ein wenig das Aussehen verstaubten Gerümpels angenommen haben.

Es muß deshalb die Schönheit der älteren Theorie wiederentdeckt werden. In der historischen Entwicklung war es natürlich, daß die neuen quantenphysikalischen Erkenntnisse oft in Verknüpfung mit unrichtigen Zutaten ausgesprochen wurden. Noch zu fest eingewöhnt in klassische Vorstellungsweisen, noch unerfahren betreffs der Grenzen ihrer Anwendbarkeit, noch nicht bekannt mit dem Ausfall so vieler Experimente, die dann in Wechselwirkung mit der Entwicklung der Theorie durchgeführt sind, war man ungeschützt gegen die Gefahr voreiliger Präzisierungen in falscher Richtung und unangemessener Verquickung des Richtigen mit unfruchtbaren Nebenvorstellungen. Verwirrenderweise führten nicht selten falsche Voraussetzungen und Überlegungen zu richtigen — und zwar bedeutungsvollen — Folgerungen, deren experimentelle Bestätigung die angewandten Schlüsse zu sanktionieren schien. Oft blieben in der geglückten Herleitung eines richtigen Ergebnisses die

tatsächlich maßgebenden Umstände halb oder ganz verborgen unter in Wahrheit überflüssigem oder gar unrichtigem Beiwerk. Das so entstehende Gesamtbild mußte voll von Widersprüchen sein; heutigen (nicht historisch, sondern sachlich interessierten) Lesern ist seine Darbietung so nicht mehr genießbar. Aber diese früheren Theorien (zu denen wir auch die der DE BROGLIESchen Wellen und ihrer einfachsten Eigenschaften rechnen) enthielten die vollkommene Embryonalgestalt der seit 1925 bekannt gewordenen exakten und vollständigen Theorie: man sieht das — klarer, als es damals möglich war — wenn man mit heutigem Blick und heutigem Unterscheidungsvermögen für Notwendiges und Überflüssiges, Zutreffendes und Verfehltes die älteren Gedankengänge neu durchdenkt und ihren bleibenden Gehalt herauszulösen sucht. Das einmal planvoll und umfassend durchzuführen, schien mir neben der pädagogischen auch eine sachlich-wissenschaftliche Berechtigung und Bedeutung zu haben, nachdem noch heute so manches ganz neue Lehrbuch unklare oder geradezu falsche Ansichten vorträgt.

Die nachfolgende Darstellung beginnt (Kapitel 1) mit einer Beschreibung der grundlegenden experimentellen Erfahrungen, d. h. derjenigen Erfahrungen, die uns in möglichst durchsichtiger und unmittelbarer Weise wesentliche Tatsachen der Quantenphysik erkennbar machen, als exakte physikalische Gesetzmäßigkeiten von einfacher mathematischer Form. Neben den Tatsachen, welche die revolutionäre Abweichung der Quantentheorie von der Denkweise der klassischen Physik begründen, finden auch jene ihre sorgsame Beachtung, welche die trotzdem bestehende Verwandtschaft von klassischer und Quantenphysik und die exakte Gültigkeit mannigfacher klassischer Gesetze auch im Quantengebiet erweisen — was für die richtige Beurteilung der Quantenerscheinungen von keineswegs geringerer Bedeutung ist. Eine gründliche und umfassende Kenntnis dieser Tatsachen ist die Unterlage für ein sicheres Verstehen und Beherrschen der Quantentheorie: Man muß die Aufgaben, welche die neue Theorie zu lösen, und die Tatbestände, denen sie Rechnung zu tragen hat, in ihrer Gewichtigkeit und ihrer Vielseitigkeit überblicken können, um zu sehen, wie zwangsläufig und eindeutig uns der zu beschreitende Weg vorgeschrieben ist. Dem Kenner wird schon das Inhaltsverzeichnis zeigen, daß der Kreis der in die Besprechung aufgenommenen grundlegenden Experimente nicht unerheblich weiter gespannt ist, als gewöhnlich zu geschehen pflegt. Natürlich muß diese Beschreibung und Erläuterung der empirischen Grundlagen verzichten auf eine Erörterung technisch-experimenteller Einzelheiten. In dieser knappen Form wird die Darstellung (deren Anlage bereits auf die modernen Auffassungen hinführt) auch solchen Lesern hoffentlich als Übersicht und Zusammenfassung nützlich sein, welche schon viele der besprochenen Tatsachen kennen. Die theoretischen Bemerkungen in Kapitel 1 beschränken sich auf Anwendungen der Thermodynamik (insbesondere Energiesatz) und Relativitätstheorie; im übrigen sollen die Tatsachen selber ihre eindringliche Sprache sprechen.

Erst Kapitel 2 bringt die theoretische Analyse der quantenphysikalischen Grundexperimente: In der Fülle der Tatsachen, welche in scheinbar so paradoxer Weise teils immer wieder das gänzliche Versagen klassischer Denkweisen zeigen, teils durch die trotzdem fortbestehende Gültigkeit klassischer Einzelaussagen überraschen, läßt die nachdenkliche Betrachtung logische Wechselbeziehungen erkennen, bei deren eindringlicher Verfolgung allmählich eine wunderbare Harmonie vor uns ersteht. Die grundlegenden Quantengesetze, die aus der Erfahrung unmittelbar zu entnehmen sind, bedingen sich alle wechselseitig; keines könnte für sich bestehen, wenn nicht auch die anderen beständen, und keines könnte eine andere Gestalt haben, als es tatsächlich hat. Das BOHRsche Korrespondenzprinzip leitet uns an, das eigentümlich doppelseitige Verhältnis von klassischer und Quantentheorie sorgfältig zu erforschen: die denkbar größte Verschiedenheit verknüpft sich seltsam mit der größten denkbaren Ähnlichkeit. Die älteren theoretischen Ansätze kommen hier zu ihrem Recht und zu ausführlicher Betrachtung. Aber sie werden nicht, in unfolgerichtiger Vermischung klassischer und quantenphysikalischer Vorstellungen, zu einer voreiligen Systematisierung geführt: sie werden als das behandelt, was sie sind, nämlich als erkennbar gewordene Ansatzpunkte und Teilstücke der von uns gesuchten umfassenden Theorie, zu der sie sich erst allmählich zusammenschließen können. Auf dem breiten Fundament empirischer Erkenntnisse gedeiht die theoretische Betrachtung rasch zu zuverlässiger Sicherheit. In zahlreichen Einzelpunkten verschärfen sich die durch asymptotische Anwendung klassischer Formeln erhaltenen quantentheoretischen Näherungsformeln durch Anwendung des Korrespondenzprinzips zu exakten Quantengesetzen; andererseits ergibt sich immer deutlicher aus der zwangsläufigen Verknüpfung aller Quantengesetze die innere Notwendigkeit des Ganzen: *Die klassische Theorie war ihrem Charakter nach von vornherein darauf angelegt, ihre Vollendung in der Erweiterung zur Quantentheorie zu finden.* In allen klassischen Gesetzen zeigt sich die Möglichkeit zu einer grundsätzlichen Verallgemeinerung; aber nur eine einzige grundsätzliche Verallgemeinerung der klassischen Gesetze ist möglich: Das ist die Quantentheorie, die schließlich geradezu als eine Vereinfachung zu erkennen ist — in demselben Sinne, in welchem die Relativitätstheorie eine Vereinfachung gegenüber den älteren Theorien bedeutet. Der Grenzübergang $c \rightarrow \infty$ bringt uns aus der relativistischen Kinematik und Mechanik zu der so viel vertrauteren GALILEISchen zurück. Aber dabei geht die raumzeitliche Symmetrie der kinematischen und mechanischen Gesetze verloren, was einen Verlust an Einfachheit bedingt. Auch der klassische Grenzfall $h \rightarrow 0$ der Quantentheorie zeigt außer schweren Singularitäten (wie der unendlich großen schwarzen Strahlungsdichte) umfassende Verluste an Symmetrie und Einfachheit.

Auf diese Weise gewinnen wir allmählich ein *anschauliches Verständnis* der Quantentheorie: wir begreifen die Harmonie, Notwendigkeit und Einfachheit der grundlegenden Quantengesetze, und sind imstande,

für jede nicht allzu verwickelte konkrete Anwendung das Ergebnis zu erkennen — mindestens in den wesentlichen Zügen, oft sogar bis in die feinsten Einzelheiten — ohne erst den ganzen Rechenapparat der exakten Theorie in Bewegung setzen, ja sogar, ohne die vollständige, lückenlose Theorie überhaupt schon kennen zu müssen.

Vollziehen wir endlich den Übergang zur Quanten- und Wellenmechanik (Kapitel 3), so haben wir nichts zu widerrufen und zurückzunehmen: was vorher festgestellt wurde, ist nirgends über seine Gültigkeitsgrenzen hinaus unvorsichtig verallgemeinert worden. Fast alle wesentlichen Elemente der exakten Theorie haben wir schon sicher in der Hand. Wir schließen die letzten Lücken, und erkennen, daß das Ganze eine wunderbar einheitliche und geschlossene begriffliche und mathematische Formulierung ergibt, die uns die deduktive Inangriffnahme jedes quantenphysikalischen Problems erlaubt und auch die verwickeltesten Fragen eindeutig beantwortet.

In diesem dritten Kapitel mußte freilich der Versuchung widerstanden werden, es zu einem umfassenden Lehrbuch der Quanten- und Wellenmechanik auswachsen zu lassen. Zwar hätte es nahe gelegen, in Stil und Darstellungsweise dieses Buches einen größeren Kreis von Beispielen und Anwendungen zu behandeln. Aber das Vorhandensein schon so vieler Schriften über die Dinge, die hier vor allem in Frage kämen, gab Anlaß zu einer strengen Innehaltung der Forderung, die hier gegebene Darstellung auf das Notwendige und das nicht in sonstigen Darstellungen bequem Zugängliche zu beschränken.

Der induktive Charakter der ganzen hier gegebenen Darstellung kommt auch darin zum Ausdruck, daß die statistische Transformationstheorie, in deren Aufstellung die induktive Entwicklung der Quantenmechanik gipfelte, in diesem dritten Kapitel an den Schluß verwiesen ist.

Die weitere Verfolgung unseres Weges — über die Quantenmechanik in die Quantenelektrodynamik und die Theorie der Elementarteilchen hinein — führt freilich wieder in Probleme, deren vollständige Erledigung noch nicht gelungen ist, und welche, in ihrem Zusammenhang mit der Kernphysik, heute im Brennpunkt quantenphysikalischer Forschungsarbeit stehen. Kapitel 4 sucht in diese Fragen einzuführen. Der Glaube, daß die Quantenmechanik etwas mathematisch Schwieriges sei, ist ein Aberglaube: das korrespondenzmäßige Denken allerdings will gelernt und geübt sein; aber die Mathematik der Quantenmechanik ist einfacher, als die Mathematik der klassischen Mechanik. Dagegen ist zuzugeben, daß die Quantenelektrodynamik in der Tat ein etwas kompliziertes Erzeugnis der Gelehrsamkeit ist. Nicht trotzdem, sondern gerade deshalb schien mir ihre sorgfältige Behandlung im Rahmen dieses Buches von besonderer Dringlichkeit. Zu einer Zeit, wo die die experimentelle atomphysikalische Arbeit in erster Linie beschäftigenden Fragen alle irgendwie in die Probleme der Quantenelektrodynamik eingreifen und einmünden, wird es nicht unwillkommen sein, wenn aus dem etwas schwer zu durchdringenden Dickicht quantenelektrodynamischer Untersuchungen

die anschaulichen Grundgedanken der Theorien herausgeholt werden. Tatsächlich sind es Gedankengänge sehr anschaulicher Art, welche die entscheidenden Impulse für diese Untersuchungen geliefert haben.

Die neuen Versuchsergebnisse von SHANKLAND haben DIRAC zu der Ansicht geführt, daß der Energiesatz nunmehr doch aufgegeben werden müsse, und daß demnach die gesamte bisherige Quantenelektrodynamik zu verwerfen und durch Auffassungen im Sinne der früheren Theorie von BOHR-KRAMERS-SLATER zu ersetzen sei. Aber das halte ich für abwegig. Wie auch die merkwürdigen und sicherlich sehr bedeutungsvollen Ergebnisse von SHANKLAND zu deuten sein mögen, daß sie den Energiesatz außer Kraft setzen, oder die bisherigen, noch unvollkommenen, aber sicherlich notwendigen Ansätze zur Quantenelektrodynamik widerlegen, das glaube ich nicht.

Außer den quantenelektrodynamischen Fragen hat aber Kapitel 4 auch die mit dem Auftreten individuell ununterscheidbarer Teilchen verknüpften tiefergehenden Fragen der Quantenmechanik zu behandeln (PAULI-Verbot, BOSE-Statistik; Austauschkräfte). Auch die Theorie der Atomkerne ist ja, nachdem HEISENBERG die Kerne als aus Protonen und Neutronen aufgebaut anzusehen lehrte, zum großen Teil ein Anwendungsgebiet der gewöhnlichen Quantenmechanik geworden; sogar BOHRs neue wegweisende Gedanken zur Kerntheorie halten sich im wesentlichen in diesem Rahmen. Daß außer der neuen BOHRschen Theorie auch meine „Neutrinotheorie des Lichtes“ in Kapitel 4 bereits besprochen wird, mag angesichts der Ungewißheit, wieweit sie sich bewähren wird, gewagt erscheinen. Vielleicht würde ich vor diesem Wagnis in der Tat zurückgeschreckt sein, wenn nicht diese Theorie Hoffnungen entspräche, die mich seit fast 10 Jahren bewegt haben; und wenn ich nicht rückblickend feststellen könnte, daß die bisherige Entwicklung der Quantenelektrodynamik in fast allen wesentlichen Punkten so gelaufen ist, wie ich seit 1925 erwartet habe.

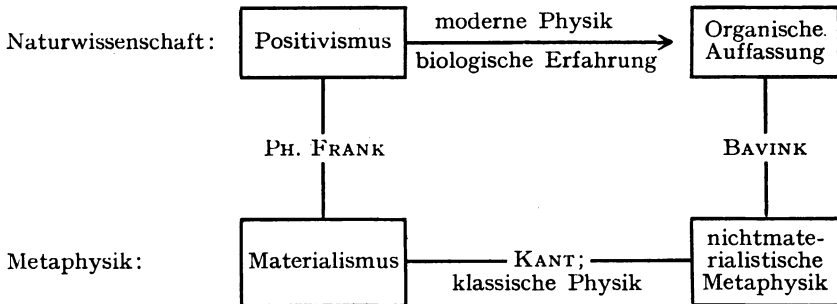
Eine Darstellung der Grundgedanken der Quantentheorie würde unvollständig sein ohne einen Versuch, das revolutionär Neue der gewonnenen Vorstellungsweise gegenüber der klassischen Physik auch im Grundsätzlichen klar zu stellen; im letzten Kapitel dieses Buches ist deshalb eine genauere erkenntnistheoretische Charakterisierung der Quantenphysik versucht.

Die erkenntnistheoretische Gesamteinstellung, die in der modernen Quantentheorie zum Ausdruck kommt — und umgekehrt in dieser ihre bedeutsamste Stütze erhält — ist vom Verfasser in diesbezüglichen Erörterungen gern als „positivistisch“ bezeichnet worden. Die Bezeichnung „Positivismus“ ist aber auch von solchen Physikern, mit denen ich sachlich durchaus übereinzustimmen glaube, teilweise als nicht glücklich angesehen worden, und einige Bemerkungen scheinen zur Vermeidung von Mißverständnissen angebracht.

Was ich vertreten will, das ist die erkenntnistheoretische Einstellung BOHRs und HEISENBERGs. Für mich haben die Schriften ERNST MACHs

eine unentbehrliche Vorbereitung für das Verständnis dieser modernen quantenphysikalischen Auffassungen gebildet, und die Verwandtschaft der MACHSchen Ideen mit ihnen scheint mir wesentlicher, als die vorhandenen Unterschiede. Es sei darauf hingewiesen, daß die entschiedene Ablehnung des MACHSchen „Positivismus“ durch PLANCK und v. LAUE (und durch EINSTEIN) parallel geht mit einer die moderne Quantenmechanik in ihrer Grundauffassung ablehnenden oder jedenfalls nicht als endgültig betrachtenden Einstellung dieser Physiker. Das wesentliche und entscheidende Prinzip der positivistischen Erkenntnistheorie — die Beschränkung der im wissenschaftlichen System zugelassenen Aussagen auf solche, die sich auf experimentell prüfbare Aussagen reduzieren lassen — scheint mir übrigens charakterisierbar als eine sinngemäße Übertragung desselben Prinzips, welches den Ausgangspunkt für HILBERTS mathematische Grundlagenforschungen bildet, und welches HILBERT den „finiten Standpunkt“ nennt.

Die dogmatische materialistische Naturauffassung ist mit dem Positivismus unvereinbar, da sie eine spezielle Form metaphysischer, nichtwissenschaftlicher Lehren darstellt; doch wird verwirrenderweise von manchen Verfassern — z. B. auch in den sehr verbreiteten Schriften von BAVINK — die Bezeichnung „Positivismus“ als nahezu gleichbedeutend mit „Materialismus“ gebraucht; eine Verwirrung, der allerdings dadurch Vorschub geleistet wird, daß einige sehr bekannte Verteidiger des Positivismus, wie PH. FRANK, selber eine Einstellung zeigen, die ich in meiner Terminologie lieber als eine Kompromißbildung zwischen positivistischer und materialistischer Betrachtungsweise bezeichnen möchte. Das folgende Schema wird die Beziehungen verdeutlichen:



Freilich muß ich den einen der gegen meinen Gebrauch des Wortes „Positivismus“ erhobenen Einwände als berechtigt anerkennen: nämlich, daß man überhaupt nicht einen „-ismus“ einführen sollte zur Bezeichnung von Bestrebungen, die ausdrücklicherweise nicht irgendeiner einseitigen Tendenz dienen sollen, sondern nichts anderes erstreben, als die *klarste und reinste Herausbildung des naturwissenschaftlichen Denkens selbst*.

Bine folgerichtige Anwendung der positivistischen erkenntnistheoretischen Grundsätze auf die zentralen methodischen Fragen der *Biologie*

führt meiner Überzeugung nach zwangsläufig zu der Feststellung, daß die wissenschaftliche Beschreibung der biologischen Erscheinungen Begriffsbildungen erfordert, die heraustreten aus dem Rahmen der in der Physik des Anorganischen entwickelten Begriffe: Die dogmatisch mechanistische Auffassung der Biologie, welche einer gedanklichen Durchdringung der durch die unklaren Schlagwörter „Finalität“, „Ganzheit“ usw. angedeuteten Probleme so sehr im Wege gestanden hat, ist mit den erkenntnistheoretischen Grundsätzen des Positivismus unvereinbar.

Zugleich bringen aber die revolutionären Ergebnisse der Quantenphysik ganz neue Gesichtspunkte in die Erörterung der biologischen Hauptfragen: in doppelter Weise drängt also die neue Physik auf eine „organische Auffassung“ hin, als deren wissenschaftlichen Inhalt ich kurz die Überzeugung bezeichnen möchte, daß wir in den biologischen Erscheinungen Naturgesetzmäßigkeiten kennen zu lernen haben, die wesentlich Neues gegenüber den anorganischen Naturgesetzen enthalten — oder die jedenfalls aus dem Anorganischen nur bruchstückweise zu erkennen sind.

Wenn ich schon durch die Überschrift des letzten, die erkenntnistheoretischen Fragen der Quantenphysik behandelnden Kapitels die Beziehung dieser Fragen zu den außerhalb der Grenzen der Physik liegenden biologischen Problemen hervorgehoben habe, so leitete mich dabei die Überzeugung, daß die Tragweite neuer Gedanken und Entdeckungen sich gerade darin erweist, daß sie auch solche, ferner liegende Dinge, an die zunächst gar nicht gedacht worden war, in einem neuen Lichte erscheinen lassen; und weiterhin die Überzeugung, daß tatsächlich die in der Ausbildung des Komplementaritätsgedankens gipfelnde Entwicklung der Quantenphysik nicht nur für die Physik allein, sondern für unser gesamtes naturwissenschaftliches Denken eine neue Epoche eröffnet.

Meine Versuche, im Anschluß an BOHRs wegweisende Gedanken die Richtung zu skizzieren, welche die Anwendung der Quantenphysik auf die Biologie vermutlich einschlagen wird, werden ihren Hauptzweck erfüllen, wenn sie die Einsicht verbreiten helfen, daß die Fragen des Verhältnisses physikalischer und biologischer Gesetzmäßigkeit heute einer neuen Überprüfung bedürfen — einerlei, ob dabei meine speziellen Vermutungen sich bestätigen werden oder nicht. Die Klärung dieser durch die Quantenphysik neu aufgerollten Fragen kann nur durch eine harmonische Zusammenarbeit von Biologen und Physikern gefördert werden. Daß der Zwang der Tatsachen diese Zusammenarbeit herbeiführen und fruchtbar gestalten wird, daran zweifle ich nicht, wenn auch eine ver einzelnte Entgleisung in der Form der Kritik die erwünschte Harmonie einmal zu stören scheint. —

Herrn Dr. OSTERTAG möchte ich herzlich danken für wertvolle Hilfe bei der Korrektur. Dem Verlag bin ich zu großem Dank verpflichtet für entgegenkommende Geduld.

Rostock, im Mai 1936.

P. Jordan.

NB. Inzwischen scheint SHANKLAND bereits widerlegt.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorbemerkungen	III
Erstes Kapitel: Die Grundexperimente der Quantenphysik.	I
§ 1. Das PLANCKSche Gesetz und die mittlere Oszillatorenenergie	2
1. Das PLANCKSche Gesetz	2
2. Die mittlere Oszillatorenenergie	5
§ 2. Der Dualismus Wellen-Korpuskeln	8
1. Energieschwankungen im Strahlungsfeld	8
2. Experimenteller Nachweis der Lichtquanten	10
3. Die Interferenz des Lichtes	13
4. Kugelwellen	16
5. DE BROGLIESche Wellen	18
§ 3. Stationäre Zustände und Lichtreaktionen	22
1. Nachweis der Energiestufen	22
2. RIRZSches Kombinationsprinzip und Energiestufen	25
3. Lichtreaktion	27
4. Verknüpfung von Stößen und Leuchtprozessen	32
5. Thermodynamische Quanteneffekte	34
§ 4. Dynamik der Quantelung	37
1. Linienbreiten	37
2. Kohärenz stationärer Zustände	40
3. Der Adiabatensatz	43
4. Das Stabilitätsprinzip	46
Zweites Kapitel: Theoretische Analyse der quantenphysikalischen Grund- experimente.	47
§ 1. Wellenzuordnung und Quantelung	48
§ 2. Korrespondenzmäßige Quantelung	51
1. Das Korrespondenzprinzip	51
2. Quantelung des harmonischen Oszillators	53
3. Periodizität und Quantelung	56
4. Korrespondenz der Quantenzahlen und Frequenzen	58
5. Die RYDBERG-Konstante	61
6. Gitterbewegung und Interferenz	63
7. Statistische Gewichte	65
§ 3. Übergangsamplituden	67
1. Der harmonische Oszillator	67
2. Die Wahrscheinlichkeitsgesetze der Lichtreaktionen	71
3. Thermisches Gleichgewicht	75
4. Kohärente Streustrahlung	77
5. Inkohärente Streustrahlung (RAMAN-Effekt)	81
§ 4. Korrespondenzmäßige Quantelung. Zweiter Teil	86
1. Adiabatische Invarianten und allgemeine Quantelung	86
2. Zentralbewegung	90
3. Richtungsquantelung	95
4. ZEEMAN-Effekt und Spinelektron	99

	Seite
§ 5. Optik und Mechanik	100
1. Dualismus und Relativität	100
2. Kanonische Variablen	102
3. Die Phasenflächen	107
4. Die SCHRÖDINGERSche Gleichung	110
§ 6. Komplementarität.	114
1. Dualismus und Komplementarität	114
2. Ort und Impuls als komplementäre Größen.	119
3. Energie und Zeit als komplementäre Größen	126
Drittes Kapitel: Quanten- und Wellenmechanik.	130
§ 1. Quantenmechanische Grundbegriffe	131
1. Das Matrixschema	131
2. Die Multiplikation der quantenmechanischen Matrizen	134
3. Kanonische Vertauschungsregeln und Bewegungsgleichungen	138
§ 2. Einfachste Anwendungen	143
1. Harmonischer Oszillator	143
2. Drehimpuls	144
§ 3. Die wellenmechanischen Eigenfunktionen	150
1. Orthogonalität und Vollständigkeit.	150
2. Äquivalenzbeweis	154
3. Operatoren und Matrizen	157
§ 4. Anwendungen und Beispiele	163
1. Harmonischer Oszillator	163
2. Drehimpuls eines Massenpunktes.	164
3. Das H-Atom	165
§ 5. Statistische Transformationstheorie	167
1. Die allgemeine Formulierung des Komplementaritätsprinzips	167
2. Größen mit kontinuierlichem Eigenwertspektrum	172
3. Anwendung auf das Spinelektron	175
Viertes Kapitel: Mehrkörpertheorie und Elementarteilchen.	178
§ 1. Das Mehrkörperproblem äquivalenter Teilchen	181
1. Das Zweikörperproblem	181
2. Das Mehrkörperproblem	189
3. Ideale Gase	195
§ 2. Relativistische Wellengleichungen.	203
1. Die MAXWELLSchen Gleichungen	203
2. Die Wellengleichung des α -Teilchens	207
3. Die relativistische Wellengleichung des Elektrons	210
§ 3. Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes	214
1. Einführung	214
2. Eindimensionales Kontinuum	216
3. Ausrechnung des Schwankungsquadrats.	220
4. Direkte Quantelung des Kontinuums	221
5. Lichtprozesse	223
§ 4. Mehrkörperproblem und Wellenquantelung	226
1. Die Methode von FERMI und THOMAS	226
2. Die „zweite Quantelung“	228
3. Zweite Quantelung und PAULI-Verbot	231
4. Wechselwirkung und Selbstenergie	234

	Seite
§ 5. Quantenelektrodynamik	236
1. Relativistische Quantelung	236
2. Ansatz zur vollen Quantenelektrodynamik	239
3. Paarerzeugung	242
§ 6. Kernstruktur und Elementarteilchen	244
1. Der Aufbau der Atomkerne	244
2. Die β -Strahlung	249
3. Die Struktur des Elektrons	255
4. Die BOHRsche Kerntheorie	260
5. Die Neutrinotheorie des Lichtes	263
Fünftes Kapitel: Atome und Organismen	271
§ 1. Die positivistische Methode	271
1. Physikalische und erkenntnistheoretische Forschung	271
2. Problem und Scheinproblem	273
3. Sinnvolle und sinnlose Urteile	276
§ 2. Kausalität, Statistik und Finalität	279
1. Kausalität	279
2. Finalität	286
3. Kausalität und Statistik im Organischen	292
§ 3. Der Aufbau der realen Welt	302
1. Komplementarität und Beobachtung	302
2. Das Beobachtungsproblem in der lebenden Substanz	309
3. Zwischenstufentheorie	313
Literaturverzeichnis	320

Die Grundexperimente der Quantenphysik.

Das Material von empirischen Tatbeständen, welches durch die *Quantentheorie* zu ordnen und zu deuten ist, ist umfangreicher und mannigfaltiger, als bei jeder älteren physikalischen Theorie. Das Spektrum des Eisens bietet allein in der sichtbaren Oktave des Spektrums mehrere Tausend Linien dar; und es gehört zur Aufgabe der Quantentheorie, eine bis in die feinsten Einzelheiten gehende Rechenschaft zu geben von den Frequenzen dieser Tausende von Linien, von ihren unter wechselnden Anregungsbedingungen sich ändernden Intensitäten, von ihrer Beeinflussung durch äußere elektrische und magnetische Felder, von ihrer Breite und deren Abänderung durch Temperatur, Dampfdruck und fremde Gaszusätze — wobei alle diese Effekte sich von Linie zu Linie verschieden verhalten. Aber nicht nur die *Spektren* von rund neunzig *Elementen* und ihren verschiedenen *Ionen*, sowie von unzähligen Molekülen und Molekülonen *chemischer Verbindungen* hat die Quantentheorie zu deuten und vorauszubestimmen, sondern ebenso auch die mannigfaltigsten *Wechselwirkungs-* und *Umwandlungsprozesse* atomarer Gebilde; im *Prinzip* schließt dies die Aufgabe ein, das gesamte ungeheure Erfahrungsmaterial der *Chemie* von den zugrunde liegenden atomphysikalischen Gesetzen aus theoretisch zu deuten. Aber auch die *Physik der festen Körper*, sowie die mannigfachen Erscheinungen und Gesetzmäßigkeiten der *metallischen Leitung* oder des *Ferromagnetismus*, gehen zurück auf die von Quantengesetzen beherrschte Dynamik der Atome und Elektronen. Dies Material ist so ungeheuer groß, daß nicht einmal eine beschreibende Übersicht eines größeren Teilgebietes gegeben werden kann, ohne die durch die Quantentheorie herbeigeführte Ordnung und Klärung der Tatsachen zugrunde zu legen. Abgesehen von dem noch unverstandenen Effekt der Supraleitung hat sich die Quantentheorie — in ihrer modernen, mathematisch exakten Form — quantitativ und lückenlos bewährt in bezug auf alle physikalischen Geschehnisse, die an und in der *Elektronenhülle der Atome* spielen. Nur die Physik der *Kerne* der Atome ist heute noch nicht einer vollständigen deduktiven Behandlung zugänglich; hier ist die tiefer dringende Forschungsarbeit noch im vollen Gange.

Eine Abwägung der *Leistungsfähigkeit* der modernen Quantentheorie muß die Gesamtheit der von ihr geklärten Erscheinungen in ihrem angedeuteten ungeheuren Umfang ins Auge fassen. Aber ein *induktiver Aufbau* der Theorie, der die *zwangsläufige* Gegebenheit ihrer Grundbegriffe und Grundannahmen durch unmittelbare experimentelle

Erfahrungen deutlich zu machen sucht, wird sich zweckmäßigerweise nur auf eine engere Auswahl des empirischen Materials stützen: nämlich auf diejenigen experimentellen Erfahrungen, in welchen der Charakter der Quantenphysik rein und unverhüllt, *unabhängig von den speziellen Eigenschaften spezieller Atome* zutage tritt.

Diese Erfahrungen darzulegen ist die Aufgabe des ersten Kapitels.

§ 1. Das PLANCKSche Gesetz und die mittlere Oszillatorenenergie.

I. Das PLANCKSche Gesetz. Ein Vakuumgefäß vom Volum V habe schwarze Wände, die auf konstanter Temperatur T gehalten werden¹. Dann erfüllt sich dieses Vakuum mit *elektromagnetischer Strahlung*. Im thermodynamisch stationären Zustand, oder, wie man auch sagt, bei *schwarzer Hohlraumstrahlung*, ist die in der Volumeneinheit enthaltene Energie $u = U/V$ eine bestimmte Funktion der Temperatur: $u = u(T)$; und auch der bei *spektraler Zerlegung* dieser Strahlungsenergie auf ein Frequenzintervall $\nu, \nu + d\nu$ entfallende Anteil $\varrho_\nu d\nu$ von u ist eine bestimmte, von V und von der Gestalt des Hohlraums, vom Material der Wände und sonstigen Bedingungen unabhängige Funktion der Temperatur:

$$\varrho_\nu = \varrho_\nu(T). \quad (1)$$

Wenn man die Dynamik der elektromagnetischen Schwingungen im Vakuum theoretisch vollständig beherrscht, so muß man theoretisch ausrechnen können, welche Gestalt die Funktion $\varrho_\nu(T)$ im „Wärmestrahlungsgesetz“ (1) besitzt. Nimmt man die klassische MAXWELLSche *Elektrodynamik* als exakt richtig an, so ergibt sich als Folgerung ein bestimmtes Wärmestrahlungsgesetz, dessen Gestalt sich übrigens schon aus Dimensionsbetrachtungen erkennen läßt. Da die MAXWELLSchen Gleichungen des Vakuums nur *eine* Naturkonstante, nämlich die Lichtgeschwindigkeit c enthalten, so können in $\varrho_\nu(T)$ außer dimensionslosen Zahlen nur die Größen c, ν und kT auftreten, wo k die *BOLTZMANNsche Konstante* ist:

$$k = 1,372 \cdot 10^{-16} \text{ erg/Grad.} \quad (2)$$

Nun hat kT die Dimension einer Energie, und

$$u(T) = \int_0^\infty \varrho_\nu(T) d\nu \quad (3)$$

die einer Energie pro Volumeinheit; folglich muß

$$\varrho_\nu(T) = C \cdot \frac{\nu^3}{c^3} kT$$

sein.

¹ Eine Wand ist „schwarz“, wenn sie alle auf sie auftreffende elektromagnetische Strahlung völlig absorbiert. — Aus Gründen des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik muß eine schwarze Wand mit einer von Null verschiedenen Temperatur T umgekehrt auch in bestimmter Weise elektromagnetische Strahlung emittieren.

Die Ausrechnung ergibt für C den Wert 8π ; wir kommen darauf noch zurück. Das somit aus der klassischen MAXWELLSchen Theorie zwangsläufig folgende RAYLEIGH-JEANSSche Strahlungsgesetz

$$e_{\nu}(T) = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} kT \quad (4)$$

widerspricht aber in größter Weise der Erfahrung: die Integration (3) würde *unendlich große* Strahlungsdichte u für jede von Null verschiedene Temperatur ergeben.

Wir stehen hier also vor einem *Versagen der klassischen Elektrodynamik*: Obwohl diese klassische Theorie in so vollkommener Weise den Verlauf und die Wirkungen der von makroskopischen Antennen erzeugten elektromagnetischen Wellen zu übersehen gestattet, und obwohl sie die Polarisation und die Interferenzen des sichtbaren Lichtes in vollkommener Übereinstimmung mit der experimentellen Erfahrung beschreibt, so kann sie trotzdem nicht als vollständige, exakte Erfassung der elektromagnetischen Vorgänge im Vakuum anerkannt werden. Ihre Gültigkeit muß *begrenzt* sein durch neue, unerwartete Effekte, welche wir schon jetzt als „Quanteneffekte“ bezeichnen wollen.

Wir können aber doch einige Aussagen betreffs des Wärmestrahlungsgesetzes auf theoretischem Wege gewinnen, indem wir uns ausschließlich auf solche physikalische Prinzipien stützen, von welchen zuverlässig angenommen werden darf, daß ihre Gültigkeit auch durch die Quantenerscheinungen nicht eingeschränkt wird. Solche Prinzipien sind *die beiden Hauptsätze der Thermodynamik* und *das Relativitätsprinzip*: Auch die Quantenerscheinungen ermöglichen es *nicht*, ein Perpetuum mobile erster oder zweiter Art zu konstruieren oder ein absolut ruhendes Koordinatensystem zu definieren. Zwar hat man im Laufe der historischen Entwicklung, veranlaßt durch die tiefgehenden, einschneidenden Widersprüche, welche sich aus den quantenphysikalischen Erfahrungen gegen die bewährtesten Vorstellungen der klassischen Theorien ergaben, auch bezüglich des Energiesatzes Zweifel gehegt. Aber die weitere Entwicklung hat diese Zweifel zurückgedrängt, und die drei genannten Prinzipien haben sich auch in der Quantenphysik in weitem Umfang bewährt. Erst ganz neuerdings (bei Abschluß der Bearbeitung dieses Buches) haben experimentelle Erfahrungen erneut den Gedanken einer nur begrenzten und bedingten Gültigkeit des Energieprinzips nahegelegt. Jedoch würde diese Einschränkung des Energieprinzips, falls sie tatsächlich aus den (noch zu besprechenden) Experimenten zu erschließen wäre (was der Verfasser stark bezweifelt), für die meisten in diesem Buche zu besprechenden Fragen keinen wesentlichen Einfluß haben.

Die MAXWELLSche Theorie läßt erkennen, daß in einer *ebenen elektromagnetischen Welle* eine *Energiemenge* E (die ein bestimmtes, mit Lichtgeschwindigkeit fortbewegtes Volum erfüllt) stets einen *translatorischen Impuls* \mathcal{G} vom Betrage

$$|\mathcal{G}| = \frac{E}{c} \quad (5)$$

besitzt. Dies ist ein Beispiel einer speziellen Aussage der MAXWELLSchen Theorie, welche von allgemeiner Bedeutung ist, als die MAXWELLSche Theorie selber: Denn schon allein die *Relativitätstheorie* fordert die Beziehung (5) für eine Energiemenge E , die sich mit *Lichtgeschwindigkeit* c fortbewegt¹.

Also muß (5) auch im Gültigkeitsgebiet der Quantentheorie bestehen bleiben, was experimentell durch Messungen des *Lichtdrucks* bestätigt ist. Die von der MAXWELLSchen Theorie gemachten Aussagen betreffs des Lichtdrucks, wie er z. B. bei der Reflexion von Licht an einem Spiegel entsteht, können nämlich, unabhängig von sonstigen Aussagen der MAXWELLSchen Theorie, allein aus (5) hergeleitet werden. Dies gilt insbesondere von folgender Aussage: Die in einem Vakuumgefäß enthaltene schwarze Strahlung der räumlichen Dichte u übt auf die Gefäßwände einen Druck

$$p = \frac{1}{3} u \quad (6)$$

aus.

Zur Herleitung von (6) aus (5) denken wir uns das Gefäß am besten *würfelförmig*, mit Kantenlänge l , und mit *spiegelnden* statt schwarzen Wänden. Wir greifen einen der unendlich vielen sich im Hohlraum durchkreuzenden *Strahlen* heraus und grenzen in ihm eine Energiemenge E ab. Die x -Komponente c_x der Geschwindigkeit von E wechselt (bei konstantem Betrag) ihr Vorzeichen bei jeder Reflexion an einer der beiden zur x -Achse senkrechten Wände. (Die *Kanten* des Würfels sollen parallel zu x , y , z liegen.) In der Zeiteinheit geschehen $|c_x|/l$ solche Reflexionen, und bei jeder wird ein Impulsbetrag $2|\mathcal{G}_x|$ auf die Wand übertragen. Foglich ergibt sich als *Summe* der von E auf die *gesamte* Gefäßoberfläche in der Zeiteinheit übertragenen Impulsbeträge:

$$\frac{2}{l} (\mathcal{G}_x c_x + \mathcal{G}_y c_y + \mathcal{G}_z c_z) = \frac{2 \mathcal{G} c}{l} = \frac{2 |\mathcal{G}| c}{l} = \frac{2 E}{l}.$$

Summieren wir nun über alle Energieelemente E des Hohlraums, so bekommen wir links den mit der Gefäßoberfläche $6l^2$ multiplizierten Druck p , und als Summe aller E die Gesamtenergie $U = l^3 u$. Also wird $6l^2 p = 2l^2 u$, womit (6) bewiesen ist.

Aus (6) folgt aber rein thermodynamisch² das bekannte STEFAN-BOLTZMANNsche Gesetz

$$u(T) = a \cdot T^4. \quad (7)$$

¹ Denn \mathcal{G}_x , \mathcal{G}_y , \mathcal{G}_z , E/c müssen einen „Vierervektor“ bilden, dessen Betrag gleich Null ist: $E^2/c^2 - \mathcal{G}^2 = 0$.

² Wenden wir den *zweiten Hauptsatz* an auf eine infinitesimale Zustandsänderung dT , dV unseres schwarzen Hohlraums, so wird

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU + p dV}{T} = \frac{V u'(T) dT + \frac{4}{3} u(T) dV}{T},$$

also (Integrabilitätsbedingung!):

$$\frac{u'(T)}{T} = \frac{4}{3} \left(\frac{u(T)}{T} \right)',$$

was auf $4a T/T = du/u$ oder (7) führt.

Darüber hinaus lehren Relativitätstheorie und Thermodynamik noch, daß für einen monochromatischen Lichtstrahl ϱ_ν/ν^3 und ν/T relativistisch *invariant* sind. Die Größe ϱ_ν/ν^3 , die eine Funktion von ν und T ist, kann also nur vom Verhältnis ν/T abhängen:

$$\varrho_\nu(T) = \nu^3 f\left(\frac{\nu}{T}\right). \quad (8)$$

Dies ist das WIENSche *Verschiebungsgesetz*, durch welches die Bestimmung der von *zwei* Variablen abhängigen Funktion $\varrho_\nu(T)$ auf die Bestimmung einer Funktion f von nur *einer* unabhängigen Variablen ν/T zurückgeführt wird. In (8) ist offenbar auch das STEFAN-BOLTZMANNsche Gesetz (7) *enthalten*:

$$u(T) = T^4 \int_0^\infty y^3 f(y) dy. \quad (9)$$

Weitergehende Aussagen sind aus unseren bis hier gebrauchten theoretischen Prinzipien nicht zu gewinnen. Die *experimentelle Erfahrung* bestätigt und sichert das berühmte von M. PLANCK 1899/1900 aufgestellte Wärmestrahlungsgesetz

$$\varrho_\nu(T) = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (10)$$

worin h das PLANCKSche *Wirkungsquantum*

$$h = 6,55 \cdot 10^{-27} \text{ erg sec} \quad (11)$$

ist. Für die Konstante a des STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetzes (7) ergibt die Integration (9) den Wert

$$a = \frac{8}{15} \cdot \frac{\pi^5 h^4}{c^3 h^3}. \quad (7')$$

Bei $h\nu/kT \gg 1$ erhalten wir als Grenzfall das sog. WIENSche Gesetz

$$\varrho_\nu(T) = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}}; \quad (12)$$

für $h\nu/kT \ll 1$ ergibt sich als Grenzfall das klassische RAYLEIGH-JEANSsche Gesetz (4). Es sind also, bei irgendeiner festgehaltenen Temperatur T , die hinreichend *langen Wellen*, für welche die klassische Theorie anwendbar bleibt¹. Oder wir können sagen: die klassische Theorie ist der *Grenzfall*, der sich aus der Quantentheorie ergibt, wenn wir *Wirkungsgrößen* von der Größenordnung h *vernachlässigen*. Aus einem quantentheoretischen Gesetz geht ein klassisches Gesetz hervor, wenn wir h durch Null ersetzen (oder in einem Grenzübergang zu Null werden lassen): das wird noch an vielen Beispielen zu bestätigen sein, nachdem wir es hier soeben für das Gesetz der Wärmestrahlung festgestellt haben.

2. Die mittlere Oszillatorenenergie. Zu einer tieferen Analyse des PLANCKschen Gesetzes (10) führt uns ein Vergleich des Strahlungshohlraums

¹ Bei $T = 300^\circ$ ist $h\nu_0/kT = 1$ für $\lambda_0 = c/\nu_0 = 4,76 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$.

mit der Thermodynamik eines *festen Körpers* (Kristallgitters). Ein Stück eines festen Körpers ist nach der Atomtheorie ein mechanisches Gebilde von sehr vielen, sagen wir N Massenpunkten, die *elastisch* aneinander gekoppelt sind. (Die elastische potentielle Energie ist eine quadratische Form der von der Gleichgewichtslage jedes einzelnen Massenpunktes aus gerechneten rechtwinkligen Koordinaten [„Verrückungen“] dieser Massenpunkte.) Die Mechanik lehrt, daß die allgemeinste elastische Schwingungsbewegung, welche ein solches Gebilde ausführen kann, eine Überlagerung von „*Eigenschwingungen*“ ist, d. h. von *stehenden Wellen* im Kristallgitter: Eine Eigenschwingung ist eine solche Bewegung, bei welcher alle N Massenpunkte mit gleicher Frequenz und gleicher Phase rein harmonisch schwingen, wobei nur die Amplituden der Schwingungen nach Betrag und Vorzeichen für die verschiedenen Massenpunkte verschieden sind¹. Wie die Mechanik lehrt, gibt es bei unserem System $3N$ derartige Eigenschwingungen² (weil es $3N$ *Freiheitsgrade* gibt); durch ihre Superposition kommt die allgemeinste mögliche Schwingung im Gitter zustande, und die Gesamtenergie (potentielle plus kinetische) ist gleich der *Summe* der jeweilig vorhandenen Energien der einzelnen Eigenschwingungen.

Die klassische statistische Mechanik lehrt nun, daß ein *harmonischer Oszillator* (insbesondere also eine der soeben betrachteten Eigenschwingungen des Festkörpers) bei der Temperatur T im Mittel den Energieinhalt

$$\varepsilon = kT \quad (13)$$

besitzt. Bis auf einen Zahlfaktor ist das wieder allein aus *Dimensionsgründen* zu verstehen: ε kann nur von der Frequenz ν des Oszillators und von T abhängen; also ist ε unabhängig von ν proportional mit kT . Der feste Körper enthält somit bei der Temperatur T eine *thermische Energie* $3N\bar{\varepsilon} = 3NkT$ und besitzt folglich die von der Temperatur unabhängige *spezifische Wärme* (bei konstantem Volum) $3Nk$. Ein *Grammatom* des festen Körpers, d. h. ein Stück mit $N=L$, wo L die *LOSCHMIDTSche Zahl* ist, hat dann die spezifische Wärme

$$C_v = 3Lk = 3R; \quad R = 1,985 \frac{\text{cal}}{\text{grad}}. \quad (14)$$

Diese Behauptung der klassischen Theorie ist an vielen Beispielen geprüft worden, mit dem Ergebnis, daß sie richtig ist für *hinreichend hohe Temperaturen*, aber falsch bei tieferer Temperatur. Die *klassische Mechanik versagt* also nicht weniger als die klassische Elektrodynamik, und die Erfahrung läßt in diesem beiderseitigen Versagen einen inneren Zusammenhang erkennen. Bei sehr tiefen Temperaturen nämlich sind die spezifischen Wärmen der festen Körper proportional mit T^3 (*DEBYESches*

¹ Die k -te Verrückung ξ_k sieht also dann in ihrer Abhängigkeit von der Zeit t so aus: $\xi_k = \alpha_k \cos(2\pi\nu t + \beta)$, wobei ν und β von k unabhängig sind.

² Genauer: $3N - 6$.

Gesetz), also die thermischen Energieinhalte proportional mit T^4 , ganz wie der Energieinhalt des Strahlungshohlraums.

Man kann die klassische, auf die MAXWELLSche Elektrodynamik gestützte Theorie des Strahlungshohlraums in einer Form durchführen, welche von vornherein eine enge Verwandtschaft zum Problem des festen Körpers erkennen läßt. Auch im Hohlraum (mit spiegelnden Wänden) lassen sich alle überhaupt möglichen elektromagnetischen Schwingungszustände darstellen als Superposition von *stehenden Wellen* oder „*Eigenschwingungen*“. Wir betrachten zunächst das einfachere, weil eindimensionale Beispiel einer an den Enden festgehaltenen homogenen *elastischen Saite*: Auf dieser sind unendlich viele stehende Wellen möglich; die zugehörigen Wellenlängen sind offenbar gegeben durch

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}; \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

wobei l die Länge der Saite ist. Für eine Saite, auf der die elastischen Wellen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c besitzen, werden also die zugehörigen „*Eigenfrequenzen*“ gegeben durch

$$\nu_n = \frac{nc}{2l}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Im dreidimensionalen Falle (*Würfel* l^3) sind die Eigenfrequenzen entsprechend gegeben durch

$$\nu_{n_1, n_2, n_3} = \frac{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} c}{2l}, \quad (15)$$

wo n_1, n_2, n_3 drei ganze Zahlen sind. Es gibt offenbar $\frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} R^3$ verschiedene Tripel ganzer positiver Zahlen n_1, n_2, n_3 , für welche $\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \leq R$ ist. (Es handelt sich um die Anzahl ganzzahliger „Gitterpunkte“ im positiven Oktanten einer Kugel vom Radius R .) Nun gehören wegen der Transversalität der Lichtwellen zu einem bestimmten Zahlentripel n_1, n_2, n_3 stets *zwei* verschiedene elektromagnetische Eigenschwingungen mit verschiedenem Polarisationszustand. Also gibt es

$$\frac{8\pi}{3c^3} \nu_0^3 V$$

Eigenschwingungen im Hohlraum V , deren Frequenz kleiner als ν_0 ist; und

$$Z(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} V d\nu \quad (16)$$

Eigenschwingungen haben eine Frequenz im Intervall $\nu, \nu + d\nu$. Aus diesen unendlich vielen Eigenschwingungen kann jeder Schwingungszustand des Hohlraums superponiert werden, und die Gesamtenergie U ist gleich der Summe der Energien der einzelnen Eigenschwingungen. Diese Formel (16) gilt ganz allgemein, bei *beliebiger* Gestalt des Hohlraums.

Nach klassischer Theorie hätten wir nun lediglich $8\pi\nu^2/c^3$ zu multiplizieren mit der mittleren Oszillatorenenergie $\bar{\epsilon} = kT$, um $\rho_\nu(T)$ zu erhalten: wir bekommen auf diesem Wege das *RAYLEIGH-JEANSSche*

Gesetz (4). Das PLANCKSche Gesetz hingegen bedeutet gemäß (16), daß die *mittlere Energie eines harmonischen Oszillators* der Frequenz ν bei der Temperatur T gegeben ist durch

$$\bar{\epsilon}_\nu = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (17)$$

Danach verstehen wir auch die spezifischen Wärmen fester Körper: Bei hinreichend hoher Temperatur ist für *alle* Eigenfrequenzen ν eines Festkörpers die Bedingung $h\nu \ll kT$ erfüllt — denn alle diese ν liegen unterhalb eines endlichen ν_{\max} — so daß aus (17) als Grenzfall der klassische „*Gleichverteilungssatz*“ (13) folgt. Bei sehr tiefen Temperaturen hingegen besitzen nur noch solche Eigenschwingungen eine merkliche mittlere Energie, deren Wellenlänge sehr groß im Vergleich zum Abstand benachbarter Atome im Gitter sind. Für diese Wellen spielt die atomistische Struktur des Festkörpers keine Rolle mehr: der Körper verhält sich wie ein schwingendes elastisches *Kontinuum*, und es tritt in Gestalt des T^4 -Gesetzes engste Analogie zum — gleichfalls ein schwingendes Kontinuum darstellenden — elektromagnetischen Hohlraum ein.

Es ist also *derselbe* Quanteneffekt, der in dem hier untersuchten Versagen einerseits der klassischen Elektrodynamik, andererseits der klassischen Mechanik zutage kommt: In beiden Fällen tritt das quantenphysikalische Gesetz (17) an die Stelle des klassischen Gleichverteilungssatzes (13).

§ 2. Der Dualismus Wellen—Korpuskeln.

1. *Energieschwankungen im Strahlungsfeld.* Der von der klassischen Beschreibung durch die MAXWELLSche Theorie einschneidend abweichende Charakter des elektromagnetischen Strahlungsfeldes stellt sich besonders drastisch dar in den *Energieschwankungen* im Strahlungsfelde. Die Gesetze dieser Schwankungen sind, wie EINSTEIN gezeigt hat, durch das empirisch gesicherte PLANCKSche Gesetz bereits völlig *festgelegt*, sofern die für die kinetisch-statistische Deutung der Thermodynamik grundlegende BOLTZMANNsche *Beziehung*

$$S = k \log W \quad (1)$$

auch in der Quantentheorie zuverlässig bleibt (S = Entropie; k = BOLTZMANNsche Konstante; W = thermodynamisch-statistische Wahrscheinlichkeit). Daß das der Fall ist, kann aber vernünftigerweise nicht bezweifelt werden; denn bis auf die Normierung ist (1) eine notwendige mathematische Folge davon, daß in einem thermodynamischen System, das aus zwei unabhängigen Teilen besteht, die Gesamtentropie S gleich der *Summe* der Teilentropien S_1 , S_2 und die thermodynamische Wahrscheinlichkeit W des Gesamtsystems gleich dem *Produkt* der Wahrscheinlichkeiten W_1 , W_2 der beiden Teile ist: Aus

$$S(W_1 W_2) = S(W_1) + S(W_2)$$

folgt $S(W) = \text{const} \log W^1$.

¹ Zum Beweise schreibe man $S(W) = f(\log W)$; dann ist $f(x+y) = f(x) + f(y)$ und $f'(x+y) = f'(x) = \text{const}$.

Da die *spektrale Zerlegung* der Strahlung ein thermodynamisch *reversibler Prozeß* ist, so muß die Entropie der in einem Hohlraum enthaltenen Strahlung sich *additiv* zusammensetzen aus den Entropien der monochromatischen Anteile dieser Strahlung. Das heißt, sie muß so aussehen:

$$S = V \int_0^{\infty} s_{\nu} d\nu,$$

wo s_{ν} eine gewisse *Funktion von ρ_{ν}* ist. Diese Funktion $s_{\nu}(\rho_{\nu})$ muß so beschaffen sein, daß bei gegebener Gesamtenergie U die Entropie S *maximal* wird, wenn ρ_{ν} gerade der PLANCKSchen Formel (mit der dem gegebenen U entsprechenden Temperatur T) entspricht. Dadurch ist aber die Funktion $s_{\nu}(\rho_{\nu})$, wie man leicht überlegen kann, *eindeutig bestimmt*: der einzige dieser Forderung entsprechenden Entropieausdruck lautet

$$s_{\nu} = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} \{ (n_{\nu} + 1) \log (n_{\nu} + 1) - n_{\nu} \log n_{\nu} \}, \quad (2)$$

wobei die Abkürzung

$$n_{\nu} = \frac{c^3}{8\pi h} \cdot \frac{\rho_{\nu}}{\nu^3} \quad (3)$$

gebraucht ist. Diese Entropieformel (2), (3) ist also ebenso sehr wie das PLANCKSche Gesetz als eine *unmittelbar empirisch gesicherte Gesetzmäßigkeit* anzusehen.

Wir betrachten jetzt einen Hohlraum vom Volum V_0 (mit spiegelnden Wänden), in welchem eine Energiemenge eingeschlossen ist, welche ausschließlich aus Strahlung im kleinen Frequenzbereich ν , $\nu + \Delta\nu$ besteht. Normalerweise wird sich diese Energie *gleichmäßig* über das ganze Volum V_0 verteilen, wobei dann $\rho_{\nu} = E/V_0 \Delta\nu$ ist. Es werden jedoch statistische *Schwankungen* in der räumlichen Verteilung dieser Energie stattfinden, und es muß auch, wenn V_1 ein bestimmtes Teilvolum von V_0 ist, einmal der Fall eintreten, daß die ganze Energie E in V_1 angesammelt ist, wobei dann ρ_{ν} dort den Wert $E/V_1 \Delta\nu$ hat. Beide Fälle mögen im Gültigkeitsgebiet des WIENSchen Strahlungsgesetzes liegen: $n_{\nu} \ll 1$. Dann ist die *Entropiedifferenz* beider Zustände nach (2), (3) gleich

$$\begin{aligned} S_1 - S_0 &= s_{\nu}^{(1)} V_1 \Delta\nu - s_{\nu}^{(0)} V_0 \Delta\nu \\ &= - \frac{E}{h\nu} \log \frac{n_{\nu}^{(1)}}{n_{\nu}^{(0)}} = \frac{E}{h\nu} \log \frac{V_1}{V_0}. \end{aligned}$$

Das verwenden wir, um die *Wahrscheinlichkeit* für das Eintreten der fraglichen abnormen räumlichen Energieverteilung zu bestimmen: sie ist gleich dem Quotienten der zu S_1 und S_0 gehörigen thermodynamischen Wahrscheinlichkeiten W_0 und W_1 , wofür die BOLTZMANNsche *Beziehung* (1) jetzt den Wert

$$\frac{W_1}{W_0} = \left(\frac{V_1}{V_0} \right)^{\frac{E}{h\nu}} \quad (4)$$

liefert.

Hier zeigt die elektromagnetische Strahlung eine völlig andere Natur, als ihr von der klassischen Elektrodynamik zugeschrieben wurde. Denn in der Formel (4) tritt eine unerwartete *Analogie des Strahlungshohlraums zu einem idealen Gase* von $N = E/h\nu$ Atomen hervor: sie fordert dazu heraus, die Strahlungsenergie E als aus *einzelnen korpuskularen Energiequanten der Größe $h\nu$* bestehend anzusehen, die unabhängig voneinander im Volum V_0 umherschwirren, sodaß jedes einzelne die Wahrscheinlichkeit V_1/V_0 besitzt, in V_1 angetroffen zu werden.

Das im PLANCKSchen Gesetz zum Ausdruck kommende Versagen der klassischen Elektrodynamik schafft also Raum für eine Rehabilitierung der *Korpuskulartheorie des Lichtes*, die gerade dort in Kraft tritt, wo die *Wellentheorie des Lichtes* ihre Zuständigkeit verliert. Allerdings kommt keineswegs etwa eine einfache, durchgehende *Ersetzung* der Wellenvorstellung durch die Korpuskularvorstellung in Frage: Das Schwingungsgesetz (4), in welchem die korpuskularen Lichtquanten klar heraustreten, gilt ja nur bei derjenigen hochgradigen Verdünnung der Strahlungsenergie ($n, \ll 1$), welche dem WIENSchen Strahlungsgesetz entspricht. Bei dieser Strahlungsdichte zeigen auch alle sonstigen denkbaren Schwingungsexperimente vollständige Analogie zum klassischen idealen Gase. Bei größerer Strahlungsdichte jedoch verliert sich diese Analogie, und bei extrem großen Strahlungsdichten ($n, \gg 1$) treten mit dem RAYLEIGH-JEANSschen Strahlungsgesetz auch die der klassischen Wellentheorie entsprechenden Schwingungsgesetze der Lichtausbreitung in ihre volle Gültigkeit ein, so daß sich die quantenhafte Struktur des Strahlungsfeldes nicht mehr verrät.

2. Experimenteller Nachweis der Lichtquanten. Die durch das EINSTEINSche Gedankenexperiment sichtbar gemachten *Lichtquanten $h\nu$* zeigen sich nicht weniger deutlich im Experiment des *Photoeffektes*, d. h. bei der Auslösung von Elektronen aus einer Metalloberfläche durch auffallendes (ultraviolette) Licht. Dies Licht sei monochromatisch. Die Erfahrung lehrt dann (nach LENARD und nach EINSTEIN) zweierlei:

1. Die *Anzahl* der pro Zeiteinheit ausgelösten Elektronen ist (bei festgehaltener Frequenz) *der Lichtintensität proportional*.

2. Die *Geschwindigkeitsverteilung* der Elektronen hängt nur von der Frequenz ν des Lichtes ab, ist aber *unabhängig* von seiner *Intensität*. Die *schnellsten* haben eine kinetische Energie

$$\frac{m v^2}{2} = h\nu - P, \quad (5)$$

wo P eine für das betreffende Metall charakteristische Konstante ist.

Diese an sich so einfachen und übersichtlichen Feststellungen bilden schon qualitativ einen krassen Widerspruch zur klassischen Lichttheorie. Denn diese würde ja verlangen, daß jedes der lichtelektrisch ausgelösten Elektronen seine aus der elektromagnetischen Strahlung entnommene Energie *stetig* aufgenommen und im Laufe einer endlichen Zeit *angesammelt* hat; diese Ansammlung sollte um so schneller gehen, je größer

die Lichtintensität ist. Man müßte also nach klassischer Vorstellung eine geringere Energie der ausgelösten Elektronen erwarten bei *schwächer* Lichtintensität. Die hier bestehende Paradoxie wird noch verschärft durch besondere Experimente, welche sichergestellt haben, daß beim Einsetzen der Belichtung die der Intensität proportionale Auslösung *sofort* beginnt, *ohne* Einschaltung einer Zeitdifferenz, während welcher die Elektronen Strahlungsenergie ansammeln könnten. Das ist auch für sehr geringe Intensitäten festgestellt, bei welcher nach klassischer Theorie eine Zeit von Stunden vergehen müßte, bevor eine Energiemenge der nötigen Größenordnung einem einzelnen Elektron zugeführt werden könnte.

Diese Tatsachen zeigen eindeutig, daß die Lichtenergie den Elektronen nicht in einer stetigen Übertragung, sondern in *unteilbaren endlichen Beträgen*, also unstetig, plötzlich, sprunghaft zugeführt wird: Die einfache und durch die besprochenen Umstände außer Zweifel gestellte Deutung des EINSTEINSCHEN Gesetzes (5) ist die, daß die Strahlungsenergie in *unteilbaren Energiequanten* $h\nu$ übertragen wird; jedes der ausgelösten Elektronen hat mit dieser Energie $h\nu$ die *Ablösungsarbeit* P geleistet und gegebenenfalls noch sekundäre Energieverluste bestritten, so daß der als kinetische Energie verbleibende Rest maximal gleich $h\nu - P$ sein kann.

Eine weitere Bestätigung liefert das *kontinuierliche Röntgenbremspektrum*. Ein Strahl von Elektronen, die sämtlich eine bestimmte Potentialdifferenz V durchfallen und somit eine kinetische Energie eV gesammelt haben, wenn e der Betrag der Elektronenladung ist, wird beim Anprall auf die Antikathode *gebremst*. Es geht dann von ihnen elektromagnetische Strahlung aus, die ein *kontinuierliches Spektrum* mit einer *kurzwelligen Grenze* besitzt:

$$h\nu_{\max} = eV. \quad (6)$$

Dies läßt erschließen, daß auch die *Emission* von Licht in *unstetigen Elementarakt*en vor sich geht, unter Abgabe von Lichtquanten $h\nu$, für welche in diesem Fall beliebige Energiebeträge unterhalb der vor Einsetzen der Bremsung vorhandenen Elektronenenergie eV zur Verfügung stehen.

Dem geradeaus fliegenden Lichtquant der Energie

$$E = h\nu \quad (7)$$

ist ein *translatorischer Impuls* vom Betrage

$$|\mathfrak{G}| = \frac{h\nu}{c} \quad (8)$$

zuschreiben: für die Korpuskulartheorie wie für die Wellentheorie [vgl. (5), § 1] ergibt sich ein Impuls E/c zwangsläufig aus der *Relativitätstheorie*. Aber auch die in (7), (8) ausgesprochene *Zuordnung von Energie und Frequenz* ist relativistisch *invariant*: Die ebene Welle der Frequenz ν (und Geschwindigkeit c), deren Fortschrittrichtung mit der des

Lichtquants übereinstimmt, zeigt in einem *gleichförmig bewegten Koordinatensystem* eine durch *Dopplereffekt* veränderte Frequenz ν' ; und das korpuskulare Teilchen mit der Energie E (und Impuls E/c) zeigt in demselben bewegten Koordinatensystem eine andere Energie E' . Die zuständigen relativistischen Transformationsformeln lassen erkennen, daß dann auch zwischen E' und ν' die Beziehung $E' = h\nu'$ besteht.

Eine unmittelbare experimentelle Bestätigung finden die Lichtquantenimpulse $h\nu/c$ durch die Untersuchung des *COMPTON-Effektes*. Eine *ebene Welle* von Röntgenlicht streicht über einen Raum, in dem sich *freie Elektronen* befinden. (Praktisch realisiert etwa durch einen Graphitklotz, welcher Elektronen mit einer Bindungsenergie enthält, die gegenüber dem $h\nu$ der benutzten Röntgenstrahlung vernachlässigbar ist). Es ergibt sich dann eine *Streuung* des Lichtes durch die Elektronen, und zwar zeigt die Streustrahlung verminderte Frequenzen derart, daß die unter einem Winkel Θ mit der Primärstrahlrichtung abgehende Streustrahlung eine Wellenlängenvergrößerung um

$$\Delta\lambda = \frac{2h}{\mu c} \sin^2 \frac{\Theta}{2} \quad (9)$$

erfährt ($\mu =$ Ruhemasse des Elektrons). Das kann so gedeutet werden (DEBYE, COMPTON), daß ein Lichtquant $h\nu$ des Primärstrahls einen *Stoß* auf ein ruhendes freies Elektron ausübt, wonach Elektron und Lichtquant auseinander fliegen. Es seien \mathfrak{G}_1 bzw. \mathfrak{G}'_1 die Impulse des Lichtquants vor bzw. nach dem Stoß, und \mathfrak{G}'_2 der durch den Stoß entstehende Impuls des Elektrons, E'_2 die dazu gehörige Energie, einschließlich Ruhenergie μc^2 . Der *Energiesatz* verlangt dann

$$E'_2 = h(\nu - \nu') + \mu c^2, \quad (10)$$

und der *Impulssatz*¹ fordert

$$\mathfrak{G}'_2 = \mathfrak{G}_1 - \mathfrak{G}'_1, \quad (11)$$

also quadriert:

$$\mathfrak{G}'_2{}^2 = \mathfrak{G}_1^2 + \mathfrak{G}'_1{}^2 - 2 \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}'_1 = \frac{h^2}{c^2} (\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos \Theta). \quad (11')$$

Nach der Relativitätstheorie ist nun für ein Teilchen der Energie E , des Impulses \mathfrak{G} und der Ruhemasse μ stets

$$\frac{E^2}{c^2} - \mathfrak{G}^2 = \mu^2 c^2. \quad (12)$$

Wenden wir das auf E'_2 und \mathfrak{G}'_2 in (10) und (11') an, so ergibt sich (9).

Daß diese Deutung des empirischen Befundes (9) tatsächlich zutreffend ist, konnte durch direkte Experimente erhärtet werden (BOTHE-GEIGER, COMPTON-SIMON). Bei diesen wurde in der WILSON-Kammer oder durch die bekannten Zählmethoden festgestellt, daß jedem einzelnen Lichtquant $h\nu'$ der Streustrahlung ein gestoßenes Elektron entspricht,

¹ Nach dem Relativitätsprinzip ist der Impulssatz eine notwendige Folge des Energiesatzes.

das in der Tat in der durch (10), (11) eindeutig bestimmten Richtung \mathcal{G}'_2 fortfliegt.

Diese letzte Feststellung verdrängte die eine Zeitlang vertretene Ansicht (BOHR-KRAMERS-SLATER), daß Energie- und Impulssatz in der Quantenphysik nur *als statistische Mittelwertsgesetze gültig seien*, was immerhin ohne *grobe* Verletzung des Prinzips vom ausgeschlossenen Perpetuum mobile denkbar wäre. (Die genauere Durchdenkung läßt allerdings doch erkennen, daß *makroskopische* Verletzungen des Energieprinzips auf diese Weise resultieren müßten, nämlich als Resultat der allmählich unbegrenzt zunehmenden *Schwankungen* der Energieerhaltung.) Nach dieser Ansicht sollten die Beziehungen (10), (11) zwar für die Frequenzen der Streustrahlung und die Impulse der fortfliegenden Elektronen maßgebend sein; doch sollte die Anzahl der in der Richtung \mathcal{G}'_2 fortfliegenden Elektronen *nur im statistischen Mittel* übereinstimmen mit der Anzahl der in der zugehörigen Sekundärstrahlrichtung \mathcal{G}'_1 zur Beobachtung gelangenden (etwa dort von Atomen absorbierten) Quanten $h\nu'$. In Rücksicht auf diese logische Möglichkeit (deren systematische Verfolgung und Durchführung allerdings sowieso in kaum überwindbare Schwierigkeiten führte) besitzen die Experimente von COMPTON-SIMON und BOTHE-GEIGER die Bedeutung einer empirischen Sicherung von Energie- und Impulssatz nicht nur im statistischen Mittel, sondern *für jeden einzelnen quantenphysikalischen Elementarprozeß*.

Allerdings ist diese Sächlage ganz neuerdings — wie oben schon erwähnt — zuungunsten des Energiesatzes verschoben worden. SHANKLAND hat beim COMPTON-Effekt sehr harter Strahlung (γ -Strahlung) die fragliche Koinzidenz je eines gestreuten Elektrons mit je einem Streuquant nicht bestätigen können, und seine Ergebnisse sind als grundsätzliche *Widerlegung des Energiesatzes* bzw. Bestätigung der Auffassung von BOHR-KRAMERS-SLATER gedeutet worden (DIRAC). Angesichts der oben erläuterten experimentellen Ergebnisse wird man aber daran festhalten müssen, daß jedenfalls *dann*, wenn die Energie $h\nu$ der Primärstrahlung *klein* gegenüber der Ruhenergie μc^2 des Elektrons ist, Energiesatz und Lichtquantenvorstellung in Kraft bleiben. Ihr scheinbares Versagen im Falle $h\nu > \mu c^2$ dürfte deshalb wohl eher als Wirkung noch ungeklärter Sekundäreffekte oder Komplikationen aufzufassen sein.

3. Die Interferenz des Lichtes. Den experimentellen Erfahrungen, welche die *Realität korpuskularer Lichtquanten $h\nu$* sicherstellen, steht die Fülle der Experimente gegenüber, welche die *Wellennatur des Lichtes* zeigen. Wir wollen auch die *optischen* und *röntgenoptischen Interferenzexperimente* hier zu den Grundexperimenten der Quantenphysik zählen, obwohl sie historisch der klassischen Physik angehören, und obwohl in der quantitativen Erfassung ihrer Gesetzmäßigkeiten die Naturkonstante h nicht vorkommt. Die der experimentellen Erfahrung zu entnehmende Erkenntnis, die uns nötigt, die klassische Lichttheorie durch eine Quantentheorie des Lichtes zu ersetzen, ist eben die, daß das Licht

in Wahrheit eine *dualistische* Natur besitzt, in dem Sinne, daß sowohl der klassischen Korpuskularvorstellung ähnelnde Züge, als auch der klassischen Wellenvorstellung entsprechende Züge darin enthalten sind.

Die optischen Interferenzexperimente ausführlicher zu schildern, darf hier unterlassen werden. Es genüge, hervorzuheben, daß die so ungeheuer große und reiche Mannigfaltigkeit der diesbezüglichen Erfahrungen ihre *lückenlose* quantitativ exakte Beschreibung in den Begriffen der klassischen Wellentheorie gefunden hat. Jedoch sind einige Bemerkungen zur genauen Abgrenzung des Gültigkeitsbereichs der klassischen Theorie zu machen.

A. Erfahrungsgemäß gelten die klassischen Interferenzgesetze *exakt*, und zwar *auch bei kleinsten Lichtintensitäten*, für die *Zeitmittelwerte* der Intensitäten im Interferenzfeld. Das heißt, die klassische Theorie ist immer anwendbar für Experimente folgender Art: Von einer *monochromatischen* Strahlungsquelle ausgehend, durchsetzt das Licht gewisse interferenzoptische Apparaturen und bildet ein *Beugungsbild* auf einem *Auffangschirm* (z. B. photographische Platte), auf welchem die entstehende *Intensitätsverteilung* gemessen wird. Von dieser Art sind offenbar *die meisten* der bekannten Interferenzexperimente.

Daß dabei die Aussagen der klassischen Wellentheorie auch bei schwächsten Intensitäten sich exakt bewähren würden, ist, bevor es durch besondere Experimente erhärtet wurde, naheliegenderweise bezweifelt worden angesichts des extremen Hervortretens der korpuskularen Seite der Lichtausbreitung im Gültigkeitsgebiet des WIENSCHEN Strahlungsgesetzes ($n, \ll 1$) und der EINSTEINSCHEN Schwankungsformel (4). Die diesen Zweifel beseitigende Erfahrung lehrt uns, daß die Interferenzen *nicht* etwa durch ein *Zusammenwirken vieler* Lichtquanten bedingt werden, sondern aus der Natur des *einzelnen* Lichtquants heraus zustande kommen. Natürlich kann eine *kontinuierliche Intensitätsverteilung* im Beugungsbild nur durch das Auftreffen *zahlreicher* Lichtquanten entstehen. Aber es ist gleichgültig, ob man bei *großer* Intensität *kurz* exponiert, oder bei beliebig *schwacher* entsprechend *lange*.

Denken wir uns also den extremsten Fall, daß bei ungeheuer schwacher Strahlungsintensität aus der monochromatischen Lichtquelle *nur ein einziges Lichtquant* herausgelassen und dem Beugungsexperiment unterworfen wird, so müssen wir schließen, daß auf dem Auffangschirm eine der wellenoptisch berechneten Intensität proportionale *Wahrscheinlichkeit* für das Auftreffen dieses Lichtquants an einem bestimmten Orte besteht.

Für die soeben betrachtete Klasse von Fällen führt also der unbefangene Anblick der Erfahrungstatsachen *unmittelbar* zu einer *exakten* Theorie, in der wellenhafte und korpuskulare Züge der Lichterscheinungen sich in widerspruchsfreier Weise vereinigen.

B. Die besprochene exakte Gültigkeit wellentheoretischer Aussagen bewährt sich auch dann noch, wenn die Lichtquelle oder sonstige Teile

der Apparatur sich *bewegen*. Insbesondere gilt das für die Aussage der Wellentheorie, daß ein herausgeschnittenes endliches Stück eines monochromatischen Wellenzuges eine *endliche Spektralbreite* entsprechend seiner mathematischen Darstellung durch ein *FOURIER-Integral* besitzt. Dieser von EINSTEIN vorübergehend bezweifelte Umstand wurde in einer von ihm erdachten Versuchsordnung durch RUPP bestätigt.

C. Von den unter A (und B) betrachteten Verhältnissen logisch völlig unabhängig ist die noch einmal hervorzuhebende Tatsache, daß bei *großen Strahlungsdichten* ($n_v \gg 1$) neben den Interferenzen selbst auch die *Schwankungen* der Strahlungsenergie im Interferenzfeld sich so verhalten, wie die klassische Wellentheorie voraussehen läßt. Offensichtlich ist dies auch eine Feststellung *ganz anderen Charakters*, als die unter A gemachte: Damals handelte es sich darum, gewisse, aus dem Gesamtzusammenhange der klassischen Theorie *herausgelöste* Aussagen als *exakte Gesetzmäßigkeiten der Quantenphysik* (bei *beliebigen* Lichtintensitäten) zu kennzeichnen. Jetzt handelt es sich um einen Spezialfall der allgemeinen Feststellung, daß die klassischen Gesetze *asymptotisch gültige Grenzgesetze* (für $h \rightarrow 0$) sind. Eine exakte Erfassung der optischen Gesetze (einschließlich der Schwankungsgesetze) für das Zwischengebiet *mittlerer* Strahlungsdichten (n_v weder $\ll 1$ noch $\gg 1$) ist eine Aufgabe von sozusagen ganz anderer Größenordnung als die Aufgabe, welche sich in A ganz von selbst löste.

In sehr auffallender Weise bewährt sich die exakte Gültigkeit klassischer Interferenzgesetze insbesondere darin, daß das von einer Lichtquelle *sehr geringer räumlicher Ausdehnung* allseitig ausgesandte Licht Interferenz ergibt, wenn man zwei nach beliebig verschiedenen Richtungen ausgehende Strahlen durch geeignete Spiegelanordnungen zur Superposition bringt¹.

In demselben Sinne, wie die oben unter A besprochenen klassischen Interferenzgesetze erweisen sich übrigens erfahrungsgemäß auch eine Reihe anderer Aussagen der klassischen Wellentheorie als *exakte* Gesetze der Quantentheorie. So z. B. die *FRESNELSchen Formeln* für die Intensitäten bei Reflexion und Brechung an der Grenzebene zweier durchsichtiger homogener Medien: die uneingeschränkte Gültigkeit dieser Formeln auch bei kleinsten Lichtintensitäten bedeutet, daß *für das einzelne Lichtquant* die *FRESNELSchen Formeln* gültig sind im Sinne einer exakten Festlegung der *Wahrscheinlichkeiten* dafür, daß das Lichtquant entweder reflektiert wird oder in das andere Medium übergeht. Analoge Bemerkungen wären zu machen zur gesamten klassischen Kristalloptik, die gleichfalls ein durch die Quantentheorie nicht mehr abzuänderndes Kapitel darstellt. Insbesondere hat man die Intensitätsformeln

$$I_1 = I_0 \cos^2 \varphi; \quad I_2 = I_0 \sin^2 \varphi \quad (13)$$

¹ Diese wenig bekannte Tatsache ergab sich nebenbei aus Experimenten von SELENYI und ferner in eigens dazu angestellten Untersuchungen von SCHRÖDINGER und von GERLACH und LANDÉ.

für die Zerlegung eines *linear polarisierten Lichtstrahls* durch einen Nicol so aufzufassen, daß das einzelne Lichtquant eine *Wahrscheinlichkeit* $\cos^2 \varphi$ bzw. $\sin^2 \varphi$ besitzt, vom Nicol durchgelassen bzw. reflektiert zu werden, wenn φ der Winkel zwischen der *ursprünglichen* Polarisations-ebene des Lichtquants und der nach dem Durchgang (falls dieser eintritt) angenommenen Polarisations-ebene ist.

4. **Kugelwellen.** Von großer Bedeutung für die Atomtheorie sind die Gesetzmäßigkeiten der *elektromagnetischen Kugelwellen*, von denen uns insbesondere die einfachsten, die sog. *Dipol-Kugelwellen*, zu beschäftigen haben. Eine Reihe von Aussagen, welche die klassische Theorie bezüglich dieser Kugelwellen macht, *bleiben* nach Ausweis der Erfahrung auch in der Quantenphysik in Kraft.

Nach der klassischen Theorie sendet ein eindimensional schwingender elektrischer Dipol *linear polarisierte* elektromagnetische Strahlung aus, wobei natürlich die Gerade, auf der sich die schwingende Ladung bewegt, Symmetrieachse des ganzen Vorgangs ist. Die Polarisationsrichtung der in einer bestimmten Radialrichtung auslaufenden Strahlung ergibt sich daraus, daß der elektrische Vektor \mathcal{E} stets in der entsprechenden Meridian-ebene liegt. Die *Richtungsverteilung der Intensität* ist dann durch

$$I(\vartheta) = C \cdot \sin^2 \vartheta \quad (14)$$

gegeben, wenn ϑ der Winkel zwischen der betrachteten Emmissionsrichtung und der Schwingungsrichtung des Dipolmomentes ist.

Diese Aussagen ergeben sich aus den berühmten *HERTZschen Formeln* für die elektromagnetische Ausstrahlung eines schwingenden Dipols. Wir wollen uns aber klar machen, daß es für ihr Verständnis in Wahrheit gar nicht nötig ist, auf die *MAXWELLSchen* Differentialgleichungen und ihre mathematischen Konsequenzen näher einzugehen: der *eigentliche Sinn* der ausgesprochenen Resultate liegt in ganz elementaren Zusammenhängen, deren Bewußtmachung uns die Zuversicht gibt, daß diese Resultate *bestehen bleiben* müssen trotz aller Einschränkungen, die sich die *MAXWELLSche* Theorie seitens der Quantengesetze gefallen lassen muß. Zunächst ergibt sich (wenn wir die Tatsache der *Transversalität* des Lichtes beachten) der Polarisationszustand des emittierten Lichtes sowie die axialsymmetrische Abhängigkeit der Intensität allein vom Winkel ϑ und ihr Verschwinden für $\vartheta = 0$ aus *Symmetriegründen*. Und danach ergibt sich das Gesetz (14) aus folgender Erwägung.

Wir betrachten *drei* eindimensionale Oszillatoren gleicher Gesamtemission, mit drei senkrecht zueinander stehenden Schwingungsrichtungen (parallel der x -, y - und z -Achse). *Addieren* wir nun die *Intensitäten* dieser drei Emissionen, so ergibt sich eine *richtungsunabhängige Summe*. Es wird uns im später folgenden immer klarer werden, daß dies eine sehr wesentliche Bedeutung hat, so daß wir berechtigt sind, die Überlegung umzukehren, und zu sagen: *Damit* sich diese richtungsunabhängige Summe ergibt, *muß* die Intensitätsverteilung genau die Gestalt (14) haben.

Diese Begründung läßt erwarten, daß die beschriebene Gesetzmäßigkeit auch in der Quantenphysik exakt fortbesteht. Das ist in der Tat der Fall, wie man beim *ZEEMANN-Effekt* von Spektrallinien an den linear polarisierten Komponenten (π -Komponenten) des Aufspaltungsbildes feststellt. Natürlich ist jedoch auch in diesem Falle (analog, wie bei den Interferenzgesetzen) das Gesetz anders *gemeint*, als in der klassischen Theorie, insofern, als es jetzt als ein *statistisches Mittelwertgesetz* für einzelne unstetige Elementarakte der Lichtemission anzusehen ist.

Die σ -Komponenten eines *ZEEMANN-Effekt*-Aufspaltungsbildes zeigen erfahrungsgemäß exakt diejenige Polarisation und Intensitätsverteilung, welche klassisch (nach den HERTZschen Formeln) für ein *zirkular* bewegtes Elektron als Strahlungsquelle errechnet wird, dessen Schwingungskreis in einer Ebene senkrecht zur magnetischen Feldrichtung liegt. Die Polarisation ist im allgemeinen *elliptisch*: Für jede Emissionsrichtung ist die den Polarisationszustand charakterisierende Schwingungsellipse die Projektion des Kreises, in dem sich das Elektron bewegt, auf eine zur Emissionsrichtung senkrechte Ebene. Bei Zerlegung in zwei linear polarisierte Komponenten, mit (elektrischer) Schwingungsebene senkrecht und parallel zur Meridianebene, bekommen wir aus einem Strahl, der den Winkel ϑ mit der Feldrichtung (Symmetrieachse) bildet, die Intensitäten

$$I'(\vartheta) = C; \quad I''(\vartheta) = C \cos^2 \vartheta, \quad (15)$$

insgesamt also

$$I(\vartheta) = I'(\vartheta) + I''(\vartheta) = C(1 + \cos^2 \vartheta). \quad (16)$$

Auch diese Verhältnisse lassen sich ganz ohne spezielleres Eingehen auf die MAXWELLSche Theorie verstehen: Gemäß der Möglichkeit, eine zirkuläre Bewegung durch Superposition zweier zueinander senkrechter eindimensionaler Schwingungen herzustellen, entsprechen die beiden Formeln (15) zwei Ausdrücken der Gestalt (14), mit zwei zueinander und zur Feldrichtung senkrechten Schwingungsrichtungen, von denen die eine (I' ergebende) senkrecht auf der betrachteten Emissionsrichtung steht, während die andere (I'' ergebende) mit dieser den Winkel $\pi/2 - \vartheta$ bildet.

In relativistisch modifizierter Gestalt finden wir (14) wieder im Intensitätsgesetz des *COMPTON-Effekts*. Von einem N Elektronen (mit Ladung e und Masse μ) enthaltenden Streuzentrum (Graphitklotz), das von *linear polarisierter Primärstrahlung* der Intensität I_0 überstrichen wird, geht nach klassischer Rechnung (J. J. THOMSON) eine elektromagnetische *Streustrahlung* aus, die in der Entfernung r vom Streuzentrum die Intensität

$$I(\vartheta) = I_0 \frac{N e^4}{r^2 \mu^2 c^4} \sin^2 \vartheta \quad (17)$$

besitzt, wenn ϑ jetzt der Winkel zwischen der Richtung des Streustrahls und der Richtung des elektrischen Vektors in der Primärwelle ist. Das

entspricht offenbar (14): Die elektrische Feldstärke der Primärwelle bringt die Elektronen zum Mitschwingen (in der Richtung des elektrischen Vektors), wodurch sie zur Emission von Kugelwellen kommen.

Eine unmittelbare Anwendung von (17) auf den COMPTON-Effekt verbietet sich durch die charakteristische quantenphysikalische Tatsache der richtungsabhängigen Verschiedenheit der Streufrequenz ν' von der Primärfrequenz ν . Die Tatsache der *relativistischen Invarianz von ρ/ν^3* legt es jedoch nahe, anzunehmen, daß der quantenphysikalisch exakte Wert $I(\Theta, \vartheta)$ der Streuintensität nach Division mit ν'^3 übereinstimmt mit der klassisch berechneten Größe $I(\vartheta)/\nu^3$. Nach (17) gewinnen wir aber aus

$$\frac{I(\Theta, \vartheta)}{\nu'^3} = \frac{I(\vartheta)}{\nu^3} \quad (18)$$

die DIRACsche Formel

$$I(\Theta, \vartheta) = I_0 \frac{N e^4}{r^2 \mu^2 c^4} \cdot \frac{\sin^2 \vartheta}{\{1 + \alpha(1 - \cos \Theta)\}^3}; \quad \alpha = \frac{h \nu}{\mu c^2}. \quad (19)$$

Sie geht im Limes $h \rightarrow 0$ (oder für *kleine Frequenzen*: $h\nu \ll \mu c^2$) natürlich wieder in (17) über.

Für *unpolarisierte* Primärstrahlung ergibt sich als arithmetisches Mittel zweier Glieder¹ der Form (19):

$$I(\Theta) = I_0 \frac{N e^4}{2 r^2 \mu^2 c^4} \cdot \frac{1 + \cos^2 \Theta}{\{1 + \alpha(1 - \cos \Theta)\}^3}. \quad (20)$$

Der *insgesamt zerstreute Bruchteil* der Primärintensität ergibt sich aus (20) durch Integration und hat den Wert

$$\frac{2 \pi N e^4}{\mu^2 c^2} \cdot \frac{1 + \alpha}{\alpha^2} \left\{ \frac{2(1 + \alpha)}{1 + 2\alpha} - \frac{1}{\alpha} \log(1 + 2\alpha) \right\}. \quad (21)$$

Diese Formeln (19), (20), (21) sind *empirisch bestätigt* für die in Betracht kommenden nicht allzu großen Frequenzen: Bei *großen Werten* von α tritt nach der heutigen Theorie in Übereinstimmung mit der Erfahrung eine kompliziertere Formel ein. In sehr eindrucksvoller Weise läßt uns dies Intensitätsgesetz der COMPTON-Streuung erkennen, daß trotz der fundamentalen Gegensätzlichkeit zwischen dem klassischen Wellenbilde und dem klassischen Partikelbilde die quantenphysikalische Wirklichkeit eine innige Verschmelzung korpuskularer und wellenmäßiger Züge in der Natur des Lichtes erreicht.

5. DE BROGLIESche Wellen. Die Erfahrung lehrt — eine von DE BROGLIE durch theoretische Erwägungen begründete Vermutung bestätigend — daß auch an Kathodenstrahlen und sonstigen Materiestrahlen *Beugungserscheinungen* zu beobachten sind. Ähnlich den LAUESchen oder DEBYE-SCHERRERSchen Röntgeninterferenzen ergeben sich Interferenzerscheinungen, wenn Materiestrahlen Kristallpulver oder dünne kristalline

¹ Der Primärstrahl habe die Richtung der z -Achse, und die elektrische Schwingungsebene sei einmal die z, x -Ebene, und dann die z, y -Ebene. Sind ϑ, ϑ' die Winkel des Sekundärstrahls mit der x - und y -Achse, so ist $\cos^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta' + \cos^2 \Theta = 1$, also $\sin^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta' = 1 + \cos^2 \Theta$.

Schichten durchsetzen oder an Kristalloberflächen reflektiert werden. Diese Effekte sind außer an Kathodenstrahlen auch z. B. an Strahlen von H_2 und He (STERN und ESTERMANN) experimentell untersucht. Es bestätigt sich die von DE BROGLIE theoretisch erschlossene Zuordnung

$$|\mathcal{G}| = \frac{h}{\lambda} \quad (22)$$

zwischen dem translatorischen Impuls \mathcal{G} der Korpuskeln und der für die Beugungseffekte maßgebenden Wellenlänge λ . Durch

$$E = h\nu \quad (23)$$

wird sie zu einer relativistisch *invarianten* Zuordnung vervollständigt, wenn wir unter E die Energie der Korpuskeln (einschließlich Ruhenergie μc^2) und ν die Frequenz der zugeordneten „DE BROGLIESchen Welle“ verstehen; es ist also stets $\nu \geq \mu c^2/h$ ¹. Die *Phasengeschwindigkeit* der DE BROGLIESchen Wellen ergibt sich aus (22), (23) als

$$\lambda \nu = \frac{E}{|\mathcal{G}|} = \frac{c^2}{v}, \quad (24)$$

wo v die Geschwindigkeit der Korpuskeln ist².

Ebensowenig, wie die Quantentheorie des Lichtes eine primitive Ersetzung der klassischen Wellentheorie durch eine klassisch aufzufassende Korpuskulartheorie bedeutet, ebensowenig kann die Quantentheorie der materiellen Strahlung umgekehrt eine in klassischer Vorstellungswise aufgefaßte reine Wellentheorie sein: gegenüber der neuen empirischen Erkenntnis der wellenhaften Züge in der materiellen Strahlung bleibt die ältere empirische Erkenntnis der „andererseits“ vorhandenen *korpuskularen* Struktur dieser Strahlung unanfechtbar in Kraft. Das MILLIKANSSche *Experiment der e-Bestimmung* läßt uns in unmittelbarer Anschaulichkeit die korpuskularunstetige Struktur der elektrischen Ladungen erkennen. Die WILSON-Kammer³ macht in mannigfachen Beispielen die Flugbahnen *einzelner* atomarer Korpuskeln sichtbar; für eine Anzahl von Fällen kann an stereoskopischen Aufnahmen der WILSON-Bahnen auch die Gültigkeit von *Energie- und Impulssatz* für kernphysikalische Elementarprozesse eingehend bestätigt werden. Die Mannigfaltigkeit der sonstigen atomphysikalischen Zählmethoden erhebt die mit ihnen immer wieder bestätigte atomistische Struktur der Materie zu einer der empirisch bestbestätigten physikalischen Behauptungen,

¹ In der durchsichtigen Ausdrucksweise der vierdimensionalen Relativitätstheorie ergibt sich die Invarianz der Zuordnung aus der Bemerkung, daß in einer Wellenamplitude

$$\cos 2\pi (\mathfrak{t}_x x + \mathfrak{t}_y y + \mathfrak{t}_z z - \nu t)$$

die Größen $\mathfrak{t}_x, \mathfrak{t}_y, \mathfrak{t}_z, \nu/c$ ebenso, wie $\mathcal{G}_x, \mathcal{G}_y, \mathcal{G}_z, E/c$ einen *Vierervektor* bilden. Die in (22), (23) ausgedrückte *Proportionalität* dieser Vierervektoren ist invariant.

² Nach der Relativitätsmechanik ist

$$E = \frac{\mu c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \mathcal{G} = \frac{\mu v}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad |v| = v, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

nachdem noch bis zum Anfang des Jahrhunderts die Atomhypothese den Charakter einer unbewiesenen Spekulation behalten hatte. Die materielle Strahlung besitzt also ebenfalls eine *dualistische* Natur, die *weder* durch die klassische Wellentheorie, *noch* durch die klassische Korpuskularvorstellung allseitig erfaßt werden kann.

In diesem Versagen unserer klassischen Begriffe, das uns zunächst als eine so paradoxe Schwierigkeit für die gedankliche Erfassung der Gesetze der Strahlung erscheinen muß, tritt jedoch als positiver Tatbestand die enge *Analogie* von Licht und materieller Strahlung hervor. In einer sonderbaren Weise ist die quantenphysikalische Wirklichkeit *einfacher*, als die Gedankensysteme, durch welche die klassischen Theorien sie nachzubilden suchten. Im klassischen Vorstellungssystem sind wellenförmige und korpuskulare Strahlung zwei völlig verschiedene Dinge; in der Wirklichkeit aber gibt es statt dessen nur einen einzigen Typus von Strahlung und *beide* klassischen Vorstellungen geben nur teilweise ein richtiges Bild davon.

Freilich darf nicht übersehen werden, daß die voranstehend verzeichneten Erfahrungstatsachen eine Analogie von Licht und materieller Strahlung doch nur in begrenzter Weise begründen. Die DE BROGLIESchen Wellen haben wir empirisch nur an *solchen* Effekten kennengelernt, die den oben unter A behandelten optischen Interferenzexperimenten entsprechen. Aber im Falle der *elektromagnetischen* Strahlung sind nicht nur Interferenzen nachweisbar, sondern es sind — wenigstens für hinreichend große Wellenlängen — *die Wellenamplituden selbst*, als elektromagnetische *Feldstärken*, der unmittelbaren Beobachtung und Messung zugänglich. Dafür bietet sich in den besprochenen Erfahrungen betreffs DE BROGLIEScher Wellen *kein* Analogon, und die moderne Theorie *verneint* bezüglich gewisser Arten materieller Strahlung ausdrücklich die grundsätzliche Möglichkeit einer diesbezüglichen Analogie. Ähnliches gilt für die oben unter C gemachte Feststellung, daß bei hinreichend großer Strahlungsdichte auch die *Interferenzschwankungen* des Lichtes der klassischen Wellentheorie gemäß verlaufen; diese Feststellung kann also *nicht* allgemein auf materielle Strahlung ausgedehnt werden (vgl. Kapitel 4).

Die für das Licht festgestellte Notwendigkeit, die klassische Wellentheorie durch eine dualistische Quantentheorie zu ersetzen, gilt natürlich auch für jede andere Art klassischer Wellen, wie etwa elastische Wellen in einem festen Körper. Die einer mit *Unterlichtgeschwindigkeit* fortschreitenden Welle zugeordneten Korpuskeln haben gemäß (24) *Überlichtgeschwindigkeit* und die Eigenschaft $E < c|\mathcal{G}|$, was wegen (12) formal einer *imaginären Ruhmasse* entspricht.

Mit den DE BROGLIESchen Wellen stehen zwei Effekte in unmittelbarem Zusammenhang, die in sehr charakteristischer Weise ein Versagen der klassischen Partikelmechanik beweisen. Der erste dieser Effekte ist der RAMSAUER-Effekt: Bei Messung des „*Wirkungsquerschnitts*“ gewisser

Atome gegenüber einem Strahl langsamer Elektronen zeigt sich eine Abhängigkeit dieses Wirkungsquerschnitts von der Elektronengeschwindigkeit derart, daß in einem gewissen Intervall der Wirkungsquerschnitt *abnimmt* mit *abnehmender Geschwindigkeit*. Dies zeigt sich in ausgeprägter Weise (Abnahme bis zu Werten unterhalb des gaskinetischen Wirkungsquerschnitts) insbesondere bei den Edelgasen von Ne an. Der unklassische Charakter des Effekts liegt auf der Hand: die vom Atom auf das Elektron ausgeübten Kraftwirkungen sollten klassisch um so merkbarer zur Geltung kommen, je kleiner die Elektronengeschwindigkeit ist, so daß der Wirkungsquerschnitt *zunehmen* müßte mit abnehmender Geschwindigkeit. Quantentheoretisch ist der RAMSAUER-Effekt zu deuten als ein *Beugungseffekt* der DE BROGLIESchen Elektronenwellen. Er zeigt sich nämlich bei solchen Geschwindigkeiten, die ein anfangs ruhendes Elektron nach dem Durchfallen einer Potentialdifferenz von der Größenordnung einiger Volt annimmt; die zugehörige DE BROGLIEsche Wellenlänge hat die Größenordnung $5 \cdot 10^{-8}$ cm, also etwa die Größenordnung der Atomdurchmesser.

Noch auffälliger ist der Effekt des *Durchgangs durch Potentialsschwellen*, der sich am klarsten bei den α -Strahlen der radioaktiven Kerne zeigt. Man weiß nach RUTHERFORD, daß das Potentialfeld eines Atomkerns bis zu Radialabständen der Größenordnung 10^{-13} cm herunter dem COULOMBSchen Gesetze mit großer Genauigkeit entspricht; das ergibt sich aus Beobachtungen der *Streuung von α -Strahlen* durch schwere Kerne:

In einer der Formel (20) der COMPTONSchen Streuintensität analogen Weise wird die Streuung von α -Strahlen quantitativ erfaßt durch die berühmte RUTHERFORD-DARWINSche Streuformel

$$I(\Theta) = I_0 \frac{N}{r^2} \left(\frac{Z Z' e^2}{2 \mu v^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\Theta}{2}}, \quad (25)$$

die sich theoretisch gerade unter Zugrundelegung des COULOMBSchen Zentralfeldes für die streuenden Kerne ergibt. Mit $Z'e$ ist die Ladung der gestreuten Teilchen (α -Teilchen), mit Ze die der streuenden Kerne bezeichnet, deren Masse als unendlich groß gegenüber der Masse μ der gestreuten Teilchen (mit der Geschwindigkeit v) angenommen wird. Wir nehmen vorweg, daß die exakte Quantentheorie (Wellenmechanik) für das COULOMB-Feld genau *dieselbe* Formel (25) liefert, wie sie sich auch aus klassischer Rechnung ergibt: Die aus dem Vergleich von (25) mit der Erfahrung gezogenen Rückschlüsse betreffs des Gültigkeitsbereichs des COULOMBSchen Gesetzes für die Kernwechselwirkungen bleiben also auch für die Quantentheorie in Kraft. Sie führen zu dem schon ausgesprochenen Ergebnis und zeigen beispielsweise, daß beim Uran U I noch in $3,2 \cdot 10^{-12}$ cm Abstand vom Kernmittelpunkt ein COULOMBSches Feld besteht.

Wird nun aus einem solchen Kern ein α -Teilchen entlassen, so müßte es nach klassischer Partikelmechanik hernach mindestens soviel

kinetische Energie zeigen, wie ein Teilchen der Ladung ze , das im Abstand $3,2 \cdot 10^{-12}$ cm vom Kernmittelpunkt ohne Geschwindigkeit losgelassen und dann durch COULOMBSche Abstoßung beschleunigt wird, in großer Entfernung bekommen würde. Tatsächlich zeigt sich aber beim U I eine α -Emission, bei der die Energie nicht größer ist, als die potentielle Energie eines α -Teilchens im Abstand $6,3 \cdot 10^{-12}$ cm vom Kernmittelpunkt. Wir wissen heute, daß dieselbe Beziehung — Energie der emittierten α -Teilchen *kleiner* als die maximale potentielle Energie eines α -Teilchens in dem betreffenden COULOMBSchen Kernfeld — bei *allen* radioaktiven α -Strahlungen besteht.

Die damit nachgewiesene *Durchdringbarkeit von Potentialschwellen* ist offenbar ein in schroffster Weise der klassischen Mechanik widersprechender Effekt, für den jedoch die Einführung der DE BROGLIESchen Wellen eine Deutungsmöglichkeit gibt: Der Effekt erscheint jetzt analog dem Umstand, daß nach klassischer Wellenoptik beim Vorgang der *totalen Reflexion* auch in dem den total reflektierten Lichtquanten unzugänglichen Medium eine gewisse elektromagnetische Erregung besteht. Diese Erregung klingt zwar räumlich exponentiell ab mit wachsendem Abstand von der Grenzebene; wenn aber das Medium mit dem kleineren Brechungsindex nur eine hinreichend *dünne Platte* bildet, hinter welcher wieder der größere Wert des Brechungsindex hergestellt ist, so wird ein gewisser Bruchteil der Lichtintensität die Platte durchdringen: Die Lichtquanten verhalten sich hier analog den die „Potentialwände“ des Kerns durchdringenden α -Teilchen.

§ 3. Stationäre Zustände und Lichtreaktionen.

1. **Nachweis der Energiestufen.** Läuft ein chemisch einheitlicher *Atomstrahl* durch ein *inhomogenes Magnetfeld*, so bleibt er *entweder* unbeeinflusst (unabgelenkt), oder er wird *aufgespalten* in einige diskret verschiedene Teilstrahlen, die verschiedene Ablenkungen durch das Magnetfeld erfahren (*STERN-GERLACH-Effekt*).

Aus der eintretenden Ablenkung der zu dem gleichen Teilstrahl gehörenden Atome ist zu entnehmen, daß alle diese Atome *übereinstimmende magnetische Energie* besitzen; und zwar ist die magnetische Energie, welche ein solches Atom besitzt, wenn es sich an einem Orte befindet, wo die magnetische Feldstärke den Betrag $|\mathfrak{H}|$ besitzt, gleich

$$W^{(m)} = C \cdot |\mathfrak{H}|; \quad C = \text{const.} \quad (1)$$

Die ablenkende Kraft ist dann $\mathfrak{K} = -\text{grad } W^{(m)}$. Die Konstante C hat in den verschiedenen Teilstrahlen verschiedene Werte: im Falle eines H-Atomstrahls (ebenso eine Ag-Atomstrahls) gibt es *zwei* Teilstrahlen mit *entgegengesetzten* Werten C :

$$|C| = M_0 = \frac{eh}{4\pi\mu c}.$$

Dabei ist wieder e die *Ladung* und μ die *Masse* des *Elektrons*. Man nennt M_0 das *BOHRsche Magneton*:

$$M_0 = \frac{e h}{4 \pi \mu c} = 0,921 \cdot 10^{-20} \text{ erg/Gauß.} \quad (2)$$

Im allgemeinen Falle ergeben sich für C mehrere *äquidistante* Werte, mit der *Summe Null*, was man so auszudrücken pflegt:

$$\left. \begin{aligned} C &= -m g M_0; \\ m &= -j, -j+1, -j+2, \dots, j-1, j; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Dabei ist j (die „*innere Quantenzahl*“) entweder *ganzzahlig* oder *halbzahlig*, so daß die angegebenen Werte von m („*magnetische Quantenzahl*“) eine äquidistante Reihe bilden. Der Zahlfaktor g („*LANDÉscher Faktor*“) hat Werte zwischen 1 und 2. Die *Intensitäten der $2j+1$ vorhandenen Teilstrahlen stimmen überein*¹.

Der Fall des unabgelenkten, unaufgespaltenen Strahls wird durch $j=0$ dargestellt. Beim H-Atom (der Ag-Atom) ist $j = \frac{1}{2}$ und $g=2$.

Wir erkennen aus diesem Experiment das Auftreten *diskret verschiedener Zustandsmöglichkeiten* und *diskreter Energiestufen* der Atome. Es ist für alle klassischen Theorien eine *selbstverständliche Voraussetzung*, daß der Energieinhalt irgendeines physikalischen Gebildes *stetiger Abstufung fähig* ist — da ja die physikalischen Vorgänge, durch welche dieser Energieinhalt sich *ändern* kann, von der klassischen Beschreibung grundsätzlich immer als *stetige Vorgänge* angenommen werden.

Im STERN-GERLACH-*Experiment* jedoch sehen wir, daß die magnetische Energie, die ein Atom in einem gewissen Magnetfeld annimmt, *nicht* stetig variabel ist, sondern nur endlich viele, *um endliche Energiedifferenzen auseinander liegende Werte* annehmen kann.

Derartige *unstetige Energiestufen* der Atome werden in nicht weniger anschaulicher Weise gezeigt durch die (historisch älteren) FRANCK-HERTZschen *Elektronenstoßversuche*. Das Prinzip dieser Experimente ist, daß man die Atome eines einatomigen Gases oder Dampfes Zusammenstöße mit einem Schwarm von Elektronen erleiden läßt, wobei die Elektronen alle dieselbe kinetische Energie besitzen; es werden dann die durch Übertragung auf die Atome eintretenden *Energieverluste* der Elektronen festgestellt.

Durchfällt ein Elektron eine Potentialdifferenz von V Volt, so gewinnt es kinetische Energie vom Betrage

$$\frac{\mu v^2}{2} = \frac{1}{300} e V \text{ eig.} \quad (4)$$

Man pflegt von einem atomaren Gebilde, dessen Energie gleich (4) ist, kurz zu sagen, es habe eine *Energie von V Volt* („*Elektron-Volt*“).

¹ Vorausgesetzt ist selbstverständlich, daß der ursprüngliche, unaufgespaltene Atomstrahl ein „*natürlicher*“ (etwa aus einem Ofen kommender) war, und nicht z. B. einer der Teilstrahlen aus einer vorher durchlaufenen STERN-GERLACHschen Anordnung.

Die Elektronen in den FRANCK-HERTZschen Experimenten haben Energien im Bereich von etwa 1 bis 30 Volt. Da bei Zimmertemperatur die mittlere kinetische Energie $\frac{3}{2} kT$ der Gasatome etwa $\frac{1}{30}$ Volt beträgt, so ist die auch anderweitig bedingte Genauigkeitsgrenze von $\frac{1}{10}$ Volt praktisch nicht unterschreitbar. Da das *Massenverhältnis* von Atomen und freien Elektronen von der Größenordnung 10^4 bis 10^5 ist, so kommt infolge von Energie- und Impulssatz eine merkliche Änderung der *Translationsenergie* eines Atoms durch einen Elektronenstoß nicht in Frage: die Energieverluste der Elektronen entsprechen Zunahmen der *inneren Energie* der einzelnen Atome.

Es zeigt sich nun, daß eine bestimmte Atomart nicht etwa beliebige, stetig abgestufte Energiebeträge in sich aufnehmen kann; *sondern nur eine Reihe von diskret verschiedenen Werten der Energieaufnahme sind möglich*. Ist die kinetische Energie der stoßenden Elektronen kleiner als der *kleinste* Betrag, den die Atome aufnehmen können, so verlaufen alle Zusammenstöße vollkommen *elastisch*, ohne Energieverlust der Elektronen.

Die innere Energie eines Atomes ist also nur bestimmter, *diskreter Werte fähig*, und kann *nicht*, wie es klassisch zu erwarten wäre, stetig um beliebig kleine Beträge verändert werden. Diese Energiestufen zeigen sich bei allen Atomen; ihre Lage ist charakteristisch für das betreffende Element. Dasselbe gilt für *Moleküle*, nur mit dem Unterschied, daß bei diesen eine wesentlich engere Lagerung der Energiestufen besteht, deren vollständige Auflösung mit der Genauigkeit der Elektronenstoßversuche nicht mehr zu erreichen ist¹. Die *kleinsten Anregungsspannungen* für einige Atome sind beispielsweise:

H: 10,15 Volt; Na: 2,1 Volt; Mg: 2,7 Volt; Tl: 0,9 Volt;
He: 19,8 Volt; K: 1,6 Volt; Hg: 4,7; 4,9; 5,4 Volt.

Von einer bestimmten Elektronenenergie an — die z. B. für Hg-Atome 10,4 Volt beträgt — können die getroffenen Atome auch *ionisiert* werden; doch ist der Energieverlust des stoßenden Elektrons bei Ionisierung eines Hg-Atoms *nicht* stets genau 10,4 Volt, sondern kann *beliebige* Größe von 10,4 Volt an aufwärts haben. Man hat sich vorzustellen, daß der Überschuß des Verlustes über den Mindestwert 10,4 Volt dem abgerissenen Elektron als kinetische Energie übertragen wird². Entsprechend gibt es für *jedes* Element eine ihm charakteristische „Ionisierungsspannung“; z. B. für:

H: 13,5 Volt; Na: 5,1 Volt; Mg: 7,6 Volt;
He: 24,6 Volt; K: 4,3 Volt; Tl: 6,0 Volt.

Im Gegensatz zu den charakterisch quantenphysikalischen Ergebnissen von FRANCK und HERTZ ist die Existenz einer definierten, von Element

¹ Abgesehen von anderen sekundären Hindernissen.

² Die hier gebrauchte Ausdrucksweise bedarf streng genommen einer Korrektur im Hinblick auf den Umstand, daß grundsätzlich gar nicht zu unterscheiden ist, *welches* der beiden fortfliegenden Elektronen das „stoßende“ und welches das „abgerissene“ ist.

zu Element verschiedenen *Ionisierungsspannung* ein auch klassisch zu verstehender und zu erwartender Umstand. Historisch ist die erste direkte Messung der Ionisierungsspannung schon den älteren Untersuchungen von LENARD zu verdanken, der jedoch ihre Abhängigkeit vom Element nicht erkannt und die Bezeichnung „II-Volt-Grenze“ für die Ionisierungsspannung beliebiger Atome beibehalten hat¹.

2. **RITZsches Kombinationsprinzip und Energiestufen.** Das ungeheure Erfahrungsmaterial, das die Spektroskopiker durch die Ausmessung der Wellenlängen in zahllosen Spektren von Atomen und Molekülen zusammengetragen haben, bestätigt überall ausnahmslos die Gültigkeit eines empirischen Gesetzes, das als das *RITZsche Kombinationsprinzip* bezeichnet wird, und das folgendermaßen auszudrücken ist. Die Gesamtheit der Linienfrequenzen im Spektrum eines Atoms oder Moleküls, oder eines Atom- oder Moleküliions, ist zurückzuführen auf ein System von (unendlich vielen) Zahlen, die für das betreffende Spektrum charakteristisch sind, und *Terme* dieses Spektrums genannt werden; jede der Frequenzen ν ist durch *Differenzbildung* zu erhalten aus zwei solchen Termen T_n, T_m :

$$\frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda} = T_n - T_m. \quad (5)$$

Diese Gesetzmäßigkeit ist von RITZ zuerst verallgemeinernd vermutet auf Grund der von BALMER gefundenen Darstellung der Spektralfrequenzen des H-Atoms:

$$\nu = B \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right), \quad (6)$$

mit *ganzen Zahlen* n, m , wonach also (5) mit den Termwerten

$$T_n = \frac{B}{c n^2}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

gilt. Auch für das Heliumion He^+ ist (6), (7) anwendbar, mit einem anderen Wert für B : Die Erfahrung bestätigt für die drei Beispiele des H-Atoms vom Atomgewichte 1 oder 2 und des He^+ die berühmten, von BOHR gefundenen Formeln

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } B = \frac{R Z^2}{1 + \frac{\mu}{M}}; \\ \text{b) } R = \frac{2 \pi^2 e^4 \mu}{h^3}. \end{array} \right\} \quad (8)$$

Hierbei ist e die *Elektronenladung*, Z die *Kernladungszahl* (= 1 bei H und = 2 bei He^+), μ die *Elektronenmasse* und M die *Kernmasse* des aus positivem Kern und *einem* Elektron bestehenden Gebildes ist. Man nennt R die *RYDBERG-Konstante*. Es ist

$$\frac{R}{c} = 109737,11 \pm 0,6 \text{ cm}^{-1}. \quad (8')$$

¹ Interessante Angaben über sonstige historische Vorläufer der FRANCK-HERTZschen Untersuchungen finden sich in W. DE GROOT u. F. M. PENNIG: *Anregung von Quantensprüngen durch Stoß*. Handbuch der Physik, 2. Aufl., Bd. 23, 1.

Der im besprochenen Beispiel vorliegende Fall, daß *alle* aus zwei beliebigen Termen T_n , T_m zu berechnenden Frequenzen $\nu = c(T_n - T_m)$ wirklich im Spektrum vorkommen, findet sich allerdings bei anderen Atomen nicht wieder. Trotzdem haben sich die daraufhin früher gehegten Zweifel an der Allgemeingültigkeit des RITZschen Kombinationsprinzips als unberechtigt erwiesen, indem sich die Möglichkeit ergeben hat, auf Grund einer bestimmten *Klassifikation* der Terme (Numerierung durch mehrere Indizes, sog. „Quantenzahlen“) in Form von „Auswahlregeln“, die für alle Atome in gleicher Weise gelten, gesetzmäßig festzulegen, *welche* Kombinationen zweier Terme T_n , T_m wahrnehmbaren Spektrallinien entsprechen, und welche dagegen „verboten“ sind. In vielen Fällen sind zudem durch bestimmte äußere Einwirkungen (z. B. minimalen STARK-Effekt) auch „verbotene“ Linien hervorzulocken.

Daß das RITZsche Kombinationsprinzip als eine durchaus *unklassische* Gesetzmäßigkeit angesehen werden muß, liegt auf der Hand. Von klassischen Vorstellungen aus würden wir für ein schwingendes atomares System im einfachsten Falle eine Grundfrequenz ν und ganzzahlige Oberfrequenzen 2ν , 3ν , 4ν , ... erwarten. Man muß schon zu komplizierten Gebilden, wie schwingenden festen Körpern von ad hoc ersonnener merkwürdiger Gestalt übergehen, um an einem klassischen Gebilde ein ähnliches System von Eigenfrequenzen zu erhalten, wie sie bei einem Atom vorliegen. Eine Deutung des RITZschen Kombinationsprinzips jedoch könnte auf klassischem Boden nur durch ganz spezielle und groteske Voraussetzungen erreicht werden, die der Einfachheit und Allgemeingültigkeit dieses empirischen Gesetzes in keiner Weise gerecht würden.

Die experimentelle Erfahrung lehrt aber eine fundamentale Beziehung zwischen den *Spektraltermen* und den *Energiestufen* eines atomaren Gebildes: Bei passender Festlegung der additiven Konstanten, die in den Termen T_n und in den diskreten möglichen Energiewerten W_n stecken, besteht die *Proportionalität*

$$W_n = -c T_n h. \quad (9)$$

Das bestätigt sich für alle Fälle, bei denen eine energetische Messung der W_n durchgeführt ist. Historisch hat man für eine Anzahl von Elementen gerade durch Elektronenstoßmessungen (auch in der in 3 zu beschreibenden optisch aufschlußreicheren Form) die Ermittlung der spektroskopischen Terme eingeleitet; in bezug auf *Moleküle* mit noch unanalysierten Spektren sind diese Untersuchungsmethoden noch immer aktuell. Die ungleich größere Genauigkeit spektroskopischer Messungen ermöglicht nach (9) umgekehrt die schärfere Berechnung von Energiestufen aus den spektroskopischen Termen.

Auch bei *Störungen* (Verschiebungen und Aufspaltungen) von Spektrallinien durch elektrische und magnetische Felder (STARK-Effekt; ZEEMAN-Effekt) bewährt sich das RITZsche Kombinationsprinzip; und es bewährt

sich ebenso die Beziehung (9), wie man empirisch für eine Anzahl von Fällen unmittelbar aus den Ergebnissen der STERN-GERLACHSchen Methode ersehen kann: Die spektroskopische Erfahrung (Analyse der ZEEMAN-Effekte) lehrt, daß für *alle* atomaren Spektraltermine die Anwesenheit eines nicht zu starken äußeren Magnetfeldes eine gemäß der Formel (3) gestaltete Aufspaltung ergibt. Erst bei höheren Magnetfeldstärken ergeben sich kompliziertere Störungen (PASCHEN-BACK-Effekt).

Bei dieser Gelegenheit ist ein wichtiger quantenphysikalischer Begriff einzuführen: Wenn ein Spektralterm eines Atoms durch äußere Störung (z. B. ZEEMAN-Effekt) in G verschiedene Terme aufgespalten werden kann, deren jeder seinerseits keine weitere Aufspaltungsmöglichkeit besitzt, so sagen wir, der Term habe die *Vielfachheit* G . Alle Terme haben *endliche* Vielfachheiten.

Die *Ionisierungsspannungen* erweisen sich allgemein als verknüpft mit *Konvergenzgrenzen der Spektraltermine*: Die in (7) aufgeschriebenen Terme T_n des H-Atoms konvergieren mit wachsendem n gegen $T_\infty = 0$; und $W_1 = -cT_1h$ ist der der *Ionisierungsspannung* des H-Atoms entsprechende Energiewert. Es zeigen sich aber im Anschluß an die Konvergenzgrenzen der *Spektralserien* $T_1 - T_n$ (LYMAN-Serie), $T_2 - T_n$ (BALMER-Serie), $T_3 - T_n$ (PASCHEN-Serie), ... *kontinuierliche* Spektren, welche im Sinne des RITZschen Kombinationsprinzips (5) eine Ergänzung der diskreten Terme T_n durch eine *kontinuierliche* Mannigfaltigkeit von Termen $T \leq 0$ nötig machen: diese entsprechen offenbar den positiven kinetischen Energien $W = 1/2 \mu v^2 \geq 0$, welche bei ionisiertem Zustand des Atoms von dem abgetrennten freien Elektron angenommen werden können.

Entsprechendes gilt allgemein für beliebige Atome.

3. Lichtreaktionen. Der Ursprung des Lichtes, das von einer GEISLER-Röhre oder einem hochoverhitzten Gase ausgestrahlt wird, und das im allgemeinen ein aus einzelnen engen Linien zusammengesetztes Spektrum besitzt, ist seit langem in *inneratomaren Bewegungen* gesucht worden, deren Energie sich auf das umgebende elektromagnetische Feld überträgt. Versucht man in irgendeiner Weise ein Modell dieser inneren Bewegungen der Atome mit Hilfe klassisch-mechanischer Begriffe zu konstruieren, so kommt man, unabhängig von jeder speziellen Wahl des Modells, zu dem Ergebnis, daß die Bewegungsenergie jedes einzelnen Atoms in *stetiger* Weise in Strahlungsenergie übergehen muß; dabei würden im allgemeinen *alle Spektrallinien* des Atoms *gleichzeitig* emittiert. Diese Folgerungen stehen jedoch mit den Ergebnissen aller experimentellen Untersuchungen über die Bedingungen der spektralen Emissionen und Absorptionen in vollkommenem Widerspruch.

Aus der Erkenntnis der un stetigen Energiestufen der Atome und ihrem durch das RITZsche Prinzip vermittelten Zusammenhang mit den spektralen Frequenzen gewinnen wir ein gänzlich anderes Bild von dem

Charakter der inneratomaren Bewegungen und ihrer Verknüpfung mit Strahlungsprozessen. Die Tatsache, daß ein Atom nur in gewissen *diskret verschiedenen Zuständen* mit endlichen Energiedifferenzen auftreten kann, zwingt uns zu der Folgerung, daß Emission oder Absorption von Strahlung in *unstetigen Sprüngen* von einem Zustand zu einem anderen geschieht, und bei jedem solchen Sprunge jeweils nur *monochromatisches* Licht abgegeben oder aufgenommen wird, dessen Frequenz ν mit der Energiedifferenz ΔW der beiden fraglichen Zustände durch die *BOHRsche Frequenzbedingung*

$$h\nu = \Delta W \quad (10)$$

verknüpft ist: In diesem Bilde erhalten wir eine vollkommene Übereinstimmung und wechselseitige Bedingtheit zwischen dem RITZschen Kombinationsprinzip und der quantenphysikalischen Grundtatsache, daß der Energieaustausch zwischen Lichtfeld und Materie in *unteilbaren Lichtquanten $h\nu$* vor sich geht.

Die Vorstellung, daß die Strahlungsprozesse in solcher Weise gebunden seien an die atomaren *Energiestufen*, führt zu einer Reihe einfacher Folgerungen bezüglich der Bedingungen für Emission und Absorption von Licht, die gänzlich verschieden von den aus *jeder* klassischen Theorie zu ziehenden Folgerungen sind, und die mannigfache Möglichkeiten der experimentellen Prüfung ergeben. Als erste prüfbare Folgerung ergibt sich, daß ein unerregtes Gas durchaus nicht alle seine Spektrallinien absorbiert, sondern jeweils nur einen Teil derselben; die *Absorptionslinien* der unerregten Atome sind diejenigen, deren tieferer Kombinationsterm dem energetischen *Grundzustand* des Atoms entspricht. Diese Folgerung ist an zahlreichen Spektren bestätigt worden; und man hat umgekehrt in vielen Fällen aus der Untersuchung von Absorptionen wichtige Unterlagen für die Analyse noch unbekannter Spektren gewonnen.

Die mit der Frequenz einer einzelnen Absorptionslinie bestrahlten Atome, die ein $h\nu$ absorbiert haben und somit in einen energetisch höheren Zustand gehoben sind, verausgaben die ihnen zugeführte Energie, indem sie, sofern sie ungestört bleiben, ihrerseits wieder Strahlung aussenden. Kennt man das *Termschema* eines Elementes, so gestattet unsere Vorstellung von der Natur der Strahlungsprozesse eine Voraussage der Spektrallinien, die in der *Reemission* auftreten können. Auch diese Aussagen der Theorie sind in mannigfaltigen Experimenten bestätigt worden. In jedem Fall ergeben sich offenbar nur *endlich viele* Spektrallinien in der „*Fluoreszenz*“; und bei vielen Elementen kommt der Fall vor, daß von einem bestimmten Anregungszustand aus, welcher die obere Kombinationsstufe einer Absorptionslinie bildet (wegen völligen Fehlens zwischenliegender Terme, oder infolge der *Auswahlregeln*) *nur* der *Rücksprung in den Grundzustand* möglich ist: dann wird also — bei Ausschluß störender Effekte — die ganze vom Gase absorbierte Energie als Strahlung unveränderter Frequenz reemittiert. An solchen „*Resonanz-*

linien“ sind in der Tat die absorbierten und reemittierten Energiemengen auch quantitativ als übereinstimmend erwiesen worden (PASCHEN).

Die geringen Mengen angeregter Atome, die bei Fluoreszenzexperimenten vorhanden sind, können immerhin bereits auch andere als die normalen Absorptionen ermöglichen, wenn man mittels besonderer Anordnungen für eine starke Intensität des eingestrahltten Lichtes sorgt. Die verwickelteren Effekte, die so zu erhalten sind (FÜCHTBAUER), entsprechen gleichfalls dem quantentheoretischen Bilde der Elementarprozesse der Strahlung.

Die *Absorption* in einem *kontinuierlichen*, an eine Serienkonvergenzgrenze anschließenden Spektrum muß unseren Vorstellungen nach zur *Ionisierung* der absorbierenden Atome führen (analog einem *Photoeffekt*). Diese Ionisierung ist in der Tat nachweisbar. Umgekehrt kann die entsprechende *Emission* als durch *Neutralisierung* von Ionen zustande kommend erwiesen werden („*Wiedervereinigungsleuchten*“).

Mehrere verschiedene Emissionslinien, die zu demselben Ausgangszustand gehören, haben untereinander *stets dieselben Intensitätsverhältnisse*; ihre absoluten Intensitäten aber sind stets *proportional* mit der *Anzahl vorhandener Atome im Ausgangszustand der Emission*. Diese primitiven und fundamentalen Behauptungen werden durch zahllose experimentelle Erfahrungen gestützt; da jedoch solche Experimente, aus denen ihre Richtigkeit sich ganz *unmittelbar* und zugleich *quantitativ* ergibt, nur spärlich sind, konnte noch vor wenigen Jahren die Richtigkeit dieser Behauptungen (auf Grund einer abweichenden Deutung der neuentdeckten „Wellenmechanik“) in Zweifel gezogen werden. Besondere Experimente haben diese Zweifel widerlegt. Die *Absorptionsstärke* einer Linie ist entsprechend proportional mit der *Anzahl vorhandener Atome im unteren Kombinationszustand*.

Diese Tatsachen veranlassen folgende Begriffsbildung. In einem Haufen angeregter Atome im n -ten Zustand besteht eine *Wahrscheinlichkeit*

$$G_m A_{n m} \Delta t \quad (I1)$$

dafür, daß ein bestimmtes, beliebig herausgegriffenes dieser Atome innerhalb der (kleinen) Zeitspanne Δt unter spontaner Emission des entsprechenden $h\nu$ in den energieärmeren m -ten Zustand übergeht. Mit G_m meinen wir dabei die *Vielfachheit* des m -ten Zustands, welche hier als Faktor abzuspalten zweckmäßig ist. Die Gesamtemission von N Atomen im Zustand n liefert dann pro Zeiteinheit die Energie $N G_m A_{n m} \cdot h\nu_{n m}$ mit $\nu_{n m} = (W_n - W_m)/h$. Andererseits besteht unter Einfluß einer Strahlungsdichte ϱ_ν der Frequenz $\nu = \nu_{n m}$ für ein im m -ten Zustand befindliches Atom eine *Wahrscheinlichkeit*

$$G_n B_{m n} \varrho_\nu \Delta t \quad (I2)$$

für einen Absorptionsübergang nach n innerhalb von Δt ; mit G_n ist die *Vielfachheit* des n -ten Zustands gemeint.

Der empirische Vergleich von Absorptions- und Emissionsstärken derselben Spektrallinie läßt für die Koeffizienten A_{nm} , B_{mn} der Übergangswahrscheinlichkeiten (11), (12) das folgende EINSTEINSche Gesetz als zutreffend erkennen:

$$A_{nm} = B_{mn} \cdot \frac{8\pi h}{c^3} \nu_{nm}^3. \quad (13)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten stehen ferner nach LADENBURG in einer einfachen gesetzmäßigen Beziehung zur Dispersion. Wir betrachten die Dispersion in einem unangeregten und optisch isotropen einatomigen Gase (also ohne Vorhandensein eines STARK- bzw. ZEEMAN-Effektes erzeugenden elektrischen oder magnetischen Feldes). In bekannter Weise berechnen wir gemäß

$$\frac{1}{N} \frac{n_\omega^2 - 1}{n_\omega^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} \alpha, \quad (14)$$

wobei N die Zahl der fraglichen Atome in der Volumeinheit und n_ω der von der Lichtfrequenz $\nu = \omega/2\pi$ abhängige Brechungsindex ist, die atomare Refraktion α . Für α bewährt sich erfahrungsgemäß die Formel

$$\alpha = \frac{3h}{4\pi^3} \sum_k \frac{G_k \nu_{k0} B_{0k}}{\nu_{k0}^2 - \nu^2}, \quad (15)$$

in welcher die Absorptionsfrequenzen ν_{k0} (der Index Null bezeichne den Grundzustand) als Resonanzstellen der Dispersion auftreten. Die Summation in (15) erstreckt sich über alle vom Grundzustand verschiedenen Zustände k (wobei jedoch gemäß den Auswahlregeln in der Mehrheit aller Fälle B_{0k} verschwindet); der kontinuierliche Anteil des Absorptionsspektrums ist also in Gestalt einer Integration mitzuberechnen.

Handelt es sich jedoch um angeregte Atome im n -ten Zustand, so ist das diesbezügliche α gleich

$$\alpha = \frac{3h}{4\pi^3} \left\{ \sum_{k>n} \frac{G_k \nu_{kn} B_{nk}}{\nu_{kn}^2 - \nu^2} - \sum_{m<n} \frac{G_m \nu_{nm} B_{nm}}{\nu_{nm}^2 - \nu^2} \right\}; \quad (15')$$

hier sollen die ν_{kn} ($k > n$) die Absorptionsfrequenzen des n -ten Zustands und die ν_{nm} ($m < n$) die Emissionsfrequenzen des n -ten Zustands bedeuten. Die G_k , G_m in (15), (15') sind wieder die Vielfachheiten der Zustände k , m .

Neben dieser kohärenten Dispersion ergibt ein von Primärstrahlung der Frequenz ν getroffenes Atom auch noch eine inkohärente Streustrahlung (SMEKAL-RAMAN-Effekt), in welcher Frequenzen der Form

$$\nu' = \nu + \frac{W_n - W_m}{h} \quad (16)$$

auftreten; dabei ist jetzt W_n die Energie desjenigen Zustands, in welchem sich die reagierenden Atome anfangs befinden und W_m ($< W_n$ oder $> W_n$) ein anderer möglicher Energiewert: Die Elementarprozesse dieser SMEKAL-RAMAN-Streuung verlaufen so, daß das vom Lichtquant $h\nu$ getroffene Atom vom n -ten in den m -ten Zustand übergeht, wodurch die (positive oder negative) Energie $W_n - W_m$ frei wird, so daß das

sekundär auftretende Lichtquant die Energie $h\nu'$ bekommt. Die *Intensitäten* der RAMAN-Streuung hängen wiederum eng zusammen mit den Absorptionskoeffizienten $B_{m,n}$, können jedoch *nicht* aus den $B_{m,n}$ (und $\nu_{n,m}$) *allein* berechnet werden. Die diesbezüglichen Gesetzmäßigkeiten finden ihren Ausdruck in einer von KRAMERS und HEISENBERG aufgestellten Formel, die ebenfalls als *in weitem Umfang empirisch begründet* bezeichnet werden darf. Ihre Formulierung und Erläuterung soll jedoch erst später (Kapitel 2) vorgeführt werden.

Die obige Feststellung der *Proportionalität* der Emission einer Spektrallinie mit der *Anzahl* der vorhandenen Atome im Ausgangszustand des betreffenden Überganges bewährt sich auch dann, wenn diese Anzahl *zeitlicher Änderung* unterworfen ist. Für den Fall, daß *keine Neubildung* von Atomen im Ausgangszustand geschieht, ergibt diese Proportionalität ein *exponentielles Abklingen* der Anzahl N :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= -\gamma N; \\ N(t) &= N(0) \cdot e^{-\gamma t}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Hier ist γ gleich der *gesamten Übergangswahrscheinlichkeit* (pro Zeiteinheit) in beliebige tiefere Zustände m :

$$\gamma = \gamma_n = \sum_m G_m A_{n,m}; \quad (W_m < W_n). \quad (18)$$

An der Lichtemission von Kanalstrahlen kann man bei (allerdings schwierigem) Ausschluß sekundärer Effekte dies exponentielle Abklingen bestätigen und die *Absolutwerte der mittleren Lebensdauern*¹

$$\tau_n = \frac{1}{\gamma_n} \quad (19)$$

verschiedener Zustände n empirisch bestimmen. Andererseits kann man τ_n nach (18) berechnen aus den Übergangswahrscheinlichkeiten $A_{n,m}$, die man [wegen ihres Zusammenhanges (13) mit den $B_{m,n}$] aus *Absorptionsintensitäten* oder — nach (15), (15') — aus *Dispersionsmessungen* empirisch ermitteln kann. Aus Absorptionsmessungen bekommt man beispielsweise für den $2^2D_{3/2}$ -Zustand des Tl die Lebensdauer $6,2 \cdot 10^{-8}$ sec und für den 2^3P_1 -Zustand des Zn den sehr großen Wert $2,6 \cdot 10^{-5}$ sec (F. MÜLLER und W. BILLETTER).

In riesigem Umfang, unter mannigfachsten Verwicklungen durch Aufeinanderfolge einer Reihe von Umwandlungen und mit größter Präzision, ist jedoch der fragliche Tatbestand nachgewiesen für die *radioaktiven Umwandlungsprozesse*, welche in vieler Hinsicht als die *bestuntersuchten* quantenphysikalischen Elementarprozesse gelten können.

¹ Von den zur Zeit $t=0$ vorhandenen $N(0)$ Atomen haben gerade $-dN(t)/dt \cdot \Delta t$ eine (von $t=0$ an gerechnete) Lebensdauer zwischen t und $t + \Delta t$. Also ist die *mittlere Lebensdauer* gleich

$$\tau = -\frac{1}{N(0)} \int_0^{\infty} t \cdot \frac{dN(t)}{dt} \cdot dt = \int_0^{\infty} \gamma t \cdot e^{-\gamma t} \cdot dt = \frac{1}{\gamma}.$$

Neben spontaner Lichtemission (γ -Strahlung) finden wir hier bekanntlich auch spontane Emissionen *materieller* Strahlung (α - und β -Strahlen); entsprechend dem Dualismus Wellen — Korpuskeln stehen beide Fälle in enger Analogie. Die fundamentale Gesetzmäßigkeit, daß die durch spontane Emission erfolgende Abnahme einer Anzahl N stets dieser Anzahl *proportional* ist, bewährt sich durchgängig in einem Erfahrungsmaterial, das Lebensdauern bis 10^{-11} sec abwärts und bis 10^{10} Jahren aufwärts umfaßt; die verwickelten zeitlichen Änderungen der Anzahlen N , die sich durch Zerfall und Nachlieferung in den radioaktiven Zerfallsreihen ergeben, finden auf dieser Unterlage ihre vollständige exakte Deutung.

Die Merkwürdigkeit dieses fundamentalen Quantengesetzes, und sein einschneidender Gegensatz zu *klassisch-physikalischen Kausalitätsvorstellungen*, liegt darin, daß für jedes einzelne Atom die *Zerfallswahrscheinlichkeit* (Gesamt-Übergangswahrscheinlichkeit) $\gamma \cdot \Delta t$ *unabhängig von der Zeit* ist, also *unabhängig* davon, *wie lange das Atom in seinem jetzigen Zustand bereits besteht*.

Dieser *statistische Charakter* des radioaktiven Zerfallsgesetzes konnte empirisch noch ausdrücklicher sichergestellt werden durch eingehende Untersuchungen der *Schwankungen*, die sich in der Gesamtemission eines radioaktiven Präparates ergeben.

4. Verknüpfung von Stößen und Leuchtprozessen. Wohl die deutlichste denkbare Bestätigung des quantenphysikalischen Bildes der Beziehungen von Energiestufen und Strahlungsprozessen ergibt sich aus Experimenten, in denen Elektronenstoßmethoden mit optischer Beobachtung verbunden werden. Man beschießt wiederum Atome mit Elektronen bestimmter Geschwindigkeit, sodaß bei Kenntnis des Termeschemas zu übersehen ist, welche Anregungszustände mit der maximal verfügbaren Elektronenenergie erreicht werden können. Diesen entsprechen *bestimmte Emissionslinien*, und man verfolgt bei allmählicher Steigerung der Elektronenenergie das plötzliche Auftreten der zu erwartenden Linien bei Erreichung der zur Anregung des fraglichen Ausgangsniveaus nötigen Spannung. Solche Experimente sind an mancherlei Atomen ausgeführt, in besonders klarer und schöner Weise durch G. HERTZ.

In Umkehrung der Elektronenstoßanregung kann ein angeregtes Atom bei Zusammenstoß mit einem Elektron seine Anregungsenergie in kinetische Energie des Elektrons verwandeln („*Stoß zweiter Art*“). Auch bei Zusammenstößen zwischen zwei Atomen kann Umwandlung von Translationsenergie in Anregungsenergie oder umgekehrt stattfinden. Das zeigt sich z. B. sehr instruktiv an Hg-Dampf, der durch Einstrahlung von nur *einer* der beiden Resonanzlinien (*D-Linien*) $1^2S_{1/2} - 2^2P_{1/2}$, $1^2S_{1/2} - 2^2P_{3/2}$ erregt wird. Während sich bei kleinem Dampfdruck Reemission nur dieser einen Resonanzlinie ergibt, werden bei höherem

Dampfdruck — also häufigeren Zusammenstößen — *beide* Resonanzlinien reemittiert: die häufigen Stöße werfen die angeregten Atome zum Teil noch vor Eintreten der Reemission in das benachbarte Anregungsniveau.

Beim Zusammenstoß eines angeregten und eines unangeregten Atoms kann auch — bei Vorhandensein passender Energiestufen — ein Teil der Anregungsenergie des ersten Atoms in Anregungsenergie des zweiten umgewandelt werden. Dieser Effekt liegt der *sensibilisierten Fluoreszenz* (J. FRANCK und Mitarbeiter) zugrunde, bei welcher beispielsweise Hg-Dampf mit Tl oder Pb, Bi, Ag, Cd, Zn, In gemischt und durch Einstrahlung der Hg-Resonanzlinie 2536,7 erregt wird: In der nach der Lage der Anregungsstufen zu erwartenden Weise tritt dann eine spektrale Emission auch des beigemischten Dampfes ein. Am Beispiel des Tl wird die nach *Energie- und Impulssatz* zu erwartende gleichzeitige Umwandlung eines Bruchteils der Hg-Anregungsenergie in *translatorische* Energie des Tl-Atoms nachweisbar durch Doppler-Verbreiterung der Tl-Emission (FRANCK-CARIO).

Alle diese Effekte und zahllose im Prinzip ähnliche, wenn auch teils viel verwickeltere (z. B. in der *Photochemie*), bestätigen immer wieder das quantentheoretische Bild der unstetigen Energiestufen und ihrer Verknüpfung mit den Emissions- und Absorptionsprozessen. Hier sei abschließend nur noch auf die eigentümlichen Effekte hingewiesen, die sich aus dem Auftreten *metastabiler Zustände* (FRANCK-KNIPPING) ergeben. Als metastabil bezeichnen wir einen Zustand oberhalb des Grundzustands, wenn auf Grund der *Auswahlregeln* von ihm aus kein Quantensprung der spontanen Emission in einen energetisch tieferen Zustand möglich ist. Solche metastabile Terme gibt es z. B. bei Hg (nämlich 2^3P_0 und 2^3P_2), bei Tl, He, Ne, überhaupt bei allen Elementen *außerhalb* der *ersten Spalte* des periodischen Systems. Ein in einen metastabilen Zustand geratenes Atom wird solange in diesem Zustand verharren, bis es entweder durch Lichtabsorption in einen höheren gehoben, oder durch einen *Zusammenstoß* in einen anderen Zustand überführt wird. Die durch *Zusammenstöße* begrenzte *mittlere Lebensdauer* eines metastabilen Zustands ist nach mancherlei Methoden zum Gegenstand direkter Messungen gemacht worden. Das Vorkommen von Lebensdauern bis zur Größenordnung 10^{-2} sec unter noch keineswegs abnormen Bedingungen bietet naturgemäß Möglichkeiten recht auffälliger Effekte.

