

**Theorie der
Schwachstromtechnik
von
J. Wallot**

Einführung in die Theorie der Schwachstromtechnik

von

Dr. phil. J. Wallot

a. o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin
Wissenschaftl. Mitarbeiter der Siemens & Halske A.-G.

Mit 347 Textabbildungen



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH
1932

ISBN 978-3-662-05477-2 ISBN 978-3-662-05522-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-05522-9

**Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.**

Copyright 1932 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg
Ursprünglich erschienen bei **Julius Springer** in Berlin 1932
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1932

Vorwort.

Dieses Buch ist hervorgegangen aus Unterrichtskursen, die ich seit einer Reihe von Jahren im Zentrallaboratorium der Siemens & Halske A.-G. abhalte. Da an diesen Kursen nicht nur an Hoch- und Fachschulen ausgebildete Ingenieure und Physiker, sondern auch begabte Angestellte ohne regelrechte Ausbildung teilnehmen, pflege ich nur geringe Vorkenntnisse insbesondere in der Mathematik vorauszusetzen. Entsprechend braucht auch der Leser dieses Buchs von der Trigonometrie, der Determinantentheorie, der analytischen Geometrie und der Differential- und Integralrechnung nur das zu wissen, was er in jeder, auch der kürzesten, Darstellung dieser Gebiete findet. Ein Verzicht auf die Anwendung der höheren Mathematik hat nicht in Frage kommen können, weil die vorgetragenen Theorien ohnehin nur dem bereits Vorgebildeten und Geübten zugänglich sind, und weil man heutzutage die nötigen Vorkenntnisse bei jedem voraussetzen kann, der sich für die Theorie der Schwachstromtechnik interessiert.

Auch eine gewisse Vertrautheit mit den physikalischen Grundbegriffen und den Problemen der Praxis setze ich durchaus voraus. Ich beginne zwar mit einer kurzen Darstellung der physikalischen Grundbegriffe. Damit beabsichtige ich aber keineswegs, Laien für die späteren Abschnitte vorzubilden; ich möchte vielmehr die Aufmerksamkeit des Lesers auf solche für die Schwachstromtechnik wichtige Punkte lenken, die er in den Lehrbüchern der Elektrizitätslehre entweder überhaupt nicht findet oder über die der Anfänger zunächst hinwegzulesen pflegt.

Aus Rücksicht auf den Umfang des Buchs habe ich einen großen Teil dessen, was ich in meinen Kursen bringe, streichen müssen. Hiervon sind besonders die Meßtechnik, die Röhrentechnik, die Elektroakustik und die Hochfrequenztechnik betroffen worden.

Ich habe mich bemüht, eine bei aller Kürze leicht verständliche Darstellung der wichtigsten Begriffsbildungen und Entwicklungen zu geben. Im Vordergrund steht immer das Interesse an der physikalischen Erscheinung und ihrer Erklärung. Nicht aufgenommen worden sind daher Ableitungen, die sich — soviel ich sehe — nicht physikalisch durchsichtig darstellen lassen oder bei denen der mathematische Aufwand in keinem rechten Verhältnis zu der Wichtigkeit des Endergebnisses steht. Ich habe in solchen — immerhin seltenen — Fällen auf die ausführlicheren Darstellungen verwiesen. Wer seine Kenntnisse über das von mir Gegebene hinaus erweitern will, der sei vor allem auf das vorzügliche Lehrbuch von Franz Breisig: „Theoretische Telegraphie“ (2. Auflage, Braunschweig: Friedrich Vieweg & Sohn 1924) sowie auf die außerordentlich klaren Originalarbeiten von K. W. Wagner hingewiesen. Über Teilgebiete findet man ausführliche Aufsätze meist aus der Feder von H. Schulz in der Zeitschrift „Telegraphen- und Fernsprechtechnik“.

Auch nach der Seite der praktischen Anwendungen hin habe ich mir Beschränkung auferlegen müssen. Die eingestreuten Zahlenbeispiele sollen in erster Linie der Veranschaulichung der allgemeinen Theorien dienen. Die Schaltbilder sind durchweg als schematische Zeichnungen aufzufassen. Das Buch soll kein

Handbuch sein, in dem der Praktiker alles findet, was er braucht; ein solches könnte bei dem heutigen Stand der Fernmeldetechnik auch nicht mehr von einem einzelnen, sondern nur in Gemeinschaftsarbeit vieler Verfasser geschaffen werden.

Da das Buch ein Lehrbuch sein soll, habe ich den Stoff weniger nach logischen, als nach didaktischen Gesichtspunkten gegliedert. Immer habe ich der nach meiner Ansicht einfachsten Darstellung den Vorzug gegeben; es hat daher leider auch manche in der geschichtlichen Entwicklung bedeutungsvolle Ableitung fallen müssen. Umgekehrt ist manche lehrreiche Angabe stehengeblieben, auch wenn ihre Bedeutung für die heutige Technik nicht mehr allzu groß ist.

Gar keinen Wert habe ich auf Vollständigkeit der Literaturangaben gelegt. Eine sehr reichhaltige Literatursammlung findet man z. B. in dem bekannten Buch „Fernkabeltelephonie“ von A. Engelhardt (2. Auflage. Berlin-Schöneberg: Dr. A. Tetzlaff 1930).

Meinen Kollegen, die die Freundlichkeit gehabt haben, einige Abschnitte des Buchs durchzusehen, danke ich herzlichst für ihre wertvollen Ratschläge; der Verlagsbuchhandlung für ihr Entgegenkommen und die jahrelang bewiesene Geduld.

Berlin-Siemensstadt, im November 1931.

J. Wallot.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Gleichstromschaltungen	I
Das Ohmsche Gesetz S. 1. — Widerstand und Leitwert eines metallischen Schließungskreises S. 2. — Größengleichungen S. 2. — Einheit der Stromstärke S. 3. — Einheiten des Widerstands und der übrigen elektrischen Größen S. 3. — Richtungs- und Vorzeichenregeln S. 4. — Die Abhängigkeit der Stromstärke von den Eigenschaften des Schließungsdrahtes S. 4. — Widerstand von Leitungen S. 5. — Isolationswiderstand von Leitungen S. 5. — Kirchhoffsche Regeln S. 5. — Klemmenspannungen S. 7. — Zweipole: Zwei Widerstände hintereinander (in Reihe, Serie) S. 7. — Zweipole: Zwei Widerstände nebeneinander (parallel) S. 8. — Widerstand und Leitwert parallel S. 8. — Verbindung von Reihen- und Parallelschaltung; Spannungsteilung S. 8. — Zweipol und Zweipolquelle; Grundgleichungen S. 10. — Zusammenschaltung von Zweipol und Zweipolquelle S. 11. — Kompensationsverfahren S. 11. — Wheatstonesche Brücke S. 12. — Bestimmung der Lage eines Erdschlusses in einer Kabelader S. 12. — Berechnung des Brückenstroms S. 13. — Thomsonbrücke S. 13. — Umwandlung eines Dreiecks in einen Stern S. 14. — Duale Beziehungen S. 15. — Die Theorie der Zweipolquelle in den dual entsprechenden Parametern S. 15.	
II. Elektrische Felder	16
Elektrische Feldstärke S. 16. — Feldstärke und Stromdichte; Ohmsches Gesetz S. 17. — Elektrische Arbeit und elektrische Spannung S. 17. — Zusammenhang zwischen Kraft- und Spannungseinheit S. 18. — Stromwärme S. 18. — Die Leistung als strömende Energie; Klemmenleistung S. 19. — Anpassung des Verbrauchers an den Erzeuger S. 20. — Allgemeine Definition der Spannung S. 20. — Elektrostatisches Feld S. 20. — Wirbelfreies Feld S. 21. — Potential S. 21. — Feldstärke und Potentialgefälle S. 21. — Elektromotorische Kräfte S. 22. — Coulombsches Gesetz S. 23. — Elektrische Verschiebung S. 23. — Verschiebungsfeld eines langen Drahts S. 24. — Verschiebungsfeld zwischen zwei parallelen Ebenen S. 24. — Messung der Verschiebung S. 25. — Zusammenhang zwischen Verschiebung und Feldstärke S. 25. — Verschiebungsströme S. 26. — Kapazität S. 26. — Übliche Einheit der Kapazität S. 27. — Energieinhalt eines Kondensators S. 27. — Stromkreis mit Widerstand und Kondensator S. 28. — Sinusspannungen S. 29. — Scheitelwert und Frequenz S. 29. — Anfangsphase S. 30. — Dielektrischer Leitwert bei Sinusspannungen S. 30. — Dreieck aus Verschiebungsströmen S. 31. — Die Teilkapazitäten einer symmetrischen Doppelleitung S. 31. — Symmetrische Kapazität einer symmetrischen Doppelfreileitung S. 34. — Simultankapazität einer Doppelleitung S. 34. — Kapazität von Kabeladern S. 35.	
III. Magnetische Felder	35
Erste Definition der magnetischen Induktion S. 35. — Der Drehsinn der magnetischen Induktion S. 36. — Der axiale Vektor der magnetischen Induktion, Richtungsregel S. 36. — Zweite Definition der magnetischen Induktion S. 37. — Drehsinn- und Richtungsregeln für den Induktionsstrom S. 38. — Bewegung eines stromführenden Leiters in einem magnetischen Feld S. 38. — Gesetz von Biot und Savart S. 38. — Magnetische Feldstärke S. 39. — Permeabilität der Nichteisenkörper S. 40. — Die Ringspule S. 41. — Das Ohmsche Gesetz für den magnetischen Kreis S. 41. — Hysteresis S. 42. — Hysteresisverluste S. 44. — Reversible Permeabilität S. 44. — Einführung der reversiblen Permeabilitäten und der eingepprägten magnetomotorischen Kräfte in das Ohmsche Gesetz für den magnetischen Kreis S. 45. — Scherungskorrektur bei der geschlitzten Ringspule S. 45. — Remanenz des Materials und wirksame Remanenz S. 47. — Induktionsgesetz S. 47. — Das Induktionsgesetz als Feldgesetz S. 48. — Induktivität einer Ringspule mit nicht ferromagnetischem Kern S. 50. — Induktiver Widerstand bei Sinusströmen S. 50. — Induk-	

tität einer Ringspule mit ferromagnetischem Kern S. 50. — Der streuungslose Ringübertrager S. 51. — Kopplungsfaktor und Streuzahl S. 52. — Wirbelströme S. 52. — Hautwirkung S. 52. — Energieinhalt einer Spule S. 53. — Stromkreis mit Widerstand, Kapazität und Induktivität S. 54. — Berechnung von Induktivitäten S. 55. — Gegeninduktivität zweier paralleler Drähte S. 56. — Selbstinduktivität eines Drahtes kreisförmigen Querschnitts S. 57. — Selbstinduktivität einer Doppelleitung S. 57.	
IV. Wechselstromschaltungen	58
Allgemeines S. 58. — Messung der Stärke von Wechselströmen S. 59. — Die Klemmenleistung für Wechselstrom S. 60. — Wechselstromkreis mit Widerstand und Induktivität S. 61. — Zeichnerisches Verfahren S. 62. — Der Lehrsatz von Euler S. 63. — Lösung der Schaltaufgabe mit Hilfe des Eulerschen Lehrsatzes S. 64. — Komplexe Spannungen, Ströme und Widerstände S. 65. — Umrechnungen S. 66. — Kreise mit Kapazitäten S. 67. — Verwickeltere Schaltungen S. 68. — Zeichnerisches Verfahren und komplexe Rechnung S. 68. — Zeichnerische Bestimmung der komplexen Größe, die zu einer gegebenen reziprok ist; Inversion S. 68. — Die Klemmenleistung in komplexer Darstellung S. 69. — Energieanpassung S. 70. — Gegenseitige Vernichtung von Blindwiderständen S. 71. — Spannungs- und Stromresonanz S. 73. — Die Bedingung der Grenzdämpfung S. 73. — Widerstandsmessung mit der Brücke S. 74. — Frequenzbrücke S. 74. — Kompensationsmethoden. Frankesche Maschine S. 75. — Kompensator nach Pedersen S. 76. — Phasenbrücke S. 76. — Frequenzabhängigkeiten der Schaltelemente S. 76. — Frequenzabhängigkeit der Widerstände und Leitwerte von Zweipolen S. 77. — Frequenzabhängigkeit des Stroms bei einer Reihenschaltung von Induktivität und Kapazität S. 78. — Resonanzkurve der Kondensatorspannung bei einer Reihenschaltung von Induktivität und Kapazität S. 79. — Zeichnerische Darstellung der Frequenzgänge komplexer Größen S. 81. — Konstruktion der Leitwertkurve aus der Widerstandskurve S. 83. — Ortskurven, insbesondere Kreisdiagramme S. 83. — Umbildung eines komplexen Widerstandes durch eine Reihen- oder Parallelschaltung S. 84. — Umwandlung einer Hintereinanderschaltung in eine Parallelschaltung S. 86.	
V. Schaltvorgänge	86
Telephonie und Telegraphie S. 86. — Kreis mit Widerstand und Induktivität; Einschaltvorgang S. 87. — Beliebiger Augenblick der Einschaltung S. 88. — Abschaltung einer konstanten EMK ohne Öffnung des Stromkreises S. 88. — Telegraphierzeichen S. 89. — Telegraphiergeschwindigkeit S. 90. — Telegraphenschriften S. 90. — Unterbrechung eines Stromkreises S. 91. — Kreis mit Widerstand und Kapazität S. 91. — Unverzweigter Kreis mit Widerstand, Induktivität und Kapazität S. 92. — Schwingungsvorgang S. 93. — Bestimmung der Konstanten S. 94. — Logarithmisches Dekrement S. 95. — Schwingungsfreier Vorgang S. 96. — Grenzfall S. 97. — Bestimmung der Konstanten S. 97. — Funkenverhütung durch Kondensatoren S. 98. — Schaltvorgänge in zweimaschigen Systemen S. 99. — Einschaltvorgang beim Telegraphenkabel S. 100. — Telegraphische Hilfsschaltungen S. 101. — Verwickeltere Schaltungen S. 102.	
VI. Vierpole	102
Der Begriff des Vierpols S. 102. — Die Grundgleichungen des linearen Vierpols S. 103. — Umkehr des Vierpols S. 104. — Messung der Parameter \mathfrak{A}_1 , \mathfrak{A}_2 und \mathfrak{C} S. 104. — Zusammenschaltung eines Vierpols mit einem Zweipol S. 106. — Zusammenschaltung eines Vierpols mit einer Zweipolquelle S. 106. — Zusammenschaltung einer Zweipolquelle, eines Vierpols und eines verbrauchenden Zweipols S. 107. — Lose Kopplung S. 108. — Der Scheinwiderstand eines durch einen Verbraucher abgeschlossenen Vierpols S. 108. — Die Spannungsübersetzung S. 109. — Anpassung eines symmetrischen Vierpols an seinen Verbraucher S. 109. — Wellentheorie des Vierpols S. 111. — Die Übersetzungen in der Wellentheorie des Vierpols S. 111. — Die Scheinwiderstände in der Wellentheorie des Vierpols S. 112. — Der Anfangs- und der Endstrom in der Wellentheorie des Vierpols S. 112. — Messung der Wellenwiderstände S. 113. — Messung des Übertragungsmaßes durch Spannungsvergleich bei Anpassung S. 114. — Messung des Übertragungsmaßes durch Spannungsvergleich bei Leerlauf S. 114. — Berechnung des Übertragungsmaßes aus Kurzschluß- und Leerlaufwiderstand S. 115. — Kette von Vierpolen S. 116. — Angepaßte Vierpole S. 116. — Das Dämpfungsmaß als Maß der Übertragungsfähigkeit S. 117. — Betriebsdämpfung und Betriebsübertragungsmaß S. 117. — Messung der Betriebsdämpfung S. 119. — Der Wirkungsgrad des Vierpols S. 120. — Zahlenwerte der Dämpfung S. 120.	

VII. Übertrager 121

Der verlust- und streuungsfreie Übertrager (Transformator) S. 121. — Berücksichtigung der Wicklungssinne S. 122. — Der Sparübertrager S. 123. — Kupferverluste, Streuung, Hysteresis- und Wirbelstromverluste S. 123. — Spulenkapazität S. 124. — Vierpolparameter des Übertragers bei Berücksichtigung der Nebeneinflüsse S. 125. — Der Leerlaufwiderstand des Übertragers S. 126. — Ersatzbilder des Übertragers S. 128. — Die Vierpoldämpfung des Übertragers bei mittleren Frequenzen; seine Anpassung an die Abschlußwiderstände S. 129. — Die Betriebsdämpfung des Übertragers bei der Frequenz ω_m S. 131. — Der Übertrager bei niedrigen Sprechfrequenzen S. 131. — Der Übertrager bei höheren Frequenzen S. 131. — Die Betriebsdämpfung des Übertragers bei den Scheinfrequenzen S. 132. — Der Scheinwiderstand eines mit Widerständen beschalteten Übertragers S. 133. — Die Übersetzung der elektromotorischen Kraft S. 134. — Der Einschaltvorgang beim Übertrager S. 135.

VIII. Röhrenverstärker 136

Allgemeines S. 136. — Elektrizitätsträger S. 136. — Durchgang der Elektrizität durch Gase S. 137. — Raumladungsformel bei ebenen Elektroden S. 138. — Zylindrische Anordnung S. 140. — Elektronenröhre mit Steuerelektrode S. 141. — Die Kennlinienschar der Gitterröhre S. 141. — Erklärung der Kennlinienschar; Durchgriff S. 142. — Die Verschiebungsspannung S. 143. — Die Bewegung der Elektronen im Innern einer Röhre S. 144. — Allgemeine Definition des Durchgriffs S. 144. — Steilheit S. 145. — Innerer Widerstand S. 145. — Die Grundgleichung der Elektronenröhre S. 145. — Abschluß der Röhre durch einen Verbraucher; Spannungsverstärkung S. 147. — Die in den Verbraucher übergehende Wechselstromleistung S. 148. — Die größte einer Röhre entnehmbare Wechselstromleistung S. 148. — Die Energieströmung bei der Röhre S. 150. — Gittervorspannung und Spannung der Anodenbatterie S. 151. — Richardsonsche Formel S. 151. — Die Betriebsverstärkung der Röhre und ihre Messung S. 152. — Der Eingangswiderstand der Röhre S. 153. — Selbsterregung eines Kreises durch Rückkopplung S. 154. — Die Selbsterregungsformel S. 155.

IX. Gleichmäßige Leitungen 156

Grunddefinitionen S. 156. — Übertragungsmaß und Wellenwiderstand der Sternschaltung S. 157. — Übertragungsmaß und Wellenwiderstand der Dreiecksschaltung S. 157. — Übertragungsmaß und Wellenwiderstand der gleichmäßigen Leitung S. 158. — Messung der bezogenen Werte R, L, G, C S. 159. — Dämpfungsmaß und Winkelmaß der gleichmäßigen Leitung S. 159. — Verlustarme und „verzerrungsfreie“ Leitung S. 160. — Dünndrätige Freileitung S. 161. — Kabel S. 162. — Der Wellenwiderstand der gleichmäßigen Leitung S. 163. — Zahlenwerte des Dämpfungsmaßes und des Wellenwiderstandes von Freileitungen und Kabeln S. 164. — Frequenzabhängigkeit des Kurzschluß- und Leerlaufwiderstands einer Freileitung S. 164. — Gegenseitige Beeinflussung S. 167. — Paar-, Vier- und Achterverteilung S. 168. — Erhöhung der Übertragungsfähigkeit gleichmäßiger Leitungen S. 169. — Krarupfersprechkabel S. 169. — Kraruptelegraphenkabel S. 170. — Verteilung von Spannung und Strom auf einer Leitung S. 171. — Zerlegung in Teilwellen S. 171. — Phasengeschwindigkeit bei den verschiedenen Leitungsarten S. 173. — Wellenlänge S. 174. — Spannungs- und Stromwellen auf einer Leitung mit beliebiger Stromquelle und beliebigem Verbraucher S. 174. — Zerlegung in eine vorwärtslaufende und eine zurückgeworfene Welle S. 175. — Der Scheinwiderstand als Funktion der Anpassungsmaße S. 176. — Hintereinanderschaltung mehrerer Leitungen verschiedener Eigenschaften S. 177. — Hintereinanderschaltung zweier Vierpole hohen Dämpfungsmaßes S. 178. — Das Betriebsübertragungsmaß als Funktion der Anpassungsmaße S. 179. — Die Methode des Tangensnetzes S. 179. — Die Gestalt des Tangensnetzes S. 180. — Die Leitungsstrecke S. 181. — Zahlenbeispiel für die Berechnung des Scheinwiderstandes S. 182. — Das Kosinusnetz S. 182. — Veranschaulichung des Stromverlaufs S. 183. — Veranschaulichung des Spannungsverlaufs S. 184. — Veranschaulichung des Leistungsverlaufs S. 184. — Höchste Leistungsaufnahme des Verbrauchers S. 186. — Berechnung zusammengesetzter Leitungen S. 186.

X. Pupinkabel 187

Geschichtliches S. 187. — Pupinleitungen und Spulenleitungen S. 188. — Dämpfungsmaß der widerstandsfreien Spulenleitung S. 188. — Dämpfungsmaß und Winkelmaß einer einfachen Sternschaltung bei Berücksichtigung der Widerstände

	S. 191. — Anwendung auf das Spulenleitungsglied S. 191. — Diskussion des Frequenzgangs der Dämpfung S. 192. — Grenzfrequenz und Verzerrungsfreiheit S. 194. — Wahl der Spuleninduktivität S. 194. — Einfluß der Ableitungsdämpfung S. 195. — Genauere Theorie des Übertragungsmaßes einer Pupinleitung S. 196. — Der Frequenzgang des Wellenwiderstands einer verlustfreien Spulenleitung S. 198. — Der Frequenzgang des Wellenwiderstands einer Spulenleitung bei Berücksichtigung der Verluste S. 199. — Einfluß der Anlaufstrecke S. 201. — Schwankungen des Wellenwiderstands infolge von Ungleichmäßigkeiten S. 202. — Der Bau der Pupinspulen S. 204. — Verlustwiderstand von Pupinspulen S. 205. — Flattern S. 207. — Phantomschaltung S. 207. — Einfluß der Verseilung auf die Belastung von Phantomkabeln S. 208.	
XI. Messungen an Leitungen		209
	Messung der Ableitung und der Kapazität von Kabelstücken S. 209. — Betriebskapazität S. 210. — Messung des Wellenwiderstandes und des Übertragungsmaßes von Leitungen S. 210. — Vergleichsvierpole (Eichleitungen) S. 211. — Der Schleifendämpfungsmesser S. 212. — Der Streckendämpfungsmesser S. 213. — Pegelmessung S. 213.	
XII. Störungen durch benachbarte Leitungen		216
	Allgemeines über den Einfluß von Starkstromleitungen auf Fernmeldeleitungen S. 216. — Galvanische Kopplung S. 216. — Elektrische Kopplung S. 216. — Genauere Theorie der Starkstrombeeinflussung S. 219. — Magnetische Kopplung S. 221. — Kompensation der magnetischen Einwirkung S. 222. — Einfluß der Symmetrie der Fernmeldeleitungen S. 223. — Nebensprechen S. 224. — Vereinfachung des Schaltbildes S. 224. — Nebensprechen zwischen den Stämmen („Übersprechen“) S. 226. — Nebensprechen zwischen Stamm und Phantom („Mitsprechen“). — Messung der Kabelunsymmetrien S. 228. — Kreuzungsausgleich und Kondensatorausgleich S. 229. — Nebensprechen durch Unsymmetrien in den Widerständen und Induktivitäten S. 230. — Das Zusammenwirken der Kopplungen bei längeren Leitungen S. 232. — Der Ausgleich des Nebensprechens in längeren Pupinkabeln S. 235. — Das Dämpfungsmaß des Nebensprechens und seine Messung S. 235.	
XIII. Wellenfilter		237
	Allgemeines S. 237. — Lage des Durchlaßbereichs S. 237. — Die Grundgleichungen der einfachen Filtertheorie S. 238. — Grundfilter S. 238. — Spulenleitung und Kondensatorkette S. 239. — Das Doppelsieb S. 241. — Der Durchlaßbereich bei einem beliebigen Stern- oder Dreiecksfilter S. 242. — Der Wellenwiderstand bei einem beliebigen Stern- oder Dreiecksfilter S. 242. — Der Durchlaßbereich bei einem Wellenfilter aus drei Elementen S. 243. — Der Wellenwiderstand eines Filters aus drei Elementen S. 244. — Anpassung an die abschließenden Widerstände S. 245. — Wellenfilter nach Zobel S. 246. — Die Frequenzabhängigkeit des Winkelmaßes im Durchlaßbereich und die Wirkdämpfung der Filter S. 249. — Die Betriebsdämpfung der Wellenfilter S. 250. — Die Betriebsdämpfung des Doppelsiebs S. 251. — Die Betriebsdämpfung für $m \leq 1$ S. 252. — Die Betriebsdämpfung für $m > 1$ S. 252. — Die Bedeutung der Konstante m S. 253. — Dimensionierung des Doppelsiebs S. 254. — Die Betriebsdämpfung bei anderen Siebformen S. 255. — Symmetrische verlustfreie Wellenfilter zwischen gleichen frequenzunabhängigen reinen Widerständen S. 255.	
XIV. Nachbildungen und verwandte Kunstschaltungen		258
	Zweiwegverstärker S. 258. — Nachbildung des Wellenwiderstands gleichmäßiger Leitungen S. 259. — Umbildung des Wellenwiderstands von Pupinkabeln S. 260. — Unmittelbare Nachbildung von Pupinkabeln nach Hoyt S. 261. — Zeichnerische Dimensionierung der Nachbildungen S. 262. — Endnetzwerke S. 263. — Nachbildungen in der Telegraphie S. 265. — Leitungsverlängerungen S. 265. — Dämpfungsausgleich S. 266. — Vierpolparameter des Kreuzgliedes S. 268. — Vierpolparameter des Brückensterngliedes S. 269. — Vierpole konstanten Wellenwiderstands S. 270.	
XV. Allgemeinere Theorie der Schaltvorgänge und der Verzerrungen in linearen Systemen		271
	Das benutzte Rechenverfahren S. 271. — Funktionen einer komplexen Veränderlichen S. 272. — Randintegrale analytischer Funktionen S. 273. — Unstetigkeitspunkte S. 274. — Berechnung eines besonders wichtigen Punktintegrals S. 275. — Darstellung der Einschaltung einer konstanten EMK durch ein bestimmtes Integral S. 275. — Berechnung eines Einschaltvorganges mit Hilfe des	

Fourierschen Integrals S. 277. — Die Heavisidesche Regel S. 277. — Anwendung der Heavisideschen Regel auf einen einfachen Schaltvorgang S. 279. — Einschaltvorgang auf einem Telegraphenkabel; Thomsonkurve S. 279. — Übertragung eines beliebigen Vorgangs S. 281. — Näherungsverfahren zur Berechnung von Einschwingdauern S. 283. — Filterwirkung und Aufbauzeiten S. 284. — Eine zweite Integraldarstellung S. 284. — Spektrum eines Telegraphenzeichens S. 285. — Spektrum der plötzlichen Einschaltung einer Sinusspannung S. 286. — Plötzliche Anlegung einer konstanten EMK an eine Spulen- oder Pupinleitung S. 287. — Plötzliche Anlegung einer sinusförmigen elektromotorischen Kraft an eine Spulen- oder Pupinleitung S. 289. — Plötzliche Anlegung einer sinusförmigen elektromotorischen Kraft an ein Wellenfilter S. 290. — Plötzliche Anlegung einer sinusförmigen elektromotorischen Kraft an ein Wellenfilter, wenn ihre Frequenz nicht in den Durchlaßbereich fällt S. 291. — Phasenverzerrung S. 291. — Phasen- und Gruppengeschwindigkeit S. 291. — Die Gruppenlaufzeit beim Pupinkabel S. 293. — Einschaltung eines Wechselstroms bei Phasenverzerrung S. 293.

XVI. Telephonie und Telegraphie auf große Entfernungen 295

Vierdraht- und Zweidrahtverbindungen S. 295. — Störungen bei langen Fernsprechverbindungen S. 295. — Verzerrung durch mangelhafte Anpassung bei verstärkenden Vierpolen S. 296. — Das Zustandekommen der Selbsterregung beim Zweiwegverstärker S. 297. — Ketten aus Verstärkerfeldern und Zweiwegverstärkern S. 298. — Rückkopplungen bei Vierdrahtverbindungen; Echosperrern S. 299. — Das Nebensprechen bei langen Fernsprechverbindungen S. 301. — Verständlichkeitsmessungen S. 302. — Wahl der Restdämpfung und der Verstärkerfelddämpfung S. 303. — Wahl der Entzerrungsgrenzen und der Grenzfrequenz S. 303. — Pupinisierung der Fernkabel S. 305. — Phasenausgleich S. 306. — Zusammengesetzte Schwingungen S. 308. — Die „modulierte“ Schwingung S. 308. — Modulation durch nichtlineare Gebilde S. 309. — Demodulation S. 310. — Unterdrückung des einen Seitenbandes und der Trägerfrequenz S. 311. — Zweibandtelephonie S. 311. — Formverzerrung S. 312. — Harmonische Analyse einer vorgelegten Kurve S. 313. — Analyse der Rayleighschen Magnetisierungsschleife S. 314. — Klirrfaktor der Pupinsspulen S. 316. — Trägerfrequenztelephonie über Freileitungen (Drahtfunk) S. 317. — Telegraphie und Telephonie S. 318. — Mehrfachtelegraphie mit Trägerfrequenzen S. 319. — Unterlagerungstelegraphie S. 319. — Tonfrequenztelegraphie S. 320.

Anhang. Zusammenstellung einiger Rechenregeln 322

Sachverzeichnis 324

I. Gleichstromschaltungen.

§ 1. Das Ohmsche Gesetz. Eine Bleisammler-Batterie werde durch einen langen und dünnen Metalldraht geschlossen. In den Kreis sei außerdem (Abb. 1) ein „Silbervoltmeter“ eingeschaltet, d. h. ein Platintiegel mit Silbernitratlösung, in die ein Silberstift hineintaucht. Dieser werde mit einer braunen Platte der Batterie, der Platintiegel über den Schließungsdraht mit einer grauen verbunden. Dann scheidet sich, wie die Beobachtung zeigt, auf dem Tiegel dauernd Silber ab, und zwar Sekunde für Sekunde dieselbe Menge (Faradaysches Gesetz der Elektrolyse).

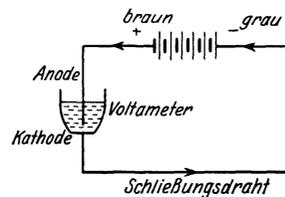


Abb. 1.

Man stellt sich vor, daß durch das Voltmeter und den Schließungsdraht von der braunen Platte, dem „positiven“ Batteriepol, zur grauen, dem „negativen“, „Elektrizität“ fließt, und daß mit der bewegten Elektrizität von dem Silberstift auf den Platintiegel Silber wandert und sich dort abscheidet. Die abgeschiedene Silbermenge nimmt man als Anzeiger und Maß für die gedachte bewegte Elektrizitätsmenge, indem man ihr diese proportional setzt. Nennen wir die bewegte Elektrizitätsmenge Q , die abgeschiedene Silbermenge m , so dürfen wir den Ansatz machen:

$$Q = \text{const } m. \quad (1)$$

Durch diese Festsetzung wird zwar nicht erklärt, was die „Elektrizitätsmenge Q “ ist; diese wird aber wenigstens vergleichbar gemacht: Zwei verschiedene Elektrizitätsmengen sollen sich nach (1) verhalten wie die Silbermengen, die sich in gleichen Zeiten mit ihnen abscheiden:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Die mit dem negativen Pol der Batterie verbundene Elektrode des Voltmeters heißt „Kathode“, die andere „Anode“.

Verändert man die Zahl der eingeschalteten Sammlerzellen, so beobachtet man, daß die abgeschiedene Silbermenge und damit die in dieser Zeit durch den Kreis geflossene Elektrizitätsmenge nicht nur wie immer der Dauer des Versuchs, sondern auch¹ der Zellenzahl proportional ist. Man stellt sich deshalb vor, jeder Sammlerzelle wohne eine „elektromotorische“, d. h. die Elektrizität in Bewegung setzende, Kraft (EMK) inne²; der beschriebene Versuch zeigt dann, daß die in einer gegebenen Zeit t fließende Elektrizitätsmenge der gesamten elektromotorischen Kraft E der Sammler-Batterie und der Zeit t proportional ist:

$$Q = \text{const } E t. \quad (2)$$

¹ Bei konstanter Temperatur.

² Eine genauere Erklärung des Begriffs der elektromotorischen Kraft sparen wir uns für später auf (§ 38).

Das Verhältnis der in einer Zeit t geflossenen Elektrizitätsmenge Q zu dieser Zeit t nennen wir die „Stromstärke“ I :

$$I = \frac{Q}{t}. \quad (3)$$

Der Versuch zeigt also, daß die Stromstärke einfach der elektromotorischen Kraft der Batterie proportional ist:

$$I = \text{const } E.$$

Dieser Erfahrungssatz heißt das „Ohmsche Gesetz“. Nach ihm verhalten sich die Stärken der zustandekommenden elektrischen Ströme wie die angelegten elektromotorischen Kräfte:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{E_1}{E_2}.$$

§ 2. Widerstand und Leitwert eines metallischen Schließungskreises. Die in dem Ohmschen Gesetz vorkommende Konstante setzt man gewöhnlich gleich $\frac{1}{R}$ und nennt die Größe R den „Widerstand des Schließungskreises“:

$$R = \frac{E}{I}. \quad (4)$$

Der Widerstand eines Kreises ist hiernach gleich dem Verhältnis einer an ihn angeschalteten elektromotorischen Kraft zu dem Strom, den sie in ihm hervorbringt, und das Ohmsche Gesetz sagt, daß der so festgelegte Widerstand bei gegebenem Schließungskreis¹ konstant ist.

Es ist anschaulich und daher zweckmäßig, daß man der Proportionalitätskonstante R den Namen „Widerstand“ gegeben hat. Der Vergleich des elektrischen Widerstandes mit mechanischen Widerständen kann jedoch natürlich seine Definition durch das Verhältnis der elektromotorischen Kraft zum Strom nicht ersetzen.

Den reziproken Wert des Widerstandes R , also den Wert $G = \frac{1}{R}$, nennt man den „Leitwert“ des Stromkreises.

§ 3. Größengleichungen². Die Gleichungen (1):

$$Q = \text{const } m$$

und (4):

$$I = \text{const } E = \frac{1}{R} E = \frac{E}{R}$$

sollen nach ihrer Herleitung kurze mathematische Ausdrücke sein für die Verhältnisgleichungen

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{m_1}{m_2} \quad (5)$$

und

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{E_1}{E_2}. \quad (6)$$

Denn aus ihnen folgen diese Verhältnisgleichungen unmittelbar. Die Gleichungen (1) und (4) haben also einen bestimmten Sinn, ohne daß es nötig wäre, Einheiten für die Größen Q , m , I , E festzusetzen. Denn die Werte von Verhältnissen gleichartiger Größen sind natürlich unabhängig von der Wahl bestimmter Einheiten.

¹ Und konstanter Temperatur.

² Vgl. Ausschuß für Einheiten und Formelgrößen. ETZ 51, 586 und 622. 1930.

Wir wollen ausdrücklich festsetzen, daß die Zeichen Q , m , I , E , R in symbolischer Weise die physikalischen „Größen“ Elektrizitätsmenge, Masse, Stromstärke, elektromotorische Kraft, Widerstand selbst bedeuten sollen und nicht ihre Zahlenwerte bezogen auf schon festgesetzte Einheiten. Solche von der Einheitenwahl unabhängige symbolische Gleichungen nennen wir „Größengleichungen“. Mit nur wenigen Ausnahmen werden im folgenden nur Größengleichungen verwendet.

§ 4. **Einheit der Stromstärke.** Will man von irgendeiner gegebenen Größe aussagen, wie groß sie ist, so gibt es nur einen Weg: man wählt eine andere Größe derselben Art als Vergleichsgröße und sagt, wieviel mal größer oder kleiner die gegebene Größe ist als die Vergleichsgröße. Die Vergleichsgrößen nennt man meist „Einheiten“.

Als Vergleichsgröße oder Einheit für die Stärke eines elektrischen Stromes kann man diejenige Stromstärke wählen, bei der im Silbervoltmeter Sekunde für Sekunde $1,118$ mg Silber ausgeschieden werden. Diese Vergleichsgröße hat den Namen Ampere erhalten (abgekürzt A); sie ist die international eingeführte Stromstärkeneinheit des sog. „praktischen Systems“¹.

Die Angabe „ $I = 12$ mA“ sagt also z. B., daß der Strom I 12 mal so groß ist wie der Vergleichsstrom $1 \text{ mA} = 10^{-3} \text{ A}$; der Strom I scheidet also in der Sekunde $12 \cdot 1,118 \cdot 10^{-3} \text{ mg} = 13,416 \mu\text{g}$ Silber aus.

Nach unserer Herleitung kann die Angabe „12 mA“ als ein symbolisches „Produkt“ aufgefaßt werden. I ist die Stromstärke selbst, „12“ ihr „Zahlenwert“ bezogen auf die Vergleichsgröße oder Einheit mA.

Größengleichungen sind hiernach Gleichungen, bei denen die Formelzeichen die symbolischen Produkte aus den Zahlenwerten und den Einheiten bedeuten. Den Gegensatz zu ihnen bilden die „Zahlenwertgleichungen“, bei denen die Formelzeichen die Zahlenwerte der Größen bedeuten, bei denen also für die Formelzeichen nur der eine der beiden Faktoren des Produkts „Zahlenwert mal Einheit“ eingesetzt werden darf².

§ 5. **Einheiten des Widerstands und der übrigen elektrischen Größen.** Auch für den Widerstand eines Stromkreises hat man international eine Vergleichsgröße festgesetzt, und zwar nennt man den Widerstand, den ein Quecksilberfaden gleichmäßigen Querschnitts von der Länge $1,063$ m und der Masse $14,4521$ g bei 0° dem Strom entgegengesetzt, ein „Ohm“ (Ω). Das Ohm ist die Widerstandseinheit des praktischen Systems.

Die übrigen praktischen Einheiten werden in der einfachsten möglichen Weise auf die beiden unabhängig festgesetzten Einheiten A und Ω bezogen. So ist die Einheit „Siemens“ (S) des Leitwerts nichts anderes als der Leitwert des zur Definition des Ohms benutzten Quecksilberfadens, die Einheit „Volt“ der elektromotorischen Kraft nicht anderes als die elektromotorische Kraft, die in einem Schließungsdraht von 1Ω Widerstand einen Strom von 1 A hervorruft usw.

Einheiten, die wie die praktischen durch Beziehungen, in denen keine von 1 verschiedenen Zahlenfaktoren vorkommen, auf die Grundeinheiten (z. B. A und Ω) bezogen sind, heißen „abgestimmte“ Einheiten. Zahlenwerte, die auf solche abgestimmte Einheiten bezogen sind, dürfen unmittelbar in die Größengleichungen eingesetzt werden.

¹ Die Wahl des Zahlenwerts $1,118$ hat historische Gründe.

² Zahlenwertgleichungen sind demnach nicht etwa einfache Gleichungen, in denen Zahlenwerte vorkommen oder eingesetzt sind.

§ 6. **Richtungs- und Vorzeichenregeln.** Legt man bei dem Versuch des § 1 den Stift des Silbervoltameters an den negativen, den Platintiegel an den positiven Pol der Batterie, so scheidet sich das Silber wieder an der Kathode ab, diesmal also am Stift und nicht im Tiegel. Zwischen der Polung der Batterie und dem Sinne, in welchem das Silber im Voltameter wandert, besteht demnach ein physikalischer Zusammenhang. Definiert man als Richtungssinn des Stroms den Sinn, in welchem das Silber wandert, als Richtungssinn der elektromotorischen Kraft die Richtung vom negativen Pol durch die Batterie hindurch zum positiven, so stimmt der Richtungssinn des Stroms erfahrungsgemäß mit dem Richtungssinn der elektromotorischen Kraft überein.

Diesen physikalischen Zusammenhang sucht man auch in den Gleichungen zum Ausdruck zu bringen. Es sind zwei Verfahren im Gebrauch: Bei dem einen versteht man die Formelzeichen des Stroms und der elektromotorischen Kraft mit Doppelindizes (z. B. I_{12}); bei dem anderen ordnet man den Gleichungen Schaltbilder mit „Zählpfeilen“ zu¹. Wir benutzen fast immer das zweite Verfahren. Es ist wohl zu beachten, daß die „Zählpfeile“ für sich allein nichts über die wirkliche Richtung des Stroms oder der elektromotorischen Kraft aussagen. Es soll lediglich das Folgende gelten: Wenn der Zahlenwert irgendeiner Größe positiv ist, dann soll sie die Richtung ihres Zählpfeiles haben; wenn er negativ ist, die umgekehrte Richtung. Die Zählpfeile verknüpfen also nur die Vorzeichen solcher Größen, denen in der Wirklichkeit Richtungssinne zukommen können, mit ihren Richtungssinnen.

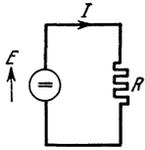


Abb. 2.

Aus diesen Festsetzungen folgt, daß das Ohmsche Gesetz für einen Kreis mit positivem Widerstand R nach Abb. 2 in der Form

$$E = RI,$$

nach Abb. 3 in der Form

$$E = -RI$$

geschrieben werden muß. Denn nur dann stimmen, wie es der Erfahrung entspricht, die wirklichen Richtungssinne des Stroms und der elektromotorischen Kraft miteinander überein.

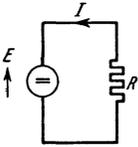


Abb. 3.

Den Richtungssinn einer positiven EMK kann man statt durch einen Zählpfeil auch durch ein besonderes Batteriesymbol andeuten. Nach internationaler Festsetzung ist an Stelle des in den Abb. 2 und 3 gebrauchten Zeichens Abb. 4a das Zeichen Abb. 4b (Kurzbild des Daniellelements) zu benutzen. Das Zeichen Abb. 4c (Kurzbild des Bunsen-

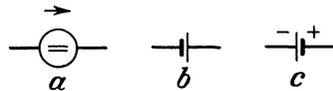


Abb. 4.

oder Leclanchéelements), das dem deutschen Gebrauch entspricht, ist ebenfalls gestattet; die beiden Vorzeichen dürfen aber nicht weggelassen werden.

§ 7. **Die Abhängigkeit der Stromstärke von den Eigenschaften des Schließungsdrahts.** Verändert man die Länge l und den Querschnitt F des die Stromquelle schließenden Metalldrahts, so zeigt der Versuch, daß sich die Stromstärke dem Querschnitt direkt, der Länge umgekehrt proportional mitändert:

$$I = \kappa \frac{F}{l} E. \quad (7)$$

Der Leitwert des Schließungsdrahts kann also gleich

$$G = \kappa \frac{F}{l}, \quad (8)$$

¹ Vgl. Bloch, O.: Die Ortskurven der graphischen Wechselstromtechnik, S. 7. Zürich 1917.

sein Widerstand gleich

$$R = \frac{1}{\kappa} \frac{l}{F} \quad (9)$$

gesetzt werden. κ ist eine neue Proportionalitätskonstante, die, wie der Versuch zeigt, von der Größe und Gestalt des Schließungsdrahts unabhängig, von der Art des Metalls, aus dem er hergestellt ist, und von der Temperatur dagegen abhängig ist. Sie heißt „Leitvermögen“ oder „Leitfähigkeit“ des Metalls; ihr reziproker Wert „spezifischer Widerstand“ ϱ .

Die hier angegebenen einfachen Beziehungen (8) und (9) gelten nur für Drähte („lineare Leiter“).

Für die Leitfähigkeit ist die Einheit Sm/mm², für den spezifischen Widerstand die Einheit $\mu\Omega$ cm geeignet. Für Kupfer z. B. soll bei 20° nach internationalen Festsetzungen $\kappa = 58$ Sm/mm², $\varrho = 17,24 \mu\Omega$ cm sein.

§ 8. Widerstand von Leitungen. In der Theorie der Leitungen ist es üblich, unter l den Abstand der verbundenen Punkte zu verstehen. Der Gesamtwiderstand von Doppelleitungen ist daher nach der Formel

$$R = \frac{2l}{\kappa F} \quad (10)$$

zu berechnen. Bei Einfachleitungen ist der Widerstand des Rückwegs, der durch die Erde verläuft, bei guter „Erdung“ als sehr klein anzusehen, so daß für sie auch mit der neuen Bedeutung des Buchstabens l die frühere Formel (9) gilt.

Nach (10) und (9) ist der Widerstand der Leitungen ihrer Länge proportional. Den Koeffizienten von l :

$$\frac{2}{\kappa F} = \frac{R}{l} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\kappa F} = \frac{R}{l} \quad (11)$$

nennt man „Widerstand der Längeneinheit“ oder: „auf die Längeneinheit bezogenen Widerstand“ oder kurz: „bezogenen Widerstand“; er ist, wie man sieht, nur von Dicke und Leitfähigkeit der Drähte abhängig.

Beispiel. Für eine 2-mm-Bronzefreileitung (Zahlenwert der Leitfähigkeit: 53) wird der Widerstand der Längeneinheit

$$\frac{R}{l} = \frac{2 \text{ mm}^2}{53 \text{ Sm} \cdot \text{mm}^2 \pi} = \frac{2}{53 \pi} \frac{\Omega}{\text{m}} = 12 \frac{\Omega}{\text{km}}.$$

§ 9. Isolationswiderstand von Leitungen. Auch den Isolierstoffen kommt eine gewisse Leitfähigkeit zu. Der Isolationswiderstand einer Leitung kann jedoch im allgemeinen nicht so einfach berechnet werden wie der Widerstand der Leitungsdrähte selbst; denn die Bahnen, die die Ströme durch die Isolierstoffe hindurch einschlagen, sind mathematisch schwieriger zu erfassen.

Eines ist jedoch leicht einzusehen: der Isolationswiderstand ist der Leitungslänge nicht direkt, sondern umgekehrt proportional, da den Strömen ein um so größerer Querschnitt zur Verfügung steht, je länger die Leitung ist. Als Isolationswiderstand der Längeneinheit oder bezogenen Isolationswiderstand bezeichnet man daher das Produkt Rl . Da die bezogenen Isolationswiderstände meist sehr hoch sind, wählt man gewöhnlich die Einheit $M\Omega\text{km}$ ($= 10^6 \Omega\text{km}$).

Bei der Messung von Isolationswiderständen ist zu beachten, daß sie von der Dauer der Anlegung der elektromotorischen Kraft abhängen. Die gewöhnlichen Angaben beziehen sich auf den Fall, daß die stromerzeugenden elektromotorischen Kräfte mindestens eine Minute angeschaltet werden.

§ 10. Kirchhoffsche Regeln. Die in der Praxis vorkommenden Gleichstromschaltungen stellen häufig verwickeltere „Netzwerke“ aus Drähten (linearen

Leitern) dar; sie bestehen aus „Zweigen“, die in „Knoten“ zusammenlaufen und in sich geschlossene „Maschen“ bilden können. Zur Berechnung der Ströme, die in solchen Netzwerken entstehen, wenn man in einige oder alle Zweige konstante elektromotorische Kräfte einschaltet, dienen die Kirchhoffschen Regeln.

Wir denken uns willkürlich Zählpfeile und Maschen-Umlaufsinn festgesetzt (§ 6). Dann besagen die Regeln:

a) „Knotenregel“: Für jeden Knoten ist die Summe der Ströme gleich Null. Dabei sind die Ströme mit Zählpfeilen „nach dem Knoten hin“ mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen wie die Ströme mit Zählpfeilen „von dem Knoten weg“.

b) „Maschenregel“: Für jede Masche ist die Summe der elektromotorischen Kräfte gleich der Summe der für die einzelnen Zweige der Masche berechneten Produkte „Widerstand mal Stromstärke“. Dabei sind die elektromotorischen Kräfte und Ströme mit Zählpfeilen entsprechend dem Maschenumlaufsinn mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen wie die elektromotorischen Kräfte und Ströme mit Zählpfeilen entgegen dem Maschenumlaufsinn.

Die Knotenregel ist ein Ausdruck für die Erfahrung, daß an keiner Stelle eines Drahtes Elektrizität eines Vorzeichens neu entstehen oder völlig verschwinden kann.

Die Maschenregel ist eine Verallgemeinerung des Ohmschen Gesetzes. Um sich mit ihr vertraut zu machen, vergleicht¹ man bekanntlich das Fließen der Elektrizität durch ein Netzwerk mit dem Fließen des Wassers durch ein System von Röhren. Wenn das Wasser in einem solchen System beständig kreisen soll, muß es nach dem Heruntersinken durch Pumpen immer wieder von neuem gehoben werden. Entsprechend stellt man sich vor, daß die Elektrizität in den Widerständen der elektrischen Kreise allmählich von höheren „Potentialen“ zu niedrigeren herabsinkt und daß es die in die Kreise eingeschalteten elektromotorischen Kräfte sind, die fortlaufend für den Wiederersatz der in den Widerständen „vernichteten“ Potentialunterschiede sorgen.

Aus dieser Vorstellung folgt die Maschenregel, wenn man festsetzt, daß die Elektrizität, wenn sie mit der Stromstärke I durch einen Widerstand R fließt, an „Potential“ den Betrag RI verliert. Der gesamte Potentialfall in einer Masche ist dann $\sum RI$; und die Maschenregel behauptet, daß dieser Gesamtfall durch die Summe der elektromotorischen Kräfte $\sum E$ gerade wieder ersetzt wird.

Statt „Potentialunterschiede“ sagt man auch „Spannung“. Die Summe der elektromotorischen Kräfte in einer Masche ist also gleich der Summe der Teilspannungen, die an den einzelnen Zweigen der Masche liegen.

Daß in den einzelnen Zweigen im allgemeinen verschiedene Ströme fließen, ist kein Hindernis für die hier auseinandergesetzte Vorstellung. Die einzelnen Potentialunterschiede setzen sich additiv zusammen wie im Falle des Wassers die einzelnen Höhenunterschiede; und wie ein bestimmter Punkt nur auf einer einzigen Höhe liegen kann, ebenso kann einem bestimmten Knotenpunkt nur ein einziges Potential zukommen. Wäre es nicht so, so hätte die Potentialvorstellung keine Berechtigung².

Ebenso wie für das Ohmsche Gesetz ist auch für die Kirchhoffschen Regeln die Konstanz der Widerstände wesentlich. Die Gleichungen, die sich aus ihnen ergeben, sind hinsichtlich der Ströme und Spannungen „linear“. Deshalb nennt man auch die Netzwerke, die sich aus strom- und spannungsunabhängigen Widerständen zusammensetzen, „lineare Netzwerke“.

¹ Ausführlichere Erläuterungen im Abschnitt II.

² Vgl. § 36 und 77.

§ 11. **Klemmenspannungen.** Wenn das Potential mit der Höhe eines Punktes über einem Nullpegel verglichen werden kann, so geht daraus schon hervor, daß die Spannung U als Potentialdifferenz ebenso wie die elektromotorische Kraft und der Strom eine Größe mit Richtungssinn ist.

Wir wollen festsetzen, daß sie, wenn die Elektrizität mit der Stärke I durch einen Widerstand R fließt, physikalisch den Richtungssinn der Stromstärke hat, also den Richtungssinn von dem höheren Potential nach dem niedrigeren hin.

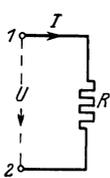


Abb. 5.

Für die Schaltung und die Zählpfeile der Abb. 5 gilt daher:

$$U = R I, \tag{12}$$

für die Schaltung und die Zählpfeile der Abb. 6 dagegen:

$$U = - R I. \tag{13}$$

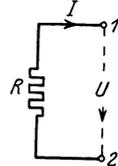


Abb. 6.

Diese beiden Gleichungen können auch nach der Maschenregel sofort hingeschrieben werden. Man braucht nur jedesmal durch eine Hilfslinie von 1 durch den Außenraum nach 2 eine geschlossene Masche herzustellen. Da keine elektromotorischen Kräfte vorhanden sind, ergibt sich im Falle der Abb. 5

$$0 = - U + R I,$$

im Falle der Abb. 6

$$0 = U + R I,$$

beides genau wie vorher.

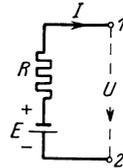


Abb. 7.

Wie man sieht, kann die Maschenregel auch auf offene Stromkreise angewendet werden, wenn man deren Lücken durch Spannungen überbrückt.

Fügt man dem Widerstand der Abb. 6 noch eine elektromotorische Kraft E zu (Abb. 7), so ergibt die Maschenregel

$$E = R I + U,$$

oder auch

$$U = E - R I. \tag{14}$$

Die „Klemmenspannung“ einer solchen Stromquelle ist daher gleich ihrer elektromotorischen Kraft E , vermindert um ihren inneren Potentialabfall $R I$.

In der Fernmeldetechnik ist es üblich, die Pfeile der Ströme und Spannungen bei den Stromquellen und den Abschlußwiderständen, die man gewöhnlich „Verbraucher“ nennt, so zu wählen, wie es in den Abb. 5 und 7 geschehen ist. (14) kann daher als Grundgleichung der Stromquelle, (12) als Grundgleichung des Verbrauchers angesehen werden.

§ 12. **Zweipole: Zwei Widerstände hintereinander (in Reihe, Serie).** Die Spannung U zwischen den beiden Endpunkten (Endklemmen) einer Hintereinanderschaltung von zwei Widerständen R_1 und R_2 (Abb. 8) setzt sich nach der Maschenregel additiv aus den beiden Teilspannungen an R_1 und R_2 zusammen:

$$U = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I. \tag{15}$$

(Nach der Knotenregel fließt ja durch die beiden Widerstände derselbe Strom.)

Die Teilspannungen $U_1 = R_1 I$ und $U_2 = R_2 I$ an den Widerständen R_1 und R_2 verhalten sich wie diese:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}. \tag{16}$$

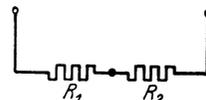


Abb. 8.

Wir nennen jede solche Zusammenschaltung aus stromunabhängigen Widerständen mit zwei Endklemmen (Polen) einen „linearen Zweipol“. Unter ihrem

„Scheinwiderstand“ oder auch „inneren Widerstand“ R verstehen wir¹ das Verhältnis ihrer „Klemmenspannung“ zu ihrem „Klemmenstrom“, also das Verhältnis $\frac{U}{I}$. Für die Hintereinanderschaltung gilt hiernach [vgl. (15)]:

$$R = R_1 + R_2; \quad (17)$$

durch Aneinanderreihung von Drahtspulen kann man also Widerstände von jeder beliebigen Größe herstellen.

Der Scheinleitwert einer Hintereinanderschaltung ist natürlich

$$G = \frac{I}{U} = \frac{I}{R} = \frac{I}{R_1 + R_2} = \frac{I}{\frac{I}{G_1} + \frac{I}{G_2}} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}. \quad (18)$$

§ 13. **Zweipole: Zwei Widerstände nebeneinander (parallel).** Auch zwei parallele Leitwerte (Abb. 9) bilden zusammen einen Zweipol. Der in ihn hineinfließende Strom I setzt sich nach der Knotenregel additiv aus den beiden Teilströmen durch G_1 und G_2 zusammen:

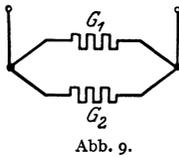


Abb. 9.

$$I = G_1 U + G_2 U = (G_1 + G_2) U. \quad (19)$$

(Die Spannung zwischen den beiden Enden von G_1 und G_2 ist nach der Maschenregel dieselbe.)

Die Teilströme $I_1 = G_1 U$ und $I_2 = G_2 U$ durch die Leitwerte G_1 und G_2 verhalten sich wie diese:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{G_1}{G_2}. \quad (20)$$

Der Scheinleitwert der Parallelschaltung ist

$$G = \frac{I}{U} = \frac{(G_1 + G_2) U}{U} = G_1 + G_2; \quad (21)$$

durch Parallelschalten von Drahtspulen kann man also Leitwerte von jeder beliebigen Größe herstellen. Der Scheinwiderstand ist natürlich

$$R = \frac{I}{G} = \frac{I}{G_1 + G_2} = \frac{I}{\frac{I}{R_1} + \frac{I}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (22)$$

§ 14. **Widerstand und Leitwert parallel.** Oft hat man den Scheinwiderstand W einer Parallelschaltung eines Widerstandes R und eines Leitwertes G zu berechnen. Man tut gut daran, sich die sehr einfache Formel:

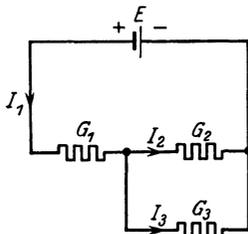


Abb. 10.

$$W = \frac{R \cdot I/G}{R + I/G} = \frac{R}{1 + RG}, \quad (23)$$

die für diesen Fall gilt, ein für allemal zu merken. Der Scheinwiderstand ist also gleich dem Widerstand, dividiert durch die Summe aus der Zahl 1 und dem Produkt aus Widerstand und Leitwert.

§ 15. **Verbindung von Reihen- und Parallelschaltung; Spannungsteilung.** Eine Stromquelle E sei geschlossen durch die Reihenschaltung eines Leitwertes G_1 und einer Parallelschaltung zweier Leitwerte G_2 und G_3 (Abb. 10). Dann gelten nach § 12 und 13, wenn c eine Proportionalitätskonstante ist, die

¹ Diese recht zweckmäßige Definition des Begriffes „Scheinwiderstand“ beginnt sich erst in der neueren Zeit mehr und mehr durchzusetzen. Vgl. § 94.

Gleichungen:

$$I_2 = c G_2, \quad I_3 = c G_3, \quad (24)$$

$$I_1 = \frac{G_1(G_2 + G_3)}{G_1 + G_2 + G_3} E = I_2 + I_3 = c(G_2 + G_3), \quad (25)$$

also nach Ausscheidung der Konstante c :

$$I_2 = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} E, \quad I_3 = \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} E. \quad (26)$$

Führt man an Stelle der Leitwerte die Widerstände ein, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E, \\ I_2 &= \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E, \\ I_3 &= \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} E. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

In den Nennern steht die Summe aller Produkte zu zwei Faktoren, die man aus den drei Widerständen (ohne Wiederholung) bilden kann.

Wir interessieren uns besonders für die Spannung U_3 zwischen den Enden des Widerstandes R_3 :

$$U_3 = R_3 I_3 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}} E. \quad (28)$$

Wenn die Widerstände R_1 und R_2 wesentlich kleiner sind als R_3 , so gilt für die Spannung U_3 angenähert:

$$U_3 \approx \frac{R_2}{R_1 + R_2} E. \quad (29)$$

An einem konstanten Gesamtwiderstand $R_1 + R_2$ kann man also eine beliebige — jedoch natürlich unter E liegende — Spannung U_3 „abzapfen“, die dem Widerstand R_2 , an dem man abzapft, nahezu proportional ist. Ein Widerstand, an dem man in solcher Weise abzapfen kann, heißt „Spannungsteiler“; die Gleichung (29) nennen wir auch die „Spannungsteilergleichung“.

Die Spannung $U_3^l = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}$, die sich nach (28) bei unendlich großem Widerstand R_3 an den Enden des Widerstandes R_2 einstellt, heißt die „Leerlaufspannung“ der Spannungsteilerschaltung. Sie ist zugleich die Spannung am Widerstande R_2 vor dem Anlegen eines endlichen Widerstandes R_3 .

Führt man statt der Widerstände Leitwerte ein, so nimmt die Spannungsteilergleichung nach (26) oder (29) die Form

$$U_3^l = \frac{G_1}{G_1 + G_2} E \quad (30)$$

an.

Obgleich die Spannung an R_2 gemäß (28) nach dem Anlegen eines endlichen Widerstandes R_3 eine andere ist, kann man den Strom I_3 , der in R_3 entsteht, in sehr einfacher Weise aus der Leerlaufspannung U_3^l berechnen. Bezeichnet man nämlich mit R_i (Abb. 11) den Widerstand $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, der

zwischen den Abzapfdrähten läge, wenn die elektromotorische Kraft E gar nicht da wäre, so gilt, wie wir behaupten,

$$I_3 = \frac{U_3^l}{R_i + R_3}; \quad (31)$$

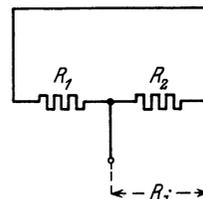


Abb. 11.

d. h. der Strom kann berechnet werden, als ob die Leerlaufspannung U^l (also nicht die elektromotorische Kraft E) wirkte und nur die Widerstände R_i und R_3 in Reihe vorhanden wären. Der Beweis ergibt sich unmittelbar durch Einsetzen. Für ihre Wirkung nach außen kann die Spannungsteilerschaltung demnach durch die einfachere Schaltung Abb. 12 ersetzt werden.

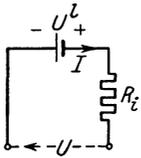


Abb. 12.

§ 16. **Zweipol und Zweipolquelle; Grundgleichungen.** Wir haben im § 12 eine beliebige in zwei Klemmen endigende Zusammenschaltung von stromunabhängigen Widerständen einen linearen Zweipol genannt. Die Wirkung eines solchen Zweipols nach außen hin läßt sich durch einen einzigen Parameter, seinen Scheinwiderstand oder inneren Widerstand beschreiben; dieser ist definiert durch das Verhältnis der Klemmenspannung zum Klemmenstrom.

Ähnlich nennen wir eine beliebige in zwei Klemmen endigende Zusammenschaltung von stromunabhängigen Widerständen und elektromotorischen Kräften eine „lineare Zweipolquelle“.

Jede lineare Zweipolquelle kann (wie die Spannungsteilerschaltung) durch zwei Parameter gekennzeichnet werden, durch ihre Leerlaufspannung U^l und ihren inneren Widerstand R_i . Die Leerlaufspannung ist die Spannung, die man an den Klemmen mit einem „statischen“ Spannungsmesser oder mit einem Spannungsmesser sehr hohen Widerstandes mißt; unter dem inneren Widerstand R_i der Zweipolquelle wollen wir das Verhältnis ihrer Leerlaufspannung U^l verstehen zu dem Strom I^k , der durch ihre Klemmen fließt, wenn man sie kurz schließt:

$$R_i = \frac{U^l}{I^k}. \quad (32)$$

Ist R der Scheinwiderstand eines linearen Zweipols und bedeutet U die Klemmenspannung, I den Klemmenstrom, so gilt selbstverständlich die Beziehung

$$U = R I, \quad (33)$$

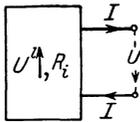


Abb. 13.

die man die „Grundgleichung des Zweipols“ nennen kann.

Bei der linearen Zweipolquelle (Abb. 13) liegen die Dinge etwas verwickelter. Man kann leicht feststellen, daß die durch die Kirchhoffschen Regeln zur Verfügung gestellten Gleichungen auch bei dem kompliziertesten abgeschlossenen Netzwerk gerade ausreichen, um die Ströme in sämtlichen Zweigen zu berechnen. Denkt man sich also die lineare Zweipolquelle durch einen linearen Zweipol vom Scheinwiderstand R abgeschlossen, so wäre der Klemmenstrom I , wenn der Aufbau der Schaltung im einzelnen bekannt wäre, vollständig berechenbar als Funktion einerseits der Widerstände und elektromotorischen Kräfte der Zweipolquelle, andererseits der Widerstände des abschließenden Zweipols. Nun gilt aber immer die Gleichung (33); ersetzt man also in der gedachten Gleichung für I die Widerstände des Zweipols durch U/I , so erhält man eine Beziehung zwischen der Klemmenspannung U und dem Klemmenstrom I , in der nur noch die Widerstände und elektromotorischen Kräfte der Zweipolquelle vorkommen. Diese Beziehung muß linear sein, da es die Kirchhoffschen Regeln sind; man kann daher schreiben

$$U = a + b I. \quad (34)$$

Nun geht nach Definition bei Leerlauf ($I = 0$) die Klemmenspannung U in die Leerlaufspannung U^l über; daraus folgt $a = U^l$. Außerdem wird bei Kurzschluß ($U = 0$) der Klemmenstrom zum Kurzschlußstrom I^k :

$$0 = a + b I^k = U^l + b I^k,$$

so daß nach der Definition des inneren Widerstandes

$$b = -\frac{U^i}{I^k} = -R_i \tag{35}$$

wird. Für jede lineare Zweipolquelle gilt daher die Beziehung

$$U = U^i - R_i I; \tag{36}$$

wir nennen sie die Grundgleichung der Zweipolquelle.

Die Gleichungen (33) und (36) entsprechen den Gleichungen (12) und (14) des § 11, sind aber viel allgemeiner als diese.

§ 17. **Zusammenschaltung von Zweipol und Zweipolquelle.** Schließt man die Zweipolquelle U^i, R_i durch den Zweipol R ab, so werden U und I , beide Größen für sich, berechenbar: Es wird nach (36) $U = U^i - R_i U/R$ oder

$$U = \frac{R}{R_i + R} U^i \tag{37}$$

und daher

$$I = \frac{U^i}{R_i + R}. \tag{38}$$

Diese fast selbstverständlich erscheinenden Gleichungen¹ erlauben häufig selbst verwickeltere Schaltaufgaben zu lösen, ohne daß man die Kirchhoffschen Regeln ausdrücklich ansetzen müßte. (Ein Beispiel für eine solche abgekürzte Berechnung haben wir schon in § 15 kennengelernt). Die Fruchtbarkeit der Gleichungen rührt davon her, daß sich die Parameter U^i und R_i in vielen Fällen nach ihren Definitionen unmittelbar ergeben.

Die im § 15 benutzte Definition des inneren Widerstandes als des Widerstandes der Zweipolquelle bei kurzgeschlossenen elektromotorischen Kräften folgt natürlich ohne weiteres aus der Grundgleichung (36).

§ 18. **Kompensationsverfahren.** Wir denken uns zwei in sich abgeschlossene Zweipolquellen (Abb. 14) mit den Klemmen 12 und 34 gegeben und die Klemmen 1 und 3 durch den Widerstand R_{13} , die Klemmen 2 und 4 durch den Widerstand R_{24} verbunden. Dann wird natürlich im allgemeinen ein Strom I durch die Klemmen fließen, der im Drahte 13 dieselbe Stärke hat wie im Drahte 42.

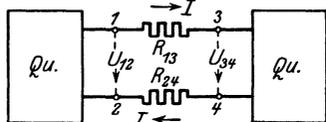


Abb. 14.

Es sei nun gelungen, durch Veränderungen an den Zweipolquellen den Klemmenstrom I zum Verschwinden zu bringen. Dann ist nach

$$U_{12} = U_{12}^i = U_{34}^i = U_{34}, \tag{39}$$

einerlei wie groß die Widerstände R_{13} und R_{24} gewählt sind. Ist also z. B. die Spannung U_{34}^i veränderbar und ihr Wert ablesbar, so hat man ein Verfahren zur Bestimmung einer beliebigen (Leerlauf-) Spannung U_{12}^i : Sie ist gleich der Spannung U_{34}^i , für die der Klemmenstrom verschwindet. Die Spannung im Augenblicke der Einstellung ist natürlich identisch mit der Spannung vor dem Anlegen der Meßschaltung.

Da sich die Spannungen U_{12} und U_{34} im Augenblicke der Einstellung gerade aufheben, nennt man das Verfahren „Kompensationsverfahren“.

Auf ihm beruht eine außerordentlich bequeme und genaue Methode der Widerstandsmessung. Man kompensiert zuerst (Abb. 15) an den Enden des

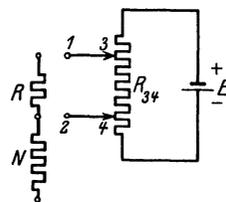


Abb. 15.

¹ (38) ist abgeleitet bei H. Helmholtz: Pogg. Ann. 89, 211 (1853).

unbekannten Widerstandes R , dann an den Enden eines genau bekannten Normalwiderstandes N . Als „kompensierende“ Zweipolquelle verwendet man meist einen genau gearbeiteten, durch eine elektromotorische Kraft E betriebenen Spannungsteiler („Kompensationsapparat“). Dessen Leerlaufspannung U_{34}^l ist nach § 15 proportional dem Widerstand zwischen den Punkten 3 und 4, an denen man „abzapft“. Muß man diesen Widerstand bei der Kompensation an R gleich R_{34} wählen, bei der Kompensation an N dagegen gleich R'_{34} , so gilt

$$\frac{R}{N} = \frac{R_{34}}{R'_{34}}; \quad (40)$$

d. h. der Zahlenwert des Widerstandes bezogen auf N als Einheit ist gleich dem Verhältnis der Widerstände des Spannungsteilers, an denen man abzapfen muß, um den Klemmenstrom verschwinden zu lassen.

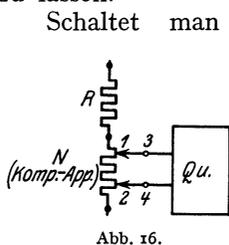


Abb. 16.

Schaltet man den Kompensationsapparat an Stelle des Normalwiderstandes (Abb. 16), so braucht die kompensierende Zweipolquelle nicht geeicht zu sein: Man kompensiert zuerst an R , dann bei ungeänderter kompensierender Quelle an demjenigen Bruchteil von N , an dem dieselbe Span-

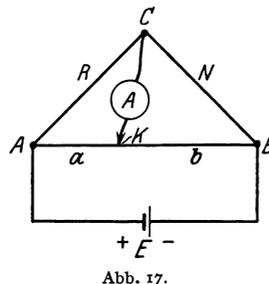


Abb. 17.

nung liegt wie an R . Bei diesem — einfachsten — Verfahren ist R gleich dem abgegriffenen Bruchteil von N .

§ 19. **Wheatstonesche Brücke.** Die „Wheatstonesche Brücke“ dient zum Vergleich von Widerständen. Abb. 17 zeigt ihre einfachste Form. AB ist ein blanker „Meßdraht“, N ein bekannter, R der unbekannte Widerstand. Der Meßdraht und die Hintereinanderschaltung $R + N$ bilden zwei parallele Zweige, die von einer Stromquelle E gespeist werden. Von dem Punkte C geht ein biegsamer Draht aus, dessen Ende K auf dem Meßdraht schleifen kann.

Man verschiebt den Kontakt K auf dem Meßdraht, bis der Strom in der „Brücke“ CK gleich Null geworden ist. Dann fließt in R und N derselbe Strom I_1 , in a und b derselbe Strom I_2 , und nach der Maschenregel gilt:

$$\left. \begin{aligned} R I_1 - a I_2 &= 0, \\ N I_1 - b I_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Diese Gleichungen können als „homogene“ lineare Gleichungen mit den Unbekannten I_1 und I_2 aufgefaßt werden; sie sind miteinander nur verträglich, wenn ihre Determinante verschwindet, d. h. wenn

$$\frac{R}{N} = \frac{a}{b}. \quad (42)$$

Der unbekannte Widerstand R kann demnach aus dem bekannten N und aus dem gemessenen Verhältnis a/b berechnet werden. Dieses ist bei gleichmäßigem Meßdraht gleich dem Verhältnis der Drahtlängen.

§ 20. **Bestimmung der Lage eines Erdschlusses in einer Kabelader.** Hat eine Kabelader vom Widerstande R_1 Erdschluß, so kann man sie mit einer fehlerfreien Ader¹ vom Widerstande R_2 zur Schleife schalten und den Erdschluß nach Abb. 18 als Teil des Speiseweigs einer Wheatstoneschen Brückenkombination benutzen. Macht man r_1 oder r_2 veränderbar

¹ Damit nicht alle Adern gleichzeitig Erdschluß haben, bringt man in den Kabeln häufig Adern unter, die durch einen zweiten Bleimantel besonders geschützt sind.

und ist der Widerstand der schlechten Ader vor dem Fehler gleich x , so gilt, wenn die Brücke stromlos ist,

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{x}{R_1 - x + R_2}$$

oder

$$x = \frac{r_1 (R_1 + R_2)}{r_1 + r_2}, \tag{43}$$

woraus sich die Lage der Fehlerstelle berechnen läßt.

Der Gesamtwiderstand $R_1 + R_2$ kann mit einer gegen Erde isolierten Meßanordnung ohne Rücksicht auf den Erdschluß unmittelbar bestimmt werden.

§ 21. Berechnung des Brückenstroms. Wir wollen noch den Strom im Brücken-zweig berechnen, und zwar auf Grund der allgemeinen Gleichung, die wir im § 17 für die Zusammenschaltung einer Zweipolquelle mit einem Zweipol aufgestellt haben.

Der Einfachheit halber vernachlässigen wir den Widerstand der Stromquelle und fassen den Brückenwiderstand R_0 als den Scheinwiderstand R eines Zweipols und die Spannung zwischen den Punkten A und B als die Leerlaufspannung U^l einer Zweipolquelle auf (Abb. 19). Nach der Spannungsteilergleichung ist

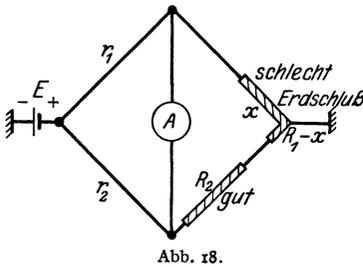


Abb. 18.

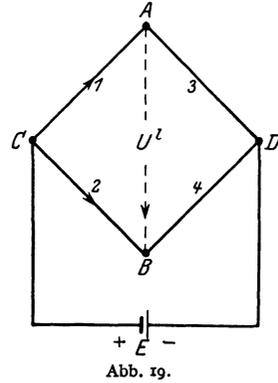


Abb. 19.

$$U^l = E \left(\frac{R_2}{R_2 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_3} \right). \tag{44}$$

Da nun weiter der innere Widerstand der Zweipolquelle nichts anderes ist als der Widerstand des Vierecks bei Kurzschluß der Punkte C und D (Abb. 20):

$$R_i = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}, \tag{45}$$

so ist nach Gleichung (38), § 17 der Brückenstrom (der Klemmenstrom):

$$I_0 = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{R_0 (R_1 + R_3) (R_2 + R_4) + R_1 R_3 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_3)} E \tag{46}$$

oder bei Einführung der entsprechenden Leitwerte:

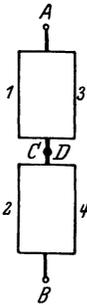


Abb. 20.

$$I_0 = G_0 \frac{G_1 G_4 - G_2 G_3}{G_0 (G_1 + G_2 + G_3 + G_4) + (G_1 + G_3) (G_2 + G_4)} E. \tag{47}$$

§ 22. Thomsonbrücke. Gegenüber der Wheatstoneschen Brücke hatte das Kompensationsverfahren (§ 18) den Vorteil, daß die Widerstände der Abgreifdrähte einflußlos waren, daß man mit ihm also auch kleine Widerstände messen konnte, ohne wegen des Widerstandes der Zuleitungsdrähte Fehler befürchten zu müssen.

Die Frage liegt nahe, ob man nicht sozusagen das Verfahren des Spannungsvergleichs mit dem Verfahren der Brücke verbinden kann. In der Tat gelingt dies mit der Schaltung der sogenannten „Thomsonbrücke“ (Abb. 21). Man verbindet wie gezeichnet und stellt durch Veränderung des abgegriffenen Bruchteils von N auf Verschwinden des Stromes im Zweige o ein.

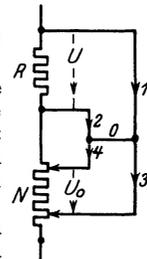


Abb. 21.

Dann gilt nach den Kirchhoffschen Regeln in leichtverständlicher Bezeichnung

$$\left. \begin{aligned} R_1 I_1 - R_2 I_2 &= U, \\ R_3 I_1 - R_4 I_2 &= U_0. \end{aligned} \right\} \tag{48}$$

Im allgemeinen folgt hieraus für das Verhältnis U/U_0 nichts Einfaches. Ist jedoch die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 R_2 \\ R_3 R_4 \end{vmatrix} \quad (49)$$

gleich Null, so müssen, da die Ströme I_1 und I_2 nicht unendlich werden können, auch die Determinanten

$$\begin{vmatrix} U & R_2 \\ U_0 & R_4 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} R_1 & U \\ R_3 & U_0 \end{vmatrix}$$

verschwinden, d. h. es muß gelten

$$\frac{U}{U_0} = \frac{R_2}{R_4} = \frac{R_1}{R_3}. \quad (50)$$

Ist also die „Brückenbedingung“ (49) erfüllt, so kann man das Verhältnis der abgegriffenen Spannungen bestimmen.

Da die Widerstände R und N im Augenblick der Einstellung von demselben Strom durchflossen werden, ist das Verhältnis der abgegriffenen Spannungen auch gleich dem Verhältnis der Widerstände, an denen sie abgegriffen werden.

Besonders häufig wird die Thomsonbrücke zur Vergleichung von Leitfähigkeiten stabförmiger Proben verwendet. Bei Stäben gleichen Durchmessers verhalten sich die Leitfähigkeiten wie die abgegriffenen Längen.

§ 23. Umwandlung eines Dreiecks in einen Stern. Wir wollen nach dem Scheinwiderstand fragen, den die Brückenschaltung der speisenden Stromquelle

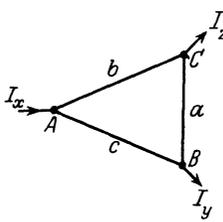


Abb. 22.

bei beliebigem Brückenstrom entgegen-
setzt. Die Frage kann leicht beantwortet
werden mit Hilfe des im folgenden ab-
zuleitenden Satzes über die Umwand-
lung eines Dreiecks in einen Stern.

Gegeben sei (Abb. 22) das Dreieck ABC mit den Widerständen a, b, c ; wir suchen (Abb. 23) die Widerstände x, y, z eines Sterns, der ebenso wirkt wie das Dreieck. Das heißt: wenn beliebige

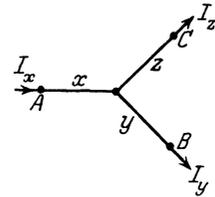


Abb. 23.

Ströme I_x, I_y, I_z in das Dreieck und dieselben beliebigen Ströme in den Stern hineinfließen, dann sollen auch die Spannungen U_{AB}, U_{BC} und U_{CA} beim Dreieck und beim Stern dieselben sein.

Da die Ströme beliebig sind, setzen wir zunächst $I_z = 0$. Dann ist $I_x = I_y$, und die Spannung zwischen den Punkten A und B ist beim Dreieck

$$U_{AB} = I_x \frac{c(a+b)}{a+b+c}, \quad (51)$$

beim Stern

$$U_{AB} = I_x(x+y). \quad (52)$$

Also gilt die Gleichung

$$x+y = \frac{c(a+b)}{a+b+c}. \quad (53)$$

Entsprechend findet man

$$y+z = \frac{a(b+c)}{a+b+c}, \quad z+x = \frac{b(c+a)}{a+b+c};$$

hieraus folgen aber die Umwandlungsgleichungen:

$$x = \frac{bc}{a+b+c}, \quad y = \frac{ca}{a+b+c}, \quad z = \frac{ab}{a+b+c}, \quad (54)$$

die leicht zu behalten sind, wenn man sie mit der Formel für parallel geschaltete Widerstände (§ 13) vergleicht.

Mit Hilfe dieser Umwandlungsgleichungen kann man den Scheinwiderstand einer Brückenschaltung leicht berechnen. Setzt man z. B. die in Abb. 24 eingetragenen Widerstandsgrößen voraus, so erhält man durch Umwandlung eines der beiden Dreiecke eine Schaltung, deren Scheinwiderstand R sich nach § 12 und 13 zu 550Ω berechnet.

Die angenommene Brücke ist nicht abgeglichen. Wäre sie es, so könnte man natürlich den Brücken-zweig, da in ihm kein Strom fließt, bei der Berechnung ganz unberücksichtigt lassen. Dann erhielte man

$$R = \frac{1250 \cdot 1000}{2250} \Omega = 556 \Omega, \quad (55)$$

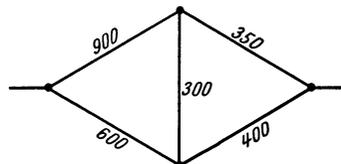


Abb. 24.

d. h. nahezu dasselbe. In unserem Falle könnte man also näherungsweise den Scheinwiderstand der Brückenschaltung so berechnen, als ob sie abgeglichen wäre.

§ 24. **Duale Beziehungen.** Die Ableitung der Formeln für die Parallelschaltung zweier Widerstandsspulen im § 13 geht Wort für Wort aus der Ableitung der Formeln für die Hintereinanderschaltung im § 12 hervor, wenn man überall statt Spannung Strom, statt Knotenregel Maschenregel, statt Widerstand Leitwert, statt hintereinander nebeneinander sagt, und umgekehrt. Man kann also sozusagen durch „Übersetzung“ aus einer Sprache in eine andere die Theorie der einen Schaltung sofort hinschreiben, wenn man die der andern kennt. Zwei Schaltungen, bei denen dies möglich ist, nennen wir „reziprok“ zueinander; oder wir sagen: sie entsprechen sich „dual“. Hintereinanderschaltung und Parallelschaltung stellen das einfachste Beispiel reziproker Schaltungen dar¹.

Auch das Dreieck und der Stern entsprechen sich dual. Das ist leicht folgendermaßen einzusehen. Wir wollen in der Ableitung des § 23 nicht I_z , sondern U_{AB} gleich Null setzen, also die Schaltungen nicht im Punkte C leerlaufen lassen, sondern die Punkte A und B durch einen Kurzschlußbügel verbinden. Nennen wir dann die Leitwerte entsprechend $\alpha\beta\gamma$ und $\xi\eta\zeta$, so ist der Strom I_z beim Dreieck gleich $(\alpha + \beta) U_{AC}$, beim Stern dagegen gleich

$$\frac{\zeta(\xi + \eta)}{\xi + \eta + \zeta} U_{AC},$$

wobei an Stelle von U_{AC} natürlich auch U_{BC} geschrieben werden könnte. Aus der Forderung der Gleichwertigkeit der beiden Gebilde folgt

$$\alpha + \beta = \frac{\zeta(\xi + \eta)}{\xi + \eta + \zeta}. \quad (56)$$

Diese Gleichung ist aber nichts als die „übersetzte“ Gleichung (53); und die weitere Ableitung läßt sich genau wie früher durchführen.

Für die Umwandlung eines Sterns in ein Dreieck gilt also dieselbe Formel wie für die Umwandlung eines Dreiecks in einen Stern, nur muß man statt der Widerstände Leitwerte einsetzen.

Es sei betont, daß die Formeln natürlich anders lauten, wenn man sie für die Umwandlung Dreieck—Stern in Leitwerten oder für die Umwandlung Stern—Dreieck in Widerständen schreibt.

§ 25. **Die Theorie der Zweipolquelle in den dual entsprechenden Parametern.** Auch zu der Theorie der Zweipolquelle gibt es eine dual entsprechende Theorie. Man kann die Zweipolquelle nämlich statt durch ihre Leerlaufspannung und

¹ Vgl. K. Matthies u. F. Strecker: Arch. Elektr. 14, 1 (1924). Die Verf. nennen die hier besprochene Reziprozität „Widerstandsreziprozität“ zur Unterscheidung von der sog. „Frequenzreziprozität“.

ihren inneren Widerstand auch durch ihren Kurzschlußstrom und ihren inneren Leitwert charakterisieren¹. Übersetzen wir die früher hingeschriebenen Gleichungen in die Sprache der dualen Parameter, so erhalten wir als Grundgleichung der Zweipolquelle

$$I = I^k - G_i U \quad (57)$$

und als Gleichungen für den Klemmenstrom und die Klemmenspannung bei der Zusammenschaltung von Zweipolquelle und Zweipol

$$I = \frac{G}{G_i + G} I^k \quad \text{und} \quad U = \frac{I^k}{G_i + G}, \quad (58)$$

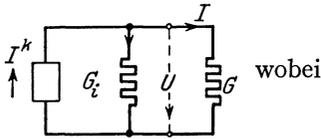


Abb. 25.

$$G_i = \frac{I^k}{U_i}. \quad (59)$$

Jede lineare Zweipolquelle kann hiernach auch ersetzt gedacht werden durch eine Stromquelle von der Kurzschlußstromstärke („Ergiebigkeit“) I^k , der ein „innerer Leitwert“ G_i parallel geschaltet ist (Abb. 25). Die Gleichung (57) folgt dann unmittelbar aus der Knotenregel, wie früher die Gleichung (36), § 16 aus der Maschenregel folgte.

II. Elektrische Felder.

§ 26. Elektrische Feldstärke. Unter einem elektromagnetischen Feld verstehen wir einen Raum, in welchem mit Hilfe besonderer, im folgenden näher zu besprechender Prüfmittel gewisse Wirkungen festgestellt werden können, die man als elektrische und magnetische unterscheidet.

Wir beschäftigen uns zunächst mit den elektrischen Wirkungen. Als Prüfmittel verwenden wir eine leichte kleine Kugel, z. B. eine kleine Hohlkugel aus Aluminium, die nach allen Richtungen hin beweglich an einem Seidenfaden oder einem System von Seidenfäden hängt und der wir eine elektrische Ladung Q erteilt haben. Wir bringen diese Prüfkugel in den „Aufpunkt“, d. h. in den Punkt des Feldes, in welchem wir dessen elektrische Wirkung feststellen wollen. Dann beobachten wir, daß die Kugel in einer bestimmten Richtung beschleunigt wird. Diese Beschleunigung können wir aufheben (kompensieren), indem wir auf die Kugel in der entgegengesetzten Richtung eine Kraft P von bestimmter Größe wirken lassen. Jedem Feldpunkte läßt sich in dieser Weise eine Kraft P zuordnen.

Verändern wir die Ladung der Prüfkugel, so beobachten wir, daß sich die Kräfte mit ändern, und zwar proportional der Ladung. Wir können dies feststellen, weil wir ja wissen (§ 1), wie man Ladungen quantitativ miteinander vergleicht. Ändert die Prüfladung ihr Vorzeichen, so kehren sich die Richtungen der Kräfte um.

Diese Feststellungen können ausgedrückt werden durch die Gleichung

$$P = \mathfrak{C} Q. \quad (60)$$

Die Größe \mathfrak{C} ist dabei eine Konstante, solange wir die Kugel in dem Aufpunkt lassen und nur ihre Ladung variieren; von Aufpunkt zu Aufpunkt dagegen hat sie eine verschiedene Größe. Sie kann, da sie von der Ladung unabhängig ist, als ein Maß für die Stärke des Feldes im Aufpunkte angesehen werden. Legen wir ihr die Richtung der Kraft auf eine positive Ladung bei, so ist sie zugleich

¹ Vgl. H. F. Mayer: Tel.- u. Fernspr.-Techn. 15, 335 (1926). Barkhausen, H.: Verh. dtsh. physik. Ges. (3) 9, 2 (1928).

ein Maß für die „Richtung des Feldes“ im Aufpunkte. Man nennt \mathcal{E} die „elektrische Feldstärke im Aufpunkt“.

Die Feldstärke ist nach dieser Definition wie die mechanische Kraft eine gerichtete Größe oder ein „Vektor“. Wir werden im folgenden die Vektoren vorzugsweise durch deutsche Buchstaben bezeichnen. Wollen wir betonen, daß nur ihre Größe, ihr stets positiver „Beitrag“, gemeint ist, so schließen wir den deutschen Buchstaben in senkrechte Striche ein.

Zahlenbeispiel. Die der Prüfkugel erteilte Ladung betrage $50 \cdot 10^{-12}$ Coul. Der Antrieb, den sie im Aufpunkt erfährt, lasse sich durch den Zug eines in entgegengesetzter Richtung wirkenden Gewichts von 2 mg^* wieder aufheben. Das Zeichen mg^* soll dabei die Kraft bedeuten, mit der im luftleeren Raum ein Milligrammgewichtchen an einem Orte normaler Fallbeschleunigung¹ senkrecht nach unten zieht. In dem von uns untersuchten Feld herrscht dann nach (60) eine elektrische Feldstärke von der Größe

$$\mathcal{E} = \frac{P}{Q} = \frac{2 \text{ mg}^*}{50 \cdot 10^{-12} \text{ Coul}} = 4 \cdot 10^4 \frac{\text{kg}^*}{\text{Coul}}. \quad (61)$$

Wenn wir die Feldstärke in dieser Form angeben, wählen wir die Feldstärke kg^*/Coul als Einheit. Die Feldstärke $\text{kg}^*/\text{Coul} = \text{mg}^*/\mu\text{Coul}$ ist gleich der (ziemlich geringen) Stärke eines Feldes, in welchem eine Kugel mit der (ziemlich großen) Ladung von $1 \mu\text{Coul}$ einen Antrieb von (nur) 1 mg^* erfährt.

§ 27. Feldstärke und Stromdichte; Ohmsches Gesetz. Unter einem homogenen oder gleichförmigen Feld verstehen wir ein Feld, dessen Stärke nach Größe und Richtung überall dieselbe ist. In ein solches Feld denken wir uns parallel zu seiner Richtung einen geraden Draht von dem kleinen Querschnitt F hineingebracht. Wenn nun in dem Metall frei bewegliche, mit elektrischen Ladungen versehene Teilchen vorhanden sind, so erfahren sie nach § 26 Antriebe in der Richtung des Feldes, falls die Ladungen positiv sind, in der entgegengesetzten Richtung, falls sie negativ sind; es kommt daher durch die einzelnen Querschnitte hindurch eine elektrische Strömung zustande, und zwar in jedem Falle in der Richtung des Feldes. Die entstehende Stromstärke I ist erfahrungsgemäß dem Querschnitt F und der elektrischen Feldstärke \mathcal{E} proportional:

$$I = \kappa F \mathcal{E} \quad (62)$$

Mit der Abkürzung

$$i = \frac{I}{F} \quad (63)$$

kann man hierfür auch

$$i = \kappa \mathcal{E} \quad (64)$$

schreiben. i heißt „Stromdichte“.

Diese Erfahrungsformel nennen wir die Differentialform des Ohmschen Gesetzes. Sie gilt nicht nur unter den von uns gemachten Voraussetzungen, sondern allgemein und sagt, daß in einem Metall, das in ein elektromagnetisches Feld gebracht wird, eine elektrische Strömung entsteht, deren Dichte an jeder Stelle der dort herrschenden elektrischen Feldstärke proportional ist. In dem empirischen Faktor κ steckt u. a. die Zahl der in der Raumeinheit vorhandenen frei beweglichen Teilchen.

Aus der Erfahrung, daß mit der Leitung der Elektrizität in Metallen keinerlei elektrolytische Ausscheidung verbunden ist, muß geschlossen werden, daß die Leitung durch die Bewegung der „Elektronen“ zustande kommt, d. h. der „Elektrizitätsatome“, deren negative Ladung $-e$ dem Betrage nach gleich $1,591 \cdot 10^{-19}$ C ist.

§ 28. Elektrische Arbeit und elektrische Spannung. Unter dem Einflusse des Feldes \mathcal{E} sei durch jeden Querschnitt unseres geraden Drahts die Elektrizitätsmenge Q gewandert. In ein Stück von der Länge dl ist dann — wenn \mathcal{E} von

¹ Als normale Fallbeschleunigung ist der Wert $g = 980,665 \text{ cm/sec}^2$ festgesetzt.

1 nach 2 (Abb. 26) gerichtet ist — vorn, bei 1, die Menge Q eingetreten; dieselbe Menge ist hinten, bei 2, wieder ausgetreten. Das Ergebnis ist offenbar dasselbe, wie wenn die Menge Q um die Strecke dl verschoben worden wäre. Ist P die Kraft, die im Felde \mathcal{E} auf die Ladung Q wirkt, so haben die elektrischen Kräfte nach einer bekannten Definition der Mechanik im ganzen die „Arbeit“

$$A = P dl = Q \mathcal{E} dl \tag{65}$$

geleistet. Die Arbeit der elektrischen Kräfte, kurz: die „elektrische Arbeit“, ist also gleich dem Produkt aus der durch die elektrischen Kräfte bewegten Ladung Q und der Größe $\mathcal{E} dl$.

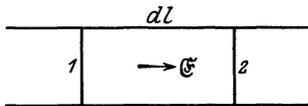


Abb. 26.

Wir wollen zeigen, daß aus der Differentialform des Ohmschen Gesetzes für ein kleines Stück eines dünnen Drahts die Spannungsdefinition des § 10 hervorgeht, wenn man das Produkt $\mathcal{E} dl$ als die „elektrische Spannung“ auf dem Wege von 1 nach 2 deutet. Wir brauchen nur die Differentialform (62) nach \mathcal{E} aufzulösen und mit dl zu multiplizieren; dann erhalten wir:

$$dU = \mathcal{E} dl = \frac{dl}{\kappa F} I. \tag{66}$$

Dies folgt aber auch aus den Gleichungen (9), § 7 und (12), § 11, wenn man die in § 27 eingeführte Proportionalitätskonstante κ mit der elektrischen Leitfähigkeit gleichsetzt.

Die elektrische Spannung auf dem Wege dl ist nach (66) und (65) zahlenmäßig gleich der Arbeit, welche die elektrischen Kräfte leisten, wenn die Elektrizitätsmenge τ in der Richtung der elektrischen Feldstärke um die Strecke dl verschoben wird.

§ 29. Zusammenhang zwischen Kraft- und Spannungseinheit. Wenn kg^*/Coul eine Feldstärkeeinheit ist, so ist $\text{kg}^*\text{cm}/\text{Coul}$ eine Spannungseinheit. Um die Beziehung zwischen ihr und der Einheit Volt zu finden, muß man dieselbe Spannung einmal in der „praktischen“ Einheit Volt und einmal in der „gemischt-technisch-praktischen“ Einheit $\text{kg}^*\text{cm}/\text{Coul}$ messen und die gefundenen Werte einander gleich setzen.

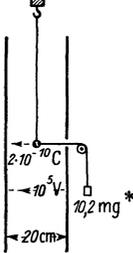


Abb. 27.

Zwischen zwei Metallplatten (Abb. 27) liege eine Spannung von 10000 V; ihr Abstand $l = 20$ cm sei klein gegenüber der Wurzel aus ihrer Flächengröße. Zwischen diese Platten werde eine kleine Kugel gebracht, die mit $200 \cdot 10^{-12}$ Coul geladen sei. Dann zeigt der Versuch, daß die Kugel, wo im einzelnen sie sich auch befinden möge, einen Antrieb von $10,2$ mg^* erfährt. Daraus muß geschlossen werden, daß

$$\mathcal{E} = \frac{U}{l} = \frac{10^5 \text{ Volt}}{20 \text{ cm}} = \frac{P}{Q} = \frac{10,2 \text{ mg}^*}{2 \cdot 10^{-10} \text{ Coul}}$$

ist, d. h. daß

$$\text{Volt} = \frac{20 \cdot 10,2}{2} 10^5 \frac{\text{mg}^*\text{cm}}{\text{Coul}} = 10,2 \frac{\text{kg}^*\text{cm}}{\text{Coul}} \tag{67}$$

Dies ist der Zusammenhang der „technischen“ Einheit kg^* mit den praktischen Einheiten Volt und Coulomb.

§ 30. Stromwärme. Durch jeden Querschnitt eines Widerstandes R sei unter der Einwirkung einer an ihn angelegten Spannung U in der Zeit t die Elektrizitätsmenge Q geflossen. Dann ist wieder das Ergebnis dasselbe, wie wenn Q von dem Eingang 1 des Widerstandes bis zu seinem Ausgang 2 bewegt worden wäre; und die gesamte Arbeit der elektrischen Kräfte ist daher

$$A = Q \int_1^2 \mathcal{E} ds = QU = UIt = RI \cdot It = RI^2t. \tag{68}$$

Diese Arbeit ist nicht verloren. Wo sie hinkommt, zeigt der Versuch: Man bringt den Widerstand in ein Gefäß mit Wasser; dieses erwärmt sich, und zwar ist bei Beobachtung der nötigen Vorsichtsmaßregeln die Zunahme seiner Temperatur ΔT direkt proportional der von den elektrischen Kräften geleisteten Arbeit A , umgekehrt proportional der Masse m des Wassers:

$$\Delta T = \text{const} \frac{A}{m}. \tag{69}$$

Der reziproke Wert der Proportionalitätskonstante heißt „spezifische Wärme“ c_0 des Wassers; das Produkt $c_0 m \Delta T$ wird die in dem Widerstand entwickelte und auf das Wasser übertragene „Wärmemenge“ oder kurz „Wärme“ genannt. Die von den elektrischen Kräften geleistete Arbeit ist hiernach unmittelbar gleich (nicht etwa nur proportional) der entwickelten Wärme:

$$A = c_0 m \Delta T = R I^2 t. \tag{70}$$

Die Stromwärme kann als eine Art „Reibungswärme“ aufgefaßt werden.

§ 31. Die Leistung als strömende Energie; Klemmenleistung. Eine Zweipolquelle von der konstanten Leerlaufspannung U^l und dem inneren Widerstand R_i sei (Abb. 28) mit einem Zweipol vom Widerstande R durch Klemmen verbunden. Nennen wir den Klemmenstrom I , so wird in dem Zweipol nach § 30 in der Sekunde die Wärmemenge $R I^2$ entwickelt.

Diese Wärmemenge stammt natürlich aus den elektromotorischen Kräften der Zweipolquelle; sie muß also von dieser in den Verbraucher gewandert sein. Mit andern Worten: durch eine Fläche F , die man sich senkrecht zu der Zeichenebene durch die Klemmen gelegt denken kann, strömt in jeder Zeiteinheit die Energie $R I^2$. Schreibt man hierfür $U I$, wo U die Klemmenspannung bedeutet, so kann man das Ergebnis auch so aussprechen: die „Klemmenleistung“, d. h. die in der Zeiteinheit durch die Klemmen strömende Energie, ist gleich dem Produkt aus Klemmenspannung und Klemmenstrom¹.

Diese letzte Beziehung gilt auch dann, wenn in dem Verbraucher mechanische oder chemische Arbeit geleistet wird. Dann ist die Klemmenleistung gleich der Summe der in dem Verbraucher entwickelten Wärme und der sonst noch geleisteten Arbeiten, alles auf die Zeiteinheit bezogen.

Der Richtungssinn der Energieströmung stimmt nach Abb. 28 überein mit der Richtung des Stroms, der durch die Klemme höheren Potentials fließt, und ist entgegengesetzt zu der Richtung des Stroms, der durch die Klemme niedrigeren Potentials fließt.

Entsprechend der Gleichung $N = U I$ wechselt die Energieströmung ihren Richtungssinn, sobald die Spannung oder der Strom die Richtung ändert. Ändern Spannung und Strom beide ihre Richtung, so bleibt die Wanderungsrichtung der Energie die ursprüngliche.

Um den Richtungssinn der Energieströmung in einfacher Weise festzulegen, kann man den Umlaufsinn des Stroms nach einer Rechtschraube einem Hilfsvektor \S zuordnen, wie es in Abb. 29 geschehen ist (das $+$ -Zeichen in dem Kreis soll andeuten, daß der Vektor von dem Beschauer weg gerichtet ist). Denkt man sich dann den Vektor \S

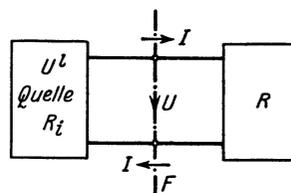


Abb. 28.

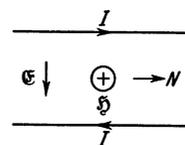


Abb. 29.

¹ Die Klemmenleistung ist der Fluß des sog. „Poyntingschen Vektors“ durch die Fläche F . Vgl. Abraham: Theorie der Elektr., 8. Aufl. bearb. v. R. Becker. § 52, 65, 70. Leipzig: B. G. Teubner 1930.

durch den kleineren Winkel hindurch in die Richtung des Vektors \mathfrak{E} gedreht, so bildet diese Drehung mit der Strömungsrichtung der Energie wieder eine Rechtsschraube.

§ 32. **Anpassung des Verbrauchers an den Erzeuger.** In der Schwachstromtechnik soll meist, ohne Rücksicht auf den dazu nötigen Energieaufwand (vgl. § 168), möglichst viel Energie in einen Verbraucher hineinbefördert werden. Man hat also das Produkt UI zu einem Maximum zu machen. Nun ist aber nach § 17

$$N = UI = RI^2 = \frac{R}{(R_i + R)^2} U^2. \quad (71)$$

Die Leistung wird also vergrößert durch Vergrößerung der Leerlaufspannung und durch Verkleinerung des inneren Widerstandes. Ob es aber günstig ist, den Verbraucherwiderstand groß oder klein zu wählen, ist nicht so einfach zu entscheiden, weil R im Zähler und im Nenner vorkommt. Nach der im Anhang unter 3. c) angegebenen Formel erhält man das Maximum des Bruches $\frac{R}{(R_i + R)^2}$ durch den Ansatz

$$\frac{R}{(R_i + R)^2} = \frac{1}{2(R_i + R)},$$

also

$$2R = R_i + R \quad \text{oder} \quad R = R_i. \quad (72)$$

Bei gegebenem Quellenwiderstand ist es demnach vorteilhaft, wenn ihm der Verbraucherwiderstand annähernd gleich ist; ist er größer, so wird der Klemmenstrom, ist er kleiner, so wird die Klemmenspannung zu klein.

§ 33. **Allgemeine Definition der Spannung.** Allgemein definiert man die Spannung längs eines gegebenen, im Sinne ihres Zählpfeils zu durchlaufenden Weges durch das über diesen Weg erstreckte „Linienintegral“:

$$U = \int |\mathfrak{E}| |ds| \cos(\mathfrak{E}, ds). \quad (73)$$

Dabei ist unter $|\mathfrak{E}|$ der immer positive Betrag der Feldstärke, unter $|ds|$ der immer positive Betrag des Wegelements zu verstehen; (\mathfrak{E}, ds) ist der Winkel zwischen der Feldrichtung und der Richtung des Wegelements (der „Integrationsrichtung“).

Die Spannung ist nach dieser Definition kein „Vektor“. Durch die Integrationsrichtung wird ihr jedoch ein bestimmter „Richtungssinn“ zugeordnet. Welches dieser Sinn ist, erkennt man am leichtesten in dem besonderen Fall, wo die Feldstärke \mathfrak{E} überall mit der Wegtangente zusammenfällt. Bildet sie mit der Richtung des Wegelements überall den Winkel 0° , so ist U nach (73) positiv; d. h. die Spannung läuft im Sinne des Zählpfeils, sie hat denselben Richtungssinn wie die Feldstärke. Bildet die Feldstärke dagegen mit ds den Winkel 180° , so ist U negativ; das heißt aber: die Spannung hat wieder denselben Richtungssinn wie die Feldstärke.

Besteht zwischen der Richtung der Feldstärke und dem Verlauf des Wegs keine Bindung, so sind die Projektionen $|\mathfrak{E}| \cos(\mathfrak{E}, ds)$ der Feldstärke auf den Weg teils positiv, teils negativ; der Sinn der Spannung richtet sich dann nach dem Vorzeichen derjenigen Projektionen, die zu dem Integral das meiste beisteuern.