Wird aber durch extremste Herabsetzung der Gasdichte (bei gleichzeitiger Entfernung von *Gefäßwänden*) die Häufigkeit von Zusammenstößen immer weiter verringert, so muß die Tatsache zur Geltung kommen, daß die spektroskopischen Auswahlregeln prinzipiell nur eine *approximative* Gültigkeit besitzen. So zeigt z. B. beim Hg die *verbotene Linie* $1^1S_0 - 2^3P_0$ eine zwar sehr geringe, aber doch meßbare *Absorption* (RAYLEIGH), aus der wir nach (12), (13), (19), die mittlere Lebensdauer des von Stößen *völlig ungestörten* metastabilen Zustands 2^3P_0 berechnen

können¹; sie hat die Größenordnung 1 sec. Bedingungen, welche den Atomen im Mittel eine ungestörte Pause von mehr als 1 sec zwischen zwei Zusammenstößen mit anderen Gasatomen oder mit Gefäßwänden gewähren, sind in irdischen Laboratorien nicht herstellbar; sie bieten sich aber im Weltraum in den von den Astrophysikern untersuchten *Nebeln* dar, für welche zum Teil Zeitdauern von etwa 10^4 sec für die mittlere Pause zwischen zwei Zusammenstößen errechnet werden. Unter solchen Verhältnissen müssen auch metastabile Atome ihre Anregungsenergie praktisch *stets durch spontane Emission verausgaben*; und es treten deshalb als zum Teil sogar stärkste Linien in Nebelspektren gerade gewisse *verbotene* Linien mit *metastabilem Ausgangsterm* der Emission auf (BOWEN).

Alle diese hier aus der Untersuchung der optischen Spektren und ihrer Anregungsbedingungen gezogenen Folgerungen bewähren sich auch in bezug auf die *Röntgenspektren* aller Elemente, und die zugehörigen Bedingungen für Emissionen, Absorptionen und Anregungsprozesse. Die Röntgenspektren werden emittiert von *Ionen*, denen jedoch nicht eines der „äußeren“, d. h. locker gebundenen Elektronen, sondern gerade eines der „inneren“, d. h. fester gebundenen Elektronen entrissen ist. Indem in diese „Lücke“ eines der weniger fest gebundenen Elektronen hineinspringt, wird ein entsprechendes $h\nu$ emittiert. Wie bei den gewöhnlichen optischen Spektren ist also eine Zurückführung der *Linien* in den Röntgenspektren auf *Terme* (RITZSches Prinzip) möglich, und der Zusammenhang dieser Terme mit entsprechenden *Energiewerten* kann direkt bestätigt werden durch Elektronenstoßversuche, welche mit bestimmten Elektronenenergien ganz bestimmte Röntgenlinien hervorrufen. — Im *Röntgenabsorptionsspektrum* eines *neutralen* Atomes zeigen sich, wie es sein muß, *keine* diskreten Linien, sondern nur kontinuierliche Absorptionsgebiete, deren Minimalfrequenzen direkt die Terme für das Röntgen-Linienspektrum des zugehörigen Ions liefern.

Endlich sei in diesem Zusammenhang noch ganz kurz auf das ausgedehnte Gebiet der *Photochemie* hingewiesen: Bei chemischen Reaktionen, die durch Lichteinwirkung zustande kommen, wird (von etwaigen sekundären Verwicklungen abgesehen) stets je ein Molekül durch je ein absorbiertes $h\nu$ in den reaktionsfähigen Zustand versetzt.

5. Thermodynamische Quanteneffekte. Das PLANCKSche Gesetz und die ihm zugrunde liegende Formel (17), § 1 für die mittlere thermische Energie des harmonischen Oszillators bildeten bereits Beispiele für das Auftreten von Quanteneffekten in thermodynamischen Problemen. Die meisten thermodynamischen Quanteneffekte sind zurückführbar auf das folgende Gesetz der *kanonischen Verteilung*: Von einer großen Zahl N

¹ Indem wir zunächst, durch Vergleich mit der Absorptionsintensität der Resonanzlinie $1^1S_0 \rightarrow 2^3P_1$, das *Verhältnis* dieser Lebensdauer zu der ihrem Absolutwert nach anderweitig bekannten Lebensdauer des Zustands 2^3P_1 berechnen.

unabhängiger, gleichartiger Quantensysteme befinden sich beim thermodynamisch-stationären Zustand je N_n im n -ten Anregungszustand, wobei

$$\frac{N_n}{N} = \frac{g_n e^{-\frac{W_n}{kT}}}{F(T)} \quad (20)$$

ist; g_n wird als das *statistische Gewicht* des n -ten Zustands bezeichnet. Der Nenner $F(T)$ bestimmt sich durch

$$\sum_n \frac{N_n}{N} = 1$$

zu

$$F(T) = \sum_m g_m e^{-\frac{W_m}{kT}}. \quad (20')$$

Qualitativ ist also zu erwarten, daß in thermisch leuchtenden Gasen oder Dämpfen bei geringeren Temperaturen zunächst solche Linien auftreten, deren oberer Kombinationsterm noch möglichst niedrig liegt; bei wachsender Temperatur sind weitere Linien mit energiereicheren Ausgangszuständen zu erwarten. Man erhält beispielsweise in der Bunsenflamme bei etwa 1550° C von Li nur die Resonanzlinie, von K die zwei am leichtesten anregbaren Linien, bei Rb vier, bei Cs sechs Linien, wie es nach der Lage der Anregungsstufen der Alkalien zu erwarten ist. Bei Steigerung der Temperatur kommen entsprechend der Lage im Serienschema immer weitere Spektrallinien hinzu. Sehr umfassend hat KING das Temperaturleuchten einer großen Reihe von Metallen im *elektrischen Ofen* untersucht; seine Ergebnisse haben sich auch als wertvolles Hilfsmittel zur Termanalyse komplizierter Spektren bewährt.

Eine *quantitative* Prüfung von (20) ist am besten möglich durch Messung von *Absorptionsstärken* in erhitzten Gasen und Dämpfen. Obwohl eine solche quantitative Prüfung nur an spärlichen Beispielen durchgeführt ist (z. B. bei Tl von GROTRIAN und von F. MÜLLER), wollen wir doch hier die Gesetzmäßigkeit (20) der kanonischen Verteilung unter den unmittelbar empirisch zu sichernden quantenphysikalischen Gesetzen aufzählen.

Ähnliches gilt von folgender fundamentaler Beziehung: Die durch (20) definierten *statistischen Gewichte* g_n stimmen überein mit den *Vielfachheiten* G_n der Terme:

$$g_n = G_n. \quad (21)$$

Insbesondere sind also die statistischen Gewichte stets *ganze Zahlen*.

Das bekannte Gesetz der MAXWELLSchen *Geschwindigkeitsverteilung* in der kinetischen Gastheorie ist gar nichts anderes, als ein Spezialfall der Gesetzmäßigkeiten (20), (21). (Näheres hierüber in Kapitel 2.) Es sei deshalb an dieser Stelle hervorgehoben, daß die MAXWELLSche Geschwindigkeitsverteilung nicht nur indirekt, sondern auch durch direkte Messung der Geschwindigkeitsverteilung in Atomstrahlen empirisch gesichert worden ist.

Die thermodynamische Bestimmung *chemischer Gleichgewichte* in Gasen setzt bekanntermaßen voraus, daß man die *Entropieänderung* kennt, welche bei Verschwinden gewisser Moleküle und Erzeugung anderer Moleküle eintritt. Das Problem ist allgemein gelöst, wenn man für jedes einzelne, chemisch einheitliche (ideale) Gas die *additive Konstante* festgelegt hat, welche, solange man chemische Umsetzungen grundsätzlich ausschließt, willkürlich bleibt. Erfahrungsgemäß bewährt sich insbesondere für *einatomige* Gase folgender *Absolutwert der Entropie*:

$$S = kN \left\{ \log \left[\frac{V}{kN} T^{3/2} \right] + \frac{5}{2} + \log \frac{g (2\pi m)^{3/2} k^{3/2}}{h^3} \right\}, \quad (22)$$

wo g das *statistische Gewicht des Grundzustandes* der fraglichen Atome und N ihre *gesamte Anzahl* ist. Man nennt

$$\log \frac{g (2\pi m)^{3/2} k^{3/2}}{h^3} \quad (23)$$

die *chemische Konstante*.

Das gilt auch für das aus *freien Elektronen* gebildete Gas; für dieses ist $g=2$. Man kann also die für chemische (und Dissoziations-) Gleichgewichte gebrauchten Formeln auch auf das thermische *Ionisierungsgleichgewicht* anwenden (EGGERT, SAHA), was für die *Flammenleitung* und für viele Probleme der *Astrophysik* von vielseitiger Bedeutung ist. Für den einfachsten Fall, daß *eine* Atomart vorhanden ist und nur einfache Ionisierung in Frage kommt, wird der Bruchteil x ionisierter Atome gegeben durch

$$\frac{x^2 p}{1-x^2} = \frac{2g'}{g} \frac{1}{h^3} \cdot (2\pi m)^{3/2} (kT)^{3/2} e^{-\frac{\Delta W}{kT}}, \quad (24)$$

wo p der Gesamtdruck, m die Elektronenmasse und ΔW die *Ionisierungsenergie* ist. Mit g ist das statistische Gewicht des Grundzustandes des Atoms, mit g' dasjenige für das Ion bezeichnet.

Durch Anwendung der empirisch umfassend bestätigten Formel (24) — bzw. der entsprechenden Formeln für kompliziertere Fälle — kann man auch eine *Berechnung von Ionisierungsenergien* ΔW aus der Beobachtung der *thermischen Ionisierung* (auf Grund der elektrischen Leitfähigkeit von Flammen) ausführen, und diese Werte ΔW mit den durch Elektronenstoß gemessenen Ionisierungsspannungen und den Frequenzen der optischen Seriegrenzen vergleichen.

Als letzte hierher gehörige Erfahrungstatsache erwähnen wir den *NERNSTschen Wärmesatz* oder *dritten Hauptsatz der Thermodynamik*: Die Entropie jedes thermodynamischen Systems ist beim absoluten Temperaturnullpunkt gleich Null.

Indem wir die Einzelheiten der zahlreichen diesbezüglichen Untersuchungen und Diskussionen übergehen, stellen wir zusammenfassend fest, daß nach heutigem Stand der Dinge keine Veranlassung gegeben ist, die ausnahmslose Richtigkeit dieses Satzes zu bezweifeln.

Wir wollen hervorheben, daß dieser dritte Hauptsatz der *phänomenologischen Thermodynamik* eine ebenso *notwendige* wie befriedigende

Abrundung gibt. Der zweite Hauptsatz fordert nicht nur, daß bei Einführung der absoluten Temperaturskala, welche den universellen Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad (25)$$

eines zwischen den Temperaturen T_1 , T_2 arbeitenden CARNOT-Prozesses ergibt, *negative* Temperaturen $T < 0$ *unmöglich* sind, sondern er fordert¹ auch (damit neben $\eta > 1$ auch $\eta = 1$ ausgeschlossen ist) die Gültigkeit des *Prinzips der Unerreichbarkeit des Nullpunkts*: In einem adiabatisch abgeschlossenen System darf durch keine endliche Zustandsänderung die Temperatur $T = 0$ erreichbar sein. Dies Prinzip kann aber, wie man leicht überlegt, nur auf *zwei* Weisen garantiert werden: *Entweder* muß *jedes* thermodynamische System für $T = 0$ eine Entropie $S = -\infty$ haben. *Oder* es muß sich universell die additive Entropiekonstante so normieren lassen, daß für *jedes* thermodynamische System $S = 0$ bei $T = 0$ wird.

Die *klassische* Theorie entspricht der *ersten* dieser beiden Möglichkeiten: Sie liefert ja beispielsweise für ein *Kristallgitter* (vgl. § 1) eine *konstante*, temperaturunabhängige spezifische Wärme, die also in der Tat $S = -\infty$ für $T = 0$ ergibt. Aber der *Strahlungshohlraum* mit dem STEFAN-BOLTZMANNschen Gesetz lehrt uns, daß nur die *zweite* Möglichkeit der Wirklichkeit entsprechen kann: Die bloße Tatsache, daß es auch für den Strahlungshohlraum einen *definierten Zustand des thermodynamischen Gleichgewichts* gibt, macht in Verbindung mit dem zweiten Hauptsatz den dritten Hauptsatz bereits zu einer *Notwendigkeit*, und läßt uns somit auch die ihm zugrunde liegenden *Quanteneffekte* als unentbehrlich für die innere Geschlossenheit des Gebäudes der Thermodynamik erkennen.

§ 4. Dynamik der Quantelung.

1. Linienbreiten. Es hat sich im obigen aus den quantenphysikalischen Erfahrungen betreffs der stationären Zustände und der mit ihnen verknüpften Strahlungsreaktionen ein Gesamtbild herauskristallisiert, das zwar schroff abweicht von klassischen Vorstellungen, das aber doch von wunderbarer *Einfachheit* ist. Hat man sich mit dem geschehenen Bruch mit klassischen Bildern abgefunden, so könnte man geradezu die Einführung der quantenphysikalischen Diskontinuitäten als eine erhebliche Vereinfachung und Primitivierung der Sachlage ansehen. Aber man darf sich von der Einfachheit und Primitivität der erreichten Begriffsbildungen und Gesetzmäßigkeiten nicht verführen lassen, *ihre Tragweite zu überschätzen*. Es ist *nicht* so, wie man im Laufe der historischen Entwicklung mancherseits geglaubt hat, daß ein radikales Betonen der *diskontinuierlichen* Seite der Erscheinungen uns auf den Weg zur vollen

¹ Die in der Literatur vertretenen Zweifel an der Zwangsläufigkeit dieser Folgerung halten wir für unberechtigt.

Erschließung der Quantenrätsel führen könnte. Es ist vielmehr die *Verknüpfung* von *stetigen und unstetigen* Größen, durch welche sich die Quantentheorie charakteristisch unterscheidet, nicht nur *einerseits* von der klassisch-makroskopischen Physik, die *nur stetige* Größen kennt, sondern auch *andererseits* von einer reinen *Diskontinuumstheorie*. Eine reine Diskontinuumstheorie ist die mathematische Theorie der *kristallographischen Raumgittersymmetrien*, in welcher es nur *unstetige* Begriffe (diskrete Deckoperationen und ihre Verknüpfungen) gibt, und welche demgemäß ihre mathematisch angemessenste Behandlung im Rahmen einer rein *arithmetischen* Theorie (Zahlentheorie hyperkomplexer Größensysteme) findet. Den Quantenerscheinungen jedoch liegen *nicht* als mathematisches Gerüst die „Gesetze der ganzen Zahlen“ zugrunde, und wir wollen jetzt einige Tatsachen zusammenstellen, welche zeigen, daß das bisher aus den experimentellen Erfahrungen entwickelte Bild der quantenphysikalischen Unstetigkeiten noch ganz grundsätzlicher Ergänzungen und Vertiefungen bedarf.

Ein klassischer harmonischer Oszillator, der vermittelt einer schwingenden elektrischen Ladung elektromagnetische Strahlung emittiert, wird, sich selbst überlassen, infolge der ständigen Energieausstrahlung eine dauernde Abnahme seiner Schwingungsamplitude zeigen: Die Schwingungskoordinate wird eine Bewegung der Form

$$q = C_0 \cdot e^{-\frac{1}{2} \gamma t} \cdot \cos(2 \pi \nu_0 t + \delta)$$

mit *exponentiell abklingender Schwingungsamplitude* ausführen. Daraus ergibt sich dann (durch FOURIER-Analyse, also *spektrale Zerlegung* der entsprechenden exponentiell abklingenden Emissionswellen), daß die emittierte Strahlung — deren *Intensität* mit $e^{-\gamma t}$ abklingt — *nicht mehr exakt monochromatisch* ist, sondern eine spektrale Verteilung proportional

$$I(\nu) = \frac{\text{const}}{\left(\frac{1}{2} \gamma\right)^2 + 4 \pi^2 (\nu - \nu_0)^2} \quad (1)$$

besitzt, was eine *endliche Linienbreite* der emittierten Spektrallinie ergibt: Offenbar ist

$$\Delta \nu = \frac{\gamma}{2 \pi} \quad (2)$$

die *doppelte Halbwertsbreite*¹. Die Intensitätsverteilung in der Linie ist *symmetrisch* zur Linienmitte $\nu = \nu_0$.

Empirisch zeigt in der Tat jede Spektrallinie eine endliche Breite, an deren Zustandekommen jedoch mehrere Effekte beteiligt sind: sehen wir ab von *Verbreiterungen*, welche durch Wechselwirkungen der Gasatome untereinander bedingt werden, so wird immer noch die *Temperaturbewegung* der Atome durch *Dopplereffekt* eine endliche Breite bedingen. Bei *Ausschaltung* auch der Dopplerverbreiterung muß jedoch die „*natürliche Linienbreite*“ in Erscheinung treten.

¹ Das heißt der Abstand derjenigen Frequenzen $\nu' = \nu_0 + \Delta \nu / 2$ und $\nu'' = \nu_0 - \Delta \nu / 2$, für welche $I(\nu') = I(\nu'') = I(\nu) / 2$ ist.

Die moderne Theorie macht über die natürliche Linienbreite zwei ganz allgemeine und sehr einfache Aussagen:

1. Die *Linienform* ist allgemein durch (1) gegeben.
2. Die *Halbwertsbreite* $\gamma/4\pi$ einer Linie ist gegeben durch

$$\gamma = \frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_m}, \quad (3)$$

wenn τ_n , τ_m die *mittleren Lebensdauern* im oberen und unteren Niveau der fraglichen Linie sind.

Auf gewisse Begrenzungen des Gültigkeitsgebiets dieser Behauptungen kommen wir später.

Die empirische Nachprüfung dieser so einfachen theoretischen Aussagen läßt noch sehr zu wünschen übrig, insbesondere infolge der Schwierigkeit, daß die Dopplerbreite bei normalen Temperaturen erheblich größer als die natürliche Breite ist. Eine klare Bestätigung für (3) gibt es bislang nur für die Na-Resonanzlinien, bei denen aus Dispersionsmessungen gemäß (15), § 3 die (übereinstimmenden) mittleren Lebensdauern τ der Anregungszustände $2^2P_{1/2}$, $2^2P_{3/2}$ ermittelt, und andererseits die (ebenfalls übereinstimmenden) natürlichen Linienbreiten gemessen sind (MINKOWSKI). Es ergibt sich die Beziehung $\gamma = 1/\tau$, was mit (3) im Einklang ist, da ja die Lebensdauer des unteren Niveaus in diesem Fall unendlich ist (Grundzustand).

Qualitative Bestätigungen der Beziehung (3) gibt es jedoch in Fülle. So sind beispielsweise bei Atomen der zweiten Spalte des periodischen Systems der Elemente gewisse Anregungszustände bekannt, welche sehr viel kürzere Lebensdauern haben, als die gewöhnlichen optischen Anregungsstufen. Es handelt sich um Zustände, bei welchen *beide* Valenzelektronen des Atoms aus ihrem Grundzustand in einen energetisch höheren gehoben sind, derart, daß die im Atom enthaltene Anregungsenergie *größer als die Ionisierungsenergie* ist: das Atom besitzt also Energie genug, um in ein unangeregtes Ion und ein mit kinetischer Energie fortfliegendes Elektron zu zerfallen¹. Die Wahrscheinlichkeit dieser *spontanen Ionisierung* ist für manche Zustände so groß, daß man diese Zustände empirisch nur aus dem Auftreten sehr *breiter, verwaschener Absorptionslinien* (für welche jeweils ein solcher Zustand den oberen Kombinations-term bildet) erkennen kann.

Viel reichhaltiger sind analoge Phänomene bei *Molekülen*, bei denen stationäre Zustände vorkommen, von denen aus eine *spontane Dissoziation* des Moleküls eintreten kann. Bei großen Zerfallswahrscheinlichkeiten ergeben sich auch hier entsprechend große Linienbreiten, und da die Molekülspektren („Bandenspektren“) gegenüber den Atomspektren eine viel größere Zahl einzelner Linien, in engen Abständen, besitzen, so können im Zusammenhang mit der erläuterten „*Prädissoziation*“

¹ Ganz derselbe Effekt zeigt sich übrigens bei den Röntgenspektren als sog. „*AUGER-Effekt*“.

geradezu kontinuierliche Spektren statt diskreter Bandenstrukturen (Rotationsstruktur, Schwingungsstruktur) vorkommen.

Die Frage, wie diese endlichen Linienbreiten mit dem Begriff der stationären Zustände gemäß der $h\nu$ -Beziehung zu verknüpfen sind, gehört in das nächste Kapitel. Hier haben wir weiterhin einige empirische Tatsachen zu besprechen, die mit der natürlichen Linienbreite zusammenhängen.

2. Kohärenz stationärer Zustände. Wichtige Aufklärungen verdankt man der Untersuchung der Polarisationsverhältnisse von atomarer Fluoreszenzstrahlung, die durch *polarisierte Einstrahlung* angeregt ist (HANLE, WOOD-ELLET). Die prinzipielle Erkenntnis, die sich aus mannigfaltigen Untersuchungen dieser Art ergeben (und in allen untersuchten Fällen bestätigt) hat, möge an Hand eines speziellen Beispiels erläutert werden.

Es sei Hg-Dampf der Wirkung eines homogenen elektrischen Feldes \mathcal{E} und eines homogenen Magnetfeldes \mathcal{H} ausgesetzt, die beide etwa die Richtung der positiven z -Achse haben mögen: $|\mathcal{E}| = \mathcal{E}_z$; $|\mathcal{H}| = \mathcal{H}_z$. Wir beschäftigen uns mit der Resonanzlinie $\lambda 2537$, d. h. $1^1S_0 - 2^3P_1$. Der Grundterm 1^1S_0 hat das statistische Gewicht 1, erleidet also keine Aufspaltung. Dagegen hat 2^3P_1 das Gewicht 3, und spaltet demgemäß in drei Terme auf, die durch die Werte $m = -1, 0, +1$ der magnetischen Quantenzahl m (vgl. § 3) unterschieden werden. Die zu $m = 0$ gehörige Komponente des Aufspaltungsbildes der Resonanzlinie ist eine π -Komponente, entspricht also einer linear polarisierten Kugelwelle (vgl. § 2); zu $m = \pm 1$ dagegen gehören σ -Komponenten, entsprechend zwei zirkular polarisierten Kugelwellen mit entgegengesetztem Drehsinn. Wenn wir bei $\mathcal{E}_z \neq 0$ das Magnetfeld \mathcal{H}_z zu Null werden lassen, so rücken die beiden Terme mit $m = \pm 1$ in einen einzigen zusammen, der dann also das Gewicht 2 erhält; der Term $m = 0$ bleibt dagegen abgetrennt.

Es werde nun bei $\mathcal{H}_z \neq 0$ der sonst unangeregte Hg-Dampf mit einem linear polarisierten Lichtstrahl angeregt, *der in der z -Richtung fortschreitet*, und in dessen Spektrum die Frequenzen der Aufspaltungskomponenten unserer Linie vorkommen. Entsprechend der Transversalität des Lichtes wird die π -Komponente *nicht* absorbiert; wohl aber werden die beiden σ -Komponenten absorbiert, und die absorbierte Energie wird (bei Ausschluß sekundärer Störeffekte) restlos reemittiert, wobei also jede der beiden σ -Komponenten die Polarisationsverhältnisse einer zirkularen Kugelwelle zeigt.

Dies gilt, wie gesagt, für $\mathcal{H}_z \neq 0$; aber wir müssen genauer präzisieren, wie das zu verstehen ist: Das Gesagte gilt, wenn $|\mathcal{H}| = \mathcal{H}_z$ so groß ist, das der Frequenzabstand der beiden σ -Komponenten *groß gegenüber der natürlichen Linienbreite* ist. Bei Verkleinerung von $|\mathcal{H}| = \mathcal{H}_z$ wird dagegen das vorgeführte Bild Änderungen erleiden, wenn der Frequenzabstand der σ -Komponenten mit der natürlichen Linienbreite vergleichbar wird.

Bei *stetiger* Verkleinerung von $|\mathfrak{H}| = \mathfrak{H}_z$ wird sich die Situation *stetig* ändern, bis zu der nunmehr zu beschreibenden Sachlage im Grenzfall $|\mathfrak{H}| = 0$:

Der elektrische Vektor der linear polarisierten Lichtwelle sei etwa parallel der x -Richtung. Die *Reemission* des absorbierten Lichtes der bei $|\mathfrak{H}| = 0$ *zusammenfallenden* σ -Komponenten zeigt dann die Polarisationsverhältnisse einer *linear polarisierten Kugelwelle*, deren Symmetrieachse *die x -Achse* ist. Man kann das offenbar auch so ausdrücken: Wir bekommen dasselbe Ergebnis, das wir *klassisch* bekommen würden bei einem *zweidimensionalen isotropen Oszillator*, der in der x, y -Ebene schwingen kann. Es sei gleich angemerkt, daß wir mit einem *elliptisch* polarisierten Lichtstrahl (parallel der z -Richtung) in der Reemission die Polarisationsverhältnisse einer dementsprechend elliptisch polarisierten Kugelwelle finden. Ferner: wenn wir neben $\mathfrak{H} = 0$ auch noch $\mathfrak{C} = 0$ machen, so daß auch die π -Komponente mit den σ -Komponenten zusammenfällt, so bekommen wir *ganz allgemein* (auch dann, wenn die einfallende Welle *nicht* in der z -Richtung fortschreitet) in der Reemission solche Polarisation, als wenn wir statt der Atome *dreidimensionale isotrope Oszillatoren* hätten.

Vom Standpunkt der Beschreibung der Strahlungsreaktionen durch Quantenübergänge zwischen diskreten Energiestufen sehen die geschilderten Tatsachen sehr überraschend aus. Die beiden im Falle $\mathfrak{H}_z \neq 0$ unseres ursprünglichen Beispiels etwas verschiedene Frequenzen besitzenden zirkularen Kugelwellen bekommen im Grenzfall $\mathfrak{H}_z = 0$ *dieselbe Frequenz*; da aber die Emissionen dieser beiden Kugelwellen im Falle $\mathfrak{H}_z \neq 0$ *von verschiedenen Atomen ausgehen* — jedes *einzelne* Atom kann ja nur *entweder* in dem Anregungszustand mit $m = +1$, *oder* in dem mit $m = -1$ sein — so möchte man zunächst auch für den Grenzfall $\mathfrak{H}_z = 0$ eine *inkohärente Intensitätsaddition* der beiden zirkularen Kugelwellen erwarten. Statt dessen zeigt sich *Kohärenz* beider Kugelwellen: wir müssen die tatsächlich emittierte linear polarisierte Kugelwelle als Resultat einer *Superposition* der beiden zirkularen auffassen¹. Folglich muß jedes der Hg-Atome, solange es angeregt ist (*vor* der Reemission des absorbierten $h\nu$), sich in einem Zustand befinden, der *weder* der Zustand $m = +1$, *noch* der Zustand $m = -1$ ist, sondern ein andersartiger Zustand, der passender Weise als eine *Superposition der beiden Zustände* $m = \pm 1$ bezeichnet werden kann, entsprechend der Tatsache, daß seine Strahlungsemission eine *lineare Superposition* der Strahlungen

¹ Wie früher (§ 2, 4) hervorgehoben, ergibt sich klassisch eine zirkulare Kugelwelle aus einer in einer Kreisbahn umlaufenden elektrischen Ladung. Nun kann man durch Superposition zweier entgegengesetzter Kreisbewegungen in der x, y -Ebene eine *lineare* harmonische Bewegung in der x -Richtung herstellen: dann ergibt sich eine linear polarisierte Kugelwelle, deren Symmetrieachse die x -Achse ist, aus der Superposition der zu den Kreisbewegungen gehörigen zirkularen Kugelwellen, die ihrerseits (bei entgegengesetztem Drehsinn) die z -Achse als Symmetrieachse haben.

dieser beiden energetisch zusammenfallenden Zustände $m = \pm 1$ ist. Eine derartige „Kohärenz“ oder *Interferenzfähigkeit* von *stationären Zuständen* ist gegenüber unserer aus den früher beschriebenen Experimenten entnommenen Kenntnis des Wesens der quantenphysikalischen Energiestufen etwas grundsätzlich Neues. Ohne unsere soeben besprochenen Beispiele betreffs der Polarisation der Fluoreszenzstrahlung durch weitere zu vermehren, stellen wir fest, daß für jeden der recht zahlreichen experimentell untersuchten Fälle die auftretenden Polarisationsverhältnisse quantitativ zu berechnen sind aus der Berücksichtigung der erläuterten *Kohärenz* oder *Superponierbarkeit stationärer Zustände*, die danach zu den empirisch bestgeklärten quantenphysikalischen Gesetzmäßigkeiten zu rechnen ist. Natürlich ergeben sich einfache, in der geschilderten Weise berechenbare Verhältnisse aber nur dann, wenn alle in Betracht kommenden Term aufspaltungen *entweder groß, oder aber klein* gegenüber den natürlichen Linienbreiten sind: im Zwischengebiet zwischen diesen Extremfällen bestehen verwickeltere Verhältnisse, die den stetigen Übergang von einem Fall zum anderen herstellen.

Seinem Wesen nach verwandt mit den besprochenen Effekten, in gewisser Hinsicht aber noch merkwürdiger, ist der Effekt der *selektiven Reflexion* des Hg-Dampfes. Wenn in einem mit Hg-Dampf gefüllten Gefäße der *Druck* sehr gesteigert wird, so ergibt sich bei Einstrahlung der Resonanzlinie $\lambda 2537$ ($1^1S_0 - 2^3P_1$) statt der bei geringeren Dampfdichten stattfindenden Fluoreszenz des ganzen bestrahlten Volums nur noch ein Fluoreszieren einer dünnen Haut an der bestrahlten Oberfläche, und bei hinreichender Dampfdichte wird durch diese Oberfläche das Licht der Linie 2537 *regulär reflektiert*: Für diese Spektrallinie verhält sich die Oberfläche des Dampfolums wie ein *metallischer Spiegel*, der auffallendes (polarisiertes oder unpolarisiertes) Licht mit den durch die FRESNELSchen Formeln gegebenen Intensitäts- und Polarisationsverhältnissen regulär reflektiert. Der Unterschied ist nur der, daß der metallische Spiegel *alle* Frequenzen in einem weiten Spektralbereich, unsere Dampfoberfläche dagegen *nur* die Breite der Resonanzlinie 2537 reflektiert.

Auch dieser Effekt scheint zunächst in Widerspruch zu stehen zu den quantenphysikalischen Vorstellungen vom Wesen der atomaren Lichtreaktionen. Denn er kann offenbar *nicht* beschrieben werden vermittelt der Annahme von Absorptions- und Emissionsakten der einzelnen Atome, wie sie bei geringeren Dampfdrucken in der gewöhnlichen Fluoreszenz vor sich gehen: vielmehr liegt hier ein *interferenzmäßiges Zusammenwirken* sämtlicher Atome der Oberflächenschicht vor.

Vom *klassischen* Standpunkt aus wäre der Vorgang so zu verstehen, daß eine große Zahl der — als harmonische Oszillatoren der zu $\lambda 2537$ gehörigen Frequenz aufzufassenden — Gasatome gleichzeitig durch die Lichtwelle zu Schwingungen angeregt werden, die in fester Phasenbeziehung zu dem einfallenden Licht stehen. Die von den Oszillatoren

dementsprechend emittierten Kugelwellen *interferieren* infolge dieser Phasenbeziehungen und heben sich überall dort auf, wo nach den Gesetzen der regulären Reflexion Dunkelheit sein muß. Notwendig für das Zustandekommen der Reflexion ist also offenbar, daß eine *große Zahl von Hg-Atomen* in jedem *Wellenlängenkubus* λ^3 vorhanden ist: Im entgegengesetzten Falle würde keine Interferenz der Kugelwellen mehr möglich sein, sondern eine diffuse Fluoreszenz zustande kommen.

Diese aus klassischer Analogie erschlossene Bedingung für das Auftreten diffuser Fluoreszenz oder regulärer Reflexion ist *empirisch* tatsächlich *zutreffend*. Wir sehen also, daß unser obiges, so einfaches quantenphysikalisches Bild der atomaren Lichtreaktionen noch grundsätzlicher Erweiterung bedarf: es gibt Möglichkeiten einer *Interferenz* der Strahlungsreaktionen *verschiedener Atome*, und im Zusammenhange mit dieser Interferenz wird es bei der selektiven Reflexion am Hg-Dampf offensichtlich *undurchführbar*, eines der reflektierten Lichtquanten $h\nu$ einem bestimmten der reflektierenden Atome zuzuordnen, in analoger Weise, wie bei der diffusen Fluoreszenz, bei der ja jedes reemittierte Lichtquant $h\nu$ von einem ganz bestimmten Hg-Atome herkommt.

Die erörterten Erfahrungen (WOOD) erhalten eine eindrucksvolle Vervollständigung durch den von RUMP erbrachten Nachweis des Folgenden: Benutzt man zur *Einstrahlung* etwa nur die *Linienmitte* der Linie λ_{2537} in einer Breite, die merklich enger ist, als die *Dopplerbreite* der Resonanzlinie bei der im Fluoreszenzraum herrschenden Temperatur, so ist die reemittierte Spektrallinie *verbreitert* gegenüber der eingestrahnten. Aber bei der selektiven *Reflexion* zeigt sich eine solche Dopplerverbreiterung *nicht*. Dieser Sachverhalt entspricht wieder genau dem, was man nach *klassischer* Rechnung (in der oben erläuterten Weise) zu erwarten hätte: Bei der Interferenz der von den einzelnen Resonatoren emittierten Kugelwellen heben sich die Dopplerverschiebungen weg¹. Wir sehen also, daß die Theorie des ganzen Effektes sich sehr eng an die klassische Theorie wird anlehnen müssen — und wir werden späterhin nach einer umfassenderen Vorstellung zu suchen haben, in deren Rahmen *einerseits* diese so „quasi-klassischen“, und *andererseits* die früher besprochenen, extrem unklassischen Gesetzmäßigkeiten untergebracht werden können.

3. Der Adiabatensatz. Zu den wichtigsten grundsätzlichen Gesetzmäßigkeiten der Quantenphysik gehört der EHRENFESTSche Adiabatensatz. Seine ältere Formulierungsweise betonte teils solche Seiten der Angelegenheit, die in Wahrheit nur eine vorübergehende, durch die historische Entwicklung der Begriffe bedingte Bedeutung hatten, teils auch Beziehungen, die wir erst später, nach tieferem theoretischen Eindringen, würdigen können. Als rein quantenphysikalischer Erfahrungssatz formuliert (nach BORN) besagt er folgendes:

¹ Dies wurde von J. FRANCK vermutet und von J. WALLFR mathematisch bewiesen.

Die Terme eines Atoms seien Funktionen eines stetig variablen Parameters; als Beispiel sei etwa ein Atom in einem äußeren Magnetfeld (ZEEMAN-Effekt) betrachtet: gemäß (1) § 3 besitzen dann alle Terme mit $m \neq 0$ einen mit der magnetischen Feldstärke $|\mathfrak{H}| = H$ proportionalen Anteil. Wir wollen nun — um im Beispiel zu bleiben — die Feldstärke H als *zeitlich veränderlich* annehmen, doch soll die Änderung *sehr langsam* vor sich gehen. Das Atom befinde sich im n -ten seiner (irgendwie nummerierten) stationären Zustände, und wir wollen der Deutlichkeit halber zunächst annehmen, daß es sich gerade um einen metastabilen Zustand oder Grundzustand handelt, und zwar um einen mit $m \neq 0$, dessen Energie sich also mit H ändert. Dann passiert folgendes: Das Atom *bleibt* in diesem Zustand, *wird also durch die langsame Feldänderung nicht zu irgendwelchen Quantensprüngen veranlaßt*. Der Energieinhalt des Atoms ändert sich also in stetiger Weise, so daß wir hier das vollkommene Gegenteil der spezifisch quantenphysikalischen Prozesse von Energieänderungen durch Quantensprünge vor uns haben: Zeitlich schnell veränderliche Kräfte (Elektronenstöße, Lichtwellen usw.) rufen unstetige Quantensprünge am Atom hervor; langsam, „*adiabatisch*“ sich ändernde Kräfte dagegen ergeben stetige Zufuhr oder Abfuhr von Atomenergie *ohne* „Induzierung“ von Quantensprüngen.

Handelt es sich nun um ein Atom in einem strahlenden, nicht metastabilen Zustand, so wird dieses zwar nach einer gewissen Zeit einen Quantensprung mit Lichtemission durchführen. Aber es zeigt sich zweierlei: Erstens wird durch die langsame Feldänderung in keiner Weise eine *zusätzliche Übergangswahrscheinlichkeit induziert*. Zweitens ergibt sich, wenn der Quantensprung erfolgt, genau dasjenige $h\nu$, welches sich auch ergeben hätte in einem streng *statischen*, zeitlich unveränderlichen Feld von eben derjenigen Feldstärke, welche gerade zur Zeit des Quantensprunges vorliegt. Es ist also auch in diesem Falle in der Zwischenzeit der Energieinhalt des Atoms *stetig* geändert worden.

Für die Richtigkeit dieser Behauptungen gibt es (außer vielen indirekten) einige unmittelbare empirische Bestätigungen. Läßt man z. B. schnell bewegte Atome (im Kanalstrahl) ein zeitlich konstantes, aber räumlich variables elektrisches Feld durchlaufen, so ist leicht zu erreichen, daß die äußere (diesmal *elektrische*, statt wie oben, *magnetische*) Feldstärke, der ein einzelnes Atom ausgesetzt ist, sich erheblich ändert innerhalb von Zeiten, die *klein* sind *gegenüber der mittleren Lebensdauer* des fraglichen Anregungszustandes. Trotzdem erhält man, solange die „*Adiabase*“ der Feldänderung nicht durch zu große Geschwindigkeiten zerstört wird, von jeder Stelle des fraglichen Kanalstrahls (nicht etwa verwaschene, sondern) *scharfe Spektrallinien*, die jeweils einen *STARK-Effekt* von derjenigen Größe zeigen, die der am dortigen Orte bestehenden Feldstärke entspricht. Dies ist zuerst von FÖRSTERLING aus älteren STARKSchen Resultaten erkannt worden.

Übrigens können adiabatische Änderungen auch in Fällen eintreten, wo von einer Änderung der stationären Energiewerte gar nicht die Rede ist. Denken wir uns etwa, daß ein magnetisches Feld \mathfrak{H} bei konstant gehaltenem Betrage $|\mathfrak{H}|$ *langsam gedreht* wird, dann wird an einem Atom, das anfangs beispielsweise die magnetische Quantenzahl $m = 1$ besaß, durch diese langsame Änderung der Feldrichtung *keine* zusätzliche Übergangswahrscheinlichkeit hervorgerufen. Würden wir (in solcher Form ist das Experiment allerdings nicht gemacht) einen Kanalstrahl hindurchschicken durch ein von Ort zu Ort in seiner Richtung variierendes Feld, so würden wir bei nicht zu großer Geschwindigkeit von jeder Stelle des Kanalstrahls genau diejenige Polarisation der emittierten Strahlung erhalten, die der dort bestehenden Feldrichtung entspricht.

Es ergibt sich nun die Frage nach der *quantitativen Abgrenzung* der adiabatischen Zustandsänderungen gegenüber den nichtadiabatischen. *Wie schnell* darf etwa eine Änderung eines äußeren Magnetfeldes ausgeführt werden, wenn die ihm ausgesetzten Atome nur adiabatisch beeinflußt werden sollen? Es ist selbstverständlich, daß die Antwort hierauf nur eine gewisse *Größenordnung* angeben kann, da adiabatische Zustandsänderungen und Quantensprünge nur zwei verschiedene *Grenzfälle* darstellen, zwischen denen es alle Zwischenstufen gibt.

Ein Experiment, das über diese Frage einen unmittelbaren Aufschluß gibt, bezieht sich auf die oben besprochene *Polarisation der Resonanzstrahlung*. Die vollständige Polarisation, die sich unter den oben geschilderten Verhältnissen in der Resonanzstrahlung ergibt, wird zerstört, wenn wir durch ein Magnetfeld eine Term-aufspaltung hervorrufen, die größer als die natürliche Linienbreite ist. Nehmen wir statt des konstanten Magnetfeldes ein *magnetisches Wechselfeld*, so wird die *Depolarisation* bestehen bleiben, solange der Einfluß dieses Wechselfeldes auf das Atom *adiabatisch verläuft*. Nehmen wir aber die Frequenz des Wechselfeldes so groß, daß an Stelle der adiabatisch das Vorzeichen wechselnden Richtungsquantelung überhaupt keine Richtungsquantelung mehr zustande kommt, dann *verschwindet die depolarisierende Wirkung des Magnetfeldes* wieder (FERMI-RASETTI). Und zwar liegen die quantitativen Verhältnisse so, daß die depolarisierende Wirkung entweder völlig unvermindert (*adiabatischer* Verlauf!) oder aber völlig verschwunden ist (extrem *nichtadiabatischer* Verlauf), je nachdem, ob die mit dem PLANCKSchen Wirkungsquantum h multiplizierte Wechsel-frequenz des Magnetfeldes entweder *sehr klein* oder aber *sehr groß* gegenüber der *magnetischen Energieaufspaltung* ist, welche sich ergeben würde in einem zeitlich konstanten Magnetfeld der gleichen Stärke, die das Wechselfeld (maximal) besitzt.

Noch unmittelbarer wird die Frage der quantitativen Abgrenzung des adiabatischen Verlaufs von Zustandsänderungen angegriffen durch eine PHIPPS und STERN begonnene, aber noch nicht bis zum positiven Abschluß durchgeführte Untersuchung. Man läßt, nachdem man im

STERN-GERLACH-Experiment einen Atomstrahl in mehrere Komponenten aufgespalten hat, die eine dieser Komponenten ein magnetisches Feld durchlaufen, das auf sehr kurzer Strecke seine Richtung stark ändert. Das muß, wenn die Änderung des Feldes, dem jedes Atom ausgesetzt ist, schnell genug geschieht, einen nichtadiabatischen Verlauf ergeben derart, daß diese Komponente des Atomstrahls beim Durchqueren der schmalen Grenze zwischen den verschiedenen gerichteten Feldern *noch einmal in mehrere Komponenten aufspaltet*. Dagegen bedeutet Nichtaufspaltung einen adiabatischen Ablauf.

Die experimentellen Ergebnisse zeigen, daß tatsächlich Adiabasie besteht, wenn die Zeitdauer T der Durchquerung der Grenzzone *so groß* ist, daß h/T *kleiner als die Größenordnung der magnetischen Energie* des Atoms bei der betreffenden magnetischen Feldstärke ist. Abgesehen davon, daß nach der anderen Seite hin der Nachweis eines tatsächlich nichtadiabatischen Verlaufs bei *kleinerer* Zeitdauer der Durchquerung experimentell noch nicht erbracht ist, gewinnen wir also dieselbe Antwort auf unsere Frage, die wir auch durch das FERMI-RASSETTISCHE Experiment erhielten.

Diese Antwort steht aber in engster Verknüpfung mit der aus der Untersuchung der natürlichen Linienbreiten gewonnenen Feststellung (3), wie wir später sehen werden (Kapitel 2).

4. Das Stabilitätsprinzip. Nachdem die Quantenphysik entgegen allem aus klassischer Physik Gewohnten charakteristische *Unstetigkeiten* des atomaren Geschehens behauptet, ist es nicht überflüssig, ausdrücklich hervorzuheben, daß trotzdem *im Großen die Stetigkeit der physikalischen Gesetzmäßigkeiten gewahrt bleibt*. Diese an vielen keineswegs trivalen Einzelfällen bestätigte Erfahrungstatsache — deren Hervorhebung wir kurz als das *Stabilitätsprinzip der Quantentheorie* bezeichnen wollen — wird an Hand einiger Beispiele besser zu würdigen sein, als durch den Versuch einer abstrakten, allgemeinen Formulierung.

Erinnern wir uns an die in § 2, 4 gemachten Bemerkungen über Polarisierung und Intensitätsverteilung in den *Dipol-Kugelwellen*. Im einfachsten Falle („normaler ZEEMAN-Effekt“) besteht der ZEEMAN-Effekt an einer Spektrallinie in ihrer Aufspaltung in *drei Komponenten*, eine mittlere π -Komponente und zwei äußere σ -Komponenten; die Richtungsverteilung ihrer Intensitäten und Polarisierungen ist in § 2, 4 beschrieben. Wenn wir nun die Magnetfeldstärke *stetig bis zum Werte Null abnehmen* lassen, dann rücken die drei Komponenten zusammen, und im Grenzfall $\mathfrak{H}=0$ ist nur noch die Gesamtemission der unaufgespaltenen Spektrallinie vorhanden: natürlich ist diese nach allen Richtungen von gleicher Intensität und unpolarisiert¹.

Im Sinne des *Stabilitätsprinzips* ist nun zu fordern: diese bei $\mathfrak{H}=0$ eintretende Gesamtemission der unaufgespaltenen Linie soll sich als

¹ Wenigstens, wenn — wie wir hier voraussetzen — die Lichtemission auf „natürlicher“ (z. B. *thermischer*) Anregung beruht.

Grenzfall *stetig* anschließen an die bei $\xi \neq 0$ bestehenden Emissionen der drei einzelnen Komponenten. Das heißt also, wenn man die Intensitäten der drei Komponenten *addiert* — unter Beachtung der Polarisationsverhältnisse —, dann muß als *Summe* eine isotrope, unpolarisierte Emission zustande kommen. Daß das wirklich so ist, wissen wir schon aus § 2, 4, und aus unseren damaligen Überlegungen ist zu entnehmen, daß aus dem Stabilitätsprinzip in dieser Weise geradezu die Richtungsverteilung von Intensitäten und Polarisierungen der π - und σ -Komponenten *eindeutig abgeleitet* werden kann.

Ein etwas verwickelteres Beispiel bietet der normale ZEEMAN-Effekt einer sog. *Quadrupol*-Spektrallinie: Diese spaltet in *fünf* Komponenten auf, wobei die Intensitätsverteilung für die mittlere, die ihr beiderseits benachbarten und die äußeren, Komponenten gegeben ist durch:

$$\left. \begin{aligned} I_{\nu}(\vartheta) &= \frac{3}{2} C \sin^2 2\vartheta, \\ I_{\nu+\Delta\nu}(\vartheta) &= C \{ \sin^2 \vartheta + \cos^2 2\vartheta \}, \\ I_{\nu+2\Delta\nu}(\vartheta) &= C \left\{ \cos^2 \vartheta + \frac{1}{4} \sin^2 2\vartheta \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Dem Stabilitätsprinzip geschieht Genüge dadurch, daß

$$I_{\nu}(\vartheta) + 2I_{\nu+\Delta\nu}(\vartheta) + 2I_{\nu+2\Delta\nu}(\vartheta) = 4C \quad (5)$$

von ϑ unabhängig ist.

Als letztes Beispiel sei hervorgehoben, daß ein einem homogenen Magnetfeld ausgesetztes Gas *optisch doppeltbrechend ist*; das Stabilitätsprinzip fordert, daß die Doppelbrechung *stetig bis zu Null abnimmt*, wenn die Magnetfeldstärke stetig bis zu Null verkleinert wird. Hieraus sind auf Grund des quantentheoretischen Dispersionsgesetzes (15'), § 3 bestimmte keineswegs triviale Folgerungen für die Intensitätsverhältnisse beim anomalen ZEEMAN-Effekt zu ziehen.

Zweites Kapitel.

Theoretische Analyse der quantenphysikalischen Grundexperimente.

Das Versagen unserer klassisch-physikalischen Begriffe und Vorstellungsweisen gegenüber den Quantenerscheinungen nötigt uns zu einer tiefgehenden Revision unserer physikalischen Theorien. Es ist nicht speziell die klassische *Elektrodynamik*, und nicht speziell die klassische *Mechanik*, die sich als unzulänglich erweist. Sondern es sind gewisse *gemeinsame Voraussetzungen aller klassischen Theorien*, von denen wir uns unabhängig machen müssen, obwohl wir gewohnt gewesen sind, diese Voraussetzungen als schlechthin unentbehrliche und selbstverständliche Unterlagen des physikalischen Denkens zu betrachten. So kann die Voraussetzung der *Stetigkeit aller Naturvorgänge* nicht aufgegeben

werden, ohne gleichzeitig überhaupt die klassische Vorstellung vom Charakter physikalischer *Gesetzlichkeit* und physikalischer *Kausalität* im Prinzip aufzugeben, und es bedarf keiner näheren Erläuterung, daß die *dualistische Natur der Strahlung* vollkommen außerhalb des begrifflichen Nachbildungsvermögens unserer klassischen Vorstellungsweisen liegt. Aber die Schwierigkeiten, die sich dem Versuch entgegenstellen, eine einheitliche theoretische Beschreibung der quantenphysikalischen Erscheinungen zu geben, die in widerspruchsfreier Weise von den scheinbar so divergierenden Ergebnissen verschiedenartiger Experimente Rechenschaft gibt — diese Schwierigkeiten haben die Physiker nicht entmutigt. Die vergleichende Analyse der quantenphysikalischen Grunderfahrungen läßt eine verborgene Harmonie und wechselseitige Bestätigung der durch die Grundexperimente erschlossenen Einsichten erkennen, und eine eindringliche Versenkung in die vielfältigen logischen Wechselbeziehungen der verschiedenen empirisch gesicherten Gesetzmäßigkeiten gewöhnt unser physikalisches Vorstellungsvermögen an den Verzicht auf Voraussetzungen, die für unvermeidbar zu halten nur ein Vorurteil aus Gewohnheit war.

§ 1. Wellenzuordnung und Quantelung.

Die Tatsache, daß die Energie eines Quantensystems im allgemeinen nicht beliebiger, stetig aufeinanderfolgender Werte fähig ist, sondern nur gewisse diskrete, ausgezeichnete Werte annehmen kann, zeigt in schroffster Weise die tiefgehende Inkongruenz von klassischen Vorstellungsformen und quantenhafter Wirklichkeit. Es ist deshalb von großer Bedeutung, sich klarzumachen, daß diese charakteristisch quantenphysikalische Tatsache in enger logischer Beziehung steht zu der nicht weniger charakteristisch unklassischen Tatsache des *Dualismus* von Wellen und Korpuskeln.

Wir betrachten sogleich einen konkreten Fall, nämlich die *eindimensionale* Bewegung eines Massenpunktes auf einer *endlichen Strecke*, an deren Enden der Massenpunkt *reflektiert* wird; der translatorische *Impuls*, der bei jeder Reflexion sein Vorzeichen wechselt, besitzt einen dauernd *konstanten Betrag*. Analog der DE BROGLIESchen Zuordnung einer *fortschreitenden* Welle zu einem unbegrenzt geradlinig dahinfliegenden Teilchen werden wir der periodischen Hin- und Herbewegung des jetzt betrachteten Massenpunktes eine *stehende Welle* zuordnen, also eine harmonische Schwingung, deren ortsabhängige *Amplitude* proportional ist mit

$$\varphi = \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}. \quad (1)$$

Die Tatsache der *Reflexion* des Teilchens an den *Enden* der Strecke — sie mögen etwa bei $x=0$ und $x=l$ liegen — werden wir dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir $\varphi=0$ für $x=0$ und $x=l$ fordern, ganz ebenso, als wenn es sich um die Elongation einer *schwingenden Saite*

mit *eingespannten Enden* handelte: Wir werden uns später noch davon überzeugen können, daß das in der Tat der richtige, wellenmechanisch sinngemäße Ausdruck dafür ist, daß der Massenpunkt die Reflexionspunkte unter keinen Umständen überschreiten kann.

Dann sind aber für λ nur die folgenden, diskret verschiedenen Werte möglich:

$$\lambda = \lambda_n = \frac{2l}{n}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Da wir nun gemäß der DE BROGLIESCHEN Zuordnung aus jedem möglichen Werte λ einen möglichen Wert des *translatorischen Impulsbetrages* zu errechnen haben:

$$|\dot{p}| = |p_n| = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{nh}{2l}; \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3)$$

so bekommen wir auch für diesen Impuls, und also auch für die *Energie* (einschließlich Ruhenergie μc^2) eine *diskrete Reihe von möglichen Werten*:

$$E = E_n = \frac{p_n^2}{2\mu} + \mu c^2, \quad (4)$$

oder relativistisch exakt:

$$E = E_n = c\sqrt{\mu^2 c^2 + p_n^2}; \quad (4')$$

mit μ ist dabei wieder die (Ruh-)Masse des Teilchens bezeichnet.

Diese Betrachtung kann sofort auf den Fall eines *dreidimensionalen rechteckigen Kastens* ausgedehnt werden. Seien l, l', l'' die Längen der zu den Koordinatenachsen x, y, z parallel liegenden *Kanten* dieses Kastens; die eine Ecke liege im Koordinatenursprungspunkt.

In korpuskularer Vorstellungsweise erhalten wir bei ideal reflektierenden Wänden eine *dreifach periodische Bewegung*: In jeder einzelnen der drei Koordinatenrichtungen x, y, z findet die soeben am eindimensionalen Fall studierte periodische Bewegung statt, indem bei jeder Reflexion *eine* der rechtwinkligen Impulskomponenten p_x, p_y, p_z das *Vorzeichen wechselt*, während die beiden anderen erhalten bleiben.

In dem zugeordneten Wellenvorgang setzen wir die Wellenamplitude proportional

$$\varphi = \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{y}{\lambda'} \sin 2\pi \frac{z}{\lambda''}, \quad (5)$$

und erreichen $\varphi = 0$ auf allen sechs Wänden des Kastens (also insbesondere für $x=l$ und für $y=l'$ und für $z=l''$) dann und nur dann, wenn

$$\lambda = \frac{2l}{n}, \quad \lambda' = \frac{2l'}{n'}, \quad \lambda'' = \frac{2l''}{n''}, \quad n, n', n'' = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

ist. Das gibt dann mit

$$|p_x| = \frac{h}{\lambda}, \quad |p_y| = \frac{h}{\lambda'}, \quad |p_z| = \frac{h}{\lambda''} \quad (7)$$

die *diskreten Energiewerte*

$$E = E_{nn'n''} = c\sqrt{\mu^2 c^2 + p_{nn'n''}^2} \approx \frac{p_{nn'n''}^2}{2\mu} + \mu^2 c^2. \quad (8)$$

Statt der *stehenden* Wellen können aber auch *fortlaufende* Wellen in gewissen Fällen zu einer diskreten Quantelung führen. Wir betrachten, zunächst wieder ein *eindimensionales* Beispiel wählend, eine unendlich lange *periodische Kette*: Es seien etwa in äquidistanter Reihe, mit der „Gitterkonstanten“ l , unendlich viele *ununterscheidbar gleiche* Atome aufgereiht. Wenn dieses gedachte Gebilde sich in Richtung seiner eigenen Erstreckung translatorisch bewegt, so ist das gleichsam eine *periodische* Bewegung; insofern nämlich, als nach eingetretener Verschiebung um l (oder um ein ganzzahliges Vielfaches von l) der ursprüngliche Zustand *in ununterscheidbarer Weise wiederhergestellt* ist. Die dem Gebilde zugeordnete DE BROGLIESCHE Welle wird ebenfalls diese Periodizität zeigen müssen, so daß nur diskrete Wellenlängenwerte in Frage kommen:

$$\lambda = \lambda_n = \frac{l}{n}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Für den *Impuls* des Gebildes ergeben sich also wiederum *diskrete Werte*

$$p = p_n = \frac{n h}{l}; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10)$$

[Man beachte den Unterschied gegenüber (3)!]

Das kann verallgemeinert werden auf die translatorische Bewegung eines *dreidimensionalen unendlichen Gitters* von *exakter Periodizität*. Da für das *rechtwinklige* Gitter die Verallgemeinerung trivial ist, sei gleich das beliebig schiefwinklige ins Auge gefaßt. Es seien a_1, a_2, a_3 die Kantenvektoren der kleinsten *Zelle* (von parallelepipedischer Gestalt), aus deren dreifach unendlicher Wiederholung das ganze Gitter sich aufbaut; dann wird die dem Gesamtgitter zugeordnete DE BROGLIESCHE Welle so aussehen müssen, daß sie bei Verschiebung um a_1 oder um a_2 oder a_3 un geändert bleibt; d. h. die Wellenamplitude muß so aussehen:

$$\sin 2\pi \left\{ n \frac{\mathbf{r}[a_2, a_3]}{V} + n' \frac{\mathbf{r}[a_3, a_1]}{V} + n'' \frac{\mathbf{r}[a_1, a_2]}{V} - \nu t \right\}. \quad (11)$$

Hier soll \mathbf{r} der *Ortsvektor* $\mathbf{r} = (x, y, z)$ sein, und $V = a_1[a_2, a_3]$ das *Zellvolumen*; die n, n', n'' müssen *ganze Zahlen* sein. Ersetzt man in (11) \mathbf{r} z. B. durch $\mathbf{r} - a_1$, so ändert sich der Ausdruck in der geschweiften Klammer gerade um n .

Für den translatorischen Impuls p bedeutet (11):

$$p = h \frac{n[a_2, a_3] + n'[a_3, a_1] + n''[a_1, a_2]}{V}, \quad (12)$$

wiederum ergibt sich also eine *diskrete Quantelung* des translatorischen Impulses.

Man kann diese Resultate übrigens auch noch von einer andersartigen Überlegung aus begründen, deren kurze Erläuterung wir hier auf den eindimensionalen Fall beschränken dürfen. Ein mit $\nu \neq 0$ bewegtes (eindimensionales) Gitter stellt eine mit Unterlichtgeschwindigkeit fortschreitende *Welle* dar, mit der *Wellenlänge* $\lambda = a$. Wir erinnern uns daran, daß in Umkehrung der DE BROGLIESCHEN Zuordnung von Wellen

zu Korpuskeln auch eine Zuordnung von Korpuskeln zu jeder Welle möglich ist. Im jetzigen Fall haben die unserer Welle zuzuordnenden Korpuskeln je den Impulsbetrag $|\mathcal{G}| = h/l$, und folglich muß der *Gesamtimpuls* p unserer Welle ein *ganzzahliges* (positives oder negatives) *Viel-faches* von h/l sein — womit wir wieder (10) begründet haben.

Eine andersartige Realisierung für die gemäß (9), (10) „*gequantelte*“ periodische Translationsbewegung *ohne* Reflexionen wäre die, daß wir einen Massenpunkt einen *Kreis* vom Umfang l , also Radius $l/2\pi$, mit konstanter Geschwindigkeit v durchlaufen lassen. Indem wir Rücksicht nehmen auf die Notwendigkeit, bei Rückschlüssen von der geradlinigen auf die kreisförmige Bewegung Vorsicht walten zu lassen, stellen wir fest, daß für diese Kreisbewegung die *Quantelung* jedenfalls *angenähert* dem folgenden Gesetz unterliegen muß: Wenn wir für den *Drehimpuls* p_φ hinschreiben

$$p_\varphi = p \frac{l}{2\pi},$$

wo p also gleich μv ist, so wird für p die Formel (10) gelten; für p_φ selbst also

$$p_\varphi \approx n \frac{h}{2\pi}; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (13)$$

Wir wollen aber im Auge behalten, daß diese Formel für die *Quantelung des Drehimpulses* nur zur vorläufigen Orientierung dienen kann und späterer Überprüfung bedarf.

§ 2. Korrespondenzmäßige Quantelung.

1. Das Korrespondenzprinzip. Das BOHRsche sog. *Korrespondenzprinzip* ist ohne Zweifel der wichtigste Gedanke der ganzen Quantentheorie. Jeder Versuch, sich in die den gewohnten Begriffen und Denkweisen so fremdartige und fernstehende Quantenwelt hinein zu finden, muß vor allem darauf ausgehen, sich ein eindringliches und an vielen Beispielen geübtes und erprobtes Verständnis des *Korrespondenzgedankens* zu erwerben.

Die Schwierigkeit für dieses Verständnis liegt daran, daß das Korrespondenzprinzip seinem Charakter nach etwas ganz anderes ist, als etwa das Energieprinzip, das Entropieprinzip, das Relativitätsprinzip. Diese letzteren Prinzipien sind *Naturgesetze in fertig ausgearbeiteter Formulierung*. Das Korrespondenzprinzip dagegen war seinem ursprünglichen Sinne und seiner historischen Bedeutung nach eine *Anleitung zum Aufspüren* der noch *unbekannten* Gesetze der Quantenerscheinungen. Es kennzeichnete die *Richtung*, in welcher BOHRs tiefer Forscherinstinkt die zukünftige Theorie suchte, und in welche er das Nachdenken der Mitsuchenden zu lenken wünschte. Es liegt also in der Natur der Sache, daß das Korrespondenzprinzip nicht etwa in Form einer mathematisch präzisierten Aussage mitgeteilt werden konnte. Als Ausdruck einer Vorstellungswelt, die noch in der Klärung begriffen und noch nicht

zur vollen Präzision entwickelt war, wandte sich das Korrespondenzprinzip nicht nur an den logischen Verstand, sondern auch an Instinkt und Intuition des Physikers. Dem entsprach es, daß sein Inhalt nur entweder andeutend allgemein umschrieben oder an *konkreten Beispielen* entwickelt und erläutert werden konnte.

Heute, wo die Quantentheorie in mathematischer Präzision ihre — wie wir zu glauben berechtigt sind — innerhalb einer bestimmten Schicht atomphysikalischer Probleme *endgültige* Gestalt gewonnen hat, ist trotzdem noch das Korrespondenzprinzip von ebenso großer *sachlicher*, wie historischer (und *pädagogischer!*) Bedeutung. Denn die mathematische Exaktheit, mit der wir heute die Gesetze der Quantenphysik formulieren können, überhebt uns in keiner Weise der Notwendigkeit einer einschneidenden *Umgewöhnung* unserer *physikalischen Denk- und Vorstellungsweisen*. Es genügt nicht, mit den fertig vorgelegten mathematischen Gesetzen der Quantentheorie *Rechnungen* ausführen zu können, sondern wir müssen auch umfassend wissen, was diese Rechnungen *bedeuten*, wie sie in Beziehung zu setzen sind zu den anschaulichen Gegebenheiten unserer quantenphysikalischen Experimente, in welchen die Quantenerscheinungen stets *eingebettet* sind in unsere *klassisch* beschreibbare *makroskopische Erfahrungswelt*. Der historische Umstand, daß die Entdeckung der exakten mathematischen Gesetze der „Wellenmechanik“ zunächst Veranlassung zu tiefgehenden Auffassungsverschiedenheiten betreffs ihrer *Deutung* wurde, beleuchtet die *Schwierigkeiten* dieser Deutung, für welche uns jedoch das Korrespondenzprinzip ein sicherer Führer ist, indem es uns über das Verhältnis von klassischen und quantenphysikalischen Gesetzen unterrichtet.

Das Korrespondenzprinzip geht darauf aus, eine umfassende und enge Analogie zwischen klassischer Theorie und Quantentheorie zu zeigen. Wir wissen ja, daß die ganze Quantentheorie *asymptotisch* in die klassische Theorie übergeht, für den Grenzfall $h \rightarrow 0$. Das Korrespondenzprinzip jedoch behauptet eine *darüber weit hinausgehende* Analogie beider Theorien. Diese Analogie ist sehr merkwürdig und überraschend. Denn es sind ja die primitivsten, scheinbar selbstverständlichsten und unentbehrlichsten Unterlagen der klassischen Theorie in der Quantentheorie aufgegeben: Die *Stetigkeit* der physikalischen Abläufe, die klassische *Kinematik* als Ausdruck der gewohnten physikalischen *Raumzeitvorstellung*, die der klassischen Wellentheorie zugrunde liegende Vorstellung des physikalischen *Kontinuums*, das klassische *Kausalitätsprinzip* — alles das gibt es in der Quantenphysik nicht mehr. Alle diese *grundsätzlichen* Dinge sind in der Wirklichkeit der Quanten *radikal* anders, als in der klassischen Vorstellungswelt und der ihr entsprechenden *makroskopischen* Physik. *Trotzdem* besteht eine durchgehende und bis in feinste Einzelheiten reichende Analogie: bei vollkommener Verschiedenheit der anschaulichen Grundvoraussetzungen erweisen sich die *konkreten Einzelaussagen* beider Theorien in jedem Beispiel als verwandt.

Eine solche *Korrespondenz* liegt in der Tatsache, daß die klassisch-wellentheoretischen *Interferenzgesetze* (soweit sie die *Zeitmittelwerte der Intensitäten*, aber nicht die *Intensitätsschwankungen* betreffen) auch bei *beliebig geringen Lichtintensitäten exakt* gültig sind (vgl. Kapitel 1, § 2, 3 unter A); was also weit hinausgeht über eine bloße *asymptotische* Gültigkeit für *große Strahlungsdichten* — wie sie ja *außerdem* noch besteht hinsichtlich der *Schwankungen* (vgl. Kapitel 1, § 2, 3 unter C). Ferner gehört hierher die *exakte* Gültigkeit der klassischen Gesetze der *Kugelwelle* auch für die *Quantenstrahlung* (vgl. Kapitel 1, § 2, 4). Bei aller Verschiedenheit der Grundvorstellung: kontinuierliche, allseitig sich unbegrenzt verdünnende Energieausströmung in der klassischen Theorie; unstetige, explosive Abgabe unteilbarer Lichtquanten $h\nu$ andererseits, besteht eine *exakte* Übereinstimmung dadurch, daß das klassisch-kontinuierlich errechnete Gesetz sich wiederfindet als *Wahrscheinlichkeitsgesetz*, welches den *statistischen Mittelwert* der durch zahlreiche unstetige Elementarakte gelieferten Intensität in seiner Abhängigkeit von der Richtung festgelegt. Und in einer einfachen, sinngemäßen relativistischen Modifikation des klassischen Gesetzes der Kugelwelle erfassen wir auch die Intensitätsverteilung beim *COMPTON-Effekt* (vgl. Kapitel 1, § 2, 4).

2. Quantelung des harmonischen Oszillators. Das Korrespondenzprinzip soll nun herangezogen werden für die *Quantelung des harmonischen Oszillators*. Es kommt uns dabei vornehmlich auf die *Methode*, auf die korrespondenzmäßige Betrachtungsweise an. Denn das *Ergebnis* der Quantelung ist für diesen Fall schon ohne besondere Umstände eindeutig erkennbar. Wir wissen ja, daß die Energie des elektromagnetischen Strahlungsfeldes in unteilbaren Quanten $h\nu$ auftritt. Da es sich hier aber um nichts anderes, als die Energie der Hohlraumoszillatoren, der elektromagnetischen *Eigenschwingungen* handelt (vgl. Kapitel 1, § 1), so sehen wir, daß ein harmonischer Oszillator der Frequenz ν Energiestufen im Abstand $h\nu$ haben muß, so daß die Energiewerte seiner stationären Zustände durch

$$W_n = \text{const} + nh\nu; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

gegeben sind. Die in (1) eingeführte additive Konstante („Nullpunktsenergie“) muß bei den Oszillatoren des Lichtfeldes gleich Null gesetzt werden, kann aber für materielle Oszillatoren erst später festgelegt werden.

Die empirisch gesicherte Formel (vgl. Kapitel 1, § 1)

$$\bar{\epsilon}_\nu = \frac{h\nu}{e^{kT} - 1} \quad (2)$$

für die *mittlere thermische Energie* eines Oszillators (*abzüglich* etwaiger Nullpunktsenergie) *bestätigt* die Quantelung (1), und kann aus (1) abgeleitet werden, wenn man hinzunimmt, daß die stationären Zustände des harmonischen Oszillators sämtlich das *statistische Gewicht* 1 haben:

Die *kanonische Verteilungsformel* (vgl. Kapitel 1, § 3, 5) führt dann nämlich mit

$$\frac{N_n}{N} = \frac{e^{-n \frac{h\nu}{kT}}}{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-m \frac{h\nu}{kT}}} = e^{-n \frac{h\nu}{kT}} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right) = y^n (1 - y); \quad y = e^{-\frac{h\nu}{kT}} \quad (3)$$

zu

$$\bar{\varepsilon}_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N_n}{N} n h\nu = h\nu \cdot y (1 - y) \frac{d}{dy} \sum_{n=0}^{\infty} y^n = h\nu \frac{y}{1 - y},$$

was in der Tat (6) ergibt.

Wir denken uns jetzt, um die *korrespondenzmäßige* Begründung von (1) durchzuführen, einen *materiellen* harmonischen Oszillator, etwa ein mit der Frequenz ν_0 eindimensional schwingendes, elastisch gebundenes *Elektron*. Nach der klassischen Theorie würde die Schwingungskordinate q dieses Elektrons als Funktion der Zeit so aussehen:

$$q(t) = \cos 2\pi(\nu_0 t + \alpha). \quad (4)$$

Allerdings gilt das nur angenähert, nämlich unter Vernachlässigung der *Strahlungsdämpfung*: die schwingende elektrische Ladung wird ja als Mikroantenne elektromagnetische Strahlung aussenden, in einer ihrer jeweiligen Schwingungsenergie proportionalen Intensität. Also wird die Energie des schwingenden Elektrons sich exponentiell verzehren (vgl. dazu Kapitel 1, § 4, 1).

Die klassisch von der Schwingung (4) emittierte Strahlung zeigt nun folgende, gerade für den harmonischen Oszillator charakteristischen Eigenschaften: 1. Sie ist stets *monochromatisch*. 2. Ihre Frequenz ist *unabhängig von der Schwingungsenergie* des Oszillators — nämlich stets gleich ν_0 .

Quantentheoretisch ist die Frequenz der von dem Oszillator emittierten Strahlung dagegen gemäß der *BOHRschen Frequenzbedingung*

$$W_n - W_m = h\nu \quad (5)$$

abzuleiten aus den Energien der stationären Zustände. Im Sinne des Korrespondenzprinzips fordern wir jedoch: *Auch im quantentheoretischen Falle sollen die beiden angegebenen Charakteristika der Oszillatorstrahlung bestehen bleiben.*

Das ist nur dadurch möglich, daß wir die stationären Zustände *äquidistant im Abstand $h\nu_0$* annehmen — womit also (1) als notwendig erwiesen ist — und überdies noch die *Auswahlregel*

$$n \rightarrow n \pm 1 \quad (6)$$

annehmen: es soll also der harmonische Oszillator nur *solche* Quantensprünge unter Emission oder Absorption von Licht auszuführen pflegen, bei welchen sich die „Quantenzahl“ n um ± 1 ändert. *Danach kann der Oszillator in der Tat nur die eine Frequenz ν_0 emittieren oder absorbieren.*

Diese Betrachtung läßt sich noch verfeinern. Die obigen klassischen Ergebnisse gelten für den Grenzfall, daß — bei endlichem *elektrischem Moment* der Schwingung — die Schwingungsamplitude sehr klein gegenüber der zu ν_0 gehörigen Lichtwellenlänge λ_0 ist. Bei unzureichender Erfüllung dieser Voraussetzung ist die Berechnung der elektromagnetischen Energieemission aus der *Dipolkugelwelle* nur als erster Schritt eines Approximationsverfahrens zu betrachten, dessen zweiter Schritt die zusätzliche Berücksichtigung einer *Quadrupolkugelwelle* ist. Diese ist wieder monochromatisch, aber mit verdoppelter Frequenz $2\nu_0$.

Quantentheoretisch muß offenbar dieser klassischen Quadrupolwelle eine Lockerung der Auswahlregel (6) entsprechen, derart, daß mit entsprechend geringerer Häufigkeit auch Übergänge $n \rightarrow n \pm 2$ vorkommen, die dann in der Tat eine emittierte oder absorbierte Strahlungsfrequenz $2\nu_0$ ergeben.

Auch werden wir nicht zweifeln, daß die *Richtungsverteilung* der durch Übergänge $n \rightarrow n - 2$ entstehenden Emissionen im statistischen Mittel genau der klassisch berechneten kontinuierlichen Richtungsverteilung der Intensität entspricht, welche für diesen Fall (vgl. dazu Kap. I, (4), § 4, 4!) durch

$$I(\vartheta) \approx \sin^2 2\vartheta$$

gegeben ist, wo ϑ den Winkel bezeichnet, den die fragliche Emissionsrichtung mit der Schwingungsrichtung bildet. Denn wir wissen bereits, daß jedenfalls bezüglich der *Dipolkugelwelle* in der Tat exakte Übereinstimmung zwischen klassischer und quantentheoretischer Intensitätsverteilung besteht (vgl. Kapitel I, § 2, 4). —

Denkt man daran, daß das elektromagnetische Feld ein System harmonischer Oszillatoren darstellt (vgl. Kapitel I, § 1, 2), so kann man die BOHRsche Frequenzbedingung (5) als *Folge* der Oszillatorquantelung (1) auffassen: Nur *solche* Eigenschwingungsozillatoren, welche die Frequenz $\nu = \Delta W/h$ besitzen, sind imstande, einen von einem Atom abgegebenen Energiebetrag ΔW aufzunehmen, so daß also die emittierte Energie als Strahlung der durch (5) bestimmten Frequenz in Erscheinung treten muß.

In diesem Zusammenhang ist es unbefriedigend, daß bei der obigen Herleitung von (1) die BOHRsche Frequenzbedingung (5) *vorausgesetzt* wurde. Deshalb sei eine Betrachtung angeschlossen, welche (1) — und als Folge von (1) die BOHRsche Frequenzbedingung — *allein* aus der quantenphysikalischen Grundtatsache *unstetiger Elementarprozesse des Energieaustausches* korrespondenzmäßig ableitet.

Wir gehen davon aus, daß zwei harmonische Oszillatoren gleicher Frequenz ν nach klassischer Theorie *stets resonanzfähig* sind, *unabhängig* von ihren beiderseitigen Energieinhalten. Dem muß als quantenphysikalischer Tatbestand korrespondieren, daß diese Oszillatoren *stets*, in welchem stationären Zustand sich auch jeder von ihnen befinden möge, zum unstetigen Austausch einer gewissen endlichen Energie

befähigt sind. Das ist nur dann möglich, wenn ihre Energiestufen in *äquidistanter Reihe* liegen:

$$W_n = \text{const} + n \cdot E(\nu); \quad (8)$$

dabei ist $E(\nu)$ eine noch zu bestimmende Funktion von ν .

Aus *relativistischen Invarianzgründen* kann aber diese Zuordnung einer Energie $E(\nu)$ zu einer Frequenz ν nur in der Form

$$\frac{E}{\nu} = \text{invariante Konstante} \quad (9)$$

erfolgen. —

Die Zuordnung (9) ist nicht nur für die — hier allein benutzte — *spezielle* Relativitätstheorie, sondern auch für die *allgemeine* Relativitätstheorie ein *invariantes* Gesetz, so daß auch die EINSTEINSche Auffassung der *Gravitation* mit den Quantengesetzen im Einklang steht. Das hängt damit zusammen, daß die grundlegenden Invarianten der allgemeinen wie der speziellen Relativitätstheorie die Dimension von Wirkungen haben: Die quantenphysikalischen elementaren Unstetigkeiten können deshalb nur als eine *Atomistik von Wirkungsgrößen* in relativistisch invarianter Gesetzmäßigkeit zutage treten; die ihnen zugrunde liegende neue *universelle Naturkonstante* kann nur ein *Wirkungs-Quantum* sein.

3. Periodizität und Quantelung. Wir betrachten nun einen *schwach anharmonischen* Oszillator. Die klassische Theorie ergibt in zwei Punkten eine Abweichung gegenüber dem exakt harmonischen Oszillator: Erstens wird die periodische Bewegung des schwingenden Massenpunktes nicht mehr die einfache Sinusgestalt (4) zeigen, sondern allgemeiner so aussehen:

$$q(t) = \bar{q} + a \cos 2\pi(\nu_0 t + \alpha) + b \cos 2\pi(2\nu_0 t + \beta) + \left. \begin{array}{l} + c \cos 2\pi(3\nu_0 t + \gamma) + \dots; \end{array} \right\} \quad (10)$$

je ausgeprägter die Anharmonizität des Oszillators (also die Abweichung der potentiellen Bindungsenergie von einem quadratischen Ausdruck $\frac{1}{2} k^2 q^2$), desto stärker werden neben der *Grundschiwingung* $a \cos 2\pi(\nu_0 t + \alpha)$ auch die *Oberschwingungen* mit den Frequenzen $2\nu_0, 3\nu_0, \dots$ in der Bewegung (10) hervortreten. Zweitens wird aber die *Grundfrequenz* ν_0 *nicht mehr unabhängig* vom jeweiligen Energieinhalt des Oszillators sein.

Diese Abweichungen vom harmonischen Verhalten werden wir in der Quantentheorie zum Ausdruck bringen müssen 1. durch eine Lockerung der Auswahlregel (6); 2. durch einen Verzicht auf die Äquidistanz (1) der Energiestufen. Der anharmonische Oszillator im n -ten Quantenzustand (die *Numerierung* der möglichen Energiewerte sei wieder der Größe nach durchgeführt) wird also mit spontaner Emission nicht nur den Sprung $n \rightarrow n - 1$, sondern auch $n \rightarrow n - 2$; $n \rightarrow n - 3$; ... ausführen können. Und unter Absorption des entsprechenden $h\nu$ kann er die Übergänge $n \rightarrow n + 1$; $n \rightarrow n + 2$; $n \rightarrow n + 3$; ... machen. Da nun die Energiestufen nicht mehr genau äquidistant liegen — aber

doch *angenähert* äquidistant bei Voraussetzung *schwacher* Anharmonizität — so wird die zu $n \rightarrow n - 1$ gehörige Emissionsfrequenz *etwas verschieden* sein von der Absorptionsfrequenz $n \rightarrow n + 1$. Die zu $n \rightarrow n - 2$; $n \rightarrow n - 3$; ... gehörigen Frequenzen werden nur noch *angenähert*, nicht mehr genau, das Doppelte, Dreifache, ... der zu $n \rightarrow n - 1$ gehörigen Frequenz sein; und dasselbe gilt für die Absorptionsfrequenzen $n \rightarrow n + 2$; $n \rightarrow n + 3$; ... *Trotz* dieser grundsätzlichen Abweichung von Beziehungen, die für die klassische Theorie ganz exakt und allgemein gelten, und ganz unvermeidlich und selbstverständlich sind, werden wir doch auch jetzt noch die *beiden* Frequenzen $n \rightarrow n \pm 1$ in *Korrespondenz* zur klassischen Frequenz ν_0 zu setzen haben (wobei derjenige Wert von ν_0 zu nehmen ist, welcher sich ergibt, wenn der korrespondierende klassische Oszillator dieselbe Energie hat, wie der Quantenoszillator im n -ten Zustand). Entsprechend stehen die Quantenfrequenzen der Übergänge $n \rightarrow n \pm 2$; $n \rightarrow n \pm 3$; ... in Korrespondenz zu den klassischen Frequenzen $2\nu_0$; $3\nu_0$; ... Wir werden also auch hinsichtlich der *Intensitäten* in Absorption und Emission eine *korrespondenzmäßige Analogie* erwarten, derart, daß die verschiedenen *Übergangswahrscheinlichkeiten* Faktoren enthalten, die jeweils zu a^2 , b^2 , c^2 , ... korrespondieren.

Diese Betrachtungsweise führt uns zu einem Verständnis der allgemeinen Gesetzmäßigkeit, daß ein solches System, dessen korrespondierendes klassisches Analogon eine *periodische Bewegung* ausführt, *diskrete, gequantelte Energien* aufweist, ein solches dagegen, das einer *aperiodischen* klassischen Bewegung korrespondiert, eine *ungequantelte* Energie besitzt, die ein kontinuierliches Gebiet möglicher Werte hat. Daß letzteres der Fall ist, wird empirisch vor allem durch die kontinuierlichen Spektren hinter den Seriengrenzen (vgl. Kapitel 1, § 3, 2) gezeigt; ferner durch das kontinuierliche Röntgenbremsspektrum. Es ist natürlich auch zu bestätigen an unseren Formeln für die Quantelung des harmonischen Oszillators und der translatorischen Bewegung auf einer endlichen Strecke: Läßt man die Grundfrequenz ν_0 des Oszillators zu Null werden, oder die Länge l der fraglichen Strecke unendlich groß, so rücken die diskreten Energiestufen immer enger zusammen, bis im Grenzfall die Quantelung ganz verschwindet.

Wir haben diese Gesetzmäßigkeit als Spezialfall der im Korrespondenzprinzip behaupteten Ähnlichkeit von klassischen und Quantengesetzen anzusehen: Ein Quantensystem, dessen Zustände sämtlich gequantelt sind, wird auf Grund der BOHRschen Frequenzbedingung (5) ein reines *Linienpektrum* zeigen; ein solches dagegen, das nur ungequantelte Zustände hat, wird stets ein *kontinuierliches Spektrum* zeigen. Linienpektrum einerseits und kontinuierliches Spektrum andererseits sind aber in der klassischen Theorie charakteristisch für periodische und für aperiodische Bewegung.

So sollte z. B. die aperiodische Bremsung, welche die Elektronen in einer Röntgenröhre beim Aufprall auf die Antikathode erleiden, nach

klassischer Theorie zur Emission von „elektromagnetischen Knallen“ führen, deren spektrale Analyse im ganzen unendlichen Spektralbereich von $\nu=0$ bis $\nu=\infty$ eine von Null verschiedene Intensität ergäbe. In korrespondenzmäßiger Analogie hierzu ergibt sich quantenphysikalisch in der Tat ein kontinuierliches Emissionsspektrum, dessen Intensität jedoch nur von $\nu=0$ bis $\nu=\nu_{\max} = eV/h$ von Null verschieden ist (vgl. Kapitel I, § 2, 2). Im Grenzfall $h \rightarrow 0$ würde aber mit $\nu_{\max} = \infty$ der asymptotische Anschluß an die klassische Theorie voll erreicht werden; und für hinreichend kleine Frequenzen $\nu \ll \nu_{\max}$ kann dementsprechend die Intensitätsverteilung rein klassisch berechnet werden (KRAMERS).

Bei einem H-Atom haben wir sowohl diskrete Energiewerte $W_n = -Rh/n^2$, als auch kontinuierlich verteilte Werte $W \geq 0$. Dies steht in Korrespondenz einerseits zu den klassischen periodischen *Ellipsenbahnen* eines Elektrons im COULOMB-Felde (mit negativer Energie) und andererseits zu klassischen aperiodischen *Hyperbelbahnen* (mit positiver Energie).

4. Korrespondenz der Quantenzahlen und Frequenzen. Zur Vertiefung unserer Korrespondenzbetrachtungen wollen wir einige feinere und tiefere Gesetzmäßigkeiten der klassischen Theorie berühren. Es seien p, q Impuls und Koordinate eines (eindimensional) schwingenden Massenpunktes. Die graphische Darstellung dieser periodischen Bewegung in einer Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten p und q — der sog. „Phasenebene“ — ist eine geschlossene Kurve: Im Falle des harmonischen Oszillators liefert der *Energiesatz*

$$\frac{p^2}{2\mu} + \frac{\kappa^2}{2} q^2 = W = \text{const}; \quad \frac{\kappa^2}{\mu} = 4\pi^2 \nu^2 \quad (11)$$

eine *Ellipse*; für einen schwach anharmonischen Oszillator würden wir ein davon etwas abweichendes *Oval* erhalten. Bei kinetischer Energie $p^2/2\mu$ und beliebiger (aber zu periodischer Bewegung Anlaß gebender) potentieller Energie bekommen wir stets eine zur q -Achse symmetrische Kurve, die von jeder sie schneidenden Parallelen zur p -Achse in *zwei* Punkten getroffen wird. Aus quantentheoretischen Gründen wird uns die mit $\Delta p \Delta q$ zu bezeichnende *Größenordnung* des Produktes der Schwankungen von p und q um ihre Mittelwerte später beschäftigen. Als ein Maß dieser Größenordnung können wir den *Flächeninhalt*

$$I = \oint p dq \quad (12)$$

der besprochenen geschlossenen Kurve ansehen; er hat die *Dimension einer Wirkung*.

Diese Größe I , auch „*Wirkungsintegral*“ genannt, hat für die klassische Theorie eine hervorragende Bedeutung. Sie besitzt insbesondere die folgenden Eigenschaften:

A. Die *Phasenfläche* I ist „*adiabatisch invariant*“: Unterwirft man das schwingende System einer Störungskraft, die *unendlich langsam* vom ursprünglichen Werte Null an zu ihrem späteren Werte anwächst (dieser möge dann wieder konstant gehalten werden), so bleibt der Wert von I ungeändert.

Als ein Beispiel sei die Möglichkeit erwähnt, bei einem in Gestalt eines *Pendels* realisierten harmonischen Oszillators die *Frequenz* beliebig abzuändern durch unendlich langsame Veränderung der *Länge* des Pendelfadens.

B. Stellen wir die *Energie* W als Funktion des *Wirkungsintegrals* I dar, so ergibt sich die *Frequenz* ν durch *Differentiation*:

$$\nu = \frac{dW(I)}{dI}. \quad (13)$$

Auf den mathematischen *Beweis* der Formel (13) kommen wir später zurück; jetzt soll nur ihre korrespondenzmäßige Bedeutung geprüft werden.

Der Begriff der *adiabatischen Invarianz* ist von wesentlicher und unentbehrlicher Bedeutung für die *Thermodynamik*, derart, daß er an Wichtigkeit durchaus *gleichwertig* dem Begriff der *relativistischen Invarianz* zur Seite steht. Die empirische Tatsache, die wir als Inhalt des *quantenphysikalischen Adiabatenatzes* ansehen (vgl. Kapitel I, § 4, 3), kann offenbar so ausgedrückt werden, daß die *Quantenzahl* n als eine *quantentheoretische adiabatische Invariante* anzusehen ist. Also muß n in Korrespondenz gesetzt werden zu einer klassischen adiabatischen Invarianten, d. h. im Falle des eindimensionalen Oszillators zu einer Funktion von I ; da man jeden (beliebig anharmonischen) eindimensionalen Oszillator in jeden anderen durch eine *adiabatische Umformung* übergehen lassen kann, so muß n in jedem Falle mit *derselben* Funktion von I korrespondieren.

Für den Spezialfall des *harmonischen* Oszillators ist diese Funktion von I aber sofort zu ermitteln. Ist ν die *Frequenz* des Oszillators, so ist nach (11) die Fläche I der fraglichen Ellipse offenbar gleich $I = 2\pi W\sqrt{\mu/\kappa}$, oder

$$I = \frac{W}{\nu}. \quad (14)$$

Vergleich mit der *Quantenformel* (1) lehrt uns dann die *fundamentale Korrespondenz*:

$$nh \rightarrow I. \quad (15)$$

Mit einer bekannten Bezeichnung, die allerdings der modernen, hier vorgetragenen Auffassung der Verhältnisse nicht mehr recht angemessen ist, nennt man diese Korrespondenz die „*Quantenbedingung*“. Man kann sie zu einer *approximativen* Berechnung der Energiestufen eines quantenmechanischen Systems von einem Freiheitsgrade benutzen, indem man durch *klassische* Rechnung die *Energie* $W = W(I)$ als Funktion von I bestimmt und dann für I die Werte nh ($n = 0, 1, 2, \dots$) einsetzt.

Betrachten wir jetzt noch einmal unser früheres Beispiel (§ 1) eines auf einem Kreise vom Umfang l umlaufenden Massenpunktes mit der *Geschwindigkeit* v . Der Ausdruck (12) ergibt in diesem Falle

$$I = \oint p dq = \mu v \cdot l = 2\pi \cdot \mu v \frac{l}{2\pi},$$

oder

$$I = 2\pi p_q, \quad (15')$$

wo p_φ wieder der *Drehimpuls* ist. Dieser ist also, wie wir schon in (13), § 1 anderweitig gefunden hatten, diskret zu quanteln gemäß

$$m \frac{h}{2\pi} \rightarrow p_\varphi \quad (15'')$$

(mit *ganzzahligem* m). —

Die von der klassischen Theorie korrespondenzmäßig in die Quantentheorie zu übertragende adiabatische Invarianz von W/ν bei einem harmonischen Oszillator, dessen *Frequenz* adiabatisch geändert wird, ist auch im Hinblick auf die Schlußbetrachtung in § 2, 2 bedeutungsvoll: Die dort durch *relativistische* Invarianz begründete Notwendigkeit, für die Zuordnung $E(\nu)$ eine Proportionalität $E/\nu = \text{const.}$ anzunehmen, kann auch aus *adiabatischer* Invarianz erschlossen werden. Sie ist also ebensowohl aus den Forderungen der *Thermodynamik*, wie aus denen der *Relativitätstheorie* herzuleiten.

Dementsprechend kann auch das *WIENSche Verschiebungsgesetz*, statt durch relativistische Überlegungen (vgl. Kapitel 1, § 1, 1) *rein thermodynamisch* begründet werden, durch eine Überlegung, die sich im Kerne darauf gründet, daß bei einer unendlich langsamen, adiabatischen *Volumänderung* des Hohlraumes für jede Hohlraumeigenschwingung E/ν konstant bleibt.

Die fundamentale Korrespondenz (15) läßt eine wichtige allgemeine Korrespondenz erkennen zwischen der klassischen und der quantentheoretischen Festlegung der *Frequenzen* eines schwingenden Systems. Für einen durch einen bestimmten Wert der Phasenfläche I gekennzeichneten Zustand eines klassischen Oszillators ist die τ -te *Oberschwingung* in Emission und Absorption nach (13) gegeben durch

$$\tau\nu = \tau\nu(I) = \tau \frac{dW(I)}{dI}. \quad (16)$$

Für ein Quantensystem im n -ten Zustand ist die τ -te der Absorptions- bzw. Emissionsfrequenzen gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} \nu_a &= \frac{W(nh + \tau h) - W(nh)}{h}, \\ \nu_e &= \frac{W(nh) - W(nh - \tau h)}{h}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

wir haben hier die Bezeichnung $W(nh)$ für W_n gebraucht. Wir wollen nun in (17) einen mathematischen Grenzübergang $h \rightarrow 0$ vornehmen, wobei jedoch nh konstant gleich I gehalten werden soll. Dann gehen $\{W(I + \tau h) - W(I)\}/h$ und $\{W(I) - W(I - \tau h)\}/h$ in die klassische Frequenz (16) über. Wir sehen also — unser obiges, für den Fall des *schwach anharmonischen* Oszillators gewonnenes Resultat verallgemeinernd, daß diese beiden Quantenfrequenzen zur klassischen τ -ten Oberfrequenz (16) in *korrespondenzmäßiger Parallele* stehen: Die Korrespondenz

$$\left. \begin{aligned} \nu_a &\searrow \tau\nu \\ \nu_e &\nearrow \tau\nu \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

macht nicht nur eine beim Grenzübergang $h \rightarrow 0$ eintretende *asymptotische Übereinstimmung* ersichtlich, sondern drückt auch das allgemeine Verhältnis der *unstetigen* Quantenphysik zur *stetigen* klassischen Physik in einer sehr anschaulichen Weise mathematisch aus: nämlich durch die Zuordnung von *Differenzenquotienten* und *Differentialquotienten*.

Die *Zweideutigkeit* der Zuordnung (18) ist natürlich eine *wechselseitige*: in unmittelbar verständlicher Weise können wir das ausdrücken in dem vollständigeren Schema:

$$\left. \begin{array}{l} \dots \searrow \\ \nu(n+\tau, n) \left\{ \begin{array}{l} \tau\nu(nh+\tau h) \\ \tau\nu(nh) \\ \tau\nu(nh-\tau h) \end{array} \right. \\ \nu(n, n-\tau) \left. \begin{array}{l} \dots \searrow \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (18')$$

5. Die RYDBERG-Konstante. Ebenso, wie die Ablenkung der Kathodenstrahlen durch elektrische und magnetische Felder mit der dabei beanspruchten Genauigkeit ohne jede Berücksichtigung von Quanteneffekten zu berechnen ist (und sowohl zur Bestimmung des Verhältnisses e/μ der Ladung zur Masse als auch zur unmittelbaren Bestätigung diesbezüglicher Aussagen der Relativitätstheorie führt), ebenso werden wir zweifellos berechtigt sein, ohne Berücksichtigung von Quanteneffekten die Bewegung eines Elektrons in einem COULOMB-schen *Zentralfeld* zu berechnen, *sofern wir uns auf Bahnen von makroskopischer Größe beschränken*.

Wir denken uns also einen unendlich schweren und ruhenden *positiven Kern* der Ladung Ze ; er werde auf einer *kreisförmigen* Bahn umkreist von einem Elektron — der Radius r der Bahn möge beispielsweise von der Größenordnung 1 cm sein.

Die *Zentrifugalkraft* $\mu v^2/r$ muß der das Elektron anziehenden *Coulombkraft* Ze^2/r^2 das Gleichgewicht halten:

$$v^2 r = \frac{Z e^2}{\mu}; \quad (19)$$

die *Umlauffrequenz* ν des Elektrons ist gegeben durch

$$\frac{v}{r} = 2\pi\nu; \quad (20)$$

und die *Energie* $W = \frac{1}{2} \mu v^2 - Ze^2/r$ wird unter Berücksichtigung von (19) gleich

$$W = -\frac{\mu v^2}{2} = -\frac{Z e^2}{2r}. \quad (21)$$

Eliminierung von r und v aus (20), (21) gibt die Beziehung

$$\frac{W^3}{v^2} = -\frac{1}{2} \pi^2 \mu Z^2 e^4 \quad (22)$$

zwischen W und ν .

Die quantenphysikalische *Erfahrung* lehrt nun (vgl. Kapitel I, § 3, 2), daß für einen Energiewert

$$W_n = -\frac{RZ^2 h}{n^2} \quad (23)$$

bei großem Werte n die kleinste Absorptionsfrequenz durch

$$\nu = RZ^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \approx \frac{2RZ^2}{n^3} \quad (24)$$

gegeben ist. Da nun zur Ermöglichung des asymptotischen Anschlusses an die klassische Theorie bei sehr großen Werten von n (makroskopischen Bahnradien) die Beziehung (22) durch die Größen W , ν aus (23), (24) erfüllt werden muß, so ergibt sich die berühmte BOHRsche Formel der RYDBERG-Konstanten (vgl. Kapitel I, § 3, 2):

$$R = \frac{2\pi^2 \mu e^4}{h^3}. \quad (25)$$

Es ergibt sich noch eine Korrektur, wenn wir die *Kernmasse* M als *endlich* annehmen: die klassische Bahnrechnung ergibt dann (da nicht mehr der Kern, sondern der *Schwerpunkt* von Kern + Elektron in *Ruhe* bleibt) in der Beziehung (22) an Stelle der Elektronenmasse μ die Größe

$$\bar{\mu} = \frac{\mu M}{\mu + M}, \quad (26)$$

so daß in (23) entsprechend $R\bar{\mu}$ statt $R\mu$ zu setzen ist; oder:

$$W_n = -\frac{2\pi^2 \mu e^4}{h^2} \cdot \frac{Z^2}{1 + \frac{\mu}{M}} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad (27)$$

in Übereinstimmung mit der Erfahrung (vgl. Kapitel I, § 3, 2).

Diese von BOHR herrührende wunderbare Herleitung der RYDBERG-Konstante hat gegenüber seiner viel bekannteren Ableitung der vollständigen BALMER-Formel (die wir gleich anschließend vorführen werden) den großen methodischen Vorzug, daß sie in keiner Weise zu einer falschen Einschätzung der Bedeutung und Tragweite der angewandten Überlegungen und Schlüsse verführen kann: es ist deutlich ersichtlich, daß die theoretische Überlegung sich auf den Fall *großer* Quantenzahlen n beschränkt, für diesen aber *unbedingte Zuverlässigkeit* beanspruchen kann. Die Verwertung der so gefundenen Resultate auch für *kleine* n ergibt sich aus der *empirischen* Kenntnis der BALMER-Formel.

Erinnern wir uns an das in (13), § I, gewonnene [und durch (15'') bestätigte] Ergebnis, so können wir auch dadurch zu einer Bestimmung der RYDBERG-Konstanten gelangen, daß wir direkt die *Energie* als Funktion des *Drehimpulses* berechnen: Mit $p_\varphi = \bar{\mu} v r$ und dem *asymptotischen* Wert $p_\varphi = nh/2\pi$ für p_φ im n -ten Zustand bekommen wir aus (21):

$$W = -\frac{\bar{\mu} e^4 Z^2}{2 p_\varphi^2} = -\frac{2\pi^2 \bar{\mu} e^4 Z^2}{n^2 h^2}. \quad (28)$$

Die zweifelsfreie Zuverlässigkeit der Formel (28) für *große* n liefert uns wieder für R die *exakte* Formel (27). Daß *darüber hinaus* unsere

soeben durchgeführte Rechnung in (28) sogar auch für *kleine* Werte n die *exakte* BALMER-Formel liefert, muß jedoch als ein *Zufall* angesehen werden: Auch dann, wenn die exakten BALMER-Terme etwa proportional $1/(n^2 - 1/4)$ wären, würde eine für den augenblicklichen Stand unserer theoretischen Betrachtungen durchaus befriedigende Korrespondenz zur klassischen Formel (28) gegeben sein. Eine wirkliche, vollständige Begründung der *exakten* BALMER-Formel kann erst durch die fertige Quanten- und Wellenmechanik erreicht werden (vgl. Kapitel 3).

6. **Gitterbewegung und Interferenz.** Die in § 1 auf Grund der DE BROGLIESchen Wellenzuordnung durchgeführte *Quantelung der Translationsbewegung* kann auch unabhängig von den DE BROGLIESchen Wellen mit den jetzt benutzten Korrespondenzüberlegungen durchgeführt werden. Es genüge, den einfachsten Fall zu betrachten, nämlich die Translation eines *eindimensionalen periodischen Gitters*, mit der Gitterkonstanten l . Bei einer Translationsgeschwindigkeit $v = p/M$ ergibt sich klassisch als *Grundfrequenz* ν' dieser periodischen Bewegung (periodisch im Sinne der Betrachtungen von § 1):

$$\nu' = \frac{|p|}{lM}. \quad (29)$$

Quantentheoretisch seien p_n und p_m die translatorischen Impulswerte zweier Quantenzustände, so daß die durch

$$h\nu = \frac{p_n^2 - p_m^2}{2M} \quad (30)$$

gegebene Quantenfrequenz ν der klassischen Oberfrequenz $(n-m)\nu'$ *korrespondiert*. Als korrespondenzmäßiges Analogon zur klassischen Beziehung (29) nehmen wir an:

$$\nu = (n-m) \cdot \frac{|p_n + p_m|}{2lM}; \quad (31)$$

die uns bekannte *Zweideutigkeit* in der Zuordnung von klassischen und Quantenfrequenzen zeigt sich darin, daß ν' durch einen *einzigsten* Impulswert $p = Mv$, dagegen ν durch *zwei* Impulswerte p_n, p_m bestimmt ist. Die Einfachheit des hier behandelten Problems läßt aber keinen Zweifel, daß wir mit (31) die *exakt richtige* quantentheoretische Verallgemeinerung zu (29) gefunden haben.

Aus (30), (31) folgt

$$(p_n - p_m)l = (n-m)h, \quad (32)$$

was in der Tat mit dem Ergebnis (10), § 1 gleichbedeutend ist.

Noch schneller ergibt sich (32), wenn wir an die fundamentale Korrespondenz (15), die „*Quantenbedingung*“, zurückdenken. Die *Phasenebene* p, q geht für den jetzigen Fall in einen *Parallelstreifen* der Breite l über, und die zu einem klassischen Impulswert gehörige *Phasenfläche* I ist gemäß ihrer Definition (12) gleich

$$I = \int_0^l p dq = pl. \quad (33)$$

Da nun I korrespondiert mit nh , so muß quantenphysikalisch der Impuls p nur diskrete Werte annehmen, bezüglich deren wir in Anbetracht der Einfachheit des Problems überzeugt sein dürfen, daß sie *exakt* durch $p_n = nh/l$ (mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) gegeben sind.

Diese beiden Herleitungen von (32) lassen sich natürlich auch sofort auf den Fall des *dreidimensionalen* periodischen Gitters anwenden, und ergeben dann die Bedingungen (12), § 1.

Man kann aber aus dieser Translationsquantelung des periodischen Gitters, die wir somit *ohne* Heranziehung der DE BROGLIESchen Wellen aus dem Korrespondenzprinzip abgeleitet haben, in sehr anschaulicher Weise wieder zum Nachweis der einem korpuskularen Teilchen zugeordneten *Welle* kommen.

Vollführt ein korpuskulares *Lichtquant* einen *Stoß* gegen das ein-dimensionale Gitter (*Strichgitter*), so kann der translatorische Impuls p des Gitters, d. h. die *Komponente* des Gitterimpulses in der Richtung senkrecht zu den Gitterstrichen in der Gitterebene, sich nur um

$$\Delta p = \frac{nh}{l} \quad (34)$$

ändern. Uns interessiert der Fall, daß die Gittermasse M praktisch unendlich groß und die Geschwindigkeit $v = p/M$ praktisch Null ist. Dann bleibt die *Energie* des Lichtquants ungeändert; aber seine in die Gitterebene fallende, zu den Gitterstrichen senkrechte Impulskomponente muß die zum Δp des Gitters entgegengesetzte Änderung erleiden. Da außerdem noch die Impulskomponente parallel zu den Gitterstrichen ungeändert bleiben muß, so gibt es eine *diskrete* (unendliche) Reihe von Richtungen, in welchen das „elastisch reflektierte“ Lichtquant wieder fortfliegen kann. Das Lichtquant bewege sich in einer Ebene senkrecht zu den Gitterstrichen, und sein Impuls \mathcal{G} bzw. \mathcal{G}' vor und nach der Reflexion bilde die Winkel α bzw. α' mit der Gitterebene. Da der *Impulsbetrag* erhalten bleibt: $|\mathcal{G}| = |\mathcal{G}'|$, so folgt aus (34), daß

$$\cos \alpha - \cos \alpha' = \frac{\Delta p}{|\mathcal{G}|} = \frac{nh}{l|\mathcal{G}|}; \quad (35)$$

d. h. die möglichen Winkel α sind gerade diejenigen, *welche sich wellentheoretisch für eine Welle der Wellenlänge*

$$\lambda = \frac{h}{|\mathcal{G}|} \quad (36)$$

ergeben würde. Analoges zeigt sich auch beim *dreidimensionalen* Gitter.

Dieser ganze Gedankengang ist von DUANE ausgeführt, der damit die Interferenzeigenschaften des Lichtes, wie sie im Wellenbegriff zur Darstellung kommen, vom Standpunkte der Korpuskulartheorie des Lichtes *als notwendige Folge der korrespondenzmäßigen Quantelungsregeln* erwies. Offenbar ist aber diese Schlußweise für Zusammenstöße beliebiger *materieller Teilchen* mit dem Gitter ebenso zwingend, wie für Stöße von Lichtquanten: Auch materielle Teilchen können vom Gitter nur in diskret verteilten Richtungen reflektiert werden, die durch (35)

gegeben sind, so daß sich auch für materielle Teilchen gemäß (36) *zugeordnete Wellen* ergeben: es sind die DE BROGLIESchen *Wellen*.

Wir dürfen also sagen, daß die DE BROGLIESchen *Wellen* eine *notwendige logische Folge des BOHRschen Korrespondenzprinzipes* sind. Man sieht auch sehr deutlich aus dieser Betrachtung, wie durch die Quantentheorie die charakteristischen *Unterschiede* des klassischen Partikelbildes und des klassischen Wellenbildes *aufgehoben* werden zugunsten eines neuartigen einheitlichen Begriffes.

7. **Statistische Gewichte.** Die empirisch gesicherte Formel der *kanonischen Verteilung* (vgl. Kapitel I, § 3, 5), nach welcher unter einer großen Zahl gleichartiger, unabhängiger Quantensysteme bei der Temperatur T eine mit

$$g_n e^{-\frac{W_n}{kT}} \quad (37)$$

proportionale Anzahl sich im n -ten Zustand mit dem *statistischen Gewicht* g_n befindet, steht in engster korrespondenzmäßiger Analogie zur klassischen Theorie. Die betrachteten Systeme mögen eindimensionale Oszillatoren sein; dann lehrt die klassische statistische Mechanik, daß eine mit

$$\Delta I \cdot e^{-\frac{W(I)}{kT}} \quad (38)$$

proportionale Anzahl eine Energie besitzt, die in das enge Intervall W , $W + \Delta W$ der Breite

$$\Delta W = \frac{dW(I)}{dI} \Delta I \quad (39)$$

fällt.

Der Vergleich von (38), (39) mit (37) lehrt uns, daß für den eindimensionalen Oszillator *alle statistischen Gewichte g_n gleich 1 sind*. [Für den Fall des *harmonischen* Oszillators hatten wir dies schon oben (§ 2, 2) erwähnt.] Denn je zwei *benachbarte* Quantenzustände W_n , W_{n+1} korrespondieren zwei Werten der Phasenfläche I , die sich um h unterscheiden: das zwischen den beiden Kurven $H(p, q) = W(nh)$ und $H(p, q) = W(nh + h)$ gelegene ringförmige Gebiet $\Delta I = h$ der klassischen Phasenfläche korrespondiert also, nach Division mit h , dem statistischen Gewicht g_n ; d. h. es besteht die *Korrespondenz*

$$g_n \rightarrow \frac{\Delta I}{h} = 1. \quad (40)$$

Hieraus können wir unsere Behauptung

$$g_n = 1 \quad (41)$$

sofort erschließen, wenn wir uns auf den (früher als empirische Tatsache eingeführten) Zusammenhang $g_n = G_n$ der Gewichte g_n mit den *Vielfachheiten* G_n berufen: Eine Größe g_n , die *ganzzahlig* ist, und mit $\Delta I/h = 1$ *korrespondiert*, muß *exakt* gleich 1 sein.

Die Übereinstimmung $g_n = G_n$ ist aber ihrerseits eine theoretische Notwendigkeit. Man kann nämlich aus dem Gesetz der kanonischen Verteilung leicht erschließen, daß die g_n jedenfalls mit thermodynamischer

Notwendigkeit *adiabatisch invariant* sein müssen; das Gewicht eines *mehrfachen* Termes muß also gleich der *Summe* der Gewichte der einfachen Terme sein, in welche er durch eine äußere Störung aufgespalten werden kann, und dies würde auf Widersprüche führen, wenn nicht alle *einfachen* Terme *übereinstimmendes* Gewicht hätten.

Entsprechend der engen Analogie der Formeln (37) und (38) kann auch die *theoretische Begründung* von (37) aus allgemeinen quantentheoretischen Gesetzen in genauer Korrespondenz zur klassischen Begründung der klassischen Formel (38) durchgeführt werden¹. Wir begnügen uns mit folgender Hervorhebung.

Im Sinne des BOLTZMANNschen *Prinzips* definieren wir die *Entropie* S einer Gesamtheit von N gleichartigen, unabhängigen Quantensystemen durch den Logarithmus der „*thermodynamischen Wahrscheinlichkeit*“ W_B , d. h. der *Anzahl der Realisierungsmöglichkeiten* der betreffenden Verteilung. Wir nehmen an, daß wieder alle $g_n = 1$ sind. Eine durch bestimmte Werte der N_n (wobei $N_n =$ Anzahl der im n -ten Zustand befindlichen Systeme ist) beschriebene Verteilung kann auf

$$W_B = \frac{N!}{N_1! N_2! N_3! \dots} \quad (42)$$

verschiedene Weisen realisiert werden; mit der STIRLINGSchen Formel $\log N! = N \log N - N$ wird dann gemäß dem BOLTZMANNschen *Prinzip*

$$S = k \log W_B = k \left\{ N \log N - \sum_n N_n \log N_n \right\}$$

oder

$$S = -kN \sum_n \frac{N_n}{N} \log \frac{N_n}{N}; \quad \sum_n \frac{N_n}{N} = 1. \quad (43)$$

Bei gegebener Gesamtenergie

$$E = N \sum_n W_n \frac{N_n}{N} \quad (44)$$

erreicht S dann seinen größten möglichen Wert, wenn die N_n/N die durch (37) für $g_n = 1$ gegebenen Werte haben².

Anwendung von (37) auf die gequantelte Translationsbewegung von Massenpunkten in einem *großen* rechteckigen Kasten mit ideal spiegelnden

¹ Vgl. dazu die systematische Darstellung in P. JORDAN: Statistische Mechanik auf quantentheoretischer Grundlage. Braunschweig 1933.

² Denn $S \rightarrow$ Maximum fordert bei Berücksichtigung der beiden Nebenbedingungen $E = \text{const}$ und $\sum N_n/N = 1$:

$$\delta(S - \beta E + \lambda \sum N_n) = 0, \quad (a)$$

oder

$$k \ln N_n + \beta W_n + C = 0. \quad (b)$$

Nun muß $\beta = T^{-1}$ sein, weil bei einer Wärmezufuhr ohne Arbeitsleistung zwischen den Änderungen ΔS , ΔE die Beziehung $\Delta S = \Delta E/T$ besteht, und nach (a) auch $\Delta S - \beta \Delta E = 0$ sein muß. Danach gibt (b) in der Tat (1) mit $g_n = 1$.

Wänden liefert uns, wie es sein muß, genau die MAXWELLSche Geschwindigkeitsverteilung bzw. ihre Verallgemeinerung für den relativistischen Fall. Ist

$$W = c\sqrt{\mu^2 c^2 + p^2} - \mu c^2 \approx \frac{p^2}{2\mu} \quad (45)$$

die translatorische kinetische Energie eines Gasmoleküls, so lautet die klassische Behauptung so, daß ein mit

$$dp_x dp_y dp_z \cdot e^{-\frac{W}{kT}} \approx dp_x dp_y dp_z \cdot e^{-\frac{p^2}{2\mu kT}} \quad (46)$$

proportionaler Anteil der vorhandenen Gasmoleküle bei der Temperatur T translatorische Impulskomponenten besitzt, die in die Intervalle $p_x, p_x + dp_x; p_y, p_y + dp_y; p_z, p_z + dp_z$ fallen. Dasselbe ergibt sich aber offenbar aus (1) unter Berücksichtigung der in § 1 hergeleiteten Quantelung, die für die Impulskomponenten die möglichen Werte

$$p_x = \frac{nh}{2l}; \quad p_y = \frac{n'h}{2l'}; \quad p_z = \frac{n''h}{2l''} \quad (47)$$

liefert: Mit der wiederum korrespondenzmäßig zu begründenden Feststellung

$$g_{nn'n''} = 1 \quad (48)$$

wird die (für große l, l', l'') in $dp_x dp_y dp_z$ fallende Anzahl von Quantenzuständen in der Tat *proportional* mit $dp_x dp_y dp_z$.

Wollten wir jedoch (10) auch auf das *Lichtquantengas* im Strahlungshohlraum anwenden, so würde sich statt des PLANCKSchen Gesetzes das WIENSche Gesetz (vgl. Kapitel 1) ergeben: dies führt auf Fragen, die wir späterer Untersuchung (Kapitel 4) überlassen müssen.

§ 3. Übergangsamplituden.

1. **Der harmonische Oszillator.** Ein klassischer Dipol-Oszillator, der eine eindimensionale harmonische Bewegung ausführt:

$$q = a \cos 2\pi(\nu t + \alpha), \quad \mu \ddot{q} = -\kappa^2 q; \quad \kappa = 2\pi\nu\sqrt{\mu}, \quad (1)$$

emittiert durch die von ihm ausgehende Kugelwelle pro Zeiteinheit die Energie:

$$w_e = \frac{2e^2}{3c^3} \overline{\dot{q}^2} = \frac{16\pi^4 \nu^4}{3c^3} e^2 a^2 = \frac{8\pi^3 \nu^2}{3} \cdot \frac{e^2 \varepsilon}{\mu c^3}. \quad (2)$$

Hier ist $\varepsilon = 2\mu\pi^2\nu^2 a^2$ sein *Energieinhalt*, und e die *Ladung* des schwingenden Punktes. Bis auf die Zahlfaktoren ergibt sich (2) aus *Dimensionsgründen*, wenn man nur bedenkt, daß die Proportionalität mit a^2 notwendig ist, weil die elektrischen und magnetischen *Feldstärken* in der Kugelwelle mit der Schwingungsamplitude a proportional sind.

Der Oszillator werde nun vom Zeitpunkt t_0 an der Einwirkung eines Strahlungsfeldes ausgesetzt, so daß also — seine Schwingungsrichtung sei etwa parallel zur x -Achse — eine zeitlich variable Feldstärke $\mathfrak{E}_x(t)$ auf ihn einwirkt:

$$\mu \ddot{q} = -\kappa^2 q + e\mathfrak{E}_x(t). \quad (3)$$

Die äußere Kraft veranlaßt den Oszillator zu einem resonanzmäßigen Mitschwingen, welches sich der ungestörten Bewegung $q(t) = q_0(t) = a \cos 2\pi(\nu t + \alpha)$ überlagert: Man bestätigt durch Differentiation, daß (3) gelöst wird durch

$$q(t) = q_0(t) + \frac{e}{2\pi\nu \cdot \mu} \int_{t_0}^t \sin 2\pi\nu(t-t') \mathfrak{E}_x(t') dt'. \quad (4)$$

Folglich besteht durch die von t_0 bis $t=t_1$ vom Strahlungsfeld am Oszillator geleistete Arbeit aus zwei Summanden, von denen der erste linear in \mathfrak{E} , der zweite quadratisch in \mathfrak{E} ist. Der erste schwankt bei Änderung der Phasenkonstanten α über positive und negative Werte; der zweite dagegen ist von α unabhängig und stets positiv: Mit den Bezeichnungen

$$A_\nu = \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \mathfrak{E}_x(t) \cos 2\pi\nu t; \quad B_\nu = \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \mathfrak{E}_x(t) \sin 2\pi\nu t \quad (5)$$

erhalten wir für die geleistete Arbeit den Ausdruck¹:

$$e \int_{t_0}^{t_1} \dot{q} \mathfrak{E}_x dt = -ea \cdot 2\pi\nu \cdot \{\sin 2\pi\alpha \cdot A_\nu + \cos 2\pi\alpha \cdot B_\nu\} + \frac{e^2}{2\mu} \{A_\nu^2 + B_\nu^2\}. \quad (6)$$

Durch eine Mittelwertbildung über die Phasenkonstante α wird der erste Summand zum Verschwinden gebracht; also ergibt sich im statistischen Mittel über viele Oszillatoren eine ständige, positive Absorption der Oszillatoren aus dem Strahlungsfelde. Im Falle eines isotropen, stationären Strahlungsfeldes wird die von jedem Oszillator im Phasenmittel in der Zeiteinheit absorbierte Energie nach (6) gleich

$$\bar{w}_a = \frac{\pi e^2}{3\mu} Q_\nu, \quad (7)$$

da in diesem Falle die Beziehung²

$$A_\nu^2 + B_\nu^2 = \frac{2\pi}{3} Q_\nu \cdot (t_1 - t_0) \quad (8)$$

besteht.

¹ Es wird nämlich:

$$\begin{aligned} & e \int_{t_0}^{t_1} \dot{q} \mathfrak{E}_x dt \\ &= e \int_{t_0}^{t_1} \dot{q}_0 \mathfrak{E}_x dt + \frac{e^2}{\mu} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{t_0}^t dt' \mathfrak{E}_x(t) \cos 2\pi\nu(t-t') \mathfrak{E}_x(t') \\ &= e \int_{t_0}^{t_1} \dot{q}_0 \mathfrak{E}_x dt + \frac{e^2}{2\mu} \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} dt dt' \mathfrak{E}_x(t) \mathfrak{E}_x(t') \cos 2\pi\nu(t-t'); \end{aligned}$$

das Additionstheorem des cos liefert dann (6).

² Nach dem FOURIERSchen Integralsatz folgt aus (5) für $t_0 < t < t_1$:

$$\mathfrak{E}_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_\nu e^{-2\pi i \nu t} d\nu$$

Die *mittlere Absorption* (7) kommt also zustande, indem sich *positive und negative Absorptionen*, die einzeln von wesentlich größerem Betrag sein können, bis auf einen kleinen Unterschied ausgleichen: Das *mittlere Schwankungsquadrat* $\overline{\Delta^2}$ der in je einer Zeit Δt absorbierten Energie ist ja nach (6) und (8) gegeben durch

$$\frac{\overline{\Delta^2}}{\Delta t} = \frac{4 \pi^2 \nu^2}{3} \cdot e^2 a^2 \cdot \varrho_\nu = \frac{2 \pi}{3} \frac{e^2 \varepsilon}{\mu} \varrho_\nu, \quad (9)$$

also der *Oszillatorenergie* ε *proportional*.

Es mögen sich in einem *schwarzen Strahlungsfelde* *zahlreiche* der beschriebenen Oszillatoren finden, mit der gleichen Frequenz ν . Ein *stationäres thermisches Gleichgewicht* erfordert, daß die *Gesamtemission* dieser Oszillatoren übereinstimmt mit ihrer *gesamten mittleren Absorption*. Die Gesamtemission dieser Oszillatoren ist aber nach (2) proportional der *Summe ihrer Energien*, *unabhängig von den Einzelwerten dieser Energien*. Wir bekommen, wenn $\overline{\varepsilon_\nu}$ die *mittlere Energie* der Oszillatoren ist, nach (2) und (7) als eine *notwendige Bedingung* des thermischen Gleichgewichts die Beziehung:

$$\frac{8 \pi \nu^2}{c^3} \cdot \overline{\varepsilon_\nu} = \varrho_\nu. \quad (10)$$

Das ist natürlich nicht überraschend, denn es bedeutet, daß bei gleicher Temperatur die *mittlere Energie eines elektromagnetischen Eigenschwingungsozillators übereinstimmen* muß mit derjenigen eines materiellen Oszillators derselben Frequenz [vgl. Kapitel I (16), § I, 2].

Die der in Kapitel 2, § 2, 2 besprochenen *Quadrupolemission* des harmonischen Oszillators entsprechende Absorption findet man, wenn man bedenkt, daß bei endlichem Verhältnis der Schwingungsamplitude zur Wellenlänge $\lambda = c/\nu$ die auf den Oszillator wirkende äußere Kraft $e\mathfrak{E}_x$ nicht mehr durch den Wert der Feldstärke \mathfrak{E}_x am festliegenden Schwingungsmittelpunkt des Oszillators, sondern durch die am jeweiligen Orte der schwingenden Ladung bestehende Feldstärke gegeben ist. Die Berücksichtigung dieses Umstandes ergibt, wie man leicht überlegt, einen *stets positiven und mit ε proportionalen Zusatz* zur mittleren Absorption $\overline{w_\nu}$.

Aus Korrespondenzgründen muß die Formel (2) in analoger Form auch quantentheoretisch gelten, d. h. ein Oszillator im n -ten stationären Zustand, wo seine Energie um $nh\nu$ über der des Grundzustandes liegt, wird (bei Abwesenheit einer auf ihn einwirkenden äußeren Feldstärke)

mit $C_\nu = A_\nu + iB_\nu$, also

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |C_\nu|^2 d\nu &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \cdot C_\nu \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \mathfrak{E}_x(t) e^{-2\pi i \nu t} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \mathfrak{E}_x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \cdot C_\nu e^{-2\pi i \nu t} = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{E}_x^2 dt. \end{aligned}$$

Da die *MAXWELLSche Energiedichte* gleich $u = (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)/8\pi$, also im isotropen Fall das *Zeitmittel* von \mathfrak{E}_x^2 gleich $\frac{4}{3} \pi u$ ist, so ist (8) bewiesen.

eine *spontane Übergangswahrscheinlichkeit* für den Sprung $n \rightarrow n-1$ besitzen, die *jedenfalls annähernd* durch

$$A_{n, n-1} = \frac{8\pi^2 \nu^2}{3} \cdot \frac{e^2}{\mu c^3} \cdot n \quad (\text{II})$$

gegeben ist. Es fragt sich nun, ob (II) vielleicht *exakt* richtig ist, oder ob im exakten quantentheoretischen Gesetz statt dessen $n+1$, $n+\frac{1}{2}$, $\sqrt{n(n+1)}$ oder sonst etwas zu schreiben wäre.

Die Antwort ergibt sich aus der schon besprochenen, in (10) zum Ausdruck kommenden Tatsache, daß bei Vorhandensein beliebig vieler klassischer harmonischer Oszillatoren gleicher Frequenz die *Gesamtemission* unmittelbar durch die *Summe* ihrer Energien gegeben ist. Diese klassische Gesetzmäßigkeit ist nicht nur *von großer Einfachheit*, sondern auch sehr bedeutungsvoll und charakteristisch für das Oszillatorenproblem. Die geradezu fundamentale Bedeutung dieser Gesetzmäßigkeit wird deutlich, wenn wir uns die *Reziprozität* klar machen, die in unserem Problem besteht zwischen den materiellen Oszillatoren einerseits und den Eigenschwingungsozillatoren des Strahlungsfeldes andererseits. Die Emissionen und Absorptionen der materiellen Oszillatoren sind *umgekehrt* Absorptions- und Emissionsakte der Feldoszillatoren, und der eben hervorgehobenen Proportionalität der Gesamtemission der materiellen Oszillatoren entspricht in dieser Reziprozität die andere Tatsache, daß die *Absorption* der materiellen Oszillatoren (insbesondere dann, wenn sie alle im Grundzustande sind) *stets proportional mit ϱ_ν* geschieht, *unabhängig davon*, wie die Strahlungsenergie $V \varrho_\nu d\nu$ über die Eigenschwingungen des Frequenzintervalls ν , $\nu + d\nu$ verteilt ist.

Wir würden also zu grotesken Folgerungen kommen, wenn wir nicht auch für die Quantentheorie die Forderung aufrecht erhielten, daß die spontane Gesamtemission beliebig vieler Oszillatoren *exakt* proportional mit ihrer Energiesumme (*ohne* Mitzählung von Nullpunktsenergie) sein soll. Diese Forderung ergibt aber, daß (II) nicht nur asymptotisch, sondern *exakt* gelten muß.

Dies ist ein neues lehrreiches Beispiel für die Möglichkeit, durch sorgsame Betrachtung und Verfolgung korrespondenzmäßiger Notwendigkeiten *exakte* quantentheoretische Gesetze zu erschließen.

Im Strahlungsfelde ϱ_ν kann der Oszillator auch Sprünge $n \rightarrow n+1$ unter *Absorption* eines $h\nu$ ausführen. In korrespondenzmäßiger Analogie zur oben besprochenen klassischen Theorie werden wir jedoch *eine positive und eine negative Absorption* annehmen müssen; d. h. auch die Sprünge $n \rightarrow n-1$ geschehen im Strahlungsfelde *häufiger*. Als durch das Strahlungsfeld ϱ_ν „induzierte“ *zusätzliche Übergangswahrscheinlichkeit* setzen wir an:

$$\left. \begin{aligned} B_{n, n-1} \varrho_\nu &= \frac{\pi e^2}{3 \mu h \nu} \cdot n \cdot \varrho_\nu \text{ für } n \rightarrow n-1, \\ B_{n, n+1} \varrho_\nu &= \frac{\pi e^2}{3 \mu h \nu} \cdot (n+1) \cdot \varrho_\nu \text{ für } n \rightarrow n+1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{12})$$

Da das Strahlungsfeld beim Sprung $n \rightarrow n-1$ ein $h\nu$ gewinnt, und bei $n \rightarrow n+1$ ein $h\nu$ verliert, so wird es *im Mittel* auf absorbierende Oszillatoren im n -ten Zustand in der Zeiteinheit nach (12) die Energie $\pi e^2 \rho / 3\mu$ übertragen, was mit der klassischen Formel (7) übereinstimmt. Die vollständige korrespondenzmäßige Rechtfertigung von (12) ergibt sich nach Aufstellung der exakten Formel (11) als Spezialfall aus den nachfolgenden allgemeinen Erörterungen.

Aufmerksam sei noch auf folgendes gemacht. Die Formel (11) braucht *nicht* mit dem Zusatz: „gültig für $n > 0$ “ versehen zu werden, weil sie, für $n=0$ angewandt, zu der *richtigen* Aussage führt, daß im *Grundzustand* eine *Emissionswahrscheinlichkeit Null* besteht. Denken wir jetzt an die *Quadrupolübergänge* $n \rightarrow n \pm 2$. Klassisch ist die Intensität der Quadrupolemission *proportional mit ε^2* ; vertrauen wir darauf, daß das dazu korrespondierende Quantengesetz eine ähnlich einfache Gestalt wie (11) besitzt, und in analoger eleganter Weise auch für die beiden Zustände $n=0$ und $n=1$ noch eine richtige Aussage macht, so kommen wir auf eine *Proportionalität mit $n(n-1)$* ; was in der Tat das Richtige ist. Man kann durch solche Erwägungen mancherlei spezielle Quantengesetze in exakter Form *erraten* oder *sich einprägen*.

Physikalisch tiefergehend ist jedoch folgende Erwägung: Die erwähnte Proportionalität der klassischen *mittleren Quadrupolabsorption mit ε* ist zwar praktisch weniger wichtig, aber doch von ähnlichem Charakter, wie die oben zur Herleitung des exakten Gesetzes (11) benutzte Proportionalität der Dipolemission mit ε . Wir fordern also, daß auch in der Quantentheorie die *mittlere Quadrupolabsorption exakt* proportional mit n sein soll. Ist nun die der *negativen* Absorption vom Zustand n aus entsprechende Übergangswahrscheinlichkeit proportional mit einer Funktion $f(n)$ von n , so muß die *positive* Absorption vom n -ten Zustand aus entsprechend mit $f(n+1)$ proportional sein — aus Gründen, die uns im nächsten Abschnitt ganz klar werden werden. Dieses $f(n)$, mit dem dann auch die *spontane* Übergangswahrscheinlichkeit proportional ist, soll also der *Differenzgleichung*

$$f(n+1) - f(n) = n$$

genügen. Diese hat aber die Lösung

$$f(n) = \frac{1}{2} n(n-1) = \binom{n}{2}.$$

2. Die Wahrscheinlichkeitsgesetze der Lichtreaktionen. Bei einem *anharmonischen* klassischen Oszillator, also einer eindimensionalen Bewegung der Gestalt

$$\left. \begin{aligned} q(t) = & \bar{q} + a \cos 2\pi(vt + \alpha) + b \cos 2\pi(2vt + \beta) \\ & + d \cos 2\pi(3vt + \delta) + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

gilt die Formel (2) für jede einzelne harmonische Komponente der FOURIER-Reihe (13). Wir haben also für die monochromatischen

Anteile der Emission (Dipolstrahlung) Energieabgaben in der Zeiteinheit, die gleich

$$\frac{16 \pi^4 \nu^4}{3 c^3} e^2 a^2; \quad \frac{16 \pi^4 (2 \nu)^4}{3 c^3} e^2 b^2; \quad \frac{16 \pi^4 (3 \nu)^4}{3 c^3} e^2 d^2; \dots \quad (14)$$

sind. Ferner ergeben sich für die *Absorption* dieser Frequenzen *mittlere Schwankungsquadrate pro Zeiteinheit*, die einzeln genau (9) entsprechen, also Werte

$$\frac{4 \pi^3 \nu^2}{3} \cdot e^2 a^2 \cdot \varrho(\nu); \quad \frac{4 \pi^3 (2 \nu)^2}{3} \cdot e^2 b^2 \cdot \varrho(2\nu); \quad \frac{4 \pi^3 (3 \nu)^2}{3} \cdot e^2 d^2 \cdot \varrho(3\nu); \dots \quad (15)$$

besitzen.

Die Begründung liegt auf der Hand: So, wie die Oszillatorbewegung (13) eine Superposition harmonischer Partialerschwingungen mit verschiedenen Frequenzen $\nu, 2\nu, 3\nu, \dots$ ist, so ergeben sich auch die Feldstärken in der insgesamt emittierten Kugelwelle durch Superposition der entsprechenden monochromatischen Kugelwellen; es ist also aus (2) ohne weiteres auf (14) zu schließen. Ferner ergibt sich (15) für $\overline{\Delta^2}/\Delta t$ genau wie im harmonischen Fall, indem wir im Ausdruck

$$e \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{E}_x dt$$

der absorbierten Energie (geleisteten Arbeit) für $q(t)$ die *ungestörte* Bewegung (13) einsetzen. Die *Phasenmittelung* ist so zu vollziehen, daß $\alpha = \alpha_0 + \alpha', \beta = \beta_0 + \alpha', \delta = \delta_0 + \alpha', \dots$ gesetzt und dann *über α' gemittelt* wird: Die *Phasendifferenzen* $\alpha - \beta, \beta - \delta, \dots$ sind ja durch die Bewegungsgleichung des Oszillators *festgelegt*.

Endlich müssen wir zwecks Bestimmung der *mittleren Absorption* die unter Einwirkung von $\mathfrak{E}_x(t)$ zustande kommende, der ungestörten Bewegung (13) hinzuzufügende *Störungsbewegung* berechnen, analog zu der für den harmonischen Oszillator geltenden Formel (4). Dabei müssen wir uns jetzt wegen der *Nichtlinearität* der Bewegungsgleichung des anharmonischen Oszillators auf eine *Approximation* beschränken: Wir bestimmen den *in $\mathfrak{E}_x(t)$ linearen Anteil* $q_1(t)$ der Störungsbewegung, der aber *nicht* mehr, wie es in (4) der Fall war, die *vollständige* exakte Störungsbewegung darstellt. Der Anteil

$$e \int_{t_0}^{t_1} q_1(t) \mathfrak{E}_x(t) dt$$

der absorbierten Energie ist dann *quadratisch in \mathfrak{E}_x , und unabhängig von der Phasenkonstante α'* ; er liefert eine *positive* mittlere Absorption der Frequenzen $\nu, 2\nu, 3\nu, \dots$. Die für die einzelnen Absorptionsfrequenzen sich ergebenden mittleren Absorptionen pro Zeiteinheit sind gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} \frac{2 \pi^3}{3} \cdot \frac{d}{dI} [\nu \cdot e^2 a^2 \cdot \varrho(\nu)]; & \quad \frac{2 \pi^3}{3} \cdot 2 \frac{d}{dI} [2\nu \cdot e^2 b^2 \cdot \varrho(2\nu)]; \\ \frac{2 \pi^3}{3} \cdot 3 \frac{d}{dI} [3\nu \cdot e^2 d^2 \cdot \varrho(3\nu)]; & \quad \dots, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

was für den Spezialfall des harmonischen Oszillators wieder auf (7) zurückführt.

Für die Auffindung der entsprechenden quantentheoretischen Formeln ist es förderlich, die *über alle Frequenzen summierten* Ausdrücke für w_e , \bar{w}_a und $\overline{\Delta^2/\Delta t}$ aufzuschreiben. Dazu ändern wir die Schreibweise von (13) um in

$$q(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} a_{\tau} \cos 2\pi(\tau\nu \cdot t + \alpha_{\tau}). \quad (17)$$

Es wird dann insgesamt

$$\left. \begin{aligned} w_e &= \frac{16\pi^4}{3c^3} \sum_{\tau=0}^{\infty} (\tau\nu)^4 \cdot e^2 a_{\tau}^2; \\ \overline{\Delta^2/\Delta t} &= \frac{4\pi^2}{3} \sum_{\tau=0}^{\infty} (\tau\nu)^2 \cdot e^2 a_{\tau}^2 \cdot \varrho(\tau\nu); \\ \bar{w}_a &= \frac{2\pi^2}{3} \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau \frac{d}{dI} [\tau\nu \cdot e^2 a_{\tau}^2 \cdot \varrho(\tau\nu)]. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Wir übersetzen diese klassischen Beziehungen nach EINSTEIN folgen-
dermaßen in die Quantentheorie. Ein Atom im n -ten Quantenzustand
soll für den mit *Ausstrahlung* verknüpften Sprung $n \rightarrow m$ eine *Übergangs-*
wahrscheinlichkeit

$$g_m \{A_{n,m} + B_{n,m} \varrho(\nu_{n,m})\} = g_m B_{n,m} \left\{ \frac{8\pi h}{c^3} \nu_{n,m}^3 + \varrho(\nu_{n,m}) \right\} \quad (19)$$

besitzen; für einen mit *Energieaufnahme* verknüpften Sprung $m \rightarrow n$
soll die Übergangswahrscheinlichkeit gleich

$$g_n B_{m,n} \varrho(\nu_{n,m}) = g_n B_{n,m} \varrho(\nu_{n,m}) \quad (20)$$

sein.

Das durch (19), (20) gegebene Verhältnis der spontanen *Übergangs-*
wahrscheinlichkeit $g_m A_{n,m}$ zur Übergangswahrscheinlichkeit mit *positiver*
Absorption $g_n B_{m,n}$:

$$A_{n,m} = \frac{8\pi h}{c^3} \nu_{n,m}^3 B_{m,n} \quad (21)$$

entspricht einer unmittelbar empirisch nachzuweisenden Gesetzmäßigkeit
[vgl. Kapitel I (13), § 3, 3]. *Beide* Aussagen (19) und (20) *zusammen* stellen
das sinngemäße genaue Analogon zu den klassischen Gesetzen (18) dar.

Wir nehmen zum Vergleich von (19), (20) mit (18) die *statistischen*
Gewichte g_n, g_m gleich 1 an, weil beim eindimensionalen Oszillator nach
früherer Feststellung stets $g_n = 1$ ist. Die korrespondenzmäßige Be-
deutung der Faktoren g_n, g_m in (19), (20) für den Fall, daß g_n *nicht*
stets gleich 1 ist, wird später ersichtlich werden.

Die *spontane* Emission einer großen Zahl N von Atomen im Zustand
 n liefert pro Zeiteinheit und pro Atom im Mittel die Energie

$$w_e = \sum_{m < n} A_{n,m} h \nu_{n,m}. \quad (22)$$

Das ist zu vergleichen mit dem klassischen w_e , und zwar so, daß $\nu_{n,m}$ der klassischen Frequenz $\tau\nu = (n-m)\nu$ entspricht; es besteht also die Korrespondenz

$$\frac{A_{n,m}}{\nu_{n,m}^2} \rightarrow \frac{16\pi^4}{3c^3h} \cdot e^2 a_{n-m}^2. \quad (23)$$

Das mittlere Schwankungsquadrat der teils positiven, teils negativen Quantenabsorption ergibt sich aus (19), (20) gleich

$$\left. \begin{aligned} \frac{\overline{\Delta^2}}{\Delta t} &= \sum_{m < n} (\hbar \nu_{n,m})^2 \cdot B_{n,m} \varrho(\nu_{n,m}) \\ &+ \sum_{k > n} (\hbar \nu_{k,n})^2 \cdot B_{n,k} \varrho(\nu_{k,n}); \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

bedenkt man, daß zwei Quantenfrequenzen, nämlich $\nu(n, n-\tau)$ und $\nu(n+\tau, n)$, der klassischen Frequenz $\tau\nu$ entsprechen, so entnimmt man aus (24) und (18) die Korrespondenz

$$\left. \begin{aligned} B_{n,m} &\rightarrow \frac{2\pi^3}{3h^2} \cdot e^2 a_{n-m}^2; & (m < n), \\ B_{n,k} &\rightarrow \frac{2\pi^3}{3h^2} \cdot e^2 a_{k-n}^2; & (k > n). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Das ergibt erstens die mindestens asymptotische Übereinstimmung $B_{n,m} = B_{m,n}$, die in (20) zu einer *exakten* verschärft ist; und zweitens liefert Vergleich mit (23) die Beziehung (21). — Die exakten Formeln (12) für den harmonischen Oszillator sind offenbar im Einklang mit (25).