§ 34. **Elektrostatisches Feld.** Im § 27 war das betrachtete Drahtstück von der Länge dl als Teil eines Stromkreises aufzufassen. Bringt man ein begrenztes Drahtstück in ein gleichförmiges elektrisches Feld, so müssen sich infolge der entstehenden Strömung auf seinen Enden Ladungen sammeln¹; durch die Ein-

¹ Wenn sich nur Ladungen eines Vorzeichens, z. B. nur Elektronen, bewegen, hat man sich vorzustellen, daß das eine Ende an Elektronen verarmt, während sich auf dem andern Elektronen ansammeln.

wirkung dieser „influenzierten“ Ladungen wird aber (vgl. später § 39) das ursprüngliche Feld zum Verschwinden gebracht, so daß nach dem Ohmschen Gesetz schließlich auch die Strömung verschwindet.

Die elektrischen Leiter sind Stoffe, in denen sich ohne Energiezufuhr auf die Dauer überhaupt kein elektrisches Feld und keine elektrische Strömung halten kann: das Feld beginnt in ihnen unter Entwicklung von Wärme sofort zu „zerfallen“.

Wir nennen das zeitlich konstante Feld, das sich in einem System, das keine Energiequelle enthält, nach hinreichend langer Zeit ausbildet, ein „elektrostatisches“. Bei ihm ist die elektrische Strömung in allen Medien gleich Null geworden.

§ 35. **Wirbelfreies Feld.** Die Erfahrung zeigt, daß die für einen geschlossenen Weg berechnete elektrische Spannung im elektrostatischen Felde gleich Null ist. Führen wir also eine Ladung Q im elektrostatischen Feld auf einem geschlossenen Wege herum, so leisten die elektrischen Kräfte im allgemeinen zwar auf einem Teile des Weges Arbeit; auf einem andern Teile müssen aber wir selbst gegen die elektrischen Kräfte Arbeit leisten: die Gesamtarbeitsleistung ist immer genau gleich Null.

Der Satz von dem Verschwinden der „Umlaufspannung“, wie man die Spannung auf geschlossenem Wege nennt, ist ein Grundgesetz des elektrostatischen Feldes. Aus ihm folgt, daß man die Kräfte des elektrostatischen Feldes nicht zum Betriebe eines perpetuum mobile ausnutzen kann.

Ein Feld von verschwindender Umlaufspannung wird auch ein „wirbelfreies“ Feld genannt. Die elektrostatischen Felder sind, wie wir sehen werden, nicht die einzigen wirbelfreien Felder.

§ 36. **Potential.** Aus dem Verschwinden der Umlaufspannung folgt, daß im wirbelfreien Felde die Spannung auf allen Wegen, die man sich zwischen zwei Punkten 1 und 2 denken kann, dieselbe ist. Denn führt der eine Weg (Abb. 30) über a , der andere über b , so ist nach Voraussetzung

$$\int_{1a2b1} = 0,$$

also

$$\int_{1a2} + \int_{2b1} = \int_{1a2} - \int_{1b2} = 0.$$

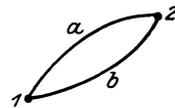


Abb. 30.

Im wirbelfreien Felde kann man daher in Übereinstimmung mit den Angaben des § 10 die Spannung zwischen den Punkten 1 und 2 gleich der Differenz der Werte setzen, die eine Ortsfunktion φ , die man „Potential“ nennt, in den beiden Punkten 1 und 2 hat:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2. \tag{74}$$

Denn dann wird tatsächlich U für jeden geschlossenen Weg von selbst gleich Null, da für ihn natürlich $\varphi_1 = \varphi_2$ ist.

Bei Gleichung (74) muß vorausgesetzt werden, daß der Zählpfeil der Spannung von 1 nach 2 läuft; denn nach § 10 sollte das Potential in Richtung der Spannung abnehmen.

Da durch (74) nur die Potentialdifferenz, aber nicht das Potential selbst definiert ist, kann man dieses in irgendeinem Punkte willkürlich gleich Null setzen.

§ 37. **Feldstärke und Potentialgefälle.** Wir denken uns von einem Feldpunkte aus ein unendlich kleines Wegelement ds gezogen; dieses kann alle möglichen Richtungen haben (Abb. 31). Der Zuwachs, den das Potential φ erleidet, wenn man um das Wegelement ds in dessen Richtung fortschreitet, sei gleich $d\varphi$. Dann kann man, da das Potential in der Richtung der Spannung immer abnimmt, den Ansatz machen:

$$-d\varphi = |\mathfrak{E}| |ds| \cos(\mathfrak{E}, ds). \tag{75}$$

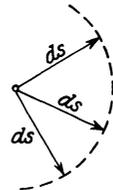


Abb. 31.

Die Potentialabnahme hängt also im allgemeinen von der Richtung des Fortschreitens ab. Bei gleichem $|\mathfrak{E}|$ und $|ds|$ ist sie aber in der Richtung der elektrischen Feldstärke ($\nabla \mathfrak{E}, ds = 0$) größer als in allen anderen Richtungen. Für diese Richtung berechnet ist der Betrag $|d\varphi/ds|$, den wir den Betrag des „Potentialgefälles“ nennen, nach (75) gleich dem Betrag der elektrischen Feldstärke. Diese stimmt also an jeder Stelle des wirbelfreien Feldes nach Größe und Richtung mit dem größten Potentialgefälle überein.

§ 38. **Elektromotorische Kräfte.** Auf eine stromquellenfreie Gleichstrommaschine angewendet, ist die Kirchhoffsche Maschenregel offenbar gleichbedeutend mit der Aussage, daß das elektrische Feld wirbelfrei ist. Deshalb ist es beispielsweise bei der Schaltung Abb. 32 gleichgültig, ob man sich die Spannung U

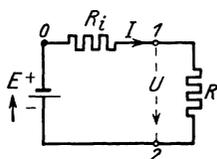


Abb. 32.

zwischen den Klemmen 1 und 2 für einen Weg quer durch das Medium hindurch oder durch die Windungen des Abschlußwiderstandes R hindurch berechnet denkt. Es ist ja $U = RI$.

Treten elektromotorische Kräfte hinzu, so kann man den Satz von der Wirbelfreiheit des Gleichstromfeldes formal aufrechterhalten, wenn man jeder elektromotorischen Kraft E eine Spannung $-E$ zuordnet und bei der Berechnung der Umlaufspannung diese Zusatzspannungen mit berücksichtigt. Bei der Schaltung Abb. 32 beispielsweise kann man die Klemmenspannung U auch auf dem Wege längs des Widerstandsdrahts R_i und durch die Batterie E hindurch berechnet denken; denn aus der Wirbelfreiheit des Feldes ergibt sich:

$$U + (-E) + R_i I = 0, \tag{76}$$

wie es sein muß.

Daß man den elektromotorischen Kräften Spannungen zuordnen muß, die von den positiven nach den negativen Polen gerichtet sind, läßt sich auch folgendermaßen erklären. Man stelle sich etwa vor, die Stromquelle bestände in einem Gebläse, durch welches positive Elektrizitätsträger in der Richtung der EMK getrieben werden¹. Dann hat die elektrische Strömung zwei Ursachen: Die Ladungen verschieben sich, weil sie sich in einem gemäß § 26 meßbaren Feld \mathfrak{E} befinden und weil mechanische Kräfte an ihnen angreifen. Diese mechanischen Kräfte kann man durch ein fiktives sogenanntes „eingepprägtes“ Feld \mathfrak{E}_e ersetzen, dessen Linienintegral genommen für einen Weg vom negativen Pol der Quelle zum positiven gleich der elektromotorischen Kraft E ist:

$$\int |\mathfrak{E}_e| |ds| \cos(\mathfrak{E}_e, ds) = E. \tag{77}$$

Beide Felder verursachen eine Strömung: $i = \kappa (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_e)$; aber nur das Feld \mathfrak{E} , das man häufig das „elektrostatische“ Feld nennt, ist wirbelfrei.

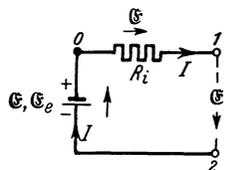


Abb. 33.

Auch diese Vorstellungen führen zur Maschenregel. Wir zeigen das für die Zweipolquelle der Abb. 33. Da eine eingepprägte Feldstärke nur bei dem Zweig 20, ein elektrischer Strom nur bei den Zweigen 01 und 20 zu berücksichtigen ist, ergibt sich aus der Wirbelfreiheit des Feldes \mathfrak{E} , wenn man den Batteriewiderstand vernachlässigt:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 + \int_1^2 + \int_2^0 = I \int_0^1 \frac{ds}{\kappa F} + U + \int_2^0 \left(\frac{i}{\kappa} - \mathfrak{E}_e \right) ds \approx R_i I + U - \int_2^0 \mathfrak{E}_e ds \\ &= R_i I + U - E \end{aligned} \tag{78}$$

wieder in Übereinstimmung mit der Grundgleichung der Zweipolquelle.

¹ Vgl. z. B. R. W. Pohl: Einführung in die Elektrizitätslehre, 3. Aufl. VIII u. IX. Berlin: Julius Springer 1931.

Ist die Stromquelle offen, so ist der Strom I und damit in den Metallen¹ das Gesamtfeld $\mathfrak{E} + \mathfrak{E}_e$ gleich Null. In dem Schließungsdraht ist auch das elektrostatische Feld gleich Null; in der Stromquelle dagegen liegt zwischen den Polen ein starkes vom Pluspol zum Minuspol gerichtetes Feld $\mathfrak{E} = -\mathfrak{E}_e$.

In der Praxis sind die eingepprägten Feldstärken meist chemischen Ursprungs².

§ 39. **Coulombsches Gesetz.** Erfahrungsgemäß bestehen in der Umgebung elektrischer Ladungen elektrische Felder. Um den Zusammenhang zwischen den felderzeugenden Ladungen und den erzeugten Feldstärken festzustellen, hat Coulomb das Feld einer einzelnen annähernd punktförmigen Ladung experimentell untersucht und gefunden, daß seine Stärke der Ladung direkt und dem Quadrate ihrer Entfernung von dem Aufpunkt umgekehrt proportional ist:

$$\mathfrak{E} = \text{const} \frac{Q}{r^2}. \quad (79)$$

Und zwar stoßen sich gleichnamige Elektrizitäten ab, ungleichnamige ziehen sich an. Die Konstante des Gesetzes hängt, wie spätere Messungen gezeigt haben, von der Art des Feldmediums ab.

Der grundlegende Coulombsche Ansatz reicht aus, um das von beliebig vielen Punktladungen erzeugte elektrische Feld zu berechnen; man braucht nur die Einzelfeldstärken nach dem Vieleck der Kräfte zusammzusetzen.

Der Ansatz versagt jedoch, wenn die Ladungen verteilt auf ausgedehnten Leitern sitzen. Denn da sie selbst dem Felde ausgesetzt sind, werden sie durch dieses verschoben; die in die Gleichung (79) einzuführenden Abstände r hängen daher von der noch unbekanntem Feldverteilung ab.

§ 40. **Elektrische Verschiebung.** Die mathematische Physik geht in solchen komplizierteren Fällen meist von einer Differentialgleichung (der sog. „Poissonschen“) aus, die für den Fall einer Punktladung wieder zum Coulombschen Gesetz zurückführt.

Man kann das Coulombsche Gesetz aber auch durch eine Integralform der Poissonschen Grundgleichung ersetzen. Dabei erweist es sich als zweckmäßig, neben der Feldstärke \mathfrak{E} noch eine zweite gerichtete Feldgröße \mathfrak{D} einzuführen, die man „elektrische Verschiebung“ nennt.

Wenn nach dem Coulombschen Gesetz die Feldstärke dem Quadrate des Abstands r , den die Punktladung vom Aufpunkt hat, umgekehrt proportional ist, so hat dies offenbar einen rein geometrischen Grund: die Wirkung der Ladung verteilt sich sozusagen auf die Oberfläche $4\pi r^2$ einer Kugel vom Radius r . Es erleichtert nun den Überblick, wenn man sich vorstellt, daß die Ladung Q im Aufpunkt zunächst einen „Hilfs-“ oder „Zwischenvektor“ \mathfrak{D} erzeugt, der in dem geometrischen Zusammenhang

$$\mathfrak{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad (80)$$

mit ihr steht, und daß diesem Zwischenvektor dann erst die meßbare Feldstärke \mathfrak{E} proportional ist. Es ist mit andern Worten bequem, den gesuchten Zusammenhang zwischen \mathfrak{E} und Q in zwei Teilzusammenhänge zu zerlegen.

Der erste dieser Teilzusammenhänge wird allgemein am besten mit Hilfe des Begriffs des „Flusses“ ausgedrückt. Unter dem Flusse einer gerichteten

¹ Im Dielektrikum zwischen r und z bleibt ein Feld bestehen; das Verschwinden des Stroms folgt hier aus $\kappa = 0$.

² Vgl. R. W. Pohl: a. a. O.

Größe \mathfrak{D} durch eine Fläche F versteht man das Integral $\int \mathfrak{D}_n dF$, wo \mathfrak{D}_n die Komponente von \mathfrak{D} senkrecht (normal) zu dem Flächenelement dF bedeutet. Man nimmt die Normalkomponente der gerichteten Größe, damit ihr Fluß gleich Null wird, wenn sie der Fläche parallel läuft.

Da jede Fläche zwei Seiten hat, muß eine „Zählnormale“ festgesetzt werden; der überwiegende Richtungssinn eines positiven Flusses ist dann der der Normale.

Man setzt nun fest, daß der Verschiebungsfluß durch jede beliebige geschlossene Fläche (Raumteilhülle), wenn die Zählnormale nach außen weist, gleich der gesamten Ladung sein soll, die in dem von der Fläche umhüllten Raumteil enthalten ist:

$$\int \mathfrak{D}_n dF = Q. \quad (81)$$

Im Falle der Punktladung führt diese Integralform der Poissonschen Gleichung wieder zu der Gleichung (80) zurück. Wir denken uns als Fläche, für die wir den Fluß berechnen, eine Kugelfläche vom Radius r um die Punktladung. Dann folgt aus der Symmetrie des Ganzen, daß die Verschiebung überall auf der Fläche nur die Richtung des Kugelradius haben kann und überall gleich groß sein muß. (81) ergibt also $\mathfrak{D} \cdot 4\pi r^2 = Q$ oder $\mathfrak{D}_n = \mathfrak{D} = \frac{Q}{4\pi r^2}$ in Übereinstimmung mit (80). Die Verschiebung ist nach (81) nach außen gerichtet, wenn die Ladung positiv ist; sie hat also nach § 39 die Richtung der Feldstärke.

§ 41. Verschiebungsfeld eines langen Drahts. Wir wollen die Grundgleichung (81) sofort auf zwei praktisch besonders wichtige Fälle anwenden; und zwar beginnen wir mit der Berechnung der Verschiebung in der Umgebung eines geladenen langen Zylinders. Als Fläche, auf die die Gleichung (81) anzuwenden ist, wählen wir eine koaxiale Zylinderfläche durch den Aufpunkt A (Abb. 34), die wir durch zwei Querschnitte abschließen. Aus den Symmetrieverhältnissen folgt wieder, daß die Verschiebung radial gerichtet ist und auf der Mantelfläche überall dieselbe Größe hat. Es gibt sich daher, da die Flüsse durch die beiden Querschnitte gleich Null sind:

$$\mathfrak{D} = \frac{Q}{2\pi r l}, \quad (82)$$

wo r den Abstand des Aufpunkts von der Achse, Q die Ladung und l die Länge des betrachteten Zylinderstücks bedeuten. Die Verschiebung ist also der Ladung der Längeneinheit Q/l direkt, dem Abstände r umgekehrt proportional.

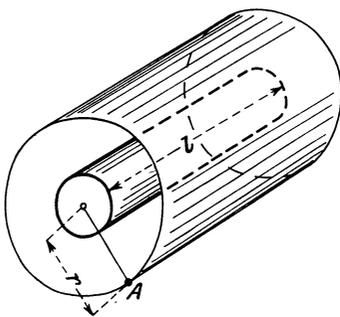


Abb. 34.

§ 42. Verschiebungsfeld zwischen zwei parallelen Ebenen. Zwei sehr große einander parallele ebene Leiteroberflächen seien mit entgegengesetzt gleichen Elektrizitätsmengen geladen. Dann folgt bei kleinem Flächenabstand aus den Symmetrieverhältnissen, daß die Verschiebung überall gleich groß ist und zu den Flächen senkrecht steht. Um die Gleichung (81) anwenden zu können, denken wir uns einen

Zylinder, dessen Achse zu den Flächen senkrecht steht (Abb. 35). Der Fluß durch die im Leiter verlaufende Grundfläche und durch die Mantelfläche ist gleich Null; in die Gleichung (81) ist daher nur der Fluß durch die im Dielektrikum liegende Grundfläche einzusetzen, und man erhält

$$\mathfrak{D} = \frac{Q}{F}, \quad (83)$$

wo F die Größe der Grundfläche und Q die Ladung bedeutet, die auf dem im Innern des Zylinders liegenden Stück der einen Grenzfläche sitzt. Die Verschiebung ist in diesem Falle überall im Zwischenraum gleich der Dichte der Ladung auf einer der beiden Grenzflächen.

§ 43. **Messung der Verschiebung.** Bringt man in ein elektrisches Feld zwei kleine, dünne, sich berührende leitende Scheiben an isolierenden Griffen, und zwar so, daß die Verschiebungslinien zu ihnen senkrecht stehen (Abb. 36), so werden auf ihnen entgegengesetzt gleiche Ladungen induziert, deren Größe sich wie im § 42 gleich $\mathfrak{D}F$ ergibt. Trennt man die Scheiben im Felde und mißt ihre Ladungen $\pm Q$, so kann man die Größe der Verschiebung im Aufpunkt nach $\mathfrak{D} = \frac{Q}{F}$ berechnen.

Diese Bestimmung der Verschiebung ist ebenso anschaulich und unmittelbar, wie die Bestimmung der elektrischen Feldstärke nach § 26.

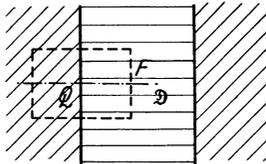


Abb. 35.

§ 44. **Zusammenhang zwischen Verschiebung und Feldstärke.** Die Erfahrung zeigt, daß zwischen der nach (81) berechneten Verschiebung \mathfrak{D} und der meßbaren Feldstärke \mathfrak{E} ein Zusammenhang besteht, der nur von den Eigenschaften des Mediums im Aufpunkt abhängt. Die Gleichung (81) ist also mehr als eine willkürliche, der zu definierenden Größe aufzuerlegende Bedingung; sie muß zusammen mit der Gleichung

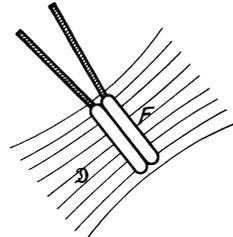


Abb. 36.

steht, der nur von den Eigenschaften des Mediums im Aufpunkt abhängt. Die Gleichung (81) ist also mehr als eine willkürliche, der zu definierenden Größe aufzuerlegende Bedingung; sie muß zusammen mit der Gleichung

$$\mathfrak{E} = \text{const } \mathfrak{D} \tag{84}$$

als Ausdruck eines physikalischen Gesetzes angesehen werden. Den reziproken Wert der Stoffkonstante in (84) nennen wir „Dielektrizitätskonstante“ ϵ . Erfahrungsgemäß ist also

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{\epsilon} \mathfrak{D} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{E}. \tag{85}$$

Die Dielektrizitätskonstante kann unmittelbar durch gleichzeitige Messung von \mathfrak{E} und \mathfrak{D} bestimmt werden.

Bei den beiden auf 10000 V geladenen Platten des § 29 z. B. war

$$\mathfrak{E} = 10^5 \text{ V}/20 \text{ cm} = 5 \text{ kV/cm}.$$

Die Elektrizitätsmengen Q , die auf den Platten sitzen, können gemessen werden; dann ist nach (83)

$$\mathfrak{D} = \frac{Q}{F}.$$

Führt man den Versuch mit Platten von 5 m^2 Flächengröße in Luft aus, so findet man

$$Q = 22,14 \cdot 10^{-6} \text{ C}.$$

Daraus ist zu schließen:

$$\mathfrak{D} = \frac{Q}{F} = \frac{22,14 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{5 \text{ m}^2} = 4,428 \cdot 10^{-10} \frac{\text{C}}{\text{cm}^2}$$

und

$$\epsilon = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{E}} = \frac{4,428 \cdot 10^{-10} \text{ C cm}}{\text{cm}^2 \cdot 5 \cdot 10^3 \text{ V}} = 0,886 \cdot 10^{-13} \frac{\text{C}}{\text{V cm}}. \tag{86}$$

Dies ist nach unsern Festsetzungen die Dielektrizitätskonstante der Luft. Für den leeren Raum bekommt man einen Wert ϵ_0 , der sich hiervon nur wenig unterscheidet¹.

¹ Die Erkenntnis, daß der Zusammenhang zwischen Feld und Ladungen auch im leeren Raum durch eine meßbare Konstante vermittelt wird, verdankt man G. Giorgi: Nuovo Cimento (5) 4, 11 (1902).

Da das Verhältnis Coulomb/Volt auch „Farad“ heißt, ist die praktische Einheit der Dielektrizitätskonstante F/cm.

In Tabellen gibt man gewöhnlich die „Dielektrizitätszahl“ ϵ/ϵ_0 , d. h. das Verhältnis der Dielektrizitätskonstante des betreffenden Stoffes zu der universellen Konstante ϵ_0 an.

§ 45. Verschiebungsströme. Wenn sich die im Felde vorhandenen elektrischen Ladungen infolge elektrischer Strömungen ändern, so ändert sich auch die mit ihnen verknüpfte Verschiebung in den einzelnen Punkten des Feldes.

Bei parallelen Platten z. B. (Abb. 37) zieht jede Änderung dQ/dt gemäß (83) eine Änderung $d\mathfrak{D}/dt$ nach sich, die durch

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \frac{1}{F} \frac{dQ}{dt} \quad (87)$$

gegeben ist. Nun ist aber dQ/dt zugleich der Leitungsstrom, der auf die Platten fließt. Wenn er gleich $F \cdot d\mathfrak{D}/dt$ sein soll, also gleich einer Größe, die auf eine Fläche im Innern des Dielektrikums bezogen werden kann, so ist die Auf-

fassung möglich, daß der Leitungsstrom nicht auf der einen Platte endigt und auf der andern wieder beginnt, sondern im Dielektrikum abgelöst wird durch einen andern Strom, dessen Dichte gleich $d\mathfrak{D}/dt$ ist.

Diese Auffassung rührt von Maxwell her; er hat $d\mathfrak{D}/dt$ die „Dichte des Verschiebungsstroms“ genannt und die Elektrizitätslehre auf der Voraussetzung aufgebaut, daß zu den Leitungsströmen die Verschiebungsströme hinzuzunehmen sind, so daß es überhaupt nur geschlossene Ströme gibt.

Den Gesamtstrom, d. h. die Summe aus Leitungs- und Verschiebungsstrom, nennt man auch den „wahren“ Strom.

§ 46. Kapazität. Wir wollen nun die Maxwellsche Auffassung für den praktisch wichtigsten Fall des elektrischen Feldes zwischen zwei ebenen Platten weiter durchführen (Abb. 37). Für ihn gilt bei kleinem Plattenabstand nach (87)

$$I = F \frac{d\mathfrak{D}}{dt}, \quad (88)$$

wo I der Gesamtverschiebungsstrom ist. Nun gilt aber

$$\mathfrak{D} = \epsilon \mathfrak{C} \quad \text{und} \quad U = \mathfrak{C} a,$$

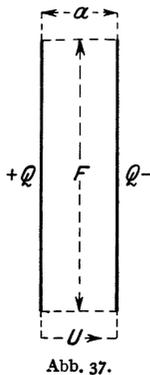
wo U die Spannung zwischen den Platten und a die Dicke des Dielektrikums bedeutet. Also ist auch

$$I = F \cdot \epsilon \frac{d\mathfrak{C}}{dt} = \frac{\epsilon F}{a} \frac{dU}{dt}. \quad (89)$$

Diese Gleichung für den das Dielektrikum durchfließenden Verschiebungsstrom ist ähnlich gebaut wie das Ohmsche Gesetz für Leitungsstrom. Sie unterscheidet sich von ihm nur insofern, als sie statt der Spannung deren Differentialquotient nach der Zeit und statt der Leitfähigkeit die Dielektrizitätskonstante enthält.

Ein Paar von Platten, zwischen denen Verschiebungsströme verlaufen, ist die einfachste und wichtigste Form eines „Kondensators“. Als „Kapazität“ seines Dielektrikums oder auch als seine eigene Kapazität bezeichnet man den Faktor

$$C = \frac{\epsilon F}{a}, \quad (90)$$



also das mit der dielektrischen Konstante multiplizierte Verhältnis des dielektrischen Querschnitts zur dielektrischen Dicke. Setzt man (90) in (89) ein, so erhält man die Gleichung

$$I = C \frac{dU}{dt}, \quad (91)$$

die man als die (recht allgemeine) Definition der Kapazität ansehen kann. Multipliziert man also die „treibende“ zeitliche Änderung einer an ein Dielektrikum angelegten Spannung mit seiner Kapazität, so erhält man den entstehenden Verschiebungsstrom.

Natürlich kann man auch

$$I dt = C dU$$

schreiben und zwischen zwei Zeiten t_1 und t_2 integrieren. Dann erhält man

$$Q = \int I dt = C(U_2 - U_1). \quad (92)$$

Da der Verschiebungsstrom die Fortsetzung des Leitungsstromes ist, stellt Q die gesamte zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 durch Leitung auf die Platte geflossene Elektrizitätsmenge dar; diese ist also gleich dem Produkt aus der Kapazität und der in derselben Zeit eingetretenen Änderung der Spannung.

War zur Zeit t_1 noch kein Feld vorhanden, so gilt die einfachere Gleichung

$$Q = C U; \quad (93)$$

d. h. die auf einer der Platten sitzende Elektrizitätsmenge ist, wenn der Zählpfeil der Spannung wie in Abb. 37 von der positiven zur negativen Ladung läuft, gleich dem Produkt aus der Kapazität und der Spannung zwischen den Platten.

Gewöhnlich bezeichnet man C als die „Kapazität des Kondensators“. Treffender wäre es aber, von der „Kapazität des Dielektrikums“ zu sprechen und F nicht als Plattengröße, sondern als Querschnitt des Dielektrikums, a nicht als Plattenabstand, sondern als Dicke des Dielektrikums aufzufassen.

§ 47. **Übliche Einheit der Kapazität.** Der auf praktische Einheiten bezogene Zahlenwert der Dielektrizitätskonstante ist für alle Isolierstoffe so außerordentlich klein, daß es sehr kostspielig wäre, eine Kapazität auch nur von einem Farad wirklich herzustellen. Bezieht man die Fläche eines Kondensators auf die Einheit Hektar ($ha = 10^8 \text{ cm}^2$), den Abstand seiner Belegungen auf die Einheit 10μ ($= 10^{-3} \text{ cm}$), so kann man schreiben:

$$\begin{aligned} C &= \varepsilon \frac{F}{a} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \cdot 0,886 \cdot 10^{-13} \frac{\text{F}}{\text{cm}} \frac{F/ha}{a/10 \mu} \cdot \frac{10^8 \text{ cm}^2}{10^{-3} \text{ cm}} \\ &= 8,86 \cdot 10^{-3} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \frac{F/ha}{a/10 \mu} \text{ Farad}. \end{aligned} \quad (94)$$

Selbst mit $F = 1 \text{ ha}$ und $a = 10 \mu$ käme man also noch nicht einmal auf ein Farad. Man verwendet daher fast immer die Einheiten μF ($= 10^{-6} \text{ F}$), nF ($= 10^{-9} \text{ F}$) und $\mu\mu\text{F}$ ($= 10^{-12} \text{ F}$).

Auch die Gleichung (94) ist eine Größengleichung, da die in ihr vorkommenden Formelzeichen ε , F und a wie bisher die Größen bedeuten. Sie ist jedoch durch Zusatz des Faktors $\frac{8,86 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \mu \cdot \text{Farad}}{\varepsilon_0 \cdot ha}$, der nach (86) gleich 1 ist, so umgestaltet, daß man ohne weiteres die Zahlenwerte der Größen ε , F und a , bezogen auf die Einheiten ε_0 , ha und 10μ einsetzen kann. Wir nennen solche Gleichungen „zugeschnittene Größengleichungen“.

§ 48. **Energieinhalt eines Kondensators.** Wenn auf den beiden Belegungen eines Plattenkondensators die Ladungen $+Q$ und $-Q$ sitzen und zwischen ihnen die Spannung U besteht, stellt das ganze System eine gewisse potentielle

Energie dar. Denn wenn man die Belegungen durch einen Draht miteinander verbindet (Abb. 38), setzen sich die Ladungen in Bewegung; es entsteht eine mit Wärmentswicklung verbundene Strömung. Fließt bei diesem Ausgleichsvorgang in der Zeit dt die Elektrizitätsmenge dQ durch einen Querschnitt, so haben die elektrischen Kräfte nach § 30 die Arbeit

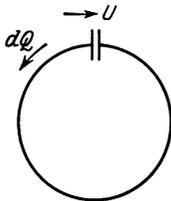


Abb. 38.

$$dA = -U dQ \tag{95}$$

geleistet. U ist die in dem betreffenden Augenblicke noch vorhandene Spannung zwischen den Belegungen gemäß Abb. 38. Setzen wir die Werte $U = \mathfrak{E}a$ und $dQ = Fd\mathfrak{D}$ ein, so erhalten wir

$$dA = -\mathfrak{E}d\mathfrak{D} \cdot aF = -\mathfrak{E}d\mathfrak{D}V,$$

wo unter V das Volumen des Dielektrikums zu verstehen ist. Da

$$\mathfrak{E}d\mathfrak{D} = \mathfrak{E}d(\epsilon\mathfrak{E}) = d\left(\frac{\epsilon\mathfrak{E}^2}{2}\right) = d\left(\frac{\mathfrak{E}\mathfrak{D}}{2}\right) \tag{96}$$

ist, gilt auch

$$dA = -d\left(\frac{\mathfrak{E}\mathfrak{D}}{2}V\right). \tag{97}$$

Der Arbeit der elektrischen Kräfte entspricht also die Abnahme einer gewissen Größe $\frac{\mathfrak{E}\mathfrak{D}}{2}V$, die man sich, da \mathfrak{E} , \mathfrak{D} und V Eigenschaften des Dielektrikums sind, als in diesem sitzend und es gleichmäßig erfüllend vorstellen kann. Man nennt mit Maxwell den Ausdruck

$$W_e = \frac{\mathfrak{E}\mathfrak{D}}{2}V \tag{98}$$

die „elektrische Energie“ des Kondensators oder seines Dielektrikums. Die Arbeit der elektrischen Kräfte und damit nach § 30 die entwickelte Stromwärme stammen nach dieser Vorstellung aus der elektrischen Energie des Kondensators.

Diese kann auch ausgedrückt werden in der Form:

$$W_e = \frac{1}{2}UQ = \frac{C}{2}U^2 = \frac{Q^2}{2C}. \tag{99}$$

Die in Kondensatoren normaler Größe enthaltene Energie ist auch bei hohen Spannungen nicht sehr groß, jedenfalls nicht zu vergleichen mit den Energiemengen, mit denen man sonst zu rechnen pflegt. So ist die Energie eines Kondensators von $1\mu\text{F}$ bei einer Spannung von 1000V nur gleich

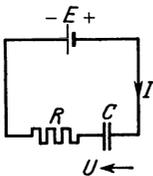


Abb. 39.

$$W_e = \frac{1}{2}\mu\text{F} \cdot 10^6\text{V}^2 = 0,5\text{CV} = 0,5\text{Ws} = 1,4 \cdot 10^{-7}\text{kWh}. \tag{100}$$

§ 49. Stromkreis mit Widerstand und Kondensator. Schaltet man (Abb. 39) eine Stromquelle E , einen Widerstand R und eine Kapazität C hintereinander, so gilt nach § 38

$$E = RI + U, \tag{101}$$

wo U die Spannung an dem Kondensator bedeutet. Multipliziert man beiderseits mit I , so erhält man

$$EI = RI^2 + UI = RI^2 + CU \frac{dU}{dt} = RI^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{C}{2}U^2\right) = RI^2 + \frac{dW_e}{dt}. \tag{102}$$

Diese Gleichung sagt, daß die in der Zeiteinheit von der Stromquelle gelieferte Energie zum einen Teil zur Erzeugung von Wärme im Widerstande R , zum andern Teil zur Vergrößerung der im Kondensator enthaltenen Energie verwendet wird.

Ist nach Ablauf eines Vorgangs der Energieinhalt des Kondensators wieder derselbe wie zu Beginn, so ist nach (102) die gesamte von der Quelle gelieferte Energie im Widerstande R in Wärme verwandelt worden. Denn das Integral

$$\int_1^2 \frac{dW_e}{dt} dt = \int_1^2 dW_e$$

liefert den Wert Null.

Mit dem Fließen von Verschiebungsströmen durch die Kapazitäten der Stromkreise ist demnach keine Wärmeentwicklung und kein Verlust verbunden; die Energie wird nur in die Dielektrika hineingesteckt oder aus ihnen wieder herausgezogen — was freilich häufig ebenso unerwünscht ist wie ein Energieverlust.

§ 50. Sinusspannungen. Unter einer Sinusspannung verstehen wir eine Spannung u , die sich mit der Zeit nach der Gleichung

$$u = \hat{u} \sin(2\pi ft + \varphi) \quad (103)$$

ändert, wo \hat{u} , f und φ zeitlich konstante Größen sind.

Die lineare Funktion der Zeit $2\pi ft + \varphi$, die hier als Argument des Sinus auftritt, nennt man die „Phase“ der Sinusspannung. Sie ist, wenn sie in dieser Form geschrieben wird, als im „Bogenmaß“ gegeben anzusehen; d. h. sie ist auf denjenigen Winkel als Einheit zu beziehen, dessen Bogen so groß ist wie der Halbmesser.

Der 57,3. Teil des „Winkels 1“ heißt „Grad“; es gilt also

$$57,3^0 = 1, \quad (104)$$

eine Gleichung, die zur Umrechnung zwischen Bogen- und Gradmaß bequem zu verwenden ist.

§ 51. Scheitelwert und Frequenz. Trägt man die Spannung u als Ordinate, die Zeit t als Abszisse eines rechtwinkligen Systems auf, so ergibt sich nach der Gleichung (103) eine Wellenlinie (Abb. 40); die Spannung schwankt zwischen einem höchsten Wert \hat{u} und einem niedrigsten $-\hat{u}$ hin und her. Wir nennen die Konstante \hat{u} den „Scheitelwert“; er ist nach Definition immer positiv.

Die Konstante f hängt folgendermaßen mit der Länge der die Spannung darstellenden Wellen zusammen: Nennen wir die Zeit, die von einer Nullstelle bis zur übernächsten Nullstelle vergeht, die „Schwingungsdauer“ T , so muß, da der Sinus mit $360^0 = 2\pi$ periodisch ist, die Gleichung

$$2\pi f(t + T) + \varphi = 2\pi ft + \varphi + 2\pi$$

bestehen. Aus ihr folgt aber $fT = 1$; die Konstante f ist also nichts anderes als der reziproke Wert der Schwingungsdauer (der scheinbaren Wellenlänge in Abb. 40); wir nennen sie die „Frequenz“ der Sinusspannung. Das Produkt $2\pi f$ oder $360^0 f$ kürzt man mit ω ab und nennt es „Kreisfrequenz“.

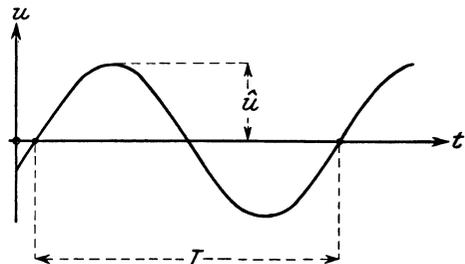


Abb. 40.

Ist z. B. T gleich 1,25 msec, wiederholt sich also das Wellenbild immer wieder nach 1,25 msec, so ist die Frequenz

$$f = \frac{1}{1,25 \text{ ms}} = \frac{1}{1,25 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 800 \frac{1}{\text{s}}.$$

Die Frequenz ist nach ihrer Definition keine reine Zahl, sondern eine reziproke Zeit. Ihre Einheit 1/sec wird auch mit „Hertz“, abgekürzt Hz, bezeichnet. Da die Identität

$$\frac{f}{\text{Hz}} = \frac{\text{s}}{T} \quad (105)$$

besteht, gibt der Zahlenwert der Frequenz in Hz (f/Hz) an, wie oft die Schwingungsdauer T in der Sekunde enthalten ist; er ist gleich der Zahl der Schwingungen in der Sekunde.

§ 52. **Anfangsphase.** Die Konstante φ in der Gleichung (103) nennen wir die „Anfangsphase“, weil die Phase für $t = 0$ gleich φ wird.

Die Anfangsphase einer einzelnen sinusartig wechselnden Größe ist ohne Interesse, denn sie kann durch Wahl eines andern Nullpunkts der Zeitachse immer zum Verschwinden gebracht werden. Deshalb ist es auch gleichgültig, ob wir zur Darstellung von Sinusschwingungen die Funktion Sinus oder die Funktion Kosinus wählen: Da

$$\sin(2\pi ft + \varphi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi ft - \varphi\right) = \cos\left(2\pi ft + \varphi - \frac{\pi}{2}\right), \quad (106)$$

unterscheiden sich die beiden Funktionen nur um eine gleichgültige Anfangsphase $-\pi/2$. Wir werden bei der Darstellung von Wechselgrößen die Funktion Kosinus bevorzugen.

Wenn die Anfangsphase einer einzelnen Größe gleichgültig ist, so sind die Unterschiede zwischen den Anfangsphasen verschiedener Wechselgrößen, also deren Phasendifferenzen oder Phasenverschiebungen, von um so größerer Bedeutung.

§ 53. **Dielektrischer Leitwert bei Sinusspannungen.** Die Spannung u zwischen den Platten eines Kondensators sei eine einfache Sinusfunktion der Zeit:

$$u = \hat{u} \cos(2\pi ft + \varphi).$$

Dann ist

$$\frac{du}{dt} = -\hat{u} 2\pi f \sin(2\pi ft + \varphi) = \hat{u} 2\pi f \cos\left(2\pi ft + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

und daher in sinngemäßer Bezeichnung

$$i = 2\pi f C \hat{u} \cos\left(2\pi ft + \varphi + \frac{\pi}{2}\right). \quad (107)$$

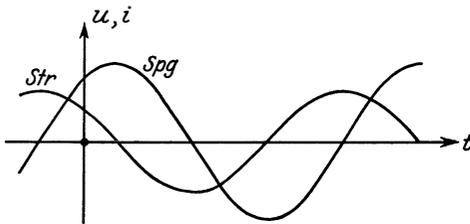


Abb. 41.

Ändert sich also die Spannung eines Kondensators sinusartig, so ist auch der ihn durchfließende Verschiebungsstrom ein Sinusstrom; seine Anfangsphase ist jedoch um $\pi/2$ größer, d. h. er ist der Spannung um eine Viertelschwingungsdauer voraus (Abb. 41). Der Scheitelwert \hat{i} des Verschiebungsstroms ist $2\pi f C \hat{u}$, d. h. man kann ihn aus dem Scheitelwert

der Spannung so berechnen, als ob das Dielektrikum einen „dielektrischen Leitwert“ $2\pi f C = \omega C$ hätte. Bei Sinusströmen darf man daher das Ohmsche

Gesetz in seiner zunächst nur für Leitungsströme abgeleiteten Form auch auf die Dielektrika der Kondensatoren anwenden, vorausgesetzt, daß man von Phasenverschiebungen absieht.

Zahlenbeispiel: Eine 1 mm dicke Hartgummiplatte ($\epsilon = 2,6 \epsilon_0$) hätte zwischen Metallplatten von 1 m² Fläche bei 800 Hz den dielektrischen Leitwert

$$G = 2\pi \cdot 800 \text{ Hz} \cdot 2,6 \epsilon_0 \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{mm}} = 116 \cdot 10^{-6} \frac{\text{F}}{\text{sec}} = \frac{1}{8700 \Omega}.$$

§ 54. **Dreieck aus Verschiebungsströmen.** Auf die Maxwell'schen Verschiebungsströme lassen sich sinngemäß die Kirchhoffschen Regeln anwenden. Für das zwischen drei Leitern 1, 2 und 3 ausgespannte Dreieck aus Verschiebungsströmen der Abb. 42 z. B. liefert die Knotenregel das Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= I_{12} + I_{13} = C_{12} \frac{dU_{12}}{dt} + C_{13} \frac{dU_{13}}{dt}, \\ I_2 &= I_{12} - I_{23} = C_{12} \frac{dU_{12}}{dt} - C_{23} \frac{dU_{23}}{dt}, \\ I_3 &= I_{13} + I_{23} = C_{13} \frac{dU_{13}}{dt} + C_{23} \frac{dU_{23}}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

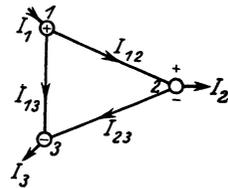


Abb. 42.

Die hier auftretenden Koeffizienten C_{12} , C_{13} und C_{23} , die den dielektrischen Leitwerten zwischen den drei Knoten entsprechen, heißen „Teilkapazitäten“. Wenn man nach der Zeit integriert, erhält man die in der Elektrostatik üblicheren Formen:

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= C_{12} U_{12} + C_{13} U_{13}, \\ Q_2 &= C_{12} U_{12} - C_{23} U_{23}, \\ Q_3 &= C_{13} U_{13} + C_{23} U_{23}. \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

Hiernach sind die Ladungen, die sich auf den Leitern 1, 2, 3 ansammeln, lineare Funktionen der drei Spannungen U_{12} , U_{13} und U_{23} .

Nach der Maschenregel

$$U_{12} + U_{23} + U_{31} = 0$$

sind bei drei Leitern zwei Spannungen wählbar. Häufig bildet ein Leiterpaar, z. B. 1 und 2, die Drähte einer Doppelleitung; dann ist die Spannung U_{12} die Spannung, die durch den Betrieb der Leitung an der betreffenden Stelle hervorgerufen wird. Die Spannungen U_{13} und U_{23} dagegen hängen davon ab, in welche Beziehung der dritte Leiter (z. B. die Erde) durch die im einzelnen Falle getroffenen Maßnahmen zu der Doppelleitung gesetzt ist. Je nach diesen besonderen Bedingungen fallen, wie wir sehen werden, die Spannungen und damit auch die Ladungen Q verschieden aus.

§ 55. **Die Teilkapazitäten einer symmetrischen Doppelleitung.** Das im vorigen Abschnitt betrachtete Dreieck aus Verschiebungsströmen werde gebildet von den Strömen, die zwischen den Drähten einer Doppelfreileitung und der Erde als drittem Leiter fließen (Abb. 43). Der Abstand der Drähte sei a , ihre Höhe über dem Erdboden h .

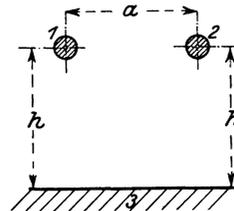


Abb. 43.

Der Zusammenhang, der zwischen den Ladungen Q_i und den gegenseitigen Spannungen U_{ik} von n dünnen Drähten besteht, die zueinander parallel in den Höhen h_i über dem als vollkommen leitend angenommenen Erdboden ausgespannt sind, kann ohne besondere Schwierigkeiten ziemlich allgemein berechnet werden. Nach einem Satz von Lord Kelvin stimmt nämlich das Feld, das von einem mit der Elek-

trizitätsmenge Q geladenen Draht in dem Raum oberhalb der Erdoberfläche erzeugt wird (Abb. 44), in diesem Raum vollständig überein mit dem Feld, das sich im unendlichen Raum zwischen demselben Draht und seinem mit der Elektrizitätsmenge $-Q$ geladenen „Spiegelbild“ — bezogen auf die Erdoberfläche — ausbilden würde. Durch diesen Satz wird die Berechnung

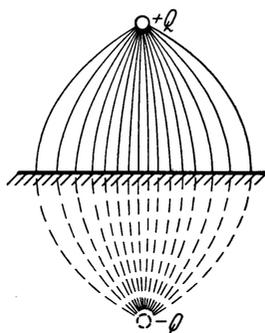


Abb. 44.

der Ladungsverteilung auf der Erdoberfläche umgangen: man erhält das gesuchte Feld als Überlagerung der Felder, die von wirklichen und Bilddrähten geringen Querschnittes herühren.

Betrachten wir zunächst einen einzigen dünnen Draht von der Länge l mit der Ladung Q , und berechnen wir die Spannung zwischen zwei beliebigen Punkten A und E in seiner Umgebung (Abb. 45). Da die Feldstärke im Abstand r von Q nach § 41 gleich

$$|\mathcal{E}| = \frac{|Q|}{2\pi\epsilon r l} \tag{II0}$$

ist (sie hat bei positivem Q die gezeichnete Richtung), so erhält man für die Spannung zwischen A und E

$$U = \int_A^E \frac{Q ds \cos \varphi}{2\pi\epsilon r l}.$$

(ds ist das von A nach E gerichtete Wegelement.) Nun zeigt aber das Bild, daß dr nichts anderes ist als die Projektion von ds auf die Richtung von \mathcal{E} ; es gilt also

$$ds \cos \varphi = dr$$

und daher¹

$$U = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \int_A^E \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{r_E}{r_A}. \tag{III}$$

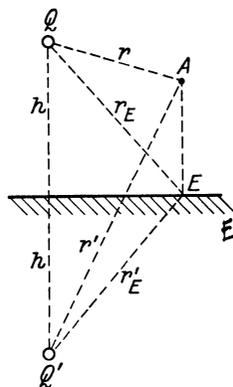


Abb. 46.

Nun wollen wir zu der Wirkung der Ladung Q die Wirkung ihres Spiegelbildes $Q' = -Q$ hinzunehmen (Abb. 46). Der Punkt \mathcal{E} sei jetzt ein Punkt der Mittelebene zwischen Q und Q' , die ja mit der Erdoberfläche zusammenfällt. Kennzeichnen wir dann die Abstände von der Bildladung Q' durch einen Strich, so erhalten wir als die Spannung, die von den beiden Ladungen herrührend zwischen den Punkten A und E besteht,

$$U = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{r_E}{r_A} + \frac{(-Q)}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{r'_E}{r'_A}$$

oder, da wegen der besonderen Lage von E $r_E = r'_E$,

$$U = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{r'_A}{r_A} = \frac{Q}{2\pi\epsilon l} \ln \frac{r'}{r}, \tag{II2}$$

wenn wir die Zeiger A als unnötig wieder weglassen.

¹ Man kann diese Gleichung gemäß § 36 unmittelbar hinschreiben, wenn man über den gestrichelten Weg der Abbildung integriert.

Für die Berechnung der Wirkung nach außen darf man sich die Drahtladungen Q in den Drahtachsen konzentriert denken. Die Verteilung der Elektrizität auf den Drahtoberflächen braucht nur dann berücksichtigt zu werden, wenn die Wirkung einer Ladung für einen Aufpunkt A berechnet werden soll, der auf demselben Draht sitzt wie die Ladung; dann ist offenbar der Abstand des Aufpunkts von der Ladung im Mittel gleich dem Drahthalbmesser ϱ — und zwar einerlei, wo im Querschnitt der Aufpunkt liegt.

Wenden wir die Gleichung (112) nunmehr auf das Problem der Doppelleitung an, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} 2\pi\epsilon l U_{13} &= Q_1 \ln \frac{2h}{\varrho} + Q_2 \ln \frac{2h}{a}, \\ 2\pi\epsilon l U_{23} &= Q_1 \ln \frac{2h}{a} + Q_2 \ln \frac{2h}{\varrho}. \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

Eigentlich hätten wir hier statt $2h/a$

$$\frac{\sqrt{(2h)^2 + a^2}}{a}$$

schreiben müssen; a^2 ist aber bei Doppelleitungen immer viel kleiner als $4h^2$.

Zur Berechnung der Teilkapazitäten genügt es, die Gleichungen (113) nach Q_1 aufzulösen. Die Nennerdeterminante läßt sich vereinfachen:

$$\begin{aligned} \left(\ln \frac{2h}{\varrho}\right)^2 - \left(\ln \frac{2h}{a}\right)^2 &= \left(\ln \frac{2h}{\varrho} + \ln \frac{2h}{a}\right) \left(\ln \frac{2h}{\varrho} - \ln \frac{2h}{a}\right) \\ &= 2 \ln \frac{2h}{\sqrt{a\varrho}} \ln \frac{a}{\varrho}; \end{aligned} \quad (114)$$

man erhält daher:

$$Q_1 = \pi\epsilon l \left(\frac{\ln \frac{2h}{\varrho}}{\ln \frac{2h}{\sqrt{a\varrho}} \ln \frac{a}{\varrho}} U_{13} - \frac{\ln \frac{2h}{a}}{\ln \frac{2h}{\sqrt{a\varrho}} \ln \frac{a}{\varrho}} U_{23} \right).$$

Hier führen wir noch durch

$$-U_{23} = -U_{21} - U_{13} = U_{12} - U_{13}$$

die Betriebsspannung U_{12} ein; damit wird

$$Q_1 = \pi\epsilon l \left(\frac{\ln \frac{2h}{a}}{\ln \frac{2h}{\sqrt{a\varrho}} \ln \frac{a}{\varrho}} U_{12} + \frac{1}{\ln \frac{2h}{\sqrt{a\varrho}}} U_{13} \right), \quad (115)$$

und die Teilkapazitäten der (geometrisch) symmetrischen Doppelleitung sind daher nach (109) in der allgemeinen und der zugeschnittenen Form der Größengleichung:

$$C_{12} = \pi\epsilon l \frac{\ln \frac{2h}{a}}{\ln \frac{2h}{\sqrt{a\varrho}} \ln \frac{a}{\varrho}} = 12,09 \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{l}{\text{km}} \frac{\lg \frac{2h}{a}}{\lg \frac{2h}{\sqrt{a\varrho}} \lg \frac{a}{\varrho}} \text{nF}, \quad (116)$$

$$C_{13} = \pi\epsilon l \frac{1}{\ln \frac{2h}{\sqrt{a\varrho}}} = 12,09 \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{l}{\text{km}} \frac{1}{\lg \frac{2h}{\sqrt{a\varrho}}} \text{nF}. \quad (117)$$

§ 56. Symmetrische Kapazität einer symmetrischen Doppelleitung. Wir betrachten die Doppelleitung zuerst unter den gewöhnlichen Bedingungen des Fernsprechbetriebs (Abb. 47). Bei diesem wird auch elektrisch für möglichst vollkommene Symmetrie gegen die Erde gesorgt. Wir dürfen daher voraussetzen,

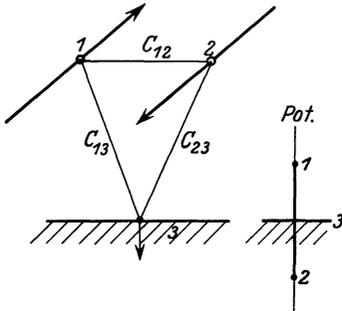


Abb. 47.

daß das Potential der Erde beständig in der Mitte liegt zwischen den Potentialen der Leitungsdrähte. Diese Bedingung bedeutet (man beachte das kleine Bild und die Reihenfolge der Zeiger bei den Spannungen):

$$U_{13} = U_{32} = \frac{U_{12}}{2}, \tag{118}$$

und, wegen der Gleichheit von C_{13} und C_{23} , $I_{13} = I_{32}$ und $I_3 = 0$. Wir brauchen daher die Erde gar nicht weiter zu beachten: die Betriebskapazität ist einfach gleich $C_{12} + C_{13}/2$. Diese Kapazität nennt man auch die „symmetrische“

oder „Schleifenkapazität“ der Leitung. Setzen wir die für C_{12} und C_{13} abgeleiteten Werte ein, so erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} C_{12} + \frac{C_{13}}{2} &= \pi \epsilon l \frac{\ln \frac{2h}{a} + \frac{1}{2} \ln \frac{a}{\varrho}}{\ln \frac{2h}{\sqrt{a\varrho}} \ln \frac{a}{\varrho}} = \pi \epsilon l \frac{\ln \left(\frac{2h}{a} \sqrt{\frac{a}{\varrho}} \right)}{\ln \frac{2h}{\sqrt{a\varrho}} \ln \frac{a}{\varrho}} \\ \text{oder}^1 \quad C_{symm} &= \frac{\pi \epsilon l}{\ln \frac{a}{\varrho}} = 12,09 \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{l}{\text{km}} \frac{1}{\lg \frac{a}{\varrho}} \text{ nF}. \end{aligned} \right\} \tag{119}$$

Wie man sieht, ist die symmetrische Kapazität einer Doppelleitung, solange a^2 neben $4h^2$ vernachlässigt werden darf, unabhängig von ihrer Höhe über dem Erdboden.

Beispiel. Zwei 4 mm starke Drähte seien mit 20 cm horizontalem Abstand 7 m über der Erde ausgespannt. Ihre symmetrische Kapazität der Längeneinheit ist nach (119)

$$\left(\frac{C}{l} \right)_{symm} = 12,09 \frac{1}{\lg \frac{20 \text{ cm}}{2 \text{ mm}}} \frac{\text{nF}}{\text{km}} = 6,05 \frac{\text{nF}}{\text{km}}.$$

§ 57. Simultankapazität einer Doppelleitung. Den Gegensatz zu der Schleifenschaltung, bei der der eine Draht als Hin-, der andere als Rückleitung

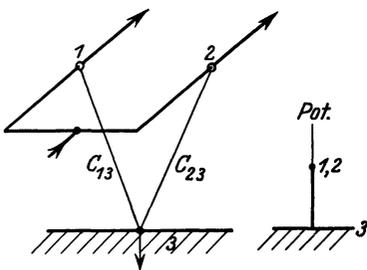


Abb. 48.

dient, bildet die „Simultanschaltung“, bei der die Leitungen gleichgerichtete Ströme führen und der Rückstrom durch die Erde fließt (Abb. 48). Sie wird benutzt beim „Simultanbetrieb“, d. h. beim gleichzeitigen Telegraphieren über Fernspreitleitungen. In diesem Falle liegt zwischen den Leitern 1 und 2 keine Spannung; die Simultankapazität setzt sich daher einfach aus den parallelen Kapazitäten C_{13} und C_{23} zusammen, d. h. es ist

$$C_{sim} = 2 C_{13} = 24,2 \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \frac{l}{\text{km}} \frac{1}{\lg \frac{2h}{\sqrt{a\varrho}}} \text{ nF}. \tag{120}$$

Beispiel. Bei der Leitung des vorhergehenden § ist

$$\left(\frac{C}{l} \right)_{sim} = 24,2 \frac{1}{\lg \frac{14 \text{ m}}{2 \text{ cm}}} \frac{\text{nF}}{\text{km}} = 8,5 \frac{\text{nF}}{\text{km}}.$$

¹ In diesen Wert geht nach (116) C_{12} bei großem h über.

§ 58. **Kapazität von Kabeladern.** Die Kapazitäten zwischen den Leitern eines Kabels lassen sich im allgemeinen nicht berechnen; denn weder die Drahtabstände noch die Dielektrizitätskonstanten der Isolierschichten sind genau bekannt. Außerdem handelt es sich meist um ein sehr verwickeltes System von Leitern, da gewöhnlich viele Drähte in einem Bleimantel vereinigt werden. Praktisch wird daher die Kapazität der Kabeladern immer durch Messung bestimmt.

III. Magnetische Felder.

§ 59. **Erste Definition der magnetischen Induktion.** Die magnetische Wirkung des elektromagnetischen Feldes kann mit einem „Prüfrechteck“ festgestellt werden. Darunter verstehen wir (Abb. 49) ein sehr langes und schmales Rechteck aus dünnem Draht, das eine Stromquelle enthält. Man bringt es so in das Feld, daß die Mitte seiner einen kurzen Seite mit dem Aufpunkt *A* zusammenfällt; die andere kurze Seite soll außerhalb des Feldes liegen, das wir als von endlicher Ausdehnung voraussetzen.

Auf ein solches stromdurchflossenes Drahtrechteck wird ebenso wie auf eine geladene Prüfkugel im elektromagnetischen Felde eine verschiebende Kraft ausgeübt.

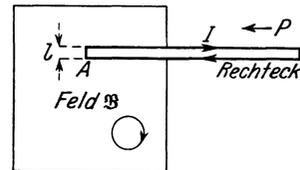


Abb. 49.

Die Größe dieser Kraft hängt zunächst von der Orientierung des Rechtecks ab. Sie kann variieren von dem Werte Null bis zu einem Höchstwerte. An jeder Stelle des Feldes gibt es eine Richtungslinie, die dadurch ausgezeichnet ist, daß auf das Rechteck, wenn seine kurze Seite mit ihr zusammenfällt, überhaupt keine verschiebende Kraft ausgeübt wird. Wir nennen diese ausgezeichnete Linie die „Nulllinie“ an der betreffenden Stelle des Feldes. Liegt die Fläche des Rechtecks dagegen senkrecht zu der Nulllinie, so nimmt die verschiebende Kraft ihren Höchstwert an; ihre Richtung steht senkrecht zu der Nulllinie und zu der kurzen Rechtecksseite, fällt also mit der Richtung der langen Rechtecksseiten zusammen. Dreht man das Rechteck in seiner Ebene, jedoch so, daß die Mitte seiner einen kurzen Seite im Aufpunkt bleibt, so dreht sich die Kraft mit, ihre Größe bleibt aber dieselbe.

In einer solchen Lage höchster Kraftwirkung werde das Rechteck festgehalten, und es werde nunmehr untersucht, wie die Größe der mechanischen Kraft *P* von den Abmessungen des Rechtecks, von der Stärke und dem Umlaufsinn des Stromes abhängt. Der Versuch zeigt, daß bei gleichem Strom und großer Schmalheit des Rechtecks der Drahtdurchmesser und die Länge der langen Seiten keine Rolle spielen, daß die Kraft aber der Länge *l* der kurzen Rechtecksseiten proportional ist. Sie ist ferner der Stromstärke *I* proportional und wechselt mit deren Umlaufsinn ihre Richtung. Es gilt also für die Größe der Kraft:

$$P = \mathfrak{B} \cdot I l. \tag{121}$$

Wiederum ist \mathfrak{B} eine Konstante, solange wir die Lage und die Orientierung des Rechtecks ungeändert lassen und nur die Länge seiner kurzen Seite und die Stromstärke variieren; von Aufpunkt zu Aufpunkt dagegen hat \mathfrak{B} eine verschiedene Größe. Der Faktor \mathfrak{B} kann also wie die elektrische Feldstärke \mathfrak{C} als ein Kennzeichen des elektromagnetischen Feldes angesehen werden; wir nennen ihn die „magnetische Induktion im Aufpunkt“.

Die magnetische Induktion ist hiernach bei Wahl abgestimmter Einheiten (§ 5) zahlenmäßig gleich der größten Kraftwirkung, die das Rechteck erfährt, wenn es von der Einheit der Stromstärke durchflossen wird und seine kurze Seite gleich der Längeneinheit ist.

Zahlenbeispiel. Ein Drahtrechteck, dessen lange Seiten 1 m, dessen kurze 1 cm lang sind und das aus 20 Windungen besteht, erfahre, wenn es von einem Strom von 80 mA durchflossen wird, im Aufpunkt einen größten Antrieb von 500 mg*. Nach der Definition (121) herrscht dann, da die kurzen Seiten sämtlicher Windungen zu berücksichtigen sind, im Aufpunkt eine Induktion

$$\mathfrak{B} = \frac{500 \text{ mg}^*}{80 \text{ mA} \cdot 20 \text{ cm}} = 0,3125 \frac{\text{g}^*}{\text{A cm}}$$

oder nach § 29

$$\mathfrak{B} = 0,3125 \cdot 0,980 \cdot 10^{-4} \frac{\text{J}}{\text{cm A cm}} = 0,306 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Vs}}{\text{cm}^2}. \quad (122)$$

Da das angenommene Feld von der Größenordnung der in der Praxis vorkommenden Felder ist, ist die Induktionseinheit Vs/cm² eine große Einheit. Man verwendet daher meist ihren 10⁸. Teil, das „Gauß“ (G).

§ 60. Der Drehsinn der magnetischen Induktion. Die beiden Feldgrößen elektrische Feldstärke \mathfrak{E} und magnetische Induktion \mathfrak{B} stehen einander gegenüber wie in der Mechanik die Verschiebung und die Drehung.

Die Achse der Drehgröße \mathfrak{B} läuft an jeder Stelle des Feldes der Nulllinie parallel. Der Sinn, in welchem sie sich um diese Achse dreht, kann nur mit einer gewissen Willkür festgelegt werden, da uns die Feldgrößen nur durch ihre Wirkung zugänglich sind. Ähnlich wie wir als Richtung der elektrischen Feldstärke die Richtung der auf eine positive Ladung ausgeübten Kraft definiert haben, definieren wir als Drehsinn der magnetischen Induktion den Umlaufsinn, in welchem der elektrische Strom (der Strom der positiven Ladungen) das Prüfrechteck durchströmt, wenn dieses in das Feld hineingezogen wird.

Zur Feststellung des Drehsinnes von \mathfrak{B} ist also zweierlei nötig: Man hat erstens die Orientierung des Rechtecks aufzusuchen, für die es frei von verschiebenden Kräften bleibt; die im Aufpunkt liegende kurze Rechteckseite fällt dann in die Achslinie der Induktion. Man hat zweitens die Rechteckfläche senkrecht zur Achslinie zu stellen und zu prüfen, ob das Rechteck dann in das Feld hineingezogen oder aus ihm herausgestoßen wird. Im ersten Falle stimmt der Drehsinn des Feldes mit dem Umlaufsinn des Stromes überein; im zweiten läuft er ihm entgegen.

Als Gedächtnishilfe kann die Vorstellung dienen, daß die Natur das Bestreben hat, das Innere der Rechteckfläche mit möglichst viel magnetischer Induktion desselben Umlaufsinnes anzufüllen.

§ 61. Der axiale Vektor der magnetischen Induktion, Richtungsregel. Wir hätten der magnetischen Induktion auch den umgekehrten Drehsinn beilegen können. Unmöglich wäre es jedoch, aus dem Versuch mit dem Prüfrechteck zu schließen, daß die magnetische Induktion physikalisch durch einen Pfeil darstellbar, also physikalisch ein „Vektor“ sei. Denn die einzige ausgezeichnete Linie, die Nulllinie, hat keinen Richtungssinn, weil sie gerade durch das Nullwerden der verschiebenden Kraft ausgezeichnet ist.

Nichtsdestoweniger ist es nützlich, die Drehgröße \mathfrak{B} durch einen Vektor zu ersetzen, dessen Richtung man ihrem Drehsinn mit Hilfe einer Schraube zuordnet. Bei den Drehgrößen der Mechanik macht man es bekanntlich ebenso. Je nachdem ob man eine Rechts- oder eine Linksschraube zugrunde legt, fällt natürlich die Richtung des ersetzenden Vektors verschieden aus.

Wir nennen Vektoren, die nur bequeme Hilfsmittel für die zeichnerische Darstellung von Drehgrößen und für das Rechnen mit ihnen sein sollen, „axiale“ Vektoren im Gegensatz zu den wirklichen Vektoren, die man zur Unterscheidung auch als „polare“ Vektoren bezeichnet.

Bei dem Feld der Abb. 49 ist der axiale Vektor der Induktion bei Annahme der Rechtsschraube senkrecht zur Zeichenebene von dem Beschauer weg gerichtet. Denken wir uns mit ihm schwimmend und in der Richtung des durch den Aufpunkt fließenden, also gegebenen Stromes schauend, so geht die Kraft, die ja meist gesucht wird, nach rechts.

Legen wir umgekehrt die Linksschraube zugrunde und verhalten wir uns im übrigen wie vorher, so geht die gesuchte Kraft nach links.

Es gilt also die Richtungsregel: Man schwimme mit dem axialen Vektor der Induktion und schaue in der Richtung der zweiten gegebenen Größe; dann geht die gesuchte Größe (in unserm Falle die Kraft) bei Zugrundelegung der Rechtsschraube nach rechts, bei Zugrundelegung der Linksschraube nach links¹.

§ 62. **Zweite Definition der magnetischen Induktion.** Wir bringen die eine kurze Seite des Prüfrechtecks nach Ersatz der Stromquelle durch einen Kurzschluß in den Aufpunkt, drehen es, bis die Nulllinie senkrecht zu seiner Fläche steht, und verschieben es (Abb. 50) um die Strecke s in der Richtung seiner langen Seiten. Bei dieser Verschiebung beobachten wir zweierlei: Erstens müssen wir einen gewissen Widerstand P überwinden; zweitens entsteht in dem Rechteck ein in der gewöhnlichen Weise nachweisbarer sehr kurz dauernder (vgl. § 124) elektrischer Strom I , den man als „Induktionsstrom“ bezeichnet.

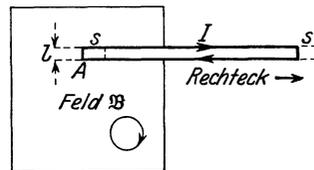


Abb. 50.

Da wir schon wissen, daß auf jeden im Rechteck fließenden Strom I im Felde \mathfrak{B} eine Kraft $P = \mathfrak{B} I l$ ausgeübt wird, vermuten wir, daß die beobachtete Hemmung eben durch diese Kraft P verursacht ist, und daß als Gegenwert der Arbeit, die wir gegen sie leisten müssen, die Stromwärme des Induktionsstromes I entsteht. D. h. wir vermuten, daß die Gleichung

$$P s = \mathfrak{B} I l s = I R Q \tag{123}$$

gilt, wo Q die gesamte geflossene Elektrizitätsmenge bedeutet, daß also

$$Q = \frac{\mathfrak{B} l s}{R} \tag{124}$$

ist.

In der Tat zeigt die Erfahrung, daß die bei einer Verschiebung des Rechtecks um die Strecke s , also bei der Überstreichung einer Fläche $l s$, in Bewegung gesetzte Elektrizitätsmenge dem überstrichenen Flächeninhalt direkt, dem elektrischen Widerstand des Rechtecks dagegen umgekehrt proportional ist.

Wir haben demnach durch Anwendung des Energiesatzes eine zweite Definition der magnetischen Induktion gefunden: sie ist bei Verwendung abgestimmter Einheiten zahlenmäßig gleich der Elektrizitätsmenge, die in einem Prüfrechteck vom Widerstand r bei Überstreichung der Fläche r induziert wird.

¹ Diese Regel ist eine etwas allgemeinere Form der Regel von J. K. Sumec: ETZ 24, 269 (1903). Sie gilt unverändert auch für den induzierten Strom (s. § 63).

Zahlenbeispiel: Wir denken uns das schon früher betrachtete Rechteck von $100 \cdot 1 \text{ cm}^2$ Fläche um 2 cm in Richtung seiner langen Seiten verschoben. Dadurch entsteht ein Induktionsstromstoß; die gesamte durch ihn in Bewegung gesetzte Elektrizitätsmenge Q werde (etwa mit einem ballistischen Galvanometer) zu $2,50 \cdot 10^{-4} \text{ Coul}$ bestimmt. Der Widerstand des Rechtecks betrage $4,90 \Omega$. Nach unserer zweiten Definition der magnetischen Induktion (124) ist dann

$$\mathfrak{B} = \frac{Q R}{l s} = \frac{2,50 \cdot 10^{-4} \text{ Coul} \cdot 4,90 \Omega}{20 \cdot 1 \cdot 2 \text{ cm}^2} = 0,306 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Vs}}{\text{cm}^2}, \quad (125)$$

d. h. das Feld ist dasselbe wie bei dem letzten Zahlenbeispiel.

§ 63. Drehsinn- und Richtungsregeln für den Induktionsstrom. Zieht man das Rechteck aus dem Felde heraus, so muß man Arbeit leisten, da die Stromwärme des Induktionsstromes nicht aus nichts entstehen kann. Auf das Rechteck muß also eine in das Feld hineinziehende Kraft wirken, d. h. Induktion und Strom müssen in demselben Sinne umlaufen.

Schiebt man umgekehrt das Rechteck in das Feld hinein, so muß man wieder Arbeit leisten; denn wieder fließt ein Induktionsstrom, der Energie beansprucht. Die Bewegung wird also auch in diesem Falle gehemmt; es muß jetzt eine aus dem Feld her austreibende Kraft wirken, d. h. Induktion und Strom müssen im entgegengesetzten Sinne umlaufen.

Wie man sieht, hängt die Einseitigkeit, die darin liegt, daß die Bewegung immer gehemmt wird (Lenz'sches Gesetz), damit zusammen, daß die entwickelte Stromwärme von der Stromrichtung unabhängig ist.

Ersetzt man die Drehgröße \mathfrak{B} durch einen axialen Vektor, dessen Richtung ihrem Drehsinn mit Hilfe einer Rechts- (Links-) Schraube zugeordnet ist, so gilt wieder die schon früher für die Kraftwirkung abgeleitete Richtungsregel: Schwimmt man in der Richtung des axialen Vektors der magnetischen Induktion (also in der Abb. 50 bei Annahme der Rechtsschraube von vorn nach hinten) und schaut man in der Richtung der zweiten gegebenen Größe — in diesem Falle der Bewegung —, so ist die eintretende Erscheinung — der Induktionsstrom — bei der Rechtsschraube nach rechts, bei der Linksschraube nach links gerichtet.

§ 64. Bewegung eines stromführenden Leiters in einem magnetischen Feld. Bei unseren Betrachtungen im § 59 haben wir uns das Rechteck festgehalten gedacht. Wir wollen diese Beschränkung jetzt fallen lassen und voraussetzen, der in ihm fließende Strom I habe denselben Umlaufsinn wie die magnetische Induktion, das Rechteck werde also in das Feld hineingezogen. Folgt es diesem Antrieb, so nimmt der Fluß zu; nach unserer Drehsinnregel wird daher ein Strom induziert, der den ursprünglichen Strom I schwächt. Da die entwickelte Stromwärme jetzt im quadratischen Verhältnis geringer ist, vermag die Stromquelle auch noch den Gegenwert der bei der Bewegung von den elektromagnetischen Kräften geleisteten mechanischen Arbeit zu liefern.

Wie man sieht, ist der induzierte Gegenstrom beim Motor ebenso wie die hemmende Kraft bei der Dynamomaschine eine unmittelbare Folge des Energiegesetzes.

§ 65. Gesetz von Biot und Savart. Magnetische Felder treten hauptsächlich in der Umgebung elektrischer Ströme auf. Ihr Zusammenhang mit diesen kann nur durch den Versuch festgestellt werden.

So tritt erfahrungsgemäß im senkrechten Abstand r_0 von einem unendlich langen geradlinigen Strom I (Abb. 51) in dem umgebenden Luftraum eine magnetische Induktion \mathfrak{B} auf, die der Stromstärke I direkt, dem Abstände r_0

umgekehrt proportional ist:

$$\mathfrak{B} = \text{const} \frac{I}{r_0}. \quad (126)$$

Sie dreht sich in der durch r_0 und I definierten Ebene in dem durch den Drehpfeil der Abb. 51 angedeuteten Sinne.

Ähnlich wie beim elektrischen Feld kann man versuchen, aus dieser und ähnlichen Beobachtungen ein dem Coulombschen Gesetz entsprechendes Elementargesetz abzuleiten und aus diesem wieder durch Integration für alle vorkommenden elektrischen Strömungen das magnetische Feld zu berechnen. Ein solches Elementargesetz ist das Gesetz von Biot und Savart. Es sagt aus, daß in einem Aufpunkt A , der von einem „Stromelement“ der Stärke I und der Länge dl den Abstand r hat, eine magnetische Induktion $d\mathfrak{B}$ entsteht, die der Stärke I und der Länge dl direkt, der Kugeloberfläche um A mit dem Radius r dagegen umgekehrt proportional ist. Die Drehebene der Induktion $d\mathfrak{B}$ ist die durch r und dl definierte Ebene; der Drehsinn stimmt überein mit dem Sinn, in dem das Element dl in dieser Ebene um A herumzulaufen scheint. Die von einer großen Zahl von Stromelementen erzeugte Induktion ist gleich der geometrischen Summe der Teilinduktionen, die von den Elementen einzeln hervorgerufen werden. Bildet das Stromelement mit dem Abstand r einen unter 180° liegenden Winkel φ , so ist dem Betrag von \mathfrak{B} noch $\sin \varphi$ zuzufügen. Nach Biot und Savart ist also:

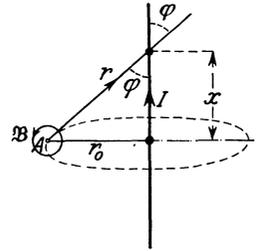


Abb. 51.

$$\mathfrak{B} = \sum d\mathfrak{B} = \sum \mu \frac{I dl}{4 \pi r^2} \sin \varphi. \quad (127)$$

Die Proportionalitätskonstante μ hängt von der Art des Mediums im Aufpunkt ab und heißt „Permeabilität“ des Mediums.

Man kann leicht zeigen, daß dieses Biot-Savartsche „Elementargesetz“ bei dem vorhin betrachteten unendlich langen geradlinigen Strom wieder auf die von der Erfahrung bestätigte Gesetzmäßigkeit (126) führt. Auf andere als „lineare“ Leiter ist das Gesetz nach seiner Formulierung nicht anwendbar.

§ 66. **Magnetische Feldstärke.** Wenn im Abstande r_0 von einem geradlinigen langen Strom erfahrungsgemäß die magnetische Induktion $\text{const } I/r_0$ herrscht, so liegt es wiederum nahe, die rein geometrische Feststellung, daß die magnetische Wirkung mit wachsendem Umfange $2 \pi r_0$ des in Abb. 51 gestrichelten Kreises abnimmt, zu trennen von der andern Feststellung, daß sie außerdem von der Art des Feldmediums ein wenig abhängt. Man hat sich deshalb die Anschauung gebildet, daß der Strom I in der Entfernung r_0 eine „Zwischengröße“ \mathfrak{H} erzeugt, für welche die einfache Beziehung

$$\mathfrak{H} = \frac{I}{2 \pi r_0} \quad (128)$$

gilt, und daß die beobachtbare Induktion \mathfrak{B} dieser Größe \mathfrak{H} proportional ist mit der Permeabilität μ als der Proportionalitätskonstante.

Allgemein wollen wir der Hilfsgröße \mathfrak{H} , die wir „magnetische Feldstärke“ nennen, die folgende Bedingung auferlegen: Für jede beliebige im Felde liegende Fläche soll das über deren Randkurve erstreckte Linienintegral von \mathfrak{H} gleich der elektrischen Durchflutung der Fläche sein (Durchflutungssatz). Unter der „Durchflutung“ verstehen wir dabei den Fluß der Stromdichte durch die Fläche, d. h. die algebraische Summe aller Elektrizitätsmengen, die in der Zeiteinheit

durch sie hindurchströmen. Ebenso wie die elektrische Spannung nach § 33 das Linienintegral der elektrischen Feldstärke ist, bezeichnen wir das Linienintegral der magnetischen Feldstärke erstreckt über den Rand einer Fläche als ihre „Randspannung“ bezogen auf die Fläche.

Daß diese Festsetzung für den Fall des geradlinigen Stromes wieder auf die frühere Formel führt, ergibt sich aus der Symmetrie des Problems. Man wählt als Fläche die zu dem Strome senkrechte Kreisfläche vom Radius r_0 (Abb. 51). Dann ist die Durchflutung der Fläche gleich I , die Randspannung gleich

$$\oint \cdot 2 \pi r_0;$$

aus der Gleichsetzung beider Größen ergibt sich aber wieder die Gleichung (128).

Die magnetische Feldstärke hat nach dem Durchflutungssatz die Dimension einer Stromstärke dividiert durch eine Länge. Ihre praktische Einheit ist daher die Einheit Amp/cm. Deren 0,796faches ($0,796 \approx 10/4\pi$) soll nach einem neueren Beschluß mit „Oersted“ bezeichnet werden.

Der Durchflutungssatz darf natürlich nur deshalb aufgestellt werden, weil es seit der Einführung der Verschiebungsströme durch Maxwell keine ungeschlossenen Ströme mehr gibt. Gäbe es Stromlinien mit freien Enden, so hätten, wie Abb. 52 zeigt,

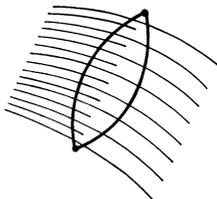


Abb. 52.

die Durchflutungen der unzählig vielen denkbaren Flächen, die von einer gegebenen Kurve umrandet werden, nicht alle denselben Wert, und der Durchflutungssatz hätte überhaupt keinen bestimmten Sinn.

Den Drehsinn der magnetischen Feldstärke wählen wir so, daß der überwiegende Richtungssinn der die Bezugsfläche durchsetzenden Drehpfeile (Abb. 53) übereinstimmt mit dem überwiegenden Richtungssinn der Durchflutung. Wenn demnach die Drehpfeile auch für sich genommen nur den Drehsinn der magnetischen Feldstärke ausdrücken und ausdrücken sollen, so entsteht

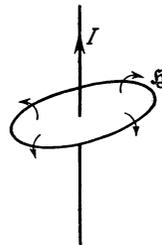


Abb. 53.

doch, da die Drehpfeile die Bezugsfläche nur je einmal durchsetzen und die Randkurve geschlossen ist, die Möglichkeit, der Randspannung einen Richtungssinn zuzuordnen. Sonst dürften wir sie auch nicht gleich der Durchflutung setzen, die als Fluß des Vektors der Stromdichte eine Größe mit Richtungssinn ist.

Mit dem so festgelegten Drehsinn der magnetischen Feldstärke stimmt (in magnetisch isotropen Medien) der beobachtbare Drehsinn der Induktion überein; und Entsprechendes gilt für die Richtungen der zugehörigen axialen Vektoren.

§ 67. Permeabilität der Nichteisenkörper. Die durch die Gleichung

$$\mu = \frac{\mathfrak{H}}{\oint} \quad (129)$$

definierte „Permeabilität“ des Feldmediums kann unmittelbar nach dieser Definition gemessen werden.

Angenommen z. B., in einem geradlinigen Leiter fließe ein Strom I von 100 A. Dieser ruft in einem Punkte, der von der Leiterachse einen senkrechten Abstand $r_0 = 10$ cm hat, eine magnetische Feldstärke

$$\oint = \frac{I}{2 \pi r_0} = \frac{100 \text{ A}}{2 \pi \cdot 10 \text{ cm}} = \frac{10 \text{ A}}{2 \pi \text{ cm}}$$

hervor. Bringt man nun an dieselbe Stelle des umgebenden Luftraums ein Prüfrechteck mit einer kurzen Seite von $l = 1$ cm Länge, in welchem ein Strom von $I' = 1$ A (z. B. je 10 mA in 100 feinen Windungen) fließt, so erhält man, wie der Versuch zeigt, eine größte Kraftwirkung von 0,204 mg*. Es ist also nach (121)

$$\mathfrak{H} = \frac{P}{I l} = \frac{0,204 \text{ mg}^*}{\text{A cm}} = \frac{0,204 \cdot 9,80 \cdot 10^{-8} \text{ J}}{\text{A cm}^2} = 2,00 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Vs}}{\text{cm}^2}$$

und daher

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}} = \frac{2,00 \cdot 10^{-8} \text{ Vs} \cdot 2 \pi \text{ cm}}{\text{cm}^2 \cdot 10 \text{ A}} = 1,256 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Vs}}{\text{A cm}} \\ &= 1,256 \cdot 10^{-8} \frac{\text{H}}{\text{cm}}. \end{aligned} \quad (130)$$

Dies ist nach unserer Definition die Permeabilität der Luft. Nur wenig davon verschieden ist der Wert μ_0 der Konstanten μ , den man im leeren Raum bestimmt. H ist die Abkürzung für die praktische Einheit „Henry“ = Vs/A = Ω s.

Für alle Stoffe, mit Ausnahme der „ferromagnetischen“, der „Eisenkörper“, liegt die Permeabilität sehr nahe bei dem Wert μ_0 . Für Platin ist z. B. $\mu = 1,00024 \mu_0$, für Wismut $\mu = 0,99984 \mu_0$. Man kann also ohne merklichen Fehler bei allen Stoffen mit Ausnahme der ferromagnetischen $\mu = \mu_0$ setzen. Stoffe, bei denen μ ein wenig $\left\{ \begin{array}{l} \text{größer} \\ \text{kleiner} \end{array} \right\}$ ist als μ_0 , heißen $\left\{ \begin{array}{l} \text{paramagnetisch} \\ \text{diamagnetisch} \end{array} \right\}$.

§ 68. Die Ringspule. Unser Beispiel im § 67 hat gezeigt, daß es nicht leicht ist, mit einem geradlinigen Strom die Permeabilität des umgebenden Mediums zu messen. Auch bei einer Stromstärke von 100 A erhält man in 10 cm Entfernung ein Feld von nur 2 Gauß; das ist ungefähr das Zehnfache der Stärke des erdmagnetischen Feldes.

Will man ein starkes Feld erzeugen, so muß man den Strom möglichst oft um den Raum herumführen, in dem es entstehen soll; außerdem muß man die erzeugten Kraftlinien möglichst konzentrieren.

Das einfachste und vollkommenste Hilfsmittel zur Erzeugung starker Felder ist die Ringspule. Darunter verstehen wir eine Spule wie in Abb. 54, deren Achse einen Kreis bildet. Bei ihr entsteht ein Feld nur im Innern der Windungen. Denn für die Flächen aller Kreise um den Mittelpunkt M, die man sich in der Ebene der Zeichnung außerhalb der Spulenwindungen denken kann, ist die gesamte Durchflutung und darum auch die Randspannung gleich Null; wegen der symmetrischen Anordnung des Ganzen folgt aber aus dem Verschwinden der Randspannung das Verschwinden der magnetischen Feldstärke selbst.

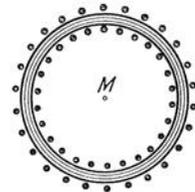
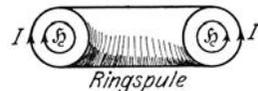


Abb. 54.

Für die Flächen solcher Kreise, deren Mittelpunkte auf der durch M gehenden Senkrechten zur Zeichenebene liegen und die in dieser oder zu dieser parallel durch das Innere der Windungen laufen, ist die Durchflutung von Null verschieden; und zwar ist sie nach ihrer Definition einfach gleich der Spulenstromstärke I multipliziert mit der Zahl der Windungen w. Wegen der Symmetrie des Problems kann man also schreiben:

$$\mathfrak{H} l = w I, \quad (131)$$

wo l den Umfang des betrachteten Kreises bedeutet.



Ringspule

Abb. 55.

Genau genommen ist l für die mehr nach außen liegenden Kreise größer als für die mehr nach innen liegenden; deshalb ist die Feldstärke in den Windungen außen ein wenig kleiner als innen. Den Mittelwert der Feldstärke im Innern der Windungen kann man aber mit großer Genauigkeit nach der einfachen Formel $\mathfrak{H} = \frac{w I}{l}$ berechnen, wo jetzt l den mittleren Kreisumfang, d. h. die Länge der kreisförmigen Spulenachse bedeutet.

Der Drehsinn der Feldstärke ist bei der Ringspule natürlich gleich dem Umlaufsinn des Stroms in ihren Windungen (Abb. 55).

§ 69. Das Ohmsche Gesetz für den magnetischen Kreis. Wir denken uns (Abb. 56) eine dünne Röhre, deren Wandung von Induktionslinien gebildet wird.

Da diese keine freien Enden haben (§ 76), ist die betrachtete Röhre in sich geschlossen. Es seien nun Stromkreise 1, 2, 3, ... oder (sehr kurze) Spulen der Windungszahlen w_1, w_2, w_3, \dots im Raume verteilt, die in ihnen fließenden Ströme seien I_1, I_2, I_3, \dots . Die betrachtete Induktionsröhre gehe jedoch nur durch einen Teil dieser Leiter hindurch, etwa durch die Leiter 1, 2 und 5. Aus dem Durchflutungssatz folgt dann:

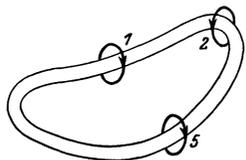


Abb. 56.

$$\int \mathfrak{H} ds = w_1 I_1 + w_2 I_2 + w_5 I_5, \quad (132)$$

wo das Integral über die Röhre zu erstrecken ist. Nun ist aber, wenn wir $\mathfrak{B}/\mathfrak{H}$ durch „ μ “ abkürzen und den Induktionsfluß durch die Röhre Φ nennen:

$$\int \mathfrak{H} ds = \int \mathfrak{B} F \cdot \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{B}} \cdot \frac{ds}{F} = \int \Phi \cdot \frac{ds}{\mu F} = \Phi \int \frac{ds}{\mu F}, \quad (133)$$

da der Induktionsfluß durch die Röhrenwandungen gleich Null ist und die \mathfrak{B} -Linien keine freien Enden haben. Wir können also schreiben:

$$\Phi = \frac{w_1 I_1 + w_2 I_2 + w_5 I_5}{\int \frac{ds}{\mu F}} = G (w_1 I_1 + w_2 I_2 + w_5 I_5). \quad (134)$$

Diese Gleichung nennt man das „Ohmsche Gesetz für den magnetischen Kreis“. Man vergleicht dabei den Induktionsfluß Φ in der Röhre mit der Stromstärke, den magnetischen Leitwert G der Röhre mit dem galvanischen Leitwert, die Summe der sie umschlingenden Amperewindungen (die „Summe der treibenden magnetomotorischen Kräfte“) mit der Summe der elektromotorischen Kräfte des elektrischen Stromkreises. $\frac{1}{G} = \int \frac{ds}{\mu F}$ heißt auch „magnetischer Widerstand“ oder „Reluktanz“.

§ 70. Hysteresis. Bei den ferromagnetischen Materialien, zu denen hauptsächlich das Eisen mit seinen Legierungen zählt, ist der Zusammenhang zwischen \mathfrak{B} und \mathfrak{H} außerordentlich verwickelt. Die Induktion in einem gegebenen Eisenkörper ist der Feldstärke nicht nur nicht proportional; sondern bei einer gegebenen Feldstärke sind sogar unzählige viele (innerhalb eines bestimmten Bereichs liegende) Induktionen möglich, und zwar auch dann, wenn man die äußeren Bedingungen, unter denen der Eisenkörper steht, gleich wählt. Dies hat zwei Gründe:

1. Die Änderung des Magnetfelds im Innern der Eisenkörper beansprucht eine gewisse Zeit; die magnetische Induktion folgt daher den Veränderungen der sie hervorrufenden Ströme nicht sofort, sondern mit einer gewissen Verzögerung. Man nennt diese Erscheinung „magnetische Nachwirkung“.

2. Die magnetische Induktion in einem Eisenkörper hängt nicht nur von den äußeren magnetisierenden Strömen ab, sondern auch von dem inneren magnetischen Zustand, in welchem er sich in dem Augenblicke, wo er magnetisiert wird, bereits befindet. Die Eisenkörper verhalten sich ähnlich wie ein Schaltwerk, das auf denselben äußeren Eingriff verschieden antwortet je nach den Schaltungen, die im Augenblicke des Eingriffes schon betätigt sind.

Magnetisiert man einen Eisenkörper — z. B. in einer Ringspule — durch einen Strom, der so langsam wechselt, daß man von der magnetischen Nachwirkung absehen kann, so durchläuft die Induktion nach einigen Stromwechsell während jedes Hin- und Herganges des magnetisierenden Stromes eine Kurve, die eine endliche Fläche umschließt, etwa wie in Abb. 57. Die Gestalt dieser „Magnetisierungskurve“ ist nur wenig abhängig von der Frequenz des benutzten

Wechselstroms, kann also auch punktweise mit Gleichstrom verschiedener Stärke und verschiedenen Umlaufsinnnes aufgenommen werden. Man nennt die in dieser Kurve zutage tretende Erscheinung, daß die Änderung der Induktion hinter der Änderung der Feldstärke zurückbleibt, „Hysteresis“ und die Magnetisierungskurve daher auch „Hysteresisschleife“.

Geht man vom unmagnetischen Zustande des Materials aus, so durchläuft die Induktion zunächst die sogenannte „jungfräuliche“ Kurve, die etwa die Gestalt der Kurve *OC* hat.

Das Entstehen der Hysteresisschleifen kann qualitativ erklärt werden mit Hilfe der von Ampère eingeführten Vorstellung, daß in den Molekülen der Eisenkörper „Molekularströme“ kreisen. Diese fließen, solange kein äußerer magnetisierender Strom wirkt, in allen möglichen Ebenen und mit jedem denkbaren Kreisungssinn, so daß die Resultierende aus den von ihnen erzeugten Feldstärken und daher auch Induktionen gleich Null ist. Beginnt jedoch ein äußerer Strom zu wirken, so entsteht in den Zwischenräumen zwischen den Molekülen eine magnetische Feldstärke \mathfrak{H} und infolgedessen auch eine ihr proportionale Induktion $\mathfrak{B}_0 = \mu_0 \mathfrak{H}$. Diese dreht (vgl. § 60) die Molekularströme so, daß ihre Ebenen und ihre Umlaufsinne immer mehr mit der Drehebene und dem Drehsinn von \mathfrak{B}_0 selbst übereinstimmen. Die Molekularströme erzeugen daher eine Zusatzinduktion \mathfrak{J} , und die resultierende Induktion ist:

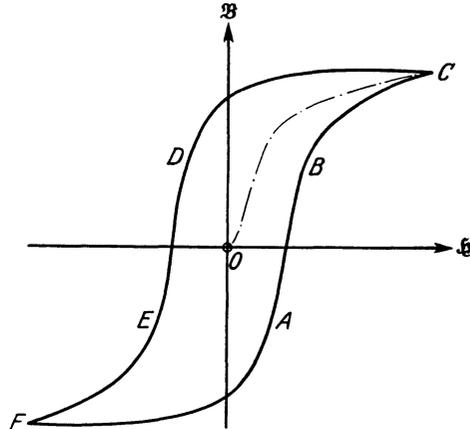


Abb. 57.

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{J} = \mu_0 \mathfrak{H} + \mathfrak{J}. \tag{I35}$$

$\mathfrak{B} - \mu_0 \mathfrak{H} = \mathfrak{J}$ heißt „Magnetisierung“; das Verhältnis $\mathfrak{J}/\mathfrak{H}$ setzt man auch gleich κ und nennt es „magnetische Aufnahmefähigkeit“ oder „Suszeptibilität“. Es ist daher

$$\kappa = \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{H}} = \frac{\mathfrak{B} - \mu_0 \mathfrak{H}}{\mathfrak{H}} = \mu - \mu_0. \tag{I36}$$

Da man bei der Aufnahme von Magnetisierungskurven \mathfrak{B} und \mathfrak{H} bestimmt, kann man auch $\mathfrak{J} = \mathfrak{B} - \mu_0 \mathfrak{H}$ ausrechnen und als Funktion von \mathfrak{H} darstellen. Solche $\mathfrak{J}/\mathfrak{H}$ -Kurven zeigen den Charakter der „Sättigung“: die Magnetisierung strebt mit wachsender Feldstärke einem bestimmten, nur von dem Material abhängenden und für dieses charakteristischen Grenzwert $\hat{\mathfrak{J}}$ zu. Für die Induktion gilt nicht dasselbe; ist die Sättigung erreicht, so wächst sie entsprechend der Gleichung $\mathfrak{B} = \mu_0 \mathfrak{H} + \hat{\mathfrak{J}}$ linear mit der Feldstärke weiter.

Aus dem Verlauf der Hysteresisschleifen geht hervor, daß in einem Eisenkörper, der in einer Ringspule magnetisiert wird, auch nach Abschaltung des magnetisierenden Stroms noch eine gewisse Induktion vorhanden ist. Man nennt deren Betrag, also den Abschnitt auf der \mathfrak{B} -Achse (Abb. 58), „remanente Induktion“ oder „wahre Remanenz“.

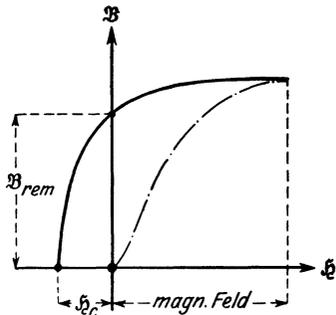


Abb. 58.

Koerzitivkraft heißt die entgegengesetzt gerichtete Feldstärke \mathfrak{H}_c , die man in der Ringspule erzeugen muß, um die Induktion wieder völlig auf Null zu bringen. Sie ist also der Abschnitt auf der \mathfrak{H} -Achse links vom Nullpunkt.

§ 71. **Hysteresisverluste.** Die Hysteresis ist mit einer beträchtlichen und in der Praxis unerwünschten Wärmeentwicklung verbunden; und zwar ist diese um so größer, je größer in der $\mathfrak{B}/\mathfrak{H}$ -Darstellung die von der Hysteresisschleife umschlossene Fläche ist. Nach Warburg gilt für die bei einmaliger Durchlaufung einer Hysteresisschleife in einem gleichförmigen Feld entwickelte Wärme, den „Hysteresisverlust“, die Gleichung:

$$W_h = N_h T = V \int \mathfrak{B} d\mathfrak{H}, \quad (137)$$

wo W_h die verlorene Energie (die entwickelte Wärme), N_h die verlorene Leistung, T die Schwingungsdauer und V das Volumen des Ferromagnetikums bedeutet.

Bei der Auswertung des Flächeninhalts der Schleife ist zu beachten, daß man für \mathfrak{B} und \mathfrak{H} im allgemeinen verschiedene Maßstäbe verwendet. Entspricht z. B.

$$\begin{aligned} \text{bei } \mathfrak{H} & 1 \text{ Oersted } 7 \text{ mm,} \\ \text{,, } \mathfrak{B} & 1 \text{ kGauß } 3,5 \text{ mm,} \end{aligned}$$

so ist aus einem Flächeninhalt von $2,5 \text{ cm}^2$ zu schließen, daß während jeder Periode in der Raumeinheit die Wärmemenge

$$\begin{aligned} \int \mathfrak{B} d\mathfrak{H} &= 2,5 \text{ cm}^2 \cdot \frac{\text{kGauß}}{3,5 \text{ mm}} \cdot \frac{\text{Oersted}}{7 \text{ mm}} = \frac{5}{49} 10^5 \text{ Gauß Oersted} = 0,796 \cdot \frac{5 \text{ mJ}}{49 \text{ cm}^3} \\ &= 81,2 \frac{\mu\text{J}}{\text{cm}^3} = 812 \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3} = 19,41 \frac{\mu\text{cal}}{\text{cm}^3} \end{aligned}$$

entwickelt wird. Diese Größe W_h/V wird häufig — und zwar meist in erg/cm^3 — zur Kennzeichnung der Hysteresisverluste eines ferromagnetischen Materials angegeben.

§ 72. **Reversible Permeabilität.** Bei ferromagnetischen Stoffen sind im allgemeinen nur die auf eindeutige Kurven, z. B. die jungfräuliche oder die sogenannte Kommutierungskurve, bezogenen Permeabilitäten eindeutig. In der Fernmeldetechnik jedoch sind die magnetisierenden Ströme meist so schwach, daß die Hysteresisschleifen annähernd durch gerade Linien ersetzt werden können; der Magnetisierungsvorgang wird, wie R. Gans¹ es ausdrückt, umkehrbar, reversibel. Der trigonometrische Tangens des Neigungswinkels der kleinen Linienstücke, in welche die Schleifen übergehen, heißt „reversible Permeabilität“.

Häufig lagert sich die Wechsellagerung, der das kleine Linienstück entspricht, über eine stärkere konstante Magnetisierung. So hat man in dem magnetischen Kreis des gewöhnlichen Fernhörers eine gewisse durch den Dauermagnet hervorgerufene Induktion und darübergelagert die Induktion des Fernsprechstroms. Dann ist das Linienstück, dessen Neigung gleich der reversiblen Permeabilität ist, nach oben hin verschoben.

Für solche verschobene Schleifen haben Madelung² und Gans durch Versuche festgestellt, daß ihre Neigung, d. h. die reversible Permeabilität, nur von der zugehörigen mittleren Magnetisierung \mathfrak{H} abhängt: alle Linienstückchen, deren Mittelpunkte in der $\mathfrak{B}/\mathfrak{H}$ -Darstellung auf derselben horizontalen Linie liegen, sind einander parallel. Die Versuche haben ferner ergeben, daß die Steilheit der Linienstückchen bei niedrigen mittleren Magnetisierungen leidlich konstant ist und erst bei Annäherung der mittleren Magnetisierung an die Sättigungsmagnetisierung rasch abfällt. Soll also die reversible Permeabilität eines Materials gegen vorübergehende starke Störmagnetisierungen unempfindlich sein, so muß man dafür sorgen, daß die remanente Magnetisierung des Materials wesentlich kleiner ist als seine Sättigungsmagnetisierung.

¹ Gans, R.: Ann. Physik 27, 1 (1908).

² Madelung, E.: Ann. Physik 17, 861 (1905).

Man kann die Linienstückchen, die einer überlagerten Wechsellagerung entsprechen, durch lineare Beziehungen der Form

$$\mathfrak{B} = \mu_r (\mathfrak{H}^e + \mathfrak{H}) \tag{138}$$

darstellen (Abb. 59¹). Dabei ist μ_r die reversible Permeabilität an der betreffenden Stelle der Koordinatenebene; $\mu_r \mathfrak{H}^e$ und \mathfrak{H}^e sind die Strecken, die das Linienstückchen, gehörig verlängert, auf den beiden Achsen abschneidet. Gans² nennt das Produkt $\mu_r \mathfrak{H}^e$ die „wahre Magnetisierung“; \mathfrak{H}^e heißt „eingeprägte magnetische Feldstärke“.

Die Darstellung (138) ist nützlich; denn sie erlaubt bei manchen Aufgaben der Fernmeldetechnik einen rechnerischen Ansatz zu machen. Es ist jedoch zu beachten, daß die Koeffizienten \mathfrak{H}^e und μ_r von der Lage des Schwingungsmittelpunkts abhängen³.

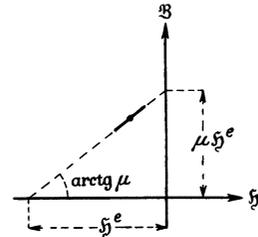


Abb. 59.

§ 73. Einführung der reversiblen Permeabilitäten und der eingepprägten magnetomotorischen Kräfte in das Ohmsche Gesetz für den magnetischen Kreis. Macht man den Ansatz (138):

$$\mathfrak{H}_i = \frac{\mathfrak{B}_i}{\mu_{ri}} - \mathfrak{H}_i^e = \frac{\Phi}{\mu_{ri} F_i} - \mathfrak{H}_i^e, \tag{139}$$

so erhält man aus (132):

$$\sum_i \left(\frac{l_i}{\mu_{ri} F_i} \Phi - \mathfrak{H}_i^e l_i \right) = \sum w I$$

oder

$$\Phi \cdot \sum_i \frac{l_i}{\mu_{ri} F_i} = \sum w I + \sum_i \mathfrak{H}_i^e l_i. \tag{140}$$

Man kann also so rechnen, als hätten die Materialien eine konstante magnetische Leitfähigkeit von der Größe der reversiblen Permeabilität und als sei außerdem noch für jedes Material eine konstante „eingepprägte magnetomotorische Kraft“ vorhanden, die sich als das Produkt aus der eingepprägten Feldstärke und der Länge des Kraftlinienweges in dem betreffenden Material berechnet.

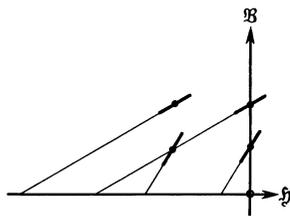


Abb. 60.

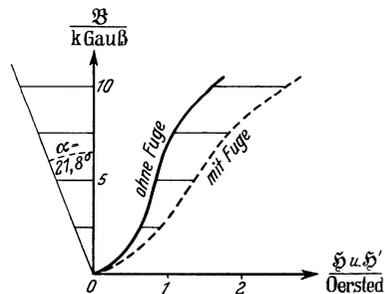


Abb. 61.

Bei Material geringer Koerzitivkraft und geringer Remanenz ist die eingepprägte magnetomotorische Kraft häufig zu vernachlässigen; eine große Rolle dagegen spielt sie bei dem harten Material für Dauermagnete, das sich durch hohe Koerzitivkraft und hohe Remanenz auszeichnet (vgl. die schematische Abb. 60).

§ 74. Scherungskorrektur bei der geschlitzten Ringspule. Bei der Untersuchung einer bestimmten Eisensorte in der Ringspule habe sich die in Abb. 61

¹ In Abb. 59 lese man μ_r statt μ .

² Gans, R.: Einführung in die Theorie des Magnetismus. Leipzig: B. G. Teubner 1908.

³ Über das Verhalten der Eisenkörper in schwachen Wechselfeldern findet man weitere Angaben vor allem im § 262.

ausgezogen gezeichnete jungfräuliche Magnetisierungskurve ergeben. Als Ordinate sei die Induktion \mathfrak{B} im Innern des Eisens aufgetragen, als Abszisse die Feldstärke \mathfrak{H} ebenfalls im Innern des Eisens.

Wir denken uns dieselbe Eisensorte im Epsteinschen Apparat untersucht, bei dem neben einem Gesamtkraftlinienweg von der Länge $l = 200$ cm im Eisen an den vier Stößen der Blechpakete ein Gesamtluftweg von $l_0 = 0,2$ mm Dicke zu überwinden sei. Wie berücksichtigt man den durch die Fugen hervorgerufenen Fehler?

Es ist bequem, zunächst ebenso zu verfahren wie bei der Messung mit der Ringspule, also mit einer „vorläufigen“ Feldstärke $\mathfrak{H}' = wI/l$ als Abszisse eine „vorläufige“ Kurve zu zeichnen und diese erst nachträglich durch eine Konstruktion, die man „Scherung“ nennt, in die gesuchte $\mathfrak{B}/\mathfrak{H}$ -Kurve zu verwandeln.

Wenn wir die auf die Fugen bezüglichen Größen durch den Index Null kennzeichnen, dürfen wir bei dem Epsteinschen Apparat die Ansätze machen

$$\Phi = \Phi_0, \quad F \approx F_0, \quad \text{also} \quad \mathfrak{B} \approx \mathfrak{B}_0$$

und

$$wI = \mathfrak{H}l + \mathfrak{H}_0 l_0. \quad (I41)$$

Nach Definition ist

$$\mathfrak{H}' = \frac{wI}{l} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}_0 \frac{l_0}{l} = \mathfrak{H} + \frac{\mathfrak{B}}{\mu_0} \frac{l_0}{l}. \quad (I42)$$

Wenn wir also die vorläufige $\mathfrak{B}/\mathfrak{H}'$ -Kurve gezeichnet haben (Abb. 61, gestrichelte Kurve), so brauchen wir nur die zu den Kurvenpunkten gehörigen Abszissen um die Strecken

$$\mathfrak{H}' - \mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{B}}{\mu_0} \frac{l_0}{l} \quad (\mathfrak{H} < \mathfrak{H}') \quad (I43)$$

zu verkürzen, um die gesuchte Materialkurve, die (ausgezogene) $\mathfrak{B}/\mathfrak{H}$ -Kurve, zu erhalten.

Der Name „Scherung“ ist von Rayleigh gewählt worden, weil die gesuchte Kurve aus der vorläufigen durch eine Gestaltänderung hervorgeht, die man auf dem Gebiete der elastischen Formänderungen als „Scherung“ kennt. Die einzelnen Kurvenpunkte werden horizontal verschoben um eine Strecke, die der Ordinate \mathfrak{B} proportional ist. Die Scherungskorrektur $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}'$ kann (s. Abb. 61) dargestellt werden durch eine gerade Linie, die durch den Nullpunkt geht und mit der Ordinatenachse im zweiten Quadranten (die Korrektur ist ja negativ) einen Winkel α bildet, dessen trigonometrischer Tangens dem Bruche l_0/l proportional ist.

Die Größe des Winkels α hängt von den benutzten Maßstäben ab. Entspricht z. B. wie bei unserer Zeichnung

$$\text{bei } \mathfrak{H}: 1 \text{ Oersted } 1 \text{ cm}, \quad \text{bei } \mathfrak{B}: 1 \text{ kG } 0,25 \text{ cm},$$

so ist

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{Länge von } \mathfrak{H}' - \mathfrak{H}}{\text{Länge von } \mathfrak{B}} = \frac{\frac{\mathfrak{H}' - \mathfrak{H}}{\text{Oersted}} \text{ cm}}{\frac{\mathfrak{B}}{\text{k Gauß}} 0,25 \text{ cm}} = 4000 \frac{\mathfrak{H}' - \mathfrak{H}}{\mathfrak{B}} \frac{\text{Gauß}}{\text{Oersted}} = 4000 \frac{l_0}{l}, \quad (I44)$$

da nach Definition

$$\frac{\text{Gauß}}{\text{Oersted}} = \frac{10^{-8} \text{ Vs} \cdot \text{cm}}{\text{cm}^2 \cdot 0,796 \text{ A}} = 1,256 \cdot 10^{-8} \frac{\text{H}}{\text{cm}} = \mu_0.$$

In dem von uns gewählten Beispiel ist

$$\operatorname{tg} \alpha = 4000 \cdot \frac{0,2 \text{ mm}}{2 \text{ m}} = 0,40; \quad \alpha = 21,8^\circ.$$

Der Einfluß der Stoßfugen ist also, obgleich l_0 zehntausendmal kleiner ist als l , wegen der hohen Permeabilität der untersuchten Eisensorte unverhältnismäßig groß. $4 \pi l_0/l$ heißt auch „Entmagnetisierungsfaktor“.

§ 75. Remanenz des Materials und wirksame Remanenz. Als „Remanenz“ haben wir die Induktion für die Feldstärke Null definiert. In der Fernmelde-technik hat man es jedoch im allgemeinen mit kleinen Strömen, also mit kleiner „vorläufiger Feldstärke \mathfrak{H} “ zu tun. Daher ist die „wirksame“ Remanenz, d. i. die Remanenz der $\mathfrak{B}/\mathfrak{H}$ -Kurve, — man nennt sie meist „scheinbare“ Remanenz — für uns wichtiger als die früher definierte „wahre“.

In Abb. 62 ist ein absteigender Ast der $\mathfrak{B}/\mathfrak{H}$ -Kurve und die Scherungslinie ausgezogen, der entsprechende Ast der $\mathfrak{B}/\mathfrak{H}$ -Kurve gestrichelt gezeichnet. Man erkennt, daß die „wahre“ (Material-)Remanenz, d. h. die Höhe des Punktes A über der Abszissenachse, größer ist als die scheinbare (wirksame) Remanenz, d. h. die Höhe des Punktes B über der Abszissenachse. Das Bild zeigt zugleich, daß man die scheinbare Remanenz, ohne die $\mathfrak{B}/\mathfrak{H}$ -Kurve zeichnen zu müssen, auch an dem Schnittpunkt C der $\mathfrak{B}/\mathfrak{H}$ -Kurve mit der Scherungslinie ablesen kann. Der Höhenunterschied der Punkte A und C ist gleich der Differenz zwischen der wahren und der scheinbaren Remanenz.

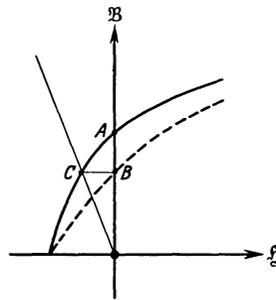


Abb. 62.

Für die Fernmeldetechnik ist demnach das Verhalten des magnetischen Materials in der Nähe der Scherungslinie, also bei negativen Feldstärken, von besonderer Wichtigkeit.

Da die Remanenz, die wirksam wird, unter Umständen wesentlich kleiner ist als die des Materials, kann ein Material von hoher Remanenz, das nach § 72 in der geschlossenen Ringspule eine gegen Störmagnetisierungen sehr empfindliche reversible Permeabilität zeigen würde, durch Einfügung von Luftschlitzen, also künstliche Erhöhung des „Entmagnetisierungsfaktors“, verbessert werden. Hierauf beruht die Stabilität der in der Pupintechnik verwendeten Pulverkernspulen; die mit Isolierstoff ausgefüllten Zwischenräume zwischen den einzelnen Körnern vergrößern den Entmagnetisierungsfaktor.

§ 76. Induktionsgesetz. Im § 62 haben wir die magnetische Induktion durch den „Induktionsstrom“ definiert, der bei der Bewegung eines Drahtrechtecks in einem magnetischen Felde entsteht. Die Erfahrung zeigt nun, daß die damals abgeleitete Gleichung

$$Q = \mathfrak{B} \frac{l_s}{R} = \frac{\mathfrak{B} F}{R} = \frac{\Phi}{R}, \tag{145}$$

in der F die überstrichene Fläche und Φ den Fluß der Induktion \mathfrak{B} durch sie bedeutet, für jeden beliebig gestalteten geschlossenen Drahtkreis gilt, vorausgesetzt, daß man unter $\Phi = \Phi_1 - \Phi_2$ die Abnahme des Flusses durch seine Fläche versteht:

$$Q = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}. \tag{146}$$

Ist $\Phi_1 - \Phi_2$ klein, also etwa gleich $-d\Phi$ und gehört zu $-d\Phi$ die kleine Zeit dt , so gilt

$$RI = - \frac{d\Phi}{dt}. \tag{147}$$

Diese Gleichung ist eine besondere Form des „Induktionsgesetzes“. Sie sagt, daß in einem Drahtkreis, der einen zeitlich veränderlichen magnetischen Fluß umschlingt, eine Art elektromotorischer Kraft entsteht, die gleich der Geschwindigkeit ist, mit der der magnetische Fluß abnimmt.

Wie die Umlaufsinne des entstehenden Stromes und des Feldes einander zugeordnet sind, ist schon im § 63 besprochen worden. Wählt man z. B. für den axialen Vektor des Feldes, wie üblich, die Rechtsschraube (Abb. 63), so entsteht bei einer zeitlichen Abnahme eines positiven Flusses Φ (§ 40) nach § 63

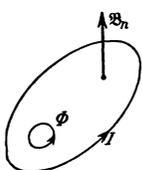


Abb. 63.

physikalisch ein Induktionsstrom, der mit der Zählnormale des Stromkreises ebenfalls eine Rechtsschraube bildet. Wählt man daher den Zählpfeil des Induktionsstroms so, daß auch er mit der Zählnormale eine Rechtsschraube bildet, so muß das Induktionsgesetz wie in Gleichung (147) geschrieben werden; denn dann ist $d\Phi/dt$ negativ, und es ergibt sich ein positiver Strom I . Nimmt man für das Feld wie für den Strom eine Linksschraube, so bleibt die Form der Gleichung (147) offenbar erhalten.

Deutet man, wie es soeben geschehen ist, $-d\Phi/dt$ als eine elektromotorische Kraft, so kann die Gleichung (147) als eine Erweiterung der Maschenregel angesehen werden. Mit Rücksicht jedoch auf die in der Folge durchweg benutzte komplexe Rechenweise empfiehlt es sich, den Differentialquotienten $d\Phi/dt$ auf der Seite der Spannungen unterzubringen, also in dem angenommenen Fall

$$0 = RI + \frac{d\Phi}{dt} \quad (148)$$

zu schreiben. Er kann dann etwa als eine „induktive Spannung“ gedeutet werden. Wir werden in der Folge diese Darstellungsweise bevorzugen.

Im Induktionsgesetz liegt eine wichtige Aussage über die magnetische Induktion \mathfrak{B} . Durch einen geschlossenen Drahtkreis kann man beliebig viele irgendwie gekrümmte Flächen hindurchlegen. Von dem „Fluß durch die Fläche eines geschlossenen Drahtkreises“ zu reden, hat also nur dann einen bestimmten Sinn, wenn die Induktionslinien nirgends freie Enden haben (vgl. Abb. 52, § 66). Die Erfahrung zeigt demnach, indem sie das Induktionsgesetz bestätigt, daß die Induktionslinien wie die Stromlinien durchaus geschlossene Linien sind.

Die Änderung des magnetischen Flusses in der Zeiteinheit $d\Phi/dt$ kann erfahrungsgemäß nicht nur durch eine Bewegung, sondern auch durch eine rein zeitliche Änderung des elektromagnetischen Feldes zustande kommen.

§ 77. Das Induktionsgesetz als Feldgesetz. Das Induktionsgesetz ist in allgemeiner Fassung ein reines Feldgesetz. Es sagt über den Zusammenhang etwas aus, der in jedem elektromagnetischen Feld zwischen der Verteilung der elektrischen Feldstärke \mathfrak{E} , der zeitlichen Änderung der magnetischen Induktion \mathfrak{B} und einer etwaigen Geschwindigkeit v der in dem Felde vorhandenen Materie besteht. Es behauptet, daß (bei Abwesenheit eingepprägter Feldstärken) für jedes beliebige Flächenstück das über seinen Rand erstreckte Integral der elektrischen Feldstärke gleich der zeitlichen Abnahme des Flusses der Induktion in dem Flächenstück ist:

$$\int |\mathfrak{E}| |ds| \cos(\mathfrak{E}, ds) = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (149)$$

Dabei ist das Linienintegral der elektrischen Feldstärke zu bilden wie bei der elektrischen „Spannung“; die Abnahme des magnetischen Flusses kann sowohl durch eine rein zeitliche Änderung des Feldes als auch bei zeitlich konstantem

Felde durch eine Bewegung (Geschwindigkeit) der mit dem Flächenstück zusammenfallenden Materie zustande kommen.

Da die elektrische Spannung längs einer geschlossenen Kurve in einem wirbelfreien Felde nach dessen Definition immer gleich Null ist, kann das elektromagnetische Feld, wenn sich der magnetische Fluß zeitlich ändert, nur ein Wirbelfeld sein.

Der Begriff der „Spannung“ ist im Wirbelfeld offenbar nur dann eindeutig, wenn der Integrationsweg angegeben wird; der Begriff des Potentials verliert im Wirbelfeld sogar überhaupt seine Bedeutung. Oft gibt es jedoch auch im Wirbelfeld Flächen, für welche die Abnahme des magnetischen Flusses dauernd gleich Null oder sehr klein ist, so daß in ihnen das Feld als wirbelfrei angesehen werden kann. So kreisen bei den parallelen Drähten einer Doppelleitung die magnetischen Achslinien um die Drähte herum; auf den beiden Wegen 124 und 134 (Abb. 64) ist deshalb die Spannung verschieden groß, und die Differenz der Potentiale in 1 und 4 ist unbestimmt. Der Fluß der Induktion durch eine Querebene aber, also durch eine Ebene senkrecht zu den Drähten, ist beständig wenigstens sehr annähernd gleich Null; man bekommt also bestimmte Werte für die Potentialdifferenz, wenn man sie durch die Spannung in einer solchen Ebene definiert. Wenn bei Leitungen von „Spannung“ schlechthin die Rede ist, so ist immer diese Spannung gemeint.

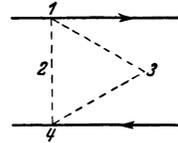


Abb. 64.

Wenn eingeprägte Feldstärken vorhanden sind, darf die Umlaufspannung wieder nur für den Vektor \mathfrak{C} gebildet werden (vgl. § 38).

Die gemäß (149) induzierte Umlaufspannung ruft erst mittelbar in einem etwa vorhandenen Leiter nach dem Ohmschen Gesetz einen Induktionsstrom hervor. Der Leiter macht die in dem Felde bestehende besondere Verteilung der elektrischen Feldstärke sozusagen sichtbar; er gibt dem Felde die Möglichkeit, Ladungen in Bewegung zu setzen.

Angenommen z. B., ein ruhender linearer Stromkreis der Länge l , der Leitfähigkeit κ und des Querschnitts F liege in einem magnetischen Wechselfeld; außerdem sei in dem Kreise eine eingeprägte Feldstärke \mathfrak{C}_e vorhanden, die etwa von einer galvanischen oder thermoelektrischen Batterie herrühre. Dann gilt nach dem Ohmschen Gesetz:

$$I = \kappa F (\mathfrak{C} + \mathfrak{C}_e)$$

und nach dem Induktionsgesetz:

$$\int \frac{I}{\kappa F} ds - \int \mathfrak{C}_e ds \cos(\mathfrak{C}_e, ds) = - \frac{d\Phi}{dt}$$

oder, da I konstant ist:

$$E = RI + \frac{d\Phi}{dt}. \tag{150}$$

Dies ist wieder die erweiterte Maschenregel.

Bei einer Spule von w Windungen gilt für jede Windung, wenn keine eingepprägten Kräfte da sind, die Gleichung

$$I \int \frac{ds}{\kappa F} = - \frac{d\Phi}{dt}. \tag{151}$$

Nennen wir nun R den Gesamtwiderstand der Spule, so ist

$$\int \frac{ds}{\kappa F} = \frac{R}{w}; \tag{152}$$

also gilt auch

$$RI = - w \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d\Psi}{dt}. \tag{153}$$

$\Psi = w \Phi$ heißt auch „Spulenfluß“, $- d\Psi/dt$ „magnetischer Schwund“.

§ 78. **Induktivität einer Ringspule mit nicht ferromagnetischem Kern.** In einer Ringspule, die im Innern ihrer Windungen mit nicht ferromagnetischem Material ausgefüllt ist, fließe ein zeitlich veränderlicher Strom I . Seine zeitliche Veränderung komme etwa dadurch zustande, daß eine zunächst mit der Spule verbundene Stromquelle E (Abb. 65), plötzlich abgeschaltet und die Spule kurzgeschlossen wird. Da jeder Strom Wärme erzeugt, muß I im Laufe der Zeit verschwinden; mit I verschwindet aber auch das magnetische Feld im Innern der Spule, also der Fluß Φ , für den sich aus (131) und (129) die Gleichung

$$\Phi = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}} \frac{wF}{l} I = \mu \frac{wF}{l} I \quad (154)$$

ableiten läßt. Nach dem Induktionsgesetz gilt daher:

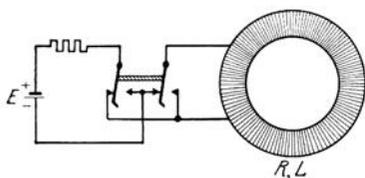


Abb. 65.

$$0 = RI + w \frac{d\Phi}{dt} = RI + \mu \frac{w^2 F}{l} \frac{dI}{dt} \quad (155)$$

oder wenn wir die Abkürzung

$$L = \mu \frac{w^2 F}{l} \quad (156)$$

einführen:

$$0 = RI + L \frac{dI}{dt}. \quad (157)$$

Wenn demnach der die Ringspule durchfließende Strom mit der Zeit veränderlich ist, tritt eine scheinbare elektromotorische Kraft $-LdI/dt$ auf, die in unserem Falle, wo dI/dt negativ ist, wie eine hinzugeschaltete EMK das plötzliche Verschwinden des Stromes verhindert. Der Faktor L , der nur von der Permeabilität des Spulenkerns, der Windungszahl, der Windungsfläche und dem Ringumfang abhängt, heißt „Induktivität“ („Selbstinduktion“, „Selbstpotential“) der Spule.

Zahlenbeispiel. Bei einer eisenfreien Ringspule von 3140 Windungen sei schätzungsweise die mittlere Windungsfläche F gleich $36,9 \text{ cm}^2$, die mittlere Länge einer Kraftlinie l gleich $45,5 \text{ cm}$. Ihre Induktivität hat daher den Wert:

$$L = \mu_0 \frac{w^2 F}{l} = 1,256 \cdot 10^{-8} \frac{\text{H}}{\text{cm}} (3,14)^2 \cdot 10^6 \cdot \frac{36,9 \text{ cm}^2}{45,5 \text{ cm}} = 0,1 \text{ H}.$$

§ 79. **Induktiver Widerstand bei Sinusströmen.** Wenn sich der die Ringspule durchfließende Strom sinusförmig mit der Zeit ändert:

$$i = \hat{i} \cos(2\pi ft + \varphi),$$

ergibt sich

$$\frac{di}{dt} = -\hat{i} 2\pi f \sin(2\pi ft + \varphi) = \hat{i} 2\pi f \cos(2\pi ft + \varphi + 90^\circ). \quad (158)$$

Bei Sinusströmen ist also eine induktive Spannung zu überwinden von dem Scheitelwert $L \cdot 2\pi f \cdot \hat{i} = \omega L \cdot \hat{i}$.

Eine Ringspule verhält sich hiernach bei Sinusströmen so, als ob ihr außer einem „Ohmschen“ Widerstand R noch ein „induktiver Widerstand“ oder eine „Induktanz“ $2\pi f L = \omega L$ zukäme.

§ 80. **Induktivität einer Ringspule mit ferromagnetischem Kern.** Die in der Technik verwendeten Spulen haben fast immer ferromagnetische Kerne. Dann ist:

$$RI = -w \frac{d\Phi}{dt} = -wF \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = -wF \frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{H}} \frac{d\mathfrak{H}}{dI} \frac{dI}{dt} = -\frac{w^2 F}{l} \frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{H}} \frac{dI}{dt}$$

und

$$L = \frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{H}} \frac{w^2 F}{l}. \quad (159)$$

Zur Berechnung der Induktivität ist also an die Stelle der Permeabilität der Differentialquotient von \mathfrak{B} nach \mathfrak{H} zu setzen, d. h. das Verhältnis der bei der Stromänderung dI eintretenden Änderung $d\mathfrak{B}$ der magnetischen Induktion zu der gleichzeitigen Änderung $d\mathfrak{H}$ der magnetischen Feldstärke.

Die Induktivität ist demnach bei Spulen mit ferromagnetischem Kern genau genommen keine Konstante. Spricht man von der Induktivität schlechthin, so meint man ihren zeitlichen Mittelwert etwa während einer Periode. In der Fernmeldetechnik ist für $d\mathfrak{B}/d\mathfrak{H}$ nach § 72 im allgemeinen die „reversible“ Permeabilität einzusetzen.

§ 81. Der streuungslose Ringübertrager. Denkt man sich die Wicklung einer Ringspule in zwei Teile zerlegt und diese — jeden für sich — mit Klemmen versehen, so entsteht ein „Transformator“ oder „Übertrager“. Die beiden Teilwicklungen pflegt man als die „primäre“ und „sekundäre“ zu unterscheiden. Wenn die Windungen sehr gleichmäßig auf den Kern aufgebracht sind, verlaufen nahezu alle magnetischen Achslinien in ihrem Innern; alle Linien, die von der primären Wicklung umschlungen werden, gehen daher auch durch die sekundäre. Einen solchen Ringübertrager nennt man „streuungslos“.

Angenommen, die primäre Wicklung habe w_1 , die sekundäre w_2 Windungen. Dann ist für den primären Kreis 1:

$$\frac{d\Psi_1}{dt} = w_1 \frac{d\Phi_1}{dt} = w_1 F \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = w_1 F \frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{H}} \frac{d\mathfrak{H}}{dt} = w_1 F \mu \frac{d\mathfrak{H}}{dt}, \quad (160)$$

wo μ die reversible Permeabilität bedeutet. Jetzt ist aber

$$\mathfrak{H} l = w_1 I_1 + w_2 I_2, \quad (161)$$

also

$$\frac{d\Psi_1}{dt} = \mu \frac{w_1^2 F}{l} \frac{dI_1}{dt} + \mu \frac{w_1 w_2 F}{l} \frac{dI_2}{dt}. \quad (162)$$

Setzt man

$$L_1 = \mu \frac{w_1^2 F}{l}, \quad L_{12} = \mu \frac{w_1 w_2 F}{l}, \quad (163)$$

so wird

$$0 = R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + L_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (164)$$

L_1 ist die bereits definierte Induktivität des Kreises 1; L_{12} heißt „Gegeninduktivität“ zwischen den Kreisen 1 und 2.

Entsprechend gilt für den Kreis 2:

$$0 = R_2 I_2 + L_{12} \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt}, \quad (165)$$

wo

$$L_2 = \mu \frac{w_2^2 F}{l}. \quad (166)$$

Offenbar ist beim streuungslosen Ringübertrager

$$\left. \begin{aligned} \frac{L_{12}}{L_1} &= \frac{w_2}{w_1}, & \frac{L_2}{L_{12}} &= \frac{w_2}{w_1}, \\ L_{12} &= \sqrt{L_1 L_2}. \end{aligned} \right\} \quad (167)$$

D. h. die Gegeninduktivität ist gleich dem „geometrischen Mittel“ der beiden Selbstinduktivitäten.

§ 82. **Kopplungsfaktor und Streuzahl.** Da alle Stoffe eine gewisse magnetische Leitfähigkeit besitzen, wird sich bei einem Übertrager immer ein gewisser Teil der durch die beiden Kreise gehenden Induktionslinien durch die Luft schließen. Sind die beiden Wicklungen wie in der schematischen Abb. 66 kurz, so braucht man nur zwischen einem gemeinsamen Linienbündel und zwei je nur einer einzigen Wicklung zugehörigen Linienbündeln zu unterscheiden. Dann bleiben die beiden Selbstinduktivitäten L_1 und L_2 den Quadraten der Windungszahlen w_1^2 und w_2^2 und die Gegeninduktivität dem Produkt $w_1 w_2$ proportional; da jedoch für die Gegeninduktivität der magnetische Leitwert offenbar kleiner ist als für die Induktivitäten, so ist

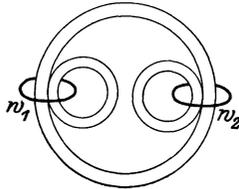


Abb. 66.

$$L_{12} < \sqrt{L_1 L_2}.$$

Im geometrisch kompliziertesten Fall liegen für jede einzelne Windung, ja für jedes Drahtstück der beiden Wicklungen andere Verhältnisse vor, so daß auch der einfache Zusammenhang zwischen den Induktivitäten und Windungszahlen nicht mehr bestehen bleibt.

Wenn bei einem Übertrager die Gegeninduktivität kleiner ist als das geometrische Mittel aus den beiden Induktivitäten, so sagt man, er zeige „magnetische Streuung“. Das Verhältnis der Gegeninduktivität zu dem geometrischen Mittel aus den Induktivitäten nennt man Kopplungsfaktor κ :

$$\kappa = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (168)$$

κ ist nach dem Gesagten immer kleiner als 1 und nur bei dem idealen streuungsfreien Übertrager gleich 1.

In vielen Fällen ist die Einführung einer andern Größe, der sogenannten „Streuzahl“ σ bequemer. Wir definieren sie durch die Gleichung

$$\sigma = 1 - \kappa^2. \quad (169)$$

§ 83. **Wirbelströme.** Nach dem Induktionsgesetz werden in jedem geschlossenen Leiter, der sich in einem zeitlich veränderlichen elektromagnetischen Felde befindet oder der sich durch ein ungleichmäßiges Feld hindurchbewegt, Ströme induziert. Unter „Wirbelströmen“ versteht man solche Induktionsströme, deren Bahnen nicht durch die Gestalt gegebener „linearer Leiter“ (Drähte) vorgeschrieben sind, sondern erst durch eine — meist komplizierte — Integration der Feldgleichungen gefunden werden müssen; zu ihnen zählen insbesondere die Induktionsströme in dickeren Metallmassen.

Soweit die Wirbelströme als unnütze Energieverbraucher unerwünscht sind, sucht man sie zu verringern, indem man die Metallmassen unterteilt. Am gebräuchlichsten ist es, die Kerne z. B. von Spulen aus Blechen, Drahtbündeln oder feinem Pulver herzustellen. In den Teilleitern entstehen natürlich auch Wirbelströme; die auf die Raumeinheit der Metallmassen entfallende Wärmeentwicklung nimmt aber mit steigender Unterteilung ab.

§ 84. **Hautwirkung.** Auch die „Hautwirkung“ oder „Stromverdrängung“ (englisch: skin effect), d. h. die Erscheinung, daß bei hohen Frequenzen das Innere der Leiter stromarm und der wirksame Widerstand daher sehr groß wird, beruht auf der Induktion von Strömen durch das eigene magnetische Feld der Leiter.

Die Theorie der Stromverdrängung führt schon in dem einfachen Fall eines sehr langen geraden Drahts auf Zylinderfunktionen. Man kann über die Hautwirkung bei Drähten

jedoch auch ohne lange Rechnungen etwas aussagen, und zwar nur auf Grund der Dimensionen der in Betracht kommenden Größen. Da die Argumente mathematischer Funktionen reine Zahlen sein müssen, lassen sich¹ alle physikalischen Gesetze durch mathematische Funktionen dimensionsloser Potenzprodukte physikalischer Größen darstellen. Diesen Satz kann man anwenden auf die Berechnung des Widerstandes R , der je Längeneinheit zu dem Gleichstromwiderstand eines geraden gutleitenden Drahtes infolge der Hautwirkung hinzukommt. R kann offenbar nur abhängen von der Dicke r des Drahts, von seiner Leitfähigkeit κ und außerdem — eben weil die Hautwirkung eine Induktionserscheinung ist — von der Frequenz f und der Permeabilität μ_0 . Aus den fünf Größen R , r , κ , f und μ_0 lassen sich aber nur die zwei dimensionslosen Potenzprodukte $R r^2 \kappa$ und $r^2 \kappa f \mu_0$ bilden. Es ist also ganz sicher

$$R = \frac{1}{r^2 \kappa} \varphi (r^2 \kappa f \mu_0), \quad (170)$$

wo φ eine rein mathematische Funktion ist. Über diese läßt sich natürlich auf Grund bloßer Dimensionsbetrachtungen nichts aussagen. Sicher ist jedoch das Folgende:

a) Wenn der Widerstand R in irgendeinem Frequenzgebiet dem Quadrate der Frequenz proportional ist, so muß

$$R \sim \frac{1}{r^2 \kappa} r^4 \kappa^2 f^2 \mu_0^2 = r^2 \kappa f^2 \mu_0^2 \quad (171)$$

sein. D. h. der Widerstand muß quadratisch mit wachsender Drahtdicke und linear mit wachsender Leitfähigkeit ansteigen. Dicke Kupferdrähte zeigen in diesem Frequenzbereich stärkere Hautwirkung als dünne aus schlechter leitendem Material.

b) Ist dagegen R der Wurzel aus der Frequenz proportional, so muß

$$R \sim \frac{1}{r^2 \kappa} r \sqrt{\kappa f \mu_0} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{f \mu_0}{\kappa}} \quad (172)$$

sein. D. h. in diesem Frequenzgebiet nimmt die Hautwirkung mit wachsender Dicke und wachsender Leitfähigkeit ab.

Die genaue Theorie zeigt, daß die Gesetzmäßigkeit (171) für niedrige, die Gesetzmäßigkeit (172) für hohe Frequenzen richtig ist; und zwar liegen die „niedrigen“ Frequenzen unterhalb der Frequenz

$$f_0 = \frac{4}{\pi r^2 \kappa \mu_0} = \frac{10}{\pi^2} \frac{1}{\left(\frac{r}{\text{mm}}\right)^2 \frac{\kappa \text{ mm}^2}{\text{Sm}}} \text{MHz} = 17,9 \frac{1}{\left(\frac{r}{\text{mm}}\right)^2 \frac{\kappa}{\kappa_0}} \text{kHz}, \quad (173)$$

die „hohen“ dagegen weit oberhalb davon; κ_0 ist die Leitfähigkeit des Kupfers. Für Kupferdrähte z. B. von 4 mm Durchmesser ist $f_0 = 4500$ Hz; bei ihnen gilt also für Tonfrequenz die Abhängigkeit (171).

Mit der Verdrängung des Stroms bei höheren Frequenzen geht eine Verdrängung des elektrischen und auch des magnetischen Feldes Hand in Hand.

§ 85. Energieinhalt einer Spule. Eine Ringspule, in deren Windungen ein Strom fließt, stellt eine gewisse Energie dar. Denn wenn man die Stromquelle abschaltet, so fließt zunächst noch eine ganze Weile ein veränderlicher Induktionsstrom I , der in jeder kleinen Zeit dt eine gewisse Wärmemenge $RI^2 dt$ entwickelt, wo R den Widerstand der Spule bedeutet. Nun ist aber mit den Bezeichnungen des § 78

$$\begin{aligned} RI^2 dt &= -w \frac{d\Phi}{dt} I dt = -w \frac{d}{dt} (\mathfrak{B} F) \cdot I dt \\ &= -F d\mathfrak{B} \cdot w I = -\mathfrak{H} d\mathfrak{B} \cdot Fl = -\mathfrak{H} d\mathfrak{B} V \end{aligned} \quad (174)$$

wo unter V das Volumen des Spulenkernes zu verstehen ist. Demnach entspricht die entwickelte Wärme der Abnahme einer Größe W_m

$$-dW_m = -\mathfrak{H} d\mathfrak{B} \cdot V, \quad (175)$$

¹ Vgl. Handbuch der Physik, herausgeg. von H. Geiger u. K. Scheel, 2, Kap. 1. Berlin: Julius Springer 1926.

die von den Feldgrößen \mathfrak{H} und \mathfrak{B} im Innern des Kernes abhängt und proportional dem Kernvolumen ist.

Da

$$\mathfrak{H} d\mathfrak{B} = \mathfrak{H} d(\mu \mathfrak{H}) = d\left(\frac{\mu \mathfrak{H}^2}{2}\right) = d\left(\frac{\mathfrak{B} \mathfrak{H}}{2}\right) \quad (176)$$

ist, gilt auch

$$dW_m = d\left(\frac{\mathfrak{B} \mathfrak{H}}{2} \cdot V\right). \quad (177)$$

D. h. ebenso wie wir im § 48 die elektrische Energie eines Flächenkondensators durch $W_e = \mathfrak{E} \mathfrak{D}/2 \cdot V$ definiert hatten, können wir jetzt die „magnetische Energie“ eines Spulenkerns durch

$$W_m = \frac{\mathfrak{B} \mathfrak{H}}{2} V \quad (178)$$

definieren. Auch dieser Ansatz stammt von Maxwell. Nach ihm sitzt also die magnetische Energie einer Ringspule in der Hauptsache nicht in ihren Windungen, also dort, wo der Strom fließt, sondern im Spulenkern, dessen Volumen sie proportional ist.

Sie kann offenbar auch ausgedrückt werden durch

$$W_m = \frac{\mathfrak{B} \mathfrak{H}}{2} V = \frac{1}{2} \Psi I = \frac{L}{2} I^2 = \frac{\Psi^2}{2L}. \quad (179)$$

Für $L = 1 \text{ H}$, $I = 1 \text{ A}$ erhält man z. B.

$$W_m = 0,5 \text{ J} = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ kWh}.$$

§ 86. Stromkreis mit Widerstand, Kapazität und Induktivität. Schaltet man eine (konstante oder veränderliche) Stromquelle E , einen Widerstand R , einen Kondensator der Kapazität C und eine Spule der Induktivität L hintereinander (der Widerstand dieser Spule sei in R enthalten), so gilt nach den Kirchhoffschen Regeln und nach dem Induktionsgesetz

$$E = RI + U + \frac{d\Psi}{dt}. \quad (180)$$

Multipliziert man mit $I = C \frac{dU}{dt}$, so erhält man

$$\begin{aligned} EI &= RI^2 + CU \frac{dU}{dt} + I \frac{d}{dt}(LI) \\ &= RI^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} CU^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} LI^2\right) = RI^2 + \frac{d}{dt}(W_e + W_m). \end{aligned} \quad (181)$$

Die von der Stromquelle aufgebrauchte Leistung wird also zum Teil (RI^2) zur Erzeugung von Wärme verwendet, zum Teil in dem Kondensator und in der Spule aufgespeichert¹.

Führen wir in der Gleichung (180) den Spulenfluß auf den Strom und diesen auf die Spannung U am Dielektrikum zurück, so erhalten wir nach Division durch C :

$$L \frac{d^2 U}{dt^2} + R \frac{dU}{dt} + \frac{U}{C} = \frac{E}{C}. \quad (182)$$

Diese Differentialgleichung ist ähnlich gebaut wie die Differentialgleichung für einen schwingenden Punkt von der Masse m , der in einem widerstehenden Mittel durch eine äußere Kraft P aus einer Gleichgewichtslage herausgezogen wird, an die er durch eine elastische Kraft gefesselt ist. Ist nämlich s sein Aus-

¹ Vgl. hierzu E. Cohn: Das elektromagnetische Feld, 2. Aufl., S. 83

schlag, d. h. seine Abweichung von der Gleichgewichtslage, Ds die durch s geweckte elastische Kraft und $p \, ds/dt$ die seiner Bewegung widerstehende Kraft, so gilt

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = P - p \frac{ds}{dt} - Ds. \tag{183}$$

In dem elektrischen Problem entspricht also der Masse m die Induktivität L , dem Reibungskoeffizient p der Widerstand R und der Proportionalitätskonstante D der elastischen Kraft der reziproke Wert der Kapazität C . Die Induktivität kann (nicht ganz scharf) als die elektrische Trägheit des Stromkreises, der Widerstand als der elektrische Reibungswiderstand, der reziproke Wert der Kapazität als die elektrische Elastizität (Federung) bezeichnet werden. Die magnetische Energie entspricht der Bewegungsenergie, die Stromwärme der Reibungswärme und die elektrische Energie der potentiellen elastischen Energie.

§ 87. Berechnung von Induktivitäten. In § 81 ergaben sich die beiden Spulenflüsse als homogene lineare Funktionen der Ströme. Man kann dieses Ergebnis verallgemeinern und zeigen, daß sich bei einem beliebigen System linearer Leiter die einzelnen Spulenflüsse als homogene lineare Funktionen der Ströme in der Form

$$\Psi_1 = L_1 I_1 + L_{12} I_2 + \dots + L_{1n} I_n \quad \text{usw.} \tag{184}$$

darstellen lassen. Hat man diese Gleichungen auf Grund des Durchflutungssatzes gefunden, so kann man die einzelnen Induktivitäten als die Koeffizienten der Ströme aus ihnen ablesen.

Ich empfehle dem Leser, nach diesem Verfahren die Induktivität einer sehr langen Doppelfreileitung zu berechnen, und zwar am bequemsten unter der vereinfachenden Voraussetzung, daß der Strom nur in der äußersten Schicht der Drähte fließt. Die Rechnung führt ohne weiteres zu der späteren Gleichung (200).

Für die Fernmeldetechnik ist noch eine zweite Methode der Induktivitätsberechnung fruchtbar, bei der man nicht die magnetischen Flüsse, sondern die „Fernwirkungen“ der einzelnen Stromfäden summiert. Dieses Rechenverfahren steht zu dem zuerst genannten etwa in demselben Verhältnis wie die Berechnung des Magnetfeldes eines Stroms nach dem Gesetz von Biot und Savart zu der Berechnung auf Grund des Durchflutungssatzes.

Es handelt sich um die folgende Rechenvorschrift, auf deren Ableitung¹ wir nicht eingehen:

$$L_{12} = \mu \iint \frac{ds_1 ds_2 \cos \varphi}{4 \pi r}. \tag{185}$$

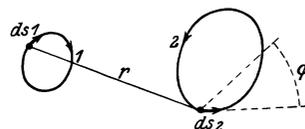


Abb. 67.

Hier bedeutet L_{12} die Gegeninduktivität zwischen zwei Stromfäden 1 und 2 (Abb. 67); ds_1 ist ein Element des ersten Stromfadens, ds_2 ein Element des zweiten, φ der Winkel zwischen den Stromrichtungen in den beiden Faden-elementen und r ihr gegenseitiger Abstand. Zu integrieren ist über beide Elemente; d. h. zuerst ist etwa das eine Element, z. B. ds_1 , festzuhalten und über den ganzen Stromfaden 2 zu integrieren; dann integriert man über den Stromfaden 1 .

Die Gleichung (185) kann natürlich nur dann angewendet werden, wenn der Verlauf der Stromfäden als bekannt vorausgesetzt werden darf. Mit unseren früheren Definitionen steht sie insofern nicht in völliger Übereinstimmung, als sie u. U. negative Gegeninduktivitäten liefern kann.

¹ Vgl. z. B. Abraham: Theorie d. Elektrizität 1, § 57. 8. Aufl. bearb. von R. Becker. Leipzig: B. G. Teubner 1930.

§ 88. Gegeninduktivität zweier paralleler Drähte. Wir wollen nach der Doppelintegralformel (185) zunächst die Gegeninduktivität zweier gerader Stromfäden (also unendlich dünner Drähte) von der Länge l und dem Abstand a berechnen (Abb. 68). Die Abstände der Fadenelemente dx_1 und dx_2 vom linken Ende der Fäden seien x_1 und x_2 , ihr gegenseitiger Abstand sei r . Der in der Formel vorkommende Winkel φ ist gleich 0° , wenn die beiden Ströme im gleichen Sinne, gleich 180° , wenn sie im entgegengesetzten Sinne laufen. Dann ist nach (185):

$$L_{12} = \pm \mu \iint \frac{dx_1 dx_2}{4\pi r} = \pm \frac{\mu}{4\pi} \iint \frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{a^2 + (x_2 - x_1)^2}}. \quad (186)$$

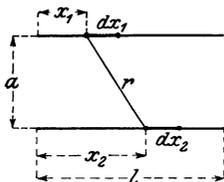


Abb. 68.

Wir denken uns zuerst x_1 festgehalten (konstant) und summieren über x_2 . Setzen wir

$$x_2 - x_1 = z, \quad \text{also} \quad dx_2 = dz, \quad (187)$$

so wird

$$L_{12} = \pm \frac{\mu}{4\pi} \int_{x_1=0}^{x_1=l} dx_1 \int_{z=-x_1}^{z=l-x_1} \frac{dz}{\sqrt{a^2 + z^2}}. \quad (188)$$

Hier kann aber das unbestimmte Integral ausgerechnet werden; es ist¹

$$\int \frac{dz}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \ln(z + \sqrt{a^2 + z^2}) + \text{const} = f(z) + \text{const}, \quad (189)$$

wie leicht durch Differentiation nachzuweisen. Also wird

$$L_{12} = \pm \frac{\mu}{4\pi} \int_0^l dx_1 [f(z)]_{-x_1}^{l-x_1}. \quad (190)$$

Wir setzen nun wieder im Minuend $l - x_1 = z$, im Subtrahend $-x_1 = z$, in beiden Gliedern also $dx_1 = -dz$ und führen die Bezeichnung ein:

$$\int f(z) dz = F(z) + \text{const}. \quad (191)$$

Dann wird nach (190):

$$L_{12} = \mp \frac{\mu}{4\pi} \left\{ [F(l - x_1)]_0^l - [F(-x_1)]_0^l \right\} = \pm \frac{\mu}{4\pi} \{F(l) + F(-l) - 2F(0)\}. \quad (192)$$

Nun gilt²

$$F(z) = \int \ln(z + \sqrt{a^2 + z^2}) dz = z \ln(z + \sqrt{a^2 + z^2}) - \sqrt{a^2 + z^2} + \text{const}; \quad (193)$$

also wird schließlich

$$\begin{aligned} L_{12} &= \pm \frac{\mu}{4\pi} \left\{ l \ln(l + \sqrt{l^2 + a^2}) - \sqrt{l^2 + a^2} \right. \\ &\quad \left. - l \ln(-l + \sqrt{l^2 + a^2}) - \sqrt{l^2 + a^2} + 2a \right\} \\ &= \pm \frac{\mu}{4\pi} \left\{ l \ln \frac{\sqrt{l^2 + a^2} + l}{\sqrt{l^2 + a^2} - l} - 2\sqrt{l^2 + a^2} + 2a \right\} \end{aligned} \quad (194)$$

¹ Man kann für das Integral auch $\mathfrak{R} \mathfrak{C} \sin \frac{z}{a} + \text{const}$ schreiben. Es besteht nämlich die Identität $\mathfrak{R} \mathfrak{C} \sin \frac{z}{a} = \ln \left(\frac{z}{a} + \sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2}} \right)$.

² Durch partielle Integration erhält man

$$\int \mathfrak{R} \mathfrak{C} \sin \frac{z}{a} dz = z \mathfrak{R} \mathfrak{C} \sin \frac{z}{a} - \int \frac{z dz}{\sqrt{a^2 + z^2}}.$$

oder, wenn man das Argument des Logarithmus mit seinem Zähler erweitert:

$$L_{12} = \pm \frac{\mu l}{2\pi} \left\{ \ln \frac{\sqrt{l^2 + a^2} + l}{a} - \sqrt{1 + \frac{a^2}{l^2} + \frac{a}{l}} \right\}. \quad (195)$$

Nun ist bei den Problemen, die in der Fernmeldetechnik interessieren, der Fadenabstand a immer klein gegenüber der Fadenlänge l ; man darf also näherungsweise setzen:

$$L_{12} = \pm \frac{\mu}{2\pi} l \left(\ln \frac{2l}{a} - 1 \right). \quad (196)$$

Dies ist zunächst nur die Formel für die Gegeninduktivität zweier paralleler Stromfäden. Sie darf aber mit guter Annäherung auch für die Gegeninduktivität zweier paralleler Drähte verwendet werden, vorausgesetzt, daß deren Durchmesser klein sind gegenüber ihrem Abstand.

§ 89. Selbstinduktivität eines Drahtes kreisförmigen Querschnitts. Auch die Selbstinduktivität eines einzelnen Drahts von der Dicke 2ρ kann nach der Formel für die Gegeninduktivität zweier Fäden berechnet werden; denn in dem Draht fließen sozusagen unendlich viele Stromfäden, die sich gegenseitig beeinflussen. Da jeder dieser Fäden nur unendlich wenig Strom führt, ist für den in der Formel vorkommenden $\ln a$ ein Mittelwert einzusetzen; dieser hängt von der Verteilung der Stromfäden im Drahtquerschnitt ab. Wir wollen zwei Sonderfälle betrachten:

1. Die Stromfäden verlaufen alle auf der Oberfläche des Drahtes. Dann kommen alle möglichen Stromfädenabstände von dem Werte Null bis zu dem Werte 2ρ vor; aus der eingehenderen Theorie¹ folgt, daß als mittlerer Fadenabstand einfach der Drahtradius ρ zu nehmen ist (Abb. 69).

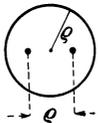


Abb. 69.

2. Die Stromfäden sind gleichmäßig über den ganzen Querschnitt verteilt. Dann ist der mittlere Abstand kleiner als im ersten Falle; die Theorie ergibt für ihn den Wert $\rho/\sqrt[4]{e} = 0,78 \rho$ (Abb. 70).

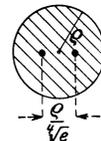


Abb. 70.

Setzen wir diese Werte ein, so erhalten wir bei Durchströmung nur der Drahtoberfläche², wenn die Drähte in Luft gespannt sind:

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} l \left(\ln \frac{2l}{\rho} - 1 \right), \quad (197)$$

bei gleichmäßiger Durchströmung dagegen

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} l \left(\ln \frac{2l}{\rho} \sqrt[4]{e} - 1 \right) = \frac{\mu_0}{2\pi} l \left(\ln \frac{2l}{\rho} - \frac{3}{4} \right). \quad (198)$$

Bildet der Strom also nur eine Haut, so ist die Induktivität ein wenig kleiner als bei gleichmäßiger Durchströmung (vgl. § 84).

§ 90. Selbstinduktivität einer Doppelleitung. Durch Vereinigung der Formeln (196) und (198) ergibt sich die Induktivität der Doppelleitung. Sie setzt sich aus den Selbstinduktivitäten der beiden Drähte für sich und ihren Gegeninduktivitäten in der folgenden Weise zusammen:

$$L = L_1 + L_2 + L_{12} + L_{21} = L_1 + L_2 + 2L_{12}. \quad (199)$$

¹ z. B. F. Breisig: Theoretische Telegraphie, 2. Aufl., § 112. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn 1924.

² Das Pluszeichen ist zu nehmen, weil die Stromfäden gleichgerichtet sind.

$2 L_{12}$ ist hier negativ und wegen der großen Fadenabstände kleiner als $L_1 + L_2$, so daß L positiv wird. Setzen wir die vorher gefundenen Werte ein, so erhalten wir bei oberflächlicher Durchströmung

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu_0}{2\pi} l \left(\ln \frac{2l}{\varrho_1} - 1 + \ln \frac{2l}{\varrho_2} - 1 - 2 \ln \frac{2l}{a} + 2 \right) \\ &= \frac{\mu_0}{\pi} l \ln \frac{a}{\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}} = 0,921 \lg \frac{a}{\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}} \cdot \frac{l}{\text{km}} \text{ mH}, \end{aligned} \quad (200)$$

bei gleichmäßiger dagegen

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu_0}{2\pi} l \left(\ln \frac{a^2}{\varrho_1 \varrho_2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\mu_0}{\pi} l \left(\ln \frac{a}{\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}} + \frac{1}{4} \right) \\ &= \left(0,921 \lg \frac{a}{\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}} + 0,1 \right) \frac{l}{\text{km}} \text{ mH}. \end{aligned} \quad (201)$$

Aus einem Vergleich der Formeln (200) und (201) kann man schließen, daß der erste Summand in der Klammer der Gleichung (201) dem magnetischen Feld im Außenraum, der zweite (viel geringere) dem magnetischen Feld im Innern der Drähte entspricht. Bei ferromagnetischem Material hat man daher zu setzen:

$$L = \left(0,921 \lg \frac{a}{\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}} + 0,1 \frac{\mu}{\mu_0} \right) \frac{l}{\text{km}} \text{ mH}. \quad (202)$$

Wegen der Induktivität anderer Gebilde, insbesondere von Spulen, verweisen wir auf die Sonderdarstellungen¹.

IV. Wechselstromschaltungen.

§ 91. Allgemeines. Unter einem „Wechselstrom“ verstehen wir einen elektrischen Strom von den folgenden Eigenschaften:

1. Die Kurve, die die Abhängigkeit seines Augenblickswerts von der Zeit darstellt, soll aus gleichen Stücken der Länge T bestehen, wo T die „Periode“ des Wechselstromes heißt.

2. Der Mittelwert seiner Stärke, genommen über eine ganze Periode, soll gleich Null sein.

Eine besondere einfache Art von Wechselstrom ist hiernach der in § 50 bis 52 näher erläuterte „Sinusstrom“:

$$i = \hat{i} \cos \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_i \right) = \hat{i} \cos (2\pi f t + \varphi_i). \quad (203)$$

Bei ihm fällt die „Periode“ mit der „Schwingungsdauer“ T zusammen.

Lagert man einem Sinusstrom von der Frequenz f Sinusströme von den Frequenzen $2f$, $3f$, . . . über, so entsteht ein wieder mit T periodischer Wechselstrom komplizierterer Form. Man unterscheidet bei einem solchen Wechselstrom die „Grundschiwingung“ der Frequenz f von den „Oberschwingungen“ der Frequenzen $2f$, $3f$, Stehen die Frequenzen der Oberschwingungen, wie hier angenommen, im Verhältnis der ganzen Zahlen zur Frequenz der Grundschiwingung, so spricht man von „harmonischen“ Oberschwingungen. Fourier hat gezeigt, daß man sich Wechselströme beliebiger Form durch Übereinanderlagerung solcher harmonischer Schwingungen erzeugen denken kann (vgl. § 366).

Unter „Gleichstrom“ verstehen wir einen Strom zeitlich konstanten Augenblickswerts. Durch Übereinanderlagerung eines Wechselstroms und eines Gleichstroms entsteht ein „Mischstrom“.

¹ z. B. E. B. Rosa und L. Cohen: Bull. Bur. Stand. 5, 90.

§ 92. Messung der Stärke von Wechselströmen. Der arithmetische Mittelwert der Stromstärke, gebildet für eine ganze Periode, der beim Wechselstrom definitionsgemäß gleich Null sein soll, kann bei einem beliebigen periodischen Strom folgendermaßen berechnet werden. Man teilt die ganze Periode T in sehr viele gleiche kleine Zeiteile dt ein. Zu jedem dieser Zeiteile, deren es im ganzen T/dt gibt, gehört eine gewisse Stromstärke. Bildet man nun die Summe dieser Stromstärken und teilt sie durch ihre Anzahl, so erhält man den arithmetischen Mittelwert M :

$$M = \int_0^T \frac{i}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T i dt.$$

Beim Sinusstrom ergibt sich auf diese Weise definitionsgemäß

$$\begin{aligned} M &= \frac{i}{\omega T} \int_0^T \cos(\omega t + \varphi_i) d(\omega t + \varphi_i) = \frac{i}{2\pi} [\sin(\omega t + \varphi_i)]_0^{2\pi} \\ &= \frac{i}{2\pi} (\sin(2\pi + \varphi_i) - \sin \varphi_i) = 0. \end{aligned} \quad (204)$$

Da $\int_0^T i dt$ die während einer Periode bewegte Elektrizitätsmenge ist, scheidet ein reiner Wechselstrom aus einem Elektrolyt während einer vollen Periode überhaupt nichts aus. Das Voltmeter ist daher zur Messung von Wechselströmen untauglich.

Auch die an den gewöhnlichen Galvanometern abgelesene Stromstärke ist gleich Null. Ihre Spule oder ihr Magnet erfährt zwar nach beiden Seiten abwechselnd Antriebe, ist aber zu träg, um ihnen zu folgen. Will man Wechselströme elektromagnetisch messen, so muß man die Trägheit der benutzten beweglichen Systeme (Drähte, Bänder, Spulen, Schleifen, Stäbchen, Membranen usw.) so herabsetzen, daß die Wechselströme imstande sind, sie zu beobachtbaren Schwingungen mit der Wechselstromfrequenz zu zwingen. Besonders stark werden diese Schwingungen, wenn die mechanische Eigenfrequenz des beweglichen Systems mit der Frequenz der Grundschwingung oder einer Oberschwingung des Wechselstromes nahezu übereinstimmt (Ausnutzung der „Resonanz“). Die Schwingungen können entweder mit dem Auge (optisches Telefon, Vibrationsgalvanometer, Oszillograph) oder mit dem Ohr (akustisches Telefon) wahrnehmbar gemacht werden.

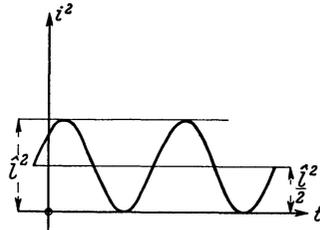


Abb. 71.

Will man durch Wechselströme einen dauernden Ausschlag erzeugen, so kann man ein Instrument nehmen, dessen Ausschlag dem Quadrate des Stromes proportional ist (z. B. ein Dynamometer, Hitzdrahtinstrument oder dergleichen). Das Quadrat eines Sinusstroms wird nach der Gleichung

$$i^2 = i^2 \cos^2(\omega t + \varphi_i) = \frac{i^2}{2} (1 + \cos 2(\omega t + \varphi_i)) \quad (205)$$

wieder durch eine Sinuslinie von der doppelten Frequenz dargestellt (Abb. 71); der Mittelwert des Quadrats i^2 während einer Periode ist aber nicht mehr wie der des Stromes selbst gleich Null, sondern, wie die Abbildung zeigt, gleich $i^2/2$. Ein unträges bewegliches System schwingt also mit der doppelten Frequenz des Sinusstroms um eine mittlere Einstellung herum, die ebenso groß ist, wie bei einem Gleichstrom der Stärke $\sqrt{i^2/2} = i/\sqrt{2}$; ein träges nimmt diese Einstellung dauernd an. Eicht man demnach die Teilung des Instruments mit Gleichstrom, so zeigt es bei Sinusstrom den Mittelwert $i/\sqrt{2}$.

Die Wurzel aus dem Mittelwert des Quadrates der Stromstärke heißt bei jedem Wechselstrom „effektive Stromstärke“; beim Sinusstrom ist sie gleich $i/\sqrt{2}$.

Daß $i^2/2$ der durchschnittliche Wert von i^2 während einer Periode ist, kann aus (205) leicht auch rechnerisch abgeleitet werden: es ist

$$\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{i^2}{2T} \left\{ \int_0^T dt + \int_0^T \cos 2(\omega t + \varphi_i) dt \right\}. \quad (206)$$

Das zweite Integral ist aber gleich Null und das erste gleich T , so daß $i^2/2$ herauskommt.

§ 93. Die Klemmenleistung für Wechselstrom. Die in der Zeiteinheit durch die Ausgangsklemmen eines Erzeugers oder durch die Eingangsklemmen eines Verbrauchers strömende Energie, also die Klemmenleistung, ist bei jedem — konstanten oder beliebig veränderlichen — Strom gleich dem Produkt aus der Klemmenspannung und dem Klemmenstrom

$$n = u i \quad (207)$$

und hat den im § 31 festgelegten Richtungssinn.

Variieren sowohl die Spannung wie der Strom sinusförmig:

$$\left. \begin{aligned} u &= \hat{u} \cos(2\pi f t + \varphi_u), \\ i &= \hat{i} \cos(2\pi f t + \varphi_i), \end{aligned} \right\} \quad (208)$$

wobei die positiven Werte der Spannung und des Stromes wie üblich (§ 11) festgelegt sein mögen, so ist die Klemmenleistung gleich

$$u i = \hat{u} \hat{i} \cos(2\pi f t + \varphi_u) \cos(2\pi f t + \varphi_i).$$

Nun gilt aber die Rechenregel

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta));$$

man kann also auch schreiben

$$u i = \frac{\hat{u} \hat{i}}{2} (\cos(4\pi f t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(\varphi_u - \varphi_i)), \quad (209)$$

oder wenn wir die Effektivwerte vorübergehend durch Buchstaben ohne Index

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}, \quad I = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$$

und die Phasenverschiebung $\varphi_u - \varphi_i$ zwischen Strom und Spannung durch φ bezeichnen:

$$u i = U I \cos \varphi + U I \cos(2\pi \cdot 2f \cdot t + \varphi_u + \varphi_i). \quad (210)$$

Die Klemmenleistung besteht also aus einem zeitlich konstanten und einem mit der doppelten Frequenz $2f$ und dem Scheitelwert UI schwingenden Anteil (Abb. 72). Den zeitlich konstanten Anteil $UI \cos \varphi$ nennt man „mittlere“ oder

„Wirkleistung“ (d. h. wirksame Leistung), den Scheitelwert UI des schwingenden Anteils „Scheinleistung“. Der zeitliche Mittelwert des schwingenden Anteils, genommen über eine ganze Zahl von Perioden, ist natürlich gleich Null, so daß bei Betrachtung längerer Zeiträume nur die Wirkleistung zu berücksichtigen ist, die man deshalb auch „Leistung“ (ohne Zusatz) nennt.

Daß bei der Wirkleistung der Faktor $\cos \varphi$ auftreten muß, den man auch „Leistungsfaktor“ nennt, ist leicht zu verstehen. Ist nämlich die Phasendifferenz zwischen Spannung

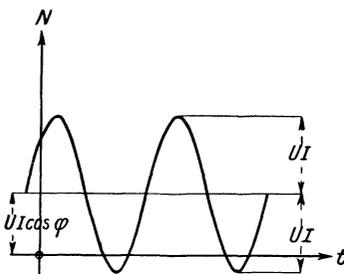


Abb. 72.

und Strom gleich Null oder gleich 180° , so wechseln beide Größen immer gleichzeitig ihr Vorzeichen. Die Energie strömt also nach § 31 immer in derselben Richtung; ob sie vom Erzeuger zum Verbraucher oder in der umgekehrten Richtung strömt, läßt sich leicht feststellen, wenn man die Richtungen der Zählpfeile beachtet.

Ist dagegen die Phasendifferenz zwischen Spannung und Strom gleich 90° oder gleich 270° , so haben die Spannung und der Strom in jeder Periode während zweier Viertelschwingungsdauern gleiches und in den dazwischenliegenden Zeiträumen ungleiches Vorzeichen (Abb. 41, § 53). Die Energie strömt also während zweier Viertel der Periode aus dem Erzeuger in den Verbraucher, während der beiden übrigen Viertel dagegen in der umgekehrten Richtung, so daß sie nur hin- und herpendelt.

§ 94. **Wechselstromkreis mit Widerstand und Induktivität.** Eine Spule vom Widerstande R und der Induktivität L werde an eine sinusförmige Wechselspannung $e = \hat{e} \cos(2\pi ft + \varphi_e) = \hat{e} \cos(\omega t + \varphi_e)$ angeschlossen. Dann ist nach dem Induktionsgesetz (§ 78) in jedem Augenblicke

$$e = Ri + L \frac{di}{dt}. \quad (211)$$

Wir vermuten, daß der von der Spannung e in dem Kreise erzwungene Strom i schließlich ebenfalls sinusförmig wird, und zwar mit derselben Frequenz f , lassen jedoch die Möglichkeit offen, daß seine Phase gegen die der Spannung um einen gewissen Winkel verschoben ist; d. h. wir setzen für alle Zeiten

$$i = \hat{i} \cos(2\pi ft + \varphi_i) = \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (212)$$

und untersuchen, wie groß \hat{i} und φ_i sein müssen, damit unsere Differentialgleichung erfüllt ist.

Setzen wir (212) in (211) ein, so erhalten wir

$$\hat{e} \cos(\omega t + \varphi_e) = R \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_i) - \omega L \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i), \quad (213)$$

also¹ für $t = 0$:

$$\hat{e} \cos \varphi_e = R \hat{i} \cos \varphi_i - \omega L \hat{i} \sin \varphi_i \quad (214)$$

und für $t = \frac{T}{4}$:

$$\hat{e} \sin \varphi_e = R \hat{i} \sin \varphi_i + \omega L \hat{i} \cos \varphi_i. \quad (215)$$

Quadriert und addiert man diese beiden Gleichungen, so erhält man

$$\hat{e}^2 = (R^2 + \omega^2 L^2) \hat{i}^2,$$

oder

$$\hat{i} = \frac{\hat{e}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}. \quad (216)$$

Setzt man in (213) $\omega t = 90^\circ - \varphi_e$, so folgt

$$0 = R \hat{i} \sin(\varphi_e - \varphi_i) - \omega L \hat{i} \cos(\varphi_e - \varphi_i),$$

also

$$\operatorname{tg}(\varphi_e - \varphi_i) = \frac{\omega L}{R}. \quad (217)$$

Unsere Differentialgleichung (211) ist daher erfüllt durch den Ansatz

$$i = \frac{\hat{e}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t + \varphi_e - \arctg \frac{\omega L}{R}\right). \quad (218)$$

D. h.: Die erzwingende Wechselspannung kann einen Wechselstrom derselben Frequenz unterhalten, der gegen sie verschoben ist um einen Winkel $\varphi = \varphi_e - \varphi_i$,

¹ Da die Gleichung (213) für alle Zeiten gilt, kann man zu ihr auch die Gleichung hinzunehmen, die sich ergibt, wenn man sie Glied für Glied nach t differenziert.

dessen Tangens gleich $\frac{\omega L}{R}$ ist. Die Anfangsphase von i ist kleiner als die von e ; i „läuft hinter e her“. Der Strom ist kleiner als bei einer induktionsfreien Spule; die Induktivität wirkt also widerstandvergrößernd. $\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$ heißt auch „Impedanz“¹.

Die gefundene Lösung gilt entsprechend unserer Ableitung nur für den „eingeschwungenen Zustand“. Beim Einschalten einer Wechselspannung treten zunächst besondere kompliziertere „Einschaltvorgänge“ auf. Sie verschwinden erst im Laufe der Zeit; dann stellt sich der von uns berechnete stationäre oder Beharrungszustand ein.

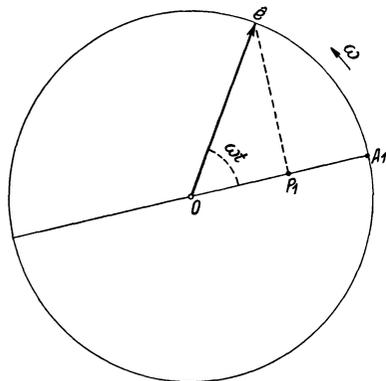


Abb. 73.

bewegt sich demnach die Projektion P_1 seiner Spitze auf der Geraden durch O und A_1 so hin und her, daß die Länge der Strecke OP_1 beständig proportional der augenblicklichen Spannung e ist.

Entsprechend kann, wenn wir wieder den Ansatz (212) machen, der Spannungsfall im Widerstand R

$$Ri = R\hat{i} \cos(\omega t + \varphi_i)$$

dargestellt werden durch einen Pfeil von der konstanten Länge $R\hat{i}$, der um den konstanten Winkel $-\varphi_i$ hinter dem Pfeil von e zurückbleibt (Abb. 74)². Denn die Projektion dieses zweiten Pfeils auf die Gerade durch O und A_2 ist in jedem Augenblick

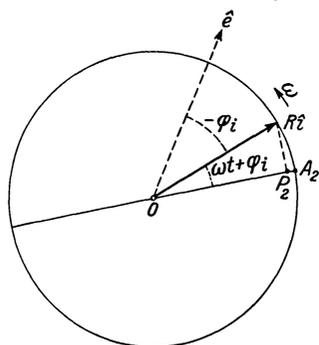


Abb. 74.

$$R\hat{i} \cos(\omega t + \varphi_i) = Ri.$$

Endlich kann auch der induktive Spannungsfall

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} &= -\omega L \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i) \\ &= \omega L \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_i + 90^\circ) \end{aligned}$$

nach Abb. 75 dargestellt werden durch einen Pfeil von der konstanten Länge $\omega L \hat{i}$, der wieder mit derselben Winkelgeschwindigkeit rotiert, aber dem Pfeil des Spannungsfalls Ri um 90° vorausläuft.

Die Augenblickswerte e , Ri und $L \frac{di}{dt}$ können also dargestellt werden durch

¹ Die Bezeichnung „Scheinwiderstand“ halte ich nicht für zweckmäßig. Vgl. § 12 und 104.

² Wir tragen in unsere Zeichnungen immer nur die positiven Beträge der Längen, Winkel usw. ein. In unserm Fall ist φ_i negativ (nach dem vorigen Paragraphen), $-\varphi_i$ also positiv.

die Projektionen der Spitzen dreier starr miteinander verbundener Pfeile oder „Vektoren“, die sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um einen Pol herumdrehen.

Wir wollen nun auf diese drei Pfeile das erweiterte Ohmsche Gesetz (211) anwenden. Es sagt aus, daß in jedem Augenblick die Projektion des e -Vektors gleich der algebraischen Summe der Projektionen des Ri -Vektors und des $L di/dt$ -Vektors ist:

$$OP_1 = OP_2 - P_3O.$$

Dies ist aber, wie Abb. 76 zeigt, dauernd dann und nur dann erreicht, wenn die drei Pfeile einen geschlossenen Linienzug, in unserem Falle also ein rechtwinkliges Dreieck bilden. In der Tat folgen jetzt aus der Abbildung unmittelbar die alten Beziehungen:

$$\hat{e}^2 = R^2 \hat{i}^2 + \omega^2 L^2 \hat{i}^2 \tag{219}$$

und

$$\text{tg } \varphi_i = - \frac{\omega L}{R} = - \text{tg } \varphi. \tag{220}$$

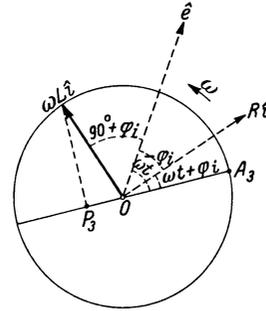


Abb. 75.

Denkt man sich an Stelle der Pfeile Kräfte, so sagt das erweiterte Ohmsche Gesetz nichts weiter aus, als daß sich diese Kräfte das Gleichgewicht halten. Während bei Gleichstrom die einzelnen Spannungen „arithmetisch“ zu addieren sind, muß man bei andauernden Wechselströmen die Pfeile wie Kräfte, d. h. „geometrisch“, mit Berücksichtigung ihrer Richtung, zusammensetzen.

Obleich man bei der Begründung des zeichnerischen Verfahrens von den Projektionen der rotierenden Pfeile, also den Augenblickswerten, ausgehen muß und auch nur diese in das Ohmsche Gesetz eingesetzt werden dürfen, so erhält man doch die einzig interessierenden Gleichungen, nämlich die für das Verhältnis i/\hat{e} und für die Phasendifferenz φ , unmittelbar aus dem Diagramm, ohne daran denken zu müssen, daß sich dieses eigentlich um den Pol mit der Winkelgeschwindigkeit ω herumdreht. Praktisch rechnet man daher so, als ob die Pfeile ruhten¹.

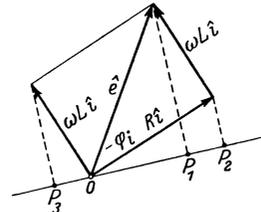


Abb. 76.

Es ist üblich, die Pfeile als „Vektoren“ zu bezeichnen. Man beachte jedoch, daß die Richtung dieser Vektoren, die nur als Hilfsmittel der Darstellung anzusehen sind, mit der etwaigen Richtung der dargestellten physikalischen Größen (z. B. der Stromdichte) nichts zu tun haben.

§ 96. Der Lehrsatz von Euler. Neben der graphischen Methode wird in der Elektrotechnik in ausgedehntem Maße die sogenannte komplexe Rechnung angewandt². Ihre Grundlage bildet ein von Euler aufgestellter Satz, der häufig auch als „Moivrescher Lehrsatz“ bezeichnet wird. Er sagt aus, daß die Umwandlung

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi \tag{221}$$

richtig ist. Dabei bedeutet φ eine beliebige Zahl; j ist durch die Gleichung

$$j^2 = -1 \tag{222}$$

definiert. Die große Erleichterung, die dieser Lehrsatz mit sich bringt, beruht darauf, daß er erlaubt, die bei Wechselstromproblemen auftretenden trigono-

¹ Man kann auch die Pfeile von vornherein ruhen und dafür zunächst eine „Zeitlinie“ umlaufen lassen.

² Kennelly, A. E.: Transact. Amer. Inst. El. Eng. 10, 175 (1893).

metrischen Funktionen Kosinus und Sinus durch die Exponentialfunktion zu ersetzen, mit der man bequemer rechnen kann.

Wir werden die Funktion $e^{j\varphi}$, also die Exponentialfunktion mit imaginärem Exponent, immer durch das Zeichen $\underline{\angle\varphi}$ abkürzen¹:

$$e^{j\varphi} \equiv \underline{\angle\varphi}, \quad (223)$$

so daß der Eulersche Lehrsatz die Form

$$\underline{\angle\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi \quad (224)$$

annimmt.

Für die Funktion $\underline{\angle\varphi}$, die wir auch „Versorfunktion“ nennen, gelten nach ihrer Definition (223) die folgenden Rechenregeln:

$$\left. \begin{aligned} \underline{\angle\varphi_1 + \varphi_2} &= \underline{\angle\varphi_1} \underline{\angle\varphi_2}, & (\underline{\angle\varphi})^2 &= \underline{\angle^2\varphi}, \\ \underline{\angle\varphi_1 - \varphi_2} &= \frac{\underline{\angle\varphi_1}}{\underline{\angle\varphi_2}}, & \sqrt{\underline{\angle\varphi}} &= \underline{\angle\varphi/2}, \end{aligned} \right\} \quad (225)$$

$$\frac{d}{d\varphi} \underline{\angle\varphi} = j \underline{\angle\varphi}, \quad \int \underline{\angle\varphi} d\varphi = \frac{1}{j} \underline{\angle\varphi} = -j \underline{\angle\varphi}. \quad (226)$$

Wir merken uns weiter noch, daß

$$\underline{\angle 0^\circ} = 1, \quad \underline{\angle 90^\circ} = j, \quad \underline{\angle \pm 180^\circ} = -1, \quad \underline{\angle -90^\circ} = -j. \quad (227)$$

§ 97. Lösung der Schaltaufgabe mit Hilfe des Eulerschen Lehrsatzes. Wir betrachten wieder den Kreis mit Widerstand R und Induktivität L , auf den eine andauernde Wechsel-EMK $e = \hat{e} \cos(\omega t + \varphi_e)$ einwirkt. Wie im § 94 vermuten wir, daß sich der Strom in der Form $i = \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_i)$ darstellen läßt; es muß also wie dort die Gleichung

$$\hat{e} \cos(\omega t + \varphi_e) = R \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_i) + L \hat{i} \frac{d}{dt} \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (228)$$

erfüllt sein.

Auch jetzt bringen wir zum Ausdruck, daß diese Gleichung für alle Zeiten gilt; wir verfahren aber ein wenig anders als im § 94, indem wir fordern, daß (228) auch richtig bleibt, wenn wir die Zeit t um $T/4$ verkleinern. Nun ist

$$\cos\left(\omega\left(t - \frac{T}{4}\right) + \varphi\right) = \cos(\omega t + \varphi - 90^\circ) = \sin(\omega t + \varphi);$$

es muß also auch

$$\hat{e} \sin(\omega t + \varphi_e) = R \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i) + L \hat{i} \frac{d}{dt} \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (229)$$

erfüllt sein. Addieren wir diese Gleichung, nachdem wir sie mit j multipliziert haben, zu der Gleichung (228), so erhalten wir nach dem Eulerschen Lehrsatz

$$\hat{e} \underline{\angle\omega t + \varphi_e} = R \hat{i} \underline{\angle\omega t + \varphi_i} + L \hat{i} \frac{d}{dt} \underline{\angle\omega t + \varphi_i}, \quad (230)$$

oder nach der Rechenregel (226) für das Differenzieren der Versorfunktion

$$\hat{e} \underline{\angle\omega t + \varphi_e} = (R + j\omega L) \hat{i} \underline{\angle\omega t + \varphi_i}$$

oder endlich, wenn wir die ganze Gleichung durch $\underline{\angle\omega t}$ dividieren,

$$\hat{e} \underline{\angle\varphi_e} = (R + j\omega L) \hat{i} \underline{\angle\varphi_i}. \quad (231)$$

¹ Das Zeichen $\underline{\angle}$ ist zuerst von A. E. Kennelly benutzt worden [El. World, 23, 17 (1894)]. Im Auslande schreibt man auch $\cos \varphi + j \sin \varphi \equiv \text{cis } \varphi$.

Hier empfiehlt es sich, die Größen R und L gemäß den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} R &= r \cos \varphi, \\ \omega L &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (232)$$

durch zwei neue reelle Größen r und φ zu ersetzen. Wir können dann den Eulerschen Lehrsatz auch auf den Widerstand und die Induktivität des Kreises anwenden, d. h.

$$R + j \omega L = r (\cos \varphi + j \sin \varphi) = r \underline{\angle \varphi} \quad (233)$$

schreiben. Damit wird

$$\hat{e} \underline{\angle \varphi_e} = r \underline{\angle \varphi} \cdot \hat{i} \underline{\angle \varphi_i} \quad (234)$$

oder

$$\hat{e} = r \hat{i} \underline{\angle \varphi + \varphi_i - \varphi_e}. \quad (235)$$

Hier ist \hat{e} als Scheitelwert reell und positiv. Auch die rechte Seite der Gleichung ist daher reell und positiv, und es wird

$$\varphi + \varphi_i - \varphi_e = 0 \quad (236)$$

und

$$\hat{e} = r \hat{i}. \quad (237)$$

In diesen beiden Gleichungen ist aber die ganze Lösung der Aufgabe enthalten. Denn aus den beiden Gleichungen (232) folgt durch Quadrieren und Addieren

$$R^2 + \omega^2 L^2 = r^2,$$

durch Dividieren

$$\frac{\omega L}{R} = \operatorname{tg} \varphi,$$

also nach (237)

$$\hat{i} = \frac{\hat{e}}{r} = \frac{\hat{e}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad (238)$$

und nach (236)

$$\operatorname{tg}(\varphi_e - \varphi_i) = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R}. \quad (239)$$

Der Augenblickswert des Stroms ist nach (212)

$$i = \frac{\hat{e}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \left(\omega t + \varphi_e - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega L}{R} \right). \quad (240)$$

Wie man sieht, erlaubt der Eulersche Lehrsatz unser Wechselstromproblem in äußerst einfacher Weise zu lösen. Von „Symbolik“ ist bis jetzt keine Rede: wir haben nur von einem mathematischen Satz Gebrauch gemacht.

§ 98. **Komplexe Spannungen, Ströme und Widerstände.** Die komplexe Rechnung wäre nicht so fruchtbar, wie sie es tatsächlich ist, wenn man immer so umständlich wie im vorigen Paragraph verfahren müßte. Berechnen will man doch fast immer nur die effektiven Werte der Ströme und Spannungen und die Phasenverschiebungen zwischen ihnen. Für die Gleichung (234) kann man aber auch schreiben

$$\frac{\hat{e}}{\sqrt{2}} \underline{\angle \varphi_e} = r \underline{\angle \varphi} \cdot \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \underline{\angle \varphi_i}.$$

Die Größe

$$\mathfrak{S} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \underline{\angle \varphi_i} = I \underline{\angle \varphi_i} = |\mathfrak{S}| \underline{\angle \varphi_i} \quad (241)$$

läßt sich also aus den gegebenen Größen

$$\mathfrak{E} = \frac{\hat{e}}{\sqrt{2}} \angle \varphi_e = E \angle \varphi_e = |\mathfrak{E}| \angle \varphi_e, \quad (242)$$

$$\mathfrak{R} = r \angle \varphi = |\mathfrak{R}| \angle \varphi, \quad (243)$$

nach der einfachen Gleichung

$$\mathfrak{S} = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{R}} \quad (244)$$

berechnen.

Wir nennen \mathfrak{S} den komplexen Strom, \mathfrak{E} die komplexe EMK und \mathfrak{R} den komplexen Widerstand. Wirkt also auf einen Stromkreis von dem (aus reinem Widerstand und Induktivität gebildeten) komplexen Widerstand \mathfrak{R} eine komplexe elektromotorische Kraft \mathfrak{E} , so entsteht ein komplexer Strom, der gleich dem Verhältnis von \mathfrak{E} zu \mathfrak{R} ist. Das Ohmsche Gesetz gilt demnach auch für sinusförmigen Wechselstrom, wenn man alle Größen als komplex voraussetzt.

Das Rechnen mit komplexen Strömen, Spannungen und Widerständen ist zwar ein „symbolisches“ Verfahren. Es läßt sich aber trotzdem unmittelbar auf jede praktische Aufgabe anwenden. Ist z. B.

$$\mathfrak{E} = 100 \text{ V} \angle 0^\circ, \quad \mathfrak{R} = 500 \Omega \angle 30^\circ,$$

so ist

$$\mathfrak{S} = \frac{100 \text{ V} \angle 0^\circ}{500 \Omega \angle 30^\circ} = 0,2 \text{ A} \angle -30^\circ.$$

In dieser Angabe liegt alles, was wir wissen wollen, die Stärke des Stroms und seine Phasenverschiebung gegen die elektromotorische Kraft. Die komplexen Größen sind also keine Zwischengrößen, die wir erst wieder durch Übergang zu reellen Zahlen deuten müßten, sondern (wie die Pfeile des graphischen Verfahrens) bereits das Ziel der Rechnung.

Ist es uns in Ausnahmefällen um die Augenblickswerte der komplexen Ströme usw. zu tun, so brauchen wir nach den Definitionen (241) und (242) und dem Eulerschen Lehrsatz die komplexen Werte nur mit $\sqrt{2} \angle \omega t$ zu multiplizieren und ihre reellen Teile zu nehmen.

§ 99. Umrechnungen. In dem letzten Zahlenbeispiel haben wir vorausgesetzt, der komplexe Widerstand des Kreises sei in der Form

$$\mathfrak{R} = 500 \Omega \angle 30^\circ$$

gegeben. Diese „polare“ Darstellung bekommt man aber gewöhnlich erst durch eine Umrechnung; denn unmittelbar gegeben sind die Komponenten R und ωL .

Bei irgendeiner beliebigen komplexen Größe

$$\mathfrak{R} = |\mathfrak{R}| \angle \varphi = |\mathfrak{R}| \cos \varphi + j |\mathfrak{R}| \sin \varphi = R + j R' \quad (245)$$

nennen wir $|\mathfrak{R}|$ den „Betrag“ (auch den „Modul“), φ die „Phase“ (auch den „Winkel“ oder das „Argument“), R den reellen oder Wirkteil (die „reelle Komponente“), R' den imaginären oder Blindteil (die „imaginäre Komponente“). Da

$$|\mathfrak{R}| \cos \varphi = R, \quad |\mathfrak{R}| \sin \varphi = R',$$

ergeben sich die „polaren“ Komponenten aus den rechtwinkligen nach:

$$|\mathfrak{R}| = \sqrt{R^2 + R'^2} \quad \text{und} \quad \text{tg } \varphi = \frac{R'}{R}. \quad (246)$$

Die erste Gleichung ist jedoch zur Berechnung von $|\mathfrak{R}|$ mit dem Rechenschieber nicht recht geeignet. Man bestimmt daher¹ am besten zuerst φ nach der zweiten Gleichung und dann $|\mathfrak{R}|$ nach einer der beiden Gleichungen

$$|\mathfrak{R}| = \frac{R}{\cos \varphi} \quad \text{oder} \quad |\mathfrak{R}| = \frac{R'}{\sin \varphi}. \quad (247)$$

¹ W. H. Grinstead hat für diese Rechnung einen besonderen Schieber entwickelt. ETZ 51, 1401 (1930).

Daraus ergibt sich die folgende einfache Vorschrift für die Berechnung mit dem Rechenschieber:

1. Man drehe die Zunge des Schiebers um, so daß die logarithmisch-trigonometrischen Teilungen ablesbar werden, stelle das eine Ende der Tangenteilung an der unteren Stabteilung auf den größeren¹ der beiden Teile (R oder R') und lese mit Hilfe des Läufers an dem kleineren den „vorläufigen Winkel α “ ab. Ist die Ablesung nicht möglich, so hat man das falsche Ende der Tangenteilung genommen.

2. Das weitere Verfahren richtet sich nach der Beschaffenheit der Sinusteilung.

a) Geht diese von $34'$ bis 90° , so schiebe man den Läuferstrich an der oberen Stabteilung über die kleinere Komponente (R oder R'), lasse mit ihm auf der Sinusteilung den Winkel α zusammenfallen und lese am Ende der Sinusteilung an der oberen Stabteilung den Betrag ab².

b) Geht die Sinusteilung von $5^\circ 44'$ bis 90° , so lasse man den Läufer stehen und verschiebe nur die Zunge, bis der Winkel α auf der Sinusteilung mit dem Läuferstrich zusammenfällt. Den Betrag findet man dann wieder am Ende der Sinusteilung, diesmal aber an der unteren Stabteilung.

3. Man fasse die beiden Komponenten R und R' als rechtwinklige Komponenten eines Punktes P auf (Abb. 77), denke die Verbindungslinie PO mit dem Nullpunkt gezogen und nenne den Winkel unter 45° , den PO mit der nächsten Achse bildet, „ α “. Dann ist der Winkel zwischen PO und der R -Achse der gesuchte Phasenwinkel φ .

Bei der Feststellung des Betrags ist zu beachten, daß er immer größer ist als die größere Komponente, aber kleiner als ihr $\sqrt{2}$ -faches.

Beispiele (vgl. die 3 Vektoren der Abb. 77):

a) Es sei R gleich -25 , $R' = 42$. Stellt man das rechte Ende der Tangenteilung auf 42 ein, so liest man bei 25 den Winkel $\alpha = 30^\circ 46'$ ab. Stellt man dann im Falle a) den Winkel $30^\circ 46'$ der Sinusteilung auf den Wert 25 der oberen rechten Teilung, so liest man am Ende der Sinusteilung $|\Re| = 49$ ab. Nach der Abbildung ist $\varphi = 90^\circ + \alpha = 120^\circ 46'$.

b) Es sei $R = -95$; $R' = -120$. Jetzt muß man das linke Ende der Tangenteilung auf 120 einstellen; bei 95 liest man $\alpha = 38^\circ 22'$ ab. Stellt man diesen Winkel an der Sinusteilung auf 95, so erhält man $|\Re| = 153$. Ferner ergibt sich $\varphi = -(90^\circ + \alpha) = -128^\circ 22'$.

c) Es sei $R = 6$; $R' = -120$. Dann läßt sich α auf der Tangenteilung nicht mehr finden, wohl aber bei den Schiebern mit enger Sinusteilung auf dieser. Man verfährt wie vorher bei der Tangenteilung und findet $\alpha = 2^\circ 52'$. Bei Schiebern mit weiter Sinusteilung kann man nach

$$\alpha \approx \text{tg } \alpha = \frac{1}{20} = \frac{57,3^\circ}{20} = 2^\circ 52'$$

rechnen (oder die „ST-Teilung“ benutzen). Bei einem so kleinen Winkel kann man den Betrag³ gleich der größeren Komponente setzen, so daß sich schließlich

$$\Re \approx 120 \angle -(90^\circ - \alpha) = 120 \angle -87^\circ 8'$$

ergibt.

§ 100. Kreise mit Kapazitäten. Für einen unverzweigten Kreis, der außer einem Wirkwiderstand und einer Induktivität noch eine Kapazität enthält, gilt nach § 86

$$e = u + Ri + L \frac{di}{dt}, \tag{248}$$

¹ Ohne Rücksicht auf das Vorzeichen.

² Die größere Komponente muß dann dem Winkel $90^\circ - \alpha$ gegenüber liegen.

³ Der Betrag kommt bei dieser Art der Berechnung

für $\alpha =$	1	2	3	4	5	6 ⁰
um	0,2	0,6	1,4	2,4	3,8	5,5 % ₀

zu klein heraus.

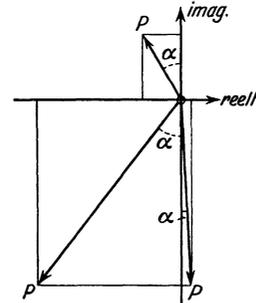


Abb. 77.

wenn wir den Augenblickswert der Spannung am Kondensator mit u bezeichnen. Außerdem ist nach der Definition der Kapazität

$$i = C \frac{du}{dt}. \quad (249)$$

Beim graphischen Verfahren hat man also außer den Pfeilen der treibenden EMK, des Ohmschen und des induktiven Potentialfalls auch noch den Pfeil des Potentialfalls im Dielektrikum des Kondensators zu berücksichtigen, der nach (249) um 90° hinter dem des Stroms zurückbleibt.

Den Eulerschen Lehrsatz kann man wie im § 97 auf die Gleichungen (248) und (249) anwenden. Aus (249) folgert man:

$$\hat{i} \angle \omega t + \varphi_i = C \cdot \frac{d}{dt} (\hat{u} \angle \omega t + \varphi_u) = j\omega C \hat{u} \angle \omega t + \varphi_u,$$

also

$$\frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \angle \varphi_i = j\omega C \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \angle \varphi_u \quad (250)$$

oder symbolisch

$$\mathfrak{I} = j\omega C \mathfrak{U}.$$

Führt man dies in die komplexe Gleichung ein, die der Gleichung (248) entspricht, so erhält man

$$\mathfrak{I} = \frac{\mathfrak{E}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}. \quad (251)$$

§ 101. Verwickeltere Schaltungen. Ebenso wie das Ohmsche Gesetz können auch die Kirchhoffschen Regeln in komplexer Form auf Netzwerke mit beliebigen Schaltelementen angewandt werden. Die früher abgeleiteten Gleichungen für die Hintereinander- und Parallelschaltung von Widerständen, für den Spannungsteiler, die Wheatstonesche Brücke, die Verwandlung von Dreiecken in Sterne usw. bleiben unverändert gültig; man hat sie nur mit deutschen Buchstaben anzuschreiben und alle Größen als komplex anzusehen.

§ 102. Zeichnerisches Verfahren und komplexe Rechnung. Seit jeher veranschaulicht man die komplexen Größen in einer komplexen Zahlenebene: auf einer x -Achse trägt man die reellen, auf einer y -Achse die imaginären Komponenten auf. Jedem komplexen Wert entspricht ein bestimmter Punkt der Ebene; mit diesem fällt die Spitze des Pfeils zusammen, der bei der zeichnerischen Methode die betreffende Größe darstellt.

Bei den wirklich wechselnden Größen wie der Spannung und dem Strom kommt es nur auf die Phasen-Unterschiede an; die absoluten Phasen sind gleichgültig. Dagegen kommen den komplexen Widerständen und Leitwerten als zeitlich konstanten Größen absolute Phasen zu. Da ihre reellen Bestandteile immer positiv sind, liegen die sie veranschaulichenden Punkte immer im ersten oder vierten Quadranten der komplexen Ebene¹.

§ 103. Zeichnerische Bestimmung der komplexen Größe, die zu einer gegebenen reziprok ist; Inversion. Häufig liegt die Aufgabe vor, auf zeichnerischem Wege zu einem gegebenen Widerstand \mathfrak{R} den Leitwert $\mathfrak{G} = 1/\mathfrak{R}$ zu bestimmen.

Aus der Definition von \mathfrak{G} folgt zunächst, daß die Phase des Leitwerts der Phase des Widerstands entgegengesetzt ist. Die geraden Linien durch den Nullpunkt, auf denen die Punkte \mathfrak{R} und \mathfrak{G} liegen (Abb. 78), sind also Spiegelbildér bezüglich der reellen Achse.

„Konjugiert“ nennt man zwei komplexe Werte, wenn sie denselben Betrag, aber entgegengesetzt gleiche Phasen haben, also zur reellen Achse spiegelbildlich liegen. Wir bezeichnen den konjugierten Wert durch einen Stern. In der kom-

¹ Grundsätzliches über die Frage des Verhältnisses der ebenen Vektorrechnung zur komplexen Rechnung bei A. Byk: Forschung und Technik, S. 84, Berlin: Julius Springer 1930.

plexen Ebene liegt also der Widerstand \Re auf derselben Geraden durch den Nullpunkt wie der konjugierte Wert \mathcal{G}^* (Abb. 78)¹.

Die Größe $|\mathcal{G}|$ des Leitwerts kann man durch die „Polarenkonstruktion“ finden (Abb. 79): Man schlägt um den Nullpunkt O einen Kreis, dessen Halb-

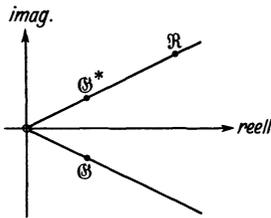


Abb. 78.

messer p in dem für den Widerstand \Re benutzten Maßstab einem runden

Widerstandszahlenwert entspricht, legt von \Re aus die Berührenden $\Re T_1$ und $\Re T_2$ an den Kreis und verbindet T_1 mit T_2 . Den Schnittpunkt der Linien $O\Re$ und $T_1 T_2$ nennen wir

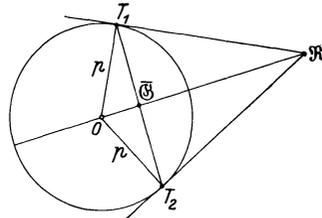


Abb. 79.

$\bar{\mathcal{G}}$. Dann ist, wie wir behaupten, der gesuchte Betrag $|\mathcal{G}|$ gleich $|\bar{\mathcal{G}}|/p^2$. Der Beweis folgt aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke $O T_1 \bar{\mathcal{G}}$ und $O T_1 \Re$, die ja den Winkel bei O gemeinsam haben; denn es gilt

$$\frac{|\bar{\mathcal{G}}|}{p} = \frac{p}{|\Re|}, \text{ also } |\mathcal{G}| = \frac{1}{|\Re|} = \frac{|\bar{\mathcal{G}}|}{p^2}. \quad (252)$$

Man nennt den Kreis „Inversionskreis“, seinen Halbmesser „Inversionsradius“ oder „Inversionspotenz“, seinen Mittelpunkt „Inversionsmittelpunkt“.

Rückt der Widerstand \Re auf den Inversionskreis selbst, so wandert der Leitwert \mathcal{G}^* offenbar ebenfalls dahin; dem Werte $|\Re| = \infty$ entspricht der Wert $|\mathcal{G}| = 0$ und dem Werte $|\Re| = 0$ der Wert $|\mathcal{G}| = \infty$.

Häufig liegt die kompliziertere Aufgabe vor, den Widerstand

$$\Re_2 = \frac{\Re_0^2}{\Re_1} \quad (253)$$

aus den gegebenen Widerständen \Re_0 und \Re_1 zu konstruieren. Dann hat man als Inversionshalbmesser den Betrag $|\Re_0|$ zu nehmen. Der Punkt $\bar{\Re}_2$, den man unmittelbar durch die Polarenkonstruktion erhält (Abb. 80), ist an der Strecke $O \Re_0$ zu spiegeln. Denn die Phase von \Re_0 muß nach (253) gleich dem arithmetischen Mittel der Phasen von \Re_1 und $\bar{\Re}_2$ sein. Wir wollen in der Folge die durch die Gleichung (253) gestellte Aufgabe als „Inversion des Widerstands \Re_1 mit der Potenz \Re_0 “ bezeichnen².

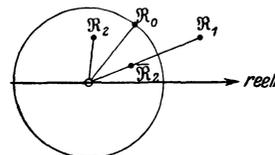


Abb. 80.

§ 104. Die Klemmenleistung in komplexer Darstellung.

Die im § 98 eingeführte komplexe Schreibweise kann man auch bei der Berechnung von Leistungen benutzen.

Nach der Rechenregel 5 b) des Anhangs ist nämlich ohne jede Symbolik

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \underline{u} \angle \omega t + (\underline{u} \angle \omega t)^* \}, \\ i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \underline{i} \angle \omega t + (\underline{i} \angle \omega t)^* \}. \end{aligned} \right\} \quad (254)$$

Man darf also für die Augenblicksklemmenleistung

$$n = \frac{1}{2} \{ \underline{u} \underline{i} \angle 2\omega t + (\underline{u} \underline{i} \angle 2\omega t)^* + \underline{u} \underline{i}^* + (\underline{u} \underline{i}^*)^* \} \quad (255)$$

¹ Häufig zählt man bei den Leitwerten die Phasen im entgegengesetzten Sinne positiv wie bei den Widerständen. Dann liegt \mathcal{G} auf demselben Fahrstrahl wie \Re .

² Gewöhnlich spricht man schon bei der Bildung des Kehrwerts von „Inversion“.

schreiben, und hieraus folgt unmittelbar das Ergebnis des § 93:

$$n = |\mathfrak{U}| |\mathfrak{I}| \cos 2 \left(\omega t + \frac{\varphi_u + \varphi_i}{2} \right) + |\mathfrak{U}| |\mathfrak{I}| \cos \varphi. \quad (256)$$

Die mittlere Klemmenleistung N ist hiernach gleich dem reellen Teil von $\mathfrak{U} \mathfrak{I}^*$; insofern kann man auch — jetzt symbolisch — von der „komplexen Leistung“ $\mathfrak{U} \mathfrak{I}^*$ sprechen.

Wir wollen ähnlich wie im § 12 das Verhältnis der Klemmenspannung \mathfrak{U} zu dem Klemmenstrom \mathfrak{I} den „Scheinwiderstand“

$$\mathfrak{R} = R + jR' = |\mathfrak{R}| \cos \varphi + j |\mathfrak{R}| \sin \varphi \quad (257)$$

des hinter den Klemmen liegenden Verbrauchers nennen. In diesen fließt daher im Mittel die Leistung

$$N = \frac{|\mathfrak{U}|}{|\mathfrak{I}|} |\mathfrak{I}|^2 \cos \varphi = |\mathfrak{R}| \cos \varphi \cdot |\mathfrak{I}|^2 = R |\mathfrak{I}|^2. \quad (258)$$

Sie ist also gleich dem Quadrate des effektiven Klemmenstroms, multipliziert mit dem Wirkteil des an den Klemmen gemessenen Scheinwiderstands.

§ 105. **Energieanpassung**¹. Eine Energiequelle von der komplexen Leerlaufspannung \mathfrak{U}^i und dem komplexen inneren Widerstand \mathfrak{R}_i sende Energie in einen verbrauchenden Zweipol vom Scheinwiderstand \mathfrak{R} (Abb. 81). Wie müssen die Schaltelemente gewählt werden, wenn die in den Verbraucher wandernde mittlere Leistung N so groß wie möglich werden soll (vgl. § 32)?

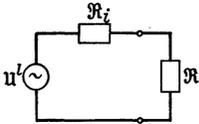


Abb. 81.

Nach der Definition der Wirkleistung ist

$$N = R |\mathfrak{I}|^2 = |\mathfrak{U}^i|^2 \frac{R}{(R_i + R)^2 + (R'_i + R')^2}. \quad (259)$$

Man muß also jedenfalls $|\mathfrak{U}^i|$ recht groß, R_i und die Summe $R'_i + R'$ recht klein machen:

$$R_i = 0, \quad R'_i + R' = 0. \quad (260)$$

Die letzte Bedingung sagt aus, daß die größte Energie in den Verbraucher wandert, wenn sich die Blindwiderstände des ganzen Systems gegenseitig aufheben, so daß sein Scheinwiderstand den Charakter eines reinen Wirkwiderstandes annimmt.

Der günstigste Wert des Wirkwiderstandes R des Verbrauchers ergibt sich wie im § 32 mit Hilfe der Rechenvorschrift des Anhangs 3 c): aus

$$\frac{R}{(R_i + R)^2 + (R'_i + R')^2} = \frac{1}{2(R_i + R)}$$

folgt

$$R^2 = R_i^2 + (R'_i + R')^2. \quad (261)$$

D. h. der Wirkwiderstand des Verbrauchers ist so groß zu wählen wie der Betrag aller übrigen (Wirk- und Blind-)Widerstände des Kreises zusammengenommen. Hat man die zweite Bedingung (260) bereits erfüllt, so muß man $R = R_i$ machen; dann kann man die beiden Bedingungen (260) und (261) zusammenfassen in der komplexen Gleichung:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_i^*. \quad (262)$$

Führen wir diese Bedingung in die Gleichung für die Leistung ein, so erhalten

¹ Salinger, H.: Tel.- u. Fernspr.-Techn. II, 114 u. 125 (1922).

wir für die größte entnehmbare Leistung:

$$\hat{N} = \left| \frac{u'}{\Re_t + \Re_t^*} \right|^2 R_t = \frac{|u'|^2 R_t}{(2 R_t)^2} = \frac{|u'|^2}{4 R_t}. \quad (263)$$

§ 106. **Gegenseitige Vernichtung von Blindwiderständen.** Wir haben gesehen, daß ein Verbraucher, dessen Wirkwiderstand R konstant gehalten wird, die größte Energie aufnimmt, wenn sein Blindwiderstand den des Erzeugers gerade kompensiert. Nun hängen die Blindwiderstände oder Blindleitwerte außer von den Schaltelementen immer auch von der Frequenz ab; sie heben sich daher meist nur bei besonderen, ausgezeichneten Frequenzen gegeneinander auf. Wir wollen die Frequenzen, bei denen der Scheinwiderstand oder der Scheinleitwert eines gegebenen Zweipols reell wird, seine „Scheinfrequenzen“ nennen¹.

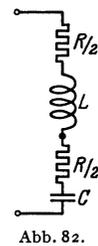
Zur Erläuterung betrachten wir die drei einfachsten Zweipole, die man aus einem Widerstand R (oder $R/2$), einer Induktivität L und einer Kapazität C zusammensetzen kann. Dabei führen wir einige Abkürzungen ein, die wir auch später immer wieder verwenden werden. Wir bezeichnen die Kombination $\sqrt{L/C}$, welche die Dimension eines Widerstandes hat, mit Z , ferner die Kombination $\omega \sqrt{LC}$, die eine reine Zahl ist, mit η ; endlich setzen wir

$$\frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{2Z} = \sin \vartheta. \quad (264)$$

Es sei $R \leq 2Z$; dann ist der Winkel ϑ reell. Wir nennen ihn den „Dämpfungswinkel“ der betreffenden Schaltung.

a) Es sei zunächst ein Widerstand $\frac{R}{2} + \frac{R}{2} = R$ mit einer Induktivität L und einer Kapazität C in Reihe geschaltet (Abb. 82). Der Scheinwiderstand dieses Zweipols ist

$$\mathfrak{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = Z \left(2 \sin \vartheta + j \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right) \right). \quad (265)$$



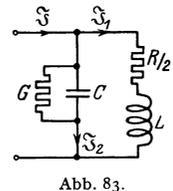
Er ist dann und nur dann ein reiner Wirkwiderstand, wenn $\eta = 1$ ist, d. h. wenn

$$f = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} = f_0. \quad (266)$$

Diese Frequenz f_0 ist also die (einzige) Scheinfrequenz des betrachteten Zweipols. Er hat für sie den Wirkwiderstand $2Z \sin \vartheta = R$.

b) Als zweites Beispiel betrachten wir einen Kondensator von der Kapazität C und dem Leitwert G , dem eine Spule von der Induktivität L und dem Widerstand $R/2$ parallel geschaltet ist (Abb. 83). Der Scheinleitwert dieses Zweipols ist

$$\mathfrak{Y} = \frac{1}{R/2 + j\omega L} + G + j\omega C \quad (267)$$



oder, wenn wir die vorhin verwandten Abkürzungen einführen und die Formel im Anhang 5 a) beachten:

$$\mathfrak{Y} = \frac{1}{Z} \left\{ \frac{1}{\sin \vartheta + j\eta} + j\eta \right\} + G = \frac{1}{Z} \frac{\sin \vartheta + j\eta(\eta^2 - \cos^2 \vartheta)}{\sin^2 \vartheta + \eta^2} + G. \quad (268)$$

¹ Für diese kurze Bezeichnung scheint mir ein Bedürfnis vorzuliegen. Die „Scheinfrequenz“ kann häufig der „wahren“ Eigenfrequenz eines Stromkreises gegenübergestellt werden. Außerdem läßt sich (zufällig) in manchen einfachen Fällen die wahre Eigenfrequenz aus der Scheinfrequenz durch Multiplikation mit dem Kosinus des sofort einzuführenden „Dämpfungswinkels“ berechnen, ähnlich wie sich bei Sinusströmen die Wirkleistung aus der Scheinleistung ergibt durch Multiplikation mit dem Kosinus des Phasenverschiebungswinkels.

Wie man sieht, gibt es hier zwei Scheinfrequenzen, die Frequenz $f = 0$ und die Frequenz $f_0 \cos \vartheta$. Ferner hängt die zweite Scheinfrequenz jetzt als Funktion des Dämpfungswinkels nicht nur von L und C , sondern auch von dem Widerstande R ab. Endlich ist jetzt auch der Wirkteil des Scheinleitwerts eine Funktion der Frequenz.

Ändert man nur die Frequenz der Stromquelle, so ist die Leistung bei der Scheinfrequenz $f_0 \cos \vartheta$ keineswegs ein Maximum. Denn für $\eta = \cos \vartheta$ wird

$$\mathfrak{G} = \frac{\sin \vartheta}{Z} + G = \frac{R}{2Z^2} + G = \frac{R/2 \cdot C}{L} + G. \quad (269)$$

Der Blindteil des Scheinwiderstands ist zwar zugleich mit dem Blindteil des Scheinleitwerts gleich Null; dafür ist aber sein Wirkteil um so größer, so daß die günstige Wirkung der Kompensation des Blindwiderstandes verloren geht. Bei Veränderung allein der Frequenz muß also besonders untersucht werden, ob die Scheinfrequenz $f_0 \cos \vartheta$ für Strom, Spannung oder Leistung „Resonanzfrequenz“ ist.

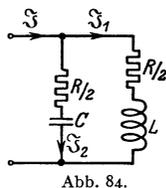


Abb. 84.

c) Machen wir die vorher untersuchte Schaltung symmetrischer, indem wir auch der Kapazität einen Widerstand $R/2$ vorschalten (Abb. 84), so hat dies insofern eine vereinfachende Wirkung, als jetzt wieder die Frequenz f_0 (und nicht $f_0 \cos \vartheta$) zur zweiten Scheinfrequenz wird. Die Blindwiderstände vernichten sich jetzt aber auch noch unter einer dritten Bedingung, die von der Frequenz unabhängig ist. Für den Scheinleitwert dieser Anordnung gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} &= \frac{I}{\frac{R}{2} + j\omega L} + \frac{I}{\frac{R}{2} + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{I}{Z} \left(\frac{I}{\sin \vartheta + j\eta} + \frac{I}{\sin \vartheta + \frac{I}{j\eta}} \right) \\ &= \frac{I}{Z} \left(\frac{\sin \vartheta - j\eta}{\sin^2 \vartheta + \eta^2} + \frac{\sin \vartheta + j \cdot \frac{I}{\eta}}{\sin^2 \vartheta + \frac{I}{\eta^2}} \right). \end{aligned} \quad (270)$$

Er wird reell, wenn

$$\frac{\eta}{\sin^2 \vartheta + \eta^2} = \frac{I}{\eta \left(\sin^2 \vartheta + \frac{I}{\eta^2} \right)}, \quad (271)$$

d. h., wenn entweder $\eta = 0$ oder $\eta = 1$ oder $\sin \vartheta = 1$ ist. Der Zweipol der Abb. 84 hat also die beiden Scheinfrequenzen Null und f_0 ; außerdem ist aber sein Scheinwiderstand auch noch bei beliebiger Frequenz reell, wenn sein Dämpfungswinkel gleich 90° ist.

Bei der Frequenz f_0 wird

$$\mathfrak{R} = \frac{I}{\mathfrak{G}} = \frac{Z(I + \sin^2 \vartheta)}{2 \sin \vartheta} = \frac{L}{RC} + \frac{R}{4}. \quad (272)$$

Dieser Wert stimmt, abgesehen von dem Zusatz $R/4$, überein mit dem Wert, der sich im Falle b) ergeben hat.

Der Dämpfungswinkel $\vartheta = 90^\circ$, bei dem der Scheinwiderstand \mathfrak{R} im Falle c) für alle Frequenzen reell wird, heißt aus später zu erörternden Gründen auch der „Grenzdämpfungswinkel“¹. Für ihn wird der Scheinwiderstand unabhängig von der Frequenz gleich dem „charakteristischen“ Widerstande

$$Z = \sqrt{L/C} = R/2.$$

¹ Die Widerstände $j\omega L$ und $1/j\omega C$ sind (§ 103) „invers“ mit der Potenz $R/2$.