Endlich bekommen wir für die Gesamtabsorption die quantentheoretische Formel

$$\left. \begin{aligned} \overline{w}_a &= - \sum_{m < n} \hbar \nu_{n,m} \cdot B_{n,m} \varrho(\nu_{n,m}) \\ &+ \sum_{k > n} \hbar \nu_{k,n} \cdot B_{n,k} \varrho(\nu_{k,n}), \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

die im Limes $h \rightarrow 0$ den klassischen Wert \overline{w}_a von (18) liefert, wenn wir die schon festgelegte Korrespondenz (25) beachten: Wir fassen in (26) zwei Glieder mit $m = n - \tau$ und $k = n + \tau$ zusammen; diese korrespondieren zusammengenommen dem τ -ten Summanden von \overline{w}_a in (18):

$$\left. \begin{aligned} \hbar \nu_{n+\tau, n} \cdot B_{n, n+\tau} \varrho(\nu_{n+\tau, n}) \\ - \hbar \nu_{n, n-\tau} \cdot B_{n-\tau, n} \varrho(\nu_{n, n-\tau}) \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{2\pi^3}{3} \tau \frac{d}{dI} [\tau\nu \cdot e^2 a_\tau^2 \cdot \varrho(\tau\nu)]. \quad (27)$$

Wir finden hier wieder, wie schon bei der Korrespondenz der Frequenzen (§ 2, 4), eine *Korrespondenz von Differenzenquotient und Differentialquotient*:

$$\frac{f(nh) - f(nh - \tau h)}{h} \rightarrow \tau \frac{d}{dI} f(I). \quad (28)$$

Die Gültigkeit der quantenphysikalischen Gesetze (19), (20), oder $B_{n,m} = B_{m,n}$ und $A_{n,m} = 8\pi h c^{-3} \nu_{n,m}^2 B_{m,n}$, beschränkt sich aber nicht auf Dipolstrahlung allein; vielmehr gelten sie ebenso für Quadrupolstrahlung oder Strahlung höherer Multipole, was wiederum korrespondenzmäßig zu begründen ist.

3. **Thermisches Gleichgewicht.** Die Verschärfung der korrespondenzmäßig ersichtlichen asymptotischen Übereinstimmung $B_{nm} = B_{mn}$ zu einer *exakten* ist *notwendig*, damit in richtiger Weise ein *thermisches Gleichgewicht* zwischen materiellen Atomen und schwarzer Strahlung zustande kommt. Es seien von den fraglichen Atomen N_n im n -ten und N_m im m -ten Zustand ($W_m < W_n$) vorhanden, so daß bei der Temperatur T das thermische Gleichgewicht ein Verhältnis

$$\frac{N_n}{N_m} = \frac{g_n}{g_m} e^{-\frac{W_n - W_m}{kT}} = \frac{g_n}{g_m} e^{-\frac{h\nu_{nm}}{kT}} \quad (29)$$

fordert. Dann ergibt sich für den Übergang $n \rightarrow m$ die Häufigkeit

$$N_n g_m \{ A_{nm} + B_{nm} \rho_\nu \}, \quad \nu = \nu_{nm}, \quad (30)$$

und für $m \rightarrow n$ die Häufigkeit

$$N_m g_n B_{mn} \rho_\nu. \quad (31)$$

Übereinstimmung von (30) und (31) ergibt bei Berücksichtigung von (19), (20) und (29) für ρ_ν die **PLANCKSche Formel**

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \cdot \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (32)$$

Diese **EINSTEINSche Ableitung der PLANCKSchen Strahlungsformel** gewinnt an Durchsichtigkeit, wenn man statt ρ_ν die Größe

$$n_\nu = \frac{\bar{\epsilon}_\nu}{h\nu} = \rho_\nu \cdot \frac{c^3}{8\pi h \nu^3} \quad (33)$$

benutzt, also die *mittlere Quantenzahl* der Hohlraumoszillatoren mit der Frequenz ν . Dann werden die Übergangswahrscheinlichkeiten hinsichtlich ihrer Abhängigkeit von der Strahlungsdichte proportional mit

$$\left. \begin{array}{l} 1 + n_\nu \text{ für Emission,} \\ n_\nu \text{ für Absorption;} \end{array} \right\} \quad (34)$$

in $1 + n_\nu$ bezieht sich die 1 auf die *spontane* Emission, und n_ν auf die *induzierte*; also die negative Absorption. Diese Formeln (34) lassen die *Symmetrie der positiven und negativen Zeitrichtung* in unserem Problem erkennen, welche in der oben gegebenen klassischen Behandlung verdunkelt war. Die elementaren physikalischen Gesetze zeichnen die positive Zeitrichtung in keiner Weise vor der negativen aus; und in einem abgeschlossenen Kasten, in welchem Strahlung und Atome im thermischen Gleichgewicht enthalten sind, müssen demnach die Wahrscheinlichkeitsgesetze der Elementarprozesse volle Symmetrie hinsichtlich der positiven und negativen Zeitrichtung besitzen. In der Tat besagt nun die zweite Zeile von (34): Die Wahrscheinlichkeit, daß aus einer einzelnen, bestimmten *Eigenschwingung des Feldes* heraus ein Quantum durch ein Atom entnommen wird, ist proportional mit der *Quantenzahl* dieser Eigenschwingung *vor* dem Prozeß; die Hervorhebung „*vor dem Prozeß*“ ist unentbehrlich, da ja *nach* ihm diese Quantenzahl um 1 vermindert ist. Die zeitliche Symmetrie erfordert dann, daß für den „*inversen*“

Prozeß der Emission eines $h\nu$ in einen bestimmten Hohlraumoszillator hinein die Wahrscheinlichkeit proportional seiner Quantenzahl *nach* dem Prozeß ist, also proportional einer Zahl, die *um 1 größer ist* als die Quantenzahl *vor* dem Prozeß; summiert über die zahlreichen in Betracht kommenden Hohlraumoszillatoren gibt das Proportionalität der Emissionswahrscheinlichkeit mit $1 + n_\nu$, übereinstimmend mit (34).

Neben den bislang betrachteten einfachsten Strahlungsprozessen, bei denen das Atom ein einziges Lichtquant emittiert oder absorbiert, sind aus Korrespondenzgründen auch seltenere, verwickeltere Prozesse zu erwarten, derart, daß in einem einzigen Elementarprozeß, bei welchem die Energie des Atoms um ΔW abnehmen möge, irgendeine Anzahl von Quanten $h\nu_1, h\nu_2, h\nu_3, \dots$ emittiert wird, zugleich aber Quanten $h\nu'_1, h\nu'_2, h\nu'_3, \dots$ absorbiert werden; es muß dann also

$$h\nu_1 + h\nu_2 + h\nu_3 + \dots - h\nu'_1 - h\nu'_2 - h\nu'_3 - \dots = \Delta W \quad (35)$$

sein. Die Wahrscheinlichkeit eines solchen Prozesses wird dann proportional mit

$$w = (1 + n_{\nu_1})(1 + n_{\nu_2})(1 + n_{\nu_3}) \dots n'_{\nu'_1} n'_{\nu'_2} n'_{\nu'_3} \dots, \quad (36)$$

die des *inversen* Prozesses, bei welchem Anfangs- und Endzustand *vertauscht* sind, folglich proportional mit

$$w' = n_{\nu_1} n_{\nu_2} n_{\nu_3} \dots (1 + n'_{\nu'_1})(1 + n'_{\nu'_2})(1 + n'_{\nu'_3}) \dots \quad (37)$$

zu setzen sein: auf Grund des PLANCKSchen Gesetzes (32) wird wegen (35) in der Tat, wie es zur Wahrung des thermischen Gleichgewichts sein muß, der Quotient von (36) und (37) gleich

$$\frac{w}{w'} = e^{-\frac{\Delta W}{kT}}. \quad (38)$$

Wegen der Lichtquantenimpulse $h\nu/c$ werden derartige Elementarprozesse nicht nur einen Quantensprung der inneren Energie der Atome, sondern auch eine Änderung ihrer *Translationsenergie* bewirken. Die Berücksichtigung dieses Effektes ist jedoch im Prinzip schon in den vorgeführten Überlegungen enthalten, da wir die Translation von Atomen in einem Kasten bereits zu quanteln gelernt haben, und ihre Änderungen somit als Quantensprünge auffassen können, auf welche die soeben durchgeführten Betrachtungen anwendbar sind.

Trotzdem möge für den Grenzfall eines unendlich großen Gefäßes — bei welchem also die diskrete Quantelung der Translationsbewegung verloren geht [vgl. (3), § I] — wenigstens der einfachste Prozeß: Emission oder Absorption eines einzigen $h\nu$, noch etwas näher betrachtet werden. Der translatorische Impuls des fraglichen Atoms habe *vor* dem Emissionsprozeß Komponenten, die in die Intervalle $\mathcal{G}_x, \mathcal{G}_x + d\mathcal{G}_x; \mathcal{G}_y, \mathcal{G}_y + d\mathcal{G}_y; \mathcal{G}_z, \mathcal{G}_z + d\mathcal{G}_z$ fallen; die Richtung des emittierten Quants falle in einen gewissen räumlichen Winkel $d\Omega$. Die *Häufigkeit* (pro Zeiteinheit) eines solchen Prozesses, der wieder das Atom aus dem n -ten Quantenzustand in den m -ten führen möge, wird dann folgende Größe haben:

$$N_n(\mathcal{G}) d\mathcal{G} \cdot g_m \{A_{nm} + B_{nm} \varrho_\nu\} d\Omega. \quad (39)$$

Dabei ist $N_n(\mathcal{G}) d\mathcal{G} = N_n(\mathcal{G}) \cdot d\mathcal{G}_x d\mathcal{G}_y d\mathcal{G}_z$ die Anzahl vorhandener Atome im n -ten Zustand mit den fraglichen Werten der Impulskomponenten. Bezüglich ρ , ist zu bedenken, daß die in Frage kommende Frequenz ν durch die BOHRsche Frequenzbedingung $h\nu = E - E_1$ verknüpft ist mit den Energiewerten E, E_1 des Atoms vor und nach dem Quantensprung: E und E_1 enthalten dabei außer der inneren Energie auch die kinetische Energie der Translation; infolgedessen wird ν von \mathcal{G} und von der Richtung des Winklelementes $d\Omega$ (relativ zu \mathcal{G}) abhängig sein. Entsprechend sind A_{nm}, B_{nm} als richtungsabhängig und als abhängig von \mathcal{G} zu denken.

Der inverse Prozeß, bei welchem der Endzustand E_1, \mathcal{G}_1 des eben beschriebenen Prozesses gerade umgekehrt Anfangszustand ist, geschieht analog zu (40) mit einer Häufigkeit pro Zeiteinheit, die gegeben ist durch

$$N_m(\mathcal{G}_1) d\mathcal{G}_1 \cdot g_n B_{mn} d\Omega_1, \quad (40)$$

wo also z. B. $d\Omega_1$ ein Raumwinkel ist, innerhalb dessen die Impulsrichtung des absorbierten Quants liegt.

Da nun durch

$$\left. \begin{aligned} N_n(\mathcal{G}) d\mathcal{G} &= \text{const } g_n e^{-\frac{E}{kT}} \cdot d\mathcal{G} \\ N_m(\mathcal{G}_1) d\mathcal{G}_1 &= \text{const } g_m e^{-\frac{E_1}{kT}} \cdot d\mathcal{G}_1 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

die statistische Normalverteilung der Atome — kanonische Verteilung über die Anregungszustände, und MAXWELLSche (bzw. relativistische verallgemeinerte MAXWELLSche) Geschwindigkeitsverteilung — gegeben ist, so braucht man nur noch folgendes zu überlegen: Offenbar ist

$$d\Omega = d\Omega_1; \quad (42)$$

und ferner ist leicht zu zeigen, daß in nichtrelativistischer Annäherung $d\mathcal{G} = d\mathcal{G}_1$ ist, was sich für den Fall hoher Geschwindigkeiten, sofern in E, E_1 die Ruhmasse mitgerechnet wird, zu

$$\frac{d\mathcal{G}}{E} = \frac{d\mathcal{G}_1}{E_1} \quad (43)$$

verallgemeinert. Wegen $A_{nm} = 8\pi h \nu_{nm}^3 / c^3 \cdot B_{nm}$ ergibt sich dann aus der für das Gleichgewicht notwendigen Übereinstimmung von (39) und (40) wieder das PLANCKsche Gesetz: Aus relativistischen Gründen muß nämlich unsere frühere Übereinstimmung $B_{nm} = B_{mn}$ jetzt durch

$$E B_{nm} = E_1 B_{mn} \quad (44)$$

ersetzt werden.

4. Kohärente Streustrahlung. Nach klassischer Theorie müssen die Absorptionsfrequenzen eines schwingenden elektrischen Systems zugleich auch die kritischen Frequenzen für die Dispersionswirkungen dieses Systems sein. Die empirische Tatsache (vgl. Kapitel I, § 3, 3), daß bei den atomaren Systemen diese Identität von Absorptions- (bzw. Emissions-) und Dispersionsfrequenzen durchgehends zu bestätigen ist, gibt eine bedeutungsvolle Bestätigung für die Überzeugung von der korrespondenzmäßigen Ähnlichkeit von klassischer und Quantentheorie. Es

sei zur Unterstreichung ihrer Wichtigkeit bemerkt, daß im Laufe der historischen Entwicklung (auf Grund heute verlassener Gedankengänge) die Ansicht Vertreter gefunden hat, daß in der Quantenphysik Absorptions- und Dispersionsfrequenzen voneinander verschieden seien.

Wir wollen wieder den klassischen anharmonischen Oszillator betrachten, dessen ungestörte Bewegung durch

$$q(t) = q_0(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} a_{\tau} \cos 2\pi(\tau\nu \cdot t + \alpha_{\tau}) \quad (45)$$

dargestellt war, und dessen Emissionen und Absorptionen wir schon untersucht haben. Die äußere Störungskraft $e\mathcal{E}_x(t)$ (die Schwingungsrichtung unseres eindimensionalen Oszillators hatten wir parallel der x -Richtung angenommen) entspreche jetzt einer monochromatischen Welle der Frequenz ν_0 :

$$e\mathcal{E}_x(t) = eE_0 \cdot \cos 2\pi\nu_0 t. \quad (46)$$

Dann wird die gestörte Bewegung des Oszillators so aussehen:

$$q(t) = q_0(t) + E_0 \cdot q_1(t) + E_0^2 \dots, \quad (47)$$

und uns hat jetzt nur der in E_0 lineare Anteil der gestörten Bewegung zu beschäftigen. Wir besprachen schon früher, daß man aus $q_1(t)$ die Absorption des Oszillators zu berechnen hat — wofür wir jedoch damals nur das Endresultat angaben. Jetzt dagegen geht uns $q_1(t)$ selber an. Diese Störungsbewegung $q_1(t)$, bzw. das entsprechende zusätzliche elektrische Moment $eq_1(t)$, enthält einen Anteil, der ein Mitschwingen des Oszillators mit der Frequenz ν_0 der über ihn hinstreichenden Lichtwelle darstellt. Dieser Anteil von $eq_1(t)$ hat die Form $\alpha \cdot \cos 2\pi\nu_0 t$ mit:

$$\alpha = \frac{e^2}{2} \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau \frac{d}{dI} \cdot \frac{\tau\nu \cdot a_{\tau}^2}{(\tau\nu)^2 - \nu_0^2}. \quad (48)$$

Dieses α sollte nach der klassischen Theorie die atomare Refraktion darstellen (vgl. Kapitel I, § 3, 3).

Betreffs der korrespondenzmäßigen Übersetzung in die Quantentheorie sind keine Zweifel möglich: Wir haben für die a_{τ}^2 gemäß (25) die $B_{n,m}$ einzuführen, und für $\tau\nu$ die Quantenfrequenzen $\nu(n, n-\tau)$; die Differentiation $\tau d/dI$ ist in der früher besprochenen Weise durch eine Differenzbildung zu analogisieren.

Das führt uns eindeutig zu folgendem Ausdruck für α :

$$\alpha = \frac{3\hbar^2}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{2\hbar} \left\{ \sum_{\tau} \frac{\nu(n+\tau, n) B_{n+\tau, n}}{\nu(n+\tau, n)^2 - \nu_0^2} - \sum_{\tau} \frac{\nu(n, n-\tau) B_{n, n-\tau}}{\nu(n, n-\tau)^2 - \nu_0^2} \right\},$$

oder

$$\alpha_n = \frac{3\hbar}{4\pi^2} \left\{ \sum_{k>n} \frac{\nu(k, n) B_{kn}}{\nu(k, n)^2 - \nu_0^2} - \sum_{m<n} \frac{\nu(n, m) B_{nm}}{\nu(n, m)^2 - \nu_0^2} \right\}. \quad (49)$$

Wir haben hier α_n geschrieben, um hervorzuheben, daß das Atom, dessen Dispersionswirkung wir untersuchen, sich im n -ten Zustand

befindet. Die Numerierung der Zustände sei wieder nach der Größe der Energiewerte ausgeführt: die erste Summe in (49) bezieht sich auf die *Absorptionslinien*, die zweite dagegen auf die *Emissionslinien* des n -ten Zustands.

Wir haben beim Aufschreiben von (49) den Umstand mit benutzt, daß die *statistischen Gewichte* (gleich den *Vielfachheiten*) beim eindimensionalen Oszillator alle gleich 1 sind; wir befreien uns nachträglich von dieser Voraussetzung, indem wir allgemeiner

$$\alpha_n = \frac{3\hbar}{4\pi^3} \left\{ \sum_{k>n} \frac{\nu(k, n) g_k B_{kn}}{\nu(k, n)^2 - \nu_0^2} - \sum_{m<n} \frac{\nu(n, m) g_m B_{nm}}{\nu(n, m)^2 - \nu_0^2} \right\} \quad (49')$$

schreiben: Die Einführung der $g_k = G_k$ in dieser Form entspricht genau ihrem Auftreten in den Absorptionswahrscheinlichkeiten (20).

Mit (49') haben wir die berühmte *LADENBURG-KRAMERSsche Dispersionsformel* erhalten; ihre Bestätigung durch die Erfahrung wurde bereits betont (vgl. Kapitel I, § 3, 3): Natürlich müssen bei der Anwendung von (49') auf wirkliche Atome die zu *Ionisierung* führenden Absorptionsfrequenzen (Photoeffekt) in der Summe (49') durch einen entsprechenden *Integralanteil* berücksichtigt werden (vgl. Kapitel I, § 3, 3).

Ferner treten bei dreidimensionalen Systemen, wie es die wirklichen Atome sind, *Komplikationen* hinzu im Zusammenhang mit *Richtungsquantelung* und *Richtungsentartung*, und im Zusammenhang mit den verschiedenen Möglichkeiten betreffs des *Polarisationszustandes* des Lichtes, dessen Dispersion zu untersuchen ist. Ohne diesen komplizierteren Fragen im einzelnen nachzugehen, heben wir hervor, daß sie alle durch die weitere Verfolgung unserer korrespondenzmäßigen Überlegungen eindeutig zu beantworten sind, in Übereinstimmung mit den Experimenten.

Die Formel (49') vereinfacht sich übrigens, wenn wir verabreden, $-\nu(m, n)$ für $\nu(n, m)$ mit $m < n$ zu schreiben; sie lautet dann offenbar:

$$\alpha_n = \frac{3\hbar}{4\pi^3} \sum_k \frac{\nu(k, n) g_k B_{kn}}{\nu(k, n)^2 - \nu_0^2}; \quad (49'')$$

der Summationsbuchstabe k läuft jetzt über *alle* Zustände.

Unter ausdrücklicher Beschränkung auf den eindimensionalen Oszillator machen wir in der Dispersionsformel (49) einen *Grenzübergang* zu sehr großen Frequenzen ν_0 . Wir können dann für alle in Betracht fallenden Übergänge $\nu(k, n)^2$ bzw. $\nu(n, m)^2$ gegen ν_0^2 vernachlässigen, und es entsteht für große ν_0 die Formel

$$\alpha_n = \alpha_n^0 = -\frac{3\hbar}{4\pi^3} \left\{ \sum_{k>n} \nu(k, n) B_{kn} - \sum_{m<n} \nu(n, m) B_{nm} \right\} \cdot \frac{1}{\nu_0^2}, \quad (50)$$

oder in der Schreibweise von (49''):

$$\alpha_n^0 = -\frac{3\hbar}{4\pi^3} \sum_k \nu(k, n) B_{kn} \cdot \frac{1}{\nu_0^2}. \quad (50')$$

Wir erwähnen nun folgendes: Wird ein zu einem Atom gehöriges Elektron überstrichen von kurzwelligem Röntgenlicht, dessen $h\nu = h\nu_0$ groß gegenüber der Bindungsenergie des Elektrons ist, so reagiert das Elektron praktisch wie ein freies Elektron; die Bindung spielt jetzt keine Rolle mehr. Das ist auch klassisch der Fall: die klassische Einwirkung einer sehr hochfrequentigen Lichtwelle spielt sich auch am gebundenen Elektron praktisch wie an einem freien ab. Die klassische Dispersionsformel (48) zeigt dies folgendermaßen: Machen wir in (48) die Annahme $\nu_0^2 \gg (\tau\nu)^2$ (für alle diejenigen Werte τ , deren a_τ^2 nicht vernachlässigbar sind), so ergibt sich

$$\alpha = \alpha^0 = -\frac{e^2}{2} \sum_{\tau} \tau \frac{d}{dI} (\tau\nu \cdot a_\tau^2) \cdot \frac{1}{\nu_0^2}; \quad (51)$$

und der hier auftretende Ausdruck hat einen einfachen Wert. Erinnern wir uns an die Definition von I :

$$I = \oint p dq = \mu \int \dot{q}^2 dt;$$

wird hierin für $q(t)$ und $\dot{q}(t)$ die FOURIER-Reihe (17) eingesetzt und dann die Integration nach der Zeit (bzw. Zeitmittelbildung) ausgeführt, so ergibt sich offenbar:

$$I = 2\pi^2 \mu \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau^2 \nu \cdot a_\tau^2, \quad (52)$$

oder auch, durch Differentiation nach I :

$$1 = 2\pi^2 \mu \sum_{\tau=0}^{\infty} \tau \frac{d}{dI} (\tau\nu \cdot a_\tau^2). \quad (52')$$

Wir sehen also: für große ν_0 nimmt die Refraktionsgröße α nach (51) klassisch den Wert

$$\alpha^0 = -\frac{c^2}{4\pi^2 \cdot \mu} \cdot \frac{1}{\nu_0^2} \quad (53)$$

an. Damit erweist sich tatsächlich die klassische Dispersion sehr kurzer Wellen als *unabhängig* von allen Besonderheiten in der Bindungsweise des schwingenden Teilchens: das Teilchen verhält sich wie ein *freies* Teilchen.

Wenden wir uns nun wieder dem quantenmechanischen Dispersionsproblem zu, so wird die Tatsache, daß auch quantenphysikalisch das gebundene Elektron sich als ein praktisch freies erweist gegenüber hochfrequentiger Strahlung, darin zum Ausdruck kommen müssen, daß auch α_n^0 in (50') denselben von der speziellen Struktur des fraglichen Oszillators (und von n) unabhängigen Wert (53) hat; daß mithin

$$\sum_k \nu(k, n) B_{kn} = \frac{\pi e^2}{3 h \mu} \quad (54)$$

ist. Dies ist die bedeutungsvolle THOMAS-KUHNsche *Summenregel*.

Sie sei sogleich angewandt auf den *harmonischen* Oszillator, bei welchem wir die Äquidistanz der Energieniveaus und die Auswahlregel $n \rightarrow n \pm 1$ als schon bekannt voraussetzen. Dann bleiben nämlich, wenn $n=0$ der Grundzustand ist, in der Summe (54) für $n > 0$ nur *zwei* und für $n=0$ sogar nur *ein* Summand übrig:

$$\left. \begin{aligned} \nu B_{1,0} &= \frac{\pi e^2}{3 \hbar \mu}; \\ \nu(B_{n+1,n} - B_{n,n-1}) &= \frac{\pi e^2}{3 \hbar \mu} \text{ für } n > 0. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

(Mit ν ist die Oszillatorfrequenz bezeichnet.) Dadurch sind aber die $B_{n+1,n}$ *eindeutig bestimmt*:

$$B_{n+1,n} = (n+1) \frac{\pi e^2}{3 \hbar \nu \mu}. \quad (56)$$

Unser früher aus spezielleren Betrachtungen gewonnenes Resultat (12), § 3 ist damit erneut bestätigt worden — und es ist jetzt mühelos hergeleitet aus einer *allgemeinen*, für *jeden* eindimensionalen Oszillator geltenden exakten Gesetzmäßigkeit. Mit dieser THOMAS-KUHNSchen Summenregel (54) sind wir um einen ganz wesentlichen Schritt tiefer eingedrungen in die Gesetzmäßigkeiten der Quantenmechanik.

Unsere korrespondenzmäßige Übersetzung der klassischen Dispersionsformel (48) in die quantentheoretische (49) erhält noch eine wichtige Stütze durch ihre Anwendung auf den *harmonischen Oszillator*. Bei diesem einfachsten Fall wird man eine besonders enge Analogie von klassischer und Quantentheorie erwarten, und sie stellt sich auf Grund unserer Formeln tatsächlich ein.

Klassisch wird nach (48) für den harmonischen Oszillator der Frequenz ν :

$$\alpha = \frac{e^2}{2} \cdot \frac{\nu}{\nu^2 - \nu_0^2} \cdot \frac{da^2}{dI},$$

was mit $I = 2 \pi^2 a^2 \mu \nu$ zu

$$\alpha = \frac{e^2}{4 \pi^2 \mu} \cdot \frac{I}{\nu^2 - \nu_0^2}, \quad (57)$$

also zu einem vom Energieinhalt des Oszillators unabhängigen Werte führt. Nach (49) und (56) ergibt sich aber quantentheoretisch genau derselbe von n unabhängige Wert

$$\alpha_n = \frac{e^2}{4 \pi^2 \mu} \cdot \frac{I}{\nu^2 - \nu_0^2}. \quad (58)$$

5. Inkohärente Streustrahlung (RAMAN-Effekt). Der klassische anharmonische Oszillator, der von einer Störungskraft $e\mathcal{E}_x(t) = eE_0 \cdot \cos 2\pi\nu_0 t$ beeinflusst wird, zeigt in der in erster Näherung sich ergebenden Störungsbewegung $q_1(t)$ *außer* dem mit der Frequenz ν_0 mitschwingenden Anteil (48) noch eine kompliziertere Bewegung. In ihr spielen — im Gegensatz zum Ausdruck (48) — nicht nur die FOURIER-Koeffizienten a_x in (45), sondern auch die *Phasenkonstanten* α_x der einzelnen harmonischen

Partialschwingungen eine Rolle; und es ist angemessener und bequemer, statt (45) jetzt eine *komplexe* Fourierreihe

$$q(t) = \sum_{\tau = -\infty}^{+\infty} q_{\tau} \cdot e^{2\pi i \tau t} \quad (59)$$

zu verwenden. Damit $q(t)$ *reell* ist, muß

$$q_{\tau}(I)^* = q_{-\tau}(I) \quad (60)$$

sein, wenn wir mit einem Stern * die *konjugiert komplexe* Größe bezeichnen. Für spätere Zwecke haben wir in (60) noch ausdrücklich hervorgehoben, daß q_{τ} eine Funktion von I ist. Der Zusammenhang von q_{τ} mit a_{τ} und α_{τ} ist offenbar dieser:

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= a_0; \\ q_{\tau} &= \frac{I}{2} a_{\tau} e^{2\pi i \alpha_{\tau}} \\ q_{-\tau} &= \frac{I}{2} a_{\tau} e^{-2\pi i \alpha_{\tau}} \end{aligned} \right\} (\tau > 0). \quad (61)$$

Man kann grundsätzlich die Einführung komplexer Größen als einen entbehrlichen Rechentrick betrachten, der lediglich aus Gründen der mathematischen Eleganz und Einfachheit gebraucht wird. Es liegt aber so, daß gerade die exakten quantenmechanischen Gesetze, deren korrespondenzmäßige Aufspürung wir betreiben, bei einer (prinzipiell natürlich möglichen) Umgehung des komplexen Rechnens so sehr an Durchsichtigkeit verlieren würden, daß man die komplexen Größen als das *sinngemäße* Darstellungsmittel der Quantenmechanik bezeichnen muß. Dem tragen wir Rechnung, indem wir schon die klassischen Formeln, die wir jetzt zu besprechen haben, in komplexer Gestalt aufschreiben.

Der vollständige Ausdruck des durch die Störung erzeugten zusätzlichen Momentes $e q_1(t)$ lautet:

$$e q_1(t) = \Re e^2 \sum_{\sigma, \tau = -\infty}^{+\infty} \left\{ (\sigma + \tau) \frac{dq_{\tau}}{dI} \cdot \frac{q_{\sigma}}{\sigma \nu + \nu_0} - \tau \frac{d}{dI} \frac{q_{\sigma} q_{\tau}}{\sigma \nu + \nu_0} \right\} e^{2\pi i [\tau \nu + \sigma \nu + \nu_0] t}; \quad (62)$$

das \Re bedeutet den *Realteil*. Die Summanden mit $\tau + \sigma = 0$ ergeben die obige Formel (48) für die kohärente Streustrahlung (mit *unveränderter* Frequenz ν_0); die übrigen Summanden stellen eine *inkohärente Streustrahlung* mit abgeänderten Frequenzen dar. *In ihr haben wir das klassische Analogon der RAMAN-Streuung* zu sehen (vgl. Kapitel 1, § 3, 3).

Die vollständige *korrespondenzmäßige Übersetzung* von (62) ergibt gegenüber früheren Beispielen etwas Neues. Während die Intensität der kohärenten Streustrahlung von den *Phasen* α_{τ} in (61) *unabhängig* ist, hängen die Intensitäten des inkohärenten Anteils durchaus von diesen Phasen α_{τ} ab: Deshalb ist es jetzt *nicht mehr möglich*, die korrespondenzmäßige Übersetzung *unter alleiniger Benutzung der Übergangswahrscheinlichkeiten* $B_{n,m}$ durchzuführen. Sondern wir brauchen jetzt auch für die Phasen α_{τ} der klassischen FOURIER-Reihe (45) ein quantentheoretisches

Analogon, das wir am besten im Anschluß an die komplexe FOURIER-Darstellung (59) einführen.

Nach (25), (61) besteht die Korrespondenz

$$B_{nm} \rightarrow \frac{8\pi^2}{3\hbar^2} e^2 |q_{n-m}(nh)|^2. \quad (63)$$

Wir postulieren nun die Existenz gewisser komplexer quantenmechanischer Größen $q(n, m)$, die *exakt* die Eigenschaft

$$B_{nm} = \frac{8\pi^2}{3\hbar^2} e^2 |q(n, m)|^2 \quad (64)$$

besitzen und welche *direkt den klassischen FOURIER-Koeffizienten* $q_\tau(I)$ *korrespondieren*. Die B_{nm} sind also nach (64) aus den $q(n, m)$ berechenbar; *umgekehrt* aber sind nur die Absolutwerte der $q(n, m)$, und nicht ihre Phasen, aus den B_{nm} zu erkennen.

Die Korrespondenz der $q_\tau(I)$ und der $q(n, m)$ ist gleich der Korrespondenz der Frequenzen [vgl. (18'), § 2, 4] eine *zweideutige*:

$$\left. \begin{array}{l} \dots \searrow q_\tau(nh + \tau h) \\ q(n + \tau, n) \left\{ \begin{array}{l} \nearrow q_\tau(nh) \\ \searrow q_\tau(nh - \tau h) \end{array} \right. \\ q(n, n - \tau) \left\{ \begin{array}{l} \nearrow q_\tau(nh) \\ \searrow q_\tau(nh - \tau h) \end{array} \right. \\ \dots \searrow q_\tau(nh - \tau h) \end{array} \right\} \quad (65)$$

Die *Realitätsbedingung* (60) der klassischen Theorie muß natürlich auch ihr quantentheoretisches Analogon besitzen. Im Sinne der Zuordnung (65), und in Rücksicht auf die Beziehung $B_{nm} = B_{mn}$ können wir nur *eine* Möglichkeit dafür in Betracht ziehen, nämlich:

$$q(n, m) = q(m, n)^*. \quad (66)$$

Nachdem wir so die Übergangswahrscheinlichkeiten B_{nm} zurückgeführt haben auf die „Übergangsamplituden“ $q(n, m)$, sind wir vorbereitet, die Übersetzung der klassischen Formel (62) durchzuführen.

Das Ergebnis dieser von KRAMERS und HEISENBERG ausgeführten Übersetzung¹ läßt sich am einfachsten dadurch ausdrücken, daß wir komplexe *Übergangsamplituden* für die durch RAMAN-Effekt bewirkten Quantensprünge $n \rightarrow m$ aufschreiben, die also für diese Übergänge analoge Bedeutung haben, wie die $q(n, m)$ für die gewöhnliche Absorption und Emission. Diese Übergangsamplituden sehen dann so aus:

$$\left. \begin{array}{l} Q(n, m) = \sum_k \frac{e}{\hbar} \left\{ \frac{q(n, k) q(k, m)}{\nu(k, m) + \nu_0} - \frac{q(n, k) q(k, m)}{\nu(n, k) + \nu_0} \right\} e^{2\pi i [\nu(n, m) + \nu_0] t} \\ + \sum_k \frac{e}{\hbar} \left\{ \frac{q(n, k) q(k, m)}{\nu(k, m) - \nu_0} - \frac{q(n, k) q(k, m)}{\nu(n, k) - \nu_0} \right\} e^{2\pi i [\nu(n, m) - \nu_0] t}; \end{array} \right\} \quad (67)$$

¹ Die Übersetzung verläuft folgendermaßen, genau nach dem Schema unserer früheren Beispiele. Wir lassen korrespondieren:

$$(q(n + \tau, n) - q(n - \sigma, n - \sigma - \tau)) \frac{q(n, n - \sigma)}{\nu(n, n - \sigma) + \nu_0} \rightarrow (\sigma + \tau) \frac{dq_\tau}{dI} \cdot \frac{q_\sigma}{\nu\sigma + \nu_0};$$

der links stehende Ausdruck gehört dann teils zur Übergangsamplitude $Q(n + \tau, n - \sigma)$, teils zu $Q(n, n - \sigma - \tau)$. Die Übersetzung des anderen Gliedes in (62) ist trivial.

oder also

$$\frac{\hbar}{e} Q(n, m) = \left. \begin{aligned} & \sum_k \frac{\nu(n, k) - \nu(k, m)}{[\nu(k, m) + \nu_0] \cdot [\nu(n, k) + \nu_0]} q(n, k) q(k, m) e^{2\pi i [\nu(n, m) + \nu_0] t} \\ & + \sum_k \frac{\nu(n, k) - \nu(k, m)}{[\nu(k, m) - \nu_0] \cdot [\nu(n, k) - \nu_0]} q(n, k) q(k, m) e^{2\pi i [\nu(n, m) - \nu_0] t} \end{aligned} \right\}$$

Wir erproben diese Übersetzung zunächst wieder am *harmonischen* Oszillator. Die klassische Formel (62) zeigt uns (frühere Resultate bestätigend), daß es beim harmonischen Oszillator keine inkohärente Streustrahlung gibt. Denn hier ist ja von allen Koeffizienten $q_\tau(I)$ mit $\tau \geq 0$ nur $q_1(I)$ von Null verschieden, so daß wir in (62) nur für $\sigma = \tau = 1$ und andererseits $\sigma = \tau = -1$ inkohärente Streustrahlung bekommen könnten. Außerdem ist aber ν unabhängig von I , so daß das Glied $\sigma = \tau = 1$ in (62) so aussieht:

$$2 \frac{dq_1}{dI} \cdot \frac{q_1}{\nu + \nu_0} - 2 \frac{q_1}{\nu + \nu_0} \cdot \frac{dq_1}{dI} = 0.$$

Also wird die richtige korrespondenzmäßige Übersetzung von (62) auch für die Quantentheorie das *Nichtvorhandensein einer RAMAN-Streuung beim harmonischen Oszillator* ergeben müssen. Das kommt in der Tat nach (67), (68) heraus: Nach der Auswahlregel $n \rightarrow n \pm 1$ ist $q(n, k)$ nur für $k = n \pm 1$ von Null verschieden; Übergangsamplituden $Q(n, m) \neq 0$ könnte es also, außer für $m = n$, nur für $m = n \pm 2$ geben.

Für $m = n + 2$, also $k = n + 1$, *verschwinden* aber die Faktoren $\nu(n, k) - \nu(k, m)$ in (68).

Wir wollen nun auch für den RAMAN-Effekt des (beliebig unharmonischen) Oszillators den Grenzübergang zu sehr großen Frequenzen ν_0 verfolgen, den wir für den kohärenten Anteil der Streustrahlung oben ausgeführt haben.

Das *freie Elektron zeigt keinen RAMAN-Effekt*, da ja die Möglichkeit einer Änderung der inneren Energie hier gar nicht gegeben ist. Klassisch ist das Verschwinden der inkohärenten Streustrahlung für große ν_0 aus (62) leicht abzulesen. Quantentheoretisch bekommen wir nach (68) *dann und nur dann* ein Verschwinden der RAMAN-Streuung im Grenzfall $\nu_0 \rightarrow \infty$, wenn zwischen den $q(n, k)$ und $\nu(n, k)$ für $n \neq m$ folgende Bedingung besteht:

$$\sum_k \{ \nu(n, k) q(n, k) q(k, m) - q(n, k) \nu(k, m) q(k, m) \} = 0.$$

Wir fassen diese fundamentale neue Bedingung mit der THOMAS-KUHNschen *Summenregel* zusammen in die eine Gleichung

$$\sum_k \{ \nu(n, k) q(n, k) q(k, m) - q(n, k) \nu(k, m) q(k, m) \} = \delta_{nm} \frac{\hbar}{4 \pi^2 \mu}; \quad (69)$$

μ ist die *Masse* des schwingenden Massenpunktes; δ_{nm} hat die Bedeutung 1 für $n = m$, und 0 für $n \neq m$. In dieser Beziehung (69) haben wir also die *notwendige und hinreichende* Bedingung dafür festgelegt, daß

unser schwingender, elektrisch geladener Massenpunkt *auf sehr kurzwellige Strahlung wie ein freies Teilchen reagiert*, sowohl hinsichtlich seiner kohärenten Streustrahlung ($n=m$) als auch hinsichtlich der inkohärenten ($n \neq m$). Wir werden diese Beziehung (69) später als „kanonische Vertauschungsregel“ bezeichnen (Kapitel 3).

Neben dem Grenzfall $\nu_0 \rightarrow \infty$ verdient auch der Grenzfall $\nu_0 \rightarrow 0$ Aufmerksamkeit. Lassen wir *sehr lange elektromagnetische Wellen* über den Oszillator hinwegstreichen, so muß das schließlich eine *adiabatische* Beeinflussung des Oszillators ergeben: die ganz langsam veränderliche Feldstärke $\mathfrak{E}_x(t)$ bewirkt keine Quantensprünge mehr; sondern wir haben jetzt an unserem Oszillator einen *STARK-Effekt* mit einer Feldstärke, die im Grenzfall $\nu_0 = 0$ zeitlich exakt konstant wird.

Aber auch in diesem Falle muß die *KRAMERS-HEISENBERGSCHE Formel* (67), (68) *in Kraft bleiben*: sie überspannt die tiefe Kluft, die in unserer Anschauung besteht zwischen der in Quantensprüngen sich äußernden Wirkung schnell veränderlicher Felder und der stetigen adiabatischen Beeinflussung durch quasistatische Felder. Dies ist ein lehrreiches Beispiel dafür, daß man den Begriff des Quantensprunges nicht zu primitiv auffassen darf: keineswegs darf man (was oft erhofft wurde) in primitiver Weise den Begriff des unstetigen Quantensprunges zur alleinigen Grundlage der exakten Quantentheorie machen. Denn es sind nur gewisse *Grenzfälle*, in denen die quantenphysikalischen Abläufe durch die anschauliche Vorstellung des Quantensprunges unmittelbar erfaßt werden können; und diese Grenzfälle sind durch stetige Zwischenstufen verbunden mit anderen Geschehensformen, die nicht als Quantensprünge beschreibbar sind.

Wir bekommen aus (67), (68) im Grenzfall $\nu_0 = 0$ ein *zusätzliches elektrisches Moment*; die für den feldfreien Fall geltenden Übergangsamplituden $q(n, m)$ sind bei Anwesenheit der zeitlich konstanten Feldstärke $\mathfrak{E}_x = E_0$ zu ersetzen durch $q(n, m) + E_0 \cdot Q'(n, m)$, wobei $Q'(n, m)$ dasselbe wie $Q(n, m)$ bedeutet, jedoch mit $\nu_0 = 0$, und unter Fortlassung der Faktoren $e^{2\pi i \nu(n, m) t}$:

$$q(n, m) + E_0 \sum_k \frac{2e}{h} \left\{ \frac{q(n, k) q(k, m)}{\nu(k, m)} - \frac{q(n, k) q(k, m)}{\nu(n, k)} \right\}. \quad (70)$$

Die Glieder $m = n$ des mit E_0 proportionalen Anteils in (70) bedeuten die *Zeitmittelwerte* des durch die Störung bedingten zusätzlichen elektrischen Momentes. Wir können aus ihnen die *Störenergien* der verschiedenen Zustände — also die durch *STARK-Effekt* eintretenden *Frequenzänderungen* der Spektrallinien — berechnen: Für den n -ten Zustand ergibt sich die Störungenergie

$$\left. \begin{aligned} \Delta W_n &= -\frac{1}{2} E_0 \cdot \{E_0 Q'(n, n)\} \\ &= -E_0^2 \sum_k \frac{2e}{h} \cdot \frac{|q(n, k)|^2}{\nu(k, n)} = -E_0^2 \cdot \frac{3h}{4\pi^3 e} \sum_k \frac{B_{nk}}{\nu(k, n)}. \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Die Glieder $m \neq n$ in (70) ergeben die durch die Störung veränderten Übergangsamplituden. Bemerkenswert sind dabei insbesondere solche Fälle, wo infolge von Auswahlregeln $q(n, m) = 0$ ist, während der mit E_0 proportionale Teil in (70) *nicht* verschwindet: dann tritt als Folge des STARK-Effekts eine Durchbrechung der Auswahlregeln ein, und es ergeben sich neue Linien in einer mit E_0^2 proportionalen Intensität. — Beim harmonischen Oszillator, der keine RAMAN-Streuung zeigt, kann diese Durchbrechung der Auswahlregeln *nicht* eintreten. Klassisch liegt es ja so, daß ein konstantes homogenes Feld $\mathcal{E}_x = E_0$ nur *den Schwingungsmittelpunkt verschiebt*, ohne die Harmonizität des Oszillators aufzuheben.

Bei der Anwendung der obigen KRAMERS-HEISENBERGSchen Formel (67), (68) auf dreidimensionale Atome treten wieder die oben schon für den kohärenten Anteil kurz besprochenen Komplikationen durch statistische Gewichte, Richtungsentartung, Polarisation, ionisierte Zustände ein, worüber jetzt nichts Neues zu sagen ist. Die empirische Prüfung der KRAMERS-HEISENBERGSchen Formel ist hinsichtlich eines qualitativen Punktes sehr bequem durchzuführen: Nach (67), (68) kann man offenbar folgende *Auswahlregel für den RAMAN-Effekt* aussprechen: *Es sind nur solche Übergänge $n \rightarrow m$ möglich, die bei gewöhnlicher Emission und Absorption in zwei aufeinander folgenden Übergängen $n \rightarrow k$, $k \rightarrow m$ auf Grund der diesbezüglichen Auswahlregeln möglich wären.* Dieselbe Auswahlregel gilt also auch für die durch STARK-Effekt hervorgerufenen Linien. (Abgesehen von besonderen, abweichenden Verhältnissen im STARK-Effekt des H-Atoms.)

§ 4. Korrespondenzmäßige Quantelung. Zweiter Teil.

1. *Adiabatische Invarianten und allgemeine Quantelung.* Während sich die eindimensionalen klassischen Bewegungen ohne weiteres in *periodische* (wie eine *Rotation* oder die *Pendelbewegung*) und *aperiodische* (wie den *freien Fall*) teilen, denen dann in der Quantentheorie *gequantelte* und *ungequantelte* Zustände korrespondieren, zeigen die klassischen Systeme mit *mehreren Freiheitsgraden* eine größere Mannigfaltigkeit von Bewegungstypen, und die korrespondenzmäßige Übersetzung in die Quantentheorie verlangt ausführliche Erörterungen.

Wir besprechen zunächst einige *zweidimensionale* Beispiele von klassischen Bewegungen, deren korrespondenzmäßige Übersetzung auf gequantelte Zustände führt. Zunächst sei der *zweidimensionale harmonische Oszillator* betrachtet, gegeben durch eine Energiefunktion

$$H(p_1, p_2; q_1, q_2) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2\mu} + \frac{\kappa_1^2}{2} q_1^2 + \frac{\kappa_2^2}{2} q_2^2. \quad (1)$$

Für den *isotropen* Fall $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ bekommen wir eine *periodische* Bewegung mit der Frequenz $\nu = \kappa/2\pi\sqrt{\mu}$. Wir haben dann eine *adiabatische Invariante*

$$I = \oint (p_1 dq_1 + p_2 dq_2), \quad (2)$$

die also z. B. dann ungeändert bleibt, wenn wir unter Erhaltung der Isotropie die Frequenz ν (den Wert κ) unendlich langsam ändern. Die Energie ist durch I ausdrückbar:

$$H = \nu I; \quad (3)$$

und die Korrespondenz von I mit der unstetigen Quantengröße $n\hbar$ führt somit zu einer *Quantelung der Energie*. Die Energieniveaus müssen zur Erzielung genauer Korrespondenz wie im eindimensionalen Fall *äquidistant* sein. Im vierdimensionalen klassischen *Phasenraum* mit den Koordinaten p_1, p_2, q_1, q_2 liegt aber zwischen zwei Werten $I = n\hbar$ und $I = (n + 1)\hbar$ mit

$$I = \frac{1}{\nu} \left(\frac{p_1^2 + p_2^2}{2\mu} + \frac{\kappa^2}{2} (q_1^2 + q_2^2) \right) \quad (4)$$

ein Phasenvolumen der Größe¹

$$\Delta I^{(2)} = 2\pi^2 \frac{\mu \nu^2 \hbar^2}{\kappa^2} \{ (n + 1)^2 - n^2 \} = \hbar^2 \left(n + \frac{1}{2} \right); \quad (5)$$

so daß dem Zustand, dessen Energie um $n\hbar\nu$ über der Energie W_0 des Grundzustandes liegt, nicht mehr das *statistische Gewicht* 1 zukommt, sondern ein Gewicht g_n , das asymptotisch mit $n + \frac{1}{2}$ übereinstimmen muß.

Der genaue Wert der *Vielfachheit* von $W = n\hbar\nu + W_0$ ergibt sich, wenn wir den isotropen Oszillator als *Grenzfall des anisotropen* auffassen: Bei inkommensurablen κ_1, κ_2 haben wir *zwei adiabatische Invarianten*

$$I_1 = \oint p_1 dq_1; \quad I_2 = \oint p_2 dq_2, \quad (6)$$

die nach Division durch h mit *zwei Quantenzahlen* n_1, n_2 korrespondieren: Der klassischen Formel

$$W = \nu_1 I_1 + \nu_2 I_2 \quad (7)$$

des anisotropen Oszillators korrespondiert die Quantenformel

$$W = n_1 \hbar \nu_1 + n_2 \hbar \nu_2 + W_0, \quad (8)$$

in der jeder Zustand *einfach* ist. Für den isotropen Grenzfall bekommen wir also

$$g_n = n + 1. \quad (9)$$

Man nennt die klassische Bewegung des anisotropen Oszillators, die ja eine *Überlagerung von zwei periodischen Bewegungen mit inkommensurablen Frequenzen* ν_1, ν_2 ist, eine „*zweifachperiodische*“ Bewegung. Eine solche korrespondiert also ebenso wie die periodische Bewegung einer *diskreten Quantelung*.

Allgemein sind bei einer *zweifach* periodischen Bewegung *zwei unabhängige adiabatische Invarianten* I_1, I_2 vorhanden, so daß bei der quantentheoretischen Übertragung *zwei Quantenzahlen* einzuführen sind. Eine

¹ Eine vierdimensionale Kugel vom Radius R hat das Volum $\frac{\pi^2}{2} R^4$. —

Das *gesamte* Phasenvolumen, welches zu gegebenem I gehört, ist $I^{(2)} = \frac{1}{2} I^2$.

Entartung dieser zweifach periodischen Bewegung in eine periodische kommt zustande, wenn die durch

$$\nu_1 = \frac{\partial W(I_1, I_2)}{\partial I_1}, \quad \nu_2 = \frac{\partial W(I_1, I_2)}{\partial I_2} \quad (10)$$

gegebenen Grundfrequenzen ν_1, ν_2 *gleich* sind; das ist dann und nur dann allgemein (für beliebige Werte der I_1, I_2) der Fall, wenn W nur von der *Summe* $I_1 + I_2$ abhängt:

$$W(I_1, I_2) = W(I_1 + I_2); \quad (11)$$

ein Beispiel hierfür ist der besprochene isotrope zweidimensionale Oszillator.

In diesem entarteten Falle gibt es *nur noch eine* adiabatische Invariante, nämlich $I_1 + I_2$; die I_1, I_2 sind *einzelnen nicht* mehr adiabatisch invariant.

Es gibt aber noch andere Möglichkeiten, eine zweifach periodische Bewegung zu einer rein periodischen entarten zu lassen. Denn streng genommen ist jedesmal dann, wenn die Frequenzen ν_1, ν_2 ein *rationales Verhältnis* $\nu_1:\nu_2$ haben, die Bewegung rein periodisch: Sei etwa $r_1 \nu_1 = r_2 \nu_2$, mit zwei *ganzen Zahlen* r_1, r_2 ; dann ist die Bewegung offenbar rein periodisch mit der Frequenz $r_1 \nu_1$. Nur bei *irrationalem* Verhältnis $\nu_1:\nu_2$ haben wir in Strenge eine wirklich *nicht* einfach periodische Bewegung.

Diese Entartung durch sog. „höhere Kommensurabilitäten“ $r_1 \nu_1 = r_2 \nu_2$ bildet eine erhebliche Komplikation der klassischen Theorie; mit ihr hängen zum wesentlichen Teil die ungemainen Schwierigkeiten der *astronomischen Störungsrechnung* zusammen. Es ist eine bedeutsame Erleichterung, daß wir in der *Quantentheorie* von diesen Schwierigkeiten *frei werden*. In der Quantentheorie haben wir eine „Entartung“ dann vor uns, wenn zwei oder mehrere Energiewerte eines Systems genau gleich sind, und somit einen einzigen Zustand, mit statistischem Gewicht $g_n > 1$, bilden. Betrachten wir wieder einen zweidimensionalen harmonischen Oszillator der Frequenzen ν_1, ν_2 . Der Fall $\nu_1 = \nu_2$ bedeutet natürlich *Entartung*; die Zustände n_1, n_2 haben einen nur von $n = n_1 + n_2$ statt von n_1, n_2 einzeln abhängigen Wert. Der Fall $2\nu_1 = 3\nu_2$ bedeutet ebenfalls Entartung: z. B. fallen die Zustände $n_1=0, n_2=3$ und $n_1=2, n_2=0$ in einen einzigen Zustand des Gewichtes $g=2$ zusammen. Der Fall $1000 \nu_1 = 1001 \nu_2$ jedoch bietet folgendes Bild: *Klassisch* haben wir für *jeden* Energieinhalt dieses Systems von zwei Oszillatoren eine *strenggenommen* rein periodische Bewegung; quantentheoretisch ist festzustellen, *daß für alle Zustände* $n_1, n_2 < 1000$ *keine Entartung besteht*. Die Zustände mit allzu hohen Quantenzahlen n_1, n_2 werden aber (wegen Nichterfüllung des HOOKEschen Gesetzes bei zu großen Schwingungsamplituden) sowieso nicht mehr exakt der Energieformel $n_1 h \nu_1 + n_2 h \nu_2$ genügen und praktisch nicht so wichtig sein. — Analog gewinnt die Entartungsfrage auch in anderen Beispielen ein sehr viel einfacheres Aussehen beim Übergang von der klassischen zur Quantentheorie.

Mit den zweifach periodischen Bewegungen und ihren periodischen Entartungen sind aber die quantelungsfähigen zweidimensionalen Bewegungen keineswegs erschöpft. Wir betrachten als weiteres Beispiel einen Massenpunkt in einem zweidimensionalen „Gefäß“ mit *ideal reflektierenden Wänden*, und wählen das „Gefäß“ erstens als *Rechteck*, zweitens in beliebiger, nicht rechteckiger Form. Für die klassische Theorie ergibt sich folgendes: Zum Rechteck gehört eine *zweifach periodische* Bewegung, deren Quantelung wir schon kennen (vgl. § 1). Die früher eingeführten Quantengrößen $n_1 h$, $n_2 h$ korrespondieren zwei klassischen *adiabatischen Invarianten* I_1 , I_2 , deren adiabatische Invarianz sich aber natürlich nur auf *solche* adiabatische Änderungen (z. B. des Gefäßvolums) bezieht, bei denen die rechteckige Form des Gefäßes *gewahrt* bleibt.

Gegenüber der im Rechteckfall bestehenden Konstanz der Beträge $|\dot{p}_1|$, $|\dot{p}_2|$ der beiden zu den Gefäßwänden parallelen Impulskomponenten ergibt sich im allgemeinen nichtrechteckigen Fall nur noch Konstanz des *Gesamtimpulses* $\sqrt{p_1^2 + p_2^2}$; dagegen werden die Einzelwerte von p_1^2 und p_2^2 im Laufe der Zeit jedem Werte von 0 bis $2\mu W$ beliebig nahe kommen. Es wird sogar folgendes zu behaupten sein: Es sei im vierdimensionalen klassischen *Phasenraume* p_1, p_2, q_1, q_2 ¹ auf der „*Energiefläche*“

$$\frac{p_1^2 + p_2^2}{2\mu} = W = \text{const} \quad (12)$$

ein *beliebiger* Punkt bezeichnet. Die *Bahnkurve*, die im *Phasenraum* die Bewegung darstellt, kommt diesem Punkte im Lauf der Zeit *beliebig nahe*. Es wird also im Laufe der Zeit die Bahnkurve im Phasenraume diese Energiefläche (12) gewissermaßen mit einem immer dichter werden den Gespinst erfüllen. Man kann dann allgemein beweisen, daß der von der Energiefläche (12) abgegrenzte Volumteil des Phasenraumes, das „*Phasenvolum*“ unserer „*ergodischen*“ Bewegung, *adiabatisch invariant* ist.

Sein Wert ist offenbar, wenn wieder l^2 das (zweidimensionale) Gefäßvolum ist:

$$I^{(2)} = 2\pi\mu W l^2; \quad (13)$$

seine *Dimension* ist, wie in (5), gleich der von h^2 .

In der älteren Literatur wird die Ansicht vertreten, daß *nur* die klassisch *mehrfach periodischen Bewegungen* gequantelten Systemen entsprächen; das ist unserem heutigen Wissen nach durchaus falsch. Für das eben behandelte Beispiel ergibt die exakte *Wellenmechanik*, wie wir später sehen werden, ebensowohl eine diskrete Quantelung, wie für den speziellen zweifach periodischen Rechteckfall. Es ergeben sich also auch in diesem Beispiel für die Quantentheorie wesentlich klarere und einfachere Verhältnisse, als im klassischen Grenzfall — der eben in vieler Hinsicht ein komplizierter *singulärer*, Grenzfall der Quantentheorie ist.

¹ Der Phasenraum reicht natürlich in den Richtungen q_1, q_2 nur so weit, wie es dem vorgegebenen Gefäß entspricht.

Qualitativ läßt sich die Quantelung wieder auf korrespondenzmäßigem Wege durchführen: Die *klassische adiabatische Invariante* (13) muß einer quantentheoretischen adiabatischen Invarianten korrespondieren: Wir setzen analog zur „Quantenbedingung“ (15), § 2, 4:

$$I^{(2)} \rightarrow nh^2. \quad (14)$$

Da W eine Funktion von $I^{(2)}$ ist, so ergibt die Korrespondenz (14) auch für W *diskrete Stufen*. Das zu W_n gehörige statistische Gewicht g_n ist offenbar mit korrespondenzmäßiger Notwendigkeit gleich 1 zu setzen.

In der damit vollzogenen *Quantelung einer ergodischen Bewegung* haben wir gegenüber der früheren Quantelung des zweifach periodischen Rechteckfalles allerdings insofern weniger erreicht, als wir damals die *exakten Energiewerte* der einzelnen Quantenzustände angeben konnten. Daß das für den damaligen Fall ohne weiteres möglich war, für den jetzigen Fall dagegen noch nicht, beruht aber *nicht* etwa auf dem Unterschied mehrfach periodischer und nicht mehrfach periodischer Bewegung, sondern ist in der exzeptionellen *Einfachheit* des früher behandelten Problems begründet.

Ohne weiteres können wir jedoch für den allgemeinen Fall die *asymptotische Verteilung* der durch (14) gelieferten Quantenzustände bestimmen, indem wir aus (13), (14) die asymptotische Beziehung $W_n \rightarrow n h^2/2 \pi \mu l^2$ entnehmen, nach welcher in ein Energieintervall $W, W + \Delta W$ mit $\Delta W \gg h^2/2 \pi \mu l^2$ gerade $\Delta W \cdot 2 \pi \mu l^2/h^2$ Energiewerte fallen.

Bei noch mehr als zwei Freiheitsgraden treten natürlich noch vielfältigere Bewegungstypen auf. Die ältere Literatur beschäftigte sich, wie schon erwähnt, vorzugsweise mit dem Fall der *mehrfach periodischen Bewegungen*, welche für f Freiheitsgrade aus der Überlagerung von f periodischen Bewegungen bestehen; durch *Entartung* gehen daraus Bewegungen geringerer Periodizität hervor. Diese mehrfach periodischen Bewegungen bieten Möglichkeiten besonders schöner und wichtiger korrespondenzmäßiger Vergleiche; grundsätzlich jedoch bilden sie unter der Gesamtheit klassischer Bewegungstypen nur eine seltene Ausnahme und sind keineswegs das *allgemeine klassische Analogon gequantelter Zustände*. Dieses ist vielmehr offenbar gegeben durch solche Bewegungsformen, bei denen die Energie als Funktion adiabatischer Invarianten darstellbar ist¹.

2. Zentralbewegung. In einem zentralsymmetrischen Kraftfeld führt ein klassischer Massenpunkt eine *ebene* Bewegung aus, die zur Klasse der

¹ Die *mathematische Frage*, ob derartige klassische Bewegungen im nicht mehrfach periodischen Falle tatsächlich, wie gewöhnlich geglaubt wird, eine Ausstrahlung mit *kontinuierlichem Spektrum* ergeben, scheint uns noch ungeklärt. Im Hinblick auf die Theorie der fast periodischen Funktionen scheint uns das Gegenteil plausibler.

zweifach periodischen Bewegungen gehört. Eine genauere Betrachtung dieses Problems der klassischen Mechanik liefert wichtige Unterlagen zu einem korrespondenzmäßigen Verständnis der Spektren der Atome. Wir betrachten zunächst den Fall eines reinen COULOMBSchen Zentralfeldes; die in § 2, 5 ausgeführte Theorie der RYDBERG-Konstanten bedarf nämlich noch eine Vertiefung. Wir haben uns damals auf die *Kreisbahnen* des Elektrons beschränkt, und es entsteht die Frage, ob auch die allgemeine Betrachtung der *Ellipsenbahnen*, die ein Elektron im COULOMB-Feld vollführt — analog den *Planetenbahnen* im Gravitationsfeld der Sonne — unsere damaligen Ergebnisse bestätigt.

Das ist in der Tat der Fall. Das Entscheidende in § 2, 5 war die Beziehung

$$\frac{W^3}{\nu^2} = -\frac{1}{2} \pi^2 \mu Z^2 e^4 \quad (15)$$

zwischen der Energie W und der Frequenz ν einer Bahn. Wir nehmen den *Kern* jetzt wieder als unendlich schwer an; andernfalls hätten wir im folgenden stets $\bar{\mu}$ statt μ zu schreiben. Wir überzeugen uns jetzt, daß diese — damals nur für Kreisbahnen abgeleitete — Beziehung (15) auch für Ellipsenbahnen gilt. Wir haben es hier mit einem *Entartungsfall* zu tun: während die allgemeine ebene Zentralbewegung eine *zweifach periodische* ist, ergibt das COULOMB-Feld in Gestalt der Ellipsenbahnen *rein periodische* Bewegungen; dementsprechend ist die Energie W ausdrückbar als Funktion $W = W(I)$ von

$$I = \int_0^{\frac{1}{\nu}} \mathfrak{p} \dot{\mathfrak{r}} dt = \frac{1}{\nu} \cdot \bar{\mathfrak{p}}^2, \quad (16)$$

wo $\bar{\mathfrak{p}}^2$ der Zeitmittelwert von \mathfrak{p}^2 ist. Der Zeitmittelwert der kinetischen Energie ist aber im COULOMB-Feld gerade bis auf das Vorzeichen gleich der Gesamtenergie¹:

$$\frac{1}{2} \nu I = \frac{\bar{\mathfrak{p}}^2}{2\mu} = -W. \quad (17)$$

Da nun, wie wir wissen,

$$\nu = \frac{dW(I)}{dI} \quad (18)$$

ist, so bekommen wir

$$-2W = \frac{dW}{dI} \cdot I,$$

¹ Denn es wird ja mit $W = \frac{\mathfrak{p}^2}{2\mu} - \frac{e^2 Z}{r}$ bei periodischer Bewegung:

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{\frac{d}{dt} (r \mathfrak{p})} = \frac{1}{\mu} \bar{\mathfrak{p}}^2 + \overline{r \dot{\mathfrak{p}}} = \frac{1}{\mu} \bar{\mathfrak{p}}^2 + r \overline{\text{grad} \frac{e^2 Z}{r}} \\ &= \frac{1}{\mu} \bar{\mathfrak{p}}^2 - \frac{e^2 Z}{r} = \frac{1}{\mu} \bar{\mathfrak{p}}^2 - \left\{ \frac{\bar{\mathfrak{p}}^2}{2\mu} - W \right\} = \frac{\bar{\mathfrak{p}}^2}{2\mu} + W. \end{aligned}$$

oder

$$W = \frac{\text{const}}{I^2}. \quad (19)$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten in (19) genügt die Betrachtung eines beliebigen Spezialfalls. Wir können als solchen die schon behandelten *Kreisbahnen* nehmen: *bei ihnen wird* $I = 2\pi p_\varphi$ ($p_\varphi = \text{Drehimpuls}$), und folglich nach (28) § 2, 5 allgemein

$$W = -\frac{2\mu\pi^2 e^4 Z^2}{I^2}. \quad (20)$$

Daraus ist mit (18) wiederum (15) zu entnehmen.

Wir können das Ergebnis (20) auch wieder so verwerten, daß wir direkt nh für I einsetzen: das muß jedenfalls *asymptotisch richtige* Werte für die Energien der stationären Zustände des H-Atoms ergeben. Daß wir dabei dann sogar die *exakten* Termwerte des H-Atoms bekommen, ist, wie früher betont, im Grunde nur ein glücklicher Zufall.

Als Gegenstück zu den Kreisbahnen verdienen noch die *impulslosen Bahnen* Beachtung, welche wir dadurch erhalten, daß wir bei einer Ellipsenbahn mit der längeren Halbachse a die Exzentrizität immer größer werden lassen: die Ellipse artet schließlich in eine *Strecke* der Länge $2a$ aus, deren einer Endpunkt bei $r=0$ liegt¹. Man bestätigt für diese Bahnen ohne weiteres (indem man den Bahnpunkt $r=2a$ betrachtet) die für *alle* Ellipsenbahnen geltende Beziehung

$$W = -\frac{e^2 Z}{2a}; \quad (21)$$

(die für die Kreisbahnen aus (21), § 2, 5 zu ersehen ist). Auch bekommt man für diese eindimensionale Bewegung sehr schnell direkt zu (20), nämlich so:

$$\begin{aligned} I &= \oint p dq = 2\sqrt{2\mu} \int_0^{2a} \sqrt{\frac{e^2 Z}{r} - |W|} dr \\ &= 2\sqrt{2\mu} \cdot 2a \int_0^1 \sqrt{\frac{e^2 Z}{2a\rho} - |W|} d\rho \\ &= 2\sqrt{2\mu} \cdot 2a \cdot \sqrt{|W|} \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{\rho} - 1} d\rho \\ &= 2\sqrt{2\mu} \cdot \frac{e^2 Z}{\sqrt{-W}} \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{\rho} - 1} d\rho = \sqrt{\frac{2\mu}{-W}} \cdot \pi e^2 Z. \end{aligned}$$

Wir betonten schon die *Zufälligkeit* der Möglichkeit, die exakte BALMER-Formel mit unseren jetzigen primitiven Hilfsmitteln abzuleiten. Wir

¹ Die übliche Bezeichnung „Pendelbahnen“ für diese impulslosen Bahnen ist einigermassen irreführend.

beherrschen theoretisch tatsächlich nur das Gebiet großer Quantenzahlen n , wo die Quantentheorie asymptotisch mit der klassischen zusammenfällt; für die bei kleineren Werten n hervortretenden charakteristisch quantenphysikalischen Probleme besitzen wir beim jetzigen Stande unserer Betrachtungen erst eine ganz rohe und vorläufige Orientierung. Immerhin muß es erlaubt sein, über unsere bisherigen Ergebnisse hinaus die klassische Beziehung (21) noch zu einer Abschätzung der Größe des H-Atoms zu benutzen: Wir setzen für W die Energie des Grundzustandes des H-Atoms, und erhalten dann aus (21) einen Wert $2a = d$ für die Größenordnung des Durchmessers des H-Atoms im Normalzustand. Diese Berechnung ist als legitime Anwendung des Korrespondenzprinzips anzusehen: die klassische Beziehung (21) muß ihr quantenphysikalisches Analogon besitzen. Tatsächlich ist der sich ergebende Wert

$$d = \frac{e^2}{|W_1|} = \frac{\hbar^2}{2\pi^2 e^2 \mu} \approx 10^{-8} \text{ cm} \quad (22)$$

in Übereinstimmung mit der Größenordnung der empirischen gaskinetischen Atomdurchmesser.

In einem zentralsymmetrischen Kraftfeld, das zwar angenähert, aber nicht exakt ein COULOMBSches ist, führt ein geladener Massenpunkt nach klassischer Theorie eine ebene Bewegung aus, die so beschrieben werden kann: Der Massenpunkt durchläuft eine Ellipsenbahn, die ihrerseits nicht mehr festliegt, sondern eine langsame Rotation um den Brennpunkt $r=0$ ausführt. Weicht das zentralsymmetrische Kraftfeld stark von einem COULOMBSchen ab, so bekommen wir eine ebene Bahn, die treffend als *Rosettenbahn* bezeichnet worden ist. Diese zweifach periodische Bewegung im zentralsymmetrischen Kraftfeld gestaltet sich in bestimmtem Sinne sehr einfach auf Grund des Drehimpulssatzes.

Neben den rechtwinkligen Koordinaten x, y in der Bahnebene (denen die translatorischen Impulse $p_x = \mu \dot{x}$, $p_y = \mu \dot{y}$ zugeordnet sind) benutzen wir die Polarkoordinaten r, φ mit den zugehörigen Impulsgrößen $p_r = \mu \dot{r}$ und p_φ (= Drehimpuls). Die Energie unseres Massenpunktes ist

$$W = \frac{p^2}{2\mu} + U(r) = \frac{1}{2\mu} \left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} \right) + U(r); \quad (23)$$

mit $U(r)$ ist die potentielle Energie bezeichnet. Nun ist der Drehimpuls p_φ zeitlich konstant; und folglich geschieht die zeitliche Veränderung der Koordinate r genau so, wie bei einem eindimensionalen Oszillator, dessen kinetische Energie $p_r^2/2\mu$, und dessen potentielle Energie $p_\varphi^2/2\mu r^2 + U(r)$ ist. Also r ist (außer bei den aperiodischen Bahnen, analog den Hyperbeln des COULOMB-Falles) eine periodische Funktion der Zeit; wir schreiben dafür die komplexe FOURIER-Reihe

$$r = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} C_\tau e^{2\pi i \tau \nu t}; \quad C_{-\tau} = C_\tau^*. \quad (24)$$

Untersuchen wir nun die zeitliche Veränderung der rechtwinkligen Koordinaten x, y , so kommen wir zu folgendem, am bequemsten mit Hilfe der komplexen Größe $x + iy$ zu beschreibenden Ergebnis¹:

$$x + iy = e^{2\pi i \nu' t} \cdot \sum_{\tau = -\infty}^{+\infty} D_{\tau} e^{2\pi i \tau \nu t}; \quad (25)$$

hier tritt also neben einem (komplexen) Faktor, der mit der Frequenz ν periodisch von der Zeit abhängt, ein weiterer Faktor $e^{2\pi i \nu' t}$ auf, mit einer zweiten Frequenz ν' (welche nur im Entartungsfall des COULOMB-Feldes mit ν übereinstimmt).

Wir können die Energie (23) auch als Funktion der beiden adiabatischen Invarianten

$$I_r = \oint p_r dr; \quad I_{\varphi} = \oint p_{\varphi} d\varphi = 2\pi |p_{\varphi}| \quad (26)$$

ausdrücken: $W = W(I_1, I_2)$. Dann wird gemäß (10):

$$\nu = \frac{\partial W}{\partial I_r}; \quad \nu' = \frac{\partial W}{\partial I_{\varphi}}. \quad (27)$$

Diese klassischen Ergebnisse übersetzen wir nun folgendermaßen in die Quantentheorie. Wir kennzeichnen die stationären Zustände unseres Gebildes durch zwei Quantenzahlen n und l , die folgendermaßen den I_r, I_{φ} korrespondieren:

$$\left. \begin{aligned} nh &\rightarrow I_r + I_{\varphi}, \\ lh &\rightarrow I_{\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Die gewählte Bezeichnungswiese soll sogleich darauf aufmerksam machen, daß die „Hauptquantenzahl“ n im Spezialfall des H -Atoms in die damals gebrauchte Quantenzahl n übergeht.

Die Änderungen der Hauptquantenzahl n sind *nicht* durch eine *Auswahlregel* zu beschränken. Denn in der klassischen Formel (25) sind im allgemeinen alle Koeffizienten D_{τ} ungleich Null, und das klassische Fourierglied $e^{2\pi i \tau \nu t}$ korrespondiert Quantenübergängen $n \rightarrow n \pm \tau$. Aber zur Frequenz ν' gibt es in (25) *keine Oberschwingungen*; auch gibt es in (25) kein Glied *ohne* den Faktor $e^{2\pi i \nu' t}$. Also erschließen wir durch Übersetzung:

Für die Quantenzahl l gilt die Auswahlregel

$$l \rightarrow l \pm 1. \quad (29)$$

¹ Es ist $\varphi = p_{\varphi}/\mu \nu^2$; also sieht φ so aus:

$$\varphi = i \cdot \frac{p_{\varphi}}{\mu} \cdot \frac{1}{\nu^2} + \text{Fourierreihe mit Frequenz } \nu;$$

mit $\frac{1}{\nu^2}$ ist der *Zeitmittelwert* von $\frac{1}{\nu^2}$ bezeichnet. Für $x + iy = r e^{i\varphi}$ ergibt sich also

$$x + iy = e^{2\pi i \nu' t} \cdot (\text{Fourierreihe mit Frequenz } \nu),$$

wobei

$$\nu' = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{p_{\varphi}}{\mu} \cdot \frac{1}{\nu^2}.$$

Im Spezialfall der KEPLER-Ellipse ist $\frac{1}{\nu^2} = \frac{8\pi^3 \mu^2 e^4 Z^2}{p_{\varphi} \cdot I^3}$, also $\nu' = \nu$.

Es bleibt noch die Frage, *wie viele* Werte von l bei gegebenen n auftreten. Da I_r und I_φ stets ≥ 0 sind, wird man für l etwa die Werte von 0 bis n erwarten. Die *Erfahrung* zeigt jedoch, daß das um 1 zu viel ist: *Es gibt genau n Werte l zu gegebenem n .* Der älteren Theorie, die auf dem Versuch beruhte, die klassische Theorie in viel größerem Maße aufrecht zu erhalten, als wir heute als berechtigt anerkennen können, bereitete dieser Umstand Schwierigkeiten, denen man durch eine willkürliche (und in Widersprüche führende) Ausschließung der *impulslosen* Bahnen $l=0$ zu begegnen suchte. Die moderne Theorie ergibt zu vorgegebener Hauptquantenzahl n für die (ihrem Absolutwert nach erst später exakt zu definierende) Quantenzahl l die Werte $l=0, 1, 2, \dots, n-1$; also in der Tat die empirisch richtige Anzahl n .

Die ausgeführten Überlegungen sind anwendbar auf die Spektren der *Alkaliatome*. Die *Ionen* der Alkalien sind nämlich *kugelsymmetrische* Gebilde, und man kann die Dynamik des das Ion zum Atom vervollständigenden „*Valenzelektrons*“ (oder „*Leuchtelektrons*“) in erster Annäherung so beschreiben, daß man dies Elektron als einem statischen zentralsymmetrischen Kraftfeld ausgesetzt annimmt. Doch reichen unsere bisherigen Erwägungen insofern noch nicht aus für dieses Problem, als sie noch keine Rechenschaft von der *DUBLETT-Struktur* der Alkali-spektren zu geben vermögen.

3. Richtungsquantelung. In einem *axialsymmetrischen* Kraftfeld führt ein klassischer Massenpunkt im allgemeinen eine nicht mehr ebene Bewegung aus. Aus der Konstanz der zur Symmetrieachse des Kraftfeldes parallelen Komponente des Drehimpulses folgen jedoch wiederum ähnliche Verhältnisse, wie sie in (25) für den ebenen Fall festgestellt werden.

Die Symmetrieachse sei die z -Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems x, y, z . Wir führen dann Zylinderkoordinaten ein, d. h. also z, ϱ und φ , wo ϱ der senkrechte Abstand von der z -Achse ist. (Also $r = \sqrt{\varrho^2 + z^2}$; $\operatorname{tg} \varphi = y/x$). Analog wie im obigen ebenen Falle erlaubt die Konstanz von p_φ die Zurückführung des *dreidimensionalen* Bewegungsproblems auf ein *zweidimensionales*¹. Danach wird dann in Verallgemeinerung von (25):

$$\left. \begin{aligned} x + iy &= e^{2\pi i \nu' t} \cdot F(t), \\ z &= G(t); \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

¹ Es wird

$$W = \frac{p^2}{2\mu} + U(\varrho, z) = \frac{1}{2\mu} \left(p_\varrho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\varrho^2} + p_z^2 \right) + U(\varrho, z);$$

also kommen wir durch $p_\varphi = \text{const}$ auf ein zweidimensionales Problem mit kinetischer Energie $\frac{1}{2\mu} (p_\varrho^2 + p_z^2)$ und potentieller Energie $\frac{p_\varphi^2}{2\mu\varrho^2} + U(\varrho, z)$. — Entsprechendes gilt auch bei Vorhandensein *magnetischer* Kräfte, obwohl diese sich nicht durch eine potentielle Energie $U(\varrho, z)$ ausdrücken lassen.

dabei sind $F(t)$ und $G(t)$ zwei Funktionen, in denen — wie in dem Faktor von $e^{2\pi i\nu' t}$ in (25) — die Frequenz ν' nicht mehr vorkommt¹.

Wir werden deshalb veranlaßt, eine neue Quantenzahl m einzuführen, deren Änderungen $m \rightarrow m \pm 1$ den klassischen Partialschwingungen $e^{2\pi i\tau\nu'}$ korrespondieren. Da nach (30) klassisch nur $\tau = 0$ und $\tau = \pm 1$ vorkommen, erhalten wir folgende Auswahlregel der „magnetischen Quantenzahl“ m :

$$m \begin{matrix} \leftarrow m \\ \leftarrow m \pm 1. \end{matrix} \quad \left. \vphantom{m} \right\} \quad (31)$$

Die klassischen Gleichungen (30) besagen aber auch etwas über die *Polarisationsverhältnisse* der von der bewegten Ladung emittierten Dipolkugelwellen: Indem wir diese Aussagen sogleich in die Quantentheorie übertragen, stellen wir fest:

Die Übergänge $m \rightarrow m$ entsprechen linear polarisierten Kugelwellen; die Übergänge $m \rightarrow m \pm 1$ entsprechen zirkular polarisierten Kugelwellen. Die Symmetrieachse der Kugelwellen ist natürlich die z -Achse. Über die Verwendbarkeit des Begriffs der Kugelwelle in der Quantentheorie hatten wir uns schon früher ausgelassen (vgl. Kapitel I, § 2, 2).

Alle diese Betrachtungen gelten für jedes axialsymmetrische dynamische System, also auch dann, wenn es sich um Atome und Moleküle mit beliebig vielen Bestandteilen (Elektronen, Kerne) handelt. Die anschauliche Bedeutung von m ist dabei die, daß $m \cdot h/2\pi$ den (zeitlich konstanten) Drehimpuls $p_\varphi = \mathfrak{M}_z$ des Systems um die z -Achse darstellt.

$$m \cdot \frac{h}{2\pi} = \mathfrak{M}_z. \quad (32)$$

Daß wir diese Gleichung (32) als *exakt*, und nicht nur als asymptotisch gültig ansehen, hat wiederum korrespondenzmäßige Gründe. Wir betrachten den besonderen Fall des *ZEEMAN-Effekts* in einem *homogenen* Magnetfeld parallel zu z . Unabhängig von der speziellen Struktur des betrachteten Gebildes — es kann sich z. B. ebensowohl um ein Molekül, wie um ein Atom handeln — ist nach der klassischen Theorie folgendes festzustellen.

I. Bei *sehr schwachem* Magnetfeld $\mathfrak{H}_z = |\mathfrak{H}|$ besitzt das Gebilde eine *magnetische Energie*², die *proportional mit $|\mathfrak{H}|$ und mit \mathfrak{M}_z* ist. — Diese

¹ In dem praktisch wichtigsten Falle, daß die ganze Bewegung eine *dreifach periodische* ist, sind $F(t)$ und $G(t)$ *zweifach* periodische Funktionen der Zeit, mit zwei Grundfrequenzen ν_1, ν_2 , die von ν' im allgemeinen verschieden sind:

$$F(t) = \sum_{\tau, \sigma = -\infty}^{+\infty} F_{\tau\sigma} e^{2\pi i(\tau\nu_1 + \sigma\nu_2)t},$$

$$G(t) = \sum_{\tau, \sigma = -\infty}^{+\infty} G_{\tau\sigma} e^{2\pi i(\tau\nu_1 + \sigma\nu_2)t}.$$

² Die exakte Definition der magnetischen Energie kann am besten unter Bezugnahme auf eine *adiabatische Zustandsänderung*, in Gestalt langsame Änderung von \mathfrak{H}_z , gegeben werden: Bei dieser Änderung ist W eine Funktion von $|\mathfrak{H}|$, von der Form $W = W^0 + |\mathfrak{H}| \cdot \text{const}$ und $|\mathfrak{H}| \cdot \text{const}$ ist die magnetische Energie. — Man beachte, daß (bei festgehaltener Feldrichtung z) der Drehimpuls \mathfrak{M}_z *adiabatisch invariant* ist: $\mathfrak{M}_z = I_\varphi/2\pi$.

einfache und allgemeine Aussage wird korrespondenzmäßig in die Quantentheorie zu übertragen sein: Wir setzen also für die magnetische Energie

$$W^{(m)} = -K \cdot |\mathfrak{H}| \mathfrak{M}_z, \quad (33)$$

wobei K eine für das fragliche Gebilde und seinen gerade vorliegenden stationären Zustand charakteristische Konstante ist.

2. Die Frequenz ν' in (30) hat den Wert

$$\nu' = \frac{1}{2\pi} K \cdot |\mathfrak{H}|. \quad (34)$$

Bei der quantentheoretischen Übersetzung soll aber unseren Vorstellungen nach $h\nu'$ die Differenz zwischen zwei solchen Werten der magnetischen Energie (33) sein, welche zu magnetischen Quantenzahlen m und $m+1$ gehören (bei *unveränderten sonstigen* Quantenzahlen, also auch unverändertem Werte K). Folglich muß \mathfrak{M}_z , welches (im Sinne der Korrespondenz $m h/2\pi \rightarrow \mathfrak{M}_z$) eine Funktion von m ist, *exakt* die Form $\mathfrak{M}_z = m h/2\pi +$ additive Konstante haben, und die additive Konstante kann definitionsmäßig gleich Null gemacht werden.

Es war nicht überflüssig, daß wir die *exakte* Übereinstimmung (32) sorgfältig begründet haben; denn wir werden jetzt einen anderen ähnlichen Fall betrachten, wo eine zu (32) analoge Beziehung *nicht* exakt, sondern nur asymptotisch gilt.

Wir betrachten nämlich jetzt ein *räumlich frei drehbares* System (Atom oder Molekül im feldfreien isotropen Raume), bei welchem also *alle drei* Komponenten des Drehimpulsvektors \mathfrak{M} *zeitlich konstant* sind.

Wir denken uns im klassischen Fall die Richtung des Drehimpulses \mathfrak{M} parallel zur z -Achse; dann werden für die drei Komponenten X, Y, Z des — für die Ausstrahlung maßgebenden — *elektrischen Dipolmomentes* wieder die Bedingungen (30) gelten. *Abgesehen* von dem Hinzutreten der Komponente Z , in welcher die Frequenz ν' nicht vorkommt, haben wir wieder dieselben Verhältnisse, wie bei der oben behandelten *ebenen* Zentralbewegung.

Wir übersetzen: Quantentheoretisch wird es bei unserem frei drehbaren System eine Quantenzahl j geben („*innere Quantenzahl*“), welche nach Multiplikation mit $h/2\pi$ dem Betrage des Drehimpulses korrespondiert:

$$j^2 \cdot \frac{h^2}{4\pi^2} \rightarrow \mathfrak{M}^2. \quad (35)$$

Dabei gilt die Auswahlregel

$$j \begin{cases} \nearrow j \\ \searrow j \pm 1. \end{cases} \quad (36)$$

Es *fehlt* uns aber eine Möglichkeit, auf j die feineren Überlegungen zu übertragen, die wir für m durchführen konnten, und die uns zu (32) führten: tatsächlich wäre es *falsch*, wenn wir (35) zu der exakten Gleichung $j^2 h^2/4\pi^2 = \mathfrak{M}^2$ verschärfen wollten. Vielmehr besteht, wie hier vorweg genommen sei, der exakte Zusammenhang

$$j(j+1) \cdot \frac{h^2}{4\pi^2} = \mathfrak{M}^2. \quad (37)$$

Setzen wir ein Atom (oder Molekül) in ein *schwaches* homogenes Feld parallel zur z -Achse, so ist nach der klassischen Theorie die sich ergebende Bewegung so zu beschreiben: Der Vektor \mathfrak{M} des Gesamtdrehimpulses führt eine *langsame Präzession um die Feldrichtung* z aus, mit der *Präzessionsfrequenz* ν' , wobei dann die Projektion \mathfrak{M}_z von \mathfrak{M} auf die Feldrichtung z *konstant* bleibt. Abgesehen von dieser langsamen Präzession des Vektors \mathfrak{M} verlaufen die Bewegungen in unserem System ebenso, wie im feldfreien Falle.

Dem entspricht folgender quantenphysikalischer Sachverhalt: Ein beliebiges Atom, mit Ausnahme des H-Atoms, das (entsprechend der Entartung der klassischen Ellipsenbahnen) eine Sonderstellung einnimmt, hört in einem schwachen Magnetfeld auf, entartet („*richtungs-entartet*“) zu sein. Ein Term mit der inneren Quantenzahl j *spaltet auf* in $2j + 1$ Terme, die sich durch die verschiedenen Werte der magnetischen Quantenzahl unterscheiden:

$$m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j. \quad (38)$$

Ein homogenes *elektrisches* Feld bedingt übrigens *keine* vollständige Aufhebung der Entartung; die Terme mit *entgegengesetzten* Werten m bleiben ungetrennt.

Erfahrungsgemäß gibt es außer Atomen (und Molekülen) mit *ganzzahligen* Werten j und m auch solche mit *halbzahligen* Werten j und m . Beispielsweise hat das Ag-Atom im Grundzustand den Wert $j = \frac{1}{2}$, und dazu also die möglichen Werte $m = -\frac{1}{2}$ und $m = +\frac{1}{2}$ für die magnetische Quantenzahl.

Die Deutung von m als Wert von $2\pi \mathfrak{M}_z/h$ gemäß (32) bewährt und bestätigt sich in folgender Überlegung. Es sei bei einem Ag-Atom gerade der Wert $m = +\frac{1}{2}$ realisiert, und es werde jetzt die *Richtung* des Magnetfeldes \mathfrak{H} *plötzlich gedreht* um einen Winkel Θ . Wie suchen eine theoretische Unterlage zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten w_+ , w_- für die beiden Möglichkeiten, die es dann gibt: Nachdem das Magnetfeld \mathfrak{H} plötzlich in die Richtung z' gedreht worden ist, kann die magnetische Quantenzahl, die nunmehr die Bedeutung $2\pi \mathfrak{M}_{z'}/h$ hat, *entweder* gleich $+\frac{1}{2}$ *oder* gleich $-\frac{1}{2}$ sein. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten w_+ , w_- sind eindeutig bestimmbar durch folgende Korrespondenzbetrachtung.

Der *statistische Mittelwert* („Erwartungswert“) der Drehimpuls-komponente $\mathfrak{M}_{z'}$ ist offenbar

$$\overline{\mathfrak{M}_{z'}} = w_+ \cdot \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi} - w_- \cdot \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}; \quad (39)$$

für $z' = z$ (also $\Theta = 0$) ergibt das mit $w_+ = 1$ und $w_- = 0$ speziell $\overline{\mathfrak{M}_{z'}} = \frac{1}{2} h/2\pi$, wie es sein muß. Aus Korrespondenzgründen wird nun $\overline{\mathfrak{M}}$ ein *Vektor*

sein müssen, und $\overline{\mathfrak{M}}_{z'}$, die *Projektion* eines zur z -Achse parallelen Vektors vom Betrage $\overline{\mathfrak{M}}_z$ auf die z' -Achse:

$$\overline{\mathfrak{M}}_{z'} = \overline{\mathfrak{M}}_z \cdot \cos \Theta = \frac{1}{2} \frac{h}{2\pi} \cos \Theta. \quad (40)$$

Da andererseits $w_+ + w_- = 1$ sein muß, so ergibt sich aus (39), (40) sofort die PAULISCHE Formel

$$w_+ = \cos^2 \frac{\Theta}{2}; \quad w_- = \sin^2 \frac{\Theta}{2}. \quad (41)$$

4. ZEEMAN-Effekt und Spinelektron. Von der Vorstellung aus, daß das *Elektron* einfach ein *geladener Massenpunkt* sei, müßte man zunächst beim H-Atom das statistische Gewicht des Termes mit der Hauptquantenzahl n gleich n^2 annehmen — und entsprechend bei den Alkalien die Summe der statistischen Gewichte aller Terme der Hauptquantenzahl n gleich n^2 . Denn wir bekämen dann folgendes Bild: Zu gegebenem n gäbe es n verschiedene Werte von j (oder l , was jetzt dasselbe wäre), nämlich $j = l = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Die zugehörigen statistischen Gewichte $2j + 1$ ergäben die Summe

$$\sum_{j=0}^{n-1} (2j + 1) = n^2. \quad (42)$$

Die Erfahrung lehrt aber, daß tatsächlich die statistischen Gewichte *doppelt so groß* sind: Für $n = 0$ ergibt sich insbesondere $j = \frac{1}{2}$ mit $m = -\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$, und allgemein finden wir nach Aufhebung aller Entartungen nicht n^2 , sondern $2n^2$ Terme mit der Hauptquantenzahl n . Hierin kommt eine fundamentale Eigenschaft des Elektrons zutage, deren nähere Analyse durch die Gesetzmäßigkeiten des *anormalen ZEEMAN-Effekts* ermöglicht wird.

Für die in einem schwachen Magnetfeld eintretende Präzession ergibt die klassische Theorie eine sehr einfache Aussage, wenn es sich um ein Atom mit unendlich schwerem Kern und einer beliebigen Anzahl von Elektronen handelt, die sämtlich als Massenpunkte der Masse μ und Ladung e aufzufassen sind. Nach LARMOR ist dann nämlich die *Präzessionsfrequenz* ν' stets gegeben durch

$$\nu' = \frac{e}{4\pi\mu c} |\mathfrak{H}|. \quad (43)$$

Dies korrespondenzmäßig in die Quantentheorie übertragend würden wir die Formel (33) für die magnetische Energie bei Atomen zu

$$W^{(m)} = -m \cdot \frac{e h}{4\pi\mu c} |\mathfrak{H}| \quad (44)$$

verschärfen. Aber die Erfahrung zeigt, daß diese einfache Formel (44) nur für die sog. SINGULETT-Terme richtig ist; im allgemeinen muß man

$$W^{(m)} = -g m \cdot \frac{e h}{4\pi\mu c} |\mathfrak{H}| \quad (45)$$

schreiben, wo der LANDÉSCHE *g-Faktor* eingeführt ist, für welchen Werte

von 1 bis 2 in Frage kommen. Natürlich darf *dieses* g nicht mit einem statistischen Gewicht g verwechselt werden.

Eine zusammenhängende korrespondenzmäßige Beschreibung dieser Verhältnisse ergibt sich auf folgendem Wege. Wir sehen das mit j proportionale Drehmoment eines Atoms als *Resultante* zweier Drehmomente l und s an; für l allein (also im Falle $s=0$) gilt die Formel (44); für s allein ($l=0$) dagegen (45) mit einem LANDÉ-Faktor $g=2$. Dabei bedeutet l die Resultante der „Bahndrehmomente“ der Elektronen (durch $\mathfrak{M}_z = x p_y - y p_x$ usw. definiert); s dagegen ist Resultante der sog. „Spinmomente“ der Elektronen: *bei Vorhandensein nur eines Valenzelektrons* (wie bei Ag und den Alkalien) *ist* $s = \frac{1}{2}$; dagegen ist l stets ganzzahlig. Die Einführung dieses halbzahligen Spinmomentes eines Elektrons (GOUDSMIT-UHLENBECK) kann gekennzeichnet werden als ein Verlassen der Vorstellung, daß das Elektron einfach ein *Massenpunkt* sei; es besteht eine gewisse korrespondenzmäßige Analogie zu einem um eine innere Achse rotierenden Körper, bei dem es außer dem Drehmoment seiner Schwerpunktsbewegung noch ein Drehmoment der Eigenrotation gibt. Aber die Bedeutung dieser Analogie darf nicht überschätzt werden: Im Grunde handelt es sich hier um Verhältnisse, die nicht mehr nach klassischen Analogien voll verstanden werden können. Vorsichtiger ist es, angesichts der durch Einführung des Spinmomentes bedingten Verdoppelung der statistischen Gewichte von einer unklas-sischen „Zweideutigkeit“ zu sprechen (PAULI).

Nun *präzessieren* die beiden Drehmomente l und s um ihre Resultante j ; es seien ψ und φ die (konstanten) Winkel, welche l und s mit j bilden. Die magnetische Energie besteht dann aus zwei zu l bzw. s gehörigen Anteilen, die proportional mit den Projektionen von l und s auf j sind, aber mit einem Unterschied von einem Faktor 2. Durch Anbringung eines weiteren Faktors m/j , der gleich dem \cos des (ebenfalls konstanten) Winkels zwischen j und der Richtung des magnetischen Feldes (um welche j präzessiert) ist, bekommen wir also den LANDÉschen g -Faktor zunächst in der Form

$$mg = \frac{m}{j} \{l \cos \psi + 2s \cos \varphi\} = m \frac{3j^2 + s^2 - l^2}{2j^2}; \quad (46)$$

und indem wir noch gemäß (37) statt j^2 , s^2 , l^2 die Werte $j(j+1)$, $s(s+1)$, $l(l+1)$ einsetzen, ergibt sich als das exakte, den geschilderten Voraussetzungen entsprechende Quantengesetz die berühmte LANDÉsche Formel

$$g = \frac{3j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}. \quad (47)$$

§ 5. Optik und Mechanik.

1. **Dualismus und Relativität.** Die für die Quantenphysik fundamentale Tatsache der *dualistischen*, einerseits wellenhaften und andererseits korpuskularen Struktur der Materie steht mit den **Hauptergebnissen**

der *Relativitätstheorie* in einem näherer Betrachtung würdigen Zusammenhang. Historisch ist ja die die Korpuskulartheorie des Lichtes, in ihrer NEWTONSchen Fassung, älter, als die auf HUYGENS zurückgehende Wellentheorie, und die Zurückdrängung der Korpuskulartheorie durch die Wellentheorie geschah nicht nur auf Grund der *Interferenzerscheinungen*, sondern zum Teil auch auf Grund anderweitiger Argumente, deren rückblickende Betrachtung von unseren heutigen Einsichten auslehrreich ist.

Die Analogie der Lichtstrahlung mit einer korpuskularen materiellen Ausstrahlung wurde, wie von EINSTEIN gelegentlich betont worden ist, wesentlich verstärkt mit dem Ergebnis der Relativitätstheorie, daß das Licht ebenso wie eine materielle Korpuskularstrahlung nicht nur Energie, sondern auch *träge Masse* transportiert. Damit hängt aber eng zusammen, was die Relativitätstheorie über den *Lichtdruck* lehrt: Versucht man, mit NEWTONScher, klassischer Partikelmechanik die Vorstellung der Lichtkorpuskeln auszuführen, so kommt man zu einem falschen, nämlich *verdoppelten* Wert des Lichtdrucks, und dies ist früher als ein Beweisargument zugunsten der Wellentheorie und gegen jede Korpuskulartheorie angesehen worden. Aber die durch die Relativitätstheorie herbeigeführte Abänderung der Partikelmechanik führt dazu, daß die Korpuskulartheorie bezüglich des Lichtdruckes *dasselbe Ergebnis* bringt, wie die Wellentheorie — so daß die Verschiedenheit beider Theorien *gemildert* wird. Dies beruht natürlich darauf, daß eben die Relativitätsmechanik (abweichend von der nichtrelativistischen) einem mit Lichtgeschwindigkeit bewegten korpuskularen Teilchen der Energie E einen Impuls E/c zuschreibt — wodurch sofort eine weitgehende Analogie zu den nach der MAXWELLSchen Theorie berechneten Eigenschaften des Lichtes hergestellt wird.

Historisch noch bedeutungsvoller war die scheinbare Unmöglichkeit, die Gesetze der *Brechung* mit der Korpuskulartheorie in Einklang zu bringen. Die NEWTONSche Theorie ließ eine größere Lichtgeschwindigkeit im *optisch dichteren* Medium erwarten, was später als empirisch unzutreffend erwiesen wurde. Nach der Lichtquantenvorstellung überlegen wir aber folgendermaßen: In der zweidimensionalen Ebene sei die x -Achse die Grenze zweier homogener Medien von verschiedenem Brechungsindex. Sind n_1, n_2 die beiden Brechungsindizes, so sind in den beiden Medien die Wellenlängen λ_1, λ_2 und die Phasengeschwindigkeiten V_1, V_2 einer Lichtwelle von der Frequenz ν (die in beiden Medien gleich bleibt) gleich

$$\lambda_1 = \frac{c}{n_1 \nu}, \quad \lambda_2 = \frac{c}{n_2 \nu}; \quad V_1 = \frac{c}{n_1}, \quad V_2 = \frac{c}{n_2}. \quad (I)$$

Hat nun ein entsprechendes Lichtquant $h\nu$ die Impulskomponenten p_{1x}, p_{1y} bzw. p_{2x}, p_{2y} beim Durchfliegen der beiden Medien, so wird

$$\sqrt{p_{1x}^2 + p_{1y}^2} = \frac{h\nu}{V_1}, \quad \sqrt{p_{2x}^2 + p_{2y}^2} = \frac{h\nu}{V_2}; \quad (2)$$

und außerdem bleibt beim Durchqueren der Grenzfläche die tangentielle Komponente des Impulses ungeändert: $p_{1x} = p_{2x}$. Also gilt die Proportion:

$$\frac{p_{1x}}{\sqrt{p_{1x}^2 + p_{1y}^2}} : \frac{p_{2x}}{\sqrt{p_{2x}^2 + p_{2y}^2}} = V_1 : V_2 = n_2 : n_1. \quad (3)$$

Das ist das SNELLIUSSCHE Brechungsgesetz. Man sieht aus dieser Ableitung, wie man die sonst an das HUYGENSSCHE Prinzip angeknüpfte Begründung auch in korpuskularer Weise einkleiden kann. Wenn man nun aber diese beiden verschiedenen Ableitungsweisen genauer miteinander vergleicht, so sieht man bald, daß es gar nicht *merkwürdig* ist, daß beidemal dasselbe herauskommt. Denn trotz des weiten Unterschiedes der anschaulichen Unterlagen beider Überlegungen ist es im Kern doch die gleiche geometrische Konstruktion, die in beiden Fällen ausgeführt wird.

Während wir aber in Problemen, die wir aus historischer Gewohnheit an Hand der Wellenvorstellung zu durchdenken pflegen, statt dessen die Korpuskularvorstellung einführen können, läßt sich umgekehrt z. B. im Problem des COMPTON-Effekts die Korpuskularvorstellung wieder durch die Wellenvorstellung ersetzen. Wir konnten den COMPTON-Effekt *als Beweis für die korpuskulare Natur des Lichtes* ansehen, indem wir die korpuskulare Natur der Kathodenstrahlung als *bekannt* annahmen. Berufen wir uns aber umgekehrt auf unsere Kenntnis der wellenhaften Natur des Lichtes, so liefert der COMPTON-Effekt uns andererseits *einen Beweis für die DE BROGLIESCHEN Elektronenwellen*. Denn ebenso gut, wie man die COMPTONSCHEN Wellenlängenänderung (9), § 2, 2, Kapitel I aus der Anwendung der Korpuskularvorstellung auf Licht und Elektronenstrahlung ermitteln kann, ebenso gut erhält man sie, wenn man Licht und Elektronenausstrahlung *beide* als Wellenvorgänge auffaßt. Man muß sich nur klar machen, daß ein interferenzmäßiges Zusammenpassen bestehen muß zwischen den je vier Wellen, welche den Anfangs- und Endzuständen von Lichtquant und Elektron bei einem bestimmten COMPTON-Prozeß entsprechen: dieses für die wechselseitige Reflexion von Licht- und Elektronenwellen aneinander notwendige Zusammenpassen der vier Teilwellen drückt sich in Bedingungen aus, welche gerade dem Energie- und Impulssatz der Korpuskularvorstellung äquivalent sind.

Dies gilt übrigens auch für andere quantenphysikalische Elementarakte, wie z. B. die FRANCK-HERTZSCHEN *Elektronenstöße*. Auch diese können natürlich im Sinne der DE BROGLIESCHEN Wellenvorstellung aufgefaßt werden: Daß für die Anregung eines Atoms durch ein stoßendes Elektron Energie- und Impulssatz gelten, stellt sich dann als Bedingung für das interferenzmäßige Zusammenpassen der vier Wellen dar, welche den Anfangs- und Endzuständen von Atom und Elektron entsprechen.

2. Kanonische Variablen¹. Für die tiefere Erfassung der mechanischen Gesetze sind einige mathematische Begriffe und Überlegungen von

¹ Dieser Abschnitt kann zunächst überschlagen werden.

Bedeutung, auf die wir jetzt kurz eingehen wollen. Dabei werden wir übrigens auch den noch fehlenden Beweis der obigen klassischen Beziehung (13), § 2, 4 nachholen.

Wenn wir bei einem System mit einem einzigen Freiheitsgrade in der „Phasenebene“ p, q neue Koordinaten $P = P(p, q)$, $Q = Q(p, q)$ einführen, so nennen wir diese Transformation eine *kanonische Transformation* (und die P, Q gleich den p, q *kanonische Variablen*), wenn die Abbildung der Phasenebene p, q auf die neue Phasenebene P, Q *flächentreu*, also ihr *Funktionaldeterminante* gleich 1 ist:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial q} \end{vmatrix} = 1. \quad (4)$$

Bei derartigen Transformationen ist definitionsgemäß die Phasenfläche I *invariant*, so daß also I als *kanonische Invariante* bezeichnet werden kann. Ferner ist, wenn F und G zwei beliebige Funktionen von p, q — also auch von P, Q — sind, die aus F, G und p, q gebildete Funktionaldeterminante offenbar *kanonisch invariant*:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} & \frac{\partial G}{\partial p} \\ \frac{\partial F}{\partial q} & \frac{\partial G}{\partial q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial P} & \frac{\partial G}{\partial P} \\ \frac{\partial F}{\partial Q} & \frac{\partial G}{\partial Q} \end{vmatrix} = (F, G) = -(G, F). \quad (5)$$

Man nennt (F, G) das *POISSON-JACOBISCHE Klammersymbol* von F und G ; mit dieser Bezeichnung kann also die Charakterisierung (4) eines kanonischen Variablenpaares P, Q in der Gestalt

$$(P, Q) = 1 \quad (6)$$

geschrieben werden.

Für eine beliebige Funktion $F = F(p, q)$ ist offenbar

$$\frac{\partial F}{\partial p} = (F, q); \quad -\frac{\partial F}{\partial q} = (F, p). \quad (7)$$

Schreibt man die *Energie* W als Funktion von p und q :

$$W = H(p, q) = \frac{p^2}{2\mu} + U(q), \quad (8)$$

so kann offensichtlich die mechanische Bewegungsgleichung $\dot{p} = \mu \ddot{q} = -U'(q)$ durch die sog. *kanonischen Bewegungsgleichungen*

$$\left. \begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = (H, q), \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = (H, p) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ausgedrückt werden. In diese *kanonische* Gestalt können die Bewegungsgleichungen auch für die *relativistische* Mechanik gebracht werden. Sie lassen sich zusammenfassen in der allgemeinen Feststellung

$$\dot{F} = (H, F), \quad (10)$$

deren Richtigkeit sich aus

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} = -\frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} = (H, F) \quad (11)$$

ergibt.

Für $F=H$ ergibt sich der *Energiesatz* (der natürlich aber auch aus (9) unmittelbar abzulesen ist, ohne Kenntnis des Begriffs der POISSON-JACOBISCHEN Klammersymbole) in der Form

$$\dot{H} = (H, H) = 0. \quad (12)$$

Für $F=t$ ergibt sich

$$(H, t) = 1; \quad (13)$$

also *Energie und Zeit sind ein kanonisches Variablenpaar* (sind „kanonisch konjugiert“).

Rückwärts kann man aus dieser kanonisch invarianten Feststellung (13) sogleich wieder (10) und damit die kanonischen Bewegungsgleichungen erhalten: Es wird ja

$$\dot{F} = \frac{\partial F(H, t)}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial H} \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial t} = (H, F).$$

Folglich sind die *kanonischen Bewegungsgleichungen invariant gegen kanonische Transformationen*: Schreiben wir die Energie als Funktion von P und Q , so wird

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P}; \quad \dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q}. \quad (14)$$

Man kann aber die Bedingung für kanonische Transformationen auch in eine andere Form setzen, nämlich:

$$p dq + Q dP = dS, \quad (15)$$

d. h. die linke Seite soll ein *vollständiges Differential* sein. Denken wir uns z. B. die P, Q als Funktion von p, q ausgedrückt, so heißt (15) ausführlicher:

$$\left(p + Q \frac{\partial P}{\partial q} \right) dq + Q \frac{\partial P}{\partial p} dp = \frac{\partial S}{\partial q} dq + \frac{\partial S}{\partial p} dp.$$

Die *Integrabilitätsbedingung* heißt dann

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial p} = 1 + \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} + Q \frac{\partial^2 P}{\partial q \partial p} = \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} + Q \frac{\partial^2 P}{\partial p \partial q},$$

so daß in der Tat (15) mit $(P, Q) = 1$ äquivalent ist.

Wir wollen aber S jetzt als Funktion von q und P auffassen; dann ergibt (15) folgende Gestalt einer *kanonischen Transformation*:

$$p = \frac{\partial S(q, P)}{\partial q}; \quad Q = \frac{\partial S(q, P)}{\partial P}. \quad (16)$$

Auf Grund der kanonischen Bewegungsgleichungen (14) ist P dann und nur dann *zeitlich konstant*, wenn H eine Funktion von P allein (also nicht von P und auch von Q) ist:

$$H = W(P);$$

für Q gilt dann nach (14):

$$\dot{Q} = \frac{dW}{dP}.$$

Nun seien p, q *periodische Funktionen der Zeit* mit der *Grundperiode* ν , welche eine bestimmte Funktion der Energie W ist: $\nu = \nu(W)$. Wir können $P = P(W)$ so wählen, daß

$$\dot{Q} = \frac{dW}{dP} = \nu(W); \quad Q = \nu t + \delta \quad (17)$$

(mit zeitlich konstantem δ) wird. Wir wollen dann die Bezeichnung w statt Q gebrauchen; und wir behaupten, daß gerade die Größe I konjugierter Impuls P zu $Q = w$ ist. Zum Beweis folgern wir aus (16) wegen $\dot{P} = 0$:

$$w = \frac{\partial^2 S(q, P)}{\partial q \partial P} \dot{q} = \frac{\partial p(q, P)}{\partial P} \dot{q};$$

dann wird

$$\mathbf{I} = \int_0^1 dw = \int_0^{\nu} \dot{w} dt = \frac{d}{dP} \oint p dq = \frac{dI}{dP},$$

so daß unsere Behauptung $(I, w) = \mathbf{I}$ bewiesen ist. Danach haben wir in (17) tatsächlich die Beziehung

$$\nu = \frac{dW(I)}{dI} \quad (18)$$

bewiesen.

Die Funktion $S(q, I)$ genügt, da $H(p, q) = W(I)$ ist, der HAMILTON-JACOBI'schen *partiellen Differentialgleichung*

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = W(I); \quad (19)$$

für $H(p, q) = p^2/2\mu + U(q)$ kann S also leicht ermittelt werden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial q} &= \sqrt{2\mu(W - U(q))}; \\ S(q, I(W)) &= \int_0^q \sqrt{2\mu(W - U(q'))} dq'; \\ I(W) &= \oint p dq = \oint \frac{\partial S}{\partial q} dq = \oint \sqrt{2\mu(W - U(q))} dq. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Allgemein (auch bei *relativistischer* Mechanik) gilt offenbar, daß

$$S' = S(q, I) - I w \quad (21)$$

eine *periodische Funktion der Zeit* ist, sodaß also $S(q, I)$ bei jeder *Bewegungsperiode um I zunimmt*.

Betreffs der POISSON-JACOBI'schen *Klammersymbole* stellen wir noch folgende einfache Eigenschaften zusammen: Es ist

$$\left. \begin{aligned} (F_1 + F_2, G) &= (F_1, G) + (F_2, G), \\ (F_1 F_2, G) &= F_1 (F_2, G) + (F_1, G) F_2; \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

und es gilt die berühmte JACOBI'sche *Identität*

$$(F, (G, L)) + (G, (L, F)) + (L, (F, G)) = 0. \quad (23)$$

Endlich sei, ohne ausführliche Beweise, die Verallgemeinerung des soeben Dargelegten für eine beliebige Anzahl f von Freiheitsgraden erläutert.

Wir gebrauchen zur Beschreibung des mechanischen Systems f Koordinaten q_1, q_2, \dots, q_f mit zugehörigen *kanonisch konjugierten Impulsen* p_1, p_2, \dots, p_f . Sind F, G zwei beliebige Funktionen der p, q , so wird durch

$$(F, G) = - (G, F) = \sum_k \left(\frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q_k} - \frac{\partial G}{\partial p_k} \frac{\partial F}{\partial q_k} \right) \quad (24)$$

das *POISSON-JACOBIsche Klammersymbol* definiert. Seine in (22), (23) festgestellten Eigenschaften bleiben auch bei $f > 1$ bestehen; ferner ist offenbar (7) zu verallgemeinern zu

$$\frac{\partial F}{\partial p_k} = (F, q_k); \quad - \frac{\partial F}{\partial q_k} = (F, p_k). \quad (25)$$

Die *kanonischen Bewegungsgleichungen*

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} = (H, q_k), \\ \dot{p}_k &= - \frac{\partial H}{\partial q_k} = (H, p_k) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

sind wiederum offenbar zusammenfaßbar in

$$\dot{F} = (H, F), \quad (27)$$

was den *Energiesatz* $\dot{H} = (H, H) = 0$ und ferner

$$(H, t) = 1 \quad (28)$$

ergibt.

Die *kanonischen Transformationen* bei f Freiheitsgraden wollen wir derart definieren, daß die Klammersymbole (F, G) wiederum *kanonisch invariant sind*; zur Erfüllung dieser Forderung ist offenbar *notwendig*, daß für jedes kanonische Variablensystem $P_1, P_2, \dots, P_f; Q_1, Q_2, \dots, Q_f$ die Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} (P_k, P_l) &= (Q_k, Q_l) = 0; \\ (P_k, Q_l) &= \delta_{kl} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

gelten. (Hierin soll $\delta_{kk} = 1$ und δ_{kl} mit $l \neq k$ gleich Null sein.) Umgekehrt ist (29) auch *hinreichend* dafür, daß (F, G) invariant bleibt, wenn zu seiner Berechnung gemäß der Definition (24) die P, Q statt der p, q benutzt werden; also haben wir im (29) die *sinngemäße Definition der kanonischen Transformationen*.

Ist $(\alpha, \beta) = 1$, so kann man stets das Variablenpaar α, β vervollständigen zu einem kanonischen Größensystem $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_f; \beta_1 = \beta, \beta_2, \dots, \beta_f$. Insbesondere bedeutet also (28) die Möglichkeit, ein kanonisches Variablensystem

$$\alpha_1 = H, \alpha_2, \dots, \alpha_f; \quad \beta_1 = t, \beta_2, \dots, \beta_f \quad (30)$$

herzustellen; in diesem sind dann nach (27) und (29) alle α sowie die β_2 bis β_f *zeitlich konstant*. Da aus dieser Feststellung wiederum rückwärts die *kanonischen Bewegungsgleichungen* gefolgert werden können, so sind die kanonischen Bewegungsgleichungen auch für $f > 1$ *kanonisch invariant*.

Eine andere Formulierung *kanonischer Transformationen* erhalten wir wiederum durch

$$\sum_{k=1}^f (p_k dq_k + Q_k dP_k) = dS, \quad (31)$$

oder

$$p_k = \frac{\partial S(q, P)}{\partial q_k}; \quad Q_k = \frac{\partial S(q, P)}{\partial P_k}. \quad (32)$$

Für eine Transformationsfunktion S , welche zu *zeitlich konstanten* P_1, P_2, \dots, P_f führt — so daß $H = H(P_1, P_2, \dots, P_f)$ ist — ergibt sich die HAMILTON-JACOBISCHE *partielle Differentialgleichung*

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_f}; q_1, q_2, \dots, q_f\right) = W(P_1, P_2, \dots, P_f). \quad (33)$$

Die „HAMILTON-JACOBISCHE Theorie“, in welche wir soeben eine Einführung gegeben haben, erreicht mit der Aufdeckung der beziehungsreichen Zusammenhänge, die wir kurz betrachteten, die äußerste gedankliche Durchdringung der klassisch-mechanischen Gesetze. Wie tief diese Theorie das naturgesetzlich Wesentliche der Mechanik erfaßt, ist erst durch die Quantentheorie offenbar geworden: Alle entscheidenden Schritte in der Entwicklung zur Quanten- und Wellenmechanik sind vollzogen im engsten Anschluß an die wegweisenden Begriffsbildungen der HAMILTON-JACOBISCHEN Theorie, die geradezu als eine korrespondenzmäßige *Vorwegnahme* der modernen Quantentheorie bezeichnet werden darf.

3. Die Phasenflächen. HAMILTON hat seine berühmte mathematische Theorie der Punktmechanik von anschaulichen physikalischen Überlegungen aus entwickelt: Die *geometrische Optik* war damals im Sinne der NEWTONSCHEN Theorie als Lehre von den *Bahnen der Lichtpartikel* formuliert; HAMILTON suchte sie nun der damals aufkommenden Wellentheorie des Lichtes anzupassen, als die für hinreichend kleine Wellenlängen gültige Vereinfachung der vollständigen Wellenoptik. Nach der damit erreichten Vertiefung der geometrischen Optik verglich er später allgemein die *Bahnen*, die ein Massenpunkt in einem gegebenen Kraftfeld beschreiben kann, mit den *Lichtstrahlen* in einem Problem der *geometrischen Optik*, und konstruierte sodann für das mechanische Problem das Analogon der optischen *Phasenflächen*¹. Diese Konstruktion führt auf jene „Wirkungsfunktion“ S , welche der HAMILTON-JACOBISCHEN *Differentialgleichung*

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z}; x, y, z\right) = W \quad (34)$$

genügt, wenn $H(p_x, p_y, p_z; x, y, z)$ die *Energie* des Massenpunktes (als Funktion seiner Koordinaten x, y, z und Impulse p_x, p_y, p_z) ist.

¹ Unter einer „Phasenfläche“ verstehen wir in diesem Abschnitt stets eine *Fläche konstanter Phase* in einem Wellenvorgang. Man lasse sich nicht dadurch verwirren, daß wir andererseits in § 2, 4, die Größe I als „Phasenfläche“ bezeichnet haben.

Für unsere jetzige quantentheoretische Untersuchung gewinnt nun dieser eingehende *Vergleich* zwischen der *Mechanik eines Massenpunktes* und der *geometrischen Optik* in einem inhomogenen (isotropen) Medium eine viel tiefere Bedeutung, als ihm zu HAMILTONs Zeit zugeschrieben werden konnte. Wir haben ja eine tiefgehende Revisionsbedürftigkeit der klassischen Mechanik festgestellt; und wir kennen in den DE BROGLIESchen Wellen bereits ein Gedankenbild, das uns über die Anwendungsgrenzen der klassisch-mechanischen Begriffe hinauszuführen vermag. Dies läßt vermuten, daß für eine vollständigere Erfassung der exakten Gesetze der Quantentheorie die klassische Punktmechanik zu ersetzen sei durch eine „*Wellenmechanik*“, zu welcher sich die klassische Mechanik analog verhält, *wie die geometrische Optik zur Wellenoptik*.

Ein Kathodenstrahl, der ein elektrisches oder magnetisches Feld durchläuft, beschreibt dabei eine klassisch-mechanisch berechenbare Bahn, solange das auf ihn wirkende Kraftfeld praktisch homogen ist innerhalb von Raumteilen, die sehr groß gegenüber einem Würfel mit der in Frage kommenden DE BROGLIESchen Wellenlänge als Kantenlänge sind. Bei Reflexionen an einem Kristallgitter jedoch zeigen sich die der DE BROGLIESchen Wellenlänge entsprechenden Beugungserscheinungen, und die Dynamik des in einem H-Atom enthaltenen Elektrons entzieht sich grundsätzlich der Erfassung durch die klassisch-mechanischen Begriffe. Wir wollen aber versuchen, sie „wellenmechanisch“ analog zu beschreiben, wie einen wellenoptischen Vorgang in einem Medium, das schon innerhalb eines Wellenlängenkubus starke Inhomogenitäten zeigt. Dies ist der Weg, den SCHRÖDINGER mit so großem Erfolge beschritten hat, und dessen Anfang bereits gebahnt ist durch HAMILTONs Aufdeckung der vollständigen Analogie von Punktmechanik und geometrischer Optik.

Wir betrachten zunächst eine *eindimensionale* Bewegung in der x -Richtung, und zwar soll die geometrische Optik gelten, was wir genauer folgendermaßen erläutern: Der Massenpunkt habe eine Energie

$$\frac{p^2}{2\mu} + U(x) = W, \quad (35)$$

so daß ihm eine vom Orte x abhängige DE BROGLIESche Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2\mu(W - U(x))}} \quad (36)$$

zuzuordnen ist. Es soll dann an jedem Orte x die potentielle Energie $U(x)$ praktisch konstant sein innerhalb eines gegenüber λ großen Intervalls.

Die *Phasengeschwindigkeit* $\lambda v = \lambda W / h$ der DE BROGLIESchen Welle hat den *von h unabhängigen Wert*¹

$$u = \lambda v = \frac{W}{\sqrt{2\mu(W - U(x))}}. \quad (37)$$

¹ Bei nichtrelativistischer Mechanik werden wir gewöhnlich die DE BROGLIESche Frequenz nach $h\nu = W$ bestimmen, *ohne* in W die Ruhenergie μc^2 mitzuzählen. Die damit eintretende Verkleinerung von ν um den *konstanten* Addenden $\mu c^2/h$ stört in nichtrelativistischen Rechnungen nicht.

Diejenige *Phasenfläche* der DE BROGLIESchen Wellen, welche zur Zeit $t=0$ bei $x=0$ war, ist an der Stelle x angekommen zur Zeit

$$\tau(x) = \int_0^x \frac{dx}{u};$$

und wir können sagen: Die durch

$$\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 \cdot \frac{1}{2\mu} + U(x) = W; \quad \frac{dS}{dx} = \frac{W}{u} \quad (38)$$

bestimmte Funktion $S = S(x)$ mit $S(0) = 0$ bedeutet die mit W multiplizierte Zeit der Phasenwanderung von $x=0$ bis x .

Dies ist sogleich dreidimensional zu verallgemeinern. Zur Zeit $t=0$ fassen wir eine bestimmte Phasenfläche des betrachteten DE BROGLIESchen Wellenvorganges ins Auge, und wir verfolgen diese Phasenfläche in ihrer zeitlichen Veränderung. Im Laufe der Zeit geht aus ihr eine einparametrische Schar weiterer Phasenflächen hervor, und zu jeder dieser Flächen gehört ein bestimmter Wert der Zeit t ; diesen wollen wir noch mit W multiplizieren und das Ergebnis S nennen: Dann ist

$$\tau(x, y, z) = \frac{S(x, y, z)}{W}, \quad (39)$$

also die Zeit, welche vergeht, bis die zur Zeit $t=0$ angenommene Phasenfläche durch ihre Wanderung und Deformation gerade den Punkt x, y, z erreicht. Die so definierte Funktion $S(x, y, z)$ genügt der HAMILTON-JACOBISchen Differentialgleichung (34) — deren anschauliche Bedeutung wir somit ermittelt haben.

Innerhalb der Gültigkeitsgrenzen der klassischen Mechanik können wir also die DE BROGLIE-SCHRÖDINGERSche Wellenamplitude $\psi(x, y, z, t)$ aus der Wirkungsfunktion S berechnen: Für den uns beschäftigenden Fall einer monochromatischen Welle wird

$$\psi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z) e^{-2\pi i \nu t} = e^{2\pi i \nu (\tau(x, y, z) - t)}; \quad (40)$$

so muß ψ aussehen, damit seine Phasenflächen in der von uns ermittelten Weise fortschreiten. Zwar könnte man daran denken, statt der *Exponentialfunktion* einen *reellen Sinus* zu nehmen — hierin liegt augenblicklich noch eine gewisse Willkür. Aber wir werden sehen, daß uns in der Tat gerade die Exponentialfunktion auf das Richtige führt. Beachten wir noch $h\nu = W$, so wird nach (39), (40):

$$\psi = \varphi e^{-\frac{2\pi i}{h} W t} = e^{\frac{2\pi i}{h} \{S - W t\}} \quad (41)$$

Diese Ergebnisse präzisieren nun unser Programm, die klassische Mechanik des Massenpunktes durch eine quantentheoretische Wellenmechanik zu ersetzen. Statt der HAMILTON-JACOBISchen Differentialgleichung (34) werden wir eine neue Gleichung zu suchen haben, die nur im Grenzfall $h \rightarrow 0$ in (34) übergeht, und von dieser neuen Gleichung ist zu erwarten, daß sie dann ihre einfachste und natürlichste Gestalt

annimmt, wenn sie nicht als Gleichung für S , sondern als eine Gleichung für die Wellenamplitude $\varphi = e^{\frac{2\pi i}{h} S}$ formuliert wird.

Tatsächlich führt uns schon die Erkenntnis, daß die Wellenamplitude $\varphi = e^{\frac{2\pi i}{h} S}$ eine primitivere Bedeutung haben muß, als die abstraktere Wirkungsfunktion S , einen erheblichen Schritt vorwärts im Verständnis der Quantengesetze. Es sei wieder der Spezialfall einer *eindimensionalen* Bewegung ins Auge gefaßt, und zwar soll es jetzt eine *periodische* Bewegung sein. Wir wissen (vgl. § 2, 4), daß die *Quantelung* dieser Bewegung (soweit die klassische Berechnungsweise dafür ausreichend ist) so vollzogen werden kann, daß wir das Phasenintegral I gleich einem *ganzzahligen Vielfachen* von h setzen:

$$I = nh; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (42)$$

Ferner haben wir aber gesehen (vgl. § 5, 2), daß die Wirkungsfunktion $S(x, I)$ in diesem Falle eine vieldeutige Funktion von x ist: bei jeder vollen Bewegungsperiode nimmt $S(x, I)$ gerade um I zu.

Das bedeutet ja aber: S/h nimmt bei den quantentheoretisch in Betracht kommenden Werten (42) von I solche Werte an, die *ganzzahlige Differenzen* haben, und $\varphi = e^{\frac{2\pi i}{h} S}$ ist also eine *eindeutige* Funktion von x . Damit gewinnen wir ein ganz neues Verständnis für die quantentheoretische Grundtatsache der *diskreten Quantelung* periodischer Systeme. Die Forderung, daß eine *eindeutig* bestimmte Wellenamplitude φ existiere, kann als Ursprung dieser Quantelung angesehen werden.

Dies gilt bei mehrdimensionaler, mehrfach periodischer Bewegung ebenfalls.

4. Die SCHRÖDINGERSche Gleichung. Das fundamentale Problem der Quantentheorie, das wir im Voranstehenden formuliert haben, ist von SCHRÖDINGER erkannt und gelöst worden: Die *SCHRÖDINGERSche Gleichung* ist die quantentheoretische Verallgemeinerung der *HAMILTON-JACOBISchen Differentialgleichung*. Ihre Aufstellung ergibt sich nach den Vorbereitungen des vorigen Abschnitts ganz eindeutig aus der geforderten Analogie:

Mechanik	Optik	
Klassische HAMILTON-JACOBISCHE Differentialgleichung	Geometrische Optik	Approximation für kleine λ
SCHRÖDINGER-Gleichung (Wellenmechanik)	Wellenoptik	Exakte Theorie

Wir schreiben nach SCHRÖDINGER:

$$-\frac{\hbar^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{2\mu} \Delta\varphi + U(x, y, z) \cdot \varphi = W\varphi. \quad (43)$$

(Mit $\Delta\varphi$ ist, wie üblich, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ gemeint.) Tatsächlich gewinnen wir hieraus für kleine Wellenlängen wieder die HAMILTON-JACOBISCHE

Gleichung zurück. Denn der Ansatz $\varphi = e^{\frac{2\pi i}{h} S(x, y, z)}$ ergibt zunächst

$$-\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{h}{2\pi i} \Delta S + \frac{1}{2\mu} (\text{grad } S)^2 + U(x, y, z) = W; \quad (44)$$

und bei kleinen Wellenlängen (oder $h \rightarrow 0$) können wir in (44) *das erste Glied streichen*: Es ergibt sich in der Tat die HAMILTON-JACOBISCHE Differentialgleichung

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z}; x, y, z\right) = \frac{(\text{grad } S)^2}{2\mu} + U(x, y, z) = W. \quad (45)$$

Die systematische Verwertung der SCHRÖDINGERSCHEN Gleichung (43) gehört in das nächste Kapitel. Hier begnügen wir uns mit einigen orientierenden Bemerkungen.

Im *kräftefreien Fall* vereinfacht sich die SCHRÖDINGER-Gleichung (43) zu

$$\frac{h^2}{8\pi^2\mu} \Delta\varphi + W\varphi = 0. \quad (46)$$

Setzen wir ihre Lösung φ insbesondere als in der x -Richtung fortschreitende *ebene Welle* an:

$$\psi = e^{2\pi i \left(\frac{x}{\lambda} - \nu t\right)}; \quad \varphi = e^{2\pi i \frac{x}{\lambda}}, \quad (47)$$

so ergibt sich

$$\frac{h^2}{8\pi^2\mu} \Delta\varphi = \frac{h^2}{8\pi^2\mu} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{h^2}{2\mu\lambda^2} \varphi,$$

also

$$\frac{h^2}{2\mu\lambda^2} = W = \frac{p_x^2}{2\mu},$$

oder

$$\frac{h}{\lambda} = p_x, \quad (48)$$

womit wir für die ebene Welle wieder zwangsläufig auf die DE BROGLIEsche Wellenlänge geführt werden. Offenbar wird aber allgemeiner (46) befriedigt auch durch eine beliebige *Superposition* ebener DE BROGLIEscher Wellen

$$\psi = e^{\frac{2\pi i}{h}(\mathfrak{p}\tau - Wt)}, \quad \varphi = e^{\frac{2\pi i}{h}\mathfrak{p}\tau} \quad (49)$$

mit übereinstimmender Frequenz $\nu = W/h$.

Betrachten wir nun einen Massenpunkt in einem *geschlossenen Gefäß* vom Volum V mit *reflektierenden Wänden*. Im *Innern* des Volums V muß dann die Gleichung (46) der kräftefreien Bewegung gelten; aber *außerhalb* der Wände des Gefäßes kann der Massenpunkt nicht erscheinen. Dies werden wir dadurch auszudrücken haben, daß φ außerhalb von V gleich Null ist; was man auch durch die Bemerkung begründen kann, daß außerhalb von φ die SCHRÖDINGER-Gleichung (43) mit unendlich großer potentieller Energie U gelten muß, was $\varphi = 0$ ergibt.

Wir stehen also vor folgender mathematischer Aufgabe: Es soll in V eine Funktion $\varphi(x, y, z)$ bestimmt werden, welche dort (46) erfüllt, und welche auf der Oberfläche des Volums V gleich Null ist; aber in V soll sie natürlich *nicht* etwa überall gleich Null sein. Dies Problem ist gerade in neuerer Zeit Gegenstand vieler mathematischer Untersuchungen gewesen, als deren Ergebnis wir folgendes hervorheben¹: Das gestellte Problem ist nur für spezielle Werte W lösbar; zu einem vorgegebenen Hohlraum V gehört eine *unendliche diskrete* Reihe von „Eigenwerten“ W_0, W_1, W_2, \dots der Gleichung (46), derart, daß für $W = W_n$ eine Lösung $\varphi = \varphi_n$ existiert, während es für alle sonstigen Werte W keine Lösung $\varphi \neq 0$ gibt. Während die einzelnen Eigenwerte W_0, W_1, W_2, \dots Funktionen der *Gestalt* des Hohlraumes V sind, hängt die *asymptotische Verteilung der Eigenwerte* nur von der *Größe* (also *nicht* von der *Gestalt*) des Volums V ab. Es gibt nämlich asymptotisch

$$2\pi V \frac{(2\mu)^{3/4}}{\hbar^3} W^{1/2} \Delta W \quad (50)$$

Eigenwerte im Intervalle $W, W + \Delta W$. Das ist für den Fall eines würfelförmigen Hohlraums aus (8), § 1 zu erschließen durch sinngemäße Übertragung der Überlegung, die uns früher zu (16), § 1, 2, Kapitel 1 führte.

Diese mathematischen Tatsachen lassen uns an einem grundsätzlichen Beispiel das *Zustandekommen der diskreten Energiestufen von den DE BROGLIESchen Wellen bzw. der SCHRÖDINGERSchen Gleichung* aus verstehen (das wir in den vorläufigen Überlegungen des § 1 vorausgesehen hatten): Der im Hohlraum V eingeschlossene Massenpunkt kann keine anderen Energiewerte annehmen, als die *Eigenwerte* W_0, W_1, W_2, \dots . Für den Spezialfall des rechteckigen Hohlraums konnten wir ja schon früher (§ 1) diese Eigenwerte der Energie bestimmen — für anders gestaltete Hohlräume sind sie natürlich im allgemeinen nicht mehr durch geschlossene Formeln darstellbar. Aber ganz allgemein bestätigt sich jetzt unsere schon früher aus Korrespondenzbetrachtungen gewonnene Ermittlung der *asymptotischen Verteilung* der Eigenwerte: Wenn wir die wellenmechanische Überlegung, die uns zu (50) führte, für einen *zweidimensionalen* Hohlraum $V = l^2$ durchführen, bekommen wir wieder die aus (13), (14), § 4, 1 erschlossene asymptotische Verteilung; und umgekehrt können wir (50) auch korrespondenzmäßig begründen durch dreidimensionale Anwendung der Überlegung von § 4, 1.

Die Unabhängigkeit der asymptotischen Verteilung der Eigenwerte von der Gestalt des Hohlraumes findet sich übrigens nicht nur bei der Gleichung (46), sondern auch bei mathematisch ähnlichen anderen

¹ Eine ausführliche Behandlung dieses für die moderne Quantentheorie grundlegenden mathematischen Problems findet sich in: HILBERT-COURANT, Methoden der mathematischen Physik. Berlin 1924. Dieses Buch, obwohl kurz vor der Aufstellung der neuen Quanten- und Wellenmechanik entstanden, enthält eine fast unerschöpfliche Fülle von mathematischen Hilfsmitteln, die gerade der moderne Quantentheoretiker braucht.

Problemen. So ist insbesondere bei einem *elektromagnetischen* Hohlraum die asymptotische Verteilung der *Eigenfrequenzen* wiederum nur von der Größe V des Hohlraums abhängig; die in Kapitel I, § 1 (16) für den Spezialfall eines *würfelförmigen* Hohlraums berechnete asymptotische Verteilung der Eigenfrequenzen gilt also *allgemein*. Wäre das *nicht* so, dann könnte es ein von der Hohlraumgestalt unabhängiges Wärmestrahlungsgesetz (PLANCKSches Gesetz) offenbar überhaupt nicht geben. Deshalb wurde diese Unabhängigkeit aus physikalischen Gründen vermutet (LORENTZ), bevor noch die mathematische Methoden genügend entwickelt waren, um ihren Beweis (WEYL, COURANT) zu ermöglichen.

Wir wollen aber von diesen Betrachtungen nicht Abschied nehmen, ohne uns den Sinn des Erreichten noch einmal sorgfältig klar zu machen. Wir haben den Übergang von der HAMILTON-JACOBISchen Gleichung zur SCHRÖDINGERSchen in Parallele gestellt zum Übergang von der geometrischen Optik zur Wellenoptik, und es erhebt sich jetzt der verführerische Gedanke, ob nicht damit überhaupt das eigentliche Wesen der Quantengesetze erkannt sei? Haben wir nicht vielleicht die Lösung des ganzen Quantenproblems in der Hand, nachdem wir den nur annäherungsweise und nur bedingt verwendbaren *Bahn*begriff der klassischen Punktmechanik durch den *Wellen*begriff ersetzt haben? Wir sahen ja, daß die quantenphysikalische Grundtatsache der diskreten Energiestufen, die uns früher so auffällig ein grundsätzliches Versagen klassischer Begriffe und Vorstellungen zu zeigen schien, von der SCHRÖDINGER-Gleichung aus ein ganz harmloses Aussehen gewinnt, und in Parallele rückt zu der klassisch-physikalischen Tatsache, daß eine gespannte Saite oder Membran nur eine diskrete Reihe von Tönen gibt. Wir sahen ferner, daß der COMPTON-Effekt ohne jede Bezugnahme auf Diskontinuitätsbegriffe beschrieben werden kann, sofern man für Licht- und Kathodenstrahlen *beiderseits* die Wellenvorstellung gebraucht, und analog kann das FRANCK-HERTZsche Elektronenstoßexperiment in einer ausschließlich mit *kontinuierlichen* Wellenvorgängen operierenden Form gedeutet werden, ohne Heranziehung unstetiger Akte. Diese Verhältnisse haben in der Tat in der historischen Entwicklung die Hoffnung auftauchen lassen, daß der Schritt von der klassischen Punktmechanik zur DE BROGLIE-SCHRÖDINGERSchen Wellenvorstellung die charakteristischen quantenphysikalischen *Unstetigkeiten* als nur *scheinbar* erweisen könnte, und daß die „Wellenmechanik“ eine neue Auffassung erlaube, bei welcher der klassische Grundbegriff der Stetigkeit in vollem Umfang wiederhergestellt werde.

Wenn man sich aber dieser Hoffnung hingibt, so *vergißt* man eines: In der *Optik* ist die *Wellentheorie* gerade *nicht* befriedigend — wir haben uns entschließen müssen, dem Licht eine *dualistische* Natur zuzuschreiben, die neben wellenhaften Eigenschaften auch korpuskularen Eigenschaften Raum gibt. Und zwar nötigten uns dazu nicht etwa nur solche Erfahrungen (wie die COMPTONSche Frequenzverschiebung), die nach dem

eben Hervorgehobenen auch „kontinuierlich“ gedeutet werden können. Sondern schon allein das *PLANCKSche Gesetz* ließ uns die klassische Wellentheorie des Lichtes als unzulänglich erkennen. Die *Analogie* von Licht und materieller Strahlung, die *DE BROGLIE* durch Einführung seiner Materiewellen zu verengern suchte, würde also wieder aufgegeben werden, wenn wir der materiellen Strahlung im Gegensatz zum Licht eine „reine“ Wellennatur zusprächen. In der Tat erweist sich diese „reine Wellentheorie“ als gänzlich undurchführbar. Wenn sie auch die *Bahnen* etwa eines Elektrons in Analogie zum geometrisch-optischen Strahlbegriff zu verstehen erlaubt, so *scheitert* sie doch (Diskussionen von heute nur noch historischer Bedeutung haben das gezeigt) vollkommen an der primitiven Tatsache, daß es *außer* diesen *Bahnen* eben auch *das Elektron selber* als unbestreitbar korpuskulares Gebilde gibt.

Es kann also keinen Zweifel darüber geben, wie unsere letzten Ergebnisse zu verstehen sind: 1. *Die materielle Strahlung besitzt eine dualistische Natur.* 2. *Ihre Wellenseite wird durch die SCHRÖDINGER-Gleichung (43) exakt erfaßt, ähnlich, wie die MAXWELLSchen Gleichungen die Wellenseite der Natur des Lichtes erfassen.*

Abgesehen ist allerdings in (43) von *relativistischen und Spin-Effekten*; auf diese kommen wir später zurück.

§ 6. Komplementarität.

1. **Dualismus und Komplementarität.** Wir haben den *Dualismus* von Wellen und Korpuskeln als eine die gesamte Quantenphysik beherrschende Tatsache kennen gelernt, welche sich der Erfassung durch die Denk- und Vorstellungsformen der klassischen Physik grundsätzlich *entzieht*. Unser Bestreben, eine abschließende gedankliche Durchdringung dieses Phänomens zu erreichen, wird uns nicht auf irgendwelche Versuche einer „Erklärung“ führen dürfen: Denn „Erklären“ heißt ja nichts anders, als *Zurückführen auf schon Bekanntes*, und hier haben wir es gerade mit einem solchen Phänomen zu tun, das allem zuvor bekannt Gewesenen als etwas vollkommen *Neues* gegenüber tritt. Unser Ziel kann also nur dieses sein: unsere Kenntnis aller mit diesem Dualismus zusammenhängenden Effekte derart zu erweitern und zu vervollständigen, daß wir schließlich jede überhaupt denkbare diesbezügliche *experimentelle Feststellung* auch *theoretisch vorherzusagen* vermögen. Das verlangt natürlich die Entwicklung einer alle experimentellen Möglichkeiten und Denksarten umfassenden *mathematischen Theorie*, welche jedes Experiment quantitativ durchzurechnen erlaubt. Es verlangt aber auch die Ausbildung einer *anschaulichen Vorstellung* von den wesentlichen Gesetzmäßigkeiten der Quantenerscheinungen — derart, daß wir imstande sind, *ohne* Inangasetzung eines komplizierten mathematischen Apparates den Verlauf konkreter Experimente in den wesentlichen Zügen zu übersehen. Da aber diese *anschauliche Vorstellung* eben *nicht* derart sein kann,

daß wir ein nach gewohnten klassischen Prinzipien funktionierendes „Modell“ der neuen Erscheinungen konstruieren, so liegt die Aufgabe in einer *Anpassung* und *Gewöhnung* unserer Gedanken an die neuen Gesetzmäßigkeiten; man muß eben nicht glauben, daß ein *anschauliches Verständnis* die unveränderliche Aufrechterhaltung des Gewohnten und Bekannten zur Voraussetzung habe.