§ 107. **Spannungs- und Stromresonanz.** Bei der Reihenschaltung von Induktivität und Kapazität (Abb. 82) ist für die Scheinfrequenz f_0 die Klemmenspannung U des Zweipols gleich $R\mathfrak{I}$, also bei kleinem R nur gering. Trotzdem können an der Spule und am Kondensator gefährliche Teilspannungen U_1 und U_2 liegen (Abb. 85); denn für deren Höhe ist nicht R , sondern der charakteristische Widerstand $Z = \sqrt{L/C}$ entscheidend. Es folgt nämlich mit $\eta = 1$

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \left(\frac{R}{2} + j\omega L\right)\mathfrak{I} = \left(1 + \frac{j}{\sin\vartheta}\right)\frac{U}{2} = (\sin\vartheta + j)Z\mathfrak{I}, \\ U_2 &= \left(\frac{R}{2} + \frac{1}{j\omega C}\right)\mathfrak{I} = \left(1 - \frac{j}{\sin\vartheta}\right)\frac{U}{2} = (\sin\vartheta - j)Z\mathfrak{I}. \end{aligned} \right\} \quad (273)$$

Man spricht in diesem Falle von „Spannungsresonanz“ oder „Reihenresonanz“.

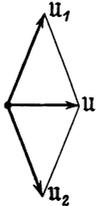


Abb. 85.

Umgekehrt ist bei Nebeneinanderschaltung von Induktivität und Kapazität gemäß Abb. 84 für die Scheinfrequenz f_0 der Klemmenstrom gleich

$$\mathfrak{I} = \frac{2 \sin\vartheta}{Z(1 + \sin^2\vartheta)} U, \quad (274)$$

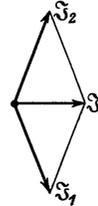


Abb. 86.

also bei kleiner Dämpfung und gegebener Klemmenspannung sehr gering. Trotzdem können (Abb. 86) die Teilströme \mathfrak{I}_1 und \mathfrak{I}_2 in den beiden Parallelzweigen bei

geringem Dämpfungswinkel stark sein. Man spricht in diesem Falle von „Stromresonanz“ oder „Parallelresonanz“.

Kehrt man den Zählpfeil des Stroms \mathfrak{I}_1 um (vgl. Abb. 84), so wird bei kleiner Dämpfung annähernd $\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}_2 = j\mathfrak{I}/(2 \sin\vartheta)$. In der durch die beiden parallelen Zweige gebildeten Masche kreist also ein kräftiger Resonanzstrom. Der äußere Strom \mathfrak{I} dagegen ist gerade nur so groß, daß die in der Masche entwickelte Stromwärme gedeckt wird.

§ 108. **Die Bedingung der Grenzdämpfung.** Ist bei der Reihenschaltung $\sin\vartheta = 1$, so ist

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= Z(1 + j\eta)\mathfrak{I}, \\ U_2 &= \frac{Z}{j\eta}(1 + j\eta)\mathfrak{I}, \end{aligned} \right\} \quad (275)$$

und daher

$$\frac{U_1}{U_2} = j\eta = \eta \angle 90^\circ. \quad (276)$$

Die Spannung an $R/2$, L eilt also der Spannung an $R/2$, C um 90° voraus (Abb. 87).

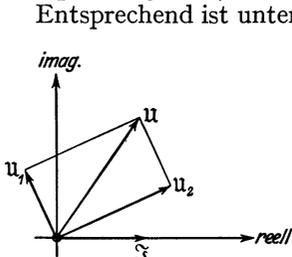


Abb. 87.

Entsprechend ist unter derselben Bedingung bei der Parallelschaltung gemäß Abb. 84

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{I}_1 &= \frac{1}{Z} \frac{U}{1 + j\eta}, \\ \mathfrak{I}_2 &= \frac{j\eta}{Z} \frac{U}{1 + j\eta}, \end{aligned} \right\} \quad (277)$$

und daher

$$\frac{\mathfrak{I}_2}{\mathfrak{I}_1} = j\eta = \eta \angle 90^\circ. \quad (278)$$

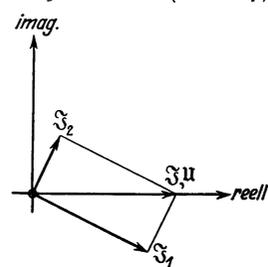


Abb. 88.

Jetzt eilt der Strom in der Kapazität dem Strom in der Induktivität um 90° voraus (Abb. 88).

§ 109. **Widerstandsmessung mit der Brücke.** Bei der Wechselstrombrücke (Abb. 89) verschwindet der Brückenstrom, wenn die vier komplexen Seitenwiderstände $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_4$ der Brückenbedingung

$$\frac{\mathfrak{R}_3}{\mathfrak{R}_1} = \frac{\mathfrak{R}_4}{\mathfrak{R}_2} \quad (279)$$

genügen. Diese besteht als Gleichung zwischen komplexen Größen aus zwei Teilbedingungen, einer für die reellen und einer für die imaginären Bestandteile oder auch: einer für die Beträge und einer für die Phasen.

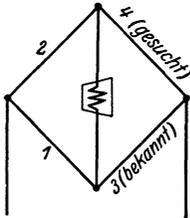


Abb. 89.

Der bekannte Widerstand werde etwa durch \mathfrak{R}_3 , der gesuchte durch \mathfrak{R}_4 dargestellt. Jener wird häufig wie in Abb. 90 ausgebildet. Ist dann der unbekannte Widerstand gleich $R_4 + jR'_4$ und macht man $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_2$, so gelten die Gleichungen

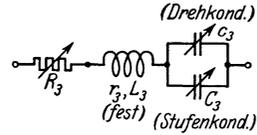


Abb. 90.

$$R_4 = R_3 + r_3 \quad \text{und} \quad R'_4 = \omega L_3 - \frac{1}{\omega(C_3 + c_3)}. \quad (280)$$

Die Einstellungen der Wechselstrombrücke hängen stark von den Leitwerten unberechenbarer dielektrischer Nebenschlüsse, insbesondere auch nach benachbarten Leitern ab. In der Abb. 91 sind solche Nebenschlüsse durch vier an die Eckpunkte A, B, C, D angeschlossene „Erdkapazitäten“ angedeutet. Durch eine von K. W. Wagner¹ angegebene Zusatzschaltung gelingt es, diese Fehlerquelle zu beseitigen. Man variiert die Brückenwiderstände und den in Abb. 91 gezeichneten Hilfszweig² so lange, bis die beiden Telephone T_1 und T_2 schweigen. Dann sind die Punkte C, D, E auf dem Potential der Erde, die Kapazitäten bei C und D bleiben also unwirksam. Die Kapazitäten bei A, B andererseits gehören überhaupt nicht zu dem Brückenviereck, sind also auf die Einstellung ebenfalls ohne Einfluß.

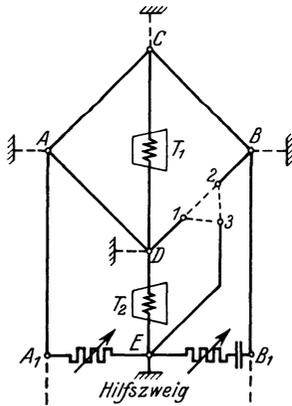


Abb. 91.

§ 110. **Frequenzbrücke.** Schaltet man in eine Wechselstrombrücke nur bekannte Widerstände, Induktivitäten und Kapazitäten, so kann man aus den Werten, die man diesen Elementen geben muß, um die Brücke ins Gleichgewicht zu setzen, auf die Frequenz schließen.

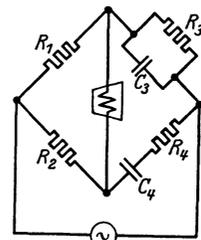


Abb. 92.

Besonders einfach ist die Brücke nach Robinson³. Man schaltet (Abb. 92) je einen Widerstand und eine Kapazität in die Zweige 3 und 4, und zwar in den Kreis 3 parallel zueinander, in den Kreis 4 in Reihe. Unter den Voraussetzungen $R_3 = R_4 = R$ und $C_3 = C_4 = C$ ergibt die Brückenbedingung ($n = R_2/R_1$):

$$R + \frac{1}{j\omega C} = n \frac{R}{1 + j\omega RC}. \quad (281)$$

¹ Wagner, K. W.: ETZ 32, 1001 (1911).

² Die Verbindungen 13, 23 und 3 E denke man sich weg.

³ Robinson, C.: Post. Off. El. Eng. J. 16, Nr. 2, 171 (1923).

Daraus folgen durch Trennung des Reellen von dem Imaginären die beiden Bedingungen

$$1 - \omega^2 R^2 C^2 = 0 \quad \text{und} \quad z = n. \tag{282}$$

Führt man also den Leitwert $G = 1/R$ ein, so berechnet sich ω nach der Gleichung

$$\omega = \frac{G}{C}. \tag{283}$$

Man wählt das Brückenverhältnis z , eicht die Widerstände R_3 und R_4 bei festem C als Leitwerte (§ 13) und sorgt durch eine mechanische Kopplung dafür, daß sie dauernd gleich groß sind.

§ 111. Kompensationsmethoden. Frankesche Maschine. Besonders häufig wird auf dem Gebiete des Wechselstromes das Prinzip der Kompensation benutzt (§ 18). Es ist natürlich nur anwendbar, wenn die Frequenzen der beiden verwendeten Wechselstromquellen genau übereinstimmen; außerdem ist zu beachten, daß im allgemeinen sowohl die Beträge wie die Phasen der Spannungen geändert werden müssen, wenn die Fühldrähte stromlos werden sollen. Die Stromlosigkeit wird meist mit Hilfe eines Telefons festgestellt.

Die Frankesche Maschine¹ ist ein Doppel-Wechselstromgenerator. Sein einer Anker kann mehr oder weniger in das ihm zugeordnete magnetische Drehfeld eingeführt, sein anderer um die Achse der Maschine gedreht werden. Es ist daher möglich, den Effektivwert der von dem ersten Anker gelieferten Leerlaufspannung und — unabhängig davon — die Phase der von dem zweiten Anker gelieferten Leerlaufspannung stetig und meßbar zu verändern.

Während man die Phasendrehung unmittelbar im Gradmaß ablesen kann, ist die Änderung des Betrags nicht einfach der Änderung der Eintauchtiefe des Ankers proportional. Die Frankesche Maschine muß daher hinsichtlich der Beträge geeicht werden.

Sie kann zunächst zum Vergleich von Wechselspannungen verwendet werden. Die eine Spannung U_1 sei z. B. (Abb. 93) die Spannung am Eingang einer Leitung, die andere U_2 die Spannung an ihrem Ausgang.

Man speist die Schaltung mit dem Phasenanker und kompensiert mit dem Betragsanker. Dann entspricht jeder der beiden Spannungen eine bestimmte Eintauchtiefe und eine bestimmte Stellung der Phasentrommel. Die Phasendifferenz zwischen U_1 und U_2 ergibt sich daraus unmittelbar; das Verhältnis der Beträge nur, sofern der Betragsanker — wenigstens in relativem Maß — geeicht ist. Gewöhnlich eicht man ihn jedesmal von neuem, indem man diejenigen Bruchteile eines reinen Widerstandes (Kompensationsapparats) K sucht, an denen die Spannungen $|U_1|$ und $|U_2|$ liegen.

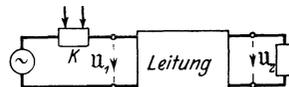


Abb. 93.

Man speist die Schaltung mit dem Phasenanker und kompensiert mit dem Betragsanker. Dann entspricht jeder der beiden Spannungen eine bestimmte Eintauchtiefe und eine bestimmte Stellung der Phasentrommel. Die Phasendifferenz zwischen U_1 und U_2 ergibt sich daraus unmittelbar; das Verhältnis der Beträge nur, sofern der Betragsanker — wenigstens in relativem Maß — geeicht ist. Gewöhnlich eicht man ihn jedesmal von neuem, indem man diejenigen Bruchteile eines reinen Widerstandes (Kompensationsapparats) K sucht, an denen die Spannungen $|U_1|$ und $|U_2|$ liegen.

Soll ein Scheinwiderstand \mathfrak{B} (Abb. 94) gemessen werden, so schaltet man ihn in Reihe mit einem Kompensationsapparat K und speist ihn mit dem Phasenanker. Dann kompensiert man mit dem Betragsanker erst an \mathfrak{B} , dann — bei ungeänderter Stellung des Eintauchtriebes, aber gedrehter Phasentrommel — an einem geeigneten Bruchteil R von K . Da die Fühldrähte keinen Strom aufnehmen, hat der die Widerstände durchfließende Strom \mathfrak{S} bei beiden Kompensationen dieselbe Stärke; seine Phase unterscheidet sich jedoch um einen ablesbaren Winkel φ . Der zu messende Scheinwiderstand ergibt

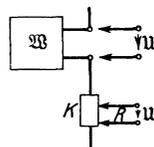


Abb. 94.

¹ Franke, A.: ETZ 12, 448 (1891). Ebeling, A.: Ebenda 34, 433 (1913).

sich daher aus:

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{S}' R}{\mathfrak{S}} = R \angle \varphi. \tag{284}$$

§ 112. **Kompensator nach Pedersen.** Pedersen¹ macht bei seinem Kompensator davon Gebrauch, daß nach § 108 zwischen den Strömen \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 in zwei parallelen Zweigen $R/2, L$ und $R/2, C$ (Abb. 95) eine Phasendifferenz von 90° besteht, wenn $\sin \vartheta = R/2 \cdot \sqrt{C/L} = 1$ ist, und daß die Widerstände der Zweige zueinander konjugiert sind, wenn die aus ihnen gebildete Masche auf die Meßfrequenz abgestimmt wird. Erfüllt man diese beiden Bedingungen,

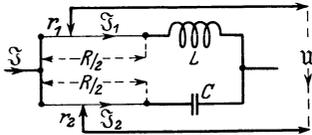


Abb. 95.

so werden die beiden Ströme durch zwei gleich lange aufeinander senkrechte Pfeile dargestellt; und zwar eilt der Vektor des Stroms \mathfrak{S}_2 , der die Kapazität durchfließt, dem Vektor des Stroms \mathfrak{S}_1 , der die Induktivität durchfließt, um 90° voraus: $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_1 \angle 90^\circ$ [Gleichung (278)].

Greift man daher an den Teilwiderständen r_1 und r_2 ab, so liegt zwischen den Fühlrädern die Spannung

$$-u = r_1 \mathfrak{S}_1 - r_2 \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_1 (r_1 - j r_2); \tag{285}$$

durch Variation von r_1 und r_2 kann man also die beiden rechtwinkligen Komponenten von u ändern².

§ 113. **Phasenbrücke.** Bei einer Brücke, die gemäß Abb. 96 geschaltet ist, gilt für die Leerlaufspannung zwischen den Punkten 3 und 4 nach der Spannungsteilergleichung

$$\begin{aligned} u_{34}^l &= u_{31} + u_{14} = \left(-\frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} + \frac{1}{j\omega C \left(R + \frac{1}{j\omega C} \right)} \right) u_{12} \\ &= \frac{1 - j\omega R C}{1 + j\omega R C} u_{12} = u_{12} \angle -2 \arctan \omega R C. \end{aligned} \tag{286}$$

Legt man also an die Klemmen 1 und 2 eine Spannung u_{12} , so kann man an

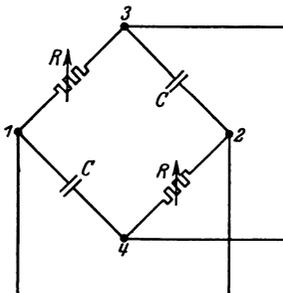


Abb. 96.

den Klemmen 3 und 4, wenn man R (oder C) veränderbar macht, eine Leerlaufspannung desselben Betrags, aber beliebig einstellbarer Phase abnehmen. Das Diagramm Abb. 97 veranschaulicht die Methode. Macht man noch — etwa mit Hilfe eines Spannungsteilers aus reellen Widerständen — die Spannung u_{12} dem Betrage nach

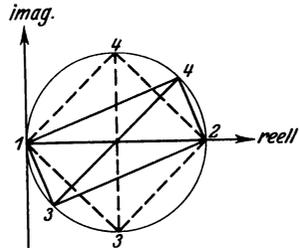


Abb. 97.

veränderbar, so hat man eine Anordnung, die wie die Frankesche Maschine eine nach Betrag und Phase veränderbare Fühlrahtspannung liefert³.

§ 114. **Frequenzabhängigkeiten der Schaltelemente.** Die Hauptschwierigkeit der Wechselstromtheorie gegenüber der Gleichstromtheorie liegt — wenigstens soweit die Fernmeldetechnik in Frage kommt — in der starken Frequenzabhängigkeit der Wechselstromwiderstände. Da in der Fernmeldetechnik fast immer

¹ Pedersen, P. O.: Electrician 83, 523 (1919).

² Weitere Kompensationsschaltungen z. B. bei A. Larsen: ETZ 31, 1039 (1910); W. Geyger: Arch. Elektrot. 17, 213 (1926).

³ Hohage hat eine Schaltung angegeben, durch die ohne umlaufende Teile ein magnetisches Drehfeld erzeugt wird, das in einer in ihm drehbar aufgehängten Spule eine Spannung beliebig einstellbarer Phase induziert. Helios 25, 198 (1919). — Vgl. auch H. F. Mayer: Elektr. Nachr.-Techn. 3, 148 (1926).

eine große Zahl verschiedener Einzelfrequenzen übertragen wird, bildet die Untersuchung der Frequenzabhängigkeiten die Hauptaufgabe.

Es ist nützlich, die Aufmerksamkeit zunächst auf die Frequenzabhängigkeiten der Schaltelemente zu richten. Die Scheinwiderstände der „Ohmschen“ Widerstandsspulen sind bei niedrigen Frequenzen frequenzunabhängig; bei höheren werden sie schwach komplex, und es macht sich bei ihnen die Stromverdrängung geltend. Die Scheinwiderstände $R + j\omega L$ der eisenhaltigen Drosselspulen sind bei niedrigen Frequenzen lineare Funktionen der Frequenz. Über diese Frequenzabhängigkeit lagern sich bei höheren Frequenzen weitere durch Hysterisis, Wirbelströme und Stromverdrängung verursachte Frequenzgänge. Die positiven Blindleitwerte ωC der Kondensatoren sind bei niedrigen Frequenzen sehr nahe der Frequenz proportional; auch bei ihnen ist jedoch für höhere Frequenzen je nach dem Dielektrikum die Frequenzabhängigkeit im allgemeinen komplizierter.

Sehen wir von den Frequenzabhängigkeiten ab, die in unsern einfachen Gleichungen nicht zum Ausdruck kommen, so können wir einen Widerstand R durch eine horizontale Gerade, einen Blindwiderstand ωL durch eine schiefe Gerade durch den Nullpunkt, einen Blindwiderstand $-1/\omega C$ durch eine gleichseitige Hyperbel unterhalb der Abszissenachse darstellen (Abb. 98).

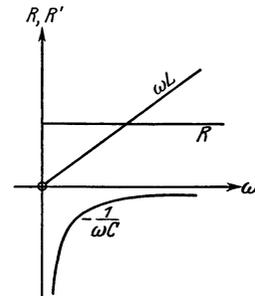


Abb. 98.

§ 115. **Frequenzabhängigkeit der Widerstände und Leitwerte von Zweipolen.** Zwei hintereinander (oder parallel) geschaltete Gleichstromwiderstände R_1 und R_2 (oder Gleichstromleitwerte G_1 und G_2) können bekanntlich durch eine einzige Drahtrolle von dem Widerstande $R_1 + R_2$ (oder dem Leitwerte $G_1 + G_2$) völlig ersetzt werden.

Das Entsprechende gilt für Wechselstrom, wenn es sich um die Zusammenschaltung von Spulen mit Spulen oder von Kondensatoren mit Kondensatoren handelt.

Ist dagegen z. B. \mathfrak{R}_1 ein induktiver, \mathfrak{R}_2 ein kapazitiver Widerstand, so hat die Reihenschaltung $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$ zwar formal immer noch den Scheinwiderstand

$$\mathfrak{R} = j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_2} = \frac{1 - \omega^2 L_1 C_2}{j\omega C_2} = -j \frac{1 - \omega^2 L_1 C_2}{\omega C_2}. \quad (287)$$

Sie kann nun aber nur noch für eine bestimmt gegebene Frequenz, jedoch nicht mehr für alle Frequenzen durch eine einzige Spule (falls $1 < \omega^2 L_1 C_2$) oder durch einen einzigen Kondensator (falls $1 > \omega^2 L_1 C_2$) ersetzt werden. Die Frequenzabhängigkeit einer solchen Reihenschaltung von Induktivität und Kapazität wird durch die nach Abb. 98 punktweise konstruierte Abb. 99 dargestellt.

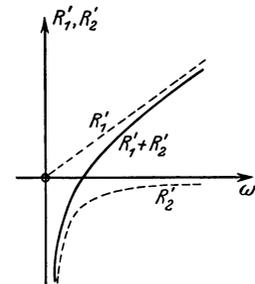


Abb. 99.

Man erkennt, daß sich zwei Schaltungen, die z. B. im Sinne des § 23 formal ineinander „umwandelbar“ sind, hinsichtlich ihrer Frequenzabhängigkeiten durchaus verschieden verhalten können und daß sich durch Kombination von Spulen und Kondensatoren Frequenzabhängigkeiten künstlich erzeugen lassen, die viel mannigfaltiger sind als die Frequenzabhängigkeiten der Elemente, aus denen die Kombinationen bestehen.

Man bemerkt, daß der in Abb. 99 dargestellte Scheinwiderstand mit wachsender Frequenz größer wird. Es läßt sich zeigen, daß der Scheinwiderstand jedes

reinen Blindwiderstands — abgesehen von einigen ausgezeichneten Frequenzen — mit wachsender Frequenz zunimmt; nur bei den ausgezeichneten Frequenzen springt er plötzlich von $+\infty$ auf $-\infty$. Man nennt diesen Satz „Zobel'sches Reaktanztheorem“¹.

§ 116. Frequenzabhängigkeit des Stroms bei einer Reihenschaltung von Induktivität und Kapazität. Für eine Reihenschaltung L, C , die über einen Widerstand R durch eine EMK \mathcal{E} der Frequenz ω betrieben wird, gilt die komplexe Gleichung

$$\mathfrak{I} = \frac{\mathcal{E}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}. \quad (288)$$

Führen wir in sie die Abkürzungen des § 106 ein, so erhalten wir

$$\mathfrak{I} = \frac{\mathcal{E}}{Z} \frac{1}{2 \sin \vartheta + j\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)}. \quad (289)$$

Hier kann man den konstanten Wert \mathcal{E}/Z als Einheit der Stromstärke auffassen; damit erhält man die Zahlenwertgleichung

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{2 \sin \vartheta + j\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)}. \quad (290)$$

Aus ihr geht hervor, daß der Frequenzgang des Stroms, abgesehen von den benutzten Maßstäben, einzig und allein von der Dämpfung des Kreises, d. h. von der Größe des Dämpfungswinkels ϑ abhängt.

Untersuchen wir zunächst die Frequenzabhängigkeit des Betrags: sie ist gegeben durch die Gleichung

$$|\mathfrak{I}| = \frac{1}{\sqrt{4 \sin^2 \vartheta + \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right)^2}}. \quad (291)$$

Zeichnet man die entsprechende Kurve $|\mathfrak{I}| = f(\vartheta, \eta)$ für eine größere Zahl von Dämpfungswinkeln, wie es in Abb. 100 geschehen ist, so hat man eine für jede Schaltung der angenommenen Art anwendbare quantitative Darstellung der Frequenzabhängigkeit des Stroms. Wie aus der Gleichung unmittelbar hervorgeht, liegt das Maximum aller Frequenzkurven bei der Scheinfrequenz $f_0 = 1/2\pi \sqrt{LC}$: Resonanzfrequenz und Scheinfrequenz fallen bei allen Dämpfungswinkeln zusammen. Das Maximum ist um so spitzer, je kleiner der Dämpfungswinkel ist; denn um so mehr kann im Nenner

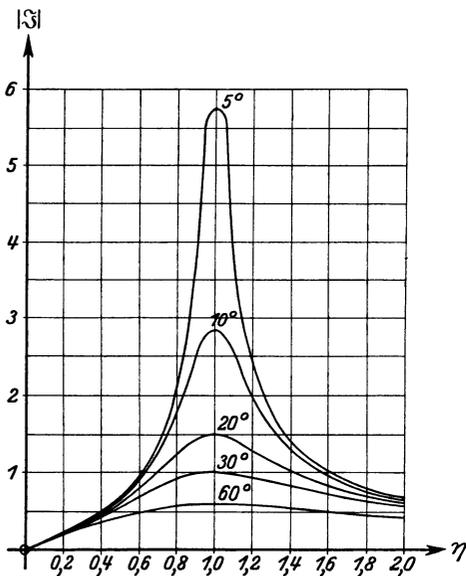


Abb. 100.

von (291) das die Frequenz enthaltende Glied neben dem Glied $4 \sin^2 \vartheta$ zur Geltung kommen.

¹ Zobel, O. J.: Bell. Syst. Techn. Journ. 2, Nr. 1, 5 und 35 (1923).

Von der Scheinfrequenz verschieden ist die „Eigenfrequenz“ des Stromkreises, d. h. die Frequenz, mit der er, wenn keine treibende EMK da wäre, nach einem plötzlichen Anstoß von selbst zu schwingen begänne. Wir werden später (im § 133) zeigen, daß ihr Verhältnis zur Scheinfrequenz gleich $\cos \vartheta$, daß sie also bei kleinen Dämpfungswinkeln immer etwas kleiner als die Scheinfrequenz ist.

Eine ausgezeichnete Rolle spielt der Dämpfungswinkel 30° ; für ihn ist bei der Scheinfrequenz der Strom gerade gleich $|E|/Z$.

Beispiel: Es sei $L = 0,3$ H, $C = 0,133$ μ F, $R = 600$ Ω , $|E| = 24$ V. Dann ist

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,3\text{ H} \cdot 0,133\ \mu\text{F}}} = 800\text{ Hz}; \quad Z = \sqrt{\frac{0,3\text{ H}}{0,133\ \mu\text{F}}} = 1500\ \Omega.$$

Die Stromeinheit ist also gleich 16 mA, der Dämpfungswinkel gleich $\arcsin 0,20 = 11,5^\circ$. Für 480 Hertz z. B. ist $\eta = 0,6$; aus einer genauen Darstellung entnimmt man zu $\eta = 0,6$ und $\vartheta = 11,5^\circ$ einen Zahlenwert des Stromes gleich 0,88; der Effektivwert des Stromes selbst ist also für 480 Hertz gleich 14 mA.

Die Phasenverschiebung φ des Stroms gegenüber der EMK ergibt sich nach (290) zu

$$\varphi = \arcsin \left(-\frac{\eta - \frac{1}{\eta}}{2 \sin \vartheta} \right). \quad (292)$$

Hiernach ist der Strom gegen die Spannung bei geringer Dämpfung für alle Frequenzen oberhalb der Scheinfrequenz nahezu um 90° verzögert; für alle Frequenzen unterhalb davon hat er dagegen einen Vorsprung von nahezu 90° . In der Umgebung der Scheinfrequenz springt demnach die Phasenverschiebung φ bei verschwindender Dämpfung um nahezu 180° ; der Scheinwiderstand wird aus einer Kapazität zu einer Induktivität. Bei der Scheinfrequenz selbst ist $\varphi = 0$; eben durch diese Bedingung ist sie ja definiert.

Man kann den Zahlenwert des Stroms auch in seine Wirkkomponente und seine Blindkomponente zerlegen:

$$\mathfrak{S} = \frac{2 \sin \vartheta - j \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right)}{4 \sin^2 \vartheta + \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right)^2}. \quad (293)$$

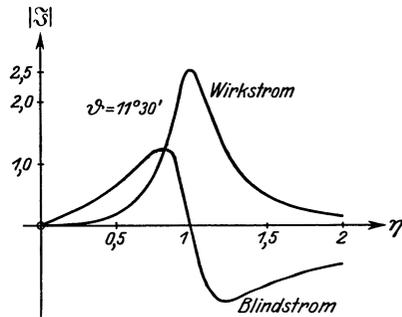


Abb. 101.

Bei kleinen Dämpfungswinkeln hat hiernach der Wirkstrom bei der Scheinfrequenz ein spitzes Maximum, während der Blindstrom dort einen Phasensprung zeigt (Abb. 101)¹.

§ 117. Resonanzkurve der Kondensatorspannung bei einer Reihenschaltung von Induktivität und Kapazität. Schon im § 107 haben wir erkannt, daß bei der Schaltung Abb. 82 die Teilspannung U am Kondensator bei kleinem Dämpfungswinkel in der Nähe der Scheinfrequenz hohe Werte annimmt. Wir wollen diese Erscheinung der „Spannungsresonanz“ am Kondensator jetzt genauer unter-

¹ Die Kurven sind in η vom fünften Grade, in $\eta - \frac{1}{\eta}$ vom dritten. Das Maß

$$\eta - \frac{1}{\eta} = \frac{\eta^2 - 1}{\eta} = \frac{(\eta + 1)(\eta - 1)}{\eta} \approx 2(\eta - 1)$$

kann in der Nähe der Scheinfrequenz als angenähertes Maß für die Abweichung der Frequenz von der Scheinfrequenz gelten.

suchen. Es ist

$$\underline{u} = \frac{1}{j\omega C} \frac{\mathcal{E}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{\mathcal{E}}{(1 - \eta^2) + j2\eta \sin \vartheta}, \quad (294)$$

also

$$|\underline{u}| = \frac{|\mathcal{E}|}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\eta^2 \sin^2 \vartheta}} = \frac{|\mathcal{E}|}{\sqrt{1 - 2\eta^2 \cos 2\vartheta + \eta^4}}. \quad (295)$$

Hier kann man nicht allgemein den Schluß ziehen, daß die Spannung bei der Scheinfrequenz ein Maximum habe; man muß vielmehr die Frequenzabhängigkeit mit den Hilfsmitteln der Differentialrechnung untersuchen. Wir benutzen den Satz (Anhang 3 a), daß die Extrema des Radikanden

$$\varrho = 1 - 2\eta^2 \cos 2\vartheta + \eta^4$$

zugleich Extrema des ganzen Bruchs, also der Spannung, sind. Da

$$\frac{d\varrho}{d\eta} = 4\eta(\eta^2 - \cos 2\vartheta), \quad (296)$$

$$\frac{d^2\varrho}{d\eta^2} = 4(\eta^2 - \cos 2\vartheta) + 8\eta^2 = 4(3\eta^2 - \cos 2\vartheta), \quad (297)$$

liegen Extrema der Spannung bei $\eta = 0$ und bei $\eta = \eta_m = \sqrt{\cos 2\vartheta}$.

Wir setzen zuerst voraus, daß der Dämpfungswinkel kleiner sei als 45° . Dann

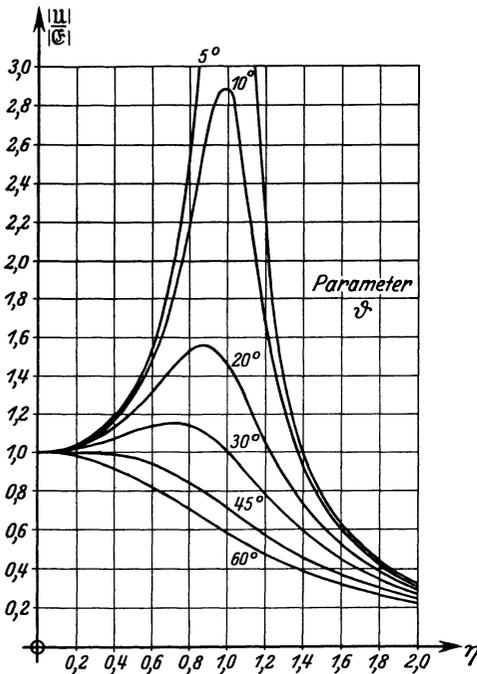


Abb. 102.

ist $\cos 2\vartheta$ positiv; also sind beide Extrema reell. Für $\eta = 0$ wird $d^2\varrho/d\eta^2$ nach (297) negativ; für sehr niedrige Frequenzen hat der Radikand also ein Maximum, die Spannung selbst ein Minimum. Daraus folgt sofort, daß die andere Bedingung $\eta = \sqrt{\cos 2\vartheta}$ ein Maximum der Spannung liefert. Dieses liegt aber nur für kleine Dämpfungswinkel bei der Scheinfrequenz ($\eta = 1$), sonst bei einer niedrigeren. Nur bei kleiner Dämpfung fällt also die Resonanzfrequenz der Kondensatorspannung mit der Scheinfrequenz des Stromkreises zusammen. Abb. 102 veranschaulicht dies.

Ist der Dämpfungswinkel größer als 45° , so ist $\cos 2\vartheta$ negativ; das zweite Extremum ist also nicht mehr reell. Außerdem wird dann für $\eta = 0$

$$\frac{d^2\varrho}{d\eta^2} = -4\cos 2\vartheta \quad (298)$$

positiv; d. h. bei der Frequenz Null liegt jetzt ein Maximum: die Schein-

frequenz hat nichts mehr mit der Resonanzfrequenz zu tun.

Zwischen Scheinfrequenz und Resonanzfrequenz liegt die Eigenfrequenz $\omega_e = \omega_0 \cos \vartheta$ des Stromkreises. Bei kleinen Dämpfungswinkeln kann man schreiben:

$$\frac{1 + \eta_m}{2} = \frac{1 + \sqrt{\cos 2\vartheta}}{2} \approx \frac{1 + (1 - \vartheta^2)}{2} = 1 - \frac{\vartheta^2}{2} \approx \cos \vartheta = \eta_e, \quad (299)$$

d. h. die wahre Eigenfrequenz liegt bei geringer Dämpfung in der Mitte zwischen Resonanz- und Scheinfrequenz.

Bei dem Dämpfungswinkel 45° wird die Spannung am Kondensator durch die Gleichung

$$|u| = \frac{|E|}{\sqrt{1 + \eta^4}} \tag{300}$$

dargestellt. Sie ist also bei niedrigen Frequenzen fast frequenzunabhängig. Nimmt man ϑ etwas kleiner als 45° , so ist die Abweichung der Spannung von dem Werte $|E|$ sogar in einem noch etwas größeren Frequenzbereich praktisch völlig zu vernachlässigen. Da die Spannung am Kondensator dem Ausschlag bei mechanischen Schwingungen entspricht, ist dieses Ergebnis von großer Bedeutung für die Theorie der Oszillographen und Drehpulschreiber.

Für Dämpfungswinkel unter 45° ist die höchste Spannung am Kondensator gleich

$$u_m = \frac{|E|}{\sqrt{1 - 2 \cos^2 2\vartheta + \cos^2 2\vartheta}} = \frac{|E|}{\sin 2\vartheta}; \tag{301}$$

sie wird also wie der Strom mit zunehmender Dämpfung immer kleiner.

§ 118. **Zeichnerische Darstellung der Frequenzgänge komplexer Größen.** Wir haben bisher meist die Komponenten unserer komplexen Ströme und Spannungen als Ordinaten über einer Frequenzabszisse aufgetragen. Man kann den Frequenzgang einer komplexen Größe aber auch durch eine einzige Kurve darstellen, wenn man diese noch mit einer — im allgemeinen ungleichmäßigen — Frequenzteilung versieht. Um das einzusehen, braucht man sich nur zu erinnern, daß jede komplexe Größe in der Ebene der komplexen Zahlen durch einen Punkt dargestellt werden kann. Ändert sie sich mit der Frequenz, so durchläuft der darstellende Punkt eine Kurve, die, wenn man die zugehörigen Frequenzen an sie anschreibt, als vollständige Darstellung des Frequenzganges der komplexen Größe angesehen werden kann.

Wir wollen als erstes Beispiel den Scheinwiderstand \mathfrak{R} einer Reihenschaltung von Widerstand R und Induktivität L durch eine Frequenzkurve in der komplexen Ebene darstellen. Da

$$\mathfrak{R} = R + j\omega L, \tag{302}$$

ist die reelle Koordinate x des darstellenden Punktes gleich R , also von der Frequenz unabhängig, die imaginäre Koordinate y dagegen gleich ωL , also der Frequenz proportional. Der Frequenzgang des Scheinwiderstandes \mathfrak{R} wird daher dargestellt durch eine zur imaginären Achse parallele ganz im ersten Quadranten liegende gerade Linie, die von der imaginären Achse den Abstand R hat und mit einer gleichmäßigen Frequenzteilung versehen ist (Abb. 103). Je höher die Induktivität, um so größer sind die Abstände der Teilstriche.

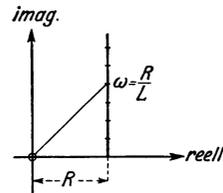


Abb. 103.

Zieht man vom Nullpunkt aus eine Gerade unter einem Winkel von 45° , so trifft sie die Frequenzteilung bei der Kreisfrequenz R/L . Ist z. B. $R = 17,5 \Omega$, $L = 0,2 \text{ H}$, so wird $R/L = 87,5/\text{sec}$; man sieht sofort, daß ein solcher Widerstand bei 50 mal größeren, also Sprechfrequenzen, sehr nahe den Charakter einer reinen Induktivität hätte.

Als zweites Beispiel stellen wir den Frequenzgang des Leitwertes $\mathfrak{G} = 1/\mathfrak{R}$ in der komplexen Ebene dar. Da

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}, \tag{303}$$

sind die rechtwinkligen Koordinaten x und y des darstellenden Punktes (mit der Abkürzung $1/R = G$):

$$x = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{G}{1 + \omega^2 G^2 L^2}, \quad (304)$$

$$y = -\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = -\omega G L \cdot x. \quad (305)$$

Dies ist eine „Parameterdarstellung“ der gesuchten Frequenzkurve mit der Frequenz ω als Parameter. Entnimmt man der Gleichung (305) die Größe $\omega G L$ und setzt sie in (304) ein, so erhält man

$$x = \frac{G}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \quad \left. \vphantom{x = \frac{G}{1 + \frac{y^2}{x^2}}} \right\} \quad (306)$$

oder

$$x^2 + y^2 = Gx;$$

d. h. der den Scheinleitwert darstellende Punkt läuft auf einem Halbkreis¹, der durch den Koordinatenanfang geht und dessen Mittelpunkt die Koordinaten $G/2$ und 0 hat (Abb. 104). Dieser Halbkreis gibt, wenn seine Frequenzteilung gemäß (305) sorgfältig ausgeführt wird, ein vollkommenes Bild von dem Frequenzgang des Scheinleitwerts. Das Bild zeigt, daß der Scheinleitwert mit steigender Frequenz eine immer stärker negative Phase annimmt und (wegen der drosselnden Wirkung der Induktivität) immer kleiner wird. Negative Phase bei einem Leitwert bedeutet natürlich dasselbe wie positive bei einem Widerstand.

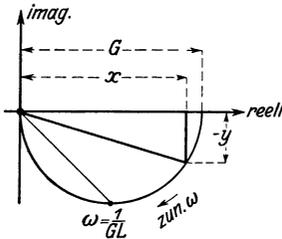


Abb. 104.

Auch hier trifft ein Strahl, den man vom Nullpunkt unter einem Winkel von -45° gegen die Abszissenachse ausgehen läßt, nach (305) die Frequenzkurve gerade bei der ausgezeichneten Frequenz $\omega = 1/GL = R/L$; man erkennt, daß sich alle höheren Frequenzen auf der linken Hälfte des Halbkreises zusammendrängen. Die Frequenzteilung ist daher offenbar auf der rechten Seite um so weiter, je kleiner der Widerstand R ist.

Liegt hinter der Induktivität noch eine Kapazität, ist also

$$\Re = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right), \quad (307)$$

so ist die Frequenzkurve des Widerstands nach wie vor eine gerade Linie (Abb. 105). Diese erstreckt sich aber jetzt von Werten mit unendlich großer negativer imaginärer Komponente bis zu Werten mit unendlich großer positiver imaginärer Komponente. Das Geradenstück im vierten Quadranten trägt die Frequenzen unterhalb, das Geradenstück im ersten Quadranten die Frequenzen oberhalb der Scheinfrequenz ω_0 .

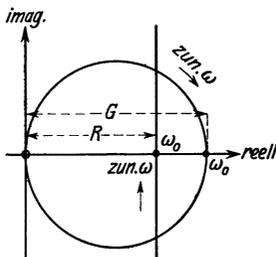


Abb. 105.

Ähnlich kann der Leitwert $\mathcal{G} = 1/\Re$ in Abhängigkeit von der Frequenz wieder durch einen Kreis mit dem Durchmesser G dargestellt werden². Nur fallen jetzt (Abb. 105) die Frequenzen 0 und ∞ mit dem Nullpunkt des Systems zusammen, während die Scheinfrequenz dem Punkte $G, 0$ entspricht. Die hohen Frequenzen liegen

¹ Der Halbkreis oberhalb der Abszissenachse ist nach (305) bedeutungslos, da die Frequenz nur positiv sein kann.

² Die Gleichung (306) ist ja unabhängig von ωL , ändert sich also nicht, wenn man ωL durch $\omega L - 1/\omega C$ ersetzt.

auf dem unteren, die tiefen auf dem oberen Halbkreis. Aus dem Bilde ist deutlich zu ersehen, daß die Scheinfrequenz für den Strom, der ja dem Leitwert proportional ist, zugleich die Bedeutung der Resonanzfrequenz hat. Da sich die Resonanzkurve um so spitzer erhebt, je geringer der Dämpfungswinkel ist, liegen die Frequenzpunkte in der Nähe der Scheinfrequenz bei kleiner Dämpfung weiter auseinander als bei großer.

Die hier betrachteten Frequenzkurven sind besondere Fälle der auch in der Starkstromtechnik viel verwendeten „Ortskurven“.

§ 119. **Konstruktion der Leitwertkurve aus der Widerstandskurve.** Die im vorigen Paragraph auf rechnerischem Wege abgeleiteten Kurven können natürlich auch durch fortgesetzte Anwendung der „Polarenkonstruktion“ des § 103 gefunden werden. Durch sie entsteht ein Kreis, der die gegebene Gerade in den beiden Punkten P und P^* (Abb. 106) schneidet, in denen sie auch von dem Inversionskreis geschnitten wird. Der Punkt D auf der reellen Achse ist das „Bild“ des Punktes A ; der Durchmesser OD des die Gerade abbildenden Kreises ist also nach § 103 gleich dem reziproken Wert des Abstandes OA der Geraden von der imaginären Achse, multipliziert mit dem Quadrate des Inversionshalbmessers.

Die Frequenzteilung des Bildkreises ergibt sich ebenfalls punktweise. Beachtet man, daß die durch die Polarenkonstruktion gefundenen Punkte¹ noch an der reellen Achse zu spiegeln sind, so erkennt man, daß die Frequenzen vom Nullpunkt bis wieder zum Nullpunkt im Sinn des Uhrzeigers wachsen, ganz wie wir es im vorigen Paragraph gefunden hatten.

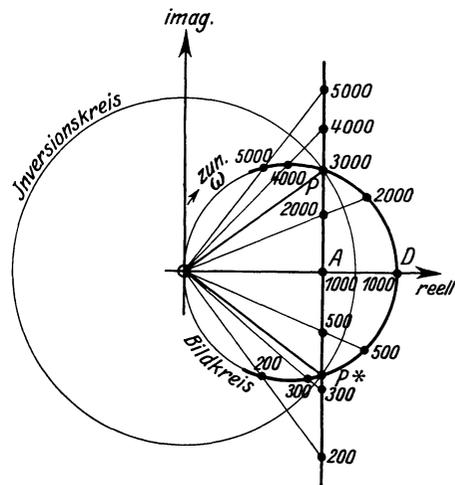


Abb. 106.

§ 120. **Ortskurven, insbesondere Kreisdiagramme².** Die in den beiden vorhergehenden Paragraphen betrachteten Kurven sind besondere Fälle der in der Fernmeldetechnik so wichtigen Frequenzkurven in der komplexen Ebene. Diese sind im allgemeinsten Fall Veranschaulichungen für Funktionen von der Form $\mathfrak{B} = f(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots \omega)$, wo die Größen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$ konstante komplexe Größen sind, ω aber die veränderliche Frequenz bedeutet.

Wir wollen in diesem Paragraph das Problem insofern noch etwas allgemeiner fassen, als wir den Parameter ω als beliebigen reellen Parameter ansehen, bei dessen Veränderung die gesuchte Kurve durchlaufen wird. Außer der Frequenz kann ω z. B. auch eine veränderliche Induktivität oder Kapazität bedeuten oder auch irgendeine Funktion der Frequenz, z. B. den in den §§ 106 und 116 verwendeten Ausdruck $\eta - 1/\eta$.

Von besonderer Wichtigkeit für alle Anwendungen ist die durch eine gebrochene rationale Funktion 1. Grades

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \omega}{\mathfrak{C} + \mathfrak{D} \omega} \quad (308)$$

¹ In Abb. 106 sind nur diese auf dem Bildkreis aufgetragen.

² Vgl. O. Bloch: Die Ortskurven der graphischen Wechselstromtechnik. Zürich 1917.

dargestellte Kurve; wir wollen sie im folgenden etwas näher betrachten. Zur Vereinfachung bringen wir ihre Gleichung durch Division in die Form

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} + \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}{\mathfrak{C} + \mathfrak{D}\omega} \tag{309}$$

und untersuchen Schritt für Schritt deren geometrische Bedeutung.

Durch $\mathfrak{D}\omega$ zunächst wird offenbar eine Gerade von der Richtung des Vektors $\mathfrak{D} = |\mathfrak{D}| \angle \delta$ dargestellt, die durch den Nullpunkt der komplexen Ebene geht.

Sie trägt eine gleichmäßige Frequenzteilung.

Auch der Funktion $\mathfrak{C} + \mathfrak{D}\omega$ entspricht eine Gerade; sie geht jedoch nicht mehr durch den Nullpunkt, sondern mit der Neigung des Vektors \mathfrak{D} durch den Punkt $\mathfrak{C} = |\mathfrak{C}| \angle \gamma$ (Abb. 107). Ihre Teilung ist wie die der Geraden $\mathfrak{D}\omega$ gleichmäßig.

Bei einem komplexen Widerstand $R + j\omega L$ z. B. ist $\mathfrak{C} = R$, $\mathfrak{D} = jL$, $\gamma = 0^\circ$, $\delta = 90^\circ$; die zugehörige Frequenzkurve ist also eine zur imaginären Achse parallele Gerade durch den Punkt $\mathfrak{C}(R, 0)$ mit gleichmäßiger Frequenzteilung.

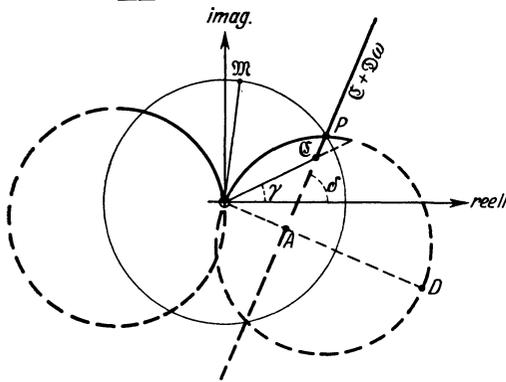


Abb. 107.

Der Bruch

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C} + \mathfrak{D}\omega} = \frac{\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{C} + \mathfrak{D}\omega} \tag{310}$$

wird durch den zu der Geraden $\mathfrak{C} + \mathfrak{D}\omega$ mit der Potenz \mathfrak{M} inversen Kreis (oder Kreisbogen) durch den Nullpunkt der komplexen Ebene dargestellt (Abb. 107). Durch den Zusatzvektor $\mathfrak{B}/\mathfrak{D}$ wird dieser Kreis in der komplexen Ebene noch um eine gewisse Strecke in einer bestimmten Richtung verschoben.

Die Funktion \mathfrak{B} der Gleichung (308) durchläuft also bei Variation des reellen Parameters ω einen irgendwie in der komplexen Ebene liegenden, mit einer ω -Teilung versehenen Kreis¹.

Von besonderem Interesse ist in der Regel der Durchmesser des Bildkreises. Er ist nach § 119 gleich dem Kehrwert des kürzesten Abstandes OA (Abb. 107) der Geraden $\mathfrak{C} + \mathfrak{D}\omega$ vom Nullpunkt, multipliziert mit dem Quadrat des Betrages der Potenz \mathfrak{M} . Für den kürzesten Abstand OA läßt sich aus Abb. 107 der Wert

$$OA = |\mathfrak{C}| \sin(\delta - \gamma) \tag{311}$$

ablesen.

Für einen Leitwert $1/(R + j\omega L)$ wird hiernach der kürzeste Abstand gleich R und der Durchmesser gleich $1/R = G$ in Übereinstimmung mit Abb. 105.

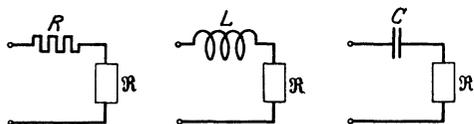


Abb. 108.

§ 121. Umbildung eines komplexen Widerstandes durch eine Reihen- oder Parallelschaltung. Wir wollen jetzt einige Fälle betrachten, wo der Parameter ω nicht die Frequenz bedeutet. Die allgemeine Aufgabe soll sein, zu untersuchen, wie sich der einen

komplexen Widerstand \mathfrak{R} in der komplexen Ebene darstellende Punkt verschiebt, wenn ihm ein Widerstand, eine Induktivität oder eine Kapazität vor- oder parallelgeschaltet wird.

¹ Schenkel, M.: ETZ 22, 1044 (1901).

Wir beginnen mit der Reihenschaltung (Abb. 108). Nennen wir den Scheinwiderstand des durch die Zuschaltung entstehenden Zweipols \mathfrak{Z} , so ist ohne weiteres klar, daß sich der Punkt \mathfrak{Z} (vgl. Abb. 109) von dem Punkt \mathfrak{R} aus bei Vorschaltung eines allmählich zunehmenden Widerstandes horizontal nach rechts, bei Vorschaltung einer allmählich zunehmenden Induktivität dagegen senkrecht nach oben verschiebt. Auch bei Vorschaltung einer Kapazität wandert der Punkt \mathfrak{Z} auf einer Vertikalen, aber mit abnehmender Kapazität von dem Punkte \mathfrak{R} aus nach unten. Diese Ergebnisse stehen mit dem Inhalt des vorigen Para-

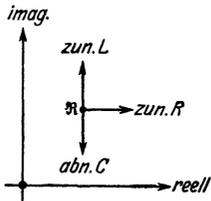


Abb. 109.

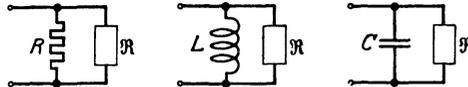


Abb. 110.

graphen nicht in Widerspruch, weil die geraden Linien als Kreise mit unendlich großem Radius aufgefaßt werden können.

Etwas verwickelter liegen die Verhältnisse bei den Parallelschaltungen (Abb. 110). Schalten wir dem komplexen Widerstand \mathfrak{R} einen veränderlichen reinen Widerstand R parallel, so läßt sich der Scheinwiderstand \mathfrak{Z} durch Erweitern mit \mathfrak{R}^*/R [vgl. Anhang 5. a)] in die Form

$$\mathfrak{Z} = \frac{R \mathfrak{R}}{R + \mathfrak{R}} = \frac{|\mathfrak{R}|^2}{\mathfrak{R}^* + |\mathfrak{R}|^2/R} \quad (312)$$

bringen. Der Nenner entspricht bei Verkleinerung von R einer von dem Punkt \mathfrak{R}^* ausgehenden horizontalen geraden Linie (Abb. 111). Invertiert man diese gemäß (312) mit $|\mathfrak{R}|$ als Potenz, so erhält man einen auf der imaginären Achse reitenden Kreis durch den Nullpunkt; auf diesem läuft der Scheinwiderstand \mathfrak{Z} , wenn man den Parallelwiderstand R abnehmen läßt, von \mathfrak{R} aus in den Nullpunkt hinein¹. Man nennt den Kreis auch den „Resistanzkreis“ durch \mathfrak{R} .

Ist dem komplexen Widerstand \mathfrak{R} dagegen eine Induktivität parallel geschaltet, so setzt man ähnlich wie vorher

$$\mathfrak{Z} = \frac{j \omega L \mathfrak{R}}{j \omega L + \mathfrak{R}} = \frac{|\mathfrak{R}|^2}{\mathfrak{R}^* - j \frac{|\mathfrak{R}|^2}{\omega L}} \quad (313)$$

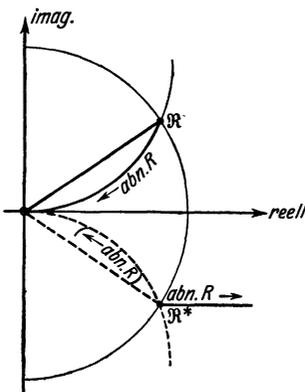


Abb. 111.

Hier wird der Nenner bei veränderlicher Induktivität L dargestellt durch eine von dem Punkt \mathfrak{R}^* aus senkrecht nach unten laufende Linie (Abb. 112); und zwar liegen die niedrigen Werte der auf ihr anzubringenden Induktivitätsteilung im Unendlichen, die hohen in der Nähe von \mathfrak{R}^* . Invertiert man wieder mit der Potenz $|\mathfrak{R}|$, so erhält man als Bild der Geraden das in der Abbildung dick ausgezogene Bogenstück eines auf der x -Achse reitenden Kreises

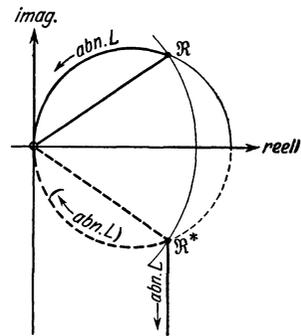


Abb. 112.

1 In den Abbildungen sind Angaben, die sich auf die dem Betrage nach invertierte, aber noch nicht gespiegelte Kurve beziehen, in Klammern gesetzt.

durch den Nullpunkt. Schaltet man also einem Widerstand \Re eine Induktivität von abnehmender Größe parallel, so wandert der Scheinwiderstand \mathfrak{B} von dem Punkte \Re aus auf dem angegebenen Kreis entgegengesetzt dem Uhrzeiger in den Nullpunkt hinein.

Ähnlich setzt man bei der Parallelschaltung einer Kapazität

$$\mathfrak{B} = \frac{\Re}{1 + j \omega C \Re} = \frac{|\Re|^2}{\Re^* + j \omega |\Re|^2 C}. \quad (314)$$

Jetzt hat man eine Gerade zu invertieren, die von dem Punkte \Re^* aus senkrecht nach oben läuft (Abb. 113). Man erkennt, daß jetzt bei zunehmender Kapazität der Punkt \mathfrak{B} von \Re aus auf demselben Kreise wie vorher im Sinne des Uhrzeigers in den Nullpunkt hineinläuft.

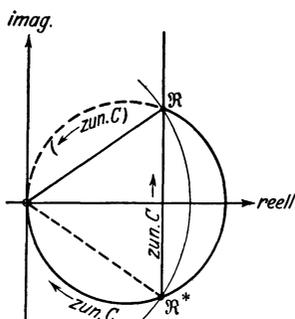


Abb. 113.

Man nennt den auf der reellen Achse reitenden durch den Nullpunkt gehenden Kreis auch den „Reaktanzkreis“ durch \Re .

Der Resistanzreis und der Reaktanzreis können zu jedem gegebenen Widerstand \Re ohne weiteres gezeichnet werden, da ihre

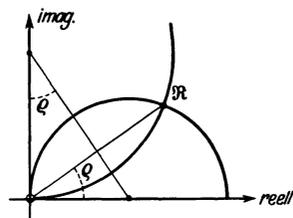


Abb. 114.

Mittelpunkte dort liegen, wo die Mittelsenkrechte des Vektors \Re die Achsen schneidet (Abb. 114). Bezeichnet man den Phasenwinkel von \Re mit ϱ , so ist der Halbmesser des Resistanzreises gleich $|\Re|/(2 \sin \varrho)$, der des Reaktanzreises gleich $|\Re|/(2 \cos \varrho)$.

§ 122. Umwandlung einer Hintereinanderschaltung in eine Parallelschaltung. Es sei die Aufgabe gestellt, eine Parallelschaltung aus Wirkwiderstand R und Blindwiderstand R' zu finden, deren Scheinwiderstand den vorgeschriebenen Wert \mathfrak{B} hat (Abb. 115). Zur Lösung brauchen wir nur zu beachten, daß der Scheinwiderstand von R allein bei

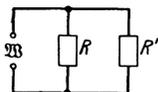


Abb. 115.

Parallelschaltung von R' so verändert wird, daß der darstellende Punkt auf einem Reaktanzreis läuft, und daß der Scheinwiderstand von R' allein durch Parallelschaltung von R so verändert wird, daß der darstellende

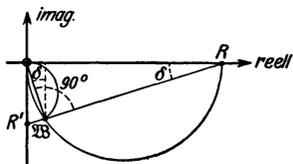


Abb. 116.

Punkt auf einem Resistanzreis läuft. Da auf beide Weisen der Punkt \mathfrak{B} erreicht werden muß, zeigt Abb. 116 die Konstruktion, durch die R und R' gefunden werden können.

Aus der Abbildung ist zu ersehen, weshalb es sich empfiehlt, bei der Messung der Ableitung und Kapazität von Kondensatoren oder Kabeln den Vergleichswiderstand aus einer Hintereinanderschaltung von Widerstand und Kapazität zu bilden (§ 109). Man kommt dann mit wesentlich kleineren Vergleichswiderständen aus.

V. Schaltvorgänge.

§ 123. Telephonie und Telegraphie. Mit Wechselströmen, wie sie im Abschnitt IV behandelt worden sind, hat es vor allem die Telephonie zu tun. Die Klänge und Geräusche, die durch sie übermittelt werden sollen, sind zwar keine reinen Sinusschwingungen konstanter Amplitude, können aber doch wenigstens meist mit

guter Annäherung als Aneinanderreihung ausgesprochen periodischer Vorgänge aufgefaßt werden.

Im Gegensatz hierzu arbeitet man in der Telegraphie mit Gleich- oder Wechselströmen, die in einer unregelmäßigen, nichtperiodischen zeitlichen Folge geschlossen oder unterbrochen werden. Für die Telegraphie ist daher die Theorie der Ein- und Ausschaltvorgänge grundlegend.

Die komplexe Rechnung, die ja auf der Voraussetzung beruht, daß die Ströme und Spannungen sinusartig wechseln, kann in der Theorie der Ein- und Ausschaltvorgänge nicht ohne weiteres verwendet werden. Diese wird damit mathematisch verwickelter und schwieriger als die Theorie der andauernden Schwingungen.

In diesem Abschnitt sollen nur die einfachsten, bei Umschaltungen auftretenden Erscheinungen untersucht werden. Da auf allen Einzelgebieten der Fernmeldetechnik Schaltvorgänge vorkommen — man denke z. B. an die Herstellung der Fernsprechverbindungen in den Ämtern — ist das Folgende nicht nur für die Telegraphie, sondern für die ganze Fernmeldetechnik von Bedeutung.

§ 124. Kreis mit Widerstand und Induktivität; Einschaltvorgang. Wir beginnen mit dem besonders einfachen Fall eines Kreises mit Widerstand R und Induktivität L (Abb. 117) — z. B. eines Kreises mit einem Morseapparat oder einem Relais — und untersuchen zunächst den Einschaltvorgang.

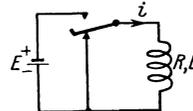


Abb. 117.

Nach dem Ohmschen Gesetz gilt vom Zeitpunkt $t = 0$ ab, also für positive Zeiten:

$$E = R i + L \frac{di}{dt}. \tag{315}$$

Diese „nichthomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten“ läßt sich integrieren, wenn man

$$R i - E = R i' \tag{316}$$

setzt; denn dann ist $di/dt = di'/dt$, und wir erhalten für die Hilfsgröße i' die „homogene“ Differentialgleichung:

$$- R i' = L \frac{di'}{dt}$$

oder

$$- R dt = L \frac{di'}{i'}. \tag{317}$$

Ihr Integral ist:

$$- R t = L \ln i' - L \ln c_1 = L \ln \frac{i'}{c_1}, \tag{318}$$

wo c_1 und damit auch $L \ln c_1$ eine noch zu bestimmende „Integrationskonstante“ bedeutet. Geht man zur Exponentialfunktion über, so erhält man

$$i = i' + \frac{E}{R} = \frac{E}{R} + c_1 e^{-\frac{R}{L}t}. \tag{319}$$

Die Konstante c_1 ergibt sich aus der Bedingung, daß im Augenblicke $t = 0$ der Strom noch gleich Null sein soll:

$$0 = \frac{E}{R} + c_1;$$

die Gleichung für den Strom nimmt daher schließlich die Form an:

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right). \tag{320}$$

Der Strom erreicht den Gleichstromwert E/R erst nach unendlich langer Zeit. Mit einer solchen Angabe ist jedoch praktisch nichts anzufangen; von Interesse ist nur die Raschheit des Stromanstiegs. Für diese erhält man nach Abb. 118, die den zeitlichen Verlauf des Stroms gemäß (320) darstellt, ein brauchbares Maß, wenn man im Koordinatenanfang eine Berührende an die Stromkurve

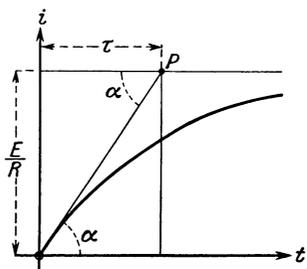


Abb. 118.

legt und die Zeit τ angibt, nach deren Ablauf sie die Horizontale durch den Endwert E/R schneidet (Punkt P). Aus der Zeichnung ergibt sich¹

$$\tau = \frac{E}{R} \operatorname{ctg} \alpha, \quad (321)$$

also, da $\operatorname{tg} \alpha = (di/dt)_{t=0} = E/L$,

$$\tau = \frac{E}{R} \frac{L}{E} = \frac{L}{R}. \quad (322)$$

Die Zeit τ heißt die „Zeitkonstante“ des Kreises. Je größer die Induktivität ist, um so langsamer erreicht der Strom seinen Endwert.

Statt der Zeitkonstante kann man auch die Zeit angeben, nach deren Ablauf der Strom nur noch um 1% oder 1‰ unter seinem Endwert liegt. Nach den Ansätzen

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,01 \quad \text{oder} \quad 0,001$$

sind diese Zeiten gleich $4,6\tau$ und $6,9\tau$. Umgekehrt ist zur Zeit $t = \tau$ die Exponentialfunktion erst auf $1/e = 36,8\%$ abgefallen.

Man kann das Anwachsen des Stroms nach dem Anschalten einer konstanten EMK auch als Überlagerung zweier Vorgänge deuten und sich vorstellen, daß sich zwar sofort der verlangte Endwert E/R einstellt, daß sich aber über ihn noch ein „flüchtiger“ Vorgang lagert, der mit der Konstante τ exponentiell verklingt. In der Gleichung (320) bedeutet der erste Posten den beständigen, der zweite den flüchtigen Vorgang.

§ 125. **Beliebiger Augenblick der Einschaltung.** Wenn wir vorausgesetzt haben, daß die EMK E im Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet wird, so bedeutet dies eine Vereinfachung, aber keine wesentliche Beschränkung. Denn schaltet man im Augenblicke $t = t_1$ ein, so muß der Vorgang natürlich von diesem Zeitpunkt ab ($t > t_1$) ebenso verlaufen wie vorher von $t = 0$ ab. Beziehen wir also die Zeit t' auf den Zeitpunkt t_1 als Nullpunkt (Abb. 119), so gilt natürlich

$$t' = t - t_1$$

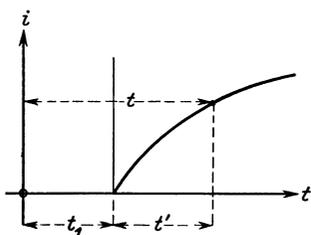


Abb. 119.

und für Zeiten $t > t_1$

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} \right) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t'}{\tau}} \right). \quad (323)$$

In der Tat wird jetzt z. B. $i = 0$ für $t = t_1$.

§ 126. **Abschaltung einer konstanten EMK ohne Öffnung des Stromkreises.** Schaltet man eine konstante EMK zur Zeit $t = 0$ plötzlich ab, ohne den Kreis zu unterbrechen, so gilt die Differentialgleichung

$$0 = R i + L \frac{di}{dt}. \quad (324)$$

¹ Die folgenden Gleichungen sind Zahlenwertgleichungen, bezogen auf geeignete Einheiten.

Da jetzt der Strom abnimmt, also di/dt negativ ist, wirkt der Energieinhalt der Spule wie eine Energiequelle von dem Antriebssinn der EMK E ; infolgedessen fließt der Strom noch eine geraume Zeit weiter. Nennt man den anfänglichen Strom i_0 , so lautet das Integral der Gleichung (324), da sie von vornherein homogen ist,

$$i = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{325}$$

Der Strom nimmt hiernach (Abb. 120) mit einer Raschheit, die wieder durch den reziproken Wert der Zeit $\tau = L/R$ gemessen wird, von i_0 auf Null ab. Der beständige Vorgang ist jetzt „ $i = 0$ “; über ihn ist der

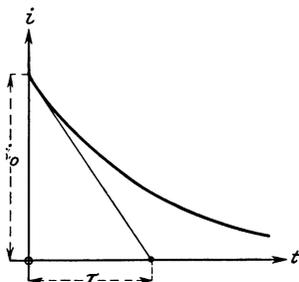


Abb. 120.

flüchtige Vorgang $i = i_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ gelagert.

Beim Telegraphieren mit Arbeitsstrom (Abb. 121) wird bei der Abschaltung die sendende Batterie durch den Widerstand des eigenen Telegraphenapparats ersetzt; der Stromkreis bleibt also (von der Schwebelage der Taste abgesehen) wie hier vorausgesetzt geschlossen.



Abb. 121.

§ 127. Telegraphier-

zeichen. Wird an einen Stromkreis abwechselnd eine EMK an- und wieder von ihm abgeschaltet, wie es beim Telegraphieren der Fall ist, so überlagern sich die in dem letzten Paragraph berechneten Ein- und Ausschaltvorgänge; denn man kann jede Ausschaltung als Anschaltung einer negativen EMK — unter Fortdauer aller früheren An- und Abschaltungen — auffassen.

Hiernach lassen sich die Stromkurven von Telegraphierzeichen leicht punktweise konstruieren. Man erkennt, daß sie nur bei sehr kleiner Zeitkonstante und im Verhältnis zu ihr großer Zeichendauer ein annähernd treues Bild des rechteckigen Verlaufs der EMK darstellen.

Auch rechnerisch kann man solche Kurven leicht zusammensetzen. Es werde z. B. ein Morsepunkt (oder ein Morsestrich) von der Dauer $\tau_0 = t_2 - t_1$ getastet. Dann gilt nach (323)

für $t_1 < t < t_2$:
$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} \right), \tag{326}$$

für $t_2 < t$:

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} \right) - \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t-t_2}{\tau}} \right) = \frac{E}{R} \left(e^{-\frac{t_0}{\tau}} - 1 \right) e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}. \tag{327}$$

Auch für den Abfall des Stroms gilt also die Zeitkonstante τ ; aber nur bei großem τ_0/τ ist die Abfallkurve „komplementär“ zu der Anstiegkurve.

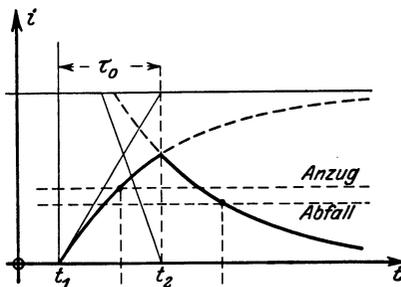


Abb. 122.

Abb. 122, die für $\tau_0 = \tau$ gezeichnet ist, zeigt, daß man bei einem solchen Punkt- oder Strichzeichen trotz der starken „Verzerrung“ die Anzugs- und die Abfalldurchflutung des Farbschreibers oder des Relais so einstellen kann, daß weder die Niederschrift auf dem Morsestreifen noch der durch das Relais ausgelöste Strom merklich verzerrt ist.

Beim Doppelstrombetrieb (Abb. 123) fließt während der Zeichen Strom in der einen, während der Zwischenräume Strom in der entgegengesetzten Richtung. Man kann in diesem Falle den Verlauf des Telegraphierstroms konstruieren, indem man einer konstanten EMK E negative und positive elektromotorische Kräfte vom Betrage $2E$ überlagert.

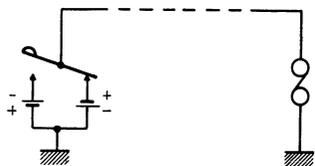


Abb. 123.

§ 128. Telegraphiergeschwindigkeit. Von der Dauer τ_0 des kürzesten Zeichenelements hängt die Telegraphiergeschwindigkeit ab, d. h. die Zahl der in der Zeiteinheit übermittelten Buchstaben. Man rechnet beim Morsebetrieb für jeden Strich $3\tau_0$, wo τ_0 die Dauer des Punktes ist, für die Zwischenräume zwischen Strichen und Punkten desselben Buchstabens τ_0 , für die Zwischenräume zwischen Buchstaben $3\tau_0$, zwischen Wörtern $5\tau_0$. Durch das Wort „Buchstabe“ sind dabei Buchstaben, Ziffern und Satzzeichen zusammengefaßt.

Im Durchschnitt kann man beim Morsebetrieb für den Buchstaben die Zeitdauer $8,5\tau_0$ rechnen; die Telegraphiergeschwindigkeit n ist daher annähernd gleich $1/(8,5\tau_0)$. Mit einer Punktdauer τ_0 von 50 ms erhält man 2,4 Buchst/ oder 140 Buchst/m.

Bezeichnet man bei einem beliebigen Telegraphenapparat mit z die Zahl der Stromschritte, die (im Durchschnitt) auf einen Buchstaben fallen, so ist offenbar allgemein

$$n z \tau_0 = 1. \tag{328}$$

Für den praktischen Betrieb kommt es auf die Telegraphiergeschwindigkeit n an. Die elektrischen Vorgänge auf den Leitungen dagegen hängen hauptsächlich von der Dauer des einzelnen Stromschrittes ab. Es ist üblich, ihren reziproken Wert, d. h. die Zahl der Stromschritte (kürzesten Stromimpulse) in der Zeiteinheit, anzugeben. Bezieht man $1/\tau_0$ auf die Sekunde, so schreibt man die Einheit „Baud“ hinzu (nach dem Erfinder des Baudot-Apparats).

Es ist also

$$n = \frac{1}{z} \frac{1/\tau_0}{\text{Baud}} \frac{\text{Buchst}}{s} = 60 \cdot \frac{1}{z} \frac{1/\tau_0}{\text{Baud}} \frac{\text{Buchst}}{m}. \tag{329}$$

Ob eine bestimmte Baudzahl auf einer Leitung ohne Verstümmelung erreicht werden kann, hängt nicht nur von der Art des Apparats und bei Handbetrieb von der Geschicklichkeit des Telegraphisten, sondern sehr wesentlich auch von den Eigenschaften der Leitung ab.

§ 129. Telegraphenschriften. Die älteste im öffentlichen Betrieb gebrauchte Telegraphenschrift ist die Morseschrift. Für sie ist die Zahl z (im letzten Paragraph 8,5) ein Mittelwert, der von der Art des zugrunde gelegten Morse-

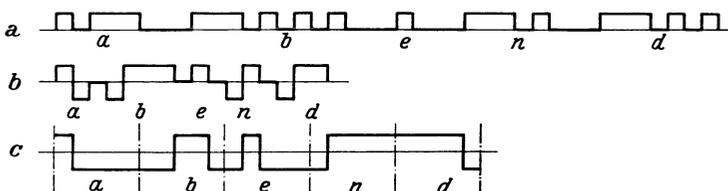


Abb. 124.

alphabets und von der Häufigkeit abhängt, mit der die einzelnen Buchstaben in der übermittelten Sprache vorkommen.

Gibt man unter Beibehaltung des Morsealphabets die Striche durch Stromstöße in der entgegengesetzten Richtung wieder, so erhält man die „Kabelschrift“

(„Heberschrift“, „Recordschrift“), die vor allem bei Unterseekabeln verwendet wird. Abb. 124 zeigt das Wort Abend bei *a* in gewöhnlicher Morseschrift, bei *b* in Kabelschrift. Man sieht, daß bei dieser die Zahl *z* wesentlich geringer ist; man kommt bis herunter auf $z \approx 3,5$.

Eine Folge von „Fünferzeichen“ (Abb. 124c) wird von den meisten Schnelltelegraphen und Fernschreibmaschinen übermittelt. Bei den zuletzt genannten rechnet man $z = 7$, da zu der Fünferkombination noch zwei Stromstöße hinzukommen für den Antrieb (start) und das Stillsetzen (stop) des Apparats. Mit 50 Baud erreicht man nach (329) eine Telegraphiergeschwindigkeit von 430 Buchst/m.

§ 130. **Unterbrechung eines Stromkreises.** Wird ein Stromkreis bei der Abschaltung seiner Stromquelle unterbrochen, so sieht es so aus, als könnte überhaupt kein Strom mehr fließen. Nach dem Induktionsgesetz würde aber bei plötzlichem völligem Verschwinden des Stroms eine unendlich große entgegenwirkende elektromotorische Kraft induziert; die in der Induktivität aufgespeicherte magnetische Energie kann ja nach dem Energiesatz nicht plötzlich auf Null abnehmen.

Auch nach der Unterbrechung muß also noch Strom fließen. Er schließt sich durch die Unterbrechungsstelle als Verschiebungsstrom; d. h. das Problem ist nur zu behandeln unter Berücksichtigung der Kapazität der Unterbrechungsstelle.

Unter Umständen kann auch ein Leitungsstrom zustande kommen. Wächst nämlich die Spannung an der Unterbrechungsstelle rasch genug an und entfernen sich die Leiterenden an der Unterbrechungsstelle verhältnismäßig langsam, so kann die Unterbrechungsstelle durch einen Funken durchschlagen werden.

Man erkennt, daß der Vorgang der „Unterbrechung“ wesentlich verwickelter ist als die in den § 124 und 126 behandelten Schaltvorgänge.

Beim Telegraphenbetrieb mit Ruhestrom (Abb. 125) wird der Stromkreis beim Abschalten (bei der Zeichengebung) vollständig unterbrochen.



Abb. 125.

§ 131. **Kreis mit Widerstand und Kapazität.** Wir behandeln nun den Fall der Ladung eines Kondensators über einen reinen Widerstand (Abb. 126). Nennen

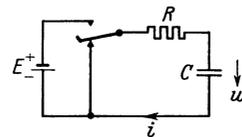


Abb. 126.

wir die Spannung am Dielektrikum des Kondensators *u*, so gilt die Gleichung

$$E = R i + u \tag{330}$$

oder, wenn wir differenzieren, nach § 46

$$0 = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}.$$

Hieraus folgt für den Vorgang der Ladung und — da *E* weggefallen ist — auch für den der Entladung:

$$i = c_1 e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{331}$$

Der Strom nimmt also exponentiell ab mit einer Geschwindigkeit, die jetzt durch eine neue Zeitkonstante, nämlich das Produkt *RC* geregelt wird. Wir nennen diese — zum Unterschied von der „ersten Zeitkonstante“ $\tau_1 = L/R$ — die „zweite Zeitkonstante“ τ_2 .

Zur Bestimmung der Konstante *c*₁ müssen wir diesmal die Spannung *u*

einer Anfangsbedingung unterwerfen und deshalb auf (330) zurückgehen:

$$u = E - R i = E - c_1 R e^{-\frac{t}{\tau_2}}. \tag{332}$$

Soll sie zur Zeit $t = 0$ gleich Null sein, so folgt $0 = E - c_1 R$ und damit

$$u = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right), \quad i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau_2}}. \tag{333}$$

Der Kondensator wirkt demnach bei Beginn der Ladung — da er ja noch keine Spannung hat — wie ein Kurzschluß: der volle Strom E/R ergießt sich in ihn. Erst mit steigender Ladung wächst seine Gegenspannung u , bis sie schließlich die treibende EMK E kompensiert und der Ladestrom verschwindet.

Ähnlich ist es beim Telegraphenkabel: der Endapparat bleibt verhältnismäßig lange fast stromlos, weil der „wahre“ Strom (§ 45) zunächst in großer Stärke als Verschiebungsstrom durch die Isolation fließt. Auf den durch den Endapparat fließenden Strom wirkt demnach die parallel geschaltete Kabelkapazität verzögernd wie eine in Reihe geschaltete Induktivität.

Bei sehr kleinem Widerstand springt der Ladestrom nach (333) sogar auf den sehr großen Wert E/R , um im nächsten Augenblick wieder auf Null abzusinken.

Der plötzliche, sprunghafte Anstieg des Ladestroms im Augenblicke $t = 0$ widerspricht natürlich dem Induktionsgesetz; eine Theorie, die befriedigen soll, muß die immer vorhandene Induktivität des Kreises berücksichtigen (s. § 138).

Wird ein Kondensator durch Abschaltung einer konstanten EMK über einen Widerstand entladen, so ist seine Anfangsspannung gleich u_0 zu setzen: $u_0 = -c_1 R$, und es ergibt sich daher

$$u = u_0 e^{-\frac{t}{\tau_2}}, \quad i = -\frac{u_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau_2}}. \tag{334}$$

Daß der Strom das negative Vorzeichen haben muß, geht aus den Zählpfeilen der Abb. 126 hervor.

Die auf den Belegungen des Kondensators sitzenden Elektrizitätsmengen ändern sich natürlich proportional den Kondensatorspannungen.

§ 132. Unverzweigter Kreis mit Widerstand, Induktivität und Kapazität. Sind in einem Kreis eine Induktionsspule mit Wirkwiderstand und ein Kondensator hintereinandergeschaltet (Abb. 127), so gilt für den Fall der Einschaltung einer EMK E nach dem Ohmschen Gesetz

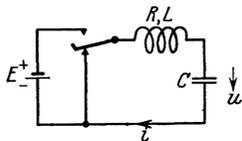


Abb. 127.

$$E = R i + L \frac{di}{dt} + u.$$

Führt man an Stelle des Stroms die Spannung u am Kondensator ein, so erhält man

$$E = RC \frac{du}{dt} + LC \frac{d^2u}{dt^2} + u. \tag{335}$$

Diese Differentialgleichung muß zunächst wieder homogen gemacht werden durch Einführung einer Hilfsgröße u' :

$$u - E = u'. \tag{336}$$

Damit nimmt sie die Form an:

$$\frac{d^2u'}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du'}{dt} + \frac{u'}{LC} = 0. \tag{337}$$

Hier ist der Koeffizient R/L des zweiten Glieds gleich dem reziproken Wert der ersten Zeitkonstante τ_1 , der Koeffizient des letzten Glieds dagegen gleich dem Quadrat der schon im § 106 eingeführten Scheinfrequenz ω_0 . Da

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{L}{R} \cdot RC}} = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}}, \quad (338)$$

hängt die Lösung davon ab, in welchem Verhältnis die beiden Zeitkonstanten zueinander stehen, ob die erste überwiegt (hohe Induktivität, kleiner Widerstand und kleine Kapazität) oder die zweite (niedrige Induktivität, hoher Widerstand und hohe Kapazität). Wir führen als bequemes Maß für das genannte Verhältnis durch die Gleichung

$$\sin \vartheta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \sqrt{\frac{\tau_2}{4\tau_1}} = \frac{1}{2\tau_1 \omega_0} = \frac{\tau_2 \omega_0}{2} \quad (339)$$

wieder den „Dämpfungswinkel“ ϑ ein. Da τ_2 größer als $4\tau_1$ sein kann, lassen wir die Möglichkeit offen, daß ϑ komplex wird.

Versuchen wir nun die Gleichung (337) wieder durch einen exponentiellen Ansatz $u' = e^{\delta t}$ zu lösen, so erhalten wir als Bedingungsgleichung für den Faktor δ die quadratische Gleichung:

$$\delta^2 + \frac{\delta}{\tau_1} + \omega_0^2 = 0. \quad (340)$$

Es muß also sein:

$$\delta = -\frac{1}{2\tau_1} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau_1^2} - \omega_0^2}. \quad (341)$$

Nun ist aber nach (339)

$$2\tau_1 = \frac{1}{\omega_0 \sin \vartheta}, \quad \frac{\tau_2}{2} = \frac{\sin \vartheta}{\omega_0}. \quad (342)$$

Die beiden Wurzeln von (340) können daher auch in der einfachen Form

$$\delta = -\frac{1}{2\tau_1} \pm \sqrt{\omega_0^2 \sin^2 \vartheta - \omega_0^2} = -\frac{1}{2\tau_1} \pm j \omega_0 \cos \vartheta \quad (343)$$

dargestellt werden.

§ 133. **Schwingungsvorgang.** Wir wollen zunächst voraussetzen, der Dämpfungswinkel sei ein reeller Winkel zwischen 0 und 90° , also

$$0 < \frac{\tau_2}{4\tau_1} < 1 \quad \text{oder} \quad R < 2 \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (344)$$

Dann ist auch

$$\omega_0 \cos \vartheta = \omega \quad (345)$$

reell, und es empfiehlt sich, die allgemeine Lösung gemäß (343) in der Form

$$u = E + e^{-\frac{t}{2\tau_1}} (c'_1 \angle \omega t + c'_2 \angle -\omega t) \quad (346)$$

anzuschreiben. Führt man hier trigonometrische Funktionen ein, so erhält man

$$u = E + e^{-\frac{t}{2\tau_1}} \{ (c'_1 + c'_2) \cos \omega t + j (c'_1 - c'_2) \sin \omega t \}. \quad (347)$$

Die Spannung am Kondensator kann aber nur reell sein. Man muß also auch setzen können:

$$c'_1 + c'_2 = c_1, \quad j (c'_1 - c'_2) = c_2, \quad (348)$$

wo jetzt c_1 und c_2 reell sind. Damit wird

$$u = E + e^{-\frac{t}{2\tau_1}}(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) \quad (349)$$

und

$$i = C e^{-\frac{t}{2\tau_1}} \left\{ \left(-\frac{c_1}{2\tau_1} + \omega c_2 \right) \cos \omega t - \left(\frac{c_2}{2\tau_1} + \omega c_1 \right) \sin \omega t \right\}. \quad (350)$$

Die in diesen Gleichungen vorkommenden Ausdrücke

$$e^{-\frac{t}{2\tau_1}} \cos \omega t \quad \text{und} \quad e^{-\frac{t}{2\tau_1}} \sin \omega t \quad (351)$$

stellen „gedämpfte Sinusschwingungen“ dar. Gibt man den trigonometrischen Funktionen ihre beiden äußersten Werte ± 1 , so erhält man die beiden „Einhüllenden“ (vgl. Abb. 128) mit den Ordinaten

$$\pm e^{-\frac{t}{2\tau_1}}. \quad (352)$$

Zwischen diesen verlaufen die Ausdrücke (351) als allmählich abklingende Wellenlinien. Für die Schnelligkeit des Abklingens ist die doppelte erste Zeitkonstante maßgebend; der Abstand aufeinanderfolgender Nullpunkte¹ ist gleich der halben „wahren Schwingungsdauer“ $T = 2\pi/\omega$.

Die wahre Eigenfrequenz des Kreises ist wegen der Beziehung $\omega = \omega_0 \cos \vartheta$ immer kleiner als die Scheinfrequenz ω_0 . Ist ϑ sehr klein, so wird $\omega = \omega_0$.

§ 134. **Bestimmung der Konstanten.** Für den Vorgang der Ladung des Kondensators (also für die Einschaltung) gelten die Gleichungen:

$$0 = E + c_1, \quad 0 = -\frac{c_1}{2\tau_1} + \omega c_2.$$

Beim Strom ist demnach das Glied mit dem Kosinus ganz wegzulassen, und man erhält für die Konstanten:

$$c_1 = -E, \quad (353)$$

$$c_2 = \frac{c_1}{2\omega\tau_1} = -\frac{\omega_0 \sin \vartheta}{\omega_0 \cos \vartheta} E = -\operatorname{tg} \vartheta \cdot E, \quad (354)$$

$$-\left(\frac{c_2}{2\tau_1} + \omega c_1 \right) = \left(\omega_0 \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta} + \omega_0 \cos \vartheta \right) E = \frac{\omega_0}{\cos \vartheta} \cdot E. \quad (355)$$

Damit wird

$$\left. \begin{aligned} u &= E \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{2\tau_1}} (\cos \omega t + \operatorname{tg} \vartheta \cdot \sin \omega t) \right\} \\ &= E \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{2\tau_1}} \frac{1}{\cos \vartheta} \cos(\omega t - \vartheta) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (356)$$

und

$$i = E \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{t}{2\tau_1}} \frac{1}{\cos \vartheta} \cos(\omega t - 90^\circ) = E \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\frac{t}{2\tau_1}} \frac{1}{\cos \vartheta} \sin \omega t. \quad (357)$$

Der flüchtige Bestandteil der Spannung und der Strom verlaufen hiernach

¹ Genau in der Mitte zwischen zwei Nullpunkten trifft die Kurve die eine der beiden Einhüllenden. Mit diesen Treffpunkten fallen aber die Maxima und Minima der Kurve im allgemeinen nicht zusammen.

als gedämpfte Sinuslinien. Der Strom¹ (Abb. 128) bleibt hinter der Spannung um $90^\circ - \vartheta$ zurück; wir haben ja einen Kreis mit überwiegender Induktivität. Für $\vartheta = 90^\circ$ sind Spannung und Strom in Phase; dann kompensieren sich die Induktivität und die Kapazität. Die Kurve der Spannung (Abb. 129) ergibt sich, wenn man eine nach unten aufgetragene gedämpfte und in horizontaler Richtung um die Zeitdifferenz $\frac{\vartheta}{2\pi} T$ verschobene Kosinuslinie um die Strecke E nach oben rückt.

Bei dem Vorgang der Entladung (Ausschaltung) fällt wieder die erste Zahl 1 in der geschweiften Klammer von (356) weg, und die Vorzeichen der übrigen Glieder kehren sich um.

Mit hohen Dämpfungswinkeln sind nach § 116 flache Resonanzkurven verbunden. Soll also ein Kreis nur in der Umgegend einer bestimmten Frequenz

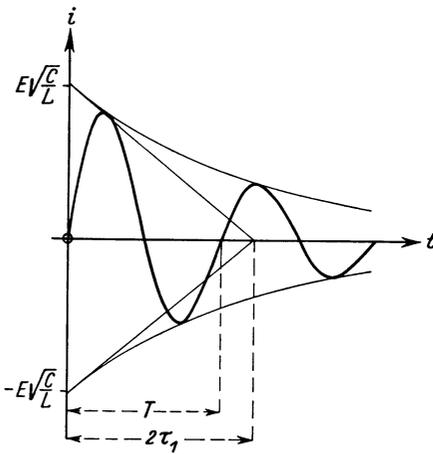


Abb. 128.

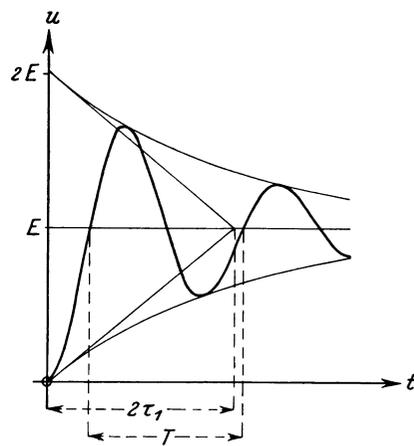


Abb. 129.

(der Resonanzfrequenz) stark erregt werden können, so schwingt er langsam ein; denn dann darf man ihm nur einen kleinen Dämpfungswinkel geben. Hohe Abstimmstärke (Trennschärfe, Selektivität) ist also nicht vereinbar mit hoher Einschwinggeschwindigkeit. Legt man bei den technischen Anwendungen auf beides Wert, so wählt man eine gewisse mittlere Größe der Dämpfung.

§ 135. **Logarithmisches Dekrement.** Bei gedämpften Sinusschwingungen ist es — vor allem in der Physik und in der Hochfrequenztechnik — üblich, als Maß für ihre Dämpfung das (logarithmische) „Dekrement“ zu nehmen. Darunter versteht man den natürlichen Logarithmus des Verhältnisses zweier aufeinanderfolgender Ausschläge nach derselben Seite.

Im § 134 war z. B. die Amplitude des flüchtigen Stromes proportional zu

$$e^{-\frac{t}{2\tau_1}} \sin \omega t = e^{-\frac{t}{2\tau_1}} \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

Sind nun t_1 und t_2 zwei um die Schwingungsdauer T auseinanderliegende Zeiten ($t_2 = t_1 + T$), so verhält sich der Strom zur Zeit t_1 zu dem Strom zur Zeit t_2 wie

$$\left(e^{-\frac{t_1}{2\tau_1}} \sin \frac{2\pi t_1}{T} \right) : \left(e^{-\frac{t_1+T}{2\tau_1}} \sin \frac{2\pi(t_1+T)}{T} \right) = e^{\frac{T}{2\tau_1}} : 1. \quad (358)$$

¹ Die Abb. 128 und 129 sind mit $\vartheta = 7,5^\circ$ gezeichnet.

Das Dekrement δ ist also [vgl. § 132, Gleichung (342)]

$$\delta = \frac{T}{2\tau_1} = \frac{2\pi}{2\tau_1\omega} = \frac{2\pi\omega_0 \sin\vartheta}{\omega_0 \cos\vartheta} = 2\pi \operatorname{tg}\vartheta. \quad (359)$$

Wie der Dämpfungswinkel ist das Dekrement während der ganzen Dauer der Schwingung konstant: die Ausschläge nehmen in „geometrischer Progression“ ab.

Nach (359) gehört zum Dämpfungswinkel 45° das Dekrement 2π ; bei kleinem Dämpfungswinkel ist

$$\delta \approx 2\pi\vartheta = 0,1097 \frac{\vartheta}{\text{Grad}}. \quad (360)$$

§ 136. **Schwingungsfreier Vorgang.** Wenn die zweite Zeitkonstante größer ist als das Vierfache der ersten ($\tau_2 > 4\tau_1$), liefert die Gleichung (339), § 132, keinen reellen Dämpfungswinkel ϑ mehr. Dann setzen wir an Stelle von (339) unter Benutzung des Hyperbelkosinus (Anhang 4.)

$$\mathfrak{Cof}\Theta = \sqrt{\frac{\tau_2}{4\tau_1}} = \frac{1}{2\tau_1\omega_0} = \frac{\tau_2\omega_0}{2} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (361)$$

Das so eingeführte Θ ist wieder ein reelles Argument. Seinen Zusammenhang mit dem Dämpfungswinkel ϑ vermittelt die Rechenregel 4. d) des Anhangs: Es ist

$$\mathfrak{Cof}\Theta = \cos(j\Theta) = \sin(90^\circ + j\Theta) = \sin\vartheta,$$

also¹

$$\vartheta = 90^\circ + j\Theta. \quad (362)$$

Der Dämpfungswinkel ϑ wird demnach bei steigender zweiter Zeitkonstante, sobald er den Grenzwert 90° erreicht hat, komplex; sein reeller Teil bleibt auf 90° stehen, während sein imaginärer Anteil, eben das Argument Θ , von Null an zu wachsen beginnt.

Außer dem Parameter Θ führen wir bei der einen Lösung der quadratischen Gleichung (340) die Zeitkonstante τ_1 , bei der andern die Zeitkonstante τ_2 ein. Beachtet man, daß nach (362) $\cos\vartheta = -\sin j\Theta = -j\mathfrak{S}\sin\Theta$, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= -\frac{1}{2\tau_1} - j\omega_0 \cos\vartheta = -\frac{1}{2\tau_1} - \omega_0 \mathfrak{S}\sin\Theta \\ &= -\frac{1}{2\tau_1} - \frac{1}{2\tau_1 \mathfrak{Cof}\Theta} \mathfrak{S}\sin\Theta = -\frac{1}{\tau_1} \frac{1 + \mathfrak{I}\mathfrak{g}\Theta}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (363)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_2 &= -\frac{1}{2\tau_1} + j\omega_0 \cos\vartheta = -\frac{2}{\tau_2} \mathfrak{Cof}^2\Theta + \frac{2\mathfrak{Cof}\Theta}{\tau_2} \mathfrak{S}\sin\Theta \\ &= -\frac{2}{\tau_2} \mathfrak{Cof}\Theta (\mathfrak{Cof}\Theta - \mathfrak{S}\sin\Theta) \end{aligned} \right\} \quad (364)$$

oder nach dem Anhang 4. c)

$$\delta_2 = -\frac{2}{\tau_2} \frac{\mathfrak{Cof}\Theta}{\mathfrak{Cof}\Theta + \mathfrak{S}\sin\Theta} = -\frac{1}{\tau_2} \frac{2}{1 + \mathfrak{I}\mathfrak{g}\Theta}. \quad (365)$$

Für $\tau_2 > 4\tau_1$ gilt also die allgemeine Lösung

$$u = E + c_1 e^{\delta_1 t} + c_2 e^{\delta_2 t} = E + c_1 e^{-\frac{t}{\tau_1} \frac{1 + \mathfrak{I}\mathfrak{g}\Theta}{2}} + c_2 e^{-\frac{t}{\tau_2} \frac{2}{1 + \mathfrak{I}\mathfrak{g}\Theta}}. \quad (366)$$

Es lagern sich zwei flüchtige Vorgänge übereinander, die mit verschiedener Raschheit exponentiell verklingen. Der Faktor $2/(1 + \mathfrak{I}\mathfrak{g}\Theta)$, mit dem τ_1 multipliziert, durch den τ_2 dividiert ist, liegt zwischen 2 und 1.

¹ Wir definieren Θ so, daß ϑ immer im ersten Quadranten liegt.

Zahlenbeispiel¹. Es sei $\tau_1 = 20$ ms, $\tau_2 = 128$ ms. Dann ist $\tau_2/4\tau_1 = 1,6$; $\mathfrak{C}0\} \Theta = 1,265$; $\Theta = 0,713$; $\mathfrak{X}g \Theta = 0,612$; und daher

$$\delta_1 = -\frac{1}{1,240 \tau_1} \approx -\frac{1}{25 \text{ ms}}, \quad \delta_2 = -\frac{1}{0,806 \tau_2} \approx -\frac{1}{103 \text{ ms}}.$$

Die „wirksamen“ Zeitkonstanten liegen also enger beieinander als τ_1 und τ_2 selbst.

Nur bei ganz hoher Dämpfung Θ werden die Zeitkonstanten τ_1 und τ_2 unmittelbar wirksam. Dann wird nämlich $\mathfrak{X}g \Theta \approx 1$, und man erhält als Lösung

$$u = E + c_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + c_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}. \quad (367)$$

§ 137. **Grenzfall.** Zu dem „Grenzfall“ $\vartheta = 90^\circ$ darf man nur allmählich übergehen, indem man Θ zunächst als sehr klein voraussetzt. Man erhält [Anhang 4. e), 1. c), 2. a)]

$$\left. \begin{aligned} e^{-\frac{t}{\tau_1} \frac{1 + \mathfrak{X}g \Theta}{2}} &\approx e^{-\frac{t}{2\tau_1} (1 + \Theta)} = e^{-\frac{t}{2\tau_1}} \cdot e^{-\frac{\Theta t}{2\tau_1}} \approx e^{-\frac{t}{2\tau_1} \left(1 - \frac{\Theta t}{2\tau_1}\right)}, \\ e^{-\frac{t}{\tau_2} \frac{2}{1 + \mathfrak{X}g \Theta}} &\approx e^{-\frac{2t}{\tau_2} (1 - \Theta)} = e^{-\frac{2t}{\tau_2}} \cdot e^{\frac{2\Theta t}{\tau_2}} \approx e^{-\frac{2t}{\tau_2} \left(1 + \frac{2\Theta t}{\tau_2}\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (368)$$

Die allgemeine Lösung ist also (wegen $2/\tau_2 = 1/2\tau_1$)

$$u = E + e^{-\frac{t}{2\tau_1}} \left\{ c'_1 \left(1 - \frac{\Theta t}{2\tau_1}\right) + c'_2 \left(1 + \frac{\Theta t}{2\tau_1}\right) \right\} \quad (369)$$

oder, wenn man

$$c'_1 + c'_2 = c_1, \quad -(c'_1 - c'_2) \frac{\Theta}{2\tau_1} = c_2 \quad (370)$$

setzt²,

$$u = E + e^{-\frac{t}{2\tau_1}} (c_1 + c_2 t). \quad (371)$$

Auch in diesem Fall enthält das allgemeine Integral, wie man sieht, zwei willkürliche Konstanten, die entsprechend den Anfangsbedingungen festgesetzt werden können.

§ 138. **Bestimmung der Konstanten.** Wir betrachten wieder den Vorgang der Ladung. Zur Zeit $t = 0$ sei $u = 0$; daraus folgt

$$E + c_1 + c_2 = 0. \quad (372)$$

Ferner sei zur Zeit $t = 0$ auch der Strom und damit die Ableitung der Spannung nach der Zeit gleich Null. Das bedeutet:

$$\frac{c_1}{2\tau_1} (1 + \mathfrak{X}g \Theta) + \frac{2c_2}{\tau_2} \frac{1}{1 + \mathfrak{X}g \Theta} = 0 \quad (373)$$

oder, da

$$\frac{2}{\tau_2} = \frac{1}{2\tau_1 \mathfrak{C}0\}^2 \Theta \quad \text{und} \quad \frac{1}{1 + \mathfrak{X}g \Theta} = (1 - \mathfrak{X}g \Theta) \mathfrak{C}0\}^2 \Theta \quad (374)$$

ist,

$$c_1 (\mathfrak{X}g \Theta + 1) - c_2 (\mathfrak{X}g \Theta - 1) = 0. \quad (375)$$

Hieraus und aus der Bedingung (372) folgt

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \frac{E}{2} (\mathfrak{C}tg \Theta - 1), \\ c_2 &= -\frac{E}{2} (\mathfrak{C}tg \Theta + 1) \end{aligned} \right\} \quad (376)$$

¹ Tafeln der Hyperbelfunktionen sind z. B. von U. Meyer u. A. Deckert herausgegeben worden. Kempten: Kösel & Pustet 1924.

² Man darf also Θ deshalb nicht ohne weiteres gleich Null setzen, weil die unbestimmte Differenz $c'_1 - c'_2$ sehr groß sein kann.

und daher

$$u = E \left\{ 1 + \frac{\mathfrak{G} \operatorname{tg} \Theta - 1}{2} e^{\delta_1 t} - \frac{\mathfrak{G} \operatorname{tg} \Theta + 1}{2} e^{\delta_2 t} \right\}. \quad (377)$$

Da die Konstante c_1 bei großem Θ sehr klein ist, hängt der Anstieg der Spannung bei hoher Dämpfung so gut wie nur von der zweiten Zeitkonstante ab.

Etwas anders liegen die Verhältnisse beim Strom:

$$i = C (c_1 \delta_1 e^{\delta_1 t} + c_2 \delta_2 e^{\delta_2 t}). \quad (378)$$

Für hohe Dämpfung ist δ_1 groß, δ_2 klein; die beiden Faktoren $c_1 \delta_1$ und $c_2 \delta_2$ sind daher von derselben Größenordnung:

$$\left. \begin{aligned} c_1 \delta_1 &= -\frac{E}{2} (\mathfrak{G} \operatorname{tg} \Theta - 1) \frac{1}{2 \tau_1} (1 + \mathfrak{I} \operatorname{tg} \Theta) = -\frac{E}{4 \tau_1} (\mathfrak{G} \operatorname{tg} \Theta - \mathfrak{I} \operatorname{tg} \Theta) = -\frac{E}{\tau_2} \mathfrak{G} \operatorname{tg} \Theta, \\ c_2 \delta_2 &= \frac{E}{2} (\mathfrak{G} \operatorname{tg} \Theta + 1) \frac{1}{2 \tau_1} (1 - \mathfrak{I} \operatorname{tg} \Theta) = \frac{E}{4 \tau_1} (\mathfrak{G} \operatorname{tg} \Theta - \mathfrak{I} \operatorname{tg} \Theta) = \frac{E}{\tau_2} \mathfrak{G} \operatorname{tg} \Theta, \end{aligned} \right\} (379)$$

und es ergibt sich

$$i = \frac{E}{R} \mathfrak{G} \operatorname{tg} \Theta (e^{\delta_2 t} - e^{\delta_1 t}). \quad (380)$$

In einem Kreis von überwiegender Kapazität, aber nicht vernachlässigbarer Induktivität fällt also der Ladestrom zwar auch (vgl. § 131) in der Hauptsache mit der Zeitkonstante τ_2 ab; für seinen ersten Anstieg ist jedoch, wie aus (380), (363) und (365) leicht ableitbar, lediglich die Zeitkonstante τ_1 maßgebend. In dem Augenblick $t = 1/(\delta_2 - \delta_1) \cdot \ln(\delta_1/\delta_2)$ hat die Stromkurve ein Maximum.

Abb. 130 zeigt den zeitlichen Verlauf des Ladestroms und der Kondensatorspannung unter den Voraussetzungen des im § 136 betrachteten Zahlenbeispiels. Die einfachen Exponentialkurven, in die die beiden Schaulinien schließlich einmünden, sind gestrichelt gezeichnet.

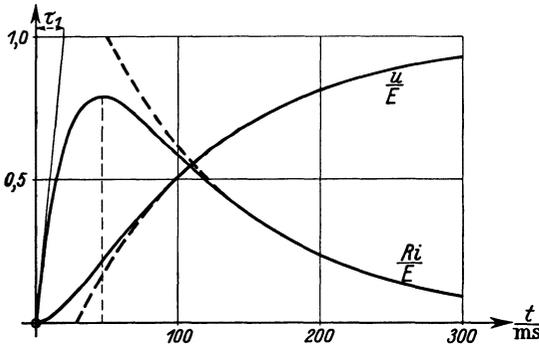


Abb. 130.

schließlich einmünden, sind gestrichelt gezeichnet.

Da im Anfang $i = C \, du/dt = 0$ ist, beginnt die Kurve der Kondensatorspannung mit horizontaler Tangente. Im Augenblick des Strommaximums hat sie einen Wendepunkt. Sie steigt dann im wesentlichen mit der Zeitkonstante τ_2 auf den Endwert.

§ 139. Funkenverhütung durch Kondensatoren. Wir sind nunmehr in der Lage, die Vorgänge, die bei der Unterbrechung eines Stromkreises mit nicht zu hohem Widerstand R und Induktivität L auf-

treten, etwas genauer zu untersuchen. Da die Kapazität C der Unterbrechungsstelle (des Kontakts) sicher nur klein ist, bleibt der Dämpfungswinkel weit unter 90° . Die Stromstärke sinkt daher von ihrem Ausgangswert i_0 aus schwingend auf den Wert Null ab. Nach Ablauf etwa einer Viertelschwingungsdauer ist sie gleich Null geworden; dafür liegt dann an der Unterbrechungsstelle nach § 134 ein Maximum der Spannung. Da während der ersten Viertelschwingungsdauer nur ein kleiner Teil der aufgespeicherten magnetischen Energie in Wärme verwandelt sein kann, enthält die Kapazität der Unterbrechungsstelle in dem betrachteten Augenblick fast die ganze ursprünglich vorhandene Energie des Stromkreises; man kann daher $L/2 \cdot i_0^2 \approx C/2 \cdot u^2$ setzen und erhält

$$u \approx \sqrt{\frac{L}{C}} i_0. \quad (381)$$

D. h. bei hoher Induktivität und hohem Anfangsstrom kann eine hohe Spannung an der Unterbrechungsstelle auftreten, eine Spannung, die unter Umständen zur Überbrückung der Unterbrechungsstelle durch einen Leitungsstrom (Funken, Lichtbogen) ausreicht.