Wir wollen schon jetzt an Hand bereits erörterter Beispiele eine vorläufige Erläuterung derjenigen Gedanken versuchen, in denen die begriffliche Erfassung der Quantenerscheinungen ihren Abschluß erreicht (HEISENBERG, BOHR). Im historischen Entwicklungsgang haben sich diese Gedanken allerdings erst auf Grund der (in Kapitel 3 darzustellenden) Quanten- und Wellenmechanik (HEISENBERG-BORN-JORDAN, DIRAC; SCHRÖDINGER) bzw. ihrer Erweiterung zur „statistischen Transformationstheorie“ (DIRAC, JORDAN, v. NEUMANN) herauskristallisiert.

Wir haben wiederholt ausgesprochen, daß die dualistische Verknüpfung korpuskularer und wellenhafter Eigenschaften in der Natur des Lichtes allen *klassischen Vorstellungen zuwiderläuft*. Wir wollen dieser Feststellung noch eine schärfere Fassung geben. Irgendein Experiment, welches wellenhafte und korpuskulare Eigenschaften des Lichtes *zugleich* nachweisen würde, wäre nicht nur mit klassischen Theorien in Widerspruch (an *solchen* Widerspruch haben wir uns ja gewöhnen müssen), sondern würde darüber hinaus *logisch-mathematisch widersinnig* sein. Natürlich kommt es an dieser Stelle wesentlich darauf an, richtig zu erfassen, was mit dem Ausdruck „zugleich“ gemeint sein soll. Keineswegs in sich widersinnig (wenn auch der *klassischen* Theorie unverständlich) ist es, wenn zwei verschiedene Experimente, die lediglich *hintereinandergeschaltet* werden, zunächst die Wellennatur und dann die korpuskulare Natur des Lichtes zeigen: Wir brauchen ja nur etwa mit einem Lichtstrahl zunächst ein Interferenzexperiment zu machen und dann das durch diese Apparatur hindurchgegangene Licht einem die Lichtquanten nachweisenden Experiment zu unterwerfen. *Unmöglich* aber ist es, daß ein einziger, unteilbarer experimenteller Akt auf einmal sowohl die *eine* als auch die *andere* Seite in der Natur des Lichtes zum Vorschein bringt. Dies uns klar zu machen, ist deshalb von entscheidender Bedeutung, weil wir dadurch sehen lernen, wie weit und in welcher Richtung wir uns zu den Grundvorstellungen der klassischen Physik in Gegensatz stellen können, *ohne* dabei auch den Anforderungen der Logik und Mathematik zu widersprechen.

Ein *Widerspruch in sich* würde z. B. vorliegen, wenn folgendes möglich wäre. Von einer Lichtquelle aus falle monochromatisches Licht auf einen schwarzen Schirm mit zwei benachbarten Öffnungen; das hindurchgegangene Licht werde dahinter auf einer photographischen Platte aufgefangen. Dabei seien *einerseits* die Öffnungen und ihr Abstand so klein (relativ zur Wellenlänge), daß auf der Platte eine Interferenz zwischen den durch die beiden Öffnungen hindurchgegangenen Licht-

energien fotografiert wird, *andererseits* sei es durch irgendeine experimentelle Anordnung möglich, für jedes einzelne Lichtquant festzustellen, durch *welche* der beiden Öffnungen es hindurchgegangen ist.

Daß diese Annahmen einen Widerspruch in sich enthalten, liegt auf der Hand. Denn für das *einzelne Lichtquant* bedeutet ja die auf der Platte photographierte Intensitätsverteilung nichts anderes, als die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* für das Auftreffen des Lichtquants an einem bestimmten Orte dort; wir erinnern uns daran, daß diese Wahrscheinlichkeit *nicht* etwa beeinflußt wird durch *andere*¹ Lichtquanten (vgl. Kapitel 1, § 2, 3). Wenn nun aber feststellbar ist, daß das betrachtete Lichtquant durch die eine, sagen wir die „linke“ der beiden Öffnungen geht, so kann das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein der anderen, der „rechten“ Öffnung, keinerlei Einfluß mehr auf das durch die linke Öffnung fliegende Lichtquant ausüben. Wir kommen zu der Einsicht, *daß die Möglichkeit eines Experimentes, welches eine Entscheidung des Lichtquants für eine bestimmte der beiden Öffnungen erkennen läßt, unvereinbar mit dem Zustandekommen einer Interferenz der durch die beiden Öffnungen gehenden Strahlenbündel ist.* Und zwar ist diese Unvereinbarkeit so zu verstehen, daß ein Verstoß gegen sie nicht nur den (revidierbaren) klassisch-physikalischen Vorstellungen, sondern schlechthin den Gesetzen der Logik widersprechen würde.

Diese Erkenntnis, die zunächst die *Paradoxie* der Quantenerscheinungen noch zu steigern scheint, bietet aber den Schlüssel zu ihrem grundsätzlichen Verständnis. Unser Beispiel festhaltend müssen wir uns entschließen, folgende Alternative anzunehmen.

1. *Entweder* lassen wir die beiden Strahlenbündel interferieren — und dann müssen wir uns abfinden damit, daß eine Feststellung, durch welche der beiden Öffnungen das Lichtquant fliegt, *grundsätzlich ausgeschlossen ist.* Es kann sich also dann nicht darum handeln, daß wir zwar *nicht wissen*, durch welches Loch es kommt, aber doch überzeugt bleiben, daß es *entweder* durch das rechte *oder* durch das linke gehen muß — wobei wir die Hoffnung hegen dürfen, daß künftige experimentelle Hilfsmittel uns einmal die Entscheidung ermöglichen werden. Nein, diese Hoffnung würde die Hoffnung in sich enthalten, daß die Gesetze der Logik sich selber widersprechen: Es bleibt nichts anderes übrig, als zuzugestehen, daß — plump gesprochen — das Lichtquant durch beide Öffnungen zugleich kommt, und damit seinen korpuskularen Charakter jetzt verschleiert. Anders ausgedrückt: Die Frage, ob das Lichtquant rechts oder links durchgeht, ist unter diesen Umständen als *sinnlos* zu bezeichnen, weil kein die Frage entscheidendes Experiment mit den geforderten Bedingungen (*Aufrechterhaltung der Interferenz*) in Einklang zu bringen ist.

¹ Doch müssen wir, um überhaupt von isolierbaren einzelnen Lichtquanten sprechen zu können, die Strahlungsdichte als hinreichend klein voraussetzen: $n_\nu \ll 1$.

2. Oder wir versteifen uns darauf, zu erfahren, durch welches Loch das Lichtquant fliegt. Dann aber müssen wir in Kauf nehmen, daß die *Interferenz aufgehoben wird*: wie z. B. dann, wenn wir ganz primitiv das eine der Löcher *zumachen*.

Wenn wir nach diesen Überlegungen das Gesamtbild unserer den Dualismus betreffenden Erfahrungen erneut durchmustern, dann fällt uns auf, daß in der Tat ein unmittelbares Zusammentreffen von Wellennachweis und Korpuskelnachweis nirgends besteht. *Gewisse* Experimente erweisen den Wellencharakter, und gewisse *andere* Experimente erweisen den korpuskularen Charakter des Lichtes (oder z. B. der Kathodenstrahlen); aber niemals wird in einem unteilbaren Experiment beides zugleich nachgewiesen — und darüber wundern wir uns jetzt nicht, da wir gerade überlegten, daß das schlechterdings etwas Unmögliches, in sich Widersinniges wäre. Damit liegt aber jetzt das eigentliche Charakteristikum der Quantenphysik und ihr grundsätzlicher Unterschied gegenüber allen klassischen Vorstellungsformen offen zutage — und wir erkennen, wie es möglich wird, daß in einer logisch widerspruchsfreien Gesetzmäßigkeit ein und dasselbe physikalische Gebilde Eigenschaften besitzt, die niemals widerspruchsfrei zusammen in Erscheinung treten können: Die quantenphysikalischen Naturgesetze erlauben ihnen nur ein *getrenntes* Hervortreten in die experimentelle Beobachtung.

Ein quantenphysikalisches Gebilde hat verschiedene — wie BOHR sagt, „*komplementäre*“ — Seiten, zwischen denen eine gesetzmäßige Verknüpfung von solcher Art besteht, daß jedes Experiment, welches *eine* Seite hervortreten läßt, zugleich eine andere, „*komplementäre*“ Seite *jedem Zugriff der Beobachtung entzieht*. Ein die Wellenseite des Lichtes hervorholendes Interferenzexperiment läßt die Fragen nach Ort und Bahn der Lichtkorpuskeln *sinnlos* werden — es entzieht diese Größen der messenden Beobachtung. Ein die Korpuskeln als solche erkennbar machendes Experiment erfordert umgekehrt Bedingungen, durch welche Interferenz unmöglich gemacht, und somit die Wellenseite des Lichts ins Unbeobachtbare verdrängt wird. Das sind Verhältnisse, gegen die von seiten der Logik nichts einzuwenden ist, und die auch dadurch dem Ideal physikalischer Erkenntnis entsprechen, daß sie — wie wir allmählich immer deutlicher sehen werden — eine exakte quantitative Erfassung in mathematischen Gesetzen von wunderbarer Einfachheit erlauben. Aber gegenüber den Denk- und Vorstellungsformen der klassischen Physik bedeuten diese Einblicke etwas *revolutionäres* Neues.

Das Beispiel des *linear polarisierten Lichtquants* wird unser Verständnis der Lage weiter fördern. Die Flugrichtung des Lichtquants sei etwa die x -Achse. Durch einen geeignet gestellten Nicol veranlassen wir das Lichtquant, entweder die x, y -Ebene *oder* die x, z -Ebene als Schwingungsebene anzunehmen. Dabei sind wir *nicht* imstande, die Entscheidung des

Lichtquants zwischen diesen beiden Möglichkeiten zu beeinflussen¹ — wir haben es unsererseits lediglich in der Hand, durch geeignete Einstellung des Nicols dem Lichtquant ein bestimmtes *Paar* zueinander *senkrechter* Schwingungsebenen x, η und x, ζ zur Auswahl zu stellen — unabhängig von unserem Zutun erfolgt dann die Entscheidung, ob das Lichtquant in den fraglichen Einzelfall vom Nicol durchgelassen oder reflektiert wird. Ist diese Entscheidung erfolgt, so können wir das Ergebnis einer erneuten Anwendung eines Nicols *in derselben Stellung* (ebenso auch eines Nicols in um 90° verdrehter Stellung) *eindeutig* voraussagen.

Aber es ist nicht möglich, das Lichtquant in einen Zustand zu bringen derart, daß in bezug auf zwei *verschiedene* Ebenenpaare x, y ; x, z und x, η ; x, ζ *zugleich* eine derartige Eindeutigkeit der Vorhersage eintritt. Wir wollen, um die Beziehung dieser Überlegung zum allgemeinen Komplementaritätsproblem deutlicher zu machen, folgende Ausdrucksweise gebrauchen. Wir betrachten den Nicol, bei dem das durchgelassene Licht die Schwingungsebene x, y besitzt (kürzer: den „Nicol x, y “) als ein *Meßinstrument*, durch welches eine gewisse Größe — eine der physikalischen Eigenschaften des Lichtquants — gemessen wird, welche nur *zwei* verschiedene Werte annehmen kann; sagen wir etwa $+1$ („Durchgang“) und -1 („Reflexion“). Offenbar ist dann übrigens die durch den „Nicol x, z “ gemessene Größe *entgegengesetzt gleich* der durch den Nicol x, y gemessenen. Geben wir der durch den „Nicol x, y “ gemessenen Größe die Bezeichnung (y) , so ist $(z) = -(y)$.

Wir können nun sagen: *Die Messung der Größe (y) ist unvereinbar mit einer gleichzeitigen Messung jeder anderen Größe (η)* , die irgendeiner von y und von z verschiedenen Richtung η in der Ebene y, z entspricht. Denn die zugehörigen Meßinstrumente „Nicol x, y “ und „Nicol x, η “ können schlechterdings nicht zugleich angewandt werden.

Diese Betrachtungen ließen sich übrigens noch erweitern, indem statt der Nicols allgemeinere Analysatoren eingeführt werden, welche das Licht in zwei *elliptisch* polarisierte Komponenten zerlegen. Bequemer ist aber für unsere Zwecke das Beispiel der *Richtungsquantelung* etwa eines Ag-Atoms. Wenn wir durch ein der z -Achse paralleles Magnetfeld eine Richtungsquantelung hervorrufen, dann können wir sagen, daß wir eine *Messung der z -Komponente \mathfrak{M}_z* des Drehimpulses des Atoms ausführen: als mögliche Resultate kommen dabei nur die Werte $+h/4\pi$ und $-h/4\pi$ in Betracht. Die Messung der Drehimpulskomponente \mathfrak{M}_ζ in einer von z und von $-z$ verschiedenen Richtung ζ setzt entsprechend eine mit ζ (oder $-\zeta$) parallele Richtungsquantelung voraus, *kann also niemals zugleich mit der Messung von \mathfrak{M}_z ausgeführt werden*.

Wir sehen hier an den einfachsten überhaupt denkbaren Beispielen die *Komplementarität* der Eigenschaften eines quantenphysikalischen

¹ Nur durch ganz *andere* Experimente — *adiabatische Drehung* der Schwingungsebene — können wir eine eindeutig bestimmte Änderung der Schwingungsebene durchführen.

Gebildes; und wir erschließen aus diesen Beispielen, daß der *Dualismus* von Wellen und Korpuskeln ein *spezieller Fall von Komplementarität* ist. Wir dürfen nicht etwa denken, daß das Licht genau *zwei* verschiedene nicht zugleich beobachtbare „Seiten“ besitzt, sondern es wird auch hier so sein, daß die verschiedenen nicht zugleich beobachtbaren Seiten eine *kontinuierliche Mannigfaltigkeit* bilden. Im Beispiel der Richtungsquantelung sind ja für *alle* von z und $-z$ verschiedenen Richtungen ζ die Impulskomponenten \mathfrak{M}_ζ nicht zugleich mit \mathfrak{M}_z beobachtbar; doch gibt es dabei quantitative Abstufungen: wenn ζ *beinahe* mit z zusammenfällt, dann ist *beinahe* mit der Wahrscheinlichkeit 1 zu erwarten, daß bei plötzlicher Drehung des Magnetfeldes aus der Richtung z in die Richtung ζ der sich ergebende Wert von \mathfrak{M}_ζ *derselbe* (und *nicht* der entgegengesetzte) ist, wie der vorher bestehende Wert von \mathfrak{M}_z . Als *extremen* komplementären Gegensatz haben wir dagegen den Fall zu betrachten, daß ζ *senkrecht* auf z steht: dann ergeben sich ja bei der plötzlichen Felddrehung für die beiden möglichen Werte von \mathfrak{M}_ζ *gleich große Wahrscheinlichkeiten*. Auf solche extreme Gegensatzpaare wollen wir die Anwendung der Bezeichnung „*komplementäre Größen*“ beschränken.

2. Ort und Impuls als komplementäre Größen. Daß *Ort* und *Impuls* eines Massenpunktes komplementäre Größen im erläuterten Sinne sind, kann schon im jetzigen Stande unserer Untersuchung nicht mehr zweifelhaft sein. Daß wir dem kräftefrei bewegten Massenpunkt, wenn er einen bestimmten Impuls besitzt, eine *ebene Welle* zuordnen, die sich durch den ganzen Raum gleichmäßig ausdehnt, das veranschaulicht ja unmittelbar die Unmöglichkeit, in diesem Falle einen bestimmten Ort als angeblichen Ort des Massenpunktes auszuzeichnen. Denken wir etwa an die DUANESCHE Auffassung der Beugung an einem unendlichen exakt periodischen Strichgitter zurück, so ist es klar, daß die ganze damalige Überlegung *unvereinbar* ist mit der Vorstellung, daß das einen exakten Impuls besitzende Teilchen, von dessen Stoß das Gitter getroffen wird, außerdem auch noch räumlich begrenzt sei, und demnach bei seinem Stoß auf das Gitter den übertragenen Impuls auf ein räumlich begrenztes Gebiet des Gitters übertragen würde. Ganz allgemein können wir die Feststellung, daß Ort und Impuls komplementäre Größen sind, als *Präzisierung* unserer früheren Feststellung der dualistischen Natur der Strahlung betrachten.

Die *Messung des Impulses eines Massenpunktes* kann am einfachsten durch „spektrale Analyse“ mit Hilfe von Beugungsgittern geschehen. Denken wir uns der Anschaulichkeit halber etwa, daß die Impulsrichtung bereits bekannt, und nur der *Betrag* des Impulses noch ungewiß sei, so können wir durch ein *Strichgitter* diesen Impulsbetrag bestimmen. Im wellentheoretischen Bilde verläuft diese Analyse ja so, daß der ursprüngliche Wellenzug zerlegt wird in die monochromatischen Teilwellen, mit deren Superposition er identisch war. Quantenphysikalisch muß das bedeuten, daß der Massenpunkt vor die Wahl gestellt wird, welchen

Impulswert er annehmen will — genau so, wie durch den Nicol das Lichtquant vor die Wahl gestellt wird. Nur handelt es sich bei der Impulsmessung um eine Auswahl aus einer kontinuierlichen Mannigfaltigkeit von Möglichkeiten, während bei der Polarisation nur zwei Möglichkeiten bestanden.

Wir können diese Erwägungen leicht quantitativ präzisieren, wobei wir uns zunächst auf den Spezialfall einer *eindimensionalen* Bewegung in der x -Richtung beschränken. Es sei $\chi(x)$ eine beliebige¹ (komplexe) Funktion von x , die jedoch bei $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$ stark genug zu Null geht, um eine *Normierung*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\chi(x)|^2 dx = 1 \quad (1)$$

zu erlauben. Es ist stets möglich, dieses $\chi(x)$ durch ein *FOURIER-Integral* darzustellen, d. h. als eine Superposition von Elementarwellen $e^{\frac{2\pi i}{h} p x}$ aufzufassen; es ist nämlich

$$\chi(x) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(p) e^{\frac{2\pi i}{h} p x} dp, \quad (2)$$

wenn $\omega(p)$ konstruiert wird gemäß²

$$\omega(p) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x) e^{-\frac{2\pi i}{h} p x} dx. \quad (3)$$

Es ist dann³

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\omega(p)|^2 dp = 1. \quad (4)$$

Wenn die wellentheoretisch berechnete Intensitätsverteilung, die sich bei *spektraler Zerlegung* einer *Welle* $\chi(x)$ ergibt, entsprechend den obigen Bemerkungen die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* liefern soll für die verschiedenen Impulswerte, die sich bei Ausführung einer Impulsmessung ergeben können, dann muß folgendes gelten: *Wird an einem Massen-*

¹ Selbstverständlich: stetige und differenzierbare.

² Zum Beweis vgl. etwa COURANT-HILBERT, Methoden der mathematischen Physik.

³ Denn es wird ja:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega(p)|^2 dp &= \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^*(p) \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x) e^{-\frac{2\pi i}{h} p x} dx \cdot dp, \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^*(p) e^{-\frac{2\pi i}{h} p x} dp \cdot dx, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x) \chi^*(x) \cdot dx = 1. \end{aligned}$$

punkt, dem in seinem ursprünglichen Zustand die Wellenfunktion $\chi(x)$ zugeordnet ist, eine Impulsmessung ausgeführt, so ist

$$|\omega(p)|^2 \cdot dp \quad (5)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der sich ergebende Impulswert in das Intervall $p, p + dp$ fällt.

Es stört bei dieser Überlegung nicht, daß die dem Massenpunkte zugeordnete Wellenamplitude, da sie streng genommen als eine Superposition von zeitlich fortlaufenden Wellen

$$e^{\frac{2\pi i}{h}(px - Wt)}; \quad W = \frac{p^2}{2\mu}. \quad (6)$$

aufgefaßt werden muß, selber zeitlich variabel ist. Ist $\chi(x) = \psi(x, 0)$ die dem Zeitpunkt $t=0$ entsprechende Gestalt der Wellenfunktion $\psi(x, t)$, so wird nach (2) offenbar allgemeiner:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(p) \cdot e^{\frac{2\pi i}{h}(px - Wt)} dp; \quad W = \frac{p^2}{2\mu} \quad (7)$$

mit dem durch (3) definierten $\omega(p)$; oder auch

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(p) e^{-\frac{2\pi i}{h}Wt} \cdot e^{\frac{2\pi i}{h}px} dp. \quad (7')$$

Das bedeutet aber: wenn wir nicht zur Zeit $t=0$, sondern zu irgendeiner Zeit t die Wellenamplitude ψ nach FOURIER analysiert hätten, so würde sich lediglich

$$\omega(p) e^{-\frac{2\pi i}{h}Wt} \text{ statt } \omega(p) \quad (8)$$

ergeben haben; und auf die Wahrscheinlichkeit (5) hätte das keinen Einfluß gehabt.

Während die monochromatische Welle (6) der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\frac{-\hbar^2}{8\pi^2\mu} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = W\varphi \quad (9)$$

genügt, erfüllt die Superposition (7) die etwas allgemeinere „SCHRÖDINGER-Gleichung für zeitabhängige Wellenfunktion“:

$$\frac{-\hbar^2}{8\pi^2\mu} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0, \quad (10)$$

aus der wir nur für den monochromatischen Ansatz

$$\psi = \varphi(x) \cdot e^{-\frac{2\pi i}{h}Wt} \quad (11)$$

die gewöhnliche SCHRÖDINGER-Gleichung (9) zurück erhalten.

Besondere Beachtung verdient der spezielle Fall, daß die Funktion $\omega(p)$ von p praktisch nur innerhalb eines sehr engen bei \bar{p} gelegenen Intervalls von Null verschieden ist, und daß außerdem (zur Zeit $t=0$) auch ψ nur innerhalb eines gewissen Intervalls merklich von Null verschieden ist.

Das gibt es wirklich¹; wir sprechen in einem solchen Fall von einem „Wellenpaket“ — bei dem es sich also, in Worten ausgedrückt, darum handelt, daß aus Wellen, die praktisch ganz in ein gewisses enges spektrales Intervall fallen, eine nur innerhalb eines endlichen räumlichen Bereiches merklich von Null verschiedene Wellenamplitude superponiert ist.

Wir behaupten dann: *Dieses Wellenpaket läuft mit der Geschwindigkeit $v = \bar{p}/\mu$ weiter*; außerdem wird es im Lauf der Zeit seine Gestalt verändern, und zwar zumeist in diffuser Weise auseinanderlaufen: Wenn es zur Zeit $t=0$ gerade die stärkste räumliche Konzentration besaß, die mit dem zur Verfügung stehenden Spektralbereich erzielt werden kann, dann wird es für $t > 0$ *notwendigerweise* auseinanderlaufen. Aber das hindert nicht, seine Fortbewegung mit der Geschwindigkeit v eine gewisse Zeit zu verfolgen — und es ist für die physikalische Deutung der wellenmechanischen Begriffe von größter Bedeutung, daß die Geschwindigkeit v des Wellenpaketes mit der Geschwindigkeit \bar{p}/μ des zugeordneten Massenpunktes übereinstimmt — während ja die Phasengeschwindigkeit λv der rein monochromatischen DE BROGLIE-Welle einen ganz anderen Wert hat (nämlich c^2/v , wenn wir die Frequenz ν relativistisch korrekt bestimmen: $h\nu =$ Energie einschließlich Ruhenergie μc^2 ; und $1/2 \cdot v$, wenn wir nicht-relativistisch $h\nu = 1/2 \mu v^2$ setzen).

Denn jedenfalls werden wir uns vorstellen müssen, daß ein Massenpunkt, dessen zugeordnete Wellenfunktion ein solches Wellenpaket ist, nur dort mit merklicher Wahrscheinlichkeit angetroffen werden kann, wo eben das Wellenpaket ist — und diese Vorstellung wäre unmöglich, wenn sich Massenpunkt und Wellenpaket mit *verschiedenen* Geschwindigkeiten bewegen würden.

Zum Beweise unserer Behauptung bilden wir den „Schwerpunkt“ des Wellenpaketes:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot |\psi|^2 dx, \tag{12}$$

und berechnen seine zeitliche Ableitung gemäß (10)

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x (\psi^* \dot{\psi} + \dot{\psi}^* \psi) dx \\ &= \frac{-\hbar}{4\pi i \mu} \int_{-\infty}^{+\infty} x (\psi^* \psi'' - \psi''^* \psi) dx \\ &= \frac{-\hbar}{4\pi i \mu} \int_{-\infty}^{+\infty} x (\psi^* \psi' - \psi'^* \psi)' dx; \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

¹ Man setze z. B.

$$\chi(x) = \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{2\pi i}{\hbar} \bar{p} x},$$

was

$$\omega(p) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} e^{-\frac{(p-\bar{p})^2}{\beta^2}}$$

mit $\beta = \frac{\hbar}{\pi \alpha}$ ergibt.

partielle Integration ergibt dann¹

$$\dot{x} = \frac{h}{4\pi i \mu} \int_{-\infty}^{+\infty} (\psi^* \psi' - \psi'^* \psi) dx. \quad (14)$$

Wenn nun $\omega(p)$ nur in einer engen Umgebung um p herum von Null verschieden ist, wo wird wegen (7) angenähert

$$\psi' = \frac{2\pi i}{h} \bar{p} \psi, \quad \psi'^* = -\frac{2\pi i}{h} \bar{p} \psi^*; \quad (15)$$

und dies in (14) eingesetzt ergibt wegen (1) in der Tat für den Schwerpunkt des Wellenpaketes eine Fortschrittgsgeschwindigkeit

$$v = \dot{x} = \frac{\bar{p}}{\mu}. \quad (16)$$

Dies alles läßt sich auf den dreidimensionalen Fall, und auch für eine Bewegung in einem *Kraftfeld* ohne weiteres verallgemeinern. Der „monochromatischen“ SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\frac{-\hbar^2}{8\pi^2\mu} \Delta\varphi + U(x, y, z) \cdot \varphi = W\varphi \quad (17)$$

entspricht als Verallgemeinerung von (10), also als SCHRÖDINGER-Gleichung für zeitabhängige Wellenfunktion:

$$\frac{-\hbar^2}{8\pi^2\mu} \Delta\psi + U(x, y, z) \cdot \psi + \frac{h}{2\pi i} \dot{\psi} = 0. \quad (18)$$

Setzen wir in (18) speziell

$$\psi = \varphi(x, y, z) \cdot e^{-\frac{2\pi i}{h} Wt}, \quad (19)$$

so kommen wir auf (17) zurück.

Die der Gleichung (18) gehorchenden *Wellenpakete laufen auf den „klassischen“ Bahnen des zugeordneten Massenpunktes* — abgesehen von ihrem zeitlichen Zerfließen und Auseinanderlaufen.

Wir kehren aber noch einmal zum *eindimensionalen* Fall zurück und formulieren eine Tatsache, deren Tragweite von HEISENBERG erkannt worden ist. Es sei Δp die „Impulsbreite“ und Δx die „Ortsbreite“ eines Wellenpaketes. Dann besteht die fundamentale HEISENBERGSche *Unge-nauigkeitsbeziehung*

$$\Delta p \Delta x \geq \hbar. \quad (20)$$

Ihre Bedeutung können wir so ausdrücken: Sollen p und x zugleich gemessen werden, so muß man sich mit einer *ungenauen* Messung zufrieden geben, wobei die Ungenauigkeit der bestmöglichen Ortsmessung *um so größer* ist, je *kleiner* die Ungenauigkeit der Impulsmessung ist. Man kann beweisen, daß der Fall der Fußnote S. 122 das *Optimum* gleichzeitiger Impuls- und Ortsmessung liefert. Hier überlegen wir nur: Wenn wir einen *monochromatischen Wellenzug* betrachten, bei dem jedoch die Wellenlänge λ eine langsam variierende *Funktion des Ortes* x ist,

¹ Man beachte, daß $x(\psi^* \psi' - \psi'^* \psi) \rightarrow 0$ für $x \rightarrow \pm \infty$.

dann kann diese ortsabhängige Wellenlänge nur mit endlicher Genauigkeit definiert werden, und zwar so, daß einerseits der Ort, für den wir die Wellenlänge definieren wollen, ungenau bestimmter ist, und daß andererseits der Wert der Wellenlänge ungenau definiert ist. Denn wir werden nur so vorgehen können, daß wir innerhalb eines gewissen Ortsintervalles Δx abzählen, wieviele Wellenberge in ihm liegen. Dies seien gerade n ; dann werden wir für die Wellenlänge einen Wert,

$$\lambda = \frac{\Delta x}{n} \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\Delta x}{n + 1} \quad (21)$$

erhalten — die Differenz der in (21) angegebenen beiden Werte entspricht gerade der Ungenauigkeit, die dem berechneten λ seiner Definition nach anhaftet. Wir wollen uns aber für die Ungenauigkeit der reziproken Wellenlänge interessieren; für diese bekommen wir aus (21):

$$\Delta \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\Delta x}; \quad \Delta \frac{1}{\lambda} \Delta x = 1; \quad (22)$$

und indem wir endlich die reziproke Wellenlänge durch den durch h dividierten Impuls ersetzen: $1/\lambda = p/h$, ergibt sich aus (22) genau das Optimum für die HEISENBERGSche Ungenauigkeitsrelation (20).

Sie bringt die Komplementarität von Ort und Impuls in einer quantitativen Fassung zum Ausdruck. Eine absolut genaue Impulsmessung $\Delta p = 0$ macht den Ort *vollkommen* undefiniert: $\Delta x = \infty$. Umgekehrt ergibt eine absolut genaue Ortsmessung $\Delta x = 0$ eine vollständige Undefiniertheit des Impulses: $\Delta p = \infty$.

Zu beachten ist aber, daß die geschilderten Verhältnisse sofort ein etwas verändertes Aussehen gewinnen, wenn wir von der kräftefreien Bewegung im unendlichen, unbegrenzten Raume $-\infty < x < \infty$ zu anderen Beispielen übergehen. Betrachten wir etwa das wellenmechanische Problem eines endlichen Intervalls der Länge l , bei welchem für die Wellenfunktion die *Randbedingung der Periodizität* vorgeschrieben ist (vgl. dazu § 1), so bekommen wir für einen unendlich scharf definierten Impuls — nämlich bei definierter Verwirklichung eines der diskreten Quantenzustände dieses Problems — eine *endliche* Ortsungenauigkeit $\Delta x = l$. Das Produkt $\Delta p \Delta x = h$ findet sich jedoch dann wieder, wenn wir jetzt unter Δp die Differenz der Impulswerte zweier benachbarter Quantenzustände verstehen, so daß also $\Delta p \Delta x$ die Größe des einem jeden Quantenzustand zugeordneten Stückes der Phasenebene unseres Problems ist. Die Feststellungen von § 2, 4 lassen erkennen, daß diese Interpretation auf beliebige gequantelte Systeme zu verallgemeinern ist.

Für den dreidimensionalen Fall können wir (20) verallgemeinern zu

$$\left. \begin{aligned} \Delta p_x \Delta x &\geq h, \\ \Delta p_y \Delta y &\geq h, \\ \Delta p_z \Delta z &\geq h. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Das bedeutet, daß zu jeder einzelnen rechtwinkligen Ortskoordinate x, y, z die entsprechende Impulskomponente komplementär ist; dagegen kann z. B. das Produkt $\Delta p_y \Delta x$ beliebig klein gemacht werden.

Ein Beispiel für die Anwendung der HEISENBERGSchen Ungenauigkeitsregeln (23) bieten die *Bahnen von α -Teilchen in der WILSON-Kammer* dar, die ja gleichzeitig in so eindrucksvoller Weise die Unentbehrlichkeit des Korpuskelbegriffes in der Quantenphysik zeigen. Daß die bei den α -Bahnen bestehende gleichzeitige Definiertheit von Ort und Impuls tatsächlich weit davon entfernt ist, den Ungenauigkeitsregeln (23) zu widersprechen, ergibt sich aus folgendem: der *Querschnitt* einer WILSONSchen α -Bahn kann bestimmt nicht kleiner als ein *Atomquerschnitt* (nämlich als der Querschnitt der einzelnen als Kondensationskerne wirkenden *Ionen*) sein; und zwar wird die bestmögliche Genauigkeit dann erreicht werden, wenn die *Atomkerne unendlich schwer* sind, so daß sie als an exakt definierten Orten *ruhend* vorgestellt werden dürfen. Die Genauigkeit, mit welcher der *Impuls* des α -Teilchens in seiner WILSON-Bahn bestimmbar ist, wird andererseits begrenzt durch den fortgesetzten Impulsaustausch mit den durch das α -Teilchen gebildeten Ionen. Nach unserer Voraussetzung unendlich schwerer Kerne verläuft der Impulsaustausch so, daß das α -Teilchen nur mit dem vom Atom abgerissenen Elektron einen Impuls austauscht — dessen Unbestimmtheit also mindestens so groß ist, wie diejenige des Impulses des Elektrons vor dem Ionisierungsprozeß. Da nun *diese* Unbestimmtheit aber im Sinne der HEISENBERGSchen Ungenauigkeitsregeln abhängt von der Größe des räumlichen Bereichs, auf den das Elektron vorher beschränkt war — also eben des Atoms bzw. Ions — so kommt auch für das α -Teilchen in seiner WILSON-Bahn, die HEISENBERGSche Ungenauigkeit heraus.

Der *COMPTON-Effekt* bietet ein Beispiel, bei welchem die *Impulse* der beteiligten Teilchen scharf definiert sind. Dementsprechend sind die Orte undefiniert. Ein wesentlich anderer Fall ist derjenige einer kleinen Lichtquelle, an welcher eine *Interferenz* der nach *weit verschiedenen Richtungen* ausgehenden Wellenzüge festgestellt wird. Hier ist (bei monochromatischer Lichtquelle) für ein ausgesandtes Lichtquant der *Betrag* des Impulses scharf *definiert*, aber seine *Richtung* völlig *undefiniert*. Andererseits ist das Zentrum, von dem das Lichtquant emittiert wird, räumlich in definierter Weise festgelegt, während andererseits die radiale Entfernung des Lichtquants vom Emissionszentrum unbestimmt ist. Dies Beispiel weist uns übrigens darauf hin, daß die obige auf rechtwinklige Koordinaten bezogene Fassung (23) der Ungenauigkeitsregeln als ein Spezialfall allgemeinerer Formulierungen anzusehen ist.

Eine ganz ähnliche Situation liegt übrigens vor bei dem von HEISENBERG und BOHR diskutierten Gedankenexperiment des „ *γ -Strahlmikroskops*“, welches die ideale Vorrichtung zur Messung des *Ortes* eines Elektrons darstellt. Ein Elektron, dessen Ort wir zu beobachten wünschen, werde mit Lichtquanten beleuchtet, die einen definierten Impuls besitzen (also einer ebenen monochromatischen Welle entsprechen). Sobald ein am Elektron gestreutes Lichtquant in ein von uns aufgestelltes *Mikroskop* kommt, bekommen wir den Ort des Elektrons zu „sehen“.

Dabei ist aber die *Richtung* des Lichtquants nach dem Elementarakt der Streuung innerhalb eines gewissen Winkelbereiches unbestimmt, und deshalb erteilt das Lichtquant dem Elektron einen gewissen undefinierten Impuls, so daß hinterher eine entsprechende Unbestimmtheit des Impulses des Elektrons besteht. Die Ortsmessung wird *um so genauer*, je kleiner die *Wellenlänge* des benutzten Lichtes, und je größer die *Apertur* des Mikroskops ist. Aber die entstehende Unbestimmtheit des Impulses des Elektrons wird *vergrößert*, wenn durch Verkleinerung der Lichtwellenlänge der *Betrag* des übertragenen Impulses vergrößert oder durch Vergrößerung der Apertur die *Richtungsunbestimmtheit* der Impulsübertragung vergrößert wird. Die quantitativen Verhältnisse liegen dabei so, daß bei einer derartigen Ortsmessung von vorgeschriebener Genauigkeit die der Komplementarität von Ort und Impuls entsprechende Impulsverschmierung unvermeidlicherweise in Kauf genommen werden muß.

Bevor wir diese Fragen vorläufig verlassen, sei noch auf einen naheliegenden Einwand eingegangen. An einem kräftefrei bewegten Elektron werde zweimal nacheinander — in gewissem zeitlichen Abstand — eine sehr genaue Ortsmessung ausgeführt. Nachdem wir das Elektron zunächst an einem Orte r gefunden haben, finden wir es hernach am Orte r' . Wenn wir nun folgern, daß das Elektron in der Zwischenzeit auf geradliniger Strecke von r nach r' geflogen ist, so bekommen wir für diese Zwischenzeit leicht eine Festlegung von *Impuls und Ort zugleich* in einer den HEISENBERGSchen Ungenauigkeitsregeln widersprechenden Schärfe.

Dazu ist zweierlei zu sagen. Erstens kann man aus dieser nachträglichen Behauptung, daß in der Zwischenzeit das Elektron sich auf der geraden Strecke r, r' bewegt habe, *gar nichts gewinnen*: Für *keinerlei mögliches Experiment* wird dadurch irgendeine *Prognostizierung möglich*. Man muß also diese lediglich aus klassischen *Gewohnheitsgründen* ausgesprochene Behauptung, daß sich das Elektron auf dieser Strecke bewegt habe, als *sinnlos* (inhaltsleer) ansehen, da ihr nichts experimentell zu Bestätigendes oder zu Widerlegendes entspricht. Zweitens aber braucht man nur etwas allgemeinere Fälle ins Auge zu fassen — durch Schirme mit Löchern behinderte Bewegung, oder Bewegung in einem Kraftfeld —, um zu erkennen, daß *außerdem* auch gar keine Möglichkeit besteht, diese Idee mathematisch widerspruchsfrei aufrecht zu erhalten, *sobald man das Anwendbarkeitsgebiet der „geometrischen Optik“ verläßt*: Kommen *Beugungseffekte* in Betracht, so entfallen auch derartige „nachträgliche“ Feststellungen.

3. Energie und Zeit als komplementäre Größen. Aus relativistischen Symmetriegründen muß den Ungenauigkeitsbeziehungen (23) eine analoge zwischen Energie- und Zeitmessung entsprechen:

$$\Delta W \Delta t \geq h. \quad (24)$$

Zu ihrer Erläuterung können wir — analog den obigen Überlegungen — den Fall einer *monochromatischen Welle* mit einer *zeitlich veränderlichen*

Frequenz betrachten: Für ein Zeitintervall Δt bestimmen wir den zugehörigen Frequenzwert, indem wir die auf Δt entfallenden Schwingungen zählen; sind es n , so ergibt sich die Frequenz

$$\nu = \frac{n}{\Delta t} \quad \text{oder} \quad \nu = \frac{n+1}{\Delta t} \quad (25)$$

mit einer Unschärfe

$$\Delta\nu = \frac{1}{\Delta t}; \quad \Delta\nu \Delta t = 1. \quad (26)$$

Wegen $h\nu = W$ bekommen wir hieraus wieder das Optimum von (24).

Diese Beziehung (24) führt uns zum Verständnis der in Kapitel I § 4 besprochenen Gesetzmäßigkeiten. Zunächst können wir das in Formel (3), § 4, I, Kapitel I ausgedrückte Gesetz der natürlichen Linienbreiten als Folge von (24) ansehen. Denn nach (24) kann ein Quantenzustand, der eine Lebensdauer τ besitzt, nur eine *ungenau definierte Energie* haben, derart, daß eine Ungenauigkeit ΔW in der Festlegung der Energie besteht. Der *Grundzustand* eines Atoms hat also auf Grund seiner unendlichen Lebensdauer eine *exakt* festgelegte Energie; und wenn nun etwa der n -te Anregungszustand zu optischer Kombination mit dem Grundzustand befähigt ist, so wird diese Spektrallinie eine *natürliche Breite* besitzen müssen, die der *Unschärfe* des oberen Energieniveaus entspricht. Wir verstehen also, daß die Halbwertsbreite dieser Linie durch

$$\gamma = \frac{1}{\tau_n} \quad (27)$$

gegeben ist. (Zur Vermeidung von Mißverständnissen: Selbstverständlich verstehen wir durch diese überschläglichen Betrachtungen nur die *größenordnungsmäßige* Übereinstimmung von γ und $1/\tau_n$; erst durch genauere Durchrechnung des Problems — sei es an Hand von Korrespondenzbetrachtungen oder auf Grund der exakten Quantenmechanik — können wir ermitteln, daß theoretisch *genau* $\gamma = 1/\tau_n$ herauskommt, und nicht etwa $\gamma = C/\tau_n$ mit einem von Fall zu Fall verschiedenen $C \approx 1$.)

Etwas ausführlicher haben wir uns die Sache so vorzustellen: Während der Lebensdauer des angeregten Zustands ist die Energie unseres Systems eine nur unscharf definierte. *Nach* Durchführung der Emission aber liegt eine scharf definierte Energie vor, nämlich die des Atoms im Grundzustand plus die des Lichtquants — diese beiden Summanden sind beide exakt definiert, denn es steht ja hernach beliebig lange Zeit $\Delta t = \infty$ zu ihrer Messung zur Verfügung. Der Übergang von unscharf definierter Energie zu einem scharf definierten Energiewert ist ganz analog der Herstellung eines scharfen Elektronenortes durch Anwendung des γ -Strahlmikroskops, oder der Herstellung einer definierten Drehimpulskomponente \mathfrak{M}_z durch plötzliche Drehung des äußeren, richtungsquantelnden Feldes. Dementsprechend stellt uns die *Intensitätsverteilung in der natürlichen Linienbreite* einer Linie mit dem Grundzustand als Endzustand genau die *Statistik der Energiewerte* dar, die sich ergibt, wenn an einem Atom, von dem man vorher wußte, daß es sich im n -ten

Anregungszustand befand, eine *exakte* Energiemessung ausgeführt wird. (Welche, um dies nochmals zu unterstreichen, durchaus voraussetzt, daß das untersuchte System durch einen Quantensprung in einen *Zustand unendlicher Lebensdauer* versetzt — also etwa, wie von uns hier angenommen, in ein System „Atom im Grundzustand plus Lichtquant“ umgewandelt wird.) In Rücksicht auf die empirisch bestätigte Formel (1), § 4, I, Kapitel I haben wir also diese Energiestatistik derart anzusetzen, daß

$$w(W) \Delta W = \frac{1}{\tau_n h} \cdot \frac{\Delta W}{\frac{1}{4\tau_n^2} + \frac{4\pi^2}{h^2} (W - W_n)^2} \quad (28)$$

die *Wahrscheinlichkeit* dafür ist, daß ein im n -ten Zustand befindliches Atom bei exakter Energiemessung einen ins Intervall $W, W + \Delta W$ fallenden Energiewert annimmt.

Daraus ergibt sich aber weiterhin auch die Breite und Intensitätsverteilung für eine Linie, die durch Kombination zwischen zwei beliebigen Niveaus zustande kommt. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Atom im n -ten Zustand eine in $W, W + \Delta W$ fallende Energie besitzt (das soll natürlich heißen: eine in $W, W + \Delta W$ fallende Energie *annimmt*, wenn die Energie scharf gemessen wird), multiplizieren wir mit der Wahrscheinlichkeit, daß es im m -ten Zustand eine in $W', W' + \Delta W'$ fallende Energie besitzt; das Produkt

$$\frac{1}{\tau_n \tau_m h^2} \cdot \frac{\Delta W}{\frac{1}{4\tau_n^2} + \frac{4\pi^2}{h^2} (W - W_n)^2} \cdot \frac{\Delta W'}{\frac{1}{4\tau_m^2} + \frac{4\pi^2}{h^2} (W' - W_m)^2}$$

ist dann zu *summieren* (integrieren) über alle *diejenigen* Werte W, W' , deren Differenz $W - W'$ in ein Intervall $h\nu, h(\nu + \Delta\nu)$ fällt: So bekommen wir die *Linienintensität* bei der *Frequenz* ν . Also setzen wir $W' = W - h\nu$ und schreiben

$$I(\nu) = \frac{1}{\tau_n \tau_m h} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\frac{1}{4\tau_n^2} + \frac{4\pi^2}{h^2} (W - W_n)^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{4\tau_m^2} + \frac{4\pi^2}{h^2} (W - h\nu - W_m)^2} dW;$$

das ergibt¹ in der Tat die der Erfahrung entsprechende Formel:

$$I(\nu) = \frac{\frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_m}}{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\tau_n} + \frac{1}{\tau_m} \right)^2 + 4\pi^2 (\nu - \nu_0)^2}; \quad \nu_0 = \frac{W_n - W_m}{h}, \quad (29)$$

mit der in (3), § 4, I, Kapitel I angegebenen Linienbreite.

Eine Ergänzung dieser Überlegungen ist jedoch notwendig im Hinblick auf eine besondere Möglichkeit. Wenn ein Niveau W_m genau in der *Mitte* zwischen W_n und W liegt, so kann eine *Kohärenz* bestehen zwischen

¹ Denn es ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a_1}{\pi (a_1^2 + x^2)} \cdot \frac{a_2}{\pi (a_2^2 + (x - y)^2)} \cdot dx = \frac{a_1 + a_2}{\pi ((a_1 + a_2)^2 + y^2)}.$$

den aufeinanderfolgenden Übergängen $W_n \rightarrow W_m$ und $W_m \rightarrow W_r$. Das extremste Beispiel ist der eindimensionale *harmonische Oszillator*. Bei diesem ist *klassisch* die Linienbreite *unabhängig von der Schwingungsamplitude* immer dieselbe; die Schwingungskordinate entspricht ja der Formel

$$q(t) = \text{const } e^{-\frac{1}{2} \gamma t} \cos 2\pi(\nu_0 t + \delta), \quad (30)$$

was nach den Ausführungen von Kapitel I, § 4, I, eine Linie mit der doppelten Halbwertsbreite $\gamma/2\pi$ ergibt. Wir können das auch so ausdrücken: die emittierte Strahlung ist ein monochromatischer Wellenzug mit der Frequenz ν_0 , aber *exponentiell wie $e^{-\gamma t}$ abklingender Intensität*.

Quantenphysikalisch liegt es aber so, daß die mittleren Lebensdauern der Anregungszustände nach oben hin immer kleiner werden; eine Berechnung der Linienbreite nach der Formel $\gamma = 1/\tau_n + 1/\tau_m$ würde hier zu Ergebnissen führen, die ganz verschieden von den klassischen Verhältnissen wären. Das kann nicht der Wirklichkeit entsprechen.

Nun zeigt sich an einem *Haufen* spontan emittierender gleichartiger harmonischer Oszillatoren quantentheoretisch *ebenso* wie klassisch 1. nur *eine* emittierte Spektrallinie, so daß den einzelnen emittierten Lichtquanten nicht anzusehen ist, von *welchem* Anregungsniveau n aus sie emittiert sind, und 2. ein *exponentielles Abklingen* der Gesamtintensität dieser Spektrallinie.

Für das Zustandekommen dieses exponentiellen Abklingens ist es wesentlich, daß die *Übergangswahrscheinlichkeit* $n \rightarrow n-1$ (nicht etwa nur asymptotisch, sondern) *genau mit n proportional* ist:

$$\tau_n = \frac{1}{n\gamma}. \quad (31)$$

Denn danach ergibt sich ja für die Anzahlen N_n derjenigen Oszillatoren in unserem Haufen, die sich im n -ten Anregungszustand befinden:

$$\frac{dN_n}{dt} = (n+1)\gamma N_{n+1} - n\gamma N_n; \quad (32)$$

und für die *Gesamtintensität* I der Ausstrahlung (gemessen durch die Zahl der sekundlich emittierten Lichtquanten) bekommen wir

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} n\gamma N_n; \quad (33)$$

und es wird

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \sum_{n=1}^{\infty} n\gamma \frac{dN_n}{dt} \\ &= \gamma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \{(n+1)nN_{n+1} - n^2N_n\} \\ &= \gamma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \{n(n-1)N_n - n^2N_n\} = -\gamma^2 \sum_{n=1}^{\infty} nN_n. \end{aligned}$$

oder

$$\frac{dI}{dt} = -\gamma I; \quad I = I_0 e^{-\gamma t}. \quad (34)$$

Unsere frühere korrespondenzmäßige Begründung (vgl. § 3, 1) der exakten Beziehung (31) erhält also eine neue Bestätigung dadurch, daß wir sie gerade als Bedingung für das Zustandekommen eines exponentiellen Abklingens (34) der Gesamtintensität I erkennen. Wir werden nun nicht zweifeln, daß quantentheoretisch die *Linienbreite* der jetzt betrachteten Gesamtemission genau ebenso mit dem exponentiellen *Abklingen* von I zusammenhängt, wie es *sonst* der Fall ist beim spontanen Übergang von Atomen aus einem Niveau W_n in den Grundzustand — und wie es *klassisch* der Fall ist bei einem monochromatischen Wellenzug von exponentiell abnehmender Intensität. Daß also, kurz gesagt, auch quantentheoretisch die natürliche Linienbreite beim harmonischen Oszillator für alle Übergänge $n \rightarrow n-1$ *dieselbe* ist.

Wir können dies übrigens auch so ausdrücken, daß beim harmonischen Oszillator die Formel $\gamma = 1/\tau_n + 1/\tau_m$ durch $\gamma = 1/\tau_n - 1/\tau_m$ zu ersetzen ist (dabei $m = n-1$), und dies hat übrigens allgemeinere Bedeutung. Bei *hohen Quantenzahlen* nämlich wird auch beim anharmonischen Oszillator oder einem sonstigen Quantensystem infolge der asymptotischen Anwendbarkeit der klassischen Mechanik eine Übereinstimmung (innerhalb der Linienbreite) der Frequenzen zweier aufeinander folgender Übergänge ein normales, häufiges Vorkommnis sein; und die zu fordernde asymptotische Übereinstimmung mit der klassischen Theorie auch hinsichtlich der Linienbreite läßt dann in allgemeiner Weise die Formel $\gamma = 1/\tau_n - 1/\tau_m$ als gültig erkennen.

Was wir in Kapitel 1, § 4, 3 über die quantitative Abgrenzung der *adiabatischen* Zustandsänderungen erfuhren, wird gleichfalls durch die Ungenauigkeitsrelation (24) verständlich. Denn wir können, wie man sich bei nochmaliger Betrachtung der dort besprochenen Fälle leicht klar machen wird, auch diese Erfahrungen in der zusammenfassenden Feststellung ausdrücken, daß ein Atom einen mit einer Schärfe ΔW definierten Energiewert nur dann annehmen kann, wenn ein Zeitintervall $\Delta t \geq h/\Delta W$ zur Verfügung steht.

Drittes Kapitel.

Quanten- und Wellenmechanik.

Der Gang unserer Darstellung, der jede Verfolgung von historischen Umwegen der Forschung und Erkenntnis vermieden, und statt eines historischen Entwicklungsbildes einen in moderner Auffassung geformten *induktiven Aufbau* der Quantentheorie erstrebt hat, läßt zwischen dem jetzt abgeschlossenen zweiten Kapitel und dem hier beginnenden dritten keinen scharfen Trennungsstrich bestehen. Die empirischen Tatbestände, die im ersten Kapitel zusammengestellt wurden, lieferten uns eine Reihe von quantenphysikalischen Gesetzmäßigkeiten bereits in mathematischer

klarer Form; die nachdenkliche Betrachtung der empirischen Gegebenheiten, zu der uns im zweiten Kapitel das BOHRsche *Korrespondenzprinzip* anleitete, setzte uns nicht nur instand, verschiedene der festgestellten Gesetze als notwendige Folgen der übrigen zu erkennen und somit theoretisch zu begründen, sondern sie führte uns auch dazu, in mannigfachen Einzelproblemen zur Aufspürung weiterer Quantengesetze vorzudringen. Wir könnten dies Verfahren fortsetzen: es gibt noch manches andere quantentheoretische Problem, dessen exakte Lösung wir in zuverlässiger Weise erreichen können durch ähnliche Betrachtungen, wie wir sie oben wiederholt ausgeführt haben — und dessen Lösung im historischen Gange der Entwicklung tatsächlich auch vor der exakten Quantenmechanik erreicht wurde. Aber wir wollen jetzt unsere korrespondenzmäßige Übersetzungskunst nicht mehr auf spezielle Einzelprobleme, sondern auf mehr grundsätzliche Dinge richten.

Wir sind bereits an mehreren Stellen so weit vorgestoßen, daß nur noch eine vertiefte Besinnung auf Bedeutung und Tragweite des schon Erreichten nötig ist, um uns erkennen zu lassen, daß wir bereits die Ansätze einer umfassenden exakten Theorie in Händen haben, deren vollständige Entwicklung uns instand setzen muß, die Einzelprobleme einer *deduktiven Behandlung zu unterwerfen*. Das korrespondenzmäßige *Erspüren* der Quantengesetze, zu dessen Gelingen ein tiefes anschauliches und gefühlsmäßiges Erfassen nötig ist, wird in der Behandlung der Einzelprobleme allgemein ersetzt durch das mathematisch eindeutige deduktive Schema der fertigen Theorie.

§ 1. Quantenmechanische Grundbegriffe.

1. **Das Matrixschema.** Wir wollen den korrespondenzmäßigen Zusammenhang von klassischen FOURIER-Koeffizienten und quantenphysikalischen Übergangsamplituden ausführlicher betrachten (vgl. Kapitel 2, § 3, 5). Wir denken vorläufig an den Fall eines eindimensionalen anharmonischen Oszillators mit der Koordinate q .

Wir sind gewohnt, die *klassischen* FOURIER-Koeffizienten $q_\tau(I) = q_\tau(nh)$ nach Multiplikation mit den zugehörigen Zeitfaktoren zu *einer Summe* zusammenzufassen, um die Größe q selbst als Funktion der Zeit t darzustellen:

$$q(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} q_\tau e^{2\pi i \tau t} \quad (1)$$

Aber für die Zwecke einer *quantentheoretischen Kinematik* — wir wollen dies ganz besonders betonen, daß wir nicht nur die eigentliche Mechanik, sondern auch schon die *Kinematik* der klassischen Theorie, die Vorstellung von einer *Bewegung* in Raum und Zeit, durch quantentheoretische Begriffsbildungen zu ersetzen haben — für diese quantentheoretischen Zwecke ist es angebracht, viel mehr an die *einzelnen* FOURIER-Koeffizienten $q_\tau(I) = q_\tau(nh)$ zu denken, als an die mit ihnen gebildete Summe (1).

Denn in der Quantenkinematik gibt es kein Analogon mehr für die Summe (1), sondern nur noch ein Analogon für jeden *einzelnen* FOURIER-Koeffizienten: *Die FOURIER-Koeffizienten machen sich gewissermaßen selbständig.*

Wir numerieren die Zustände des betrachteten Oszillators mit 0, 1, 2, 3, ..., und schreiben uns das *Gesamtsystem aller Übergangsamplituden* bzw. ihrer den klassischen $q_{\tau}(n\hbar)$ korrespondierenden Faktoren (vgl. Kapitel 2, § 3, 5) auf. Diese bilden ein quadratisches Schema:

$$\left. \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & \dots \\ \hline 0 & q(0,0) & q(0,1) & q(0,2) & \dots \\ 1 & q(1,0) & q(1,1) & q(1,2) & \dots \\ 2 & q(2,0) & q(2,1) & q(2,2) & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\} \quad (2)$$

Dieses quadratische Schema wollen wir im folgenden mit

$$\mathbf{q} = (q(m, n)) \quad (3)$$

bezeichnen. Dem mathematischen Sprachgebrauch entsprechend nennen wir es die „Matrix“ \mathbf{q} .

Es liegt nahe, in diesem Schema statt der $q(m, n)$ *allein* lieber auch die zugehörigen *Zeitfaktoren* einzutragen, so daß eine Matrix mit den „*Matrixelementen*“

$$q(m, n) e^{2\pi i \nu(m, n)t} \quad (\text{wobei } \nu(m, n) = -\nu(n, m))$$

entsteht:

$$\left. \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & \dots & \\ \hline 0 & q(0,0) & q(0,1) e^{2\pi i \nu(0,1)t} & \dots & \\ 1 & q(1,0) e^{2\pi i \nu(1,0)t} & q(1,1) & \dots & \\ 2 & q(2,0) e^{2\pi i \nu(2,0)t} & q(2,1) e^{2\pi i \nu(2,1)t} & \dots & \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\} \quad (4)$$

Es ist bequem, wenn wir auch für *diese* Matrix das Zeichen \mathbf{q} gebrauchen, indem wir ein für allemal verabreden: *Das Schema (2) oder (3) soll lediglich als eine Abkürzung für das ausführliche Schema (4) oder*

$$\mathbf{q} = (q(m, n) e^{2\pi i \nu(m, n)t}) \quad (5)$$

angesehen werden. Wir *meinen* also stets (4), (5), wenn wir der Kürze halber (2) oder (3) hinschreiben.

Wir erinnern daran, daß wir die *klassische Realitätsbedingung* für q , die sich nach (1) durch

$$q_{\tau}(n\hbar) = q_{-\tau}(n\hbar)^* \quad (6)$$

ausdrücken läßt, korrespondenzmäßig analogisieren durch die „*quanten-theoretische Realitätsbedingung*“ (vgl. Kapitel 2, § 3, 5):

$$q(m, n) = q(n, m)^* \quad (7)$$

Dem mathematischen Brauch entsprechend drücken wir diese Eigenschaft der Matrix (3) dadurch aus, daß wir sagen: Die Matrix (3) ist *hermitisch*. Man beachte, daß wegen

$$e^{2\pi i \nu(m, n) t} = e^{-2\pi i \nu(n, m) t}$$

gleichzeitig auch die ausführlichere Matrix (5) hermitisch ist.

Die Matrix q kann nach (5) offenbar *nach der Zeit differenziert* werden; das ergibt eine neue Matrix

$$\dot{q} = 2\pi i (\nu(m, n) q(m, n) e^{2\pi i \nu(m, n) t}), \quad (8)$$

oder abgekürzt

$$\dot{q} = 2\pi i (\nu(m, n) q(m, n)) \quad (9)$$

geschrieben, deren Matrixelemente aus denen von q durch Multiplikation mit $2\pi i \nu(m, n)$ hervorgehen; \dot{q} ist offenbar auch wieder *hermitisch*.

Wir betrachten \dot{q} als quantentheoretisches Analogon zur klassischen Größe \dot{q} , in demselben Sinne, wie wir in q das quantentheoretische Analogon zur klassischen Koordinate q erblicken. Für die Quantenfrequenzen $\nu(m, n)$ wollen wir noch ausdrücklich die Gültigkeit des RITZschen Prinzips fordern, also die Existenz von Termen T_n , aus denen die $\nu(m, n)$ in der Form

$$\nu(m, n) = T_n - T_m \quad (10)$$

abzuleiten sind. (Wir erlauben uns jetzt, den Faktor c von (5), (9), § 3, 2, Kapitel I in die T_n hinein zu ziehen.) Wir können diese Eigenschaft der Frequenzen $\nu(m, n)$ auch durch die Beziehung

$$\nu(m, k) + \nu(k, n) = \nu(m, n) \quad [\text{und } \nu(m, m) = 0] \quad (11)$$

ausdrücken, die der klassischen Frequenzbeziehung

$$\tau\nu + \sigma\nu = (\tau + \sigma)\nu$$

entspricht.

Die quantenkinematische Formel (8), (9) entspricht ganz der klassischen Beziehung

$$\dot{q}(t) = 2\pi i \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \tau \nu \cdot q_{\tau} \cdot e^{2\pi i \tau \nu t} \quad (12)$$

Damit haben wir den Aufbau unserer *quantentheoretischen Kinematik* schon in wesentlichen Stücken fertig. Wir prüfen die Tragweite unserer Begriffsbildung am Beispiel des *harmonischen Oszillators*, dessen exakte quantentheoretische Gesetzmäßigkeiten wir bereits aus unseren früheren Untersuchungen weitgehend kennen. Klassisch gilt für ihn die Bewegungsgleichung

$$\ddot{q} = -4\pi^2 \nu_0^2 \cdot q; \quad (13)$$

und diese klassische Bewegungsgleichung können wir *direkt in die Quantentheorie übernehmen*, indem wir aus der Matrix q die zeitlichen Ableitungen \dot{q} , \ddot{q} bilden, und die Beziehung

$$\ddot{q} = -4\pi^2 \nu_0^2 q \quad (14)$$

fordern. Das ist natürlich so zu verstehen, daß jedes einzelne Matrixelement von \dot{q} gleich dem mit $-4\pi^2\nu_0^2$ multiplizierten entsprechenden Matrixelement von q sein soll; also

$$\left. \begin{aligned} 4\pi^2\nu(m,n)^2 q(m,n) &= 4\pi^2\nu_0^2 q(m,n); \\ \{ \nu(m,n)^2 - \nu_0^2 \} q(m,n) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Es ist also $q(m,n)$ nur dann von Null verschieden, wenn $\nu(m,n) = \pm\nu_0$ ist, und daraus ist leicht zu erschließen, daß die Terme T_n (in denen ja eine additive Konstante definitionsgemäß willkürlich ist) eine *äquidistante Reihe*

$$T_n = -n\nu_0 \quad (16)$$

bilden. Die Matrix q hat dann folgende Form:

$$q = \begin{pmatrix} 0 & q(0,1) & 0 & 0 & \dots \\ q(1,0) & 0 & q(1,2) & 0 & \dots \\ 0 & q(2,1) & 0 & q(2,3) & \dots \\ 0 & 0 & q(3,2) & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (17)$$

Wir bekommen also *die richtige Auswahlregel*: $q(m,n)$ ist $\neq 0$ nur für $m = n \pm 1$. Aber es fehlt uns noch eine Festlegung der Übergangswahrscheinlichkeiten für die „erlaubten“ Übergänge $m = n \pm 1$. Auch führen uns unsere Ansätze noch nicht zur *BOHRschen Frequenzbedingung*, bzw. zum Zusammenhang von Termen und *Energiewerten*. Zu alledem brauchen wir noch ein weiteres Postulat, das wir neben unseren obigen „kinematischen“ Formulierungen als Grundaxiom in unsere Theorie aufzunehmen haben.

Als solches Postulat bietet sich die *THOMAS-KUHNSche Summenregel* dar: Sie ist allgemeingültig für alle eindimensionalen Systeme (und, wie wir ebenfalls wissen, verallgemeinerungsfähig für Probleme von mehreren Freiheitsgraden); sie kann als die quantenmechanisch korrekte Formulierung der „Quantenbedingung“

$$\oint p dq = nh$$

angesehen werden, und sie erlaubt in der Tat für den harmonischen Oszillator die eindeutige Festlegung der Übergangswahrscheinlichkeiten, sobald die Auswahlregel $n \rightarrow n \pm 1$ anderweitig begründet ist (vgl. Kapitel 2, § 3, 5). Also wollen wir diese *THOMAS-KUHNSche Summenregel* als ergänzendes Postulat annehmen: Das Problem des harmonischen Oszillators ist dann im wesentlichen gelöst, und wir können uns der Frage zuwenden, wie dieses Postulat in allgemeineren Fällen mit unseren kinematischen Formulierungen zu verbinden ist. Vorher haben wir jedoch unseren kinematischen Formulierungen noch eine bedeutungsvolle Vertiefung und Erweiterung zu geben.

2. Die Multiplikation der quantenmechanischen Matrizen. Wir haben gelernt, die klassische Koordinante q und die klassische Geschwindigkeit \dot{q}

quantenkinematisch durch gewisse Matrizen \mathbf{q} , $\dot{\mathbf{q}}$ zu analogisieren. Was aber ist das korrespondenzmäßige Analogon zur klassischen *Summe* $q + \dot{q}$ und zum klassischen *Produkt* $q \dot{q}$ von q und \dot{q} , oder zu den klassischen *Quadraten* q^2 , \dot{q}^2 ?

Wenn wir auf solche Fragen eine sinngemäße allgemeine Antwort zu geben vermögen, so werden wir imstande sein, die ganze klassische Mechanik in denkbar engster und vollständigster Weise quantentheoretisch zu analogisieren: Kennen wir in allgemeiner Form das korrespondenzmäßige Analogon zu den klassischen Rechenprozessen der Addition, Multiplikation und Zeitdifferentiation, so können wir ganz allgemein alle klassischen Rechnungen durch quantentheoretische Rechnung analogisieren. Es war der Gedanke HEISENBERGS, auf diesem Wege den Aufbau einer systematischen Quantenmechanik zu erstreben, welche nicht mehr — wie wir es im vorigen Kapitel an mancherlei Beispielen ausgeführt haben — allerlei Einzelaussagen der klassischen Theorie korrespondenzmäßig übersetzt, sondern die ganze klassische Theorie durch eine ihr korrespondierende quantenmechanische Theorie ersetzt, die aus einigen wenigen Postulaten deduktiv zu entwickeln ist.

Es seien \mathbf{a} , \mathbf{b} zwei verschiedene Matrizen, deren jede das Analogon irgend einer Funktion der klassischen Größen \dot{q} , q sein mag. Dann ist es naturgemäß, die *Summe* von \mathbf{a} , \mathbf{b} zu definieren durch *Addition der entsprechenden Matrixelemente*:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} &= (a(m, n)), & \mathbf{b} &= (b(m, n)); \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a(m, n) + b(m, n)). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Das entspricht der klassischen Addition, bei der sich ja die einander entsprechenden FOURIER-Koeffizienten addieren:

$$\left. \begin{aligned} a(t) &= \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} a_{\tau} e^{2\pi i \tau vt}, & b(t) &= \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} b_{\tau} e^{2\pi i \tau vt}; \\ a(t) + b(t) &= \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} (a_{\tau} + b_{\tau}) e^{2\pi i \tau vt}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Die *Multiplikation* einer Matrix \mathbf{a} mit einer gewöhnlichen Zahl λ geschieht natürlich so, daß jedes einzelne Matrixelement von \mathbf{a} mit λ multipliziert wird.

Nicht so einfach steht es mit der *Multiplikation* von \mathbf{a} und \mathbf{b} . *Klassisch* sind die FOURIER-Koeffizienten durch

$$a(t, b(t)) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty} a_{\sigma} b_{\tau-\sigma} \right) e^{2\pi i \tau vt} \quad (20)$$

bestimmt. Den klassischen Ausdruck

$$\sum_{\sigma} a_{\sigma}(nh) b_{\tau-\sigma}(nh) \quad (21)$$

übersetzen wir nun nach HEISENBERG in folgenden quantentheoretischen:

$$\sum_{\sigma} a(n, n-\sigma) b(n-\sigma, n-\tau). \quad (22)$$

Das korrespondiert in der Tat mit (21), da $a(n, n-\sigma)$ mit $a_\sigma(nh)$, und $b(n-\sigma, n-\tau)$ mit $b_{\tau-\sigma}([n-\sigma]h)$ korrespondiert: Wenn bei Festhaltung von $nh=I$ und bestimmten Werten σ, τ der Grenzübergang $h \rightarrow 0$ gemacht wird, so geht jeder Summand von (22) in den entsprechenden Summanden des klassischen Ausdrucks (21) über. Die genaue Gestalt des Ausdrucks (22) ergibt sich zwangsläufig, wenn wir die *Zeitfaktoren* zu den $a(n, n-\sigma)$ und $b(n-\sigma, n-\tau)$ hinzuschreiben: In

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\sigma} a(n, n-\sigma) e^{2\pi i \nu(n, n-\sigma)t} b(n-\sigma, n-\tau) e^{2\pi i \nu(n-\sigma, n-\tau)t} = \\ = \sum_{\sigma} a(n, n-\sigma) b(n-\sigma, n-\tau) e^{2\pi i \nu(n, n-\tau)t} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

ergibt sich auf Grund des *RITZschen Kombinationsprinzips* (II), für jeden einzelnen Summanden *derselbe* Zeitfaktor [mit Frequenz $\nu(n, n-\tau)$].

Aber wir kommen hier zu einer *zweideutigen Multiplikation*. Wir hätten statt (22) auch den Ausdruck

$$\sum_{\sigma} b(n, n-\sigma) a(n-\sigma, n-\tau)$$

nehmen können, der ebenfalls in einer dem RITZschen Kombinationsprinzip angepaßten Weise mit dem klassischen Ausdruck (21) korrespondiert. Es ergeben sich mithin *zwei verschiedene Matrizen, die mit \mathbf{ab} korrespondieren*; wir bezeichnen sie durch \mathbf{ab} und \mathbf{ba} . In bequemerer Schreibweise definieren wir sie gemäß (22), (23) durch

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{ab} &= \left(\sum_k a(m, k) b(k, n) \right), \\ \mathbf{ba} &= \left(\sum_k b(m, k) a(k, n) \right). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

In besonderen Fällen kann $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ sein — wir sagen dann, *\mathbf{a} und \mathbf{b} sind „vertauschbar“* — aber im allgemeinen wird die Differenz beider Produkte eine von Null verschiedene Matrix sein; wir gebrauchen die Bezeichnungsweise

$$\mathbf{ab} - \mathbf{ba} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]. \quad (25)$$

Während die *Summe* zweier *hermitescher Matrizen* wiederum hermitisch ist, wird das Produkt \mathbf{ab} von hermiteschen \mathbf{a}, \mathbf{b} dann und nur dann eine hermitesche Matrix, wenn \mathbf{a}, \mathbf{b} *vertauschbar* sind; allgemein jedoch sind bei hermiteschen \mathbf{a}, \mathbf{b} auch $\mathbf{ab} + \mathbf{ba}$ und $i[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ hermitisch. Man übersieht das am schnellsten, wenn man sich einer besonderen Bezeichnungsweise bedient für die aus einer Matrix $\mathbf{a} = (a(m, n))$ hervorgehende „adjungierte“ Matrix \mathbf{a}^\dagger , die durch

$$\mathbf{a}^\dagger = (a(n, m)^*) \quad (26)$$

gegeben ist¹. Dann ist \mathbf{a} *hermitisch*, wenn

$$\mathbf{a}^\dagger = \mathbf{a} \quad (27)$$

ist; und allgemein gilt

$$(\mathbf{ab})^\dagger = \mathbf{b}^\dagger \mathbf{a}^\dagger; \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b})^\dagger = \mathbf{a}^\dagger + \mathbf{b}^\dagger; \quad \mathbf{a}^{\dagger\dagger} = \mathbf{a}. \quad (28)$$

¹ Also \mathbf{a}^\dagger entsteht aus \mathbf{a} durch „Spiegelung“ an der „Diagonale“ $m=n$ und gleichzeitigen Übergang zu konjugiert komplexen Zahlwerten.

Es ist ein ermutigendes Zeichen für die Angemessenheit der Begriffsbildungen, zu denen wir gelangt sind, daß die nach HEISENBERG durch (23), (24) definierte Multiplikation quantenmechanischer Matrizen ein mathematischer Prozeß ist, der auch vom rein mathematischen Standpunkt aus naheliegt. In der Tat ist dieser Rechenprozeß von den Mathematikern selbst schon seit langer Zeit als „Multiplikation der Matrizen“ benannt und in größter Ausführlichkeit und Vielseitigkeit untersucht worden.

Diesem glücklichen Umstand ist es zum großen Teil zu verdanken, daß die neue physikalische Theorie, nachdem der entscheidende Schritt zur Aufstellung der quantentheoretischen Kinematik getan war, sich mit so explosiver Schnelligkeit entwickeln konnte: Die Mathematik hielt seit langem in fertig ausgearbeiteter Form die Hilfsmittel bereit, deren die Physiker für die Zwecke der Quantenmechanik bedurften.

Die Zweideutigkeit $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$ der Multiplikation von Matrizen pflegt man als Aufhebung des kommutativen Gesetzes der Multiplikation zu bezeichnen. Die anderen beiden wichtigen Rechengesetze der Multiplikation, das assoziative Gesetz $(\mathbf{ab})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{bc})$, und das distributive Gesetz $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$, gelten für Matrizen ebenso wie für gewöhnliche Zahlen:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{ab})\mathbf{c} &= \mathbf{a}(\mathbf{bc}), \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} &= \mathbf{ac} + \mathbf{bc}, \\ \mathbf{c}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \mathbf{ca} + \mathbf{cb}. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Das ist aus (24) unmittelbar zu ersehen.

Die Matrix

$$\mathbf{I} = (\delta_{mn}); \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n, \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases} \quad (30)$$

hat die Eigenschaft

$$\mathbf{Ia} = \mathbf{aI} = \mathbf{a} \quad (31)$$

für jedes \mathbf{a} . Wir nennen sie die *Einheitsmatrix*.

Die Zweideutigkeit (Nichtkommutativität) der Multiplikation kann als das in formaler Hinsicht *entscheidende* Charakteristikum der Quantenmechanik gegenüber der klassischen Theorie bezeichnet werden. Sie bedeutet keineswegs, wie man zunächst glauben könnte, eine *Erschwerung* des Rechnens oder eine *Komplizierung* der Theorie. Im Gegenteil: gerade sie erlaubt es, in wunderbar einfacher und eleganter Form Gesetzmäßigkeiten auszudrücken, die in der klassischen Theorie viel weniger durchsichtig sind.

Wir behaupten: *Es besteht, wenn \mathbf{a}, \mathbf{b} den klassischen Größen a, b korrespondieren, die zuerst von DIRAC erkannte fundamentale Korrespondenz:*

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \rightarrow \frac{\hbar}{2\pi i} (a, b). \quad (32)$$

In Worten: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ korrespondiert mit $\hbar/2\pi i \cdot (a, b)$, wo (a, b) das *POISSONsche Klammersymbol* ist (vgl. Kapitel 2, § 5,2). Wir wollen dies erläutern

unter der Voraussetzung, daß wir es mit einem System von nur einem Freiheitsgrade (Oszillator) zu tun haben; doch betonen wir, daß alle quantenmechanischen Gesetzmäßigkeiten dieses Abschnitts, ebenso wie die allgemeinen Betrachtungen des vorigen, für jedes quantenmechanische System — mit beliebig vielen Freiheitsgraden — gelten.

Wir können nach unseren früheren Ergebnissen das POISSONSche Klammersymbol (a, b) so aufschreiben:

$$(a, b) = \frac{\partial a}{\partial I} \frac{\partial b}{\partial w} - \frac{\partial b}{\partial I} \frac{\partial a}{\partial w}, \quad (33)$$

wobei

$$a(I, w) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} a_{\tau}(I) e^{2\pi i \tau w}, \quad b(I, w) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} b_{\tau}(I) e^{2\pi i \tau w} \quad (34)$$

ist. Der τ -te FOURIER-Koeffizient von (a, b) hat also das Aussehen

$$2\pi i \left\{ \sum_{\sigma} (\tau - \sigma) \frac{da_{\sigma}(I)}{dI} b_{\tau - \sigma}(I) - \sum_{\varrho} \varrho \frac{db_{\tau - \varrho}(I)}{dI} a_{\varrho}(I) \right\}. \quad (35)$$

Das kann durch folgenden quantentheoretischen Ausdruck analogisiert werden:

$$\left. \begin{aligned} & 2\pi i \sum_{\sigma} \frac{a(n, n - \sigma) - a(n - \tau + \sigma, n - \tau)}{h} b(n - \sigma, n - \tau) \\ & - 2\pi i \sum_{\varrho} \frac{b(n, n - \tau + \varrho) - b(n - \varrho, n - \tau)}{h} a(n - \tau + \varrho, n - \tau) \\ & = \frac{2\pi i}{h} \sum_{\sigma} \{ a(n, n - \sigma) b(n - \sigma, n - \tau) - b(n, n - \sigma) a(n - \sigma, n - \tau) \}. \end{aligned} \right\} (36)$$

Hier haben wir das Matrixelement $n, n - \tau$ der mit $2\pi i/h$ multiplizierten Matrix $[a, b]$ erhalten: *Die behauptete Korrespondenz ist also bewiesen.*

Die quantenmechanischen Klammersymbole haben, wie man unmittelbar aus (22) entnehmen kann, die folgenden Eigenschaften:

$$\left. \begin{aligned} [a, b] &= -[b, a], \\ [a, b + c] &= [a, b] + [a, c], \\ [a, bc] &= b[a, c] + [a, b]c, \\ [a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] &= 0. \end{aligned} \right\} (37)$$

Das bedeutet aber: *Die in den Formeln (22), (23), § 5, 2, Kapitel 2 festgestellten Eigenschaften der klassischen POISSONSchen Klammersymbole gelten unverändert auch für die Quantenmechanik.* Nur muß natürlich in der dritten Zeile (37) auf die Reihenfolge der Faktoren geachtet werden. Die Einfachheit der Quantenmechanik erweist sich darin, daß die für die klassische Theorie recht umständlich zu beweisende JACOBIsche Identität (vierte Zeile (37)) für die Quantentheorie nach Hinschreiben des Ausdrucks $[a, [b, c]]$ gemäß (25) unmittelbar zu ersehen ist.

3. Kanonische Vertauschungsregeln und Bewegungsgleichungen. Wenn bei einem klassischen System gemäß § 5, 2, Kapitel 2 kanonisch konjugierte

Impulse und Koordinaten p_k, q_k eingeführt werden, so gelten die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} (p_k, p_l) = (q_k, q_l) = 0, \\ (p_k, q_l) = \delta_{kl}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Nachdem wir die Korrespondenzbeziehung der klassischen POISSONSchen Klammern zu den quantenmechanischen Klammersymbolen kennen, werden wir vermuten, daß den klassischen Beziehungen (38) die Quantengesetze

$$\left. \begin{aligned} [p_k, p_l] = [q_k, q_l] = 0, \\ [p_k, q_l] = \frac{h}{2\pi i} \delta_{kl} \mathbf{I} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

entsprechen. Diese als grundlegende Postulate der neuen Theorie anzusehenden „kanonischen Vertauschungsregeln“ besitzen eine einfache Bedeutung für die *Dispersionstheorie*. Wir betrachten zunächst wieder den Fall eines einzigen Freiheitsgrades: q sei die Schwingungskordinate, $p = \mu \dot{q}$ der ihr konjugierte Impuls. Die *kanonische Vertauschungsregel*

$$[p, q] = \frac{h}{2\pi i} \mathbf{I} \quad (40)$$

besagt dann, ausführlicher geschrieben:

$$\left. \begin{aligned} & \sum_k \{p(k, m)q(k, n) - q(m, k)p(k, n)\} \\ & = 2\pi i \mu \sum_k \{v(m, k) + v(n, k)\} q(m, k)q(k, n) \\ & = \delta_{mn} \cdot \frac{h}{2\pi i}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Für $n = m$ gibt das insbesondere

$$\sum_k v(k, m) |q(m, k)|^2 = \frac{h}{8\pi^2 \mu}, \quad (42)$$

und das ist die THOMAS-KUHNSche *Summenregel*, die unter unsere Postulate aufzunehmen wir uns bereits entschlossen hatten. Für $n \neq m$ ist (41) dagegen die von KRAMERS gegebene Verallgemeinerung der THOMAS-KUHNSchen Summenregel (vgl. (69), § 3,5, Kapitel 2)¹. Ebenso bilden auch bei einem System von *mehreren* Freiheitsgraden die kanonischen Vertauschungsregeln (39) genau die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Ladungsteilchen des Systems auf eine Lichtwelle sehr hoher Frequenz als praktisch *freie* Ladungsteilchen reagieren.

Übrigens lassen uns die Korrespondenz (32) und die kanonischen Vertauschungsregeln (39) oder (40) auch deutlich den tieferen Sinn der merkwürdigen Tatsache erkennen, daß die *imaginäre Zahl* $i = \sqrt{-1}$ eine so zentrale Rolle in der ganzen Quantentheorie spielt, daß man dies geradezu als eines ihrer charakteristischen unterscheidenden Merkmale

¹ Die uns aus Kapitel 2 bekannte, von KRAMERS herrührende Begründung von (41) für $n \neq m$ ist von ihm nach der von anderer Seite geschehenen Aufstellung der Vertauschungsregel (40) als *Interpretation* dieser Vertauschungsregel ausgeführt.

gegenüber der klassischen Theorie bezeichnen darf. Wir sehen nämlich, daß das Auftreten der Zahl $i = \sqrt{-1}$ engstens verknüpft ist mit der *Zweideutigkeit* (Nichtkommutativität) *der Multiplikation*: Wir hätten ja, statt die Korrespondenz

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \rightarrow \frac{h}{2\pi i} (a, b) \quad (43)$$

anzusetzen, genau so gut schreiben können

$$[\mathbf{b}, \mathbf{a}] \rightarrow \frac{h}{2\pi i} (a, b); \quad (44)$$

dann wären also auch in den kanonischen Vertauschungsregeln (39), (40) die Klammersymbole $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ gerade mit *umgekehrtem Vorzeichen* einzusetzen.

Daß nun aber aus dieser Zweideutigkeit nicht etwa eine Unsicherheit der Theorie entspringt (daß wir nicht etwa *zwei verschiedene Theorien* bekommen, je nachdem, ob wir (43) oder (44) annehmen), das liegt daran, daß (44) aus (43) auch dadurch hervorgeht, daß man i durch $-i$ ersetzt: Alle *physikalischen Ergebnisse* der Theorie (diese müssen ja schließlich Relationen zwischen *reellen* Größen sein!) sind infolgedessen nach *beiden* Theorien, (43) oder (44), *dieselben*.

Als *mathematische Folgerung* aus den kanonischen Vertauschungsregeln verzeichnen wir den Satz: *Wenn $\mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ eine Funktion der $\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k$ ist, so gelten die Beziehungen*

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{q}_k, \mathbf{F}] &= -\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{p}_k}, \\ [\mathbf{p}_k, \mathbf{F}] &= \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}_k}; \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

dabei sind die rechten Seiten analog wie in der gewöhnlichen Analysis definiert: für nur einen Freiheitsgrad z. B. wird definitionsgemäß

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{p}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{p} + \varepsilon \mathbf{1}, \mathbf{q}) - \mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\varepsilon}, \\ \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{1}) - \mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\varepsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Die Beziehungen (45), (46) bilden wieder ein vollendetes korrespondenzmäßiges Analogon klassischer Gesetzmäßigkeiten: Es war ja klassisch [vgl. § 3, 5, Kapitel 2]:

$$\left. \begin{aligned} (q_k, F) &= -\frac{\partial F}{\partial p_k}, \\ (p_k, F) &= \frac{\partial F}{\partial q_k}. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Der *Beweis* für (45) ist durch Induktion zu führen: (45) gilt für $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ und für $\mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2$, wenn (45) für \mathbf{F}_1 und für \mathbf{F}_2 gilt. Und (45) gilt nach (39) sicher dann, wenn \mathbf{F} mit einer der Größen $\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k$ identisch ist.

Wir wollen jetzt bis auf weiteres stets annehmen, daß wir es mit *nichtentarteten* Systemen zu tun haben, so daß stets $\nu(m, n) \neq 0$ für $n \neq m$ ist. Wir können dann offenbar behaupten: *Eine zeitlich konstante*

Matrix ist eine Diagonalmatrix, und umgekehrt. Als „Diagonalmatrix“ $\mathbf{D} = (D(m, n))$ bezeichnen wir eine solche Matrix, bei welcher nur „Diagonalelemente“ $D(n, n)$ von Null verschieden sind.

In der klassischen Theorie ist ein bestimmtes mechanisches System (Pendel, Kreisel, Planetensystem) dadurch zu kennzeichnen, daß in bestimmter Weise die *Energie als Funktion der Impulse und Koordinaten angegeben wird*: $W = H(p, q)$. Analog werden wir für die Quantenmechanik ein bestimmtes System (harmonischer Oszillator, H-Atom, Kristallgitter) kennzeichnen durch Angabe einer Energiefunktion $\mathbf{H}(p, q)$ ¹. Wir nehmen dann analog zu den klassischen kanonischen Bewegungsgleichungen

$$q = \frac{\partial H}{\partial p} = (H, q), \quad p = -\frac{\partial H}{\partial q} = (H, p) \quad (48)$$

als *quantenmechanische Bewegungsgleichungen* die Matrixrelationen

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_k &= \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial p_k} = \frac{2\pi i}{h} [\mathbf{H}, q_k], \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q_k} = \frac{2\pi i}{h} [\mathbf{H}, p_k] \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

an. Unsere Theorie gründet sich also auf drei Postulate: Die kanonischen Vertauschungsregeln (39), die kanonischen Bewegungsgleichungen (49), und unsere quantenkinematische Definition der Zeitdifferentiation, mit Frequenzen, die dem RITZschen Kombinationsprinzip gehorchen. Dies letztere Postulat können wir offenbar auch durch

$$\dot{\alpha} = -2\pi i [\mathbf{T}, \alpha] \quad (50)$$

ausdrücken, wobei \mathbf{T} die folgende *Diagonalmatrix* ist:

$$\mathbf{T} = (T_m \delta_{m n}). \quad (51)$$

Alle sonstigen Aussagen der Theorie sollen aus den drei Postulaten (39), (40), (50) *mathematisch abzuleiten* sein.

In der Tat ist leicht zweierlei zu folgern: Erstens, daß die *Energie* \mathbf{H} eine *Diagonalmatrix* ist, daß also der *Energiesatz* $\dot{\mathbf{H}} = 0$ gilt. Zweitens, daß

$$\mathbf{H} = -h \mathbf{T} + \text{const } \mathbf{1} \quad (52)$$

ist, oder $H(n, n) = -h T_n + \text{const}$; d. h. die Terme stehen in der von der BOHRschen Frequenzbedingung geforderten Beziehung zu den *Energiewerten* $H(n, n)$: wir haben naturgemäß $H(n, n)$ als den zum n -ten Zustand gehörigen Energiewert zu deuten. Allgemein ist übrigens bei nicht-entarteten Systemen — diese wichtige Bemerkung sei hier eingeschoben — ein *Diagonalelement* $a(n, n)$ einer Matrix α zu deuten als der zum n -ten Zustand gehörige Zahlwert des *Zeitmittelwertes* $\bar{a} = (\delta_{m n} a(n, n))$ von $\alpha = (a(m, n))$. Die Herleitung der beiden erläuterten Folgerungen ist

¹ Natürlich muß \mathbf{H} so beschaffen sein, daß aus $p = p^\dagger$, $q = q^\dagger$ stets $\mathbf{H} = \mathbf{H}^\dagger$ folgt.

z. B. so zu vollziehen, daß man zunächst (wieder durch Induktion) (49) verallgemeinert zu

$$\mathbf{a} = \frac{2\pi i}{h} [\mathbf{H}, \mathbf{a}], \quad (53)$$

in Analogie zur klassischen Gleichung (27), Kapitel 2, § 3, 5. Daraus folgt (für $\mathbf{H} = \mathbf{a}$) sogleich $\dot{\mathbf{H}} = 0$, und nachdem man weiß, daß \mathbf{H} Diagonalmatrix ist, liest man aus (53) ab, daß $\nu(m, n) = \{H(m, m) - H(n, n)\}/h$ ist, daß also die BOHRsche Frequenzdingung gilt.

Für weitere Untersuchungen hat sich folgende einfache Bemerkung als sehr fruchtbar erwiesen; Man kann die letzteren Überlegungen auch *umkehren* und folgendes zeigen: Wenn die Matrizen $\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k$ den kanonischen Vertauschungsregeln genügen und außerdem die Eigenschaft haben, daß die aus ihnen gebildete HAMILTON-Funktion $\mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ eine Diagonalmatrix wird:

$$\mathbf{H} = \text{Diagonalmatrix} = (H(n, n) \delta_{mn}), \quad (54)$$

dann sind mit der Definition (53) die kanonischen Bewegungsgleichungen erfüllt. *Wir haben also ein uns aufgegebenes quantenmechanisches Problem bereits gelöst, wenn wir nur (39) und (54) erfüllt haben.*

Die Diagonalelemente einer Diagonalmatrix haben übrigens im mathematischen Sprachgebrauch einen besonderen Namen: man nennt sie die „Eigenwerte“ dieser Matrix.

Damit ist unsere Theorie in den Grundzügen fertig: Wir besitzen einen Formalismus, der in ähnlich allgemeiner Weise, wie die klassische Theorie, die Inangriffnahme der verschiedensten Einzelprobleme erlaubt. Die Einfachheit unserer Formulierungen, in denen die dem RITZschen Kombinationsprinzip entsprechende Quantenkinematik sich vollkommen zusammenfügt mit den sinngemäß umgedeuteten, aber sonst *lückenlos aufrecht erhaltenen Relationen der klassischen HAMILTON-JACOBISchen Mechanik* (vgl. Kapitel 2, § 3, 5) spricht sehr dafür, daß wir den richtigen Weg gefunden haben (BORN-DIRAC-HEISENBERG-JORDAN).

Versuchen wir nun eine konkrete Anwendung, etwa auf das H-Atom, so entsteht das Problem, die *richtige HAMILTON-Funktion $\mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ dieses Problems zu finden*. Nach korrespondenzmäßiger Analogie wird man *vermuten*:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{e^2 Z}{r}, \quad (55)$$

wo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, und $\mathbf{p}^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ ist, und p_x im Sinne der Vertauschungsregeln (39) konjugiert zu x , usw. Aber die Korrespondenz zur klassischen Theorie käme z. B. auch mit

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{2\mu} \mathbf{r} \mathbf{p} \frac{1}{r^2} \mathbf{p} \mathbf{r} - \frac{e^2 Z}{r} \quad (56)$$

zustande. Eine *allgemeine Regel* für die Beantwortung der hier auftretenden Frage zu fordern, würde *physikalisch widersinnig* sein; es gibt nur zwei Möglichkeiten, für den *konkreten Fall* zu einer Entscheidung zu gelangen: Man muß *empirisch ermitteln*, ob (55) oder (56) oder ein noch anderer Ausdruck das Richtige liefert; oder man könnte allenfalls

aus einer *übergeordneten* Theorie (Quantenelektrodynamik) durch Spezialisierung allgemeiner Gesetzmäßigkeiten zur eindeutigen Ableitung von \mathbf{H} kommen.

Tatsächlich führt nun (55) — und *nicht* (56) — zu Folgerungen, die — bei Vernachlässigung der *Feinstruktur* — der Erfahrung entsprechen.

Ergänzend sei noch auf eine wichtige Begriffsbildung hingewiesen. Bei einem durch die Matrizen $\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ beschriebenen quantenmechanischen System gebe es eine gewisse Matrix \mathbf{A} , welche mit \mathbf{p} und mit \mathbf{q} vertauschbar ist:

$$[\mathbf{p}, \mathbf{A}] = [\mathbf{q}, \mathbf{A}] = 0. \quad (57)$$

Da dann auch \mathbf{A}^\dagger mit \mathbf{p} und \mathbf{q} vertauschbar ist, können wir sogleich $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$ voraussetzen; und man kann dann erschließen (die Begründung wird der Leser aus den späteren Betrachtungen zur Matrizenmathematik leicht selbst ersehen), daß dieses \mathbf{A} sogar als eine *Diagonalmatrix* vorausgesetzt werden kann. Wir stellen dann fest: Dieses \mathbf{A} muß dann lauter *gleiche* Diagonalelemente haben, also von der Form

$$\mathbf{A} = \text{const } \mathbf{1} \quad (58)$$

sein. Andernfalls nämlich würden sich Verhältnisse ergeben, die dem physikalischen Sinn unserer Aufstellungen nicht angemessen wären. Denn in *jeder* Matrix $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ müßten (weil $[\mathbf{F}, \mathbf{A}] = 0$ ist) alle *diejenigen* Matricelemente $F(m, n)$ *verschwinden*, für welche $A(m, m) \neq A(n, n)$ wäre. Das bedeutet aber offenbar, daß zwischen einem *solchen* Zustandspaar m, n *überhaupt kein Übergang möglich wäre*: Weder durch Licht, noch beispielsweise durch Elektronenstoß könnte man unser Gebilde zu einem *solchen* Übergang $m \rightarrow n$ veranlassen; die möglichen Zustände unseres Gebildes würden zerfallen in (mindestens) zwei *völlig getrennte, nichtkombinierende Termsysteme*.

Um das auszuschließen, ergänzen wir unsere bisherigen Postulate durch ein *weiteres Postulat*: Die Matrizen \mathbf{p}, \mathbf{q} *sollen so beschaffen sein, daß aus (57) stets (58) folgt*. Die Mathematiker drücken diese Forderung dadurch aus, daß sie sagen: Das Matrizenystem \mathbf{p}, \mathbf{q} soll *irreduzibel* sein.

§ 2. Einfachste Anwendungen.

1. **Harmonischer Oszillator.** Der harmonische Oszillator, charakterisiert durch eine Energiefunktion

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} + \frac{\kappa^2}{2} \mathbf{q}^2; \quad \nu_0 = \frac{\kappa}{2\pi\sqrt{\mu}}, \quad (I)$$

führt, wie wir in Zusammenfassung unserer früheren Ergebnisse feststellen können, zu folgender Matrix \mathbf{q} :

$$\mathbf{q} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu\nu_0}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (2)$$

Dabei könnte man an jedem Element $q(n, n + 1)$ noch einen beliebigen Phasenfaktor $e^{i\varphi_n}$ anbringen [und dann natürlich $e^{-i\varphi_n}$ an $q(n + 1, n)$]; allgemein gibt es in unserer Theorie, wie man leicht überlegt, *willkürliche Phasenkonstanten* in der Form, daß man in *allen* Matrizen α , die zu einem bestimmten quantenmechanischen System gehören, die Matrixelemente $a(m, n)$ durch

$$a(m, n)' = a(m, n) e^{i(\delta_m - \delta_n)}$$

ersetzen kann. Das ist übrigens wieder genau die korrespondenzmäßige Übertragung der analogen Verhältnisse in der klassischen Theorie.

Der *Impuls* zu (2) ist

$$\mu \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} = \frac{i}{2} \sqrt{2 h \nu_0 \mu} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (3)$$

Man bestätigt leicht, daß mit (2), (3) in der Tat die Grundgleichungen unserer Theorie vollständig erfüllt werden. Umgekehrt erfordert der Nachweis, daß unsere Postulate beim Beispiel des harmonischen Oszillators *zwangsläufig* auf die Matrizen (2), (3) führen, noch einige Ergänzungen zu den Überlegungen von Abschnitt 1, wenn man wirklich keinerlei Lücke im Beweise lassen will¹.

Bilden wir aus (2), (3) die Energiematrix (1), so ergibt sich, daß der n -te Eigenwert von \mathbf{H} gegeben ist durch

$$H(n, n) = n \cdot h \nu_0 + \frac{1}{2} h \nu_0. \quad (4)$$

Für spätere Zwecke sei noch hervorgehoben, daß statt der zwei hermiteschen Matrizen \mathbf{q} , \mathbf{p} eine nichthermitesche Matrix \mathbf{b} mit Vorteil benutzt werden kann:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{b} &= \frac{1}{\sqrt{2 h \nu_0 \mu}} (\mathbf{p} - 2 \pi i \nu_0 \mu \mathbf{q}), \\ \mathbf{b}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2 h \nu_0 \mu}} (\mathbf{p} + 2 \pi i \nu_0 \mu \mathbf{q}); \\ [\mathbf{b}^\dagger, \mathbf{b}] &= -1; \\ \mathbf{H} &= h \nu_0 \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} + \mathbf{b} \mathbf{b}^\dagger) = h \nu_0 \mathbf{b}^\dagger \mathbf{b} + \frac{h \nu_0}{2} \mathbf{1}. \end{aligned} \right\} \quad (4')$$

2. *Drehimpuls.* Den *Drehimpuls* \mathfrak{M} eines Massenpunktes mit den Koordinaten \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} und translatorischen Impulsen \mathbf{p}_x , \mathbf{p}_y , \mathbf{p}_z definieren wir — wie in der klassischen Theorie — durch

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M} &= \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \\ \text{d. h.} \\ \mathfrak{M}_x &= \mathbf{y} \mathbf{p}_z - \mathbf{z} \mathbf{p}_y, \\ \mathfrak{M}_y &= \mathbf{z} \mathbf{p}_x - \mathbf{x} \mathbf{p}_z, \\ \mathfrak{M}_z &= \mathbf{x} \mathbf{p}_y - \mathbf{y} \mathbf{p}_x. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

¹ Vgl. M. BORN u. P. JORDAN: Elementare Quantenmechanik. Berlin 1930.

Diese drei Matrizen haben nun, wie man nach kurzer Rechnung aus den kanonischen Vertauschungsregeln ableitet, die Eigenschaft

$$\left. \begin{aligned} [\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y] &= -\frac{\hbar}{2\pi i} \mathfrak{M}_z, \\ [\mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z] &= -\frac{\hbar}{2\pi i} \mathfrak{M}_x, \\ [\mathfrak{M}_z, \mathfrak{M}_x] &= -\frac{\hbar}{2\pi i} \mathfrak{M}_y. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Wir finden hier wieder eine enge Korrespondenz zur klassischen Theorie: klassisch gelten nämlich die analogen Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} (\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y) &= -\mathfrak{M}_z, \\ (\mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z) &= -\mathfrak{M}_x, \\ (\mathfrak{M}_z, \mathfrak{M}_x) &= -\mathfrak{M}_y, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

wenn wir mit $(\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y)$ usw. wieder die Poissonschen Klammersymbole bezeichnen. Und es hat seine tiefliegenden Gründe, daß Quantenmechanik und klassische Mechanik gerade in diesen Gesetzmäßigkeiten (6) und (7) *genau*, und nicht nur angenähert (asymptotisch) übereinstimmen — Gründe, deren volle Aufklärung sich allerdings erst aus tieferdringenden *gruppentheoretischen* Untersuchungen ergibt. Jedenfalls aber gilt (6) nicht nur für einen *einzelnen* Massenpunkt, sondern auch für ein *System von Massenpunkten*¹.

Es befinde sich ein Atom (oder Molekül) im *feldfreien Raum*, in welchem also alle drei Drehimpulskomponenten *zeitlich konstant* sind:

$$\dot{\mathfrak{M}} = 0. \quad (8)$$

Wenn dies Atom ein *nichtentartetes* System wäre, so müßten wir aus (8) schließen, daß alle drei Matrizen \mathfrak{M}_x , \mathfrak{M}_y , \mathfrak{M}_z *Diagonalmatrizen* und folglich miteinander *vertauschbar* wären. Da das (6) widerspräche, so sehen wir, daß unser System notwendigerweise *entartet* ist. Wir schreiben uns die Energiematrix \mathbf{H} folgendermaßen auf:

$$\mathbf{H} = \left(\begin{array}{cccc} W_1 & & & \\ & W_1 & & \\ & & W_2 & \\ & & & W_2 \\ & & & & W_3 \\ & & & & & W_3 \\ & & & & & & W_4 \\ & & & & & & & W_4 \end{array} \right) \quad (9)$$

¹ Denn wenn $\mathfrak{M}^{[k]}$ der Drehimpuls des k -ten Massenpunktes ist, also $\mathfrak{M} = \sum_k \mathfrak{M}^{[k]}$ der des Gesamtsystems, so wird z. B.

$$[\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y] = \sum_{k,l} [\mathfrak{M}_x^{[k]}, \mathfrak{M}_y^{[l]}] = \sum_k [\mathfrak{M}_x^{[k]}, \mathfrak{M}_y^{[k]}] = -\frac{\hbar}{2\pi i} \sum_k \mathfrak{M}_z^{[k]} = -\frac{\hbar}{2\pi i} \mathfrak{M}_z.$$

Das soll so gemeint sein: \mathbf{H} hat *einen oder mehrere* Eigenwerte, die gleich W_1 sind, und einen oder mehrere, die gleich W_2 sind, usw. (Es soll $W_r \neq W_s$ für $r \neq s$ sein). Wir dürfen und wollen annehmen, die *Numerierung* der Eigenwerte (Diagonalelemente) von \mathbf{H} sei so getroffen, daß die übereinstimmenden Eigenwerte immer wie in (9) *zusammenkommen*. Die außerhalb der Diagonale stehenden Matrixelemente von \mathbf{H} — die sämtlich gleich Null sind — haben wir in (9) gar nicht hingeschrieben. Jedoch haben wir durch punktierte Linien die Matrix \mathbf{H} in rechteckige Felder (sog. „*Untermatrizen*“) geteilt: die Teilung ist symmetrisch in bezug auf die *Diagonale* der Matrix ausgeführt, so daß also längs der Diagonale eine Reihe von *quadratischen* Feldern aufeinander folgt. Und wir haben es so eingerichtet, daß jedes dieser längs der Diagonale folgenden quadratischen Felder gerade *einem der stationären Zustände unseres entarteten Systems entspricht*: Dem Zustand mit der Energie W_1 entspricht beispielsweise das oberste dieser Felder. Wenn es gerade g_1 Eigenwerte W_1 gibt (man sagt auch: wenn W_1 ein g_1 -*facher Eigenwert* ist), so ist g_1 das *statistische Gewicht* des Zustands mit der Energie W_1 : eine äußere Störung kann diesen Zustand in g_1 Zustände aufspalten.

Wie sieht nun im Entartungsfall eine Matrix α aus, deren zeitliche Ableitung verschwindet: $\dot{\alpha} = 0$? Wegen (53), § 1, 3 ist die Antwort offenbar diese:

$$\alpha = \left(\begin{array}{cccc} \alpha^{(1)} & & & \\ & \alpha^{(2)} & & \\ & & \alpha^{(3)} & \\ & & & \alpha^{(4)} \\ & & & & \ddots \end{array} \right) \quad (10)$$

Das ist so zu verstehen: Wir teilen die Matrix α durch punktierte Linien in rechteckige Felder, *und zwar in derselben Weise wie die Matrix \mathbf{H} in (9)*. Die quadratischen Felder längs der Diagonale enthalten dann je eine „*Untermatrix*“, deren r -te wir in (10) mit $\alpha^{(r)}$ bezeichnet haben: es ist eine Matrix mit g_r Zeilen und Spalten, wenn g_r die Vielfachheit (statistisches Gewicht) von W_r ist. *Die Felder außerhalb der Diagonalreihe dürfen nur Nullen enthalten*: das ist *notwendige und hinreichende* Bedingung dafür, daß $\dot{\alpha} = 0$ ist. Dabei können also die Untermatrizen $\alpha^{(r)}$ noch *ganz beliebig* aussehen. — Diese Kennzeichnung der mit \mathbf{H} vertauschbaren Matrizen entspricht offenbar ganz den am Ende von § 1 gemachten Bemerkungen über die mit \mathbf{A} vertauschbaren Matrizen \mathbf{F} .

Dies ist nun anzuwenden auf die drei konstanten Drehimpuls-komponenten: jede der Matrizen \mathfrak{M}_x , \mathfrak{M}_y , \mathfrak{M}_z muß die Form (10) haben; und wir wollen zur genaueren Betrachtung drei zusammengehörnde *Untermatrizen* $\mathfrak{M}_x^{(r)}$, $\mathfrak{M}_y^{(r)}$, $\mathfrak{M}_z^{(r)}$ herausgreifen, wobei wir der Bequemlichkeit halber die Bezeichnungen

$$\mathfrak{M}_x^{(r)} = \frac{\hbar}{2\pi} \mathfrak{m}_x; \quad \mathfrak{M}_y^{(r)} = \frac{\hbar}{2\pi} \mathfrak{m}_y; \quad \mathfrak{M}_z^{(r)} = \frac{\hbar}{2\pi} \mathfrak{m}_z \quad (11)$$

eingeführen.

Unser System soll nun *außer* der durch die Konstanz $\dot{\mathfrak{M}} = 0$ des Drehimpulses notwendig gemachten Entartung *keine weitere Entartung* zeigen; mit der in § 1 eingeführten Bezeichnungsweise bedeutet das offenbar: das Matrixsystem \mathfrak{m}_x , \mathfrak{m}_y , \mathfrak{m}_z soll *irreduzibel* sein.

Also stehen wir vor der Aufgabe, alle *irreduziblen hermiteschen Matrixsysteme* \mathfrak{m}_x , \mathfrak{m}_y , \mathfrak{m}_z zu bestimmen, welche die Eigenschaft

$$\left. \begin{aligned} [\mathfrak{m}_x, \mathfrak{m}_y] &= i \mathfrak{m}_z, \\ [\mathfrak{m}_y, \mathfrak{m}_z] &= i \mathfrak{m}_x, \\ [\mathfrak{m}_z, \mathfrak{m}_x] &= i \mathfrak{m}_y \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

haben.

Man sieht zunächst folgendes: Wenn wir vermittelt einer Matrix U , die eine *Reziproke* U^{-1} besitzt¹, aus drei Matrizen \mathfrak{m}_x , \mathfrak{m}_y , \mathfrak{m}_z , die (12) erfüllen, die neuen Matrizen

$$\mathfrak{m}'_x = U \mathfrak{m}_x U^{-1}; \quad \mathfrak{m}'_y = U \mathfrak{m}_y U^{-1}; \quad \mathfrak{m}'_z = U \mathfrak{m}_z U^{-1} \quad (13)$$

bilden, so erfüllen auch die \mathfrak{m}'_x , \mathfrak{m}'_y , \mathfrak{m}'_z die Bedingungen (12). Und wenn ferner U die Eigenschaft

$$U^{-1} = U^\dagger \quad (14)$$

hat, so sind zugleich mit den \mathfrak{m}_x , \mathfrak{m}_y , \mathfrak{m}_z auch die \mathfrak{m}'_x , \mathfrak{m}'_y , \mathfrak{m}'_z *hermitisch*. Eine solche Matrix U mit der Eigenschaft (14) nennt man „*unitär*“; und man sagt, daß \mathfrak{m}' in (13) durch eine *unitäre Transformation* aus \mathfrak{m} hervorgeht.

Nun bekommt man, wie leicht zu sehen, folgendermaßen stets eine Lösung des gestellten Problems: Wir betrachten Matrizen von einem (beliebigen) Grade g ; die durch $g = 2j + 1$ definierte Zahl j ist dann *entweder ganzzahlig oder halbzahlig*. Wir setzen:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{m}_z &= \text{Diagonalmatrix mit den } g \text{ Eigenwerten} \\ m &= -j, -j+1, \dots, j-1, j. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Wir benutzen jetzt zweckmäßigerweise den Wert m als Zeilen- und Spaltenindex unserer Matrizen; wir können dann also (15) auch so ausdrücken: $\mathfrak{m}_z(m, m') = m \cdot \delta_{mm'}$. Die beiden anderen Matrizen \mathfrak{m}_y , \mathfrak{m}_x fassen wir zu

$$\mu = \mathfrak{m}_x + i \mathfrak{m}_y; \quad \mu^\dagger = \mathfrak{m}_x - i \mathfrak{m}_y \quad (16)$$

zusammen; wir setzen

¹ Die *Definition* der Reziproken U^{-1} ist: $U U^{-1} = U^{-1} U = 1$.

$$\left. \begin{aligned} \mu(m+1, m) &= \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}; \\ \mu(m', m) &= 0, \quad \text{wenn } m' - m \neq \pm 1. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Damit ist für jeden Grad $g = 2j + 1$ eine Lösung des gestellten Problems beschrieben. Die vier einfachsten Beispiele sind:

$$\left. \begin{aligned} j=0: \quad \mathbf{m}_z &= (0); & \mu &= (0) \\ j=\frac{1}{2}: \quad \mathbf{m}_z &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & +\frac{1}{2} \end{pmatrix}; & \mu &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ j=1: \quad \mathbf{m}_z &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & \mu &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \\ j=\frac{3}{2}: \quad \mathbf{m}_z &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}; & \mu &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Durch unitäre Transformation kann man aus (16), (17) also weitere Lösungen ableiten; und eine genauere Untersuchung ergibt leicht, daß damit dann *alle* Lösungen des gestellten Problems gefunden sind¹.

Berechnen wir die Matrix

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{m}^2 &= \mathbf{m}_x^2 + \mathbf{m}_y^2 + \mathbf{m}_z^2 \\ &= \mu^\dagger \mu + \mathbf{m}_z(\mathbf{m}_z + \mathbf{1}), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

so bekommen wir:

$$\mathbf{m}^2 = j(j+1)\mathbf{1}. \quad (20)$$

Mit diesen Ergebnissen sind nun die Grundzüge der ganzen Quantentheorie des Drehimpulses — wie wir sie in Kapitel 2 schon größtenteils korrespondenzmäßig erspüren konnten — als notwendige Folgerungen der exakten Quantenmechanik erwiesen.

Betrachten wir zunächst den Fall, daß unser Atom oder Molekül einem alle Entartungen aufhebenden, richtungsquantelnden *äußeren Felde* ausgesetzt ist, dessen Richtung parallel zur z -Achse sei. Es *bleibt* also $\mathfrak{M}_z = 0$, und folglich muß

$$\mathfrak{M}_z = \text{Diagonalmatrix} \quad (21)$$

sein. Die *Eigenwerte* von \mathfrak{M}_z sind uns aber durch die oben gemachten Feststellungen im wesentlichen bekannt: sie sind gleich $m \cdot h/2\pi$, wobei die „magnetische Quantenzahl“ m entweder *ganzzahlig* oder *halbzahlig* ist. Empirisch kommt ja in der Tat beides vor; daß bei ein und demselben

¹ Zum Beweis vgl. M. BORN u. P. JORDAN: *Elementare Quantenmechanik*, § 27. Berlin 1930.

System entweder *alle* Werte m ganz oder aber *alle* Werte m halbzahlig sind, werden wir sogleich noch begründen.

Nummehr wollen wir das äußere Feld als *schwach* annehmen, und sogar den Grenzübergang zu *verschwindender* Feldstärke machen. In diesem Grenzfall nehmen dann die drei Matrizen (bis auf willkürlich bleibende Phasenkonstanten) genau das Aussehen an, das wir oben ausführlich beschrieben haben. Es ergibt sich also, daß der quadrierte Gesamtdrehimpuls \mathfrak{M}^2 die Eigenwerte $j(j+1) \cdot h^2/4\pi^2$ hat, wobei die Vielfachheit (das statistische Gewicht) gleich $g=2j+1$ ist, indem zu gegebenem j die Werte $m=-j, -j+1, \dots, j-1, j$ gehören.

Endlich bekommen wir auch leicht die schon korrespondenzmäßig erschlossenen und empirisch bewährten *Auswahlregeln*. Es seien X, Y, Z die Komponenten des *Dipolmomentes* unseres Atoms oder Moleküls; und wir schreiben

$$\Pi = X + i Y. \quad (22)$$

Dann erhält man aus (5) leicht die Vertauschungsregeln

$$\left. \begin{aligned} [\mathfrak{M}_z, Z] &= 0, \\ [\mathfrak{M}_z, \Pi] &= \frac{h}{2\pi} \Pi. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Die erste dieser beiden Gleichungen bedeutet, daß die *linear polarisierten* Strahlungen, deren Intensitäten durch die Matrixelemente von Z gegeben sind, mit Übergängen *ohne Änderung der magnetischen Quantenzahl* geschehen:

$$\Delta m = 0 \text{ für linear polarisierte Kugelwelle.} \quad (24)$$

Die zweite Gleichung (23) läßt erkennen, daß es außerdem *zirkular polarisierte* Dipol-Kugelwellenstrahlung gibt, zu welcher eine Änderung von m um ± 1 gehört:

$$\Delta m = \pm 1 \text{ für zirkular polarisierte Kugelwelle.} \quad (25)$$

Da übrigens, wie leicht zu ersehen, auch für jede sonstige Übergangswahrscheinlichkeit (Quadrupolstrahlung, Stöße) die Änderung von m immer nur *ganzzahlig* sein kann, so ist das Auftreten von halben und ganzen m nebeneinander *an ein und demselben* System ausgeschlossen; es würden andernfalls zwei nichtkombinierende Termsysteme vorliegen, unter Verletzung der Irreduzibilitätsforderung.

Kurz sei erwähnt, daß die besprochenen Resultate auch die Auswahlregel der inneren Quantenzahl:

$$\Delta j = \begin{cases} \pm 1 \\ 0 \end{cases}, \quad (26)$$

leicht abzulesen gestatten¹. Ferner ist zu zeigen, daß der durch (5) definierte *Drehimpuls eines Massenpunktes* stets nur *ganzzahlige* j , m besitzt. Man kann deshalb das *Elektron*, welches empirisch stets einen

¹ Hierzu und zum folgenden vgl. wiederum das erwähnte Buch von M. BORN und P. JORDAN.

halbzahligen Drehimpuls besitzt, *nicht als Massenpunkt* im gewöhnlichen Sinne betrachten, sondern muß ihm außer den Koordinaten und Impulsen $x, y, z; p_x, p_y, p_z$ noch ein besonderes zusätzliches *Eigenmoment* („Spinmoment“) zuschreiben; vgl. dazu die Erwägungen in Kapitel 2, § 4, 4. Der Gesamtdrehimpuls eines Elektrons ist dann also

$$\mathfrak{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} + \frac{\hbar}{2\pi} \mathfrak{s}; \quad (27)$$

dabei sind $\mathfrak{s}_x, \mathfrak{s}_y, \mathfrak{s}_z$ drei Matrizen, die mit allen $x, y, z; p_x, p_y, p_z$ *vertauschbar* sind, und für sich allein die Relationen

$$\left. \begin{aligned} [\mathfrak{s}_x, \mathfrak{s}_y] &= i \mathfrak{s}_z, \\ [\mathfrak{s}_y, \mathfrak{s}_z] &= i \mathfrak{s}_x, \\ [\mathfrak{s}_z, \mathfrak{s}_x] &= i \mathfrak{s}_y, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

erfüllen. Außerdem ist, als Ausdruck der Tatsache, daß \mathfrak{s}_z nur die Eigenwerte $\pm \frac{1}{2}$ besitzt:

$$\mathfrak{s}_x^2 = \mathfrak{s}_y^2 = \mathfrak{s}_z^2 = \frac{1}{4} \mathbf{I}. \quad (29)$$

Wenden wir auf \mathfrak{s} dieselben Überlegungen an, die wir oben für \mathfrak{M} durchführten, so sehen wir, daß je drei einander entsprechende *Untermatrizen* aus $\mathfrak{s}_x, \mathfrak{s}_y, \mathfrak{s}_z$ nach der zweiten Zeile von (18) das Aussehen

$$\sigma_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (30)$$

haben müssen.

§ 3. Die wellenmechanischen Eigenfunktionen.

1. Orthogonalität und Vollständigkeit. Wir nehmen nun auch jene Untersuchungen wieder auf, die uns früher zur *SCHRÖDINGER-Gleichung* führten; wir haben jetzt die Bedeutung dieser fundamentalen Gleichung zu klären, indem wir ihre Eigenschaften eingehend untersuchen. Es wurde schon früher festgestellt, daß die physikalische Deutung und Handhabung der *SCHRÖDINGER-Gleichung* keineswegs eine unmittelbare klare und sichere ist — daß vielmehr geradezu eine Versuchung zu irrigen Interpretationen in ihr liegt. Aber gerade der „quasiklassische“ Charakter der *SCHRÖDINGER-Gleichung*, gerade die Tatsache, daß sie nur kontinuierliche Größen und Vorgänge zu beschreiben scheint, bedingt, daß ihre Verwendung und Deutung nicht eine unmittelbare — wie in klassischen Theorien — sein kann; daß vielmehr nur eine *korrespondenzmäßige* Deutung und Anwendung möglich ist. Wie aber diese vom Korrespondenzprinzip geleitete physikalische Interpretation der *SCHRÖDINGER-Gleichung* zu vollziehen ist, das erkennen wir am leichtesten — und in einer jeden Zweifel ausschließenden Sicherheit — wenn wir zunächst die mathematischen Beziehungen der *SCHRÖDINGER-Gleichung* zum Matrizenformalismus der aus dem Korrespondenzprinzip

entwickelten Quantenmechanik klären, um dann in engster Anlehnung an die Quantenmechanik den physikalischen Inhalt der SCHRÖDINGER-Gleichung entwickeln zu können.

Wir betrachten als einfachsten Fall die eindimensionale Bewegung eines Massenpunktes, der auf ein endliches Intervall der x -Achse — etwa von $x=0$ bis $x=1$ — beschränkt ist. Entsprechend den früheren Bemerkungen ist also die SCHRÖDINGERSche Amplitude $\varphi(x)$ gleich Null zu setzen an den Enden des Intervalls:

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0. \quad (1)$$

Im Intervall $0 < x < 1$ genügt $\varphi(x)$ der SCHRÖDINGER-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \{U(x) - W\} \varphi = 0. \quad (2)$$

Das mit (1) und (2) formulierte mathematische Problem besitzt *stets* eine *diskrete* unendliche Reihe von *Eigenwerten* W_0, W_1, W_2, \dots ; d. h. also, es gibt zu jedem $W = W_n$ eine zugehörige *Eigenfunktion* φ_n :

$$\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0, \quad -\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \frac{d^2\varphi_n}{dx^2} + \{U(x) - W_n\} \varphi_n = 0, \quad (3)$$

wobei also $\varphi_n(x)$ *nicht* etwa identisch gleich Null ist. Aber für jeden *anderen* Wert W sind die Bedingungen (1), (2) *nur* durch $\varphi(x) = 0$ zu erfüllen. Ein Eigenwert W_n wird dann als „*einfach*“ bezeichnet, wenn die gemäß (3) zu ihm gehörende Eigenfunktion $\varphi_n(x)$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist. Vorläufig denken wir *nur* an „*einfache*“ Eigenwerte.

Wir können uns die Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$ des Problems (1), (2) als *reell* vorstellen; aber da wir späterhin notwendigerweise auch mit *komplexen* Eigenfunktionen zu rechnen haben, so wollen wir im nachfolgenden einige Eigenschaften der $\varphi_n(x)$ so aussprechen, wie sie auch für die Fälle komplexer Eigenfunktionen gelten. Solange φ_n *reell* ist, ist die *komplex Konjugierte* φ_n^* mit φ_n selbst identisch: $\varphi_n^* = \varphi_n$, und für diesen Spezialfall ist es einerlei, ob in den folgenden Relationen φ_n oder φ_n^* geschrieben wird.

Wir betrachten zwei verschiedene Eigenwerte W_n, W_m , und behaupten, daß die zugehörigen Eigenfunktionen die Eigenschaft

$$\int_0^1 \varphi_m^*(x) \varphi_n(x) dx = 0 \quad (n \neq m) \quad (4)$$

haben. Man nennt diese Eigenschaft die *Orthogonalität der Eigenfunktionen*. (Eigentlich richtiger „*Unitarität*“.)

Zum Beweis von (4) beachte man, daß φ_n der Gleichung (3), und φ_m^* der Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \frac{d^2\varphi_m^*}{dx^2} + \{U(x) - W_m\} \varphi_m^* = 0 \quad (5)$$

genügt: Multiplikation von (3) mit φ_m^* und von (5) mit φ_n , und *Subtraktion* der so gewonnenen zwei Gleichungen ergibt:

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \left(\varphi_m^* \frac{d^2 \varphi_n}{dx^2} - \varphi_n \frac{d^2 \varphi_m^*}{dx^2} \right) = (W_n - W_m) \varphi_m^* \varphi_n. \quad (6)$$

Integrieren wir dies von $x=0$ bis $x=1$, so kommt links Null heraus:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx (\varphi_m^* \varphi_n'' - \varphi_n \varphi_m^{''*}) \\ &= \int_0^1 dx (\varphi_m^* \varphi_n' - \varphi_n \varphi_m^{'*})' = (\varphi_m^* \varphi_n' - \varphi_n \varphi_m^{'*}) \Big|_0^1 \end{aligned}$$

ist Null wegen der *Randbedingung* (1). Also muß auch die rechte Seite (6) bei Integration Null ergeben, so daß (4) bewiesen ist.

Man kann hiernach übrigens folgendes zeigen: Die zum *kleinsten* Eigenwert W_0 gehörende Eigenfunktion φ_0 verschwindet *nur* an den Intervallenden $x=0$, $x=1$. Dagegen hat, wenn die W_n *der Größe nach* geordnet sind, φ_n genau n Nullstellen („Knoten“) im Inneren des Intervalls.

Man nennt $\varphi_n(x)$ „normiert“, wenn

$$\int_0^1 \varphi_n^*(x) \varphi_n(x) dx = \int_0^1 |\varphi_n(x)|^2 dx = 1 \quad (7)$$

ist. Durch Multiplikation mit einem geeigneten konstanten Faktor kann man aus einer nichtnormierten Eigenfunktion eine normierte machen. In der normierten Eigenfunktion bleibt ein (komplexer) Faktor vom Absolutbetrage 1 willkürlich. Künftig setzen wir die φ_n stets als normiert voraus; wir können dann (4) vervollständigen zu der Relation:

$$\int_0^1 \varphi_m^*(x) \varphi_n(x) dx = \delta_{mn}. \quad (8)$$

Nunmehr ist es nötig, der Feststellung, daß es *unendlich viele* Eigenwerte und Eigenfunktionen W_n, φ_n gibt, einen präziseren Inhalt zu geben. Würden wir einen der Eigenwerte W_n *auslassen*, so blieben ja immer noch *unendlich viele* zurück; wir suchen nun nach einer charakteristischen Eigenschaft, welche nur dem *vollzähligen* System *aller* Eigenfunktionen zukommt.

Dazu denken wir zunächst an das einfachste Beispiel, nämlich die *kräftefreie* Bewegung zwischen den reflektierenden Intervallenden $x=0$, $x=1$. Für diesen Spezialfall $U(x)=0$ wird offenbar

$$W_n = \frac{n^2 \hbar^2}{8\mu}; \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{2} \sin(n\pi x). \quad (9)$$

Die Orthogonalität dieser φ_n ist natürlich auch direkt zu bestätigen; und auch die Normierung stimmt offenbar, da

$$\int_0^1 \sin(m\pi x) \sin(n\pi x) dx = \frac{1}{2} \delta_{mn}$$

ist.

Bekannterweise hat nun dieses spezielle „Orthogonalsystem“ (9) folgende Eigenschaften: Man kann jede „vernünftige“ Funktion $f(x)$ der Eigenschaften $f(0) = f(1) = 0$ in eine *Reihe* nach diesen $\varphi_n(x)$ entwickeln:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sqrt{2} \sin(m\pi x). \quad (10)$$

Wir sagen kurz: jede „vernünftige“ Funktion, weil es uns auf die genaue mathematische Abgrenzung hier nicht ankommt: jedenfalls ist jede von $x=0$ bis $x=1$ stetige und stetig differenzierbare Funktion (die der Randbedingung $f(0) = f(1) = 0$ genügt) durch eine solche Reihe (10) darstellbar.

Nunmehr sei ein beliebiges Orthogonalsystem $\varphi_n(x)$ — wobei also (8) gilt, und ferner $\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0$ ist — betrachtet. Wenn dieses Orthogonalsystem nun gleichfalls die Eigenschaften hat, daß jede „vernünftige“ die Randbedingungen erfüllende Funktion $f(x)$ durch eine Reihe

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (11)$$

darstellbar ist, dann nennen wir das Orthogonalsystem ein „vollständiges“ Orthogonalsystem. Offensichtlich *hört* jedes vollständige Orthogonalsystem *auf*, in diesem Sinne „vollständig“ zu sein, sobald man eine einzige der Funktionen φ_n *ausläßt*. Wenn aber die Darstellung (11) möglich ist, dann kann man die Entwicklungskoeffizienten a_m sogleich angeben: Man multipliziere (11) beiderseits mit φ_m^* und *integriere* dann; wenn man rechts (8) anwendet, bekommt man

$$\int_0^1 \varphi_m^*(x) f(x) dx = \sum_n a_n \delta_{mn} = a_m. \quad (12)$$

Ferner erkennt man¹

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_m |a_m|^2. \quad (13)$$

Nunmehr können wir unsere frühere Aussage, daß es im Problem (1), (2) *unendlich viele* Eigenwerte und Eigenfunktionen gibt, *verschärfen* zu der Aussage: *Die Eigenfunktionen φ_n dieses Problems bilden ein „vollständiges“ Orthogonalsystem*².

Für alle diese Überlegungen ist es natürlich unwesentlich, daß das Intervall, in welchem der Massenpunkt sich bewegen kann, gerade das

¹ Die exakte Definition des oben erläuterten Begriffs der Vollständigkeit bekommt man so: Es sei $f(x)$ eine beliebige stetige Funktion, und es werde a_n nach (12) berechnet. Wenn unter diesen Voraussetzungen stets (13) erfüllt ist, nennen wir das Orthogonalsystem *vollständig*. — Aus (13) ist dann die Entwickelbarkeit (11) zu *folgern*, aber nicht für *jede* stetige Funktion $f(x)$, sondern nur unter zusätzlichen Voraussetzungen.

² Betreffs des mathematischen Beweises vgl. etwa COURANT-HILBERT, Methoden der mathematischen Physik. Berlin 1924.

Intervall von $x=0$ bis $x=1$ ist. Ja, wir können sogar die Beschränkung auf ein endliches Intervall ganz aufgeben, wenn wir nur voraussetzen, daß die potentielle Energie $U(x)$ im Limes $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$ *unendlich groß* wird, wie z. B. beim harmonischen Oszillator $U(x) = \frac{1}{2} \kappa^2 x^2$, oder wie z. B. $U(x) = \frac{1}{2} \kappa^2 x^2 + \alpha x^3 + \beta x^4$ (mit $\beta > 0$). Klassisch würde die gemachte Voraussetzung ja bedeuten, daß für jeden Energiewert die Bewegung des Massenpunktes eine *periodische* ist. Für die SCHRÖDINGER-Gleichung bewirkt diese Voraussetzung, daß alle unsere Feststellungen sinngemäß in Kraft bleiben; an die Stelle der Randbedingung $\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0$ tritt die Bedingung, daß $\varphi_n(x)$ für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$ so stark zu Null geht, daß das Integral über $|\varphi_n|^2$ existiert — und dann gleich 1 gemacht werden kann (Normierung!):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(x)|^2 dx = 1. \quad (14)$$

Der Fall eines endlichen Intervalles $x=0$, $x=1$ ist in dem jetzt beschriebenen allgemeineren Falle übrigens mit enthalten: Wir können uns vorstellen, daß für $x > 1$ und für $x < 0$ stets $U(x) = \infty$, $\varphi(x) = 0$ ist.

Danach sind wir vorbereitet, an die physikalische Deutung der SCHRÖDINGERSCHEN Eigenfunktionen heranzugehen. Wir hatten schon früher die Überzeugung gewonnen, daß die Eigenwerte W_n zu identifizieren seien mit den *exakten quantenmechanischen Energiewerten* des fraglichen mechanischen Problems; und wir können jetzt eine entscheidende Probe auf die Richtigkeit dieser Überzeugung — und überhaupt auf den Wert und Erfolg unserer ganzen bisherigen Arbeit machen. Denn wir haben ja inzwischen eine andere, ganz unabhängige Methode zur Festlegung der quantenmechanischen Energiestufen kennen gelernt: es erhebt sich die Frage, *ob beide Methoden zum gleichen Ergebnis führen.*

Der *Äquivalenzbeweis* beider Methoden ist von SCHRÖDINGER geführt worden. (Unabhängig auch von C. ECKART und von W. PAULI.) Seine Durchführung gibt Gelegenheit, auch die Beziehung der Eigenfunktionen φ_n zu den Matrizen der Quantenmechanik klarzustellen.

2. **Äquivalenzbeweis.** Wir behaupten, daß wir, wenn das SCHRÖDINGERSCHE Problem vollständig gelöst ist, sofort auch die Lösung des entsprechenden quantenmechanischen Problems in Händen haben. Wir können nämlich aus den (normierten) Eigenfunktionen φ_n die Matrizen $\mathbf{q} = (q_{mn})$, $\mathbf{p} = (p_{mn})$ unseres quantenmechanischen Problems folgendermaßen berechnen:

$$\left. \begin{aligned} q_{mn} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^*(q) \cdot q \cdot \varphi_n(q) \cdot dq, & (a) \\ p_{mn} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^*(q) \cdot \frac{h}{2\pi i} \frac{d\varphi_n(q)}{dq} \cdot dq. & (b) \end{aligned} \right\} (14)$$

Wir haben der Übersichtlichkeit halber die im vorigen Abschnitt gebrauchte Variable x jetzt durch q ersetzt.

Den Beweis führen wir in mehreren Schritten. *Erstens* zeigen wir: Wenn wir tatsächlich \mathbf{q} , \mathbf{p} durch (14) definieren, dann ist die *kanonische Vertauschungsregel*

$$\mathbf{p} \mathbf{q} - \mathbf{q} \mathbf{p} = \frac{\hbar}{2\pi i} \mathbf{I} \quad (15)$$

erfüllt.

Zum Beweise brauchen wir, natürlich wesentlich die Relationen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* \varphi_n dq = \delta_{mn}; \quad (16)$$

außerdem aber auch die *Vollständigkeit* der Orthogonalfunktionen $\varphi_n(q)$.

Wir berechnen nach (14b) die Matrix $\mathbf{p} \mathbf{q}$:

$$(\mathbf{p} \mathbf{q})_{mn} = \sum_k \mathbf{p}_{mk} \mathbf{q}_{kn} = \frac{\hbar}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* \frac{d}{dq} \sum_k \varphi_k \mathbf{q}_{kn} \cdot dq.$$

Nun ist $q \varphi_n(q)$ in eine *Reihe* nach den $\varphi_k(q)$ entwickelbar, und diese lautet nach (12) wegen (1.4a):

$$q \varphi_n(q) = \sum_k \varphi_k(q) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k^*(q) q \varphi_n(q) dq = \sum_k \varphi_k(q) \mathbf{q}_{kn}. \quad (17)$$

Also wird

$$(\mathbf{p} \mathbf{q})_{mn} = \frac{\hbar}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* \frac{d}{dq} q \varphi_n \cdot dq. \quad (18)$$

Ebenso berechnen wir

$$(\mathbf{q} \mathbf{p})_{mn} = \sum_k \mathbf{q}_{mk} \mathbf{p}_{kn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* q \sum_k \varphi_k \mathbf{p}_{kn} \cdot dq;$$

da

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \varphi_n'(q) = \sum_k \mathbf{p}_{kn} \varphi_k(q) \quad (19)$$

ist, wird also

$$(\mathbf{q} \mathbf{p})_{mn} = \frac{\hbar}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* q \frac{d}{dq} \varphi_n dq. \quad (20)$$

Also ist nach (18), (20):

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \mathbf{q} - \mathbf{q} \mathbf{p})_{mn} &= \frac{\hbar}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* \left\{ \frac{d}{dq} q \varphi_n - q \frac{d}{dq} \varphi_n \right\} dq \\ &= \frac{\hbar}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* \varphi_n dq = \frac{\hbar}{2\pi i} \delta_{mn}, \end{aligned}$$

womit (15) bewiesen ist.

Zweitens zeigen wir jetzt: Wenn wir tatsächlich q, p durch (14) definieren, dann ergibt sich für die beiden Matrizen $U(q)$ und p^2 :

$$\left. \begin{aligned} U(q)_{mn} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* \cdot U(q) \cdot \varphi_n \cdot dq, \\ (p^2)_{mn} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* \cdot \frac{-\hbar^2}{4\pi^2} \frac{d^2 \varphi_n}{dq^2} \cdot dq. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Der Beweis hierfür ergibt sich wieder nach der soeben angewandten Methode. Es wird ja nach (14b) und (19):

$$\left. \begin{aligned} (p^2)_{mn} &= \sum_k p_{mk} p_{kn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{d}{dq} \sum_k \varphi_k p_{kn} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* \left(\frac{\hbar}{2\pi i} \right)^2 \frac{d^2 \varphi_n}{dq^2} \cdot dq, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

womit die zweite Gleichung (21) bewiesen ist.

Zum Beweis der ersten Gleichung (21) brauchen wir nur den Nachweis, daß jedenfalls für den Fall einer Potenz $U(q) = q^r$ die Behauptung richtig ist; sie gilt dann auch für eine Potenzreihe $U(q) = \sum c_r q^r$, also für jedes $U(q)$. Den gewünschten Nachweis führen wir durch Induktion: wenn die Behauptung für den Fall $U(q) = q^r$ richtig ist, dann auch für $U(q) = q^{r+1}$. Denn es wird dann ja auch nach (14a) und (17):

$$(q^{r+1})_{mn} = \sum_k (q^r)_{mk} q_{kn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* q^r \sum_k \varphi_k q_{kn} \cdot dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* q^r \cdot q \varphi_n \cdot dq;$$

damit ist der Beweis beendet.

Wir sehen nun drittens: Die nach (14) konstruierten Matrizen q, p haben neben der Eigenschaft (15) auch die Eigenschaft

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2\mu} + U(q) = \text{Diagonalmatrix.} \quad (23)$$

Denn nach (21) wird ja

$$\left. \begin{aligned} H_{mn} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* \left\{ \frac{-\hbar^2}{8\pi^2\mu} \frac{d^2 \varphi_n}{dq^2} + U(q) \varphi_n \right\} dq \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* W_n \varphi_n dq = W_n \delta_{mn}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Also sind diese Matrizen (14) tatsächlich die Lösung des quantenmechanischen Problems, zwei Matrizen p, q mit den Eigenschaften (15) und (23) zu finden, und zwar ergeben sich die Eigenwerte der Energiematrix $H(p, q)$ tatsächlich als identisch mit den Eigenwerten W_n der SCHRÖDINGER-Gleichung.

Diese Äquivalenz der beiden so verschiedenartigen Methoden hat uns die physikalische Bedeutung der SCHRÖDINGERSchen Eigenfunktionen

φ_n insoweit erkennen lassen, daß wir ihre Verwendung zur *Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten* nunmehr übersehen: Wir gewinnen ja nach (14) aus den φ_n die die Übergangswahrscheinlichkeiten festlegenden *Matrixelemente*.

Aber wir können auch nach einer anderen Seite hin die physikalische Bedeutung der φ_n jetzt präzisieren. Die obere Gleichung (21) gilt für jede Funktion $U(q)$, z. B. auch für eine solche, die nur in einem engen Intervall $q, q + \Delta q$ von Null verschieden — etwa gleich 1 — ist. Das Diagonalelement $U(\mathbf{q})_{nn}$ von $U(\mathbf{q})$ gibt aber den *zum n -ten Zustand gehörenden Zeitmittelwert* von $U(\mathbf{q})$, und nach (14) hat es bei schmalem Δq (unter den eben ausgesprochenen Voraussetzungen den Wert

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(q)|^2 U(q) dq = |\varphi_n(q)|^2 \cdot \Delta q. \quad (25)$$

Das führt uns zu folgender *physikalischer Deutung* von $\varphi_n(q)$:

Die Größe $|\varphi_n(q)|^2 \cdot \Delta q$ ist die *Wahrscheinlichkeit* dafür, daß eine *Messung der Koordinate q* (mit dem „ γ -Mikroskop“) *an einem vorher im n -ten Quantenzustand befindlichen System einen ins Intervall $q, q + \Delta q$ fallenden Wert ergibt*. Die *Normierung*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_n(q)|^2 dq = 1 \quad (25a)$$

entspricht hierbei der Tatsache, daß die *Wahrscheinlichkeit, irgendeinen Wert q innerhalb des ganzen Intervalles von $-\infty$ bis $+\infty$ zu finden, natürlich gleich 1 ist*.

Bei *aperiodischen Bewegungen* ist übrigens diese Normierung (25a) nicht mehr durchführbar. So insbesondere bei der *kräftefreien* Bewegung im offenen, *unbegrenzten* Raume, zu welcher die Eigenfunktionen

$$\varphi(x, y, z) = \text{const } e^{\frac{2\pi i}{h} p r}$$

gehören (vgl. § 5, Kapitel 2). Wir werden aber auch in diesem Fall $|\varphi(x, y, z)|^2 dy dx dz$ als *proportional* ansehen mit der Wahrscheinlichkeit dafür, daß bei Anwendung eines γ -Strahlmikroskops der (*vorher* einen Impuls p besitzende) Massenpunkt sich in dem bei x, y, z gelegenen Volumstück $dx dy dz$ findet. In diesem Zusammenhange wird nun erkennbar, weshalb hier gerade die komplexe Exponentialfunktion (und *nicht* ein reeller Sinus) als Eigenfunktion auftritt: wir bekommen gerade aus der komplexen Exponentialfunktion $|\varphi(x, y, z)|^2 = \text{const}$, unabhängig von x, y, z , also eine vollkommen gleichmäßige, ortsunabhängige Verteilung der Wahrscheinlichkeit.

3. Operatoren und Matrizen. Eine vollständigere und übersichtlichere Erfassung der Zusammenhänge von SCHRÖDINGERSchen Eigenfunktionen und quantenmechanischen Matrizen ergibt sich aus folgenden Betrachtungen.

Die *Differentiation* d/dq ist ein Beispiel für einen allgemeineren Begriff, für den man den Namen „*lineare Operatoren*“ eingeführt hat. Die Differentiation hat ja die Eigenschaft

$$\frac{d}{dq} \{f(q) + g(q)\} = \frac{d}{dq} f(q) + \frac{d}{dq} g(q); \quad (26)$$

dieselben Eigenschaften hat aber auch z. B. die *wiederholte* Differentiation d^m/dq^m , und dieselbe Eigenschaft hat auch die *Multiplikation* mit q (nach dem „*distributiven Gesetz*“):

$$q \{f(q) + g(q)\} = qf(q) + qg(q). \quad (27)$$

Ganz allgemein bezeichnen wir als *linearen Operator* eine *Rechenvorschrift*, die aus jeder Funktion $f(q)$ eine neue Funktion — nennen wir sie $Rf(q)$ — hervorgehen läßt, wobei die Beziehung

$$R \{f(q) + g(q)\} = Rf(q) + Rg(q) \quad (28)$$

besteht.

Wird nun auf die Funktion $Rf(q)$ nochmals ein neuer Operator T angewandt, so entsteht eine Funktion $TRf(q)$, und man pflegt den *dritten* Operator, dessen Anwendung darin besteht, daß erst R und dann noch T angewandt wird, als das „*Produkt*“ TR zu bezeichnen. Man kann also Operatoren *multiplizieren*, und man kann sie auch *addieren*: mit $(T + R)f(q)$ ist natürlich $Tf(q) + Rf(q)$ gemeint.

Man kann also mit den Operatoren „rechnen“, in ganz ähnlicher Weise, wie mit den Matrizen; und einige einfache Überlegungen zeigen sogar, daß die *Rechengesetze* hier genau *dieselben* wie bei den Matrizen sind: insbesondere gilt das assoziative Gesetz der Multiplikation $S(TR) = (ST)R$; aber das kommutative Gesetz $ST = TS$ gilt im allgemeinen *nicht*.

Nehmen wir gleich als Beispiel die in (26), (27) betrachteten Operatoren: Es wird ja für jede Funktion $f(q)$ stets

$$\left(\frac{d}{dq} q - q \frac{d}{dq} \right) f(q) = f(q), \quad (29)$$

was wir durch die *Operatorgleichung*

$$\frac{d}{dq} q - q \frac{d}{dq} = \mathbf{1} \quad (30)$$

ausdrücken können, wobei wir mit der $\mathbf{1}$ rechts den „*Einheitsoperator*“ (= Multiplikation mit der Zahl $\mathbf{1}$) meinen.

Wir wollen aber der Deutlichkeit halber den Operator „Multiplikation mit q “ jetzt durch Q bezeichnen; ferner gebrauchen wir die Bezeichnung P für $\hbar/2\pi i \cdot d/dq$. Aus (30) bekommen wir dann

$$PQ - QP = \frac{\hbar}{2\pi i} \mathbf{1}. \quad (31)$$

Also die Operatoren P , Q erfüllen die *kanonische Vertauschungsregel*, und da ferner, wie wir schon betonten, die *Rechengesetze* der Operatoren genau denen der Matrizen entsprechen, so besteht eine vollständige

„Isomorphie“ zwischen den Operatoren P , Q und den Matrizen \mathbf{p} , \mathbf{q} . Dies spricht sich in folgendem Satz aus:

Eine beliebige Matrix

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad (32)$$

kann folgendermaßen konstruiert werden:

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q})_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* F(P, Q) \varphi_n \cdot dq. \quad (33)$$

Das ist natürlich so gemeint: Der Operator $F(P, Q)$ soll aus den P, Q in genau gleicher Weise aufgebaut werden (durch nichtkommutative Multiplikationen und durch Additionen), wie $\mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ aus \mathbf{p}, \mathbf{q} aufgebaut wird. Dieser Operator $F(P, Q)$ soll dann im Integral rechts auf die Funktion $\varphi_n(q)$ angewandt werden.

Zum Beweise ist nur zu zeigen: wenn die Behauptung für zwei Funktionen $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ richtig ist, dann ist sie auch für $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ und für $\mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2$ richtig. Die Summe $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ erledigt sich in trivialer Weise; das Produkt $\mathbf{F}_1 \mathbf{F}_2$ erledigt sich ebenso, wie in den vier speziellen Beispielen des vorigen Abschnitts.

Diese Überlegungen lassen sich sofort übertragen auf Systeme von beliebig vielen Freiheitsgraden. Den die kanonischen Vertauschungsregeln

$$[\mathbf{p}_k, \mathbf{p}_l] = [\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_l] = 0, \quad [\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_l] = \frac{\hbar}{2\pi i} \mathbf{I} \delta_{kl} \quad (34)$$

erfüllenden Matrizen $\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_k$ entsprechen die auf Funktionen $f(q_1, q_2, \dots)$ der Zahlvariablen q_1, q_2, \dots anzuwendenden Operatoren

$$P_k = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_k}, \quad Q_k = \text{Multiplikation mit } q_k, \quad (35)$$

die ebenfalls den kanonischen Vertauschungsregeln genügen:

$$[P_k, P_l] = [Q_k, Q_l] = 0, \quad [P_k, Q_l] = \frac{\hbar}{2\pi i} \delta_{kl} \cdot \mathbf{I}. \quad (36)$$

Eine Matrix $\mathbf{F}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots)$ berechnet sich aus den Eigenfunktionen $\varphi_n(q_1, q_2, \dots)$ gemäß

$$\left. \begin{aligned} &\mathbf{F}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n^* F(P_1, P_2, \dots; Q_1, Q_2, \dots) \varphi_n \cdot dq_1 dq_2 \dots \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Die dem Problem zugeordnete SCHRÖDINGER-Gleichung aber lautet:

$$\{H(P_1, P_2, \dots; Q_1, Q_2, \dots) - W_n\} \varphi_n = 0. \quad (38)$$

Diese Feststellung (38) gibt uns eine wesentlich erweiterte Anwendungsmöglichkeit für die SCHRÖDINGERSche Gleichung. Wir hatten ja früher die SCHRÖDINGER-Gleichung nur für den Fall eines einzelnen Massenpunktes aufgestellt, der sich unter dem Einfluß einer potentiellen Energie $U(x)$ bewegt:

$$\frac{-\hbar^2}{8\pi^2\mu} \Delta\varphi + U(x)\varphi = W\varphi. \quad (39)$$

Aber mit (38) haben wir eine weitreichende Verallgemeinerung der SCHRÖDINGER-Gleichung gewonnen. *Erstens* können wir jetzt ohne weiteres auch den Einfluß eines *magnetischen* Feldes auf den (als elektrisch geladen vorgestellten) Massenpunkt beschreiben. Klassisch geschieht das nämlich so, daß man das Magnetfeld \mathfrak{H} in der Form

$$\mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A} \quad (40)$$

darstellt durch ein „Vektorpotential“ \mathfrak{A} , und dann die HAMILTON-Funktion

$$H = \frac{1}{2\mu} \left(\mathfrak{p} - \frac{e}{c} \mathfrak{A} \right)^2 + U \quad (41)$$

ansetzt; $-e$ soll die *Ladung* unseres Massenpunktes und c die Lichtgeschwindigkeit sein. Also werden wir nicht zweifeln, daß die quantenmechanische Formulierung dieses Problems durch die Energiematrix

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2\mu} \left(\mathfrak{p} - \frac{e}{c} \mathfrak{A} \right)^2 + U \quad (42)$$

gegeben ist; das Vektorpotential \mathfrak{A} ist als Funktion der Ortskoordinaten $\mathbf{r} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ unseres Massenpunktes natürlich ebenso gut eine *Matrix* wie die potentielle Energie U :

$$U = U(\mathbf{r}); \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathbf{r}). \quad (43)$$

Aus (42) leiten wir aber auch nach dem Schema (38) eindeutig die zugehörige SCHRÖDINGER-Gleichung ab:

$$\left\{ \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\hbar}{2\pi i} \text{grad} - \frac{e}{c} \mathfrak{A} \right)^2 + U - W_n \right\} \varphi_n = 0. \quad (44)$$

Das Auffällige hieran ist, daß die Eigenfunktionen φ_n jetzt unvermeidlicherweise *komplex* ausfallen. Solange wir *nur* mit einer potentiellen Energie $U(\mathbf{r})$ rechneten, lag noch kein Zwang vor, die φ_n komplex anzusetzen; bis auf einen (sowieso willkürlichen) konstanten komplexen Faktor blieben sie *reell*, da die SCHRÖDINGER-Gleichung ihrerseits für $\mathfrak{A} = 0$ eine *reelle* Differentialgleichung war. Daß wir uns jetzt entschließen müssen, *die SCHRÖDINGERSchen Eigenfunktionen grundsätzlich als komplex anzuerkennen*, gibt uns eine Warnung vor einer zu „klassischen“ Auffassung der Wellenmechanik: wir müssen uns davor hüten, in der SCHRÖDINGER-Amplitude gewissermaßen eine greifbare physikalische Größe zu sehen — sie bedeutet tatsächlich nichts anderes als eine Hilfsgröße der Rechnung, und erst für die daraus *abgeleiteten* Größen, wie $|\varphi|^2$ oder wie die Matrixelemente, gibt es eine unmittelbare physikalische Interpretation.

Noch deutlicher und schärfer tritt aber der *abstrakte, unanschauliche Charakter* der SCHRÖDINGERSchen Eigenfunktionen zutage, wenn wir nach (38) ein System untersuchen, das aus *mehreren* Massenpunkten besteht, also eine Anzahl $f > 3$ von Koordinaten q_1, q_2, \dots, q_f samt zugehörigen Impulsen besitzt. In diesem Falle muß ja nach (38) jedes φ_n als Funktion aller f Koordinaten angesetzt werden:

$$\varphi_n = \varphi_n(q_1, q_2, \dots, q_f). \quad (45)$$

Solange wir nur einen einzigen Massenpunkt (in einem statischen Kraftfeld) betrachten, besteht eine gewisse Versuchung, uns die Formulierungen der Wellenmechanik zu veranschaulichen durch den Gedanken, daß der Partikelbegriff schlechtweg zu *ersetzen* sei durch den Wellenbegriff; daß also statt eines sich bewegenden Teilchens in Wahrheit ein Wellenvorgang vorliege. Aber sobald wir *mehrere* Teilchen in ihrer dynamischen Wechselwirkung verfolgen, *versagt* diese *falsche Veranschaulichung*; denn einem Problem von $f > 3$ Freiheitsgraden ist zwar auch ein „Wellenvorgang“ zuzuordnen, *aber dieser spielt sich* nach (45) *ab in einem abstrakten Raume von f Dimensionen.*

4. **Verschmelzung zweier Systeme.** Bei dieser Gelegenheit sei klar-gestellt, wie man verfahren muß, wenn es sich darum handelt, zwei verschiedene, getrennte Gebilde A und B zusammengenommen als ein Gesamtsystem aufzufassen, oder, wie wir auch sagen, zu einem Gesamtsystem zu „verschmelzen“. Zum Verständnis des Wesentlichen wird es genügen, zwei Systeme A und B zu betrachten, deren jedes nur *einen* Freiheitsgrad besitzt.

Zu dem eindimensional bewegten Massenpunkte A also gehöre eine Koordinate q_1 , und zu B eine Koordinate q_2 . Betrachten wir jeden der beiden Massenpunkte für sich allein, so haben wir je eine SCHRÖDINGER-Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} \{H_1(P_1, Q_1) - W_n^{(1)}\} \varphi_n^{(1)} &= 0; \\ \{H_2(P_2, Q_2) - W_m^{(2)}\} \varphi_m^{(2)} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

es ist also $\varphi_n^{(1)}$ eine Funktion von q_1 , und $\varphi_m^{(2)}$ eine Funktion von q_2 :

$$\varphi_n^{(1)} = \varphi_n^{(1)}(q_1); \quad \varphi_m^{(2)} = \varphi_m^{(2)}(q_2). \quad (47)$$

Das *Gesamtsystem*, bestehend aus A und B zusammen, wobei es aber *keine Wechselwirkung* zwischen A und B geben soll, hat dann die Energie

$$H = H_1(P_1, Q_1) + H_2(P_2, Q_2), \quad (48)$$

und *seine* SCHRÖDINGER-Gleichung lautet:

$$\{H_1(P_1, Q_1) + H_2(P_2, Q_2) - W\} \varphi(q_1, q_2) = 0. \quad (49)$$

Man sieht aber sofort, daß (49) *erfüllt wird durch*

$$\left. \begin{aligned} W &= W_n^{(1)} + W_m^{(2)} = W_{nm}; & (a) \\ \varphi(q_1, q_2) &= \varphi_n^{(1)}(q_1) \varphi_m^{(2)}(q_2) = \varphi_{nm}(q_1, q_2). & (b) \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Nachdem die $\varphi_n^{(1)}(q_1)$ und die $\varphi_m^{(2)}(q_2)$ je ein *vollständiges* Orthogonalsystem bildeten, stellen auch die Produkte $\varphi_{nm}(q_1, q_2)$ ein *vollständiges* Orthogonalsystem dar; es kann also *außer* den in (50) angegebenen keine weiteren Lösungen der Gleichung (49) geben.

Das ist aber genau das, was wir physikalisch erwarten mußten: die Energiestufen des Gesamtsystems $A + B$ sind zu charakterisieren durch Angabe 1) der Quantenzahl n von A , und 2) der Quantenzahl m von B , und die Energie ist dann die Summe der beiden einzelnen Energien: $W_{nm} = W_n^{(1)} + W_m^{(2)}$.

Fragen wir aber nach der *Ortswahrscheinlichkeit*, so ist jetzt genauer folgendes zu fragen: Wie groß ist, wenn das System zunächst im Zustand n, m ist, die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer an beiden Teilchen A und B zugleich ausgeführten *Ortsmessung* für die Koordinate von A ein Wert im Intervalle $q_1, q_1 + \Delta q_1$ gefunden wird, und für die von B ein Wert im Intervalle $q_2, q_2 + \Delta q_2$? Die Antwort kann auf zwei Weisen gegeben werden.

1. Wir fassen von vornherein $A + B$ als ein einziges Gesamtsystem auf. Dann ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit entsprechend (25) gleich:

$$|\varphi_{nm}(q_1, q_2)|^2 \Delta q_1 \Delta q_2. \quad (51)$$

2. Wir betrachten A und B *getrennt*; die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist gleich:

$$|\varphi_n^{(1)}(q_1)|^2 \Delta q_1 \cdot |\varphi_m^{(2)}(q_2)|^2 \Delta q_2. \quad (52)$$

Die *Beziehung* $\varphi_{nm}(q_1, q_2) = \varphi_n^{(1)}(q_1) \varphi_m^{(2)}(q_2)$ gibt uns die *unentbehrliche Gewähr dafür, daß beide Ausdrücke (51), (52) übereinstimmen*.

Betrachten wir endlich noch die zu A, B einzeln und zu $A + B$ gehörenden *Matrizen*. Die Matrizen des Systems A haben die allgemeine Gestalt

$$\mathbf{r}_1 = (r_1(n, n')), \quad (53)$$

wo die Indizes n, n' zwei Energiewerten $W_n^{(1)}, W_{n'}^{(1)}$, von A entsprechen. Die zum Gesamtsystem $A + B$ gehörenden Matrizen haben aber das Aussehen

$$\mathbf{R} = (R(nm, n'm')); \quad (54)$$

ihre Zeilen oder Spalten sind je durch ein *Index-Paar* bestimmt, entsprechend den Energiewerten W_{nm} .

Dieselbe meßbare Größe an A (also z. B. die Koordinate von A , oder der Impuls, oder etwa die Summe von Koordinate und Impuls), welche, wenn wir A *allein* betrachten, durch die Matrix \mathbf{r}_1 in (53) dargestellt wird, ist, wenn wir A als Teil des Gesamtsystems $A + B$ ansehen, durch eine Matrix

$$\mathbf{R}_1 = \left. \begin{aligned} &(R_1(nm, n'm')) \\ &= (r_1(nn') \delta_{mm'}) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

darzustellen. Man erkennt dies aus (50b); oder auch aus unmittelbarer physikalischer Erwägung: irgendeine Einwirkung (Stoß, Strahlungsfeld usw.) *auf A allein* kann *nur solche Übergänge* des Systems $A + B$ veranlassen, bei denen n *allein* sich ändert, m aber ungeändert bleibt.

Man spricht in bezug auf (55) auch von einer „*Verschmelzung*“ der zu A und zu B gehörigen Matrizen, oder nennt \mathbf{R}_1 das *direkte Produkt* der zu A gehörenden Matrix \mathbf{r}_1 und der zu B gehörenden *Einheitsmatrix* ($\delta_{mm'}$).

Natürlich kann man auch ganz unabhängig von den wellenmechanischen Eigenfunktionen sich klar machen, daß aus den Lösungen der zu A und zu B gehörenden quantenmechanischen Probleme

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1) &= \mathbf{W}^{(1)} = \text{Diagonalmatrix,} & [\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_1] &= \frac{\hbar}{2\pi i} \mathbf{I}; \\ \mathbf{H}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2) &= \mathbf{W}^{(2)} = \text{Diagonalmatrix,} & [\mathbf{p}_2, \mathbf{q}_2] &= \frac{\hbar}{2\pi i} \mathbf{I} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

die Lösung des Problems

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_1(\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_1) + \mathbf{H}_2(\mathbf{P}_2, \mathbf{Q}_2) &= \mathbf{W} = \text{Diagonalmatrix,} \\ [\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_1] &= [\mathbf{P}_2, \mathbf{Q}_2] = \frac{\hbar}{2\pi i} \mathbf{I}, \\ [\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2] &= [\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2] = [\mathbf{P}_1, \mathbf{Q}_2] = [\mathbf{Q}_1, \mathbf{P}_2] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

tatsächlich in der in (55) beschriebenen Form hervorgeht.

§ 4. Anwendungen und Beispiele.

1. Harmonischer Oszillator. Für den eindimensionalen harmonischen Oszillator lautet die SCHRÖDINGER-Gleichung:

$$-\frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \cdot \frac{d^2\varphi_n}{dq^2} + 2\pi^2\nu_0^2\mu q^2\varphi_n = W_n\varphi_n. \quad (1)$$

Wir schreiben nun x für

$$x = 2\pi \sqrt{\frac{\nu_0\mu}{\hbar}} q, \quad (2)$$

und bringen dadurch (1) in die Form

$$\frac{d^2\varphi_n}{dx^2} + \left(\frac{2W_n}{\hbar\nu_0} - x^2 \right) \varphi_n = 0. \quad (3)$$

Das ist eine den Mathematikern gut bekannte Gleichung¹, deren Eigenfunktionen $\varphi_n = \varphi_n(x)$ folgendermaßen aussehen:

Man definiere die „HERMITESCHEN Polynome“

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (4)$$

dann sind

$$\varphi_n(x) = \text{const } e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

die normierten Eigenfunktionen von (3).

Die zugehörigen Eigenwerte von (3) sind

$$\frac{2W_n}{\hbar\nu_0} = 2n + 1; \quad (6)$$

d. h. wir bekommen — wie es ja nach unserem allgemeinen Äquivalenzbeweis sein muß — dieselben Energiewerte

$$W_n = \hbar\nu_0 \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (7)$$

wie sie sich auch aus der matrizenmechanischen Formulierungsweise unserer Theorie schon ergaben.

¹ Vgl. COURANT-HILBERT: Methoden der mathematischen Physik.

Natürlich kann man entsprechend den in unserem Äquivalenzbeweis entwickelten Formeln auch die *Matrizelemente* von q oder p aus den obigen Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$ errechnen, und damit die Auswahlregel $n \rightarrow n \pm 1$ und die *Übergangswahrscheinlichkeiten* für (Dipol-)Lichtreaktionen ermitteln¹. Freilich ist diese Ausrechnung aus den $\varphi_n(x)$ in diesem einfachsten Beispiel viel umständlicher, als die früher dargelegte unmittelbare Berechnung nach der Matrizenmechanik.

2. Drehimpuls eines Massenpunktes. Wenn sich ein Massenpunkt in einem *Zentralfeld* bewegt, haben wir die SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\frac{-\hbar^2}{8\pi^2\mu} \Delta\varphi + U(r) \cdot \varphi = W\varphi; \quad (8)$$

und es liegt nahe, $\varphi = \varphi(x, y, z)$ anzusetzen in der Form

$$\varphi = \chi(\vartheta, \omega) \cdot \psi(r), \quad (9)$$

wobei r, ϑ, ω *Polarkoordinaten* bedeuten sollen:

$$x + iy = r \sin \vartheta \cdot e^{i\omega}; \quad z = r \cos \vartheta. \quad (10)$$

Tatsächlich sind *alle* Eigenfunktionen von (8) aus dem Ansatz (9) zu erhalten.

Um diesen Ansatz (9) zu verwerten, müssen wir $\Delta\varphi$ auf Polarkoordinaten umschreiben; dafür gilt die bekannte (ohne Schwierigkeit, aber nicht ohne Mühe ableitbare) Formel

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \omega^2} \right\} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Wird dies in (8) eingefügt, so zerlegt sich (8) auf Grund von (9) in *zwei* Gleichungen. Denn es wird ja

$$\frac{-\hbar^2}{8\pi^2\mu} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \Delta \right\} \chi(\vartheta, \omega) \psi(r) + r^2 (U(r) - W) \chi(\vartheta, \omega) \psi(r) = 0, \quad (12)$$

oder

$$\chi \cdot \left[\frac{-\hbar^2}{8\pi^2\mu} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + r^2 (U(r) - W) \psi \right] = \psi \cdot \frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} \Delta \chi. \quad (13)$$

Eine Gleichung von der Form

$$\chi(\vartheta, \omega) \cdot F(r) = G(\vartheta, \omega) \cdot \psi(r) \quad (14)$$

erfordert aber offenbar $\chi = \text{const } G$ und $\psi = \text{const } F$. Also wird notwendigerweise

$$\left. \begin{aligned} \frac{-\hbar^2}{8\pi^2\mu} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + r^2 (U(r) - W) \psi &= \frac{M^2}{2\mu} \psi; & (a) \\ \Delta \chi = \frac{1}{\sin \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial \omega^2} \right\} &= \frac{4\pi^2}{\hbar^2} M^2 \chi; & (b) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

wobei M^2 beide Male dieselbe Konstante ist.

¹ Die Auswahlregel ergibt sich daraus, daß die HERMITESCHEN Polynome die Eigenschaft $2xH_n(x) = H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x)$ haben.

Die physikalische Bedeutung von M^2 ergibt sich, wenn wir nach der allgemeinen Formel (37), § 3, 3, Kapitel 3 die Matrix \mathfrak{M}^2 berechnen:

M^2 ist nichts anderes, als einer der *Eigenwerte der quadrierten Drehimpulsmatrix* \mathfrak{M}^2 , und die Untersuchung der zweiten Gleichung (13) ergibt einen neuen Weg, diese Eigenwerte M^2 zu bestimmen. Diese Gleichung (13b) wird gelöst durch die von den Mathematikern sehr ausführlich untersuchten *Kugelfunktionen*; aus der Theorie dieser Kugelfunktionen ist insbesondere bekannt, daß die Eigenwerte von (13b) gegeben sind durch

$$\frac{4\pi^2}{\hbar^2} M^2 = l(l+1); \quad l=0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

Damit ist die wichtige Formel (37), § 4, 3, Kapitel 2 wiedergefunden.

Betrachten wir das richtungsentartete Problem (8) als Grenzfall eines nichtentarteten axialsymmetrischen, wobei wieder die z-Achse die Symmetrieachse (also etwa die Richtung eines homogenen Magnetfeldes) sei, so sehen die Funktionen $\chi(\vartheta, \omega)$ folgendermaßen aus:

$$\left. \begin{aligned} \chi(\vartheta, \omega) &= Y_l^m(\vartheta, \omega) = e^{im\omega} \frac{P_l^{(m)}(\cos \vartheta)}{(\sin \vartheta)^m}; \\ P_l^{(m)}(\zeta) &= \frac{d^{l-m}}{d\zeta^{l-m}} (1-\zeta^2)^l; \quad -l \leq m \leq l. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Dabei ist also l die *Drehimpulsquantenzahl* und m die *magnetische Quantenzahl*.

Bei vorausgesetzter Kenntnis der Theorie der Kugelfunktionen können wiederum alle auf den Drehimpuls eines Massenpunktes bezüglichen Resultate wellenmechanisch abgeleitet werden. Hier sei nur hervorgehoben, daß — während unsere obigen mit der Matrizenmethode hergeleiteten allgemeinen Resultate sowohl *ganzzahlige* als auch *halbzahlige* Werte m zuließen — die jetzigen Bemerkungen die Feststellung ergeben, daß für einen *Massenpunkt* (also *ohne Spin*) tatsächlich m stets *ganzzahlig* ist. (Was bei alleiniger Benutzung der Matrizenmethode natürlich auch zu beweisen ist, aber etwas umständlicher.)

3. Das H-Atom. Für den Fall des H-Atoms nimmt (13a) die folgende Gestalt an:

$$\frac{-\hbar^2}{8\pi^2\mu} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) - \left(W r^2 + Z e^2 r - \frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu} l(l+1) \right) \psi = 0. \quad (18)$$

Auch diese Differentialgleichung führt auf wohlbekannte Funktionen als Lösungen. Sie wird gelöst durch:

$$\psi(r) = \psi_{nl}(r) = C \cdot e^{-\frac{r}{na}} \left(\frac{r}{na} \right)^l L_{n+l}^{2l+1} \left(\frac{r}{na} \right); \quad (19)$$

dabei ist

$$a = \frac{\hbar^2}{8\pi^2\mu Z e^2}, \quad (20)$$

und L bedeutet ein gewisses „LAGUERRESCHES Polynom“:

$$L_k^p(x) = \frac{d^p L_k(x)}{d x^p}; \quad L_k(x) = e^x \frac{d^k}{d x^k} (x^k e^{-x}); \quad p \leq k. \quad (21)$$

Durch C in (19) ist der noch anzubringende Normierungsfaktor angedeutet. Für den zu $\psi_{n,l}(r)$ gehörigen *Eigenwert* W in (18) ergibt sich entsprechend der *BALMER-Formel* der von l unabhängige Wert

$$W_n = - \frac{2 \pi^2 \mu Z^2 e^4}{h^2 n^2}. \quad (22)$$

Außer den kurz beschriebenen gibt es keine weiteren Eigenfunktionen mit *negativen* Eigenwerten W ; wohl aber sind außer den *diskreten* Eigenwerten W_n noch weitere in kontinuierlicher Verteilung vorhanden, nämlich alle positiven Werte $W \geq 0$, korrespondierend mit den klassischen aperiodischen Hyperbelbahnen. Die Untersuchung der zugehörigen Eigenfunktionen ist bedeutungsvoll für das Verständnis der Intensitätsverhältnisse in den *kontinuierlichen Absorptionsgebieten* im H-Spektrum, und ferner auch für die Theorie der *Röntgenbremsstrahlung*. Auch die wellenmechanische Begründung der *RUTHERFORDSchen Streuformel* hat von analogen Eigenfunktionen Gebrauch zu machen; nur handelt es sich dabei um *COULOMBSche Abstoßung* statt Anziehung. Die relativ einfache Formel (19) für die zu den diskreten Eigenwerten gehörenden Eigenfunktionen ergibt andererseits die Möglichkeit einer Berechnung der Intensitäten (Übergangswahrscheinlichkeiten) für die Linien des H-Spektrums; doch sei auf die sich ergebenden recht komplizierten Formeln hier nicht näher eingegangen.

Die charakteristische *Entartung*, welche das H-Atom (solange wir, wie hier geschehen, von relativistischen bzw. Spin-Effekten *absehen*) in Form der Unabhängigkeit der Energie W_n von l zeigt, entspricht korrespondenzmäßig der reinen Periodizität der *KEPLER-Ellipse* (im Gegensatz zur *zweifach* periodischen *Rosettenbahn* eines Massenpunktes in einem *nicht-COULOMBSchen* Zentralfeld). Einen tieferen Einblick in die hier vorliegenden Verhältnisse gewähren die folgenden Überlegungen¹.

Klassisch ist die Ellipsen- (oder Hyperbel-) Gestalt der *KEPLER-Bahn* am schnellsten zu erhalten aus der Bemerkung, daß der Vektor²

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{\mu e^2 Z} \mathfrak{M} \times \mathfrak{p} + \frac{\mathfrak{r}}{r}$$

für $U(r) = -Ze^2/r$ zeitlich konstant ist: $\mathfrak{A} = 0$. Es wird nämlich

$$\mathfrak{A} \tau = - \frac{1}{\mu e^2 Z} \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{r},$$

und wegen der Konstanz von \mathfrak{A} und \mathfrak{M}^2 ist das die Gleichung eines *Kegelschnitts*.

Quantenmechanisch wird der durch

$$\mathfrak{A}_x = \frac{1}{2 \pi e^2 Z} \left\{ \mathfrak{M}_y \mathfrak{p}_z + \mathfrak{p}_z \mathfrak{M}_y - \mathfrak{M}_z \mathfrak{p}_y - \mathfrak{p}_y \mathfrak{M}_z \right\} + \frac{\mathfrak{r}}{r} \quad (23)$$

¹ Nach PAULI und BORN-JORDAN. (Eine von HULTHÉN [Z. Physik 86, 21 (1933)] unabhängig gegebene Überlegung stimmt überein mit Ausführungen in BORN-JORDAN, Elementare Quantenmechanik. Berlin 1930.)

² $\mathfrak{M} \times \mathfrak{p}$ soll das *Vektorprodukt* von \mathfrak{M} und \mathfrak{p} sein.

(und $\mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ entsprechend) definierte Vektor \mathfrak{A} vertauschbar mit der Energie \mathbf{H} . Man bilde nun die beiden Vektoren

$$\left. \begin{aligned} 2\mathfrak{F}^{(1)} &= \frac{2\pi}{h} \mathfrak{M} + \sqrt{\frac{R h Z^2}{-\mathbf{H}}} \mathfrak{A}, \\ 2\mathfrak{F}^{(2)} &= \frac{2\pi}{h} \mathfrak{M} - \sqrt{\frac{R h Z^2}{-\mathbf{H}}} \mathfrak{A}; \quad R = \frac{2\pi^2 \mu e^4}{h^3}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Eine im Prinzip einfache, wenn auch etwas mühsame Rechnung erlaubt die Aufstellung folgender *Vertauschungsregeln* für $\mathfrak{F}^{(1)}, \mathfrak{F}^{(2)}$:

1. Jede Komponente von $\mathfrak{F}^{(1)}$ ist mit jeder Komponente von $\mathfrak{F}^{(2)}$ vertauschbar.

2. Die drei Komponenten von $\mathfrak{F}^{(1)}$ und ebenso die von $\mathfrak{F}^{(2)}$ erfüllen dieselben Vertauschungsregeln, wie drei *Drehimpulsmatrizen*.

Für *negative Energiewerte* sind außerdem $\mathfrak{F}^{(1)}, \mathfrak{F}^{(2)}$ nach (24) *hermitesche* Matrizen, so daß wir unsere früheren auf \mathfrak{M} bezüglichen Ergebnisse hier wieder anwenden können.

Ferner ist noch festzustellen:

$$\mathfrak{F}^{(1)^2} = \mathfrak{F}^{(2)^2} = \frac{1}{4} \{R h Z^2 (-\mathbf{H})^{-1} - \mathbf{1}\}; \quad (25)$$

zu einem (gemeinsamen) Eigenwert

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 = \iota(\iota + \mathbf{1}) &= \frac{n^2 - \mathbf{1}}{4}; \quad \iota = 0, \frac{1}{2}, \mathbf{1}, \frac{3}{2}, 2, \dots; \\ n = 2\iota + \mathbf{1} &= \mathbf{1}, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

von $\mathfrak{F}^{(1)^2}$ und $\mathfrak{F}^{(2)^2}$ gehört also der Energiewert

$$W_n = -\frac{R h Z^2}{n^2}, \quad (27)$$

womit abermals die *BALMER-Formel* erreicht ist.

Die Matrixvektoren $\mathfrak{F}^{(1)}, \mathfrak{F}^{(2)}$ ermöglichen darüber hinaus eine unmittelbare Übersicht der Termmannigfaltigkeit, die sich ergibt, wenn die *Entartung* des Problems durch gleichzeitige Anwendung eines elektrischen und eines magnetischen homogenen (schwachen) Feldes in nichtparalleler Richtung *aufgehoben* wird (Problem der „*gekreuzten Felder*“). Ferner hängen sie (nach BARGMANN) eng zusammen mit der Lösung des (ebenfalls nichtentarteten) Problems eines H-Atoms in einem *starken* homogenen elektrischen Feld (*nichtlinearer* STARK-Effekt), welche durch Einführung parabolischer Koordinaten zu erzielen ist (SCHRÖDINGER). Auch ein von FOCK entdeckter, für mancherlei Anwendungen wichtiger mathematischer Zusammenhang der SCHRÖDINGER-Gleichung des H-Atoms mit der Theorie der „vierdimensionalen Kugelfunktionen“ hat (nach BARGMANN) seine Wurzel in den erläuterten Eigenschaften der Matrizen $\mathfrak{F}^{(1)}, \mathfrak{F}^{(2)}$.

§ 5. Statistische Transformationstheorie.

1. Die allgemeine Formulierung des Komplementaritätsprinzips. Häufig tritt uns die Aufgabe entgegen, den Einfluß einer schwachen

Störung auf ein quantenphysikalisches Gebilde zu untersuchen. Es handelt sich also, genauer erläutert, um folgendes: Durch eine Energiefunktion $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ ist uns ein gewisses Gebilde definiert, und das Problem

$$\mathbf{p}\mathbf{q} - \mathbf{q}\mathbf{p} = \frac{\hbar}{2\pi i} \mathbf{I}; \quad \mathbf{H}_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{W}_0 = \text{Diagonalmatrix} \quad (1)$$

sei bereits gelöst, d. h. also, wir kennen gewisse Matrizen — sie seien $\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0$ genannt —, die tatsächlich (1) befriedigen:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0; \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_0. \quad (2)$$

Jetzt ist aber statt dessen ein etwas abweichendes Problem gestellt:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}\mathbf{q} - \mathbf{q}\mathbf{p} &= \frac{\hbar}{2\pi i} \mathbf{I}; \\ \mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \mathbf{H}_0(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \lambda \mathbf{H}_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ &= \mathbf{W} = \mathbf{W}_0 + \lambda \mathbf{W}_1 + \lambda^2 \dots = \text{Diagonalmatrix.} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Dabei soll λ eine *kleine* Zahl sein. Man wird jetzt versuchen, die Lösung des neuen Problems (3) von der des ursprünglichen aus aufzubauen; und dazu kann folgende Bemerkung verhelfen.

Es sei \mathbf{U} eine *unitäre* Matrix, d. h.

$$\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^{-1}. \quad (4)$$

Dann werden die Matrizen \mathbf{p}, \mathbf{q} , definiert durch

$$\mathbf{p} = \mathbf{U}\mathbf{p}_0\mathbf{U}^{-1}; \quad \mathbf{q} = \mathbf{U}\mathbf{q}_0\mathbf{U}^{-1}, \quad (5)$$

ebenso, wie die $\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0$ hermitisch sein, und ebenso wie die $\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0$ die *kanonische Vertauschungsregel* erfüllen. Ferner wird

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \mathbf{U}\mathbf{H}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)\mathbf{U}^{-1} \\ &= \mathbf{U}\mathbf{W}_0\mathbf{U}^{-1} + \lambda \mathbf{U}\mathbf{H}_1(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)\mathbf{U}^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Demnach bekommen wir eine approximative Lösung unseres Problems, wenn wir

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{U}_0(\mathbf{1} + \lambda \mathbf{U}_1 + \lambda^2 \dots), \\ \mathbf{U}^{-1} &= (\mathbf{1} - \lambda \mathbf{U}_1 + \lambda^2 \dots) \mathbf{U}_0^{-1} \end{aligned}$$

so einrichten, daß

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U}_0 \mathbf{W}_0 \mathbf{U}_0^{-1} &= \mathbf{W}_0, & (a) \\ \mathbf{U}_0 [\mathbf{U}_1, \mathbf{W}_0] \mathbf{U}_0^{-1} + \mathbf{U}_0 \mathbf{H}_1(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) \mathbf{U}_0^{-1} &= \mathbf{W}_1 = \text{Diagonalmatrix} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

wird. Das Verfahren kann, wenn größere Genauigkeit gewünscht wird, zu den höheren Korrekturen $\lambda^2 \dots, \lambda^3 \dots, \dots$ fortgesetzt werden.

Aus (7a), also $[\mathbf{U}_0, \mathbf{W}_0] = 0$, lesen wir übrigens ab, daß im einfachsten Falle, wenn nämlich das ungestörte Problem (1) *nichtentartet* ist, $\mathbf{U}_0 = \mathbf{1}$ zu nehmen ist, so daß sich (7) zu

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{U}_1, \mathbf{W}_0] + \mathbf{H}_1(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) &= \mathbf{W}_1; \\ \mathbf{W}_1(n, n) &= \mathbf{H}_1(n, n), \\ \mathbf{U}_1(n, m) &= \frac{\mathbf{H}_1(n, m)}{\mathbf{W}_0(n) - \mathbf{W}_0(m)}, \quad (n \neq m) \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

vereinfacht. Ist das ungestörte Problem dagegen *entartet*, so ist durch eine geeignete „Stufenmatrix“ U_0 zunächst die Lösung p_0, q_0 an die betrachtete Störung *anzupassen*. Das ist folgendermaßen zu verstehen. Betrachten wir das entartete Problem als *Grenzfall* $\lambda=0$ eines *nicht-entarteten*, so sind die p_0, q_0 bis auf Phasenkonstanten *eindeutig bestimmt*. Aber je nachdem, von *welchem* nichtentarteten Problem wir ausgehen (je nachdem, wie die Matrix H_1 aussieht), bekommen wir *verschiedene* Matrizen p_0, q_0 für den Grenzfall $\lambda=0$. Dabei sind jedoch zwei verschiedene derartige Matrizenpaare p_0, q_0 und p'_0, q'_0 stets durch eine Transformation

$$p'_0 = U_0 p_0 U_0^{-1}; \quad q'_0 = U_0 q_0 U_0^{-1}; \quad [W_0, U_0] = 0 \quad (7'')$$

miteinander verknüpft.

Aus (7'') ist übrigens die quantenmechanische Begründung für das in Kapitel 1, § 4, 4 betrachtete „*spektroskopische Stabilitätsprinzip*“ abzulesen. — Natürlich haben die hier geschilderten Verhältnisse betreffs der Störungen an entarteten Quantensystemen auch ihren *korrespondenzmäßigen Sinn*: Sie entsprechen der klassischen Theorie der „*säkularen Störungen*“ an entarteten mehrfach periodischen Systemen.

Betreffs der wellenmechanischen *Eigenfunktionen* bedeuten unsere Überlegungen folgendes: Es seien $\varphi_n^0(q)$ die Eigenfunktionen des ungestörten Problems, und $\varphi_n(q)$ die des gestörten. Dann ist

$$\left. \begin{aligned} \varphi_m(q) &= \sum_n U(m, n) \varphi_n^0(q), \\ \varphi_m^0(q) &= \sum_n U^*(n, m) \varphi_n(q). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Wir stellen nun, das ungestörte System jetzt ausdrücklich als nicht-entartet voraussetzend, folgende Frage. Es sei ein ungestörtes System $H = H_0$ vorhanden, und zwar im Zustand mit der Energie $W_0(n)$. Dann werde *plötzlich* die Störung λH_1 „*eingeschaltet*“: Für den Fall, daß die Störung etwa von einem äußeren elektrischen oder magnetischen Feld ausgeübt wird, ist dies ja ohne weiteres anschaulich vorstellbar; aber es besteht kein Grund, die Allgemeinheit von H_1 jetzt zu beschränken. Nach diesem plötzlichen Einschalten der Störung wird das Gebilde einen der neuen Energiewerte

$$W(m) = W_0(m) + \lambda W_1(m)$$

annehmen; und wenn wir unser Experiment *wiederholt* ausführen, wird sich bald dieser, bald jener Energiewert $W(m)$ ergeben. *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit*, daß sich ein ganz bestimmter der Werte $W(m)$ — sagen wir z. B. $W(3)$ — ergibt?

Zur Beantwortung dieser Frage führt im wesentlichen dieselbe Überlegung, die uns in Kapitel 3, § 3, 2 die statistische Deutung der SCHRÖDINGERSchen Eigenfunktionen lieferte. Die Matrix $H = H(p_0, q_0)$ hat für einen vorgegebenen Wert $W_0(n)$ von H_0 den *statistischen Mittelwert* $H(n, n)$, und wenn $f(H)$ eine beliebige Funktion von

$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$ ist, so hat $f(\mathbf{H}) = (f(n, m))$ für ein vorgegebenes $W_0(n)$ den statistischen Mittelwert $f(n, n)$. Nun ist aber

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) &= U^{-1} \mathbf{W} U, \\ f(\mathbf{H}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)) &= U^{-1} f(\mathbf{W}) U,\end{aligned}$$

und folglich der fragliche Mittelwert von $f(\mathbf{H})$ gleich

$$f(n, n) = \sum_m |U(m, n)|^2 f(W(m)). \quad (9)$$

Dies führt zu folgender Deutung: Die Wahrscheinlichkeit, daß beim plötzlichen Einschalten der Störung vom ursprünglichen Energiewert $W_0(n)$ aus der neue Energiewert $W(m)$ erreicht wird, ist gleich

$$w(n, m) = |U(m, n)|^2. \quad (10)$$

Es ist aber zu betonen, daß es für diese Überlegungen keineswegs nötig ist, die Störung $\lambda \mathbf{H}_1$ als *klein* anzunehmen (nur das obige Verfahren zur tatsächlichen Berechnung der „Transformationsmatrix“ U setzt eine *relativ kleine* Störung voraus). Deshalb dürfen wir unser soeben erhaltenes Ergebnis noch etwas grundsätzlicher formulieren:

Es seien bei einem quantenmechanischen Gebilde zwei „meßbare Größen“ \mathbf{F} und \mathbf{G} definiert, also zwei gewisse (hermitesche!) Funktionen $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ und $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ von \mathbf{p} und \mathbf{q} . Natürlich macht es, nebenbei bemerkt, gar nichts aus, wenn wir statt des hier stets betrachteten Systems von *einem* Freiheitsgrad ein System von *mehreren* Freiheitsgraden betrachten — nur der einfacheren Schreibweise halber bleiben wir hier bei *einem* Freiheitsgrad. Die Größe $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ kann gemessen werden in der Weise, daß man an dem System — das ursprünglich eine beliebige Energiefunktion $\mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ haben möge — eine derartige Störung einschaltet, daß $\mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ die Gesamtenergie wird. (Also zu $\mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ ist als „Störung“ hinzuzufügen $\mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) - \mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$). Wir wollen jetzt nur voraussetzen, daß die dabei sich ergebenden neuen Energiewerte *diskret* und sämtlich *einfach* sind. Nachdem so zunächst \mathbf{F} gemessen wurde, werde durch plötzliches Umschalten der Störung jetzt \mathbf{G} gemessen (wobei sich gleichfalls *diskrete* und *einfache* Eigenwerte ergeben mögen).

Dann ist folgendes festzustellen. Die Matrizen $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ mögen so aussehen:

$$\mathbf{F} = (F(n, m)); \quad \mathbf{G} = (G(n, m)). \quad (11)$$

Dann gibt es zwei *unitäre Matrizen*

$$\left. \begin{aligned}\mathbf{S} &= (S(n, m)); & \mathbf{T} &= (T(n, m)); \\ \mathbf{S}^\dagger &= \mathbf{S}^{-1}; & \mathbf{T}^\dagger &= \mathbf{T}^{-1}\end{aligned} \right\} \quad (12)$$

mit der Eigenschaft

$$\left. \begin{aligned}\mathbf{S} \mathbf{F} \mathbf{S}^{-1} &= \mathbf{F}' = (\delta_{nm} F'_{(n)}) = \text{Diagonalmatrix,} \\ \mathbf{T} \mathbf{G} \mathbf{T}^{-1} &= \mathbf{G}' = (\delta_{nm} G'_{(n)}) = \text{Diagonalmatrix.}\end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Die *Eigenwerte* $F'(n)$ bzw. $G'(n)$ sind die *möglichen Werte*, welche $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ bzw. $G(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ annehmen können. Und wenn wir schließlich

$$U = \mathbf{T}\mathbf{S}^{-1}; \quad U^\dagger = U^{-1} \quad (14)$$

definieren, so ist

$$w(n, m) = |U(m, n)|^2 \quad (15)$$

die *Wahrscheinlichkeit* dafür, daß sich, wenn die F -Messung den Wert $F'(n)$ ergab, bei nachfolgender G -Messung der Wert $G'(m)$ ergibt.

Man beachte übrigens, daß die Matrix U (im Gegensatz zu ihren beiden Faktoren \mathbf{T} und \mathbf{S}^{-1}) ganz *unabhängig* davon ist, welche *Energiefunktion* $H(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ das fragliche System ursprünglich hat. Ferner erkennt man eine bemerkenswerte *Symmetrie der quantenmechanischen Wahrscheinlichkeiten*: $w(n, m)$ ist andererseits auch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine F -Messung den Wert $F'(n)$ ergeben wird, wenn vorher eine G -Messung den Wert $G'(m)$ ergeben hat.

Wir werden (im folgenden Abschnitt) noch von den Besonderheiten zu sprechen haben, die sich bei Mitberücksichtigung *solcher* meßbarer Größen $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ oder $G(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ ergeben, für welche die zugehörigen Eigenwerte nicht diskret sind, sondern ein kontinuierliches Gebiet erfüllen (wie z. B. dann, wenn $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ insbesondere die *Ortskoordinate* q ist: $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = q$). Abgesehen von diesem noch zu besprechenden Punkte haben wir mit der (von DIRAC und JORDAN aufgedeckten) Formulierung (15) die umfassendste und tiefste Fassung der Quantengesetze erreicht.

Der Gedanke der *Komplementarität* als der Grundgedanke der Quantentheorie erfährt durch diese Formulierung ganz allgemein seine mathematische Präzisierung¹. *Jede überhaupt denkbare Frage*, die in der Quantenphysik gestellt werden kann, läßt sich letzten Endes auf dieses Schema bringen: Zunächst wird eine nichtentartete (nur einfache Eigenwerte besitzende) Größe $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ gemessen, und hernach eine andere Größe $G(\mathbf{p}, \mathbf{q})$; gefragt wird nach den *Wahrscheinlichkeiten* der verschiedenen möglichen Ergebnisse der Messung von G , wenn das bei der vorherigen Messung von F eingetretene Messungsergebnis als bekannt vorausgesetzt wird.

Mit diesen Feststellungen erhält die *Nichtkommutativität* der quantenmechanischen Matrixgrößen einen anschaulichen Sinn: sie drückt unmittelbar die im Komplementaritätsprinzip enthaltene Existenz von physikalischen Größen aus, welche zwar *einzeln*, aber *nicht zugleich* beobachtet und gemessen werden können. Man entnimmt nämlich leicht aus der obigen Formulierung: *Zwei* (entartete oder nichtentartete) Größen F und G können dann und nur dann zugleich gemessen werden, wenn sie miteinander vertauschbar sind:

$$[F, G] = 0. \quad (16)$$

¹ In der historischen Reihenfolge der Gedankenentwicklung ist umgekehrt der schon in früheren Teilen dieses Buches erörterte Komplementaritätsgedanke durch HEISENBERG und BOHR aus der hier skizzierten DIRAC-JORDANSCHEN Theorie heraus entwickelt worden.

2. Größen mit kontinuierlichem Eigenwertspektrum. Man kann, die Erwägungen des vorigen Abschnitts verwertend, die Matrizen \mathbf{p} , \mathbf{q} , welche die Lösung eines quantenmechanischen Problems mit diskret gequantelter Energie darstellen, auf folgendem Wege konstruieren. Zunächst seien \mathbf{p}_0 , \mathbf{q}_0 zwei ganz beliebige kanonische Matrizen, also

$$\mathbf{p}_0^\dagger = \mathbf{p}_0; \quad \mathbf{q}_0^\dagger = \mathbf{q}_0; \quad [\mathbf{p}, \mathbf{q}] = \frac{\hbar}{2\pi i} \mathbf{1}. \quad (17)$$

Beispielsweise können dies die uns aus § 2, 1 bekannten Matrizen des harmonischen Oszillators sein. Wenn nun $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ die *Energiefunktion* des fraglichen Problems ist, so machen wir den Ansatz

$$\mathbf{p} = \mathbf{U} \mathbf{p}_0 \mathbf{U}^{-1}, \quad \mathbf{q} = \mathbf{U} \mathbf{q}_0 \mathbf{U}^{-1}; \quad \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger, \quad (18)$$

und bestimmen dann \mathbf{U} derart, daß

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{U} \mathbf{H}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) \mathbf{U}^{-1} = \text{Diagonalmatrix} \quad (19)$$

wird.

Man beachte, daß $\mathbf{H}(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0) = \mathbf{A}$ eine *gegebene* hermitische Matrix ist; so daß es sich um das mathematische Problem handelt, zu $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\dagger$ ein unitäres \mathbf{U} zu finden, mit welchem $\mathbf{U} \mathbf{A} \mathbf{U}^{-1}$ Diagonalmatrix wird. Nach allgemeinen mathematischen Sätzen (Hauptachsentransformation quadratischer Formen) *ist das stets möglich* — allerdings kann sich, wenn für $\mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ eine ganz beliebige (hermitische) Matrixfunktion genommen wird, herausstellen, daß wir mit *diskreten* Energiewerten nicht auskommen, sondern *ungequantelte* Zustände zu berücksichtigen haben.

Betrachten wir jetzt den Fall, daß das durch $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ definierte System *nur* ungequantelte Zustände hat — etwa jeden Energiewert W im Intervall $0 < W < \infty$ annehmen kann. Dann müssen wir die obige Formulierung mit der Matrix \mathbf{U} folgendermaßen fassen: \mathbf{U} ist jetzt eine Matrix

$$\mathbf{U} = (U(W, n)), \quad (20)$$

deren Elemente bezeichnet werden durch *einen kontinuierlichen* und *einen diskreten Index*; der diskrete Index n entspricht der Zeilen- und Spaltennumerierung in den ursprünglichen Matrizen \mathbf{p}_0 , \mathbf{q}_0 ; der kontinuierliche Index entspricht den verschiedenen Energiewerten des Systems $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

Sinngemäß ist zu definieren

$$\mathbf{U}^\dagger = (U'(n, W)); \quad U'(n, W) = U^*(W, n); \quad (21)$$

und $\mathbf{p} = \mathbf{U} \mathbf{p}_0 \mathbf{U}^\dagger$ bedeutet:

$$p(W, W') = \sum_{n, m} U(W, n) p_0(n, m) U^*(W', m); \quad (22)$$

für \mathbf{p} und \mathbf{q} bekommen wir natürlich Matrizen, in denen Zeilen *und* Spalten durch kontinuierliche Indizes W , W' numeriert sind.

Was aber bedeutet jetzt die Beziehung

$$\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger, \quad (23)$$

die U als *unitär* charakterisiert? Sie bedeutet, daß die *Matrixelemente* von U , also die

$$U(W, n) = \varphi_n(W), \tag{24}$$

als Funktionen der Variablen W aufgefaßt, *ein vollständiges unitär-orthogonales Funktionensystem bilden*. Denn

$$U^\dagger U = \mathbf{I} \tag{25}$$

oder ausführlicher:

$$\int_0^\infty U^*(W, n) U(W, m) dW = \int_0^\infty \varphi_n^*(W) \varphi_m(W) dW = \delta_{n,m} \tag{26}$$

besagt ja, daß die Funktionen $\varphi_m(W)$ *unitär-orthogonal* (und *normiert*) sind. Und

$$U U^\dagger = \mathbf{I} \tag{27}$$

besagt, daß dieses unitär-orthogonale Funktionensystem *vollständig* ist.

Um dies deutlicher hervortreten zu lassen, benutzen wir eine von DIRAC eingeführte symbolische Schreibweise: die in § 3, 1 erläuterte Definition der Vollständigkeit des Funktionensystems drücken wir symbolisch aus durch die Gleichung

$$\sum_m \varphi_m^*(W) \varphi_m(W') = \delta(W - W'), \tag{28}$$

worin $\delta(W - W')$ ein singulärer Ausdruck ist, der gewissermaßen die kontinuierliche Verallgemeinerung von $\delta_{n,m}$ darstellt: $\delta(W - W')$ soll für $W' \neq W$ *verschwinden*, aber für $W' = W$ *unendlich* werden, derart, daß für eine beliebige (stetige) Funktion $f(W')$ von W' stets

$$\int_0^\infty f(W') \delta(W - W') dW' = f(W) \tag{29}$$

ist¹.

Da nun mit dieser DIRACschen Symbolik die in (27) gemeinte *Einheitsmatrix* \mathbf{I} (die kontinuierliche Indizes W, W' hat) durch

$$\mathbf{I} = (\delta(W - W')) \tag{30}$$

darzustellen ist, so ist (27) tatsächlich gleichbedeutend mit der *Vollständigkeitsrelation* (28).

Wir wenden uns nunmehr noch einmal zu der aus (10) gewonnenen statistischen Deutung. Es werde ein System mit der Energiefunktion $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ betrachtet, und $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0, \mathbf{q} = \mathbf{q}_0$ sei bereits die Lösung

¹ In der Bezeichnungswiese von § 3, 1 bedeutet ja die Vollständigkeit, daß für *jede* „vernünftige“ Funktion $f(x)$ die Beziehung

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty \varphi_n(x) \int_0^1 \varphi_n^*(x') f(x') dx'$$

gilt, was man *symbolisch* zu

$$f(x) = \int_0^1 f(x') \cdot \sum_{n=1}^\infty \varphi_n^*(x') \varphi_n(x) \cdot dx' = \int_0^1 f(x') \delta(x' - x) dx'$$

umschreiben kann.

dieses Problems; also $\mathbf{H}_0(\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0)$ sei Diagonalmatrix, und zwar mit *diskreten* Eigenwerten $W_0(n)$. Jetzt soll aber eine *Messung der Ortskoordinate* \mathbf{q} ausgeführt werden: Wir brauchen also eine unitäre Matrix

$$\mathbf{U} = (U(q, n)) = \bar{\varphi}_n(q) \quad (31)$$

mit der Eigenschaft

$$\mathbf{U} \mathbf{q}_0 \mathbf{U}^{-1} = \text{Diagonalmatrix} = (q \delta(q - q')); \quad (32)$$

wofür wir auch umgekehrt schreiben können:

$$\mathbf{U}^{-1}(q \delta(q - q')) \mathbf{U} = \mathbf{q}_0, \quad (33)$$

oder ausführlicher

$$\iint \varphi_n^*(q) \cdot q \delta(q - q') \cdot \varphi_m(q') dq dq' = q_0(n, m),$$

oder gemäß (29):

$$\int \varphi_n^*(q) \cdot q \cdot \varphi_m(q) dq = q_0(n, m). \quad (34)$$

Das ist aber nichts anderes, als die uns aus (14), § 3, 2 und (33), § 3, 3 wohlbekannte Formel, *welche die HEISENBERGSchen Matrixelemente aus den SCHRÖDINGERSchen Eigenfunktionen herleitet*: wir gewinnen also jetzt ein neues Verständnis für den tieferen Sinn der im Äquivalenzbeweis von Matrizen- und Wellenmechanik entwickelten Zusammenhänge, die sich nunmehr als ein spezieller Fall der Transformation (18) erweisen.

Gleichzeitig wird aber auch unsere frühere *statistische Deutung der SCHRÖDINGERSchen Eigenfunktionen* als ein Spezialfall des Grundgesetzes der „statistischen Transformationstheorie“ erwiesen: Aus der Matrix \mathbf{U} in (31), (32) gewinnen wir — unseren allgemeinen Formulierungen gemäß — in der Form

$$w(q, n) dq = |U(q, n)|^2 dq \quad (35)$$

die *Wahrscheinlichkeit* dafür, daß eine an dem im n -ten (einfachen) Quantenzustand befindlichen System ausgeführte Messung der Ortskoordinate \mathbf{q} einen in das Intervall $q, q + dq$ fallenden Wert ergibt. Wir haben aber soeben gesehen, daß $U(q, n)$ gar nichts anderes ist, als die *SCHRÖDINGERSche Eigenfunktion* $\varphi_n(q)$; so daß (35) übereinstimmt mit dem Ergebnis von § 3, 2. *Umgekehrt* gibt $w(q, n)$ auch wieder die Wahrscheinlichkeit dafür, daß *nach* einer Ortsmessung, die zum Resultat q führte, bei nachfolgender Energiemessung das System gerade in seinen n -ten Quantenzustand kommt.

In diesem Zusammenhange liegt übrigens die Frage nahe, was folgende Matrix bedeute:

$$\mathbf{N}_V = (N_V(n, m)) = \int_V \varphi_n^*(\bar{q}) \varphi_m(\bar{q}) d\bar{q}. \quad (36)$$

Hierin soll V irgendein Teilstück des Wertebereiches von q sein; ist V insbesondere mit dem *gesamten* Wertebereich von q identisch, so wird \mathbf{N}_V offenbar die *Einheitsmatrix* \mathbf{I} .

Nun geht N_V durch *dieselbe* Transformation U in eine Diagonalmatrix über, durch welche auch q zur Diagonalmatrix wird: Es wird

$$U N_V U^{-1} = (g_V(q) \cdot \delta(q - q')) \tag{37}$$

mit

$$U(q, n) = \varphi_n(q); \tag{38}$$

denn

$$\begin{aligned} \sum_{n,m} \varphi_n(q) N_V(n, m) \varphi_m^*(q') &= \int \sum_{n,m} \varphi_n(q) \varphi_n^*(\bar{q}) \cdot \varphi_m(\bar{q}) \varphi_m^*(q') d\bar{q} \\ &= \int \delta(q - \bar{q}) \cdot \delta(\bar{q} - q') \cdot d\bar{q}. \end{aligned}$$

Das letzte Integral wird aber:

$$\int \delta(q - \bar{q}) \cdot \delta(\bar{q} - q') \cdot d\bar{q} = \begin{cases} \delta(q - q'), & \text{falls } q \text{ in } V \text{ liegt,} \\ 0, & \text{falls } q \text{ außerhalb } V \text{ liegt.} \end{cases}$$

Folglich ist das $g_V(q)$ in (37) gleich 1 oder gleich 0, je nachdem, ob q innerhalb oder außerhalb von V liegt. Wir kommen also zu dem Ergebnis: *Die Matrix N_V kann physikalisch charakterisiert werden als „Anzahl der in V vorhandenen Massenpunkte“; ihre Eigenwerte sind dementsprechend 0 und 1.*

Die Zeitmittelwerte von N_V , also die Diagonalelemente $N_V(n, n)$ geben uns natürlich wiederum die *Ortswahrscheinlichkeitsdichten* $|\varphi_n(q)|^2$, integriert über V .

3. Anwendung auf das Spinelektron. Wir betrachten ein translatorisch ruhendes Ag-Atom, das sich im *Grundzustand* befindet. Dieses Atom hat ein von Null verschiedenes Drehmoment, welches identisch ist mit dem *Spinmoment* des Valenzelektrons: es ist $j = s = \frac{1}{2}$, und wenn Richtungsquantelung parallel zur z -Achse besteht, können wir nach (30), § 2, 2 die durch $\hbar/2\pi$ dividierten Komponenten des Drehimpulses \mathfrak{S} so ansetzen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; & \sigma_y &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \\ \sigma_z &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Diagonalmatrix.} \end{aligned} \right\} \tag{39}$$

Diese Matrizen genügen übrigens nicht nur den allgemeinen *Vertauschungsregeln* der Drehimpulskomponenten (6), (28), § 2, 2, sondern es gelten die noch weitergehenden Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \sigma_y &= -\sigma_y \sigma_x = \frac{i}{2} \sigma_z, \\ \sigma_y \sigma_z &= -\sigma_z \sigma_y = \frac{i}{2} \sigma_x, \\ \sigma_z \sigma_x &= -\sigma_x \sigma_z = \frac{i}{2} \sigma_y; \\ \sigma_x^2 &= \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \frac{1}{4} \mathbf{1}; & \mathbf{1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \tag{40}$$

Die letzte Zeile drückt offenbar aus, daß $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ nur die zwei Eigenwerte $\pm \frac{1}{2}$ haben. Alle Gleichungen (40) zusammen aber besagen folgendes: Die allgemeinste Matrixgröße, die bei unserem jetzt betrachteten Gebilde überhaupt vorkommt, ist von der Form

$$\mathbf{a} = a_x \mathfrak{g}_x + a_y \mathfrak{g}_y + a_z \mathfrak{g}_z + a_0 \mathbf{I}; \quad (41)$$

denn nicht nur die Summe, sondern auch das Produkt zweier solcher Größen (41) ist nach (40) stets wieder in der Form (41) auszudrücken. Eine Messung der Größe (41) bedeutet aber offenbar, daß die Komponente des Drehimpulses, \mathfrak{g} in der Richtung des Vektors $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ gemessen werden soll: die Rechenregeln der Matrizen \mathfrak{g} entsprechen also in vollkommenster Weise dem anschaulichen Tatbestand, daß an unserem Ag-Atom, solange wir es in seinem Grundzustand und im translatorischen Ruhezustand belassen, überhaupt kein anderes Messungsexperiment ausgeführt werden kann, als eine Richtungsquantelung in irgendeiner beliebigen Richtung \mathbf{a}^1 .

Durch eine gewisse Drehung gehe aus dem Koordinatensystem x, y, z das neue Koordinatensystem ξ, η, ζ hervor. Wir wollen nun eine unitäre Matrix \mathbf{U} angeben, welche \mathfrak{g}_z zur Diagonalmatrix macht, und welche sogar noch etwas mehr tut, nämlich

$$\mathbf{U} \mathfrak{g}_z \mathbf{U}^{-1} = \mathfrak{g}_x; \quad \mathbf{U} \mathfrak{g}_\eta \mathbf{U}^{-1} = \mathfrak{g}_y; \quad \mathbf{U} \mathfrak{g}_z \mathbf{U}^{-1} = \mathfrak{g}_z. \quad (42)$$

Eine solche Matrix gibt es. Sie sieht folgendermaßen aus:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Theta}{2} e^{i \frac{\Phi + \Psi}{2}}, & i \sin \frac{\Theta}{2} e^{i \frac{-\Phi + \Psi}{2}} \\ i \sin \frac{\Theta}{2} e^{i \frac{\Phi - \Psi}{2}}, & \cos \frac{\Theta}{2} e^{i \frac{-\Phi - \Psi}{2}} \end{pmatrix}; \quad (43)$$

dabei sind Θ, Φ, Ψ die sog. EULERSchen Winkel, welche nach bekannten (recht komplizierten) Formeln die Drehung $x, y, z \rightarrow \xi, \eta, \zeta$ kennzeichnen. Für uns ist hier nur das eine wichtig, daß insbesondere θ der Winkel zwischen z und ζ ist.

Denn wenn wir jetzt die Frage stellen, wie groß die Wahrscheinlichkeit sei, daß das zunächst parallel z richtungsgequantelte Ag-Atom bei plötzlicher Drehung des Feldes in die ζ -Richtung sich parallel (und nicht antiparallel) zu ζ einstellt, dann haben wir nach den obigen allgemeinen Ergebnissen aus der Matrix (43):

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$$

das Matrixelement U_{22} zu nehmen, und seinen Absolutwert zu quadrieren: Nach (43) ergibt das den Wert $\cos^2 \frac{\Theta}{2}$, womit für dieses Beispiel aus dem Schema der statistischen Transformationstheorie heraus das Ergebnis

¹ Man darf sich also die „Rotation“ des Spinelektrons nicht zu klassisch-anschaulich vorstellen; einen entsprechenden Drehwinkel z. B. gibt es nicht.

bestätigt ist, das wir schon früher korrespondenzmäßig erschlossen hatten (vgl. Kapitel 2, § 4, 3).

Wir haben endlich noch die Frage zu klären, wie die SCHRÖDINGER-Gleichung zu verallgemeinern ist zwecks Mitberücksichtigung des Spins. Die Beantwortung dieser Frage wird dadurch vorgezeichnet, daß unsere Bemerkungen in § 3, 2 und in Kapitel 2, § 4, 4 bereits die Mitberücksichtigung des Spins innerhalb der quantenmechanischen *Matrizenmethode* im Prinzip festgelegt haben; die jetzt gesuchte Verallgemeinerung der SCHRÖDINGER-Gleichung muß derartig sein, daß sie der matrixmechanischen Formulierung wiederum *äquivalent* ist. Nach DARWIN-PAULI kommen wir folgendermaßen zum Ziel.

Die drei Matrizen \mathfrak{S} des Spinnomentes eines Elektrons sind im Sinne unserer früheren Bemerkungen als *vertauschbar* mit den Ortskoordinaten x, y, z und den Impulsen p_x, p_y, p_z anzusehen. Es ist also denkbar, daß *zugleich* gemessen werden a) der Ort $\mathbf{r} = (x, y, z)$ und b) die zur z -Richtung parallele Komponente \mathfrak{S}_z von \mathfrak{S} . Die SCHRÖDINGERSchen Eigenfunktionen in diesem Problem werden also nicht mehr Funktionen $\varphi(\mathbf{r})$ von \mathbf{r} allein sein, sondern Funktionen $\varphi(\mathbf{r}; s)$, wo $s = \pm 1$ nur die beiden Werte ± 1 annehmen kann: Durch $|\varphi(\mathbf{r}; \pm 1)|^2 dx dy dz$ ist dann die Wahrscheinlichkeit *dafür* gegeben, daß bei einer Messung von \mathbf{r} und \mathfrak{S}_z *zugleich* ein Ort in dem bei \mathbf{r} befindlichen Volumstück $dx dy dz$ und eine zu z *parallele* bzw. *antiparallele* Richtungseinstellung gefunden wird.

Natürlich können wir statt dessen auch etwa die Bezeichnungsweise

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}; 1) &= \varphi^{(1)}(\mathbf{r}), \\ \varphi(\mathbf{r}; -1) &= \varphi^{(2)}(\mathbf{r}) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

anwenden, und demgemäß von einer *zweikomponentigen* SCHRÖDINGER-Funktion sprechen.

Haben wir nun eine Energiefunktion

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y, z; p_x, p_y, p_z; \mathfrak{S}_x, \mathfrak{S}_y, \mathfrak{S}_z), \quad (45)$$

so werden wir die zugehörige SCHRÖDINGER-Gleichung so schreiben:

$$\mathbf{H}\left(X, Y, Z; \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}; \mathfrak{S}_x, \mathfrak{S}_y, \mathfrak{S}_z\right) \varphi = W \varphi; \quad (46)$$

dabei sind als $\mathfrak{S}_x, \mathfrak{S}_y, \mathfrak{S}_z$ drei *Operatoren*, welche auf Funktionen der (nur zweier Werte fähigen) Variablen s wirken: mit anderen Worten, diese $\mathfrak{S}_x, \mathfrak{S}_y, \mathfrak{S}_z$ sind selber *Matrizen* mit zwei Zeilen und Spalten.

Nehmen wir zur Erläuterung den einfachsten Fall, nämlich das oben betrachtete translatorisch ruhende Ag-Atom im Grundzustand in einem homogenen Magnetfeld \mathfrak{H} . Dann ist

$$\mathbf{H} = \frac{\hbar}{2\pi} \frac{e}{\mu c} \mathfrak{H} \mathfrak{S}; \quad (47)$$

die SCHRÖDINGER-Gleichung lautet also:

$$\frac{e \hbar}{2\pi \mu c} (\mathfrak{H}_x \mathfrak{S}_x + \mathfrak{H}_y \mathfrak{S}_y + \mathfrak{H}_z \mathfrak{S}_z) \varphi = W \cdot \mathbf{I} \cdot \varphi; \quad (48)$$

und $\mathfrak{H}_x \varphi$ bedeutet beispielsweise, daß $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}$ zu ersetzen sind durch $\frac{1}{2} \varphi^{(2)}$; $\frac{1}{2} \varphi^{(1)}$. Also (48) lautet ausführlicher:

$$\left. \begin{aligned} \frac{e h}{4 \pi \mu c} \left\{ (\mathfrak{H}_x + i \mathfrak{H}_y) \varphi^{(2)} - \mathfrak{H}_z \varphi^{(1)} \right\} &= W \varphi^{(1)}, \\ \frac{e h}{4 \pi \mu c} \left\{ (\mathfrak{H}_x - i \mathfrak{H}_y) \varphi^{(1)} + \mathfrak{H}_z \varphi^{(2)} \right\} &= W \varphi^{(2)}. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Schreiben wir diese zwei homogenen linearen Gleichungen übersichtlicher:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4 \pi \mu c}{e h} W + \mathfrak{H}_z \right) \varphi^{(1)} - (\mathfrak{H}_x + i \mathfrak{H}_y) \varphi^{(2)} &= 0, \\ (\mathfrak{H}_x - i \mathfrak{H}_y) \varphi^{(1)} - \left(\frac{4 \pi \mu c}{e h} W - \mathfrak{H}_z \right) \varphi^{(2)} &= 0, \end{aligned}$$

so sehen wir, daß W folgende *Determinantengleichung* erfüllen muß, damit nicht $\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} = 0$ wird:

$$\begin{vmatrix} \frac{4 \pi \mu c}{e h} W + \mathfrak{H}_z & -\mathfrak{H}_x - i \mathfrak{H}_y \\ \mathfrak{H}_x - i \mathfrak{H}_y & -\frac{4 \pi \mu c}{e h} W + \mathfrak{H}_z \end{vmatrix} = 0, \quad (50)$$

oder

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_z^2 - \left(\frac{4 \pi \mu c}{e h} W \right)^2 + \mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2 &= 0, \\ W &= \pm \frac{e h}{4 \pi \mu c} \sqrt{\mathfrak{H}_x^2 + \mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2}; \end{aligned} \quad (51)$$

d. h. für die Energie W gibt es in diesem Falle die *zwei Eigenwerte*

$$W = \pm \frac{e h}{4 \pi \mu c} |\mathfrak{H}|, \quad (52)$$

in Übereinstimmung mit unseren früheren Ergebnissen.

Die Matrix U in (43) bestimmt auch die *Transformation*, welche $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}$ erfahren bei einer *Drehung des Koordinatensystems* x, y, z ; die $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}$ verhalten sich dabei weder als Skalare noch als gewöhnliche Vektoren, sondern folgen einem besonderen eben durch U gegebenen Transformationsgesetz: Man spricht passenderweise von einem „*Spinor*“ $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}$.

Viertes Kapitel.

Mehrkörpertheorie und Elementarteilchen.

Seit den Ergebnissen des dritten Kapitels besitzen wir die Hilfsmittel zu einer exakten Erfassung der Atomprobleme. Wir sind nicht mehr, wie im zweiten Kapitel, in jedem einzelnen Probleme angewiesen auf unser *Glück* im richtigen Erraten der exakten Gesetzmäßigkeiten, auf welche uns die korrespondenzmäßige Umdeutung klassischer Rechenresultate hinweist. Sondern wir besitzen eine feste, folgerichtige Methodik

quantenmechanischer Rechnungen, die in ganz eindeutiger und zweifelsfreier Weise die verschiedensten Probleme zu erledigen gestattet — durch einen Formalismus, der *ganz allgemein* einerseits die korrespondenzmäßige Analogie zur klassischen Theorie bewahrt und andererseits den spezifischen Quantengesetzen in widerspruchsfreier Weise Rechnung trägt. Dennoch ist unsere Aufgabe auch im grundsätzlichen Teil noch nicht erledigt.

Wir wollen ein ganz klar begrenztes *Teilproblem* der Atomtheorie herausgreifen, um uns klar zu machen, wie weit wir gekommen sind, und was uns noch fehlt. Wir stellen die Aufgabe, für alle Atome vom Wasserstoff bis Uran *die Spektren theoretisch zu berechnen*. D. h., es sollen für alle diese Atome (auch für die zugehörigen Ionen) die *Energiestufen* theoretisch ermittelt werden, und ebenso sämtliche *Übergangswahrscheinlichkeiten*.

Es würde nur eine *quantitative* Erweiterung dieses Programms bedeuten, wenn wir auch noch fordern würden, daß für alle denkbaren *Elektronenstoßexperimente* ebenfalls die Übergangswahrscheinlichkeiten berechnet werden sollten, während wir in der obigen Formulierung unseres Programms nur an die unmittelbar durch die Matricelemente gegebenen Übergangswahrscheinlichkeiten für *Licht* (vor allem *Dipolstrahlung*) dachten. Ebenso wäre es nur eine quantitative Erweiterung, wenn wir zu den Atomen die aus ihnen zusammengesetzten *Moleküle* hinzunehmen — also auch die gesamte *Chemie* mit einschließen wollten. Aber etwas ganz *anderes* wäre es, wenn wir die Fragen der *natürlichen Linienbreite* in dieses Programm aufnehmen würden — wir tun es also ausdrücklich *nicht*. Denn obwohl wir durch einfache Korrespondenzbetrachtungen bereits eine recht befriedigende Klärung diesbezüglicher Fragen erreichen konnten (vgl. Kapitel 2), so haben wir doch noch keinen Weg kennen gelernt, welcher uns eine Inangriffnahme solcher Fragen auf Grund der im Kapitel 3 entwickelten exakten quantenmechanischen Methoden erlaubt.

Wie weit sind wir nun, und was kann uns jetzt noch hindern an einer vollständigen Erledigung des erläuterten Teilproblems der Atomtheorie? Die Hindernisse seien der Reihe nach besprochen.

1. Natürlich ist der quantitative *Umfang* des Problems, und die *mathematische Kompliziertheit* der zahllosen darin enthaltenen Einzelprobleme, ein schlechterdings unübersteigbares Hindernis. Genau so, wie in der Astronomie das berühmte und berüchtigte *Dreikörperproblem* seiner mathematischen Kompliziertheit wegen weitgehend unzugänglich ist — man muß sich damit begnügen, gewisse Teilkapitel dieses schwierigen Problems zu klären, welche für den Astronomen praktisch wichtig sind, und auch hierzu war eine mehrere Generationen beschäftigende Arbeit nötig —, genau so muß auch von vornherein darauf verzichtet werden, unser obiges Problem in seinem vollen Umfang angreifen zu wollen. Es werden immer nur herausgelöste Einzelstücke

dieses Problems zu bewältigen sein, und fast jedes erfordert eine kunstvolle und wohlüberlegte Anwendung mathematischer Approximationen.

Aber das sind schließlich rein mathematische Schwierigkeiten, die uns nicht hindern könnten, festzustellen, daß wir die *physikalischen Gesetze*, die unserem Problem zugrunde liegen, *völlig verstanden haben* — wenn nicht tatsächlich auch hierzu noch Einschränkungen zu machen wären. Nämlich:

2. Wir können die *Feinstruktur* des Wasserstoffspektrums mit der experimentell erreichbaren Genauigkeit theoretisch beschreiben auf Grund der PAULI-DARWINSchen Fassung der Idee des Spin-Elektrons. Aber die analoge Struktur in den *Röntgenspektren* schwererer Atome — die durch die berühmte SOMMERFELDSche *Feinstrukturformel* beschrieben wird — erfordert zu ihrer Herleitung eine tiefere Kenntnis der relativistischen, bei hohen Geschwindigkeiten geltenden Elektronenmechanik. Dies führt uns auf die DIRACsche *Relativitätsmechanik des Elektrons* — ein Kapitel der Quantentheorie, das uns wunderbare neue Einsichten erschlossen, uns aber auch in neue, bislang noch unbewältigte grundsätzliche Schwierigkeiten geführt hat.

3. Einer vollkommenen Erfassung der Feinstruktur z. B. des Heliumspektrums steht aber weiterhin noch eine viel ernstere und tiefer liegende Schwierigkeit entgegen. Wir dürfen nämlich in diesem Fall nicht mehr erwarten, daß das COULOMBSche Gesetz als Ausdruck der Wechselwirkung der beiden Elektronen ausreichend ist. Vielmehr müssen wir aus korrespondenzmäßigen Gründen überzeugt sein, daß hier mit einer *retardierten* Wechselwirkung (analog zur klassischen Elektronentheorie — wir kommen auf diesen Punkt noch zurück) zu rechnen wäre, für deren Formulierung uns im Augenblick noch jeder Ansatz fehlt: wir haben es hier offenbar mit Dingen zu tun, die auch mit den Problemen der natürlichen Linienbreiten zusammenhängen.

4. Selbstverständlich ist unsere Aufgabe ferner dort nicht ohne Hinzunahme neuer Erfahrungsdaten zu lösen, wo Effekte der *Kernphysik* hereinspielen, also vor allem bei der *Hyperfeinstruktur*. Für deren theoretische Ermittlung brauchen wir jedenfalls eine Kenntnis der *außer* der COULOMBSchen noch vorhandenen schwächeren Wechselwirkungsenergien zwischen dem Atomkern und den Elektronen in der Elektronenhülle, welche für diese Hyperfeinstruktur maßgebend ist; und solange wir nicht eine vollständig deduktive Theorie der Kerne besitzen, vermögen wir für jeden einzelnen Kern diese Wechselwirkungsenergie nur empirisch zu ermitteln.

5. Endlich ist für alle Atome mit Ausnahme des Wasserstoffatoms eine Tatsache von höchster Bedeutung, die wir kurz als die *Unmöglichkeit einer individuellen Unterscheidung verschiedener Elektronen* kennzeichnen können. Diese Tatsache, deren genauen Sinn wir noch erläutern werden, kann zwar ohne weiteres mit den Mitteln der im dritten Kapitel entwickelten Quantenmechanik formuliert werden, führt dann aber *zunächst*

zu *mehrdeutigen* Ergebnissen bezüglich der Struktur der Atome mit mehr als einem Elektron. Ein neues Prinzip, das *PAULISCHE Äquivalenzverbot*, ist nötig, um aus mehreren mathematisch gleichberechtigten Problemlösungen die einzige zutreffende auszuwählen.

Von allen hier besprochenen Schwierigkeiten für unser oben formuliertes Programm ist dieser Punkt 5 der einzige, dessen *vollständige Erledigung heute schon gelungen* ist. Wir müssen ja 1. als eine ihrem Wesen nach überhaupt niemals zu beseitigende Schwierigkeit ansehen (so daß es vielleicht besser gewesen wäre, wenn wir unser Programm sogleich in Rücksicht hierauf entsprechend vorsichtiger formuliert hätten). Aber in 2. bis 4. liegt ein Hereinspielen *bislang noch ungelöster physikalischer Probleme* vor. Mit Punkt 5 dagegen steht es anders: Nach der physikalischen und nach der mathematischen Seite hin sind die hier sich ergebenden Fragen heute vollständig erledigt, soweit sie für unser obiges Programm in Betracht kommen — so daß wir also behaupten dürfen, daß *abgesehen* von einigen feineren Effekten (und abgesehen von den rein mathematischen Komplikationen) dieses Programm durchaus zu erledigen ist.

Da wir in diesem Kapitel 4 eine Reihe tiefer führender Fragen behandeln wollen, deren abschließende Lösung noch nicht erreicht ist, so hätten wir das *PAULISCHE Äquivalenzverbot* und seine Bedeutung für Atomstruktur und Chemie — als eine vollkommen geklärte Angelegenheit — noch dem Kapitel 3 einfügen können. Aber andererseits steht gerade das *Äquivalenzverbot* (und was damit zusammenhängt) in engster Beziehung zu den Dingen, die uns in diesem Kapitel beschäftigen sollen.

§ 1. Das Mehrkörperproblem äquivalenter Teilchen.

1. **Das Zweikörperproblem.** Wir haben uns die Elektronen vorzustellen als Gebilde, die untereinander *völlig gleich* sind; es wird also, wenn wir ein beobachtetes Elektron hernach wieder vollkommen aus den Augen verloren haben, nicht möglich sein, von einem später gefundenen Elektron zu sagen, ob es „*dasselbe*“ Elektron wie vorhin, oder ein „*anderes*“ sei. Das ist nun zwar nach klassischen atomistischen Vorstellungen auch der Fall; aber während wir klassisch jedenfalls *grundsätzlich* durch die beobachtende Verfolgung eines Elektrons längs seiner Bahn seiner Identität zweifelsfrei gewiß bleiben können, kommt quantentheoretisch nun hinzu, daß aus *Komplementaritäts*-Gründen (Ungenauigkeitsregeln!) eine solche Verfolgung eines bestimmten Elektrons gar nicht möglich ist: Werden zwei Elektronen zu einer hinreichend engen Übereinstimmung von Ort und Impuls gebracht, so hört die Möglichkeit einer individuellen Unterscheidung dieser Elektronen grundsätzlich auf.

Wir wollen diese Verhältnisse jetzt vermitteltst unseres quantenmechanischen Matrizenformalismus näher analysieren. Dabei denken

wir vorläufig an ein Problem, in welchem *nur zwei* Elektronen vorkommen — also etwa an das He-Atom. Die festgestellte Unmöglichkeit einer individuellen Unterscheidung der beiden Elektronen macht es uns unmöglich, z. B. die x -Koordinate des „ersten“ Elektrons als eine sinnvoll definierbare physikalische Größe anzusehen. Ebensovienig können wir z. B. vom Impulsbetrag $|\mathfrak{p}_2|$ des „zweiten“ Elektrons sprechen. Wohl aber erhalten wir eine physikalisch sinnvolle Größe, wenn wir z. B. die *Summe* oder auch das *Produkt* der x -Koordinaten *beider* Elektronen bilden: $x_1 + x_2$ oder $x_1 x_2$ und ebenso $|\mathfrak{p}_1| + |\mathfrak{p}_2|$ oder auch $\mathfrak{p}_1^2 + \mathfrak{p}_2^2$ sind sinnvolle Größen unseres Problems. Ganz allgemein sind offenbar als am He-Atom beobachtbare Größen solche und nur solche anzuerkennen, welche *symmetrisch* aufgebaut sind aus den Koordinaten und Impulsen des „ersten“ und des „zweiten“ Elektrons: also Funktionen $F(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{p}_1; \mathfrak{r}_2, \mathfrak{p}_2)$, für welche

$$F(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{p}_1; \mathfrak{r}_2, \mathfrak{p}_2) = F(\mathfrak{r}_2, \mathfrak{p}_2; \mathfrak{r}_1, \mathfrak{p}_1) \quad (1)$$

ist. Die *Energiefunktion* $H(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{p}_1; \mathfrak{r}_2, \mathfrak{p}_2)$ kann nur von dieser symmetrischen Gestalt sein, und wenn eine äußere Störung auf das Atom wirkt, so muß auch diese — das ist ja der Sinn unserer Behauptung, alle Elektronen seien völlig *gleiche* Gebilde — stets eine in den beiden Elektronen symmetrische Zusatzenergie ergeben. Auch jedes auf das He-Atom angewandte *Meßinstrument* kann dementsprechend immer nur eine in den beiden Elektronen *symmetrische* Größe der Gestalt (1) messen. Man kann aus zwei symmetrischen Größen (1) die *Summe* oder das *Produkt* bilden — es kommt immer wieder eine in den beiden Elektronen symmetrische Größe zustande. Natürlich legen wir bei diesem Rechnen mit den Größen (1) die alten kanonischen Vertauschungsregeln für die *einzelnen* $\mathfrak{r}, \mathfrak{p}$ zugrunde; dadurch sind dann alle Vertauschungsbeziehungen für die symmetrischen Größen (1) eindeutig festgelegt. Das Problem, vor dem wir nun stehen, ist aber gar nicht mehr die Konstruktion von Matrizen $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{p}_1; \mathfrak{r}_2, \mathfrak{p}_2$, welche in die Energiefunktion eingesetzt diese zur Diagonalmatrix machen; sondern wir haben uns eben *ausschließlich* für die symmetrischen Größen (1) zu interessieren. [Wenn wir die uns gestellte Aufgabe mathematisch ganz sauber formulieren wollen, haben wir etwa zu sagen: Wir versuchen, ein System von Matrizen (1) zu konstruieren derart, daß a) zwischen diesen Matrizen alle diejenigen Rechenbeziehungen bestehen, welche auch dann bestehen würden, wenn wir wirklich die *einzelnen*, in den beiden Elektronen *nicht* symmetrischen Matrizen $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{p}_1; \mathfrak{r}_2, \mathfrak{p}_2$ konstruiert hätten derart, daß sie den kanonischen Vertauschungsregeln genügen, und daß b) die spezielle unter den Matrizen (1) enthaltene Matrix H eine Diagonalmatrix wird.]

Wenn wir nun das so formulierte mathematische Problem untersuchen, dann zeigt sich, daß es *zwei ganz verschiedene irreduzible Lösungen besitzt*. Das übersehen wir am besten, wenn wir jetzt die zugehörigen SCHRÖDINGERSchen Eigenfunktionen heranziehen.

Zunächst wollen wir die COULOMBSche Wechselwirkung zwischen den beiden Elektronen ganz vernachlässigen und die Eigenfunktionen betrachten, die sich ergeben, wenn wir einfach zwei Elektronen, die sich beide in demselben Kernfeld bewegen, zu einem Gesamtsystem zusammenfassen, ohne daß vorläufig auch eine energetische Wechselwirkung zwischen ihnen bestehen soll. Das ist ja praktisch auch ein vernünftiges Verfahren zur Berechnung der Energiestufen des He-Atoms; wir werden die COULOMBSche Wechselwirkung der beiden Elektronen untereinander dann hernach durch eine *Störungsrechnung* zu erfassen suchen. Wir wollen vorläufig den *Spin* der beiden Elektronen ganz unberücksichtigt lassen.

Ganz nach dem Vorbild von Kapitel 3, § 3, 4 überlegen wir folgendermaßen. Ein *einzelnes* Elektron habe im Felde des He-Kerns die Eigenfunktionen $\varphi_n(\mathbf{r})$ mit zugehörigen Energiewerten W_n . Wenn nun das aus beiden Elektronen ohne Wechselwirkung zusammengesetzte System *nichtentartet* wäre, so hätten wir seine Eigenfunktionen als Produkte zu bilden: $\varphi_n(\mathbf{r}_1)\varphi_m(\mathbf{r}_2)$ wäre die Eigenfunktion zum Energiewert $W_n + W_m$. Aber tatsächlich ist ja, wenn $n \neq m$ ist, $W_n + W_m$ ein *zweifacher* Energiewert, zu welchem außer $\varphi_n(\mathbf{r}_1)\varphi_m(\mathbf{r}_2)$ auch die Eigenfunktion $\varphi_m(\mathbf{r}_1)\varphi_n(\mathbf{r}_2)$ gehört. (Wir wollen annehmen, daß *außer* der durch die Gleichheit der beiden Elektronen notwendig gemachten Entartung *keine sonstige* Entartung besteht — also z. B. keine Richtungsentartung. Eine solche wäre augenblicklich uninteressant, und sei durch ein richtungsquantelndes äußeres Feld beseitigt.)

Wir können in der uns bekannten Weise diese zwei Eigenfunktionen linear superponieren, und besonders wichtig sind uns die beiden folgenden Superpositionen:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{nm}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \varphi_n(\mathbf{r}_1)\varphi_m(\mathbf{r}_2) + \varphi_m(\mathbf{r}_1)\varphi_n(\mathbf{r}_2) \}; \\ \psi_{nm}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \varphi_n(\mathbf{r}_1)\varphi_m(\mathbf{r}_2) - \varphi_m(\mathbf{r}_1)\varphi_n(\mathbf{r}_2) \}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Sie haben offensichtlich die Eigenschaften

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{nm}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \varphi_{nm}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1), \\ \psi_{nm}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= -\psi_{nm}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1); \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

also $\varphi_{nm}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ ist eine *symmetrische* Funktion der Argumente $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, und $\psi_{nm}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ können wir als „*antisymmetrische*“ Funktion von $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ bezeichnen. Die Eigenfunktionen der *einfachen* Zustände mit $n = m$ sind offenbar ebenfalls *symmetrisch*:

$$\varphi_{nn}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \varphi_n(\mathbf{r}_1)\varphi_n(\mathbf{r}_2) = \varphi_{nn}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1). \quad (4)$$

Wir wissen ja (vgl. Kapitel 3, § 5, 1), daß wir bei der Untersuchung der *Störungen* an einem *entarteten* System aus der Mannigfaltigkeit der zu einem mehrfachen Eigenwert gehörigen ungestörten Eigenfunktionen diejenigen aussuchen müssen, die der fraglichen Störung *angepaßt* sind.

Im jetzigen Falle zeigt sich nun: Für die Berücksichtigung der Wechselwirkung der Elektronen sind gerade (2) die *angepaßten* Eigenfunktionen; und zwar ist diese Feststellung ganz unabhängig von der speziellen (COULOMBSchen) Gestalt der Wechselwirkung — es kommt allein darauf an, daß die Wechselwirkung *symmetrisch* von den beiden Elektronen abhängt.

Wird durch diese Wechselwirkung die Entartung *aufgehoben*, so *behalten* die neuen, gestörten Eigenfunktionen die Symmetrie- bzw. Antisymmetrieeigenschaft (3).

Wir behaupten nun: Ist $\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ irgendeine der symmetrischen und $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ irgendeine der antisymmetrischen Eigenfunktionen, so ist jede *Übergangswahrscheinlichkeit* zwischen den beiden zugehörigen Zuständen *gleich Null*. Es kann also durch Emission und Absorption von Licht (einerlei, ob Dipol- oder Quadrupol- usw. -Strahlung) niemals ein Übergang zwischen diesen beiden Zuständen stattfinden. Ja, auch ein Beschießen des He-Atoms etwa mit Protonen oder α -Teilchen kann niemals einen solchen Übergang zuwege bringen: *sehen wir zunächst ab* von der Möglichkeit, gerade *Elektronen*-Stöße gegen das He-Atom anzuwenden, so können wir sagen, daß ein He-Atom in einem Zustand mit symmetrischer Eigenfunktion $\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ und ein anderes He-Atom in einem Zustand mit antisymmetrischer Eigenfunktion $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ *zwei ganz verschiedene Gebilde* sind, die sich *niemals ineinander umwandeln lassen*.

Zum Beweise dieser umfassenden Behauptung genügt eine einfache Bemerkung: *Jede* der fraglichen Übergangswahrscheinlichkeiten ist darzustellen durch das Absolutquadrat eines zu dem fraglichen Zustands-paar gehörenden *Matrixelementes*, dessen *Verschwinden* wir zeigen wollen:

$$\int \int \varphi^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) F(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{P}_1; \mathfrak{R}_2, \mathfrak{P}_2) \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 = 0. \quad (5)$$

Dabei ist $F(\mathbf{r}_1, \mathfrak{p}_1; \mathbf{r}_2, \mathfrak{p}_2)$ eine der in beiden Elektronen symmetrischen Matrixfunktionen (1), und $F(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{P}_1; \mathfrak{R}_2, \mathfrak{P}_2)$ der entsprechende Operator¹. Dieser Operator läßt bei Anwendung auf $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ eine wiederum *antisymmetrische* Funktion $\omega(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = F \cdot \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ entstehen, so daß dann auch der *Integrand* von (5) *antisymmetrisch* ist: das Integral (5) muß also in der Tat *verschwinden*.

Die Behauptung, zu der wir hier gelangen, entspricht durchaus der Erfahrung: Es gibt ja tatsächlich zwei verschiedene Arten He-Atome, nämlich *Parhelium* und *Orthohelium*, und eine Umwandlung des einen Heliums in das andere findet nur unter besonderen Verhältnissen mit merklicher Wahrscheinlichkeit statt. Es liegt nämlich so: Infolge der schwachen, in unseren bisherigen Überlegungen ganz vernachlässigten *Spinwirkungen* gibt es tatsächlich *doch* von einem Par-He-Zustand zu

¹ Also Vektor $\mathfrak{R}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$; Operator X_1 ist Multiplikation mit x_1 ; Vektor $\mathfrak{P}_1 = (P_{1x}, P_{1y}, P_{1z})$; Operator $P_{1x} = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_1}$. Mit der $d\mathbf{r}_1$ ist natürlich $dx_1 dy_1 dz_1$ gemeint.

Ortho-He-Zuständen von Null verschiedene Übergangswahrscheinlichkeiten, die aber *sehr klein* sind. Mit *merklicher* Wahrscheinlichkeit kann man dagegen aus Par-He durch *Elektronenstöße* Ortho-He erzeugen. Für die Wirkung der Elektronenstöße ist es natürlich wesentlich, daß es sich hier um ein stoßendes Teilchen handelt, welches selber von den beiden Elektronen im He-Atom nicht individuell unterscheidbar ist: man kann bei einer Anregung des He-Atoms durch Elektronenstoß niemals in sinnvoller Weise unterscheiden, ob das wieder fortfliegende Elektron mit dem ursprünglichen Stoßelektron oder mit einem der ursprünglich zum Atom gehörenden Elektronen identisch ist. Darin liegt es begründet, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten bei Elektronenstoß *nicht* durch Matrixelemente (5) bestimmt werden, und nicht gleich Null sind. Für Protonenstöße oder Stöße von α -Teilchen dagegen gibt es hier keine solche Komplikation; sie vermögen daher auch keine Umwandlung von Par-He in Ortho-He zu erzielen. (Abgesehen wieder von ganz schwachen Effekten des Elektronenspins).

Für unser eingangs formuliertes Matrizenproblem bedeutet die Feststellung (5) offenbar den *Beweis* der schon oben ausgesprochenen Behauptung, daß das Problem *zwei verschiedene* irreduzible Lösungen besitzt: die von uns hier festgestellten beiden *nichtkombinierenden Termsysteme* Par-He und Ortho-He sind die zwei verschiedenen Lösungen des Problems.

Die beim He-Atom von uns gefundenen Verhältnisse finden sich in ähnlicher Weise wieder beim H_2 -Molekül. Auch hier gibt es zwei Elektronen, so daß sich im wesentlichen ganz dieselben Effekte wie beim He-Atom einstellen müssen. Außerdem aber haben wir auch (sofern beide H-Kerne dieselbe Masse haben, insbesondere wenn sie beide Protonen sind) *zwei individuell unterscheidbare Kerne*, wodurch eine abermalige Zerlegung in nichtkombinierende Termsysteme zustande kommt: insgesamt haben wir also beim H_2 -Molekül *vier* nichtkombinierende Termsysteme. Da die geringen auf Spinwirkungen beruhenden Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den hinsichtlich der Kerneigenfunktionen symmetrischen oder antisymmetrischen Zuständen noch viel kleiner sind, als zwischen den durch die Symmetrie und Antisymmetrie der Elektroneneigenfunktionen getrennten Termsystemen, so ergibt sich die Möglichkeit, die zwei verschiedenen Arten Wasserstoff, die entweder symmetrische (Para-Wasserstoff) oder antisymmetrische (Ortho-Wasserstoff) Kerneigenfunktionen haben, grob makroskopisch als verschiedene Modifikationen voneinander zu trennen.

Daß übrigens das Auftreten der nichtkombinierenden Termsysteme auch korrespondenzmäßig seinen guten Sinn hat, erkennt man am anschaulichsten aus folgendem vereinfachten Beispiel (Rotator). Zwei ununterscheidbar gleiche Massenpunkte mögen sich in einer fest vorgegebenen Kreisbahn bewegen derart, daß sie sich stets diametral gegenüber liegen. (Sie seien etwa durch einen Faden aneinander gebunden). Wenn wir die Nichtunterscheidbarkeit der beiden Massenpunkte

zunächst nicht beachten, kommen wir zu einer *Quantelung* derart, daß der Gesamtdrehimpuls p_φ des Systems nach der Regel

$$I = \oint p \, dq = \int_0^{2\pi} p_\varphi \, d\varphi = 2\pi p_\varphi = m h; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

ein ganzzahliges Vielfaches von $h/2\pi$ sein muß, eine Änderung Δp_φ von p_φ also ebenfalls ein ganzzahliges Vielfaches von $h/2\pi$ zu sein hat:

$$p_\varphi = m \frac{h}{2\pi}; \quad \Delta p_\varphi = n \frac{h}{2\pi}.$$

Dabei haben wir den Umstand benutzt, daß nach einer Drehung des Systems um den Winkel 2π der ursprüngliche Zustand wiederhergestellt und somit eine Bewegungsperiode abgeschlossen ist. Beachten wir aber jetzt die Ununterscheidbarkeit der beiden Teilchen, so müssen wir schon nach einer Drehung um π den ursprünglichen Zustand als ununterscheidbar wiederhergestellt anerkennen: also ist jetzt zu fordern, daß Änderungen von p_φ sogar ganzzahlige Vielfache von h/π sein müssen:

$$\Delta p_\varphi = n \frac{h}{\pi}; \quad n = 1, 2, \dots$$

Sonach kommen wir zu dem Ergebnis, daß die Terme mit *geradzahlig*er Rotationsquantenzahl $m = 2\pi p_\varphi/h$ und die Terme mit *ungeradzahligem* m je für sich ein abgeschlossenes Termsystem bilden: die *Ununterscheidbarkeit* der beiden Teilchen läßt das bei unterscheidbaren Teilchen bestehende Termsystem *in zwei nichtkombinierende Termsysteme zerfallen*.

Beim H_2 -Molekül (oder sonst einem zweiatomigen Molekül mit zwei nicht unterscheidbaren Kernen) liegen die Verhältnisse wegen der *drei-dimensionalen* Rotationsbewegung zwar etwas anders, als in dem eben besprochenen ebenen Beispiel. Doch ergibt jedenfalls die genauere quantenmechanische Analyse, daß die Terme mit *geradzahlig*en Werten der Quantenzahl der Molekülfotation zum *Parawasserstoff*, diejenigen mit *ungeradzahlig*er Rotationsquantenzahl zum *Orthowasserstoff* gehören.

Wieder zurückkehrend zum He-Atom wollen wir nicht versäumen, uns die physikalische Bedeutung der Eigenfunktionen $\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ oder $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ in bezug auf die *Statistik der Ortsmessungen* sorgfältig klar zu machen. Selbstverständlich dürfen wir *nicht* sagen, $\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ gebe die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wir „*das erste*“ Elektron am Orte \mathbf{r}_1 und das „*zweite*“ am Orte \mathbf{r}_2 finden — eine solche Aussage würde nur bei zwei *unterscheidbaren* Teilchen möglich sein. Wir müssen vielmehr sagen: Wenn zunächst das He-Atom sich in einem Zustand definierter Energie befindet, und wenn $\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ bzw. $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ die zu dem fraglichen Energiewert gehörige normierte Eigenfunktion ist, so gibt uns

$$|\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad \text{bzw.} \quad |\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (6)$$

die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß bei einer Ortsmessung der beiden Elektronen *eines von ihnen* (aber es ist sinnlos, zu fragen, *welches*) in dem bei \mathbf{r}_1 gelegenen Volumelement $d\mathbf{r}_1 = dx_1 dy_1 dz_1$ und *das andere* in dem bei \mathbf{r}_2 gelegenen Volumelement $d\mathbf{r}_2 = dx_2 dy_2 dz_2$ gefunden wird. Natürlich

ist es für die Möglichkeit dieser Interpretation von entscheidender Bedeutung, daß die *Absolutwerte* der Eigenfunktionen *immer* (auch bei den antisymmetrischen ψ) in den Argumenten r_1, r_2 *symmetrisch* sind:

$$\left. \begin{aligned} |\varphi(r_1, r_2)|^2 &= |\varphi(r_2, r_1)|^2, \\ |\psi(r_1, r_2)|^2 &= |\psi(r_2, r_1)|^2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Wir haben nun weiterhin zu prüfen, welche Rolle der *Spin* der beiden Elektronen des He-Atoms hinsichtlich der jetzigen Überlegungen spielt. Die entscheidende empirische Tatsache ist dabei die, daß beim Par-He — dessen Spektrum ein Singulett-Spektrum ist — die Spinmomente der beiden Elektronen stets *antiparallel* stehen (sich zu Null kompensieren); daß hingegen in allen Ortho-He-Zuständen die Spinmomente *parallel* stehen — wodurch das Ortho-He-Spektrum ein Triplett-Spektrum wird.

Wir schreiben, wie in Kapitel 3, § 5, 3 erläutert wurde, die Eigenfunktionen des einzelnen Elektrons als Funktionen des Ortes r und der (nur der Werte $+1$ und -1 fähigen) Spinkoordinate s . Dementsprechend haben wir für das Zweielektronenproblem mit Eigenfunktionen

$$\text{oder} \quad \left. \begin{aligned} \varphi(r_1, s_1; r_2, s_2) &= \varphi(r_2, s_2; r_1, s_1) \\ \psi(r_1, s_1; r_2, s_2) &= -\psi(r_2, s_2; r_1, s_1) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

zu rechnen: Alles, was wir oben in allgemeiner Weise überlegt haben betreffs des *Nichtkombinierens* des symmetrischen und des antisymmetrischen Termsystems, gilt ohne weiteres auch für diese jetzt betrachteten Eigenfunktionen (8). Für den Zusammenhang mit den obigen Überlegungen interessiert uns nun diejenige Approximation, bei welcher von den energetischen Wechselwirkungen der Spinmomente der Elektronen *ganz abgesehen* wird — unter welcher Voraussetzung nach dem Obigen eine Umwandlung von Par-He in Ortho-He nur mit Zuhilfenahme eines dritten Elektrons erreichbar ist. Diese Approximation erlaubt es in der Tat, die Gesetzmäßigkeiten des He-Spektrums weitgehend zu verstehen; nur gewisse Abweichungen der Ortho-He-Tripletts von der normalen Gestalt der Tripletts anderer Atome bedürfen zu ihrer Erklärung einer Mitberücksichtigung der mit den Spinmomenten zusammenhängen schwachen Energieanteile.

Eine einfache Betrachtung — wir kommen auf die Begründung zurück — läßt nun folgendes erkennen: *Die in der Natur vorkommenden He-Atome haben sämtlich antisymmetrische Eigenfunktionen* $\psi(r_1, s_1; r_2, s_2)$. Denn die bei Nichtberücksichtigung des Spins in den Örtern r_1, r_2 symmetrischen antisymmetrischen Eigenfunktionen ergeben bei Mitbetrachtung des Spins gerade für antiparallele parallele Spinmomente eine *antisymmetrische exakte* Eigenfunktion $\psi(r_1, s_1; r_2, s_2)$. Dagegen würden die insgesamt symmetrischen Eigenfunktionen $\varphi(r_1, s_1; r_2, s_2)$ zu den Energiewerten des Par-He Triplett-Terme und zu den Energiewerten des Ortho-He Singulett-Terme ergeben: *Das wäre mathematisch möglich*, in vollem Einklang mit allen

bisherigen Formulierungen unserer quantenmechanischen Theorie; *aber es kommt in der Natur nicht vor.*

Wir stehen hier vor einer *neuen* Tatsache, die *nicht* aus den im bisherigen entwickelten quantenmechanischen Prinzipien *folgt*, sondern eine besondere, ergänzende Hervorhebung verlangt: Wir werden bald sehen, wie die Feststellung, daß beim Zweielektronenproblem nur das Term-system mit den antisymmetrischen Eigenfunktionen ψ und nicht das mit den φ physikalisch realisiert ist, auf mehr als zwei Elektronen zu verallgemeinern ist. Natürlich kann auch erst die Betrachtung des *Drei-Elektronenproblems* die theoretische Begründung dafür liefern, daß (nicht nur durch Lichtprozesse oder Protonenstöße, sondern auch) durch Elektronenstoß *keine* Umwandlung aus Zuständen ψ in Zustände φ geschehen kann.

Bevor diese Gesetzmäßigkeiten des He-Spektrums durch HEISENBERG aufgeklärt wurden, glaubte man aus dem Unterschied der einander entsprechenden Terme beim Par-He einerseits und beim Ortho-He andererseits eine sehr erhebliche *Wechselwirkungsenergie der Spinnomente* zu erkennen: Zwei derartige einander entsprechende Zustände (also mit gleichen Hauptquantenzahlen und gleichen azimutalen Quantenzahlen) unterscheiden sich ja — so argumentierte man — nur dadurch, daß die Spinnomente entweder parallel oder antiparallel stehen; also ergibt die Spinrichtung einen erheblichen Energieanteil. Statt dessen sehen wir nun, daß die Energiedifferenz der einander entsprechenden Par- und Orthoheliumterme *primär gar nichts mit den Spinnomenten zu tun hat*: diese Energiedifferenz ist ja (bis auf Korrekturen von der Größenordnung der Ortho-He-Triplettaufspaltung) zu berechnen *ohne jede Berücksichtigung* der Spinnomente, allein aus den COULOMB-Kräften. Es ist ein charakteristisch quantenmechanischer, nicht durch klassische Analogien verständlich zu machender Effekt, daß die bei Fortfall der Elektronenwechselwirkung *zweifachen* Zustände durch die COULOMBSche Wechselwirkung der Elektronen in der besprochenen Weise *aufgespalten* werden; entscheidend ist dafür natürlich die Möglichkeit, gemäß (2) die beiden Eigenfunktionen $\varphi_n(\mathbf{r}_1)\varphi_m(\mathbf{r}_2)$ und $\varphi_m(\mathbf{r}_1)\varphi_n(\mathbf{r}_2)$ linear zu *superponieren*; die in der Möglichkeit derartiger Superpositionen zum Ausdruck kommende *Kohärenz* oder *Interferenzfähigkeit* verschiedener Zustände hatten wir ja schon in Kapitel 1, § 4, 2 als die Wurzel klassisch völlig unvorstellbarer Quanteneffekte erkannt.

Erst *nachträglich* stellt sich ein Zusammenhang der Energiedifferenzen entsprechender Par-He- und Ortho-He-Terme mit den Spinrichtungen her *dadurch*, daß die Natur von den beiden durch die nichtkombinierender Termsysteme $\psi(\mathbf{r}_1, s_1; \mathbf{r}_2, s_2)$ und $\varphi(\mathbf{r}_1, s_1; \mathbf{r}_2, s_2)$ gebotenen Möglichkeiten *nur die eine benutzt* und die approximativen Eigenfunktionen $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ nur bei *parallelen* Spinnomenten, die $\varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ dagegen nur bei *antiparallelen* vorkommen läßt: so ergibt sich eine *scheinbare Wechselwirkung der Spinnomente*.

2. Das Mehrkörperproblem. Das im Zweikörperproblem mit unterscheidbaren Teilchen bemerkte Auftreten zweier nichtkombinierender Termsysteme, oder — anders ausgedrückt — zweier verschiedener irreduzibler Lösungen dieses quantenmechanischen Problems, findet sich in gesteigertem Ausmaß wieder, wenn noch mehr als zwei ununterscheidbare Teilchen vorhanden sind. So gibt es bei drei Teilchen *drei*, bei vier Teilchen *fünf*, bei sechs Teilchen *elf* verschiedene mathematisch mögliche Problemlösungen.

Uns haben hier aber nur *zwei* dieser Lösungen zu beschäftigen, für welche wir zunächst wieder die bei Nichtvorhandensein einer Wechselwirkungsenergie geltenden Eigenfunktionen hinschreiben. Es seien $\varphi_n(\mathbf{r}, s)$ die Eigenfunktionen des Einkörperproblems, diesmal gleich *mit* Berücksichtigung des Spins. Anschaulich können wir uns etwa denken, daß wir es mit einem Uran-Atom zu tun haben: Die $\varphi_n(\mathbf{r}, s)$ sind also die Eigenfunktionen für ein hochionisiertes Uranion, bei welchem nur *ein einziges* Elektron im Felde des Kerns vorhanden ist. Was wir dann hinschreiben wollen, sind die Eigenfunktionen für ein Uran-Atom oder Uran-Ion mit irgendeiner Anzahl N von Elektronen, unter Vernachlässigung der Wechselwirkungsenergien dieser Elektronen. Aber wir wollen unsere Betrachtung durchaus nicht beschränken auf *Elektronen*: es könnte ebensogut ein System von N α -Teilchen betrachtet werden, oder von N Eisenatomkernen; natürlich ist dann die Spinkoordinate s so zu verstehen, wie es den gerade betrachteten Teilchen entspricht; also s ist 1, 2, 3, ... verschiedener Werte fähig, wenn das Spinmoment gleich $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ ist.

Wir vereinfachen uns die Schreibweise, indem wir für \mathbf{r}, s zusammenfassend kurz ζ schreiben; die Eigenfunktionen des Einkörperproblems heißen dann $\varphi_n(\zeta)$.

Die uns interessierenden Eigenfunktionen des N -Körperproblems ohne Wechselwirkung sehen nun so aus: *Entweder* haben wir die folgende *Determinante* zu bilden

$$\psi_{n_1 n_2 \dots n_N}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N) = \dots \begin{vmatrix} \varphi_{n_1}(\zeta_1) \varphi_{n_1}(\zeta_2) \dots \varphi_{n_1}(\zeta_N) \\ \varphi_{n_2}(\zeta_1) \varphi_{n_2}(\zeta_2) \dots \varphi_{n_2}(\zeta_N) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n_N}(\zeta_1) \varphi_{n_N}(\zeta_2) \dots \varphi_{n_N}(\zeta_N) \end{vmatrix}; \quad (9)$$

oder aber wir haben statt dieser Determinante sozusagen ihr symmetrisches Gegenstück zu bilden: Wir denken uns die $N!$ Summanden dieser Determinante (9) vollständig hingeschrieben, und ändern die Formel dann derart ab, daß wir die *Minuszeichen*, die vor der Hälfte dieser Summanden stehen, durch *Pluszeichen* ersetzen. Formelmäßig können wir das Resultat dann so hinschreiben:

$$\psi_{n_1 n_2 \dots n_N}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N) = \dots \sum_{\alpha = P(n)} \varphi_{\alpha_1}(\zeta_1) \varphi_{\alpha_2}(\zeta_2) \dots \varphi_{\alpha_N}(\zeta_N); \quad (10)$$

dabei soll summiert werden über alle jene $N!$ Indexkombinationen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$, welche *Permutationen* der Indizes n_1, n_2, \dots, n_N sind.

Offenbar kommen wir für das Zweikörperproblem $N=2$ wieder auf die früher betrachteten Eigenfunktionen zurück. Allgemein haben die Eigenfunktionen (9) und (10) folgende Eigenschaften: Wenn wir von den Argumenten $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ zwei miteinander vertauschen, dann geht ψ in $-\psi$ über, während φ ungeändert bleibt. Zum Beispiel wird

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta_2, \zeta_1, \zeta_3, \dots, \zeta_N) &= \varphi(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_N), \\ \psi(\zeta_2, \zeta_1, \zeta_3, \dots, \zeta_N) &= -\psi(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \dots, \zeta_N); \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

und ebenso für jede andere Vertauschung eines Paares der $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$.

Wird jetzt die *Wechselwirkung* der N Teilchen mitberücksichtigt, so treten natürlich wieder abgeänderte Eigenfunktionen an die Stelle der einfachen Ausdrücke (9) bzw. (10); aber auch bei Berücksichtigung der Wechselwirkung *bleiben die Symmetrieeigenschaften (II) ungeändert in Kraft*. Wir nennen wieder die ψ die *antisymmetrischen* und die φ die *symmetrischen* Eigenfunktionen.

Wie schon gesagt, gibt es neben diesen zwei erläuterten Lösungen des Mehrkörperproblems für alle Fälle außer $N=2$ noch weitere mathematisch mögliche Lösungen. *Aber die Natur macht davon keinen Gebrauch*; wir brauchen uns damit nicht zu beschäftigen. Wenn wir jedoch zwischen den beiden Lösungen ψ und φ entscheiden wollen, so müssen wir zunächst sagen, *welche Art ununterscheidbarer Teilchen* uns jetzt beschäftigt.

Wenn es *Elektronen* sind, dann ist festzustellen, daß die *symmetrischen* Eigenfunktionen φ nicht in Frage kommen (*ebensowenig* wie die weiteren, hier nicht näher betrachteten mathematisch möglichen Problemlösungen). *Für Elektronen sind immer nur die antisymmetrischen Eigenfunktionen ψ anzuwenden*. Diese fundamentale Erkenntnis wird als das **PAULISCHE PRINZIP** bezeichnet.

Wenn es sich dagegen um α -Teilchen handelt, dann kommt gerade umgekehrt nur die Lösung mit den *symmetrischen* Eigenfunktionen φ in Betracht. Das weiß man empirisch aus zwei Effekten: erstens aus dem Spektrum des Heliummoleküls He_2 ; und ferner aus Abweichungen von der RUTHERFORDSchen Streuformel, die dann eintreten, wenn wir die Streuung von α -Teilchen an He-Kernen untersuchen — die Nichtunterscheidbarkeit von stoßenden und streuenden Teilchen läßt hier Effekte auftreten, deren Untersuchung zu entscheiden erlaubt, ob bei den α -Teilchen die symmetrischen oder die antisymmetrischen Eigenfunktionen vorliegen.

Analog lassen das H_2 -Molekül und die thermodynamischen Eigenschaften von Para- und Ortho-Wasserstoff sowie die Streuung von Protonen in Wasserstoffgas erkennen, daß die *Protonen* wiederum *antisymmetrische* Eigenfunktionen besitzen.

Weshalb die Elektronen und Protonen gerade antisymmetrische und nicht symmetrische Eigenfunktionen haben, das ist eine Frage, die wir

hier ganz unbeantwortet lassen müssen; von unserem jetzigen Standpunkt aus ist es unmöglich, eine tiefere Begründung dafür anzugeben. Wir können hier nur als *empirische Gesetzmäßigkeit* feststellen, daß Teilchen mit einem *halbzahligen Drehmoment* stets *antisymmetrische*, solche mit *ganzzahligen Drehmoment* hingegen *symmetrische* Eigenfunktionen haben. Es ist ein schönes Ergebnis der später zu besprechenden tiefergehenden Untersuchungen, daß sie uns diesen empirischen Sachverhalt als *theoretisch notwendig* erkennen und verstehen lassen.

Für *zusammengesetzte* Teilchen allerdings können wir schon jetzt vorhersehen, was sich ergeben muß, sofern wir betreffs ihrer Bausteine Bescheid wissen. Wir formulieren sofort die allgemeine Regel, deren Beweis sich aus (II) auf den ersten Blick ergibt: *Zusammengesetzte Teilchen, in denen eine $\frac{\text{gerade}}{\text{ungerade}}$ Anzahl solcher Teilchen steckt, die selber *antisymmetrische* Eigenfunktionen haben (und außerdem noch eine beliebige Anzahl von Bausteinen mit symmetrischen Eigenfunktionen), besitzen $\frac{\text{symmetrische}}{\text{antisymmetrische}}$ Eigenfunktionen.*

Im Einklang hiermit und mit obiger empirischer Regel ergibt sich ja auch das *Drehmoment* zusammengesetzter Teilchen ganzzahlig oder halbzahlig je nachdem, ob eine gerade oder ungerade Zahl von Bausteinen mit halbzahligen Drehmoment vorhanden ist.

Wir wollen hervorheben, daß die Eigenfunktionen (9) oder (10) zwar durch N verschiedene Indizes n_1, n_2, \dots, n_N numeriert sind, daß aber offenbar zwei Eigenfunktionen *zu demselben Zustand gehören*, wenn die Indizesysteme in beiden Fällen nur durch eine *Permutation* voneinander verschieden sind (d. h. also: beim 3-Körperproblem z. B. stellen die Indizes 138 *denselben* Zustand dar, wie 183 oder 381). Denn die durch solche permutierten Indizes bezeichneten zwei Eigenfunktionen sind niemals *linear unabhängig* — sie stimmen entweder genau überein, oder unterscheiden sich um einen Faktor — 1.

Bei den *antisymmetrischen* Eigenfunktionen ergibt sich der charakteristische Umstand, daß *niemals zwei Indizes einander gleich sein können*. Denn für zwei gleiche Indizes würden wir ja in der Determinante (9) *zwei übereinstimmende Zeilen* bekommen, was bekanntlich die Determinante *verschwinden* läßt. Wir können also die Tatsache, daß die Elektronen antisymmetrische Eigenfunktionen haben, auch in der Form des berühmten *PAULISCHEN ÄQUIVALENZVERBOTES* aussprechen:

Es kommt nicht vor, daß zwei Elektronen vollständig übereinstimmende Quantenzahlen haben.

Hieraus ergeben sich die *Periodenlängen* $2n^2=2; 8; 18; 32$ *im periodischen System der Elemente*, bzw. die ihnen zugrunde liegende und für die *Röntgenspektren* maßgebende *Schalenstruktur der Atome*. In einem kugelsymmetrischen Kraftfeld (Richtungsentartung!) hat ein durch die Quantenzahlen n, l, j gekennzeichneter Zustand eines einzelnen

Elektrons die Vielfachheit $2j + 1$; wegen $l = 0, 1, \dots, n-1$ und $j = l \pm \frac{1}{2}$ bekommen wir also folgendes Schema der *Elektronenschalen* und ihrer *maximalen Besetzungszahlen*:

Röntgenterm	K	L ₁₁	L ₂₁	L ₂₂	M ₁₁	M ₂₁	M ₂₂	M ₃₂	M ₃₃	N ₁₁ ...
n	1	2	2	2	3	3	3	3	3	4 . . .
l	0	0	1	1	0	1	1	2	2	0 . . .
j	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$. . .
max. Besetzung	2	2	2	4	2	2	4	4	6	2 . . .
$2n^2$	2	8			18					32

Übrigens läßt diese jetzige Fassung des PAULI-Prinzips auch sofort erkennen, daß tatsächlich beim He die in den Ortskoordinaten symmetrischen Eigenfunktionen (zu denen auch diejenigen mit *gleichen* Werten n, l, j für *beide* Elektronen gehören) *antiparallele* Spinmomente haben müssen. —

Betrachten wir zwei verschiedene Atome A und B , deren wechselseitiger Abstand *groß* ist gegenüber den beiden Atomdurchmessern. Wenn A in seiner Elektronenhülle Z_A Elektronen besitzt, während Z_B die Elektronenzahl in B ist, dann haben wir streng genommen für das aus A und B zusammen genommen bestehende Gesamtsystem antisymmetrische Eigenfunktionen im $3(Z_A + Z_B)$ -dimensionalen Raume anzusetzen, und es erhebt sich die Frage, wie wir aus dieser Anwendung der antisymmetrischen Eigenfunktionen auf das *Gesamtsystem* zu einer Rechtfertigung unserer Überzeugung kommen, daß wir im Grenzfall ganz großen Abstands zwischen A und B statt dessen die antisymmetrische Eigenfunktion auf jedes einzelne der Atome A, B für sich *allein* anwenden dürfen. Eine nähere Betrachtung, auf die hier nicht ausführlicher eingegangen sei, ergibt in der Tat die positive Beantwortung dieser Frage. Damit aber haben wir offenbar auch klargestellt, weshalb die exakten, den Spin mitenthaltenden Eigenfunktionen des He-Atoms auch durch einen Elektronenstoß *nicht* ihre Antisymmetrie verlieren können.

Während aber im Falle zweier *weit getrennter*, keine merkliche Wechselwirkung besitzender Atome A und B die Eigenfunktionen φ^{AB} des Gesamtsystems im Sinne der Regel von Kapitel 3, § 5, 3 die *Produkte* $\varphi^A \varphi^B$ je zweier Eigenfunktionen von A bzw. B allein sind, ergeben sich kompliziertere Verhältnisse, wenn die beiden Atome einander bis auf Abstände von der Größenordnung der Atomdurchmesser nahe kommen. Die Unmöglichkeit, in diesem Falle die „zu A gehörigen“ Elektronen klar zu *unterscheiden* von den „zu B gehörigen“, äußert sich in „*Austausch-*effekten“ von ähnlicher Art, wie die oben besprochene *scheinbare Wechselwirkung der Spinmomente* der beiden Elektronen im He-Atom.

In riesigem Maßstab zeigt sich eine *Parallelstellung von Spinmomenten durch Austauschkräfte* beim *Ferromagnetismus*. Die von EWING herührende Bemerkung, daß die atomaren Magnete schon infolge ihrer magnetischen Wechselwirkung eine Tendenz zu paralleler Ausrichtung haben, konnte keine befriedigende Darstellung des ferromagnetischen Verhaltens geben, weil diese Wechselwirkung viel zu schwach ist, um die Parallelstellung der atomaren Einzelmagnete gegen die ungeordnete Temperaturbewegung aufrecht zu erhalten. Deshalb führte WEISS die Hypothese ein, daß hier eine neue, unbekannte Kraft wirksam sei, welche zur Parallelstellung der Magnete führe — auf diese Weise konnte rein formal nach den Regeln der statistischen Mechanik die Temperaturabhängigkeit des Magnetismus berechnet und in zutreffender Weise dargestellt werden. Aber erst jetzt verstehen wir das *Zustandekommen* dieser von WEISS hypothetisch eingeführten Kraft: es ist dieselbe *scheinbare Wechselwirkung der Spinmomente*, welche auch in der Multipllettstruktur zutage tritt; und damit gewinnen wir die Unterlagen einer theoretischen Ermittlung der Substanzen, welche Ferromagnetismus zeigen, und einer diesbezüglichen quantitativen Ausrechnung. Leider hängen allerdings die quantitativen Verhältnisse sehr erheblich von den Feinheiten der Atomwechselwirkungen im Kristalle ab, und für das technisch so wichtige Problem der Auffindung von Legierungen mit bestimmten erwünschten magnetischen Eigenschaften wird die Theorie erst nach Durchführung sehr mühsamer Spezialuntersuchungen Beiträge leisten können. Grundsätzlich wichtig ist, daß die durch Austauschkräfte bedingte Parallelstellung der Spinmagnete *nicht* von der *Richtung relativ zu den Kristallachsen* abhängig ist; solange sonstige störende Wirkungen unberücksichtigt bleiben, ergibt sich also durch ein äußeres Magnetfeld stets eine *Sättigungsmagnetisierung* parallel diesem Magnetfeld. Koerzitivkraft und Hysterese ergeben sich erst aus den schwächeren *magnetischen Wechselwirkungen* der atomaren Magnete: Diese sind relativ zu den Kristallachsen richtungsabhängig, insbesondere also bei kubischem Kristallbau abhängig von den von Ort zu Ort wechselnden *Verzerrungsrichtungen*; das scheinbar homogene Stück Eisen zerfällt in viele kleine Teilgebiete, von denen jedes einzelne bis zur Sättigung magnetisiert ist, aber mit einer durch die inneren Spannungen des Stoffes bedingten Richtung. Diese recht komplizierten Verhältnisse sind einer weitgehenden theoretischen Erfassung zugänglich, wobei aber natürlich weitere spezifisch quantentheoretische Gesichtspunkte nicht mehr in Betracht kommen.

Während der Ferromagnetismus so zustande kommt, daß gerade der energetisch tiefste Zustand derjenige mit parallel gestellten Spinmagneten ist, gibt es natürlich umgekehrt auch solche Fälle, wo *antiparallele* Spinmomente die kleinere Energie ergeben. *Hierauf beruhen zum wesentlichen Teile die homöopolaren chemischen Valenzen.*

Der von den Chemikern aus ihren Erfahrungen heraus entwickelte *Valenzbegriff* ist ganz offensichtlich nicht auf Grund klassisch-physikalischer

Vorstellungen zu verstehen. Die charakteristische, durch die den Atomen zugeschriebenen *Wertigkeiten* und durch die *Valenzstriche* ausgedrückte *Absättigung* der Valenzen läßt in der chemischen Bindung das Walten von Kräften erkennen, die nicht nur vollkommen verschieden etwa von COULOMBScher oder ähnlicher Wechselwirkung sind, sondern auch ganz grundsätzlich einer sinngemäßen Deutung durch klassische Vorstellungsbilder widerstreben.

Dabei ist allerdings klar, daß sich verschiedenartige Effekte hinter den chemischen Valenzkräften verbergen. So sind insbesondere die *heteropolaren* Bindungen von den sonstigen abzutrennen; in ihnen kommt das Wesen der chemischen Valenz weniger charakteristisch zum Ausdruck. So beruht die *Einwertigkeit* der Alkaliatome im Grunde nur auf der lockeren Bindung des äußersten Elektrons, und die *Eirwertigkeit* der Halogenatome gegenüber den Alkalien beruht auf ihrer *Elektronenaffinität* (Fähigkeit, in der nur ein „Loch“ enthaltenden äußersten Elektronenschale noch ein überzähliges Elektron zu binden). In einer wässrigen Lösung von NaCl haben wir dementsprechend Ionen Na^+ und Cl^- , und außerdem einen gewissen Anteil von Molekülen NaCl, die sozusagen lediglich eine Aneinanderlagerung zweier sich elektromagnetisch anziehender Ionen darstellen: Hier ist es *klassisch* verständlich, daß für diese neutralen Ionenpaare keine erhebliche Tendenz zu *weiteren* Anlagerungen besteht. Treten aber doch solche weiteren Anlagerungen ein, d. h. bildet sich ein Keim eines NaCl-Kristalls, so hört auch die paarweise Zuordnung von Na- und Cl-Ionen auf: In der bekannten NaCl-Gitterstruktur ist jedes Na^+ symmetrisch umgeben von *sechs* Ionen Cl^- , und umgekehrt. Wenn wir also einmal die niedrige Ionisierungsspannung des Na und die Elektronenaffinität des Cl als gegebene Tatsachen annehmen, so ist *alles weitere rein klassisch zu verstehen*: Wir müssen es dabei aber auch als in Wirklichkeit nicht berechtigt ansehen, die Verbindung NaCl mit einem *Valenzstrich* Na—Cl zu schreiben, denn mit den typischen Valenzstrichen insbesondere der organischen Chemie hat dieser hier geschriebene Valenzstrich sehr wenig zu tun.

Scheiden wir die Gesamtheit der ausgesprochenermaßen heteropolaren Bindungen aus, so bleibt noch immer ein Bild größter Mannigfaltigkeit zurück: Neben ausgedehnten Gebieten, in denen die primitiven Wertigkeits- und Valenzstrichregeln sich restlos bewähren, gibt es eine Fülle von Fällen, die allerlei Ausnahmen bilden, und die den Chemikern Anlaß zu mancherlei empirisch gewonnenen Verallgemeinerungen oder Erweiterungen der Valenzvorstellung gegeben haben. Jedenfalls müssen wir also auch bei den „richtigen“, den *homöopolaren* Valenzbindungen die Valenzstrichregeln der Chemiker als einen *idealen Grenzfall* ansehen, der oft nur in recht grober Annäherung verwirklicht ist. Nach der Quantentheorie beruht diese „ideale“ homöopolare Valenz auf dem Vorhandensein *zweier Bindungselektronen mit antiparallel gestellten Spinnmomenten*.

Es ist ein bedeutungsvoller Erfolg der Quantentheorie, daß sie für diesen idealen Grenzfall in umfassender Weise die aus der chemischen Erfahrung abstrahierten Gesetzmäßigkeiten liefert¹, und außerdem ganz allgemein die Unterlagen einer theoretischen Ermittlung der vorkommenden Abweichungen vom idealen Verhalten gibt. *Grundsätzlich* — die praktische Durchführung aller hierher gehörigen zahllosen Einzelrechnungen wird immer nur bruchstückweise möglich sein — ist damit die *Chemie* der Quantentheorie der Atome eingeordnet.

Eine ausführlichere Betrachtung der quantentheoretischen Deutung der chemischen Valenzen müssen wir uns freilich in diesem Buche versagen — eine Besprechung einiger typischer Beispiele würde, wenn sie merklich mehr als die gemachten Andeutungen bieten sollte, einen breiteren Raum erfordern, und eine genauere Erörterung der *allgemeinen Gesetzmäßigkeiten* erfordert abstrakte mathematische Hilfsmittel, auf deren Erläuterung hier verzichtet werden muß. Heben wir nur dies hervor, daß die Quantentheorie der chemischen Bindung auf mathematische Probleme führt, die zu besonders merkwürdigen und beziehungsreichen — und zum Teil sehr modernen — Kapiteln der Mathematik gehören. Die *Gruppentheorie*, und insbesondere ihr modernster Zweig, die *Darstellungstheorie* der Gruppen, bietet im Zusammenhange mit der *Invariantentheorie* die tiefdringenden Hilfsmittel zur gedanklichen Erfassung der quantenphysikalischen Gesetze der chemischen Valenz; sie bietet ebenso übrigens für viele feinere Fragen der Atomtheorie oder der Molekülspektren, oder z. B. der Metalltheorie die adäquaten Hilfsmittel dar. Die aus diesen Zusammenhängen sich ergebenden Probleme und Gesetzmäßigkeiten sind seit ihrer Erschließung (WIGNER, v. NEUMANN, HEITLER-LONDON, WEYL u. a.) Gegenstand vieler Untersuchungen geworden; sie bilden eines der schönsten und reichhaltigsten Kapitel der heutigen Quantentheorie.

3. Ideale Gase. Unsere Ergebnisse betreffs des Mehrkörperproblems mit nicht unterscheidbaren Teilchen geben Veranlassung zu einer Revision der *klassischen Theorie des idealen Gases*.

Wir betrachten ein würfelförmiges Gefäß vom Volum $V = l^3$ mit ideal reflektierenden Wänden. Ein darin sich frei bewegender einzelner Massenpunkt hat dann (vgl. Kapitel 2, § 1) zu den Kanten parallele Impulskomponenten mit den Beträgen

$$|p_x| = \frac{n_1 h}{2l}, \quad |p_y| = \frac{n_2 h}{2l}, \quad |p_z| = \frac{n_3 h}{2l}, \quad (12)$$

¹ Dabei werden die Valenzstrichregeln theoretisch hergeleitet aus gewissen mathematischen Gesetzen betreffs der sog. *binären Invarianten*, und merkwürdigerweise ist auf eine formale Analogie zwischen den binären Invarianten und den chemischen Valenzbeziehungen schon vor langer Zeit hingewiesen worden, als man noch völlig außerstande war, sich bei dieser Analogie irgend etwas physikalisch Deutbares zu denken.

was die Energiewerte

$$W_{n_1, n_2, n_3} = W_n = c \sqrt{\mu^2 c^2 + \frac{\hbar^2}{4I^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)} \quad (13)$$

ergibt, wenn μ die Ruhmasse ist. Besitzt der Massenpunkt einen Drehimpuls j , so hat jeder der durch die drei Quantenzahlen $n = (n_1, n_2, n_3)$ bezeichneten Translationsquantenzustände das statistische Gewicht $g = 2j + 1$.

Die *klassische* ideale Gastheorie bekommen wir nun, wenn wir uns die verschiedenen Gaspartikel als individuell unterscheidbar vorstellen, d. h. wenn wir annehmen, bei Vorhandensein von N Teilchen seien die verschiedenen Zustände des Gesamtsystems zu bezeichnen durch Angabe von N Zahltripeln n , deren jedes sich auf ein ganz bestimmtes der Gasteilchen bezieht. Denken wir zum Vergleich an die Eigenschwingungsozillatoren eines (großen) Kristallgitters: diese sind in der Tat alle einzeln unterscheidbar, und die Anwendung der statistischen Überlegungen gründet sich darauf, daß es zu jedem dieser Oszillatoren eine große Menge ihm *fast* gleicher gibt. Würden auch die Partikeln eines Gases nur *fast* gleichartig, aber doch noch individuell unterscheidbar sein, so wäre es berechtigt, auf sie — wie es die klassische Gastheorie tut — die kanonische Verteilungsformel anzuwenden; also zu behaupten, daß zum Impulsgebiet $dp_x dp_y dp_z$ bei thermodynamisch stationärer Verteilung eine mit

$$e^{-\frac{c\sqrt{\mu^2 c^2 + p^2}}{kT}} \cdot dp_x dp_y dp_z \quad \text{bzw.} \quad e^{-\frac{p^2}{2m kT}} dp_x dp_y dp_z \quad (14)$$

proportionale Teilchenzahl gehöre (vgl. dazu Kapitel 2, § 2, 7).

Aber dieses MAXWELLSche Verteilungsgesetz (14) verliert seine Gültigkeit, wenn wir jetzt unsere Ergebnisse betreffs nichtunterscheidbarer Teilchen beachten. Wir wollen die verschiedenen Zustände eines *einzelnen*, im Kasten *allein* vorhandenen Teilchens jetzt kurz mit n bezeichnen; in n soll also das Zahlentripel n zusammengefaßt sein mit der die g verschiedenen Impulsstellungen unterscheidenden Quantenzahl. Bei Vorhandensein von N gleichartigen Teilchen ohne Wechselwirkung ist dann jeder *einfache* Zustand dieses Gesamtsystems zu charakterisieren durch die Angabe,

wieviele Teilchen sich in jedem der einzelnen Zustände n befinden.

Denn wir sahen ja im vorigen Abschnitt, daß für die einfachen Zustände im N -Körperproblem die zugehörigen Eigenfunktionen so zu numerieren sind, daß zwar N Indizes n angegeben werden, deren *Reihenfolge* aber ganz beliebig ist.

Ein *Unterschied der beiden Möglichkeiten*: *symmetrische* oder *antisymmetrische* Eigenfunktionen, kommt zustande in der Form, daß die Anzahl N_n von Teilchen im Zustand n im ersteren Falle alle Werte $0, 1, 2, 3, \dots$ annehmen kann, im letzteren Falle dagegen nur 0 und 1 .

Betrachten wir zunächst den ersteren Fall, so können wir sagen: wir haben hier ganz dieselbe Zustandsmannigfaltigkeit, wie bei einem System von harmonischen Oszillatoren: jedem Zustand n entspricht ein harmonischer Oszillator, dessen Energiestufen um je W_n auseinander liegen. Entsprechend haben wir für den letzteren Fall ein System von quantenmechanischen Gebilden — nennen wir sie kurz *Quasi-Oszillatoren* —, deren jedes nur in zwei Zuständen, mit den Energien 0 und W_n auftreten kann. Wir können also unsere *Entropieformel* (43), Kapitel 2, § 2, 7 anwenden, wenn wir uns nur klarmachen, daß die *damals* mit N_n bezeichneten Zahlen etwas *anderes*, als die *jetzigen* N_n sind; wir wollen für die *damaligen* N_n jetzt die Bezeichnung N'_n gebrauchen.

In (43), Kapitel 2, § 2 ist eine Menge von N' fast gleichartigen Gebilden vorausgesetzt; dementsprechend betrachten wir jetzt diejenigen N' Oszillatoren bzw. Quasioszillatoren, für welche die zugeordneten Energiewerte W_n in ein enges Intervall $W, W + \Delta W$ fallen. Von diesen haben dann N'_r eine „Quantenzahl“ (Anzahl der vorhandenen Teilchen mit der fraglichen Energie W_n) gleich r , und der zum Intervall $W, W + \Delta W$ gehörige Entropieanteil wird gleich

$$\Delta S = -kN' \sum_r \frac{N'_r}{N'} \log \frac{N'_r}{N'} = -kN' \sum_r n'_r \log n'_r, \quad (15)$$

worin also $n'_r = N'_r/N'$ geschrieben ist. Der zugehörige *Energieanteil* ist

$$\Delta E = N'W \sum_r r \cdot n'_r; \quad (16)$$

und die *Anzahl der* auf $W, W + \Delta W$ entfallenden *Teilchen* ist

$$\Delta N = N' \sum_r r \cdot n'_r. \quad (17)$$

Indem wir diese drei Ausdrücke über die ganze Energieskala integrieren, bekommen wir für einen Zustand, der durch Angabe der $n'_r = n'_r(W)$ als Funktionen von W beschrieben ist, die *Gesamtentropie* S , die *Gesamtenergie* E und die *Gesamtteilchenzahl* N . Wir haben dann denjenigen Zustand aufzusuchen, der den *größten* bei vorgegebenen Werten E und N möglichen Entropiewert besitzt.