Aus praktischen Rücksichten muß die Funkenbildung an den Kontakten verhindert werden. Hierzu dienen Kondensatoren, die man den Kontakten parallel schaltet. Durch sie wird der Dämpfungswinkel und mit ihm die Schein-schwingungsdauer und die wahre Schwingungsdauer vergrößert. Das Span-nungsmaximum wird daher heruntergedrückt; außerdem tritt es später ein, d. h. in einem Augenblick, wo der Abstand der Kontaktspitzen schon so groß geworden ist, daß die Strecke nicht mehr durchschlagen wird.

Aus verschiedenen Gründen empfiehlt es sich, dem Kondensator einen Wider-stand beizugeben.

Ist der Kontakt von einem Öffnungsfunken überbrückt worden, so tritt zu dem Wider-stand R der inkonstante Widerstand des Funkenwegs. Hierdurch kann bei kleinem R die Dauer des Stromabfalls stark verkürzt werden.

§ 140. Schaltvorgänge in zweimaschigen Systemen. Die Theorie des un-verzweigten Kreises mit Widerstand, Induktivität und Kapazität ist auch für die Vorgänge in den einfacheren zweimaschigen Schaltungen grundlegend.

Bei der Schaltung Abb. 131 z. B. kann der zeitliche Verlauf wenigstens des Kondensatorstroms und der Kondensatorspannung ohne weiteres hingeschrieben werden. Denn der Zweig R_3, C wird durch einen Generator aus reinen Widerständen betrieben, dessen Leerlaufspannung, die der EMK E des § 131 entspricht, durch

$$U^l = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E, \quad (382)$$

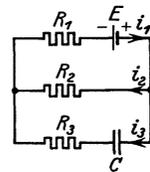


Abb. 131.

dessen innerer Widerstand durch

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (383)$$

dargestellt wird. An Stelle des früheren R ist daher

$$R_i + R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = \frac{S}{R_1 + R_2} \quad (384)$$

zu setzen, wo S eine Abkürzung für den Ausdruck $R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1$ ist, und es ergeben sich für den Ladestrom und die Spannung des Kondensators die Ausdrücke:

$$i_3 = \frac{R_1 + R_2}{S} \frac{R_2}{R_1 + R_2} E e^{-\frac{t}{\tau_2}} = \frac{R_2}{S} E e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad (385)$$

und

$$u = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right). \quad (386)$$

Wieder wirkt der Kondensator im ersten Augenblick wie ein Kurzschluß; denn der Anfangswert $R_2 E/S$ von i_3 ist gleich dem im § 15 abgeleiteten Wert. Die Spannung u steigt exponentiell auf den Leerlaufwert.

Die Zeitkonstante des Ladevorgangs ist

$$\tau_2 = (R_i + R_3) C = \frac{C S}{R_1 + R_2}. \quad (387)$$

Für den Strom i_2 folgt aus der Maschenregel:

$$\left. \begin{aligned} i_2 &= \frac{R_3}{R_2} i_3 + \frac{u}{R_2}, \\ &= \frac{R_3}{S} E e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \frac{E}{R_1 + R_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right), \\ &= \frac{E}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{S} E e^{-\frac{t}{\tau_2}} \end{aligned} \right\} \quad (388)$$

Auch der Strom durch den Querschluß R_2 beginnt also mit dem Werte

$$\frac{E}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{S} E = \frac{E}{S} \frac{S - R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_3}{S} E, \quad (389)$$

der sich bei kurzgeschlossenem Kondensator ergäbe, und steigt erst allmählich mit derselben Zeitkonstante auf den Endwert $E/(R_1 + R_2)$: Eine parallel geschaltete Kapazität wirkt verzögernd wie eine in Reihe geschaltete Induktivität (§ 131). Abb. 132 stellt den zeitlichen Verlauf der drei Ströme dar.

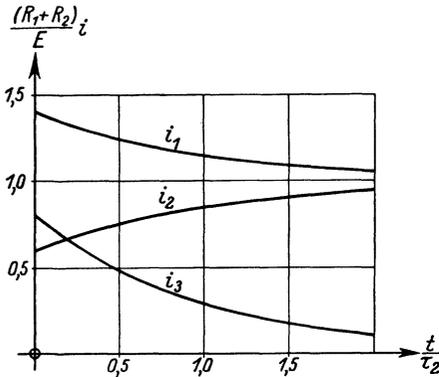


Abb. 132.

§ 141. Einschaltvorgang beim Telegraphenkabel. Bei einem einadrigen Telegraphenkabel fließen beständig durch die Isolation Verschiebungsströme nach der Erde ab. Es ähnelt also (Abb. 133) in groben Zügen der soeben betrachteten Schaltung für $R_3 = 0$: C ist die Kabelkapazität, R_1 der Widerstand der Sendearparate und der ersten Hälfte der Lei-

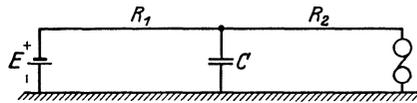


Abb. 133.

tung, R_2 der der zweiten Hälfte der Leitung und der Empfangsapparate. Beim Einschalten wächst daher der Sendestrom i_1 noch über seinen Endwert $E/(R_1 + R_2)$ hinaus; der Empfangsstrom i_2 dagegen steigt erst allmählich auf seinen Endwert. Für die Geschwindigkeit, mit der dies geschieht, ist maßgebend die zweite Zeitkonstante:

$$\tau_2 \approx C R_t = C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \approx C \frac{R_1}{2} \approx C \frac{R_1 + R_2}{4}. \quad (390)$$

Diese ist dem Produkt aus der Gesamtkapazität und dem Gesamtwiderstand des Kabels, also bei gegebener Kabelart auch dem Quadrate der Kabellänge proportional.

Die Zeitkonstante τ_2 ist ein angenähertes Maß für die Zeit, die der Strom am Kabelende braucht, um von einem sehr niedrigen Wert auf seinen Höchstwert anzusteigen. Wenn genau bekannt ist, wie dieser Strom nach der plötzlichen Anschaltung einer konstanten EMK verläuft, kann sein Anstieg für eine beliebige Aufeinanderfolge von Zeichen nach § 127 leicht konstruiert werden. Bei langen Kabeln werden die Zeichen abgeflacht oder verwaschen, also „verzerrt“. Sind die Verzerrungen sehr stark, so ist es unmöglich, Relais so einzustellen, daß sie die Zeichen sicher übertragen. Man kann dann u. U.

noch mit der „Kabelschrift“ (§ 129) und mit dem Heberschreiber (Syphonrecorder) arbeiten, der eine Kurve aufzeichnet, deren Entzifferung wenigstens dem Geübten auch bei stärkerer Verzerrung gelingt.

Aus der genaueren Theorie der Einschaltvorgänge auf Leitungen (15. Abschnitt) wird hervorgehen, daß der Endstrom auch beim stark idealisierten Kabel nach einer komplizierten Kurve ansteigt. Ein grobes Bild von der Verzerrung der Telegraphierzeichen erhält man, wenn man annimmt, daß der Strom am Ende mit einer gewissen Einschaltdauer τ linear auf den Gleichstromwert ansteigt

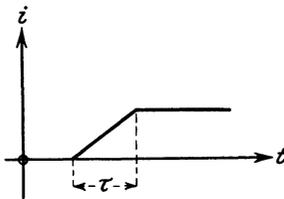


Abb. 134.

(Abb. 134). Abb. 135 zeigt, wie unter dieser Annahme das Morsezeichen n für $\tau_0 = \tau$ und für $\tau_0 = 2/3 \tau$ verzerrt wird. Man erkennt, daß es in beiden Fällen noch gut ankommt, daß man aber mit der Dauer des Stromschritts nicht viel unter $2/3 \tau$ hinunter gehen darf¹.

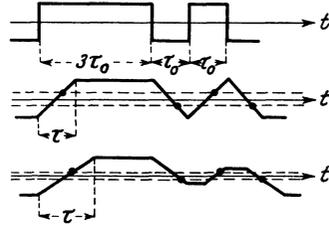


Abb. 135.

§ 142. Telegraphische Hilfsschaltungen. Beim Telegraphenkabel (Abb. 133) rührt der langsame Anstieg des Endstroms von der „Vorspannungswirkung“ der Kapazität und der hemmenden Wirkung des induktiven Endapparates her. Man kann den Anstieg des Endstroms versteilern durch Zufügung eines Reihenkondensators etwa am Ende der Leitung; eine Maßnahme, die schon von Varley (1862) angewendet worden ist. Ohne Kondensator verläuft der Strom am Ende etwa wie in Abb. 136 Kurve a , mit Kondensator wie Kurve b .

Ein Dauerstrom ist mit diesen Abschlußkondensatoren natürlich nicht möglich. Auch ist der erreichbare Höchststrom gegenüber der Schaltung ohne Kondensator herabgesetzt. Man muß daher mit höherer Spannung telegraphieren und sich mit Stromstößen begnügen.

Die Kapazität der Kondensatoren wählt man gewöhnlich etwa gleich $1/10$ der gesamten Kabelkapazität.

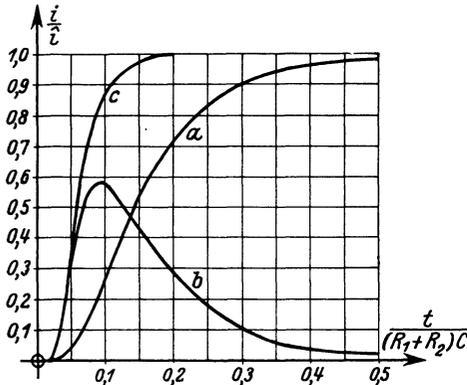


Abb. 136.

Will man längere Zeichen senden, so muß man dem Strom durch einen zum Abschlußkondensator parallelen Widerstand die Möglichkeit geben, seinen Gleichstromwert zu erreichen (Abb. 137). Diese Schaltung heißt in Deutschland „Maxwell-Erde“. Der

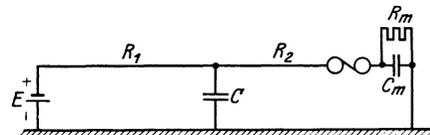


Abb. 137.

Widerstand muß ziemlich groß (etwa 4mal so groß wie der ganze Kabelwiderstand) genommen werden, damit der Kondensator im ersten Augenblick möglichst viel Strom in sich aufnimmt. Durch ihn wird natürlich der stationäre Strom verkleinert; man erhöht daher gleichzeitig die Telegraphierspannung.

Kurve c der Abb. 136 veranschaulicht die durch die Schaltung der Maxwell-Erde erreichbare Versteilerung der Kurve des am Ende eines Kabels eintreffen-

¹ Lüschen, F., u. K. Küpfmüller: Elektr. Nachr.-Techn. 4, 168 (1927).

den Stroms. Die Telegraphiergeschwindigkeit kann um etwa 50% erhöht werden.

§ 143. **Verwickeltere Schaltungen.** Das im § 140 angewandte Verfahren versagt bereits, wenn wir feststellen wollen, wie sich bei der Schaltung Abb. 138 nach einer plötzlichen Anschaltung der Stromquelle der Ladestrom und die Spannung des Kondensators und der die Spule durchfließende Strom zeitlich ändern. Man muß dann nach den Kirchhoffschen Regeln rechnen, und zwar in dem vorliegenden Falle einmal die Knoten- und zweimal die Maschenregel ansetzen; bei geeigneter Kombination ergeben sich wieder Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die genannten Veränderlichen.

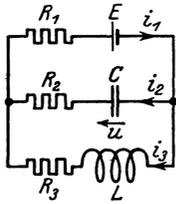


Abb. 138.

Auf die Einzelheiten der Rechnung gehen wir nicht ein, wollen aber das Folgende hervorheben. Wenn die Widerstände R_2 und R_3 gleich groß sind, überwiegt im ersten Augenblick bei weitem der Strom i_2 über den Strom i_3 . In dem Maße jedoch, wie sich der Kondensator lädt, sinkt sein Ladestrom; dafür steigt der Spulenstrom, bis er schließlich den Gleichstromwert $E/(R_1 + R_3)$ erreicht.

Wenn der wie im § 106 definierte Dämpfungswinkel der beiden parallelen Zweige gleich 90° ist, kompensieren sich die Induktivität und die Kapazität auch für den Einschaltvorgang (vgl. § 134). Der Strom i_1 springt bereits im ersten Augenblick auf seinen konstanten Endwert. Im Anfang fließt er nur durch die Kapazität, zum Schluß nur durch die Induktivität.

VI. Vierpole.

§ 144. **Der Begriff des Vierpols.** In der Fernmeldetechnik liegen im allgemeinen zwischen dem Energieerzeuger und dem Energieverbraucher Leitungen, Übertrager, Siebketten, Verstärker usw. Alle diese Gebilde haben zwei Eingangs- und zwei Ausgangsklemmen; man nennt sie daher „Vierpole“¹.

Ein Vierpol ist hiernach nicht einfach ein Gebilde mit vier Polen. Da die algebraische Summe der aus den vier Klemmen herausfließenden Ströme gleich Null sein muß, wären bei einem Gebilde mit vier gleichberechtigten Polen drei Ströme beliebig wählbar. Bei einem Vierpol dagegen (Abb. 139) ist der Strom,

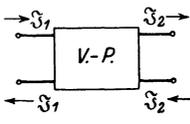


Abb. 139.

der in die eine Eingangsklemme hineinfließt, definitionsgemäß ebenso groß wie der Strom, der die andere Eingangsklemme verläßt; und für die Ausgangsklemmen gilt das Entsprechende. Bei den Vierpolen im engeren Sinne gibt es daher nur zwei willkürlich wählbare Ströme, den Strom \mathfrak{I}_1 an den Eingangs- und den Strom \mathfrak{I}_2 an den Ausgangsklemmen.

Unter „Vierpoltheorie“ versteht man den Inbegriff der Beziehungen, die man für Vierpole und ihre Zusammenschaltungen mit andern Vierpolen, Zweipolen und Zweipolquellen aufstellen kann, auch wenn man nichts davon weiß, wie sich diese Gebilde im einzelnen aus Widerständen, Induktivitäten, Gegeninduktivitäten, Kapazitäten und elektromotorischen Kräften zusammensetzen.

„Lineare“ Vierpole sind Vierpole, deren Grundgleichungen die Ströme und Spannungen nur in der ersten Potenz enthalten. Zu ihnen zählen alle Vierpole, deren Elemente den Kirchhoffschen Regeln gehorchen.

¹ Die Benennung stammt von F. Breisig: ETZ 42, 933 (1921). Den Anstoß zur Aufstellung einer „Vierpoltheorie“ hat vor allem die sehr fruchtbare Verwendung leitungs-theoretischer Begriffe in der „Kettenleitertheorie“ gegeben: K. W. Wagner: Arch. Elektrot. 3, 315 (1915).

Auch die Verstärkerröhren können in den bei den Anwendungen meist eingehaltenen Grenzen als lineare Vierpole aufgefaßt werden. Für sie gelten aber, wie wir sehen werden, nicht mehr die Kirchhoffschen Regeln; damit gehen manche von den Eigenschaften verloren, die gerade zur Aufstellung einer besonderen „Vierpoltheorie“ Veranlassung gegeben haben. Wir werden daher im folgenden die Verstärkerröhren von den Vierpolbetrachtungen ausschließen und uns auf die Untersuchung solcher Vierpole beschränken, für die die Kirchhoffschen Regeln gültig sind¹.

Elektromotorische Kräfte sollen in den von uns betrachteten Vierpolen nicht vorhanden sein.

§ 145. Die Grundgleichungen des linearen Vierpols. Wir denken uns einen Vierpol gegeben und an seinem Ausgang durch einen Widerstand \mathfrak{R}_e abgeschlossen (Abb. 140). Da er hierdurch zum Zweipol wird, gilt für das Verhältnis seiner Eingangsspannung zu seinem Eingangsstrom

$$\frac{u_1}{\mathfrak{S}_1} = \mathfrak{R}_1,$$

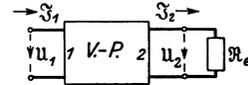


Abb. 140.

won \mathfrak{R}_1 von seinem Bau im einzelnen und von den Eigenschaften des Abschlußwiderstands \mathfrak{R}_e abhängt. Ersetzt man also \mathfrak{R}_e durch u_2/\mathfrak{S}_2 , so muß eine bestimmte nur von dem Bau des Vierpols abhängende Beziehung zwischen den vier Klemmengrößen u_1, \mathfrak{S}_1, u_2 und \mathfrak{S}_2 bestehen. Da sie nach Voraussetzung linear ist und elektromotorische Kräfte nicht vorhanden sein sollen, setzen wir

$$a_1 u_1 + b_1 \mathfrak{S}_1 + c_1 u_2 + d_1 \mathfrak{S}_2 = 0. \tag{391}$$

Ähnlich können wir uns den Vierpol auf seiner Eingangsseite durch einen komplexen Widerstand \mathfrak{R}_a abgeschlossen denken und dieselbe Überlegung auf das Verhältnis u_2/\mathfrak{S}_2 anwenden. Da zwischen \mathfrak{R}_a und \mathfrak{R}_e keine Beziehung bestehen soll, folgt eine zweite von der ersten unabhängige Gleichung

$$a_2 u_1 + b_2 \mathfrak{S}_1 + c_2 u_2 + d_2 \mathfrak{S}_2 = 0. \tag{392}$$

Löst man die Gleichungen (391) und (392) nach den Klemmenströmen \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 auf, so erhält man zwei Gleichungen der Form

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_1 &= \alpha u_1 + \beta_1 u_2, \\ \mathfrak{S}_2 &= \beta_2 u_1 + \gamma u_2. \end{aligned} \right\} \tag{393}$$

Diese lassen sich noch weiter vereinfachen. Man kann nämlich zeigen², daß immer dann, wenn die Kirchhoffschen Regeln und die in der Abb. 140 eingetragenen Zählpfeile gelten,

$$\beta_2 = -\beta_1 = -\beta \tag{394}$$

ist, so daß man ohne Verringerung der Allgemeinheit auch

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{S}_1 &= \alpha u_1 + \beta u_2, \\ \mathfrak{S}_2 &= -\beta u_1 + \gamma u_2 \end{aligned} \right\} \tag{395}$$

schreiben kann.

In der Fernmeldetechnik sind nun selten die Spannungen gegeben und die Ströme gesucht. Man fragt gewöhnlich nach der Spannung u_1 und dem Strom \mathfrak{S}_1 ,

¹ Über allgemeinere Vierpoltheorien s. F. Breisig: Elektr. Nachr.-Techn. 3, 161 (1926); A. Feige: Tel.- u. Fernspr.-Techn. 16, 61, 247, 343 (1927); F. Strecker u. R. Feldtkeller: Elektr. Nachr.-Techn. 6, 93 (1929).

² Den Beweis, der zuerst wohl von Kirchhoff gegeben worden ist, findet man z. B. bei L. R. Wilberforce: Phil. Mag. (6) 5, 489 (1903).

mit denen man eine vorgeschriebene Spannung u_2 und einen vorgeschriebenen Strom \mathfrak{S}_2 erzeugen kann. Wir bilden daher durch Multiplikation der ersten Gleichung (395) mit β , der zweiten mit α und Addition eine neue Gleichung und erhalten die Gleichungsgruppe:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\beta} \{ \gamma u_2 - \mathfrak{S}_2 \}, \\ \mathfrak{S}_1 &= \frac{1}{\beta} \{ (\beta^2 + \alpha \gamma) u_2 - \alpha \mathfrak{S}_2 \}. \end{aligned} \right\} \quad (396)$$

Hier sind alle Koeffizienten verschieden; ihre Determinante

$$\frac{1}{\beta^2} \begin{vmatrix} \gamma & -1 \\ \beta^2 + \alpha \gamma & -\alpha \end{vmatrix} = \frac{1}{\beta^2} (-\alpha \gamma + \beta^2 + \alpha \gamma)$$

ist jedoch, wie man sieht, gleich 1.

Gewöhnlich schreibt man für (396)

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \mathfrak{A}_1 u_2 + \mathfrak{B} \mathfrak{S}_2, \\ \mathfrak{S}_1 &= \mathfrak{C} u_2 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{S}_2; \end{aligned} \right\} \quad (397)$$

diese Gleichungen nennen wir die „Grundgleichungen“ des linearen Vierpols.

§ 146. Umkehr des Vierpols. Dreht man den Vierpol um (Abb. 141), so werden u_2 und \mathfrak{S}_2 zu Eingangs-, u_1 und \mathfrak{S}_1 zu Ausgangsgrößen, und es gilt, da die Determinante der Grundgleichungen gleich 1 ist:

Abb. 141.

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= \begin{vmatrix} u_1 & \mathfrak{B} \\ \mathfrak{S}_1 & \mathfrak{A}_2 \end{vmatrix} = \mathfrak{A}_2 u_1 - \mathfrak{B} \mathfrak{S}_1, \\ -\mathfrak{S}_2 &= - \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_1 & u_1 \\ \mathfrak{C} & \mathfrak{S}_1 \end{vmatrix} = \mathfrak{C} u_1 - \mathfrak{A}_1 \mathfrak{S}_1. \end{aligned} \right\} \quad (398)$$

Der umgekehrte Vierpol wird demnach durch dieselben Koeffizienten \mathfrak{B} und \mathfrak{C} charakterisiert; \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 jedoch müssen miteinander vertauscht werden. Die Koeffizienten \mathfrak{B} und \mathfrak{C} können wir uns als im Innern, im „Kern“ des Vierpols, sitzend vorstellen; die beiden andern, \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 , sind „äußere“ Parameter, sie tauschen bei Umkehr des Vierpols ihre Plätze.

Der Vorzeichenunterschied in den Gleichungen (397) und (398) hängt natürlich mit den Zählpfeilen der Abb. 140 und 141 zusammen.

Sind bei einem Vierpol die äußeren Parameter \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 einander gleich, so nennt man ihn einen „symmetrischen“ Vierpol¹. Die Längssymmetrie, um die es sich hier handelt, darf natürlich nicht mit der Quersymmetrie des Vierpols verwechselt werden, die wir bei unsern theoretischen Betrachtungen immer als vollkommen voraussetzen.

§ 147. Messung der Parameter \mathfrak{A}_1 , \mathfrak{A}_2 und \mathfrak{C} . Setzt man in der ersten Gleichung (397) $\mathfrak{S}_2 = 0$, führt man also die „Leerlaufbedingung“ ein, so ergibt sich (Abb. 142)

Abb. 142.

$$\left(\frac{u_1}{u_2} \right)' = \mathfrak{A}_1. \quad (399)$$

Der dimensionslose Parameter \mathfrak{A}_1 ist demnach gleich dem Verhältnis einer an den Vierpoleingang gelegten Spannung u_1 zu der Spannung u_2 , die durch

¹ Eine in der Längsrichtung symmetrisch zusammengebaute Vierpolschaltung ist immer auch vierpoltheoretisch symmetrisch. Das Umgekehrte braucht aber nicht zuzutreffen.

sie bei Leerlauf an seinem Ausgang hervorgerufen wird. Er kann ohne weiteres — etwa nach dem Kompensationsverfahren — gemessen werden.

Kehrt man den Vierpol um (Abb. 141), d. h. legt man an sein Ende 2 eine Spannung \mathfrak{U}_2 , während man das Ende 1 offen läßt, so mißt man hier eine Spannung \mathfrak{U}_1 , für die nach (398) die Gleichung

$$\left(\frac{\mathfrak{U}_2}{\mathfrak{U}_1}\right)' = \mathfrak{U}_2 \quad (400)$$

gilt. Auch der dimensionslose Parameter \mathfrak{U}_2 kann also ohne weiteres gemessen werden.

Speist man den Vierpol in Reihe mit einem Kompensationsapparat (Abb. 143) durch den unteren Anker einer Frankeschen Maschine, so kann man nach dem Verfahren des § III seinen Leerlaufwiderstand \mathfrak{B}_1^i messen, für den die Gleichungen (397) den Wert

$$\mathfrak{B}_1^i = \left(\frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{S}_1}\right)_{\mathfrak{S}_2=0} = \frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{C}} \quad (401)$$

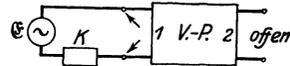


Abb. 143.

liefern. Dreht man den Vierpol um, so tritt an Stelle dieses Widerstands ein Widerstand \mathfrak{B}_2^i , für den

$$\mathfrak{B}_2^i = \left(-\frac{\mathfrak{U}_2}{\mathfrak{S}_2}\right)_{\mathfrak{S}_1=0} = \frac{\mathfrak{U}_2}{\mathfrak{C}} \quad (402)$$

gilt. Wie man sieht, kann jede dieser beiden Widerstandsbestimmungen nach Messung der Parameter \mathfrak{U}_1 und \mathfrak{U}_2 dazu dienen, den Leitwert \mathfrak{C} der Grundgleichungen zu bestimmen; denn es ist

$$\frac{1}{\mathfrak{C}} = \mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{B}_1^i}{\mathfrak{U}_1} = \frac{\mathfrak{B}_2^i}{\mathfrak{U}_2}. \quad (403)$$

Der Leitwert \mathfrak{C} ist eine Kerngröße; wir nennen seinen reziproken Wert \mathfrak{M} den „Kernwiderstand“. Nach den zweiten Grundgleichungen (397) und (398) ist der Kernwiderstand \mathfrak{M} gleich dem Verhältnis der sekundären Spannung zum primären Strom bei Leerlauf auf der Sekundärseite oder auch gleich dem Verhältnis der primären Spannung zum sekundären Strom bei Leerlauf auf der Primärseite:

$$\mathfrak{M} = \left(\frac{\mathfrak{U}_2}{\mathfrak{S}_1}\right)' = \left(-\frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{S}_2}\right)'. \quad (404)$$

Man kann jeden Vierpol durch die drei leicht bestimmbaren Parameter \mathfrak{B}_1^i , \mathfrak{B}_2^i und \mathfrak{M} charakterisieren. Am besten merkt man sich, daß statt \mathfrak{B}_1^i auch $\mathfrak{U}_1 \mathfrak{M}$ und statt \mathfrak{B}_2^i auch $\mathfrak{U}_2 \mathfrak{M}$ gesetzt werden darf. Die Vierpoltheorie, zu der man auf diese Weise geführt wird, entspricht der Zweipolquellentheorie des § 16, bei der wir ebenfalls einen Spannungsparameter, Widerstände und die Leerlaufbedingung benutzt haben. Eine „dual entsprechende“ Theorie ergibt sich auch hier (vgl. § 25), wenn man die Spannungen durch Ströme, die Widerstände durch Leitwerte und die Leerlaufbedingung durch die Kurzschlußbedingung ersetzt¹.

Aus (403) folgt, daß bei jedem Vierpol

$$\frac{\mathfrak{B}_2^i}{\mathfrak{B}_1^i} = \frac{\mathfrak{U}_2}{\mathfrak{U}_1} = \mathfrak{s}^2 \quad (405)$$

ist; bei jedem symmetrischen Vierpol ist daher mit $\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}_2$ zugleich $\mathfrak{B}_1^i = \mathfrak{B}_2^i$.

¹ Vgl. J. Wallot: Z. techn. Phys. 5, 490 (1924); Wiss. Veröff. Siemens-Konz. 8, H. 2, 45 (1929).

Der vierte Parameter \mathfrak{B} ergibt sich aus den drei andern nach der Determinantenbeziehung, die in unserer neuen Bezeichnung die Gestalt

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{W}'_1 \mathfrak{W}'_2}{\mathfrak{M}} - \mathfrak{M} \quad (406)$$

annimmt. Wir merken uns noch, daß für das oft vorkommende Verhältnis $\mathfrak{B}/\mathfrak{C} = \mathfrak{Z}^2$ die Gleichung

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}} = \mathfrak{Z}^2 = \mathfrak{B} \mathfrak{M} = \mathfrak{W}'_1 \mathfrak{W}'_2 - \mathfrak{M}^2 \quad (407)$$

gilt.

Es empfiehlt sich, sich von der Richtigkeit der im folgenden abzuleitenden Vierpolbeziehungen jedesmal dadurch zu überzeugen, daß man sie auf einen einfachen Vierpol anwendet. Als solcher kann z. B. der Spannungsteiler dienen.

§ 148. **Zusammenschaltung eines Vierpols mit einem Zweipol.** Beschaltet man einen Vierpol mit einem beliebigen Zweipol \mathfrak{R}_e (Abb. 140), so hat man die Zweipolgleichung

$$u_2 = \mathfrak{R}_e \mathfrak{S}_2$$

hinzuzunehmen. Aus ihr und aus der zweiten Grundgleichung (397) folgt

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{1}{\mathfrak{M}} (u_2 + \mathfrak{U}_2 \mathfrak{M} \mathfrak{S}_2) = \frac{1}{\mathfrak{M}} (\mathfrak{R}_e + \mathfrak{W}'_2) \mathfrak{S}_2$$

oder

$$\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_1} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}_e + \mathfrak{W}'_2} = u_2. \quad (408)$$

Wir nennen dieses Verhältnis die „Stromübersetzung“.

§ 149. **Zusammenschaltung eines Vierpols mit einer Zweipolquelle.** Ein Vierpol werde durch eine Zweipolquelle betrieben; wir denken uns diese durch eine EMK \mathfrak{C} und einen inneren Widerstand \mathfrak{R}_a ersetzt (Abb. 144). Dann gilt nach § 16

$$u_1 = \mathfrak{C} - \mathfrak{R}_a \mathfrak{S}_1. \quad (409)$$

Addiert man die beiden Grundgleichungen in der Form

$$\mathfrak{M} \mathfrak{C} - \mathfrak{M} \mathfrak{R}_a \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{U}_1 \mathfrak{M} u_2 + \mathfrak{B} \mathfrak{M} \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{W}'_1 u_2 + (\mathfrak{W}'_1 \mathfrak{W}'_2 - \mathfrak{M}^2) \mathfrak{S}_2,$$

$$\mathfrak{M} \mathfrak{R}_a \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{R}_a u_2 + \mathfrak{U}_2 \mathfrak{M} \mathfrak{R}_a \mathfrak{S}_2 = \mathfrak{R}_a u_2 + \mathfrak{W}'_2 \mathfrak{R}_a \mathfrak{S}_2,$$

so erhält man

$$\mathfrak{M} \mathfrak{C} = (\mathfrak{R}_a + \mathfrak{W}'_1) u_2 + \{ \mathfrak{W}'_2 (\mathfrak{R}_a + \mathfrak{W}'_1) - \mathfrak{M}^2 \} \mathfrak{S}_2$$

oder

$$u_2 = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{W}'_1} \mathfrak{C} - \left(\mathfrak{W}'_2 - \frac{\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{W}'_1} \right) \mathfrak{S}_2. \quad (410)$$

Die Zusammenschaltung verhält sich also so, als ob sie eine Leerlaufspannung

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{W}'_1} \mathfrak{C} = u_1 \mathfrak{C} \quad (411)$$

und einen inneren Widerstand

$$\mathfrak{W}'_2 = \mathfrak{W}'_2 - u_1 \mathfrak{M} \quad (412)$$

hätte. Wir nennen die Größe u_1 , die aus der Stromübersetzung durch Vertauschung von \mathfrak{W}'_2 mit \mathfrak{W}'_1 und von \mathfrak{R}_e mit \mathfrak{R}_a hervorgeht, die „Übersetzung der elektromotorischen Kraft“. Sie ist bei Stromquellen geringen inneren Wider-

stands (z. B. Akkumulatorenbatterien) nur wenig verschieden von der Leerlaufspannungsübersetzung $(u_2/u_1)^l = 1/\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}/\mathfrak{W}_1^l$.

Die Zusammenschaltung einer Zweipolquelle mit einem Vierpol kann also als eine einzige Zweipolquelle aufgefaßt werden, deren Leerlaufspannung gleich der übersetzten elektromotorischen Kraft und deren innerer Widerstand gleich \mathfrak{W}_2 ist.

§ 150. **Zusammenschaltung einer Zweipolquelle, eines Vierpols und eines verbrauchenden Zweipols.** Die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen erlauben, die beiden Klemmenströme eines Vierpols als Funktionen seiner Parameter und der Parameter der Stromquelle und des Verbrauchers unmittelbar hinzuschreiben. Nach dem Helmholtzschen Satz (38) im § 17 ist

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{u_1 \mathfrak{E}}{\mathfrak{W}_2 + \mathfrak{R}_e} = \frac{u_1 \mathfrak{E}}{\mathfrak{W}_2 - u_1 \mathfrak{M} + \mathfrak{R}_e} = \frac{u_1 \mathfrak{E}}{u_2 - u_1 \mathfrak{M}} = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{M}} \frac{u_1 u_2}{1 - u_1 u_2} \quad (413)$$

oder wenn man $u_1 u_2 = \mathfrak{R}^2$ setzt:

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{M}} \frac{\mathfrak{R}^2}{1 - \mathfrak{R}^2} = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{M}} \frac{1}{\frac{1}{\mathfrak{R}^2} - 1}. \quad (414)$$

Die in den Verbraucher fließende Stromstärke \mathfrak{J}_2 hängt also nur von der EMK der Quelle, von dem Kernwiderstand \mathfrak{M} des Vierpols und von der Größe \mathfrak{R} ab, die man die „komplexe Kopplung“ des Verbrauchers mit dem Generator nennen kann. Sowohl \mathfrak{W} wie \mathfrak{R} sind „neutrale“ Größen, d. h. sie ändern ihren Wert nicht, wenn man den Vierpol umdreht und die Widerstände \mathfrak{R}_a und \mathfrak{R}_e miteinander vertauscht; der Strom \mathfrak{J}_2 ist also ebenso groß wie der Strom \mathfrak{J}_1 , der durch die Klemme 1 fließt, wenn man die EMK in den Verbraucher einschaltet (Abb. 145 und 146). Man nennt dieses Ergebnis auch den „Umkehrungssatz“.

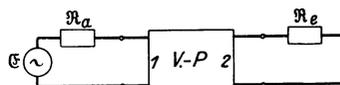


Abb. 145.

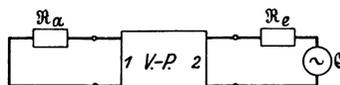


Abb. 146.

Beachtet man die Gleichungen (408) und (411), so findet man leicht für \mathfrak{J}_2 die andere Form:

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{u_1 \mathfrak{E}}{\mathfrak{W}_2 + \mathfrak{R}_e} \frac{1}{1 - \mathfrak{R}^2}. \quad (415)$$

Entsprechend ergibt sich für den primären Strom

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{u_1 \mathfrak{E}}{\mathfrak{M}} \frac{1}{1 - \mathfrak{R}^2} = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{W}_1} \frac{1}{1 - \mathfrak{R}^2}. \quad (416)$$

Die Gleichungen (415) und (416) können als Weiterführungen der Helmholtzschen Gleichung (38) aufgefaßt werden: Der primäre Klemmenstrom läßt sich berechnen, als ob der Vierpol ein Zweipol mit dem inneren Widerstand \mathfrak{W}_1^l wäre; nur muß noch durch $1 - \mathfrak{R}^2$ geteilt werden. Ebenso ergibt sich der sekundäre Strom aus der „übersetzten“ EMK, dem scheinbaren inneren Widerstand \mathfrak{W}_2^l und dem Verbraucherwiderstand \mathfrak{R}_e , wenn man auch hier noch durch $1 - \mathfrak{R}^2$ teilt.

Wie man sieht, gilt für den primären Strom kein Umkehrungssatz.

Da man

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{W}_1^l} \left(1 + \frac{\mathfrak{R}^2}{1 - \mathfrak{R}^2} \right) = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{W}_1^l} + u_1 \mathfrak{J}_2 \quad (417)$$

schreiben kann, setzt sich der primäre Strom aus dem Leerlaufstrom und dem übersetzten (und zwar mit u_1 übersetzten) sekundären Strom vektorisch zusammen.

§ 151. Lose Kopplung. Wenn \Re^2 neben \mathfrak{I} vernachlässigt werden kann, erhält man die Gleichungen

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{\mathfrak{E}}{\Re_a + \mathfrak{W}'_1}, \quad \mathfrak{S}_2 = \frac{u_1 \mathfrak{E}}{\mathfrak{W}'_2 + \Re_e}. \tag{418}$$

Bei „loser Kopplung“ berechnet sich also \mathfrak{S}_1 so, als wäre der Vierpol am sekundären Ende offen; \mathfrak{S}_2 wird zwar nicht gleich Null, darf aber ebenfalls mit Hilfe des Wertes \mathfrak{W}'_2 an Stelle des Wertes \mathfrak{W}_2 berechnet werden. Die primäre Seite wirkt demnach bei loser Kopplung auf die sekundäre; die Rückwirkung der sekundären auf die primäre ist jedoch zu vernachlässigen.

Die langen Leitungen gehören zu den lose koppelnden Vierpolen.

§ 152. Der Scheinwiderstand eines durch einen Verbraucher abgeschlossenen Vierpols. Der Scheinwiderstand \mathfrak{W}_1 eines Vierpols, gemessen an seinen primären Klemmen, muß sich natürlich aus dem Widerstand \mathfrak{W}_2 des § 149, Gleichung (412), durch Vertauschung der Indizes 1 und 2, a und e ergeben. Auch unmittelbar findet man

$$\mathfrak{W}_1 = \frac{u_1}{\mathfrak{S}_1} = \frac{\mathfrak{E} - \Re_a \mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_1} = (\Re_a + \mathfrak{W}'_1) (\mathfrak{I} - u_1 u_2) - \Re_a \left. \vphantom{\frac{u_1}{\mathfrak{S}_1}} \right\} \tag{419}$$

$$= \mathfrak{W}'_1 - u_1 u_2 (\Re_a + \mathfrak{W}'_1) = \mathfrak{W}'_1 - u_2 \mathfrak{M}.$$

Setzt man die Stromübersetzung gleich Null, so erhält man aus (419) wieder den Leerlaufwiderstand \mathfrak{W}'_1 ; setzt man den Abschlußwiderstand \Re_e gleich Null, so erhält man den Kurzschlußwiderstand

$$\mathfrak{W}_1^k = \mathfrak{W}'_1 - \frac{\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{W}'_2}. \tag{420}$$

In (419) kann man die Stromübersetzung einsetzen; dann erhält man

$$\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{W}'_1 - \frac{\mathfrak{M}^2}{\Re_e + \mathfrak{W}'_2}. \tag{421}$$

Hiernach kann man den Scheinwiderstand eines Vierpols leicht konstruieren. Der Kernwiderstand \mathfrak{M} spielt dabei die Rolle einer Inversionspotenz. Abb. 147 zeigt die Konstruktion für den besonders einfachen Fall eines symmetrischen Vierpols. Sie dürfte nach den Erörterungen im § 103 ohne weitere Erklärungen verständlich sein¹.

In dem häufig vorkommenden Fall, daß die Phase φ_m des Kernwiderstands gleich 90° ist, kann man den Scheinwiderstand \mathfrak{W}_1 leicht in seine rechtwinkligen Komponenten zerlegen. Bezeichnet man nämlich die Phase des Widerstands $\Re_e + \mathfrak{W}'_2$ vorübergehend mit φ , so ist allgemein

$$\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{W}'_1 - u_2 \mathfrak{M} = \mathfrak{W}'_1 - u_2^2 (\Re_e + \mathfrak{W}'_2) = \mathfrak{W}'_1 - (|u_2| \angle \varphi_m - \varphi)^2 \cdot |\Re_e + \mathfrak{W}'_2| \angle \varphi$$

$$= \mathfrak{W}'_1 - |u_2|^2 (\Re_e + \mathfrak{W}'_2)^* \angle 2 \varphi_m. \tag{422}$$

¹ Für einen durch einen reellen Widerstand abgeschlossenen Vierpol aus reinen Blindwiderständen findet man eine besonders einfache Konstruktion bei R. Feldtkeller: Elektr. Nachr.-Techn. 5, 155 (1928).

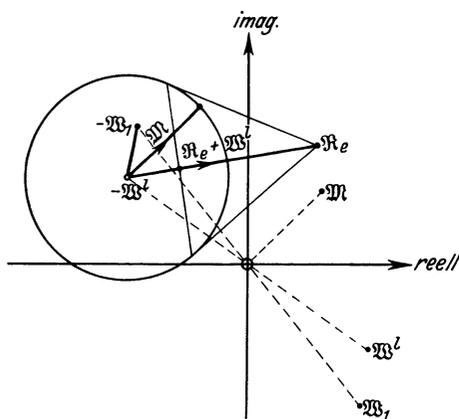


Abb. 147.

also für $z \varphi_m = 180^\circ$

$$\mathfrak{B}_1 = W_1' + |u_2|^2 (R_e + W_2') + j(W_1'' - |u_2|^2 (R_e' + W_2'')). \quad (423)$$

§ 153. Die Spannungsübersetzung. Für die Spannungsübersetzung $v_2 = u_2/u_1$ ergibt sich unmittelbar

$$\left. \begin{aligned} v_2 = \frac{u_2}{u_1} &= \frac{\mathfrak{Z}_2 \mathfrak{R}_e}{\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{B}_1} = u_2 \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{B}_1} = \frac{\mathfrak{M} \mathfrak{R}_e}{(\mathfrak{B}_2' + \mathfrak{R}_e)(\mathfrak{B}_1' - u_2 \mathfrak{M})} \\ &= \frac{\mathfrak{M}}{\frac{\mathfrak{B}_1' \mathfrak{B}_2' - \mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}_e} + \mathfrak{B}_1'} = \frac{\mathfrak{M}}{\frac{\mathfrak{Z}^2}{\mathfrak{R}_e} + \mathfrak{B}_1'} \end{aligned} \right\} \quad (424)$$

wenn wir wieder [vgl. § 147, Gleichung (407)] $\mathfrak{B}_1' \mathfrak{B}_2' - \mathfrak{M}^2 = \mathfrak{Z}^2$ setzen.

Auch die Spannungsübersetzung läßt sich demnach als das Verhältnis des Kernwiderstands zu der Summe zweier Widerstände darstellen. Diese beiden Widerstände sind aber diesmal der zu dem Abschlußwiderstand \mathfrak{R}_e mit der Potenz \mathfrak{Z} inverse Widerstand (vgl. § 103) und der Leerlaufwiderstand von vorn.

Wenn der Ausdruck für die Spannungsübersetzung komplizierter aussieht als der Ausdruck für die Stromübersetzung, so liegt dies daran, daß unsere Theorie eine Widerstandstheorie ist. Schreibt man die Vierpoltheorie in Leitwertparametern, so vertauschen die beiden Übersetzungen ihre Rollen¹.

Spezialisiert man die Übersetzung der elektromotorischen Kraft für $\mathfrak{R}_e = 0$, die Spannungsübersetzung dagegen für $\mathfrak{R}_e = \infty$, so gehen sie natürlich ineinander über. Beide Übersetzungen werden dann gleich $1/\mathfrak{U}_1$, d. h. gleich der Leerlaufspannungsübersetzung $(u_2/u_1)^l$.

§ 154. Anpassung eines symmetrischen Vierpols an seinen Verbraucher. In der Praxis wird häufig eine große Zahl von Vierpolen — z. B. Leitungen verschiedener Arten — hintereinander, „in Kette“ geschaltet wie in Abb. 148. Der Einfachheit halber wollen wir voraussetzen, daß die Teilvierpole sämtlich symmetrisch seien. Denkt man sich eine solche Verbindung an irgendeinem der Klemmenpaare aufgeschnitten und den Scheinwiderstand des hinter der Schnittstelle liegenden Zweipols gemessen, so wird dieser Scheinwiderstand im allgemeinen von Klemmenpaar zu Klemmenpaar verschieden ausfallen. Es ist aber denkbar, daß der Endwiderstand \mathfrak{R}_e und die Parameter der Vierpole so aufeinander abgestimmt sind, daß alle von vorn gemessenen Scheinwiderstände gleich dem letzten Scheinwiderstand, d. h. gleich \mathfrak{R}_e sind. Ist diese Bedingung erfüllt, so arbeitet offenbar jeder einzelne Vierpol und auch die vor der Vierpolreihe liegende Stromquelle auf denselben Verbraucher; für die Stromquelle² ist es, als ob die Vierpole gar nicht da wären.

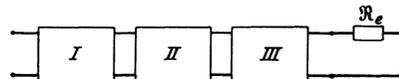


Abb. 148.

Die Bedingung dafür, daß der von vorn gemessene Scheinwiderstand \mathfrak{B}_1 eines symmetrischen Vierpols gleich seinem Abschlußwiderstand \mathfrak{R}_e ist, besagt, in Form einer Gleichung geschrieben:

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}' - u_2 \mathfrak{M} = \mathfrak{B}' - \frac{\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}_e + \mathfrak{B}'} = \mathfrak{R}_e; \quad (425)$$

daraus folgt aber

$$(\mathfrak{B}' - \mathfrak{R}_e)(\mathfrak{R}_e + \mathfrak{B}') = \mathfrak{M}^2,$$

¹ Vgl. J. Wallot: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. 8, H. 2, 49 (1929). Dort wird auch eine vierte Übersetzung v_1 definiert.

² Aber natürlich nicht für den Verbraucher!

oder gemäß § 147

$$\mathfrak{R}_e^2 = \mathfrak{B}'^2 - \mathfrak{M}^2 = \mathfrak{Z}^2. \quad (426)$$

Die Einführung dieser äußerst wichtigen Bedingung hat sehr merkwürdige Folgen. Zunächst ist auch $\mathfrak{B}_1^2 = \mathfrak{Z}^2$. Weiter ergibt sich aus (424) und (408)

$$v_2 = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}_e + \mathfrak{B}'} = u_2 = \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_1} = \frac{1}{\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{M}} \pm \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{M}}} = \frac{1}{\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{M}} \pm \sqrt{\frac{\mathfrak{B}'^2}{\mathfrak{M}^2} - 1}} \quad (427)$$

und wenn man (ähnlich wie im § 136)

$$\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{M}} = \mathfrak{A} = \mathfrak{Cof} g \quad (428)$$

setzt, nach Anhang 4. b) und c)

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2} = \mathfrak{Cof} g \pm \sqrt{\mathfrak{Cof}^2 g - 1} = \mathfrak{Cof} g \pm \mathfrak{Sin} g = e^{\pm g}, \quad (429)$$

also

$$g = \pm \ln \frac{u_1}{u_2} = \pm \ln \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2}. \quad (430)$$

Ist demnach der Abschlußwiderstand \mathfrak{R}_e gemäß Gleichung (426) gewählt, so sind die durch den Vierpol verursachten Schwächungen und Phasendrehungen der Spannung und des Stroms gleich groß, und die durch (428) eingeführte Größe g ist ein logarithmisches Maß für sie.

Man nennt die komplexe Zahl $g = b + ja$ das „Übertragungsmaß“ des Vierpols; sein reeller Teil b heißt „(Vierpol-)Dämpfungsmaß“, sein imaginärer a „Winkelmaß“. Genügt irgendein Wert $g = b + ja$ der Gleichung (428), so genügt ihr auch der Wert $g = -b - j(a + n \cdot 360^\circ)$, wo n irgendeine ganze Zahl ist. Wir setzen daher fest, daß das Dämpfungsmaß der lediglich aus komplexen Widerständen aufgebauten Vierpole immer positiv sein soll¹. Das Winkelmaß lassen wir beim allgemeinen Vierpol um ein Vielfaches von 360° unbestimmt; bei manchen Vierpolen kann diese Unbestimmtheit beseitigt werden.

Da allgemein

$$\ln \mathfrak{A} = \ln (|\mathfrak{A}| \angle \alpha) = \ln |\mathfrak{A}| + \ln \angle \alpha = \ln |\mathfrak{A}| + ja \quad (431)$$

ist, folgt aus (430)

$$b = \ln \left| \frac{u_1}{u_2} \right| = \ln \left| \frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_2} \right|. \quad (432)$$

D. h. das Dämpfungsmaß ist bei Anpassung ein logarithmisches Maß für die Schwächung der Spannung und des Stroms; das Winkelmaß dagegen ist unmittelbar gleich dem Winkel, um den der Vierpol die Vektoren dieser beiden Größen dreht.

Die komplexe Größe

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\mathfrak{B}'^2 - \mathfrak{M}^2}, \quad (433)$$

die wie das Übertragungsmaß nur von den Vierpolparametern abhängt, nennt man aus Gründen, die sich in der Theorie der Leitungen ergeben werden, den „Wellenwiderstand“ oder den „Kennwiderstand“ (auch die „Charakteristik“) des symmetrischen Vierpols. Das Vorzeichen der Wurzel in (433) setzen wir so fest, daß der Vektor von \mathfrak{Z} (wie die anderen Widerstandsvektoren) immer in den ersten oder vierten Quadranten weist.

Hiernach kann man für (426) auch

$$\mathfrak{R}_e = \mathfrak{Z} \quad (434)$$

¹ Damit wird auch die Doppeldeutigkeit der Gleichung (430) beseitigt.

setzen. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so sagen wir: Der Verbraucher ist an den Vierpol „nach dem Wellenwiderstande angepaßt“.

§ 155. Wellentheorie des Vierpols. Die Bedingung $\mathfrak{R}_e = \mathfrak{Z}$ ist in der Praxis der gleichmäßigen Leitungen und der sogenannten Kettenleiter meist mit guter Annäherung erfüllt. Man hat daher auf diesen Gebieten mit bestem Erfolg die Parameter \mathfrak{W}' und \mathfrak{M} des symmetrischen Vierpols durch die Parameter \mathfrak{Z} und g völlig ersetzt.

Beim unsymmetrischen Vierpol kann man die Größen

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\mathfrak{W}'_1 \mathfrak{W}'_2 - \mathfrak{M}^2}, \quad (435)$$

$$\mathfrak{Cof} g = \frac{\sqrt{\mathfrak{W}'_1 \mathfrak{W}'_2}}{\mathfrak{M}} = \sqrt{\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2} \quad (436)$$

eingeführen und als dritten Parameter den „Symmetriefaktor“

$$\mathfrak{s} = \sqrt{\frac{\mathfrak{W}'_2}{\mathfrak{W}'_1}} \quad (437)$$

hinzunehmen¹. Bei komplexem \mathfrak{s} hat der Vierpol, von beiden Seiten betrachtet, verschiedenen Charakter.

Da

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{M} \sqrt{\frac{\mathfrak{W}'_1 \mathfrak{W}'_2}{\mathfrak{M}^2} - 1} = \mathfrak{M} \mathfrak{Sin} g, \quad (438)$$

$$\frac{1}{\mathfrak{s}} \mathfrak{Cof} g = \frac{\mathfrak{W}'_1}{\mathfrak{M}}, \quad \mathfrak{s} \mathfrak{Cof} g = \frac{\mathfrak{W}'_2}{\mathfrak{M}}, \quad (439)$$

ergibt sich umgekehrt

$$\mathfrak{W}'_1 = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{s}} \mathfrak{Ctg} g = \mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Ctg} g, \quad (440)$$

$$\mathfrak{W}'_2 = \mathfrak{s} \mathfrak{Z} \mathfrak{Ctg} g = \mathfrak{Z}_2 \mathfrak{Ctg} g, \quad (441)$$

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{Sin} g}. \quad (442)$$

Der durch (435) eingeführte „mittlere“ Wellenwiderstand \mathfrak{Z} ist das geometrische Mittel aus den beiden „äußeren“ Wellenwiderständen \mathfrak{Z}_1 und \mathfrak{Z}_2 .

In Wellenparametern geschrieben lauten die Grundgleichungen des Vierpols

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\mathfrak{s}} \mathfrak{Cof} g u_2 + \mathfrak{Z} \mathfrak{Sin} g \mathfrak{S}_2, \\ \mathfrak{S}_1 &= \frac{1}{\mathfrak{Z}} \mathfrak{Sin} g u_2 + \mathfrak{s} \mathfrak{Cof} g \mathfrak{S}_2. \end{aligned} \right\} \quad (443)$$

§ 156. Die Übersetzungen in der Wellentheorie des Vierpols. Für die Übersetzungen findet man

$$u_1 = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{W}'_1} = \frac{\mathfrak{Z}/\mathfrak{Sin} g}{\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{s}} \mathfrak{Ctg} g + \mathfrak{R}_a} = \mathfrak{s} \frac{1}{\mathfrak{Cof} g + \frac{\mathfrak{R}_a}{\mathfrak{Z}_1} \mathfrak{Sin} g}, \quad (444)$$

$$u_2 = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{W}'_2 + \mathfrak{R}_e} = \frac{\mathfrak{Z}/\mathfrak{Sin} g}{\mathfrak{s} \mathfrak{Z} \mathfrak{Ctg} g + \mathfrak{R}_e} = \frac{1}{\mathfrak{s}} \frac{1}{\mathfrak{Cof} g + \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{Z}_2} \mathfrak{Sin} g}, \quad (445)$$

$$v_2 = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{W}'_1 + \frac{\mathfrak{W}'_1 \mathfrak{W}'_2 - \mathfrak{M}^2}{\mathfrak{R}_e}} = \frac{\mathfrak{Z}/\mathfrak{Sin} g}{\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{s}} \mathfrak{Ctg} g + \frac{\mathfrak{Z}^2}{\mathfrak{R}_e}} = \mathfrak{s} \frac{1}{\mathfrak{Cof} g + \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{R}_e} \mathfrak{Sin} g} \quad (446)$$

¹ Andere Festsetzungen z. B. bei O. J. Zobel: Bell Syst. Techn. J. 3, 611 (1924).

Bei „Anpassung auf der Primärseite“, d. h. für $\mathfrak{R}_a = \mathfrak{Z}_1$, wird demnach die Übersetzung der EMK gleich $\hat{s} e^{-g}$. Bei „Anpassung auf der Sekundärseite“, d. h. für $\mathfrak{R}_e = \mathfrak{Z}_2$, wird in Übereinstimmung mit den Ergebnissen des § 154

$$u_2 = \frac{1}{\hat{s}} e^{-g}, \quad v_2 = \hat{s} e^{-g}. \quad (447)$$

Beim Durchgang von Wechselströmen durch einen auf beiden Seiten angepaßten Vierpol nehmen also die Spannung und der Strom exponentiell gemäß einem Übertragungsmaß g ab; zugleich werden sie gemäß der Unsymmetrie des Vierpols „transformiert“, und zwar der Strom im entgegengesetzten Sinne wie die Spannung und die elektromotorische Kraft.

§ 157. Die Scheinwiderstände in der Wellentheorie des Vierpols. Für die beiden Scheinwiderstände ergibt sich in der Wellentheorie des unsymmetrischen Vierpols

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}_1 &= \mathfrak{W}_1^i - u_2 \mathfrak{M} = \mathfrak{Z}_1 \operatorname{Ctg} g - \frac{\mathfrak{Z} / \operatorname{Sin} g}{\hat{s} \left(\operatorname{Cos} g + \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{Z}_2} \operatorname{Sin} g \right)} \\ &= \frac{\mathfrak{Z}_1}{\operatorname{Sin} g} \left(\operatorname{Cos} g - \frac{1}{\operatorname{Cos} g + \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{Z}_2} \operatorname{Sin} g} \right) = \mathfrak{Z}_1 \frac{\operatorname{Sin} g + \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{Z}_2} \operatorname{Cos} g}{\operatorname{Cos} g + \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{Z}_2} \operatorname{Sin} g} \end{aligned} \quad (448)$$

und entsprechend

$$\mathfrak{W}_2 = \mathfrak{Z}_2 \frac{\operatorname{Sin} g + \frac{\mathfrak{R}_a}{\mathfrak{Z}_1} \operatorname{Cos} g}{\operatorname{Cos} g + \frac{\mathfrak{R}_a}{\mathfrak{Z}_1} \operatorname{Sin} g}. \quad (449)$$

Bei Anpassung auf der sekundären Seite ist bei beliebigem Dämpfungsmaß $\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{Z}_1$, bei Anpassung auf der primären Seite $\mathfrak{W}_2 = \mathfrak{Z}_2$ in Übereinstimmung mit dem im § 154 Festgestellten. Man mißt also bei beiderseitiger Anpassung an jeder Klemme in beiden Richtungen denselben Scheinwiderstand.

Bei hohem Dämpfungsmaß b ist

$$\operatorname{Cos} g = \operatorname{Cos} b \cos a + j \operatorname{Sin} b \sin a \approx \operatorname{Sin} b \cos a + j \operatorname{Cos} b \sin a = \operatorname{Sin} g;$$

dann ist also nach (448) und (449) bei beliebigem \mathfrak{R}_a und \mathfrak{R}_e

$$\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{Z}_1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{W}_2 = \mathfrak{Z}_2.$$

An die Stelle der Anpassungsbedingungen $\mathfrak{R}_a = \mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{R}_e = \mathfrak{Z}_2$ kann man auch die beiden Gleichungen

$$\sqrt{\mathfrak{R}_a \mathfrak{R}_e} = \mathfrak{Z} \quad (450)$$

und

$$\mathfrak{R}_a : \mathfrak{R}_e = \mathfrak{Z}_1 : \mathfrak{Z}_2 \quad (451)$$

setzen. Wir werden ab und zu die Bedingung (450) als „erste“, die Bedingung (451) als „zweite Anpassungsbedingung“ bezeichnen.

Für die Leerlaufwiderstände erhält man (wie schon in § 155)

$$\mathfrak{W}_1^l = \mathfrak{Z}_1 \operatorname{Ctg} g, \quad \mathfrak{W}_2^l = \mathfrak{Z}_2 \operatorname{Ctg} g, \quad (452)$$

für die Kurzschlußwiderstände

$$\mathfrak{W}_1^k = \mathfrak{Z}_1 \operatorname{Tg} g, \quad \mathfrak{W}_2^k = \mathfrak{Z}_2 \operatorname{Tg} g. \quad (453)$$

§ 158. Der Anfangs- und der Endstrom in der Wellentheorie des Vierpols. Die durch die Klemmenpaare eines Vierpols fließenden Ströme \mathfrak{Z}_1 und \mathfrak{Z}_2 folgen

ohne weiteres aus den Gleichungen (448) und (445):

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}_1 &= \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{W}_1} = \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{Z}_1 \frac{\sin g + \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{Z}_2} \cos g}{\cos g + \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{Z}_2} \sin g}} \\ &= \frac{\mathfrak{s} \left(\cos g + \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{Z}_2} \sin g \right) \mathfrak{C}}{\left(\mathfrak{s} \mathfrak{R}_a + \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{s}} \right) \cos g + \left(\mathfrak{Z} + \frac{\mathfrak{R}_a \mathfrak{R}_e}{\mathfrak{Z}} \right) \sin g}, \end{aligned} \quad (454)$$

$$\mathfrak{Z}_2 = \frac{\mathfrak{C}}{\left(\mathfrak{s} \mathfrak{R}_a + \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{s}} \right) \cos g + \left(\mathfrak{Z} + \frac{\mathfrak{R}_a \mathfrak{R}_e}{\mathfrak{Z}} \right) \sin g}. \quad (455)$$

Auch diese Formeln werden bei Anpassung auf beiden Seiten außerordentlich einfach. Man erhält für diesen Fall

$$\mathfrak{Z}_1 = \frac{\mathfrak{s} \mathfrak{C}}{2 \mathfrak{Z}} = \frac{\mathfrak{C}}{2 \mathfrak{Z}_1} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Z}_2 = \frac{\mathfrak{C}}{2 \mathfrak{Z}} e^{-g} \quad (456)$$

gemäß dem Ersatzbild Abb. 149.

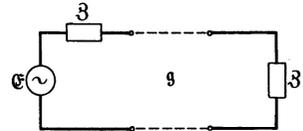


Abb. 149.

§ 159. Messung der Wellenwiderstände. Der mittlere Wellenwiderstand \mathfrak{Z} läßt sich nach § 147, Gleichung (407), besonders einfach durch die ursprünglichen Parameter \mathfrak{B} und \mathfrak{C} der Grundgleichungen ausdrücken:

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}}. \quad (457)$$

Nun sind aber nach denselben Grundgleichungen die Leerlaufwiderstände gleich

$$\mathfrak{W}_1^l = \frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{C}}, \quad \mathfrak{W}_2^l = \frac{\mathfrak{U}_2}{\mathfrak{C}}, \quad (458)$$

die Kurzschlußwiderstände gleich

$$\mathfrak{W}_1^k = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{U}_2}, \quad \mathfrak{W}_2^k = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{U}_1}. \quad (459)$$

Zur experimentellen Bestimmung des Wellenwiderstands können also die sehr bequemen Gleichungen

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\mathfrak{W}_1^l \mathfrak{W}_2^k} = \sqrt{\mathfrak{W}_2^l \mathfrak{W}_1^k} \quad (460)$$

dienen.

Der mittlere Wellenwiderstand eines Vierpols hat hiernach eine sehr einfache Bedeutung: er ist das geometrische Mittel aus einem Leerlaufwiderstand von der einen und einem Kurzschlußwiderstand von der andern Seite. Hat man alle vier Widerstände \mathfrak{W}_1^l , \mathfrak{W}_1^k , \mathfrak{W}_2^l , \mathfrak{W}_2^k gemessen, so gibt natürlich das geometrische Mittel aus diesen vier Werten den genauesten Wert des mittleren Wellenwiderstands.

Für die äußeren Wellenwiderstände gilt

$$\mathfrak{Z}_1 = \sqrt{\mathfrak{W}_1^l \mathfrak{W}_1^k}, \quad \mathfrak{Z}_2 = \sqrt{\mathfrak{W}_2^l \mathfrak{W}_2^k}. \quad (461)$$

Die Gleichung (460) zeigt, daß die vier Leerlauf- und Kurzschlußwiderstände nicht voneinander unabhängig sind: es ist immer

$$\frac{\mathfrak{W}_1^l}{\mathfrak{W}_2^l} = \frac{\mathfrak{W}_1^k}{\mathfrak{W}_2^k}, \quad (462)$$

eine Beziehung, die übrigens von der Determinantenbeziehung unabhängig, also für jeden linearen Vierpol richtig ist.

§ 160. **Messung des Übertragungsmaßes durch Spannungsvergleich bei Anpassung.** Das Übertragungsmaß eines Vierpols kann besonders leicht nach Gleichung (430) bestimmt werden: man schließt ihn mit einem angepaßten Widerstand ab und mißt das Spannungs- (oder Strom-) Verhältnis. Bei unsymmetrischen Vierpolen scheidet man den Symmetriefaktor aus, indem man die Messung mit umgekehrtem Vierpol wiederholt. Dann ist das Übertragungsmaß einfach gleich dem arithmetischen Mittel der Logarithmen der gemessenen Spannungs- (oder Strom-) Verhältnisse (Gleichung (447)).

§ 161. **Messung des Übertragungsmaßes durch Spannungsvergleich bei Leerlauf.** Man kann das Übertragungsmaß auch durch Messung des Spannungsverhältnisses bei Leerlauf bestimmen; denn dieses liefert ja nach § 147 die Parameter \mathfrak{A}_1 und \mathfrak{A}_2 . Da

$$\sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2} = \mathfrak{A} = A + j A' = \mathfrak{C} \circ \mathfrak{I} \mathfrak{g} \quad (463)$$

ist, hat man mit Hilfe von Tafeln der Hyperbelfunktionen komplexen Arguments¹ zu gegebenem komplexem \mathfrak{A} das zugehörige komplexe \mathfrak{g} aufzusuchen.

Stehen keine Tafeln zur Verfügung, so setzt man

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{C} \circ \mathfrak{I} b \cos a &= A, \\ \mathfrak{S} \circ \mathfrak{I} b \sin a &= A', \end{aligned} \right\} \quad (464)$$

woraus nach bekannten Rechenregeln die nicht besonders bequemen biquadratischen Gleichungen folgen:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{A}{\mathfrak{C} \circ \mathfrak{I} b} \right)^2 + \left(\frac{A'}{\mathfrak{S} \circ \mathfrak{I} b} \right)^2 &= 1, \\ \left(\frac{A}{\cos a} \right)^2 - \left(\frac{A'}{\sin a} \right)^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (465)$$

Wie hieraus b und a zu berechnen sind, zeigt das folgende Beispiel. Es sei an einem symmetrischen Vierpol

$$\left(\frac{\mathfrak{u}_1}{\mathfrak{u}_2} \right)^l = 1,075 - j \cdot 1,20$$

gemessen. Dann besagt die zweite biquadratische Gleichung (465)

$$1,156 (1 - \cos^2 a) - 1,44 \cos^2 a = \cos^2 a (1 - \cos^2 a)$$

oder

$$\cos^4 a - 3,596 \cos^2 a + 1,156 = 0;$$

aus der ersten ergibt sich entsprechend

$$\mathfrak{C} \circ \mathfrak{I}^4 b - 3,596 \mathfrak{C} \circ \mathfrak{I}^2 b + 1,156 = 0.$$

Die Lösungen dieser beiden Gleichungen sind

$$\mathfrak{C} \circ \mathfrak{I}^2 b = 1,798 + \sqrt{3,232 - 1,156}$$

und

$$\cos^2 a = 1,798 - \sqrt{3,232 - 1,156},$$

da $\mathfrak{C} \circ \mathfrak{I}^2 b$ nur größer, $\cos^2 a$ nur kleiner als 1 sein kann (höchstens = 1). Es ist daher

$$\mathfrak{C} \circ \mathfrak{I} b = \sqrt{3,239} = 1,80,$$

$$\cos a = \sqrt{0,357} = \pm 0,597.$$

¹ Solche Tafeln, herausgegeben von F. E m d e, werden demnächst im Verlag des Elektrotechnischen Vereins erscheinen.

Bei $\cos a$ ist nun wieder nach der ersten Gleichung (464) nur das obere Vorzeichen möglich; nach der zweiten (464) und nach unserer Festsetzung über das Vorzeichen von b kann daher a nur im vierten Quadranten liegen: es folgt eindeutig $b = 1,19$ und $a = -53,3^\circ$.

§ 162. Berechnung des Übertragungsmaßes aus Kurzschluß- und Leerlaufwiderstand. Wenn die Dämpfung nicht zu hoch ist, kann man das Übertragungsmaß auch unmittelbar aus den auf einer beliebigen Seite des Vierpols gemessenen Kurzschluß- und Leerlaufwiderständen bestimmen. Denn es ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{Cof} g &= \sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2}, \\ \mathfrak{Sin} g &= \sqrt{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 - 1} = \sqrt{\mathfrak{B} \mathfrak{C}},\end{aligned}\quad (466)$$

$$\mathfrak{I}g g = \sqrt{\frac{\mathfrak{B} \mathfrak{C}}{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{B}_1^k}{\mathfrak{B}_1^l}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{B}_2^k}{\mathfrak{B}_2^l}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{B}^k}{\mathfrak{B}^l}}.\quad (467)$$

Die Aufgabe ist die, aus gegebenem $\mathfrak{I}g g = T \angle \tau$ das Argument g zu bestimmen. Stehen keine Tafeln der komplexen Hyperbelfunktionen zur Verfügung, so setzt man zunächst nach der Definition des Hyperbeltangens

$$T \angle \tau = \frac{e^g - e^{-g}}{e^g + e^{-g}} = \frac{e^{2g} - 1}{e^{2g} + 1}.\quad (468)$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung der Rechenregel des Anhangs 5. d)

$$\begin{aligned}-e^{2g} &= e^{2b} \angle 2a \pm 180^\circ = \frac{T \angle \tau + 1}{T \angle \tau - 1} = \mathfrak{Ctg} \ln(\sqrt{T} \angle \tau/2) \\ &= \mathfrak{Ctg} \left(\frac{1}{2} \ln T + j \frac{\tau}{2} \right) = \sqrt{\frac{\mathfrak{Cof} \ln T + \cos \tau}{\mathfrak{Cof} \ln T - \cos \tau}} \angle -\arctg \frac{\sin \tau}{\mathfrak{Sin} \ln T}\end{aligned}\quad (469)$$

oder, wenn man das Reelle von dem Imaginären trennt:

$$b = \frac{1}{4} \ln \frac{\mathfrak{Cof} \ln T + \cos \tau}{\mathfrak{Cof} \ln T - \cos \tau} = 0,576 \lg \frac{\mathfrak{Cof} \ln T + \cos \tau}{\mathfrak{Cof} \ln T - \cos \tau},\quad (470)$$

$$\operatorname{tg} 2a = -\frac{\sin \tau}{\mathfrak{Sin} \ln T}.\quad (471)$$

Statt (470) kann man auch etwas bequemer

$$\mathfrak{I}g 2b = \frac{\cos \tau}{\mathfrak{Cof} \ln T}\quad (472)$$

setzen. Stehen auch keine Tafeln der reellen Hyperbelfunktionen zur Verfügung, so kann man die Gleichungen

$$b = 0,576 \lg \frac{1 + T^2 + 2T \cos \tau}{1 + T^2 - 2T \cos \tau},\quad (473)$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2T \sin \tau}{1 - T^2}.\quad (474)$$

verwenden, die aus den Identitäten

$$\mathfrak{Cof} \ln T = \frac{T^2 + 1}{2T}, \quad \mathfrak{Sin} \ln T = \frac{T^2 - 1}{2T}\quad (475)$$

folgen.

Es seien z. B. die Widerstände $\mathfrak{B}^k = 895 \Omega \angle -19^\circ 50'$ und $\mathfrak{B}^l = 339 \Omega \angle +11^\circ 20'$ gemessen. Dann ist $T^2 = 2,64$, $2T = 3,25$, $\tau = -15,6^\circ$ und

$$b = 0,576 \lg \frac{6,77}{0,51} = 0,65,$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{-0,87}{-1,64}; \quad a = 104,0^\circ \quad \text{oder} \quad -76,0^\circ.$$

Die Lösungen $2a = 28,0^\circ$ und $2a = -332,0^\circ$ sind nicht zu gebrauchen, weil nach (469)

$$e^{2g} = \frac{1 - T^2 + j \cdot 2 T \sin \tau}{1 + T^2 - 2 T \cos \tau} \quad (476)$$

ist; hiernach müssen in unserem Falle $\cos 2a (\sim 1 - T^2)$ und $\sin 2a (\sim 2 T \sin \tau)$ beide negativ sein, was für diese Lösungen nicht zuträfe. Das Winkelmaß selbst bleibt, wie man sieht, schließlich um 180° unbestimmt.

Ist die Dämpfung hoch, so stimmen nach § 157 \mathfrak{B}^k und \mathfrak{B}^l annähernd überein. Dann ist $T \approx \cos \tau \approx 1$ und die Differenz im Nenner von (473) wird so klein, daß das Verfahren ungenau wird. Es ist daher nur bei Vierpolen kleinen Dämpfungsmaßes zu gebrauchen.

§ 163. **Kette von Vierpolen.** In den Anwendungen hat man es meist mit Ketten¹ von Vierpolen zu tun. Wir wollen untersuchen, welches die Wellenparameter des Vierpols sind, der durch Hintereinanderschaltung zweier symmetrischer Vierpole *I* und *II* entsteht (Abb. 150). Mit den Abkürzungen

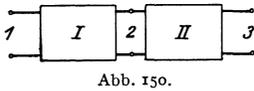


Abb. 150.

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{C} \text{of } g_I &= \mathfrak{C}_I, & \mathfrak{S} \text{in } g_I &= \mathfrak{S}_I, \\ \mathfrak{C} \text{of } g_{II} &= \mathfrak{C}_{II}, & \mathfrak{S} \text{in } g_{II} &= \mathfrak{S}_{II} \end{aligned} \right\} \quad (477)$$

erhalten wir nach § 155 für den ersten Vierpol

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{\mathfrak{s}_I} \mathfrak{C}_I u_2 + \mathfrak{B}_I \mathfrak{S}_I \mathfrak{S}_2, \\ \mathfrak{S}_1 &= \frac{1}{\mathfrak{B}_I} \mathfrak{C}_I^1 u_2 + \mathfrak{s}_I \mathfrak{C}_I \mathfrak{S}_2, \end{aligned} \right\} \quad (478)$$

für den zweiten

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{\mathfrak{s}_{II}} \mathfrak{C}_{II} u_3 + \mathfrak{B}_{II} \mathfrak{S}_{II} \mathfrak{S}_3, \\ \mathfrak{S}_2 &= \frac{1}{\mathfrak{B}_{II}} \mathfrak{C}_{II} u_3 + \mathfrak{s}_{II} \mathfrak{C}_{II} \mathfrak{S}_3. \end{aligned} \right\} \quad (479)$$

Scheidet man hier u_2 und \mathfrak{S}_2 aus, so folgt

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \left(\frac{1}{\mathfrak{s}_I \mathfrak{s}_{II}} \mathfrak{C}_I \mathfrak{C}_{II} + \frac{\mathfrak{B}_I}{\mathfrak{B}_{II}} \mathfrak{C}_I \mathfrak{S}_{II} \right) u_3 + \left(\mathfrak{s}_{II} \mathfrak{B}_I \mathfrak{S}_I \mathfrak{C}_{II} + \frac{\mathfrak{B}_{II}}{\mathfrak{s}_I} \mathfrak{C}_I \mathfrak{S}_{II} \right) \mathfrak{S}_3, \\ \mathfrak{S}_1 &= \left(\frac{1}{\mathfrak{s}_{II} \mathfrak{B}_I} \mathfrak{C}_I \mathfrak{C}_{II} + \frac{\mathfrak{s}_I}{\mathfrak{B}_{II}} \mathfrak{C}_I \mathfrak{S}_{II} \right) u_3 + \left(\mathfrak{s}_I \mathfrak{s}_{II} \mathfrak{C}_I \mathfrak{C}_{II} + \frac{\mathfrak{B}_{II}}{\mathfrak{B}_I} \mathfrak{C}_I \mathfrak{S}_{II} \right) \mathfrak{S}_3. \end{aligned} \right\} \quad (480)$$

Wir bezeichnen die Parameter der aus den beiden Vierpolen gebildeten Schaltgruppe durch \mathfrak{B} , g und \mathfrak{s} , unterscheiden wieder die Wellenwiderstände von den beiden Seiten \mathfrak{B}_{1I} , \mathfrak{B}_{2I} , \mathfrak{B}_{1II} , \mathfrak{B}_{2II} und erhalten:

$$\mathfrak{B}^2 = \frac{\mathfrak{B}_{2I} \mathfrak{C}_I \mathfrak{C}_{II} + \mathfrak{B}_{1II} \mathfrak{C}_I \mathfrak{S}_{II}}{\mathfrak{B}_{1I} \mathfrak{C}_I \mathfrak{C}_{II} + \mathfrak{B}_{2I} \mathfrak{C}_I \mathfrak{S}_{II}} \mathfrak{B}_{1I} \mathfrak{B}_{2II} = \frac{\mathfrak{B}_{2I} \mathfrak{X} g g_I + \mathfrak{B}_{1II} \mathfrak{X} g g_{II}}{\mathfrak{B}_{1I} \mathfrak{X} g g_I + \mathfrak{B}_{2I} \mathfrak{X} g g_{II}} \mathfrak{B}_{1I} \mathfrak{B}_{2II}, \quad (481)$$

$$\mathfrak{C} \text{of } g = \mathfrak{C}_I^2 \mathfrak{C}_{II}^2 + \left(\frac{\mathfrak{B}_{2I}}{\mathfrak{B}_{1II}} + \frac{\mathfrak{B}_{1II}}{\mathfrak{B}_{2I}} \right) \mathfrak{C}_I \mathfrak{C}_I \mathfrak{S}_{II} \mathfrak{C}_{II} + \mathfrak{C}_I^2 \mathfrak{C}_{II}^2, \quad (482)$$

$$\mathfrak{s}^2 = \frac{\mathfrak{B}_{2I} \mathfrak{C}_I \mathfrak{C}_{II} + \mathfrak{B}_{1II} \mathfrak{C}_I \mathfrak{S}_{II}}{\mathfrak{B}_{1I} \mathfrak{C}_I \mathfrak{C}_{II} + \mathfrak{B}_{2I} \mathfrak{C}_I \mathfrak{S}_{II}} \frac{\mathfrak{B}_{II}}{\mathfrak{B}_I} = \frac{\mathfrak{B}_{2I} + \mathfrak{B}_{1II} \mathfrak{X} g g_I \mathfrak{X} g g_{II}}{\mathfrak{B}_{1I} + \mathfrak{B}_{2I} \mathfrak{X} g g_I \mathfrak{X} g g_{II}} \frac{\mathfrak{B}_{2II}}{\mathfrak{B}_{1I}}. \quad (483)$$

Der resultierende Vierpol ist also im allgemeinen unsymmetrisch; seine Parameter hängen von den Einzelparametern in verwickelter Weise ab.

§ 164. **Angepaßte Vierpole.** Sind die Vierpole *I* und *II* nach dem Wellenwiderstand aneinander angepaßt, so vereinfachen sich die Gleichungen (481)

¹ Unter „Reihenschaltungen von Vierpolen“ versteht man etwas anderes, s. F. Strecker u. R. Feldtkeller: Elektr. Nachr.-Techn. 6, 105 (1929).

bis (483) sehr stark. Für $\mathfrak{Z}_{2I} = \mathfrak{Z}_{1II}$ wird nämlich

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Z}^2 &= \mathfrak{Z}_{1I} \mathfrak{Z}_{2II}, & \mathfrak{z}^2 &= \frac{\mathfrak{Z}_{2II}}{\mathfrak{Z}_{1I}}, \\ \mathfrak{C}0|^2 g &= (\mathfrak{C}_I \mathfrak{C}_{II} + \mathfrak{C}_I \mathfrak{C}_{II})^2, \end{aligned} \right\} \quad (484)$$

also

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Z}_1 &= \mathfrak{Z}_{1I}, & \mathfrak{Z}_2 &= \mathfrak{Z}_{2II}, \\ g &= g_I + g_{II} \end{aligned} \right\} \quad (485)$$

oder ausführlicher

$$b = b_I + b_{II}, \quad a = a_I + a_{II}. \quad (486)$$

Schaltet man also zwei angepaßte Vierpole zur Kette, so entsteht ein Vierpol, dessen äußere Wellenwiderstände gleich den entsprechenden äußeren Wellenwiderständen der Teilvierpole und dessen Übertragungsmaß einfach gleich der Summe der Einzelübertragungsmaße ist.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, daß eine große Zahl, z. B. n gleiche symmetrische Teilvierpole kettenartig aneinandergereiht sind. Solche Teilvierpole sind notwendig aneinander angepaßt. Für eine solche Kette im engeren Sinne gelten daher die folgenden Sätze:

1. sie ist wie ihre Glieder symmetrisch;
2. ihr Wellenwiderstand ist unabhängig von der Gliedzahl gleich dem Wellenwiderstand des einzelnen Glieds;
3. ihr Übertragungsmaß ist n -mal so groß wie das Einzelübertragungsmaß.

Gleichmäßige Leitungen sind Ketten, die aus unendlich kurzen Gliedern aufgebaut sind; ihr Wellenwiderstand ist daher unabhängig von ihrer Länge, ihr Übertragungsmaß dagegen proportional ihrer Länge. Man setzt bei ihnen

$$g = \gamma l, \quad b = \beta l, \quad a = \alpha l \quad (487)$$

und nennt die Proportionalitätskonstanten γ , β , α die „auf die Längeneinheit bezogenen“ oder kürzer die „bezogenen“ Maße.

§ 165. Das Dämpfungsmaß als Maß der Übertragungsfähigkeit. Bei Anpassung nach dem Wellenwiderstand ist nach der Gleichung (456) des § 158

$$N = |\mathfrak{S}_2|^2 R_e = \frac{|\mathfrak{C}|^2}{4 |\mathfrak{Z}|^2} e^{-2b} R_e. \quad (488)$$

Die in einen angepaßten Verbraucher übergehende Leistung hängt daher zwar von dem Betrage des Wellenwiderstands ab; viel wesentlicher ist aber ihre exponentielle Abhängigkeit vom Dämpfungsmaß b . Da sich dieses bei Vierpolketten additiv zusammensetzt und bei Leitungen der Leitungslänge proportional ist, gilt es seit langem als wichtiges Maß für die Übertragungsfähigkeit von Vierpolsystemen. Die „Reichweite“ einer Leitung ist ihrem bezogenen Dämpfungsmaß umgekehrt proportional.

Sind die einzelnen Teile einer Fernsprechverbindung mangelhaft aneinander angepaßt, so besteht ein Unterschied zwischen dem resultierenden Dämpfungsmaß und der Summe der Einzeldämpfungsmaße. Ob das resultierende Maß größer oder kleiner ist als die Summe der Einzelmaße, hängt von den Phasenverhältnissen ab. Unter den praktisch meist vorliegenden Bedingungen rufen Anpassungsmängel kleine Zusatzdämpfungen hervor, die sich nach (482) berechnen lassen. Vgl. § 235.

§ 166. Betriebsdämpfung und Betriebsübertragungsmaß. In der Abhängigkeit des resultierenden Dämpfungsmaßes von der Anpassung liegt ein praktischer

Nachteil. Man gibt daher neuerdings vorwiegend die sogenannte „Betriebsdämpfung“ an.

Wir denken uns den betreffenden Vierpol zwischen zwei Widerstände \mathfrak{R}_a und \mathfrak{R}_e geschaltet. Dann nimmt der Verbraucher $\mathfrak{R}_e = R_e + jR'_e$ die Leistung

$$N = |\mathfrak{S}_2|^2 R_e \quad (489)$$

auf. Man könnte diese Leistung zur Festlegung eines dimensionslosen Gütemaßes mit der Leistung vergleichen, die der Verbraucher aufnähme, wenn er unmittelbar an den Erzeuger geschaltet wäre. Diese Vergleichsleistung kann aber — infolge mangelhafter Anpassung des Verbrauchers an den Erzeuger — ebenfalls verhältnismäßig niedrig sein. Wollen wir das Maß für die Güte des Vierpols vorsichtig festsetzen, also lieber zu niedrig als zu hoch, so müssen wir die Leistung N mit einer möglichst hohen Leistung vergleichen, am besten also nach § 105, Gleichung (263) mit der Leistung

$$\hat{N} = \frac{|\mathfrak{E}|^2}{4 R_a}. \quad (490)$$

Als Gütemaß kann demnach die Größe

$$\frac{N}{\hat{N}} = \frac{|\mathfrak{S}_2|^2 R_e \cdot 4 R_a}{|\mathfrak{E}|^2} \quad (491)$$

dienen.

Soll die zu definierende „Betriebsdämpfung“ \mathbf{b} der früheren „Vierpoldämpfung“ b [Gleichung (488)] entsprechen, so muß dieses Verhältnis offenbar gleich $e^{-2\mathbf{b}}$ gesetzt werden. Daraus folgt aber

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2} \ln \frac{|\mathfrak{E}|^2}{|\mathfrak{S}_2|^2 \cdot 4 R_a R_e} = \ln \frac{|\mathfrak{E}|}{2 |\mathfrak{S}_2| \sqrt{R_a R_e}} = \ln \frac{|\mathfrak{E}|}{2 |\mathfrak{U}_2| \sqrt{R_a G_e}}. \quad (492)$$

Diese Herleitung der „Betriebsdämpfung“ aus einer Energiebetrachtung ist neuerdings wieder verlassen worden. Man definiert jetzt¹

$$\mathbf{g} = \mathbf{b} + j\mathbf{a} = \ln \frac{\mathfrak{E}}{2 \mathfrak{S}_2 \sqrt{\mathfrak{R}_a \mathfrak{R}_e}} = \ln \left(\frac{\mathfrak{E}}{2 \mathfrak{U}_2} \sqrt{\frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{R}_a}} \right) \quad (493)$$

und deutet dieses folgendermaßen: In den Verbraucher \mathfrak{R}_e wandert die „Scheinleistung“ $|\mathfrak{S}_2|^2 |\mathfrak{R}_e|$. Diese vergleicht man bei der neueren Definition mit der Scheinleistung $|\mathfrak{U}_1| |\mathfrak{S}_1| = |\mathfrak{E}|/2 \cdot |\mathfrak{E}|/2 |\mathfrak{R}_a| = |\mathfrak{E}|^2/4 |\mathfrak{R}_a|$, welche die Stromquelle hergäbe, wenn man sie durch ihren eigenen inneren Widerstand \mathfrak{R}_a abschliesse. Denn es ist

$$\frac{1}{2} \ln \frac{|\mathfrak{E}|^2}{4 |\mathfrak{R}_a| \cdot |\mathfrak{S}_2|^2 |\mathfrak{R}_e|} = \ln \frac{|\mathfrak{E}|}{2 |\mathfrak{S}_2| \sqrt{|\mathfrak{R}_a| |\mathfrak{R}_e|}} = \mathbf{b}, \quad (494)$$

da ja die Rechenregel gilt:

$$\ln (|\mathfrak{X}| \angle \alpha) = \ln |\mathfrak{X}| + j\alpha. \quad (495)$$

Man sieht, daß die alte und die neue Definition übereinstimmen, wenn \mathfrak{R}_a und \mathfrak{R}_e reelle Widerstände sind.

Die neue Definition bewährt sich besonders bei Kettenschaltungen. Setzt man bei n Klemmenpaaren

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{R}_a}} &= \frac{(\mathfrak{R}_a + \mathfrak{W}_1) \mathfrak{S}_1}{\sqrt{\mathfrak{R}_a}} = \frac{(\mathfrak{R}_a + \mathfrak{W}_1) \sqrt{\mathfrak{S}_1^2 \mathfrak{W}_1}}{\sqrt{\mathfrak{R}_a \mathfrak{W}_1}} = \frac{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{W}_1}{\sqrt{\mathfrak{R}_a \mathfrak{W}_1}} \sqrt{\mathfrak{U}_1 \mathfrak{S}_1}, \\ \mathfrak{S}_n \sqrt{\mathfrak{R}_e} &= \sqrt{\mathfrak{S}_n^2 \mathfrak{R}_e} = \sqrt{\mathfrak{U}_n \mathfrak{S}_n}, \end{aligned} \right\} \quad (496)$$

¹ Verhandlungen des Comité consultatif international des communications téléphoniques à grande distance (CCI), S. 45 (1930).

so wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \ln \frac{\Re_a + \mathfrak{W}_1}{2 \sqrt{\Re_a \mathfrak{W}_1}} + \ln \sqrt{\frac{u_1 \mathfrak{S}_1}{u_n \mathfrak{S}_n}} \\ &= \ln \frac{\Re_a + \mathfrak{W}_1}{2 \sqrt{\Re_a \mathfrak{W}_1}} + \ln \sqrt{\frac{u_1 \mathfrak{S}_1}{u_2 \mathfrak{S}_2}} + \ln \sqrt{\frac{u_2 \mathfrak{S}_2}{u_3 \mathfrak{S}_3}} + \dots + \ln \sqrt{\frac{u_{n-1} \mathfrak{S}_{n-1}}{u_n \mathfrak{S}_n}}. \end{aligned} \quad (497)$$

D. h. die Betriebsdämpfung setzt sich — abgesehen von einem Eingangsglied, das für $\mathfrak{W}_1 = \Re_a$ verschwindet — additiv zusammen aus Teildämpfungen, die den einzelnen Teilvierpolen entsprechen. Bei der Vierpoldämpfung gilt ein entsprechendes Additionstheorem nach § 164 nur für den Fall der Anpassung nach dem Wellenwiderstand. Es darf jedoch nicht übersehen werden, daß die Teildämpfungen, in die man die Betriebsdämpfung zerlegen kann, keine Eigenschaften der Teilvierpole allein sind; sie hängen als (mit dem Minuszeichen versehene) Logarithmen der geometrischen Mittel aus Spannungs- und Stromübersetzung jedesmal von den Eigenschaften aller Gebilde ab, die hinter dem betreffenden Teilvierpol folgen.

Die hier gegebene Definition der Betriebsdämpfung gilt ganz allgemein; insbesondere ist sie unabhängig von der Determinantenbedingung (§ 145). Ist diese erfüllt, so kann man unter Benutzung der Gleichungen (414) des § 150 und (442) des § 155 wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \ln \left(\frac{\mathfrak{M}}{2 \sqrt{\Re_a \Re_e}} \left(\frac{1}{\mathfrak{M}^2} - 1 \right) \right) = \ln \frac{(\Re_a + \mathfrak{W}_1)(\Re_e + \mathfrak{W}_2) - \mathfrak{M}^2}{2 \mathfrak{M} \sqrt{\Re_a \Re_e}} \\ &= \ln \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{\Re_a \Re_e}{\mathfrak{M}}} + \left(\frac{1}{\mathfrak{s}} \sqrt{\frac{\Re_e}{\Re_a}} + \mathfrak{s} \sqrt{\frac{\Re_a}{\Re_e}} \right) \mathfrak{Cof} \mathfrak{g} + \frac{\mathfrak{B}^2/\mathfrak{M}}{\sqrt{\Re_a \Re_e}} \right\}, \end{aligned} \quad (498)$$

oder

$$\mathfrak{g} = \ln \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{\mathfrak{s}} \sqrt{\frac{\Re_e}{\Re_a}} + \mathfrak{s} \sqrt{\frac{\Re_a}{\Re_e}} \right) \mathfrak{Cof} \mathfrak{g} + \left(\sqrt{\frac{\Re_a \Re_e}{\mathfrak{B}}} + \frac{\mathfrak{B}}{\sqrt{\Re_a \Re_e}} \right) \mathfrak{Sin} \mathfrak{g} \right\}. \quad (499)$$

Das Glied mit $\mathfrak{Sin} \mathfrak{g}$ vereinfacht sich, wenn die erste Anpassungsbedingung, das Glied mit $\mathfrak{Cof} \mathfrak{g}$, wenn die zweite Anpassungsbedingung erfüllt ist. Erfüllt man beide Bedingungen zugleich, so geht das Betriebsübertragungsmaß, wie man sofort sieht, in das Vierpolübertragungsmaß über.

§ 167. **Messung der Betriebsdämpfung.** Die Betriebsdämpfung eines beliebigen Vierpols zwischen vorgeschriebenen reellen Abschlußwiderständen R_a und R_e läßt sich leicht messen (Abb. 151). Quer vor den Widerstand $R_a/2 + R_a/2$ legt man (zwischen die Klemmen 0) einen Kompensationsapparat K und sucht mit Hilfe eines Spannungsmessers von sehr hohem Scheinwiderstand denjenigen Bruchteil ϱ von ihm, an dem dieselbe Spannung liegt wie an den sekundären Klemmen des Vierpols. Dann entspricht die Spannung u_0 der elektromotorischen Kraft der vorgeschalteten Stromquelle, und es ist

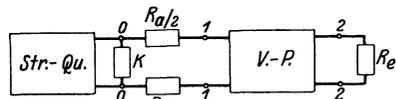


Abb. 151.

$$\left| \frac{u_0}{u_2} \right| = \frac{K}{\varrho} = \frac{\mathfrak{E}}{R_e |\mathfrak{S}_2|} = 2 \sqrt{\frac{R_a}{R_e}} e^{\mathfrak{b}},$$

also

$$\mathfrak{b} = \ln \left(\frac{K}{2 \varrho} \sqrt{\frac{R_e}{R_a}} \right). \quad (500)$$

Aus K , ϱ und dem Verhältnis der angeschalteten Widerstände ist die Betriebsdämpfung unmittelbar zu berechnen.

Sind die beiden reellen Widerstände R_a und R_b je gleich 600Ω , so erhält man den Normwert der Betriebsdämpfung. Er entspricht der „Bezugsdämpfung“, die auf dem Vergleich von Sprachlautstärken beruht und auf den sogenannten „Ureichkreis“ bezogen¹ ist. Die Bezugsdämpfung darf natürlich nicht mit der „bezogenen Dämpfung“ (§ 164) verwechselt werden.

§ 168. **Der Wirkungsgrad des Vierpols.** In der Starkstromtechnik interessiert man sich vor allem für den „Wirkungsgrad“ des Vierpols, d. h. für das Verhältnis der in den Verbraucher übergehenden Leistung zu der in den Vierpol eintretenden. Der Wirkungsgrad hängt nach dem Energiesatz nur von der Höhe der Verluste im Innern des Vierpols ab.

Auch in der Schwachstromtechnik rührt die geringe Höhe der in den Verbraucher übergehenden Leistung in vielen Fällen hauptsächlich von Umwandlung elektromagnetischer Energie in Wärme innerhalb des Vierpols her. Wenn aber z. B. eine Pupinleitung höhere Frequenzen so gut wie überhaupt nicht weitergibt, so hat dies mit Energievergeudung nichts zu tun: Der Wirkungsgrad im Sinne der Starkstromtechnik ist bei ihr noch verhältnismäßig hoch. Deshalb berechnet man in der Schwachstromtechnik in der Regel nicht den Wirkungsgrad, sondern die beiden Dämpfungsmaße b und \mathbf{b} , die auch die andern schwächenden Einflüsse, insbesondere die so wichtige Spannungsteilerwirkung, umfassen.

Daß man in der Fernmeldetechnik mit Wirkungsgraden viel niedrigerer Größenordnung als in der Starkstromtechnik zufrieden sein kann, liegt daran, daß es bei ihr weniger auf die Quantität als auf die Qualität der zu übertragenden Energie ankommt. Der Energieaufwand kostet verhältnismäßig wenig, und insbesondere das Telephon und das menschliche Ohr sind sehr empfindliche Anzeiger. Die Kosten des Fernsprechbetriebs liegen hauptsächlich in dem Aufwand für die Verzinsung und Tilgung des Kapitals, das in den Anlagen steckt.

§ 169. **Zahlenwerte der Dämpfung.** Auf dem europäischen Festlande ist es üblich, die beiden Dämpfungsmaße b und \mathbf{b} unmittelbar gemäß ihrer Definition anzugeben. Aber auch bei dimensionslosen Größen (reinen Zahlen) kann man die Einheiten willkürlich wählen. In Amerika und England gibt man den Zahlenwert so an, daß er gleich dem gemeinen Logarithmus der „Leistungsschwächung“ ist. Die entsprechende Einheit des Dämpfungsmaßes nennt man² Bel; definitionsgemäß ist also

$$\frac{b}{\text{Bel}} = \lg(e^{2b}) = 2b \lg e, \quad (501)$$

also

$$\text{Bel} = \frac{1}{2 \lg e} = \frac{1}{0,868} = 1,15. \quad (502)$$

Zur Unterscheidung setzt man zu der der Definition entsprechenden Angabe von b das Wort „Neper“, schreibt also z. B.

$$b = 1,3 \text{ Neper} = 1,3 \frac{\text{Bel}}{1,15} = 1,13 \text{ Bel}.$$

Die Einheit „Dezibel“ ($\text{db} = 0,115 \text{ Neper}$) ist identisch mit der „Transmission Unit“ (TU), sie ist nur wenig verschieden von den alten Einheiten „Meilen engl. Standard-Kabels“ ($= 0,106 \text{ Neper}$) und „Meilen amerikan. Standard-Kabels“ ($= 0,109 \text{ Neper}$).

Wenn die Gesamtdämpfung bei einer Fernsprechleitung den Wert 3,5 Neper überschreitet, ist erfahrungsgemäß bei normalen Mikrofonen und Telephonen die äußerste Grenze des Zulässigen erreicht. Bei Fernverbindungen läßt man mit Rücksicht auf die Dämpfung der Teilnehmeranschlußleitungen eine höchste Dämpfung der eigentlichen Leitung von 1,3 Neper zu (vgl. § 354).

Eine Dämpfung von 0,7 Neper (genauer $0,69315 = \lg 2/\lg e$) entspricht einer Schwächung auf die Hälfte, 3,5 Neper entsprechen daher einer Schwächung auf den 32. Teil, d. h. in der Energie auf rund $1/1000$.

¹ Verhandlungen des CCI S. 45, 47ff. (1930).

² Verhandlungen des CCI S. 43 (1930).

VII. Übertrager.

§ 170. Der verlust- und streuungsfreie Übertrager (Transformator). Das magnetische Feld im Kern eines streuungslosen „Übertragers“ rührt nach dem Durchflutungssatz von den Strömen in den beiden Wicklungen her und wirkt nach dem Induktionsgesetz auf die beiden Wicklungen induzierend. Die im Kern aufgespeicherte magnetische Energie ist daher den beiden Wicklungen gemeinsam; Leistung, die auf der primären Seite aufgenommen ist, kann durch die Vermittlung des Kernfelds auf die sekundäre Seite „übertragen“ werden.

Wir haben im § 8r abgeleitet, daß bei einem streuungslosen Übertrager die Induktivitäten dargestellt werden können durch

$$L_1 = w_1^2 G, \quad L_2 = w_2^2 G, \quad L_{12} = w_1 w_2 G, \quad (503)$$

wenn wir den magnetischen Leitwert des Kerns mit G bezeichnen. Sind nun die Widerstände der beiden Wicklungen zu vernachlässigen und bedeuten mit den Zählpfeilen der Abb. 152 u_1 die an die Primärwicklung angelegte, u_2 die an der Sekundärwicklung durch irgendeinen Verbraucher abgenommene Spannung, i_1 und i_2 die Klemmenströme, so gelten die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} \pm L_{12} \frac{di_2}{dt}, \\ 0 &= \pm L_{12} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} + u_2, \end{aligned} \right\} \quad (504)$$

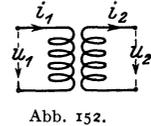


Abb. 152.

oder, symbolisch geschrieben:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= j\omega (L_1 \mathfrak{S}_1 \pm L_{12} \mathfrak{S}_2) = j\omega w_1 G (w_1 \mathfrak{S}_1 \pm w_2 \mathfrak{S}_2), \\ -u_2 &= j\omega (\pm L_{12} \mathfrak{S}_1 + L_2 \mathfrak{S}_2) = \pm j\omega w_2 G (w_1 \mathfrak{S}_1 \pm w_2 \mathfrak{S}_2). \end{aligned} \right\} \quad (505)$$

Wir haben dabei die Vorzeichen der Glieder mit L_{12} vorläufig unbestimmt gelassen und behalten uns vor, im nächsten Paragraph auf diesen Punkt zurückzukommen.

Durch Division folgt die Spannungsübersetzung:

$$u_2 = \frac{u_1}{\mathfrak{S}_1} = \mp \frac{w_2}{w_1} = \mp \frac{L_{12}}{L_1} = \mp \frac{L_2}{L_1}. \quad (506)$$

Der Übertrager erlaubt demnach die Spannung eines Wechselstroms hinauf- oder herunterzutransformieren. Das Umspannungsverhältnis ist bei dem streuungs- und verlustfreien Übertrager gleich dem Verhältnis der Windungszahlen; man nennt dieses deshalb auch das „Übersetzungsverhältnis“. Da bei der Bildung der Spannungsübersetzung gleichzeitig mit dem Faktor $w_1 \mathfrak{S}_1 \pm w_2 \mathfrak{S}_2$ beide Ströme weggefallen sind, ist die an den sekundären Klemmen abgenommene Spannung unabhängig von der Größe des dort angeschalteten Abschlußwiderstandes \mathfrak{R}_e , also unabhängig von der Belastung.

Für die Ströme \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 gilt keineswegs das Entsprechende. Da $u_2 = \mathfrak{R}_e \mathfrak{S}_2$, wird

$$\mathfrak{S}_2 = \mp \frac{w_2 u_1}{\mathfrak{R}_e}; \quad (507)$$

\mathfrak{S}_1 folgt aus der ersten Gleichung (505)

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{u_1}{j\omega w_1^2 G} \mp \frac{w_2}{w_1} \mathfrak{S}_2 = \frac{u_1}{j\omega L_1} \mp \frac{w_2}{w_1} \mathfrak{S}_2. \quad (508)$$

Der primäre Strom setzt sich also aus zwei Teilen zusammen: aus dem Leerlaufstrom $u_1/j\omega L_1$, der gegen die primäre Spannung um 90° verzögert ist, und dem

„übersetzten“ sekundären Strom $\mp \frac{w_2}{w_1} \mathfrak{S}_2$. Infolge der magnetischen Kopplung der beiden Kreise bewirkt jede Erhöhung der sekundären Stromentnahme, wie man sieht, von selbst eine entsprechende (d. h. „übersetzte“) Erhöhung des primären Stromes. Die Gleichung (508) ist ein besonderer Fall der im § 150 allgemein für Vierpole abgeleiteten Beziehung (417).

Das Verhältnis des sekundären Stromes zum primären ist:

$$\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_1} = \mp \frac{\frac{w_2}{w_1} \mathfrak{U}_1}{j \omega L_1 \mp \frac{w_2}{w_1} \mathfrak{S}_2} = \mp \frac{j \omega \frac{w_2}{w_1} L_1}{\mathfrak{R}_e + j \omega \frac{w_2}{w_1} L_1}; \tag{509}$$

die Stromübersetzung hängt also im Gegensatz zur Spannungsübersetzung von der Belastung ab. Nur bei Kurzschluß ist

$$\left(\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_1}\right)^k = \mp \frac{w_1}{w_2}; \tag{510}$$

dann transformieren sich also die Ströme in demselben Verhältnis nach unten wie die Spannungen nach oben und umgekehrt.

Die hier für den streuungs- und verlustfreien Übertrager abgeleiteten Beziehungen lassen sich zum Teil unmittelbar aus den Grundgleichungen ablesen, denen er als Vierpol gehorcht. Diese haben nach (506) und (508) die einfache Gestalt

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U}_1 &= \mp \frac{w_1}{w_2} \mathfrak{U}_2, \\ \mathfrak{S}_1 &= \mp \frac{\mathfrak{U}_2}{j \omega w_1 w_2 G} \mp \frac{w_2}{w_1} \mathfrak{S}_2. \end{aligned} \right\} \tag{511}$$

Man erkennt aus ihnen, daß der „Kernwiderstand“ des idealen Übertragers gleich der komplexen Gegeninduktanz $j\omega L_{12}$ und daß sein Wellenwiderstand $\mathfrak{Z} = \sqrt{\mathfrak{R}/\mathfrak{G}}$ gleich Null ist.

§ 171. **Berücksichtigung der Wicklungssinne.** Bei der Aufstellung der Gleichungen des vorigen Paragraphen haben wir die Vorzeichen der Glieder mit L_{12} unbestimmt gelassen. Sie hängen nach dem Durchflutungssatz davon ab, ob die in den Wicklungen des Übertragers fließenden Ströme, wenn sie positiv sind, um die gemeinsamen Induktionslinien im gleichen oder entgegengesetzten Sinne kreisen. Hierfür ist die Wicklungsart der Spulen und die Art ihrer Verbindung mit den übrigen Teilen der Schaltung entscheidend.

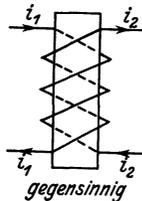


Abb. 153.

Um diese Schaltungsbesonderheiten in den Schaltbildern zum Ausdruck zu bringen, wollen wir an die miteinander gekoppelten Wicklungen die „Zählangaben“ „gleichsinnig“ oder „gegenseinnig“ setzen. „Gleichsinnig“ soll heißen: Positive Ströme umkreisen die gemeinsamen Induktionslinien im selben Sinn; „gegenseinnig“ bedeutet das Umgekehrte.

In Abb. 153 beispielsweise ist vorausgesetzt, daß die beiden Spulen rechtsgängige Schrauben um einen gemeinsamen Kern bilden. Aus den eingetragenen Richtungen der Zählpfeile geht hervor, daß die Wicklungen gegenseinnig sind; in den Gleichungen des vorigen Paragraphen muß daher das untere Zeichen verwendet werden. So liefert z. B. die Gleichung (510) für das Verhältnis der Ströme bei Kurzschluß den positiven Wert w_1/w_2 . In einem Augenblick also, wo der primäre Strom wie sein Zählpfeil fließt, fließt auch der sekundäre wie sein Zählpfeil. Um die gemeinsamen Induktionslinien fließen die beiden Ströme aber nach unserer Definition der Gegenseinnigkeit im entgegengesetzten Sinn.

Wäre die Wicklung gleichsinnig, so hätte nach (510) \mathfrak{I}_2 das entgegengesetzte Vorzeichen wie \mathfrak{I}_1 . Der sekundäre Strom flösse also bei positivem \mathfrak{I}_1 entgegengesetzt seinem Zählpfeil, um die gemeinsamen Induktionslinien also wieder in entgegengesetztem Sinne wie der primäre. Bei Kurzschluß laufen demnach die beiden Ströme unter allen Umständen in entgegengesetztem Sinne um den Kern.

Die Rechts- oder Linksgängigkeit der Spulenwandel ist, wie man sieht, für die Frage der Gleichsinnigkeit oder Gegensinnigkeit der Wicklungen keineswegs entscheidend. Bei mehrlagigen Spulen z. B. werden die einzelnen Lagen häufig abwechselnd rechts- und linksgängig gewickelt; der vom Kern aus beurteilte Wicklungssinn ist trotzdem für jede Lage derselbe.

In der Theorie des induktiv gekoppelten Übertragers pflegt man Gegensinnigkeit vorauszusetzen; wir lassen daher vom § 173 ab die oberen Vorzeichen weg¹.

§ 172. Der Sparübertrager. Der Sparübertrager ist eine Spule mit Eisenkern (Abb. 154), die so gefertigt ist, daß man wie beim Spannungsteiler an einem Stück von ihr abgreifen kann.

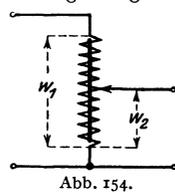


Abb. 154.

Die höhere Spannung liegt an der ganzen Spule, die niedrigere an dem Teilstück.

Die Möglichkeit einer Transformation nach oben und nach unten beruht wesentlich auf dem Umstande, daß die beiden Stücke, in welche die Spule durch die eine Abzapfstelle zerlegt wird, durch den gemeinsamen Kern magnetisch fest miteinander gekoppelt sind: man kann die Schaltung Abb. 154 durch die Schaltung Abb. 155 ersetzen. Legt man die Zählpfeile dieser Ab-

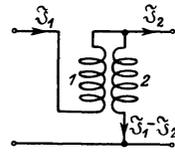


Abb. 155.

bildung zugrunde, so ist die Wicklung eine gleichsinnige, und es gelten daher mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= (w_1 - w_2)^2 G, & L_{12} &= (w_1 - w_2) w_2 G, \\ L_2 &= w_2^2 G, \end{aligned} \right\} \quad (512)$$

bei vernachlässigbaren Wirkwiderständen die Grundgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U}_1 &= j\omega L_1 \mathfrak{I}_1 + j\omega L_{12} (\mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2) + j\omega L_2 (\mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2) + j\omega L_{12} \mathfrak{I}_1 \\ &= j\omega (L_1 + 2L_{12} + L_2) \mathfrak{I}_1 - j\omega (L_{12} + L_2) \mathfrak{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (513)$$

und

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -j\omega L_2 (\mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2) - j\omega L_{12} \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{U}_2 \\ &= -j\omega (L_2 + L_{12}) \mathfrak{I}_1 + j\omega L_2 \mathfrak{I}_2 + \mathfrak{U}_2. \end{aligned} \right\} \quad (514)$$

Nun ist aber nach (512)

$$L_{12} + L_2 = w_1 w_2 G, \quad L_1 + 2L_{12} + L_2 = w_1^2 G.$$

Also kann man auch schreiben

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U}_1 &= j\omega G (w_1^2 \mathfrak{I}_1 - w_1 w_2 \mathfrak{I}_2), \\ \mathfrak{U}_2 &= j\omega G (w_1 w_2 \mathfrak{I}_1 - w_2^2 \mathfrak{I}_2), \end{aligned} \right\} \quad (515)$$

und es ergibt sich die im § 170 abgeleitete Formel für die Spannungsübersetzung $\mathfrak{U}_2/\mathfrak{U}_1 = w_2/w_1$, diesmal aber mit eindeutigem Vorzeichen.

Entsprechendes gilt für den nach oben transformierenden Sparübertrager.

§ 173. Kupferverluste. Streuung, Hysterese- und Wirbelstromverluste. Die vereinfachenden Voraussetzungen, die wir in den vorigen Paragraphen gemacht haben, treffen im allgemeinen nicht zu.

Die Kupferwicklungen der Übertrager sind nicht widerstandsfrei. Die Gegeninduktivität zwischen ihnen ist nicht gleich dem geometrischen Mittel ihrer Induktivitäten, sondern kleiner; wir setzen wie im § 82

$$L_{12} = \kappa \sqrt{L_1 L_2} = \sqrt{(1 - \sigma) L_1 L_2}.$$

¹ Bei Schaltbildern kann es bequem sein, durchweg Gleichsinnigkeit oder Gegensinnigkeit vorauszusetzen und den wahren Wicklungssinn wenn nötig durch Kreuzen der Zuleitungen zum Ausdruck zu bringen.

Jeder Übertrager mit ferromagnetischem Kern zeigt weiter „Eisenverluste“, d. h. Verluste durch Entwicklung von Hysterisis- und Wirbelstromwärme in seinem Kern.

Den Hysterisisverlust darf man näherungsweise¹ so in Rechnung stellen, als ob er lediglich darauf beruhte, daß die Induktion im Eisen zeitlich hinter der Feldstärke um einen (positiven) kleinen Winkel δ zurückbleibt (durch das Überstreichen kennzeichnen wir das Komplexwerden der Permeabilität):

$$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{H}} = \bar{\mu} = |\bar{\mu}| \angle -\delta. \quad (516)$$

(Diese Annahme ist gleichbedeutend mit der Annahme, daß die Hysterisiskurve eine kleine Ellipse sei.) Setzt man die komplexe Permeabilität $\bar{\mu}$ in die Formel für die Induktivität beispielsweise einer Ringspule ein, so erhält man für deren komplexen Widerstand bei kleinem δ

$$\begin{aligned} \Re &= R + j \omega \bar{\mu} w^2 \frac{F}{l} = R + j \omega |\bar{\mu}| (\tau - j \delta) w^2 \frac{F}{l} \\ &= R + \omega \delta |\bar{\mu}| w^2 \frac{F}{l} + j \omega |\bar{\mu}| w^2 \frac{F}{l} \approx R + \omega \delta L + j \omega L, \end{aligned} \quad (517)$$

wenn man unter L die Induktivität versteht, welche ohne Verzögerung der Induktion vorhanden wäre. Zu dem Kupferwiderstand R tritt also ein Zusatzwiderstand $\omega \delta L$, der der Frequenz proportional ist.

Auch die im Eisenkern entwickelte Wirbelstromwärme wird unter die „Eisenverluste“ gerechnet. Ihr entspricht ein Zusatzwiderstand, der erfahrungsgemäß dem Quadrate der Frequenz proportional ist. Die gesamten Eisenverluste können daher näherungsweise durch den Ansatz²

$$\Re = R + (\delta + \omega \vartheta) \omega L + j \omega L \quad (518)$$

berücksichtigt werden, wo ϑ der zugehörige Wirbelstromkoeffizient ist.

Für die Gegeninduktivität zwischen beiden Wicklungen findet man in derselben Weise, daß sie nicht rein imaginär ist, sondern einen merklichen reellen Anteil hat:

$$\Re_0 = (\delta + \omega \vartheta) \omega L_{12} + j \omega L_{12}, \quad (519)$$

ein Ergebnis, das ebenfalls durch die Messungen bestätigt wird.

§ 174. Spulenkazität. Legt man an die Enden einer Spule eine Wechselspannung, so schließen sich die Stromlinien nicht nur durch ihre Windungen, sondern zum Teil auch als Verschiebungsstromlinien durch das Dielektrikum. Die dielektrischen Stromwege und die ihnen entsprechenden Kapazitäten kommen neben dem galvanischen Stromweg um so mehr in Betracht, je höher die Frequenz und je höher der galvanische Widerstand der Spule ist und je höhere Spannungen an den einzelnen dielektrischen Leitwerten liegen. Bei einlagigen Spulen bestehen zwischen benachbarten Windungen, verglichen mit der Gesamtspannung, nur geringe Spannungen; daher laufen bei ihnen die Verschiebungsströme hauptsächlich vom einen Spulenende zum anderen, vorausgesetzt, daß sich dem „wahren“ Strom (§ 45) nicht etwa in Gestalt benachbarter Leiter (z. B. des Kerns oder einer Spulenhülle) besser leitende Wege darbieten. Bei mehrlagigen Spulen kommen, falls sie nicht in besonderer Weise gewickelt werden, ähnlich wie bei

¹ Wir berücksichtigen nur den Nachwirkungsverlust des § 262. Es ist $2 \pi \delta = A_n$.

² Holm, R.: Arch. Elektrot. 6, 113 (1917). Der im § 262 einzuführende Koeffizient A_w ist gleich $4 \pi^2 \vartheta$.

den Zylinderkondensatoren hauptsächlich die dielektrischen Leitwerte zwischen den einzelnen Lagen und die Leitwerte über benachbarte Leiter in Betracht.

Man kann die Kapazität einer Spule meist durch einen Kondensator berücksichtigen, den man sich parallel zu ihr angeordnet denkt. Beim Übertrager wird gewöhnlich nur die Kapazität der Wicklung mit der größeren Windungszahl wirksam; transformiert er nach oben, so genügt fast immer das Schaltschema Abb. 156. Erfahrungsgemäß liegen die Kapazitäten der Übertragerspulen in der Nähe von $50 \cdot 10^{-12}$ F.

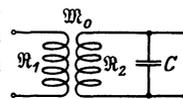


Abb. 156.

§ 175. Vierpolparameter des Übertragers bei Berücksichtigung der Nebeneinflüsse. Sehen wir zunächst von der Spulenkapazität ab, so lassen sich die beiden miteinander magnetisch gekoppelten Wicklungen eines Übertragers immer durch eine „einfache Sternschaltung“ (Abb. 157) ersetzen, wenn man in deren Längszweige die komplexen Widerstände $\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{M}_0$ und

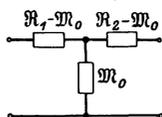


Abb. 157.

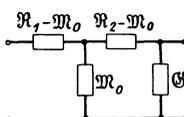


Abb. 158.

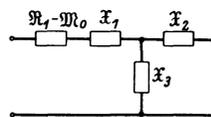


Abb. 159.

$\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{M}_0$, in deren Querzweig den komplexen Widerstand \mathfrak{M}_0 schaltet¹. \mathfrak{R}_1 und \mathfrak{R}_2 bedeuten dabei gemäß Abb. 156 die komplexen Widerstände der Wicklungen, \mathfrak{M}_0 die komplexe Gegeninduktanz. Denn tatsächlich ist ja bei diesem Ersatzbild

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{W}_1^I &= \mathfrak{R}_1 - \mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{R}_1 \\ \mathfrak{W}_2^I &= \mathfrak{R}_2 - \mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{R}_2 \end{aligned} \right\} \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0; \quad (520)$$

wie beim wirklichen Übertrager (vgl. § 170 am Schluß).

Die Spulenkapazität C bedeutet einen parallel geschalteten Leitwert \mathfrak{G} (Abb. 158). Dieser bildet mit den Widerständen $\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{M}_0$ und \mathfrak{M}_0 ein „Dreieck“. Wir ersetzen es nach § 23 durch den gleichwertigen Stern (Abb. 159) und erhalten für dessen drei Widerstände:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{X}_1 &= \frac{\mathfrak{M}_0(\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{M}_0)}{\mathfrak{R}_2 + \frac{1}{\mathfrak{G}}} = \frac{\mathfrak{M}_0 \mathfrak{G} (\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{M}_0)}{1 + \mathfrak{R}_2 \mathfrak{G}}, \\ \mathfrak{X}_2 &= \frac{1}{\mathfrak{G}} \frac{\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{M}_0}{\mathfrak{R}_2 + \frac{1}{\mathfrak{G}}} = \frac{\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{M}_0}{1 + \mathfrak{R}_2 \mathfrak{G}}, \\ \mathfrak{X}_3 &= \frac{1}{\mathfrak{G}} \frac{\mathfrak{M}_0}{\mathfrak{R}_2 + \frac{1}{\mathfrak{G}}} = \frac{\mathfrak{M}_0}{1 + \mathfrak{R}_2 \mathfrak{G}}. \end{aligned} \right\} \quad (521)$$

Bei Berücksichtigung der sekundären Kapazität gilt daher für den Übertrager:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{W}_1^I &= \mathfrak{R}_1 - \mathfrak{M}_0 + \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{X}_3 = \mathfrak{R}_1 - \frac{\mathfrak{M}_0^2 \mathfrak{G}}{1 + \mathfrak{R}_2 \mathfrak{G}}, \\ \mathfrak{W}_2^I &= \mathfrak{X}_2 + \mathfrak{X}_3 = \frac{\mathfrak{R}_2}{1 + \mathfrak{R}_2 \mathfrak{G}}, \\ \mathfrak{M} &= \frac{\mathfrak{M}_0}{1 + \mathfrak{R}_2 \mathfrak{G}}. \end{aligned} \right\} \quad (522)$$

¹ Im allgemeinen genügt es aber nicht, als Ersatzwiderstände Spulen zu nehmen. Vgl. § 172. Denn beispielsweise bei einem nach oben transformierenden Übertrager ist $|\mathfrak{R}_1| < |\mathfrak{M}_0|$ und daher die Phase von $\mathfrak{R}_1 - \mathfrak{M}_0$ meist negativ.

Der Einfachheit halber wollen wir voraussetzen, daß die Zeitkonstanten τ der beiden Wicklungen ebenso wie ihre Konstanten δ und ϑ miteinander übereinstimmen. Dann können wir schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \Re_1 &= R_1 + (\delta + \omega \vartheta) \omega L_1 + j \omega L_1 = j \omega L_1 (\mathbb{I} - j \varepsilon), \\ \Re_2 &= R_2 + (\delta + \omega \vartheta) \omega L_2 + j \omega L_2 = j \omega L_2 (\mathbb{I} - j \varepsilon), \\ \Re_0 &= (\delta + \omega \vartheta) \omega L_{12} + j \omega L_{12} = j \omega \sqrt{\mathbb{I} - \sigma} \sqrt{L_1 L_2} (\mathbb{I} - j \varepsilon_m). \end{aligned} \right\} \quad (523)$$

Hierbei ist gesetzt:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\mathbb{I}}{\omega \tau} + \delta + \omega \vartheta, \\ \varepsilon_m &= \delta + \omega \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (524)$$

Damit wird

$$\Re_1^i = j \omega L_1 \left\{ \mathbb{I} - j \varepsilon + \frac{\omega^2 (\mathbb{I} - \sigma) L_2 C (\mathbb{I} - j \varepsilon_m)^2}{\mathbb{I} - \omega^2 L_2 C (\mathbb{I} - j \varepsilon)} \right\} \quad (525)$$

oder, wenn man ein „Frequenzmaß“ η durch

$$\omega^2 L_2 C = \eta^2 \quad (526)$$

einführt:

$$\Re_1^i = j \omega L_1 \left\{ \mathbb{I} - j \varepsilon + \frac{\eta^2 (\mathbb{I} - \sigma) (\mathbb{I} - j \varepsilon_m)^2}{\mathbb{I} - \eta^2 + j \varepsilon \eta^2} \right\}. \quad (527)$$

Entsprechend wird:

$$\Re_2^i = j \omega L_2 \frac{\mathbb{I} - j \varepsilon}{\mathbb{I} - \eta^2 + j \varepsilon \eta^2}, \quad (528)$$

$$\Re = j \omega \sqrt{\mathbb{I} - \sigma} \sqrt{L_1 L_2} \frac{\mathbb{I} - j \varepsilon_m}{\mathbb{I} - \eta^2 + j \varepsilon \eta^2}. \quad (529)$$

Diese drei sehr allgemeinen Gleichungen bilden die Grundlage der Übertragertheorie. Die Verlustgrößen ε und ε_m haben dabei nur zur Trennung des Reellen von dem Imaginären gedient; wir haben uns durch ihre Einführung also noch nicht auf die durch die Gleichungen (524) ausgedrückten Frequenzgänge festgelegt.

§ 176. **Der Leerlaufwiderstand des Übertragers.** Der sekundären Wicklung wird häufig, z. B. in der Technik der Elektronenröhren, nur ein sehr schwacher Strom entzogen. Es ist daher von praktischem Interesse, die Frequenzabhängigkeit des Leerlaufwiderstandes des Übertragers zu untersuchen.

Für sehr niedrige Frequenzen zunächst kann ε zwar nach Definition [erste Gleichung (524)] beträchtlich sein; η^2 , $\varepsilon \eta^2$, σ und ε_m sind aber klein, so daß

$$\Re_1^i \approx j \omega L_1 (\mathbb{I} - j \varepsilon) = \Re, \quad (530)$$

gesetzt werden darf. Bei niedrigen Frequenzen berechnet sich also der Leerlaufwiderstand, da die sekundäre Wicklung (nicht nur das sekundäre Klemmenpaar) stromlos ist, geradeso, als ob nur die primäre Wicklung vorhanden wäre.

Für etwas höhere Frequenzen, für die die beiden Winkel ε und ε_m als klein angesehen werden können, wollen wir den Widerstand \Re_1^i in seine rechtwinkligen Komponenten zerlegen. Wir entnehmen der Gleichung

$$\Re_1^i = j \omega L_1 \left\{ \mathbb{I} - j \varepsilon + \frac{\eta^2 (\mathbb{I} - \sigma) (\mathbb{I} - j \varepsilon_m)^2 (\mathbb{I} - \eta^2 - j \varepsilon \eta^2)}{(\mathbb{I} - \eta^2)^2 + \varepsilon^2 \eta^4} \right\} \quad (531)$$

zunächst unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung in den Verlustgrößen die reelle Komponente

$$\Re_1^r = \omega L_1 \left\{ \varepsilon + \frac{\eta^2 (\mathbb{I} - \sigma) (2 \varepsilon_m (\mathbb{I} - \eta^2)) + \varepsilon \eta^2}{(\mathbb{I} - \eta^2)^2 + \varepsilon^2 \eta^4} \right\}. \quad (532)$$

Sie steigt mit wachsender Frequenz (ausgehend von dem Gleichstromwert $\omega L_1 \varepsilon \approx R_1$) stark an; wenn das Frequenzmaß η gleich 1, also

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}} = \omega_0 \tag{533}$$

geworden ist, erreicht sie den wegen der Kleinheit von ε hohen Wert

$$(W_1^I)_{\eta=1} = \omega_0 L_1 \left(\varepsilon + \frac{1-\sigma}{\varepsilon} \right). \tag{534}$$

Steigt das Frequenzmaß η noch weiter, so nimmt W_1^I wieder ab. Bei hohem η und kleinem σ wird schließlich (n ist das Windungszahlenverhältnis w_2/w_1):

$$(W_1^I)_{\eta \gg 1} = \omega L_1 \left(\varepsilon + \frac{\eta^4 (-2\varepsilon_m + \varepsilon)}{\eta^4 (1 + \varepsilon^2)} \right) \approx 2 \omega L_1 (\varepsilon - \varepsilon_m) = R_1 + \frac{R_2}{n^2}; \tag{535}$$

d. h. der Wirkteil des Leerlaufwiderstands hängt nur von den Kupferverlusten ab und ist einfach gleich der Summe aus dem primären und dem übersetzten sekundären Kupferverlust.

In Abb. 160 ist der Frequenzgang von W_1^I für einen Übertrager gezeichnet, bei dem die Frequenz ω_0 so hoch liegt, daß für sie die Verlustgrößen ε und ε_m nicht mehr als klein angesehen werden können. Man sieht, daß das Maximum der Kurve bei den angenommenen Übertragerdaten bereits ein gutes Stück unterhalb der Frequenz ω_0 erreicht wird.

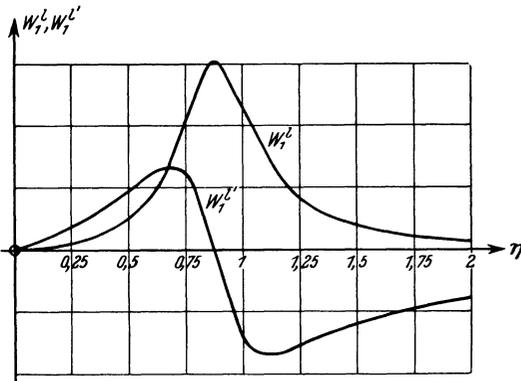


Abb. 160.

Die imaginäre Komponente W_1^V des Leerlaufwiderstands wollen wir zunächst untersuchen unter der Voraussetzung, daß die treibende Frequenz ω nicht in der Nähe der Frequenz ω_0 liegt. Dann kann man in der Gleichung (531) die Verlustgrößen enthaltenden Glieder vernachlässigen und erhält

$$W_1^V \approx j \omega L_1 \left(1 + \frac{\eta^2 (1 - \sigma) (1 - \eta^2)}{(1 - \eta^2)^2} \right) = j \omega L_1 \frac{1 - \sigma \eta^2}{1 - \eta^2}. \tag{536}$$

Hiernach hat der Leerlaufwiderstand \mathfrak{B}_1^I unterhalb der Frequenz ω_0 ($\eta < 1$) den Charakter einer Induktivität, oberhalb davon ($\eta > 1$) den Charakter einer Kapazität; bei einer in der Nähe von ω_0 liegenden Frequenz muß er daher zu einem reinen Widerstand werden. Die noch zu bestimmende Frequenz, bei der dies eintritt, ist nach unserer Definition in § 106 die eine „Scheinfrequenz“ von \mathfrak{B}_1^I ; die andere ist nach (536) die „Strefrequenz“:

$$\omega_\sigma = \frac{1}{\sqrt{\sigma L_2 C}}. \tag{537}$$

Es liegt nahe anzunehmen, daß die erste Scheinfrequenz (die „Eigenfrequenz“), mit der Frequenz ω_0 zusammenfällt. Wir setzen daher in der Ausgangsgleichung (527), die ja ganz allgemein ist, $\eta = 1$ und spalten den imaginären Teil ab:

$$W_1^V \approx j \omega L_1 \left(1 - \frac{(1 - \sigma)^2 \varepsilon_m}{\varepsilon} \right). \tag{538}$$

Die erste Scheinfrequenz liegt also zwar — ebenso wie das Maximum von W_1^l — in der Nähe von ω_0 , sie fällt jedoch im allgemeinen nicht genau mit dieser Frequenz zusammen. Abb. 160 zeigt auch den Verlauf des Blindteils von \mathfrak{B}_1^l ; man sieht, daß die Nullstelle von W_1^l , wenn die Verlustgrößen beträchtlich sind, ein gutes Stück unterhalb der Frequenz ω_0 liegt.

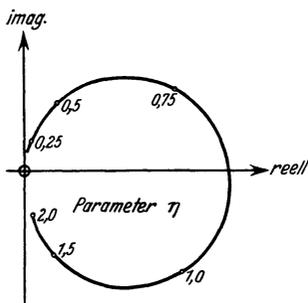


Abb. 161.

Der Gesamtverlauf von \mathfrak{B}_1^l wird durch die Ortskurve Abb. 161 veranschaulicht.

Da die sekundäre Induktivität dem Quadrate der sekundären Windungszahl proportional ist, die Kapazität C aber von der Windungszahl nur wenig abhängt, ist die erste Scheinfrequenz der sekundären Windungszahl nahezu umgekehrt proportional.

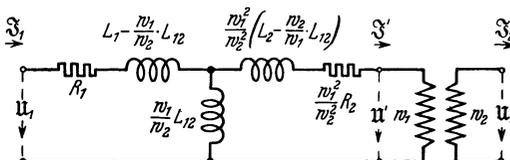


Abb. 162.

§ 177. Ersatzbilder des Übertragers. Bei Vernachlässigung der Spulenkapazität ist die Sternschaltung Abb. 157 ein vollkommenes Ersatzbild des Übertragers. Besonders anschaulich ist es, die Transformationswirkung von der Spannungsteilerwirkung der Sternschaltung zu trennen, indem man sich hinter (oder auch vor) dieser einen idealen Übersetzer¹ denkt (Abb. 162). Natürlich muß man dann die Elemente der Sternschaltung von der Transformationswirkung befreien, indem man sie, wie es in dem Bild geschehen ist, durch Multiplikation mit w_1/w_2 oder w_1^2/w_2^2 „ins Primäre übersetzt“. In der Tat ist dann bei der Sternschaltung

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_1^l &= R_1 + j\omega \left(L_1 - \frac{w_1}{w_2} L_{12} \right) + j\omega \frac{w_1}{w_2} L_{12} = R_1 + j\omega L_1, \\ \mathfrak{B}_2^l &= \frac{w_1^2}{w_2^2} R_2 + j\omega \frac{w_1^2}{w_2^2} \left(L_2 - \frac{w_2}{w_1} L_{12} \right) + j\omega \frac{w_1}{w_2} L_{12} = \frac{w_1^2}{w_2^2} (R_2 + j\omega L_2), \\ \mathfrak{M} &= j\omega \frac{w_1}{w_2} L_{12}, \end{aligned} \right\} \quad (539)$$

und es gelten für sie nach der Maschenregel die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= (R_1 + j\omega L_1) \mathfrak{S}_1 - j\omega L_{12} \cdot \frac{w_1}{w_2} \mathfrak{S}', \\ -\frac{w_2}{w_1} u' &= -j\omega L_{12} \cdot \mathfrak{S}_1 + (R_2 + j\omega L_2) \cdot \frac{w_1}{w_2} \mathfrak{S}'. \end{aligned} \right\} \quad (540)$$

die bei Hinzunahme des Übersetzers:

$$u_2 = \frac{w_2}{w_1} u', \quad \mathfrak{S}_2 = \frac{w_1}{w_2} \mathfrak{S}' \quad (541)$$

in die Grundgleichungen des kapazitätsfreien Übertragers

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= (R_1 + j\omega L_1) \mathfrak{S}_1 - j\omega L_{12} \mathfrak{S}_2, \\ -u_2 &= -j\omega L_{12} \mathfrak{S}_1 + (R_2 + j\omega L_2) \mathfrak{S}_2 \end{aligned} \right\} \quad (542)$$

übergehen.

¹ Ein „idealer Übersetzer“ ist ein Vierpol, bei dem die Koeffizienten \mathfrak{B} und \mathfrak{C} (§ 145) gleich Null sind, so daß nach der Determinantenbeziehung seine Grundgleichungen einfach $u_1 = u_2/\beta$; $\mathfrak{S}_1 = \beta \mathfrak{S}_2$ lauten.

Bei geringer Streuung kann man die Näherungen

$$\frac{w_1}{w_2} L_{12} \approx L_1, \quad (543)$$

$$L_1 - \frac{w_1}{w_2} L_{12} = L_1 - \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \sqrt{1 - \sigma} \sqrt{L_1 L_2} = L_1 (1 - \sqrt{1 - \sigma}) \approx \frac{\sigma}{2} L_1, \quad (544)$$

$$\begin{aligned} \frac{w_1^2}{w_2^2} \left(L_2 - \frac{w_2}{w_1} L_{12} \right) &= \frac{L_1}{L_2} \left(L_2 - \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \sqrt{1 - \sigma} \sqrt{L_1 L_2} \right) \\ &= L_1 (1 - \sqrt{1 - \sigma}) \approx \frac{\sigma}{2} L_1 \end{aligned} \quad (545)$$

in das Ersatzbild einführen.

Wir berechnen mit ihnen noch den Kurzschlußwiderstand des Übertragers. Beim wirklichen kapazitätsfreien Übertrager ist nach der Gleichung (420) des § 152

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1^k &= \mathfrak{R}_1 - \frac{\mathfrak{M}_0^2}{\mathfrak{R}_2} \approx j \omega L_1 (1 - j \varepsilon) - j \omega (1 - \sigma) L_1 (1 - 2j \varepsilon_m + j \varepsilon) \\ &\approx 2 \omega L_1 (\varepsilon - \varepsilon_m) + j \omega \sigma L_1 = 2 R_1 + j \omega \sigma L_1. \end{aligned} \quad (546)$$

Dasselbe ergibt sich aber unmittelbar aus dem Ersatzbild, wenn man den Strom durch die hohe Querinduktivität $w_1/w_2 \cdot L_{12}$ vernachlässigt und $R_2 = w_2^2/w_1^2 \cdot R_1$ setzt (vgl. Abb. 163).

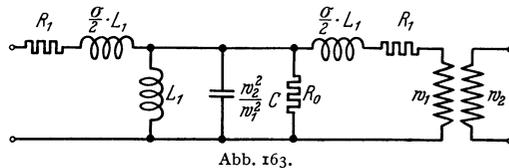


Abb. 163.

Die Spulenkapazität C und die Eisenverluste können qualitativ durch eine Querkapazität $w_2^2/w_1^2 \cdot C$ und einen frequenzabhängigen Querwiderstand

$$R_0 = \frac{\omega L_1}{\varepsilon}$$

berücksichtigt werden (Abb. 163). Bei diesem Ersatzbild ist beispielsweise (ohne Übersetzer)

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1^l &= R_1 + j \omega \frac{\sigma}{2} L_1 + \frac{1}{\frac{1}{j \omega L_1} + j \omega \frac{w_2^2}{w_1^2} C + \frac{1}{R_0}} \\ &= R_1 + j \omega L_1 \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{1}{1 - \omega^2 \frac{w_2^2}{w_1^2} L_1 C + j \varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (547)$$

Dieser Ausdruck wird für die erste Scheinfrequenz ($\omega = \omega_0$) annähernd gleich $R_1 + \omega_0 L_1 / \varepsilon$ in Übereinstimmung mit (534)¹. Es tritt offenbar Stromresonanz ein.

§ 178. Die Vierpoldämpfung des Übertragers bei mittleren Frequenzen; seine Anpassung an die Abschlußwiderstände. Ein Übertrager werde durch eine Zweipolquelle von der Leerlaufspannung \mathfrak{E} und dem reellen inneren Widerstand R_a betrieben und arbeite auf einen Verbraucher von dem reellen Widerstand R_e . R_a und R_e seien frequenzunabhängig.

Unter „mittleren“ Frequenzen wollen wir Frequenzen verstehen, die ein gutes Stück unterhalb der ersten Scheinfrequenz liegen, so daß η^2 und die Verlustgrößen ε und ε_m als klein angesehen werden können.

¹ Vgl. R. Feldtkeller u. H. Bartels: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. 6, H. 1, 65 (1927).

In dem Gebiet dieser mittleren Frequenzen kann man nach (527) bis (529) näherungsweise

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{W}_1^i &= j\omega L_1 (1 - j\varepsilon), \\ \mathfrak{W}_2^i &= j\omega L_2 (1 - j\varepsilon), \\ \mathfrak{M} &= j\omega \sqrt{1 - \sigma} \sqrt{L_1 L_2} (1 - j\varepsilon_m) \end{aligned} \right\} \quad (548)$$

setzen. Hieraus folgt

$$\mathfrak{Cof} g = \frac{\sqrt{\mathfrak{W}_1^i \mathfrak{W}_2^i}}{\mathfrak{M}} = \frac{1 - j\varepsilon}{\sqrt{1 - \sigma} (1 - j\varepsilon_m)} \approx 1 + \frac{\sigma}{2} - j \frac{1}{\omega\tau}. \quad (549)$$

Ist beispielsweise $\sigma = 0,01$, $\omega = 5000/s$, $\tau = 120 \text{ ms}$, so wird

$$\mathfrak{Cof} g = 1 + 0,005 - j \frac{1}{600}.$$

Die gebräuchlichen Übertrager haben also in dem weiten Bereich der mittleren Frequenzen nur eine sehr geringe Vierpoldämpfung.

Es empfiehlt sich, die Übertrager für die wichtigsten Frequenzen möglichst gut an die Widerstände R_a und R_e anzupassen. Nach der Definition im § 155 ist

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Z} &= j\omega \sqrt{L_1 L_2} \sqrt{(1 - j\varepsilon)^2 - (1 - \sigma)(1 - j\varepsilon_m)^2} \\ &\approx j\omega \sqrt{L_1 L_2} \sqrt{1 - 2j\varepsilon - (1 - \sigma) + 2j\varepsilon_m} \\ &= j\omega \sqrt{L_1 L_2} \sqrt{\sigma - j \cdot \frac{2}{\omega\tau}}; \end{aligned} \right\} \quad (550)$$

der Wellenwiderstand des Übertragers ist also bei geringer Streuung und hoher Zeitkonstante klein. Da seine Phase zwischen 45° und 90° liegt, kann man die reellen Abschlußwiderstände nur dem Betrage nach anpassen. Wir wollen daher für die wichtigste zu übertragende Frequenz, die wir ω_m nennen, die erste Anpassungsbedingung, so gut es geht, in der Form

$$|\mathfrak{Z}| = \sqrt{R_a R_e} \quad (551)$$

erfüllen. Dabei vernachlässigen wir $(2/\omega\tau)^2$ neben σ^2 , setzen also der Einfachheit halber

$$\omega_m \sqrt{\sigma L_1 L_2} = \sqrt{R_a R_e}. \quad (552)$$

Außerdem wählen wir entsprechend der zweiten Anpassungsbedingung

$$L_2 : L_1 = R_e : R_a. \quad (553)$$

Es sei z. B. $f_m = 800 \text{ Hz}$, $R_a = 600 \Omega$, $R_e = 1600 \Omega$, $\sigma = 1\%$, $f_0 = 13 \text{ kHz}$. Dann fordern wir

$$\sqrt{L_1 L_2} = \frac{\sqrt{R_a R_e}}{\sqrt{\sigma} \omega_m} = \frac{980 \Omega \text{ s}}{0,1 \cdot 2 \pi \cdot 800} = 1,95 \text{ H}.$$

Aus der zweiten Anpassungsbedingung folgt dazu

$$L_1 = 1,19 \text{ H}, \quad L_2 = 3,18 \text{ H}.$$

Der magnetische Leitwert G des Übertragerkerns sei gleich $1,3 \mu\text{H}$. Setzen wir diesen Wert in die Gleichungen $L_1 = w_1^2 G$ und $L_2 = w_2^2 G$ ein, so erhalten wir

$$w_1 = \sqrt{\frac{1,19 \text{ H}}{1,3 \mu\text{H}}} = 958, \quad w_2 = \sqrt{\frac{3,18 \text{ H}}{1,3 \mu\text{H}}} = 1565.$$

Damit sind die bei der vorausgesetzten Übertragergattung erforderlichen Windungszahlen festgelegt.

Die Kapazität der sekundären Wicklung¹ ergibt sich aus der Lage der ersten Scheinfrequenz zu

$$C = \frac{1}{\omega_m^2 L_2} = \frac{\text{s}^2}{1,69 \cdot 10^6 \cdot 4 \pi^2 \cdot 3,18 \text{ H}} = 47 \cdot 10^{-12} \text{ F}.$$

Wir wollen für die Folge beständig voraussetzen, daß die beiden Bedingungen (552) und (553) erfüllt sind, wählen also überall

$$L_1 = \frac{R_a}{\sqrt{\sigma} \omega_m}, \quad L_2 = \frac{R_e}{\sqrt{\sigma} \omega_m}. \quad (554)$$

§ 179. Die Betriebsdämpfung des Übertragers bei der Frequenz ω_m . Die Gleichung für die Betriebsdämpfung (498) im § 166 ergibt für $\omega = \omega_m$ unter Berücksichtigung der Anpassungsbedingungen (554)¹

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{b} &\approx \ln \frac{1}{2} \left| -j \sqrt{\sigma} + 2 \left(1 + \frac{\sigma}{2} - j \frac{1}{\omega_m \tau} \right) + j \frac{\sigma - j \frac{2}{\omega_m \tau}}{\sqrt{\sigma}} \right| \\ &\approx \ln \left| 1 + \frac{1}{\sqrt{\sigma} \omega_m \tau} \right| \approx \frac{1}{\sqrt{\sigma} \omega_m \tau}. \end{aligned} \right\} \quad (555)$$

Die Betriebsdämpfung bei der wichtigsten Frequenz hängt also in ganz anderer Weise als die Vierpoldämpfung von der Streuung und den Kupferverlusten ab. In unserem Zahlenbeispiel erhalten wir $\mathbf{b} = 0,012$ Neper, also einen recht geringen Wert.

§ 180. Der Übertrager bei niedrigen Sprechfrequenzen. Bei Frequenzen unterhalb der Frequenz ω_m , für die wir angepaßt haben, kann die Betriebsdämpfung ansteigen. Nach (550) ist nämlich in diesem Frequenzbereich der Wellenwiderstand klein gegen $\sqrt{R_a R_e}$. Die Spannungsübersetzung ist daher nach der Gleichung (446) des § 156 gleich dem Verhältnis der Windungszahlen, wie wir es im § 170 für den idealen Übertrager abgeleitet haben; die Stromübersetzung dagegen ist bei Vernachlässigung der Verlustgrößen gleich

$$\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_1} = u_2 = \frac{1}{s} \frac{\mathfrak{W}_2^1}{\mathfrak{W}_1^2} = \frac{1}{n} \frac{j \eta}{\sqrt{\sigma} \eta_m + j \eta}, \quad (556)$$

sie ist also gerade bei niedrigen Frequenzen kleiner als $1/n$, besonders bei starker Streuung.

Wegen dieser Schwächung des sekundären Stroms ist die Betriebsdämpfung bei niedrigen Sprechfrequenzen höher als bei der Frequenz f_m . Für sie ergibt sich bei reellem R_a und R_e und verschwindenden Verlusten nach (498)

$$\mathbf{b} \approx \ln \frac{1}{2} \left| -j \sqrt{\sigma} \frac{\eta_m}{\eta} + 2 + j \sqrt{\sigma} \frac{\eta}{\eta_m} \right| = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\sigma}{4} \left(\frac{\eta_m^2}{\eta^2} - 2 + \frac{\eta_m^2}{\eta^2} \right) \right), \quad (557)$$

also für $\eta \ll \eta_m$

$$\mathbf{b} \approx \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\sigma}{4} \frac{\eta_m^2}{\eta^2} \right) \approx \frac{\sigma}{8} \frac{\eta_m^2}{\eta^2}. \quad (558)$$

Die Streuung verursacht demnach bei tiefen Sprechfrequenzen eine geringe Zunahme der Betriebsdämpfung mit abnehmender Frequenz. In unserm Zahlenbeispiel ist z. B. für 200 Hz ($\eta = 0,25 \eta_m$) $\mathbf{b} = 0,02$ Neper, für 80 Hz ($\eta = 0,1 \eta_m$) sogar $\mathbf{b} = 0,11$ Neper.

§ 181. Der Übertrager bei höheren Frequenzen. Steigert man die Frequenz, jedoch nicht so weit, daß die Näherungen des § 178 ungültig würden, so werden die drei Parameter \mathfrak{W}_1^1 , \mathfrak{W}_2^1 und \mathfrak{W} nach den Gleichungen (548) immer größer. In unserem Zahlenbeispiel wird z. B. für 3200 Hz ($\eta = 4 \eta_m$; $1 - \eta^2 \approx 0,94$) $\mathfrak{W}_1^1 = 24,0 \text{ k}\Omega$, $\mathfrak{W}_2^1 = 64,0 \text{ k}\Omega$, $\mathfrak{W} = 39,2 \text{ k}\Omega$.

¹ Die Glieder von der Ordnung $\sqrt{\sigma}$ werden nicht vernachlässigt, sondern streichen sich.

In diesem Frequenzbereich läßt sich für die Stromübersetzung eine besonders einfache Formel ableiten. Jetzt kann man nämlich R_e neben \mathfrak{B}_2^2 vernachlässigen und erhält

$$u_2 \approx \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{B}_2^2} \approx \frac{1}{s} = \frac{1}{n}; \quad (559)$$

nun ist also das Verhältnis der Windungszahlen für die Transformation des Stroms maßgebend.

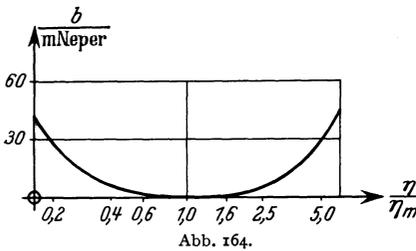
Dagegen ist nach § 153 bei verschwindenden Verlusten

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{B}_1^2 + \frac{\mathfrak{B}^2}{R_e}} = \frac{j \eta \sqrt{1 - \sigma} \sqrt{R_a R_e}}{j \eta R_a - \frac{\sqrt{\sigma} \eta^2 R_a R_e}{R_e \eta_m}} \\ &\approx n \frac{1}{1 + j \sqrt{\sigma} \frac{\eta}{\eta_m}}; \end{aligned} \quad (560)$$

d. h. nun nimmt die Spannungsübersetzung bei endlicher Streuung mit wachsender Frequenz von dem normalen Werte n aus ab.

Infolgedessen ist die Betriebsdämpfung in diesem Frequenzbereich größer als für die Frequenz ω_m : es ergibt sich aus (557) für $\eta \gg \eta_m$:

$$b \approx \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\sigma \eta^2}{4 \eta_m^2} \right) \approx \frac{\sigma \eta^2}{8 \eta_m^2}. \quad (561)$$



Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung (558), so erkennt man, daß z. B. für $\eta = \eta_m/4$ die Betriebsdämpfung ebenso groß ist wie für $\eta = 4 \eta_m$ (in unserem Zahlenbeispiel gleich 0,02 Neper). Musikalisch gesprochen wird also eine Frequenz zwei Oktaven unterhalb von f_m ebenso stark gedämpft wie eine Frequenz zwei Oktaven darüber; für die Höhe dieser Zusatzdämpfungen ist die Streuung maßgebend¹ (Abb. 164).

Zur Verringerung der Verzerrung liegt es am nächsten, die mittlere Frequenz f_m in die Mitte des ganzen zu übertragenden musikalischen Intervalls zu legen. Da jedoch die Betriebsdämpfung für die mittlere Frequenz f_m selbst nach § 179, Gleichung (555) der Frequenz f_m umgekehrt proportional ist, kann es sich in manchen Fällen empfehlen, die Frequenz f_m gegen das obere Ende des Intervalls hin zu verschieben und die entstehende größere Verzerrung in Kauf zu nehmen.

§ 182. Die Betriebsdämpfung des Übertragers bei den Scheinfrequenzen. Bei der ersten Scheinfrequenz überwiegen die Eisenverluste so sehr, daß wir bei der Berechnung der Betriebsdämpfung $\varepsilon = \varepsilon_m$ setzen dürfen. Dann wird nach (527)

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1^2 &= j \omega_0 L_1 (1 - j \varepsilon) \left(1 + \frac{(1 - \sigma)(1 - j \varepsilon)}{j \varepsilon} \right) \\ &= \frac{\omega_0 L_1}{\varepsilon} (1 - j \varepsilon)(1 - \sigma + j \varepsilon \sigma) \end{aligned} \quad (562)$$

oder, wenn ε noch immer klein ist²,

$$\mathfrak{B}_1^2 \approx \frac{\omega_0 L_1}{\varepsilon} \quad (563)$$

¹ Casper, W. L.: Electr. Commun. 2, 262 (1923). Feldtkeller, R., u. H. Bartels: Elektr. Nachr.-Techn. 5, 247 (1928).

² Diese Voraussetzung ist um so eher zulässig, je tiefer die erste Scheinfrequenz liegt.

und ebenso

$$\mathfrak{B}_2^i \approx \frac{\omega_0 L_2}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \mathfrak{M} \approx \frac{\omega_0 \sqrt{L_1 L_2}}{\varepsilon}. \quad (564)$$

Zur Berechnung von \mathfrak{B} muß man zunächst auf die genauere Formel (562) und die ihr entsprechenden Formeln für \mathfrak{B}_2^i und \mathfrak{M} zurückgehen: man erhält

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^2 &= \frac{\omega_0^2 L_1 L_2}{\varepsilon^2} (\mathbf{1} - j \varepsilon)^2 (\mathbf{1} - \sigma + j \varepsilon \sigma - (\mathbf{1} - \sigma)) \\ &= j \frac{\sigma}{\varepsilon} \omega_0^2 L_1 L_2 (\mathbf{1} - j \varepsilon)^2. \end{aligned} \quad (565)$$

Bei kleinem ε kann man auch hier

$$\mathfrak{B} = \omega_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon}} \sqrt{L_1 L_2} \angle 45^\circ \quad (566)$$

setzen und ähnlich

$$\text{Cos } g = \mathbf{1} + j \frac{\varepsilon \sigma}{2} \approx \mathbf{1}. \quad (567)$$

Für die Betriebsdämpfung bei der ersten Scheinfrequenz erhält man demnach

$$\mathbf{b} = \ln \frac{\mathbf{1}}{2} \left| \frac{\sqrt{R_a R_e}}{\omega_0 \sqrt{L_1 L_2}} \varepsilon + 2 + j \frac{\omega_0 \sigma \sqrt{L_1 L_2}}{\sqrt{R_a R_e}} \right| \quad (568)$$

oder mit (554)

$$\mathbf{b} = \ln \frac{\mathbf{1}}{2} \left| \varepsilon \sqrt{\sigma} \eta_m + 2 + j \frac{\sqrt{\sigma}}{\eta_m} \right| \approx \ln \left| \mathbf{1} + j \frac{\sqrt{\sigma}}{2 \eta_m} \right| = \frac{\mathbf{1}}{2} \ln \left(\mathbf{1} + \frac{\sigma}{4 \eta_m^2} \right) \quad (569)$$

Setzen wir unserem Zahlenbeispiel entsprechend $\sigma = 1\%$, $\eta_m = 8/130$, so wird $\mathbf{b} \approx 0,25$ Neper. Daß die Betriebsdämpfung bei der ersten Scheinfrequenz nicht groß sein kann, geht aus unserem Ersatzbild Abb. 163 hervor.

Bei der Streufrequenz wird die Betriebsdämpfung des Übertragers beträchtlich. Wir gehen hierauf nicht ein, weil die Streufrequenz in der Schwachstromtechnik meist so hoch geschoben wird, daß sie außerhalb des benutzten Frequenzbandes fällt.

§ 183. Der Scheinwiderstand eines mit Widerständen beschalteten Übertragers. Für viele Zwecke ist es sehr nützlich, zu wissen oder abschätzen zu können, welches der Scheinwiderstand \mathfrak{B}_1 eines Übertragers ist, der zwei reelle Widerstände R_a und R_e miteinander verbindet. Nach § 152 ist

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_1^i - \mathbf{1}_2 \mathfrak{M} = \mathfrak{B}_1^i - \frac{\mathfrak{M}^2}{R_e + \mathfrak{B}_2^i}. \quad (570)$$

Haben wir bei der Frequenz ω_m nach dem Betrag des Wellenwiderstands angepaßt [Gleichungen (554)], so erhalten wir angenähert

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{\mathfrak{B}_1^i R_e + \mathfrak{B}^2}{R_e + \mathfrak{B}_2^i} = \frac{j \eta R_a R_e - \eta^2 R_a R_e}{\sqrt{\sigma} \eta_m - \eta_m^2} = R_a \frac{\mathbf{1} + j \sqrt{\sigma} \frac{\eta}{\eta_m}}{\mathbf{1} - j \sqrt{\sigma} \frac{\eta_m}{\eta}}. \quad (571)$$

Die Frequenzkurve des Scheinwiderstands wird daher durch Abb. 165 wieder-

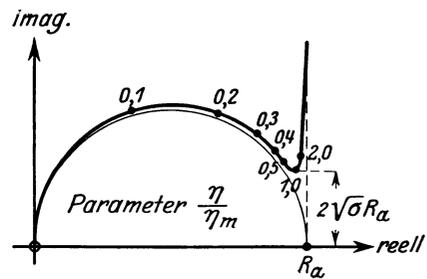


Abb. 165.

gegeben. Für $\eta \ll \eta_m$ ist nämlich

$$\mathfrak{B}_1 \approx R_a \frac{1}{1 - j \sqrt{\sigma} \frac{\eta_m}{\eta}}; \quad (572)$$

bei Variation des reellen Parameters η_m/η durchläuft \mathfrak{B}_1 also in diesem Frequenzgebiet nach § 120 einen Halbkreis vom Durchmesser R_a , der von der Ordinatenachse berührt wird und dessen Mittelpunkt auf der reellen Achse liegt; für $\eta = \eta_m$ dagegen wird

$$\mathfrak{B}_1 = R_a \frac{1 + j \sqrt{\sigma}}{1 - j \sqrt{\sigma}} \approx R_a (1 + 2j \sqrt{\sigma}) \quad (573)$$

und für hohe Frequenzen

$$\mathfrak{B}_1 = R_a \left(1 + j \sqrt{\sigma} \frac{\eta}{\eta_m} \right). \quad (574)$$

Der Halbkreis geht also mit steigender Frequenz in eine zu der imaginären Achse parallele Gerade über. Man erkennt, daß der Übertrager in der Nähe der mittleren Frequenz ω_m mit einer besonders hinsichtlich des Betrags ausgezeichneten Annäherung den Scheinwiderstand $R_a = R_e/n^2$ hat. Nur bei niedrigen Frequenzen und dann wieder bei Frequenzen oberhalb der mittleren nimmt der Scheinwiderstand ausgesprochen induktiven Charakter an. Das Entsprechende läßt sich für den Scheinwiderstand \mathfrak{B}_2 des Übertragers von der sekundären Seite ableiten.

In der Nähe der mittleren Frequenz ist ein nach dem Betrage des Wellenwiderstands angepaßter Übertrager mit guter Näherung auch nach dem Betrage des Scheinwiderstands angepaßt.

§ 184. Die Übersetzung der elektromotorischen Kraft. Häufig, z. B. bei den Vorübertragern der Verstärkerröhren, kommt es auf die Übersetzung an, welche die elektromotorische Kraft der den Übertrager speisenden Zweipolquelle durch den Übertrager erfährt, also auf die im § 149 eingeführte Übersetzung u_1 .

Wir wollen diese nur unter den Voraussetzungen $\varepsilon = \varepsilon_m$ und $\mathfrak{R}_a = R_a$ berechnen und zunächst die Streuung ganz vernachlässigen. Dann wird nach (527), (529) und (554)

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_1^i &= j \omega L_1 (1 - j \varepsilon) \left\{ 1 + \frac{\eta^2 (1 - j \varepsilon)}{1 - \eta^2 (1 - j \varepsilon)} \right\} = j \omega L_1 \frac{1 - j \varepsilon}{1 - \eta^2 (1 - j \varepsilon)}, \\ \mathfrak{M} &= j \omega \sqrt{L_1 L_2} \frac{1 - j \varepsilon}{1 - \eta^2 (1 - j \varepsilon)}, \quad R_a = \sqrt{\sigma} \omega_m L_1 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (575)$$

also

$$|u_1| = \left| \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{B}_1^i} \right| = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{L_1} = n. \quad (576)$$

Bei höheren Frequenzen, wo $\varepsilon = \varepsilon_m$ gesetzt werden darf, ergibt sich also eine Abweichung von dem Verhältnis der Windungszahlen n nur bei endlicher Streuung.

Um diese Abweichung abschätzen zu können, berücksichtigen wir jetzt die Streuung, setzen dafür aber zur Vereinfachung die Verlustgrößen ε gleich Null. Dann wird

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}_1^i &= j \omega L_1 \left\{ 1 + \frac{\eta^2 (1 - \sigma)}{1 - \eta^2} \right\} = j \omega L_1 \frac{1 - \sigma \eta^2}{1 - \eta^2}, \\ \mathfrak{M} &= j \omega \sqrt{1 - \sigma} \sqrt{L_1 L_2} \frac{1}{1 - \eta^2}, \quad R_a = \sqrt{\sigma} \omega_m L_1, \end{aligned} \right\} \quad (577)$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
 |u_1| &= \left| \frac{j \omega \sqrt{1-\sigma} \sqrt{L_1 L_2}}{\sqrt{\sigma} \omega_m L_1 (1-\eta^2) + j \omega L_1 (1-\sigma \eta^2)} \right| = \left| \frac{n \sqrt{1-\sigma}}{-j \sqrt{\sigma} \eta_m \left(\frac{1}{\eta} - \eta\right) + 1 - \sigma \eta^2} \right| \\
 &= \frac{n \sqrt{1-\sigma}}{\sqrt{\sigma \eta_m^2 \left(\frac{1}{\eta} - \eta\right)^2 + (1 - \sigma \eta^2)^2}}. \tag{578}
 \end{aligned}$$

Die Streuung ruft also einen merklichen Frequenzgang von u_1 hervor. In dem Frequenzbereich unterhalb der ersten Scheinfrequenz ($\eta < 1$) liegt die Übersetzung beträchtlich unterhalb des Verhältnisses der Windungszahlen. Denn beide Glieder des Radikanden im Nenner rufen eine Abnahme der Übersetzung mit sinkender Frequenz hervor; bei der ersten Scheinfrequenz selbst aber ergibt sich $|u_1| = n/\sqrt{1-\sigma}$, ein Wert, der nur wenig höher ist als das Verhältnis der Windungszahlen.

Oberhalb der ersten Scheinfrequenz kommt es darauf an, ob das erste oder zweite Glied des Radikanden überwiegt. Überwiegt — bei hohem η_m — das erste, so fällt die Übersetzung oberhalb der ersten Scheinfrequenz wieder ab. Überwiegt das zweite, so steigt sie weiter; bei der Streufrequenz kann sie — bei niedrigem η_m und (wie die genaue Betrachtung zeigt) geringen Verlusten — erheblich über die Zahl n hinauswachsen.

η_m war das Verhältnis der Frequenz, für die der Übertrager angepaßt ist, zu der ersten Scheinfrequenz. Durch geeignete Wahl dieser letzteren kann man also den Frequenzgang der Übersetzung beeinflussen.

Bei gegebener Frequenz hängt die Übersetzung von dem Windungszahlenverhältnis, von der Streuung und von η_m ab. Die Gleichung (578) läßt erkennen, daß sie dem Windungszahlenverhältnis n nicht genau proportional ist, sondern langsamer als dieses ansteigt. Denn mit Erhöhung der Windungszahl sinkt nach § 176 die erste Scheinfrequenz; damit steigt aber η_m , und der Nenner der Gleichung (578) wird größer. Infolge der Spulenkapazität wird es also bei fortgesetzter Erhöhung des Windungszahlenverhältnisses immer schwieriger, die Übersetzung wirkungsvoll zu steigern.

Die Ergebnisse dieses Paragraphen lassen sich qualitativ bequem aus dem Ersatzbild (Abb. 163) ablesen.

§ 185. Der Einschaltvorgang beim Übertrager. Wird an einen Übertrager plötzlich eine konstante Spannung E gelegt, so entsteht ein Einschaltvorgang, für den die Gleichungen

$$E = R_1 i_1 + L_1 \frac{d i_1}{d t} - L_{12} \frac{d i_2}{d t}, \tag{579}$$

$$0 = -L_{12} \frac{d i_1}{d t} + R_2 i_2 + L_2 \frac{d i_2}{d t} \tag{580}$$

maßgebend sind. Widerstand und Induktivität des Verbrauchers seien dabei in R_2 und L_2 enthalten.

Man macht die Gleichungen (579) und (580) zunächst durch die Einführung $R_1 i_1 = E + R_1 i_1'$ homogen und entfernt dann die Ableitung $d i_2/d t$, indem man die erste Gleichung mit L_2 , die zweite mit L_{12} multipliziert und addiert:

$$0 = R_1 L_2 i_1' + (L_1 L_2 - L_{12}^2) \frac{d i_1'}{d t} + R_2 L_{12} i_2. \tag{581}$$

Hieraus entnimmt man $L_{12} i_2$, setzt es in (579) ein und erhält mit der Abkürzung

$$L_1 L_2 - L_{12}^2 = \sigma L_1 L_2:$$

$$0 = R_1 i_1' + L_1 \frac{d i_1'}{d t} + \frac{1}{R_2} \left(R_1 L_2 \frac{d i_1'}{d t} + \sigma L_1 L_2 \frac{d^2 i_1'}{d t^2} \right) \quad (582)$$

oder

$$\frac{d^2 i_1'}{d t^2} + \frac{1}{\sigma} \left(\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2} \right) \frac{d i_1'}{d t} + \frac{R_1 R_2}{\sigma L_1 L_2} i_1' = 0. \quad (583)$$

Nach § 132 folgt hieraus unmittelbar, daß

$$\tau_1 = \sigma \frac{L_1 L_2}{R_1 L_2 + R_2 L_1}, \quad \tau_2 = \frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_2}. \quad (584)$$

Bei geringer Streuung σ schaltet sich der Übertrager demnach schwingungsfrei ein; und zwar ist für die Dauer des flüchtigen Vorgangs maßgebend die Summe der Verhältnisse L/R der beiden Spulen. Der sekundäre Kreis wirkt verzögernd, und zwar um so mehr, je kleiner sein Widerstand ist, ganz besonders daher bei Kurzschluß.

Von dieser Verzögerung macht man u. a. bei Relais Gebrauch. Man bringt als sekundären Kreis meist eine besondere Wicklung oder auch ein massives Kupferrohr auf dem Relaiskern an. Doch ist zu beachten, daß bei den Relais wegen der Bewegung des Ankers die Induktivitäten nicht als konstant angesehen werden können. Die hier gegebene Theorie kann daher nur als erster Anhalt dienen¹.

VIII. Röhrenverstärker.

§ 186. **Allgemeines.** Der Röhrenverstärker² gehört wie das elektromagnetische Relais und das Mikrophon zu den Auslösevorrichtungen. Er befähigt die schwachen, z. B. am Ende einer Fernsprechleitung ankommenden Energien, eine dort zur Verfügung stehende Energiequelle so zu „steuern“, daß in einer anderen weiterführenden Leitung ein Vorgang entsteht, der dem in der ersten verlaufenden ähnlich ist.

Bei der Elektronenröhre steuert die zu verstärkende Energie ohne Kontakte unmittelbar durch das Feld einer besonderen „Steuerelektrode“ den Elektronenstrom, der zwischen der Anode und der Kathode einer Hochvakuumröhre fließt.

Der Elektronenstrom im Hochvakuum befolgt andere Gesetze als der Strom in einem Metalldraht. Es empfiehlt sich, zunächst sein Zustandekommen in einer Röhre mit nur zwei Elektroden zu betrachten und dann erst zu der Röhre mit einer oder mehreren Zusatzelektroden überzugehen.

§ 187. **Elektrizitätsträger.** Der leere Raum kann der Sitz elektromagnetischer Felder und daher auch von Verschiebungsströmen sein; ein Leitungsstrom dagegen kann in ihm nur dann zustande kommen, wenn Elektrizitätsträger in ihm vorhanden sind und durch irgendeine Ursache in Bewegung gesetzt werden. Bei den Anwendungen der Schwachstromtechnik werden die Elektrizitätsträger meist durch elektrische (seltener durch magnetische) Felder beschleunigt. An sich können sie Geschwindigkeiten aber auch in anderer Weise erhalten, z. B. rein mechanisch oder durch heftige Wärmebewegung.

Positive Träger entstehen, wenn von neutralen Atomen oder Atomgruppen Elektronen abgetrennt werden (positive Ionen). Negative Träger sind vor allem die Elektronen selbst,

¹ Vgl. A. Timme: Z. Fernmeldetechn. 2, 101, 131 (1921). E. Schulze: Ebenda 5, 28, 36, 41, 51, 87 (1924); Elektr. Nachr.-Techn. 3, 382, 450 (1926).

² Vgl. H. G. Möller: Die Elektronenröhren. 3. Aufl. Braunschweig: Vieweg 1929. H. Barkhausen: Elektronenröhren. 1. Bd. 4. Aufl. Leipzig: S. Hirzel 1931. J. Zenneck u. H. Rukop: Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie. 5. Aufl. Stuttgart: Enke 1925.

dann aber auch die negativen Ionen, d. h. Atome oder Atomgruppen, die sich ein Elektron oder mehrere angelagert haben.

In den Metallen wird die elektrische Strömung, wie die Erfahrung lehrt (vgl. § 27), allein von den Elektronen getragen. Da diese ohne unser Zutun immer in der nötigen Menge vorhanden sind, nennt man die Strömung in den Metallen auch „selbständige Strömung“.

Zu den selbständigen Strömungen gehört auch die Strömung in den Elektrolyten. Träger sind hier die Ionen, in welche die Elektrolyte immer wenigstens teilweise zerfallen sind.

In den Gasen sind Elektrizitätsträger im allgemeinen nur in geringer Menge vorhanden. Will man daher in ihnen eine starke elektrische Strömung erzeugen, so muß man die Zahl der Träger künstlich vermehren. Dazu können z. B. ionisierende Strahlungen mannigfacher Art dienen; von der größten technischen Bedeutung ist jedoch das „Herausdampfen“ von Elektronen aus glühenden Körpern. Strömungen, die nur bei künstlicher Vermehrung der Träger zustande kommen, heißen „unselbständige Strömungen“.

Sollen die erzeugten Träger durch ein elektrisches Feld in Bewegung gesetzt werden, so müssen die Feldlinien die richtige Richtung haben. Elektronen z. B. können, wenn sie noch keine Geschwindigkeit haben, wegen ihrer negativen Ladung nur gegen die Feldstärke anlaufen; diese muß daher, wenn eine dauernde Strömung zustande kommen soll, beständig auf die Elektronenquelle hin gerichtet sein.

Legt man zwischen zwei Elektroden, von denen die eine eine Elektronenquelle ist, eine rein sinusartig wechselnde Spannung, so entsteht nach dem Gesagten unterbrochener Gleichstrom. Darauf beruhen zahlreiche Gleichrichter.

§ 188. **Durchgang der Elektrizität durch Gase.** Bei der Untersuchung der Bewegung der Ionen im Innern eines Elektrolyts wird man auf das Ohmsche Gesetz (konstante Leitfähigkeit) geführt, wenn man voraussetzt, daß die Elektrizitätsträger eine der Feldstärke proportionale, bei gegebenem Feld konstante Geschwindigkeit erhalten. Ähnlich sinken bekanntlich Staubteilchen oder Wassertropfchen unter dem Einfluß der Schwere nicht beschleunigt, sondern mit konstanter Geschwindigkeit zu Boden, wenn der Widerstand, den ihnen die Luft bei ihrer Bewegung entgegensetzt, infolge ihrer Kleinheit wesentlich größer ist als ihr Trägheitswiderstand.

Auch bei einem Gas kann das Ohmsche Gesetz nur so lange gelten, als der Widerstand, den die Elektrizitätsträger bei ihrer Wanderung von der einen zur andern Elektrode finden, groß bleibt. Verringert man ihn durch Leerpumpen des Gefäßes, in dem sich das Gas befindet, so hört das Ohmsche Gesetz zu gelten auf.

Könnte man den Widerstand, den die Träger vorfinden, gleich Null machen, so würde ihr Weg von der einen Elektrode zu der anderen, da sie nicht trägheitslos sind, zwar eine gewisse Zeit beanspruchen; im Beharrungszustande kämen aber alle Träger, die in irgendeinem Zeitraum von der Trägerquelle ausgesandt worden sind, in einem Zeitraum von derselben Länge, wenn auch ein wenig verspätet, auf der anderen Elektrode an. Dann wäre die erzeugte Gesamtstromstärke bei jeder Spannung einfach gleich der von der Trägerquelle in der Zeiteinheit gelieferten Elektrizitätsmenge. Wären die Träger Elektronen und würden von der Oberflächeneinheit der Quelle in der Zeiteinheit N Elektronen ausgesandt, so wäre die entstehende Stromstärke

$$i_s = N e F, \quad (585)$$

wo F die Oberfläche der Quelle bedeutet. Man nennt diesen Strom den „Sättigungsstrom“.

In Wirklichkeit ist eine widerstandsfreie Bewegung der Elektronen nicht möglich. Denn erstens enthält auch das Hochvakuum der in der Technik verwendeten Elektronenröhren, dem ein Luftdruck von nur etwa $1 \mu\text{Tor}^1$ entspricht, immer noch eine gewisse Zahl von Gasmolekülen, die den Elektronen den Weg versperren können; zweitens aber — und dies macht viel mehr aus — stoßen die in der Nähe der Elektronenquelle noch verhältnismäßig langsam fliegenden Elektronen die hinter ihnen her fliegenden Elektronen, gemäß dem Coulombschen Gesetz, nach der Elektronenquelle zurück. Die mit endlicher Geschwindigkeit fliegenden Elektronen stellen, wie man sagt, eine „Raumladung“ dar, deren abstoßende Wirkung für ihre eigene Bewegung einen Widerstand bedeutet, so daß nur eine geringere Stromstärke zustande kommen kann.

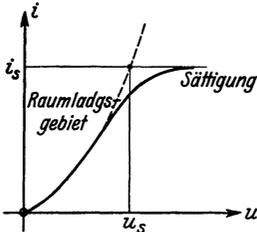


Abb. 166.

Je langsamer die Elektronen fliegen, um so mehr macht sich diese Raumladung bemerkbar. Bei hohen Spannungen und damit hohen Elektronengeschwindigkeiten verliert sich ihr Einfluß; dann geht die Stromstärke in die Sättigungsstromstärke (585) über.

Abb. 166 zeigt die „Kennlinie“ einer solchen unselbstständigen Strömung im Hochvakuum. Bei negativen Spannungen ist der Strom Null; bei positiven steigt er allmählich an, um — nach Überwindung des Raumladungsgebiets — in die Sättigungshorizontale einzumünden.

§ 189. Raumladungsformel bei ebenen Elektroden. Wir wollen den Zusammenhang der Stärke des in einer Hochvakuumröhre entstehenden Stroms mit der Elektrodenspannung für einen besonders einfachen Fall auch quantitativ feststellen. Dabei setzen wir zwei gleich große einander parallele ebene Elektroden

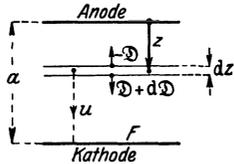


Abb. 167.

voraus, deren Flächen je gleich F , deren Abstand gleich a sei (Abb. 167). Die obere Elektrode sei die Anode, die untere die Kathode und zugleich die Elektronenquelle.

u sei die Spannung von dem Aufpunkt nach der Kathode; auch für die Stromstärke i , die Feldstärke \mathcal{E} , die Verschiebung \mathcal{D} , die Elektronengeschwindigkeit v und den Abstand z des betrachteten Aufpunkts von der Anode denken wir uns die Zählpfeile von oben nach unten gerichtet.

Dann ist zunächst nach § 33

$$u = \int_z^a \mathcal{E} dz \tag{586}$$

oder wenn man nach der unteren Grenze differenziert:

$$\frac{du}{dz} = - \mathcal{E}. \tag{587}$$

Einem positiven Felde \mathcal{E} entspricht also ein Spannungsfall von oben nach unten. An der Kathode ($z = a$) sei nicht nur (definitionsgemäß) die Spannung, sondern wegen der Gegenwirkung der Raumladung auch ihr Gefälle, die Feldstärke, gleich Null.

Befindet sich weiter in einer Schicht von der Dicke dz im Abstand z von der

¹ 1 Torricelli ist der Druck einer Quecksilbersäule von 1 mm Höhe bei 0° und normaler Schwere.

Anode die Raumladung $q dz$, so folgt aus der Grundgleichung (81) des § 40:

$$(\mathfrak{D} + d\mathfrak{D})F - \mathfrak{D}F = q dz$$

oder

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dz} = \varepsilon_0 \frac{d\mathfrak{E}}{dz} = \frac{q}{F}. \quad (588)$$

Das Feld zwischen den beiden Elektroden nimmt also bei negativer Raumladung ($q < 0$) nach der Kathode hin ab; ohne Raumladung wäre es homogen.

Die Elektronen, durch welche die Raumladung gebildet wird, sind in Bewegung; ihre Geschwindigkeit v wird durch das Feld \mathfrak{E} selbst erzeugt. Fliegt ein Elektron von der Ladung $-e$ und der Masse m von der Kathode bis zum Aufpunkt, so leisten die elektrischen Kräfte die Arbeit:

$$\int_a^z (-e) \mathfrak{E} dz = e \int_z^a \mathfrak{E} dz = e u. \quad (589)$$

Diese Arbeit ist nach dem Energiesatz gleich der kinetischen Energie $m/2 \cdot v^2$, die das Elektron bei seiner Ankunft im Aufpunkt gewonnen hat; d. h. wenn es die Kathode ohne Geschwindigkeit verlassen hat, so gilt

$$v = \pm \sqrt{\frac{2e}{m} u}. \quad (590)$$

Von den beiden Vorzeichen ist natürlich nur das negative zu gebrauchen.

Durch die Bewegung der Elektronen mit der so berechneten Geschwindigkeit kommt ein elektrischer Strom i zustande, der im Beharrungszustande mit der Geschwindigkeit der Elektronen durch die Gleichung

$$i = v q \quad (591)$$

verbunden ist.

Dieser Strom muß schließlich nach § 66 in allen Querschnitten dieselbe Stärke haben:

$$\frac{di}{dz} = 0 \quad (\text{Kontinuitätsbedingung}). \quad (592)$$

Kombiniert man die Gleichungen (587), (588), (590) und (591) miteinander, so erhält man für die Spannung u die Differentialgleichung

$$\frac{\varepsilon_0 F}{i} \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{1}{\sqrt{u}} \quad (593)$$

oder, wenn k eine Konstante ist, nach (592)

$$k^2 \frac{d^2 u}{dz^2} = \frac{1}{\sqrt{u}}. \quad (594)$$

Man multipliziert diese Gleichung mit du

$$k^2 \frac{du}{dz} d \frac{du}{dz} = \frac{du}{\sqrt{u}}$$

und integriert:

$$\frac{k^2}{2} \left(\frac{du}{dz} \right)^2 = 2 \sqrt{u}; \quad (595)$$

eine Integrationskonstante braucht nicht zugefügt zu werden, weil u und du/dz nach Voraussetzung gleichzeitig gleich Null werden sollen. Auch bei (595) macht

die Trennung der Veränderlichen keine Schwierigkeiten¹:

$$\frac{k}{2} \frac{du}{\sqrt{u}} = -dz; \quad (596)$$

das Integral dieser Gleichung ist aber

$$\frac{2}{3} k u^{3/4} = a - z, \quad (597)$$

da die Spannung an der Kathode gleich Null werden muß. Nennen wir die Anodenspannung u_a , so erhalten wir für $z = 0$ die wichtige „Raumladungsformel“ von Langmuir und Schottky².

$$i = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{F}{a^2} u_a^{3/2}. \quad (598)$$

Führt man den Betrag der Geschwindigkeit für $z = 0$ ein, d. h. die Größe

$$\hat{v} = \sqrt{\frac{2e}{m}} u_a^{1/2}, \quad (599)$$

so wird

$$i = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \frac{\hat{v}}{a} \frac{F}{a} u_a. \quad (600)$$

Bezeichnet man also die Zeit, die ein Elektron brauchte, wenn es sich mit $4/9$ seiner tatsächlichen Endgeschwindigkeit gleichmäßig von der Kathode zur Anode bewegte, mit τ , so ist

$$i = \frac{\varepsilon_0}{\tau} \frac{F}{a} u_a; \quad (601)$$

d. h. der leere Raum zwischen den Elektroden wirkt wie ein Metall von der Leitfähigkeit ε_0/τ , die der Quadratwurzel aus der Spannung proportional ist. Die Zeit τ ist, wie eine einfache Rechnung zeigt, nur wenig kleiner als die Zeit, die das Elektron unter den Voraussetzungen unserer Rechnung wirklich für seinen Weg braucht.

Setzt man in die Formel

$$\tau = \frac{9}{4} \frac{a}{\hat{v}} = \frac{9}{4} a \sqrt{\frac{m}{2e u_a}} \quad (602)$$

den durch Versuche gefundenen Wert $e/m = 1,77 \cdot 10^{15} \text{ cm}^2/\text{Vs}^2$ ein, so erhält man beispielsweise für $u_a = 100 \text{ V}$ und $a = 1 \text{ cm}$

$$\left. \begin{aligned} \hat{v} &\approx 6 \cdot 10^8 \text{ cm/s}, & \tau &= 3,4 \text{ ns}, \\ \varepsilon_0/\tau &= 2,6 \cdot 10^{-9} \text{ Sm/mm}^2. \end{aligned} \right\} \quad (603)$$

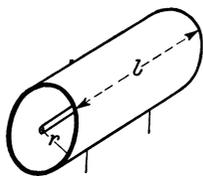


Abb. 168.

§ 190. Zylindrische Anordnung. Meist verwendet man bei den Elektronenröhren eine zylindrische Anordnung der Elektroden (Abb. 168). Man erhält die für sie geltende Formel — wie nicht bewiesen werden soll —, wenn man als Oberfläche F die Oberfläche $2\pi r l$ der zylindrischen Anode, als

Elektrodenabstand den Radius r nimmt:

$$i = \frac{4}{9} \sqrt{\frac{2e}{m}} \varepsilon_0 \cdot \frac{2\pi r l}{r^2} u_a^{3/2} = \frac{8\pi}{9} \varepsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{l}{r} u_a^{3/2} = 14,70 \frac{l}{r} \left(\frac{u_a}{\text{Volt}} \right)^{3/2} \mu\text{A}. \quad (604)$$

Ein Glühfaden liefert also um so höhere Stromstärken, je länger er ist und je enger ihn der Anodenzyylinder umschließt.

Wegen der endlichen Dicke des Glühfadens im Vergleich zu dem Durchmesser der Anode ist ein Korrektionsfaktor zuzufügen, für den Langmuir³ eine Tabelle gibt.

¹ Die Wurzel ist negativ auszuziehen, da bei positiver Spannung auch das Feld positiv, also nach (587) du/dz negativ sein muß.

² Langmuir, I.: Phys. Z. 15, 348 (1914). Schottky, W.: Ebenda 526 u. 624.

³ Langmuir, I., u. K. B. Blodgett: Phys. Rev. 22, 353 (1923).

§ 191. **Elektronenröhre mit Steuerelektrode.** Die bisher allein betrachteten Zweielektrodenröhren werden besonders als Gleichrichter verwendet. Bei der Verstärkeröhre tritt zu der kalten Anode und der glühenden Kathode als dritte Elektrode die Steuerelektrode, das durchlöchererte oder geschlitzte „Gitter“. Abb. 169 zeigt eine übliche Anordnung der drei Elektroden in einem leergepumpten Glasgefäße. Für Schaltbilder bedient man sich meist der Darstellungen Abb. 170 und 171.

Die primären Klemmen der Röhre sind mit dem Gitter und der Kathode, die sekundären mit der Anode und der Kathode zu verbinden. In Abb. 170 ist vorausgesetzt, daß die Kathode durch eine nicht gezeichnete Vorrichtung zum Glühen gebracht wird. Die übliche Anordnung ist die in Abb. 171 dargestellte, bei der ein besonderer Heizkreis einen Teil der Röhrenschtaltung bildet.

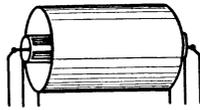


Abb. 169.

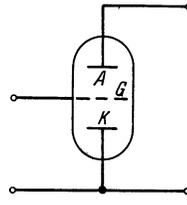


Abb. 170.

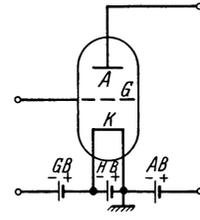


Abb. 171.

Der Glühfaden setzt dem Heizstrom einen beträchtlichen Widerstand entgegen; der Potentialfall auf ihm ist daher nicht zu vernachlässigen. Wir wollen wie üblich unter der „Anodenspannung“ u_a und der „Gitterspannung“ u_g eindeutig die Spannungen der Anode und des Gitters gegen das negative Ende des Glühfadens verstehen.

Abb. 171 zeigt, wie die zu der Röhre gehörenden Stromquellen, die Heizbatterie, die Anodenbatterie und die (nicht unbedingt nötige) Gitterbatterie mit den übrigen Elementen verbunden werden können.

§ 192. **Die Kennlinienschar der Gitterröhre.** Da die Gitterspannung u_g als die zu verstärkende Spannung anzusehen ist, haben wir vor allem die Frage zu beantworten: wie hängen die in der Röhre zustande kommenden Ströme von den beiden Spannungen u_g und u_a ab? Wir denken uns für diese Untersuchung die äußeren Klemmen der Schaltung Abb. 171 kurz geschlossen und die Batteriespannungen variiert.

Schaltungstechnisch bilden die drei Elektroden ein „Dreieck“ (Abb. 172); im Innern der Röhre sind also drei Ströme i_{ag} , i_{ak} und i_{gk} denkbar. Eine positive Strömung vom Gitter zur Anode kann z. B. bei positiver Gitterspannung durch sekundäre Elektronen zustande kommen, die durch die primär auffallenden Elektronen aus der Anode freigemacht werden. In der Regel ist jedoch der zwischen Anode und Kathode übergehende Strom i_{ak} identisch mit dem Anodenstrom i_a und der zwischen Gitter und Kathode übergehende Strom i_{gk} identisch mit dem Gitterstrom i_g . Den Kathodenstrom $i_e = i_a + i_g$ nennen wir meist „Gesamtstrom“. Die Zählpfeile wählen wir immer wie in Abb. 172.

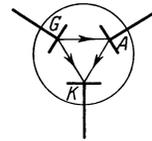


Abb. 172.

Die Abhängigkeit der beiden Ströme i_a und i_g von den Spannungen u_a und u_g müßte nun eigentlich in derselben Weise aus den Grundgleichungen der Elektrizitätslehre abgeleitet werden wie im Falle der Zweielektrodenröhre. Wir ziehen es jedoch vor, das Ergebnis der Messung an die Spitze zu stellen; erst hinterher werden wir es uns durch einfache Überlegungen verständlich zu machen suchen.

Wir denken uns die beiden Spannungen u_g und u_a als beliebig gegeben, also als unabhängige Veränderliche. Unser Ziel sei die Feststellung des Zusammen-

hangs zwischen dem beobachteten Gesamtstrom $i_e = i_a + i_g$ und den beiden Spannungen u_g und u_a .

Es ist üblich und bequem, diesen Zusammenhang zeichnerisch festzulegen. Der Gesamtstrom ist eine Funktion der beiden unabhängig veränderlichen Spannungen; er läßt sich daher in einer Zeichenebene nur durch eine Schar von Kurven darstellen. Man trägt gewöhnlich u_g auf einer Abszissenachse, i_e auf einer Ordinatenachse auf und zeichnet Kurven konstanter Anodenspannung u_a . Die Anodenspannung ist dann, wie man es ausdrückt, „Parameter“ der Kurvenschar¹. Variiert man u_a stufenweise, wählt man also z. B. $u_a = 0, 10, 20, 30, 40 \dots V$, so hat man eine praktisch ausreichende Darstellung des Zusammenhangs zwischen den drei Veränderlichen. Zu jeder gegebenen Anoden- und Gitterspannung kann man aus einer solchen Darstellung den entsprechenden Gesamtstrom, zu jedem geforderten Gesamtstrom und jeder geforderten Anodenspannung die nötige Gitterspannung entnehmen. Jeder Punkt der Darstellung entspricht also einem elektrischen „Zustand“ der Röhre.

Die Messung, die ja leicht auszuführen ist, zeigt, daß die Kurvenschar, die den Zusammenhang des Stromes i_e mit den Spannungen darstellt, bei allen

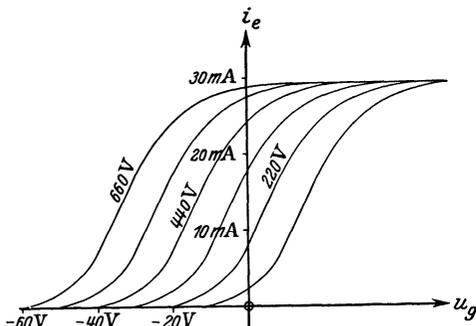


Abb. 173.

Röhren der Art nach dasselbe Aussehen hat (Abb. 173). Die einzelnen Kurven haben dieselbe Form wie die Kennlinien der Zweielektrodenröhren; mit zunehmender Anodenspannung rücken sie immer weiter nach negativen Gitterspannungen. Wird die Anodenspannung von Kurve zu Kurve immer um dieselbe Stufe (z. B. wie in der Abbildung um 110 V) gesteigert, so sind die Kurven auch immer um annähernd dieselbe Strecke waagrecht nach links verschoben.

Quantitativ unterscheiden sich natürlich die Kurvenscharen der einzelnen Röhrenarten. Von Nebeneinflüssen abgesehen, sind drei Hauptunterschiede zu beachten: Erstens können die einzelnen Kennlinien (Kurven gleicher Anodenspannung) verschieden steil sein; zweitens kann der konstante horizontale Abstand der einzelnen Kurven voneinander bei gleichen Stufen der Anodenspannung verschieden groß sein; drittens können die Kurven bei verschiedenen hohen Strömen in die Sättigungshorizontale einmünden. Der dritte Unterschied hängt natürlich außer von der Röhrenart auch noch von der Temperatur des Glühfadens ab.

Die Kennlinienschar der Elektronenröhre bildet — zusammen mit der entsprechenden Kurvenschar des Gitterstroms — die Grundlage der Röhrentheorie. Die beiden Scharen ersetzen das Ohmsche Gesetz, das ja für das Innere der Röhre, wie eben diese Darstellungen zeigen, keine Gültigkeit hat.

§ 193. Erklärung der Kennlinienschar; Durchgriff. Wenn die Kennlinien der Dreielektrodenröhre und der Zweielektrodenröhre dieselbe Form haben, so muß es möglich sein, die eine Darstellung näherungsweise² auf die andere zurückzuführen. Die Gestalt der Kennlinie hängt ja im wesentlichen von der Raumladung ab, die mit nennenswerter Dichte nur den Raum in der Nähe der

¹ Ähnlich hatten wir früher (z. B. im § 116) den Dämpfungswinkel als Parameter einer Kurvenschar.

² Eine genauere Theorie bei W. Schottky, Arch. Elektrot. 8, 12 (1919).

Kathode erfüllt, wo die Elektronen langsam fliegen. In einer Gitterröhre muß also annähernd derselbe Gesamtstrom entstehen wie in einer „gleichwertigen“ gitterlosen Röhre, in der das Feld unmittelbar vor der Anode ebenso stark ist wie das mittlere Feld $\int \mathcal{E} dF/F$ unmittelbar vor dem Gitter in der Gitterröhre. Bei diesem Vergleich der beiden Felder wird man in erster Näherung so rechnen können, als ob der Raum zwischen den Elektroden ladungsfrei wäre.

Nun ist im Hochvakuum $\mathcal{E} = \mathcal{D}/\epsilon_0$; für $\int \mathcal{D} dF/\epsilon_0 F$ kann man aber nach § 40 auch $Q/\epsilon_0 F$ setzen, wo Q die durch die angelegten Spannungen hervorgerufene Influenzladung der Kathode bedeutet. Bezeichnen wir also die auf die gitterlose Röhre bezüglichen Größen durch Zeichen ohne Index und bedeuten die Indizes a, g, k der Reihe nach die Anode, das Gitter und die Kathode, so folgt aus der Forderung der Gleichwertigkeit der Röhren nach § 54

$$C u = C_{gk} u_g + C_{ak} u_a \tag{605}$$

oder

$$u = \frac{C_{gk}}{C} \left(u_g + \frac{C_{ak}}{C_{gk}} u_a \right). \tag{606}$$

Diese Spannung der gleichwertigen gitterlosen Röhre darf in die Gleichung (604) des § 190 eingesetzt werden. Bedeutet also k eine Röhrenkonstante, so folgt für den Strom in der Gitterröhre

$$i_e = k \left(u_g + \frac{C_{ak}}{C_{gk}} u_a \right)^{3/2}. \tag{607}$$

In dieser Gleichung liegt aber alles, was wir bei der Beschreibung der Kurvenscharen im vorigen Paragraph gesagt haben. Denn die Form der einzelnen Kennlinie ist — wenigstens im Raumladungsgebiet — dieselbe wie bei der gitterlosen Röhre. Die Einzellinie verschiebt sich aber bei Vergrößerung der Anodenspannung in der Richtung abnehmender Gitterspannungen; denn die Wirkung einer Zunahme von u_a kann durch gleichzeitige Verringerung von u_g wieder aufgehoben werden.

Den Quotienten C_{ak}/C_{gk} , der immer kleiner als 1 ist, nennt man den „Durchgriff“ der Röhre und bezeichnet ihn mit D . Es ist also

$$i_e = k (u_g + D u_a)^{3/2}. \tag{608}$$

$u_g + D u_a$ heißt „Steuerspannung“ oder „resultierende Spannung“.

Setzen wir $C_{gk} = C$, so ist nach (604)

$$k = \frac{8\pi}{9} \epsilon_0 \sqrt{\frac{2e}{m}} \frac{l}{r}. \tag{609}$$

r ist der Radius des Gitters.

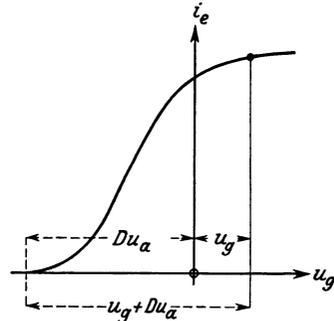


Abb. 174.

§ 194. Die Verschiebungsspannung. Setzt man $u_a = 0$, so wird $i_e = k u_g^{3/2}$. Besteht also zwischen Anode und Kathode keine Spannung, so beginnt die Kennlinie des Gesamtstroms wie bei der gitterlosen Röhre im Nullpunkt des Koordinatensystems. Bei endlicher Anodenspannung u_a vereinfacht sich die Gleichung (608) nur dann in derselben Weise, wenn man die Steuerspannung $u_g + D u_a$ als unabhängige Veränderliche ansieht. Nach Abb. 174 ist also die Kennlinie in der Richtung abnehmender Gitterspannung um die „Verschiebungsspannung“ $D u_a$ verschoben.

Die Verschiebungsspannung ist bei konstantem Durchgriff einfach der Anodenspannung proportional. Zu gleichen Stufen der Anodenspannung gehören also

gleiche Verschiebungen in Übereinstimmung mit den Feststellungen des § 192. Macht man die Spannungsstufen bei zwei verschiedenen Röhren gleich groß, so liegen die Kennlinien bei der Röhre mit dem kleineren Durchgriff näher beieinander als bei der mit dem größeren.

§ 195. Die Bewegung der Elektronen im Innern einer Röhre. Bei allmählicher Steigerung der Gitterspannung verhält sich eine Elektronenröhre etwa folgendermaßen.

Ist u_g negativ, und zwar so stark negativ, daß (Abb. 174)

$$-u_g = |u_g| > D u_a, \quad (610)$$

so ist die Steuerspannung $u_{st} = u_g + D u_a < 0$, also negativ. Eine Elektronenbewegung kommt dann — von Nebeneinflüssen abgesehen — überhaupt nicht zustande, da das resultierende Feld vor dem Gitter auf dieses zu gerichtet ist und die Elektronen nur gegen das Feld fliegen können.

Erst wenn der Betrag der negativen Gitterspannung kleiner wird als die Verschiebungsspannung:

$$-u_g = |u_g| < D u_a, \quad (611)$$

beginnt ein Elektronenstrom zu fließen. Dann ist die Steuerspannung positiv: Die anziehende Wirkung der Anode überwiegt, das resultierende Feld ist nach dem Glühfaden hin gerichtet.

Wird die Gitterspannung noch weiter gesteigert, bis sie positiv gegen den Glühfaden ist, so verwandelt sich die Abstoßung des Gitters in Anziehung. Der Elektronenstrom nimmt weiter zu, geht jetzt aber nicht mehr nur zur Anode, sondern in steigendem Maße auch zum Gitter. Der Anodenstrom ist von jetzt ab nur noch ein — mit steigender Gitterspannung immer kleiner werdender — Teil des Gesamtstromes; die Differenz $i_e - i_a$ ist der „Gitterstrom“ i_g .

§ 196. Allgemeine Definition des Durchgriffs. Wir wollen im Kennlinienfeld zwei benachbarte Punkte miteinander vergleichen (Abb. 175), die auf derselben

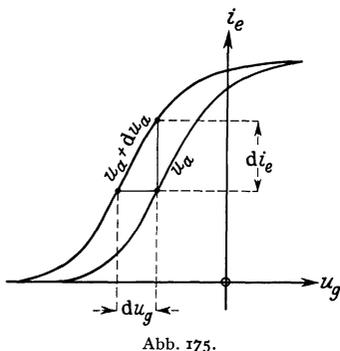


Abb. 175.

Horizontale liegen, denen aber zwei verschiedene Gitterspannungen und, da die Punkte verschiedenen Kennlinien angehören, auch zwei verschiedene Anodenspannungen entsprechen.

Der Unterschied der Gitterspannungen sei du_g , der Unterschied der an den Kennlinien ablesbaren Anodenspannungen du_a . Dann nennen wir „Durchgriff“ allgemein den Differentialquotient:

$$D = - \left(\frac{\partial u_a}{\partial u_g} \right)_{i_e}; \quad (612)$$

der Index i_e an der Klammer soll andeuten, daß bei konstantem Strom zu differenzieren, also in horizontaler Richtung fortzuschreiten ist.

Diese Definition führt zur Definition des § 193 zurück, sobald man die strenge Richtigkeit der Gleichung (608) voraussetzt. Denn wenn i_e konstant zu halten ist, muß hiernach

$$d(u_g + D u_a) = 0 \quad (613)$$

sein; daraus folgt aber unmittelbar wieder die Gleichung (612).

Man kann die Gleichung (612) auch folgendermaßen deuten (Abb. 175). Wenn man die Anodenspannung bei konstanter Gitterspannung, also auf einer Vertikalen, um einen kleinen Betrag du_a erhöht, so nimmt der Strom zu. Wählt man dann die Gitterspannung soviel kleiner, daß diese Zunahme des Stromes (di_e) gerade wieder aufgehoben wird, so soll der Durchgriff gleich dem Verhältnis der erforderlichen Senkung der Gitterspannung zu der Steigerung der Anodenspannung sein.

Die Definition (612) des Durchgriffs ist allgemeiner als die frühere; denn sie ist nicht an die Gültigkeit der Gleichungen des § 193 gebunden.

Nach der einfachen Theorie des § 193 ist der Durchgriff gleich dem Verhältnis der Teilkapazitäten C_{ak} und C_{gk} . Denken wir an die Bedeutung des Begriffs der Teilkapazität (§ 54),

so erkennen wir, daß die Anode durch das Gitter um so mehr „durchgreift“, also sich mit einem um so größeren Prozentsatz D an der Beschleunigung der Elektronen beteiligt, je größer die Löcher des Gitters sind und je enger sie dieses umschließt.

Der Durchgriff ist bei den meisten Röhren nahezu eine Konstante. Er beträgt bei Verstärkeröhren mit 3 Elektroden etwa 3...20%. Häufig laufen die Kennlinien bei höheren Stromstärken etwas näher zusammen als bei niedrigen.

§ 197. **Steilheit.** Unter der „Steilheit“ S versteht man die Neigung der Kennlinien, die ja die Linien konstanter Anodenspannung sind:

$$S = \left(\frac{\partial i_e}{\partial u_g} \right)_{u_a}. \quad (614)$$

Die Steilheit ist (im Gegensatz zum Durchgriff) auf der einzelnen Kennlinie von Punkt zu Punkt verschieden. Bei gegebener Anodenspannung ist sie für stark negative Gitterspannungen gleich Null; von der Gitterspannung $-Du_a$ ab steigt sie an; in der Mitte des annähernd geradlinigen Teiles der Kennlinie hat sie ihren höchsten Wert (dort liegt also ein „Wendepunkt“), um dann wieder, falls der Zustand der Sättigung erreicht wird, auf Null zu sinken.

Auf Grund des Raumladungsgesetzes kann die Steilheit nach

$$S = \frac{3}{2} k (u_g + Du_a)^{3/2} \approx 22,1 \cdot \frac{l}{r} \left(\frac{u_g + Du_a}{V} \right)^{3/2} \mu S \quad (615)$$

berechnet werden. Sie wächst also mit wachsender Fadenlänge und abnehmendem Abstand des Fadens vom Gitter.

§ 198. **Innerer Widerstand.** Der Durchgriff einer Röhre gibt an, wie rasch sich die Kennlinien bei Steigerung der Anodenspannung nach links verschieben, die Steilheit, wie stark die Gitterspannung auf den Gesamtstrom einwirkt. Von Interesse ist aber auch der Einfluß der Anodenspannung auf den Gesamtstrom. Für ihn ist der „innere Leitwert“

$$G_i = \left(\frac{\partial i_e}{\partial u_a} \right)_{u_g} = \frac{1}{R_i} \quad (616)$$

ein Maß; man nennt seinen reziproken Wert R_i den „inneren Widerstand“ der Röhre.

Zeichnet man zwischen zwei sehr benachbarten Kennlinien eine horizontale und eine vertikale Überbrückungslinie (Abb. 175), so ist der Tangens des Winkels zwischen der Kennlinie und dem waagerechten Stück die Steilheit, während dieses selbst dem Durchgriff, das senkrechte Stück dagegen mit derselben Proportionalitätskonstante dem inneren Leitwert G_i proportional ist. Man liest unmittelbar aus der Abbildung ab, daß

$$S = \frac{G_i}{D}, \quad \text{also} \quad SDR_i = 1; \quad (617)$$

die drei Koeffizienten S , D und R_i sind also voneinander abhängig. Aus (617) folgt, daß der innere Leitwert mit abnehmender Steilheit sinkt; in der Nähe der Knicke der Kennlinien stellt die Röhre einen sehr großen Widerstand dar.

Bei bekanntem Durchgriff kann auch der innere Widerstand einer Röhre im Raumladungsgebiet als Funktion der Steuerspannung berechnet werden:

$$R_i \approx 45,3 \cdot \frac{r}{l} \frac{1}{D} \left(\frac{u_g + Du_a}{V} \right)^{-3/2} k\Omega. \quad (618)$$

Zeichnet man Kennlinien mit der Anodenspannung als Abszisse (sie sehen ähnlich aus wie die bisher betrachteten Kennlinien), so ist natürlich der innere Leitwert gleich der Steilheit dieser seltener verwendeten Kennlinien.

§ 199. **Die Grundgleichung der Elektronenröhre.** Die Kennlinien verlaufen in der Nähe der Stelle, wo ihre Steilheit am größten ist, wo sie also einen Wende-

punkt haben, nahezu als gerade Linien. Bezeichnen wir jetzt mit S die mittlere Steilheit der annähernd geradlinigen Stücke (Abb. 176), so hat das zu der Anodenspannung 0 gehörende Stück die Gleichung $i_e = S(u_g - a)$; die ganze Kennlinienschar wird daher dargestellt durch

$$i_e = S(u_g + D u_a - a). \quad (619)$$

Gewöhnlich fließt durch die Elektronenröhre ein Strom, der dauernd von der Anode zur Kathode gerichtet ist, dessen Stärke aber schwankt. Einen solchen Strom kann man sich als aus einem Gleichstrom I_e und einem darüber gelagerten reinen Wechselstrom i_e zusammengesetzt denken (Abb. 177). Ist i_e so klein, daß der darstellende Punkt das in Abb. 176 oben und unten abgegrenzte Feld der

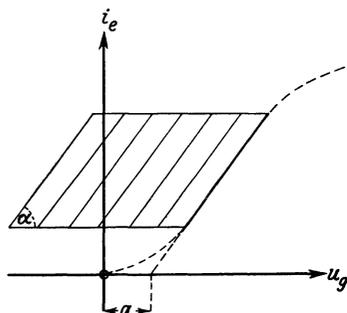


Abb. 176.

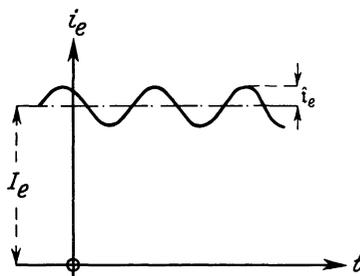


Abb. 177.

geraden Linienstücke nicht verläßt, so kann man, wenn man die Spannungen in derselben Weise in einen Gleichstrom- und einen Wechselstromanteil zerlegt,

$$I_e + i_e = S(U_g + D U_a - a + u_g + D u_a) \quad (620)$$

schreiben oder, da die Gleichung auch schon für den Gleichstrom I_e allein erfüllt sein muß:

$$i_e = S(u_g + D u_a). \quad (621)$$

Statt der Augenblickswerte i_e , u_g und u_a kann man auch die effektiven Werte setzen und komplex rechnen; dann erhält man für den emittierten Wechselstrom:

$$\mathfrak{I}_e = S(\mathfrak{U}_g + D \mathfrak{U}_a) = S \mathfrak{U}_g + \frac{1}{R_i} \mathfrak{U}_a. \quad (622)$$

Diese Gleichung nennen wir die „Grundgleichung“ der Röhre.

Daß dem emittierten Wechselstrom immer ein Gleichstrom überlagert ist, darf nicht vergessen werden. Es kommt zwar gewöhnlich nur auf den Wechselstrom an; der Gleichstrom macht sich aber z. B. dadurch bemerkbar, daß er bei eisenhaltigen Spulen die Magnetisierungsschleife in das Gebiet höherer Sättigung verschiebt.

Gewöhnlich benutzt man bei den Verstärkerröhren nur die Kennlinien links von der Ordinatenachse. Da in diesem Gebiete der Gitterstrom gleich Null ist, ist der Gesamtstrom gleich dem Anodenstrom, und es gilt

$$\mathfrak{I}_a = S \mathfrak{U}_g + \frac{1}{R_i} \mathfrak{U}_a. \quad (623)$$

Man kann diese lineare Gleichung vergleichen mit der ersten Grundgleichung des linearen Vierpols. \mathfrak{I}_a entspricht dem Entgegengesetzten des Stromes \mathfrak{I}_2 , \mathfrak{U}_g der Spannung \mathfrak{U}_1 , \mathfrak{U}_a der Spannung \mathfrak{U}_2 . Bei der Röhre gilt also einerseits die Gleichung

$$\mathfrak{U}_1 = -D \mathfrak{U}_2 - \frac{1}{S} \mathfrak{I}_2, \quad (624)$$

andererseits die Gleichung für den Gitterstrom

$$\mathfrak{S}_g = \mathfrak{S}_i = 0. \quad (625)$$

Daraus folgt, daß die Determinante der Röhregrundgleichungen [wenn man (625) als die zweite Grundgleichung auffaßt] gleich Null ist; die Röhre kann also, obwohl linear, nicht zu den im Abschnitt VI betrachteten Vierpolen gerechnet werden.

§ 200. Abschluß der Röhre durch einen Verbraucher; Spannungsverstärkung.

Der Anodenzweig sei durch einen zunächst als reell vorausgesetzten äußeren Widerstand $\Re = R$ geschlossen (Abb. 178). E_a sei die konstante EMK der Anodenbatterie, u_a wie vorher die Spannung zwischen der Anode und dem negativen Ende der Kathode. Der Gitterstrom sei zu vernachlässigen.

Nach dem Ohmschen Gesetz ist dann unter Berücksichtigung der in die Abbildung eingetragenen Zählpfeile

$$E_a = u + u_a = R i_a + u_a. \quad (626)$$

Setzt man hieraus u_a in die Gleichung (619), § 199, ein, so erhält man

$$i_a = S(u_g + DE_a - DR i_a - a) \quad (627)$$

oder, da sich auch jetzt die Gleichstromkomponenten für sich das Gleichgewicht halten müssen:

$$i_a = S u_g - DS R i_a. \quad (628)$$

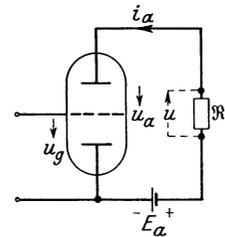


Abb. 178.

Löst man dies nach i_a auf, so erhält man für die Wechselstromkomponente

$$i_a = \frac{S}{1 + \frac{R}{R_i}} u_g \quad (629)$$

oder, wenn wir jetzt verallgemeinernd¹ den äußern Widerstand als komplex ansehen:

$$\mathfrak{S}_a = \frac{S}{1 + \frac{\Re}{R_i}} \mathfrak{U}_g. \quad (630)$$

Nach dieser wichtigen Gleichung kann man den Anodenwechselstrom \mathfrak{S}_a berechnen, der in einem beliebigen äußeren Widerstande \Re durch eine gegebene Gitterwechselspannung \mathfrak{U}_g hervorgerufen wird.

Im Gegensatz zu der Steilheit S , die sich auf den geradlinigen Teil der Kennlinie bezieht, ist der Bruch

$$\frac{S}{1 + \frac{\Re}{R_i}} = S_A = \left(\frac{\partial i_a}{\partial u_g} \right)_A \quad (631)$$

die Steilheit der Kurve, die durchlaufen wird, wenn die Röhre auf einen Widerstand \Re arbeitet. Man nennt diese Kurve die „Arbeitskurve“. Sie ist bei reellem Verbraucherwiderstand eine gerade Linie; bei Kurzschluß (verschwindender Wechselkomponente der Anodenspannung) fällt sie mit der Kennlinie zusammen, bei Leerlauf (verschwindender Wechselkomponente des Anodenstroms) liegt sie horizontal. Da R_i ein positiver Widerstand ist, verläuft die Arbeitsgerade immer weniger steil als die Kennlinie.

¹ Daß diese Verallgemeinerung erlaubt ist, ist leicht einzusehen.

Bei komplexen \Re wird auch S_d komplex; wie bei komplexer Permeabilität die Magnetisierungskurve zu einer Ellipse wird (§ 173), durchläuft bei komplexem Verbraucherwiderstand der „Zustandspunkt“ der Röhre eine elliptische Bahn.

Die Spannungsverstärkung ergibt sich unmittelbar aus (630), da nach (626) $u_a = -\Re \mathfrak{S}_a$ ist:

$$-\frac{u_a}{u_g} = \frac{S \Re}{1 + \frac{\Re}{R_i}} = \frac{1}{D} \frac{\Re}{R_i + \Re}; \quad (632)$$

sie wächst bei hohem \Re (insbesondere bei Leerlauf) mit abnehmendem Durchgriff, bei kleinem \Re dagegen mit wachsender Steilheit. Dies ist leicht zu verstehen: bei hohem \Re läuft die Arbeitskurve ja fast horizontal, bei niedrigem dagegen fast ebenso steil wie die Kennlinie.

Sehr häufig schreibt man die Gleichung (630) auch in der Form:

$$\mathfrak{S}_a = \frac{1}{R_i + \Re} \frac{u_g}{D}. \quad (633)$$

Die Röhre wirkt hiernach auf einen äußeren Widerstand \Re wie eine Zweipolquelle von der Leerlaufspannung $\frac{u_g}{D}$ und dem inneren Widerstand R_i .