Dadurch, daß die Größe N jetzt fest vorgegeben ist, kommt als Ergebnis *nicht* einfach die *kanonische* Verteilung für ein Oszillatoren- bzw. Quasioszillatorensystem heraus, sondern eine etwas abweichende Verteilung. Es wird nämlich¹ bei der absoluten Temperatur T :

$$\left. \begin{aligned} n'_r(W) &= F \cdot e^{-r \left[a(T) + \frac{W}{kT} \right]}; \\ \mathbf{1} &= F \cdot \sum_r e^{-r \left[a(T) + \frac{W}{kT} \right]}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

¹ Denn $S \rightarrow \max.$ unter den drei Nebenbedingungen $E = \text{const}; N = \text{const}; \sum_r n'_r = \mathbf{1}$ fordert:

$$\delta(S - \beta E - k a N + \lambda \sum_r n'_r) = 0,$$

oder $k \ln n'_r + \beta \cdot W r + k a \cdot r + C = 0.$

Wie in der Fußnote S. 66 sieht man, daß $\beta = T^{-1}$ ist.

Die zweite Zeile legt den Faktor $F = F(T; W)$ fest; die Temperaturfunktion $a(T)$ ist so zu bestimmen, daß durch (18) die vorgegebene Gesamtteilchenzahl N zustande kommt — ein expliziter Ausdruck für $a(T)$ läßt sich im allgemeinen nicht ermitteln.

Die *mittlere Quantenzahl* pro Oszillator bzw. Quasioszillator, definiert durch

$$n_\nu = \sum_r r \cdot n'_r(W); \quad \nu = \frac{W}{h}, \quad (19)$$

ergibt sich nach (18) gleich

$$\left. \begin{aligned} n_\nu &= \frac{1}{e^{a(T) + \frac{h\nu}{kT}} - 1}, & („BOSE“); \\ \text{bzw.} \\ n_\nu &= \frac{1}{e^{a(T) + \frac{h\nu}{kT}} + 1}, & („FERMI“). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Hier bezieht sich die *obere* Formel auf Teilchen mit symmetrischen Eigenfunktionen, oder, wie man auch sagt, mit *BOSE-Statistik*; die *untere* gilt für den Fall antisymmetrischer Eigenfunktionen, oder die sog. *FERMI-Statistik*.

Wenn wir *verzichten* auf die feste Vorgabe von N , also *Prozesse zulassen*, durch welche die Teilchenzahl N *unbeschränkt verändert* werden kann, so ergibt sich statt (18) die gewöhnliche kanonische Verteilungsformel, angewandt auf das System unserer Oszillatoren oder Quasioszillatoren:

$$\left. \begin{aligned} n'_r(W) &= F \cdot e^{-\frac{rW}{kT}}, \\ 1 &= F \cdot \sum_r e^{-\frac{rW}{kT}} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

an Stelle von (20) bekommen wir dann

$$\left. \begin{aligned} n_\nu &= \frac{1}{\frac{h\nu}{kT} - 1} & \text{für BOSE-Statistik,} \\ n_\nu &= \frac{1}{\frac{h\nu}{kT} + 1} & \text{für FERMI-Statistik.} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Die obere, für alle Teilchen mit *BOSE-Statistik* geltende Formel führt uns wieder auf die frühere Formel für die mittlere Energie eines Oszillators der Frequenz ν zurück. [Vgl. Kapitel 2, § 2, 2; die dortige Formel (3) entspricht übrigens der jetzigen Formel (21), abgesehen von der Bezeichnungsweise. Die gleichzeitig eintretende Analogie zur *PLANCKschen Formel* (10), § 1, 1, Kapitel 1 ist nicht überraschend, da wir damals ebenso wie jetzt *ein System harmonischer Oszillatoren betrachteten* — es handelte sich damals um die elektromagnetischen Eigenschwingungen eines Hohlraums. Wir merken uns aber bei dieser Gelegenheit die bedeutungsvolle *Tatsache*, daß auch die *Lichtquanten* hinsichtlich ihres statistischen

Verhaltens nichts Neues zeigen gegenüber den materiellen Teilchen — sie verhalten sich genau so, wie diejenigen materiellen Teilchen, welche *symmetrische Eigenfunktionen* haben, gehören also, kurz gesagt, zu den *Teilchen mit BOSE-Statistik*.

Für den besonderen Fall $n_v \ll 1$, welcher bei den Lichtquanten aus dem PLANCKSchen Gesetz das WIENSche hervorgehen läßt, bekommen wir aus (20) für beide Statistiken die vereinfachte Formel

$$n_v = e^{-a(T) - \frac{h\nu}{kT}}; \quad (23)$$

das bedeutet aber offenbar: für diesen „WIENSchen“ Grenzfall ergibt sich asymptotisch die *klassische ideale Gastheorie*. Wir bekommen aber auch für diesen Grenzfall noch eine wichtige neue Aussage; nämlich eine *absolute Festlegung der Entropiekonstanten*: Für den einfachsten Fall — einatomiges Gas — ergibt sich genau der empirisch gesicherte Wert der chemischen Konstanten (vgl. Kapitel 1, § 4, 5), wenn wir folgendes überlegen.

Wir haben es jetzt mit nichtrelativistischer Mechanik zu tun, und wollen in der Energie W den Ruhanteil μc^2 streichen; statt (13) wird also einfacher

$$W_n = \frac{h^2}{8\mu l^2} n^2 = \frac{h^2}{8\mu l^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2). \quad (24)$$

Folglich gibt es¹ im Energieintervall W , $W + \Delta W$ (asymptotisch)

$$N' = gV \cdot z(W) \Delta W = gV \cdot \frac{4\pi}{h^3} \mu \sqrt{2\mu W} \cdot \Delta W \quad (25)$$

einfache Zustände eines Einzelatoms unseres Gases. Also wird die Gesamtteilchenzahl N nach (23) gleich

$$N = gV \cdot \int_0^{\infty} \frac{4\pi}{h^3} \mu \sqrt{2\mu W} \cdot e^{-a(T) - \frac{W}{kT}} \cdot dW,$$

und das ermöglicht die explizite Berechnung von $a(T)$, in der aus der klassischen Gastheorie bekannten Weise. Es wird² offenbar

$$\left. \begin{aligned} N e^{a(T)} &= gV \cdot \frac{2^{3/2} \mu^{3/2} \pi}{h^3} (kT)^{3/2} \int_0^{\infty} \sqrt{y} \cdot e^{-y} dy \\ &= gV \cdot \frac{(2\mu \pi kT)^{3/2}}{h^3}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Nun wird die Gesamtentropie nach (43), Kapitel 2, § 2, 7 gleich

$$S = -k gV \int_0^{\infty} z(W) \cdot \sum_r n_r' \log n_r' \cdot dW,$$

¹ Vgl. die ähnliche Abzählung Kapitel 1, § 1, 2.

² Es ist $\int_0^{\infty} \sqrt{y} e^{-y} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; ferner übrigens $\int_0^{\infty} \sqrt{y^3} e^{-y} dy = \frac{3}{4} \sqrt{\pi}$.

und für $n_\nu \ll 1$ ist (in beiden Statistiken)

$$\begin{aligned} \sum_r n'_r \log n'_r &= n'_0 \log n'_0 + n'_1 \log n'_1 = (1 - n_\nu) \log (1 - n_\nu) + n_\nu \log n_\nu = \\ &= -n_\nu + n_\nu \log n_\nu; \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} S &= k N + k g V \cdot \frac{2^{1/2} \mu^{3/2} \pi}{h^3} \int_0^\infty \sqrt{W} \cdot e^{-a(T) - \frac{W}{kT}} \cdot \left[a(T) + \frac{W}{kT} \right] dW \\ &= k N + k g V \cdot \frac{2^{1/2} \mu^{3/2} \pi}{h^3} e^{-a(T)} (kT)^{3/2} \left[a(T) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{3}{4} \sqrt{\pi} \right] \\ &= k N + k g V \cdot \frac{(2 \pi \mu k T)^{3/2}}{h^3} \cdot e^{-a(T)} \left[a(T) + \frac{3}{2} \right]; \end{aligned}$$

nach (26) also endlich

$$S' = k N \left[\log \left\{ \frac{g V}{N} \cdot \frac{(2 \pi \mu k T)^{3/2}}{h^3} \right\} + \frac{5}{2} \right], \quad (27)$$

womit die empirische Formel (22), Kapitel 1, § 3, 5 ihre theoretische Begründung erhalten hat.

Für einen vollständigeren Beweis, daß man den so bestimmten Absolutwert der Entropie tatsächlich in der den Thermodynamikern gewohnten Weise für die Berechnung von chemischen Gleichgewichten (oder Dissoziations- und Ionisierungs-Gleichgewichten) verwenden darf, wäre eigentlich eine genauere Untersuchung der thermodynamisch normalen Verteilung in einem Gemisch verschiedener Gase, deren Teilchenzahlen sich durch die betrachteten chemischen Umwandlungen ändern können, nötig. Wir begnügen uns mit der Bemerkung, daß alle diesbezüglichen Fragen sich von den jetzt gewonnenen Einsichten aus in einfachster und klarster Weise erledigen¹. Folgendes allgemeine Resultat ergibt sich. Es seien in einem Gemisch $N^{(l)}$ Teilchen der l -ten Teilchenart vorhanden; die möglichen Umwandlungsprozesse mögen solche Änderungen der $N^{(l)}$ erlauben, bei welchen m lineare Bedingungen

$$\sum_l C_l^j N^{(l)} = C^j = \text{const}; \quad j = 1, 2, \dots, m$$

gewahrt bleiben — während *sonst* den Änderungen der $N^{(l)}$ keine Beschränkung auferlegt ist. (Dies ist offenbar der allgemeinste überhaupt denkbare Fall). Dann gilt

$$n_\nu^{(l)} = \frac{1}{e^{\sum_j a_j C_l^j + \frac{h \nu}{k T}} \pm 1}, \quad (28)$$

wobei das Vorzeichen ± 1 davon abhängt, ob für die l -te Teilchenart FERMI-Statistik oder BOSE-Statistik gilt. — Offenbar sind (20) und (22) Spezialfälle von (28).

Ganz kurz sei jedoch noch eingegangen auf den Zusammenhang der Gleichgewichtsformeln (20) mit den Wahrscheinlichkeitsgesetzen der

¹ Vgl. die ausführliche Untersuchung in P. JORDAN: Statistische Mechanik auf quantentheoretischer Grundlage. Braunschweig 1933.

Elementarprozesse (Zusammenstöße, Leuchtprozesse, chemische Umwandlungen usw.) im Gase. Betrachten wir den einfachsten Fall, nämlich den *elastischen Zusammenstoß* zweier Teilchen in einem Gase, das nur *eine* Teilchenart enthält. Es seien ν_1, ν_2 die durch h dividierten Energien der beiden Teilchen *vor* dem Stoß, und ν'_1, ν'_2 entsprechend *nach* dem Stoß. Für diesen Prozeß setzen wir dann eine Häufigkeit an, die

$$\left. \begin{array}{l} \text{bei klassischer Statistik proportional mit } n_{\nu_1} n_{\nu_2}, \\ \text{bei BOSE-Statistik proportional mit } n_{\nu_1} n_{\nu_2} (\mathbf{I} + n_{\nu_1}) (\mathbf{I} + n_{\nu_2}), \\ \text{bei FERMI-Statistik proportional mit } n_{\nu_1} n_{\nu_2} (\mathbf{I} - n_{\nu_1}) (\mathbf{I} - n_{\nu_2}) \end{array} \right\} \quad (29)$$

ist. Für den *inversen* Prozeß haben wir also eine Häufigkeit proportional mit:

$$\left. \begin{array}{l} \text{klassisch: } n_{\nu'_1} n_{\nu'_2}, \\ \text{BOSE-Statistik: } n_{\nu'_1} n_{\nu'_2} (\mathbf{I} + n_{\nu'_1}) (\mathbf{I} + n_{\nu'_2}), \\ \text{FERMI-Statistik: } n_{\nu'_1} n_{\nu'_2} (\mathbf{I} - n_{\nu'_1}) (\mathbf{I} - n_{\nu'_2}); \end{array} \right\} \quad (29')$$

und die Forderung, daß im thermischen Gleichgewicht unter der Voraussetzung

$$\nu_1 + \nu_2 = \nu'_1 + \nu'_2 \quad (30)$$

stets

$$\left. \begin{array}{l} n_{\nu'_1} n_{\nu'_2} = n_{\nu_1} n_{\nu_2}, \\ \text{bzw. } n_{\nu_1} n_{\nu_2} (\mathbf{I} + n_{\nu_1}) (\mathbf{I} + n_{\nu_2}) = n_{\nu_1} n_{\nu_2} (\mathbf{I} + n_{\nu'_1}) (\mathbf{I} + n_{\nu'_2}), \\ \text{bzw. } n_{\nu_1} n_{\nu_2} (\mathbf{I} - n_{\nu_1}) (\mathbf{I} - n_{\nu_2}) = n_{\nu_1} n_{\nu_2} (\mathbf{I} - n_{\nu'_1}) (\mathbf{I} - n_{\nu'_2}) \end{array} \right\} \quad (31)$$

sein soll, ergibt die Verteilungsformel von

$$\left. \begin{array}{l} \text{MAXWELL: } n_{\nu} = e^{-a(T) - \frac{h\nu}{kT}}, \\ \text{BOSE: } n_{\nu} = \frac{\mathbf{I}}{e^{a(T) + \frac{h\nu}{kT}} - \mathbf{I}}, \\ \text{FERMI: } n_{\nu} = \frac{\mathbf{I}}{e^{a(T) + \frac{h\nu}{kT}} + \mathbf{I}}. \end{array} \right\} \quad (32)$$

Die in Kapitel 2, § 3, 3 studierten Wahrscheinlichkeitsgesetze von Prozessen, an denen sich beliebig viele Lichtquanten beteiligen, lassen ohne weiteres erkennen, wie dieser Ansatz (29) zu verallgemeinern ist auf beliebig komplizierte Prozesse, bei denen beliebige Anzahlen von Teilchen — teils BOSESCHER, und teils FERMISCHER — verschwinden oder neu gebildet werden¹.

Beim *absoluten Nullpunkt der Temperatur* wird in einem FERMI-SCHEN Gase diejenige Verteilung eintreten, welche die *kleinste* bei der vorgegebenen Teilchenzahl N mögliche *Energie* besitzt: Offenbar müssen

¹ Vgl. die ausführliche Darstellung in dem in der Fußnote S. 200 genannten Buche.

dann bis zu einem gewissen Energiewert ε_0 hinauf *alle* Zustände einfach besetzt, und oberhalb von ε_0 *alle* Zustände leer sein:

$$n_\nu = \begin{cases} 1 & \text{für } h\nu < \varepsilon_0, \\ 0 & \text{für } h\nu > \varepsilon_0. \end{cases} \quad (33)$$

Die Grenzenergie ε_0 hängt natürlich von der Teilchendichte $\varrho = N/V$ ab: nach (25) muß

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= g \int_0^{\varepsilon_0} z(W) dW = g \frac{2^{1/2} \mu^{3/2} \pi}{h^3} \int_0^{\varepsilon_0} \sqrt{W} dW \\ &= g \cdot \frac{2^{1/2} \mu^{3/2} \pi}{3 h^3} \cdot \varepsilon_0^{3/2} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

sein.

Die *mittlere kinetische Energie pro Teilchen* wird entsprechend gleich

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= \frac{gV}{N} \cdot \frac{2^{1/2} \mu^{3/2} \pi}{h^3} \cdot \int_0^{\varepsilon_0} \sqrt{W} \cdot W \cdot dW \\ &= \frac{g}{\varrho} \cdot \frac{2^{1/2} \mu^{3/2} \pi}{5 h^3} \cdot \varepsilon_0^{5/2} = \frac{3}{5} \varepsilon_0, \end{aligned}$$

so daß wir eine *räumliche Dichte der kinetischen Energie* von der Größe

$$\eta = \varrho \bar{\varepsilon} = \frac{3}{5} \varrho \varepsilon_0 = g \cdot \frac{2^{1/2} \mu^{3/2} \pi}{5 h^3} \varepsilon_0^{5/2} \quad (35)$$

bekommen. Zwischen *kinetischer Energiedichte* η und *Teilchendichte* ϱ besteht also nach (34) der Zusammenhang

$$\eta = \frac{3}{5} \varrho \varepsilon_0 = \frac{h^2}{5 \mu} \cdot \frac{3^{3/2}}{2^{1/2} g^{3/2} \pi^{1/2}} \cdot \varrho^{5/2} = C \cdot \varrho^{5/2}. \quad (36)$$

Man kann ihn übrigens bis auf die Zahlfaktoren aus *Dimensionsgründen* erschließen: aus h, μ, ϱ ist *nur* in der Form $\varrho^{5/2} h^2 / \mu$ eine Energiedichte zu bilden.

Wenn die Teilchen unseres Gases außer ihrer kinetischen Energie auch eine ortsabhängige potentielle Energie $u = u(\mathbf{r})$ besitzen, so wird bei $T=0$ die räumliche Teilchendichte ebenfalls eine Funktion des Ortes sein. Doch bleibt an jedem Ort die Beziehung (36) erhalten, sofern $u(\mathbf{r})$ noch praktisch konstant bleibt über Entfernungen von der Größenordnung der zu ε_0 gehörigen Wellenlänge; und zwar bestimmt sich ϱ offenbar derart, daß die *Gesamtenergie*

$$E = \iiint \{u\varrho + C\varrho^{5/2}\} dx dy dz \quad (37)$$

den *kleinsten* bei der vorgegebenen Teilchenzahl

$$N = \iiint \varrho dx dy dz \quad (38)$$

möglichen Wert annimmt. Das ergibt mit einer Konstanten Λ :

$$\frac{d}{d\varrho} \{u\varrho + C\varrho^{5/2} + \Lambda\varrho\} = u + \Lambda + \frac{5}{3} C\varrho^{3/2} = 0;$$

und wenn wir $u + \Lambda = u_0$ setzen, so ergibt sich der Zusammenhang

$$-u_0 = \frac{h^2}{\mu} \cdot \frac{3^{3/2}}{2^{1/2} g^{3/2} \pi^{1/2}} \varrho^{3/2}, \quad (39)$$

oder auch

$$\varrho = \frac{2^{1/2} g \pi \cdot \mu^{1/2}}{3 h^3} \cdot (-u_0)^{1/2}. \quad (40)$$

Allerdings ist, wie schon erwähnt, der Ausdruck (36) für die kinetische Energie nur solange ausreichend, als u nicht allzu stark mit dem Orte variiert. Andernfalls, also bei sehr großem Betrage des grad u , kommt zu η noch ein Zusatzglied η' hinzu. Dieser Zusatz kann in erster Näherung nur von grad ϱ , nicht etwa auch von *zweiten* Ableitungen von ϱ , abhängen, und muß offenbar proportional mit (grad ϱ)² sein. Aus Dimensionsgründen muß dann η' bis auf einen Zahlfaktor gleich h^2 (grad ϱ)²/ $\mu\varrho$ sein; und die genauere Rechnung liefert (nach v. WEIZSÄCKER):

$$\eta' = \frac{h^2}{32 \pi^2 \mu} \cdot \frac{(\text{grad } \varrho)^2}{\varrho}. \quad (41)$$

§ 2. Relativistische Wellengleichungen.

I. Die MAXWELLSCHEN Gleichungen. Mit den Ergebnissen des vorigen Paragraphen ist die Quantenmechanik im engeren Sinne zu einem gewissen Abschluß gekommen: Wir übersehen jetzt die durch das Auftreten individuell ununterscheidbarer Teilchen bedingten besonderen Verhältnisse; und wir beherrschen jetzt die Dynamik der Elektronenhüllen der Atome und Moleküle mit alleiniger Ausnahme gewisser feiner Störeffekte — die erst bei den *Röntgenspektren* eine merklichere Bedeutung gewinnen (SOMMERFELDSche Feinstrukturformel). Aber nur die Tatsache, daß die Elektronen der Elektronenhüllen sich hinreichend *langsam* bewegen — mit einer Geschwindigkeit, die klein gegen die *Lichtgeschwindigkeit* ist — ermöglicht uns diese fast vollständige theoretische Erfassung; sobald, wie in den inneren, für die Röntgenspektren maßgebenden Schalen schwerer Atome, wegen größerer Elektronengeschwindigkeiten die *relativistischen* Abänderungen der klassischen Mechanik merkbar werden, lassen die bisherigen Methoden uns im Stich.

Bekanntlich sind die durch die Relativitätstheorie geforderten Abänderungen der klassischen Punktmechanik sehr einfacher und übersichtlicher Art, sofern ein Hereinspielen von Quanteneffekten außer Betracht bleibt, und umgekehrt haben wir die quantentheoretischen Abänderungen der klassischen Kinematik und Mechanik in ganz klarer und exakter Weise fassen können für den Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten. Jetzt aber kommen wir zu Problemen, in denen *Relativitäts- und Quanteneffekte zugleich zu berücksichtigen* sind, und das führt uns in Schwierigkeiten einer ganz anderen Größenordnung.

Wir kennen aber zum Glück recht gut die Gesetzmäßigkeiten einer Teilchenart, bei welcher eine Approximation im nichtrelativistischen Sinne gar nicht möglich ist: der *Lichtquanten* nämlich, betreffs deren wir nicht zweifeln können, daß die relativistisch invarianten *MAXWELLSCHEN Gleichungen* uns auch quantentheoretisch richtige Aussagen liefern,

deren physikalische Deutung und Verwendung allerdings eine von den klassischen Vorstellungen sehr verschiedene ist.

Wir betrachten hier nur die MAXWELLSchen Gleichungen *im Vakuum*; also

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{H}} &= 0; & \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{E}} &= 0; \\ \operatorname{div} \mathfrak{H} &= 0; & \operatorname{div} \mathfrak{E} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die relativistische Invarianz dieser Gleichungen ist dadurch gesichert, daß es möglich ist, sie in einer dem relativistischen *Tensorkalkül* entsprechenden Form hinzuschreiben. Wir fassen nämlich die sechs Feldstärkenkomponenten \mathfrak{E} , \mathfrak{H} zu einem „Sechservektor“ $F_{kl} = -F_{lk}$ zusammen nach folgendem Schema:

$$\begin{pmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ F_{21} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ F_{31} & F_{32} & 0 & F_{34} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{H}_x & -\mathfrak{H}_y & -i\mathfrak{E}_x \\ -\mathfrak{H}_x & 0 & \mathfrak{H}_x & -i\mathfrak{E}_y \\ \mathfrak{H}_y & -\mathfrak{H}_x & 0 & -i\mathfrak{E}_z \\ i\mathfrak{E}_x & i\mathfrak{E}_y & i\mathfrak{E}_z & 0 \end{pmatrix}; \quad i = \sqrt{-1}. \quad (2)$$

Dann können wir die MAXWELLSchen Gleichungen (1) so ausdrücken:

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial F_{jk}}{\partial x_k} = 0; \quad \frac{\partial F_{jk}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_j} + \frac{\partial F_{lj}}{\partial x_k} = 0. \quad (3)$$

Hier ist für x, y, z, ict die Bezeichnung x_1, x_2, x_3, x_4 gebraucht.

Bekanntlich garantieren die beiden linken Gleichungen (1) die Möglichkeit, ein elektrisches Potential V und ein magnetisches Vektorpotential \mathfrak{A} zu konstruieren, aus denen sich die Feldstärken durch Differentiation ableiten lassen:

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}; \quad \mathfrak{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{A}}. \quad (4)$$

Mit der jetzigen, relativistisch symmetrischen Bezeichnungsweise drückt sich das so aus: Die zweite Gleichung (3) garantiert die Möglichkeit, die Feldstärken F_{kl} aus einem „Viererpotential“

$$(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4) = (\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z, iV) \quad (5)$$

herzuleiten:

$$F_{kl} = \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_l}. \quad (6)$$

Die Feldstärken F_{kl} ändern sich nicht, wenn das Viererpotential um einen vierdimensionalen Gradienten abgeändert wird: Wenn wir Φ_k ersetzen durch

$$\Phi'_k = \Phi_k + \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}, \quad (7)$$

so ergeben sich nach (6) unveränderte F_{kl} .

Diese Tatsache — wir nennen sie die *Eichinvarianz der MAXWELLSchen Gleichungen* — nötigt uns, die Potentiale als Größen anzusehen, die

selber *keine unmittelbare* physikalische Bedeutung haben — ein bestimmter Zustand des elektromagnetischen Feldes ist durch Angabe der *Feldstärken* eindeutig bestimmt (denn bei der Wechselwirkung des Feldes mit Materie kommt es *nur* auf die Feldstärken an), und dabei bleiben die Potentiale gemäß (7) noch in gewissem Umfang *willkürlich*.

Durch (6) wird die zweite Gleichung (3) *stets erfüllt*; es bleibt dann also nur die *erste* Gleichung (3), welche für die Potentiale folgendes bedeutet:

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial^2 \Phi_l}{\partial x_k^2} - \frac{\partial}{\partial x_l} \sum_{k=1}^4 \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_k} = 0. \tag{8}$$

Man kann aus den Feldstärken die folgenden zwei *Invarianten* (Skalare) bilden:

$$\mathfrak{E} \mathfrak{H}; \quad \mathfrak{E}^2 - \mathfrak{H}^2. \tag{9}$$

Viel wichtiger aber ist uns der *Energietensor* $T_{kl} = T_{lk}$:

$$4\pi T_{kl} = \sum_{j=1}^4 F_{kj} F_{jl} + \frac{1}{4} \delta_{kl} \sum_{i,r=1}^4 F_{ir}^2, \tag{10}$$

der also insbesondere die Komponenten

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) &= T_{44} = \text{Energiedichte,} \\ \frac{c}{4\pi} [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] &= ic(T_{14}, T_{24}, T_{34}) = \text{Energiestrom (POYNTINGScher Vektor)} \end{aligned} \right\} \tag{10'}$$

besitzt.

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun prüfen, *in welchem Umfang es berechtigt ist, die MAXWELLSchen Gleichungen — als Wellengleichung des Lichtquants — in Parallele zu stellen zur SCHRÖDINGERSchen Wellengleichung eines Massenpunktes*, in der Form

$$\frac{\hbar^2}{8\pi^2 \mu} \Delta \psi + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \tag{11}$$

Wir haben uns in unseren früheren Aufstellungen gerade von der *Analogie* beider Probleme leiten lassen; jetzt haben wir auch auf die sehr wesentlichen *Verschiedenheiten* Gewicht zu legen. Vorweg heben wir hervor, daß wir für das MAXWELLSche Feld *reelle* Wellenamplituden $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ gebrauchen, dagegen die SCHRÖDINGERSche Wellenamplitude ψ *komplex* anzusetzen haben. Darin liegt ein Unterschied beider Fälle, welcher *nicht* durch formale Tricks (etwa Einführung von $\mathfrak{E} + i\mathfrak{H}$ oder andererseits Zerlegung von ψ in Real- und Imaginärteil) beseitigt werden kann, weil ihm ein ganz verschiedenes Verhalten von $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ einerseits und ψ andererseits in bezug auf die soeben berührte *Eichinvarianz* zugrunde liegt. Wir kommen darauf später zurück.

Die *engste Analogie* zeigen beide Probleme hinsichtlich der Verknüpfung der Wellenamplituden $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ bzw. ψ mit den *Impulsen*: Wollen wir an einem Lichtstrahl oder aber an einem DE BROGLIE-Strahl eine *Impulsmessung* machen, so haben wir eine *spektrale Zerlegung* (also

mathematisch ausgedrückt: eine FOURIER-Analyse) der Welle \mathcal{E} , \mathcal{H} bzw. ψ auszuführen; die Intensitätsverteilung im Spektrum ergibt dann — nach Umrechnung der Wellenlängen λ in Impulse $|p| = h/\lambda$ — die erfragte Wahrscheinlichkeitsverteilung für die verschiedenen Impuls-
werte. Auch über die *Richtungen* der Impulse in einem dreidimensionalen Wellenfeld bekommen wir für beide Probleme in übereinstimmender Weise Auskunft, indem wir das Wellenfeld als Superposition ebener fortschreitender Wellen auffassen.

Aber während wir beim ψ -Feld eine *Ortswahrscheinlichkeitsdichte* $|\psi|^2$ haben, *gibt es etwas Analoges beim Lichtfeld nicht*: Wir haben hier nur die *Energiedichte* $(\mathcal{E}^2 + \mathcal{H}^2)/8\pi$ (oder auch z. B. eine der Komponenten des POYNTINGSchen Vektors) als Wahrscheinlichkeitsmaß zur Verfügung; und nur in dem speziellen (allerdings in den meisten Beugungsexperimenten vorliegenden) Falle *monochromatischer* Strahlung können wir die wellentheoretisch berechnete *Energiedichte* an einem bestimmten Ort unmittelbar als Wahrscheinlichkeit für das Vorhandensein des betrachteten Lichtquants an diesem Orte deuten. Von diesem Spezialfall abgesehen ermöglicht uns das MAXWELLSche Feld *nicht* die Bestimmung einer zu $|\psi|^2$ analogen Ortswahrscheinlichkeit des Lichtquants, und wir müssen geradezu sagen: Es würde *schlechterdings falsch sein*, wenn wir behaupten wollten, das MAXWELLSche Wellenfeld sei dem „*Ein-Lichtquantproblem*“ in derselben Weise zugeordnet, wie das SCHRÖDINGERSche Wellenfeld $\psi = \psi(x, y, z, t)$ dem *Einkörperproblem* zugeordnet ist.

Die Irrigkeit einer solchen — in der Literatur oft ausgesprochenen — Behauptung zeigt sich auch darin, daß es *keineswegs* möglich ist, von den MAXWELLSchen Gleichungen im dreidimensionalen Raum, als der angeblichen Formulierung der Wellenmechanik eines einzelnen Lichtquants, zu einer entsprechenden Verallgemeinerung im sechs-, neun-, . . . -dimensionalen Räume aufzusteigen, welche dem Zwei-Lichtquantenproblem, dem Drei-Lichtquantenproblem usw. zuzuordnen wäre. Dieser wenig beachtete Punkt läßt besonders deutlich die fundamentale Verschiedenheit der beiden Probleme erkennen.

In welcher Weise wir das MAXWELLSche Feld *einwandfrei* zu interpretieren haben, derart, daß sowohl die *Analogie* als auch der *Unterschied* gegenüber dem SCHRÖDINGERSchen Felde zu seinem Rechte kommt, das ist zum großen Teil schon geklärt durch die Feststellungen von Kapitel I, § 2, 3, die wir jetzt nur auf die nichtmonochromatischen Fall erweitern müssen.

Wir denken uns einmal einen Lichtstrahl und andererseits einen DE BROGLIE-Strahl die Apparatur eines Beugungsexperimentes durchlaufend, und dann auf einem Auffangschirm die sich ergebende Intensitätsverteilung gemessen. Ausdrücklich soll es sich beim Lichtstrahl *nicht* um einen monochromatischen Lichtstrahl handeln; aber auch nicht um eine bloße inkohärente Addition verschiedener monochromatischer Lichter. Wir wollen und können ferner annehmen, daß die Emission

der fraglichen Strahlungsquelle nach Ablauf einer gewissen Zeit vorüber ist; was wir wellentheoretisch ausrechnen wollen, sind die *insgesamt* in der Summation über die ganze Dauer des Experimentes sich ergebenden Intensitäten auf dem Auffangschirm.

In diesen Voraussetzungen steckt keineswegs die Annahme, daß wir es in unserem Experiment nur mit einem *einzigem Teilchen* zu tun haben — tatsächlich würde diese Annahme, soweit es sich um den Lichtstrahl handelt, unhaltbar sein, sobald wir uns nicht auf den monochromatischen Fall beschränken. Statt dessen setzen wir voraus, daß *keinerlei Wechselwirkungen* zwischen den Teilchen stattfinden (so daß, wenn es sich etwa um elektrisch geladene Teilchen handelt, die Strahlungsdichte hinreichend klein sein muß). Außerdem *verzichten* wir hier gänzlich auf die Behandlung irgendwelcher Fragen betreffs der Intensitäts-*Schwankungen* der Strahlung.

Nun zeigt sich folgender fundamentaler Unterschied: Bei der ψ -Strahlung können wir aus ψ den statistischen Erwartungswert für die auf einem gewissen Stück des Auffangsschirmes aufgefallene *Teilchenzahl* errechnen. Für die \mathfrak{E} , \mathfrak{H} -Strahlung hingegen bekommen wir aus $(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)/8\pi$ den statistischen Erwartungswert für die auf einem Stück des Schirmes aufgefallene *Energie*¹; und daraus können wir bei nichtmonochromatischer Strahlung keineswegs einen Erwartungswert für die Zahl aufgefallener Lichtquanten entnehmen. Man kann natürlich auch mancherlei andere Erwartungswerte berechnen; jedenfalls aber ist beim Licht unter den gemachten Voraussetzungen ein Erwartungswert der Lichtquantenzahl *nicht* zu bekommen, und das bedeutet, daß in Experimenten dieser Art eine definierte Festlegung der Lichtquantenzahl überhaupt nicht eintritt, sondern vielmehr *solche* Größen beobachtet werden, welche im Sinne der allgemeinen Theorie von Kapitel 3, § 5 *mit der Lichtquantenzahl nicht vertauschbar sind*. Folglich ist es auch nicht möglich, die MAXWELLSchen Gleichungen als Wellengleichung für das Ein-Lichtquantenproblem (also ein Problem mit *definierter* Lichtquantenzahl) anzusehen.

2. Die Wellengleichung des α -Teilchens. Eine relativistisch invariante Verallgemeinerung der SCHRÖDINGER-Gleichung durchzuführen, ist für Teilchen *ohne Spin* sehr leicht. Da zwischen Energie E und Impuls \mathfrak{G} die Beziehung

$$\frac{E^2}{c^2} - \mathfrak{G}^2 = \mu^2 c^2 \tag{I2}$$

besteht, wenn μ die *Ruhmasse* der fraglichen Teilchen ist, so muß gemäß den DE BROGLIESchen Zuordnungsbeziehungen zwischen Frequenz ν und Wellenlänge λ die Relation

$$\frac{\nu^2}{c^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2} \tag{I3}$$

¹ Man beachte übrigens, daß auch bezüglich der *Orthogonalität* der Eigenfunktionen (Eigenschwingungen eines elektromagnetischen Hohlraums!) die Energiedichte $(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)/8\pi$ eine analoge Rolle spielt, wie $|\psi|^2$ bei den SCHRÖDINGER-Wellen.

bestehen; und eine *Superposition* von ebenen fortschreitenden Wellen, deren jede einzelne (13) entspricht, ist allgemein zu kennzeichnen durch die relativistisch invariante Wellengleichung

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2}\right) \psi - \frac{4 \pi^2 \mu^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0. \quad (14)$$

Dies haben wir noch zu verallgemeinern für den Fall des Vorhandenseins äußerer elektrischer und magnetischer Felder, gemäß (2), (5), (6) gekennzeichnet durch ein Viererpotential Φ_k ; und ein Blick auf die nichtrelativistische SCHRÖDINGER-Gleichung (11) läßt erkennen, daß die gesuchte Verallgemeinerung nur so lauten kann:

$$\sum_{k=1}^4 \left(\frac{\hbar}{2 \pi i} \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{e}{c} \Phi_k \right)^2 \psi + \mu^2 c^2 \psi = 0. \quad (15)$$

Dabei bedeutet e jetzt die Ladung der fraglichen Teilchen; also, wenn wir z. B. an α -Teilchen denken, die *zweifache* Elektronenladung. Die Wellenfunktion ψ ist als eine relativistische Invariante (Skalar) anzusehen.

Infolgedessen können wir aber *nicht* mehr $|\psi|^2$ als räumliche Wahrscheinlichkeitsdichte interpretieren. Relativistisch müssen wir nämlich, sofern es überhaupt möglich ist, einen statistischen Erwartungswert der räumlichen Teilchendichte zu definieren, hierfür einen solchen Ausdruck bekommen, welcher sich relativistisch wie die *vierte Komponente eines Vierervektors* transformiert — also ebenso wie die elektrische *Ladungsdichte*, welche zusammen mit dem elektrischen *Strom* einen Vierervektor bildet, den sog. *Viererstrom*. Nun ist leicht zu sehen, daß im jetzigen Falle die vier Größen

$$s_k = ie \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x_k} \psi \right) + \frac{4 \pi e^2}{\hbar c} \Phi_k \psi^* \psi \quad (16)$$

als *Erwartungswerte der Komponenten des Viererstroms* zu deuten sind; man bestätigt leicht, daß als Folgerung der Wellengleichung (15) die folgende, das Gesetz der *Erhaltung der Elektrizität* ausdrückende Beziehung gilt¹:

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial s_k}{\partial x_k} = 0. \quad (17)$$

Danach interpretieren wir die relativistische Wellengleichung ausführlich folgendermaßen. Es seien genau dieselben Voraussetzungen

¹ Wir haben die Ausdrücke s_k für $k=1, 2, 3$ zu identifizieren mit der Erwartungswerten der Stromdichte i ; und s_4/ic gibt die statistische Ladungsdichte ρ ; die Gleichung (17) lautet dann also in gewöhnlicher, nichtrelativistischer Bezeichnungsweise:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} i = 0.$$

erfüllt, wie sie oben für die Lichtwelle und für die Welle *langsamer* Massenpunkte formuliert wurden. Dann können wir aus

$$s_4 = \frac{e}{c} (\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi) + \frac{4\pi e^2}{hc} \Phi_k \psi^* \psi \quad (18)$$

den Erwartungswert für die auf ein Stück des Auffangsschirmes auftreffende *elektrische Ladung* entnehmen.

Es würde aber unrichtig sein, wenn wir — darauf vertrauend, daß unsere Teilchen alle dieselbe Ladung e besitzen — annehmen wollten, daß durch die aufgefallene Ladungsmenge ohne weiteres auch die Zahl der aufgefallenen Teilchen gegeben, und sonach der Ausdruck (18) nach Division mit e einfach als statistische Teilchendichte analog zum nicht-relativistischen $|\psi|^2$ zu deuten sei. Erinnern wir uns an die Ausführungen von Kapitel 3, § 5, 2. Dort wurde gezeigt, daß wir, wenn V irgendein Stück des dreidimensionalen Raumes ist, eine Matrix konstruieren können, welche die *Anzahl der in V enthaltenen Teilchen* darstellt, und welche dementsprechend nur die zwei Eigenwerte 0 und 1 besitzt; der *Erwartungswert* dieser Matrix ist dann gleich dem Integral unserer statistischen Teilchendichte über das Gebiet V , womit sich unsere Deutung als in sich konsequent und geschlossen erweist. Aber wenn wir jetzt für die relativistische Theorie die (durch e i dividierte) Größe (18) als statistische Teilchendichte interpretieren, dann zeigt sich, daß es *nicht* möglich ist, im Einklang damit eine Matrix „Anzahl der Teilchen in V “ zu konstruieren; wir verwickeln uns hier in Widersprüche.

Wir müssen uns also entschließen, hier ähnliche Verhältnisse anzuerkennen, wie wir sie bei den Lichtquanten gefunden haben: Auch hier *gibt es keinen* Ausdruck für die statistische Teilchendichte, und wir müssen die relativistisch invariante Wellengleichung (15) als Beschreibung eines Problems mit undefinierter Teilchenzahl betrachten — also bestimmt *nicht* als Beschreibung des *Einkörperproblems*.

Wieso aber, ohne daß sich ein Widerspruch ergibt, bei definierter Ladungsmenge die Teilchenzahl trotzdem undefiniert sein kann, das wird uns verständlich aus sehr modernen Erkenntnissen: Es handelt sich darum, daß die Forderung der relativistischen Invarianz nicht durchzuführen ist ohne die Mitberücksichtigung von Prozessen der *Entstehung und Vernichtung von Teilchen*, oder genauer: von *Teilchenpaaren mit entgegengesetzt gleicher Ladung*.

Bevor wir die Wellengleichung (15) verlassen, sei die *Eichinvarianz* noch betrachtet. Wenn wir gemäß (7) das Viererpotential Φ_k durch ein um einen Gradienten abgeändertes Viererpotential Φ'_k ersetzen, so *ändert* sich auch die Wellenfunktion ψ . Aber ihre Änderung geschieht derart, daß z. B. die Komponenten des Viererstroms s_k *unverändert* bleiben; denn das abgeänderte ψ' ist gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} \Phi'_k &= \Phi_k + \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}, \\ \psi' &= \psi e^{\frac{2\pi i}{h} \Psi}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Wir nennen Größen, die bei dieser Abänderung (19) *ungeändert* bleiben, kurz „*eichinvariant*“; eichinvariant sind also z. B. die Feldstärken F_{kl} oder der Viererstrom s_k ; und ganz allgemein kommen überhaupt nur eichinvariante Größen für eine unmittelbare physikalische Deutung (als meßbare Größen oder als Wahrscheinlichkeiten) in Betracht.

3. Die relativistische Wellengleichung des Elektrons. Nach der Besprechung der spinfreien Teilchen wenden wir uns der Frage zu, wie die den Spin mitberücksichtigende Wellengleichung Kapitel 3, § 5, 3 des Elektrons relativistisch invariant zu machen sei. Nach den Ergebnissen des vorigen Abschnitts ist eine ganz bestimmte Antwort naheliegend. Wir schreiben nämlich für eine zweikomponentige Wellenfunktion

$$\left\{ \sum_{k=1}^4 \left(\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{e}{c} \Phi_k \right)^2 + \mu^2 c^2 + \frac{\hbar e}{\pi c} (\mathfrak{H} \pm i\mathfrak{E}) \mathfrak{B} \right\} \psi = 0; \quad (20)$$

dabei sollen $\mathfrak{B} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ wieder die drei PAULISCHEN Matrizen sein, und wir schreiben $\mathfrak{H} \pm i\mathfrak{E}$, um auszudrücken, daß es zwei verschiedene, gleichberechtigte Möglichkeiten gibt: Wir können sowohl $\mathfrak{H} + i\mathfrak{E}$, als auch $\mathfrak{H} - i\mathfrak{E}$ einsetzen. Diese Gleichung (20) ist tatsächlich *relativistisch invariant*. Diese naheliegende Gleichung (20) tritt jedoch an Eindruckskraft zurück gegenüber einer andersartigen, mit (20) äquivalenten Wellengleichung, deren Auffindung durch DIRAC zu den glänzendsten Entdeckungen der Quantentheorie gehört.

Wir nehmen vier Matrizen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ mit folgender Eigenschaft:

$$\alpha_k \alpha_l + \alpha_l \alpha_k = 2\delta_{kl} \mathbf{I} \quad (21)$$

(also $\alpha_k^2 = \mathbf{I}$ und $\alpha_k \alpha_l = -\alpha_l \alpha_k$ für $l \neq k$). Solche Matrizen sind etwa:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \alpha_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \\ \alpha_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \alpha_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

es handelt sich also um *hermitesche* Matrizen mit vier Zeilen und Spalten.

Dann schreiben wir die Wellengleichung nach DIRAC in folgender Form:

$$\left\{ \sum_{k=1}^4 \alpha_k \left(\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{e}{c} \Phi_k \right) + i\mu c \right\} \psi = 0. \quad (23)$$

Dabei hat die Wellenfunktion ψ vier Komponenten $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$, und die Schreibweise in (23) ist so gemeint, daß wir beispielsweise unter $\alpha_1 \psi$ gemäß (22) die vier Größen $\psi_3, -\psi_4, \psi_1, -\psi_2$ verstehen.

Die Gleichung (23) ist tatsächlich *relativistisch invariant*. Aber die vier Größen $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ ändern sich bei LORENTZ-Transformationen

in einer Weise, die nicht in das gewöhnliche Schema der *Tensorrechnung* hineinpaßt: die Quantentheorie hat hier der Relativitätstheorie etwas unerwartetes Neues hinzugefügt, indem sie auf die Möglichkeit einer grundsätzlichen Erweiterung der relativistischen Tensorrechnung hingewiesen hat. Man pflegt diese Größen $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ einen *Spinor* zu nennen: für den nichtrelativistischen Spezialfall hatten wir diese Bezeichnung schon früher erwähnt.

Für den *kräftefreien* Fall $\Phi_k = 0$ bekommen wir aus (24) wieder die alte Gleichung (14). Denn dann ist

$$\left\{ \frac{\hbar}{2\pi i} \sum_{k=1}^4 \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} + i\mu c \right\} \psi = 0,$$

also auch

$$\left\{ \frac{\hbar}{2\pi i} \sum_{r=1}^4 \alpha_r \frac{\partial}{\partial x_r} - i\mu c \right\} \cdot \left\{ \frac{\hbar}{2\pi i} \sum_{k=1}^4 \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_k} + i\mu c \right\} \psi = 0,$$

oder ausgerechnet

$$\left(\Delta - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \right) \psi - \frac{4\pi^2 \mu^2 c^2}{\hbar^2} \psi = 0.$$

Für $\Phi_k \neq 0$ ergibt sich analog, daß ψ folgender Gleichung genügt:

$$\left\{ \sum_{k=1}^4 \left(\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{e}{c} \Phi_k \right)^2 + \mu^2 c^2 + \frac{\hbar e}{4\pi i c} \sum_{k,l=1}^4 \alpha_k \alpha_l F_{kl} \right\} \psi = 0. \quad (24)$$

Nach (22) wird das Produkt

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 = - \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} \end{pmatrix}; \quad (25)$$

und da nach (21) alle $\alpha_k \alpha_l$ mit α vertauschbar sind, so zerfällt (24) in zwei Systeme von je zwei Gleichungen für ψ_1, ψ_2 allein und ψ_3, ψ_4 allein — man erkennt leicht, daß dies in der Tat die Gleichungen (20) sind.

Es ist also von der DIRACschen Wellengleichung (23) festzustellen, daß sie für den Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten des Elektrons in richtiger Weise die nichtrelativistische SCHRÖDINGER-Gleichung und die DARWIN-PAULISCHE Theorie des Spinelektrons ergibt, und sie verallgemeinert diese Theorie zu einer relativistisch invarianten Theorie. Schon dies muß starkes Vertrauen zur DIRACschen Gleichung (23) erwecken. Weiterhin ergeben sich aber gerade für große Elektronengeschwindigkeiten aus der DIRACschen Gleichung zwei Folgerungen, welche empirisch ausgezeichnet stimmen: Einerseits bekommt man für die COMPTONSchen Streuintensitäten bei sehr großen Frequenzen die die Formel (20), Kapitel I, § 2, 4 verallgemeinernde Formel von KLEIN-NISHINA, die den empirischen Befunden gut entspricht:

$$\left. \begin{aligned} I(\Theta) &= \frac{I_0 N e^4}{2 \nu^2 \mu^2 c^4} \cdot \frac{1 + \cos^2 \Theta}{(1 + \alpha(1 - \cos \Theta))^3} \cdot f(\Theta), \\ f(\Theta) &= 1 + \alpha^2 \frac{(1 - \cos \Theta)^2}{(1 + \cos^2 \Theta)(1 + \alpha(1 - \cos \Theta))}; \\ \alpha &= \frac{h \nu}{\mu c^2}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Andererseits bekommt man für die Terme der *Röntgenspektren* die berühmte SOMMERFELDSche *Feinstrukturformel*, die schon lange vor der Quantenmechanik mit den damaligen korrespondenzmäßigen Methoden von SOMMERFELD hergeleitet wurde, und die LANDÉ in verallgemeinerter Form auch auf die Absolutwerte der optischen Multiplettaufspaltungen anwenden konnte.

Die relativistisch exakten Energiewerte eines an einen (unendlich schweren) COULOMB-Kern der Ladung Ze gebundenen Elektrons sind:

$$W_{nj} = \frac{\mu c^2}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{\left(n - j - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \alpha^2 Z^2}\right)^2}}} - \mu c^2; \quad (27)$$

dabei ist α [natürlich nicht zu verwechseln mit dem α in (26)!] die fundamentale SOMMERFELDSche *Feinstrukturkonstante*

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}; \quad \frac{1}{\alpha} = 136,8 \pm 0,2, \quad (27')$$

eine *dimensionslose Zahl*, deren so stark von 1 verschiedener numerischer Wert uns ein noch völlig ungelöstes Rätsel aufgibt.

Die von SOMMERFELD gegebene Formel (27) ist nach GORDON eine notwendige Folgerung der DIRACSchen Gleichung (23). Sie findet in den Röntgenspektren eine umfassende empirische Bestätigung. Es verdient besondere Hervorhebung, daß die ursprüngliche SOMMERFELDSche Herleitung dieser Formel — dem damaligen Kenntnisstand entsprechend — ganz ohne Bezugnahme auf das *Spinmoment* des Elektrons ausgeführt wurde, unter alleiniger Berücksichtigung der *relativistischen* Formel für die kinetische Energie eines schnellen Elektrons. Man sieht daraus, daß die klassische Veranschaulichung des Spins („rotierendes Elektron“) nicht zu ernst genommen werden darf; es handelt sich im Grunde um einen *quantenphysikalischen Relativitätseffekt*.

Wir betrachten noch einige allgemeine Folgerungen von (23). Wenn $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ und $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ irgend zwei Spinoren sind, so gebrauchen wir die Abkürzung:

$$(\varphi, \psi) = \varphi_1^* \psi_1 + \varphi_2^* \psi_2 + \varphi_3^* \psi_3 + \varphi_4^* \psi_4.$$

Aus einem Spinor ψ kann man dann bilden:

Zwei *Invarianten* (Skalare):

$$I_1 = (\alpha_4 \psi, \psi); \quad I_2 = (\alpha_4 \psi, \alpha \psi); \quad (28)$$

zwei *Vierervektoren*:

$$s_k = eci(\alpha_4 \psi, \alpha_k \psi); \quad \tau_k = (\alpha_4 \psi, \alpha \alpha_k \psi); \quad (29)$$

einen *Sechservektor*:

$$\mu_{kl} = -\mu_{lk} = (\alpha_4 \psi, \alpha_k \alpha_l \psi); \quad k \neq l. \quad (30)$$

Uns soll hier nur der Vierervektor s_k beschäftigen, dessen Deutung als *Viererstrom*

$$s_4 = ic\rho; \quad e(s_1, s_2, s_3) = i \quad (31)$$

naheliegt: Wir haben ihn aus diesem Grunde gleich mit einem Faktor e versehen hingeschrieben. Es wird nämlich auf Grund der DIRAC-Gleichung (23):

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} \cdot \frac{\partial s_k}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} (\alpha_4 \psi, \alpha_k \psi) \\ &= \left(\alpha_4 \frac{\partial \psi}{\partial x_k}, \alpha_k \psi \right) + \left(\alpha_4 \psi, \alpha_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) \\ &= - \left(\alpha_4 \alpha_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k}, \psi \right) + \left(\alpha_4 \psi, \alpha_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) \\ &= - \left(\alpha_4 \alpha_k \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \frac{2\pi i}{\hbar} \frac{e}{c} \Phi_k \right\}, \psi \right) \\ &+ \left(\alpha_4 \psi, \alpha_k \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \frac{2\pi i}{\hbar} \frac{e}{c} \Phi_k \right\} \right), \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial s_k}{\partial x_k} = 0, \quad (32)$$

entsprechend der früheren Gleichung (17), die wir als *Erhaltungssatz der Elektrizität* zu verstehen hatten. Die in (31) ausgesprochene Deutung von s_k als Viererstrom findet weiterhin eine Stütze darin, daß dieses in (29) definierte s_k tatsächlich von dem früheren durch (16) definierten nur wenig verschieden ist, um eine Differenz, die in anschaulich deutbarer Weise mit dem *Spinmoment* zusammenhängt (GORDON).

Zum *Energiesatz* ist folgendes zu sagen: Wir definieren

$$T'_{kl} = \left(\alpha_4 \psi, \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k} \alpha_l \psi \right); \quad (33)$$

dann beweist man, analog zur soeben ausgeführten Rechnung:

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial T'_{kl}}{\partial x_k} = 0; \quad \sum_{l=1}^4 \frac{\partial T'_{kl}}{\partial x_l} = 0. \quad (34)$$

Man kann danach

$$T_{kl} = \frac{1}{2} (T'_{kl} + T'_{lk}) \quad (35)$$

als den *Energietensor* bezeichnen, analog dem MAXWELLSchen Energietensor (10).

Da in der soeben erläuterten Theorie nach (28), (31) der statistische Erwartungswert ρ der Ladungsdichte gleich

$$\rho = e(\psi, \psi) = e(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2) \quad (36)$$

wird, so scheinen die oben so ausführlich besprochenen Komplikationen hier *nicht* zu bestehen: man wird ρ/e unmittelbar als *Ortswahrscheinlichkeit* des Elektrons ansehen. Aber der Theorie erwachsen ganz neue, andersartige Schwierigkeiten aus dem Auftreten *negativer Energiewerte* in der zu (23) für den Fall zeitlich konstanter Φ_k gehörenden *Eigenwertgleichung*

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \mathfrak{a} \left(\frac{h}{2\pi i} \text{grad} - \frac{e}{c} \mathfrak{A} \right) - \alpha_4 \mu c + e V \right\} \varphi = W \varphi; \\ & \mathfrak{a} = i (\alpha_4 \alpha_1, \alpha_4 \alpha_2, \alpha_4 \alpha_3); \psi = \varphi e^{-\frac{2\pi i}{h} W t} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Auf die Besprechung dieser Verhältnisse kommen wir zurück; augenblicklich sei nur hervorgehoben, daß ihre Berücksichtigung auf ähnliche Komplikationen (notwendige Mitbetrachtung von Prozessen der *Paarerzeugung*) führt, wie wir sie schon bei der Wellengleichung des α -Teilchens voranden.

Abschließend stellen wir nach den Ergebnissen dieses Paragraphen fest: *In der Relativitätstheorie gibt es kein quantenmechanisches Einkörperproblem*, bei materiellen Teilchen ebensowenig, wie bei Lichtquanten. *Es gibt keinen, den relativistischen Invarianzforderungen genügenden Ausdruck für eine statistische räumliche Teilchendichte. Die relativistische Invarianz fordert in allen Fällen Prozesse der Vernichtung und Entstehung der betrachteten Teilchen.*

Damit zwingt uns der Versuch, unsere quantenmechanischen Gesetze dem Relativitätsprinzip anzupassen, zur Aufrollung von Problemen, die viel umfassender, viel schwieriger und viel tiefer als die bislang behandelten sind — die sich aber sowieso unausweichlich darbieten, sobald wir über die Quantenmechanik hinaus zu einer *Quantenelektrodynamik* fortzuschreiten suchen.

§ 3. Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes.

1. *Einführung.* Wir wollen nun ein Problem sehr grundsätzlichen Charakters in Angriff nehmen: Das Verhältnis der MAXWELLSchen *Feldstärken* \mathfrak{E} , \mathfrak{H} (im Vakuum) zu den EINSTEINSchen *Lichtquanten* $h\nu$ muß endlich vollständig geklärt werden. Wir haben uns im vorigen Paragraphen davon überzeugen können, daß für ein weites Gebiet der wichtigsten und bekanntesten optischen Experimente die MAXWELLSchen Gleichungen tatsächlich — sofern wir nur ihre *Interpretation* durch Einführung statistischer Begriffe anpassen an die Lichtquantenvorstellung — eine auch jetzt noch als exakt anzuerkennende Beschreibung geben. Aber wir sind uns auch klar darüber, daß die so gewonnene Theorie eben doch von begrenzter Bedeutung ist, und daß eine *vollständige* Theorie des elektromagnetischen Feldes eine viel tiefer gehende und viel innigere Verknüpfung und Verschmelzung zwischen Feldbegriff und Lichtquantenbegriff herstellen muß. Wir sahen ja im

vorigen Paragraphen, daß dasjenige, was uns durch diese unmittelbare statistische Ausdeutung der MAXWELLSchen Gleichungen gegeben wird, gewissermaßen *nicht mehr wert ist*, als eine Theorie des *Einlichtquant*-Problems. Zwar mußten wir feststellen, daß die fragliche Theorie tatsächlich *nicht* dem Einlichtquantproblem entspricht, aber doch steht sie offenbar der jetzt zu suchenden vollständigen Lichttheorie sozusagen als ein *ebenso kleines Teilstück* gegenüber, wie die (nichtrelativistische) Theorie des Einelektronproblems der vollen Theorie des Mehrelektronenproblems gegenübersteht — ja, wir werden diese Feststellung noch zu verschärfen haben. Die Tatsache, daß es zwischen Lichtquanten keine merklichen Wechselwirkungen gibt, also kein Analogon etwa für die COULOMBSche Abstoßung zwischen den Elektronen, bedingt zwar, daß die im vorigen Paragraphen formulierte Lichttheorie praktisch doch sehr viel wert ist — während andererseits unser Verständnis der Elektronendynamik ein *sehr* eng begrenztes wäre, wenn wir *nur* das Einelektronproblem verstanden hätten. Aber andererseits sind uns gerade bei den Lichtquanten solche Prozesse wichtig, deren Analogon bei den Elektronen *noch mehr*, als die uns aus § 1 dieses Kapitels bekannte Mehrelektronentheorie erfordert: Prozesse der *Erzeugung und Vernichtung* von Lichtquanten sind zu untersuchen; so daß also das Schwergewicht hier bei Prozessen liegt, die bei den Elektronen, solange wir uns auf die nicht relativistische Approximation beschränken, überhaupt nicht vorkommen. Aber bei den Lichtquanten gibt es, keine nichtrelativistische Approximation.

Für den Leser, der dem Gedankengange dieses Buches gefolgt ist, wird es schwer verständlich sein, daß über den Weg, der zur Bewältigung des jetzt vor uns liegenden Problem es eingeschlagen werden muß, noch nach der Aufstellung der Quantenmechanik fast zwei Jahre lang Zweifel bestehen konnten — also eine sehr lange Zeit angesichts des damaligen stürmischen Entwicklungstempos. Wir haben von Beginn des Buches an, uns über den historischen Entwicklungsgang hinwegsetzend, die engen Zusammenhänge und Wechselbeziehungen zwischen der Lichtquantentheorie und den aus dem BOHRschen Korrespondenzprinzip entwickelten Gedankengängen hervorgehoben; und da wir schon in Kapitel 1 den Sinn des PLANCKschen Gesetzes so aufgefaßt haben, daß die einzelnen *Eigenschwingungen* dieselben Quanteneffekte zeigen, wie *andere* harmonische Oszillatoren auch, so ist uns — nach allem, was wir inzwischen sonst noch zur Klärung dieser Probleme zusammengetragen haben — der weitere Weg eindeutig vorgezeichnet:

Wir werden auf die Eigenschwingungen des elektromagnetischen Hohlraums die exakte, matrixentheoretische Quantentheorie des harmonischen Oszillators anzuwenden haben.

Aber als dieser Gedanke vom Verfasser gefaßt wurde, war der bisherige Inhalt dieses Buches noch zum großen Teile unbekannt: Die vom BOHRschen Korrespondenzprinzip geleitete Quantentheorie der Atome war

soeben bis zur Aufstellung der Quantenmechanik vorgedrungen (HEISENBERG, BORN, DIRAC, JORDAN). Aber die ganze bis dahin führende Entwicklung hatte sich in weiter Distanz von der radikalen Lichtquantenhypothese, und kaum beeinflußt von ihr, vollzogen: Die SCHRÖDINGERSche Wellenmechanik existierte noch nicht, die DE BROGLIESchen Wellen wurden erst eben den Physikern bekannt und entbehrten noch der experimentellen Bestätigung. Mit einem Wort: Die mächtigen Impulse, welche die quantentheoretische Gedankenentwicklung seitens der Lichtquantentheorie erhalten hat, waren noch kaum zur Auswirkung gekommen, als gezeigt werden konnte, daß auf Grund des eben formulierten Gedankens die Matrizenmechanik die grundsätzliche Lösung des großen Problems einer exakten Quantentheorie des Lichtfeldes zu geben vermag (1925).

Aber dieser Gedanke, der uns jétzt fast selbstverständlich erscheinen muß, wurde damals als so kühn empfunden, daß er zunächst fast allseitiger Ablehnung begegnete. Erst 1927 hat er sich nach den DIRACschen Untersuchungen zur Strahlungstheorie allgemein durchgesetzt.

2. Eindimensionales Kontinuum. Wir wollen das Problem des elektromagnetischen Feldes zunächst vereinfachen, indem wir statt des dreidimensionalen Raumes einen eindimensionalen zugrunde legen; auch wollen wir statt der MAXWELLSchen Gleichungen die einfachste ähnliche Gleichung, also die eindimensionale *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

betrachten. Nehmen wir noch an, daß an den Enden des Intervalles $0 \leq x \leq l$ stets $u = 0$ ist, so haben wir es, anschaulich gesprochen, mit einer *ingespannten elastischen Saite* der Länge l zu tun; wobei die Energie durch

$$H = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \quad (2)$$

gegeben ist. Mit

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_k q_k \cdot \sin \frac{k \pi}{l} x, \\ q_k &= \frac{2}{l} \int_0^l u \cdot \sin \frac{k \pi}{l} x \cdot dx, \\ p_k &= \frac{l}{2} \dot{q}_k \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

gewinnen wir dann kanonische Koordinaten q_k und Impulse p_k der verschiedenen Eigenschwingungen ($k = 1, 2, 3, \dots$). Die Energie nämlich wird gleich

$$H = \sum_k \left(\frac{p_k^2}{l} + \frac{k^2 \pi^2}{4 l^2} q_k^2 \right), \quad (4)$$

und (1) wird äquivalent mit den zu (4) gehörigen kanonischen Bewegungsgleichungen für die p_k, q_k . Dies ist die klassische Theorie der schwingenden Saite, die wir nun in die Quantenmechanik übersetzen sollen.

Dazu werden die Gleichungen (3), (4) beibehalten, jedoch jetzt für Matrizen p_k, q_k , und es werden die charakteristischen Gesetze der Quantenmechanik auf die p_k, q_k angewandt. Es wird also

$$\left. \begin{aligned} [p_k, q_l] &= \frac{\hbar}{2\pi i} \delta_{kl} \mathbf{1}, \\ [p_k, p_l] &= [q_k, q_l] = 0; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

und weiterhin

$$\left. \begin{aligned} u(x) &= \sum_k q_k \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x, \\ q_k &= \frac{2}{l} \int_0^l u \cdot \sin \frac{k\pi}{l} x \cdot dx, \\ u(0) &= u(l) = 0; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \dot{u}^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \\ &= \sum_k \left(\frac{p_k^2}{l} + \frac{\pi^2 \hbar^2}{4l} q_k^2 \right). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die Energie H muß Diagonalmatrix sein; und die zeitliche Ableitung \dot{F} irgendeiner Funktion F der p_k, q_k ist gegeben durch

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \dot{F} = [H, F]. \quad (8)$$

Danach bleibt auch die Wellengleichung (1) ungeändert bestehen, und zwar als eine Folge der Ansätze (5) bis (8). (Man beachte, daß x nach wie vor eine *gewöhnliche Zahl* bleibt):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \ddot{u}. \quad (9)$$

Es bedarf keiner besonderen Erläuterung mehr, daß wir diese hier für den *eindimensionalen* Fall erläuterte Theorie sofort auf einen *drei-dimensionalen* Hohlraum mit der Wellengleichung

$$\Delta u = \ddot{u} \quad (10)$$

übertragen können. Auch können wir für die *elektromagnetischen* Hohlraumeigenschwingungen (etwa in einem Kasten mit spiegelnden Wänden) — also auf die *MAXWELLSchen Gleichungen* statt auf (10) Bezug nehmend — dieselbe Überlegung durchführen.

Daß man mit diesen Formulierungen wirklich eine in einschneidender Weise von der klassischen Wellentheorie verschiedene Theorie der Strahlungsvorgänge besitzt, zeigt sich, wenn man sie anwendet auf

eine zuerst von EINSTEIN untersuchte Frage. Denken wir uns ein kleines Teilstück V_0 in einem Hohlraum vom Volum V abgegrenzt ($V_0 \ll V$), und nennen wir E_0 die in V_0 enthaltene Energie des Frequenzintervalls $\nu, \nu + \Delta\nu$; und ferner sei $\Delta E_0 = E_0 - \bar{E}_0$, wo \bar{E}_0 der *Zeitmittelwert* von E_0 ist. Man kann nach der Wellentheorie das *mittlere Schwankungsquadrat* $(\Delta E_0)^2$ berechnen, und man bekommt, wenn man die klassische Kinematik des Wellenvorgangs zugrunde legt

$$(\Delta E_0)^2 = \frac{\bar{E}_0^2 c^3}{8\pi \nu^2 \Delta\nu \cdot V_0}. \quad (\text{I1})$$

Anschaulich sind diese Schwankungen so zu verstehen: Die einzelnen Wellen im engen Frequenzbereich $\Delta\nu$ ergeben bei ihrer Überlagerung langsame *Schwebungen*; im Tempo dieser Schwebungen atmet das Teilstück V_0 langsam Energie ein und aus.

Unsere durch die Einführung der neuen quantentheoretischen Kinematik *abgeänderte* Wellentheorie führt aber statt zu (I1) zu einem anderen Ergebnis:

$$(\Delta E_0)^2 = h\nu \cdot \bar{E}_0 + \frac{\bar{E}_0^2 c^3}{8\pi \nu^2 \cdot \Delta\nu \cdot V_0}. \quad (\text{I2})$$

Daß in Wirklichkeit nur die quantenmechanische Formel (I2) und nicht die klassische (I1) physikalisch richtig sein kann, ist schon lange vor der Quantenmechanik von EINSTEIN (1909) festgestellt worden; aus thermodynamisch-statistischen Gründen ist nämlich nur (I2) und nicht (I1) verträglich mit dem *PLANCKSchen Gesetz*.

Das *PLANCKSche Gesetz* ist ja eine notwendige Folgerung unserer soeben skizzierten Theorie, weil es aus der von der Quantenmechanik gelieferten diskreten Quantelung der Energiewerte eines harmonischen Oszillators zwangsläufig folgt — während die klassische, dem Grenzfall $h \rightarrow 0$ entsprechende Theorie ebenso notwendig zum *RAYLEIGH-JEANSSchen Strahlungsgesetze* führt. Die Gesetzmäßigkeiten der Intensitätsschwankungen der Strahlung stehen aber mit den thermodynamischen Strahlungsgesetzen in engem Zusammenhang; derart, daß (I1) *nur* mit dem *RAYLEIGH-JEANSSchen*, und (I2) *nur* mit dem *PLANCKSchen Gesetz* in Einklang ist.

Man kann deshalb sagen, daß eine *in sich widerspruchsfreie und abgeschlossene* Strahlungstheorie, wenn sie das *PLANCKSche Gesetz* liefert, *unbedingt* auch (I2) ergeben muß — ohne daß man das erst nachzurechnen braucht. Aber die Möglichkeit, (I2) *ohne* Zuhilfenahme thermodynamisch-statistischer Erwägungen *unmittelbar* aus der im erläuterten Sinne *quantenmechanisch modifizierten Wellentheorie* des Lichtes zu gewinnen, gibt uns doch jedenfalls einen eindrucksvollen Beweis für die erreichte Vertiefung unserer Erkenntnis. Denn solange wir zwar die Energiestufen beim harmonischen Oszillator kannten (Kapitel 2, § 2, 2), aber noch nicht die matrizentheoretische Kinematik von Kapitel 3 und den Gedanken ihrer Anwendung auf das Wellenfeld besaßen, konnten wir

zwar das PLANCKSche Gesetz begründen, und somit (12) als *thermodynamisch notwendig* erkennen; aber das Zustandekommen dieser Schwankungen durch die *Interferenz der Wellen* blieb unserer Untersuchung völlig verschlossen: Wir hatten damals eben nur ein *Teilstück* der vollständigen Theorie in Händen.

Die wellentheoretische Ausrechnung von (11) und (12) wird im nächsten Abschnitt vorgeführt. Augenblicklich möge nur folgende Bemerkung uns (12) als quantenmechanische Verallgemeinerung der klassischen Formel (11) verständlich machen. Es ist

$$\overline{E_0} = V_0 \cdot \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot n_\nu \cdot \Delta\nu, \quad (13)$$

und wir bekommen (12) dann in der Form

$$(\Delta E_0)^2 = \frac{8\pi \nu^2 \Delta\nu V_0}{c^3} \cdot (h\nu)^2 \cdot n_\nu (n_\nu + 1); \quad (14)$$

in der klassischen Formel (11) dagegen steht n_ν^2 statt $n_\nu (n_\nu + 1)$. Also unterscheidet sich (12) von (11) *in derselben Weise*, wie sich viele auf den harmonischen Oszillator bezügliche quantentheoretische Formeln von den entsprechenden klassischen unterscheiden, nämlich durch ein Auftreten von $n(n+1)$ statt eines klassischen n^2 .

Wir wollen die grundsätzliche Bedeutung unserer Resultate betrachten. Die vorgetragene Theorie ist eine korrespondenzmäßige Übersetzung oder quantenmechanische Analogisierung der *Wellentheorie des Lichtes*. Nirgends ist der Lichtquantenbegriff in der Formulierung dieser Theorie gebraucht. Trotzdem kommen als *Ergebnis* der Theorie gerade die Effekte heraus, welche anschaulich durch die Lichtquantenvorstellung zu beschreiben sind.

Erinnern wir uns, daß gerade die Schwankungserscheinungen im Strahlungsfeld die wesentlichste Veranlassung zur Einführung der Vorstellung korpuskularer Lichtquanten geben. Zwar haben wir in Kapitel I ein *anderes* Schwankungsproblem in diesem Sinne betrachtet; aber auch aus (12) sind analoge Schlüsse zu ziehen. Betrachten wir (12) für den Grenzfall sehr kleiner Strahlungsdichte $n_\nu \ll 1$, so können wir unter Vernachlässigung des zweiten Summanden schreiben:

$$\left(\frac{\Delta E_0}{h\nu}\right)^2 = \frac{E_0}{h\nu}; \quad (15)$$

und das zeigt, daß sich die Hohlraumstrahlung in diesem Grenzfall bezüglich ihrer Schwankungen ebenso verhält, als wenn sie aus Lichtkorpuskeln $h\nu$ bestünde. EINSTEIN zog also die Folgerung, daß die Wellentheorie notwendig durch die Korpuskularvorstellung ersetzt oder wenigstens ergänzt werden müsse.

Aber nun hat das Problem durch unsere Feststellungen eine ganz andere Wendung genommen. Wir sehen, daß es doch nicht nötig ist,

die Wellentheorie der Strahlung zugunsten anderer Modellvorstellungen zu verlassen oder einzuschränken; sondern es kommt nur darauf an, die Wellentheorie *in die Quantenmechanik zu übertragen*. Dann ergeben sich die Schwankungseffekte, welche das Vorhandensein korpuskularer Lichtquanten im Strahlungsfeld erweisen, von selbst als Folgerungen der Wellentheorie. Das berühmte Problem, wie man Wellen und Korpuskeln in der Strahlung einheitlich verstehen könne, darf danach als im Prinzip erledigt angesehen werden.

Natürlich kann man die Sache nun auch wieder anders herum wenden. Wir haben inzwischen gesehen, daß man auch von der Korpuskelvorstellung aus, sofern man sich an die *symmetrischen Eigenfunktionen* hält, zur *BOSE-Statistik* gelangt; man bekommt dann also bei folgerichtiger quantenmechanischer (wellenmechanischer) Durchführung des *Korpuskelbildes* zwangsläufig auch *diejenigen* Effekte heraus, welche zur Einführung der anschaulichen *Wellenvorstellung* drängen: nur die *klassische* Korpuskulartheorie liefert das Ergebnis (15), die quantenmechanisch geformte Korpuskulartheorie mit „*Boseschen*“ Korpuskeln hingegen liefert (*ebenso* wie die quantenmechanisch geformte Wellentheorie) die *volle* Formel (12), und im Grenzfall also die der klassischen Wellentheorie entsprechende Formel (11). Wir haben also gegenüber dem früheren, das Einkörperproblem betreffenden Äquivalenzbeweis von Matrizenmechanik und SCHRÖDINGERScher Wellenmechanik jetzt eine noch wesentlich tiefergehende Äquivalenz von Korpuskulartheorie und Wellentheorie erkannt.

Trotz dieser Äquivalenz ist in gewissem Sinne die hier ausgeführte Theorie des Strahlungsfeldes als eines *gequantelten Wellenfeldes* als die tiefere Auffassungsweise gegenüber der korpuskularen anzusehen; nämlich als die anschaulichere, angemessenere und fruchtbarere im Hinblick auf die Probleme der *Quantenelektrodynamik*.

3. Ausrechnung des Schwankungsquadrats. Die Formel (11) ist von LORENTZ wellentheoretisch errechnet worden; doch wurde die Zuverlässigkeit seines Resultates bezweifelt und in langwierigen und schwierigen Diskussionen von EINSTEIN, v. LAUE und PLANCK erörtert, weil LORENTZ nicht einen *Zeit-Mittelwert*, sondern einen *Phasen-Mittelwert* $(\overline{\Delta E_0})^2$ berechnet hatte. Erst der Nachweis, daß $(\overline{\Delta E_0})^2$ unmittelbar als exakter *Zeitmittelwert* eindeutig bestimmt werden kann, zeigte endgültig, daß (11) eine unausweichliche Folgerung der klassischen Wellentheorie ist. Die nachfolgende Rechnung läßt *sowohl* das Zustandekommen der quantentheoretischen Formel (12) *als auch* der klassischen Formel (11) erkennen.

Zur Vermeidung nutzloser Komplikationen betrachten wir statt des dreidimensionalen elektromagnetischen Hohlraums wieder die *schwingende Saite* vom vorigen Absatz, und deuten nur die Hauptpunkte der Rechnung an.

Im Intervall $0 < x < a$ haben wir die Energie

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{2} \int_0^a \left\{ \dot{\mathbf{u}}^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right)^2 \right\} dx,$$

also wegen (6) nach einfacher Ausrechnung:

$$\Delta \mathbf{H}_0 = \frac{1}{l^2} \sum_{\substack{i, k=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \left\{ \mathbf{p}_i \mathbf{p}_k K_{jk} + \frac{1}{4} j k \cdot \pi^2 \mathbf{q}_i \mathbf{q}_k K'_{jk} \right\}$$

mit

$$K_{jk} = \frac{\sin \frac{j-k}{l} \pi a}{\frac{j-k}{l} \pi} - \frac{\sin \frac{j+k}{l} \pi a}{\frac{j+k}{l} \pi},$$

$$K'_{jk} = \frac{\sin \frac{j-k}{l} \pi a}{\frac{j-k}{l} \pi} + \frac{\sin \frac{j+k}{l} \pi a}{\frac{j+k}{l} \pi}$$

Man quadriert nun den Ausdruck $\Delta \mathbf{H}_0$, geht mit $l \rightarrow \infty$ zu *Integralen* statt Summen über, und beachtet die Beziehung

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_{-v_1}^{+v_2} \frac{\sin^2 \nu l}{\nu^2} f(\nu) d\nu = \pi f(0) \quad \text{für } \nu_1, \nu_2 > 0.$$

So findet man leicht für den gesuchten *Zeitmittelwert*, gegeben durch die *Diagonalelemente* der Matrix $(\Delta \mathbf{H}_0)^2$:

$$\overline{(\Delta \mathbf{H}_0)^2} = a \int_0^{\infty} d\nu \cdot \left\{ \frac{4}{l^2} (\overline{\mathbf{p}_\nu^2})^2 + 4l^2 \pi^4 \nu^4 (\overline{\mathbf{q}_\nu^2})^2 + 4\pi^2 \nu^2 (\overline{\mathbf{q}_\nu \mathbf{p}_\nu})^2 + 4\pi^2 \nu^2 (\overline{\mathbf{p}_\nu \mathbf{q}_\nu})^2 \right\};$$

man hat dann nur noch, um das Endresultat zu bekommen, die rechts auftretenden Matrix-Diagonalelemente nach unseren Oszillatorformeln zu ermitteln. (Zum Beispiel erhält man schon allein aus der kanonischen Vertauschungsregel: $\overline{\mathbf{q}_\nu \mathbf{p}_\nu} = -\overline{\mathbf{p}_\nu \mathbf{q}_\nu} = i h i / 4 \pi$.)

Als Endresultat ergibt sich die der dreidimensionalen Formel (12), (14) analoge:

$$\overline{(\Delta E_0)^2} = h \nu \cdot \overline{E_0} + \frac{\overline{E_0^2}}{2 a}.$$

4. Direkte Quantelung des Kontinuums. Will man eine *klassische Feldtheorie* korrespondenzmäßig in quantenmechanische Form übersetzen, so ist das auf den elektromagnetischen Hohlraum (und die schwingende Saite) angewandte Verfahren der *Quantelung der Eigenschwingungen* nur dann anwendbar, wenn es sich um eine Feldtheorie mit lediglich *linearen* Feldgleichungen handelt. In der vollen Elektrodynamik (mit Materie) treten aber nichtlineare Feldgleichungen auf, und man muß deshalb überlegen, wie man die quantenmechanischen Vertauschungsregeln *ohne Bezugnahme auf Eigenschwingungen* des Feldes einführen kann.

Zu diesem Zwecke denken wir uns das stetige Medium der Feldtheorie *approximiert* durch ein *Diskontinuum*, etwa von atomistischer Struktur; für dieses letztere kennen wir bereits (aus der gewöhnlichen Quantenmechanik) den Übergang von der klassischen zur Quantentheorie. Machen wir dann durch fortgesetzte Verfeinerung des Diskontinuums den Grenzübergang zum Kontinuum, so bekommen wir für dieses die gewünschte Quantentheorie.

Ausgeführt am Beispiel unserer schwingenden Saite, bei der wir jetzt noch $l=1$ wählen wollen, würde das etwa folgendes bedeuten: Wir ersetzen die Saite durch eine *elastische Punktreihe* von n Massenpunkten, deren jeder die Masse $m = \frac{1}{n}$ besitzt (da wir die Gesamtmasse der Saite mit Formel (2) gleich 1 gesetzt hatten).

Ist u_ξ die Elongation des ξ -ten Punktes, und $p_\xi = m \dot{u}_\xi$ der zugehörige Impuls, so haben wir die Vertauschungsregeln

$$[p_\xi, u_\eta] = \frac{\hbar}{2\pi i} \cdot \delta_{\xi\eta} \mathbf{1}, \quad [p_\xi, p_\eta] = [u_\xi, u_\eta] = 0 \quad (16)$$

zu fordern. Wir gebrauchen die Bezeichnungen $x = \frac{\xi}{n}$, $x' = \frac{\eta}{n}$. Um nun den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ zum Kontinuum ausführen zu können, summieren wir $[p_\xi, u_\eta]$ über alle diejenigen Punkte ξ , deren zugehöriges x in einem bestimmten Intervalle Δx der Saite liegt; es ergibt sich

$$\sum_{x \text{ in } \Delta x} \frac{1}{n} [i\dot{u}_\xi, u_\eta] = \frac{\hbar}{2\pi i} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{1}, \text{ wenn } x' \text{ in } \Delta x, \\ 0, \text{ wenn } x' \text{ nicht in } \Delta x. \end{array} \right\} \quad (17)$$

In der Grenze $n \rightarrow \infty$ ergibt aber die linke Seite der Gleichung das Integral $\int [i\dot{u}(x), u(x')] dx$ über das Intervall Δx , und die Aussage (17) kann für diesen Grenzfall mit Hilfe der DIRACschen δ -Symbolik durch

$$[i\dot{u}(x), u(x')] = \frac{\hbar}{2\pi i} \delta(x-x') \mathbf{1} \quad (18)$$

ausgedrückt werden. Ferner ergibt sich ebenso:

$$[i\dot{u}(x), i\dot{u}(x')] = [u(x), u(x')] = 0. \quad (19)$$

Wir behaupten nun: Die Forderungen (18), (19) sind gleichwertig den früheren Forderungen (5). Man berechnet z. B. aus (18) nach (6) den Klammersausdruck

$$\left. \begin{aligned} [p_k, q_l] &= 2 \left[\int_0^1 i\dot{u}(x) \sin k\pi x \cdot dx, \int_0^1 u(x') \sin l\pi x' \cdot dx' \right] \\ &= 2 \frac{\hbar}{2\pi i} \mathbf{1} \cdot \int_0^1 \sin k\pi x \sin l\pi x \cdot dx \\ &= \frac{\hbar}{2\pi i} \delta_{kl} \mathbf{1} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

in Übereinstimmung mit (5). Aber die Formulierung (18), (19), ist auch dann anwendbar, wenn das Feldkontinuum nichtlinearen Gleichungen unterworfen ist.

Dies Schema kann nun auf beliebige, aus einem Variationsprinzip ableitbare, klassische Feldgleichungen ausgedehnt werden. Sei etwa

$$L\left(q, \frac{\partial q}{\partial x}, \dots\right)$$

die LAGRANGE-Funktion, aus der gemäß

$$\delta \int L d\Sigma = 0 \quad (21)$$

($d\Sigma$ das vierdimensionale Raumzeitdifferential) die Feldgleichungen erhalten werden. Dann spalten wir die vierdimensionale Integration in eine räumliche und eine zeitliche:

$$\int L d\Sigma = \int dt \cdot \int dV \cdot L = \int dt \cdot \bar{L}; \quad (22)$$

und das Variationsproblem

$$\delta \int dt \cdot \bar{L} = 0 \quad (21')$$

ist formal ganz analog den in der Punktmechanik auftretenden Variationsproblemen; es ist nur die LAGRANGE-Funktion \bar{L} eine Funktion von unendlich vielen unabhängigen Koordinaten $q(\mathbf{r})$, die sich durch kontinuierliche Indizes \mathbf{r} voneinander unterscheiden, während man in der Punktmechanik sonst diskrete Indizes k an Koordinaten q_k gewohnt ist.

Daraufhin ist es möglich, in ganz allgemeiner Weise eine beliebige klassische Feldtheorie in die Quantenmechanik zu übersetzen, und diese Übertragung ist durchaus eindeutig bestimmt, bis auf den Umstand, daß man in der Energiefunktion die Reihenfolge nichtvertauschbarer Faktoren natürlich nicht aus der klassischen Theorie entnehmen kann, genau wie in der gewöhnlichen Punktmechanik.

5. Lichtprozesse. In mehreren wichtigen Untersuchungen hat DIRAC die Darstellung des Strahlungsfeldes durch gequantelte Wellen zur näheren Untersuchung der *Wechselwirkung von Strahlung und Atomen* benutzt. Das Verfahren läuft so:

Wir haben ein Gesamtsystem, das aus zwei Teilen besteht, nämlich dem Atom einerseits und dem Strahlungshohlraum andererseits. Da die Strahlung nur eine schwache Störung der Elektronenbewegung im Atom bewirkt, und da andererseits auch der Strahlungshohlraum, den wir uns als *sehr groß* vorstellen, durch das eine Atom nur schwach beeinflusst werden kann, so haben wir ein typisches *Störungsproblem* vor uns: Das „ungestörte“ System besteht aus dem von der Strahlung unbeeinflussten Atom und dem vom Atom unbeeinflussten Strahlungsfeld, und die *Wechselwirkung* von Atom und Strahlungsfeld ist dann als eine kleine *Störung* zu berechnen.

Die Energiefunktion unseres Systems hat folgendes Aussehen:

$$H = H_A + \sum_r N_r \cdot h\nu_r - \mathfrak{P}\mathfrak{E}. \quad (23)$$

Hier bedeutet H_A die Energiefunktion des isolierten Atoms. Der Index r dient zur Numerierung der Eigenschwingungen des elektromagnetischen

Feldes und $h\nu_r \cdot \left(N_r + \frac{1}{2} \mathbf{1} \right)$ ist die Energiematrix für den der r -ten Eigenschwingung entsprechenden harmonischen Oszillator; also die Matrix N_r hat die *Eigenwerte* $0, 1, 2, \dots$. Der zweite Summand in (23) stellt also die Gesamtenergie des Strahlungshohlraums (*ohne* Nullpunktsenergie) dar.

Das Glied $-\mathfrak{P}\mathfrak{E}$ bedeutet die *Wechselwirkungsenergie*: Unter \mathfrak{P} ist das elektrische *Dipolmoment* des Atoms zu verstehen¹ und \mathfrak{E} bedeutet die *elektrische Feldstärke*: Analog zur Formel (6) können wir natürlich im dreidimensionalen Hohlraum die Feldstärken

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}(x, y, z); \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}(x, y, z) \quad (24)$$

linear ausdrücken durch die den einzelnen Eigenschwingungen zugeordneten Amplitudenmatrizen $\mathfrak{p}_r, \mathfrak{q}_r$. In (23) ist \mathfrak{E} dann natürlich am Orte $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ des (unendlich schwer gedachten) Atoms zu nehmen.

Damit ist das Problem formuliert; DIRAC untersuchte nun eingehend den *Energieaustausch* zwischen Atom und Strahlungsfeld — er entspricht in der Tat dem anschaulichen Bilde der Absorption und Emission von Lichtquanten $h\nu$. Aber offenbar ist die soeben skizzierte DIRACsche *Formulierungsweise* des Problems und seine (hier nicht näher zu besprechende) rechnerische Methodik wichtiger als die erhaltenen Resultate als solche. Denn natürlich können die Resultate nur das bestätigen, was wir schon früher korrespondenzmäßig erschlossen hatten: Es ergeben sich einerseits (bezüglich des Strahlungsfeldes) die uns bekannten Wahrscheinlichkeitsgesetze der Lichtprozesse, und andererseits (bezüglich des Atoms) die Formeln, welche die Wahrscheinlichkeiten für Emission, Absorption oder für RAMAN-Streuung durch die Übergangsamplituden des Atoms (Matrixelemente von \mathfrak{P}) ausdrücken.

Aber grundsätzlich ist es ein bedeutender Fortschritt, daß wir die früheren, korrespondenzmäßig begründeten oder erratenen Bruchstücke einer Lichttheorie nunmehr aus dem Zusammenhange einer geschlossenen Theorie deduktiv eindeutig ableiten können. Dieser Fortschritt erweist sich als fruchtbar, wenn wir jetzt mit der DIRACschen Methodik die feineren Fragen der *natürlichen Linienbreite* untersuchen (LANDAU, WIGNER-WEISSKOPF). Wir gewinnen dann nicht nur die in Kapitel 2, § 6, 3 besprochenen Gesetzmäßigkeiten (die wiederum auch aus elementaren Korrespondenzbetrachtungen zu erhalten waren); sondern wir können auch beispielsweise folgende Frage (J. FRANCK) beantworten, deren Lösung nun wirklich *nicht* mehr ohne die jetzige, vollständige Theorie zu bekommen ist.

Es mögen Atome, die im Grundzustand sind, mit Elektronen beschossen werden, deren Energie praktisch unendlich scharf definiert ist,

¹ Wir *verzichten* hier also auf eine Mitberücksichtigung der *Quadrupolstrahlung*; doch würde deren Mitberücksichtigung keinerlei Schwierigkeit machen.

und gerade hinreicht, um die Atome in die erste (nicht gerade metastabile) Anregungsstufe zu heben: die Elektronenenergie sei etwa genau gleich $h\nu_0$, wo ν_0 der *Linienmitte* der „natürlichen“ Emission dieser ersten Anregungsstufe entspricht. Die Spektrallinie, die wir jetzt in diesem Elektronenstoßversuch erhalten, zeigt selbstverständlich *nicht* die „natürliche“ Intensitätsverteilung von (29) § 6, 3, Kapitel 2; denn es können in ihr nur Frequenzen $\nu \leq \nu_0$ vorkommen. Die sich ergebende Intensitätsverteilung ist aber eindeutig zu berechnen (HEITLER).

Aber den positiven Ergebnissen dieser Theorie stehen auch eigentümliche Schwierigkeiten gegenüber. Schon bei der eindimensionalen Saite ergibt sich nach (7) eine *unendlich große Nullpunktenergie* als Summe der Nullpunktenergien der unendlich vielen Eigenschwingungsoszillatoren. Im dreidimensionalen Hohlraum ergibt sich natürlich dasselbe Problem; die aus der MAXWELLSchen *Energiedichte* zu errechnende Hohlraumenergie enthält eine unendlich große Nullpunktenergie:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \int_V (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2) dV &= \sum_r \left(N_r + \frac{1}{2} \mathbf{1} \right) \cdot h\nu_r \\ &= \sum_r N_r \cdot h\nu_r + \frac{h}{2} \sum_r \nu_r \cdot \mathbf{1}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Man kann sie zwar beseitigen durch eine gewisse Umformung, aber das Verfahren ist wenig befriedigend. Man führt einen komplexen (nichthermitischen) Vektor \mathfrak{F} ein, durch

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{F} + \mathfrak{F}^\dagger, \quad \mathfrak{H} = -\frac{i}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{rot} (\mathfrak{F} - \mathfrak{F}^\dagger), \quad (26)$$

und ersetzt $\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2$ durch $4\mathfrak{F}\mathfrak{F}^\dagger$; dann bekommt man tatsächlich eine von dem Nullpunktsanteil freigemachte *Gesamtenergie*:

$$\frac{1}{2\pi} \int_V \mathfrak{F}\mathfrak{F}^\dagger dV = \sum_r N_r \cdot h\nu_r. \quad (27)$$

Trotz des merkwürdigen Operators $\sqrt{\Delta}$ (dessen *Quadrat* $(\sqrt{\Delta})^2$ also gleich dem LAPLACESchen Operator $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ ist) scheint die Zerlegung (26) eine tiefe physikalische Bedeutung zu haben. Aber $4\mathfrak{F}\mathfrak{F}^\dagger$ an Stelle von $\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2$ hat den schwerwiegenden Mangel, eine *makroskopische* Abänderung der MAXWELLSchen Energielokalisation zu geben.

Zudem aber ist das Auftreten der Nullpunktenergie — wegen ihrer Konstanz ist sie übrigens recht harmlos, indem sie sich in allen physikalisch prüfaren Endresultaten wieder heraushebt — nur ein einzelnes Beispiel für eine in der ganzen Quantenelektrodynamik auf Schritt und Tritt hervortretende Schwierigkeit. Die oben erläuterten DIRACschen Untersuchungen lieferten bereits weitere Beispiele für das die Widerspruchsfreiheit der Theorie zerstörende Auftreten von divergenten Summen, die sich an mancherlei Punkten der Rechnung einstellen.

Daß es trotzdem möglich ist, diese Theorie für konkrete Anwendungen zu gebrauchen, beruht darauf, daß häufig die auftretenden Unendlichkeiten die Form von unendlichen *Konstanten* haben, die dann, ähnlich der Nullpunktsenergie, mehr oder weniger, willkürlich abgestoßen werden: eine von diesen Schwierigkeiten grundsätzlich freie Methode ist noch nicht bekannt, und es ist also in gewissem Sinne der alte Zustand wieder-gekehrt, daß unsere Theorie in sich nicht vollständig und widerspruchsfrei ist, und uns doch nur ein *ungefähres* Bild des wirklichen Verhaltens gibt, so daß in jedem konkreten Einzelproblem noch ein besonderes *Erraten* der wirklich zutreffenden Gesetzmäßigkeit aus der durch unsere Theorie errechneten geleistet werden muß. In diesem Sinne ähnelt die jetzige Quantenelektrodynamik der älteren, auf klassische Rechnungen und ihre korrespondenzmäßige Umdeutung gestützten Atomtheorie.

§ 4. Mehrkörperproblem und Wellenquantelung.

1. Die Methode von FERMI und THOMAS. In diesem Paragraphen kehren wir noch einmal zum nichtrelativistischen Mehrkörperproblem zurück. Zwar haben wir in § 1 eine exakte mathematische Methode kennen gelernt, die alle diesbezüglichen Fragen eindeutig zu beantworten erlaubt; aber dennoch sind diesem Problem noch ganz neue Seiten abzugewinnen, die wir jetzt betrachten wollen, bevor wir unser ver- suchtes Vordringen in die relativistische Quantenmechanik wieder auf- nehmen.

Unter den mannigfaltigen Approximationsmethoden, die zur Inan- griffnahme quantenmechanischer Probleme erdacht worden sind, ist eine von FERMI und THOMAS ausgebildete Methode grundsätzlich be- merkenswert. Wenn wir ein Atom von *sehr hoher Kernladungszahl* Z betrachten, so werden wir berechtigt sein, seine Elektronenhülle als ein *Elektronengas von der absoluten Temperatur* $T = 0$ aufzufassen. Natürlich gehen in solch einer summarischen Betrachtungsweise viele feinere Züge des Problems verloren; aber es hat sich gezeigt, daß es doch gut möglich ist, diese Auffassung sogar bis zu recht kleinen Werten Z herunter durch- zuführen, und auf diese Weise eine Reihe von solchen Eigenschaften der Atome befriedigend wiederzugeben, welche *monoton* von der Kern- ladungszahl abhängen, *ohne* die Periodizitäten des Schalenabschlusses erkennen zu lassen.

Es sei also ρ die *Teilchendichte* unseres Elektronengases; nach (40) § 1, 3 ist dann der Wert von ρ an irgendeinem Orte ausdrückbar durch die *potentielle Energie* $u_0 = -ev$, welche die Elektronen (mit Ladung $-e$) an jenem Orte besitzen:

$$\rho = \text{const } v^{3/2} = \frac{2^{3/2} \pi \mu^{3/2} e^{3/2}}{3 \hbar^3} \cdot v^{3/2}; \quad (1)$$

wir haben hier für das statistische Gewicht g den Wert 2 eingesetzt.

Nun ist v bis auf eine additive Konstante das *elektrostat.ische Potential*. Folglich gilt die *POISSONSche Gleichung*

$$\Delta v = 4\pi\rho e, \quad (2)$$

oder, wegen der Kugelsymmetrie des Problems:

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv}{dr} = 4\pi\rho e = \text{const } v^{1/2}. \quad (3)$$

Die beiden Integrationskonstanten dieser Differentialgleichung für $v=v(r)$ ergeben sich aus

$$\lim_{r=0} rv = Ze \quad (4)$$

(bei $r=0$ sitzt der *Kern* mit der Ladung Ze) und

$$N = \int \rho dr = Z \quad (5)$$

(insgesamt sind Z Elektronen vorhanden).

Die durch (3), (4), (5) gestellte Aufgabe erfordert für beliebige Z die Untersuchung von nur *einer* Differentialgleichung; denn man kann Z durch eine einfache Transformation beseitigen.

Man setze

$$\xi = \frac{r}{\mu}, \quad \omega = \frac{v}{\gamma} \quad (6)$$

mit

$$\mu = \frac{3^{1/2} h^2}{2^{1/2} \pi^{1/2} \mu e^2 Z^{1/2}}, \quad \gamma = \frac{2^{1/2} \pi^{1/2} \mu e^3 Z^{1/2}}{3^{1/2} h^2}; \quad (7)$$

dann gehen (3), (4), (5) über in

$$\frac{d^2\omega}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\omega}{d\xi} = \omega^{1/2}, \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \omega = 1, \quad \int_0^\infty \omega^{1/2} \xi^2 d\xi = 1. \quad (8)$$

Daraus folgt offenbar ein *Ähnlichkeitsgesetz der Elektronenhüllen von Atomen* mit verschiedenen Kernladungszahlen Z : Die (geeignet definierten) *Atomvolumina* sind *proportional mit Z^{-1}* .

Zur Integration von (8) führt man statt ω besser $\chi = \xi \omega$ ein; dann geht (8) über in

$$\frac{d^2\chi}{d\xi^2} = \frac{\chi^{1/2}}{\sqrt{\xi}}; \quad \chi(0) = 1; \quad \chi(\infty) = 0. \quad (9)$$

Dies Problem (9) ist von FERMI durch numerische Integration gelöst worden; doch gehen wir auf die daraus gezogenen mannigfachen Folgerungen nicht näher ein.

Man kann übrigens diese Überlegungen natürlich noch verfeinern durch Mitberücksichtigung einiger hier außer Acht gelassener Effekte: der Energieanteil η' [vgl. (41), § 1] käme hier in Betracht, ferner der (ebenfalls für die Verhältnisse an der Oberfläche wesentliche) *Austauschanteil* der COULOMB-Energie (JENSEN), und der für die innersten Elektronen des Atoms merkbar werdende *Relativitätseffekt*.

Ferner ist die hier benutzte FERMI-THOMASSche Methode sehr vielseitiger weiterer Anwendungen fähig: Auch die Elektronenwolken in Molekülen und Kristallgittern bieten Anwendungsmöglichkeiten, und die *Struktur der Kerne* ebenfalls.

2. Die „zweite Quantelung“. Wir mußten es früher als eine wesentliche Einschränkung der *Anschaulichkeit* der SCHRÖDINGERSchen Wellen und Eigenfunktionen empfinden, daß sie nur für den Fall des Einkörperproblems sich als Wellen *im dreidimensionalen Raume* darstellen: das Mehrkörperproblem hingegen erfordert ja die Konstruktion SCHRÖDINGERScher Eigenfunktionen in abstrakten Räumen von höherer Dimensionszahl, womit die Anschaulichkeit der SCHRÖDINGER-Wellen verloren geht. Der Versuch, sie ähnlich wie etwa die *elektromagnetischen* Wellen aufzufassen, muß zurücktreten gegenüber der Einsicht, daß es sich vielmehr um eine abstrakte mathematische Hilfskonstruktion zur Bestimmung der quantenmechanischen Wahrscheinlichkeiten handelt.

Aber gibt es nicht vielleicht doch noch eine ganz andere Methode, das Einkörperproblem zum Mehrkörperproblem zu erweitern — eine Methode, welche *festhält* am anschaulichen *dreidimensionalen Raum*, und welche auch das Mehrkörperproblem mit *dreidimensionalen* Wellenvorgängen in Verbindung bringt?

Diese Frage hat nicht nur grundsätzliche Bedeutung, sie ist auch für den praktisch rechnenden Atomtheoretiker von Wichtigkeit. Wir haben im vorigen Abschnitt die Fruchtbarkeit der THOMAS-FERMISchen Methode hervorgehoben, für welche es charakteristisch ist, daß sie tatsächlich nur im dreidimensionalen Raume operiert, ohne Bezugnahme auf die höherdimensionalen abstrakten Räume. Aber die Methode gibt nur eine rohe *Approximation*, und es erhebt sich die Frage, ob man nicht die THOMAS-FERMI-Methode als *approximative Vereinfachung* einer *exakten, aber ebenfalls im anschaulichen dreidimensionalen Raum operierenden* Methode ansehen kann.

Im Hinblick auf die Ergebnisse unserer *Quantelung der elektromagnetischen Wellen* ergibt sich nun ein ganz bestimmter Weg zur Erreichung dieses Zieles. Wir wollen, um nicht alle Schwierigkeiten zugleich überwinden zu müssen, ein solches Mehrkörperproblem mit äquivalenten Teilchen betrachten, bei welchem a) die *BOSE-Statistik* gilt; b) *keine Wechselwirkungsenergie* zwischen den Teilchen besteht. Der Gedanke ist nun der, daß wir *die der nichtrelativistischen zeitabhängigen SCHRÖDINGER-Gleichung genügende Wellenfunktion* $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$ *als Matrix auffassen*, analog wie wir in der Strahlungstheorie des § 3 für die Feldstärken $\mathfrak{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathfrak{H}(\mathbf{r}, t)$ Matrizen einführten.

Wir türmen also gewissermaßen zwei verschiedene Quantelungen übereinander: Beim Einkörperproblem führten wir die Quantelung durch in Gestalt einer Ersetzung der klassischen HAMILTON-JACOBISchen Gleichung durch die SCHRÖDINGERSche Gleichung. Um aber vom Einkörperproblem zum Mehrkörperproblem zu kommen, fassen wir jetzt die SCHRÖDINGERSche Gleichung ihrerseits als eine „klassische“ Gleichung auf, aus der wir erst durch eine quantentheoretische, korrespondenzmäßige Übersetzung (Einführung von *Matrizen*) die *endgültige* Theorie gewinnen.

Dem entspricht die Bezeichnung „zweite Quantelung“ (oder auch *Hyperquantelung*, *Supraquantelung*) für unsere Methode.

Von *Korpuskeln* ist also hier zunächst gar keine Rede, sondern nur von *gequantelten* (SCHRÖDINGER-) *Wellen*: Die Korpuskeln sollen sich vielmehr als *Folgerung* aus der Wellenquantelung ergeben, wie wir es bei den Lichtquanten kennen gelernt haben. Die abstrakten mehrdimensionalen Räume der gewöhnlichen Wellenmechanik *vermeiden* wir auf diesem Wege gänzlich und gewinnen durch die Festhaltung des dreidimensionalen Raumes wesentlich an *Anschaulichkeit*. Dafür führen wir andererseits ein für klassische Denkweise unanschauliches Element eben dadurch ein, daß wir ψ als Matrix behandeln.

Die Möglichkeit einer derartigen Behandlung des Mehrkörperproblems wurde sogleich nach den in § 3, 1—3 besprochenen Ergebnissen und dem Erscheinen der ersten SCHRÖDINGERSchen Arbeiten vermutet; doch lenkte die dann erfolgte Entdeckung der Methode der symmetrischen und antisymmetrischen Eigenfunktionen (HEISENBERG, DIRAC) die Entwicklung zunächst in eine andere Richtung. Wir haben diese Methode in § 1 besprochen und uns von ihrer außer Zweifel stehenden *Richtigkeit* überzeugt. Danach können wir sagen: Die *zweite Quantelung* muß, wenn der ihr zugrunde liegende Gedanke richtig ist, zu Ergebnissen führen, die trotz der so verschiedenen beiderseitigen Ausgangspunkte *mathematisch äquivalent* mit denen der mehrdimensionalen Eigenfunktionsmethode sind. *Diese Äquivalenz besteht tatsächlich*; sie wurde für das hier zunächst betrachtete Problem (BOSE-Statistik, *keine* Wechselwirkungsenergie) von DIRAC klargestellt.

Die für das *Einkörperproblem* geltende SCHRÖDINGERSche Gleichung

$$\frac{-\hbar^2}{8\pi^2\mu} \Delta\psi + U(\mathbf{r}) \cdot \psi + \frac{\hbar}{2\pi i} \dot{\psi} = 0 \quad (10)$$

habe [für ein bestimmtes $U(\mathbf{r})$] die Lösung

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_n \varphi_n(\mathbf{r}) c_n e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} W_n t}; \quad (11)$$

d. h. die $\varphi_n(\mathbf{r})$ sind die *Eigenfunktionen* für die zu (10) gehörende Eigenwertgleichung

$$\frac{-\hbar^2}{8\pi^2\mu} \Delta\varphi + U(\mathbf{r}) \cdot \varphi = W \cdot \varphi; \quad (12)$$

wir setzen die $\varphi_n(\mathbf{r})$ als *normiert* voraus. Die c_n können dann offenbar *beliebig* sein; doch erfordert eine *Normierung*

$$\int |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r} = 1, \quad (13)$$

daß

$$\sum_n |c_n|^2 = 1 \quad (14)$$

ist.

Die den Übergang zum Mehrkörperproblem bedeutende Quantelung vollziehen wir so, daß wir die

$$c_n e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} W_n t} \quad (15)$$

durch Matrizen \mathbf{b}_n ersetzen, welche folgenden *Vertauschungsregeln* gehorchen:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{b}_n^\dagger \mathbf{b}_m - \mathbf{b}_m \mathbf{b}_n^\dagger &= -\delta_{nm} \mathbf{I}; \\ \mathbf{b}_n \mathbf{b}_m - \mathbf{b}_m \mathbf{b}_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Es wird also

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_n \mathbf{b}_n \varphi_n(\mathbf{r}); \quad (17)$$

und

$$\frac{-\hbar^2}{8\pi^2\mu} \Delta\psi + U(\mathbf{r}) \cdot \psi + \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial\psi}{\partial t} = 0. \quad (18)$$

Man erkennt leicht [aus der Orthogonalität und Vollständigkeit der $\varphi_n(\mathbf{r})$], daß (16) infolge (17) *gleichbedeutend* mit

$$\left. \begin{aligned} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}') - \psi(\mathbf{r}') \psi^\dagger(\mathbf{r}) &= -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \mathbf{I}, \\ \psi(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}') - \psi(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ist; $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ bedeutet wieder die DIRACsche δ -Funktion.

Die Bedeutung dieser Festsetzungen ist offenbar die, daß wir die Eigenschwingungen unseres Wellenfeldes als *gequantelte harmonische Oszillatoren* betrachten — wie es ja dem Wesen der BOSE-Statistik entspricht. Genauer ergibt sich nun folgende *Korrespondenz* zwischen der „klassischen“ Theorie mit ungequantelter SCHRÖDINGER-Welle ψ und der gequantelten Theorie mit ψ . Es ist:

$|c_n|^2$ = Wahrscheinlichkeit, daß das durch ψ beschriebene Teilchen im n -ten Zustand anzutreffen ist (bei Energiemessung).

$N_n = \mathbf{b}_n^\dagger \mathbf{b}_n$ = Anzahl der Teilchen im n -ten Zustand. Die *Eigenwerte* von N_n sind 0, 1, 2, 3, ...

$|\psi(\mathbf{r})|^2$ = Ortswahrscheinlichkeitsdichte des Teilchens am Orte \mathbf{r} .

$N(\mathbf{r}) = \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r})$ = Ortsdichte der Teilchen am Orte \mathbf{r} ; die Matrix

$$N_V = \int_V N(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

worin über ein beliebiges Volumstück V integriert ist, bedeutet also die Anzahl der Teilchen in V , und hat die Eigenwerte 0, 1, 2, 3, ...

$\int |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r} = \sum_n |c_n|^2 = 1$ = Wahrscheinlichkeit, das Teilchen irgendwo (an *irgendeinem* Ort, bzw. in *irgendeinem* Quantenzustand) anzutreffen.

$\int \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \sum_n \mathbf{b}_n^\dagger \mathbf{b}_n = N$ = Gesamtzahl der vorhandenen Teilchen.

$\int \psi^* H \psi \cdot d\mathbf{r} = \sum_n |c_n|^2 W_n$ = Erwartungswert der Energie. (Mit H ist der Operator

$$H = \frac{-\hbar^2}{8\pi^2\mu} \Delta + U(\mathbf{r}) \dots$$

gemeint.)

$\int \psi^\dagger H \psi \cdot d\mathbf{r} = \sum_n N_n W_n$ = Gesamtenergie.

Diese tabellarische Zusammenstellung wird dem Leser das Wesen der Sache hoffentlich besser verdeutlichen, als eine langatmige Erläuterung; doch ist es nötig, das Schema etwas nachdenklich zu betrachten.

Angenehmerweise bekommen wir in unserer Energieformel *keine Nullpunktenergie* — was offenbar damit zusammenhängt, daß unsere Wellengleichung (10) bzw. (18) im Gegensatz zu den MAXWELLSchen Gleichungen eine *komplexe* Gleichung ist.

Die *aus den Vertauschungsregeln* (16) oder (19) *folgende* Ganzzahligkeit der Eigenwerte von N_n und N_V bedeutet offenbar, daß unsere Theorie tatsächlich zum Auftreten von *unteilbaren Korpuskeln* führt, die in V jeweils nur in *ganzzahliger* Menge vorhanden sein können. Betonen wir aber, daß N_V *als Matrix* keineswegs immer einen *definierten Wert* haben muß: *das ist die grundsätzliche Einschränkung, welche die Quantentheorie zum Korpuskularbegriff macht.* Wenn wir N_V *messen*, dann ergibt sich in der Tat immer ein ganzzahliger Wert. Aber wenn eine mit N_V *nicht vertauschbare* andere Größe gemessen wird, dann kann das Heraustreten von Korpuskeln überhaupt unterbleiben. Es liegt z. B. die Frage nahe, ob man das Wellenfeld ψ etwa ebenso unmittelbar ausmessen kann, wie ein *elektromagnetisches* Feld \mathcal{E} , \mathcal{H} mit Probeladungen und Probespulen auszumessen ist. Die Antwort (PEIERLS) ist die, daß das jedenfalls nur unter Anwendung solcher Meßinstrumente möglich wäre, deren Einwirkung auf das ψ -Feld zu Änderungen der Gesamtzahl N vorhandener Teilchen führt. Dieses ψ nämlich ist mit N nicht vertauschbar, so daß die ψ -Messung N *undefiniert* werden läßt.

Insofern gibt also die hier besprochene Theorie *mehr*, als die mehrdimensionale Koordinatenraummethode mit symmetrischen Eigenfunktionen: Wir werden hier auch auf Prozesse der Vernichtung und Erzeugung von Teilchen geführt; die Gesamtzahl vorhandener Teilchen ist nicht eine vorgegebene Zahl n (wie beim „ n -Körperproblem“), sondern sie ist als Variable angesetzt, die *beliebige* Eigenwerte 0, 1, 2, 3, ... annehmen, und unter Umständen auch *undefiniert* werden kann.

Von dieser Erweiterung abgesehen ergibt die zweite Quantelung jedoch *mathematisch äquivalente* Resultate mit der Methode der symmetrischen Eigenfunktionen im mehrdimensionalen Koordinatenraum; so daß man z. B. das mittlere Schwankungsquadrat $(\Delta N_V)^2$ der Teilchenzahl in V nach *beiden* Methoden mit gleichem Ergebnis berechnen kann.

3. Zweite Quantelung und PAULI-Verbot. Wie aber, wenn es sich jetzt um Teilchen handelt, die dem PAULI-Verbot unterworfen sind? Die Verallgemeinerung des Einkörperproblems zum N -Körperproblem, auszuführen im Sinne der zweiten Quantelung, ist jetzt ein schwierigeres und tiefergehendes Problem, als im BOSE-Fall. Aber es gestattet doch eine ganz klare Lösung (JORDAN-WIGNER). Wir erläutern sie hier in ihrer fertigen Form.

Wieder schreiben wir ψ , analog (17), in der Form

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_n \mathbf{a}_n \varphi_n(\mathbf{r}); \quad (20)$$

aber die \mathbf{a}_n haben andere nichtkommutative Multiplikationseigenschaften, als die \mathbf{b}_n ; und zwar handelt es sich um Multiplikationsgesetze einer merkwürdigen Art, die bislang noch nicht vorgekommen waren. (Während die Vertauschungsregeln der \mathbf{b}_n ja nur den uns seit Anfang der Matrizenmechanik bekannten *kanonischen* Vertauschungsregeln entsprechen.)

Wir müssen fordern:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_n^\dagger \mathbf{a}_m + \mathbf{a}_m \mathbf{a}_n^\dagger &= \delta_{nm} \mathbf{I}, \\ \mathbf{a}_n \mathbf{a}_m + \mathbf{a}_m \mathbf{a}_n &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

oder, was damit *gleichwertig* ist:

$$\left. \begin{aligned} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}') + \psi(\mathbf{r}') \psi^\dagger(\mathbf{r}) &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{I}, \\ \psi(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}') + \psi(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Von den im BOSE-Fall geltenden Relationen (16), (19) unterscheiden sich (20), (21) offenbar nur um *Vorzeichen*; dieser Vorzeichenunterschied bedingt tiefgreifende Unterschiede, jedoch unter Erhaltung einer engen Verwandtschaft beider Fälle.

Wieder ergibt die Wellenquantelung die *Existenz von Korpuskeln*, und obendrein noch das PAULI-Verbot, auf folgendem Wege.

Für $\mathbf{N}_n = \mathbf{a}_n^\dagger \mathbf{a}_n$ ist aus (21) zu erkennen:

$$\mathbf{N}_n^2 = \mathbf{N}_n; \quad (23)$$

und das bedeutet offenbar, daß \mathbf{N}_n *nur die zwei Eigenwerte 0 und 1 hat*: die *Ganzzahligkeit* dieser Eigenwerte bedeutet *Existenz von Korpuskeln*, und das Nichtvorhandensein von Eigenwerten > 1 bedeutet *Gültigkeit des PAULI-Verbots*.

Im übrigen gilt alles, was wir für den BOSE-Fall ausgeführt haben, auch für die jetzige Formulierung des FERMI-Falles.

Natürlich muß man noch beweisen, daß Matrizen \mathbf{a}_n der in (21) geforderten Art auch wirklich konstruierbar sind, und darin liegt eine Schwierigkeit, weil man das System der Matrizen \mathbf{a}_n offenbar *nicht* etwa bekommen kann als *direktes Produkt* („*Verschmelzung*“) derjenigen Matrizen, welche je einem einzelnen *Quasioszillator* entsprechen. (Die \mathbf{b}_n dagegen sind offenbar durch Verschmelzung der den einzelnen harmonischen Oszillatoren zugehörigen \mathbf{b} -Matrizen zu bekommen.) Trotzdem gelingt die Konstruktion der \mathbf{a}_n überraschend einfach¹.

¹ Nämlich so: Zunächst betrachte die folgenden Matrizen *zweiten Grades*:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbf{d}^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{d}^\dagger \mathbf{d} &= \mathbf{I} - \mathbf{d} \mathbf{d}^\dagger; & \mathbf{I} - 2 \mathbf{d}^\dagger \mathbf{d} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Durch *Verschmelzung* (direktes Produkt) bekommen wir dann ein System von Matrizen \mathbf{d}_n mit den Eigenschaften

$$\mathbf{d}_n^\dagger \mathbf{d}_n + \mathbf{d}_n \mathbf{d}_n^\dagger = \mathbf{I}; \quad [\mathbf{d}_n, \mathbf{d}_m] = [\mathbf{d}_n, \mathbf{d}_m^\dagger] = 0 \text{ für } m \neq n.$$

Im BOSE-Fall ist es, wie wir überlegten, im Prinzip denkbar, das Ψ -Feld ähnlich wie ein \mathcal{E} , \mathcal{H} -Feld auszumessen; wir können etwa die hermitesche Größe $\Psi(r) + \Psi^\dagger(r)$ für alle r zugleich gemessen denken. Wesentlich ist dafür natürlich, daß stets

$$[\Psi(r) + \Psi^\dagger(r), \Psi(r') + \Psi^\dagger(r')] = 0$$

ist, und das wird ja gerade *anders* im jetzt betrachteten FERMI-Fall: Jetzt ist $\Psi(r) + \Psi^\dagger(r)$ bei $r \neq r'$ nicht vertauschbar mit $\Psi(r') + \Psi^\dagger(r')$, und folglich ist eine *Ausmessung des Ψ -Feldes im FERMI-Fall prinzipiell unmöglich*. Wir sehen also, daß eine asymptotische Anwendbarkeit der klassischen Wellentheorie nur bei einem solchen Strahlungsfeld besteht, dessen Korpuskeln *Bosesch* und nicht *Fermisch* sind.

Wir haben schon in Kapitel I, § 1, 3 unter den dortigen Formulierungen A und C hervorgehoben, daß die klassische Wellentheorie auf das Licht in *zweierlei* Weise anwendbar ist. Nämlich A: Wir können die *Intensitätsmittelwerte* im Interferenzfeld nach der klassischen Wellentheorie *exakt* berechnen; der Absolutwert der Gesamtintensität ist dabei *belanglos*. Und C: Wir können für den *Grenzfall* hoher Strahlungsdichte auch alle *Intensitätsschwankungen* nach der klassischen Wellentheorie berechnen. Diese Feststellung C ist *logisch völlig unabhängig* von A, und jetzt können wir allgemein aussprechen: *Sie trifft nur für BOSESche Strahlung zu, für FERMISche dagegen nicht* — während A für BOSESche *und* FERMISche Strahlung zutrifft.

Beispielsweise ergibt sich $(\Delta N_V)^2$, wenn die Wände von V nur für Strahlung des Frequenzbereichs $\nu, \nu + \Delta\nu$ durchlässig sind, im BOSESchen Fall ganz allgemein proportional mit $n_\nu(1 + n_\nu)$, aber im FERMISchen Fall ebenso allgemein proportional mit $n_\nu(1 - n_\nu)$.

Wir können die Verhältnisse etwa in folgendem Schema darstellen:

BOSE:	$n_\nu \ll 1$	$1 + n_\nu \gg 1$ klassische Wellentheorie
FERMI:	Korpuskeln mit Wahrscheinlichkeitswelle	$1 - n_\nu \ll 1$ (klassisch unvorstellbar)

Hier ist festgestellt, daß für $n_\nu \ll 1$ in *beiden* Fällen jene einfache Theorie gilt, die so aussieht: Ein wellentheoretisch berechnetes Interferenzfeld ergibt die relativen *Wahrscheinlichkeiten* für die verschiedenen

Nun sei $\mathbf{r}_n = \mathbf{1} - 2 \mathbf{a}_n^\dagger \mathbf{a}_n$, und die durch die Numerierung $n = 1, 2, 3, \dots$ der verschiedenen Quasiozillatoren festgelegte (an sich willkürliche) *Reihenfolge* benutzen wir, um

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{a}_n \cdot \prod_{k=1}^{k=n-1} \mathbf{v}_k$$

zu definieren; die gewünschten \mathbf{a}_n sind damit erzielt. Übrigens ist diese mathematische Konstruktion (in anderem Zusammenhange) schon von dem Mathematiker CLIFFORD angegeben worden.

Möglichkeiten der *korpuskularen Einzelprozesse*. Die dabei angewandte Berechnungsweise der statistischen Intensitätsmittelwerte gilt *unabhängig* von der Voraussetzung $n_v \ll 1$; aber *nur* für $n_v \ll 1$ kann man anschließend daran alle *Schwankungseffekte* aus der radikalen *klassischen Korpuskularvorstellung* errechnen.

Für den BOSE-Fall tritt bei $n_v \gg 1$ (oder auch $1 + n_v \gg 1$) die *vollständige* klassische Wellentheorie asymptotisch in Kraft. Aber für den FERMI-Fall verlaufen die Schwankungen bei $1 - n_v \ll 1$ in einer durch *keine* klassische Theorie darstellbaren Weise.

Endlich sei noch die enge Beziehung der Multiplikationsregeln für die \mathbf{a}_m bzw. \mathbf{b}_m zu den Häufigkeiten der quantenphysikalischen Elementarprozesse hervorgehoben. Daß im

$$\begin{aligned} \text{BOSE-Fall} \quad \mathbf{b}_m \mathbf{b}_m^\dagger &= \mathbf{1} + \mathbf{b}_m^\dagger \mathbf{b}_m = \mathbf{1} + N_m, \\ \text{FERMI-Fall} \quad \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^\dagger &= \mathbf{1} - \mathbf{a}_m^\dagger \mathbf{a}_m = \mathbf{1} - N_m \end{aligned}$$

wird, ist die Wurzel für die in (29), (29'), §.1, 3 einander gegenübergestellten Prozeßwahrscheinlichkeiten, in denen $1 + n_v$ beim BOSE-Fall und $1 - n_v$ beim FERMI-Fall auftritt. Ebenso aber natürlich auch für den Faktor $1 \pm n_v$ im Schwankungsquadrat $(\Delta N_v)^2$.

4. Wechselwirkung und Selbstenergie. Das Bisherige (Abschnitt 2 und 3) bezog sich auf den einfachsten Fall insofern, als von einer *Wechselwirkungsenergie* der Teilchen unseres N -Körperproblems ganz abgesehen wurde. Aber auch beliebige Wechselwirkungen können im Rahmen der Methode der zweiten Quantelung exakt behandelt werden (JORDAN-KLEIN). Unter Verzicht auf alle Beweise wollen wir hier nur die Ergebnisse der diesbezüglichen Ermittlungen kurz besprechen; diese Ergebnisse sind von sehr anschaulichem Charakter. Der Bequemlichkeit halber legen wir BOSESche Teilchen zugrunde; aber nach der Methode des vorigen Abschnitts können alle folgenden Bemerkungen auf den FERMI-Fall übertragen werden.

Es werde der konkrete Fall einer COULOMBSchen Wechselwirkung betrachtet. *Klassisch* ergibt eine räumlich mit der Dichte $\varrho = \varrho(\mathbf{r})$ verteilte Ladung eine COULOMBSche Wechselwirkungsenergie

$$H_w = \frac{1}{2} \iint \frac{\varrho(\mathbf{r}) \varrho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r} d\mathbf{r}'. \quad (24)$$

In Korrespondenz hierzu könnte man zunächst vermuten, daß die Matrix der Wechselwirkungsenergie gleich

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}_w &= \frac{e^2}{2} \iint \frac{\mathbf{N}(\mathbf{r}) \mathbf{N}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \\ &= \frac{e^2}{2} \iint \frac{\psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) \psi^\dagger(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

sein müßte, wenn e die Ladung jedes Teilchens ist. Aber in Wirklichkeit ist die *richtige* (also mit der Methode der symmetrischen Eigenfunktionen

im mehrdimensionalen Koordinatenraum *übereinstimmende*) Matrix die folgende:

$$\mathbf{H}_W = \frac{e^2}{2} \iint \frac{\psi^\dagger(\mathbf{r}) \psi^\dagger(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r} d\mathbf{r}'. \quad (26)$$

Der Unterschied von (25) und (26) hat einen sehr bedeutungsvollen Sinn. *Subtrahieren* wir den Ausdruck (26) von (25), so ergibt sich etwas Singuläres: Während (26) eine *endliche* Energie darstellt, enthält (25) außerdem einen *unendlichen* Anteil. Um dessen Bedeutung zu erkennen, ersetzen wir für einen Augenblick $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ durch eine bei $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ noch *endlich* bleibende Funktion $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$. Dann lautet die fragliche Differenz, ausgerechnet mit Beachtung von (19):

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \frac{e^2}{2} \iint d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \cdot G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \{ \psi^\dagger(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') \} \\ &= \frac{e^2}{2} \int d\mathbf{r} \cdot G(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}(\mathbf{r}). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Das ist aber folgendermaßen zu verstehen. Wenn wir klassisch nicht mit einer stetig verteilten räumlichen Ladungsdichte $\rho(\mathbf{r})$ rechnen, sondern mit einzelnen *Punktladungen* e , dann müssen wir schreiben

$$H_W = \frac{e^2}{2} \sum'_{k,l} \frac{1}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l|}, \quad (28)$$

wobei der *Strich* am Summenzeichen bedeutet, daß in der Doppelsumme alle *Glieder mit $l = k$ auszulassen* sind. Die unrichtige Formel (25) würde einer Summation *mit Einschluß* der (unendlichen) Summanden $l = k$ entsprechen; (26) entspricht dagegen (28) und die Differenz (27) entspricht gerade den richtigerweise in (28) *auszulassenden* Summanden.

Es ist sehr bemerkenswert, daß diese in der klassischen Formel (28) so unelegant erscheinende Auslassung durch die Methode der zweiten Quantelung in (26) so überzeugend elegant auszudrücken ist — unter wesentlicher Benutzung der hier sehr merkwürdig wirkenden *nicht-kommutativen Multiplikation* der quantenmechanischen Größen. Dies erweckt Hoffnungen in bezug auf das berühmte und berüchtigte Problem der *Struktur des Elektrons*: allerdings sind diese Hoffnungen zur Zeit noch unerfüllt. Wir kommen darauf zurück.

Erwähnen wir jedoch am Ende dieses Paragraphen, daß der mathematische Apparat der hier nur in ihren Ergebnissen erläuterten Methode der zweiten Quantelung späterhin Gegenstand weiterer Untersuchungen und Vervollkommnungen gewesen ist (insbesondere durch Fock). Dabei ist auch geklärt worden, in welcher Weise aus der exakten Methode der zweiten Quantelung eine gewisse sehr wichtige *approximative* Methode, die *HARTREESche Methode*, herzuleiten ist, die bei weiterer approximativer Vereinfachung in die THOMAS-FERMISCHE Methode übergeht.

In mancherlei Hinsicht scheint eine zwischen der Methode der zweiten Quantelung und der Koordinatenraummethode *vermittelnde* Methode

nützlich zu sein, die daran besteht, daß statt der \mathbf{b}_n bzw. \mathbf{a}_n nur die *bilinearen* Ausdrücke

$$\mathbf{B}_{nm} = \mathbf{b}_n^\dagger \mathbf{b}_m \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A}_{nm} = \mathbf{a}_n^\dagger \mathbf{a}_m \quad (29)$$

benutzt werden. Diese sind alle mit

$$\mathbf{N} = \sum_n \mathbf{N}_n \quad (30)$$

vertauschbar, und können deshalb auch vom Standpunkte der Koordinatenraummethode einfach definiert werden.

§ 5. Quantenelektrodynamik.

1. Relativistische Quantelung. Die Notwendigkeit, die Formulierung der quantenmechanischen Vertauschungsregeln für das Feldkontinuum in Einklang zu bringen mit dem Prinzip der (speziellen) relativistischen Invarianz oder der *vierdimensionalen Symmetrie* der Raumzeitmannigfaltigkeit, hat lange Zeit ein Hemmnis des weiteren Fortschreitens gebildet. Die ersten Ergebnisse, die in dieser Frage erzielt wurden (JORDAN-PAULI), mögen erläutert werden am Beispiel der linearen Differentialgleichung

$$\square \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

mit der zugehörigen Energiedichte

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \left\{ (\text{grad } \mathbf{u})^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)^2 \right\}. \quad (2)$$

Eine Möglichkeit, die Quantelung der Eigenschwingungen dieser Differentialgleichung relativistisch invariant zu vollziehen, ergibt sich folgendermaßen. Wir setzen als Lösung an:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} = & \int \int \int \frac{\alpha_{\mathbf{f}} \cos 2\pi(\mathbf{f}\mathbf{r} - c k t)}{k} d\mathbf{k}_x d\mathbf{k}_y d\mathbf{k}_z \\ & + \int \int \int \frac{\beta_{\mathbf{f}} \sin 2\pi(\mathbf{f}\mathbf{r} - c k t)}{k} d\mathbf{k}_x d\mathbf{k}_y d\mathbf{k}_z. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Hier werden gleichmäßig x, y, z und t als gewöhnliche Zahlen aufgefaßt; ebenso sind die von $-\infty$ bis $+\infty$ variierenden Komponenten k_x, k_y, k_z des Vektors \mathbf{k} mit dem Absolutbetrag $k = |\mathbf{k}|$ gewöhnliche Zahlen. (Mit \mathbf{r} bezeichnen wir wieder den Ortsvektor x, y, z .) *Nichtkommutative* Größen (*Matrizen*) sind dagegen die Koeffizienten $\alpha_{\mathbf{f}}, \beta_{\mathbf{f}}$; zwischen diesen nehmen wir die Vertauschungsregeln

$$\left. \begin{aligned} [\alpha_{\mathbf{f}}, \alpha_{\mathbf{f}'}] &= [\beta_{\mathbf{f}}, \beta_{\mathbf{f}'}] = 0, \\ [\alpha_{\mathbf{f}}, \beta_{\mathbf{f}'}] &= \frac{\hbar}{2\pi i} \delta(\mathbf{f} - \mathbf{f}') \mathbf{I} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

an. Offensichtlich sind diese Festsetzungen invariant gegen vierdimensionale Drehungen (LORENTZ-Transformationen) der x, y, z, t , bei denen der „Weltnullpunkt“ $x = y = z = t = 0$ festgehalten wird. Man sieht aber leicht, daß sie überdies auch gegenüber Verschiebungen dieses Weltnullpunkts invariant sind. Also haben wir für diesen Fall wirklich eine invariante Formulierung erreicht.

Man kann auch (4) wieder durch eine nicht mehr explizit von den Eigenschwingungen abhängende Formulierung ersetzen. Schreiben wir kurz P für den vierdimensionalen Weltpunkt $x, y, z; t$, so errechnen wir aus (3), (4):

$$[\mathbf{u}(P), \mathbf{u}(P')] = -\frac{\hbar c}{8\pi^2 i} \Delta(P-P') \mathbf{I}, \quad (5)$$

wobei $\Delta(P-P')$ definiert ist durch

$$\Delta(P) = \frac{\delta(\mathbf{r} + c t) - \delta(\mathbf{r} - c t)}{r}; \quad (6)$$

unter δ wieder die DIRACsche singuläre δ -Funktion verstanden.

Die relativistischen Symmetrieforderungen sind durch diese Beziehungen in einfachster und schönster Weise erfüllt, und natürlich kann man statt der Gleichung (1) auch verwickeltere Gleichungen nach dieser Methode behandeln. Insbesondere kann man die Quantelung der MAXWELLSchen Gleichungen des Vakuumfeldes in dieser Weise als tatsächlich relativistisch invariant erweisen (JORDAN-PAULI); man bekommt für die Feldstärken \mathbf{F}_{kl} vierdimensionale Vertauschungsregeln der Gestalt

$$\left. \begin{aligned} & [\mathbf{F}_{kl}(P), \mathbf{F}_{jm}(P')] = \\ & = \frac{-\hbar c \mathbf{I}}{8\pi^2 i} \left(\delta_{lm} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} + \delta_{kj} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_m} - \delta_{lj} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_m} - \delta_{km} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_j} \right) \Delta(P-P'); \end{aligned} \right\}$$

und eine eingehende Diskussion der physikalischen Bedeutung der so formulierten relativistisch invarianten Vakuum-Quantenelektrodynamik erweist diese Formulierung als tatsächlich genau dem physikalischen Problem angemessen (BOHR-ROSENFELD).

Aber die Anwendbarkeit dieser Methode ist doch eng begrenzt. Obwohl in dieser Gleichung (5) keine explizite Bezugnahme auf die Eigenschwingungen der Wellengleichung $\square \mathbf{u} = 0$ mehr vorkommt, so kann (5) doch noch nicht bei beliebig allgemeinen, insbesondere auch nichtlinearen Feldgleichungen angewandt werden. Die Möglichkeit, eine solche „vierdimensionale Vertauschungsregel“ zu formulieren, in welcher die Multiplikationsbeziehungen zwischen zwei Werten $\mathbf{u}(P)$, $\mathbf{u}(P')$ an zwei beliebigen Weltpunkten P , P' festgelegt werden, ist nämlich wesentlich begründet in dem Umstand, daß wir die Gleichung $\square \mathbf{u} = 0$ explizit integrieren können. Der Zusammenhang von (5) mit der speziellen Gestalt der Feldgleichung $\square \mathbf{u} = 0$ erhellt daraus, daß $\Delta(P)$ gemäß (6) eine (singuläre) Lösung gerade dieser Feldgleichung ist:

$$\square \Delta(P) = 0. \quad (7)$$

Wäre das nicht der Fall, so würde (5) in der Tat mit der Feldgleichung in Widerspruch stehen. Aus (5) folgt ja

$$[\square \mathbf{u}(P), \mathbf{u}(P')] = -\frac{\hbar c \mathbf{I}}{8\pi^2 i} \square \Delta(P-P'), \quad (8)$$

und da die linke Seite mit $\square \mathbf{u} = 0$ verschwindet, muß auch die rechte notwendig Null sein.

Im Gegensatz zu den z. B. in (22), § 4, 3 formulierten „dreidimensionalen“ Vertauschungsregeln, deren Gestalt ganz unabhängig von den Differentialgleichungen (Feldgleichungen) war, hängen also die vierdimensionalen Vertauschungsgesetze durchaus von der Form dieser Feldgleichungen ab, und ihre explizite Aufstellung muß unmöglich werden, sobald (wie bei nichtlinearen Feldgleichungen der Fall) diese Differentialgleichungen nicht mehr explizit integrierbar sind.

Eine Untersuchung von HEISENBERG und PAULI hat nun die Einsicht gebracht, daß man mit den *dreidimensionalen* Vertauschungsregeln wirklich *auskommen*, also ihre relativistische Invarianz trotz scheinbar völliger raumzeitlicher Unsymmetrie behaupten und beweisen kann.

Bleiben wir zunächst bei unserem bisherigen Beispiel (1), (2), so erhalten wir als dreidimensionale Vertauschungsregeln nach der Methode von § 3, 4:

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \mathbf{u}(\mathbf{r}', t)] &= [\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t), \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}', t)] = 0; \\ [\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t), \mathbf{u}(\mathbf{r}', t)] &= \frac{h}{2\pi i} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{1}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Es zeigt sich nun: *Diese Forderungen (9) in Verbindung mit (1) sind äquivalent mit (5) und (1).* Man sieht nämlich leicht, daß (9) eine Folge von (5), (6) ist¹.

Daß sich aber umgekehrt die vierdimensionalen Vertauschungsregeln als Folgerungen der dreidimensionalen ergeben, wird dadurch verständlich, daß man aus den Werten $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ und $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r})$ zu einer festen Zeit $t=0$ an allen Orten \mathbf{r} jeden Wert $\mathbf{u}(P)$ auf Grund der Feldgleichung $\square \mathbf{u} = 0$ eindeutig (als *lineare* Funktion) errechnen kann (HUYGENS-KIRCHHOFFSches Prinzip!); die Vertauschungseigenschaften beliebiger $\mathbf{u}(P)$, $\mathbf{u}(P')$, die zu zwei beliebigen Zeiten t , t' gehören, sind also bereits eindeutig festgelegt, sobald man die für $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{r})$ zu einer Zeit $t=0$ festgelegt hat.

Man muß also die Vertauschungsregeln (9) auch *unabhängig* von der vierdimensionalen Formulierungsweise (5) als relativistisch invariant erweisen können — da sie ja tatsächlich invariant *sind*, obwohl sie zunächst gar nicht danach aussehen, infolge der ganz ungleichartigen Behandlung von Zeit und Raumkoordinaten in (9). HEISENBERG und PAULI haben einen solchen unmittelbaren Invarianzbeweis tatsächlich erbringen können, und zwar nicht nur für den speziellen Fall der Gleichung (1), sondern ganz allgemein für beliebige Feldgleichungen (die eine zugehörige HAMILTONSche Energiefunktion besitzen). Danach können wir uns nun allgemein der auch bei nichtlinearen Feldgleichungen anwendbaren dreidimensionalen Vertauschungsregeln bedienen, ohne betreffs der relativistischen Invarianz Sorge zu haben.

¹ Denn es ist $\frac{1}{c} \frac{\partial \Delta(P)}{\partial t} \Big|_{t=0} = -4\pi \delta(\mathbf{r})$.

2. Ansatz zur vollen Quantenelektrodynamik. Wir lernten die relativistisch invarianten Wellengleichungen des α -Teilchens und des Elektrons kennen in der Form

$$\left\{ \sum_{k=1}^4 \left(\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{e}{c} \Phi_k \right)^2 + \mu^2 c^2 \right\} \psi = 0 \quad (\text{I0})$$

bzw.

$$\left\{ \sum_{k=1}^4 \alpha_k \left(\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{e}{c} \Phi_k \right) + i\mu c \right\} \psi = 0; \quad (\text{I1})$$

und wir wissen, daß die zugehörigen Erwartungswerte von *Strom und Ladungsdichte* gegeben sind durch

$$s_k = ic \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x_k} \psi \right) + \frac{4\pi e^2}{\hbar c} \Phi_k \psi^* \psi \quad (\text{I2})$$

bzw.

$$s_k = e(\alpha_k \psi, \alpha_k \psi). \quad (\text{I3})$$

Es liegt nun nahe, zu versuchen, ob man nicht diese Gleichungen unmittelbar *verknüpfen* kann mit den MAXWELLSchen Gleichungen; wir hatten ja schon in der FERMI-THOMAS-Methode die Erzeugung elektrischer Feldstärke durch die mit $|\psi|^2$ proportionale Ladungsdichte in der Elektronenhülle des Atoms mit der POISSONSchen Gleichung

$$\Delta v = 4\pi \rho_e \quad (\text{I4})$$

ausgedrückt. Allgemein lehrt ja die MAXWELLSche Theorie, daß (im Vakuum) die felderzeugende Wirkung von Strom und Ladung durch

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathfrak{E} &= 4\pi \rho; & \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= \frac{4\pi i}{c} \mathfrak{J} + \frac{1}{e} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \\ \mathfrak{E} &= -\operatorname{grad} V - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}; & \mathfrak{H} &= \operatorname{rot} \mathfrak{A}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{I5})$$

oder in relativistischer Schreibweise

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_k} = s_l; \quad F_{kl} = \frac{\partial \Phi_l}{\partial x_k} - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_l} \quad (\text{I6})$$

auszudrücken ist. Nun also liegt es nahe, (I0) bzw. (I1) zu *ergänzen* durch (I6), wobei s_k den Ausdruck (I2) bzw. (I3) bedeuten soll: Dies würde in schönster Weise zum Ausdruck bringen, daß die Dynamik der geladenen Teilchen im Sinne der Wellenmechanik bestimmt wird durch das auf sie wirkende elektromagnetische Feld, und daß umgekehrt das Feld erzeugt wird von den geladenen, bewegten Teilchen.