§ 201. Die in den Verbraucher übergehende Wechselstromleistung. In den Verbraucher \Re wandert die Wechselstromleistung

$$\Re = |\mathfrak{S}_a|^2 R = \frac{|u_g|^2}{D^2} \frac{R}{|R_i + \Re|^2}. \quad (634)$$

Sie nimmt, da R_i der Scheinwiderstand des Verstärkers von der Verbraucherseite aus ist, bei Variation des Verbrauchers ihren höchsten Wert $\hat{\Re}$ an für

$$R_i = \Re^* = R - j R', \quad (635)$$

also dann, wenn der Verbraucherwiderstand reell und gleich dem Röhrenwiderstande (an die Röhre „angepaßt“) ist.

Der mit einer gegebenen Gitterwechselspannung erreichbare Höchstwert $\hat{\Re}$ der Leistung kann als ein Kennzeichen für die Güte der Röhre gelten. Barkhausen nennt daher [vgl. die Gleichung (263) des § 105] den in der Gleichung

$$\hat{\Re} = \frac{1}{4 R_i} \left(\frac{|u_g|}{D} \right)^2 = \frac{S}{4 D} |u_g|^2 \quad (636)$$

vorkommenden Faktor S/D die „Güte“ der Röhre. Sie ist um so höher, je größer die Steilheit und je kleiner der Durchgriff ist. Dieses Ergebnis leuchtet sehr ein, wenn man $\hat{\Re} \sim (\sqrt{1/D \cdot S} |u_g|)^2$ schreibt und sich erinnert, daß die Spannungsverstärkung bei hohem äußerem Widerstand umgekehrt proportional dem Durchgriff, bei niedrigem dagegen proportional der Steilheit wächst.

§ 202. Die größte einer Röhre entnehmbare Wechselstromleistung. Das Verhältnis S/D muß nach (636) möglichst groß gemacht werden, wenn mit einer gegebenen Gitterwechselspannung in einen angepaßten Verbraucher eine möglichst hohe Leistung befördert werden soll. Ist die Gitterwechselspannung veränderbar, so ist zu beachten, daß immer nur ein beschränkter Teil des Kennlinienfeldes ausgenutzt werden kann. Um die größte einer Röhre entnehmbare Wechselstromleistung zu schätzen, suchen wir (Abb. 179) die zu der Anodengleichspannung U_a gehörige Kennlinie aus; es sei die in ihrem mittleren Teil stark ausgezogene. Soll kein Gitterstrom fließen, so muß die Gitterspannung beständig unter dem Werte \bar{u}_g bleiben, der dem Einsetzen des Gitterstroms entsprechen möge. Andererseits müssen wir nach § 200 zur Erzielung der höchsten

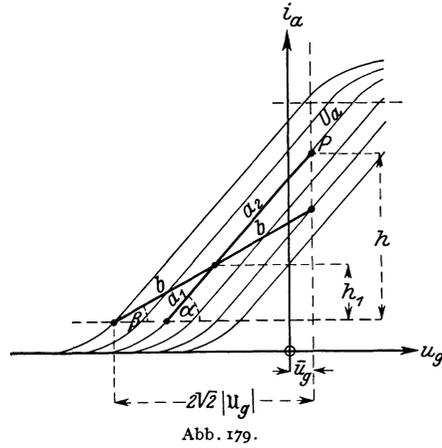
Leistung die Steilheit der Arbeitskurve halb so groß machen wie die der Kennlinie. Wir müssen also die Arbeitskurve so legen, daß ihre Steilheit gleich $S/2$ ist, daß ihr rechtes Ende auf der Vertikalen durch \bar{u}_g , ihre Mitte (der Schwingungsmittelpunkt) auf der hervorgehobenen Kennlinie und ihr linkes Ende auf der gestrichelten (in Wirklichkeit nicht so scharfen) Grenze des Gebietes liegt, wo die Kennlinien geradlinig sind.

Die Aufgabe ist eine rein geometrische (Abb. 179): Zu gegebenem h und α ($= \text{arc tg } S$) müssen wir unter Berücksichtigung der soeben ausgesprochenen Bedingungen die Lage der Arbeitskurve und die Strecke $x = 2\sqrt{2} |\mathbf{u}_g|$ finden. Zweimalige Anwendung des Sinussatzes ergibt

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_1}{b} &= \frac{\sin \beta}{\sin (180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \\ \frac{a_2}{b} &= \frac{\sin (90^\circ + \beta)}{\sin (90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}, \end{aligned} \right\} \quad (637)$$

also

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\text{tg } \beta}{\text{tg } \alpha} = \frac{1}{2}. \quad (638)$$



Die Strecke h wird also durch die Arbeitskurve und durch die Horizontale durch den Ruhepunkt in drei gleiche Teile geteilt ($h_1 = h/3$).

Daraus folgt aber

$$|\mathbf{u}_g| = \frac{x}{2\sqrt{2}} = \frac{2h_1}{2\sqrt{2} \text{tg } \beta} = \frac{\frac{2}{3} \cdot h}{\sqrt{2} \text{tg } \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{h}{S}. \quad (639)$$

Die größte von der Röhre unter der Voraussetzung $R = R_i$ unverzerrt abgebbare Leistung ist daher

$$\hat{\mathfrak{N}} = \frac{|\mathbf{u}_g|^2 S}{4D} = \frac{1}{18} \frac{h^2}{SD} = \frac{1}{18} h^2 R_i. \quad (640)$$

Die Strecke h greift man am sichersten aus einer Darstellung der Kennlinienschar ab.

Wir wollen die größte entnehmbare Leistung auch noch unmittelbar als Funktion der Betriebsspannung E_a und des inneren Widerstands R_i der Röhre berechnen. Dabei machen wir zunächst keinen Gebrauch von der Anpassungsbedingung $R = R_i$ und lassen außerdem vorläufig die Frage offen, ob der Gleichstromwiderstand R_0 des Verbrauchers ebenso groß oder kleiner ist als sein Wechselstromwiderstand R .

Der Einfachheit halber vernachlässigen wir die kleinen Größen \bar{u}_g, a (§ 199) und die Höhe der unteren Grenze des geradlinigen Kennlinienfeldes über der Abszissenachse. Dann ergibt sich für die Wechselstromleistung

$$\mathfrak{N} = \frac{\hat{i}_a^2}{2} R \quad (641)$$

und für den Scheitelwert des Anodenwechselstroms nach der Grundgleichung (619):

$$2\hat{i}_a = SD (U_a - \hat{u}_a) = \frac{1}{R_i} (E_a - R_0 I_a - R \hat{i}_a) = \frac{1}{R_i} (E_a - (R_0 + R) \hat{i}_a) \quad (642)$$

oder

$$\hat{i}_a = \frac{E_a}{2R_i + R_0 + R}. \quad (643)$$

Setzen wir zunächst als Verbraucher einen frequenzunabhängigen Widerstand voraus ($R_0 = R$), so wird

$$\mathfrak{R} = \frac{E_a^2}{8(R_i + R)^2} R. \quad (644)$$

Dieser Ausdruck wird nach § 32 am größten für $R = R_i$, und sein Maximalwert ist¹

$$\hat{\mathfrak{R}} = \frac{E_a^2}{32 R_i}. \quad (645)$$

Ist dagegen wie bei einem Übertrager der Gleichstromwiderstand R_0 sehr klein, so wird

$$\mathfrak{R} = \frac{E_a^2}{2(2R_i + R)^2} R, \quad (646)$$

und dieser Ausdruck nimmt für $R = 2R_i$ seinen größten Wert

$$\hat{\mathfrak{R}} = \frac{E_a^2}{16 R_i} \quad (647)$$

an. Bei geeigneter „Überanpassung“ kann also ein Übertrager aus einer Röhre doppelt so viel Leistung herausnehmen wie ein frequenzunabhängiger Widerstand.

§ 203. Die Energieströmung bei der Röhre. Nimmt man die Zählpeile wie in Abb. 178 an, so strömt nach den Festsetzungen im § 31 aus der Anodenbatterie die Leistung $E_a i_a$; in den Verbraucher \mathfrak{R} , an dem die Spannung u liege, die Leistung $u i_a$; in die Röhre die Leistung $u_a i_a$. Im Mittel strömt bei sinusartigem Verlauf der Komponenten i_a , u und u_a (vgl. die ähnlichen Betrachtungen im § 93) aus der Anodenbatterie die Leistung

$$\frac{E_a}{T} \int_0^T (I_a + i_a) dt = E_a I_a; \quad (648)$$

in den Verbraucher, wenn wir $\mathfrak{R} = |\mathfrak{R}| \angle \varphi$ setzen, die Leistung

$$\frac{1}{T} \int_0^T (U + u)(I_a + i_a) dt = U I_a + |u| |\mathfrak{S}_a| \cos \varphi; \quad (649)$$

in die Röhre die Leistung

$$\frac{1}{T} \int_0^T (U_a + u_a)(I_a + i_a) dt = U_a I_a + |u_a| |\mathfrak{S}_a| \cos \varphi_a. \quad (650)$$

Dabei ist φ_a die Phasenverschiebung zwischen der Anodenwechselspannung und dem Anodenwechselstrom. Da man aus der Gleichung (626) des § 200 wie schon bei Ableitung der Spannungsverstärkung die komplexe Gleichung

$$0 = u_a + \mathfrak{R} \mathfrak{S}_a \quad \text{oder} \quad \frac{u_a}{\mathfrak{S}_a} = -\mathfrak{R} \quad (651)$$

folgern kann, unterscheidet sich φ_a von φ um $\pm 180^\circ$; es ist $|u_a| = |u|$, $\cos \varphi_a = -\cos \varphi$, und man kann für die in die Röhre strömende Leistung auch

$$U_a I_a - |u| |\mathfrak{S}_a| \cos \varphi \quad (652)$$

setzen.

¹ Radt, W. P.: Elektr. Nachr.-Techn. 3, 21 (1926).

Das Energiegesetz ist also erfüllt: von der Leistung $E_a I_a$, die die Batterie liefert, wandert bei Gleichstrom der Teil $U I_a$ in den Verbraucher, der Teil $U_a I_a$ in die Röhre. Beim Einsetzen des Wechselstroms wird der Röhre im Mittel genau um die erzeugte mittlere Wechselleistung $|\mathfrak{U}||\mathfrak{I}_a| \cos \varphi$ weniger Energie zugeführt als vorher.

Die mittlere Klemmenleistung der Röhre wandelt sich völlig in Bewegungsenergie der Elektronen um; dadurch erhitzt sich die Anode. Diese „Belastung“ der Anode verringert sich, wenn Wechselstrom entnommen wird. Man kann sich vorstellen, daß in der Röhre die Gleichstromleistung $N_a = U_a I_a$ zur Verfügung steht, und daß es darauf ankommt, einen möglichst großen Teil dieser Leistung N_a in nützliche Wechselstromleistung \mathfrak{N} zu verwandeln.

Soll bei einer Röhre die Gleichstrombelastung N_a einen vorgeschriebenen Wert nicht überschreiten, so tut man gut daran, den äußeren Widerstand recht groß zu wählen („überanzupassen“), also mit kleinem Strom und hoher Batteriespannung zu arbeiten. Denn wenn $U_a = E_a$ gesetzt werden darf, so darf man nach (643) auch an Stelle von (646)

$$\mathfrak{N} = \frac{R}{2(2R_i + R)} U_a I_a = \frac{R}{2(2R_i + R)} N_a \quad (653)$$

schreiben; daraus geht aber hervor, daß ein Widerstand $R = R_i$ die Leistung $N_a/6$, ein Widerstand $R = 2R_i$ dagegen die Leistung $N_a/4$ und ein sehr großer Widerstand R sogar annähernd die Leistung $N_a/2$ aufnimmt.

§ 204. Gittervorspannung und Spannung der Anodenbatterie. Da das Gitter keinen Strom aufnehmen soll, muß seine Gleichspannungskomponente U_g so stark negativ gewählt werden, daß auch nach Überlagerung des zu verstärkenden Wechselstroms keine Elektronen zum Gitter fliegen. Man erreicht das z. B. mit Hilfe eines galvanischen Elements oder einer Gitterbatterie.

Bei der Gitterspannung U_g muß die Kennlinie nach (636) möglichst steil sein. Wir müssen sie daher um eine so hohe Verschiebungsspannung $D U_a$ nach links schieben, daß ihr Wendepunkt mit U_g zusammenfällt. Aus der so ermittelten Verschiebungsspannung ergibt sich die erforderliche Anodengleichspannung U_a , wenn der Durchgriff gegeben ist.

Bei hoher Steilheit ist die erforderliche Verschiebungsspannung naturgemäß geringer als bei niedriger; man kommt daher bei hoher Steilheit, wie man sie z. B. mit „Raumladungsgitterröhren“ erzielt, mit geringeren Anodenspannungen aus.

Umgekehrt muß man, wenn der Durchgriff der gegebenen Röhre sehr klein ist, die nötige Verschiebungsspannung durch hohe Anodenspannung zu erreichen suchen.

Will man also hohe Spannungen vermeiden, so muß man hohe Röhrengüte durch hohe Steilheit, aber nicht durch kleinen Durchgriff zu erreichen suchen.

§ 205. Richardsonsche Formel. Nach Gleichung (585), § 188, ist die Sättigungsstromstärke i_s (wenn bei der betreffenden Röhre Sättigung überhaupt erreicht wird) der Zahl N der in der Zeiteinheit von der Oberflächeneinheit des Glühfadens ausgesandten Elektronen proportional. Für den Zusammenhang dieser Zahl mit der absoluten Temperatur¹ T des Fadens hat Richardson die beiden Gesetze

$$N = a \sqrt{T} e^{-\frac{b}{T}} \quad \text{und} \quad N = A T^2 e^{-\frac{B}{T}} \quad (654)$$

aufgestellt²; dabei sind a , b und B für das Fadenmaterial charakteristisch, A

¹ Die „absolute Temperatur“ wird von der Celsiusstemperatur -273^0 aus gezählt und häufig durch den Zusatz „Kelvin“ ($^0\text{K.}$) gekennzeichnet.

² Richardson, O. W.: The emission of electricity from hot bodies. London: Longmans, Green & Co. 1916. — Nach neueren Untersuchungen scheint die zweite Formel besser als die erste mit der Erfahrung übereinzustimmen.

dagegen ist bei Fäden aus reinem Metall eine universelle Konstante, und zwar¹ gleich $3,8 \cdot 10^{20}/(\text{cm}^2 \text{ secgrad}^2)$. Beide Formeln ergeben bei höheren Temperaturen ein sehr starkes Anwachsen der Elektronenemission mit der Temperatur; und zwar sind es die „Temperaturen“ b und B , von deren Höhe die Geschwindigkeit des Anwachsens in erster Linie abhängt: je niedriger sie sind, um so rascher der Anstieg.

Die Konstanten b und B sind proportional der Arbeit, die ein Elektron beim Austritt aus dem Metall zu leisten hat. Bei Fäden aus reinem Wolfram ist die Konstante b gleich 52500^0 , bei Oxydfäden ungefähr gleich 20000^0 .

§ 206. Die Betriebsverstärkung der Röhre und ihre Messung. Da die Elektronenröhre nach § 199 nicht zu den im Abschnitt VI behandelten Vierpolen gehört, ist es nicht möglich, für sie in derselben Weise, wie wir früher für schwächende Vierpole eine Dämpfung definiert haben, eine Verstärkung zu definieren.

Durch eine reine Zahl muß aber auch die verstärkende Wirkung einer Röhrenschtaltung gekennzeichnet werden; die Angabe einer benannten Größe wie der Röhrengüte wäre nur ein Behelf. Daraus geht hervor, daß einer Röhre als solcher überhaupt keine Verstärkung zukommt. Denn aus den beiden unabhängigen Röhrenparametern D und S kann man keine dimensionslose Kombination bilden; der dimensionslose Durchgriff aber ist nach § 200 nur bei Leerlauf ein Maß für die Verstärkung.

Aus diesen Gründen gibt man bei Verstärkern die „Betriebsverstärkung“ s an. Deren Definition unterscheidet sich von der Definition der Betriebsdämpfung nur durch das Vorzeichen; d. h. man setzt

$$s = \ln \frac{2 |\mathfrak{S}_2| \sqrt{|\mathfrak{R}_a| |\mathfrak{R}_e|}}{|\mathfrak{E}|} = \ln \left(\frac{2 |\mathbf{u}_2|}{|\mathfrak{E}|} \sqrt{\frac{|\mathfrak{R}_a|}{|\mathfrak{R}_e|}} \right). \quad (655)$$

Bei der Messung der Betriebsverstärkung nimmt man als Endbeschaltungen in der Regel reine Widerstände R_a und R_e , wie sie im Betrieb vorkommen.

Die Betriebsverstärkung kann ähnlich wie die Betriebsdämpfung in der Schaltung der Abb. 180 gemessen werden. Man kompensiert etwa zunächst an den Klemmen 0 und sucht dann denjenigen Teil des Widerstands $K = |\mathfrak{R}_e|$, an dem dieselbe Spannung $|\mathbf{u}_0|$ liegt. Da diese mit der definitionsmäßigen elektromotorischen Kraft $|\mathfrak{E}|$ übereinstimmt, ist $|\mathbf{u}_2|/|\mathbf{u}_0| = |\mathbf{u}_2|/|\mathfrak{E}| = K/\varrho$, also

$$s = \ln \left(\frac{2K}{\varrho} \sqrt{\frac{|\mathfrak{R}_a|}{|\mathfrak{R}_e|}} \right). \quad (656)$$

Ein anderes Verfahren ist von Pohlmann² angegeben worden. Man benutzt die etwas umständlichere Schaltung Abb. 181. Hier bedeutet K wieder den Kompensationsapparat; \mathfrak{R} und r sind Widerstände. Zur Messung der Verstärkung kompensiert man zuerst an den sekundären Klemmen; dann sucht man den Teilwiderstand ϱ von K , an dem dieselbe Spannung liegt. Es ist also (unter Benutzung eines Ergebnisses des § 15), wenn wir mit \mathfrak{S}_0 den Strom bezeichnen, der durch K fließt:

$$\frac{\mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_1} = \frac{\varrho \mathfrak{S}_0}{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{S}_1} = \frac{\varrho}{\mathfrak{B}_1} \frac{r + \mathfrak{R} + \mathfrak{B}_1}{r} \quad (657)$$

¹ Schottky, W.: Verh. dtsch. physik. Ges. 21, 532 (1919). Dushman, S.: Phys. Rev. 21, 623 (1923).

² Pohlmann, B., u. W. Deutschmann: Elektr. Nachr.-Techn. 3, 8 (1926).

und definitionsgemäß

$$s = \ln \left(\frac{z |u_g|}{|u_1|} \frac{|\mathfrak{B}_1|}{|\mathfrak{R}_a + \mathfrak{B}_1|} \sqrt{\frac{|\mathfrak{R}_a|}{|\mathfrak{R}_s|}} \right) \\ = \ln \left(\frac{z \varrho}{r} \frac{|r + \mathfrak{R} + \mathfrak{B}_1|}{|\mathfrak{R}_a + \mathfrak{B}_1|} \sqrt{\frac{|\mathfrak{R}_a|}{|\mathfrak{R}_s|}} \right) = \ln \left(\frac{z \varrho}{r} \sqrt{\frac{|\mathfrak{R}_a|}{|\mathfrak{R}_s|}} \right), \quad (658)$$

vorausgesetzt, daß man $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_a - r$ wählt. Für r nimmt man einen runden Wert, z. B. 10Ω .

§ 207. Der Eingangswiderstand der Röhre. Man kann die Zweipolquelle, deren Leistung verstärkt werden soll, unmittelbar oder über einen Übertrager an das Gitter schalten. Da der Effektivwert der Gitterwechselspannung möglichst groß sein soll, muß man nach dem Spannungsteilersatz dafür sorgen, daß der Eingangswiderstand \mathfrak{B}_1 der Röhre hoch ist. Er kann zu niedrig sein, weil Gitterstrom fließt oder weil infolge mangelhafter Isolation oder (bei höheren Frequenzen) wegen der Kapazität zwischen dem Gitter und der Kathode oder benachbarten Leitern Nebenschlüsse bestehen. Man wird daher einerseits die Gitterspannung so wählen, daß kein Gitterstrom fließen kann, andererseits das Gitter möglichst gut isolieren.

Die Gitterspannung kann durch einen Übertrager erhöht werden, vorausgesetzt, daß der innere Widerstand der Zweipolquelle — wie z. B. bei Leitungen — so klein ist, daß man den Übertrager an ihn anpassen kann (zweite Anpassungsbedingung § 157). Dabei ist aber nach § 184 zu beachten, daß die durch den Übertrager bewirkte Übersetzung der elektromotorischen Kraft der Stromquelle bei Erhöhung des Verhältnisses n der Windungszahlen wegen der Spulenkapazität schließlich wieder abnimmt.

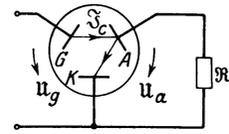


Abb. 182.

Außer über die Kapazität Gitter-Kathode hinweg findet die Gitterspannung auch über die Anode hinweg einen dielektrischen Ableitungsweg. Da nämlich für den Verschiebungsstrom \mathfrak{I}_c (Abb. 182) das Ohmsche Gesetz gilt:

$$\mathfrak{I}_c = j \omega C_{ag} (u_g - u_a) \quad (659)$$

und da nach § 200

$$-\frac{u_a}{u_g} = \frac{1}{D} \frac{\mathfrak{R}}{R_i + \mathfrak{R}}, \quad (660)$$

fließt auf dem Weg über die Anode ein Wechselstrom

$$\mathfrak{I}_c = u_g \left(1 + \frac{1}{D} \frac{\mathfrak{R}}{R_i + \mathfrak{R}} \right) j \omega C_{ag}. \quad (661)$$

Dem Nebenschluß über die Anode hinweg entspricht ein auf der Eingangsseite meßbarer scheinbarer Leitwert

$$\frac{1}{\mathfrak{B}_1} = j \omega C_{ag} \left(1 + \frac{1}{D} \frac{\mathfrak{R}}{R_i + \mathfrak{R}} \right), \quad (662)$$

den man sich parallel zu den am Anfang dieses Paragraphen erwähnten Leitwerten zwischen Gitter und Kathode liegend denken kann.

Bei Kurzschluß ($\mathfrak{R} = 0$) ist der scheinbare Leitwert gleich dem Leitwert der Kapazität C_{ag} , wie aus dem Schaltbild abzulesen; bei Leerlauf dagegen ist er, weil an der Kapazität C_{ag} in der Hauptsache die verstärkte Anodenspannung liegt, im Verhältnis $1 + 1/D$ größer als der Leitwert der Kapazität. Man nennt die so „verstärkte“ scheinbare Kapazität, die meist viel größer ist als die Teilkapazität C_{ag} , auch „wirksame“ oder „dynamische“ Kapazität; bei Übertragerverstärkung addiert sie sich zu der Übertragerkapazität.

Der Leitwert, den die Röhre auf ihrer Eingangsseite darbietet, unterscheidet sich, wenn die Kapazität C_{ag} berücksichtigt werden muß, durch eine besondere Eigenschaft von allen Leitwerten, die wir bis jetzt betrachtet haben. Er hat nämlich zwar bei reellem \Re die Phase 90° wie jeder andere Leitwert einer Kapazität; bei induktivem \Re dagegen ist die Phase von \Re größer als die von $R_i + \Re$, so daß der Vektor $1/\Re_1$ im zweiten Quadranten liegt. Die Röhre hat also infolge der Phasendrehung, die mit der Spannungsverstärkung verbunden ist, den Charakter eines Widerstandes mit negativem Wirkteil. Da ein positiver Wirkteil eine Dämpfung der Energie bedeutet, entspricht einem negativen Wirkteil eine Verstärkung. Unter Umständen kann die Röhre durch einen ganz kleinen Anstoß sogar ins Schwingen geraten (vgl. § 208). Man kann diese „Selbsterregung“ vermeiden, indem man \Re künstlich zu einer Kapazität macht.

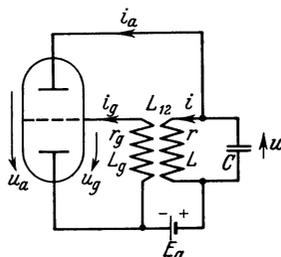


Abb. 183.

§ 208. Selbsterregung eines Kreises durch Rückkopplung. Wir wollen den Vorgang der Schwingungserregung in einem System mit Rückkopplung noch etwas genauer untersuchen, aber nicht an dem Beispiel der Rückkopplung über die Anodengitterkapazität, sondern an dem Beispiel der Rückkopplung durch einen Übertrager, der von einer im Anodenzweig liegenden schwingungsfähigen Masche aus unmittelbar auf den Gitterkreis einwirkt.

Legen wir die Bezeichnungen und Zählpfeile der Abb. 183 zugrunde und berücksichtigen wir die beiden Wicklungsmöglichkeiten beim Übertrager (das obere Vorzeichen entspreche der gleichsinnigen Wicklung), so ergibt die Maschenregel, angewendet auf den Schwingungskreis r, L, C

$$u + r i + L \frac{d i}{d t} \pm L_{12} \frac{d i_g}{d t} = 0, \quad (663)$$

angewendet auf den Gitterkreis

$$u_g + r_g i_g + L_g \frac{d i_g}{d t} \pm L_{12} \frac{d i}{d t} = 0. \quad (664)$$

Wir haben in diesen Gleichungen den Gitterstrom eingeführt, um in der Zuordnung der Vorzeichen keinen Fehler zu begehen, setzen ihn jetzt aber gleich Null. Dann wird

$$u + r i + L \frac{d i}{d t} = 0 \quad (665)$$

und unter Berücksichtigung dieser Beziehung näherungsweise (r sei als klein vorausgesetzt)

$$u_g \mp \frac{L_{12}}{L} u = 0. \quad (666)$$

Für i gilt

$$i = C \frac{d u}{d t} - i_a \quad (667)$$

und für i_a , wenn wir im Gebiet geradliniger Kennlinien bleiben,

$$i_a = S(u_g + D u_a - a). \quad (668)$$

Setzen wir (666) in (668) ein und beachten wir, daß

$$E_a = u + u_a, \quad (669)$$

so wird

$$i_a = S \left(\left(\pm \frac{L_{12}}{L} - D \right) u + DE_a - a \right) \quad (670)$$

und aus (665) folgt daher mit (667)

$$u + rC \frac{du}{dt} - rS \left(\left(\pm \frac{L_{12}}{L} - D \right) u + DE_a - a \right) + LC \frac{d^2u}{dt^2} - LS \left(\pm \frac{L_{12}}{L} - D \right) \frac{du}{dt} = 0, \quad (671)$$

oder wenn wir nach u ordnen und $L_{12}/L = n\kappa$ setzen ($n = \text{Übersetzungsverhältnis}$, $\kappa = \text{magnetische Kopplung}$):

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{r}{L} + \frac{S}{C} (D \mp n\kappa) \right) \frac{du}{dt} + (1 + rS(D \mp n\kappa)) \frac{u}{LC} - \frac{rS}{LC} (DE_a - a) = 0. \quad (672)$$

Diese nichthomogene Differentialgleichung zweiten Grades kann nach den Methoden des Abschnitts V weiterbehandelt werden. Nach dem dort Abgeleiteten ist für das Ab- oder Anschwellen der Kondensatorspannung u , da r als klein vorausgesetzt ist, die doppelte erste Zeitkonstante τ_1 maßgebend; und zwar klingt die Spannung u bei positivem τ_1 ab, bei negativem τ_1 dagegen schwillt sie an. Für τ_1 gilt aber nach § 132 und nach (672)

$$\frac{1}{\tau_1} = \frac{r}{L} + \frac{S}{C} (D \mp n\kappa), \quad (673)$$

und dieser Ausdruck ist negativ, wenn

$$\frac{r}{L} + \frac{S}{C} (D \mp n\kappa) < 0$$

oder

$$\pm n\kappa > D + \frac{1}{S} \frac{rC}{L}. \quad (674)$$

Diese Ungleichung kann natürlich nur dann erfüllt sein, wenn das obere Vorzeichen richtig, also die Übertragerwicklung gleichsinnig gewickelt ist. Ist sie aber erfüllt, so haben die entstehenden Schwingungen eine negative zeitliche Dämpfung; d. h. tritt durch irgendeine Zufälligkeit ein schwacher Strom auf, so schwillt er von selbst zu einem Wechselstrom an.

(674) drückt aus, wie stark die Rückkopplung mindestens gemacht werden muß, wenn sich die Röhrenschaltung selbst erregen soll. In Abb. 184 sind schematisch zwei gleichsinnige Wicklungen dargestellt; bei ihnen ist also Selbsterregung möglich.

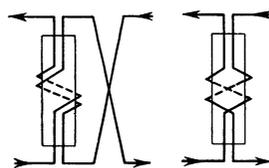


Abb. 184.

Das dritte Glied der Gleichung (672) zeigt, daß sich die Frequenz, in der sich das System erregt, nur wenig von der Scheinfrequenz $1/\sqrt{LC}$ der schwingungsfähigen Masche unterscheidet.

Unbeschränkt können die Schwingungen natürlich nicht anwachsen, da unsere Entwicklungen nur im Bereich geradliniger Kennlinien gelten und der Anodenstrom sowohl wie die Anodenspannungen über gewisse Grenzen nicht hinausschwingen können¹.

§ 209. Die Selbsterregungsformel. Man kann die Grenzkopplung, bei der die Selbsterregung einsetzt, nach Barkhausen in sehr einfacher Weise allgemein ableiten. Wir wollen voraussetzen, bei einer Röhre werde durch irgendeine zu-

¹ Vgl. H. Barkhausen: Elektronenröhren 2, 3. Aufl. Leipzig: Hirzel 1928.

fällig vorhandene Gitterwechselspannung u_g eine Anodenspannung

$$u_a = - \frac{\Re}{D(R_i + \Re)} u_g \quad (675)$$

hervorgerufen (vgl. § 200), und diese Anodenspannung u_a ziehe nun wieder durch irgendeine Rückkopplung zwangsläufig eine ihr proportionale Gitterwechselspannung nach sich:

$$\bar{u}_g = - \Re u_a = \frac{\Re \Re}{D(R_i + \Re)} u_g. \quad (676)$$

Der im allgemeinen komplexe Faktor \Re wird auch als „Rückkopplungsfaktor“ bezeichnet. Dann wird die Wechselspannung u_g auch ohne Wechselstromquelle dauernd bestehen bleiben können, wenn die durch Verstärkung und Rückkopplung entstandene Gitterspannung \bar{u}_g gleich der ursprünglichen Gitterspannung u_g ist, d. h. wenn mindestens

$$\Re \Re = D(R_i + \Re) = \frac{1}{S} + D \Re \quad (677)$$

oder

$$\Re = D + \frac{1}{S \Re}. \quad (678)$$

Diese „Selbsterregungsformel“ gibt den Rückkopplungsfaktor \Re , der notwendig ist zur Aufrechterhaltung eines Wechselstromes ohne von außen aufgedrückte elektromotorische Wechselkraft. Sie steht in Übereinstimmung mit der Gleichung (674) des vorigen Paragraphen; denn bei der besonderen Übertragerschaltung, die wir dort zugrunde gelegt haben, ist der Rückkopplungsfaktor gleich $n\kappa$ und der Scheinwiderstand der schwingungsfähigen Masche für ihre Scheinfrequenz nach § 106 gleich L/Cr .

Eine genauere Theorie der Schwingungserzeugung hat vor allem noch den Einfluß der Begrenzung des Kennlinienfeldes durch die Abszissenachse, die Sättigung, das Einsetzen des Gitterstroms usw. zu berücksichtigen. Da die Steilheit der Kennlinie in der Nähe der Kennlinienknick abnimmt, kann die Bedingung (678) dort unter Umständen nicht mehr erfüllt sein.

Was die entstehenden Frequenzen angeht, so können an sich alle Schwingungen entstehen, für die die Selbsterregungsbedingung erfüllt ist. Bei den Röhrensendern ist jedoch \Re meist ein Zweipol, dessen Scheinwiderstand stark von der Frequenz abhängt, und die Selbsterregungsbedingung wird daher — wie z. B. im vorigen Paragraph — nur in der Nähe einer ausgezeichneten Frequenz erfüllt sein.

IX. Gleichmäßige Leitungen.

§ 210. Grunddefinitionen. Unter einer gleichmäßigen (homogenen) Leitung verstehen wir eine Doppeldrahtleitung (Hin- und Rückleitung) die an allen Stellen gleich beschaffen ist: das Metall, aus dem die Drähte bestehen, ihre Dicke, ihr Abstand voneinander, von der Erde oder vom Kabelmantel usw., die Art ihrer Isolation, die Temperatur, alles dies soll an allen Stellen völlig übereinstimmen.

Bei einer solchen Leitung sind nach § 8 der Drahtwiderstand, nach § 90 die Induktivität, nach § 9 der Leitwert des Dielektrikums, endlich nach § 56 die Kapazität proportional der Leitungslänge. Die Proportionalitätskonstanten, mit denen man diese multiplizieren muß, um die vier angegebenen Leitungseigenschaften zu erhalten, bezeichnen wir der Reihe nach mit R , L , G , C und

nennen sie den „bezogenen“ (nämlich auf die Längeneinheit bezogenen) Widerstand, die bezogene Induktivität, die bezogene Ableitung und die bezogene Kapazität. Nach ihrer Definition erhält man die bezogenen Werte, wenn man die Gesamtwerte eines Stückes gleichmäßiger Leitung durch seine Länge dividiert.

Eine ungleichmäßige Leitung wäre eine solche, bei der die Eigenschaften von Stelle zu Stelle variieren, so daß die Zusammenhänge zwischen den Gesamtwerten und der Leitungslänge durch kompliziertere Funktionen gegeben werden. Eine Leitung, die aus gleichmäßigen Stücken verschiedener Eigenschaften zusammengesetzt ist, darf natürlich als Ganzes nicht mehr zu den gleichmäßigen Leitungen gerechnet werden.

§ 211. Übertragungsmaß und Wellenwiderstand der Sternschaltung. Die Theorie der gleichmäßigen Leitung läßt sich vierpoltheoretisch ableiten, wenn man sich die Leitung zusammengesetzt denkt aus lauter gleichen unendlich kurzen Vierpolen, die je aus einem Längswiderstand $\Re = (R + j\omega L) dx$ und einem Querleitwert $\mathcal{G} = (G + j\omega C) dx$ bestehen. Dabei sei der Widerstand und die Induktivität der Rückleitung in dem Längswiderstand einbezogen.

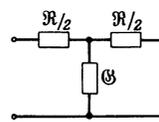


Abb. 185.

Jeder solche Vierpol kann als „Sternschaltung“¹ gemäß

Abb. 185 aufgefaßt werden. Man liest aus dem Schaltbild unmittelbar ab, daß sein Leerlaufwiderstand gleich

$$\Re' = \frac{\Re}{2} + \frac{1}{\mathcal{G}}, \tag{679}$$

sein Kernwiderstand nach § 147 gleich

$$\Re = \frac{1}{\mathcal{G}} \tag{680}$$

ist. Das Übertragungsmaß der Sternschaltung berechnet sich also nach

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{G} = \frac{\Re'}{\Re} = \frac{\Re/2 + 1/\mathcal{G}}{1/\mathcal{G}} = 1 + \frac{\Re \mathcal{G}}{2}, \tag{681}$$

ihr Wellenwiderstand nach

$$\mathcal{Z}^2 = \Re'^2 - \Re^2 = \left(\frac{\Re}{2} + \frac{1}{\mathcal{G}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\mathcal{G}}\right)^2 = \frac{\Re}{\mathcal{G}} \left(1 + \frac{\Re \mathcal{G}}{4}\right). \tag{682}$$

$\sqrt{\Re/\mathcal{G}}$ heißt auch „Nennwert“ des Wellenwiderstands.

§ 212. Übertragungsmaß und Wellenwiderstand der Dreieckschaltung. Mit demselben Recht wie durch die Schaltung Abb. 185 kann man das Vierpolelement der Leitung auch durch die „Dreiecksschaltung“² Abb. 186 ersetzt denken. Diese kann man nach § 23 wieder in eine Sternschaltung $\bar{\Re}, \bar{\mathcal{G}}$ umwandeln, für die die Gleichungen

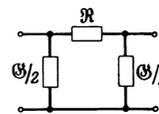


Abb. 186.

$$\frac{\bar{\Re}}{2} = \frac{\Re \cdot \frac{2}{\mathcal{G}}}{\Re + \frac{4}{\mathcal{G}}} = \frac{\Re}{2 \left(1 + \frac{\Re \mathcal{G}}{4}\right)} \tag{683}$$

¹ K. W. Wagner nennt die Sternschaltung „Kettenleiter 2. Art“: Arch. Elektrot. 8, 61 (1919).

² Den „Kettenleiter 1. Art“ Wagners.

und

$$\frac{1}{\mathfrak{G}} = \frac{\frac{4}{\mathfrak{G}^2}}{\mathfrak{R} + \frac{4}{\mathfrak{G}}} = \frac{1}{\mathfrak{G} \left(1 + \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}{4}\right)} \quad (684)$$

gelten. Nach (681) und (682) sind daher das Übertragungsmaß und der Wellenwiderstand der Dreiecksschaltung durch die Gleichungen

$$\mathfrak{Cof} \, g = 1 + \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}{2}, \quad (685)$$

$$\mathfrak{B}^2 = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{G} \left(1 + \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}{4}\right)^2} \left(1 + \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}{4}\right) = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{G}} \frac{1}{1 + \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}{4}} \quad (686)$$

gegeben. (681) und (685) stimmen überein; die Wellenwiderstände dagegen stimmen nur hinsichtlich ihres Nennwertes überein, im übrigen sind sie voneinander verschieden.

Während für die Sternschaltung nach der Gleichung (442) des § 155 die Gleichung

$$\mathfrak{G} = \frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{1}{\mathfrak{B}} \mathfrak{Cin} \, g \quad (687)$$

gilt, ergibt sich bei der Dreiecksschaltung aus (685) zunächst

$$\mathfrak{Cin}^2 \, g = \mathfrak{R} \mathfrak{G} \left(1 + \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}{4}\right) \quad (688)$$

und daher, wenn man diese Gleichung mit (686) multipliziert und die Wurzel zieht:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{B} \mathfrak{Cin} \, g. \quad (689)$$

§ 213. Übertragungsmaß und Wellenwiderstand der gleichmäßigen Leitung. Setzt man in die Gleichungen (681), (682) und (686) die bezogenen Werte R , L , G , C ein, so erhält man

$$\mathfrak{Cof} \, g = 1 + \frac{1}{2}(R + j\omega L)(G + j\omega C) dx^2, \quad (690)$$

$$\mathfrak{B}^2 = \frac{R + j\omega L}{G + j\omega C} \left(1 + \frac{1}{4}(R + j\omega L)(G + j\omega C) dx^2\right)^{\pm 1}, \quad (691)$$

wo das obere Zeichen für die Stern- und das untere für die Dreiecksschaltung gilt. Da wir bei der gleichmäßigen Leitung das Differential dx gegen Null gehen lassen müssen, können wir (Anhang 4. e)

$$\mathfrak{Cof} \, g \approx 1 + \frac{g^2}{2} \approx 1 + \frac{1}{2}(R + j\omega L)(G + j\omega C) dx^2 \quad (692)$$

setzen. Demnach wird für $dx \rightarrow 0$:

$$\gamma = \frac{g}{dx} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (693)$$

und

$$\mathfrak{B} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}. \quad (694)$$

Nun sind die unendlich kleinen symmetrischen Vierpole, aus denen wir uns die gleichmäßige Leitung zusammengesetzt gedacht haben, alle gleich, also auch alle aneinander „angepaßt“. Demnach gelten die wichtigen Grundgleichungen“ (693) und (694) auch für gleichmäßige Leitungen beliebiger Länge l . Die Wurzeln sind entsprechend den Festsetzungen im § 154 auszuziehen.

Da sich $\gamma = \beta + j\alpha$ aus den bezogenen Werten R, L, G, C eindeutig ergibt, ist auch das Übertragungsmaß $g = \gamma l = \beta l + j\alpha l$ eine eindeutige Größe. In dieser Hinsicht unterscheidet sich die gleichmäßige Leitung von den meisten andern Vierpolen, bei denen das Winkelmaß nur innerhalb des Bereichs von 0° bis 360° definiert ist.

Der Wellenwiderstand der gleichmäßigen Leitung ist nach (694) gleich seinem Nennwert.

§ 214. Messung der bezogenen Werte R, L, G, C . Die Werte R, L, G, C können im allgemeinen nur der Größenordnung nach berechnet werden; denn besonders bei Kabeln kennt man die Abmessungen (z. B. die Drahtabstände) und die Stoffkonstanten (z. B. die Leitfähigkeit und die Dielektrizitätskonstante der Isolation) nicht genau genug. Die bezogenen Werte werden daher praktisch immer durch Versuche gefunden. Man mißt (vgl. auch § 266) nach einer der im Abschnitt VI besprochenen Methoden den Wellenwiderstand und das Übertragungsmaß und berechnet aus diesen die Werte R, L, G, C auf Grund der Gleichungen

$$R + j\omega L = \gamma Z, \quad (695)$$

$$G + j\omega C = \frac{\gamma}{Z}, \quad (696)$$

die aus (693) und (694) folgen. Das zunächst vieldeutige Winkelmaß muß dabei durch Probieren eindeutig gemacht werden.

Mißt man bei verschiedenen Frequenzen, so erhält man zugleich die Frequenzabhängigkeit der bezogenen Werte. Hierauf hat man besonders zu achten beim Widerstand (wegen der Hautwirkung¹) und bei der Ableitung, die erfahrungsgemäß bei den gebräuchlichen Isolierstoffen annähernd proportional der Frequenz wächst.

§ 215. Dämpfungsmaß und Winkelmaß der gleichmäßigen Leitung. Die Zerlegung des bezogenen Übertragungsmaßes

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (697)$$

in das bezogene Dämpfungsmaß β und das bezogene Winkelmaß α gestaltet sich am einfachsten, wenn man die komplexen Größen durch ihre Beträge und Phasen darstellt. Wir führen durch

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{R}{\omega L}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{G}{\omega C} \quad (698)$$

zwei frequenzabhängige „Verlustwinkel“ ε und δ ein, setzen also

$$R + j\omega L = \frac{\omega L}{\cos \varepsilon} \angle 90^\circ - \varepsilon, \quad G + j\omega C = \frac{\omega C}{\cos \delta} \angle 90^\circ - \delta; \quad (699)$$

d. h. wir sehen den häufig vorliegenden Fall, daß die Blindbestandteile überwiegen, zunächst als den Normalfall an. Damit wird:

$$\gamma = \frac{\omega \sqrt{LC}}{\sqrt{\cos \varepsilon \cos \delta}} \angle 90^\circ - \frac{\varepsilon + \delta}{2}, \quad (700)$$

also

$$\beta = \frac{\omega \sqrt{LC}}{\sqrt{\cos \varepsilon \cos \delta}} \sin \frac{\varepsilon + \delta}{2}, \quad (701)$$

$$\alpha = \frac{\omega \sqrt{LC}}{\sqrt{\cos \varepsilon \cos \delta}} \cos \frac{\varepsilon + \delta}{2}. \quad (702)$$

¹ Vgl. die Tafeln von Meyer u. Deckert (§ 136), S. 76. Der dort verwendete Parameter κ ist in den Bezeichnungen des § 84 gleich $r/2 \cdot \sqrt{\pi \kappa f \mu}$.

Diese Gleichungen gelten allgemein für jede gleichmäßige Leitung und eignen sich zur genauen zahlenmäßigen Berechnung.

In den Winkeln ε und δ steckt, wie schon bemerkt, die Frequenz ω . Aus den Formeln ist daher noch nicht zu ersehen, wie β und α von der Frequenz abhängen.

Multipliziert man α und β miteinander, so erhält man

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= \frac{\omega^2 LC}{\cos \varepsilon \cos \delta} \sin \frac{\varepsilon + \delta}{2} \cos \frac{\varepsilon + \delta}{2} = \frac{\omega^2 LC}{\cos \varepsilon \cos \delta} \frac{1}{2} \sin(\varepsilon + \delta) \\ &= \omega^2 LC \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} + \frac{\sin \delta}{\cos \delta} \right) = \omega^2 LC \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{R}{\omega L} + \frac{G}{\omega C} \right),\end{aligned}$$

also

$$\alpha\beta = \omega \sqrt{LC} \left(\frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \right). \quad (703)$$

Diese ebenfalls allgemeingültige und verhältnismäßig einfache Gleichung erlaubt, die eine der beiden Größen β und α sofort hinzuschreiben, wenn die andere bekannt ist.

§ 216. Verlustarme und „verzerrungsfreie“ Leitung. Ein wichtiger Grenzfall ist der Fall der verlustarmen Leitung. Wenn die Verlustwinkel ε und δ klein sind, kann man sie gleich ihrem Sinus, ihre Kosinus dagegen gleich 1 setzen [vgl. Anhang 2c) und d)]. Dann folgt aus (702)

$$\alpha = \omega \sqrt{LC} \quad (704)$$

und nach (703)

$$\beta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (705)$$

Bei einer sehr verlustarmen Leitung ist also das Dämpfungsmaß von der Frequenz unabhängig, das Winkelmaß dagegen der Frequenz proportional. Bei kleiner Ableitung G — dies ist der wichtigste Fall der Praxis — ist das Dämpfungsmaß um so höher, je größer der Widerstand und die Kapazität und je kleiner die Induktivität ist. Durch Erhöhung der Induktivität kann man also die Dämpfung verringern.

Merkwürdigerweise gibt es noch eine zweite Bedingung, unter der die Gleichungen (704) und (705) sogar genau richtig werden, die Bedingung $\varepsilon = \delta$. Führt man sie ein, so geht die Gleichung (702) in die Gleichung (704) und damit nach (703) auch die Gleichung (701) in die Gleichung (705) über. Eine Leitung, bei der die beiden Verlustwinkel einander gleich sind, heißt auch „verzerrungsfrei“.

Der Winkel ε ist zwar bei allen in der Fernmeldetechnik verwendeten Leitungen viel größer als der Winkel δ . Trotzdem empfiehlt es sich häufig, bei der ersten angenäherten Theorie die Bedingung $\varepsilon = \delta$ einzuführen; denn die meisten Gleichungen werden dadurch besonders einfach.

Die Bedingung $\varepsilon = \delta$ hat übrigens eine einfache physikalische Bedeutung. Sie sagt nämlich nach (698), daß

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C} \quad (706)$$

ist. Nun ist aber nach § 30 und 85 der Quotient auf der linken Seite proportional dem Verhältnis der in der Längeneinheit der Drähte entwickelten Stromwärme zu der zugehörigen magnetischen Energie, der Quotient auf der rechten Seite nach § 48 mit derselben Konstante proportional dem Verhältnis der in der Längeneinheit des Dielektrikums entwickelten Stromwärme zu der zugehörigen elektrischen Energie. Ist also $\varepsilon = \delta$, so geht von der magnetischen und von der elektrischen Energie derselbe Bruchteil in den Drähten bzw. in der Isolation verloren. Bei der Fortpflanzung von Energie längs einer Leitung in einer be-

stimmten Richtung ist die Dichte der magnetischen Energie überall dieselbe wie die der elektrischen. Die Bedingung $\varepsilon = \delta$ besagt also, daß in diesem Falle überall ebensoviel Wärme in den Drähten wie im Dielektrikum entwickelt wird.

Zahlenbeispiel. Bei einer Freileitung (d. h. einer oberirdischen Leitung aus blankem Draht) von 4 mm Drahtstärke ist für 800 Hz:

$$\begin{aligned} R &= 3,2 \Omega/\text{km}, & G &= 1,0 \mu\text{S}/\text{km}, \\ L &= 1,9 \text{ mH}/\text{km}, & C &= 6,4 \text{ nF}/\text{km}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\text{tg } \varepsilon = \frac{R}{2\pi fL} = \frac{3,2}{2\pi \cdot 0,8 \cdot 1,9} = 0,33,$$

$$\text{tg } \delta = \frac{G}{2\pi fC} = \frac{1,0}{2\pi \cdot 0,8 \cdot 6,4} = 0,031$$

und

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon &= 18,5^{\circ}, & \cos \varepsilon &= 0,95, \\ \delta &= 1,8^{\circ}, & \cos \delta &= 1,00. \end{aligned} \right\} \quad (707)$$

Die bezogenen Maße einer solchen Freileitung können demnach — und zwar um so genauer, je höher die Frequenz ist — nach den Gleichungen (704) und (705) berechnet werden. In unserm Falle ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{2,9 + 0,3}{\text{Mm}} = \frac{3,2}{\text{Mm}}, \\ \alpha &= \frac{1,26^{\circ}}{\text{km}} \frac{f}{\text{kHz}} = \frac{1^{\circ}}{\text{km}}. \end{aligned} \right\} \quad (708)$$

Auf dickdrähtigen Freileitungen werden also hohe Töne nahezu ebenso stark gedämpft wie tiefe; das bezogene Winkelmaß dagegen ist der Frequenz proportional.

§ 217. **Dünndrätige Freileitung.** Je dünner die Drähte einer Freileitung sind, um so größer wird ihr bezogener Widerstand R im Vergleich zu ihrer bezogenen Induktanz ωL .

So gilt für 2-mm-Drähte bereits:

$$\begin{aligned} R &= 12,0 \Omega/\text{km}, & G &= 1,0 \mu\text{S}/\text{km}, \\ L &= 2,2 \text{ mH}/\text{km}, & C &= 5,4 \text{ nF}/\text{km}, \end{aligned}$$

also bei $f = 800$ Hz

$$\left. \begin{aligned} \text{tg } \varepsilon &= \frac{12,0}{5,03 \cdot 2,2} = 1,09; & \varepsilon &= 47,3^{\circ}; & \cos \varepsilon &= 0,68, \\ \text{tg } \delta &= \frac{1,0}{5,03 \cdot 5,4} = 0,037; & \delta &= 2,1^{\circ}; & \cos \delta &= 1,00. \end{aligned} \right\} \quad (709)$$

In solchen Fällen setzen wir genauer als vorher:

$$\cos \varepsilon \approx 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad \cos \delta \approx 1 - \frac{\delta^2}{2}; \quad (710)$$

$$\cos \frac{\varepsilon + \delta}{2} \approx 1 - \frac{(\varepsilon + \delta)^2}{8} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{8} - \frac{\varepsilon\delta}{4} - \frac{\delta^2}{8}, \quad (711)$$

und erhalten:

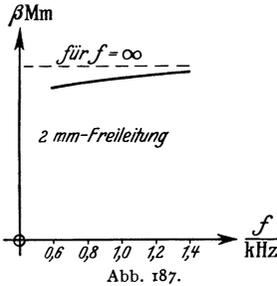
$$\begin{aligned} \alpha &\approx \omega \sqrt{LC} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{8} - \frac{\varepsilon\delta}{4} - \frac{\delta^2}{8} + \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\delta^2}{4} \right) \\ &= \omega \sqrt{LC} \left(1 + \frac{(\varepsilon - \delta)^2}{8} \right) \end{aligned} \quad (712)$$

und nach (703)

$$\beta = \left(\frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \right) \left(1 - \frac{(\varepsilon - \delta)^2}{8} \right). \quad (713)$$

Bei der dünndrätigen Freileitung müssen also Korrekturen hinzugefügt werden, die dem Quadrat der Differenz $\varepsilon - \delta$ proportional sind. Da diese mit steigender Frequenz abnimmt, werden auf dünndrätigen Freileitungen die hohen

Töne stärker gedämpft als die tiefen: Der Klang der übermittelten Sprache wird, wenn auch nicht merklich, „verzerrt“ (Abb. 187). Man nennt die hier auftretende Verzerrung zur Unterscheidung von anderen Arten der Verzerrung „Dämpfungs-“ oder „Amplitudenverzerrung“. Sie verschwindet bei der verzerrungsfreien Leitung ($\epsilon = \delta$).



Nach (712) und (713) ergeben die Näherungsgleichungen (704) und (705) des vorigen Paragraphen für die 4-mm-Leitung ($\epsilon = 18,5/57,3 = 0,32$, $\delta = 1,8/57,3 = 0,03$) bei 800 Hz ein um etwa 1% zu großes Dämpfungsmaß und ein um etwa 1% zu kleines Winkelmaß.

§ 218. Kabel. Während bei der Freileitung im allgemeinen nur das Korrektionsglied des Dämpfungsmaßes von der Frequenz abhängt, ist beim Kabel die Frequenzabhängigkeit des Hauptglieds ziemlich beträchtlich. Da der Widerstand wegen des geringen Durchmessers und des geringen Abstands der Drähte nicht klein, sondern im Gegenteil sogar groß gegen die Induktanz ist, ist jetzt der Verlustwinkel ϵ groß.

So mißt man z. B. beim 0,9-mm-Kabel

$$R = 54,6 \Omega/\text{km}, \quad G = 0,6 \mu\text{S}/\text{km}, \\ L = 0,7 \text{ mH}/\text{km}, \quad C = 33,5 \text{ nF}/\text{km},$$

also für 800 Hz

$$\text{tg } \epsilon = \frac{54,6}{5,03 \cdot 0,7} = 15,5 \quad \text{und} \quad \epsilon = 86,3^\circ. \tag{714}$$

In diesem Falle führt man statt der kleinen Induktanz ωL besser den großen Widerstand R nach der Gleichung $L = R/(\omega \text{tg } \epsilon)$ und statt des Verlustwinkels ϵ seinen Komplementwinkel $\epsilon' = 90^\circ - \epsilon$ ein. Dann erhält man:

$$\beta = \frac{\sqrt{\omega R C}}{\sqrt{\sin \epsilon \cos \delta}} \sin \frac{\epsilon + \delta}{2} = \frac{\sqrt{\omega R C}}{\sqrt{\cos \epsilon' \cos \delta}} \sin \left(45^\circ - \frac{\epsilon' - \delta}{2} \right) \tag{715}$$

und ebenso

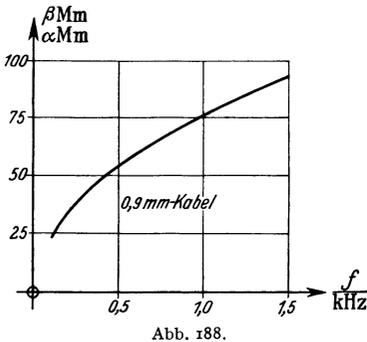
$$\alpha = \frac{\sqrt{\omega R C}}{\sqrt{\cos \epsilon' \cos \delta}} \cos \left(45^\circ - \frac{\epsilon' - \delta}{2} \right) \tag{716}$$

oder bei kleinem ϵ' und δ

$$\alpha = \sqrt{\omega R C} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\epsilon' - \delta}{2} + \sin \frac{\epsilon' - \delta}{2} \right) = \sqrt{\frac{\omega R C}{2}} \left(1 + \frac{\epsilon' - \delta}{2} \right) \tag{717}$$

und

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega R C}{2}} \left(1 - \frac{\epsilon' - \delta}{2} \right). \tag{718}$$



In erster Näherung ist demnach bei Kabeln das Dämpfungsmaß ebenso groß wie das Winkelmaß. Während bei den dickdrähtigen Freileitungen die Dämpfung frequenzunabhängig, das Winkelmaß der Frequenz proportional war, wachsen bei den Kabeln beide Maße proportional der Wurzel aus der Frequenz (Abb. 188): die hohen Töne werden merklich stärker gedämpft als die tiefen, die Kabelsprache hat einen etwas dumpfen oder dunklen Klang.

Bei dem 0,9 mm-Kabel ist näherungsweise

$$\beta \approx \alpha \approx \frac{76}{\text{Mm}} \sqrt{\frac{f}{\text{kHz}}} = \frac{4,3^0}{\text{km}} \sqrt{\frac{f}{\text{kHz}}}. \tag{719}$$

Die Korrektur gemäß (717) und (718) beträgt für 800 Hz bei β etwa - 3%, bei α etwa + 3%.

§ 219. Der Wellenwiderstand der gleichmäßigen Leitung. Führt man auch beim Wellenwiderstand (694) die Verlustwinkel ε und δ ein, so erhält man allgemein

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\frac{\cos \delta}{\cos \varepsilon}} \angle -\frac{\varepsilon - \delta}{2}. \quad (720)$$

Bei einer dickdrätigen Freileitung, wo ε und δ für Sprechfrequenzen kleine Größen sind, ist der Betrag des Wellenwiderstands annähernd unabhängig von der Frequenz gleich $\sqrt{L/C}$. Der Rest von Frequenzabhängigkeit liegt in dem Faktor

$$\sqrt{\frac{\cos \delta}{\cos \varepsilon}} \approx 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \approx 1 + \frac{R^2}{4 \omega^2 L^2}. \quad (721)$$

Sie ist bei Sprechfrequenzen ziemlich gering und besteht in einem Kleinerwerden des Betrags mit steigender Frequenz.

Bei der 4-mm-Leitung z. B. wird für 800 Hz

$$|\mathfrak{Z}| = \sqrt{\frac{1,9 \text{ mH}}{6,4 \text{ nF}}} \left(1 + \frac{0,32^2}{4}\right) \Omega = 545 \cdot 1,026 \Omega = 560 \Omega; \quad (722)$$

für 1600 Hz ergibt sich dagegen der Wert 549 Ω , der nur wenig größer ist als der Grenzwert für unendlich hohe Frequenz 545 Ω .

Beträchtlicher ist die Frequenzabhängigkeit der Phase des Wellenwiderstands:

$$-\frac{\varepsilon - \delta}{2} \approx -\frac{R}{2 \omega L}. \quad (723)$$

Für niedrige Frequenzen hat der Wellenwiderstand einer Freileitung hiernach den Charakter einer Kapazität (vgl. die Tabelle im § 220). Je dickdrätiger sie ist, um so mehr wird sie zu einem reinen Widerstand, und zwar besonders bei hohen Frequenzen.

Bei der 4-mm-Leitung ist die Phase für 800 Hz gleich $-8,4^\circ$, für 1600 Hz gleich $-4,3^\circ$.

Beim Kabel führen wir in die Gleichung (720) statt der kleinen Induktanz ωL wieder den viel größeren Widerstand R nach der Gleichung $L = R/(\omega \text{tg } \varepsilon)$ ein und erhalten

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{R}{\omega C}} \sqrt{\frac{\cos \delta}{\sin \varepsilon}} \angle -\frac{\varepsilon - \delta}{2} = \sqrt{\frac{R}{\omega C}} \sqrt{\frac{\cos \delta}{\cos \varepsilon'}} \angle -45^\circ + \frac{\varepsilon' + \delta}{2}. \quad (724)$$

Der Wellenwiderstand des Kabels nimmt daher in viel stärkerem Maße als der der Freileitung mit steigender Frequenz ab. Seine Phase liegt bei kleinen Verlustwinkeln ε' und δ etwas oberhalb von -45° . Die Kabel haben also bei Sprechfrequenzen stärker als die Freileitungen den Charakter von Kapazitäten, daher auch die stärkere Abnahme ihres Wellenwiderstands mit steigender Frequenz.

Beim 0,9-mm-Kabel wird

$$|\mathfrak{Z}| \approx \sqrt{\frac{54,6 \Omega}{2 \pi f \cdot 33,5 \text{ nF}}} = 509 \sqrt{\frac{\text{kHz}}{f}} \Omega. \quad (725)$$

In Abb. 189 ist der Frequenzgang des Wellenwiderstands eines Kabels durch eine „Ortskurve“ in der komplexen Ebene dargestellt (vgl. § 120).

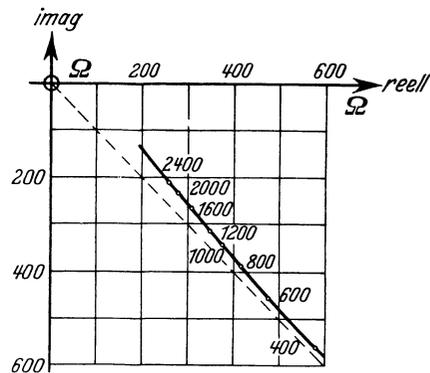


Abb. 189.

§ 220. Zahlenwerte des Dämpfungsmaßes und des Wellenwiderstands von Freileitungen und Kabeln. Über die Größe des Wellenwiderstands und des Dämpfungsmaßes bei Freileitungen und Kabeln unterrichtet die folgende Tabelle (sie gilt für 800 Hz):

Freileitungen (Bronze und Hartkupfer)			Kabel (Papier-Luft-Isolation)		
Draht- stärke	Bezogene Dämpfung	Wellen- widerstand	Draht- stärke	Bezogene Dämpfung	Wellen- widerstand (Betrag)
mm	$\frac{\text{Neper}}{\text{Mm}}$	Ω	mm	$\frac{\text{Neper}}{\text{Mm}}$	Ω
2,0	8,7	780 $\angle - 23^{\circ} 6'$	0,6	98	880
2,5	6,5	675 $\angle - 17^{\circ} 30'$	0,8	74	650
3,0	4,9	615 $\angle - 13^{\circ} 48'$	0,9	66	570
4,0	3,2	560 $\angle - 8^{\circ} 20'$	1,0	59	510

Sie zeigt zunächst, wieviel geringer die Reichweiten der Kabel sind als die der Freileitungen. Eine Dämpfung um 3,5 Neper entspricht ja (§ 169) bereits einer Schwächung der Energie auf rund den tausendsten Teil; und die einer Dämpfung von 98 Neper entsprechende Energieschwächung könnte nur durch eine Zahl mit 85 Nullen hinter dem Dezimalkomma ausgedrückt werden.

Auf Freileitungen ist ohne weiteres Fernverkehr möglich. Dagegen kann man sich über gewöhnliche gleichmäßige Kabel nur auf geringe Entfernungen, z. B. im Ortsverkehr, verständigigen. Beim Fernsprechen auf nur wenig größere Entfernungen müssen besondere Hilfsmittel, vor allem Pupinspulen oder Verstärker oder beides zugleich, in die Kabel eingebaut werden.

Wie die Tabelle weiter erkennen läßt, stimmen die Wellenwiderstandsbeträge aller Leitungen der Größenordnung nach miteinander überein. Dies erklärt sich folgendermaßen: Der Wellenwiderstand ist, wie wir sehen werden, gleich dem Verhältnis der Spannung zum Strom, wenn man diese Größen für eine einzelne Welle berechnet (§ 228); nach der Spannungsdefinition und dem Durchflutungssatz ist er daher auch proportional dem Verhältnis der elektrischen Feldstärke zu der magnetischen. Nun ist aber bei gegebener Leistung die elektrische Feldstärke umgekehrt proportional $\sqrt{\epsilon_0}$, die magnetische umgekehrt proportional $\sqrt{\mu_0}$; für den Wellenwiderstand ist also maßgebend die universelle Konstante

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{1,256 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ s}}{0,886 \cdot 10^{-13} \text{ s}/\Omega}} = 377 \Omega. \quad (726)$$

Von der Größenordnung dieses Widerstandes ist aber tatsächlich der in der Tabelle angegebene Widerstand.

§ 221. Frequenzabhängigkeit des Kurzschluß- und Leerlaufwiderstands einer Freileitung. Während der Wellenwiderstand einer Leitung im allgemeinen nur wenig von der Frequenz abhängt, zeigt ihr Scheinwiderstand selbst in dem einfachsten Fall der dickdrähtigen Freileitung einen recht verwickelten Frequenzgang. Wir wollen dies nur für die beiden ausgezeichneten Scheinwiderstände, den Leerlauf- und den Kurzschlußwiderstand nachweisen.

Um die Frequenzabhängigkeit der Widerstände \mathfrak{B}^l und \mathfrak{B}^k einigermaßen einfach an Hand einer Ortskurve diskutieren zu können, wollen wir voraussetzen, daß das Dämpfungsmaß b der Leitung von der Frequenz ganz unabhängig ist, während sich ihr Winkelmaß a der Frequenz ω proportional ändert. Bei einer 4-mm-Leitung trifft diese Voraussetzung bei den wichtigsten Frequenzen ja auf etwa 1% zu. Als unabhängige Veränderliche sehen wir der Ein-

fachheit halber nicht die Frequenz, sondern das der Frequenz proportionale Winkelmaß a an.

Nach § 157 gilt

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}' &= \mathfrak{B} \operatorname{Ctg} g, \\ \mathfrak{B}^k &= \mathfrak{B} \operatorname{Tg} g. \end{aligned} \right\} \quad (727)$$

Wir wollen uns zunächst damit begnügen, die Quotienten $\mathfrak{B}'/\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^k/\mathfrak{B}$, also die beiden Funktionen $\operatorname{Ctg} g$ und $\operatorname{Tg} g$ zu diskutieren. Für diese findet man im Anhang 5 d) Rechenregeln, die uns gestatten, sie durch die einzige Gleichung

$$\xi + j\eta = \frac{\operatorname{Sin} 2b \mp j \sin 2a}{\operatorname{Cos} 2b \mp \cos 2a} \quad (728)$$

darzustellen. ξ und η sind die Koordinaten eines Punkts der gesuchten Ortskurve; das obere Zeichen gilt für den Leerlauf-, das untere für den Kurzschlußwiderstand. Wir trennen das Reelle von dem Imaginären und schreiben:

$$\xi = \frac{\operatorname{Sin} 2b}{\operatorname{Cos} 2b \mp \cos 2a}, \quad (729)$$

$$\eta = \mp \frac{\sin 2a}{\operatorname{Cos} 2b \mp \cos 2a} = \mp \frac{\sin 2a}{\operatorname{Sin} 2b} \xi. \quad (730)$$

Ähnlich wie im § 118 müssen wir aus diesen beiden Gleichungen den „Parameter“ a entfernen, um die gesuchte Gleichung zwischen ξ und η zu erhalten. Zu diesem Zwecke schreiben wir:

$$\left. \begin{aligned} \mp \xi \cos 2a &= \operatorname{Sin} 2b - \xi \operatorname{Cos} 2b, \\ \mp \xi \sin 2a &= \eta \operatorname{Sin} 2b, \end{aligned} \right\} \quad (731)$$

quadrieren und addieren und erhalten

$$\xi^2 = \operatorname{Sin}^2 2b - 2\xi \operatorname{Cos} 2b \operatorname{Sin} 2b + \xi^2 \operatorname{Cos}^2 2b + \eta^2 \operatorname{Sin}^2 2b$$

oder auch

$$\xi^2 + \eta^2 - 2\xi \operatorname{Ctg} 2b + 1 = 0. \quad (732)$$

Das ist die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt jedoch nicht mit dem Nullpunkt zusammenfällt. Geben wir ihr die Form

$$\begin{aligned} &(\xi - \operatorname{Ctg} 2b)^2 + \eta^2 \\ &= \operatorname{Ctg}^2 2b - 1 = \frac{1}{\operatorname{Sin}^2 2b}, \end{aligned} \quad (733)$$

so erkennen wir, daß der Mittelpunkt des Kreises auf der ξ -Achse in der Entfernung $\operatorname{Ctg} 2b$ vom Nullpunkt liegt und daß sein Radius r gleich $1/\operatorname{Sin} 2b$ ist. Die Länge der beiden vom Nullpunkt ausgezogenen

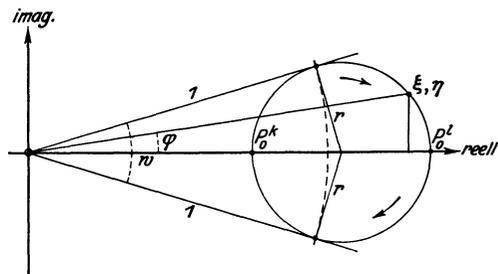


Abb. 190.

Tangenten an den Kreis ist nach Abb. 190 gleich $\sqrt{\operatorname{Ctg}^2 2b - 1/\operatorname{Sin}^2 2b}$, also gleich 1.

Für den Gesichtswinkel w , unter dem der Kreis vom Nullpunkt aus erscheint, gilt nach Abb. 190 die Beziehung

$$\sin \frac{w}{2} = \frac{1}{\operatorname{Sin} 2b} \cdot \frac{1}{\operatorname{Ctg} 2b} = \frac{1}{\operatorname{Cos} 2b}. \quad (734)$$

Bei sehr kleiner Dämpfung erscheint also der Kreis unter einem Gesichtswinkel von 180° ; er hat dann einen unendlich großen Radius und fällt mit der η -Achse zusammen. Je mehr die Dämpfung steigt, um so kleiner wird der Radius des Kreises und um so kleiner sieht man ihn vom Nullpunkt aus (Abb. 191). Es gehört zu

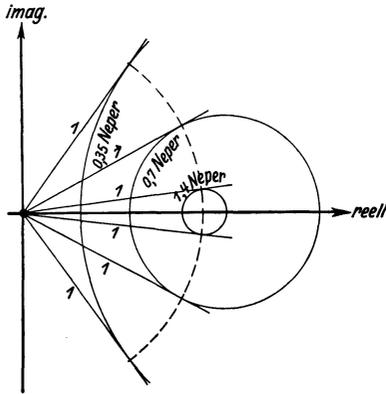


Abb. 191.

b	r	Mittelpunktsabstand $\text{Ctg } 2b$	w
0,35	1,318	1,66	$105^\circ 40'$
0,7	0,525	1,13	$55^\circ 30'$
1,4	0,122	1,01	$13^\circ 50'$

Wie die Frequenzen auf dem Umfang des Kreises verteilt sind, läßt sich aus der Gleichung (730) entnehmen. Nach ihr ist (vgl. Abb. 190)

$$\frac{\eta}{\xi} = \text{tg } \varphi = \mp \frac{\sin 2a}{\text{Cin } 2b} = \mp r \sin 2a. \quad (735)$$

Beachtet man, daß für $a = \omega = 0$ $\mathfrak{W}^l/\mathfrak{Z} = \text{Ctg } b$, $\mathfrak{W}^k/\mathfrak{Z} = \text{Ctg } b$ ist, so erkennt man, daß mit wachsender Frequenz die beiden die Quotienten $\mathfrak{W}^l/\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{W}^k/\mathfrak{Z}$ darstellenden Punkte im Sinne des Uhrzeigers auf dem Kreise herumlaufen, der eine von P_0^l aus, der andere von P_0^k aus. Jedesmal wenn $2a$ um 180° , also a um 90° gewachsen ist, haben die Punkte einen Halbkreis durchlaufen; für $a = 45^\circ, 135^\circ \dots$ fallen nach Abb. 190 die darstellenden Punkte mit einem der Punkte zusammen, in denen die vom Nullpunkt aus gezogenen Tangenten den Kreis berühren. Die Punkte, die den Winkelmaßen a und $90^\circ - a$ entsprechen, liegen jedesmal auf demselben Vektor; d. h. die zugehörigen Quotienten $\mathfrak{W}^l/\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{W}^k/\mathfrak{Z}$ haben dieselbe Phase.

Die Scheinwiderstände \mathfrak{W}^l und \mathfrak{W}^k selbst erhält man leicht, indem man die Längen der Vektoren mit dem Betrag des Wellenwiderstands multipliziert und sie um seine Phase dreht.

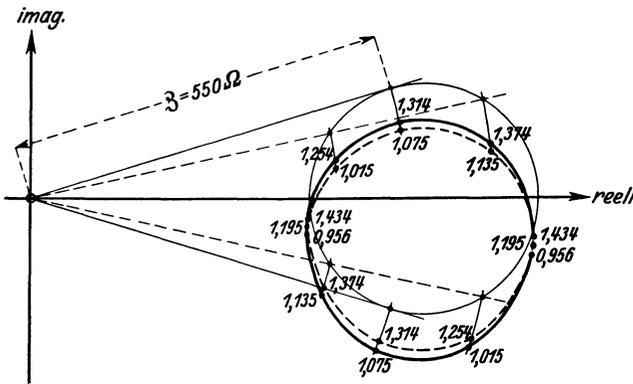


Abb. 192.

Gemäß Abb. 192 ergeben sich Spiralen, die für hohe Frequenzen in den Kreis der Gleichung (733) einlaufen.

Man erkennt, daß sich die Scheinwiderstände \mathfrak{W}^l und \mathfrak{W}^k mit der Frequenz nach Betrag und Phase wellenartig ändern. In gewissen Frequenzbereichen (insbesondere bei niedrigen Frequenzen) ist der Kurzschlußwiderstand, in anderen der Leerlaufwiderstand dem Betrage nach der kleinere. Bei hoher Dämpfung fallen die beiden Scheinwiderstände mit dem Wellenwiderstand zusammen.

Die Frequenzteilung auf den Spiralen ist nur bei sehr hohem Dämpfungsmaß annähernd gleichmäßig. Im allgemeinen liegen ihre Punkte auf der dem Anfangspunkt zugewandten Seite des Kreises dichter. Dies bedeutet, daß die Minima der Scheinwiderstände flacher sind als ihre Maxima. Daraus folgt u. a., daß es bei der Messung der Scheinwiderstände \mathfrak{W}^l und \mathfrak{W}^k in der Nähe der Maxi-

malwerte mehr als in der Nähe der Minimalwerte auf die Konstanz der Meßfrequenz ankommt.

Einem vollen Umlauf der Spiralen entspricht jedesmal eine Änderung von a um 180° . Die zugehörige Änderung der Frequenz (die Frequenzstufe) ist für eine 4-mm-Freileitung nach (708) gleich

$$f = \frac{180^\circ \text{ km}}{1,26^\circ l} \text{ kHz} = \frac{143}{l/\text{km}} \text{ kHz}. \tag{736}$$

Ebenso groß ist die scheinbare „Wellenlänge“ der Frequenzkurven von \mathfrak{B}^1 und \mathfrak{B}^2 ; sie ist um so kürzer, je länger die Leitung ist — ein in mancher Hinsicht wichtiges Ergebnis.

Abb. 192 ist für eine 4-mm-Leitung von 300 km Länge gezeichnet (Frequenz in kHz). Sie zeigt, daß selbst bei einer längeren Leitung, also kleinen Frequenzstufe der Phasengang des Wellenwiderstands [Gleichung (723)] nicht ganz zu vernachlässigen ist.

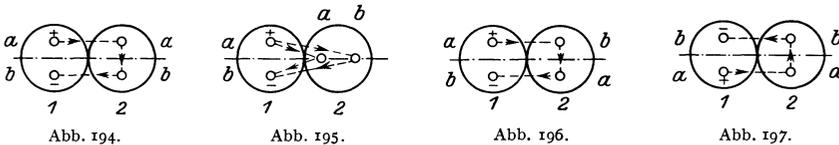
§ 222. Gegenseitige Beeinflussung. Ist eine größere Zahl von Fernsprechdoppelleitungen auf Gestängen oder in einem Kabel vereinigt, so können Gespräche, die in einer Doppelleitung geführt werden, häufig auch in benachbarten Doppelleitungen noch wahrgenommen werden. Denn zwischen den Leitungen gehen Verschiebungsströme über; außerdem werden durch die in ihnen fließenden Wechselströme in den Nachbarleitungen Spannungen induziert.

Bei langen Freileitungen kreuzt man die Drähte der Doppelleitungen, wie es in der Abb. 193 angedeutet ist; dann ruft z. B. ein von einer andern Doppelleitung herrührendes magnetisches Wechselfeld in den durch ungerade Zahlen gekennzeichneten Bereichen die entgegengesetzte EMK hervor wie in den durch gerade Zahlen gekennzeichneten — vorausgesetzt, daß die induzierende Leitung nicht in derselben Weise gekreuzt ist und daß die Kreuzungspunkte nicht zu weit voneinander entfernt sind.



Abb. 193.

Bei den Kabeln ist die Gefahr einer Beeinflussung der einzelnen Doppelleitungen durch ihre Nachbarleitungen wegen des geringen Abstandes der Drähte noch größer als bei den Freileitungen. Wird z. B. in der Doppelleitung 1 (Abb. 194) gesprochen, und hat in einem Augenblick der Leiter $1a$ ein höheres Potential als der Leiter $1b$, so nimmt durch den Übergang von Verschiebungsströmen auch der Leiter $2a$ ein höheres Potential an als der Leiter $2b$. Außerdem tritt ein großer Teil der magnetischen Kraftlinien der Leitung 1 auch durch die Leitung 2; das Gespräch in 1 wird also auch magnetisch auf 2 übertragen. Man hat, wie man sagt, durch elektrische und magnetische Kopplung „Nebensprechen“.



Die Stärke dieses Nebensprechens hängt von der Anordnung der Doppelleitungen ab. Bei der Anordnung Abb. 195 z. B. ist sie offenbar verschwindend gering; bei der Anordnung Abb. 196 dagegen ist sie ebenso groß wie bei der Anordnung Abb. 194, nur erhält jetzt der Leiter $2b$ durch die Verschiebungsströme das höhere Potential. Könnte man die Leiter bei einem Kabel an ebenso vielen Stellen nach Abb. 194 wie nach Abb. 196 anordnen, so höbe sich das Nebensprechen auf, soweit es von Überbrückungen und Induktionswirkungen an diesen Stellen herrührt.

Dies ist beim Verdrillen der Doppelleitungen zu beachten. Verdrillt man sie mit derselben „Dralllänge“ (mit derselben „Ganghöhe“), so geht beispielsweise die Anordnung der Abb. 194 nicht in die der Abb. 196, sondern in die der Abb. 197

über, bei der die Einwirkung ungeändert ist. Für die Wirksamkeit der Verdrillung ist es also wesentlich, daß sie mit wechselndem Drall ausgeführt wird.

Bei theoretischen Betrachtungen ist es üblich, die vier Leiter immer in derselben Lage zu zeichnen. Dann kann die elektrische Kopplung gemäß Abb. 194 durch zwei dielektrische Leitwerte (oder Kapazitäten) gemäß Abb. 198, dagegen die elektrische Kopplung gemäß Abb. 196 durch zwei dielektrische Leitwerte (oder Kapazitäten) gemäß Abb. 199 dargestellt werden. Daraus geht hervor, daß das Nebensprechen vollkommen aufgehoben würde, wenn es möglich wäre, die vier in den Abb. 198 und 199 angedeuteten Teilkapazitäten einander gleich zu machen.

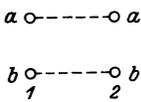


Abb. 198.

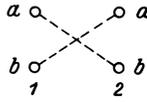


Abb. 199.

§ 223. Paar-, Vierer- und Achterverseilung.

Bei der „Paarverseilung“ bildet man die einzelnen „Lagen“ aus Doppelleitungen, die in sich mit verschiedenem Drall verdrillt sind. Bei der „Viererverseilung“ dagegen bildet man sie aus Elementargruppen von jedesmal vier in sich verdrillten Adern.

Die Vierer können in der Hauptsache nach zwei Methoden hergestellt werden. Beim „Sternvierer“ (Abb. 200) werden die vier Adern jeder Gruppe unmittelbar mit einem bestimmten Drall verdrillt. Die Adern jeder Doppelleitung ordnet man dabei in der Regel einander diagonal gegenüber an. Beim „DM-Vierer“ (Dieselhorst-Martin-Vierer) bildet man die Vierer gemäß Abb. 201 durch nochmalige Verdrillung zweier in sich bereits verdrillter Doppeladern; und zwar wählt man für die drei Verdrillungen verschiedene Dralle. Der DM-Vierer ist hiernach ziemlich unregelmäßig aufgebaut:

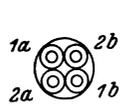


Abb. 200.

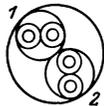


Abb. 201.

Schneidet man ihn durch, so können die Querschnittsmittelpunkte der Adern wie beim Sternvierer annähernd in den Ecken eines Quadrates sitzen; sie können aber auch ganz anders angeordnet sein, z. B. in einer geraden Linie liegen.

Bei der Paarverseilung und den beiden genannten Viererverseilungen wird der im Kabel zur Verfügung stehende Raum verschieden gut ausgenutzt.

Wie die Erfahrung gezeigt hat, und wie man sich auch theoretisch leicht erklären kann, verhalten sich die Kabelquerschnitte, die bei gleicher bezogener Kapazität zu der Unterbringung der gleichen Aderzahl ausreichen, bei der Paar-, Stern- und DM-Verseilung etwa wie 0,96 : 0,75 : 1.

Die Sternverseilung ist also die hinsichtlich der Raumausnutzung günstigste Verseilung. Ein weiterer Vorzug liegt in dem ziemlich gleichmäßig zylindrischen Querschnitt der Sternvierer, der allerdings im Kabel unter dem Druck der Nachbarvierer nicht erhalten bleibt. Für Seekabel, die einen hohen Wasserdruck auszuhalten haben, werden besonders häufig Sternvierer verwendet.

Das innere Nebensprechen zwischen den Doppelleitungen des DM-Vierers kann durch Verdrillung der Adern mit verschiedenem Drall in ziemlich hohem Maße, wenn auch nicht vollständig, aufgehoben werden.

Beim Sternvierer ist etwas Entsprechendes natürlich nicht möglich. Bei ihm ist jedoch das innere Nebensprechen infolge der schon erwähnten diagonalen Anordnung der beiden Paare (nach der der Sternvierer seinen Namen erhalten hat) an sich gering. Denn bei ideal genauer Herstellung kann nach Abb. 200 ein Gespräch in der Doppelleitung 1 die Doppelleitung 2 weder elektrisch noch magnetisch beeinflussen.

Der Hauptnachteil der Sternvierer kann erst im § 265 besprochen werden.

Neuerdings verwendet man bei den Fernkabeln auch Achterverseilung (Abb. 202); und zwar werden vier in sich verdrillte Doppelleitungen zu einem „Doppelstern“ verseilt.

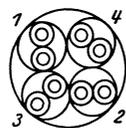


Abb. 202.

§ 224. **Erhöhung der Übertragungsfähigkeit gleichmäßiger Leitungen.** Aus § 165 geht hervor, daß zur Erhöhung der Übertragungsfähigkeit eines Vierpols vor allem sein Dämpfungsmaß herabgesetzt werden muß. Nun hängt nach § 216 die Dämpfung einer gleichmäßigen Leitung teils von den Verlusten in den Drähten, teils von den Verlusten im Dielektrikum ab; bei allen praktisch gebrauchten Leitungen überwiegen aber bei weitem die Drahtverluste, so daß man einfach

$$\beta \approx \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \tag{737}$$

schreiben kann. Daraus geht hervor, daß bei Leitungen gegebener Leiterstärke, also gegebenem Widerstand und gegebener Kapazität, die Übertragungsfähigkeit nur durch Erhöhung der Induktivität verbessert werden kann.

Auf dieser einfachen Überlegung, die von Heaviside herrührt, beruhen die von Krarup und Pupin angegebenen Maßnahmen der Umhüllung der stromführenden Kupferleiter mit einer Schicht ferromagnetischen Materials und der Einschaltung von Spulen in die Leitung.

Da die elektrische Eigenschaft der Induktivität der mechanischen Eigenschaft der Trägheit entspricht und die „Last“ der trägen Masse proportional ist, bezeichnet man vielfach, besonders in England und Amerika, die Leitungen mit erhöhter Induktivität als stetig oder unstetig „belastete“ Leitungen.

§ 225. **Krarupfernsprechkabel.** Bei den sogenannten „Krarupkabeln“¹ sucht man die Induktivität durch Umspinnen oder Umwickeln des Kupferdrahts mit dünnem Eisendraht oder Eisenband zu erhöhen. Der Bespinnungsdraht wird meist 0,2 oder 0,3 mm dick genommen; zu dünner Draht ließe sich nicht mehr gleichmäßig aufbringen.

Ob man mit der Krarupumhüllung Erfolg hat, hängt vor allem von der Höhe der zu übertragenden Frequenzen ab. Da die Kosten eines Kabels bei Erhöhung der Gesamtdicke der Leiter stark steigen, vergleicht man den eisenumspinnenen Draht mit einem Reinkupferdraht gleichen Außendurchmessers; man prüft, ob der Wegfall der äußeren gut leitenden Kupferschicht nicht etwa mehr schadet, als die Eisenhülle nützt.

Nach § 218, Gleichung (718) kann man für die Dämpfung des hüllenlosen Kabels näherungsweise setzen:



$$\beta = \sqrt{\frac{\omega R C}{2} \left(1 - \frac{\omega L}{2R}\right)} \approx \sqrt{\frac{\omega C}{2} (R - \omega L)}. \tag{738}$$

Abb. 203.

Da C konstant ist, kommt es darauf an, festzustellen, ob die Differenz $R - \omega L$ mit Vergrößerung der Eisenmanteldicke m (Abb. 203) überhaupt abnimmt oder vielleicht gar zunimmt, d. h. ob dR/dm größer oder kleiner als $d(\omega L)/dm$ ist. Nennen wir den Drahtdurchmesser $2r$, die Leitfähigkeit des Kupfers \varkappa , den bezogenen Widerstand des nicht umhüllten Kupferdrahts R_0 , so ist bei kleinem m der bei der geringen Leitfähigkeit des parallel geschalteten Eisenmantels hauptsächlich in Betracht kommende Widerstand des umhüllten Kupferkerns, wenn wir zunächst von den Hysterisis- und Wirbelstromverlusten absehen:

$$R = \frac{2}{\varkappa} \frac{1}{(r - m)^2} \pi \approx \frac{2}{\varkappa r^2 \pi} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = \frac{R_0}{1 - \frac{2m}{r}}, \tag{739}$$

so daß

$$\frac{dR}{dm} = \frac{2}{r} \frac{2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^2} R_0 \approx \frac{2R_0}{r}. \tag{740}$$

Andererseits ist die magnetische Feldstärke im Eisen annähernd gleich $|\mathfrak{H}|/2\pi r$; der magne-

¹ Krarup, C. E.: ETZ 23, 344 (1902).

tische Fluß je Längeneinheit nimmt wegen der Eisenhülle um $(\mu - \mu_0) \frac{m}{2\pi r}$ zu, und die bezogene Induktivität für die Hin- und Rückleitung zusammen ist daher nach § 90 überschlächlich gleich

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\ln \frac{a}{r} + \frac{1}{4} \right) + (\mu - \mu_0) \frac{m}{\pi r} = \frac{\mu_0}{\pi} \left(\ln \frac{a}{r} + \frac{1}{4} + \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \frac{m}{r} \right). \quad (74I)$$

Da

$$\frac{d(\omega L)}{dm} = \frac{\omega(\mu - \mu_0)}{\pi r} \approx \frac{2\mu f}{r}, \quad (742)$$

bleibt die Hülle nach (740) ohne Einfluß, wenn

$$R_0 = \mu f. \quad (743)$$

Für eine Tonfrequenz von 800 Hz z. B. und eine Drahtstärke von 1 mm ($R_0 = 44 \Omega/\text{km}$) bedarf es hiernach einer Anfangspermeabilität von mindestens

$$\mu = \frac{44 \Omega}{\text{km}} \frac{\text{s}}{800} = 55 \frac{\text{mH}}{\text{km}} = 44 \mu_0. \quad (744)$$

Die Hysteresis- und Wirbelstromverluste gestalten das Ergebnis noch ungünstiger. Man erkennt daraus, daß eine Eisenhülle nur bei höheren Frequenzen Erfolg bringt oder dann, wenn ein Eisen mit ganz besonders hoher Anfangspermeabilität und geringen Verlusten zur Verfügung steht.

Die Krarupkabel sind hauptsächlich als unterseeische Kabel verwendet worden. Bei dem 1923 gelegten 13,6 km langen Bodenseefernsprechkabel Romanshorn—Friedrichshafen z. B. sind die 1,6 mm dicken (zusammengesetzten) Leiter mit ausgeglühtem Weicheisendraht von 0,3 mm Durchmesser besponnen. Für 800 Hz und die Stammleitungen (§ 264) gelten die folgenden Werte:

$$\left. \begin{aligned} R &= 17,38 \frac{\Omega}{\text{km}}, & G &= 2,2 \frac{\mu\text{S}}{\text{km}}, \\ L &= 14,7 \frac{\text{mH}}{\text{km}}, & C &= 48,6 \frac{\text{nF}}{\text{km}}, \end{aligned} \right\} \quad (745)$$

$$\beta = 557 \Omega \angle -6,4^\circ, \quad \gamma = (16,0 + j \cdot 133,7) \frac{1}{\text{Mm}}. \quad (746)$$

Die Induktivität ist also etwa auf das 25fache der Induktivität des gewöhnlichen Kabels erhöht. Die Permeabilität der Eisenhülle beträgt rund $170 \mu_0$.

Der bezogene Widerstand R ist bei den Krarupkabeln wegen der Hysteresis- und Wirbelstromverluste besonders stark frequenzabhängig¹.

§ 226. Kraruptelegraphenkabel. Die Erfahrung und die Theorie (vgl. § 337) zeigen, daß beim Telegraphieren wesentlich niedrigere Frequenzen als beim Fernsprechen übertragen werden. Bei 50 Baud (§ 128) z. B. liegen die wichtigsten Frequenzen in der Gegend von 25 Hz. Hieraus und aus dem im vorigen Paragraphen Gesagten ergibt sich, daß beim Telegraphieren an die Anfangspermeabilität des Materials noch höhere Anforderungen gestellt werden müssen als beim Fernsprechen. Für eine Drahtstärke von 1 mm und 25 Hz ergibt sich z. B. nach (743) $\mu = 1760 \text{ mH/km}$. Man umhüllt deshalb erst in der neueren Zeit auch die Drähte der langen unterseeischen Telegraphenkabel mit Eisen; erst seit der Entdeckung von Legierungen besonders hoher Anfangspermeabilität, insbesondere der Legierung „Permalloy“² (ursprünglich 78½ % Ni, 21½ % Fe) lohnt sich diese Maßnahme.

1924 . . . 26 ist auf dem Wege New York—Azoren—Emden das erste Permalloykabel ausgelegt worden; auf ihm sind Telegraphiergeschwindigkeiten von etwa 1500 Buchst/m möglich. Die praktisch erreichte Anfangspermeabilität beträgt etwa $2000 \mu_0$.

¹ Zur Theorie der Krarupkabel vgl. U. Meyer: Elektr. Nachr.-Techn. 1, 152, 169 (1924); K. W. Wagner: Ebenda 157.

² Arnold, H. D., u. G. W. Elmen: El. Review 92, 928 (1923).

§ 227. **Verteilung von Spannung und Strom auf einer Leitung.** Die gleichmäßigen Leitungen unterscheiden sich in einer Beziehung nicht unwesentlich von vielen anderen Vierpolen. Sie sind Gebilde mit verteilterm Widerstand, verteilter Induktivität, Ableitung und Kapazität. Infolgedessen sind auch die Spannung und der Strom auf ihnen in besonderer Weise, nämlich wellenartig, verteilt, und es ist eine wichtige Aufgabe der Leitungstheorie, diese Verteilung im einzelnen zu untersuchen.

Wir bezeichnen die Entfernung eines beliebigen Punktes auf dem einen Draht einer Leitung von dem zugehörigen Anfangspunkt \mathfrak{r} mit x , die Spannung und den Strom an derselben Stelle mit \mathfrak{U} und \mathfrak{I} . Dann können wir nach § 164 für das Übertragungsmaß g des Vierpols von der Länge x das Produkt γx setzen, während sein Wellenwiderstand \mathfrak{Z} von x unabhängig ist, und erhalten daher durch Umkehrung der Vierpolgleichungen gemäß § 146 und 155 die beiden Grundgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U} &= \mathfrak{C} \cos \gamma x \cdot \mathfrak{U}_1 - \mathfrak{Z} \mathfrak{S} \sin \gamma x \cdot \mathfrak{I}_1, \\ -\mathfrak{I} &= \frac{1}{\mathfrak{Z}} \mathfrak{S} \sin \gamma x \cdot \mathfrak{U}_1 - \mathfrak{C} \cos \gamma x \cdot \mathfrak{I}_1, \end{aligned} \right\} \quad (747)$$

aus denen man die komplexe Spannung und den komplexen Strom als Funktion der Entfernung x berechnen kann.

Die Gleichungen (747) sind ursprünglich durch Integration der Differentialgleichungen

$$-\frac{d\mathfrak{U}}{dx} = (R + j\omega L) \mathfrak{I}, \quad -\frac{d\mathfrak{I}}{dx} = (G + j\omega C) \mathfrak{U} \quad (748)$$

gefunden worden, von denen die erste unmittelbar aus der Maschen-, die zweite unmittelbar aus der Knotenregel folgt. Man überzeugt sich leicht, daß die Gleichungen (748) durch die Lösungen (747) erfüllt werden.

Aus (748) ergibt sich unmittelbar

$$\frac{d^2 \mathfrak{U}}{dx^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C) \mathfrak{U} \quad (749)$$

oder in nichtsymbolischer Form:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R G u + (L G + R C) \frac{\partial u}{\partial t} + L C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (750)$$

Man nennt eine Gleichung dieser Form „Telegraphengleichung“.

§ 228. **Zerlegung in Teilwellen.** Will man den raumzeitlichen Verlauf der Spannung und des Stroms untersuchen, so muß man von den komplexen zu den Augenblickswerten u und i übergehen. Wir führen zunächst die Exponentialfunktionen ein:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U} &= (\mathfrak{U}_1 - \mathfrak{Z} \mathfrak{I}_1) \frac{e^{\gamma x}}{2} + (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{Z} \mathfrak{I}_1) \frac{e^{-\gamma x}}{2}, \\ \mathfrak{I} &= -\frac{1}{\mathfrak{Z}} (\mathfrak{U}_1 - \mathfrak{Z} \mathfrak{I}_1) \frac{e^{\gamma x}}{2} + \frac{1}{\mathfrak{Z}} (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{Z} \mathfrak{I}_1) \frac{e^{-\gamma x}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (751)$$

und setzen

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{2} (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{Z} \mathfrak{I}_1) &= |\mathfrak{P}_1| \angle \varphi_1, \\ \sqrt{2} (\mathfrak{U}_1 - \mathfrak{Z} \mathfrak{I}_1) &= |\mathfrak{P}_2| \angle \varphi_2, \end{aligned} \right\} \quad \mathfrak{Z} = |\mathfrak{Z}| \angle \zeta. \quad (752)$$

Dann wird nach § 98, da $e^{\pm \gamma x} = e^{\pm \beta x} \angle \pm \alpha x$,

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{|\mathfrak{P}_1|}{2} e^{-\beta x} \cos(\omega t - \alpha x + \varphi_1) + \frac{|\mathfrak{P}_2|}{2} e^{\beta x} \cos(\omega t + \alpha x + \varphi_2), \\ i &= \frac{|\mathfrak{P}_1|}{2|\mathfrak{Z}|} e^{-\beta x} \cos(\omega t - \alpha x + \varphi_1 - \zeta) - \frac{|\mathfrak{P}_2|}{2|\mathfrak{Z}|} e^{\beta x} \cos(\omega t + \alpha x + \varphi_2 - \zeta). \end{aligned} \right\} \quad (753)$$

Um die Bedeutung dieser Gleichungen klarzustellen, betrachten wir zunächst die einfachere Beziehung:

$$y = A \cos(\omega t - \alpha x + \varphi). \quad (754)$$

Diese stellt in jedem fest herausgegriffenen Zeitpunkte t (Augenblicksaufnahme!) eine Sinuslinie von der Amplitude A dar; mit wachsendem t (kinematographische Aufnahme!) verschiebt sich diese Sinuslinie längs der x -Achse.

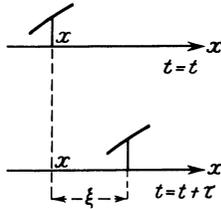


Abb. 204.

Um die Geschwindigkeit der Verschiebung zu finden, nehmen wir an, die Spannung u sei in einem Punkte x zur Zeit t dieselbe wie nach Ablauf der beliebigen Zeit τ im Punkte $x + \xi$ (Abb. 204):

$$\omega t - \alpha x + \varphi = \omega(t + \tau) - \alpha(x + \xi) + \varphi. \quad (755)$$

Daraus folgt $\xi = \omega/\alpha \cdot \tau$; in der Zeit τ hat also die herausgegriffene Spannung die Strecke $\omega/\alpha \cdot \tau$ zurückgelegt. Die durch die Gleichung (754) dargestellte Sinuslinie wandert demnach unverzerrt in der Richtung der wachsenden x mit einer Geschwindigkeit v , die nach der allgemeinen Definition der Geschwindigkeit gleich ω/α ist:

$$v = \frac{\omega}{\alpha}. \quad (756)$$

v heißt auch „Phasengeschwindigkeit“. Denkt man sich nämlich den betrachteten Ort x und den betrachteten Zeitpunkt t so variiert (um dx und dt), daß die Phase $\Phi = \omega t - \alpha x + \varphi$ dieselbe bleibt:

$$d\Phi = 0 = \omega dt - \alpha dx, \quad (757)$$

so ist

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\alpha} = v. \quad (758)$$

Entsprechend bedeutet ein Ausdruck

$$y = A \cos(\omega t + \alpha x + \varphi) \quad (759)$$

eine in der Richtung der abnehmenden x mit der Phasengeschwindigkeit ω/α laufende Welle.

Die Faktoren $e^{-\beta x}$ und $e^{\beta x}$ stellen Schwächungen dar, der erste eine Schwächung in der Richtung der wachsenden, der zweite in der Richtung der abnehmenden x .

Die Gleichungen (753) sagen also, daß die Spannung und der Strom als Über-einanderlagerungen von je zwei Teilspannungen und Teilströmen aufgefaßt werden können, welche die Form von fortschreitenden Sinuswellen haben, in entgegengesetzten Richtungen laufen und im Sinne ihrer Fortschreitung gedämpft sind.

In jeder Teilwelle ist das Verhältnis der komplexen Spannung zum komplexen Strom gleich dem Wellenwiderstand \mathfrak{Z} . Dieser stellt also den Scheinwiderstand für die Teilwelle dar; daher sein Name.

Diese leichtverständliche Definition des Begriffes Wellenwiderstand erlaubt besonders einfach zu erklären, warum es günstig ist, bei einer Leitung die Induktivität zu erhöhen. Hierdurch steigt nämlich nach (694) der Wellenwiderstand; man überträgt die Energie also mit höherer Spannung und geringerem Strom. Nun hängen aber die Drahtverluste von der Stromstärke, die Isolationsverluste von der Spannung ab; bei überwiegenden Drahtverlusten muß daher die Dämpfung mit wachsender Induktivität abnehmen.

§ 229. **Phasengeschwindigkeit bei den verschiedenen Leitungsarten.** Bei der dickdrähtigen Freileitung ist $\alpha = \omega \sqrt{LC}$; also ergibt sich für sie die Laufgeschwindigkeit der Wellen

$$v = \frac{\omega}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (760)$$

als frequenzunabhängig, soweit dasselbe für L und C angenommen werden darf.

Für die 4-mm-Freileitung erhält man z. B. (für 800 Hz)

$$v = \frac{\text{km}}{\sqrt{1,9 \text{ mH} \cdot 6,4 \text{ nF}}} = 287 \frac{\text{km}}{\text{ms}}.$$

Nach § 90 und 56 ist für eine Doppelleitung

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{\mu_0}{\pi} \left(\ln \frac{a}{\varrho} + \frac{1}{4} \right), \\ C &= \pi \varepsilon \frac{1}{\ln \frac{a}{\varrho}}. \end{aligned} \right\} \quad (761)$$

Läßt man bei L den Summand $\frac{1}{4}$ in der Klammer weg, was nach § 90 bei hohen Frequenzen erlaubt ist, so wird

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}} \frac{\text{km}}{\sqrt{1,256 \text{ mH} \cdot 8,86 \text{ nF}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}} 300 \frac{\text{km}}{\text{ms}}. \quad (762)$$

Auf der dickdrähtigen Freileitung ($\varepsilon = \varepsilon_0$) pflanzen sich also die Wellen aller Frequenzen — um so genauer, je höher die Frequenz — mit der Geschwindigkeit des Lichts im leeren Raum fort. In der Optik entspricht der Frequenz die „Farbe“; man nennt dort die Erscheinung, daß sich die verschiedenen Farben verschieden rasch fortpflanzen, „Farbenzerstreuung“ oder „Dispersion“. Eine Freileitung verhält sich also annähernd wie ein dispersionsfreies Medium.

Vollkommen dispersionsfrei ist nur der leere Raum. Bei allen durch Leitungen „geführten“ Wellen ist eine gewisse Dispersion zu beobachten. So ist schon für die Freileitung nach (712) (§ 217) genauer

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \left(1 - \frac{(\varepsilon - \delta)^2}{8} \right). \quad (763)$$

Da ε und δ der Frequenz annähernd umgekehrt proportional sind, ist die Phasengeschwindigkeit bei niedrigen Frequenzen kleiner als die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume und nimmt erst mit steigender Frequenz bis auf den Wert $v_0 = 1/\sqrt{LC}$ zu.

Bei Kabeln ist nach (717) (§ 218)

$$v = \sqrt{\frac{2\omega}{RC}}. \quad (764)$$

D. h. die Phasengeschwindigkeit der Wellen auf Kabeln steigt ziemlich beträchtlich mit der Frequenz an.

Beim 0,9-mm-Kabel ist z. B.

$$v = 2 \sqrt{\frac{\pi f}{54,6 \Omega/\text{km} \cdot 33,5 \text{ nF}/\text{km}}} = 82,9 \sqrt{\frac{f}{\text{kHz}}} \frac{\text{km}}{\text{ms}}. \quad (765)$$

Für hohe Frequenzen ist (764) nicht mehr brauchbar, da dann auch bei Kabeln ε klein ist, so daß (763) maßgebend wird. Der Grenzwert für unendlich

hohe Frequenz ist nicht gleich 300 km/ms, sondern nach (762) entsprechend der Dielektrizitätszahl der Isolation kleiner.

Bei reellem Wellenwiderstand ($\varepsilon = \delta$) wird nach § 216 für alle Frequenzen $v = 1/\sqrt{LC}$.

§ 230. **Wellenlänge.** Unter der Wellenlänge λ versteht man den Abstand zweier Punkte, in denen sich die Phase Φ in demselben Augenblick um 360° unterscheidet:

$$\omega t - \alpha x + \varphi = \omega t - \alpha(x + \lambda) + \varphi + 2\pi;$$

für sie gilt also die Gleichung:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{v}{f}. \quad (766)$$

Hiernach kann man die Gleichung einer ungedämpften Sinuswelle auch in der Form

$$u = A \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right) \quad (767)$$

schreiben. Da $\alpha = \mp \partial\Phi/\partial x$ ist, ändert sich (dreht sich) die Phase bei kleiner Wellenlänge (räumlich) rasch, bei großer langsam. α heißt auch „Wellenlängenkonstante“.

Die Dämpfung der Welle auf der Strecke einer Wellenlänge ist $\beta\lambda = \beta/\alpha \cdot 2\pi$ oder nach den Gleichungen (701) und (702) des § 215 $2\pi \operatorname{tg}((\varepsilon + \delta)/2)$. Bei der dickdrähtigen Freileitung, wo δ verschwindend klein ist und für ε die Näherung $R/\omega L$ gesetzt werden kann, ist daher die Dämpfung auf der Länge einer Welle gleich $R\pi/\omega L = R/2Lf$. Bei der 4-mm-Freileitung und bei 800 Hz ergibt sie sich z. B. gleich 1,05 Neper. Beim Kabel ist $\beta = \alpha$; also ist die Dämpfung je Wellenlänge bei ihm gleich $2\pi = 6,28$ Neper.