Aber natürlich wäre es ein vollkommenes Mißverständnis, wenn wir nun versuchen wollten, dieses Gleichungssystem beispielsweise auf das *Wasserstoffatom* anzuwenden und das Vorhandensein einer COULOMBSchen Abstoßung *innerhalb der SCHRÖDINGERSchen Ladungswolke* zu behaupten. Das gibt es selbstverständlich *nicht*; sonst würde die ganze Theorie des H-Atoms über den Haufen geworfen. Aber wir kommen

sofort auf den richtigen Weg, wenn wir uns klar machen, daß die auf der Kombination von (10) bzw. (11) mit (16) beruhende Theorie ihrer Bedeutung nach gar nichts anderes ist, als eine *relativistische Verallgemeinerung der THOMAS-FERMI-Methode*; daß sie also genau so wie diese nur *approximative* Bedeutung haben kann, und zwar' für den Fall, daß *sehr viele* geladene Teilchen vorhanden sind, derart, daß man von der Existenz diskreter geladener Einzelteilchen ganz absehen und die vorhandenen Ladungen kontinuierlich verschmieren kann.

Um von dieser approximativen Theorie zu einer exakten aufzusteigen, werden wir also denselben Weg gehen müssen, der uns auch in § 4 von der THOMAS-FERMI-Methode zu einer exakten Methode führte: Wir betrachten die hier vorliegende Kontinuumstheorie — in der es keine Atomistik der Ladung gibt — als eine „klassische“ Theorie, und unterwerfen sie der *Quantelung*. Das heißt also, *wir setzen jetzt Matrizen für die Feldstärken \mathfrak{E} , \mathfrak{H} und für die SCHRÖDINGERSche bzw. DIRACsche Amplitude ψ .*

Damit treten wir in die volle *Quantenelektrodynamik* ein. Wir haben uns in den vorangegangenen Teilen dieses Kapitels in jeder Hinsicht ausgerüstet für die Durchführung des Programms, das wir soeben in wenigen Worten formuliert haben, und es ist nun kaum noch etwas hinzuzufügen zur weiteren Erläuterung. Erwähnt sei nur noch, daß die *Eichinvarianz* der Durchführung der skizzierten Theorie zunächst einige Schwierigkeiten bereitet, die sich aber überwinden lassen.

Natürlich ist die so sich ergebende Theorie ein etwas komplizierter und zunächst unhandlicher Apparat, und eine Reihe von Untersuchungen verschiedener Verfasser haben zunächst nichts anderes erstrebt, als eine genauere Durchdringung mit dem Ziel, die Handhabung der neuen Methode zu erleichtern. So war es z. B. ein gar nicht triviales Problem, das *COULOMBSche Gesetz* als (in nichtrelativistischer Approximation geltende) *Folgerung* der so formulierten Quantenelektrodynamik zu erweisen. DIRAC hat den Weg zu diesem Nachweis gefunden, durch Überlegungen, die zunächst darauf abgestellt waren, eine ganz *andersartige* Formulierung der Quantenelektrodynamik aufzubauen. Doch haben sich seine Formulierungen dann als äquivalent mit der hier skizzierten Theorie erwiesen.

Die *spannendste* Frage beim Ausbau der vollen Quantenelektrodynamik war die, ob es gelingen würde, eine *unendlich große Selbstenergie* des Elektrons zu vermeiden, die sich daraus ergibt, daß $(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)/8\pi$ bei Integration über die Umgebung einer *punktförmigen* Ladung unendlich wird. Für die *nichtrelativistische* Theorie hatten wir ja durch eine geschickte Ausnutzung der *nichtkommutativen Multiplikation* die uns unerwünschte „Wechselwirkungsenergie der einzelnen Ladung mit sich selbst“ aus dem Energieausdruck beseitigen können (§ 4, 4). Enttäuschenderweise aber hat sich gezeigt (HEISENBERG-PAULI), daß in der relativistischen Theorie eine derartige Beseitigung der unendlichen Selbstenergie *nicht*

möglich ist: Dies ist ein schwerer Mangel der Theorie, und er verhindert ihre Durchführung gerade in bezug auf solche Probleme (sehr stark beschleunigte Elektronenbewegungen), auf deren Inangriffnahme wir eigentlich ausgingen. Es wird hernach davon zu sprechen sein, daß BORN einen sehr beachtenswerten Ausweg aus dieser Schwierigkeit angegeben hat (§ 6). Augenblicklich aber sei ergänzend hervorgehoben, daß *noch weitere* Unendlichkeitsschwierigkeiten in dieser Theorie vorhanden sind und uns sozusagen geradezu auf Schritt und Tritt begegnen. Es ist also auch jetzt das zu wiederholen, was wir am Ende von § 3 ausgesprochen hatten: Die heutige Quantenelektrodynamik ist — im Gegensatz zur (nichtrelativistischen) Quantenmechanik — nicht eine in sich geschlossene, widerspruchsfreie und systematische Theorie, sondern nur ein *Bruchstück* einer noch unbekannteren künftigen Theorie. Sie kann als ein Ansatz zu einer *Verschärfung von Korrespondenzbetrachtungen* bezeichnet werden: vielerlei konkrete Einzelprobleme können mit der Methodik der Quantenelektrodynamik in klarer, einwandfreier Weise behandelt werden, aber für die Anwendung der Quantenelektrodynamik ist, genau wie bei den älteren Korrespondenzüberlegungen, ein *physikalischer Instinkt* notwendig, der zu beurteilen vermag, wie weit die — tatsächlich begrenzte — Zuverlässigkeit dieser vorläufigen Methodik reicht.

Dieser Charakter der Quantenelektrodynamik als einer Verschärfung des Korrespondenzprinzips kommt sehr deutlich zur Geltung in folgenden HEISENBERGSchen Überlegungen: Man kann die Herleitung der *Übergangswahrscheinlichkeiten* aus den SCHRÖDINGERSchen Eigenfunktionen — die wir früher (Kapitel 3, § 3, 2) nur durch den Nachweis begründet hatten, daß die fraglichen Integrale tatsächlich mit den *Matrixelementen* übereinstimmen — sehr anschaulich aus den wellenmechanischen Vorstellungen unmittelbar gewinnen. So war schon von SCHRÖDINGER die *Dispersions-theorie* so ausgeführt worden, daß die durch die SCHRÖDINGERSche Wellenamplitude gegebene statistische Ortswahrscheinlichkeit des Elektrons als eine kontinuierliche „Ladungswolke“ aufgefaßt und ihr Verhalten unter Einwirkung einer äußeren Lichtwelle studiert wurde. Jedoch muß man sich dabei hüten vor einer zu „klassischen“ Auffassung; eine statistische, korrespondenzmäßige *Umdeutung* der Rechenresultate ist notwendig (O. KLEIN). Diese Umdeutung vollzieht sich nun *von selbst* (HEISENBERG), wenn man den Formalismus der zweiten Quantelung anwendet, der es erlaubt, aus ψ eine *wirkliche* (nicht nur statistische) Ladungsdichte zu bilden, allerdings als eine Matrix. Eine Reihe von quantenelektrodynamischen Gesetzmäßigkeiten können auf diese Weise in besonders enger Analogie zur klassischen Theorie abgeleitet werden.

Vom gleichen Charakter wie diese Überlegungen sind auch einige hauptsächlich von MÖLLER und BREIT entwickelte Formulierungen, welche die ersten Schritte zu einer Erfassung des Problems der *retardierten Wechselwirkungen* von Elektronen darstellen. „*Retardierung*“ heißt bekanntermaßen die Tatsache, daß die von einem Elektron zum anderen

hinüberspielenden Wirkungen eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit besitzen. Deren Berücksichtigung in *quantentheoretischer* Form stellt uns aber vor Probleme, die schon auf den ersten Blick als recht tief liegend zu erkennen sind. Denn zwischen zwei weit entfernten Elektronen — sie mögen etwa zwei verschiedenen H-Atomen angehören — geschieht ja die elektromagnetische Wechselwirkung in Gestalt einer wechselseitigen *Zustrahlung von Lichtquanten*. Diesen Grenzfall einerseits und den Grenzfall der statischen COULOMB-Wirkung andererseits muß man also in einheitlichen *quantenelektrodynamischen* Gesetzen überbrücken können, um eine Theorie der retardierten Wechselwirkungen ausführen zu können. Trotz der hervorgehobenen grundsätzlichen Mängel, die in der jetzigen Quantenelektrodynamik noch bestehen, ist wenigstens eine erste Approximation zu einer sinngemäßen Behandlung der Retardierung möglich gewesen.

3. Paarerzeugung. Ein kräftefrei bewegtes Elektron hat eine Energie, die stets $\geq \mu c^2$ ist (μ die Ruhmasse). Aber die DIRACsche relativistische Wellengleichung des Elektrons ergibt für den kräftefreien Fall außer Energieeigenwerten $\geq \mu c^2$ auch noch *negative Energiewerte* $\leq -\mu c^2$. Solche, beliebig weit nach $-\infty$ heruntergehende negative Energiewerte liefert die DIRACsche Gleichung nicht nur im kräftefreien Falle, sondern *stets*. Wenden wir die DIRACsche Gleichung auf das Elektron im H-Atom an, so bekommen wir: 1. Die die ganze Energieskala $\geq \mu c^2$ erfüllenden Eigenwerte, welche den *Hyperbelbahnen* des Elektrons korrespondieren; 2. die dicht unterhalb μc^2 liegenden diskreten Eigenwerte (relativistisch korrigierte BALMER-Terme), den *Ellipsenbahnen* des Elektrons korrespondierend; 3. *negative Eigenwerte*, nämlich alle Werte $\leq -\mu c^2$.

Die letzteren *zerstören* natürlich die Anwendbarkeit der Theorie in dem zunächst gemeinten Sinne. Wollten wir daran festhalten, das H-Atom-Problem als *Einelektronproblem* aufzufassen, so würden wir aus der DIRACschen Gleichung das Resultat erhalten, das das Elektron, wenn es sich in irgendeinem Zustand mit positiver Energie befindet, schon nach ungeheurer kleiner Verweilzeit in einen der Zustände negativer Energie übergehen und dann unter fortgesetzter Ausstrahlung zu immer tieferen negativen Energiewerten unbegrenzt fortschreiten müßte.

Dies hat eine Zeitlang eine große Verlegenheit der Theorie gebildet, bis DIRAC auf einen wunderbaren Ausweg kam. Die zur DIRACschen Gleichung gehörige Eigenwertgleichung bleibt ungeändert, wenn man 1. das *Vorzeichen der Elektronenladung* ändert; 2. das Vorzeichen der Energiewerte umkehrt. Es stimmen also in jedem Falle die *negativen* Energiewerte dem *Betrage* nach überein mit den Energiewerten, die ein *positiv geladenes Elektron* haben müßte. Daraufhin hat DIRAC nun folgenden Gedanken ausgesprochen: Der *ladungsfreie* Zustand *ohne* irgendwelche vorhandene Elektronen soll im theoretischen Bilde so dargestellt werden, daß zwar alle Zustände mit positiven Energiewerten *unbesetzt* sind, aber jeder Zustand mit *negativem* Energiewert *besetzt* ist.

Ein vorhandenes Elektron ist dann im theoretischen Bilde so darzustellen, daß *alle* Zustände negativer Energie und *ein* Zustand positiver Energie besetzt sind. Sofern dieser letztere Zustand *nicht* der *Grundzustand* ist, kann das Elektron unter Strahlungsemission in einen *tieferen* Zustand positiver Energie übergehen. Aber ein Herunterfallen im Zustande *negativer* Energie ist nach dem PAULI-Verbot ausgeschlossen.

Aber unter *Absorption* hochfrequentiger Strahlung kann ein Elektron aus einem der besetzten Zustände negativer Energie *hinaufgehoben* werden in einen Zustand positiver Energie; dazu ist offenbar eine Energie

$$E = E^{(+)} + E^{(-)} \quad (17)$$

nötig, wo $E^{(-)}$ die positive Energie des *hernach* besetzten Zustands ist, während $E^{(+)}$ der *Betrag* der *negativen* Energie des vorher besetzt gewesenen und nun unbesetzten Zustands ist.

Dies ist ein Prozeß der *Paarerzeugung*: Wir brauchen dazu eine Energiezufuhr, die gleich der *Summe* der (positiven) Energien eines *negativen Elektrons* und eines *positiven Elektrons* ist, und es entsteht als Resultat tatsächlich 1. ein negatives Elektron, im theoretischen Bilde dargestellt durch das neu besetzte positive Energieniveau, und 2. ein *positives Elektron*, im theoretischen Bilde dargestellt durch das nunmehr unbesetzte negative Energieniveau.

In dieses „Loch“ kann ein vorhandenes Elektron positiver Energie wieder hineinfallen; das bedeutet dann physikalisch die *Zerstrahlung* zweier sich neutralisierender Elektronen entgegengesetzten Vorzeichens.

Als DIRAC diesen Gedankengang entwickelte, war das *Positron* noch unentdeckt; DIRAC wollte deshalb die „Löcher“ mit den *Protonen* identifizieren, und es erschien als ein schwerwiegender Mangel dieser Theorie, daß sie von der „*Asymmetrie der Elektrizitätsarten*“ (ungleiche *Masse* von Elektron und Proton) keine Rechenschaft zu geben vermochte. Später hat dann die Entdeckung des Positrons die DIRACsche Idee noch entschiedener bestätigt, als DIRAC selber angenommen hatte: Tatsächlich *gibt es* positive Elektronen, und empirisch zeigen sie — abgesehen von ihrer *Seltenheit* — keinerlei asymmetrische Verschiedenheit gegenüber den „gewöhnlichen“ negativen Elektronen. Die systematische Durchführung der DIRACschen Löchertheorie, wie sie von DIRAC, HEISENBERG und anderen Verfassern gegeben worden ist, nimmt danach eine vollkommene Symmetrie der positiven und negativen Elektrizitäten an, und faßt es als sozusagen nur „geographische“ Tatsache auf, daß in unserer Gegend des Weltraums die *positiven Protonen* und die *negativen Elektronen* im *Überschuß* sind. Positive und negative Teilchen *derselben* Art können für längere Dauer nicht nebeneinander existieren; die Wahrscheinlichkeit der Neutralisierung ist zu groß. Es bliebe also außer der „bei uns“ verwirklichten Möglichkeit nur noch die *umgekehrte*, ein *Überschuß* von negativen Protonen und positiven Elektronen; und man hat bereits die Möglichkeit diskutiert, ob dieser Fall in manchen der

fernen Spiralnebel vorliegen könnte. Aus dem *Spektrum* eines Sternes kann man natürlich *nicht* entscheiden, welcher der beiden möglichen Fälle vorliegt; nur Untersuchungen an der *Höhenstrahlung* könnten Anhaltspunkte geben, wie es diesbezüglich mit verschiedenen Spiralnebeln steht.

Die Durchführung der Löchertheorie — bei der wir uns offenbar ganz im Rahmen der Quantenelektrodynamik bewegen — hat für eine Anzahl wichtiger Fälle Formeln ergeben, die sich experimentell ausgezeichnet bewährt haben. (Obwohl die grundsätzlichen Schwierigkeiten der Quantenelektrodynamik sich hier wieder erheblich bemerkbar machen.) Als einziges Beispiel verschiedener Formeln erwähnen wir folgende: Der *Wirkungsquerschnitt* Q eines (unendlich schweren) COULOMBSchen Kernes eZ in bezug auf den Prozeß der Paarerzeugung (Elektron + Positron) durch ein in das Kernfeld fliegendes Lichtquant $h\nu$ ist (nach BETHE-HEITLER):

$$Q = \frac{e^2 Z^2}{h c} \cdot \left(\frac{e^2}{\mu c^2} \right)^2 \cdot \left(\frac{28}{9} \ln \frac{2 h \nu}{\mu c^2} - \frac{218}{27} \right). \quad (18)$$

Endlich sei noch eine allgemeinere Bemerkung angefügt. Wenn wir, statt der DIRACschen Wellengleichung die relativistisch invariante Wellengleichung *spinfreier* Teilchen untersuchen [also die Gleichung (10)], so ergibt die *Quantelung* von ψ auch für diesen Fall Prozesse der *Paarerzeugung* und *Paarvernichtung*. Diese sind also keineswegs an das Vorhandensein eines Spinnmoments geknüpft. Charakteristischerweise bekommen wir aber für den Fall *spinfreier* Teilchen eine Theorie der Paarerzeugung ganz *ohne Zuhilfenahme der DIRACschen Löcheridee*; denn die Schwierigkeit mit den negativen Energien tritt hier gar nicht auf (PAULI-WEISSKOPF).

Dies steht in einer sehr bemerkenswerten Beziehung zur Frage der theoretischen Begründbarkeit der in § 1, 2 erwähnten Regel über den *Zusammenhang von Spinnmoment und Statistik*. Die eine Hälfte dieser Regel wird nämlich daraus verständlich, daß eine relativistisch invariante Wellenquantelung bei Teilchen mit *ganzzahligem* Spin nur mit dem Ergebnis einer *BOSE-Statistik* möglich ist. Für diese Teilchen ist also die DIRACsche Löcheridee wegen Fehlens des PAULI-Verbots *nicht* anwendbar, aber es besteht auch kein Bedürfnis dafür, da sich bei der Durchführung der Quantelung keine negativen Energien ergeben. Dagegen treten bei Teilchen mit *halbzahligem* Spin stets die negativen Energien auf, und folglich kann hier nur eine zum PAULI-Verbot führende Quantelung gebraucht werden.

§ 6. Kernstruktur und Elementarteilchen.

1. **Der Aufbau der Atomkerne.** Eine Theorie der *Kerne* ist erst durch die *Entdeckung des Neutrons* (CHADWICK) möglich geworden. Das Neutron ist ein Teilchen, dessen Masse nahezu gleich der des Protons ist,

das keine Ladung, wohl aber in halbzahliges Spinmoment (und ein gewisses zugehöriges magnetisches Moment) besitzt; entsprechend dieser letzteren Eigenschaft gehorcht es der FERMİ-Statistik.

Vor der Entdeckung des Neutrons stellte man sich naturgemäß die Kerne als aus Protonen und Elektronen zusammengesetzt vor. Das führte einerseits zu Folgerungen, die sich empirisch als falsch erwiesen: Da die Protonen erfahrungsgemäß (nach Ausweis des H_2 -Spektrums) dem PAULI-Verbot gehorchen und halbzahligen Spin besitzen, so müßte es nach dieser Vorstellung von der Geradzahligkeit oder Ungeradzahligkeit der Kernladung abhängen, ob ein Kern ganzzahligen Spin besitzt und der BOSE-Statistik folgt, oder halbzahligen Spin und FERMİ-Statistik zeigt. Andererseits aber wurde durch diese Vorstellung der Kernaufbau vollständig der Zuständigkeit der bislang verfügbaren quantenmechanischen Methoden entzogen: Da die Bindungsenergien der Kerne (Massendefekte), dividiert durch die Atomgewichte, größer als die Ruhenergie μc^2 eines Elektrons sind, so müßten für die Elektronen im Kerninneren die relativistischen Gesetze in extremster Form in Kraft treten; und die Untersuchung ihrer Wechselwirkungen untereinander und mit den Protonen wäre ein quantenelektrodynamisches Problem, dessen Inangriffnahme beim heutigen Stande unserer Methoden hoffnungslos wäre.

Dies Bild ändert sich nun mit einem Schlage, wenn wir mit HEISENBERG die neue Vorstellung annehmen, daß Protonen und Neutronen die Bausteine der Kerne sind. Denn da die durch die Atomgewichte dividierten Massendefekte in allen Fällen klein sind gegenüber der Masse eines Protons oder Neutrons, so erkennen wir jetzt den Kern als ein Gebilde, für welches die gewöhnliche, nichtrelativistische Quantenmechanik anwendbar ist. Dabei ergibt sich betreffs Spin und Statistik der Kerne folgendes einfache Bild¹:

Atomgewicht	Spin	Statistik
geradzahlig	ganzzahlig	BOSE
ungeradzahlig	halbzahlig	FERMI

Das entspricht in der Tat der Erfahrung (soweit bis heute eine empirische Entscheidung möglich gewesen ist), während es eine Anzahl von Fällen gibt, bei denen man zu empirisch falschen Ergebnissen käme, wenn man gemäß der alten Vorstellung nicht das Atomgewicht, sondern die Kernladungszahl als maßgebend ansehen würde.

Die Problemlage ist aber eine wesentlich andere, als bei der Untersuchung der Elektronenhüllen der Atome. Denn für die Elektronen

¹ Auch die gelegentlich vorgeschlagene Inbetrachtziehung von negativen Protonen als zusätzlichen Bausteinen schwerer Kerne würde daran nichts ändern.

war der Hauptanteil der Wechselwirkungsenergie — als *COULOMBSche Energie* — von vornherein bekannt; nur die Gesetze der Quantenmechanik waren noch unbekannt, als man die Erforschung dieses Problems begann. Jetzt liegt es gerade umgekehrt: die anzuwendenden quantenmechanischen Gesetze kennen wir, aber es fehlt uns ein Kenntnis der in Betracht kommenden *Wechselwirkungsenergien* — es ist die erste, dringlichste Aufgabe der theoretischen Analyse, aus den empirischen Daten hierüber Aufschlüsse zu gewinnen.

In erster Approximation zeigen nun die Kerne eine sehr einfache Gesetzmäßigkeit: Sie sind sämtlich „Tröpfchen“ einer annähernd gleichartigen „Kernflüssigkeit“ von stets *derselben Dichte* und mit stets *derselben Bindungsenergie pro Teilchen*. Das erstere zeigt sich so, daß die *Kernvolumina proportional den Atomgewichten* sind. Das letztere ergibt sich offenbar aus der Tatsache, daß alle Atomgewichte außer dem des Wasserstoffes angenähert *ganzzahlig* sind; darüber hinaus zeigen aber sogar noch die kleinen Abweichungen von der Ganzzahligkeit in erster Annäherung ein lineares Anwachsen der Gesamtbindungsenergie mit der Teilchenzahl (Atomgewicht).

Man könnte versucht sein, dies in enger Anlehnung an klassische Vorstellungen so aufzufassen, daß die Kernbausteine eine Kraft aufeinander ausüben, die in größerer Entfernung anziehend, von einer gewissen Minimalentfernung r_0 an hingegen abstoßend wirkt, und zwar so, daß sich schon bei geringer Unterschreitung des Abstandes r_0 *sehr große* Abstoßung ergibt. Anschaulich ausgedrückt hätten wir also undurchdringliche Kugeln mit wechselseitiger Anziehung. Aber dies primitive Bild entspricht bestimmt nicht den wirklichen Verhältnissen. Vielmehr haben wir uns nach HEISENBERG und MAJORANA die Sache folgendermaßen vorzustellen.

Die Protonen unter sich üben eine *COULOMBSche* Abstoßung aufeinander aus — es besteht keine Veranlassung, anzunehmen, daß bei den hier in Frage kommenden wechselseitigen Abständen der Teilchen bereits mit einem Ungültigwerden des *COULOMBSchen* Gesetzes zu rechnen sei — wenn auch selbstverständlich daneben eine schwächere Wechselwirkung der Spinmomente der Protonen vorhanden sein muß, die aber vernachlässigbar sein wird. Eine klassische Abschätzung des *Protonenradius* liefert nämlich (aus später noch zu besprechenden Gründen) die Größenordnung 10^{-16} cm, und da die Abstände nächstbenachbarter Teilchen im Kern von der Größenordnung 10^{-13} cm sind, so sieht jedenfalls betreffs der Protonen (betreffs der Neutronen wissen wir noch zu wenig) die Sache so aus, daß keineswegs ein Zusammenpressen der Teilchen bis auf Minimalabstände der Größenordnung des Teilchenradius stattfindet; sondern nur ein Bruchteil $\approx 10^{-9}$ des Kernvolumens wird durch die Volumina der Protonen ausgefüllt.

Die anziehende, den Kern zusammenhaltende Kraft — welche natürlich die *COULOMBSche* Wirkung bei weitem übertreffen muß — ist dagegen

anzusetzen als eine Wechselwirkung zwischen je einem Proton und einem Neutron, *und zwar ist diese Wechselwirkung als eine reine Austauschkraft anzunehmen*. Wie das gemeint ist, sei formelmäßig erläutert am *Zweikörperproblem*, gebildet durch ein Proton und ein Neutron (also dem Kern des schweren Wasserstoffs ${}^2_1\text{H}$ entsprechend). Für dies Problem bekommen wir SCHRÖDINGERSche Eigenfunktionen, welche von den Örtern r_P, r_N und den Spinkoordinaten s_P, s_N von Proton und Neutron abhängen:

$$\varphi = \varphi(r_P, s_P; r_N, s_N); \quad (1)$$

und wir haben dann die Energie H dieses Systems aufzuschreiben als einen *Operator*, der auf Funktionen (1) wirkt. Diese Operator wählen wir nach MAJORANA so:

$$H = \frac{-\hbar^2}{8\pi^2} \left\{ \frac{(\text{grad}_P)^2}{\mu_P} + \frac{(\text{grad}_N)^2}{\mu_N} \right\} + I(r) \cdot T_{PN}; \quad (2)$$

dabei sollen μ_P, μ_N die *Massen* von Proton und Neutron sein, und $\text{grad}_P, \text{grad}_N$ beziehen sich auf r_P bzw. r_N . Mit r ist natürlich der wechselseitige Abstand $r = |r_P - r_N|$ gemeint. Der Operator T_{PN} aber ist dadurch definiert, daß seine Anwendung auf eine Funktion (1) eine *Vertauschung der Ortskoordinaten von Proton und Neutron* bewirkt:

$$T_{PN} \varphi(r_P, s_P; r_N, s_N) = \varphi(r_N, s_P; r_P, s_N). \quad (3)$$

(Es ist wesentlich, daß dabei die Spinkoordinaten s_P, s_N *nicht* mit vertauscht werden.)

Bezüglich $I(r)$ ist dann noch zu sagen, daß es für $r \gg 10^{-13}$ cm stark verschwinden muß; etwa in der Form

$$I(r) = a e^{-\alpha r}. \quad (4)$$

Den Neutronen *unter sich* eine merkliche Wechselwirkung zuzuschreiben, liegt nach MAJORANA keine Veranlassung vor. *Vielmehr sind die erläuterten Annahmen gerade ausreichend zum grundsätzlichen Verständnis der „Tröpfchen“-Natur der Kerne.*

Auch wird dadurch, daß die Wechselwirkung je eines Proton-Neutron-paares für die Kernbildung verantwortlich ist (wobei es, ähnlich wie bei den Austauschkräften in der Chemie, eine gewisse „Absättigung“ gibt) unmittelbar verständlich, daß bei den *leichteren* Kernen die häufigsten und offenbar energetisch stabilsten Isotope zumeist eine *gleich große* Anzahl von Protonen und Neutronen enthalten, so daß das Atomgewicht A *doppelt* so groß wie die *Kernladungszahl* Z ist. Beim Fortschreiten zu mittleren und höheren Kernladungszahlen ist dagegen bekanntlich ein dauerndes *Anwachsen* des Quotienten A/Z (bis etwa 2,7) zu beobachten; und das verstehen wir jetzt als Wirkung der *COULOMBSchen Abstoßung der Protonen*: Die in einem Kern der Ladungszahl Z durch diese Abstoßung bewirkte Verminderung der Bindungsenergie ist (nach den elementaren Formeln für die Elektrostatik einer homogen geladenen Vollkugel) proportional Z^2/R , wenn R der Radius des Kernes ist; und wegen der

Proportionalität von R^3 mit A , also angenähert auch mit Z , wird diese die Kernbindung auflockernde COULOMBSche Energie proportional mit $Z^{3/2}$. Ihr Anwachsen mit Z bedingt, daß bei höheren Atomgewichten A die Kerne mit einer Protonenzahl, die *kleiner* als $\frac{1}{2} A$ ist, energetisch bevorzugt sind.

Für die quantitative Verwertung der besprochenen Gedanken bietet sich — jedenfalls für die *schweren* Kerne — die Methode von FERMI-THOMAS als naturgemäßes Hilfsmittel dar. Sie erlaubt in der Tat, wenn die kinetische Energie nach (36), § 1 angesetzt wird, den Nachweis, daß die obigen Annahmen betreffs der Bindungskräfte im Kern dazu führen, daß alle Kerne (abgesehen von der schwachen Wirkung der COULOMB-Kräfte) *dieselbe Dichte* besitzen, die jeweils innerhalb des ganzen Kernes *konstant* ist. Doch ist es nicht überflüssig, die Verhältnisse an der *Oberfläche* des Kernes genauer zu betrachten: ein un stetiger Sprung der Teilchendichte an dieser Oberfläche, wie er sich in den soeben ausgesprochenen Ergebnissen zeigt, würde ja nach (41), § 1, 3 eine unendlich große zusätzliche kinetische Energie der Teilchen ergeben. In Wirklichkeit also muß die Teilchendichte in der Oberflächenschicht eines Kernes *stetig* vom Maximalwert auf Null herunter sinken; für die schweren Kerne wird man immerhin diese Oberflächenschicht als sehr dünn annehmen dürfen, so daß für den Hauptanteil des Kernvolumens die konstante Teilchendichte bestehen bleibt. Für leichte Kerne hingegen wird etwa eine GAUSSsche Verteilung der wahren Dichteverteilung näher kommen. In jedem Falle aber liefert die Kernoberfläche nach (41), § 1, 3 einen keineswegs vernachlässigbaren *positiven* Zusatz zur kinetischen Energie, also eine Verminderung der Gesamtbindungsenergie, welche anschaulich als eine *Oberflächenspannung* des Kernes bezeichnet werden kann (v. WEIZSÄCKER). Die Gesamtenergie eines schweren Kernes ist dann die Summe von drei Bestandteilen: Die mit dem Kernvolumen (Atomgewicht) proportionale MAJORANASche *Bindungsenergie* wird ihrem Betrage nach verkleinert durch die mit $Z^{3/2}$ proportionale COULOMB-Energie und durch die *Oberflächenspannung*¹.

Aus derartigen quantitativen Untersuchungen ist ermittelt worden, welche Werte a und α in (4) angenommen werden müssen, damit die empirischen Massendefekte für alle Kerne theoretisch gedeutet werden können; doch sind die sich ergebenden Werte a und α nicht in befriedigender Übereinstimmung mit denjenigen Werten, die sich nach genaueren Rechenmethoden aus den empirischen Massendefekten der *leichtesten* Kerne ergeben haben — aus nicht ganz ersichtlichem Grunde ist die FERMI-THOMASSche Methode hier doch nicht genau genug. Die besten Werte scheinen zu sein $a = 170 \mu c^2$; $\alpha^{-1/2} = 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ (μ die Masse des Elektrons); aber leider stimmen sie wiederum nicht zusammen

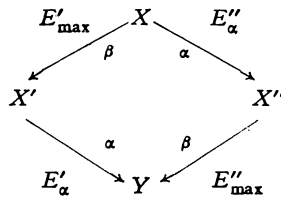
¹ Außerdem ergibt übrigens noch der *Austauschanteil der COULOMB-Energie* eine *Vergrößerung* der Bindungsenergie, und zwar $\approx Z$.

mit den Ergebnissen betreffs der *Streuung von Neutronenstrahlung an Protonen* — die Lage ist also noch nicht wirklich geklärt. Natürlich wird man auch nicht hoffen können, *allein* aus den Massendefekten der Kerne die Gesetzmäßigkeiten der Bindungskräfte vollständig zu ermitteln — auch die in den Elektronenhüllen der Atome herrschenden Gesetze würden nicht leicht zu erkennen sein, wenn uns an empirischen Daten nichts weiter zur Verfügung stände, als die Gesamtbindungsenergien in den *Grundzuständen* sämtlicher Atome (relativ zum vollständig ionisierten Kern). Aber wir wissen ja über die Kerne heute auch schon sonst vielerlei, was sich auf Spinnomente, auf Anregungseffekte usw. bezieht, und es liegen auch schon vielerlei Versuche vor, zu ausführlicheren diesbezüglichen theoretischen Vorstellungen zu gelangen. Allerdings besteht für alle Spekulationen etwa im Sinne eines „Schalenbaus“ der Kerne die erhebliche Schwierigkeit, daß nach HEISENBERG nur etwa für $Z \lesssim 20$ das anschauliche Modell des Aufbaus der Kerne aus Protonen und Neutronen ausreichend zu sein scheint, während bei größeren Atomgewichten Verhältnisse solcher Art vorliegen, daß die Eigenfunktionen eines Kerns *Superpositionen* sind einerseits aus solchen Eigenfunktionen, die anschaulich einem Kernaufbau aus Protonen und Neutronen entsprechen, und andererseits aus solchen Eigenfunktionen, die dem anschaulichen Fall des Vorhandenseins in sich geschlossener α -Teilchen im Kern entsprechen. Der wirkliche aus diesen beiden anschaulich faßbaren Fällen linear superponierte Zustand entzieht sich also in dieser Hinsicht einer einfachen modellmäßigen Veranschaulichung, welche zu Verfeinerungen in der Berechnung der Bindungsenergien führen könnte.

Zum Glück steht aber die Frage der Wechselwirkung Proton—Neutron in engster Beziehung zu einem anderen Problem, von dessen Untersuchung aus wir also einen neuen Zugang zu diesem Wechselwirkungsproblem gewinnen.

2. Die β -Strahlung. Im Gegensatz zur α -Strahlung, bei welcher primär die ausgeschleuderten Teilchen stets diskret festgelegte Energien besitzen, zeigt die β -Strahlung bei allen radioaktiven Atomen ein *kontinuierliches Spektrum* — wohlgemerkt auch dann, wenn alle sekundären Effekte ausgeschaltet werden, und nur die *primäre* Strahlung, wie sie den Kern verläßt, betrachtet wird. Dabei gibt es bei jedem β -Strahler eine bestimmte *Maximalenergie* E_{\max} für das ausgeschleuderte β -Teilchen; insgesamt aber kommen in der Strahlung einer großen Menge derartiger Atome alle möglichen Energiewerte von μc^2 (*ruhend*es Elektron!) an bis zu E_{\max} vor, in einer Intensitätsverteilung, die für verschiedene β -Strahler verschieden, aber qualitativ ähnlich ist. Mißt man *kalorimetrisch* die durch die β -Strahlung insgesamt freigegebene kinetische Energie, so bekommt man (wenn man noch die *Ruhenergien* der Elektronen hinzuaddiert) genau denselben Wert, der sich auch durch Integration über das kontinuierliche β -Spektrum ergibt.

Es ist unmöglich, diese Verhältnisse so zu deuten, daß man den einzelnen β -strahlenden Atomkernen entweder vor oder nach dem Prozeß *verschiedene Energieinhalte* zuschreibt. Sondern man muß, sofern man nicht eine *Außerkraftsetzung des Energiesatzes* annehmen will, die von PAULI gezogene Folgerung anerkennen, daß *zugleich mit der Emission des β -Elektrons der Kern noch ein anderes Teilchen emittiert*, und daß *diese Strahlung sich durch ein ungeheures Durchdringungsvermögen der kalorimetrischen Feststellung* (oder einer sonstigen unmittelbaren Beobachtung) *entzieht*. Diese den Energiesatz aufrecht erhaltende Auffassung findet eine starke Stütze in folgender Tatsache. Bekanntlich gibt es in den radioaktiven Zerfallsreihen einige Stellen, wo ein Kern X sowohl zur β -Emission als auch zur α -Emission befähigt ist, so daß aus ihm ein gewisser Kern X' , oder auch statt dessen ein anderer Kern X'' hervorgehen kann, nach folgendem Schema:



Der durch β -Emission entstandene Kern X' geht seinerseits durch α -Strahlung in einen Kern Y über, und der durch α -Emission entstandene Kern X'' verwandelt sich durch β -Emission *ebenfalls* in einen Kern derselben Art Y . Wenn dann für X durch E'_{\max} die Grenze des kontinuierlichen β -Spektrums und durch E''_{α} die Energie der α -Strahlung bezeichnet wird, während das β -Spektrum von X'' die Grenze E''_{\max} , und die α -Strahlung von X' die Energie E'_{α} besitzt, dann besteht erfahrungsgemäß die Bilanz

$$E'_{\max} + E'_{\alpha} = E''_{\alpha} + E''_{\max}, \quad (5)$$

die offenbar ganz entschieden für die PAULISCHE Auffassung spricht.

Übrigens bestehen Gründe, anzunehmen, daß die *Ruhmasse* der „*Neutrinos*“ — so pflegt man die Teilchen dieser durchdringenden Strahlung heute zu benennen — *gleich Null ist*; danach wäre also E_{\max} unmittelbar gleich der *gesamten Energieabgabe* eines *jeden* Kernes der betreffenden Art beim β -Prozeß.

Unbedingt notwendig ist die Annahme eines zugleich mit dem β -Elektron ausgeschleuderten weiteren Teilchens im Hinblick auf *Spin und Statistik* von Proton und Neutron. Da Proton, Neutron und Elektron sämtlich halbzahligen Spin besitzen und der FERMI-Statistik gehorchen, so kann die *Umwandlung eines Neutrons in ein Proton* — eine solche muß ja nach der HEISENBERGSCHEN Grundvorstellung vom Kernaufbau bei einer β -Emission vor sich gehen — nicht unter Aussendung eines Elektrons allein geschehen: das würde unseren Regeln für Spin und Statistik

zusammengesetzter Teilchen widersprechen. Die Sache kommt in Ordnung, wenn wir dem *Neutrino halbzahligen Spin und FERMI-Statistik* zuschreiben. Hierin also *unterscheidet* sich das Neutrino vom *Lichtquant*, während es ihm durch seine verschwindende Ruhmasse und Ladung ähnlich ist. Von einem *Elektron* andererseits unterscheidet sich das Neutrino nur durch das Fehlen von Ladung und Ruhmasse: Man darf danach überzeugt sein, daß die *Wellengleichung* des Neutrino einfach aus der DIRACschen Wellengleichung zu erhalten ist, indem man Ladung und Ruhmasse gleich Null setzt.

Wir wollen betonen, daß bei dieser Überlegung keineswegs notwendigerweise das Neutron als „zusammengesetzt“ aus den drei Bestandteilen Proton, Elektron, Neutrino vorgestellt werden muß: es *genügt*, zu wissen, daß es sich im β -Prozeß in diese drei Teilchen *aflöst*, um Statistik und Halb- oder Ganzzahligkeit des Spinmoments für eine dieser vier Teilchenarten aus der Kenntnis der drei anderen zu ermitteln. In der Tat wäre es unangemessen, das Neutron als „zusammengesetzt“ oder „aufgebaut“ aus Proton, Elektron und Neutron anzusehen; denn wir kennen experimentell auch den Prozeß der *Umwandlung eines Protons in ein Neutron unter Emission eines Positrons und eines Neutrinos* (künstliche Radioaktivität), so daß man statt dessen ebensogut das Proton als aus Neutron, Positron und Neutrino „zusammengesetzt“ bezeichnen könnte. Die *angemessene* Auffassungsweise wird also die sein, daß wir Elektron und Neutrino (bzw. Positron und Neutrino) *als erst beim Umwandlungsprozeß Neutron-Proton (bzw. Proton—Neutron) erzeugt* ansehen — *ebenso, wie wir ein von einem Atom emittiertes Lichtquant als erst im Emissionsakt erzeugt* ansehen.

Damit bietet sich folgende Auffassungsweise als naturgemäße Unterlage einer quantitativen Theorie der β -Strahlung dar. Kerne gleichen Atomgewichtes A , aber verschiedener Ladung Z betrachten wir jetzt als *verschiedene Quantenzustände eines und desselben* (durch die Anzahl A seiner Bestandteile charakterisierten) *Gebildes*. Dieses Gebilde kann also einerseits *Lichtquanten* emittieren (γ -Strahlung); es kann andererseits auch *β -Strahlung* emittieren, die wir ganz analog zur γ -Strahlung auffassen — natürlich unter Beachtung des Unterschiedes, daß es sich hierbei stets um Emission von *zwei Teilchen* zugleich handelt, und daß die „Quantenzahl“ Z bei einer solchen Emission oder einer umgekehrten Absorption der „Auswahlregel“ $Z \rightarrow Z \pm 1$ unterworfen ist, die wir hier durchaus in Parallele stellen dürfen zu den Auswahlregeln in den optischen Spektren.

Bei der Untersuchung der γ -Strahlung haben wir ein System zu betrachten, welches besteht aus dem *Kern* einerseits und dem *elektromagnetischen Strahlungsfelde* andererseits. Die Energie dieses Gesamtsystems ist also von der Form

$$H = H_{\text{Kern}} + H_{\text{Lichtfeld}} + \text{Wechselwirkungsenergie}; \quad (6)$$

und die *Wechselwirkungsenergie* hat gemäß (23), § 3, 5 die Gestalt

$$\mathbf{H}_w = - \mathfrak{p} \mathfrak{E}, \quad (7)$$

wo \mathfrak{p} das elektrische Dipolmoment des γ -Strahlers und \mathfrak{E} die als *Matrix* aufgefaßte elektrische Feldstärke ist: Die Tatsache, daß \mathfrak{E} hier *linear* eingeht, hat zur Folge, daß in erster Annäherung die Wechselwirkungsprozesse von Kern und Strahlungsfeld derartige sind, daß immer je ein *Lichtquant* erzeugt oder absorbiert wird.

Für die Untersuchung der β -Strahlung haben wir dementsprechend ein System zu betrachten, welches aus 1. dem *Kern*, 2. dem *Neutrinostrahlungsfeld*, 3. dem *Elektronenstrahlungsfeld* besteht: Unsere in den beiden vorangegangenen Paragraphen ausgeführten Überlegungen, welche darauf abzielten, das Mehrkörperproblem mit äquivalenten Teilchen — und zwar *FERMISCHEN* — vermittelt der *Methode der zweiten Quantelung* in möglichst enge *Analogie zum Lichtproblem* zu bringen — diese Überlegungen erweisen sich jetzt erneut als fruchtbar, indem sie uns die Möglichkeit geben, den anschaulichen Gedanken der Analogie von γ -Strahlung und β -Strahlung folgerichtig durchzuführen. Wir werden also für das Elektronenwellenfeld eine Feldamplitude ψ und für das Neutrino wellenfeld eine Feldamplitude φ einführen, wobei in der früher erläuterten Weise die nichtkommutativen Multiplikationsgesetze dieser Amplituden der Tatsache entsprechen, daß beide Teilchenarten dem PAULISCHEN Äquivalenzverbot unterworfen sind. Die *Wechselwirkungsenergie* zwischen den drei Stücken unseres Gesamtsystems wird dann, um der Tatsache der Emission von Elektron und Neutrino *zugleich* zu entsprechen, eine in ψ und φ *bilineare* Form haben müssen. Schreiben wir, um dies anzudeuten, kurz

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}_{\text{Kern}} + \mathbf{H}_{\text{Neutrino}} + \text{Wechselwirkungsenergie} \\ \mathbf{H}_w &= g \{ \mathbf{Q} \psi \varphi + \mathbf{Q}^\dagger \psi^\dagger \varphi^\dagger \}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

wo dann \mathbf{Q} eine auf den Kern allein bezügliche Matrix ist [analog dem \mathfrak{p} in (7)]. Mit g ist ein konstanter Zahlfaktor bezeichnet. Natürlich ist der Ausdruck (8) so noch nicht fertig, sondern gibt nur eine ungefähre Andeutung, wie die Sache aussehen muß: Wir haben noch gar nicht darauf Rücksicht genommen, daß die Wellenfunktionen für Elektron und Neutrino je vier Komponenten haben, deren Spinor-Transformations-eigenschaften natürlich berücksichtigt werden müssen; und wir müßten wahrscheinlich nicht nur diese Amplituden selber, sondern auch ihre *Ableitungen* mitnehmen, um den exakten Ausdruck der Wechselwirkungsenergie zu bestimmen. FERMI, dem man die hier in den Grundgedanken erläuterte Theorie der β -Strahlung verdankt, hat einen ganz bestimmten Ansatz für die exakte Gestalt der Wechselwirkungsenergie (8) gemacht und die Folgerungen quantitativ durchgerechnet. Aber wir gehen darauf nicht näher ein, weil sich bereits gezeigt hat, daß der FERMISCHE Ansatz erweiterungsbedürftig ist; es liegen schon diesbezügliche Versuche vor, aber noch kein abschließendes Resultat.

Die Matrix Q muß natürlich zum Ausdruck bringen, daß bei dieser Emission, wie schon gesagt, die Kernladung notwendigerweise um 1 zunimmt. Man kann dabei die Sache vereinfachen derart, daß man nicht den ganzen Kern, sondern nur das eine, von der β -Umwandlung betroffene „schwere Teilchen“ betrachtet, welches sich dabei im Kraftfelde des Kernrestes befindet. Dieses „schwere Teilchen“ ist ein Gebilde, das unter gegebenen äußeren Bedingungen nur zweier verschiedener Quantenzustände fähig ist, wie das polarisierte Lichtquant oder das ruhende Ag-Atom im STERN-GERLACH-Experiment. Definieren wir die Größe ρ derart, daß $\rho = +1$ ist, wenn das „schwere Teilchen“ ein *Neutron* ist, und $\rho = -1$, wenn es ein *Proton* ist, so bekommen wir für Q die Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad Q^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

als Ausdruck der erläuterten „Auswahlregel“ $Z \rightarrow Z \pm 1$.

Anschaulicher wird dies übrigens, wenn wir jetzt auch für Neutronen und Protonen im Sinne der zweiten Quantelung *Wellenfelder* einführen; unser Prozeß, bei welchem *ein Neutron verschwindet* und *je ein Proton, Elektron, Neutrino erzeugt wird*, ist dann entsprechend den Bemerkungen von § 4, 3 bedingt durch eine Matrix

$$\psi_{\text{Neutron}}^\dagger \quad \psi_{\text{Proton}} \quad \psi_{\text{Elektron}} \quad \psi_{\text{Neutrino}}, \quad (10)$$

und das ist in anderer Ausdrucksweise mit (8), (9) gleichbedeutend.

Die FERMISCHEN Rechnungen führen nun zu folgendem Ergebnis. Die *Gesamtübergangswahrscheinlichkeit* für einen β -Prozeß enthält einen *Faktor*, der durch die spezielle Kernstruktur bestimmt ist. Aber die *Intensitätsverteilung im kontinuierlichen β -Spektrum* ergibt sich als eine von allen Einzelheiten der Kernstruktur unabhängige *Funktion der Kernladung Z und der Grenzenergie E_{\max}* . Dies allgemeine Ergebnis wird natürlich auch von den noch nötigen Abänderungen des FERMISCHEN Wechselwirkungsansatzes nicht berührt werden; es zeigt uns, daß die Ausmessung der kontinuierlichen β -Spektren uns sehr genaue Informationen über das Wechselwirkungsgesetz vermitteln wird. Daß die spezielle von FERMI aus seinem Ansatz für H_W errechnete Intensitätsverteilung der Erfahrung nicht genau genug entspricht, scheint bereits sicher.

FERMI hat ferner gefunden, daß dann, wenn die *Ruhmasse* des Neutrino *gleich Null* vorausgesetzt wird, die die Spektralintensität darstellende Kurve $I = I(E)$ bei $E = E_{\max}$ nicht nur stetig zu Null herunter geht, sondern sogar die Nullachse *berührt* — und das entspricht in der Tat der Erfahrung. Dagegen würde sich theoretisch *keine* Berührung ergeben, wenn die Ruhmasse des Neutrinos *von Null verschieden* wäre. Es ist wichtig, sich klar zu machen, daß dieses FERMISCHE Ergebnis sicher *nicht* durch die noch notwendigen Abänderungen der Theorie wieder umgestoßen werden wird, so daß wir also den daraus gezogenen Schluß, daß die Ruhmasse des Neutrino gleich Null ist, auf jeden Fall

als zuverlässig ansehen dürfen. Die Sache hat nämlich folgenden anschaulichen Sinn: Wenn die Ruhmasse des Neutrino ungleich Null wäre, dann dürfte das Elektron im einzelnen Falle einmal die maximale Energie E_{\max} restlos für sich in Anspruch nehmen; das Neutrino würde dann die *Geschwindigkeit Null bekommen*. Aber wenn das Neutrino die Ruhmasse Null hat, dann würde bei Emission eines Elektrons mit der ganzen Energie E_{\max} nicht mehr ein Neutrino der Geschwindigkeit Null, sondern einfach *gar nichts* übrig bleiben (womit unsere Regeln über Spin und Statistik *doch verletzt* wären): deshalb *verlangt* die Annahme verschwindender Ruhmasse unabhängig von jeder spezielleren Theorie eine Berührung der Nullachse durch die Intensitätskurve $I(E)$ bei $E = E_{\max}$.

Von dieser Untersuchung der β -Strahlung aus fällt nun ein ganz neues Licht auf die im vorigen Abschnitte behandelte Frage der *Wechselwirkung Proton—Neutron*. Erinnern wir uns daran, daß das COULOMBSche Gesetz für die Wechselwirkung elektrischer Ladungen *als Folgerung abgeleitet* werden kann aus dem Ausdruck (7) für die Wechselwirkungsenergie zwischen einer Ladung und dem Lichtfeld: diese in (7) angegebene *Nahewirkung* ergibt als Folgeresultat eine *durch das elektromagnetische Feld vermittelte* Wechselwirkung der Ladungen, die bei langsam bewegten Ladungen dann eben dem COULOMBSchen Gesetz entspricht. Ganz entsprechend kommt aber infolge der durch (8), (9), (10) ausgedrückten Wechselwirkung von „schwerem Teilchen“ und „ β -Strahlungsfeld“ (= Elektronenstrahlungsfeld plus Neutrinostrahlungsfeld) eine *durch das „ β -Strahlungsfeld“ vermittelte Wechselwirkung zwischen je zwei „schweren Teilchen“* zustande (TAMM, IWANENKO); und zwar ergibt sich gerade eine „*Austauschwechselwirkung*“ *zwischen Proton und Neutron* in der im voranstehenden Abschnitt besprochenen Form: eine wunderbare Bestätigung der dort erreichten Resultate von ganz anderer Seite her. Freilich aber steht es noch nicht sehr befriedigend mit den quantitativen Verhältnissen: die spezielle FERMISCHE β -Strahltheorie liefert viel *zu kleine* Bindungskräfte für die Kerne, so daß sie auch hier ihre Abänderungsbedürftigkeit beweist. Wie schon betont, kann der FERMISCHE Ansatz sehr wohl noch in mannigfacher Weise umgestaltet werden, ohne den — sicherlich zutreffenden — Grundgedanken der FERMISCHEN Theorie zu beeinträchtigen; aber es ist *augenblicklich* noch keine sichere Entscheidung zwischen den dafür vorliegenden Möglichkeiten zu treffen.

Ganz kurz sei endlich erwähnt, daß auch die Frage des *magnetischen Moments des Protons* in diesem Zusammenhang durchsichtiger wird. Wenn man naheliegenderweise vermutet, daß die Wellengleichung des Protons sich von der des Elektrons nur hinsichtlich der *Ruhmasse* unterscheidet, dann bekommt man für das Proton ein magnetisches Spinmoment, das gleich *einem „Kernmagneton“*

$$\frac{h}{4\pi} \frac{e}{Mc} \quad (11)$$

ist (M die Masse des Protons). Aber experimentell ist das sicher falsch;

STERN und FRISCH fanden ungefähr 2,5 Kernmagnetonen. Dies findet nun eine Aufklärung dadurch, daß die Wechselwirkung des „schweren Teilchens“ mit dem β -Strahlungsfeld ein *zusätzliches magnetisches Moment* für das Proton ergibt (WICK).

Übrigens scheint auch das Neutron ein von Null verschiedenes magnetisches Moment zu besitzen, wonach man die Existenz noch einer anderen Art von Neutronen mit *entgegengesetzt* gleichem Verhältnis des mechanischen und magnetischen Spinnmoments theoretisch erwarten muß.

3. Die Struktur des Elektrons. Nach dem Scheitern der Hoffnung, die in der nichtrelativistischen Theorie mögliche Beseitigung der unendlichen Selbstenergie des Elektrons (auf Grund der nichtkommutativen Multiplikation) in die relativistische Theorie übertragen zu können, müssen wir nach anderen Auswegen suchen. Dazu erinnern wir uns zunächst an das, was die *klassische Theorie* zum Problem der *Struktur des Elektrons* zu sagen hatte.

Die MAXWELLSche Theorie, welche den Ausgangspunkt aller Versuche bilden muß, die physikalische Natur des Elektrons aufzuklären, hat im Zusammenhang mit dem von ihr durchgeführten *Prinzip der Nahewirkung* auch eine *Lokalisierung der Energie* eingeführt; während die elementare, auf das COULOMBSche Fernwirkungsgesetz gegründete Elektrostatik die Energie eines Systems elektrischer Ladungen als eine gewisse mathematische Funktion der wechselseitigen Lage dieser Ladungen definiert, läßt uns die MAXWELLSche Theorie die Energie viel anschaulicher verstehen, als eine Art Substanz, die in bestimmter Weise über den Raum verbreitet ist. Im Vakuum gibt es an einem Orte, wo eine elektrische Feldstärke \mathfrak{E} und eine magnetische Feldstärke \mathfrak{H} besteht, gemäß (10'), § 2, 1 eine *räumliche Energiedichte*

$$T_{44} = \frac{1}{8\pi} (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2). \quad (12)$$

Schon diese Gesetzmäßigkeit genügt, um etwas Wesentliches über das Elektron auszusagen. Wir denken uns das Elektron ganz primitiv als eine kleine, kugelsymmetrische Ladungsanhäufung, die in eine Kugel vom Radius r_0 eingeschlossen werden kann; außerhalb dieser Kugel soll praktisch Vakuum bestehen, in welchem die MAXWELLSchen Gleichungen gelten; innerhalb der Kugel dagegen besteht ein Zustand, betreffs dessen wir zunächst noch keinerlei einschränkende Voraussetzungen machen wollen — nur ist es jedenfalls ein vom MAXWELLSchen Vakuumfeld wesentlich abweichender Zustand, der sich nach außen hin als Quelle elektrischer Kraftlinien kundgibt. Die Energie dieses Gebildes besteht dann (gemäß dem Prinzip der Nahewirkung) aus zwei Summanden: der im Innern der Kugel vorhandenen Energie, über die wir zunächst nichts aussagen können, und der im Außenraum der Kugel vorhandenen Energie, die sich nach der MAXWELLSchen Theorie berechnen läßt; nach dem Gesetz (12) ergibt sich dafür $e^2/2r_0$, wenn e

die *Ladung* des Elektrons ist. Man kann nun schon aus der MAXWELLSchen Theorie erkennen, daß dieser Energieanteil auch einen bestimmten Anteil der *Masse* des Elektrons bedingt. Volle Klarheit hat darüber jedoch erst die Relativitätstheorie geschaffen, die uns bekanntermaßen lehrt, daß zwischen der *Gesamtenergie* E des Gebildes (*einschließlich* der im Innern der Kugel befindlichen Energie) und der Masse μ des Elektrons die Beziehung

$$E = \mu c^2 \quad (13)$$

besteht.

Machen wir die Annahme, daß die Energie im Innern der Kugel entweder von kleinerer oder *höchstens von gleicher Größenordnung* sei, wie die MAXWELLSche Energie außerhalb, so können wir demnach die *Größenordnung des „Elektronenradius“* berechnen:

$$r_0 \approx \frac{e^2}{\mu c^2} \approx 10^{-13} \text{ cm.} \quad (14)$$

Nach einer Bemerkung von BORN wird man auf diesen Elektronenradius auch dann geführt, wenn man aus (17), § 1, 4, Kapitel 1 den *Wirkungsquerschnitt* eines Elektrons in bezug auf die *Streuung* langwelliger Lichtquanten entnimmt.

Wir stehen nun vor der Frage: Welche physikalischen Gesetze gelten in der Innenzone des Elektrons, innerhalb des Radius r_0 ? Daß dort nicht die gewöhnlichen bekannten Gesetze der MAXWELLSchen Theorie gelten können, ist klar. Denn die führen ja für ruhende elektrische Ladungen zur COULOMBSchen Abstoßung, würden uns also erwarten lassen, daß die Ladung eines Elektrons, statt zusammenzuhalten, sich vollkommen zerstreuen sollte. Welche Kräfte halten diesen zur Explosion des Elektrons drängenden COULOMB-Kräften das Gleichgewicht? Oder, zutreffender ausgedrückt, welche offenbar in Gebieten sehr großer Feldstärken eintretende Modifikation der MAXWELLSchen elektromagnetischen Feldgesetze bestimmt die inneren Strukturverhältnisse des Elektrons? Die letztere Fragestellung ist zutreffender, weil die erstere Frage eigentlich nur unter einer bestimmten Voraussetzung zu stellen ist: nämlich unter der Voraussetzung, daß wir uns die Ladung e des Elektrons räumlich kontinuierlich ausgebreitet und durch entsprechende Kräfte stabil zusammengehalten denken. Aber statt dessen ist auch die Möglichkeit ins Auge zu fassen, daß die Ladung *punktförmig* in einer „Singularität des Feldes“ konzentriert ist. Auch in diesem Falle bleibt die zweite Frage berechtigt, weil wir auch in diesem Falle daran festhalten müssen, daß die gewöhnlichen MAXWELLSchen Gleichungen im Abstand von größenordnungsweise 10^{-13} cm vom Mittelpunkt des Elektrons ihre Gültigkeit verlieren. Denn wollten wir die Vorstellung des Elektrons als punktförmiger Singularität so durchführen, daß wir überall außerhalb des singulären Punktes die MAXWELLSchen Gleichungen als gültig annehmen, so würde das ja bedeuten, daß wir den oben definierten Elektronenradius gleich Null setzten, *und folglich ergäbe sich eine unendlich große Masse des Elektrons.*

Wichtige Erkenntnisse zu diesem Problem sind 1912/13 von MIE erreicht worden, der systematisch die Möglichkeiten einer Verallgemeinerung der MAXWELLSchen Feldgleichungen untersucht hat. Die diesbezüglichen Möglichkeiten sind nämlich, wie MIE zeigte, keineswegs ganz unübersehbar mannigfaltig. Denn es muß ja zweierlei gewahrt bleiben bei einer brauchbaren Verallgemeinerung der MAXWELLSchen Theorie: Erstens das Relativitätsprinzip und zweitens der Energiesatz. Diese beiden ganz allgemeinen Forderungen engen aber bereits die Verallgemeinerungsmöglichkeiten sehr erheblich ein, in einer von MIE mathematisch genau charakterisierten Weise¹. MIE hat dann versucht, innerhalb des Rahmens dieser Möglichkeiten zu einer Theorie des Elektrons zu gelangen, die folgendes leisten sollte: Erstens eine Begründung dafür, daß alle Elektronen die gleiche Ladung e besitzen, daß also nur mit einem ganz bestimmten Wert der Gesamtladung ein stabil zusammenhaltendes Elektron bestehen kann. Zweitens eine Begründung dafür, daß alle Elektronen dieselbe, und zwar *endliche* Masse besitzen.

Was den ersten Punkt betrifft, so wollte es MIE nicht gelingen, eine Erklärung dafür zu finden, daß alle Elektronen dieselbe Ladung haben. Zwar war es möglich, die *Existenz* zusammenhaltender, nicht explodierender Ladungsmassen begrifflich zu machen durch geeignete Verallgemeinerungen der MAXWELLSchen Gleichungen; aber auf keine Weise ergab sich, daß in jeder solcher Anhäufung immer *dieselbe Gesamtladung* (gleich einer Elektronenladung) vorhanden sein müsse.

Für diese Frage hat nun aber die *Quantentheorie* inzwischen einen entscheidenden Fortschritt gebracht. Diese Tatsache, daß die elektrischen Ladungen immer nur in Gestalt einer ganzen Anzahl von Elektronen auftreten, daß also jede physikalisch vorkommende elektrische Ladung ein ganzzahliges Vielfaches einer endlichen Elementarladung ist, diese Tatsache haben wir ja jetzt — im Sinne der Methode der *zweiten Quantelung* — als *Ausfluß der Quantengesetze* verstanden. Es braucht nun also nicht mehr bedauert zu werden, daß auf dem von MIE beschrittenen Wege eine Erklärung für die gleiche Ladung aller Elektronen nicht zu erreichen war.

Was aber in der Richtung der MIESchen Untersuchungen noch immer gesucht werden mußte, das ist eine solche Verallgemeinerung der MAXWELLSchen Feldgleichungen, die für ein Elektron von vorgegebener Ladung zu einer *endlichen Energie* (bzw. *Masse*) führt, und zwar unter Vermeidung gewisser Schwierigkeiten, welche in der MIESchen Theorie bestanden insofern, als dort nicht nur die elektromagnetischen Feldstärken, sondern auch die Absolutwerte der Potentiale eine physikalische Bedeutung haben sollten, was sicherlich nicht der Wirklichkeit entspricht.

Für dieses Problem hat nun BORN eine sehr beachtenswerte Lösung versucht, durch die Aufstellung einer sehr einfachen *nichtlinearen*

¹ Vgl. die Darstellung der wesentlichen Ergebnisse MIES im PAULISchen Relativitätsbericht (Mathematische Enzyklopädie).

Verallgemeinerung der linearen MAXWELLSchen Vakuum-Feldgleichungen. Das Aussehen der BORNSchen Vakuum-Feldgleichungen kann so beschrieben werden: es sind formal die gewöhnlichen MAXWELLSchen Gleichungen in einem ladungsfreien Dielektrikum; also:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathfrak{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathfrak{B}}; & \text{div } \mathfrak{H} &= 0; & \mathfrak{B} &= \mu \mathfrak{H}; \\ \text{rot } \mathfrak{H} &= \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{D}}; & \text{div } \mathfrak{D} &= 0; & \mathfrak{D} &= \varepsilon \mathfrak{E}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Dabei sind aber ε und μ (*dieses* μ hat natürlich *nichts* mit der Elektronenmasse μ zu tun!) Funktionen der Feldstärken:

$$\varepsilon \mu = 1; \quad \mu = \sqrt{1 + a^2 (\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{E}^2)}. \quad (16)$$

Die hier auftretende Konstante a hat die Dimension einer reziproken Feldstärke; sie hängt in noch zu besprechender Weise zusammen mit der Ladung und dem „Radius“ des Elektrons. Wie man sieht, sind die BORNSchen Gleichungen in der Tat *nichtlinear*. Für „kleine“ Feldstärken gehen aus den BORNSchen Gleichungen die MAXWELLSchen Gleichungen (des Vakuums) als Approximation hervor, indem dann $\varepsilon = \mu = 1$ wird. Erst bei großen Feldstärken macht sich die Abweichung vom MAXWELLSchen Verhalten bemerkbar, und zwar sind nur im Innern der Elektronen Feldstärken anzutreffen, die hierfür groß genug sind.

Ein Elektron kann im Rahmen dieser BORNSchen Theorie offenbar nur in Gestalt einer singulären, punktförmig konzentrierten Ladung e existieren (wegen $\text{div } \mathfrak{D} = 0$); das entspricht aber einerseits gerade dem, was man für die Quantenelektrodynamik braucht, und andererseits vermeidet BORN gerade hierdurch die oben erwähnte Schwierigkeit der MIESchen Theorie. Im Gegensatz zu den linearen MAXWELLSchen Gleichungen bedingen die nichtlinearen BORNSchen Gleichungen eine *endliche* Energie des punktförmigen Elektrons.

Die BORNSchen Gleichungen (15), (16) vereinfachen sich im *elektrostatischen* Falle offenbar zu

$$\text{rot } \mathfrak{E} = 0; \quad \text{div } \mathfrak{D} = 0; \quad \mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{1 - a^2 \mathfrak{E}^2}}. \quad (17)$$

Die einer Ladung e entsprechende zentralsymmetrische Lösung sieht also so aus, daß die Radialkomponenten \mathfrak{D}_r und \mathfrak{E}_r von \mathfrak{D} und \mathfrak{E} gegeben sind durch

$$\mathfrak{D}_r = \frac{\mathfrak{E}_r}{\sqrt{1 - a^2 \mathfrak{E}_r^2}} = \frac{e}{r^2}; \quad (18)$$

und das zugehörige *elektrostatische Potential* wird

$$\Phi(r) = \frac{e}{r_0} \int_{\frac{r}{r_0}}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}; \quad r_0 = \sqrt{ae}, \quad a = \frac{r_0^2}{e}. \quad (19)$$

In einem gegenüber r_0 großen Abstand r erhalten wir daraus approximativ das COULOMBSche Potential:

$$\Phi(r) = \frac{e}{r} \text{ für } r \gg r_0; \quad (20)$$

in kleineren Abständen vom Mittelpunkt dagegen verhält sich das BORNSche Potential wesentlich anders als das COULOMBSche. Vor allem hat es im Mittelpunkt $r=0$ einen *endlichen* Wert:

$$\Phi(0) = 1,854 \cdot \frac{e}{r_0}. \quad (21)$$

Die *Gesamtenergie* des so beschriebenen Elektrons ist von BORN und INFELD bestimmt worden. [Natürlich tritt in der BORNSchen Theorie auch für den MAXWELLSchen Ausdruck (12) der Energiedichte ein etwas anderer Ausdruck ein.] Das Ergebnis lautet:

$$E = \mu c^2 = \frac{2}{3} e \Phi(0) = 1,236 \cdot \frac{e^2}{r_0}. \quad (22)$$

Aus (19) und (22) ist der Zusammenhang der Konstanten a mit e und r_0 ersichtlich, sowie die Beziehung von e und r_0 zur Masse μ ; natürlich muß diese letztere Beziehung im Einklang sein mit der größenordnungsmäßigen Beziehung (14); aber an Stelle nur größenordnungsmäßiger Schätzungen haben wir jetzt exakte Gesetzmäßigkeiten.

Diese BORNSche Theorie erhält nun eine sehr interessante Beleuchtung seitens der DIRAC-HEISENBERG'schen *Löchertheorie*. Im Zusammenhang mit den Prozessen der *Elektronen-Paarerzeugung* ergeben sich nämlich schwache Abweichungen von dem den MAXWELLSchen Gleichungen entsprechenden Verhalten auch bei *solchen* Lichtquanten, deren Energie noch *unterhalb* der *Elektronenruhenenergie* μc^2 liegt. Die *Linearität* der MAXWELLSchen Gleichungen ergibt, daß zwischen verschiedenen Lichtquanten *keinerlei Wechselwirkung* besteht (*Superposition* der Wellen). Nach der Löchertheorie aber kommen zwischen zwei Lichtquanten $h\nu_1$, $h\nu_2$ auch im Falle $h\nu_1$, $h\nu_2 < \mu c^2$ *Zusammenstöße* vor — also eine *Streuung von Licht an Licht*; und man kann diese Wechselwirkung der Lichtquanten $h\nu_1$, $h\nu_2$ formal beschreiben durch eine *nichtlineare Verallgemeinerung der MAXWELLSchen Feldgleichungen*. Und zwar ist die sich ergebende Korrektur der MAXWELLSchen Gleichungen (nach EULER und KOKKEL) *in erster Annäherung* sehr ähnlich der von BORN eingeführten Abänderung.

Zwar ergeben sich in höherer Näherung Abweichungen, und auch die grundsätzliche Auffassung ist in beiden Theorien verschieden, da nach der Löchertheorie die Abänderung der MAXWELLSchen Gleichungen nicht als primäres Naturgesetz anzusehen ist, sondern vielmehr als sekundäres Folgeergebnis anderer Zusammenhänge. Als positive Erkenntnis dürfen wir aber verzeichnen, daß die Löchertheorie in diesem Sinne zwangsläufig nichtlineare Korrekturen der MAXWELLSchen Gleichungen ergibt, und zwar *von solcher Größenordnung, wie sie nach BORN für das Strukturproblem des Elektrons nötig sind*. —

In allen diesen Erwägungen haben wir soeben die Anwendung der im nichtrelativistischen Fall bewährten Methode zur Beseitigung der unendlichen Selbstenergie (nichtkommutative Multiplikation) ganz zurücktreten lassen gegenüber der klassischen Idee einer endlichen Ausdehnung des Elektrons. Daß aber auch die jetzt zurückgestellte Methode ihren tiefen Sinn haben muß, das scheint unzweifelhaft im Hinblick auf ein analoges *anderes*, noch ungelöstes Problem, bei welchem die Idee eines endlichen Radius bestimmt *nicht* anwendbar ist: Für ein *Lichtquant im Gravitationsfeld* ergibt sich aus der jetzigen Quantenelektrodynamik ebenfalls eine unendliche Selbstenergie (ROSENFELD).

4. Die BOHRsche Kerntheorie. Die experimentellen Ergebnisse betreffs der Kernreaktionen, die bei Beschießung von Kernen mit *Neutronen* eintreten, ermöglichen nach BOHR neue wesentliche Einblicke in die innere Dynamik der Kerne.

Im Gegensatz zu einem Proton braucht ein Neutron keine COULOMBSche Abstoßung zu überwinden, um an einen Kern heran zu kommen; dies ist der Grund dafür, daß die Beschießung der Kerne mit Neutronen reichhaltigere und aufschlußreichere Ergebnisse geliefert hat, als die mit Protonen. Eine *Ablenkung* eines Neutrons durch einen Kern tritt nur dann ein, wenn es sich dem Kern bis auf Abstände der Kerndimension 10^{-13} cm genähert hat; und die Erfahrung zeigt, daß mit einer gegenüber der Häufigkeit der Ablenkungen keineswegs merklich geringeren Häufigkeit solche Prozesse eintreten, bei welchen eine *Einfangung des Neutrons* und anschließend die Emission eines Protons oder eines α -Teilchens oder auch nur eines γ -Quants erfolgt. (Für sehr langsame Neutronen, deren DE BROGLIESche Wellenlänge *groß* gegenüber Kerndimensionen ist, wird der absorbierende Querschnitt mancher Atomkerne sogar noch ganz wesentlich größer.) Auch Prozesse, die scheinbar in einer bloßen Ablenkung des Neutrons bestehen, sind zum Teil in Wirklichkeit diesen komplizierteren Kernprozessen an die Seite zu stellen, da genauere Untersuchungen ergeben, daß das gestreute Neutron einen Teil seiner Energie im streuenden Kern zurückgelassen hat. In allen diesen Fällen aber besteht nach BOHR eine Lage derart, daß die *Einfangung* einerseits und der *Emissionsprozeß* andererseits als *zwei* deutlich *voneinander getrennte* Elementarprozesse aufzufassen sind. Man kann geradezu sagen, daß das Neutron, sofern es den Kern überhaupt *trifft*, fast immer *darin stecken bleibt*; erst nach Ablauf einer gewissen Zeit erleidet der auf diese Weise zunächst gebildete instabile Kern irgendeinen Zerfallsprozeß.

Die Merkwürdigkeit dieser Tatsachen wird besonders deutlich, wenn wir den Stoß eines *Elektrons* gegen ein *Ion* damit vergleichen. Das Analogon zu dem festgestellten Steckenbleiben des Neutrons im Kern würde hier eine Einfangung des Elektrons durch das Ion sein, und zwar eine Einfangung, die also *nicht* (wie beim Wiedervereinigungsleuchten) mit einer sofortigen Abgabe eines Lichtquants $h\nu$ verknüpft wäre. Ein solcher Prozeß kommt aber überhaupt nicht vor. Man erkennt seine

Unmöglichkeit ganz einfach daraus, daß für die Energie des Gebildes, welches bei Anlagerung des Elektrons entstehen würde, nur gewisse diskrete Werte in Frage kommen; und es ist unendlich unwahrscheinlich, daß das Elektron vor dem Stoß gerade einen genau passenden Betrag von kinetischer Energie besitzt. (Genauer: Die Wahrscheinlichkeit dafür würde der *natürlichen Linienbreite* proportional sein — also vernachlässigbar, soweit diese als vernachlässigbar anzusehen ist.) Ganz ebenso ist zu begründen, daß chemische Reaktionen der Form $A + B \rightarrow AB$ niemals als Ergebnis von „Zweierstößen“ eintreten, also derart, daß je ein Atom A und B beim Zusammenstoß aneinander haften bleiben und somit ein Molekül AB bilden. Vielmehr geschehen derartige Reaktionen immer nur *entweder an Gefäßwänden*, auf denen sich die Atome A , B treffen, *oder durch Dreierstöße*, also derart, daß die beiden Atome A , B gleichzeitig miteinander und mit einem dritten zusammenstoßen, so daß dies dritte, welches nach dem Elementarakt wieder fortfliegt, für Bilanzierung von Energie und Impuls sorgen kann.

Diese Unmöglichkeit einer unmittelbaren Anlagerung zweier atomarer Stoßpartner ist aber auch ohne Heranziehung spezifisch quantentheoretischer Erwägungen *klassisch-korrespondenzmäßig* zu verstehen. Das Endresultat soll ja in einer *mehrfach periodischen* Bewegung der Stoßpartner bzw. ihrer Bestandteile bestehen; und eine solche mehrfach periodische Bewegung ist und bleibt *für alle Zeiten* eine mehrfach periodische Bewegung; sie kann nicht, wenn wir sie zeitlich nach vorwärts oder rückwärts verfolgen, irgendwann in eine *aperiodische* Bewegung übergehen. Der innere Zusammenhang dieser soeben angestellten Erwägung mit der obigen ergibt sich daraus, daß eben die diskrete Quantelung der Atome und Moleküle in deren korrespondenzmäßiger *Analogie* zu mehrfach periodischen klassischen Bewegungen begründet ist.

Den Typus der inneren Bewegungen im Kern haben wir uns also *nicht* in korrespondenzmäßiger Analogie zu mehrfach periodischen klassischen Modellen vorzustellen. Man wird aber trotzdem auch für diesen Bewegungstyp ein klassisches Analogon angeben können, und im Hinblick auf die im „*Tröpfchenmodell*“ des Kerns ausgedrückten Verhältnisse kann man als ein klassisches Modell, das zur Veranschaulichung dieser Bewegungsform geeignet ist, etwa eine *mit Billardkugeln gefüllte Schale* anführen. Der *Boden* der Schale (die etwa kreisförmig sei) sei *eben*; nur ein verhältnismäßig schmaler Randstreifen (er entspricht der von v. WEIZSÄCKER untersuchten Oberflächenschicht des Kernes) ist nach außen ansteigend gewölbt; und am oberen Rande der Schale schließt sich eine allseitig unendlich ausgedehnte Ebene an — es handelt sich also, anschaulich gesprochen, um eine in einem kreisförmigen Ausschnitt einer großen Tischplatte *ingesenkte* Schale. Jede der Kugeln besitzt also (sofern sie sich nicht gerade in der schmalen Randzone befindet) *dieselbe* potentielle Energie. Da zwischen den dicht gedrängten Kugeln bei ihrer Bewegung immerfort Zusammenstöße

stattfinden, wird auch der *Mittelwert der kinetischen Energie* für jede Kugel *derselbe* sein.

Ist die insgesamt vorhandene kinetische Energie *gering*, so bekommen wir eine *ergodische Bewegung*. Wir haben uns früher klar gemacht (Kapitel 2, § 4, 1), daß auch diese ergodische, also *nicht* mehrfach periodische Bewegung im quantentheoretischen Fall durchaus eine *diskrete* Quantelung ergeben wird. Dem entspricht die Tatsache, daß bei den Kernen *diskrete Anregungsniveaus* zu finden sind, die das jeweilige *Termschema für die γ -Emissionen* bilden, und naturgemäß auch zu den diskreten Energiewerten der α -Emissionen in entsprechenden Beziehungen stehen. Dabei handelt es sich, wie zu erwarten, um Anregungsenergien (gegenüber dem *Grundzustand* des betreffenden Kernes), die unterhalb *derjenigen* Energie liegen, welche als *Bindungsenergie pro Kernbaustein* (Proton oder Neutron) zu ermitteln ist. Diese Bindungsenergie pro Kernbaustein ist nämlich von der Größenordnung 10^7 Volt; und die fraglichen Anregungsniveaus liegen in der Größenordnung von etwa 10^6 Volt.

In unserem klassischen Vergleichsbild würde offenbar die Tiefe des Schalenbodens unter der Tischplatte, ausgedrückt im Energiemaß, den 10^7 Volt entsprechen: wenn die insgesamt vorhandene kinetische Energie des Kugelhaufens *kleiner* als diese potentielle Energiedifferenz ist, so kann niemals eine der Kugeln die Schale *verlassen*; die Bedingungen einer ergodischen Bewegung sind infolgedessen erfüllt. Jedoch muß auch bei diesen unterhalb 10^7 Volt liegenden Anregungsenergien schon ein erheblicher Unterschied gegenüber den Anregungsstufen eines Atoms zutage treten. Die Verteilung der verschiedenen Elektronen in der Elektronenhülle eines Atoms auf die „Elektronenschalen“ mit sehr verschiedenen Bindungsfestigkeiten bedingt ja, daß mit geringen oder mittleren Anregungsenergien nur die *lockersten* Elektronen angeregt werden können, wodurch die Anzahl der diskreten Anregungsstufen unterhalb einer gewissen Energiehöhe eng begrenzt wird. Aber beim Kern mit seiner großen Zahl gleichberechtigter, gleich fest gebundener Teilchen wird schon bei Anregungsenergien von etwa $5 \cdot 10^6$ bis 10^7 Volt eine sehr *dichte Anhäufung* diskreter Energiestufen stattfinden; bei noch größeren Energien muß diese Häufung immer dichter werden.

Außerdem aber tritt bei Energien oberhalb 10^7 Volt die Möglichkeit ein, daß im Verlaufe der unregelmäßigen *Schwankungen* in der *Verteilung* der vorhandenen Anregungsenergie über die verschiedenen Kernbausteine ein einzelner nahe der Kernoberfläche befindlicher Kernbaustein hinreichend Energie bekommt, um aus dem Kernverband hinauszufliegen, so daß wir eine Emission eines Protons oder Neutrons (bzw. auch eines α -Teilchens) erhalten. Dem entspricht als Umkehrung der Vorgang einer *Einfangung* eines Teilchens: Eine in unsere Schale hineingestoßene Kugel wird ihre kinetische Energie sehr schnell durch vielfache Stöße zwischen den Kugeln verteilen, und als Ergebnis wird ein vorläufiges *Steckenbleiben* der hinzugekommenen Kugel eintreten, während die zugeführte Energie

auf die Gesamtheit der Kugeln gleichmäßig verteilt wird. Es tritt gewissermaßen, wie in einem Sandsack, in den eine Gewehrkugel eingeschossen worden ist, eine „*Erwärmung*“ des Kernes ein. Erst später wird dann infolge der besprochenen Schwankungen in der Verteilung der Energie über die Kernbestandteile wiederum eine Emission eines Kernbausteines eintreten, sofern nicht etwa die Energie statt dessen durch eine γ -Emission verausgabt wird. Was die *Energiestufen* oberhalb der Größenordnung 10^7 Volt anbelangt, so müssen natürlich die soeben nach klassischer Analogie erläuterten Effekte sich in *Verbreiterungen* der Energiestufen zeigen, welche den bei der *Prädissoziation* vorliegenden Verbreiterungen der Energiestufen von Molekülen analog sind, und welche etwa in der Höhe von $1,5 \cdot 10^7$ Volt über dem Grundzustand bereits zu einem kontinuierlichen Zusammenfließen der Stufen führen dürften. —

Auch ganz abgesehen von der gegenwärtigen Aktualität aller die Kernphysik betreffenden Fragen, welche uns jede diesbezügliche neue Einsicht hochwillkommen macht, scheinen mir diese hier skizzierten BOHRschen Überlegungen zu den schönsten und wunderbarsten Kapiteln der Quantentheorie zu gehören. Vorgänge von völlig anderer Art, als die sich in und an den Elektronenhüllen der Atome abspielenden, erlauben trotz der ihnen offensichtlich anhaftenden Kompliziertheit ein weitgehendes *anschauliches Verständnis* ihrer Hauptzüge auf Grund der im *Korrespondenzprinzip* ausgedrückten *Verwandtschaft* der klassischen und der Quantentheorie.

5. Die Neutrinotheorie des Lichtes. Wir haben gesehen, daß *zusammengesetzte* Teilchen die FERMI- oder die BOSE-Statistik befolgen, je nachdem, ob sie eine ungerade oder eine gerade Anzahl solcher Bausteine enthalten, welche ihrerseits dem PAULI-Verbot unterliegen. Es ist also insbesondere festzustellen, daß man Teilchen, welche der BOSE-Statistik genügen, aufbauen kann unter *alleiniger* Benutzung von Teilchen mit *halbzahligem* Spin (also mit FERMI-Statistik); daß dagegen umgekehrt niemals Teilchen, die dem PAULI-Verbot gehorchen, zusammengesetzt werden können unter ausschließlicher Benutzung von „BOSESchen“ Bausteinen.

Diese Erwägung läßt uns erkennen, daß die Teilchen mit halbzahligem Spin und FERMI-Statistik gegenüber denen mit ganzzahligem Spin und BOSE-Statistik gewissermaßen einen *primären* Charakter besitzen; man kommt auf den Gedanken, daß die letzten, einfachsten Elementarteilchen vielleicht *durchweg* dem PAULI-Verbot gehorchen — da jedenfalls das Umgekehrte, Gültigkeit der BOSE-Statistik für *alle* primären Elementarteilchen, bestimmt nicht möglich ist. Wenn dieser Gedanke richtig ist, dann müßten also diejenigen Elementarteilchen, die tatsächlich der BOSE-Statistik folgen, in Wirklichkeit nicht primäre, *sondern zusammengesetzte Teilchen sein*: Das *Lichtquant* und auch das *Gravitationsquant* wären dann als sekundäre, zusammengesetzte Teilchen anzusehen. Dieser Gedanke hat den Verfasser seit etwa 1927 beschäftigt; und seine

Dringlichkeit hat sich wohl zweifellos *erhöht* durch die neuere Entwicklung, die uns mit dem Positron bekannt machte — und dadurch Proton und Elektron als zwei ganz verschiedene Teilchenarten erwies — und uns in Gestalt des Neutrons und des Neutrino zwei weitere Arten von Elementarteilchen erkennen ließ. Dieser schon ansehnlichen Zahl verschiedener Elementarteilchen möchte man ungern noch Lichtquant und Gravitationsquant als selbständige Gebilde zur Seite stellen — unsere Zuversicht, daß die elementaren Naturgesetze *einfach* sind, käme dabei zu kurz.

Kurz nach der Entdeckung des Neutrinos (oder sagen wir lieber: kurz, nachdem die PAULISCHE Neutrinohypothese allgemeinere Anerkennung gefunden hatte) trug de BROGLIE folgenden Gedanken vor: Man könnte vielleicht das Lichtquant $h\nu$ mit seinem Impuls $h\nu/c$ als aus *zwei Neutrinos gleicher Energie* $\frac{1}{2}h\nu$ zusammengesetzt ansehen, deren Energien sich zu $h\nu$ addieren, und deren Impulse $h\nu/2c$ sich zu $h\nu/c$ addieren. Ich bin überzeugt, daß dieser Gedanke falsch ist; aber zwei darin enthaltene Bemerkungen scheinen mir wertvoll. Erstens die Bemerkung, daß man am ehesten die *Neutrinos* als die *Primärgebilde* der Lichttheorie ansehen sollte, wenn man am primären Charakter der Lichtquanten zweifelt. Zweitens die Bemerkung, daß man auf eine die Neutrinos zusammenhaltende *Bindungsenergie* völlig *verzichten* kann, da bei *parallel fliegenden* Neutrinos die *Impulssumme* wie beim einzelnen Neutrino (und wie beim Lichtquant) proportional der *Energiesumme* ist.

Diese Bemerkung ist verwertet worden in der vom Verfasser 1934 begründeten *Neutrinotheorie des Lichtes*, von der ich hoffe, daß ihre gründliche Durchdenkung unsere Einsicht in das Wesen des Lichtes vertiefen wird — einerlei, ob sich diese Theorie dabei ohne weiteres schon in ihrer jetzigen Form bewähren wird, oder ob noch wesentliche Abänderungen sich als nötig erweisen werden. Trotz ihres etwas spekulativen Charakters seien die Grundgedanken dieser Theorie hier kurz erläutert, in der Form, die sich durch weitere Untersuchungen (KRONIG, JORDAN) ergeben hat.

Zunächst sei folgendes überlegt. Ein Hohlraum sei mit Wänden versehen, die für *Neutrinostrahlung undurchlässig* sind; wir fragen dann nach dem thermodynamisch stationären Zustand der Neutrinostrahlung im Hohlraum. Sofort ist klar, daß auch für diesen Fall das STEFAN-BOLTZMANNSCHE Gesetz gilt, also die Gesamtenergiedichte v proportional der vierten Potenz der absoluten Temperatur sein muß; denn es gilt ja wie beim lichterfüllten Hohlraum die Beziehung $p = v/3$ (aus der das T^4 -Gesetz folgt), weil wie bei den Lichtquanten für jedes einzelne Teilchen der Impulsbetrag gleich der durch c dividierten Energie ist. Wir werden aber sehen, daß die *Konstante* des STEFAN-BOLTZMANNSCHEM Gesetzes beim Neutrinohohlraum einen anderen, und zwar *größeren Wert* hat, als beim Lichthohlraum.

Die Formel (16), § 1, 2, Kapitel 1, welche angibt, wie viele Eigen-schwingungen des elektromagnetischen Hohlraums es in jedem Frequenz-intervall gibt, ist auch auf den Neutrinohohlraum anzuwenden, jedoch unter Hinzufügung *eines Faktors 2*: denn es gibt für jedes der in § 1, 2, Kapitel 1 betrachteten Zahlentripel n_1, n_2, n_3 vier Neutrinoeigenfunktionen des Hohlraums (gegenüber nur *zwei* elektromagnetischen). An Stelle des PLANCKSchen Gesetzes (10), § 1, 2, Kapitel 1 bekommen wir also für die *schwarze Neutrinostrahlung* eine Formel, in der erstens noch ein Faktor 2 auftritt, und dann natürlich im Nenner eine $+1$ statt der -1 , entsprechend der FERMI-Statistik der Neutrinos [vgl. dazu (22), § 1, 3 dieses Kapitels]:

$$\sigma_\nu = \frac{16 \pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} + 1}. \quad (23)$$

Wenn man dies über alle Frequenzen integriert, bekommt man folgendes Ergebnis, neben dem wir das analoge für das Licht [vgl. (7'), § 1, 2, Kapitel 1] wiederholen:

$$v = \frac{14}{15} \cdot \frac{\pi^5 h^4}{c^3 h^3} \cdot T^4; \quad u = \frac{8}{15} \cdot \frac{\pi^5 h^4}{c^3 h^3} \cdot T^4. \quad (24)$$

Die Auffassung, die wir uns nun bilden wollen, ist folgende. Wir fassen alle Lichtwirkungen als scheinbare oder sekundäre auf, denen in Wirklichkeit Neutrinos zugrunde liegen. Unser schwarzer Neutrino-hohlraum soll ganz *dieselben elektromagnetischen Wirkungen ausüben*, wie ein schwarzer Lichthohlraum derselben Temperatur: Ein Bruchteil $\frac{4}{7}$ seines gesamten Energieinhaltes tritt also als Lichtenergie in Funktion, während der restliche Bruchteil $\frac{3}{7}$ elektromagnetisch unwirksam bleibt. Ein gewöhnlicher Hohlraum, dessen Wände *für Licht undurchlässig*, aber für die von einem β -Strahler ausgesandten Neutrinos *durchlässig* sind, hält eben nur den *elektromagnetisch wirksamen* Bruchteil $\frac{4}{7}$ schwarzer Neutrinostrahlung zurück, kann dagegen den *elektromagnetisch unwirksamen* Bruchteil $\frac{3}{7}$ nicht festhalten. Wir werden den Beweis erbringen müssen, daß diese zunächst so merkwürdig scheinende Teilung der Neutrinofeldenergie in einen elektromagnetisch wirksamen und einen elektromagnetisch unwirksamen Anteil wirklich in einwandfreier Weise durchführbar — d. h. also als mathematische Konsequenz eines bestimmten quantenmechanischen Modells des Strahlungsfeldes begründbar — ist.

Die — in der Tat mögliche — mathematische Durchführung der Neutrinotheorie des Lichtes ergab ferner, daß man *zwei Arten* von Neutrinos unterscheiden muß, deren Verhältnis zueinander dem zwischen *Positron* und *Elektron* entspricht. Vom Standpunkte der DIRACSchen Wellengleichung, die wir, wie schon hervorgehoben, mit gleich Null gesetzter Ruhmasse und Ladung auch auf das Neutrino anwenden wollen, ist es ja von vornherein klar, daß es analog wie bei den Elektronen auch beim Neutrino den Unterschied positiver und negativer Energiestufen

geben muß, wobei für letztere die DIRACsche Löcheridee anzuwenden ist. So hatte denn auch DE BROGLIE seine Idee, daß das Lichtquant $h\nu$ aus zwei Neutrinos $\frac{1}{2} \cdot h\nu$ bestehe, mit der weiteren Bemerkung versehen, daß es sich dabei wahrscheinlich um ein Paar von Neutrino und „Antineutrino“ (Neutrino Loch) handle. Der im folgenden zu besprechende Formalismus der Neutrinotheorie des Lichtes hat aber gezeigt, daß auch ganz unabhängig von der DIRAC-Gleichung eine Unterscheidung „positiver“ und „negativer“ Neutrinos notwendig ist. Das scheint mir eine bemerkenswerte Bestätigung für die innere Natürlichkeit und Angemessenheit dieser Theorie zu sein. Dabei liegt es so, daß bei allen optischen Elementaraktien die Differenz der Anzahlen positiver und negativer Neutrinos ungeändert bleibt. Erlauben wir uns, den in einem Neutrinostrahlungsfelde vorhandenen Überschuß der Anzahl positiver Neutrinos über die der negativen kurz als „Neutrinoladung“ zu bezeichnen — der sich aufdrängenden Analogie zur elektrischen Ladung entsprechend —, so verlaufen also alle optischen (elektromagnetischen) Prozesse ohne Änderung der gesamten Neutrinoladung. Anders wird das natürlich, wenn wir auch β -Strahler mitberücksichtigen, deren Atome ja in jedem β -Elementarakt gerade ein Neutrino neu erzeugen. Hierbei wird aber gleichzeitig je ein Neutron in ein Proton umgewandelt (oder umgekehrt, nämlich wenn es sich um Emission eines Positrons handelt); und die Vermutung liegt nahe, daß auch den Neutronen eine (positive oder negative) Neutrinoladung zuzuschreiben ist — und daß danach dann das Prinzip der Erhaltung der Neutrinoladung vielleicht ebenso universelle Gültigkeit beanspruchen kann, wie das Prinzip der Erhaltung der Elektrizität¹. Aber das ist zunächst reine Spekulation; und wir wollen uns vom Neutron wieder zurück zum Neutrino wenden.

Ist in einem Neutrinohohlraum eine von Null verschiedene Neutrinoladung vorhanden, so kann natürlich nicht die der Formel (23) entsprechende „absolut schwarze“ Neutrinostrahlung zustande kommen. Sondern die optischen Elementarprozesse der im Hohlraum vorhandenen Atome oder Elektronen können dies Neutrinofeld lediglich in ein „relativ schwarzes“ verwandeln, das dann thermodynamisch stationär bleibt, solange der vorgegebene Wert der gesamten Neutrinoladung aufrecht erhalten bleibt. Nach (28), § 1, 3 haben wir dann für die Strahlungsdichten $\sigma_{\nu}^{(+)}$ und $\sigma_{\nu}^{(-)}$ positiver und negativer Neutrinos:

$$\sigma_{\nu}^{(+)} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{a + \frac{h\nu}{k\tau}} + 1}; \quad \sigma_{\nu}^{(-)} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{-a + \frac{h\nu}{k\tau}} + 1}, \quad (25)$$

woraus nur im Falle verschwindender Neutrinoladung mit $a(T) = 0$ wieder die Formel (23) für $\sigma_{\nu} = \sigma_{\nu}^{(+)} + \sigma_{\nu}^{(-)}$ folgt. Auch dieses „relativ schwarze“ Neutrinofeld soll ganz dieselben elektromagnetischen Wirkungen ausüben, wie ein schwarzes Lichtfeld derselben Temperatur T .

¹ Übrigens besteht zwischen Neutron und Neutrino offenbar ein ähnliches Verhältnis, wie zwischen Proton und Elektron.

Um zu sehen, wie das möglich ist, müssen wir uns jetzt ein genaueres Bild machen von den *optischen Elementarprozessen* im Neutrinostrahlungsfeld. Was bedeutet in Wirklichkeit ein Prozeß, der von der bisherigen Lichttheorie als *Absorption eines Lichtquants $h\nu$* aufgefaßt wird? Die DE BROGLIESCHE Annahme, daß dieser Prozeß mit der Absorption zweier Neutrinos $h\nu/2$ gleichzusetzen sei, ersetzen wir durch folgende Vorstellung. Der Prozeß kann bedeuten:

1. *Entweder* Absorption eines positiven und eines negativen Neutrino, die beide *parallel* fliegen, und deren Energien die fragliche Summe ergeben, also gleich $\alpha h\nu$ und $(1-\alpha)h\nu$ mit *beliebigem* α in $0 < \alpha < 1$ sind.

2. *Oder* aber einen „RAMAN-Effekt“ der Neutrinos, bei welchem ein Neutrino, dessen Energie $(1+\alpha)h\nu$ größer als $h\nu$ ist (dabei $\alpha > 0$ *beliebig*), verschwindet, während ein neues mit der um $h\nu$ kleineren Energie $\alpha h\nu$ erzeugt wird. Dies letztere fliegt dabei in *derselben Richtung*, wie das verschwundene. *Beide* Neutrinos sind positiv, oder *beide* sind negativ.

Die exakte *Parallelität* der zusammenwirkenden Lichtquanten haben wir nötig, um für die Energie $h\nu$ auch die richtige Impulsübertragung $h\nu/c$ auf das absorbierende Atom zu bekommen. Daß wir die unter 2. genannten „RAMAN-Prozesse“ durchaus nicht entbehren können, ist kennzeichnend für den *Radikalismus* unserer Abwendung von der Lichtquantentheorie: nicht einmal als ein zusammengesetztes Gebilde (wie bei DE BROGLIE) wird hier das Lichtquant $h\nu$ anerkannt; sondern nur noch die durch Einführung des Lichtquants beschriebenen *Übertragungen von Energie und Impuls* auf die absorbierenden, emittierenden, streuenden Atome und Elektronen werden als tatsächlich anerkannt, aber in veränderter Weise gedeutet.

Es ergibt sich nun die Frage, ob und wie wir diese Annahmen derart präzisieren können, daß in der gewünschten Weise die *Häufigkeiten* der verschiedenen möglichen Energieimpuls-Übertragungen auf Atome seitens unseres relativ schwarzen Neutrinofeldes *dieselben* werden, wie sie sich nach der bisherigen Theorie im schwarzen Lichtfelde ergeben. Wir untersuchen diese Frage zunächst für das vereinfachte Modell eines *eindimensionalen* (und sehr großen) Strahlungshohlraums. Am besten rechnen wir nicht mit den Strahlungsdichten, sondern mit den *mittleren Besetzungszahlen* für den Neutrino- bzw. Lichtquantenzustand. Nennen wir diese n_ν , $m_\nu^{(+)}$, $m_\nu^{(-)}$, so gilt also für das „relativ schwarze“ Neutrino-feld:

$$m_\nu^{(+)} = \frac{A y}{A y + 1}; \quad m_\nu^{(-)} = \frac{y}{y + A}; \quad y = e^{-\frac{h\nu}{kT}} < 1; \quad (26)$$

für das schwarze Lichtfeld:

$$n_\nu = \frac{y}{1 - y}. \quad (27)$$

Die *Häufigkeit* der gleichzeitigen Absorption eines positiven Neutrino $\alpha h\nu$ und eines negativen $(1-\alpha)h\nu$ ist nach den früher entwickelten Formeln [vgl. die analoge Formel (29), § 1, 3] proportional mit

$$m_{\alpha\nu}^{(+)} m_{\nu-\alpha\nu}^{(-)}; \quad (28)$$

und die Häufigkeit eines Prozesses, bei welchem ein positives Neutrino $(1+\alpha)h\nu$ absorbiert und ein ebenfalls positives $\alpha h\nu$ emittiert wird, ist proportional

$$m_{\nu+\alpha\nu}^{(+)} [1 - m_{\alpha\nu}^{(+)}]. \quad (29)$$

Die Häufigkeiten der *inversen* Prozesse sind dagegen

$$[1 - m_{\alpha\nu}^{(+)}] \cdot [1 - m_{\nu-\alpha\nu}^{(-)}]; \quad (30)$$

$$[1 - m_{\nu+\alpha\nu}^{(+)}] \cdot m_{\alpha\nu}^{(+)}. \quad (31)$$

Die *summierte* Häufigkeit für *alle* Prozesse, die der Absorption eines Lichtquants $h\nu$ entsprechen, muß dann *proportional mit* n_ν sein; und die summierte Häufigkeit aller dazu *inversen* Prozesse muß die mit $1+n_\nu$ proportionale Häufigkeit der *Emission* eines $h\nu$ ergeben. Dies erwägend, gelangt man leicht zu dem Schluß, daß die „scheinbare Lichtstrahlung“, welche aus den Neutrinos resultiert, gegeben sein muß durch

$$n_\nu = \int_0^1 m_{\alpha\nu}^{(+)} m_{\nu-\alpha\nu}^{(-)} d\alpha + \int_0^\infty \{m_{\nu+\alpha\nu}^{(+)} [1 - m_{\alpha\nu}^{(+)}] + m_{\nu+\alpha\nu}^{(-)} [1 - m_{\alpha\nu}^{(-)}]\} d\alpha. \quad (32)$$

Jetzt ist zu prüfen, ob wirklich, wenn die Neutrinostrahlung gemäß (26) relativ schwarz ist, die nach (32) erzeugte scheinbare Lichtstrahlung wunschgemäß schwarz ausfällt: *tatsächlich tut sie das*. Um es einzusehen, muß man nur beweisen, daß folgende eigentümliche mathematische Identität gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A y^{\alpha+1}}{(1 + A y^{\alpha+1})(1 + A y^\alpha)} d\alpha = \frac{y}{1-y} \text{ für } y < 1. \quad (33)$$

Werden nämlich in (32) die Ausdrücke (26) eingesetzt, so geht (32), wie leicht zu sehen, in die Form (33) über.

Zum richtigen Verständnis muß noch betont werden, daß die Formel (32) sich auf die Strahlungsdichte n_ν *linear polarisierten* Lichtes bezieht; sie ist also auf die *beiden* linear polarisierten *Komponenten* beliebigen Lichtes im eindimensionalen Hohlraum *einzelnen* anzuwenden. Dieselbe Bemerkung gilt auch für das folgende.

Eine weitere Folgerung von (32) ist diese: Wir bilden durch Integration über $h\nu \cdot (m_{\nu}^{(+)} + m_{\nu}^{(-)})$ und über $h\nu \cdot n_\nu$ die *Gesamtenergie* E der *Neutrinostrahlung* und die *scheinbare Gesamtenergie* W des *Lichtes*. Wenn dann B die gesamte *Neutrinoladung* ist (integriere über $m_{\nu}^{(+)} - m_{\nu}^{(-)}$!), so gilt die Beziehung

$$E - W = \frac{h c \cdot B^2}{2 L}, \quad (34)$$

wenn L die *Länge* unseres eindimensionalen Hohlraums ist.

Dies zeigt, daß die scheinbare Lichtenergie W — wie wir auch vernünftigerweise fordern müssen — nie größer als E sein kann. Im Falle $B=0$ wird $W=E$; wir haben ein „reines Lichtfeld“, dessen gesamte Energie *elektromagnetisch wirksam* ist. Es gibt aber auch den entgegengesetzten Grenzfall $B^2=2LE/hc$, also $W=0$; er bedeutet ein „reines Neutrino-feld“, welches *elektromagnetisch völlig unwirksam* ist. Man erhält ein solches reines Neutrino-feld, wenn man ein *relativ schwarzes* Neutrino-feld mit von Null verschiedener Neutrino-ladung *abkühlt* bis zum absoluten Nullpunkt $T=0$: Es wird dann, wenn etwa $B > 0$ ist, $m_\nu^{(-)}=0$, und $m_\nu^{(+)}=1$ für $\nu < \nu_0$ und $=0$ für $\nu > \nu_0$; der Wert ν_0 ist mit B proportional [vgl. die analogen Überlegungen zu (33), § 1, 3]. Man beachte aber, daß alle diese Bemerkungen sich immer noch auf den *eindimensionalen* Hohlraum (mit *linear polarisiertem* Licht) beziehen; auf den dreidimensionalen Fall kommen wir erst hernach.

Jetzt aber müssen wir uns, noch beim eindimensionalen Fall bleibend, klar machen, daß mit der Aufstellung der Formel (32) für den Zusammenhang von Neutrinostrahlung und Licht unsere Aufgabe erst zum Teil gelöst ist. Was wir zu suchen haben, ist dies: Das Neutrino-feld wird quantenmechanisch durch gewisse *Matrizen* γ_κ zu beschreiben sein, die den uns bekannten Multiplikationsgesetzen für ein Wellenfeld mit PAULI-Verbot gehorchen:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_\kappa^\dagger \gamma_\lambda + \gamma_\lambda \gamma_\kappa^\dagger &= \delta(\kappa - \lambda) \mathbf{1}, \\ \gamma_\kappa \gamma_\lambda + \gamma_\lambda \gamma_\kappa &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Hier sollen die (im Grenzfall $L=\infty$ *kontinuierlichen*) Indizes κ, λ von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen; $m_\nu^{(+)}$ ist der *Erwartungswert* der Matrix $\gamma_\nu^\dagger \gamma_\nu$, und $m_\nu^{(-)}$ ist der Erwartungswert der Matrix $\gamma_{-\nu} \gamma_{-\nu}^\dagger$.

Das *Lichtfeld* aber ist zu beschreiben durch Matrizen b_κ mit

$$\left. \begin{aligned} [b_\kappa^\dagger, b_\lambda] &= -\delta(\kappa - \lambda) \mathbf{1}, \\ [b_\kappa, b_\lambda] &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

und n_ν ist der Erwartungswert von $b_\nu^\dagger b_\nu$. Diese b_κ müssen nun irgendwie als Funktionen der γ_λ konstruiert werden, in solcher Weise, daß (36) eine *Folge* von (35) wird. Wie das zu geschehen hat, läßt sich aus (32) leicht *erraten*:

$$b_\nu = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_\alpha^\dagger \gamma_{\nu+\alpha} d\alpha. \quad (37)$$

Tatsächlich wird damit das Ziel erreicht: die so konstruierten b_ν haben die gewünschten Eigenschaften.

Diese Formel (37), die das eigentliche Fundament der Neutrino-theorie des Lichtes bildet, ergibt jetzt für die Matrizen E, W, B den Zusammenhang:

$$E - W = \frac{hc B^2}{2L}; \quad (38)$$

ferner ergibt sie (32) als *Folgerung*, aber mit einer nicht unwesentlichen Einschränkung bzw. Verallgemeinerung: *Die Besetzungszahlen der Lichtquantenzustände sind* — als Matrizen — *nicht vertauschbar mit denen der Neutrinozustände*. Die Formel (32) drückt die *Erwartungswerte* der Lichtstrahlungsdichten durch die als Diagonalmatrizen vorausgesetzten Neutrinostrahlungsdichten aus; aber gerade in wichtigen Fällen (z. B. *monochromatisches Licht*) sind die Besetzungszahlen der Neutrinozustände *keine* Diagonalmatrizen.

Für die Theorie des *dreidimensionalen* Hohlraums ist es wichtig, daß die oben skizzierte Theorie des eindimensionalen Falles sich ohne Schwierigkeit derart erweitern läßt, daß die Länge L des Hohlraums als *endlich*, und demgemäß die in (35) gebrauchten Indizes n *diskret* angenommen werden, entsprechend den *diskreten Eigenfrequenzen* eines *endlichen* Intervalles. Im dreidimensionalen Falle werden ja die Eigenfrequenzen (bei würfelförmigem Hohlraum mit Randbedingung der *Periodizität*, also *fortlaufenden* Wellen als Eigenschwingungen) durch Tripel ganzer Zahlen n_1, n_2, n_3 bezeichnet; *Parallelität* zweier Wellen n'_1, n'_2, n'_3 und n''_1, n''_2, n''_3 besteht dann und nur dann, wenn es zwei ganze Zahlen m', m'' gibt derart, daß

$$\left. \begin{aligned} (n'_1, n'_2, n'_3) &= (m' n_1^0, m' n_2^0, m' n_3^0); \\ (n''_1, n''_2, n''_3) &= (m'' n_1^0, m'' n_2^0, m'' n_3^0). \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Sind also n_1^0, n_2^0, n_3^0 drei ganze Zahlen *ohne gemeinsamen Teiler* (in einer ganz ungewohnten Weise spielen hier *zahlentheoretische* Begriffe herein), so sind die sämtlichen Eigenschwingungen $m n_1^0, m n_2^0, m n_3^0$ zu einem „eindimensionalen Hohlraum“ zusammenzufassen, auf den wir die oben skizzierte Theorie (in ihrer einem *endlichen* L entsprechenden Form) anzuwenden haben.

Ein *reines Neutrino-feld*, elektromagnetisch unwirksam, bekommen wir dann, wenn in jeder einzelnen Serie $m n_1^0, m n_2^0, m n_3^0$ ein reines Neutrino-feld besteht; also z. B. dann, wenn es *nur* positive Neutrinos gibt, und diese sämtlich auf Eigenschwingungen n_1^0, n_2^0, n_3^0 (*ohne* gemeinsamen Teiler) entfallen. Dies sollte, wenn unsere Vorstellungen zutreffend sind, bei der von einem β -radioaktiven Präparat ausgehenden Neutrinostrahlung der Fall sein.

Ein *reines Lichtfeld* dagegen erfordert, daß in jeder einzelnen Serie $m n_1^0, m n_2^0, m n_3^0$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) ein reines Lichtfeld besteht, also die zugehörige Neutrino-ladung B gleich Null ist. Beim *schwarzen Neutrino-felde* dagegen ist zwar innerhalb jedes engen Strahlungskegels *insgesamt* die Neutrino-ladung gleich Null; aber trotzdem bestehen für die *einzelnen* Serien $m n_1^0, m n_2^0, m n_3^0$ Werte B , die statistisch um Null herum schwanken, also den *Mittelwert Null*, aber einen *von Null verschiedenen Quadratmittelwert* haben.

Die hier skizzierte Theorie scheint mir für die quantenmechanische Begriffsbildung recht lehrreich zu sein auf Grund der eigentümlichen

Verbindung, welche sich hier ergibt zwischen den ganz anschaulichen Vorstellungen, von denen wir ausgegangen sind, und den der klassischen Veranschaulichung grundsätzlich entzogenen Effekten, welche sich aus der (hier nur oberflächlich berührten) Nichtvertauschbarkeit der Besetzungszahlen für Neutrinos und Lichtquanten ergeben. Eine ganz andere Frage aber ist es, ob diese Spekulation auch physikalisch *zutreffend* sein wird. Natürlich könnte man auch an andere Möglichkeiten denken: etwa so, daß nicht Neutrinos, sondern *Elektronen* die Primärteilchen des Lichtes wären; während dann die Neutrinos statt dessen vielleicht die Primärteilchen der *Gravitationsstrahlung* wären. Nur das Experiment kann entscheiden, wie hier die Dinge wirklich liegen, und wir werden sehr zufrieden sein, wenn die vorgetragene Theorie wenigstens *Anregungen* für die experimentelle Arbeit geben wird. Inzwischen dürfte die weitere theoretische Durchdenkung dieser Neutrinotheorie des Lichtes nicht vergeblich sein. Denn sie beschreibt jedenfalls die *einfachste* Möglichkeit, das Licht als Sekundärergebnis tiefer liegender Elementarprozesse zu verstehen; und *jede* künftige Theorie des Lichtes dürfte deshalb von diesem ersten Versuch irgendwie zu lernen haben, auch dann, wenn wesentliche Änderungen der erläuterten Auffassungen sich noch als notwendig erweisen sollten.

Fünftes Kapitel.

Atome und Organismen.

§ 1. Die positivistische Methode.

1. **Physikalische und erkenntnistheoretische Forschung.** Die Auffassungen, zu denen uns die Betrachtung der experimentellen Tatsachen der Quantenphysik geführt hat, sind in jedem Punkte unausweichliche Folgerungen aus dem empirisch Gegebenen. Das Gesamtbild, das wir erreicht haben, besitzt trotz der offen bleibenden und weiterer Forschungsarbeit überlassenen Probleme der Quantenelektrodynamik einen hohen Grad innerer Geschlossenheit; halten wir uns innerhalb der Grenzen der *nichtrelativistischen* Theorie, so bewegen wir uns in einem widerspruchsfrei abgeschlossenen Gedankengebäude, in welchem keinerlei grundsätzliches Problem ungelöst geblieben ist, und in dessen Rahmen jede mögliche Frage als ein klar definiertes mathematisches Problem erscheint, dessen Lösung höchstens durch mathematisch-rechnerische Komplikationen erschwert werden kann.

Aber die Begriffsbildungen und Vorstellungsweisen, zu denen wir gelangt sind, und welche durch ihre erschöpfende, widerspruchsfreie mathematische Formulierung ihre logische Legitimierung erhalten, stehen in krassem Gegensatz zu den Vorstellungsformen der älteren Physik

(*einschließlich* Relativitätstheorie). Dieser Umstand macht eine gründliche philosophisch-erkenntnistheoretische Besinnung nötig. Historisch ist es so gewesen, daß nur eine bestimmte erkenntnistheoretische Einstellung es möglich gemacht hat, die Probleme richtig zu sehen, und das forschende Nachdenken — und das experimentelle Suchen — auf diejenigen Punkte zu richten, deren Untersuchung sich dann tatsächlich als fruchtbar erwiesen hat. Erst die Ergebnisse dieser jahrzehntelangen Bemühungen ermöglichen es uns heute, ein Bild der empirischen Tatsachen zusammenzustellen, aus welchem eine unvoreingenommene, von der Enge klassischer Denkgewohnheiten Abstand nehmende Betrachtung fast unmittelbar die Grundzüge unseres heutigen theoretischen Vorstellungsbildes ablesen läßt.

Die historisch wichtig gewesene erkenntnistheoretische Besinnung muß aber auch weiterhin als notwendiger Bestandteil eines eindringlichen Verstehens der Quantenphysik angesehen werden. Gerade dem Programm dieses Buches, zu einem *anschaulichen* Erfassen der quantentheoretischen Vorstellungswelt hinzuleiten, würde es widersprechen, wenn wir uns *begnügen* wollten mit der Feststellung, daß die mathematisch widerspruchsfreie Formulierung des Komplementaritätsgedankens durch die statistische Transformationstheorie (Kapitel 3, § 5) diesen Gedanken als logisch einwandfrei erweist. Vielmehr werden wir uns auch unabhängig vom mathematischen Formalismus überzeugen wollen von der gedanklichen Geschlossenheit der Theorie, und nach einer greifbareren Erläuterung dieser Verhältnisse streben, bevor wir uns endgültig beruhigen und abfinden können mit der geschehenen radikalen Abkehr von der früheren Auffassungsweise der physikalischen Gesetzlichkeit.

Eine gründliche Überwindung klassischer Vorurteile ist nötig für ein von irrigen Gedanken ungestörtes Erfassen der neuen Vorstellungen; deshalb muß uns eine eingehende methodisch-erkenntnistheoretische Analyse zum Bewußtsein bringen, in wie entscheidender Weise das klassische Vorstellungsbild abhängt von *stillschweigend gemachten Voraussetzungen*, die wir auf Grund ihrer scheinbaren „Selbstverständlichkeit“ als solche gar nicht zu empfinden pflegen.

Eine deutliche Vorstellung von der neuen, durch den Komplementaritätsbegriff gekennzeichneten Denkweise der Quantenphysik zu gewinnen, wird aber nicht nur für die Physiker selbst nützlich und notwendig sein. Die *Biologie* benutzt die Physik (im weiteren Sinne, unter Einschluß der *Chemie*) als *Hilfswissenschaft*; es ist also unausweichlich, daß grundsätzliche Neuerkenntnisse der Physik auch auf ihre Bedeutung für die Biologie geprüft werden. Tatsächlich bestehen, wie mir scheint, starke Gründe für die Überzeugung, daß für das tiefere Eindringen in die Lebenserscheinungen die klassische, makroskopische Physik nicht ausreicht, daß vielmehr die *Atomphysik* hier wesentlich mit in Betracht kommt. Aber auch abgesehen von einer solchen unmittelbaren *Anwendung* der Atom- und Quantenphysik auf feinste physiologische

Prozesse dürfte die atomphysikalische *Komplementaritätstheorie* für die Biologie bemerkenswert und lehrreich sein: nämlich als ein *Beispiel neuer naturwissenschaftlicher Denkformen*.

2. Problem und Scheinproblem. Die „*positivistische*“ *Methode*¹ der *Erkenntnistheorie* unterscheidet sich von andersartigen erkenntnistheoretischen Auffassungen durch die Entschiedenheit, mit welcher sie eine Fülle von Problemen — deren Erörterung eine Haupttätigkeit der „Schulphilosophie“ bildet (um diesen von PH. FRANK geprägten glücklichen Ausdruck zu gebrauchen) — für *Scheinprobleme* erklärt. Daß die Erörterung dieser Probleme durch die Schulphilosophie niemals zu festen, allgemein angenommenen Ergebnissen geführt hat, sondern nur zu immer neuen, sich wechselseitig bekämpfenden Meinungen der philosophischen „Schulen“, das ist nach positivistischer Auffassung eben daraus zu verstehen, daß diese Probleme keine Probleme sind, und keine Lösung zulassen. Man kann — in etwas zugespitzter Weise — dies als die eigentliche *Entdeckung* des Positivismus bezeichnen: daß etwas, was sich in grammatikalisch einwandfreier Form als eine *Frage* formulieren läßt, deswegen noch lange kein wirkliches, sinnvolles Problem zu sein braucht. Die Existenz der Schulphilosophie beweist, daß diese Entdeckung nicht trivial ist.

Als *Scheinproblem* werden wir im wissenschaftlichen System ein Problem bezeichnen müssen, welches *aus dem Wesen der wissenschaftlichen Untersuchungsmethode heraus* (nicht nur auf Grund eines *derzeitigen* Ungenügens unseres Wissens und Könnens) wissenschaftlicher Untersuchung *unzugänglich* ist.

Eine bestimmte Quelle für die Entstehung von Scheinproblemen wird besonders deutlich angezeigt durch jene Anekdote von einem Hörer einer populären astronomischen Vorlesung, welcher fragt: „Verzeihung, ich habe sonst alles verstanden, aber wie hat man berechnet, daß der Stern „*Sirius*“ heißt?“ Das Bewußtsein der *Freiheit* in der Wahl der wissenschaftlichen *Bezeichnungen* konkreter Gegenstände und in den *Definitionen* wissenschaftlicher Begriffe ist historisch durchaus nicht alt. Was zunächst die Bezeichnungen betrifft, so sei daran erinnert, daß nach den Vorstellungen primitiver Völker die Kenntnis des *Namens* eines Dämons dem Menschen magische Gewalt über ihn verleiht. Hier wird es also durchaus als ein Problem aufgefaßt, den „*richtigen*“ Namen in Erfahrung zu bringen. Andererseits haben noch die Scholastiker sehr ernsthaft das Problem erörtert, wieviel Weizenkörner nötig seien, um einen „*Haufen*“ zu bilden, da ja offenbar 2—3 Körner noch keinen Haufen bilden, zehntausend aber gewiß.

Es besteht keine Uneinigkeit darüber, daß von unserem heutigen Standpunkt aus sowohl die Bestimmung des richtigen Namens eines

¹ Zur Abgrenzung der Bezeichnung „*Positivismus*“ in der *hier* gebrauchten Terminologie vgl. das in den Vorbemerkungen zu diesem Buche Gesagte.

Sternes als auch die der Mindestzahl von Körnern in einem Haufen trivialerweise nicht Probleme, sondern Scheinprobleme sind. Es zeigt sich aber schon an diesen Beispielen, daß die Fragestellung, welche wir durch ihre Kennzeichnung als „Scheinprobleme“ aus dem wissenschaftlichen System *auszuschalten* haben, dem *vorwissenschaftlichen* Denken angehören; es sei die These ausgesprochen, daß die radikale Durchführung der positivistischen Betrachtungsweise, wie wir sie hier verstehen, gar nichts anderes bedeutet, als die radikale Anwendung des exakten *wissenschaftlichen* Denkens unter Eliminierung störender Reste vorwissenschaftlicher Auffassungsweise.

Die reine Mathematik bietet ebenfalls betrachtenswerte Beispiele von Scheinproblemen. Der Lernende, der zum erstenmal von der „imaginären“ Größe $i = \sqrt{-1}$ hört, fühlt sich dabei von einem gewissen Schauer des Geheimnisvollen angerührt; in LEIBNIZENS Kennzeichnung der imaginären Größen als „amphibienähnlicher Wesen zwischen dem Seienden und Nichtseienden“ kommt diese Empfindung deutlich zum Ausdruck. Aber alle durch diesen Eindruck des Geheimnisvollen veranlaßten Fragen nach dem „Wesen“ der Zahl $\sqrt{-1}$ *verschwinden* vor der Aufklärung, daß die komplexen Zahlen $a + ib$ nichts anderes als *Paare* (a, b) von gewöhnlichen reellen Zahlen sind, und daß eine als „Multiplikation“ *bezeichnete* Verknüpfung dieser Zahlenpaare durch $(a, b) \cdot (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$ *definiert* wird. Ähnlich geheimnisvollen Eindruck macht dem Schüler die Aussage, daß 2 Parallelen „sich im Unendlichfernen schneiden“, und es entstehen daraus scheinbar unlösbare Zweifelsfragen. Die das Geheimnis beseitigende nüchterne Aufklärung ist die, daß die Aussage, „sie schneiden sich im Unendlichfernen“, lediglich ein *verabredeter*, terminologisch zweckmäßigerer *Ersatz* ist für die Aussage: „sie schneiden sich *nicht*“

Wohl das großartigste Beispiel eines ganzen, riesigen Komplexes von Scheinproblemen bilden die „*unendlich kleinen Größen*“ dx der Infinitesimalrechnung, die im Laufe der geschichtlichen Entwicklung von LEIBNITZ und NEWTON bis WEIERSTRASS eine Fülle von Scheinproblemen hervorgerufen und lange im Ansehen sehr geheimnisvoller Dinge gestanden haben. Die vornehmlich durch WEIERSTRASS und DEDEKIND erreichte abschließende Klärung (eine der scharfsinnigsten und philosophischsten Leistungen abendländischer Mathematik) verlief wiederum in der auch an den beiden anderen Beispielen erkennbaren Richtung: der Differentialquotient dx/dy *wird lediglich so geschrieben*, als wenn er ein *Quotient* zweier Größen dx und dy wäre (eine Schreibweise, die z. B. in Rücksicht auf die Relation

$$\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dz} = \frac{dx}{dz}$$

zweckmäßig ist). Tatsächlich haben aber dx, dy je für sich allein *überhaupt keine* Bedeutung.

Diese aufklärende Beseitigung von Scheinproblemen bedingt psychologisch eine gewisse *Enttäuschung*. Es ist enttäuschend, zu erfahren, daß man sich ganz unberechtigterweise etwas Geheimnisvolles vorgestellt hat unter den sich „im Unendlichen schneidenden“ Parallelen, unter der „imaginären“ Zahl $i = \sqrt{-1}$ oder unter der „unendlich kleinen Größe“ dx . Es ist deshalb eine psychologisch verständliche Reaktion, wenn man die erhaltene Aufklärung zunächst nicht annehmen möchte, sondern sie für unbefriedigend hält. Aber der *Verzicht*, der darin liegt, daß man sich diese „entgötternde“ Funktion des wissenschaftlichen Denkens gefallen läßt, ist eben *unvermeidlich*, wenn man als Gewinn jene kristallene Klarheit erreichen will, die das Ergebnis einer vollkommenen wissenschaftlichen Problemlösung ist.

Der Entschluß, die MAXWELLSche Theorie (innerhalb ihres Gültigkeitsgebietes) als endgültig befriedigend anzusehen und *nicht* mehr nach einem mechanischen Äthermodell zu suchen, durch das man die MAXWELLSchen Gleichungen „erklären“ konnte, stieß deshalb auf so starke psychologische Widerstände, weil er in so auffälliger Weise die Notwendigkeit zum Bewußtsein brachte, auf jeden Versuch eines „Verstehens“ oder „Erklärens“ der *elementaren* physikalischen Naturgesetze zu verzichten. Obwohl schon KIRCHHOFF die aufsehenerregende Feststellung gemacht hatte, daß *auch die Mechanik selber* nichts anderes erstreben und erreichen könne, als eine *Beschreibung* der mechanischen Naturvorgänge, so hielt man doch bis zur endgültigen Durchsetzung der MAXWELLSchen Theorie an der unklaren Meinung fest, daß die Zurückführung der elektrodynamischen Gesetze auf ein mechanisches Äthermodell in einer über bloße Beschreibung hinausgehenden Weise ein Eindringen in den wirklichen „Wesenskern“ der elektrodynamischen Erscheinungen und einen grundsätzlichen Gewinn für ihre *Verstehbarkeit* bedeute.

In der Quantentheorie haben wir die zielsichere Beiseiteschiebung unzähliger Scheinprobleme vor allem BOHR zu verdanken. Es ist wohl anfangs das Gefühl vieler Physiker gewesen, daß das BOHRsche *Korrespondenzprinzip* trotz seiner Fruchtbarkeit nur als ein „phänomenologisches“, heuristisches Prinzip zu betrachten sei, das einen *äußerlichen* Zusammenhang der Dinge herstellte, und daraufhin einzelne Tatsachen voraussehen oder vermuten ließ, ohne auch die wirklichen Wurzeln und inneren Zusammenhänge dieser Tatsachen zu erfassen. Obwohl die einzelnen Emissionen der Atome in un stetigen „Quantensprüngen“ erfolgen, so können trotzdem die statistischen Mittelwerte der Strahlungsintensitäten unter Verwertung klassischer Begriffsbildungen — wie der kontinuierlichen Kugelwellenstrahlung — vorausgesehen werden. Es war danach ein naheliegender Gedanke, zu fragen, *wie das zustande kommt*, welcher merkwürdige und geheimnisvolle Mechanismus zu diesen eigentümlichen Ergebnissen führt. Aber das war eine unfruchtbare, eine *sinnlose* Fragestellung. BOHR hat nicht nur das im Korrespondenzprinzip ausgesprochene Verhältnis der quantentheoretischen und

klassischen Gesetze *aufgedeckt*, sondern er ist auch mit ganzem Nachdruck dafür eingetreten, dies Verhältnis *nicht* als etwas der Erklärung Bedürftiges, sondern als etwas *ursprünglich Gegebenes* aufzufassen. Diese Auffassung beseitigte den ganzen Wust jener unübersehbar zahllosen Scheinprobleme, welche sich aus jedem Versuch ergeben mußten, in detaillierteren Vorstellungen vom „Verlauf“ oder „Mechanismus“ der Quantensprünge eine „Erklärung“ der korrespondenzmäßig festgestellten Gesetze zu finden; sie wies eindeutig den Weg, der dann von einer wachsenden Zahl von Quantentheoretikern erfolgreich beschriftet wurde: Man suchte nicht nach Erklärungen, Ableitungen und Begründungen der Korrespondenzgesetze *aus andersartigen Prinzipien*, sondern man bemühte sich lediglich, die zunächst noch unpräzisen, qualitativen Aussagen des Korrespondenzprinzips zu allmählich immer bestimmteren, genaueren Aussagen zu verdichten und zu verschärfen, bis das Endziel einer exakten „Quantenmechanik“ erreicht wurde.

3. *Sinnvolle und sinnlose Urteile.* Das Bestreben, logische *Unklarheiten* und *Widersprüche* aus dem Begriffssystem der physikalischen Naturbeschreibung auszuschalten, ist ganz analog dem Bestreben der Beseitigung von Unklarheiten und scheinbaren Widersprüchen aus dem System der mathematischen Begriffsbildungen, und die anzuwendenden methodischen Gesichtspunkte sind in beiden Fällen im Kern die gleichen. Der gewaltige Schritt, den HILBERT durch seine Untersuchungen zur axiomatischen Grundlegung der Mathematik getan hat, führt die Linie fort, die in den oben angedeuteten Beispielen mathematischer Begriffsklärung hervortrat. Heben wir insbesondere jetzt hervor, daß die Reinigung der Mathematik von hoffnungslosen Widersprüchen eine erhebliche, einschneidende *Ausscheidung* von *Begriffen* und von *Aussagen* erfordert, die der naiven Betrachtung zunächst als durchaus *natürlich* erscheinen. Wer den Begriff der CANTORschen transfiniten Ordinalzahl verstanden hat, wird von der naheliegenden Begriffsbildung der „Menge aller Ordinalzahlen“ sich erst *nachträglich* zurückschrecken lassen, bei Wahrnehmung der sich sofort einstellenden Widersprüche; *zunächst* scheint dieser Begriff von unausweichlicher Natürlichkeit. Ein analoges *Ausscheiden unzulässiger Begriffsbildungen* und diesbezüglicher Aussagen ist die eigentliche Aufgabe der *erkenntnistheoretischen Analyse* in der Naturwissenschaft.

Der Einteilung der grammatikalisch möglichen Fragestellungen in sinnvolle Probleme und Scheinprobleme entspricht eine Einteilung der möglichen *Aussagen* in sinnvolle und sinnlose Aussagen. *Nur sinnvolle Aussagen* sind *richtig oder falsch*; umgekehrt ist eine Aussage nur dann sinnvoll, wenn sie entweder richtig oder aber falsch ist, und wenn es als ein (nicht notwendigerweise sofort, aber jedenfalls grundsätzlich) *lösbares* Problem anzusehen ist, diese Alternative zu entscheiden.

Sinnvoll sind solche Aussagen, die sich unmittelbar auf unsere Sinneserlebnisse beziehen, wobei natürlich die Aussagen nicht nur die positive

Feststellung eines vorliegenden Sinneserlebnisses enthalten, sondern ebensogut beispielsweise eine *Erwartung* bezüglich künftiger Sinneserlebnisse ausdrücken können. Es ist die grundlegende These des Positivismus, daß mit *diesen* Aussagen überhaupt die *unmittelbar* sinnvollen Aussagen erschöpft sind: Jede sonstige Aussage kann nur dadurch sinnvoll sein, daß sie auf Grund von Definitionen und terminologischen Festsetzungen mit derartigen, unmittelbare Sinneserlebnisse betreffenden Aussagen *äquivalent* ist. Die wissenschaftlichen Begriffsbildungen und Theorien stellen also nicht etwa einen über die sinnliche Erfahrung *hinausgehenden* Erkenntnisvorstoß auf das „Wesen“ der Naturerscheinungen dar, sondern lediglich eine zur Registrierung und Ordnung unserer sinnlichen Erfahrungen nützliche, *von uns hinzugedachte Hilfskonstruktion*, analog etwa den geographischen Längen- und Breitengraden. Blaues Licht ist nicht „*in Wirklichkeit eine Wellenbewegung*“, sondern *wir denken* uns zu der sinnlichen Empfindung „blau“ die Wellenvorstellung *hinzu*, um uns klar zu werden über die mannigfaltigen sinnlichen Erlebnisse, welche wir zu erwarten haben, wenn wir dieses Licht auf gewisse physikalische Apparate einwirken lassen — Erlebnisse, welche wir an Hand dieser Hilfsvorstellung in allen ihren unendlich mannigfaltigen möglichen Variationen aufs Genaueste vorhersehen können.

Die Tatsache, daß die wissenschaftlichen Aussagen sich fast durchweg *nicht* unmittelbar auf sinnliche Erlebnisse beziehen, bietet also durchaus keine Schwierigkeit für die positivistische Auffassung dar: Der *Sinn* dieser Aussagen liegt darin, daß sie in ganz bestimmter Weise *mittelbar* Aussagen über sinnliche Erlebnisse machen. Es ist auch nicht unnatürlich, daß gerade durch solche mittelbare Aussagen, oder genauer: durch ein sehr verwickelt aufgebautes System ineinandergeschachtelter mittelbarer Aussagen die beste und einfachste, obwohl sehr indirekte Übersicht über die Gesamtheit der zu beschreibenden Erlebnisse und ihrer Wechselbeziehungen zu gewinnen ist. Denn ganz analog liegen die Verhältnisse auch in der reinen Mathematik. Man könnte den Satz von der Transzendenz der Zahl π , oder die RIEMANNSCHE Vermutung über die Zetafunktion, auch als Lehrsätze aus der Arithmetik der *ganzen rationalen Zahlen* formulieren, da jeder in diesen Sätzen vorkommende Begriff, insbesondere der Begriff der irrationalen Zahlen, von den ganzen Zahlen aus konstruiert und definiert werden kann. *Praktisch* ist es aber nur durch die Zwischenschaltung dieser Begriffe möglich, die fraglichen Sätze in eine für Menschen übersehbare und faßbare Kürze zu bringen.

Entsprechend arbeitet die Physik dauernd mit Aussagen, die sich *nicht* unmittelbar auf sinnliche Erlebnisse beziehen, die aber ihre *Bedeutung* daraus empfangen, daß sie indirekt eine Fülle von Aussagen über sinnliche Erlebnisse in sich zusammenfassen. Natürlich ist in diesem vielverzweigten Aufbau von Definitionen und terminologischen Verabredungen eine *einzelne* der „*symbolischen Aussagen*“, wie wir sie kurz nennen wollen, keineswegs bestimmten einzelnen, unmittelbar

sinnvollen Aussagen äquivalent; aber das *Gesamtsystem* der symbolischen Aussagen ist einer großen Menge von „*primären Aussagen*“ äquivalent, und sein Sinn und Inhalt *erschöpft sich* mit dieser Äquivalenz.

Diese ganze Auffassungsweise steht wiederum in engster Analogie zur HILBERTSchen Auffassung der Grundlegung der Mathematik, und man könnte dasjenige, was wir hier mit dem Worte „*Positivismus*“ bezeichnen, geradezu als eine auf den Gesamtbereich der naturwissenschaftlichen Forschung bezogene Erweiterung dessen charakterisieren, was HILBERT seinen „*finiten Standpunkt*“ nennt. HILBERT nämlich sieht nur ein *ganz enges* Feld mathematischer Aussagen als *unmittelbar sinnvolle* Aussagen an; es sind Aussagen betreffs der „*Spielregeln*“ in einem System von (endlich vielen!) mathematisch-logischen *Zeichen*. Daß in diesem Sinne die konkreten, aus den mathematisch-logischen Zeichen gebildeten Zusammensetzungen als der einzige Gegenstand *primärer* Aussagen gelten, entspricht unserer Klarstellung, daß nur die konkreten Sinneserlebnisse Gegenstand *primärer* Aussagen sind.

Als ein wunderbares Beispiel der Analyse eines physikalischen Begriffes durch seine Zurückführung auf unmittelbare sinnliche Erlebnisse wird stets die EINSTEINSche Analyse des Gleichzeitigkeitsbegriffes anerkannt werden: Die Behauptung der Gleichzeitigkeit zweier *räumlich weit voneinander entfernt* Ereignisse ist *nicht* unmittelbar sinnvoll als Beschreibung eines sinnlichen Erlebnisses, sondern kann nur als symbolische Aussage Sinn besitzen; die Reduktion auf sinnliche Erlebnisse führt zur Relativierung der Gleichzeitigkeit.

Eine solche Analyse kann grundsätzlich an jedem Begriff und jeder Aussage vorgenommen werden, ohne daß eine bestimmte Grenze angebbar wäre in Gestalt von „*endgültig primären*“ Aussagen. Ich werde die Aussage: „*Dort steht ein Stuhl*“ in praktisch vorkommenden Fällen als unmittelbar sinnvoll ansehen. Theoretisch aber kann ich diese Aussage noch analysieren, indem ich die verschiedenen Sinnesempfindungen, die mir der Stuhl verursacht, genauer beschreibe, und ferner die Beschreibung der verschiedensten sinnlichen Erlebnisse hinzufüge, die ich *zu erwarten habe, wenn* ich bestimmte Unternehmungen ausführe, wie Berühren des Stuhles, Beklopfen usw. — auch diese Erwartungen sind von mir zusammenfassend mit ausgedrückt in der Feststellung: „*Dort steht ein Stuhl.*“

Dieser Punkt ist zu betonen, da hier sowohl Mißverständnisse als auch Ablehnungen der positivistischen Auffassungsweise eingesetzt haben, deren Zustandekommen erleichtert wurde durch die nicht ganz treffende Darstellung, welche E. MACH von dieser Sachlage gegeben hat. Unsere sinnlichen Erlebnisse bilden keineswegs ein Mosaikbild von einzelnen, keiner weiteren Analyse mehr fähigen Empfindungselementen, sondern wir erleben die Dinge und Erscheinungen unserer Umwelt als „*Ganzheiten*“, die erst durch eine nachträgliche Analyse in „*einfache*“ Bestandteile zerlegt werden, wobei es keinerlei Grenze der Analyse gibt.

Wir können also nicht ein „System“ positivistischer Begriffsbildungen aufzubauen versuchen, indem wir bestimmte, einfachste Empfindungselemente oder Erlebniselemente als Grundlage wählen. Sondern das wissenschaftliche Denken setzt die *Ganzheit der vorwissenschaftlichen Erfahrungen und Begriffsbildungen* voraus, und ergänzt, verschärft und korrigiert das vorwissenschaftliche Weltbild, indem es gleichzeitig einerseits zu neuen, komplexen Begriffsbildungen vorwärtsschreitet, andererseits rückwärtsschreitend die grundlegenden Begriffe immer eingehender analysiert. Die nähere Betrachtung dieser Zusammenhänge führt auf die bedeutungsvolle Frage nach der Abhängigkeit oder Unabhängigkeit des wissenschaftlichen Weltbildes vom vorwissenschaftlichen: Bekanntlich ist in neuerer Zeit von einigen Verfassern eine weitgehende derartige Abhängigkeit behauptet worden¹.

Endlich sei hervorgehoben, daß betreffs der Sinnerteilung an symbolische Aussagen durch Zurückführung auf mögliche sinnliche Erlebnisse auch gelegentlich erhebliche *Extrapolationen* vertretbar sein werden, in deren Abgrenzung sich der gesunde wissenschaftliche Instinkt bewähren muß. So wird es niemand für *grundsätzlich* sinnlos erklären, hypothetische Aussagen etwa betreffs der *Rückseite des Mondes* zu machen. Es ist ja die Möglichkeit nicht von der Hand zu weisen, daß uns eines Tages wirklich ein Raumschiff die Rückseite des Mondes zugänglich macht. Dagegen wird der positivistische Skeptiker vielleicht Hemmungen empfinden, einem Fixstern des Andromedanebels denselben Realitätsgrad zuzuschreiben, wie unserer eigenen Sonne.

§ 2. Kausalität, Statistik und Finalität.

1. **Kausalität.** Indem wir die unmittelbaren Sinneswahrnehmungen und Beobachtungen zum einzigen Gegenstand primär sinnvoller Urteile erklären, sind alle Versuche, ein über ein *Beschreiben der beobachteten Tatsachen* hinausgehendes „*Verstehen*“ der Naturerscheinungen zu erreichen, den auf *Scheinprobleme* gerichteten Bestrebungen eingeordnet worden. Wie KIRCHHOFF die Mechanik als die *Beschreibung* von Bewegungsvorgängen definierte, so haben wir ganz allgemein die Aufgabe aller Naturwissenschaft in der Feststellung, Ordnung und Beschreibung von Beobachtungstatsachen zu sehen. Freilich kann diese Beschreibung nur dann das Mißverhältnis zwischen der begrenzten Aufnahmefähigkeit des menschlichen Gehirns und der ungeheuren Fülle beobachteter Tatsachen verringern, wenn ausgiebigst und planmäßig Gebrauch gemacht wird vom *Prinzip der symbolischen Beschreibung*, welches in seiner folgerichtigen Durchführung zum Aufbau des wissenschaftlichen physikalischen Begriffssystems führt. Wir unterstreichen aber noch einmal,

¹ Vgl. E. SCHRÖDINGER: Ist die Naturwissenschaft milieubedingt? (Leipzig 1932); die darin erörterte Auffassung nähert sich der bekannten These O. SPENGLERS.

daß die so konstruierte „physikalische Welt“ nichts anderes bedeutet, als ein Gedankensystem, das uns die Übersicht über die Fülle der beobachteten Tatsachen erleichtern und damit auch die nach Analogiegründen verfahrenende Voraussage neuer beobachtbarer Tatsachen fördern soll. Darin ist enthalten, daß die Grundsätze, nach denen wir bei der Entwicklung unseres theoretischen Gedankensystems verfahren, keine andere sein können als diese: Möglichste *Einfachheit* des Gedankenbildes, *möglichst enger* und unmittelbarer *Anschluß* an die zu beschreibenden Tatsachen, möglichst *vollständige* Erfassung der Beobachtungsergebnisse, und möglichste *mnemotechnische Einprägsamkeit* der entwickelten Begriffsbildungen.

Aber trotz KIRCHHOFF und trotz MAXWELL leben gewisse mit historisch alten Scheinproblemen verknüpfte unklare und liquidierungsreife Vorstellungen ein zähes Leben fort. Meinungen in der Richtung, daß die Aufgabe der Naturforschung darin bestehe, ein „hinter“ der „Oberfläche“ der sichtbaren Erscheinungen liegendes wahres „Wesen“ der Natur zu erkennen — daß also die Registrierung der beobachtbaren Tatsachen eigentlich nur eine *Vorstufe* des wirklichen Erkenntnisvorgangs sei — solche Meinungen verdunkeln bis auf den heutigen Tag zentrale naturwissenschaftliche Probleme, wie insbesondere das *Kausalitätsproblem*. Obwohl nach KIRCHHOFF und MAXWELLScher Theorie keine Lebensmöglichkeit mehr besteht für den Aberglauben, daß die Zurückführung der Naturerscheinungen auf die Mechanik der Ätheratome ein über eine Tatsachenbeschreibung hinausgehendes „Verstehen“ bedeute, so lebt doch die alte Denkweise, welche in der Kausalität letzten Endes eine *verstehbare „Notwendigkeit“* zu erkennen hoffte, in anderen Formen fort. Innerhalb der *Physik* nämlich in Gestalt der Neigung, jedenfalls eine *lückenlose Gültigkeit* der klassisch-makroskopischen Kausalität als etwas unabhängig von der Erfahrung Gesichertes anzusehen. In der *Biologie* andererseits als eine Neigung, jede Abweichung vom gewohnten Schema der Kausalitätsvorstellung, vor allem im Sinne teleologischer, finalistischer Betrachtungsweisen, als wissenschaftlich unbrauchbar abzuweisen. Eine nähere Betrachtung dieser Verhältnisse wird also zugleich der Verdeutlichung unserer methodisch-erkenntnistheoretischen Auffassungsweise und der Klärung der uns angehenden physikalischen und biologischen Probleme dienen.

Man verdankt bekanntlich HUME eine Erklärung des Begriffs der „Ursache“, die etwa folgendermaßen lautet: Wenn auf einen Vorgang *A* stets und unvermeidlicherweise ein Vorgang *B* folgt, und *B* nur nach vorangegangenem *A* auftritt (während jedoch *A* ohne Vorhergang von *B* auftreten kann), so ist *A* als „Ursache“ von *B* (und *B* als „Wirkung“ von *A*) zu bezeichnen. Primitives Beispiel: Der Blitz ist die Ursache des Donners.

Diese Erklärung ist auf sehr vielseitigen und entschiedenen Widerspruch gestoßen. Denn sie ist ja nichts anderes, als ein *Verzicht* auf ein

„Verstehen“ des Ursachwirkungszusammenhangs: Philosophien, welche behaupten, daß sie die Naturgesetze „erklären“ könnten (was unter anderem ja auch der atomistische Materialismus behauptete), wollten im Begriff der Ursächlichkeit unbedingt etwas von „Zwang“, von „Notwendigkeit“ in einer logisch verstehbaren oder irgendwie unmittelbar einleuchtenden Form sehen. Aber es war gerade das die große Leistung HUME: erkannt zu haben, daß die ganze Begriffsmystik, welche man um den Begriff der Ursächlichkeit gesammelt hatte, *beseitigt* werden mußte, um diesen Begriff zu einem Begriff der exakten Wissenschaft zu machen. Die Aufeinanderfolge von Ursache und Wirkung in den Naturvorgängen steht nicht in Parallele zur logischen Aufeinanderfolge von Voraussetzung und Folgerung. Sie kann nur *empirisch festgestellt* werden; und sie bietet, sobald die Feststellung einmal geschehen ist (und sofern diese nicht etwa überholt oder eingeschränkt wird) dem Denken keinerlei Problem des „Verstehens“ mehr dar. Das logische Denken kann sich hernach nur noch damit beschäftigen, das festgestellte Ursachverhältnis von A und B zu *vergleichen* mit anderen Ursachverhältnissen (*anderer* Vorgänge A' , B'), und die Feststellungen mehrerer aufgefundener Ursachbeziehungen einer umfassenderen Gesamtaussage logisch zu subsumieren. An einem Begriff von entscheidender Wichtigkeit hat HUME damit die *Zurückführung auf Beobachtbares* vollzogen, die wir als die eigentliche Aufgabe der erkenntnistheoretischen Analyse anzusehen haben.

Die Frage nach der Kausalität oder dem *Determinismus* in der physikalischen Welt wird im Anschluß an HUME klar formulierbar. Wir denken uns ein abgeschlossenes physikalisches System in einem abgegrenzten Raumteil. Wir sagen, daß alle Vorgänge in ihm „kausal“ verlaufen, wenn behauptet werden kann: Durch den beobachtbaren Zustand des Systems zu einer Zeit t ist der beobachtbare Zustand zu einer späteren Zeit t' eindeutig bestimmt.

Es ist dabei natürlich noch nötig zu definieren, was ein „abgeschlossenes System“ sei; eine Aufgabe, die, wenn man zeitlose *Fernwirkungen* als möglich ansieht, nur eine etwas komplizierte Lösung (unter Benutzung von allerlei mathematischen Grenzübergängen und Konvergenzvoraussetzungen) hat. Sehen wir von diesem Punkte, auf den wir noch zurückkommen, zunächst ab, so ist jedenfalls klar, daß die Behauptung, in der Physik bestehe Kausalität, nach der gegebenen Formulierung *entweder richtig oder falsch* ist; und daß diese Frage zur *empirischen Entscheidung* steht. Obwohl die KANTSche Erklärung, daß Kausalität notwendige *Voraussetzung* für die *Möglichkeit der physikalischen Wissenschaft* sei, eine sehr scharfsinnige und wichtige Bemerkung enthält (auf die wir übrigens noch zurückkommen werden), so ist es doch eine völlig ungerechtfertigte Übertreibung, aus der Existenz einer wissenschaftlichen Physik auf das Vorhandensein exakter, deterministischer Kausalität zu schließen. Im Gegenteil ist die Existenz von Physikern, welche aus

ihren Forschungsergebnissen ein indeterministisches Verhalten physikalischer Systeme erschlossen haben, eine empirische Tatsache.

Die obenerwähnte Komplikation in der Formulierung des Kausalitätsprinzips durch Benutzung abgeschlossener Systeme ist überflüssig geworden durch die Relativitätstheorie, welche nicht nur ausschließliche *Nahewirkungsgesetze*, sondern auch eine endliche Grenze c der Ausbreitungsgeschwindigkeiten aller physikalischen Wirkungen fordert. Man kann danach die Behauptung des Determinismus so formulieren, daß der beobachtbare Zustand in einem Raumzeitpunkt r', t' eindeutig bestimmt ist durch die beobachtbaren Zustände in allen Raumzeitpunkten r, t , welche zu einer bestimmten früheren Zeit t und einer Entfernung $|r-r'|$ von r' gehören, die kleiner als $c(t'-t)$ ist. (Weltgeometrisch ausgedrückt: die im Innern der Schnittkugel des von r', t' aus rückwärts gezogenen *Lichtkegels* mit dem fraglichen Raume $t = \text{const}$ liegen.)

Aber die Quantentheorie behauptet, daß diese — in der makroskopischen Physik *wirklich vorhandene* — eindeutige Determinierung des physikalischen Geschehens in der Quantenphysik *nicht* mehr besteht, und daß statt dessen im atomaren Geschehen nur *statistische* Gesetze gelten. In der makroskopischen Welt ist durch das *Würfelspiel* das einfachste und anschaulichste Beispiel einer statistischen Gesetzmäßigkeit gegeben: Während nach dem Schütteln des Würfelbechers das Ergebnis eines bestimmten Einzelwurfes nicht vorauszusehen ist, kann man für eine lange Serie von Würfeln mit einer mit wachsender Länge der Serie schnell zunehmenden Sicherheit eine Fülle von Voraussagen statistischer Art machen¹. Aber unser physikalisches Wissen läßt uns keinen Augenblick bezweifeln, daß die Unmöglichkeit, das Ergebnis eines einzelnen Wurfes vorauszusagen, keine unbedingte ist, und daß *grundsätzlich*, bei ganz genauer messender Beobachtung der Schüttelbewegung und Ausschüttbewegung des Bechers (sowie der anfänglichen Lage der Würfel im Becher) durch eine — freilich ungeheuer komplizierte und umfangreiche — exakte mathematische Rechnung das notwendige Resultat dieses Einzelfalles theoretisch errechnet werden könnte.

Die Quantenmechanik behauptet nun, daß in der Atomphysik der merkwürdige Fall eintritt, daß ein Ersatz eindeutiger kausaler Determinierung durch lediglich statistische Gesetzmäßigkeiten *nicht* — wie beim Würfelspiel — durch Unvollständigkeit des menschlichen Wissens bedingt ist. Vielmehr handelt es sich hier darum, daß der Ausfall gewisser Entscheidungen *in der Natur selbst* nicht vorausbestimmt ist: auch ein Geist, der — wie der „LAPLACESche Geist“ — alles das tatsächlich

¹ POPPER hat in einem lesenswerten Buche (Logik der Forschung, Wien 1935) unter Berufung auf MISES die Behauptung ausgesprochen, daß es logisch nicht möglich sei, aus einer deterministischen Theorie Wahrscheinlichkeitsgesetze als Folgerung abzuleiten. Ich halte diese Ansicht für positiv falsch, nachdem in letzter Zeit die Mathematiker eine ziemlich befriedigende Lösung des mathematischen Ergodenproblems erreicht haben.

wüßte, was heute oder in beliebiger Zukunft Menschen wenigstens prinzipiell, theoretisch, wissen könnten (ein Geist also, der auch jede noch so komplizierte mathematische Rechnung im Nu ausführen könnte), auch ein solcher Geist könnte *nicht* aus anderweitigen schon vorher zu gewinnenden Beobachtungstatsachen *errechnen*, wie die fragliche Entscheidung ausfallen wird.

Wir haben die allgemeine, umfassendste Formulierung der quantenmechanischen Gesetze in Gestalt der statistischen Transformationstheorie kennengelernt. Die Tatsache, daß in dieser nur Wahrscheinlichkeitsaussagen gemacht werden, schließt zunächst noch nicht die Möglichkeit aus, daß vielleicht eine *Vervollständigung* dieser Theorie möglich wäre, derart, daß die vollständige Theorie dann doch wieder deterministisch wäre. Dies ist aber *mathematisch unmöglich*: durch eine genauere Analyse hat J. v. NEUMANN gezeigt, daß die heutige Theorie eine solche Vervollständigung *nicht* gestattet. Sie müßte also tatsächlich partiell *unrichtig* sein, wenn sie in derartigem Sinne unvollständig wäre¹.

Aber wir wollen uns jetzt nicht auf unsere allgemeine Theorie stützen, sondern lieber ein paar ganz konkrete Fälle betrachten. Wir denken uns folgende physikalische Versuchsanordnung (deren Durchführung, wenn nicht in genau dieser, so doch ähnlicher Form durchaus im Bereiche des praktischen Könnens der heutigen Atomphysiker liegt): Ein einzelnes Radiumatom ist isoliert worden; es wird nun abgewartet, *wann* dies Atom radioaktiv *zerfällt*. Unser tatsächliches heutiges Wissen ermöglicht *keine* theoretische Voraussage, ob dies Atom schon in der nächsten Minute, oder erst nach Jahrmillionen zerfallen wird. Wir können nur eine *Wahrscheinlichkeitsaussage* machen: Wenn das Atom zu einer Zeit *t* noch nicht zerfallen ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß es dann innerhalb der nächsten Sekunde zerfallen wird, gleich einer Zahl λ , die von *t* *völlig unabhängig* ist. Anders ausgedrückt: ein zur Zeit *t* existierendes Radiumatom hat eine von seiner Vorgeschichte *unabhängige* Wahrscheinlichkeit, in der nächsten Sekunde zu zerfallen. Diese Gesetzmäßigkeit wirkt sich nicht nur darin aus, daß in einem großen *Haufen* von Radiumatomen (etwa einem Milligramm) die Anzahl *N* noch nicht zerfallener Atome mit der Zeit exponentiell abnimmt:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}; \quad (1)$$

sondern es gibt noch eine Fülle anderer nachprüfbarer Aussagen (hinsichtlich der unregelmäßigen, zufälligen *Schwankungen* in der Strahlung eines Radiumpräparates), die ebenfalls als mathematische Konsequenz aus dem obigen statistischen Elementargesetz folgen. Ihre ausnahmslose empirische Bestätigung erhebt dies statistische Elementargesetz zum Range eines der bestgeprüften und bestbestätigten physikalischen Naturgesetze; zudem steht dies Gesetz an Klarheit und *Einfachheit* gewiß nicht zurück etwa hinter dem NEWTONSchen Gravitationsgesetz oder

¹ Die gegen NEUMANNs Beweis erhobenen Einwände sind unzutreffend.

sonst einem der berühmten Gesetze der klassisch-makroskopischen Physik.

Wir befinden uns gegenüber diesem Radiumatom also in einer ganz anderen Lage, als etwa gegenüber den Planetenbewegungen, deren Studium ja in entscheidender Weise die Begriffe und Denkweisen der klassisch-makroskopischen Physik geformt hat. Unsere Kenntnis des NEWTONschen Gravitationsgesetzes erlaubt uns, alle künftigen Konstellationen und Bewegungen der Planeten *eindeutig vorauszuberechnen*, sobald nur einmal für einen einzigen Zeitpunkt die Örter und Geschwindigkeiten der Planeten empirisch festgestellt sind. Aber auf keine Weise, durch keine am Radiumatom durchführbare Beobachtung, sind wir imstande, eine Vorausbestimmung zu gewinnen für den Zeitpunkt des künftigen Zerfalls dieses Atoms. Es scheinen aber zunächst noch zwei Auffassungen möglich: Es könnte — analog wie beim Würfelspiel — die statistische Gesetzmäßigkeit des Radiumzerfalls Ausfluß und mathematische Folge einer streng kausalen Gesetzmäßigkeit sein; so daß *in der Zukunft* die Physiker durch neue Wissenserweiterung doch noch dahin kommen könnten, daß sie es einem Radiumatom irgendwie „anzusehen“ vermögen, wann es zerfallen wird. Zweite Möglichkeit: Es könnte statt dessen das fragliche statistische Gesetz ein *primäres* Naturgesetz sein, das *nicht* eine Folge ihm zugrunde liegender kausaler Gesetze ist. Daß dem so sein muß, wird, wie schon oben ausgesprochen, von der Quantenmechanik behauptet.

Man versteht die *Begründung* dieser Behauptung am besten an Hand eines etwas anderen Beispiels. Wir betrachten einen durch ein NICOLSches Prisma gegangenen, also *linear polarisierten* Lichtstrahl. Wird diesem ein zweites NICOLSches Prisma in den Weg gestellt, dessen Polarisationssebene irgendeinen beliebigen Winkel — nennen wir ihn φ — mit derjenigen des ersten einschließt, so wird ein Bruchteil der Intensität durch das zweite Prisma hindurchgehen, mit einer um den Winkel φ gedrehten Polarisationssebene; der Bruchteil $I_2 = 1 - I_1$ wird dagegen reflektiert, und seine Polarisationssebene steht senkrecht auf derjenigen der anderen Zerlegungskomponente:

$$I_1 = \cos^2 \varphi; \quad I_2 = \sin^2 \varphi. \quad (2)$$

Betrachten wir nun aber ein *einzelnes Lichtquant* aus dem fraglichen Strahl, so ist zu sagen: Für dieses Lichtquant gibt es *zwei verschiedene Möglichkeiten*; es kann *hindurchgehen*, und es kann reflektiert werden — in beiden Fällen nimmt es dann die entsprechende neue Polarisationssebene an. Ob es das eine oder das andere tun wird, können wir nicht vorausbestimmen. Wir kennen *nur das statistische Gesetz*: Die Wahrscheinlichkeit des Hindurchgehens ist $\cos^2 \varphi$; die Wahrscheinlichkeit des Reflektiertwerdens ist $\sin^2 \varphi$.

Wenn man an diesem Beispiel der Hypothese durchführen wollte, daß der statistischen Gesetzmäßigkeit eine kausaldeterministische zugrunde

liege, so müßte man sagen: Das einzelne Lichtquant besitzt eine gewisse verborgene Eigenschaft — die unserer *heutigen* Einsicht verborgen ist, die aber in Zukunft noch der direkten Untersuchung zugänglich gemacht werden wird — von der es abhängt, ob am zweiten NICOLSchen Prisma die Entscheidung im einen oder im anderen Sinne ausfallen wird. Nun ist aber zu bedenken, daß ja für das zweite Prisma *unendlich viele verschiedene Einstellungsmöglichkeiten* (gekennzeichnet durch den Winkel φ) bestehen, zu denen jedesmal andere Werte der Wahrscheinlichkeiten gehören: wir müßten also dem Lichtquant, um die Hypothese einer Vorausbestimmtheit aller derartigen Entscheidungen durchzuführen, *unendlich viele* verborgene Eigenschaften zuschreiben. Die Sache wird noch toller, wenn man an die Möglichkeit denkt, das Lichtquant der Reihe nach eine ganze Anzahl von NICOLSchen Prismen passieren zu lassen, wobei in jeder einzelnen Passage die Wahrscheinlichkeiten für Durchgang oder Reflexion abhängen davon, wie am vorangehenden Prisma die Entscheidung ausgefallen ist. Das nähere Durchdenken dieser Situation führt zu dem merkwürdigen, aber ganz eindeutigen Ergebnis: Es ist *mathematisch unmöglich*, die Hypothese einer zugrunde liegenden kausalen Gesetzmäßigkeit zu *vereinbaren* mit unserem tatsächlichen, gesicherten Wissen betreffs der hier vorliegenden statistischen Gesetzmäßigkeiten.

Nach diesem anschaulichen Beispiel wird man verstehen, daß J. v. NEUMANN, wie oben erwähnt, ganz allein und umfassend den *mathematischen Satz* beweisen konnte: *Es ist unmöglich, die statistischen Gesetzmäßigkeiten der Quantentheorie (statistische Transformationstheorie) auf ein kausal funktionierendes Modell zurückzuführen.*

Bei den statistischen Gesetzen des Würfelspiels liegt es ja so, daß sie in ganz klarer Weise *mathematische Folgeergebnisse* von exakt kausalen Gesetzen sind: mit Hilfe der mathematischen Beweismethoden der klassischen „statistischen Mechanik“ kann man diese Würfelstatistik *herleiten* aus den kausalen mechanischen Gesetzen, denen die einzelnen Würfelbewegungen unterliegen. Und wenn die empirische Forschung irgendwo statistische Gesetze ermittelt, die zu demselben *mathematischen Typus* von Wahrscheinlichkeitsgesetzen gehören, wie die Würfelstatistik, dann wird schwerlich jemand daran zweifeln, daß der soeben empirisch ermittelten Gesetzmäßigkeit eine in der Zukunft noch zu ermittelnde kausale Gesetzmäßigkeit zugrunde liegt. Aber die Atomphysik hat uns mit einem ganz anderen mathematischen Typus statistischer Gesetzmäßigkeiten bekanntgemacht; für diese ist die Zurückführung auf kausale Gesetze ausgeschlossen.

Zum Schluß dieser Betrachtung sei hervorgehoben, daß ein inniger Zusammenhang besteht zwischen der Notwendigkeit, *statistische Begriffe* in der Atomphysik einzuführen, und der Tatsache der quantenphysikalischen *Unstetigkeiten*. Unstetigkeiten, die das alte „*natura non facit saltus*“ widerlegen, können als das elementarste Charakteristikum der

Quantenphysik im Gegensatz zur klassischen Makrophysik betrachtet werden; historisch sind sie ja dasjenige Phänomen gewesen, mit dessen Entdeckung PLANCK 1899/1900 die Quantenforschung eröffnete. Auch die Grundtatsache des atomistischen Aufbaus der Materie kann ja (im Sinne der „zweiten Quantelung“, Kapitel 4, § 4) als spezieller Ausfluß dieser allgemeineren Unstetigkeitsgesetze der Quantenphysik betrachtet werden.

Für den linear polarisierten Lichtstrahl der klassischen Wellenoptik gibt es unendlich viele Abstufungen seines Reagierens dem Nicol gegenüber: je nach dem Winkel zwischen der Polarisationssebene des ursprünglichen Lichtstrahls und der des Nichols kann das Intensitätsverhältnis zwischen durchgelassenen und reflektiertem Strahl *jeden* Zahlwert von Null bis unendlich annehmen. Aber für das Lichtquant der heutigen Physik gibt es *nur zwei* ganz verschiedene Reaktionsweisen und *keinerlei Zwischenstufen*: Durchgang oder Reflexion. Da wir aber den Nicol, auch wenn wir nur ein einzelnes Lichtquant mit ihm reagieren lassen, immer noch *stetig* um die Strahlrichtung drehen können, so muß es auch im Verhalten der reagierenden Lichtquanten etwas geben, was stetiger Änderung fähig ist, *obwohl* es für jedes Lichtquant nur eine unstetige Entscheidung „entweder — oder“ gibt: Es sind die *Wahrscheinlichkeiten* $\cos^2 \varphi$ und $\sin^2 \varphi$, die sich mit dem Winkel stetig ändern, und somit für einen aus *vielen* Lichtquanten bestehenden Strahl das klassische, stetig von φ abhängende Intensitätsverhältnis zustande kommen lassen. Wenn wir ferner z. B. ein im Grundzustand befindliches Atom einer *stetig variablen* Strahlungsintensität aussetzen, so kann das Atom immer nur *entweder* ein Lichtquant absorbieren *oder* aber *nicht* absorbieren. Für diese unstetige Entscheidung gibt es eine mit der Lichtintensität *stetig* variierende *Wahrscheinlichkeit*. Nur in dieser Form, also in der Form *statistischer* Gesetze, sind stetig variable „Ursachen“ vereinbar mit unstetig sich äußernden Wirkungen: die statistische Akausalität ist eine notwendige und unmittelbare Konsequenz der quantenphysikalischen Unstetigkeiten.

z. Finalität. Wir betonen die doppelte Notwendigkeit, in unserer Theorienbildung einen möglichst *engen Anschluß* an die *zu beschreibenden Tatsachen* zu wahren, und ferner der Beschreibung und den beschreibenden Begriffen eine für die Anschauung und das Gedächtnis *einprägsame Form* zu geben. Diese Notwendigkeiten müssen bei folgerichtiger Durchführung unserer erkenntnistheoretischen Methode als die entscheidenden vorangestellt werden, wenn wir jetzt dem Verhältnis von Kausalität und *Finalität* in der Biologie einige kurze Bemerkungen widmen. Der heftige Streit, der sich seit Jahrzehnten um die teleologischen, vitalistischen und sonstigen ähnlichen Begriffsbildungen der Biologie entwickelt hat, ist von unserer radikalen erkenntnistheoretischen Einstellung aus zum großen Teile als ein Streit um Scheinprobleme zu betrachten; in besonders hohem Maße muß aber die *doktrinäre*

mechanistische Auffassung des Lebensproblems als im Widerspruch mit der positivistischen Erkenntnistheorie, und als unvereinbar mit den Ergebnissen der modernen Physik bezeichnet werden.

Ein Versuch, die Probleme ausdrücklich vom Standpunkt MACHScher Lehren aus zu beurteilen, ist von H. WINTERSTEIN unternommen worden in seiner Schrift „Kausalität und Vitalismus vom Standpunkte der Denkökonomie“¹; das in diesem Titel ausgesprochene Programm hat aber in der Durchführung — trotz mancher treffender Bemerkungen — schließlich doch nur neue Rechtfertigungen der traditionellen mechanistischen Gedankengänge ergeben, ohne daß der Verfasser zu einer wirklich unbefangenen Betrachtung der Problemlage gelangt ist.

Wer irgendeinen biologischen Tatsachenkomplex seinem Gedächtnis einprägen will, der wird *immer* die auffällige *Zweckmäßigkeit* der organischen Strukturen und Prozesse *als mnemotechnisch wesentlichen Gesichtspunkt bewerten*. Ein Marsbewohner, der nie einen lebenden Menschen gesehen hat, könnte vielleicht die Formen eines ihm gezeigten menschlichen Skeletts seinem Gedächtnis einprägen, *ohne* sich eine Vorstellung von Aufgabe und Zweckbestimmung des Skeletts im lebenden Körper zu bilden. Aber ein normaler Mensch lernt die Anatomie *niemals* so, wie man etwa zufällige geographische Formen oder auch die Anordnung der hellsten Fixsterne auswendig lernt. Sondern man prägt sich anatomische Tatsachen dem Gedächtnis *stets* in solcher Weise ein, daß man sich klarmacht, wie jede Einzelheit sozusagen die Lösung eines mathematischen Variationsproblems enthält: nämlich in *optimaler* Weise einer bestimmten *Aufgabe* im Ganzen der Lebensprozesse angemessen ist. Obwohl wir weit davon entfernt sind, dieser Regel der optimalen Anpassung eine mathematische exakte Formulierung zu geben (es gibt aber Fälle, wie die Spongiosa, in welchen bereits eine Annäherung an mathematisch faßbare Verhältnisse vorliegt), so bewährt sich diese Regel doch in so großer Vollständigkeit, daß Ausnahmen, wie etwa die Beckenknochen der Wale, einen sehr *auffälligen* Charakter besitzen.

Dies alles ist ganz trivial; aber es kommt vor, daß man bestimmte Tatsachen *gerade deshalb* nicht in ihrer vollen Bedeutung sieht, weil sie so bekannt und geläufig sind, daß man kein Bedürfnis empfindet, sie ausdrücklich hervorzuheben. Für unsere methodisch-erkenntnistheoretische Einstellung ist es aber eine Tatsache von größtem Gewicht, daß — grob gesprochen — *niemand* die Formen eines Knochengerüsts auswendig lernt, ohne seinem Gedächtnis zu Hilfe zu kommen durch die Bewußtmachung, daß die Gelenke *zum Bewegen da sind*. Daß für jede gedächtnismäßig einprägsame Beschreibung organischer Strukturen und Prozesse eine Herausarbeitung der unverkennbaren Zweckbestimmungen *unentbehrlich* ist, das bedeutet, daß die *finale Betrachtungsweise ein unentbehrliches Element biologischer Begriffsbildung* ist. Die

¹ 2. Aufl. Berlin 1928.

traditionellen Einwände, daß eine finale Betrachtung „*keinen Erklärungswert besitze*“, müssen von unserem Standpunkt aus zurückgewiesen werden, weil es für uns *überhaupt keine Betrachtung mit „Erklärungswert“ gibt*. Worauf es ankommt, das ist ausschließlich die Eignung der angewandten Begriffe zu einer übersichtlichen und einprägsamen *Beschreibung* der Beobachtungsergebnisse.

Es ergibt sich also die *Aufgabe*, den uns zunächst nur in unklarer, unfertiger Gestalt faßbaren Begriff der *organischen Zweckmäßigkeit* fortschreitend weiter zu entwickeln zu einem *präzisierten* Begriffe oder Begriffssystem, in einer Weise, die den fortschreitend genauer analysierten biologischen Tatsachen angemessen ist. Diese notwendige Entwicklung ist durch die ihr entgegenstehenden Vorurteile sehr gehemmt und verzögert worden; daß trotzdem bereits beachtliche Fortschritte erzielt sind, erkennt man rückschauend sehr eindrucksvoll an folgenden Bemerkungen F. A. LANGE¹: „Es ist nun aber gar nicht mehr zu bezweifeln, daß die Natur in einer Weise fortschreitet, welche mit menschlicher Zweckmäßigkeit keine Ähnlichkeit hat Wenn ein Mensch, um einen Hasen zu schießen, Millionen Gewehrläufe . . . nach allen beliebigen Richtungen abfeuert; wenn er, um in ein verschlossenes Zimmer zu kommen, sich zehntausend beliebige Schlüssel kauft und alle versucht . . . , so würde wohl niemand dergleichen zweckmäßig nennen, und viel weniger würde man irgendeine höhere Weisheit . . . hinter diesem Verfahren vermuten.“

Diese Kritik trifft eine Form der finalen Betrachtungsweise, welche in der Tat abgelehnt werden muß, welche aber auch von niemand heute vertreten wird. Es handelt sich um jene „Fürsorge-Teleologie“, welche *die Natur als Ganzes* nach einem weisen Plane eingerichtet glaubt. Die notwendige Ablehnung dieses Gedankens folgt allerdings unserer Überzeugung nach nicht etwa daraus, daß die Naturwissenschaft verpflichtet wäre, populär-theologischen Lehren unbedingt zu widersprechen; sondern daraus, daß unser heutiges Wissen keine Erfahrungstatsachen kennt, für deren Beschreibung dieser Gesichtspunkt eine wirksame Hilfe böte. Beispielsweise wird durch die Annahme einer Vorausberücksichtigung menschlicher Bedürfnisse bei der Entstehung der Steinkohle in keiner Weise die Übersicht über die Verteilung der Lagerstätten erleichtert oder die Auffindung noch unentdeckter Kohlenlager gefördert.

Aber wir sind heute längst daran gewöhnt, daß der Begriff der Zweckmäßigkeit nicht auf die Natur als Ganzes, sondern auf die *individuellen Organismen und ihre generative Folgekette* anzuwenden ist. In der Präzisierung dieser Anwendung sind wichtige Fortschritte gemacht. Erinnerung sei an: 1. die Untersuchung über *Regulationen*, welche verdeutlicht haben, daß die Finalität der Organismen in gewissem Umfang als eine besonders hochgradige *Stabilität* gekennzeichnet werden kann; 2. die viel zu wenig

¹ LANGE, F. A.: Geschichte des Materialismus, Bd. 2.

gewürdigten Betrachtungen A. PAULYs¹ über den Begriff des *organischen Mittels*; 3. die Erörterungen des „ganzheitlichen“ Charakters der *Organismen* („organismische Auffassung“; v. BERTALANFFY) in seinem Zusammenhang mit dem Finalitätsproblem, 4. die SEMON-BLEULERSche Theorie der *Mneme*² und 5. die ebenfalls auf eine Anwendung einer primitivierten Psychologie hinauslaufenden weiteren Untersuchungen A. PAULYs. Auch diese letzteren möchte ich zu den mindestens in heuristischem Sinne beachtenswerten Gedankengängen rechnen, obwohl ich PAULYs „Begriff des Mittels“ für ungleich bedeutungsvoller halte.

Die grundsätzliche Frage nach der methodischen Erlaubtheit oder Nichterlaubtheit einer Anwendung vereinfachter psychologischer Analogien auf die organischen Gesetzmäßigkeiten kann von unserem positivistischen Standpunkt aus nur in klar bejahendem Sinne beantwortet werden. Die psychologischen Begriffe von Bedürfnis und zweckmäßiger Bedürfnisbefriedigung geben uns ein *allgemeines Reaktionsschema*, das zwar erheblich vager und unbestimmter als etwa das Reaktionsschema mechanischer Modelle ist, das aber doch zu recht präzisen Anwendungen geeignet ist. *Wenn die Analyse der Erfahrungstatsachen zeigt*, daß dieses primitivierte psychologische Reaktionsschema für die zusammenfassende Beschreibung bequem und somit nützlich ist, so sind diesbezügliche Bedenken unbegründet. „Anthropomorphismus“ ist ein Begriff, für den eine sinnvolle Interpretation zu geben auf dem Boden positivistischer Erkenntnistheorie unmöglich sein dürfte.

Für die logische Klärung der *methodischen Prinzipien* finaler Betrachtungen ist wichtig, sich klar zu machen, daß die Frage der Richtigkeit oder Unrichtigkeit des *Selektionsprinzips* durchaus zu *trennen* ist von allen im Obigen berührten Fragen. Die Notwendigkeit, den *tatsächlich* in unserer Auffassung biologischer Phänomene *dauernd* benutzten Begriff der Zweckmäßigkeit einem gründlichen gedanklichen Klärungsprozeß zu unterziehen, und die uns empirisch in erdrückender Fülle entgegentretenden Beispiele organischer Zweckmäßigkeit eindringlich zu analysieren, sowie die Resultate umfassender diesbezüglicher Vergleiche in Form organischer Naturgesetze auszudrücken — diese Notwendigkeit besteht *unabhängig davon*, ob für das historische Zustandekommen der Organismenwelt die Selektion der maßgebende Faktor war oder nicht. Es fällt ja keinem Selektionisten ein, die *vergleichende Anatomie* für überflüssig zu halten, weil nur durch Selektion das Zustandekommen der Arten zu „erklären“ sei; es ist aber durchaus nicht weniger verfehlt, es unter Hinweis auf das Selektionsprinzip für überflüssig zu erklären, eine umfassende vergleichende Analyse der beobachteten organischen Zweckmäßigkeiten durchzuführen. Wir können die so formulierte Forderung offenbar auch als das Programm einer *phänomenologischen*

¹ PAULY, A.: Darwinismus und Lamarckismus. München 1905.

² Vgl. die glänzende Darstellung von E. BLEULER: Naturwiss. 21, 100 (1933).

Teleologie charakterisieren: die Frage nach dem *Zustandekommen* der Zweckmäßigkeiten kann dabei ebenso zurückgestellt werden, wie man in der *phänomenologischen Thermodynamik* die Möglichkeit einer Zurückführung der behandelten Gesetzmäßigkeiten auf die Atomstatistik unberücksichtigt läßt.

Auch die Gesichtspunkte, welche uns zum „Verstehen“ einer *Maschine* leiten, sind lehrreich für die Betrachtung organischer Verhältnisse. Kein Maschinenbauer prägt seinem Gedächtnis die Konstruktion einer Maschine ein, *ohne* sich die Zweckmäßigkeit dieser Konstruktion in bezug auf die gestellte Aufgabe eingehend klar zu machen. Sein „Verstehen“ einer Maschine bedeutet also keineswegs nur ein auf die physikalischen Gesetze gegründetes Sichklarmachen der *kausalen Funktionsfolge*, sondern ebenso sehr ein ausführliches Erkennen der Tatsache, daß jede Einzelheit der Maschine nach bestimmten Zwecksetzungen durchkonstruiert ist. Bei dieser Betrachtungsweise stehen die *kausale* und die *finale* Analyse der Konstruktion und Funktionsweise der Maschine in einer keinerlei logische Unklarheit enthaltenden Weise *nebeneinander*; es dürfte zu den charakteristischen Unterschieden zwischen Maschine und Organismus gehören, daß beim Letzteren eine solche *Trennung* kausaler und finaler Betrachtungsweise nicht mehr möglich ist.

Zu betonen ist aber, daß die Maschine, wenn wir sie als *Naturprodukt* auffassen wollen, trotz ihrer Unbelebtheit keineswegs zu den Objekten der anorganischen Naturwissenschaft gehört; insofern nämlich, als wir die Maschine niemals als anorganisches Naturerzeugnis antreffen, sondern nur als Sekundärerzeugnis lebender Wesen.

Die endgültige methodische *Legitimierung* einer *naturgesetzlichen Formulierung* ist auf Grund der hier vertretenen erkenntnistheoretischen Einstellung zu sehen in der Möglichkeit, ihr einen *mathematisch präzisierten Ausdruck zu verleihen*. So wurde nach dem Scheitern der mechanischen Äthermodelle und der in ihnen zum Ausdruck kommenden methodischen Tendenz durch die *geschlossene mathematische Formulierung* der FARADAY-MAXWELLSchen Idee der *endgültige, abschließende Charakter* dieser neuen Auffassungsweise dargetan. Entsprechendes bedeutet für den *Komplementaritätsgedanken* seine umfassende und abschließende mathematische Präzisierung in der statistischen Transformationstheorie. Obwohl eine über gewisse, recht periphere Sonderfälle hinausgehende mathematische Erfassung organischer Naturgesetze wahrscheinlich noch in weiter Ferne liegt, so wird es doch für die Präzisierung und Fortentwicklung der Gedanken nützlich sein, sich klar zu machen, *von welcher ungefähren Gestalt* mathematische Formulierungen sein müßten, welche eine quantitative Fassung der erörterten phänomenologischen Teleologie ermöglichen könnten. Dazu scheint mir folgendes zu sagen:

1. Die *Zweckmäßigkeit* der organischen Strukturen und Reaktionen dürfte mathematisch in der Form von *Variationsproblemen* zum Ausdruck

kommen¹, also in Gestalt von Aussagen, welche feststellen, daß gewisse Größen ihren *kleinsten* (oder größten) mit gewissen vorgegebenen Bedingungen vereinbarten Wert annehmen — durch welche Minimalbedingung die mathematischen Funktionen, welche die Strukturen oder Reaktionsverläufe definieren, festgelegt werden.

2. Die durch den Begriff der „Ganzheit“ hervorgehobene *Unteilbarkeit der individuellen Organismen* dürfte mathematisch darin ihren Ausdruck finden, daß die biologischen Naturgesetze *nicht Differentialgleichungen*, sondern *Integralgleichungen* sind. Denn diese Unteilbarkeit deutet darauf hin, daß im lebenden Organismus das physikalische *Nahewirkungsprinzip* (welches der anschauliche Ausdruck für die Tatsache ist, daß die physikalischen Gesetze partielle Differentialgleichungen sind) teilweise außer Anwendbarkeit gesetzt wird. Zwar kann man amputierte Körperteile durch künstliche Nahrungszufuhr usw. lange am Leben erhalten; aber es dürfte doch eine ungerechtfertigte Übertreibung sein, danach verallgemeinernd zu schließen, daß alle Wechselwirkungen z. B. zwischen rechter und linker Körperhälfte eines Tieres im Sinne des Nahewirkungsprinzips durch die differentiellen Vorgänge in der gedachten Grenzebene zwischen den Körperhälften vermittelt seien. Jedenfalls fehlen uns zu derartig kühnen Verallgemeinerungen alle empirischen Unterlagen; eine skeptische Beurteilung des Nahewirkungsprinzips ist also geboten. Eine phänomenologische Beschreibung der organischen Ganzheit im Sinne von Integralgesetzen wird naturgemäß erleichtert durch den Umstand, daß die Unteilbarkeit der Individuen keine grundsätzliche ist, sondern in verschiedenen quantitativen Abstufungen vorliegt, derart, daß man von einer *Intensität* der „*Individuation*“ sprechen könnte.

3. Es scheint sehr beachtenswert, daß diese uns durch die biologische Erfahrung aufgenötigten Vorstellungen in mathematischer Beziehung eine sehr natürliche und naheliegende Verallgemeinerung der uns bekannten physikalischen Naturgesetze darstellen. Die physikalischen Gesetze nämlich haben *ebenfalls* stets den Charakter von *Variationsprinzipien*, und ihr differentieller Charakter ergibt sich erst *sekundär* in ziemlich zufälliger Weise. Die Sache sieht so aus, daß ein Integral

$$\iiint\int L \, dx \, dy \, dz \, dt \quad (3)$$

extremal gemacht werden soll; und das Variationsprinzip

$$\delta \iiint\int L \, dx \, dy \, dz \, dt = 0 \quad (4)$$

ergibt die zugehörigen *LAGRANGESchen Differentialgleichungen*. Es genügen aber primitive Erweiterungen dieses Schemas, etwa in der Form

$$\delta \left\{ \iiint\int L \, dx \, dy \, dz \, dt + \varepsilon \cdot \left[\iiint\int M \, dx \, dy \, dz \, dt \right]^2 \right\} = 0, \quad (5)$$

¹ Dagegen wohl bestimmt *nicht* in der interessanten, von COSSMANN als Verallgemeinerung kausaler Beziehungen ins Auge gefaßten Form, nach welcher eine organische Reaktion als simultane Funktion *früherer* und *späterer* Ereignisse darzustellen wäre.

um statt der Differentialgleichungen *Integrodifferentialgleichungen* aus dem Variationsprinzip zu erhalten.

4. Die unter 2. angestellten Erwägungen sprechen für Integralgesetze im *räumlichen* Sinne; denken wir aber an die *Gedächtniserscheinungen* (und etwa die ihnen in der Mneme-Theorie zugeschriebene umfassende Bedeutung), so kommen wir dazu, auch im *zeitlichen* Sinne Integralgesetze anzunehmen. Man kann die anorganischen physikalischen Effekte, die sich in Materialien mit elastischer *Nachwirkung* ergeben, phänomenologisch so beschreiben, daß die Reaktion des Materials nicht von seinem augenblicklichen Zustand allein, sondern von seiner *ganzen Vorgeschichte* abhängt. Der Rahmen der gewohnten klassischen Kausalitätsvorstellung muß hier also durchaus *verlassen* werden — man kann die *phänomenologische* Behandelbarkeit des Problems nur durch diesen Verzicht auf die Anwendung der klassischen Kausalitätsvorstellung erkaufen, da man andernfalls zu einem Eingehen auf die Mikrovorgänge genötigt wäre. Es ist aber schon oft hervorgehoben worden, daß die biologischen Gedächtniseffekte mit den soeben gestreiften anorganischen Effekten Ähnlichkeiten besitzen. Auch die physikalisch-technische Bezeichnung „Ermüdungserscheinungen“ deutet auf weitere hierher gehörige Parallelen hin.

5. Eine dem Schema (3), (4) entsprechende Formulierungsweise physikalischer Gesetze kann auch bei Miteinbeziehung *thermodynamischer Gleichgewichtszustände* aufrechterhalten werden. *Irreversible* Prozesse dagegen sind nicht durch das Erfülltsein von Extremalbedingungen, sondern durch das Fortschreiten in Richtung auf einen extremalen Zustand allgemein charakterisiert. Auch hier drängt sich der Verdacht tiefliegender Beziehungen zu den organischen Gesetzmäßigkeiten auf; teilweise aber gerade in der Form, daß die strukturerzeugende Tendenz organischer Aufbauprozesse in einem *Gegensatzverhältnis* zu der strukturverwischenden, Ungeordnetheit erzeugenden Tendenz thermodynamischer irreversibler Prozesse zu stehen scheint. Die Untersuchung der organischen Gesetzmäßigkeiten in ihrem Verhältnis zum *Entropiebegriff* dürfte eine sehr wichtige Aufgabe sein.

Sinn und Absicht dieser hier gemachten Bemerkungen werden hoffentlich nicht mißverstanden werden. Sie sollten zu nichts anderem dienen, als zu einer *methodischen Klärung der Begriffe*. Was ich erreichen wollte und erreicht zu haben hoffe, ist die Klarstellung: Trotz des heute noch recht unbestimmten Charakters der Begriffe „*Zweckmäßigkeit*“, „*Ganzheit*“, „*Individuum*“ müssen die bekannten Meinungen, daß jede Benutzung solcher Begriffe eine Einführung von „*Mystik*“ oder „*Metaphysik*“ bedeute, als vollkommen abwegig und irreführend erachtet werden. *Diese Meinungen haben aus der Erörterung der biologischen Zentralprobleme endgültig zu verschwinden.*

3. Kausalität und Statistik im Organischen. Nachdem wir im Voranstehenden die Anwendung der allgemeinen Grundsätze positivistischer

Erkenntnistheorie auf das Finalitätsproblem besprochen haben, wollen wir jetzt von einer anderen Seite her das Problem der biologischen Kausalität betrachten. Wir nehmen Bezug auf die Rolle der Physik (einschließlich Chemie) als *Hilfswissenschaft* der Biologie, und fragen, ob die biologische Verwertung physikalischer Begriffe wesentlich beeinflusst wird durch unsere atom- und quantenphysikalischen Neuerkenntnisse betreffs kausaler und statistischer Naturgesetzlichkeit.

Vorweg wird eine kurze Klarstellung von Nutzen sein. Die Behauptung oder Verneinung einer grundsätzlichen *Zurückführbarkeit* der *biologischen* Phänomene auf *physikalische* Gesetzmäßigkeiten muß, in dieser Allgemeinheit ausgesprochen, als durchaus *sinnlos* bezeichnet werden. Eine sinnvolle Frage ist jedoch diese: Wird es möglich sein, die biologischen Gesetzmäßigkeiten restlos zurückzuführen auf die *heute bekannten* physikalischen Gesetze? Zur Erläuterung: die *chemischen* Gesetze sind nach heutiger Überzeugung restlos zurückführbar auf die *heutige* Physik (Quantenmechanik). Aber weder die *chemischen* noch die *elektrodynamischen* Gesetze sind zurückführbar auf die *vor* der Quantenmechanik bzw. *vor* FARADAY-MAXWELL bekannt gewesenen physikalischen Gesetze.

Betreffs des Verhältnisses der Biologie zur Physik glaube ich in Übereinstimmung mit N. BOHR: Die Zurückführbarkeit der biologischen Gesetze auf die „klassische“ (vorquantenmechanische) Physik ist eine relativ eng begrenzte, trotz der bewunderungswürdigen Ergebnisse, welche die Physiologen in dieser Richtung erzielen konnten. Dagegen dürfte die heutige Atom- und Quantenphysik schon eine *wesentlich tiefergehende* Erfassung der biologischen Phänomene ermöglichen; hierauf werden wir jetzt einzugehen haben. Eine *restlose* Zurückführung der biologischen Gesetze auf die *heutige* Physik dürfte aber vermutlich ebenfalls nicht möglich sein.

Es ist nur eine Frage der Terminologie, ob man eine *künftige*, über die durch die Quantenmechanik erschlossenen Möglichkeiten noch *hinausgehende* Erfassung der biologischen Gesetzmäßigkeiten als ein neues Kapitel der Physik, oder als eine *neben* die Physik zu stellende Disziplin bezeichnen wird; ebenso wie es heute nur eine terminologische Frage ist, ob man die Chemie als Untergebiet der Physik oder als Nachbarwissenschaft der Physik bezeichnet.

Wenn wir uns nunmehr der Erwägung der biologischen Folgerungen der neuen Quantenphysik zuwenden, so wird eine technische Bemerkung notwendig, die vielleicht schon zu Beginn des vorigen Abschnitts hätte gemacht werden sollen. Der Verfasser ist Physiker; er fühlt sich auf heimischem Boden bei der Erläuterung physikalischer Erkenntnisse; und er ist sich gewiß, daß die eingetretenen revolutionären Umgestaltungen der physikalischen Vorstellungswelt auch seitens der biologischen Wissenschaften künftig eingehend berücksichtigt werden müssen. Hinsichtlich der nachfolgenden Versuche gewisser *Konkretisierungen*

dieser Überzeugung fühlt sich der Verfasser jedoch genötigt, ausdrücklich diejenige *Nachsicht* der Biologen zu erbitten, auf welche die Bemerkungen und Fragestellungen eines Nichtfachmannes unvermeidlicherweise angewiesen sind.

In unserer Erörterung dieser Probleme beschränken wir uns streng auf solche Punkte, hinsichtlich welcher *unvermeidliche* oder doch mindestens *sehr wahrscheinliche Folgerungen* aus den neuen physikalischen Erkenntnissen anzumelden sind. Keineswegs wollen wir den kühnen Versuch wagen, ein neues *Gesamtbild* vom Wesen der Lebenserscheinungen zu zeichnen. Nicht die Darlegung einer neuen, alle biologischen Erscheinungen umfassenden Theorie des Lebens wird hier versucht, sondern lediglich die Klärung der physikalischen Unterlagen, mit denen jede künftige Theorie der Lebenserscheinungen zu rechnen haben wird. Für die *Physiologie*, die ja dauernd mit physikalisch-chemischen Methoden, Begriffen und Gesetzmäßigkeiten arbeitet, ist es *einfach unumgänglich*, daß fundamentale Neu-erkenntnisse der Physik daraufhin geprüft werden, welche Veränderungen sie für die physikalischen Voraussetzungen der Physiologie mit sich bringen. Und zwar ist hinsichtlich der neuen Quantenphysik die Sachlage im Prinzip ganz klar.

Die Quantenphysik lehrt uns, daß die klassischen Begriffsbildungen und Vorstellungsweisen der Physik — welche auch die bisherigen physikalischen Voraussetzungen der Biologie gebildet haben — nur im Bereich der *makroskopischen* Gebilde zutreffend sind; daß dagegen völlig andere Begriffsbildungen und Gesetzmäßigkeiten in Betracht kommen in der *mikrophysikalischen, atomaren* Welt. Ob die neuen Erkenntnisse für die Biologie Bedeutung haben oder nicht, das wird also davon abhängen, ob die Organismen „makrophysikalische“ oder „mikrophysikalische“ Systeme sind; und natürlich reicht die primitive Tatsache, daß etwa ein Säugetier ein aus sehr vielen Atomen bestehendes, sogar mit freiem Auge sichtbares Gebilde ist, noch keineswegs dazu aus, es als „makroskopisch“ im Sinne des Atomphysikers ansprechen zu können.

Daß für makroskopische physikalische Gebilde die exakten Kausalgesetze der klassischen Physik gelten, obwohl für jedes einzelne der Atome, aus denen sie zusammengesetzt sind, nur Wahrscheinlichkeitsgesetze seines Verhaltens bestehen, das beruht ja darauf, daß ein makroskopisches physikalisches Gebilde von jeder in ihm vorhandenen Atomart *zahllose gleiche* und *gleichen Bedingungen ausgesetzte* Exemplare enthält — so daß im Gesamteffekt aus den statistischen Einzelreaktionen der Einzelatome ein genau bestimmtes Gesamtergebnis zustande kommt. Im Organismus aber zeigen alle Teile des Systems wunderbar feine und höchst verwickelte *Strukturen*: Den schon mit freiem Auge sichtbaren Strukturen liegen die viel komplizierteren zugrunde, die uns das Mikroskop enthüllt; und diese Strukturen setzen sich fort bis unterhalb der Grenzen mikroskopischer Sichtbarkeit, sicherlich zum Teil bis in kolloidale und molekulare Dimensionen herunter.

Dies muß schon sehr stark den Verdacht erwecken, daß es keineswegs berechtigt ist, die Lebensvorgänge als Anwendungsgebiet der makroskopischen Physik — also in der Hauptsache der *phänomenologischen Thermodynamik* — anzusehen. Natürlich steht die vielfältige Anwendbarkeit makrophysikalischer Gesetzmäßigkeiten in den Organismen außer Frage; aber es besteht Veranlassung, zu glauben, daß gerade die eigentlich *zentralen* Lebensvorgänge *nicht* mehr ins Gebiet der Makrophysik fallen.

Eine Fülle von Erfahrungen lehrt uns, daß zwischen den verschiedenen Strukturteilen oder Prozessen im Organismus eine *Rangordnung* besteht in solcher Weise, daß die in makroskopischen Körpergebieten ablaufenden, mit erheblichen Energieumsetzungen verbundenen makroskopischen Prozesse *gesteuert* werden durch *wesentlich feinere Reaktionen*. In ausgeprägtester Form zeigen die höheren Tiere mit hochentwickeltem Gehirn und Nervensystem dieses Verhältnis, doch sind auch mancherlei andere Beispiele bereits gut bekannt. So sei daran erinnert, daß in der embryonalen Entwicklung eine die Prozesse leitende Wirkung ausgeht von den eng umgrenzten Zonen der „Organisatoren“. Zweifellos erst zum kleinsten Teil erforscht und bekannt ist ferner die beherrschende Rolle der mannigfaltigsten chemischen *Katalysatoren* im Organismus, durch deren dosierte Produktion mit sehr geringen Substanz- und Energiemengen grob-makroskopische Effekte ausgelöst und gesteuert werden können. Bei den Einzellern sind wir gewohnt, den relativ kleinen Substanzmengen im Zell-Kern eine die Lebensvorgänge weitgehend steuernde Wirkung zuzuschreiben. Und wohl in eindrucksvollster Weise sehen wir endlich bei der Entwicklung makroskopischer Organismen aus den winzigen Keimzellen, und in den dabei auftretenden *Vererbungserscheinungen*, das Wirken desselben organischen Prinzips, das auch die anderen Beispiele erkennen ließen. Wir dürfen zusammenfassend sagen, daß die organischen Strukturen in hohem Maße nach der Art der von den Physikern gebrauchten *Verstärkerröhren* angelegt sind: mannigfaltige Einrichtungen ermöglichen im Organismus die *Verstärkung* geringfügigster Energieumsetzungen zu wesentlich gröberen, makroskopischen Effekten. Die gelegentlich gebrauchte Bezeichnung „*Verstärkertheorie der Organismen*“ für die Überzeugung, daß derartige Verstärkungen zu den *charakteristischen* Eigentümlichkeiten des Organischen gehören, sei hier wiederholt, nachdem sie Anklang zu finden scheint. Das die gemeinten Verhältnisse ebenfalls sehr anschaulich bezeichnende Wort „*Steuerung*“ ist (mit der hier gemeinten Bedeutung) dem Sprachgebrauch der Verstärkertechnik entnommen.

Man wird im Sinne dieser Vorstellung die „zentralen“ Lebensvorgänge gerade in den *steuernden* Reaktionen zu sehen haben; und die Verstärkertheorie der Organismen in ihrer radikalsten Form behauptet, daß die „*letzten Endes*“ *steuernden Reaktionen* *durchweg von atomarer Feinheit sind*. Von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit dieser These hängt

es offenbar ab, ob die Organismen *mikrophysikalische* oder *makrophysikalische* Systeme sind.

Eine sorgfältige Kritik dieser These hat E. BÜNNING¹ durchgeführt. Er kommt zu einem ablehnenden Ergebnis, z. B. auf Grund der Feststellung, daß immerhin etwa 10^4 Moleküle des Wuchsstoffes Auxin pro Zelle nötig sind, um eine erkennbare Wirkung zu erzeugen. Diese Darlegungen scheinen mir jedoch weniger einen Einwand gegen unsere These zu liefern, als vielmehr die Feststellung zu ergeben, daß die Physiologie noch nicht bis zu Feinreaktionen der hier gemeinten Art vorgedrungen ist. Also mögen die Tatsachen, in denen ich empirische Stützen der formulierten These zu erkennen glaube, kurz angedeutet werden.

Die Tatsache, daß die wichtigsten organischen Substanzen (Eiweiß) hochkomplizierte Moleküle und kolloidalen Charakter besitzen, bestärkt die Vermutung, daß gerade in den *steuernden* Körperbezirken die im Mikroskop erkennbaren Strukturen sich in weiteren, feineren Strukturen fortsetzen, *ohne* daß *durchgängig* eine die molekularen Dimensionen größenordnungsmäßig übertreffende Minimaldimension der organischen Strukturen vorhanden sein dürfte. BÜNNING hat zwar auch gegen diese (von BAVINK unabhängig vorgetragene) Erwägung beachtenswerte Einwände erhoben, doch scheinen mir die angeführten Tatsachen noch nicht ausreichend zur definitiven Entscheidung einer so wichtigen Frage.

Die zur Zeit klarsten Verhältnisse betreffs unseres Problems liegen bei den Lichtwahrnehmungen des Auges vor, und empirisch scheint sichergestellt, daß schwächste Lichtwahrnehmungen schon durch ein *paar Lichtquanten* erzeugt werden können. Die hohe grundsätzliche Bedeutung dieses Tatbestandes für die Frage der Beziehungen zwischen Biologie und Quantentheorie ist von BOHR hervorgehoben worden. Weniger beweisend, aber immerhin bemerkenswert ist die Möglichkeit, *Bakterien* durch je ein *einzelnes* schnelles Elektron zu „erschließen“.

Daß das Auftreten von *Unstetigkeiten* als fundamentales Charakteristikum der Quantenphysik gewertet werden kann, wurde bereits hervorgehoben. In der anorganischen Welt bieten uns *unstetige, ganzzahlige Relationen* — wie die *stöchiometrischen* Gesetze, und wie in der Kristallographie das Gesetz der *rationalen Indizes* — die ersten makroskopisch greifbaren Anhaltspunkte für die *atomistische Struktur* der Materie; also, wie wir auch sagen können, für die Existenz der Quantenerscheinungen. (Die Möglichkeit, die Tatsache der atomistischen Struktur der Materie als speziellen Ausfluß der Quantengesetze aufzufassen, wurde ja durch die Methode der „zweiten Quantelung“ präzisiert, vgl. Kapitel 4).

Ein Element der *Unstetigkeit* kennen wir aber auch in der *Biologie* seit der Entdeckung der MENDELSCHEN *Vererbungsregeln*; wir wissen auf Grund der heutigen Vererbungswissenschaft, daß die konstituierenden Eigenschaften eines Tieres oder einer Pflanze *nicht* innerhalb einer Art

¹ BÜNNING, E.: Erkenntnis 5, 337 (1935).

von Individuum zu Individuum *stetig variabel* sind. Vielmehr setzt sich der Genotypus eines Individuums mosaikartig zusammen aus Einzel-eigenschaften, die nur diskreter, unstetiger Abstufungen ohne stetige Zwischenstufen fähig sind¹; im Phänotypus wird diese Mosaikstruktur allerdings einigermäßen verwischt durch die stetig abstufbaren Umwelteinflüsse, welche mitbestimmend dafür sind, wie die vorhandenen Erbanlagen phänotypisch zum Ausdruck kommen. Diese Entdeckung darf durchaus als eine *Parallele zur Atomistik* der physikalischen Welt bezeichnet werden; es ist eine wahre *Atomistik der Erbanlagen*, die sich durch die Arbeit der Vererbungsforscher vor uns enthüllt hat. In wunderbarer Analogie zum Auftreten derselben Atome in verschiedenen Molekülen sehen wir ja sogar teilweise *dieselben Erbfaktoren* (etwa Blüten- oder Fellfärbungen bestimmend) bei *verschiedenen* biologischen Arten in Wirksamkeit. Sicherlich handelt es sich übrigens nicht nur einerseits um eine *Parallele*, sondern andererseits auch direkt um eine biologische Folge und Auswirkung der physikalischen Atomistik: Das Nichtvorhandensein stetiger Übergänge in der unstetigen Abstufung der Erbanlagen dürfte zweifellos bedeuten, daß die einfachen, nicht mehr zerlegbaren Gene *einzelne* (wenn auch sehr große) *Moleküle* darstellen. *Wir sehen deshalb in der Vererbungslehre die überzeugendste und breiteste empirische Unterlage der These, daß die Organismen nicht makrophysikalische, sondern mikrophysikalische Systeme sind.*

Die Unstetigkeiten der Erbanlagen bedingen (ganz analog den atomistisch-quantenhaften Unstetigkeiten in der Physik) die Notwendigkeit, *statistische Begriffe* einzuführen. Schon die MENDELSchen Vererbungsgesetze selbst sind ja statistische Gesetze. Doch handelt es sich hier *nicht* um eine „*primäre Statistik*“, sondern um die einfache statistische Gesetzmäßigkeit, die sich aus den im Einzelfall sehr komplizierten Suchbewegungen des Schwarmes der mit verschiedenen Erbanlagen ausgestatteten Spermatozoen als Folge ergibt — ebenso, wie das einfache statistische Gesetz des Würfelspiels das Folgeresultat der sehr komplizierten Schüttelbewegung ist.

Eine *primäre Statistik* dürfte jedoch vorliegen bei den Zustandsänderungen der Gene selbst, also bei den *Mutationen*. Die in neuerer Zeit vielfach untersuchte Möglichkeit, Mutationen durch (kurzwellige) *Strahlungen* hervorzurufen, ergibt offenbar eine ganz analoge Situation, wie wir sie auch bei der Lichtabsorption durch Atome vor uns haben. Unter hinreichend *vielen* Atomen wird stets eine mit der einwirkenden Lichtintensität *proportionale* Anzahl ein Lichtquant absorbieren; die entsprechende Proportionalität findet sich natürlich auch bei der Mutationserzeugung. Eine „*makroskopische*“, d. h. *nur die statistischen Mittelwerte berücksichtigende* Betrachtung wird also von einer eindeutigen

¹ Von der Frage der vererbbaaren Eigenschaften, deren Träger außerhalb der Chromosomen im Plasma der Keimzellen ihren Sitz haben sollen, sehen wir hier ab.

kausalen Verknüpfung zwischen Strahlung und Absorption bzw. Strahlung und Mutation sprechen können. Sobald wir aber ein *einzelnes* Atom oder eine *einzelne* Keimzelle betrachten, wird uns der *rein statistische* Charakter dieses Proportionalitätsgesetzes bewußt: für den Einzelfall gibt es keine eindeutige Determinierung mehr, sondern lediglich *eine mit der Intensität der Einwirkung proportionale Wahrscheinlichkeit* des positiven Reagierens.

Es liegt aber im Begriff der Wahrscheinlichkeit, daß auch solche Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeit ganz ungeheuer klein ist, doch schließlich einmal eintreten müssen. (Konkretes Beispiel: mit berechenbarer, von Null verschiedener Wahrscheinlichkeit kann und muß einmal eine gewisse abnorm starke Intensitätsschwankung in der Strahlung eines Radiumpräparates eintreten.) Es steht also nicht im Gegensatz zur eben gemachten Erläuterung der statistischen Auffassung der Mutationen, sondern es ist gerade eine notwendige Folge davon, daß man bei einer konkreten Mutation, die sich als historisches Ereignis einmal vollzogen hat, *neben* der Suche nach Ursachen, die zu jener Zeit eine Zunahme der Wahrscheinlichkeit für diese Mutation bewirkt haben könnten, *auch* die andere Möglichkeit ins Auge zu fassen hat, daß hier vielleicht ein an sich sehr unwahrscheinliches Ereignis tatsächlich einmal eingetreten ist. Der experimentelle Vererbungsforscher, der sich mit der künstlichen Erzeugung von Mutationen befaßt, wird sich um solche Möglichkeiten *nicht* zu kümmern brauchen. Wohl aber scheint es mir, daß bislang kein Gesichtspunkt gegeben ist, der uns der Notwendigkeit überheben könnte, zu erwägen, ob diese zweite Möglichkeit nicht vielleicht für die Problematik der Entwicklung des organischen Lebens während der geologischen Epochen eine recht bedeutende Rolle spielen könnte. Auch auf die viel erörterte Frage der *Urzeugung* wäre diese Erwägung *vielleicht* anzuwenden.

Wir wollen aber die Frage der extrem unwahrscheinlichen Ereignisse für jetzt auf sich beruhen lassen und uns wieder den statistisch „normalen“, nicht extrem unwahrscheinlichen Fällen zuwenden. Aus den obigen diesbezüglichen Erläuterungen ergibt sich, daß in der bisherigen Beurteilung eines berühmten biologischen Problems der Tatsache der *unstetigen Variabilität der Erbanlagen* noch nicht in völlig folgerichtiger und gebührender Weise Rechnung getragen zu sein scheint. Wir meinen das Problem der *Vererbung erworbener Eigenschaften*: Der Physiker, der seit der PLANCKSchen Entdeckung so intensiv genötigt worden ist, alle sich aus dem Auftreten unstetiger „Quantensprünge“ im Naturgeschehen ergebenden methodologischen Fragen gründlich zu durchdenken, kann die bisherige, fast allgemein für abschließend gehaltene Widerlegung der Möglichkeit einer Vererbung erworbener Eigenschaften nicht für überzeugend halten. Denn es ist in den bisherigen Diskussionen zumeist versäumt worden, diese Frage in eine Form zu bringen, die der Unstetigkeit der Erbanlagen Rechnung trägt. Die einzige, mit unserem

vererbungswissenschaftlichen Erkenntnisstand vereinbare Formulierung der Hypothese der Vererbung erworbener Eigenschaften ist offenbar diese: *Tritt im Phänotypus eines Organismus (während dessen individuellen Lebens) als Anpassungserscheinung eine Abweichung vom durchschnittlichen Typus ein, so entsteht in den Keimzellen dieses Individuums eine Wahrscheinlichkeit für eine Mutation, die den Genotypus der Nachkommen in einer der anfänglichen phänotypischen Abweichung ähnlichen Weise verändert.* Man beachte, daß die anfängliche phänotypische Anpassung hinsichtlich der Stärke ihrer Ausbildung *stetiger* Abstufung fähig ist. Folglich kann sie nur eine (gleichfalls stetig variable) *Wahrscheinlichkeit* für eine unstetige Änderung des Genotypus bewirken.

Ich möchte bekennen, daß ich die Hypothese in dieser Formulierung (die ja so naheliegend ist, daß sie wohl auch von anderer Seite schon vorgetragen sein dürfte) für nicht nur noch nicht empirisch widerlegt, sondern sogar für sehr wahrscheinlich halte. Daß ihre positive experimentelle Bestätigung sehr schwer zu erreichen ist, das ist genau das, was man vernünftigerweise erwarten muß. Innerhalb *einer einzigen Generation* können nur *sehr schwache* Vererbungswirkungen der Anpassungserscheinung zustande kommen. *Ohne* unsere moderne Kenntnis der unstetigen Variabilität der Erbanlagen könnte man also vermuten, daß der Nachkommenschaft eine ganz *schwache* und *geringfügige* Modifikation vererbt würde. Da aber in Wahrheit aus Unstetigkeitsgründen eine Veränderung des Genotypus nicht beliebig „klein“ ausfallen kann, vielmehr nur die zwei Möglichkeiten entweder *keiner* oder einer schon *erheblichen* Abänderung bestehen, so muß sich die *Schwachheit* des Effektes in der Form zeigen, daß eben die *Wahrscheinlichkeit* einer solchen Mutation sehr klein ist; ein positiver Ausfall des Experimentes *muß statistisch sehr selten sein*. Unter diesem Gesichtspunkt betrachtet, scheinen mir die bisherigen Experimente nicht endgültig gegen die Hypothese zu entscheiden¹.

Nachdem wir aus den zusammengestellten Tatsachen die Überzeugung gewonnen haben, daß die Organismen *mikrophysikalische* Systeme und ihre letzthin *steuernden* Reaktionen *atomare* Prozesse seien, gewinnen gewisse berühmte, ins philosophische Gebiet hinübergreifende Fragen der Biologie ein völlig verändertes Aussehen.

Das grundsätzliche Glaubensbekenntnis einer bestimmten Epoche der Biologie hat durch DU BOIS-REYMOND eine glänzende, an Klarheit und Schönheit nicht zu überbietende Formulierung erhalten. Nach DU BOIS-REYMONDScher Vorstellung konnte der „LAPLACESCHE GEIST“ — der in seiner *rein quantitativen, nicht qualitativen* Überlegenheit gegenüber dem menschlichen Naturforscher *alles* bereits weiß, was menschliche Forscher jemals in Zukunft wissen werden oder wissen könnten —

¹ Die heutige allgemeine Ablehnung dieser Hypothese stützt sich übrigens wohl zum großen Teil auf die anscheinend recht verbreitete, aber durchaus irrige Meinung, daß diese Hypothese mit der Tatsache der Unstetigkeit der Erbanlagen von vornherein *logisch unvereinbar* sei.

die zu erwartenden Reaktionen eines Menschen oder Tieres auf bestimmte äußere Einflüsse *exakt* und *eindeutig vorausberechnen*. Das Verhalten des Organismus unter gegebenen äußeren Bedingungen sollte also in grundsätzlich gleicher Weise wie die Planetenmechanik *eindeutig determiniert* sein. Erkennen wir jetzt die makroskopischen Reaktionen eines Organismus als *gesteuert* durch *atomare Prozesse*, die *ihrerseits* nur *statistischen* Gesetzen unterworfen sind, so müssen wir die DU BOIS-REYMONDSche Vorstellung als schlechthin unzutreffend erachten; es ist dann auch das Gesamtverhalten des Organismus lediglich in statistischem Sinne festgelegt, derart, daß nur etwa in einer *Herde* vieler gleichartiger Organismen, die gleichartigen Bedingungen ausgesetzt sind, ein determiniertes *mittleres* Verhalten zustande kommt. (Es sei vorweg bemerkt, daß wir später sogar auch eine solche nur statistische Determinierung noch mit einschränkenden Fragezeichen versehen werden.)

Diese Feststellungen lassen das Problem der *Willensfreiheit* in einem neuen Lichte erscheinen — ein Problem, um welches so viele Erörterungen geführt worden sind, und welches eigentlich nicht ein *einzelnes* Problem, sondern einen ganzen Komplex ineinander verwobener Probleme darstellt. Eine Fülle verschiedener hierher gehöriger Fragestellungen ist aufgestellt und diskutiert worden; zu allseitig anerkannten Antworten ist man allerdings nicht gelangt. Wenn wir von unseren neuen Erkenntnissen aus dieses Problem wieder aufnehmen, so ist keineswegs zu verlangen, daß die von uns behandelte Fragestellung nun genau übereinstimmt mit einer schon seit langem formulierten Frage. Selbstverständlich ist es so, daß der größte Teil der unter diesem Schlagwort diskutierten Fragestellungen von einer vertieften Erkenntnis aus nicht so oder so zu beantworten, sondern vielmehr als *unsachgemäße, sinnlose* Fragestellung zu erkennen und *abzulehnen* sein wird; es ist ja eine allgemeine Erscheinung, daß in schwierigen Problemkomplexen nicht etwa die sinngemäßen Fragestellungen schon lange fertig formuliert sind, bevor die Antworten gefunden werden; sondern die sachgemäße Fragestellung und deren Beantwortung stehen in engstem zeitlichen und logischem Zusammenhang.

Für die naturwissenschaftliche Betrachtung der Probleme dürfte der eigentliche Knotenpunkt darin liegen, daß der Begriff der Willensfreiheit — der natürlich noch ebenso sehr wie die teleologischen Begriffe der Biologie einer positiven fortschreitenden Klärung bedarf — die *Verknüpfung* herstellt zwischen der aus atomphysikalischen Erkenntnissen erschlossenen *akausalen Undeterminiertheit* der steuernden Reaktionen einerseits und der *Finalität* dieser Reaktionen andererseits. Denn für eine unvoreingenommene Betrachtung wird schwerlich ein Anlaß bestehen, der Vermutung einer engen *psychophysischen Parallelität* auszuweichen, welche insbesondere vermuten läßt, daß eine Parallelität besteht zwischen dem *subjektiven Gefühl der Willensfreiheit* und der tatsächlichen quantenphysikalischen *Akausalität* der entsprechenden physio-

logischen Prozesse. Wir spüren aber in unserer inneren Erfahrung den Vorgang der freien Willensentscheidung als ein Mittel, unter verschiedenen möglichen Reaktionsweisen die *zweckmäßigste auszuwählen*. Man muß sich daran gewöhnen, solche primitive, aber grundlegende Tatsachen der Empirie für bedeutungsvoller zu halten, als die Vorurteile, die sich aus veralteten Doktrinen ergeben; und wir möchten uns nicht scheuen auszusprechen, daß wir in dieser allgemeinen psychologischen Erfahrung eine ausreichende Unterlage erblicken für die Überzeugung, daß die quantenphysikalische Akausalität *Raum schafft* für die Entfaltung der finalen Reaktionen.

Daß keinerlei Veranlassung besteht, in der Verfolgung solcher Gedankengänge — *die wir als Resultat einer unvoreingenommenen Tatsachenbetrachtung unter Anwendung der erkenntnistheoretischen Grundsätze des Positivismus ansehen* — etwas irgendwie Mystisches oder Metaphysisches zu sehen, mag endlich unterstrichen werden durch folgende Bemerkung. Wir haben *integrale* Gesetze (im Unterschied von den differentiellen Nahwirkungsgesetzen) als die vermutliche mathematische Formulierungsweise der organismischen *Ganzheits*-Vorstellung erkannt. Eine Verknüpfung *dieser* Einsicht mit der weiteren Feststellung, daß die Organismen als mikrophysikalische, *quantenphysikalische* Systeme zu betrachten seien, deutet sich darin an, daß auch die Quantenphysik in gewissem Umfang einen Verzicht auf die Nahwirkungsidee vollzieht und Integralformulierungen anwendet. So unterliegen z. B. in der SCHRÖDINGERSchen Theorie des Wasserstoffatoms zwar die Eigenfunktionen einer *Differentialgleichung* (SCHRÖDINGER-Gleichung), aber die mit der Erfahrung zu vergleichenden Größen haben vorwiegend die Gestalt von *Integralen*: man denke an die als *Matrixelemente* zu berechnenden *Übergangswahrscheinlichkeiten*. Der bemerkenswerte „Ganzheits“-Charakter dieser Formulierungen ist von SCHRÖDINGER schon vor geraumer Zeit betont worden.

Die oben gestreifte Frage nach der *Zurückführbarkeit* der biologischen Gesetzmäßigkeiten auf physikalische kann übrigens auch noch in folgender Weise sinnvoll präzisiert werden. Wird eine vollständige Erfassung der biologischen Phänomene möglich sein an Hand derjenigen Gesetzmäßigkeiten, welche wir *in der anorganischen Natur studieren können*? Die sehr weitreichende Kenntnis, die wir seit der Quantenmechanik von den anorganischen Naturgesetzen besitzen, macht die so formulierte Frage zwar nahezu gleichbedeutend mit der Frage der Zurückführbarkeit der Biologie auf die Quantenmechanik. Aber es dürfte nützlich sein, auszusprechen, daß wir in den organischen Phänomenen unserer Überzeugung nach *nicht* lediglich einen sehr komplizierten Anwendungsfall anorganischer Gesetzmäßigkeiten vor uns haben; daß vielmehr die angemessenere Auffassung die sein dürfte, daß die anorganischen Phänomene und Gesetzmäßigkeiten ein *vereinfachter Grenzfall* der organischen sind, gekennzeichnet durch ein Minimum von

integraler Ganzheitsbildung, welches die Akausalität der atomaren Reaktionen zu der durch die statistischen Gesetze der Quantenmechanik beschriebenen Zusammenhanglosigkeit degenerieren läßt; durch statistische Mittelbildung kommt dann als Gesamtergebnis vieler atomarer Einzelprozesse der kausale Ablauf makrophysikalischer Vorgänge zustande. Wir möchten also in den biologischen Gesetzen, die uns auch von der Seite der psychologischen Erfahrung aus zugänglich sind, gegenüber den anorganischen das Umfassendere und Allgemeinere sehen.

BOHR hat die vermutlichen Grenzen der Anwendbarkeit unserer quantenphysikalischen Kenntnisse auf die Organismen in folgenden Sätzen bezeichnet: „Dennoch dürfte auch die Quantenmechanik noch nicht genügend von der unseren Anschauungsformen angepaßten Beschreibungsweise der klassischen Physik entfernt sein, um die charakteristischen Gesetzmäßigkeiten des Lebens bewältigen zu können.“ — „Kurz könnte man vielleicht sagen, daß die Quantenmechanik das statistische Verhalten einer gegebenen Anzahl von Atomen unter wohldefinierten äußeren Bedingungen betrifft, während wir den Zustand eines lebendigen Wesens nicht im atomaren Maßstabe definieren können.“

§ 3. Der Aufbau der realen Welt.

1. **Komplementarität und Beobachtung.** Die gewöhnliche Auffassungsweise der physikalischen Erkenntnis ist gelegentlich durch PLANCK¹ in eindrucksvoller Weise formuliert worden; es mag erlaubt sein, diese Formulierung hier ungekürzt wiederzugeben:

„Der Positivismus, konsequent durchgeführt, leugnet den Begriff und die Notwendigkeit einer objektiven, d. h. von der Individualität des Forschers unabhängigen Physik. Er ist gezwungen, das zu tun, weil er grundsätzlich keine andere Wirklichkeit anerkennt, als die Erlebnisse der einzelnen Physiker. Ich brauche nicht zu sagen, daß mit dieser Feststellung die Frage, ob der Positivismus zum Aufbau der physikalischen Wissenschaft genügt, unzweideutig beantwortet ist; denn eine Wissenschaft, die sich selber das Prädikat der Objektivität prinzipiell aberkennt, spricht damit ihr eigenes Urteil. Die Grundlage, die der Positivismus der Physik gibt, ist zwar fest fundiert, aber sie ist zu schmal, sie muß durch einen Zusatz erweitert werden, dessen Bedeutung darin besteht, daß die Wissenschaft nach Möglichkeit befreit wird von den Zufälligkeiten, die durch die Bezugnahme auf einzelne menschliche Individuen in sie hineingebracht werden. Und das geschieht durch einen prinzipiellen, nicht durch die formale Logik, sondern durch die gesunde Vernunft gebotenen Schritt ins Metaphysische, nämlich durch die Hypothese, daß unsere Erlebnisse nicht selber die physikalische Welt ausmachen, daß sie vielmehr uns nur Kunde geben von einer anderen Welt, die hinter

¹ PLANCK, M.: Positivismus und reale Außenwelt. Leipzig 1931.

ihnen steht und die unabhängig von uns ist, mit anderen Worten, daß eine reale Außenwelt existiert.“

Es scheint kaum nötig, dieser glänzenden Darlegung noch etwas hinzuzufügen: sie bringt in klassischer Kürze das zum Ausdruck, was ganz allgemein von den Physikern bis auf unsere Tage hin (trotz MACHs warnender Kritik) als diskussionslos feststehend angesehen wurde — nämlich, daß die *reale Außenwelt* etwas von unseren unmittelbaren Erlebnissen durchaus Verschiedenes sei, beispielsweise in dem Sinn, daß *Farben* und *Töne* nicht zu realen Außenwelt gehören, indem es in der realen physikalischen Welt nur die entsprechenden elektromagnetischen Wellen oder Luftschwingungen gibt. Bei dieser Auffassung wird es als eigentliches Ziel der physikalischen Forschung angesehen, den „bunten Schleier“ der Erlebniswelt zu *durchstoßen* und *dahinter* die verhüllte reale Welt der objektiven Wahrheit aufzusuchen.

Die positivistische Erkenntnistheorie führt zu einer wesentlich anderen Beurteilung der Lage; doch ist ihre diesbezügliche Stellungnahme häufig mißverstanden worden. Ein sehr verbreitetes Mißverständnis ist, daß nach positivistischer Betrachtungsweise *die Existenz einer „realen Außenwelt“ zu verneinen sei*. Die Negierung einer sinnlosen Aussage ergibt aber wieder eine sinnlose Aussage; die Behauptung der Nichtexistenz einer „realen Außenwelt“ ist also nicht sinnvoller als die Behauptung ihrer Existenz. *Das eine wie das andere ist weder richtig noch falsch, sondern sinnlos*, sofern es nicht — als *symbolische* Aussage — durch Erläuterungen und Definitionen einen *verabredungsgemäß hineingelegten* Sinn erhält. Man kann also nicht sagen: nach positivistischer Auffassung (wie sie hier gemeint ist) ist die ganze Welt nur mein Vorstellungsinhalt, welchem keine objektive Realität entspricht. Sondern nach positivistischer Auffassung ist zu sagen: es ist kein Experiment *vorstellbar*, durch welches man Aussagen solcher Art beweisen oder widerlegen könnte; *solche Aussagen sind also als sinnlos auszuschließen* aus dem wissenschaftlichen System.

Vor dieser einfachen Erkenntnis sind selbst die Wortführer des Positivismus vielfach zurückgeschreckt. PETZOLDT z. B. formuliert den sinnlosen Satz: „*So gewiß wir der Welt Existenz unabhängig von uns und von jedem Bewußtsein zuschreiben müssen, so wenig darf die Frage nach den Qualitäten dieser unabhängigen Welt gestellt werden.*“ Und als bezeichnend für die landläufige Vorstellung vom Positivismus kann der in einer Polemik gegen den Positivismus formulierte, angeblich die konsequente positivistische Auffassung aussprechende, weder richtige noch falsche, sondern sinnlose Satz angesehen werden, „daß bei jedem Augenschließen . . . die Welt in das Nichts versinkt und beim Öffnen der Augen wieder aus dem Nichts entsteht“. Tatsächlich aber ist bei folgerichtig-radikaler Durchführung der positivistischen Betrachtungsweise nach dem Augenschließen als *unmittelbar* sinnvolle, nichtsymbolische und auf die Gegenwart bezügliche Aussage lediglich *die* zu

machen, daß man *nichts mehr sieht*: das ist jetzt die *erschöpfende* Beschreibung des optisch-sinnlichen Erlebens. Lasse ich jedoch auch *symbolische* Aussagen zu, so kann ich die gleichfalls primär sinnvolle, aber auf die *Zukunft* bezügliche Aussage, daß ich beim Augenöffnen die Welt wiederzusehen *bestimmt erwarte*, in die Form einer formal auf die Gegenwart bezogenen symbolischen Aussage setzen: „Die Welt existiert während des Augenschließens weiter.“

Halten wir also daran fest, daß alle Aussagen über die „reale Außenwelt“ *nur dann und nur insofern einen Sinn haben*, als es möglich ist, sie als *symbolische* Aussagen in bezug auf Erlebbares zu interpretieren. Nach diesem Grundsatz müssen alle Aussagen geprüft werden, die über die „reale Außenwelt“ gemacht werden: sie werden sich dann *entweder* als *sinnlos* erweisen, *oder* sie werden, indem ihnen eine klare *Interpretation* gegeben wird, einen positiven, deutlich erklärbaren Sinn gewinnen.

Betrachten wir also in dieser Weise die These, „*daß eine reale Außenwelt existiert*“. Würden wir diese These so stehen lassen, wie sie in der obigen, von einem andersartigen Standpunkt ausgeführten Darlegung PLANCKs hingestellt wurde, so könnten wir sie weder für falsch noch für richtig erklären, da sie in dieser Form mit Begriffen operiert, für welche wir eine sinnvolle Definition nicht zu geben vermögen. Aber wir würden dem von PLANCK erläuterten Gedankengang tatsächlich nicht gerecht werden, wenn wir uns mit einer solchen Stellungnahme begnügen wollten. Unsere Aufgabe ist vielmehr, aus der mit metaphysischen Begriffen arbeitenden Formulierung den positiven *Kern* herauszuschälen und den eigentlichen Inhalt des *in einer* (für unsere Auffassung) *unzulässigen Form* Gesagten durch die Methode unserer erkenntnistheoretischen Besinnung zu *deutlicherem* Ausdruck zu bringen. In der Tat steckt nun in der von PLANCK vorgeführten These eine Behauptung, welche auch von unserem Standpunkt aus durchaus „*sachhaltig*“ ist. Nämlich folgende Behauptung: *Die durch die physikalische Forschung konstruierte „physikalische Realität“ ist eindeutig bestimmt* (oder genauer: *konvergiert* in ihrer fortschreitenden Entwicklung gegen ein *eindeutig* bestimmtes Endresultat).

Diese Formulierung hat vor dem Verfasser bereits CARNAP gegeben. Sie läßt besonders deutlich erkennen, daß die Tendenz unserer erkenntnistheoretischen Methode eine *aufbauende* und *positiv klärende* ist: die wirklichen Probleme, die in der Idee der „realen Außenwelt“ stecken, sollen nicht etwa beiseite geschoben oder in ihrer Bedeutung verkannt und verkleinert werden. Sondern im Gegenteil ermöglicht es unsere erkenntnistheoretische Besinnung, den Problemen eine klare Form und einen der weiteren wissenschaftlichen Untersuchung faßbaren, deutlichen Inhalt zu geben. *Unabhängig* davon, ob wir mit dem Begriff der „realen Außenwelt“ noch ungeklärte metaphysische Nebengedanken verbinden, oder uns zu der hier vertretenen Auffassung entschließen (und vielleicht das neutralere Wort „physikalische Realität“ zur Bezeichnung des

Gemeinten vorziehen), *in beiden Fällen* ist der entscheidende Punkt die Frage nach der *eindeutigen Konstruierbarkeit* dieser „physikalischen Realität“ aus den Ergebnissen unserer physikalischen Experimente.

Aber die ältere Auffassung, wie sie in PLANCKs glänzender Formulierung zum Ausdruck kommt, ist geneigt, diese eindeutige Konstruierbarkeit als etwas ganz Unproblematisches, Selbstverständliches, a priori Gesichertes anzusehen; unsere Besinnung, die zu einer Umwandlung der Idee der „realen Außenwelt“ in eine *sinnvolle, d. h. richtige oder falsche Behauptung* führte, bringt uns nachdrücklich zum Bewußtsein, daß die *Richtigkeit* dieser Behauptung nicht als selbstverständlich *vorausgesetzt*, sondern vielmehr *bewiesen werden muß*. Ob und in welchem Maße die eindeutige Konstruierbarkeit einer realen Außenwelt besteht, das ist eine Frage, *die aus der experimentellen Forschung heraus* (und aus der kritischen Prüfung der methodischen Grundsätze dieser experimentellen Forschung) *zu entscheiden ist*.

Für das so formulierte „Realitätsproblem“ gibt die *klassisch-makroskopische Physik* innerhalb ihres Gültigkeitsbereichs *eine entschieden positive Antwort*. Diese Antwort ist so entschieden positiv, daß es danach vom klassischen Standpunkt aus geradezu als eine überflüssige Spitzfindigkeit erscheinen muß, das Realitätsproblem überhaupt als Problem hinzustellen: unsere diesbezügliche erkenntnistheoretische Besinnung könnte von der klassischen Physik aus als nutzlose Gedankenspielerlei betrachtet werden. Für die Überzeugung von der Notwendigkeit unserer positivistischen Betrachtungsweise ist es deshalb eine Stütze von entscheidendem Wert, daß die *Quantenphysik* durch die Aufdeckung der *Komplementarität* die klassische Beantwortung des Realitätsproblems als nur im *Makrophysikalischen* zutreffend erweist.

Wenn wir unsere Beobachtungsergebnisse betreffs der Bewegung eines *Planeten* beschreiben, so geben wir dieser Beschreibung zusammenfassend eine solche Gestalt, daß wir dem Planeten eine *objektive Bahn* zuschreiben. Wir machen uns in dieser Darstellung unserer Beobachtungsergebnisse völlig frei von einer Bezugnahme auf die einzelnen konkreten *Beobachtungsakte*, bei welchen zu bestimmter Zeit durch ein Fernrohr von bestimmter Richtung der Planet gesehen oder photographiert wurde. Denn wir haben die wohlbegründete Überzeugung, daß für unseren beabsichtigten Zweck — *die Vorhersage der Resultate künftiger Beobachtungen* — eine Kenntnis der einzelnen früheren Beobachtungsakte *gar nicht nötig ist*: Wenn wir die objektive Beschreibung der Planetenbahn gewonnen haben (also die Konstruktion einer mathematischen Kurve, die der Planet mit bestimmter zeitabhängiger Geschwindigkeit durchläuft), dann *dürfen wir vergessen*, durch welche konkreten Beobachtungsakte wir die Kenntnis dieser objektiven Bahn *gewonnen* haben; alle zu machenden Vorhersagen leiten wir nämlich *ausschließlich* aus diesem *objektiven Vorgangsbilde* ab, *ohne* später noch einmal an die früheren Beobachtungsakte als solche zurückzudenken.

Entsprechendes gilt von allen Gegenständen der makrophysikalischen Untersuchung. So pflegen wir elektrische Beobachtungen darzustellen in einem objektiven Vorgangsbild, welches die Feldstärken \mathcal{E} , \mathcal{H} als Funktionen des Ortes und der Zeit angibt. Auch hier ist die Vorstellung berechtigt, daß der objektive Zustand oder Vorgang als solcher *unabhängig von den Beobachtungsakten da ist*; die vorgenommenen Beobachtungsakte dienen nur dazu, uns die sowieso vorhandenen objektiven Tatsachen *bekannt zu machen*, eine Abhängigkeit dieser objektiven Tatsachen von den Beobachtungsprozessen dagegen besteht ausdrücklich *nicht*, und die Vorhersage künftiger Beobachtungen stützt sich ausschließlich auf das objektive Vorgangsbild, ohne daß es dabei noch nötig wäre, zu wissen, durch welche konkreten Beobachtungsakte unsere Kenntnis des objektiven Vorgangs erreicht wurde. (Nur wenn wir etwa die *Zuverlässigkeit* dieser Beobachtungen bezweifeln, werden wir sie nachprüfen müssen.) Diese Möglichkeit, uns die physikalischen Vorgänge in objektiven Vorgangsbildern vorzustellen, derart, daß eine vollkommene *Trennung* erreicht wird zwischen den unmittelbar erlebten Beobachtungsakten einerseits und den als unabhängig von den Beobachtungsakten existierend gedachten objektiven Vorgängen — diese Möglichkeit bedeutet offenbar die entschiedenste Bejahung der These, *daß eine objektive Welt eindeutig konstruierbar sei*.

Unentbehrliche Unterlage für diese „Objektivierbarkeit“ der *physikalischen Vorgänge* ist die *klassische Kausalität*: diese Feststellung ist als der berechtigte, bleibende Kern der KANTSchen Behauptung einer *apriorischen Notwendigkeit* des Kausalitätsprinzips anzusehen (nach HEISENBERG). Nur kausal determinierte Beobachtungsinstrumente erlauben uns einen eindeutigen Rückschluß vom Beobachtungsergebnis auf den beobachteten objektiven Vorgang; können wir uns auf eine derartige Zuverlässigkeit der Messungsinstrumente nicht verlassen, so wird eine Trennung von Beobachtungsergebnis und objektivem Tatbestand unmöglich.

Weitere unentbehrliche Voraussetzung für klassisch-physikalische Konstruktion der objektiven Wirklichkeit ist aber die *Stetigkeit* aller physikalischen Abläufe. Denn nur dieses — in der ganzen klassischen Physik als erfüllt angenommene — Prinzip der Stetigkeit macht eine Idealisierung erlaubt, ohne deren *grundsätzliche* Anwendbarkeit wiederum das ganze Gebäude unmöglich wäre. Jede physikalische Messung erreicht nur eine *endliche Genauigkeit*; und nur das Stetigkeitsprinzip ermöglicht es, *auch aus ungenauen Messungen noch Schlüsse zu ziehen* — freilich nur ungenaue Schlüsse; aber *ohne* das Stetigkeitsprinzip könnten wir aus ungenauen Messungen *überhaupt nichts* erschließen. Gestützt auf das Stetigkeitsprinzip jedoch dürfen wir die nur endliche Genauigkeit aller Messungen als etwas ansehen, was nur *praktisch* und nicht *grundsätzlich* bedeutsam ist: für grundsätzliche Erwägungen stellen wir uns idealisierend vor, daß absolut exakte Messungen möglich wären.

Die Bedeutung dieses Punktes tritt noch deutlicher hervor, wenn wir uns klar machen, daß jeder Beobachtungs- und Messungsprozeß *eine physikalische Wechselwirkung zwischen Meßinstrument und Beobachtungsgegenstand erfordert*. Ein Thermometer, eine elektrische Probeladung oder Meßspule, oder etwa ein die Radiowellen „beobachtender“ Radioapparat bieten handgreifliche Beispiele für die ganz allgemeine Tatsache dar, daß in jedem Messungsakt *zugleich* mit der Beeinflussung des Meßinstrumentes durch das Beobachtete auch eine rückwirkende Beeinflussung des Beobachteten durch das Meßinstrument erfolgt. Diese „*Rückkoppelung*“ des Meßinstrumentes mit dem Beobachtungsobjekt liefert eine Grenze der Meßgenauigkeit; die idealisierende Vorstellung, daß es absolut exakte Messungen gäbe, verlangt also insbesondere die Annahme einer verschwindend kleinen Rückkoppelung bei diesen Messungen. Um aber die Rückkoppelung unbegrenzt verkleinern zu können, muß man eine *unbegrenzte Verfeinerung der Meßinstrumente* durchführen können: In bedeutungsvollster Weise zeigt sich hier das *Stetigkeitsprinzip* als Unterlage der in der klassischen Physik vollziehbaren *eindeutigen Konstruktion von objektiven Vorgängen, als deren Gesamtheit sich die „reale Außenwelt“ ergibt*.

Denn wenn die Quantenphysik nunmehr elementare physikalische Unstetigkeiten als ein Grundelement aller in ihren feineren Einzelheiten verfolgten Geschehnisse erweist — die gesamte *Atomistik* der Materie und des Lichtes ist ja nur ein spezieller Ausfluß dieser Unstetigkeiten in den Quantenerscheinungen —, so wird hierdurch und durch die damit unvermeidbar werdende Lockerung der klassischen Kausalität zu nur statistischer Gesetzmäßigkeit *auch die klassische Objektivierbarkeit der physikalischen Vorgänge aufgehoben*.

In der makroskopischen Physik kann man durch Wahl hinreichend *feiner* Instrumente die Rückwirkung auf das Objekt beliebig schwach machen und somit aus den Beobachtungsergebnissen eliminieren (was sich in der Praxis oft auch durch eine *rechnerische Korrektur* der durch Rückkoppelung schwach gefälschten Resultate bewerkstelligen läßt). Ist aber das untersuchte Objekt selber von atomarer Feinheit, so entfällt die Möglichkeit, *noch feinere* Meßinstrumente als das Objekt selbst zu wählen; wir müssen ja nach dem oben Gesagten sogar eine *makroskopische* Grobheit der Instrumente beibehalten, um ihr exakt kausales Funktionieren sicher zu stellen. Es ergibt sich unausweichlich, daß jede messende Beobachtung mit einem nicht zu vernachlässigenden *Eingriff* in das Objekt *naturgesetzlich verbunden* ist.

Wir haben in Kapitel 2, § 6 an einfachen Beispielen und später in Kapitel 3 in allgemeiner Form dargelegt (statistische Transformationstheorie), was mit dem Worte „*Komplementarität*“ gemeint sein soll. Die Quantenphysik hat uns zu der wunderbaren Einsicht geführt, daß der *Fortfall* der klassischen *Objektivierbarkeit* keineswegs ein Hindernis bildet für die

Formulierung *physikalischer Naturgesetze* in klarster und präzisester, also *mathematischer* Form. Die unvermeidbare Rückkoppelung, die bei jedem mikrophysikalischen Messungsakt eine *eingreifende Beeinflussung* des Objekts bedingt, führt keineswegs dazu, daß exakte, klare Messungen überhaupt unmöglich werden. Sondern wir können jede der verschiedenen (je durch einen hermiteschen Operator dargestellten) meßbaren Größen an einem atomaren Objekt zum Gegenstande einer Messung machen, die wir (wiederum idealisierend) als ganz *exakt* denken dürfen. Der durch die Rückkoppelung bedingte *störende Eingriff* wird dabei auf die *komplementäre* Größe verlegt, die damit der gleichzeitigen Beobachtung *prinzipiell entzogen* wird. Wir können aber in dieser Situation auch den sozusagen positiven Teil des Beobachtungsaktes *nicht* mehr, wie im klassischen Fall, als bloßes Zurkenntnisnehmen eines *sowieso vorhandenen* Tatbestandes ansehen. Wenn wir den *Ort* eines Elektrons gemessen haben, so ist der zugehörige *Impuls* völlig *undefiniert* geworden; eine nunmehr erfolgende Impulsmessung kann nicht mehr in sinnvoller Weise aufgefaßt werden also bloße Feststellung eines bereits vorhandenen objektiven Tatbestandes; sondern erst der neue Beobachtungsakt *schafft* eine Definiertheit des Impulses. Ebenso bedeutet die Ortsmessung am Elektron die Ausübung eines Zwanges, einen (*irgendeinen!*) definierten Ort *anzunehmen* — die Vorstellung, daß schon *vor* diesem Experiment der Ortsmessung ein definierter Ort *vorhanden gewesen* und lediglich für uns *unbekannt* gewesen sei, kann nicht durchgeführt werden. Besonders anschaulich liegen die Verhältnisse wiederum beim polarisierten Lichtquant (vgl. Kapitel 2, § 6, 1): Es ist nicht möglich, der Größe (y), die unseren früheren Verabredungen gemäß die Eigenwerte $+1$ und -1 hat (entsprechend Reflexion oder Durchgang durch den „Nicol x, y “), schon *vor* dem Experiment der Anwendung des Nicols einen stets definierten, wenn auch noch unbekanntem objektiven Wert zuzuschreiben. *Erst im Beobachtungsakt selber nimmt die gemessene Größe einen definierten Wert an.* Die für die klassische Vorstellungsweise charakteristische *Trennung* von Beobachtungsakt und objektivem Tatbestand wird undurchführbar; und das Denken in objektivierten Vorgangsbildern verliert seine Gültigkeit: Die Gesetze der Quantenmechanik stellen eine *direkte* Verbindung her zwischen den Resultaten aufeinanderfolgender Beobachtungsakte, ohne daß ein objektives Vorgangsbild dazwischen geschaltet wird. Die Unmöglichkeit einer solchen Zwischenschaltung — bei einem Elektron *gibt es keine* „objektive Bahn“, wie beim Planeten — gibt den Aussagen der Quantenmechanik einen *eigentümlich zerfetzten* Charakter: Die Beobachtungsakte geben uns hier *offensichtlich nicht mehr* „Kunde von einer anderen Welt, die hinter ihnen steht, und die unabhängig von uns ist“: „Während also die klassische Physik ein objektives Geschehen in Raum und Zeit zum Gegenstand hat, für dessen Existenz seine Beobachtung völlig irrelevant war, behandelt die Quantentheorie Vorgänge, die sozusagen nur in den Momenten der Beobachtung als raumzeitliche

Phänomene aufleuchten, und über die in der Zwischenzeit anschauliche physikalische Aussagen sinnlos sind“¹.

Die Unmöglichkeit, die Resultate der einzelnen Beobachtungsakte einem *zusammenhängenden* objektiven Vorgangsbild *einzuordnen*, bedingt, daß die Verknüpfung der Beobachtungsergebnisse nur eine *statistische* sein kann: erst durch Zusammenfassung zahlreicher wiederholter gleichartiger Serien von Beobachtungsakten bekommen wir ein Material, in welchem es Regelmäßigkeiten und gesetzliche Zusammenhänge gibt.

Man kann, wenn man will, diese aus den Paradoxien der Quantenphysik erwachsene Situation als ein *Scheitern* der Hoffnungen betrachten, welche die vor uns gewesenen Generationen physikalischer Forscher gehegt haben; man kann den von uns durchgeführten Verzicht auf die klassische Realitätsvorstellung eben als einen *Verzicht* bewerten. Aber jedenfalls muß demgegenüber auch die positive Seite unserer neuen Erkenntnisse gewürdigt werden: *Die Quantenphysik hat eine neue Form des naturwissenschaftlichen Denkens geschaffen.*

Der radikalen Absage an die Realitätsvorstellung der bisherigen Naturwissenschaft steht eine neuartige Form naturwissenschaftlichen Vorstellens und Denkens gegenüber, die an Klarheit und mathematischer Präzision der alten gleichrangig ist, und die dort, wo wir in der feinsten, äußersten Zerfaserung der physikalischen Erscheinungen den festen Halt der klassischen Realität verlieren, unsere Forschung nicht etwa endigen, sondern in neueröffnete Räume der Erkenntnis eintreten läßt. —

Um Mißverständnissen entgegenzutreten, sei noch bemerkt, daß die von uns studierte quantenphysikalische Abhängigkeit der beobachteten Tatsachen von den Beobachtungsprozessen nicht das geringste zu tun hat mit der bekannten philosophischen Erwägung, daß ohne beobachtende Subjekte auch eine objektive Realität nicht denkbar sei. Denn *diese* Erwägung soll ja für die Makrophysik ebenso gelten wie für die Mikrophysik; die uns hier beschäftigende Abhängigkeit ist aber etwas, was die Mikrophysik *unterscheidet* von der Makrophysik.

2. Das Beobachtungsproblem in der lebenden Substanz. Die neuen Erkenntnisse, die wir betreffs des mikrophysikalischen *Beobachtungsproblems* gewonnen haben, lassen uns auch in der Biologie altbekannte Tatsachen unter veränderten Gesichtswinkeln sehen. Vor allem hat BOHR einen fundamentalen Gedanken ausgesprochen, der eine Tatsache, die uns vollkommen vertraut ist, die man aber bislang niemals für eine theoretisch und prinzipiell bedeutsame Tatsache zu halten eine Veranlassung gefunden hatte, in einem ganz neuen Licht erblicken läßt. Nämlich die einfache Tatsache, daß jedem Versuch, die inneren Zustände eines Lebewesens genauer zu untersuchen, sehr enge Grenzen gezogen sind,

¹ HEISENBERG: Atomtheorie und Naturerkenntnis. Mitt. Univ.-Bundes Göttingen 16, 1 (1934).

wenn man eine Tötung (oder mindestens Schädigung) des Lebewesens vermeiden will. BOHR vermutet auch hier ein naturgesetzliches Komplementaritätsverhältnis, welches ein wesentliches Charakteristikum des Lebendigen sein dürfte: Nur die Leiche eines Organismus bietet sich beliebiger Untersuchung dar; das Leben selbst verhüllt sich der zu eindringlichen Beobachtung, und es erlischt, wenn es zu radikal ans Licht gezogen wird. Wir haben ja gelernt, den Vorgang der Beobachtung bei mikrophysikalischen Objekten nicht mehr, wie in der Makrophysik, als einen im wesentlichen nur im erkennenden Subjekt verlaufenden, das Objekt gar nicht berührenden Vorgang anzusehen; wir wissen, daß der Prozeß der Beobachtung einen Eingriff in das Objekt selbst bedeutet, der, in zu brutaler Weise durchgeführt, ein lebendes Objekt schwer angreifen muß.

Gegen diesen BOHRschen Gedanken ist von BLEULER¹ eingewandt worden, daß mit der Zeit noch die Erfindung immer besserer Beobachtungsinstrumente für die inneren Zustände des lebenden Organismus zu erwarten sei: „Schon jetzt kann man am lebenden Menschen die Herztätigkeit elektrisch kontrollieren oder in der Hirnrinde elektrische Funktionen nachweisen, die je nach ihrer Art verschieden lokalisiert sind, oder für einzelne Krankheiten, ja für Anstrengung der Aufmerksamkeit charakteristische Formen annehmen (BERGER, KORNMÜLLER).“

MEYERHOF² hat noch radikaler ausgesprochen, daß mit dieser Vorstellung „die Methoden gerade der produktivsten physiologischen Forschung verkannt werden“; denn die Physiologie sucht „gerade dasjenige zu ermöglichen, was nach Annahme der Physiker undurchführbar sein soll: den Lebensprozeß gleichzeitig unverändert zu erhalten und zu untersuchen“.

Ich glaube aber, daß diese beiden hochverdienten Forscher, für deren Anschauungen betreffs der biologischen Grundprobleme ich im übrigen die entschiedensten Sympathien hege, die von BOHR und mir vertretene These zu radikal aufgefaßt haben. Erstlich soll in keiner Weise verkannt werden, daß die Physiologie bislang tatsächlich ihre Aufgabe in der von MEYERHOF ausgedrückten Weise aufgefaßt hat, und daß diese Aufgabestellung berechtigt und notwendig ist: Unbedingt muß die Beobachtung von unbeeinflussten Lebensvorgängen soweit durchgeführt werden, wie irgend möglich ist; und wesentliche Fortschritte werden in dieser Richtung noch zu erreichen sein. Zweifellos werden die Beobachtungsinstrumente für die organischen Abläufe in der Zukunft noch viel feiner und erfolgreicher gestaltet werden als heute. Es fragt sich jedoch, ob diese Verfeinerung und Vervollständigung der Beobachtungen im Prinzip (in beliebig ferner Zukunft) beliebig weit getrieben werden kann, oder ob es auf Grund der Naturgesetze hierfür bestimmte Grenzen gibt, denen

¹ BLEULER, E.: Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich 78, 152 (1933).

² MEYERHOF, O.: Abh. d. Friesschen Schule 6, 1 (1933).

man sich immer besser annähern wird, die man aber niemals überschreiten kann. Von der heutigen biologischen Erfahrung *allein* ausgehend, wäre man schwerlich dazu gekommen, das letztere für zutreffend zu halten (oder überhaupt diese Alternative in Erwägung zu ziehen). Nachdem wir aber in der Physik — also in einer Wissenschaft, die dank der verhältnismäßigen Einfachheit der von ihr betrachteten Gegenstände zur vollkommensten, *mathematischen Präzision* ihrer Ergebnisse gelangen konnte — gelernt haben, daß es in der Natur derartige Grenzen der Beobachtungsmöglichkeiten gibt, werden wir doch nicht umhin können, jedenfalls die Frage der Beobachtungsmöglichkeiten innerhalb der lebenden Substanz sehr viel vorsichtiger zu beurteilen und ernstlicher zu prüfen, als wir sonst geneigt gewesen wären.

Es kann übrigens auch bei einer näheren Prüfung der heutigen und der vernünftigerweise zu erwartenden künftigen Beobachtungsmethoden für die inneren Zustände eines Organismus keineswegs eine Ablehnung dieses BOHRschen Gedankens begründet werden. Was die von BLEULER herangezogenen elektrischen Methoden betrifft, so liegt auf der Hand, daß es sich hier doch um wesentlich „makroskopische“ Effekte handelt, und daß — wie groß auch die künftigen Erfolge dieser höchst wichtigen und wunderbaren Untersuchungen sein mögen — es niemals möglich sein wird, derartige Methoden bis zur Erforschung des inneren Zustandes der *einzelnen Hirnrindenzellen* zu verfeinern. Wenn man, *ohne* den lebendigen Organismus zu *zerschneiden*, die Untersuchung seines inneren Zustandes bis zu höchstmöglicher Vollkommenheit treiben will, so wird die *Durchleuchtung* immer ein unentbehrliches Hilfsmittel bleiben. Wäre die erörterte BOHRsche These falsch, so sollte es also *im Prinzip* (d. h. ohne Verletzung von physikalischen und biologischen *Naturgesetzen*, wenn auch vielleicht unter Voraussetzung einer die normale menschliche billionenfach übertreffenden Intelligenz und technischen Geschicklichkeit) möglich sein, ohne Schädigung des Lebewesens die Untersuchung so weit zu treiben, daß bis zur messenden Beobachtungen der einzelnen Atome vorgedrungen und die durch die *atomphysikalische* Komplementarität gesetzten Grenzen der Beobachtung erreicht würden. Stellt man sich dies näher vor (denkt man insbesondere an die COMPTONschen Rückstöße $h\nu/c$, die sich bei solcher Durchstrahlung ergeben müßten), so wird man sich schwerlich der Überzeugungskraft der BOHRschen Vermutung entziehen können, daß diese Untersuchung das fragliche Lebewesen in eine Leiche verwandeln wird; daß also eine *biologische Komplementarität* der Untersuchung des Lebewesens *noch viel engere Grenzen* zieht, als bereits durch die Tatsache gesetzt sind, daß der Organismus sich aus Atomen zusammensetzt, und daß für jedes dieser Atome die Gesetze der Quantenphysik gelten.

Wo und wie diese Grenzen im einzelnen liegen, das kann natürlich nur durch eingehende künftige Forschungen ermittelt werden — wie denn überhaupt die Erforschung dieser von BOHR konzipierten

biologischen Komplementarität geradezu *das* Thema bilden dürfte für eine große und fruchtbare Epoche biologisch-physiologischer Forschung. Insbesondere kann heute wohl noch nicht entschieden werden, ob die bekannten, bei der zu medizinischen Zwecken durchgeführten Durchleuchtung eintretenden Schädigungen bereits einen Hinweis auf die biologischen Beobachtungsgrenzen bilden, oder ob es sich hier nur um sekundäre, nicht prinzipielle Effekte handelt, deren weitgehender Reduktion kein naturgesetzliches Hindernis grundsätzlich entgegensteht.

Es ist von philosophischer Seite oft versucht worden, das *subjektive Gefühl der „Willensfreiheit“* als nicht im Widerspruch mit der deterministischen Hypothese stehend nachzuweisen. Diese Betrachtungen sind mit der physikalischen Widerlegung der deterministischen Hypothese gegenstandslos geworden; und man wird, wie von BOHR angedeutet wurde, im Gegenteil jetzt einen engen *Parallelismus* in der einerseits physiologischen und andererseits psychischen Beschreibung der Reaktionen eines organischen Wesens vermuten dürfen. Dies möge an dem Gedankenexperiment der möglichst vollständigen „Beobachtung“ des Zustandes eines Menschen erläutert werden, welches wir uns der Anschaulichkeit halber *langsam* und Schritt für Schritt ausgeführt denken wollen: Physiologisch bedingen die mit der Beobachtung verbundenen *Eingriffe* eine fortschreitende *Abtötung* des Menschen, mit dem Endeffekt, daß tatsächlich eine möglichst vollkommene Beschreibung des Zustands zu einer Zeit t erreicht wird, und daß kausal deterministische Weiterentwicklung dieses Zustands („Verwesung“) für spätere Zeiten t' erzwungen wird. Dabei geht die „Unterdrückung der Akausalität“ genau parallel mit dem Prozeß der Abtötung. Beschreiben wir aber denselben Vorgang von der psychischen Seite aus, so wird die schädigende Wirkung der physiologischen Eingriffe sich bemerkbar machen in Empfindungen, welche — ähnlich wie etwa diejenigen eines Fieberzustandes — *das subjektive Gefühl der Willensfreiheit lähmend beeinflussen*; und es scheint berechtigt, zu vermuten, daß sich dabei im einzelnen ein sehr vollständiger Parallelismus bewähren wird zwischen dem physiologischen Prozeß der „Unterdrückung der Akausalität“ (durch „Beobachtung“) und diesem psychischen Prozeß des Hinschwindens und schließlichen Erlöschens der Willensempfindung.

Diese Erwägungen erhalten eine Stütze durch eine genauere Betrachtung des Problems der Willensfreiheit von der Seite der psychologischen Erfahrung aus. Eine verbreitete und geläufige Auffassung des Willensproblems argumentiert etwa folgendermaßen: Ein Mensch von bestimmtem Charakter wird hinsichtlich seiner Willensentscheidungen durch *Motive* zwangsläufig gelenkt; bei gegebenem Charakter muß eine gegebene Situation mit Notwendigkeit ganz bestimmte Willensentschlüsse bedingen. Wir müssen uns bei der kritischen Prüfung dieser Auffassung wieder an den obersten Grundsatz positivistischer Erkenntnis-

theorie erinnern: Es ist sinnlos, die *Existenz* von etwas zu behaupten, was nicht irgendwie *nachweisbar* ist. Es ist unmöglich, zu erklären, daß eine Determinierung der menschlichen Handlungen durch Charakter und Motive *besteht*, wenn es nicht wenigstens *ohne Widerspruch gegen die Naturgesetze denkbar* ist, daß auf Grund genauer Beobachtung der vorhandenen Charaktereigenschaften und Willensmotive *vorausgesagt* werde, welche Handlungen in einem konkreten Falle zu erwarten sind; und zwar *eindeutig und exakt* vorausgesagt, nicht nur qualitativ und wahrscheinlichkeitsmäßig, wie es der „Menschenkenner“ tatsächlich kann.

Die neuere Psychologie bietet aber tatsächlich Veranlassung, eine solche Vorherbestimmung als durch die Gesetze der Psychologie selbst verhindert anzusehen. Wir denken hier an die Grunderfahrungen der Psychologie der *unbewußten Prozesse*: ohne uns in die vielen noch umstrittenen Fragen insbesondere der Psychoanalyse einzulassen, dürfen wir doch folgendes als gesicherte Tatsachen ansehen. Eine Vorausbestimmung der menschlichen Willensentscheidungen kann im allgemeinen nicht gelingen ohne Kenntnis der Zustände im *Unbewußten* der betreffenden Person. Eine psychologische Untersuchung und Beobachtung der Zustände des Unbewußten („*Bewußtmachung*“) bedeutet aber einen *Eingriff* sehr einschneidender Art, die Zustände des Unbewußten werden dabei erheblich *abgeändert*: hierauf beruht ja die psychoanalytische *Therapie*, welche pathogene Komplexe eben *durch Bewußtmachung zerstört*. Wir haben hier also wieder eine ähnliche Situation, wie in der Quantenphysik: Es ist nicht möglich, die Beobachtungen, welche nach deterministischer Auffassung nötig wären, um die Unterlagen der Voraussage zu liefern, tatsächlich durchzuführen, ohne daß dabei eine die ganze Vorausbestimmung über den Haufen werfende Veränderung der beobachteten Zustände eintritt.

3. **Zwischenstufentheorie.** Auch unabhängig von den durch die Psychologie des Unbewußten erschlossenen tieferen psychologischen Vorgängen laden bekannte Tatsachen der psychologischen Alltagserfahrung zu einem Vergleich psychologischer und quantenphysikalischer Gesetzmäßigkeiten ein. Jedermann bekannt ist der primitive Umstand, daß die *psychologische Selbstbeobachtung* hinsichtlich ihrer Möglichkeiten und Leistungen begrenzt wird durch den Effekt, daß die diesbezügliche Einstellung der beobachtenden Aufmerksamkeit selber eine Modifikation des psychischen Gesamtzustandes bedeutet, und im allgemeinen Modifikationen auch speziell an den gerade zu beobachtenden Abläufen hervorruft. Ein instruktives Beispiel dafür bildet der Prozeß des *Einschlafens*, bei welchem ja die psychologische Selbstbeobachtung leicht soweit getrieben werden kann, daß die „hypnagogische“ erste Überleitung zum Traume noch einigermaßen beobachtet werden kann. Im weiteren Verlauf stellt sich jedoch ein unaufhebbares Verhältnis komplementärer **Ausschließung** heraus zwischen dem endgültigen Eintreten des Schlafes

und der Fortdauer bewußter, beobachtender Denktätigkeit. Als ein anderes treffendes Beispiel ist hervorgehoben, daß *Gemütsbewegungen* (etwa Zorn) durch eine analysierende Selbstbeobachtung bis zur Zerstörung beeinflußt werden¹. Diese Effekte sind offenbar wiederum ganz analog dem mikrophysikalischen Effekt der Beeinflussung eines beobachteten Objektes durch den Beobachtungsprozeß; und die Art und Weise, in welcher die Quantenmechanik es verstanden hat, unter voller Würdigung dieses Effektes doch zu ganz klaren Begriffsbildungen und Vorstellungen zu gelangen, dürfte auch für die künftige Entwicklung der Psychologie, ebenso wie der Biologie, lehrreiche Anregungen bieten. Von klassisch-physikalischen Denkgewohnheiten aus müßten wir ja einen solchen Effekt als ein *Hindernis* der Forschung betrachten, welches, soweit es nicht irgendwie *umgangen* werden kann, exakte und willkürfreie Resultate überhaupt nicht zustande kommen läßt; und auch in den außerphysikalischen Wissenschaften sind bislang wohl analoge Vorkommnisse — entsprechend der klassischen Vorstellung vom Verhältnis Objekt—Subjekt — nur als zu eliminierende oder zu umgehende unerwünschte Störungen aufgefaßt worden. Für die Quantenmechanik bedeutet jedoch dieser Effekt *nicht* eine „Störung“, welche die Anwendbarkeit präziser, exakter Begriffe begrenzt, und deren Ausschaltung deshalb zu erstreben ist; vielmehr ist dieser Effekt gerade ein *Hauptbestandteil* der durch die Theorie zu beschreibenden und in exakte Gesetze zu fassenden Naturvorgänge.

Die hier hervortretende Analogie des quantenphysikalischen Beobachtungsproblems zum Beobachtungsproblem in der „*inneren Erfahrung*“ verdient ernste Aufmerksamkeit. Die in der klassischen Physik entwickelte Möglichkeit, von einer objektiven Realität zu sprechen, deren Existenz von den konkreten Beobachtungsakten unabhängig ist, kann auch charakterisiert werden als Möglichkeit einer vollkommenen, klaren *Trennung von Objekt und Subjekt* im Beobachtungsprozeß. Dagegen besteht bei der psychologischen Selbstbeobachtung eine schwankende, unklare Abgrenzung zwischen Objekt und Subjekt: Gerade die Tatsache, daß der Beobachtungsprozeß selber das Beobachtete sich ändern läßt, verhindert hier die klare Trennung zwischen dem zum Objekt der Beobachtung gemachten Vorgängen einerseits und der Beobachtungstätigkeit des übrigbleibenden „Subjektes“ andererseits.

Man war deshalb früher geneigt, die psychologische Selbstbeobachtung aus dem Kreise wissenschaftlich verwertbarer Beobachtungen überhaupt

¹ Übrigens sind von WEININGER („Geschlecht und Charakter“) gewisse ganz bekannte, jedoch selten beachtete Empfindungen beschrieben („Henden“), für welche es charakteristisch ist, daß sie verschwinden, sobald ihnen intensivere Aufmerksamkeit zugelenkt wird. Es ist mir nicht bekannt, ob die sehr bemerkenswerten Betrachtungen WEININGERS zu diesem Gegenstand seitens der Fachpsychologie Beachtung gefunden haben.

auszuschließen¹; aber die Quantenphysik läßt uns jeden Versuch zur Rettung der klassischen Objekt—Subjekt-Vorstellung als unmöglich erkennen. Wir müssen auch in der überkommenen Auffassung des Verhältnisses Objekt—Subjekt eine Begriffsbildung sehen, *welche einem bestimmten Stande der wissenschaftlichen Erfahrung entspricht*, und welche abzuändern und zu vertiefen ist, *wenn wesentlich neue experimentelle Erfahrungen es verlangen*. Tatsächlich ist jetzt die in der klassischen Physik durchgeführte klare Trennung von Objekt und Subjekt *als nur approximativ durchführbar erkannt*: Verfolgen wir die physikalischen Prozesse bis in ihre atomaren Feinheiten, *so verschwimmen auch hier die Grenzen von Objekt und Subjekt im Beobachtungsprozeß*.

Damit erfährt unsere Feststellung, daß zwischen der positivistischen Methode und den Ergebnissen der Quantenphysik ein Verhältnis wechselseitiger Betätigung besteht, eine abermalige Vertiefung. Nach der älteren Vorstellung gab die objektive reale Außenwelt den festen, Rahmen ab für alle naturwissenschaftliche Beschreibung; indem lebende Organismen als Teilstücke dieser objektiven Realität aufgefaßt wurden, wurde deren Physiologie, einschließlich Gehirn- und Sinnesphysiologie, und im Anschluß daran ihre *Psychologie*, ein Unterkapitel der vollständigen Beschreibung der physikalischen Welt. Ohne die Fruchtbarkeit einer solchen Betrachtungsweise zu unterschätzen, wird man im Zusammenhange der positivistischen Methode eine andersartige Einordnung als tiefer führend betrachten. Werden nämlich nur die *unmittelbaren Erlebnistatsachen* als der eigentliche Gegenstand der wissenschaftlichen Untersuchung anerkannt, so erweist sich die — im weitesten Umfang aufgefaßte — *Psychologie* als die umfassendste Wissenschaft, und die Physik als ein *schmäler Ausschnitt* davon: insofern nämlich, als die Psychologie die *Gesamtheit* unserer Erlebnisse — einschließlich der des Traumes, der Halluzinationen, Wahnvorstellungen usw. und einschließlich aller Gefühlserlebnisse — zum Gegenstande hat, die Physik aber sich auf die genauere Betrachtung eines Teiles unserer Erlebnisse beschränkt, wie sie uns begegnen im wachen, nüchternen Zustand und unter Ausschaltung z. B. erotischer oder künstlerischer Erlebnisse.

Diese Einordnung unserer physikalischen Beobachtungserlebnisse in das Gesamtbild unserer Erlebnisse überhaupt gewinnt sehr an Natürlichkeit durch den Umstand, daß die in der klassisch-makroskopischen Physik mögliche saubere Herauspräparierung eines vom Subjekt klar unterschiedenen Objektes in der Mikrophysik undurchführbar wird: Die *Unterscheidung* solcher Beobachtungen, welche sich auf die „reale Außenwelt“ beziehen, und solcher, welche (als psychologische Selbstbeobachtung) die „Innenwelt“ des Subjekts zum Gegenstande nehmen, *wird damit ihrer grundsätzlichen Unüberbrückbarkeit entkleidet*. Damit wird

¹ „Schon AUGUSTE COMTE hat die introspektive Methode aus dem Bereich der Wissenschaften verwiesen“ (PH. FRANK).

aber die Unterscheidung von „Außenwelt“ und „Innenwelt“ zu einem sehr ernstem Problem.

M. PLANCK hat in seiner schon erwähnten eindringlichen kritischen (und ablehnenden) Erörterung der positivistischen Auffassung darauf hingewiesen, daß das Problem der *Sinnestäuschungen* das eigentlich *Entscheidende* für die Durchführung der positivistischen Auffassungsweise ist. Nach der gewöhnlichen Auffassung, die in diesem Punkte zunächst den Vorzug großer Einfachheit und Klarheit zu haben scheint, ist der *Unterschied von Sinneswahrnehmung und Sinnestäuschung* dadurch gegeben, daß der ersteren ein objektives, metaphysisches Korrelat entspricht, der letzteren dagegen nicht.

Wir müssen jedoch einwenden, daß die logischen Beziehungen *umgekehrt* liegen. Im tatsächlichen praktischen und wissenschaftlichen Leben ziehen wir die Kriterien der Unterscheidung von wahren und irrigen Feststellungen nicht aus der Vergleichung mit einer hypothetischen metaphysischen Realität, sondern *umgekehrt* setzen wir *nach vollzogener Unterscheidung* aus den für wahr anerkannten Feststellungen das Gesamtbild zusammen, das wir dann die „objektive“ oder „reale“ Welt nennen.

Die Aufgabe der erkenntnistheoretischen Besinnung kann hier keine andere sein, als die Klärung, Kritik und Bewertung derjenigen von metaphysischen Hypothesen unabhängigen Kriterien der Unterscheidung von Wahrnehmungen und Sinnestäuschungen, welche wir *tatsächlich* im täglichen Leben und in der wissenschaftlichen Arbeit anzuwenden pflegen. Es ist also eine — der tatsächlichen Übung entsprechende — nur auf sinnvolle, nichtmetaphysische Begriffe sich stützende *Definition* zu geben, die es uns ermöglicht, gewisse Erlebnisse als „Sinneswahrnehmungen“ von anderen, als „Sinnestäuschungen“ bezeichneten, zu unterscheiden: Erst durch eine solche, nur auf sinnvolle Aussagen gestützte Definition gewinnt der Begriff einer „objektiven“ oder „realen“ Welt einen *angebbaren Sinn*.

Versucht man, sich Rechenschaft zu geben von den Kriterien, die wir tatsächlich anzuwenden pflegen, um zu beurteilen, ob ein bestimmtes physikalisches Erlebnis als eine Feststellung oder als ein Irrtum zu bewerten sei, so wird man nicht umhin können, die *soziologische Funktion* der Wissenschaft eingehend zu betrachten. Daß die physikalischen Erlebnisse des Physikers BLONDLOT, des Entdeckers der angeblichen N-Strahlen — obwohl sie ein in sich sehr geschlossenes, widerspruchsfreies System bildeten —, von der physikalischen Wissenschaft keinesweges als gleichwertig mit den Erlebnissen des Physikers HEINRICH HERTZ betrachtet werden, das ist gar nicht anders zu rechtfertigen, als dadurch, daß es außer diesen zwei Physikern noch viele Physiker gab und gibt (z. B. WOOD!), und daß diese zahlreichen anderen Physiker Erlebnisse hatten und haben, welche mit denen von HERTZ in Einklang

und gesetzmäßigem Zusammenhang stehen (derart, daß man für bestimmte Apparaturen die Erlebnisse jedes heute mit ihnen experimentierenden Physikers auf Grund der HERTZschen Erlebnisse weitgehend voraussagen kann). Für die Erlebnisse von BLONDLOT ist Analoges nicht der Fall. Aber auch dieser Tatbestand wäre an sich noch nicht ausreichend, da man ja nie geglaubt hat, auf dem Wege der Abstimmungen und Mehrheitsbeschlüsse über physikalische Wahrheiten entscheiden zu können; es kommt aber hinzu, daß die Erlebnisse der für HERTZ und gegen BLONDLOT stimmenden Physiker ihrerseits in unlösbarer Beziehung zum System der *Technik* stehen und daher das Schwergewicht eines nicht fortzudenkenden Bestandteils unseres gesamten kulturellen Daseins gewinnen. Dies sind die *tatsächlichen* Grundlagen unserer wertenden Unterscheidung zutreffender und unzutreffender physikalischer Beobachtungen; und der Erkenntnistheoretiker muß seine Aufgabe *darin* sehen, diese tatsächlich benützten Kriterien in ihrem höchst verwickelten Aufbau kritisch zu durchleuchten und auf ihre Zuverlässigkeit und Eindeutigkeit zu prüfen. Keinesfalls kann es Aufgabe des Erkenntnistheoretikers sein, diese natürlichen Kriterien zu *ersetzen* durch andere, die sich auf hypothetisch-metaphysische, von unserem Standpunkt aus sinnlose Begriffe und Annahmen gründen. Freilich läßt die ausführliche Analyse der Vorgänge, durch welche sich im tatsächlichen Verlauf eine einheitliche Meinung der Physiker betreffs einer anfangs strittigen Frage zu bilden pflegt, in erheblichem Maße das Mitspielen und die Unentbehrlichkeit von außerphysikalischen „allgemein menschlichen“ Momenten erkennen, etwa in der Notwendigkeit einer *charakterlichen* Beurteilung konkreter Forscherpersönlichkeiten zwecks Beurteilung der Zuverlässigkeit ihrer Resultate. Dies, zusammengekommen mit der hervorgehobenen Notwendigkeit, Stützen und Bestätigungen der angenehmen Vorstellungen aus dem Gesamtzusammenhange des kulturellen Lebens zu entnehmen, scheint eine Bestätigung zu bilden für die schon oben gestreifte These von der inneren *Abhängigkeit* des wissenschaftlichen Weltbildes vom vorwissenschaftlichen, und vom Gesamtkulturzustand.

Wir haben oben der These von der Existenz einer „realen Welt“ einen positiven Sinn erteilen können, indem wir sie interpretierten als Behauptung der *eindeutigen Bestimmtheit* des aus unseren physikalischen Beobachtungen aufgebauten Gedankensystems. Wir können jetzt diese Interpretation genauer präzisieren: Je nach dem Grade der Zuverlässigkeit, mit welcher die verfügbaren Kriterien eine *eindeutige* Entscheidung darüber erlauben, *welche* sinnlichen Erlebnisse als *Wahrnehmungen* anzuerkennen und welche statt dessen für *Sinnestäuschungen* zu erklären sind, werden wir berechtigt sein, die eindeutige Konstruierbarkeit des Begriffes der realen Welt zu behaupten. Die soeben besprochenen Zweifel hinsichtlich der Eindeutigkeit der tatsächlichen Kriterien lassen jedoch vermuten, daß diese Behauptung durchaus nicht mit derjenigen Sicherheit

aufrecht zu erhalten ist, welche von den Anhängern der metaphysischen Hypothesenbildung als selbstverständlich angenommen wird.

Wenn wir, dem Obigen entsprechend, den Unterschied von „subjektiver“ *Innenwelt* und „objektiver“ *Außenwelt* dadurch *definieren*, daß die erstere nur eine „private“, die letztere dagegen eine „soziale“ Bedeutung hat, so legt das den Verdacht nahe, daß es sich hier nicht um einen absoluten Unterschied handelt, sondern, daß beides *nur gradweise verschieden* ist. Wir rechnen die Sonne zur objektiven „Außenwelt“, weil sie von *jedem* (nicht blinden) Menschen gesehen werden kann. Dagegen wird eine von Herrn A. halluzinierte Sonne eben deshalb als zu A's „Innenwelt“ gehörig angesehen, weil ihr Vorhandensein von sonst niemand bestätigt wird.

Man setze jedoch den Fall, daß eine „Massenhalluzination“ eintritt, bei der ein gewisses Ereignis von einer großen Schar von Menschen in gleicher Weise halluzinatorisch erlebt wird. Man wird einen solchen Fall schwerlich für außer aller Möglichkeit liegend ansehen dürfen; im Kreise einer religiösen Sekte etwa könnten sogar nicht ungünstige psychologische Bedingungen seines Eintretens gegeben sein. Man wäre in einem solchen Falle in grundsätzlicher Verlegenheit, absolut zuverlässige Kriterien der Entscheidung über Realität oder Nichtrealität des erlebten Ereignisses zu finden; die verschiedenen unmittelbar naheliegenden, *praktisch* fast immer ausreichenden Kriterien könnten unter bestimmten Bedingungen sämtlich unzureichend werden. Es dürfte deshalb *sinngemäß* sein, einen solchen Fall als eine *Zwischenstufe* zwischen individueller Innenwelt und objektiver Außenwelt zu betrachten. Die Vermutung, daß solche Zwischenstufen existieren, wollen wir kurz als „*Zwischenstufen-theorie*“ bezeichnen.

Ein direkter empirischer Hinweis auf eine Überbrückung des Abstandes von Innen- und Außenwelt kann vielleicht gesehen werden in den Erscheinungen der sog. Telepathie oder Gedankenübertragung. Die — den elementarsten Grundsätzen empirisch-wissenschaftlicher Naturforschung widersprechende — Neigung, diese oft behaupteten Phänomene für *a priori* unmöglich zu erklären, hat ihrer unbefangenen Untersuchung bis heute sehr im Wege gestanden; jedoch scheint die partielle Realität dieser Effekte zur Zeit auch von manchen nüchternen Beurteilern angenommen zu werden, insbesondere nachdem neueste Untersuchungen¹ mit den methodischen Hilfsmitteln moderner Laboratoriumspsychologie die Resultate früherer Untersuchungen² durchaus bestätigt haben.

¹ BENDER, H.: Z. Psychol. 135, 20 (1935). — RHINE, J. B.: Extra-Sensory Perception. Boston 1934.

² Vgl. insbesondere v. WASIELEWSKI: Telepathie und Hellsehen, 3. Aufl. Halle 1922. — TISCHNER, R.: Über Telepathie und Hellsehen. München-Wiesbaden 1921 und die zusammenfassenden Darstellungen von BAERWALDT: Okkultismus, Spiritismus. Leipzig-Berlin 1920. — TISCHNER, R.: Einführung in den Okkultismus und Spiritismus. München-Wiesbaden 1921. — DRIESCH, H.: Parapsychologie. München 1932.

Es scheint mir, daß die oben angedeutete, als „Zwischenstufentheorie“ gekennzeichnete Auffassungsweise geeignet ist, ein weitgehendes Verständnis wesentlicher Züge der fraglichen Erscheinungen zu erreichen; doch würde ein näheres Eingehen auf diese Verhältnisse den Rahmen dieses Buches überschreiten. Ein kurzer Hinweis hierauf schien jedoch an dieser Stelle erlaubt und angemessen, weil es aufschlußreich in bezug auf Bedeutung und Tragweite der entwickelten Gedankengänge ist, daß ihre aufklärende, Ordnung schaffende Kraft bis in Gebiete reicht, die so vollkommen außerhalb der Anwendbarkeit der gesamten bisherigen Naturbeschreibung liegen, daß sogar die unvoreingenommene Beobachtung und Tatsachenfeststellung in diesen Erscheinungsgebieten weit hin gelähmt worden ist durch die Unmöglichkeit, diese Erfahrungstatsachen dem sonstigen System unserer wissenschaftlichen Weltbeschreibung anzugliedern.

Literaturverzeichnis.

Eine Reihe wertvoller Berichte finden sich in den physikalischen Handbüchern:

1. GEIGER, H. u. K. SCHEEL: Handbuch der Physik. Berlin: Julius Springer. Vergl. insbes. die folgenden Bände: 1. Aufl., Bd. 4. 1929. Bd. 20. 1928. Bd. 21. 1929. Bd. 23. 1926. 2. Aufl., Bd. 24; 1/2. 1933.
2. WIEN, W. u. F. HARMS: Handbuch der Experimentalphysik. Vergl. insbes. die Bände: Bd. 21. Leipzig 1927. Bd. 22. Leipzig 1929. Ferner aus dem Ergänzungswerk (herausgeg. von M. WIEN und G. JOOS): Bd. 1. 1931. Bd. 2. 1935.
3. MARX, E.: Handbuch der Radiologie. 2. Aufl., Bd. 6; 1/2. Leipzig 1933/34.
4. MÜLLER-POUILLET: Lehrbuch der Physik, 11. Aufl., Bd. 2; 2, 2. Braunschweig 1929. Bd. 4, 3. Braunschweig 1933.

Ferner sei allgemein hingewiesen auf die Sammlung:

5. Struktur der Materie in Einzeldarstellungen. Begründet von M. BORN und J. FRANCK. Herausgeg. von F. HUND und H. MARK. Berlin: Julius Springer. Ab 1925.

Aus der sonstigen reichhaltigen Literatur seien folgende Werke genannt, die dem Leser dieses Buches je nach Belieben ein tieferes Eindringen nach verschiedenen Richtungen ermöglichen:

6. BORN, M. u. P. JORDAN: Elementare Quantenmechanik. Berlin: Julius Springer 1930.
7. BROGLIE, L. DE: Untersuchungen zur Quantentheorie. Übersetzt von W. BECKER. Leipzig 1927.
8. DIRAC, P. A. M.: Die Prinzipien der Quantenmechanik. Deutsch von W. BLOCH. Leipzig 1930.
9. HEISENBERG, W.: Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie. Leipzig 1930.
10. JORDAN, P.: Statistische Mechanik auf quantentheoretischer Grundlage. Braunschweig 1933.
11. NEUMANN, J. v.: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin: Julius Springer 1932.
12. SCHRÖDINGER, E.: Abhandlungen zur Wellenmechanik, 2. Aufl. Leipzig 1928.
13. SOMMERFELD, A.: Atombau und Spektrallinien, 5. Aufl. Braunschweig 1931. Wellenmechanischer Ergänzungsband. Braunschweig 1929.
14. WEYL, H.: Gruppentheorie und Quantenmechanik, 2. Aufl. Leipzig 1931
15. WAERDEN, B. L. VAN DER: Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik. Berlin: Julius Springer 1932.
16. WIGNER, E.: Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantentheorie der Atomspektren. Braunschweig 1931.

Philosophie der Quantenphysik.

17. BOHR, N.: Licht und Leben. Naturwiss. 21, 245, 1933.
18. HEISENBERG, W.: Wandlungen in den Grundlagen der Naturwissenschaften; 2. Aufl. Leipzig 1936.
19. JORDAN, P.: Physikalisches Denken in der neuen Zeit. Hamburg 1935.
Das historisch grundlegende Werk für die gesamte Quantentheorie ist:
20. PLANCK, M.: Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, 1. Aufl. 1906; 5. Aufl. Leipzig 1923.