Man erkennt hieraus, daß man selbst dann, wenn die Dämpfung nur in der Leitung läge, auf einer dickdrähtigen Freileitung nur auf eine Entfernung von etwa 3 Wellenlängen, beim Kabel sogar nur auf eine Entfernung von einer halben Wellenlänge sprechen könnte. Man macht sich daher ein quantitativ falsches Bild, wenn man sich die Wellen auf einem Kabel wie die Lichtwellen in einer Glasschicht vorstellt.

Da die Geschwindigkeit v konstant ist oder höchstens proportional der Wurzel aus der Frequenz wächst [Gleichung (764)], machen bei allen Leitungsarten nach (766) die hohen Frequenzen kleinere „Schritte“ als die niedrigen.

§ 231. **Spannungs- und Stromwellen auf einer Leitung mit beliebiger Stromquelle und beliebigem Verbraucher.** Im allgemeinen sind nicht die Werte der Spannung und des Stroms am Anfang einer Leitung gegeben, sondern die Leerlaufspannung \mathcal{E} der Stromquelle und die Anfangs- und Endwiderstände. Dann hat man zu den Gleichungen (747):

$$\left. \begin{aligned} u &= u_1 \mathcal{C} \operatorname{sh} \gamma x - \mathfrak{I} \mathfrak{I}_1 \mathcal{S} \operatorname{in} \gamma x, \\ -\mathfrak{I} &= \frac{u_1}{\mathfrak{I}} \mathcal{S} \operatorname{in} \gamma x - \mathfrak{I}_1 \mathcal{C} \operatorname{sh} \gamma x, \end{aligned} \right\} \quad (768)$$

mit der Abkürzung $\gamma l = g$ die Bedingung für die Stromquelle

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \mathcal{E} - \mathfrak{R}_a \mathfrak{I}_1, \\ \text{und die Bedingung für den Verbraucher:} \\ u_2 &= \mathfrak{R}_e \mathfrak{I}_2, \end{aligned} \right\} \quad (769)$$

oder

$$u_1 \mathcal{C} \operatorname{sh} g - \mathfrak{I} \mathfrak{I}_1 \mathcal{S} \operatorname{in} g = -\frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{I}} (u_1 \mathcal{S} \operatorname{in} g - \mathfrak{I} \mathfrak{I}_1 \mathcal{C} \operatorname{sh} g) \quad (770)$$

hinzunehmen. Hier führen wir die wichtigen Abkürzungen

$$\frac{\mathfrak{R}_a}{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{I}g r_a, \quad \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{I}g r_e \quad (771)$$

ein, so daß sich für die Unbekannten \mathfrak{U}_1 und \mathfrak{Z}_1 die beiden linearen Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{Z} \mathfrak{I}g r_a \mathfrak{Z}_1 &= \mathfrak{E}, \\ (\mathfrak{Cof} g + \mathfrak{I}g r_e \mathfrak{Sin} g) \mathfrak{U}_1 - \mathfrak{Z} (\mathfrak{I}g r_e \mathfrak{Cof} g + \mathfrak{Sin} g) \mathfrak{Z}_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (772)$$

ergeben. Deren Nennerdeterminante ist

$$\begin{aligned} \Delta &= -\mathfrak{Z} (\mathfrak{I}g r_e \mathfrak{Cof} g + \mathfrak{Sin} g) - \mathfrak{Z} \mathfrak{I}g r_a (\mathfrak{Cof} g + \mathfrak{I}g r_e \mathfrak{Sin} g) \\ &= -\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{Cof} r_e} (\mathfrak{Sin} (g + r_e) + \mathfrak{I}g r_a \mathfrak{Cof} (g + r_e)) = -\frac{\mathfrak{Sin} (g + r_a + r_e)}{\mathfrak{Cof} r_a \mathfrak{Cof} r_e} \mathfrak{Z}. \end{aligned} \quad (773)$$

Für \mathfrak{U}_1 und \mathfrak{Z}_1 selbst folgen also die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U}_1 &= -\frac{\mathfrak{Z} (\mathfrak{I}g r_e \mathfrak{Cof} g + \mathfrak{Sin} g)}{\Delta} \mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{Cof} r_a \mathfrak{Sin} (g + r_e)}{\mathfrak{Sin} (g + r_a + r_e)} \mathfrak{E}, \\ \mathfrak{Z}_1 &= -\frac{\mathfrak{Cof} g + \mathfrak{I}g r_e \mathfrak{Sin} g}{\Delta} \mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{Cof} r_a \mathfrak{Cof} (g + r_e)}{\mathfrak{Sin} (g + r_a + r_e) \mathfrak{Z}} \mathfrak{E}. \end{aligned} \right\} \quad (774)$$

Die Spannung und der Strom lassen sich daher schließlich mit der Abkürzung $\gamma x = g \frac{x}{l} = g\xi$ in der Form

$$\mathfrak{U} = \frac{\mathfrak{Cof} r_a \mathfrak{Sin} (g(1-\xi) + r_e)}{\mathfrak{Sin} (g + r_a + r_e)} \mathfrak{E}, \quad (775)$$

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{Cof} r_a \mathfrak{Cof} (g(1-\xi) + r_e)}{\mathfrak{Sin} (g + r_a + r_e) \mathfrak{Z}} \mathfrak{E}. \quad (776)$$

darstellen ($0 < \xi < 1$). Wir nennen die Größen r_a und r_e , die in die Elektrotechnik wohl zuerst von Kennelly¹ eingeführt worden sind, die „hyperbolischen Anpassungsmaße“; r_a wird bei Anpassung auf der Primärseite, r_e bei Anpassung auf der Sekundärseite unendlich groß.

Die Gleichungen (775) und (776) gelten natürlich mit $\xi = 0$ und $\xi = 1$ nicht nur für Leitungen, sondern für beliebige Vierpole.

§ 232. **Zerlegung in eine vorwärtslaufende und eine zurückgeworfene Welle.** Um die beiden Wellen in diesem allgemeinsten Fall zu trennen, formt man folgendermaßen um:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U} &= \frac{\mathfrak{Cof} r_a}{2 \mathfrak{Sin} (g + r_a + r_e)} \{e^{g+r_e} e^{-g\xi} - e^{-(g+r_e)} e^{g\xi}\} \mathfrak{E}, \\ \mathfrak{Z} &= \frac{\mathfrak{Cof} r_a}{2 \mathfrak{Sin} (g + r_a + r_e)} \{e^{g+r_e} e^{-g\xi} + e^{-(g+r_e)} e^{g\xi}\} \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{Z}}. \end{aligned} \right\} \quad (777)$$

Man sieht, daß die beiden Wellen, in die man die Spannung und den Strom zerlegen kann, im allgemeinen verschiedenen Betrag und verschiedene Phase haben. Ihr Verhältnis ist

$$\mp \frac{e^{-(g(1-\xi) + r_e)}}{e^{g(1-\xi) + r_e}} = \mp e^{-2g(1-\xi)} e^{-2r_e}, \quad (778)$$

wobei das obere Vorzeichen für die Spannung, das untere für den Strom gilt. Die reflektierte Welle ist also gegenüber der vorwärtslaufenden durch zwei Einflüsse geschwächt und in der Phase gedreht, erstens weil sie entsprechend

¹ Kennelly, A. E.: The application of hyperbolic functions to electrical engineering problems, S. 23ff., London 1912.

der Lage des betrachteten Punktes einen längeren Weg hinter sich hat, zweitens durch die Unvollkommenheit der Anpassung am Ende. Das doppelte Anpassungsmaß gibt offenbar an, wie stark die reflektierte Welle gegenüber der auftreffenden durch die Reflexion umgebildet wird.

Man kann dies auch ausdrücken, ohne von der Wellenvorstellung Gebrauch zu machen. Denkt man sich nämlich die Leitung durch eine angepaßte Stromquelle betrieben, so verhält sich die Scheinleistung, die sie in den beliebigen Verbraucher \mathfrak{R}_e schickt, zu der Scheinleistung, die sie in einen angepaßten Verbraucher schickt, wie

$$\frac{\mathfrak{R}_e}{(\mathfrak{Z} + \mathfrak{R}_e)^2} : \frac{1}{4\mathfrak{Z}}. \quad (779)$$

Die Leistungsschwächung infolge der Nichtanpassung (wellentheoretisch: infolge der Reflexion) ist daher

$$1 - \frac{4\mathfrak{Z}\mathfrak{R}_e}{(\mathfrak{Z} + \mathfrak{R}_e)^2} = \left(\frac{\mathfrak{Z} - \mathfrak{R}_e}{\mathfrak{Z} + \mathfrak{R}_e}\right)^2 = \left(\frac{1 - \mathfrak{Z}g r_e}{1 + \mathfrak{Z}g r_e}\right)^2 = e^{-4r_e}. \quad (780)$$

Auch auf diesem Wege erweist sich also das doppelte Anpassungsmaß als das der Schwächung und Phasendrehung durch mangelhafte Anpassung zuzuordnende Übertragungsmaß.

Den Faktor

$$\vartheta = e^{-2r_e} = \frac{\mathfrak{Z} - \mathfrak{R}_e}{\mathfrak{Z} + \mathfrak{R}_e}, \quad (781)$$

nennt man auch „Reflexionsfaktor“ oder „Anpassungsfehler“. Es ist

$$r_e = \ln \frac{1}{\sqrt{\vartheta}}; \quad (782)$$

das Anpassungsmaß ist also zugleich logarithmisches Maß für die Wurzel aus dem Kehrwert des Anpassungsfehlers.

§ 233. Der Scheinwiderstand als Funktion der Anpassungsmaße. Bei einem beliebigen Vierpol werden die Anpassungsmaße definiert durch die Gleichungen

$$\frac{\mathfrak{R}_a}{\mathfrak{Z}_1} = \mathfrak{Z}g r_a, \quad \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{Z}_2} = \mathfrak{Z}g r_e. \quad (783)$$

Setzt man dies in die Gleichungen (448) und (449) des § 157 ein, so erhält man die äußerst einfachen Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{W}_1 &= \mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}g (g + r_e), \\ \mathfrak{W}_2 &= \mathfrak{Z}_2 \mathfrak{Z}g (g + r_a). \end{aligned} \right\} \quad (784)$$

Für die Leitung ergibt sich nach (775) und (776) unmittelbar

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{Z} \mathfrak{Z}g (g(1 - \xi) + r_e). \quad (785)$$

Die Gleichungen (784) und (785) zeigen besonders deutlich (§ 157), daß hohes Dämpfungsmaß auf den Scheinwiderstand ebenso wirkt wie Anpassung. Nach (785) müssen allerdings (selbstverständlich) Punkte in allzu großer Nähe des Leitungsendes ausgeschlossen werden.

Führt man noch zwei weitere Abweichungsmaße für die Scheinwiderstände selbst durch die Gleichungen

$$\frac{\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{Z}_1} = \mathfrak{Z}g r_1, \quad \frac{\mathfrak{W}_2}{\mathfrak{Z}_2} = \mathfrak{Z}g r_2 \quad (786)$$

ein, so folgt

$$\mathfrak{Z}g r_1 = \mathfrak{Z}g (g + r_e); \quad \mathfrak{Z}g r_2 = \mathfrak{Z}g (g + r_a)$$

oder

$$r_1 = g + r_e; \quad r_2 = g + r_a \quad (787)$$

oder endlich

$$e^{-2r_1} = e^{-2g} \cdot e^{-2r_e}; \quad e^{-2r_2} = e^{-2g} \cdot e^{-2r_a}. \quad (788)$$

Ein Anpassungsfehler z. B. auf der sekundären Seite (e^{-2r_0}) ruft demnach eine ihm proportionale Abweichung des primären Scheinwiderstands gegen den Wellenwiderstand hervor. Der Proportionalitätsfaktor ist e^{-2g} ; d. h. die Abweichung des Scheinwiderstands ist entsprechend dem doppelten Übertragungsmaß des Vierpols umgebildet.

Schaltet man dem betrachteten Vierpol, dem wir jetzt die Ziffer *II* geben, einen Vierpol *I* vor, so bildet für diesen der Scheinwiderstand \mathfrak{B}_{1II} den Abschlußwiderstand. Ist also der Vierpol *II* an den Verbraucher \mathfrak{R}_0 angepaßt ($r_0 = \infty$), so ist

$$\mathfrak{B}_{1I} = \mathfrak{B}_{1I} \mathfrak{Xg} \left(g_I + \mathfrak{A} \mathfrak{Xg} \frac{\mathfrak{B}_{1II}}{\mathfrak{B}_{2I}} \right) = \mathfrak{B}_{1I} \mathfrak{Xg} \left(g_I + \mathfrak{A} \mathfrak{Xg} \frac{\mathfrak{B}_{1II}}{\mathfrak{B}_{2I}} \right) \quad (789)$$

oder, wenn wir

$$\frac{\mathfrak{B}_{1II}}{\mathfrak{B}_{2I}} = \mathfrak{Xg} \mathfrak{B}_{II} \quad (790)$$

setzen,

$$r_{1I} = g_I + \mathfrak{B}_{II} \quad (791)$$

und

$$e^{-2r_{1I}} = e^{-2g_I} e^{-2\mathfrak{B}_{II}}. \quad (792)$$

Ist r_0 nicht unendlich groß, so gilt eine verwickeltere Beziehung. Man kann aber annehmen, daß sich dann die kleinen Fehler zwischen *I* und *II* und am Leitungsende addieren, und daher den möglichen Höchstwert des Gesamtfehlers gleich

$$\left| e^{-2(g_I + \mathfrak{B}_{II})} \right| + \left| e^{-2(g_I + g_{II} + r_0)} \right| = \left| e^{-2\mathfrak{B}_{II}} \right| e^{-2b_I} + \left| e^{-2r_0} \right| e^{-2(b_I + b_{II})} \quad (793)$$

setzen¹.

§ 234. Hintereinanderschaltung mehrerer Leitungen verschiedener Eigenschaften. Nach den Gleichungen (777) verschwindet auf jeder Leitung die „reflektierte“ Welle, wenn $r_0 = \infty$, d. h. wenn der Verbraucher an die Leitung nach dem Wellenwiderstand vollkommen angepaßt ist².

Diese Schlußfolgerung hat zu einer anschaulichen Vorstellung geführt. Man sieht nicht nur bei den Leitungen, sondern auch bei beliebigen Vierpolen alle Stellen, an denen die Anpassungsbedingungen der §§ 156 und 157 nicht erfüllt sind, als „Stoßstellen“ an und deutet die Schwächung, die meist durch solche Stoßstellen hervorgerufen wird, als eine Art „Spiegelung“, ähnlich der aus der Optik bekannten Erscheinung. Nach dieser Auffassung werden die über eine Leitung oder ein System von hintereinander geschalteten Leitungen wandernden Wechselströme, z. B. Fernsprechströme, aus zwei Gründen geschwächt: erstens durch Dämpfung innerhalb der Vierpole — ihr entspricht die „Vierpoldämpfung“, — zweitens aber auch durch zusätzliche „Reflexionsdämpfungen“ an allen Stoßstellen. Solche Stoßstellen sind z. B. die Punkte, wo ein Teilnehmerkabel in ein Amt eingeführt wird, wo es das Amt verläßt, wo die Ströme von einem Kabel auf eine Freileitung übergehen usw. Erst die Betriebsdämpfung begreift beide Arten der Schwächung in sich.

So nützlich diese Vorstellung ist, so darf sie doch nur mit einer gewissen Vorsicht angewendet werden.

Zunächst ist zu beachten, daß es sich bei ihr um eine Vermengung zweier verschiedener Betrachtungsweisen handelt, der vierpoltheoretischen und der physikalischen. Wir dürfen wohl annehmen, daß jede Störung in der Gleichmäßigkeit einer Leitung oder eines Kettenleiters eine Störung des elektromagnetischen Wellenvorgangs nach sich zieht; die Vierpoltheorie jedoch, von der wir ausgegangen sind, erfaßt nur die Stoßstellen, die an den von uns willkürlich gewählten Vierpolklemmen liegen. Die vierpoltheoretische Betrachtung wird daher nur dann ein richtiges Bild geben, wenn wir die Grenzen der Vierpole sozusagen

¹ Vgl. R. Feldtkeller: Tel.- u. Fernspr.-Techn. 14, 274 (1925).

² Bei hohem Dämpfungsmaß verschwindet die reflektierte Welle nach (777) nicht. Sie macht sich nur am Anfang der Leitung nicht mehr bemerkbar.

an die physikalisch richtige Stelle legen; woran dies zu erkennen ist, darüber ist im allgemeinen nur bei Zusammenschaltungen von Leitungen und Kettenleitern kein Zweifel möglich.

Weiter wird durch Stoßstellen auch bei Leitungen die Dämpfung gar nicht in jedem Falle erhöht. Die Verteilung der Ströme und Spannungen auf den Leitungen kann durch sie auch so verändert werden, daß die resultierende Dämpfung durch Kompensation von Blindwiderständen abnimmt. Wir zeigen dies im folgenden Paragraphen an einem besonderen Fall.

§ 235. Hintereinanderschaltung zweier Vierpole hohen Dämpfungsmaßes. Zwei Vierpole *I* und *II* von hohem Dämpfungsmaß seien hintereinander geschaltet. Dann wird nach der Gleichung (482) des § 163

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}o\mathfrak{I}^2 g &= \mathfrak{C}o\mathfrak{I}^2 g_I \mathfrak{C}o\mathfrak{I}^2 g_{II} \left(1 + \frac{\mathfrak{B}_{2I}}{\mathfrak{B}_{1II}} + \frac{\mathfrak{B}_{1II}}{\mathfrak{B}_{2I}} + 1 \right) \\ &= \mathfrak{C}o\mathfrak{I}^2 g_I \mathfrak{C}o\mathfrak{I}^2 g_{II} \frac{(\mathfrak{B}_{2I} + \mathfrak{B}_{1II})^2}{\mathfrak{B}_{2I} \mathfrak{B}_{1II}}, \end{aligned} \quad (794)$$

also

$$\mathfrak{C}o\mathfrak{I} g = \mathfrak{C}o\mathfrak{I} g_I \mathfrak{C}o\mathfrak{I} g_{II} \frac{\mathfrak{B}_{2I} + \mathfrak{B}_{1II}}{\sqrt{\mathfrak{B}_{2I} \mathfrak{B}_{1II}}} \approx \frac{1}{2} e^{a_I + a_{II}} \cdot \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\mathfrak{B}_{2I}}{\mathfrak{B}_{1II}}} + \sqrt{\frac{\mathfrak{B}_{1II}}{\mathfrak{B}_{2I}}} \right) \quad (795)$$

oder, wenn die Einwirkung der Stoßstellen nur gering ist,

$$g = g_I + g_{II} + \ln \left(\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\mathfrak{B}_{2I}}{\mathfrak{B}_{1II}}} + \sqrt{\frac{\mathfrak{B}_{1II}}{\mathfrak{B}_{2I}}} \right) \right). \quad (796)$$

Sind die beiden Vierpole aneinander angepaßt, ist also das Verhältnis

$$\frac{\mathfrak{B}_{2I}}{\mathfrak{B}_{1II}} = r \angle \varphi \quad (797)$$

reell und dem Betrage nach nahezu gleich 1, so ergibt sich natürlich wieder das frühere Resultat: die resultierende Dämpfung ist gleich der Summe der Einzeldämpfungen. Ist dagegen z. B. $|\mathfrak{B}_{2I}| \gg |\mathfrak{B}_{1II}|$ und φ klein, so kann man näherungsweise schreiben

$$b = b_I + b_{II} + \ln \left| \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mathfrak{B}_{2I}}{\mathfrak{B}_{1II}}} \right|; \quad (798)$$

d. h. die resultierende Dämpfung ist sicher größer als die Summe der Einzeldämpfungen. Dasselbe gilt, wenn $|\mathfrak{B}_{1II}| \gg |\mathfrak{B}_{2I}|$ ist. Wie in der Optik ist es für die Reflexionsdämpfung einerlei, ob der Vierpol *I* oder der Vierpol *II* (das Medium *I* oder das Medium *II*) vorangeht; jede Stoßstelle erzeugt eine Zusatzdämpfung.

Bei schwächeren Stößen kann aber auch der Betrag des Arguments des Logarithmus in (796) ein echter Bruch sein, so daß die resultierende Dämpfung kleiner wird als die Summe der Einzeldämpfungen. Die Stoßstelle bleibt ganz ohne Einfluß, wenn

$$\left| \sqrt{r} \angle \varphi/2 + \frac{1}{\sqrt{r}} \angle -\varphi/2 \right| = 2 \quad (799)$$

ist. Das bedeutet aber:

$$r^2 - (2 - \cos \varphi) 2r + 1 = 0. \quad (800)$$

Diese Gleichung zwischen den Polarkoordinaten r, φ ist auf der Kurve der Abb. 205 erfüllt. Liegt der Bruch $\mathfrak{B}_{2I}/\mathfrak{B}_{1II}$ außerhalb des schraffierten Gebietes, so wird die Dämpfung durch die Stoßstelle vergrößert, liegt er darin, so wird sie verkleinert. Es kommt also vor allem darauf an, ob die Widerstände \mathfrak{B}_{2I} und \mathfrak{B}_{1II} von gleichem oder verschiedenem Charakter sind.

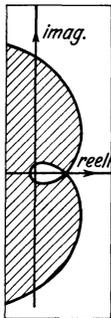


Abb. 205.

Die durch die Stoßstellen hervorgerufenen Zusatzdämpfungen sind praktisch, wenn sie nicht sehr groß sind, von geringer Bedeutung, da man sie durch Verstärkung wieder aufheben kann. Viel unangenehmer sind die unregelmäßigen Frequenzgänge, zu denen sie Anlaß geben. Vgl. darüber später § 260.

§ 236. Das Betriebsübertragungsmaß als Funktion der Anpassungsmaße. Nach der allgemeinen Formel (776) des § (231) läßt sich das Betriebsübertragungsmaß eines beliebigen Vierpols in der Form

$$g = \ln \frac{\mathfrak{E}}{2 \mathfrak{Z}_2 \sqrt{\mathfrak{R}_a \mathfrak{R}_e}} = \ln \frac{\mathfrak{Z}}{2 \sqrt{\mathfrak{R}_a \mathfrak{R}_e}} \frac{\mathfrak{C} \sin (g + r_a + r_e)}{\mathfrak{C} \cos r_a \mathfrak{C} \cos r_e} \quad (801)$$

schreiben. Wir ersetzen den Hyperbelsinus durch die Exponentialfunktion und erhalten

$$\begin{aligned} g &= \ln \frac{\sqrt{\mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2}}{4 \sqrt{\mathfrak{R}_a \mathfrak{R}_e} \mathfrak{C} \cos r_a \mathfrak{C} \cos r_e} + \ln (e^{g+r_a+r_e} - e^{-(g+r_a+r_e)}) \\ &= g + \ln \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{R}_a}} \frac{e^{r_a}}{\mathfrak{C} \cos r_a} \right) + \ln \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{R}_e}} \frac{e^{r_e}}{\mathfrak{C} \cos r_e} \right) + \ln (1 - e^{-2(g+r_a+r_e)}) \\ &= g + \ln \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{X}_g r_a}} + \sqrt{\mathfrak{X}_g r_a} \right) \right) + \ln \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{X}_g r_e}} + \sqrt{\mathfrak{X}_g r_e} \right) \right) \\ &\quad + \ln (1 - e^{-2(g+r_a+r_e)}) \\ &= g + \ln \frac{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{Z}_1}{2 \sqrt{\mathfrak{R}_a \mathfrak{Z}_1}} + \ln \frac{\mathfrak{R}_e + \mathfrak{Z}_2}{2 \sqrt{\mathfrak{R}_e \mathfrak{Z}_2}} + \ln (1 - e^{-2(g+r_a+r_e)}). \end{aligned} \quad (802)$$

Das Betriebsübertragungsmaß läßt sich also in mehrere Glieder zerlegen. Das erste ist das Vierpolübertragungsmaß. Dazu kommen drei Reflexionsglieder: das erste verschwindet bei Anpassung auf der primären, das zweite bei Anpassung auf der sekundären Seite, das dritte bei großer Summe $g + r_a + r_e$. Dieses letzte Glied, von Zobel¹ „Wechselwirkungsglied“ genannt, ist meist, aber nicht immer, das kleinste.

§ 237. Die Methode des Tangensnetzes. Nach § 233 gilt für den Scheinwiderstand einer durch einen Widerstand \mathfrak{R}_e abgeschlossenen Leitung an einer Stelle $x = \xi l$ (Abb. 206) die Gleichung

$$\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{Z} \mathfrak{X}_g (g (1 - \xi) + r_e). \quad (803)$$

R. S. Brown² hat gezeigt, wie man diesen Scheinwiderstand für jeden Punkt einer Leitung leicht zeichnerisch bestimmen kann.

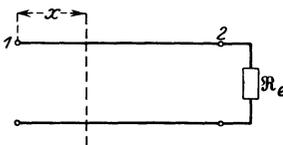


Abb. 206.

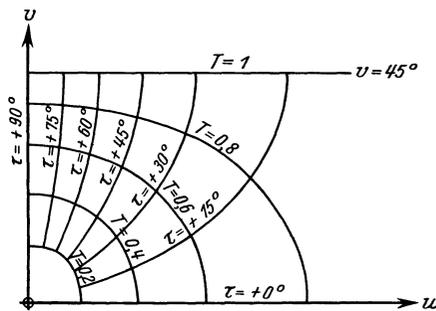


Abb. 207.

Man denke sich zu jedem komplexen Werte $u + jv$ die Funktion

$$\mathfrak{Z} = T \angle \tau = \mathfrak{Z}_g (u + jv)$$

berechnet und in der komplexen Ebene die Punkte u, v , zu denen gleiche

¹ Zobel, O. J.: Bell Syst. Techn. J. 3, 575 (1924). Dort findet man auch Kurventafeln zur bequemeren Berechnung der einzelnen Glieder.

² Brown, R. S.: J. Am. Inst. Electr. Eng. 40, 854 (1921).

Beträge T oder gleiche Phasen τ gehören, durch Kurven miteinander verbunden (Abb. 207). An die einzelnen Linien schreibt man die zugehörigen konstanten Werte T und τ an. Auf diese Weise erhält man in der komplexen Ebene u, v ein Netz „krummliniger Koordinaten“, mit dessen Hilfe es möglich ist, zu jedem gegebenen Paar u, v das zugehörige Paar T, τ mit der Genauigkeit der zeichnerischen Verfahren zu finden und umgekehrt.

Sind nun \Re_e und \Im gegeben, was wir voraussetzen wollen, so kann man zu-

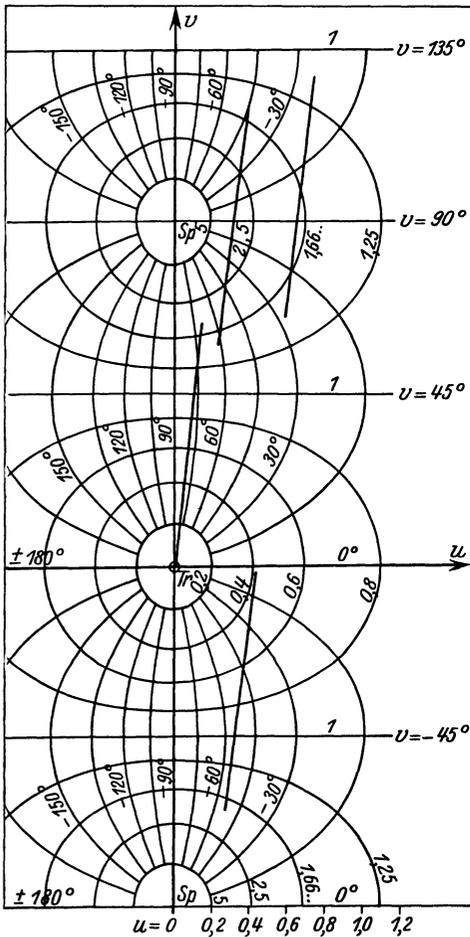


Abb. 208.

nächst mit dem Rechenschieber ihr Verhältnis $\Re_e/\Im = \Im g r_e$ nach Betrag (T) und Phase (τ) bestimmen. Den so berechneten Punkt T, τ sucht man im krummlinigen System. Seine rechtwinkligen Koordinaten u und v sind die rechtwinkligen Komponenten der Hilfsgröße r_e .

Diese abzulesen ist jedoch nicht nötig. Vielmehr addiert man zu ihr sofort geometrisch den Vektor $g(1-\xi)$. Hierdurch kommt man zu einem neuen Punkt, der im rechtwinkligen Netz der komplexen Größe $g(1-\xi) + r_e$ entspricht. An ihm liest man im krummlinigen System die zugehörigen Werte T, τ ab; diese stellen Betrag und Phase des Quotienten \Re_1/\Im dar, aus dem mit dem Rechenschieber \Re_1 ermittelt werden kann.

Die Methode läuft also darauf hinaus, in der komplexen Ebene eine Gerade $g(1-\xi)$ zu zeichnen, die man nach Emde¹ die „Leitungsstrecke“ nennt; im krummlinigen System steht an ihrem einen Ende der gegebene Wert \Re_e/\Im , am andern der gesuchte \Re_1/\Im .

Die Kurven des Tangensnetzes können im Sinne des § 120 als Ortskurven aufgefaßt werden. Sie stellen die Abhängigkeit der komplexen Funktion

$$u + jv = \text{Ar } \Im g(T \angle \tau) \quad (804)$$

von den beiden reellen Parametern T und τ die Träger von τ -Teilungen, unsere τ -Linien

dar; und zwar sind natürlich unsere T -Linien die Träger von T -Teilungen.

§ 238. Die Gestalt des Tangensnetzes. Das Tangensnetz ist in Abb. 208 wiedergegeben². Denkt man sich die Beträge T in allen Punkten senkrecht zur Ebene des Papiers aufgetragen, so entsteht, wie man an den eingetragenen Zahlenwerten ablesen kann, ein Relief³ von den folgenden Eigenschaften: In einer

¹ Emde, F.: Sinusrelief und Tangensrelief in der Elektrotechnik. Braunschweig: Vieweg 1924.

² Ein ziemlich engmaschiges Tangensnetz findet man bei Brown: a. a. O.

³ Vgl. F. Emde: ETZ 45, 46 (1924).

unendlich ausgedehnten Ebene von der Höhe r sind im Zuge der v -Achse abwechselnd Trichter eingearbeitet und Spitzen (oder Türme) aufgesetzt. Die Trichter senken sich ein bis zu den Werten 0, die Spitzen steigen bis auf unendlich hohe Werte. Die v -Koordinaten der Trichter unterscheiden sich von denen der Spitzen um ungerade Vielfache von 90° .

In der Tat gilt in Übereinstimmung mit der Verteilung der Kurven im Netz für die u -Achse ($v = 0$):

$$T \angle \tau = \mathfrak{I}g u \angle 0^\circ = \mathfrak{I}g (-u) \angle \pm 180^\circ; \tag{805}$$

für eine Parallele zur u -Achse mitten zwischen Trichter und Spitze bei $v = 45^\circ$:

$$T \angle \tau = \frac{\mathfrak{S}in 2u + j \mathfrak{S}in 2v}{\mathfrak{C}of 2u + \mathfrak{C}os 2v} = \frac{\mathfrak{S}in 2u + j}{\mathfrak{C}of 2u} = \angle \text{arc ctg } \mathfrak{S}in 2u; \tag{806}$$

für eine Parallele zur u -Achse durch die nächste Spitze ($v = 90^\circ$):

$$T \angle \tau = \mathfrak{C}tg u \angle 0^\circ = \mathfrak{C}tg (-u) \angle \pm 180^\circ; \tag{807}$$

endlich für die v -Achse ($u = 0$):

$$T \angle \tau = \mathfrak{I}g j v = j \text{tg } v = \text{tg } v \angle 90^\circ = -\text{tg } v \angle -90^\circ. \tag{808}$$

Den Hyperbeltangens reellen Arguments findet man also auf allen Horizontalen durch Trichter, den Hyperbelkotangens reellen Arguments auf allen Horizontalen durch Spitzen, den trigonometrischen Tangens und den trigonometrischen Kotangens auf der v -Achse.

Die Phasenwinkel τ sind in Streifen von der Breite 90° abwechselnd negativ ($-180^\circ < \tau < 0^\circ$) und positiv ($0^\circ < \tau < 180^\circ$).

Wir werden die v -Achse auch als die „periodische“ Achse bezeichnen.

§ 239. Die Leitungsstrecke. Da $r - \xi$ reell ist, bleibt die Richtung des Vektors $g (r - \xi)$ bei geändertem x ungeändert. Sie hängt nur von der Richtung des Vektors γ , also nach § 215 von dem Winkel $90^\circ - \frac{\varepsilon + \delta}{2}$ ab.

Bei der verlustlosen Leitung ($\varepsilon = \delta = 0$) beispielsweise ist dieser Winkel gleich $+90^\circ$; ihre Leitungsstrecke läuft also der periodischen Achse parallel. Beim Kabel dagegen ist bei Sprechfrequenz $\varepsilon \approx 90^\circ$, δ klein, also die Phase von γ annähernd gleich $+45^\circ$: die Leitungsstrecke halbiert den Winkel zwischen den Achsen.

Mit zunehmender Frequenz werden $\varepsilon = \text{arc tg } R/\omega L$ und $\delta = \text{arc tg } G/\omega C$ immer kleiner: die Leitungsstrecke dreht sich immer mehr in die Richtung der periodischen Achse. Bei ganz niedrigen Frequenzen (Telegraphierfrequenzen) nähern sich sowohl ε wie δ dem Winkel 90° , die Leitungsstrecke stellt sich also senkrecht zur periodischen Achse: es gibt keine wellenartige Verteilung mehr, sondern nur noch exponentiellen Abfall.

Man stellt sich die Leitungsstrecke am besten als ein „Bild“ der Leitung vor. Versieht man sie mit einer Ortsteilung (Abb. 209), so kann man für jede Entfernung den Scheinwiderstand, bezogen auf den Wellenwiderstand, unmittelbar ablesen.

Aus der Definitionsgleichung für r_x und der Ungleichung $-45^\circ < \zeta < 0$ ergibt sich, daß das Ende der Leitungsstrecke nur in den Gebieten des Tangensnetzes liegen kann, wo $-90^\circ < \tau < +135^\circ$. Da ferner $b (r - \xi)$ immer positiv ist, liegt der Leitungsanfang ($\xi = 0$) stets weiter von der periodischen Achse

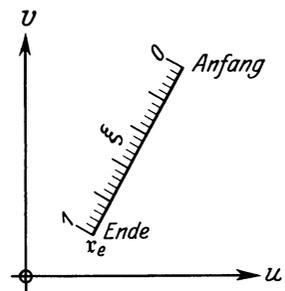


Abb. 209.

entfernt als das Leitungsende: die Ziffern der ξ -Teilung auf der Leitungsstrecke wachsen von rechts oben nach links unten. Bei der „verzerrungsfreien“ Leitung ($\zeta = 0$) kann die Leitungsstrecke nur auf der Halbebene der positiven u liegen.

Die Lage der Leitungsstrecke hängt bei gegebener Leitung nur von der Belastung \Re_e ab. Insbesondere endigt die Leitungsstrecke bei Kurzschluß immer in einem Trichter, bei Leerlauf immer auf einer Spitze.

Bei Anpassung nach dem Wellenwiderstand ist $T = 1$ und $\tau = 0$. Diese beiden Bedingungen sind, wie unsere Bilder zeigen, auf der unendlich fernen Parallelen zur periodischen Achse erfüllt. Da sich $\mathfrak{X}g$ u und $\mathfrak{C}tg$ u schon für $u = 3$ nur noch um $5/100$ von 1 unterscheiden, kann man aus dem Tangensrelief unmittelbar ersehen, daß bei der langen und bei der kurzen angepaßt beschalteten Leitung der Scheinwiderstand gleich dem Wellenwiderstand ist.

§ 240. Zahlenbeispiel für die Berechnung des Scheinwiderstandes. Für eine 50 km lange 4-mm-Freileitung, die durch einen Widerstand $\Re_e = 791 \Omega \angle 21,6^\circ$ abgeschlossen ist, gilt nach § 219 für 1000 Hz

$$\frac{\Re_e}{\mathfrak{B}} = \frac{791 \angle 21,6^\circ}{554 \angle -6,8^\circ} = 1,43 \angle 28,4^\circ;$$

also erhält man nach dem Tangensnetz

$$r_e = 0,59 + j \cdot 64^\circ.$$

Da weiter nach § 216 für 1000 Hz

$$b = 0,16, \quad a = 63^\circ,$$

so ist

$$g + r_e = 0,75 + j \cdot 127^\circ,$$

weiter nach dem Tangensnetz

$$\mathfrak{X}g(g + r_e) = 1,13 \angle -24^\circ$$

und daher schließlich

$$\mathfrak{B} = 628 \angle -31,0^\circ \Omega.$$

Aus Abb. 208, in die die Leitungsstrecke den angenommenen Zahlenwerten entsprechend eingetragen ist, kann man ersehen, daß der Betrag des Scheinwiderstandes, wenn man sich die Entfernung x allmählich verringert denkt, von dem Werte $|\Re_e| = 791 \Omega$ aus zunächst beträchtlich steigt, da die Leitungsstrecke in die Nähe einer „Spitze“ gerät und dann erst auf den Wert am Anfang (628Ω) absinkt. Wäre die Leitung länger, so fiel der Betrag des Scheinwiderstandes wegen der Annäherung an einen „Trichter“ unter den Wert des Wellenwiderstandes (554Ω).

Bei Variation der Entfernung x hat man also einen ähnlich „welligen“ Verlauf des Scheinwiderstandes wie bei Variation der Frequenz (vgl. § 221).

§ 241. Das Kosinusnetz. Der Hyperbelkosinus $\mathfrak{C}o\mathfrak{f}(u + jv) = C \angle \varkappa$ kann durch das krummlinige Netz der Abb. 210 dargestellt werden. Denkt man sich wieder in jedem Punkte der Zeichenebene senkrecht zu ihr den Betrag C aufgetragen, so erhält man das Kosinusrelief, d. h. ein tief eingeschnittenes Tal im Zuge der v -Achse, dessen Wände mit wachsender Entfernung von der v -Achse immer steiler werden. Auf der Talsohle liegen in gleichem Abstände Trichter, in denen der Betrag des Kosinus bis zu dem Wert 0 absinkt, und Sättel von der Höhe 1. In der Tat gilt z. B. für die u -Achse ($v = 0$):

$$C \angle \varkappa = \mathfrak{C}o\mathfrak{f} u \angle 0^\circ = \mathfrak{C}o\mathfrak{f}(-u) \angle 0^\circ, \quad (809)$$

für die gerade Linie „ u beliebig, $v = 90^\circ$ “

$$\begin{aligned} C \angle \varkappa &= \mathfrak{C}o\mathfrak{f}(u + j90^\circ) = \mathfrak{C}o\mathfrak{f} u \cos 90^\circ + j \mathfrak{S}in u \sin 90^\circ = \mathfrak{S}in u \angle 90^\circ \\ &= \mathfrak{S}in(-u) \angle -90^\circ, \end{aligned} \quad (810)$$

für die gerade Linie „ u beliebig, $v = 180^\circ$ “

$$C_{\angle \kappa} = \mathfrak{Cof}(u + j 180^\circ) = -\mathfrak{Cof} u = \mathfrak{Cof} u \angle \pm 180^\circ = \mathfrak{Cof}(-u) \angle \pm 180^\circ, \quad (811)$$

für die v -Achse ($u = 0$):

$$C_{\angle \kappa} = \mathfrak{Cof} j v = \cos v \angle 0^\circ = -\cos v \angle \pm 180^\circ. \quad (812)$$

Sättel des Kosinusreliefs liegen hiernach bei $v = 0^\circ, 180^\circ \dots$, Trichter bei $v = 90^\circ, 270^\circ \dots$. Den Hyperbelkosinus reellen Arguments findet man z. B. auf der u -Achse, den Hyperbelsinus reellen Arguments auf einer Parallelen zur u -Achse durch den nächsten Trichter. Auf der periodischen Achse liegen die Beträge der trigonometrischen Funktionen Kosinus und Sinus.

Schreitet man von einem Sattelpunkt aus auf der v -Achse bis zu einem Nachbartrichter oder auf der u -Achse oder einer Parallelen zu ihr bis zu unendlich großen Werten fort, so bleibt die Phase κ , wie Abb. 210 zeigt, konstant; und zwar ist sie entweder gleich 0° oder gleich 180° . Für manche Anwendungen sind diese „Kreuze konstanter Phase“ von besonderer Wichtigkeit.

Für hohe u kann man schreiben:

$$C_{\angle \kappa} = \mathfrak{Cof} u (\cos v + j \sin v) = \mathfrak{Cof} u \angle v. \quad (813)$$

In der Tat entspricht die in der Abbildung eingetragene κ -Teilung am äußersten Rande der Zeichnung fast vollkommen der v -Teilung.

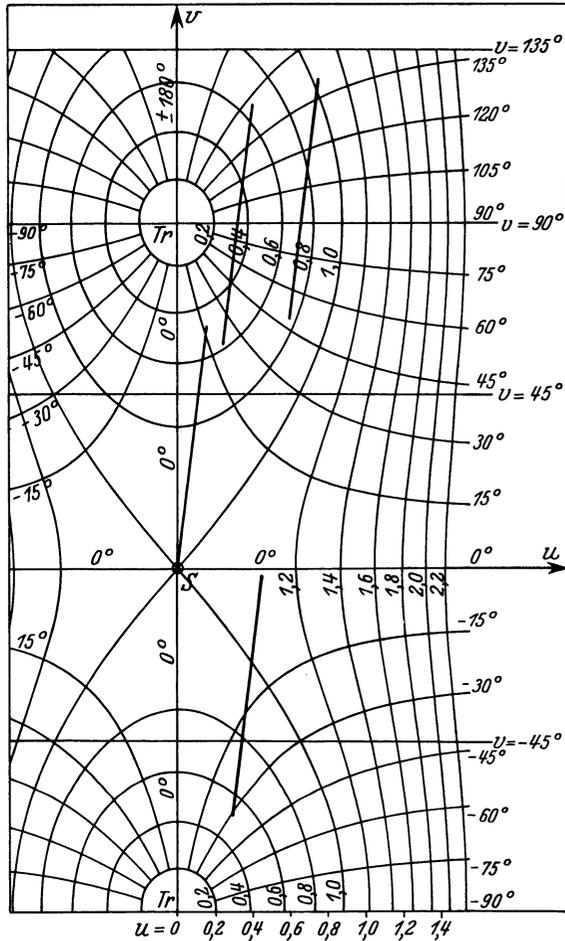


Abb. 210.

§ 242. Veranschaulichung des Stromverlaufs. Da nach § 231, Gleichung (776), der eine Leitung durchfließende Strom dem $\mathfrak{Cof}(g(1 - \xi) + r_e)$ proportional ist, kann man mit dem Kosinusrelief den Verlauf des Effektivwerts des Stromes auf einer Leitung veranschaulichen.

Man erkennt sofort z. B. das Folgende: Da bei Anpassung die Leitungsstrecke auf dem oberen Steilabfall des Tales liegt, also weit weg von der Talsohle und der periodischen Achse, hat man bei Anpassung niemals Knoten oder Bäuche, also immer fortschreitende Wellen. Nach dem am Schlusse des vorigen Paragraphen Gesagten dreht sich die Phase des Stroms beim Fortschreiten der Welle gleichmäßig weiter.

Bei Kurzschluß dagegen wie bei Leerlauf endigt die Leitungsstrecke auf der periodischen Achse. Deshalb hat man auf der verlustlosen Leitung bei Kurzschluß und Leerlauf stehende Wellen. Bei Kurzschluß liegt am Ende ein Strombauch (Sattelpunkt!), bei Leerlauf ein Stromknoten (Trichterpunkt!). Je größer der Widerstand und die Ableitung sind, um so mehr weist die Leitungsstrecke von der periodischen Achse weg in das aperiodische Gebiet.

§ 243. Veranschaulichung des Spannungsverlaufs. Die Spannung ist nach § 231, Gleichung (775), dem Hyperbelsinus des Argumentes $g(1 - \xi) + r_e$ proportional. Das Sinusnetz und das entsprechende Sinusrelief unterscheidet sich von dem Kosinusnetz nur durch die Bezifferung. Denn es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}in(u + jv) &= \mathfrak{S}in u \cos v + j \mathfrak{C}os u \sin v \\ &= j \{ \mathfrak{C}os u \cos(90^\circ - v) - j \mathfrak{S}in u \sin(90^\circ - v) \} \\ &= \mathfrak{C}os(u + j(v - 90^\circ)) \angle 90^\circ. \end{aligned} \quad (814)$$

Den Betrag $\mathfrak{S}in(u + jv)$ findet man daher im Kosinusnetz an der Stelle $u, v - 90^\circ$; die dort abgelesene Phase hat man noch um 90° zu vergrößern.

Zahlenbeispiel. Es sei $u = 1,0, v = 30^\circ$. Dann liest man aus dem Kosinusnetz unmittelbar $C = 1,46, \kappa = 24^\circ$ ab. Zu einem um $v = 90^\circ$ tiefer liegenden Punkt gehört der Betrag $1,28$ und die Phase -53° . Es ist also

$$\mathfrak{C}os(1 + j30^\circ) = 1,46 \angle 24^\circ; \quad \mathfrak{S}in(1 + j30^\circ) = 1,28 \angle 37^\circ.$$

Um den Verlauf der Spannung auf einer Leitung zu veranschaulichen, kann man demnach, statt ein besonderes Sinusnetz herzustellen, im Kosinusnetz eine zweite Leitungsstrecke um 90° nach unten verschoben zeichnen. Man erkennt sofort, daß zwischen den (meist allerdings nicht voll ausgebildeten) Spannungs- und Stromknoten immer eine räumliche Phasendifferenz von einer Viertelwellenlänge besteht.

Das Kosinusnetz kann natürlich auch dazu dienen, gemäß den Gleichungen des § 231 die Effektivwerte der Spannung und des Stroms an jeder beliebigen Stelle der Leitung mit geringer Rechenmühe absolut zu bestimmen.

§ 244. Veranschaulichung des Leistungsverlaufs. Nennen wir die rechtwinkligen Koordinaten des Anfangspunktes der Leitung u_1, v_1 , des Endpunktes u_2, v_2 , und lassen wir die Koordinaten eines beliebigen Punktes ohne Index, setzen wir also

$$\left. \begin{aligned} g(1 - \xi) + r_e &= u + jv, \\ g + r_e &= u_1 + jv_1, \\ r_e &= u_2 + jv_2, \end{aligned} \right\} \quad (815)$$

so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U} &= \mathfrak{U}_1 \frac{\mathfrak{S}in(u + jv)}{\mathfrak{S}in(u_1 + jv_1)}, \\ \mathfrak{I} &= \frac{\mathfrak{U}_1}{\mathfrak{I}} \frac{\mathfrak{C}os(u + jv)}{\mathfrak{S}in(u_1 + jv_1)}. \end{aligned} \right\} \quad (816)$$

Die komplexe Leistung wird daher

$$\mathfrak{U} \mathfrak{I}^* = \frac{|\mathfrak{U}_1|^2}{\mathfrak{I}^*} \frac{\mathfrak{S}in(u + jv) \mathfrak{C}os(u + jv)^*}{\mathfrak{S}in(u_1 + jv_1) \mathfrak{S}in(u_1 + jv_1)^*}$$

oder nach Anhang 5 c):

$$\mathfrak{U} \mathfrak{I}^* = \frac{|\mathfrak{U}_1|^2}{|\mathfrak{I}|} \angle \zeta \cdot \frac{\mathfrak{S}in 2u + j \sin 2v}{\mathfrak{C}os 2u_1 - \cos 2v_1}. \quad (817)$$

Der hier rechts auftretende Bruch erinnert an die Formel

$$\Re g(u + jv) = T \angle \tau = \frac{\Im \sin 2u + j \sin 2v}{\Re \cos 2u + \cos 2v}. \quad (818)$$

Wir ersetzen daher $\sin 2v$ durch $\Im \sin 2u \cdot \operatorname{tg} \tau$ und spalten die Wirkleistung ab:

$$\begin{aligned} N &= \frac{|u_1|^2}{|\mathfrak{B}|} \frac{\Im \sin 2u}{\Re \cos 2u_1 - \cos 2v_1} (\cos \zeta - \operatorname{tg} \tau \sin \zeta) \\ &= \frac{|u_1|^2}{|\mathfrak{B}|} \frac{\Im \sin 2u}{\Re \cos 2u_1 - \cos 2v_1} \frac{\cos(\tau + \zeta)}{\cos \tau}. \end{aligned} \quad (819)$$

Hieraus geht hervor, daß es in der komplexen Ebene eine bestimmte Linie, die „Blindleistungslinie“, gibt, auf der die Wirkleistung gleich Null ist. Diese Linie ist gegeben durch die Bedingung

$$\tau + \zeta = \pm 90^\circ. \quad (820)$$

Ein Blick auf das Tangensnetz zeigt, daß bei der verzerrungsfreien Leitung ($\zeta = 0$) die Blindleistungslinie mit der periodischen Achse zusammenfällt. In der Tat ist ja bei der reinen stehenden Welle (die nur bei der verlust- und deshalb auch „verzerrungsfreien“ Leitung möglich ist) die Wirkleistung gleich Null. Bei der Leitung komplexen Wellenwiderstands ist die Blindleistungslinie eine Wellenlinie um die v -Achse.

Nun sei (Abb. 211) der Punkt u, v ein beliebiger Punkt der Leitungsstrecke. Man kann sich durch ihn eine Parallele zur u -Achse gelegt denken und auf dieser den Schnittpunkt mit der Blindleistungslinie suchen; dieser habe die Koordinaten u', v . Dann gilt für den letztgenannten Punkt:

$$\operatorname{tg} \tau' = \frac{\sin 2v}{\Im \sin 2u'} = \operatorname{tg}(\pm 90^\circ - \zeta) = \operatorname{ctg} \zeta, \quad (821)$$

also

$$\Im \sin 2u' = \operatorname{tg} \zeta \sin 2v \quad (822)$$

und daher nach (817)

$$N = \frac{|u_1|^2}{|\mathfrak{B}|} \frac{\cos \zeta}{\Re \cos 2u_1 - \cos 2v_1} (\Im \sin 2u - \Im \sin 2u'). \quad (823)$$

Da die Brüche vor der Klammer vom Ort unabhängig sind, gibt diese Gleichung ein anschauliches Bild von der Ortsabhängigkeit der Leistung. Diese ist dem Höhenunterschied des Kosinusreliefs für $v = 90^\circ$ in den beiden Punkten $u = 2u$ und $u = 2u'$ proportional. Sind die Argumente u und u' hinreichend klein, so kann man noch einfacher die Differenz $u - u'$ als Maß für die Leistung ansehen. Man erkennt, daß diese auf der Leitung entsprechend dem Abfall des Reliefs an den Seitenwänden des Tales allmählich abklingt, daß sich jedoch über dieses exponentielle Abklingen bei der Leitung komplexen Wellenwiderstands eine schwache Wellenlinie lagern kann.

Unsere Darstellung, die von Brown herrührt, zeigt, daß die Leitungsstrecke, sobald der Wellenwiderstand eine von Null verschiedene Phase hat, schon nach dem Energiesatz einen verhältnismäßig großen Winkel mit der periodischen Achse einschließen muß. Denn unter keinen Umständen darf natürlich die Leistung an irgendeiner Stelle beim Fortschreiten der Welle zunehmen.

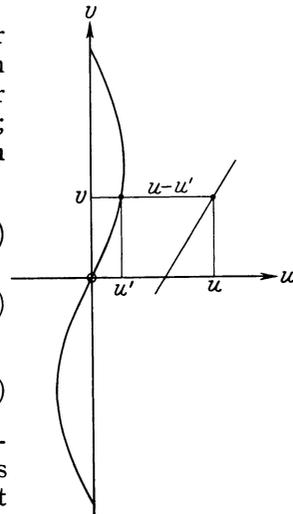


Abb. 211.

§ 245. **Höchste Leistungsaufnahme des Verbrauchers.** Auch aus einer Leitung entnimmt gemäß § 105 derjenige Verbraucher die höchste Leistung, dessen Widerstand \mathfrak{R}_e konjugiert ist zu dem Scheinwiderstand der Leitung, gemessen von den sekundären Klemmen aus. Setzen wir die Stromquelle als widerstandslos voraus, so lautet die Bedingung günstigster Leistungsanpassung nach den Gleichungen (453) des § 157:

$$\mathfrak{R}_e = (\mathfrak{Z} \mathfrak{g} \mathfrak{g})^*. \tag{824}$$

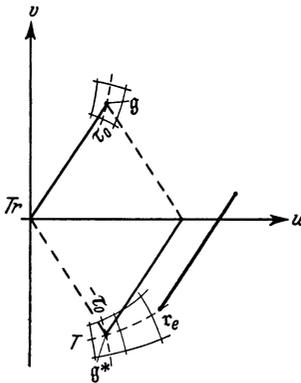


Abb. 212.

Welche Lage der Leitungsstrecke entspricht dieser Bedingung? Länge und Neigung der Leitungsstrecke sind gegeben. Schieben wir sie (Abb. 212) mit ihrem Ende in einen Trichter des Tangensnetzes, so können wir nach der Definition des Netzes an ihrem Anfang (Punkt g) den $\mathfrak{Z} g g$ nach Betrag und Phase (τ_0) ablesen. Der konjugierte Wert hierzu $(\mathfrak{Z} g g)^*$ (mit der Phase $-\tau_0$) liegt spiegelbildlich bezüglich der u -Achse (Punkt g^*); denn es ist $(\mathfrak{Z} g g)^* = \mathfrak{Z} g g^*$. Wäre daher $\zeta = 0$, so wäre die günstigste Lage der Leitungsstrecke diejenige, bei der sie auf der Abszissenachse begänne: $\mathfrak{Z} g r_e = \mathfrak{Z} g g^*$. Ist \mathfrak{Z} komplex, so hat man nach

$$\mathfrak{Z} g r_e = \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{Z}} = \frac{\mathfrak{Z}^*}{\mathfrak{Z}} \mathfrak{Z} g g^* = \mathfrak{Z} g g^* \angle -2\zeta = |\mathfrak{Z} g g| \angle -\tau_0 - 2\zeta \tag{825}$$

zu dem Punkt g^* erst den Punkt r_e zu suchen, dessen τ bei gleichem T um -2ζ größer ist, und in diesem Punkte die Leitungsstrecke endigen zu lassen. Dadurch erhält man deren günstigste Lage.

Bei der im § 240 betrachteten 4-mm-Freileitung ist

$$\mathfrak{Z} g g = \mathfrak{Z} g (0,16 + j \cdot 63^0) = 1,87 \angle 68,1^0.$$

Man hat also das gesuchte Anpassungsmaß r_e dort abzulesen, wo

$$\mathfrak{Z} g r_e = 1,87 \angle -68,1^0 + 2 \cdot 6,8^0 = 1,87 \angle -54,6^0$$

ist, d. h. an der Stelle $r_e = 0,288 - j 65^0 10'$; damit folgt

$$\mathfrak{R}_e = \mathfrak{Z} \mathfrak{Z} g r_e = 554 \Omega \angle -6,8^0 \cdot 1,87 \angle -54,6^0 = 1034 \Omega \angle -61,4^0$$

als günstigster Wert.

Die hier festgestellte günstigste Lage der Leitungsstrecke ist nicht zugleich auch die Lage, bei der der Wirkungsgrad im Sinne der Starkstromtechnik am größten ist. Die Verluste im Innern des Vierpols sind am kleinsten, wenn man seinen Scheinwiderstand von vorn gleich dem konjugierten Wert des Abschlußwiderstands \mathfrak{R}_e macht. Den Beweis findet man bei Brown oder Emde: a. a. O.

§ 246. **Berechnung zusammengesetzter Leitungen.** Durch die Einführung der Anpassungsmaße r_a , r_1 (§ 233) und r_e wird die Berechnung zusammengesetzter Leitungen — vorausgesetzt, daß Netze der Hyperbelfunktionen oder die in § 161 erwähnten Tafeln zur Verfügung stehen — zu einer verhältnismäßig einfachen Aufgabe.

Es seien z. B. zwei Vierpole I und II in Kette geschaltet und vorn durch eine Stromquelle \mathfrak{E} , \mathfrak{R}_a betrieben, hinten durch einen Verbraucher \mathfrak{R}_e abgeschlossen. Dann berechnet man zunächst nach den Gleichungen (783) und (784) des § 233 den Scheinwiderstand \mathfrak{Z}_{1I} , auf den die Stromquelle arbeitet:

$$\mathfrak{Z} g r_{eII} = \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{Z}_{2II}}, \tag{826}$$

$$\mathfrak{W}_{1II} = \mathfrak{B}_{1II} \mathfrak{I}g (g_{II} + r_{eII}), \tag{827}$$

$$\mathfrak{I}g r_{eI} = \frac{\mathfrak{W}_{1II}}{\mathfrak{B}_{2I}}, \tag{828}$$

$$\mathfrak{W}_{1I} = \mathfrak{B}_{1I} \mathfrak{I}g (g_I + r_{eI}). \tag{829}$$

Daraus ergeben sich die Spannung und der Strom an den Klemmen der Stromquelle zu

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U}_1 &= \frac{\mathfrak{W}_{1I}}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{W}_{1I}} \mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{C}o\mathfrak{f} r_{aI} \mathfrak{S}i\mathfrak{n} r_{1I}}{\mathfrak{S}i\mathfrak{n} (r_{aI} + r_{1I})} \mathfrak{E}, \\ \mathfrak{I}_1 &= \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{W}_{1I}} = \frac{\mathfrak{C}o\mathfrak{f} r_{aI} \mathfrak{C}o\mathfrak{f} r_{1I}}{\mathfrak{S}i\mathfrak{n} (r_{aI} + r_{1I}) \mathfrak{B}_{1I}}, \end{aligned} \right\} \tag{830}$$

an den Klemmen zwischen den Vierpolen zu

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U}_2 &= \mathfrak{B}_I \frac{\mathfrak{S}i\mathfrak{n} r_{eI}}{\mathfrak{S}i\mathfrak{n} (g_I + r_{eI})} \mathfrak{U}_1, \\ \mathfrak{I}_2 &= \frac{1}{\mathfrak{B}_I \mathfrak{C}o\mathfrak{f} (g_I + r_{eI})} \mathfrak{I}_1. \end{aligned} \right\} \tag{831}$$

Die letzten Gleichungen können unmittelbar aus (775) und (776) abgelesen werden.

Die Gesamtbetriebsdämpfung setzt sich in dem angenommenen Beispiel nach (497) § 166 aus drei Gliedern zusammen. Dem Eingangsstoß entspricht das Glied

$$\ln \frac{\mathfrak{R}_a + \mathfrak{W}_1}{2 \sqrt{\mathfrak{R}_a \mathfrak{W}_1}} = \ln \frac{\mathfrak{S}i\mathfrak{n} (r_{aI} + r_{1I})}{\sqrt{\mathfrak{S}i\mathfrak{n} 2 r_{aI} \mathfrak{S}i\mathfrak{n} 2 r_{1I}}}. \tag{832}$$

Dazu kommen zwei den Teilvierpolen entsprechende Glieder

$$\ln \sqrt{\frac{\mathfrak{U}_1 \mathfrak{I}_1}{\mathfrak{U}_2 \mathfrak{I}_2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\mathfrak{S}i\mathfrak{n} 2 (g_I + r_{eI})}{\mathfrak{S}i\mathfrak{n} 2 r_{eI}} \tag{833}$$

und

$$\ln \sqrt{\frac{\mathfrak{U}_2 \mathfrak{I}_2}{\mathfrak{U}_3 \mathfrak{I}_3}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\mathfrak{S}i\mathfrak{n} 2 (g_{II} + r_{eII})}{\mathfrak{S}i\mathfrak{n} 2 r_{eII}}. \tag{834}$$

Die Leitungsstrecken, die den Teilvierpolen I und II entsprechen, bilden einen zusammenhängenden Zug wie in Abb. 213 nur dann, wenn die Teilvierpole

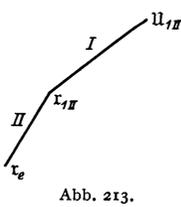


Abb. 213.

aneinander angepaßt sind. Denn nur dann fällt $r_{1II} = \mathfrak{R}r \mathfrak{I}g (\mathfrak{W}_{1II}/\mathfrak{B}_{1II})$ mit $r_{eI} = \mathfrak{R}r \mathfrak{I}g (\mathfrak{W}_{1II}/\mathfrak{B}_{2I})$ zusammen. Im allgemeinen liegen die einzelnen Leitungsstrecken getrennt in der komplexen Ebene (Abb. 214). Da zwischen zwei gegebenen Klemmen in irgendeinem Augenblick nur eine Spannung liegen und durch sie nur ein Strom fließen kann, sind natürlich die Maßstäbe, in denen man den Verlauf der Spannung und des Stroms an dem Netz abliest, von Strecke zu Strecke verschieden.

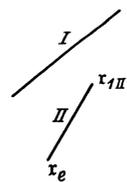


Abb. 214.

X. Pupinkabel.

§ 247. Geschichtliches. O. Heaviside hat schon im Jahre 1893 vorgeschlagen, zur Erhöhung der Übertragungsfähigkeit von Leitungen in gleichen Abständen Spulen in sie einzuschalten.

Pupin hat das große Verdienst, den Gedanken Heavisides in brauchbarer Form in die Praxis der Fernsprecherei eingeführt zu haben¹. Er hat vor allem

¹ Pupin, M. J.: Trans. Am. Inst. Electr. Engs. 17, 245 (1900).

auch als erster eine Regel angegeben, nach der die Induktivität und der Abstand der Spulen bemessen werden können.

Man kann sowohl Freileitungen als auch Kabel pupinisieren. Bei den pupinisierten Freileitungen machen sich jedoch einerseits die Nachteile der Freileitungen in verstärktem Maße geltend; andererseits gehen ihre Vorteile zum Teil verloren. Man hat sich daher entschlossen¹, Freileitungen grundsätzlich nicht mehr zu pupinisieren; es gibt damit nur noch eine Theorie der Pupinkabel.

§ 248. Pupinleitungen und Spulenleitungen. Die Pupinleitungen gehören nicht zu den gleichmäßigen Leitungen; denn sie bestehen aus gleichlangen

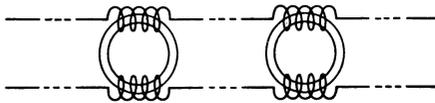


Abb. 215.

Stücken gleichmäßiger Leitung, die durch Spulen voneinander getrennt sind (Abb. 215). Die Stücke gleichmäßiger Leitung nennt man meist „Spulenfelder“.

Die Theorie solcher Zusammenschaltungen ist wesentlich verwickelter als die der gleichmäßigen Leitungen. Wir bekommen aber eine für viele Zwecke ausreichende Näherung, wenn wir uns die Pupinleitungen durch „Spulenleitungen“ oder „Drosselketten“² ersetzt denken, d. h. durch Gebilde, die abwechselnd aus Querkondensatoren und Längsspulen zusammengesetzt sind. Die Ableitung und die Kapazität dieser ersetzenden Kondensatoren und den Wirkwiderstand und die Induktivität dieser ersetzenden Spulen denkt man sich ebenso groß wie jedesmal die entsprechenden Größen eines Spulenfeldes und einer Spule zusammengenommen.

Um die Vierpoltheorie in einfacher Form anwenden zu können, denken wir uns die Spulenleitung zunächst (Abb. 216) so aufgebaut, daß sie je mit einer

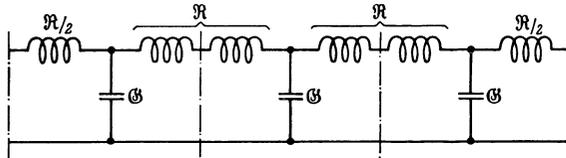


Abb. 216.

halben Spule $R/2$ beginnt und endet, während die inneren Spulen den komplexen Widerstand R , die Kondensatoren den komplexen Leitwert G haben. Wir können dann die ganze Leitung durch Schnitte

mitten durch die inneren Spulen in gleiche symmetrische und deshalb aneinander angepaßte „Sternschaltungen“ zerlegen (§ 211).

Wir können uns die Spulenleitung aber auch so aufgebaut denken, daß sie mit je einem halben Kondensator, also je einem halben Spulenfeld, beginnt und

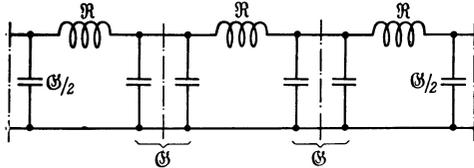


Abb. 217.

endet. Dann können wir die ganze Leitung (Abb. 217) durch Schnitte mitten durch die Spulenfelder in lauter gleiche symmetrische angepaßte Dreiecksschaltungen zerlegen (§ 212).

Die Zerlegung in Dreiecksschaltungen entspricht der in Deutschland üblichen Bauart der Pupinleitungen.

§ 249. Dämpfungsmaß und Winkelmaß der widerstandsfreien Spulenleitung. Ist s die Länge des Spulenfeldes und gibt man den auf die Spulen bezüglichen Größen den Index s , den auf die Felder bezüglichen den Index o , so ist nach den

¹ Verhandlungen des CCI S. 265 (1930).

² Wagner, K. W.: Arch. Elektrot. 8, 61 (1919).

Voraussetzungen des vorigen Paragraphen

$$\left. \begin{aligned} \Re &= sR_0 + R_s + j\omega(sL_0 + L_s), \\ \Im &= j\omega(sC_0 + C_s). \end{aligned} \right\} \quad (835)$$

Wir vernachlässigen der Einfachheit wegen zunächst die sämtlichen (an sich nicht etwa unwesentlichen) Widerstände, die sehr kleine Kapazität C_s der Spule und die ebenfalls sehr kleine Induktivität sL_0 der Leitung. Damit erhalten wir nach (681), § 211 oder (685), § 212 als erste Näherung für das Übertragungsmaß des einzelnen Gliedes

$$\mathcal{C}o\{g = 1 + \frac{\Re \Im}{2} = 1 - \frac{\omega^2}{2} s C_0 L_s. \quad (836)$$

Dieser Ausdruck ist reell und nimmt von dem Werte 1, den er für die Frequenz $\omega = 0$ hat, stetig ab bis zu negativ unendlich großen Werten. Was daraus folgt, erkennt man am anschaulichsten mit Hilfe des Kosinusnetzes (§ 241), indem man sich in diesem die „Frequenzkurve“ des Übertragungsmaßes gezeichnet denkt. Der hyperbolische Kosinus eines komplexen Arguments $g = b + ja$ ist reell nur auf den beiden Achsen und auf den durch die Sättel gehenden Parallelen zur reellen Achse. Die Frequenzkurve kann also nur aus Stücken dieser Linien bestehen. Da $\mathcal{C}o\{g$ — bei der Frequenz $\omega = 0$ mit dem Werte +1 beginnend — über Null und -1 nach dem negativ Unendlichen hin abnimmt, beginnt die Frequenzkurve (Abb. 218) in einem Sattel, fällt auf der imaginären Achse (wo $b = 0$ ist) in den nächsten Trichter, steigt — immer noch auf der imaginären Achse — mit der Phase $\pm 180^\circ$ auf den nächsten Sattel — wir nennen die zugehörige Frequenz ω_0 — und läuft dann, rechtwinklig umbiegend, über der durch den zweiten Sattel gezogenen Parallelen zur reellen Achse die Seitenwand des Kosinusreliefs hinauf. Zwischen den beiden Sätteln ist also das Dämpfungsmaß konstant gleich Null, während sich das Winkelmaß ändert; auf der Parallelen zur reellen Achse dagegen ist das Winkelmaß konstant gleich einem ungeradzahligen Vielfachen von 180° , während das Dämpfungsmaß zunimmt. Das senkrechte Stück der Frequenzkurve zwischen den beiden Sätteln ($0 < \omega < \omega_0$) entspricht einem Durchlaßbereich des Gliedes, das horizontale ($\omega > \omega_0$) einem Sperrbereich.

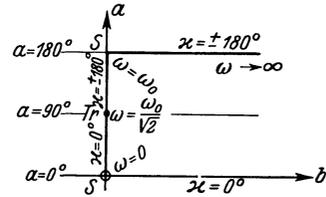


Abb. 218.

Der zweite Sattel trennt den Durchlaßbereich von dem Sperrbereich. Wir nennen die zugehörige Frequenz $f_0 = \omega_0/2\pi$ die „Grenzfrequenz“; sie ergibt sich aus der Bedingung:

$$\mathcal{C}o\{g = -1 = 1 - \frac{\omega_0^2}{2} s C_0 L_s, \quad (837)$$

also

$$\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{s C_0 L_s}}; \quad f_0 = \frac{1}{\pi \sqrt{s C_0 L_s}}. \quad (838)$$

Da wir bei unserer Ableitung alle Widerstände vernachlässigt haben, beruht die geringe Durchlässigkeit der Spulenleitungen oberhalb ihrer Grenzfrequenz nicht auf einer Umwandlung elektromagnetischer Energie in Wärme, sondern auf einer Spannungsteilerwirkung.

Wir wollen das gewonnene Ergebnis auch rechnerisch ableiten. Nach unserer Ausgangsgleichung ist

$$\mathcal{C}o\{g = \mathcal{C}o\{b \cos a + j \Im \sin b \sin a = 1 - \frac{\omega^2}{2} s C_0 L_s. \quad (839)$$

Da die rechte Seite reell ist, muß entweder $\mathfrak{C}\mathfrak{i}\mathfrak{n} b$ oder $\sin a$ gleich Null sein. Wir nehmen zuerst $\mathfrak{C}\mathfrak{i}\mathfrak{n} b = 0$ an, also $\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f} b = 1$; dann folgt

$$\cos a = 1 - \frac{\omega^2}{2} s C_0 L_s. \quad (840)$$

Diese Lösung ist nur möglich, solange $\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f} g$ zwischen $+1$ und -1 (zwischen den beiden Sätteln) liegt, also für die niedrigeren Frequenzen. Nehmen wir dagegen $\sin a = 0$ an, also $\cos a = \pm 1$, so folgt:

$$\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f} b = \pm \left(1 - \frac{\omega^2}{2} s C_0 L_s \right). \quad (841)$$

Da $\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f} b$ immer ≥ 1 sein muß, ist diese Lösung nur möglich, wenn $\omega > \omega_0$ ist und wenn wir das untere Zeichen wählen:

$$\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f} b = \frac{\omega^2}{2} s C_0 L_s - 1. \quad (842)$$

Die Gleichungen (840) und (842) sagen aus, wie sich das Winkelmaß im Durchlaßbereich und das Dämpfungsmaß im Sperrbereich ändern.

Außer der Grenzfrequenz ist auch noch die „Trichterfrequenz“ ω_m eine ausgezeichnete Frequenz. Für sie gilt

$$\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f} g = 0 = 1 - \frac{\omega_m^2}{2} s C_0 L_s \quad (843)$$

oder

$$\omega_m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{s C_0 L_s}}; \quad f_m = \frac{1}{\pi \sqrt{2 s C_0 L_s}}. \quad (844)$$

Sie beträgt also 70,7% der Grenzfrequenz; die Frequenzteilung der Abb. 218 ist offenbar ungleichmäßig.

Die Grenzfrequenz der mittellangen Pupinleitungen liegt meist etwas unterhalb von 3000 Hz.

Die Gleichungen (840) und (842) lassen sich durch Benutzung der Rechenregeln $\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f} b + 1 = 2 \mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f}^2 \left(\frac{b}{2} \right)$ und $1 - \cos a = 2 \sin^2 \left(\frac{a}{2} \right)$ in die etwas einfacheren Formen

$$\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f} \frac{b}{2} = \frac{\omega}{2} \sqrt{s C_0 L_s} \quad \text{und} \quad \sin \frac{a}{2} = \frac{\omega}{2} \sqrt{s C_0 L_s} \quad (845)$$

bringen. Führt man hier die Grenzfrequenz ω_0 ein, und bezieht man, wie üblich, die treibende Frequenz ω auf die Grenzfrequenz ω_0 als Einheit, indem man ihren Zahlenwert η nennt, so erhält man:

$$\mathfrak{C}\mathfrak{o}\mathfrak{f} \frac{b}{2} = \eta \quad \text{und} \quad \sin \frac{a}{2} = \eta. \quad (846)$$

Die Frequenzabhängigkeiten des Dämpfungsmaßes und des Winkelmaßes eines Spulenleitungsgliedes werden daher durch die Abb. 219 und 220 dargestellt.

Betrachtet man diese beiden Kurven von der Rückseite des Papiers aus gegen das Licht, und zwar so, daß die η -Achsen nach oben weisen, so stellt sich die linke Kurve als halbe Kettenlinie, die rechte unterhalb $a = 180^\circ$ als Viertelsinuslinie dar.

Für kleine η , also niedrige Frequenzen, ist $a = 2\eta = \frac{2\omega}{\omega_0} = \omega \sqrt{s C_0 L_s}$, also wie bei gleichmäßigen Leitungen der Frequenz proportional. Der steile Anstieg des Winkelmaßes in der Nähe der Grenzfrequenz ist für die Fortpflanzung von Wellen auf langen Pupinleitungen von großer Bedeutung.

Hat man statt eines Drosselkettengliedes deren eine größere Zahl, z. B. n , so ist die Gesamtdämpfung wegen der Anpassung n mal so groß als die eines einzelnen Gliedes. Dadurch wächst die Steilheit des Dämpfungsanstiegs. Für $\eta = 1,2$ z. B. ergibt sich nach (846) bereits eine Dämpfung von 1,24 Neper je Glied. Bei einer ganzen Leitung von 40 Gliedern macht das bereits rund 50 Neper aus.

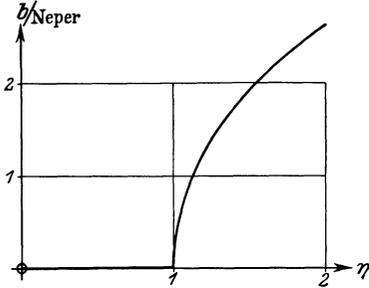


Abb. 219.

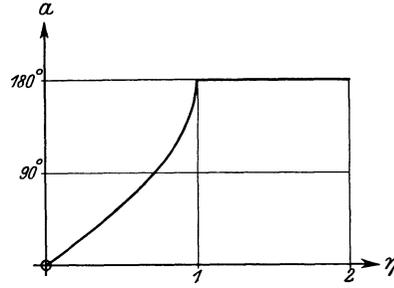


Abb. 220.

§ 250. Dämpfungsmaß und Winkelmaß einer einfachen Sternschaltung bei Berücksichtigung der Widerstände. Wir setzen zunächst wieder eine beliebige einfache Stern- oder Dreiecksschaltung voraus. Den Betrag des in der Gleichung für $\mathfrak{C}o\mathfrak{f}g$ vorkommenden Produkts $\Re\mathfrak{G}$ nennen wir $4r$, seine Phase φ . Dann ist

$$\mathfrak{C}o\mathfrak{f}g = 1 + 2r \angle \varphi, \tag{847}$$

und wir können das Reelle von dem Imaginären trennen:

$$\mathfrak{C}o\mathfrak{f}b \cos a - 1 = 2r \cos \varphi, \tag{848}$$

$$\mathfrak{S}in b \sin a = 2r \sin \varphi. \tag{849}$$

Um aus diesen Gleichungen zu gegebenem r und φ die gesuchten Maße b und a zu berechnen, quadrieren und addieren wir sie:

$$\mathfrak{C}o\mathfrak{f}^2 b \cos^2 a + \mathfrak{S}in^2 b \sin^2 a + 1 - 2\mathfrak{C}o\mathfrak{f}b \cos a = 4r^2. \tag{850}$$

Ersetzen wir hier die beiden Sinus durch die beiden Kosinus, so folgt

$$\mathfrak{C}o\mathfrak{f}^2 b + \cos^2 a - 2\mathfrak{C}o\mathfrak{f}b \cos a = 4r^2$$

oder

$$\mathfrak{C}o\mathfrak{f}b - \cos a = \pm 2r. \tag{851}$$

Vor $2r$ kann man das untere Vorzeichen streichen, weil $\mathfrak{C}o\mathfrak{f}b$ größer als 1 sein muß und r als Betrag positiv ist. Wir entnehmen der Gleichung den $\cos a$ und setzen ihn in (848) ein:

$$\mathfrak{C}o\mathfrak{f}b (\mathfrak{C}o\mathfrak{f}b - 2r) - 1 = 2r \cos \varphi,$$

also

$$\mathfrak{C}o\mathfrak{f}^2 b - 2r\mathfrak{C}o\mathfrak{f}b = 1 + 2r \cos \varphi \tag{852}$$

und

$$\mathfrak{C}o\mathfrak{f}b = r \pm \sqrt{r^2 + 2r \cos \varphi + 1}, \tag{853}$$

$$\cos a = -r \pm \sqrt{r^2 + 2r \cos \varphi + 1}. \tag{854}$$

Damit sind die Maße b und a voneinander getrennt.

§ 251. Anwendung auf das Spulenleitungsglied. Es empfiehlt sich, nun die folgenden Abkürzungen einzuführen:

$$\left. \begin{aligned} sR_0 + R_s &= sR, & sG_0 + G_s &= sG, \\ sL_0 + L_s &= sL, & sC_0 + C_s &= sC. \end{aligned} \right\} \tag{855}$$

Die Größen R, L, G, C stellen sozusagen den bezogenen Widerstand, die bezogene Induktivität, Ableitung und Kapazität der Spulenleitung dar. Annähernd ist natürlich

$$L = \frac{L_s}{s}, \quad G = G_0, \quad C = C_0, \quad (856)$$

während die beiden Glieder R_0 und R_s/s , aus denen sich R zusammensetzt, von derselben Größenordnung sind.

Wir setzen weiter [vgl. (838)]

$$\omega = \omega_0 \eta = \frac{2 \eta}{s \sqrt{LC}} \quad (857)$$

und

$$\frac{sR}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = b_r, \quad \frac{sG}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} = b_g. \quad (858)$$

Der Wert $b_1 = b_r + b_g$ ist gleich der Dämpfung, die einem Stück gleichmäßiger Leitung von der Länge s und den Eigenschaften R, L, G, C zukäme; er ist immer klein, weil er sich auf eine — nicht herstellbare — gleichmäßige Leitung von der hohen Induktivität L und ein nur kurzes Stück von ihr bezieht. Größenordnungsmäßig kann man b_1 etwa gleich 0,05 setzen; b_g ist praktisch immer klein gegen b_r .

Mit (857) und (858) wird

$$\Re \mathfrak{G} = 4r \angle \varphi = s^2 (R + j \omega L)(G + j \omega C) = 4(b_r + j \eta)(b_g + j \eta), \quad (859)$$

also

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{(b_r b_g - \eta^2)^2 + b_1^2 \eta^2}, \\ 2r \cos \varphi &= 2(b_r b_g - \eta^2) \end{aligned} \right\} \quad (860)$$

und daher

$$\begin{aligned} \Im \mathfrak{G} b &= \sqrt{(b_r b_g - \eta^2)^2 + b_1^2 \eta^2} \\ &\pm \sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (b_1^2 - 2 b_r b_g) \eta^2 + 2 b_r b_g + b_r^2 b_g^2}. \end{aligned} \quad (861)$$

Keht man das Vorzeichen des ersten Glieds der rechten Seite um, so erhält man die entsprechende Gleichung für den trigonometrischen Kosinus des Winkelmaßes.

§ 252. Diskussion des Frequenzgangs der Dämpfung. Für ganz niedrige Frequenzen zunächst wird

$$\Im \mathfrak{G} b \approx 1 + \frac{b^2}{2} \approx b_r b_g + (1 + b_r b_g) \quad (862)$$

(das untere Vorzeichen der zweiten Wurzel ist nicht zu gebrauchen), also [Anhang 4. e)]

$$b \approx 2 \sqrt{b_r b_g} = s \sqrt{RG}. \quad (863)$$

D. h. die Kurve des Dämpfungsmaßes beginnt mit einem niedrigen Wert, der von der Höhe des Widerstands und der Ableitung abhängt.

Bei höheren Frequenzen erschwert die Ableitungsdämpfung b_g die Diskussion. Wir vernachlässigen sie und erhalten unter der Voraussetzung, daß das Glied $b_1^2 \eta^2$ neben $(1 - \eta^2)^2$ als klein angesehen werden kann:

$$\Im \mathfrak{G} b \approx 1 + \frac{b^2}{2} = \eta \sqrt{\eta^2 + b_1^2} + (1 - \eta^2) \left(1 + \frac{b_1^2 \eta^2}{2(1 - \eta^2)^2} \right). \quad (864)$$

Führen wir hier die Abkürzung

$$\eta = b_1 \sin x \quad (865)$$

ein, so ergibt sich

$$\frac{b^2}{2} = b_1^2 \left(\text{Sin } x \text{ Cos } x - \text{Sin}^2 x + \frac{\eta^2}{2(1-\eta^2)} \right) = \frac{b_1^2}{2} \left(1 - e^{-2x} + \frac{\eta^2}{1-\eta^2} \right)$$

oder endlich
$$\frac{b}{b_1} = \sqrt{\frac{1}{1-\eta^2} - e^{-2x}}. \tag{866}$$

Hier kann man drei Frequenzbereiche unterscheiden:

a) Die Frequenz sei so niedrig, daß man nicht nur η^2 neben 1 vernachlässigen, sondern auch e^{-2x} durch $1 - 2x$ und $\text{Sin } x$ durch x ersetzen kann. Dann wird

$$b = b_1 \sqrt{2x} \approx b_r \sqrt{\frac{2\eta}{b_r}} = s \sqrt{\frac{\omega RC}{2}}. \tag{867}$$

In diesem Bereich verhält sich also nach § 218 das Pupinkabel wie ein gewöhnliches; seine Spulen sind noch nicht wirksam.

b) Die Frequenz sei so hoch, daß nur noch η^2 , aber nicht mehr x als klein angesehen werden kann. Dann gilt¹:

$$\frac{b}{b_1} = \sqrt{1 - e^{-2x}}. \tag{868}$$

In diesem Bereiche empfiehlt es sich, sowohl b wie η auf b_1 als Einheit zu beziehen; dann besteht zwischen b und η eine von physikalischen Konstanten freie, also für alle Pupinleitungen gleiche Beziehung, die durch die Kurve Abb. 221 veranschaulicht wird. Bei Leitungen hoher Grenzfrequenz fällt dieser Bereich in das Gebiet der tiefen Sprechfrequenzen.

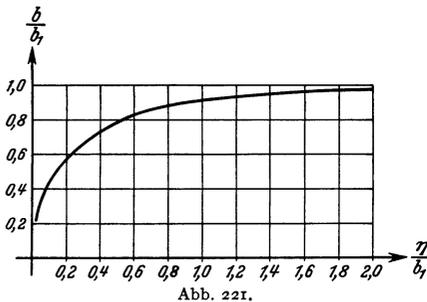


Abb. 221.

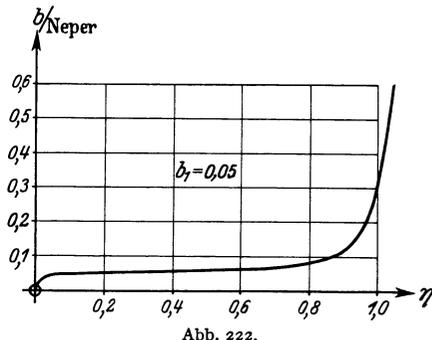


Abb. 222.

c) Die Frequenz sei so hoch, daß in (866) die Exponentialfunktion ganz weggelassen werden kann. Dann gilt²:

$$b = \frac{b_1}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{b_1}{\cos(\text{arc sin } \eta)}. \tag{869}$$

Die folgende Tabelle und Abb. 222 zeigen, wie die Dämpfung in diesem Gebiet bei wachsender Frequenz erst langsam, dann rascher ansteigt.

η	$\cos(\text{arc sin } \eta)$	b/b_1	η	$\cos(\text{arc sin } \eta)$	b/b_1
0,1	0,995	1,005	0,6	0,800	1,250
0,2	0,980	1,021	0,7	0,714	1,400
0,3	0,954	1,048	0,8	0,600	1,667
0,4	0,916	1,091	0,9	0,436	2,294
0,5	0,866	1,155	0,95	0,3123	3,202

¹ Die Formel deckt sich mit der Rechenvorschrift bei H. F. Mayer: *Telegr.- u. Fernspr.-Techn.* 16, 163 (1927).

² Der $\cos(\text{arc sin } \eta)$ läßt sich aus einer Tabelle der trigonometrischen Funktionen unmittelbar ablesen.

Die Gleichung (869) gilt bis in die nächste Nähe der Grenzfrequenz. Für $\eta = 0,95$ und $b_1 = 0,05$ z. B. ergäbe die Entwicklung der zweiten Wurzel von (861) den Faktor [vgl. (864)] $1 + 0,119 - 0,007$; der Fehler in b betrüge also rund 3%.

Bei der Grenzfrequenz selbst muß man auf (861) zurückgehen. Man erhält

$$\text{Gof } b = 1 + b_1 \quad \text{oder} \quad b \approx \sqrt{2b_1}, \quad (870)$$

also z. B. für $b_1 = 0,05$ $b = 0,315 = 6,3 b_1$.

Oberhalb der Grenzfrequenz ist nur das untere Vorzeichen vor der zweiten Wurzel von (861) zu gebrauchen; man erhält

$$\text{Gof } b \approx \eta^2 + \frac{b_1^2}{2} - (1 - \eta^2) - \frac{b_1^2 \eta^2}{2(1 - \eta^2)} = 2\eta^2 - 1 + \frac{b_1^2}{2} \frac{2\eta^2 - 1}{\eta^2 - 1}. \quad (871)$$

Das ist annähernd dasselbe, was wir auch im § 249 abgeleitet haben.

Das Dämpfungsmaß einer ganzen Spulenleitung aus n Gliedern ist natürlich auch hier wieder n mal so groß wie das Dämpfungsmaß eines einzelnen Gliedes, also für niedrige Sprechfrequenzen

$$n b_1 = \frac{n s R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{l R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \beta_1 l. \quad (872)$$

Für $sR = 134 \Omega$, $sL = 180 \text{ mH}$, $sC = 70 \text{ nF}$ ergibt sich z. B. $b_1 = 0,042$, also bei 1,83 km Spulenabstand $\beta = 23/\text{Mm}$.

§ 253. Grenzfrequenz und Verzerrungsfreiheit. Da das Dämpfungsmaß in der Nähe der Grenzfrequenz stark zu wachsen beginnt, müssen¹ auch die höchsten für die Übertragung wesentlichen Frequenzen noch hinreichend unterhalb der Grenzfrequenz liegen. Erfahrungsgemäß genügt eine Grenzfrequenz von etwa 2200 Hz auch bei kurzen Leitungen nur geringen Ansprüchen. Über Leitungen, deren Grenzfrequenz in der Nähe von 2700 Hz liegt, kann man sich gut verständigen; soll jedoch etwa Musik mit allen Feinheiten übertragen werden, so muß man eine noch wesentlich höhere Grenzfrequenz wählen.

Man kann sich diese Erfahrungstatsachen an Hand der Tabelle des § 252 verständlich machen. Wählt man eine Grenzfrequenz von 2200 Hz, so ist das Dämpfungsmaß des einzelnen Gliedes

$$\text{für } f = 0,4 f_0 = 880 \text{ Hz gleich } 1,091 b_1,$$

$$\text{für } f = 0,9 f_0 = 1980 \text{ Hz gleich } 2,294 b_1.$$

In einem Pupinkabel von 40 Gliedern also, dessen Dämpfung $b_1 = 0,05$ ist, wird die Frequenz 800 Hz mit 2,18 Neper, die Frequenz 1980 Hz aber bereits mit 4,6 Neper gedämpft. Die Frequenzen in der Gegend von 800 Hz gelten als die für das Fernsprechen wichtigsten; eine nur um das musikalische Intervall einer None höhere Schwingung erfährt also bei der gewählten Grenzfrequenz bereits eine Mehrdämpfung um 2,4 Neper.

Bei der Übertragung von Musik müssen auch die Klangfarben der einzelnen Instrumente usw. richtig wiedergegeben werden. Diese hängen aber von den Stärkeverhältnissen der Obertöne ab, die bei zu tiefer Grenzfrequenz ausgelöscht werden. Daher die scharfen Anforderungen, die man z. B. an die Rundfunksprechkreise stellen muß.

§ 254. Wahl der Spuleninduktivität. Warum legt man die Grenzfrequenz nicht einfach so hoch, daß sämtliche in der Sprache und in der Musik enthaltenen Frequenzen hinreichend stark übertragen werden? Um eine Antwort auf diese Frage zu erhalten, entfernen wir aus der Gleichung (838) $\omega_0 = 2/(s \sqrt{LC})$

¹ Das Folgende gilt nur für verstärkerlose Pupinverbindungen. Vgl. Abschnitt XVI.

und der ersten Gleichung (858) die bezogene Induktivität L . Dann erhalten wir die Gleichung

$$\beta_1 = \frac{s R C}{4} \omega_0. \quad (873)$$

Hiernach sinkt die Reichweite, wenn man die Grenzfrequenz beispielsweise auf das Doppelte erhöht, auf die Hälfte, vorausgesetzt, daß man die Größen s , R und C konstant hält. Soll die Reichweite durch die Erhöhung der Grenzfrequenz nicht beeinträchtigt werden, so muß man den Spulenabstand oder den Widerstand R verringern; eine wesentliche Änderung der Kapazität ist ja nicht möglich. Verkleinerung des Spulenabstands bedeutet aber Erhöhung der Spulenzahl, also Erhöhung der Pupinisierungskosten¹; Verkleinerung des Widerstands bedeutet Vergrößerung der Leiterquerschnitte, also Erhöhung der Kabelkosten.

Bei den Pupinkabeln wird praktisch immer der zweite Weg eingeschlagen. Für den Spulenabstand wählt man ohne Rücksicht auf die Höhe der Grenzfrequenz einheitlich einen bestimmten Wert — in Deutschland bis vor kurzem meist 2 km, in Amerika 6000 Fuß (= 1,83 km). Soll für einige Sprechkreise, z. B. die Rundfunkkreise, die Grenzfrequenz höher liegen, so wählt man geringeren Leiterwiderstand, also dickere Drähte.

Bei Fernkabeln mit Verstärkern kann es bei den Sprechkreisen erhöhter Grenzfrequenz wirtschaftlich sein, die Verringerung der Reichweite hinzunehmen und dafür mehr Verstärker einzubauen. Verdoppelung der Grenzfrequenz zieht dann nach (873) eine Verringerung des Verstärkerabstands auf die Hälfte nach sich.

Die Erhöhung der Grenzfrequenz kann natürlich nach (838) bei festem Spulenabstand nur durch Verminderung der bezogenen Induktivität L und damit auch der Spuleninduktivität L_s erreicht werden. Man nennt deshalb die Leitungen erhöhter Grenzfrequenz auch „schwach belastete“ oder „leicht pupinierte“ Leitungen.

§ 255. Einfluß der Ableitungsdämpfung. Die Gleichung

$$\beta_1 = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} = r + g \quad (874)$$

zeigt, daß bei erhöhter bezogener Induktivität die Ableitungsdämpfung g wächst. Aber auch bei der Widerstandsdämpfung überlagern sich zwei Einflüsse: sie sinkt zwar unmittelbar durch Erhöhung der Spuleninduktivität, steigt aber gleichzeitig mittelbar durch die damit verbundene Erhöhung des Spulenwiderstandes. Es hat daher Interesse, diejenige bezogene Induktivität zu berechnen, bei der die bezogene Dämpfung ihren kleinsten Wert annimmt.

Der bezogene Widerstand R ist nach

$$R = R_0 + \frac{R_s}{s} = R_0 + \frac{L_s}{s \tau} = R_0 + \frac{L}{\tau} \quad (875)$$

eine lineare Funktion der bezogenen Induktivität L ; τ , die „Zeitkonstante“ der Pupinspule, kann bei einer gegebenen Spulenform annähernd als konstant angesehen werden (vgl. § 261). Bezeichnen wir daher die Differentiation nach L durch einen Punkt, so ergibt sich nach der Regel für die logarithmische Differentiation und nach (874) und (875)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\dot{r}}{r} &= \frac{\dot{R}}{R} - \frac{1}{2} \frac{\dot{L}}{L} = \frac{1}{\tau R} - \frac{1}{2L}, \\ \frac{\dot{g}}{g} &= \frac{1}{2} \frac{\dot{L}}{L} = \frac{1}{2L} \end{aligned} \right\} \quad (876)$$

¹ Die Größe der Spuleninduktivität hat auf die Kosten einen geringeren Einfluß.

und daher

$$\dot{i} + \dot{g} = \left(\frac{1}{\tau R} - \frac{1}{2L} \right) \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{1}{2L} \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} = 0 \quad (877)$$

oder nach Multiplikation mit $2 \sqrt{L/C}$:

$$\frac{1}{\tau} - \frac{R_0 + \frac{L}{\tau}}{2L} + \frac{G}{2C} = 0 \quad (878)$$

oder endlich

$$L = \frac{\tau R_0 C}{C + \tau G}. \quad (879)$$

Demnach muß die Ableitung schon recht hoch sein, wenn sie der Erhöhung der Induktivität eine Grenze setzen soll. Es sei z. B. bei einem 0,9-mm-Kabel:

$$\begin{aligned} R_0 &= 54,6 \frac{\Omega}{\text{km}}, & R_s &= 9 \Omega, & s &= 2 \text{ km}, \\ C_0 &= 33,5 \frac{\text{nF}}{\text{km}}, & L_s &= 200 \text{ mH}, & \tau &= 22,2 \text{ ms}. \\ G_0 &= 0,6 \frac{\mu\text{S}}{\text{km}}, \end{aligned}$$

Hier könnte die niedrigste bezogene Dämpfung erreicht werden durch eine bezogene Induktivität

$$\hat{L} = \frac{22,2 \text{ ms} \cdot 54,6 \frac{\Omega}{\text{km}} \cdot 33,5 \frac{\text{nF}}{\text{km}}}{33,5 \frac{\text{nF}}{\text{km}} + 22,2 \text{ ms} \cdot 0,6 \frac{\mu\text{S}}{\text{km}}} = 870 \frac{\text{mH}}{\text{km}}, \quad (880)$$

also durch eine Spuleninduktivität von 1,74 H. Sollte mit dieser hohen Induktivität die Grenzfrequenz

$$\omega_0 = \frac{2}{s \sqrt{LC}} = \frac{2}{2 \sqrt{100 \text{ mH} \cdot 33,5 \text{ nF}}} = 2750 \text{ Hz} \quad (881)$$

ungeändert bleiben, so müßte der Spulenabstand auf ungefähr den dritten Teil verringert, d. h. die Spulenzahl auf rund das 3fache erhöht werden. Das wäre aber nicht wirtschaftlich; denn die Dämpfung ginge durch diese kostspielige Maßnahme nur von

$$\frac{29,6}{\text{Mm}} \sqrt{\frac{33,5}{100}} + \frac{0,3}{\text{Mm}} \sqrt{\frac{100}{33,5}} = (17,1 + 0,5) \frac{\text{Neper}}{\text{Mm}} \quad (882)$$

auf

$$\frac{46,8}{\text{Mm}} \sqrt{\frac{33,5}{870}} + \frac{0,3}{\text{Mm}} \sqrt{\frac{870}{33,5}} = (9,2 + 1,5) \frac{\text{Neper}}{\text{Mm}} \quad (883)$$

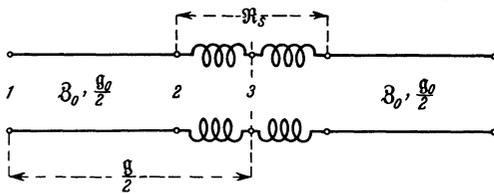


Abb. 223.

herunter.

§ 256. Genauere Theorie des Übertragungsmaßes einer Pupinleitung. Pupinleitungen sind genau genommen keine Spulenleitungen, sondern bestehen aus Stücken gleichmäßiger Leitung, die durch Spulen miteinander verbunden sind. Um das Übertragungsmaß g eines wirklichen Pupinlieds nach Abb. 223 abzuleiten, denken wir uns dieses durch einen Schnitt

mitten durch die Spule (M_s) in zwei zueinander spiegelbildliche Teilvierpole zerlegt, die aneinander angepaßt sind, deren Übertragungsmaße also halb so groß sind wie das gesuchte Übertragungsmaß g . Für die linke Hälfte der Abb. 223 gilt mit den üblichen Zählfeilen, wenn wir den Feldparametern den Index 0 geben:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= G_0 j \frac{g_0}{2} U_2 + Z_0 \sin \frac{g_0}{2} Z_2, \\ Z_1 &= \frac{1}{Z_0} \sin \frac{g_0}{2} U_2 + G_0 j \frac{g_0}{2} Z_2, \\ U_2 &= U_3 + \frac{M_s}{2} Z_3, \quad Z_2 = Z_3, \end{aligned} \right\} \quad (884)$$

also

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \mathfrak{Cof} \frac{g_0}{2} u_3 + \left(\mathfrak{Z}_0 \mathfrak{Sin} \frac{g_0}{2} + \frac{\mathfrak{R}_s}{2} \mathfrak{Cof} \frac{g_0}{2} \right) \mathfrak{Z}_3, \\ \mathfrak{Z}_1 &= \frac{1}{\mathfrak{Z}_0} \mathfrak{Sin} \frac{g_0}{2} u_3 + \left(\mathfrak{Cof} \frac{g_0}{2} + \frac{\mathfrak{R}_s}{2 \mathfrak{Z}_0} \mathfrak{Sin} \frac{g_0}{2} \right) \mathfrak{Z}_3. \end{aligned} \right\} \quad (885)$$

Es ist daher:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Cof} g &= -1 + 2 \mathfrak{Cof}^2 \frac{g}{2} = -1 - 2 \mathfrak{Cof} \frac{g_0}{2} \left(\mathfrak{Cof} \frac{g_0}{2} + \frac{\mathfrak{R}_s}{2 \mathfrak{Z}_0} \mathfrak{Sin} \frac{g_0}{2} \right) \\ &= \mathfrak{Cof} g_0 + \frac{\mathfrak{R}_s}{2 \mathfrak{Z}_0} \mathfrak{Sin} g_0. \end{aligned} \quad (886)$$

Um zu erkennen, wie stark sich das Übertragungsmaß der wirklichen Pupinleitung von dem der Spulenleitung unterscheidet, entwickeln wir die Hyperbelfunktionen auf der rechten Seite von (886) nach Potenzen von g_0 . Nach § 218 ist:

$$|\gamma_0| = |\gamma_0| s = s \sqrt{\beta_0^2 + \alpha_0^2} = s \sqrt{2 \beta_0^2} = s \sqrt{\omega R_0 C_0}, \quad (887)$$

und hieraus folgt z. B. für die Pupinleitung des § 255 bei $\omega = 12000/\text{sec}$:

$$|\gamma_0| = 2 \text{ km} \sqrt{\frac{12000}{\text{s}} \cdot 54,6 \frac{\Omega}{\text{km}} \cdot 33,5 \cdot 10^{-9} \frac{\text{F}}{\text{km}}} = 0,30.$$

Da demnach g_0 nur mäßig klein ist, berücksichtigen wir bei der Entwicklung die Potenzen von g_0 bis zu der vierten einschließlich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Cof} g &= 1 + \frac{g_0^2}{2!} + \frac{g_0^4}{4!} + \frac{\mathfrak{R}_s}{2 \mathfrak{Z}_0} \left(g_0 + \frac{g_0^3}{3!} \right) \\ &= 1 + \frac{g_0}{2 \mathfrak{Z}_0} (g_0 \mathfrak{Z}_0 + \mathfrak{R}_s) + \frac{g_0^2}{12} \cdot \frac{g_0}{\mathfrak{Z}_0} \left(\frac{g_0 \mathfrak{Z}_0}{2} + \mathfrak{R}_s \right). \end{aligned} \quad (888)$$

Nun ist aber nach § 214

$$\frac{g_0}{\mathfrak{Z}_0} = s(G_0 + j \omega C_0), \quad g_0 \mathfrak{Z}_0 = s(R_0 + j \omega L_0). \quad (889)$$

$g_0/(2 \mathfrak{Z}_0) \cdot (g_0 \mathfrak{Z}_0 + \mathfrak{R}_s)$ ist also nichts anderes als $g_1^2/2$. Aber auch für $g_0/(2 \mathfrak{Z}_0) \cdot (g_0 \mathfrak{Z}_0/2 + \mathfrak{R}_s)$ dürfen wir $g_1^2/2$ setzen; denn das Glied mit $g_0^2/12$ ist klein von höherer Ordnung, und der Längswiderstand $g_0 \mathfrak{Z}_0$ der Spulenfelder ist viel kleiner als der komplexe Widerstand \mathfrak{R}_s der Spulen. Wir erhalten daher:

$$\mathfrak{Cof} g \approx 1 + \frac{g_1^2}{2} \left(1 + \frac{g_0^2}{6} \right). \quad (890)$$

Für das Übertragungsmaß g eines wirklichen Pupingliedes ist nicht das beim Drosselglied verwendete Übertragungsmaß g_1 , sondern das korrigierte Übertragungsmaß

$$g_1 \sqrt{1 + \frac{g_0^2}{6}} \approx g_1 + \frac{g_0^2}{12} \cdot g_1$$

maßgebend.

In das Korrektionsglied $g_0^2/12 \cdot g_1$ darf man Näherungswerte einsetzen. Es ist nach § 249 und nach (887)

$$g_1 = b_1 + j a_1 \approx j a_1 = j 2 \eta, \quad (891)$$

$$g_0^2 = (s \sqrt{\omega R_0 C_0} \angle 45^\circ)^2 = j s^2 \eta \omega_0 R_0 C_0 = j 2 \eta s R_0 \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (892)$$

Wir erhalten daher für das korrigierte Übertragungsmaß g_1 :

$$g_{1 \text{ kor}} = b_1 + j a_1 + \frac{1}{12} j 2 \eta j 2 \eta s R_0 \sqrt{\frac{C}{L}} = b_1 - \frac{2}{3} \eta^2 \frac{s R_0}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + j a_1 \quad (893)$$

und demnach für das korrigierte Dämpfungsmaß des Pupingliedes:

$$b = \frac{\frac{s R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} - \frac{2}{3} \eta^2 \frac{s R_0}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}}{\sqrt{1 - \eta^2}} = \frac{R_s + s R_0 \left(1 - \frac{2}{3} \eta^2 \right)}{2 \sqrt{1 - \eta^2}} \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (894)$$

Diese zuerst von Pleijel abgeleitete Formel zeigt, daß das Dämpfungsmaß einer wirklichen Pupinleitung in der Nähe der Grenzfrequenz nicht so stark ansteigt wie das Dämpfungsmaß einer Spulenleitung.

§ 257. Der Frequenzgang des Wellenwiderstands einer verlustfreien Spulenleitung. Nach § 211 und 212 gilt für den Wellenwiderstand einer Spulenleitung die Gleichung

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{\Re}{\mathfrak{G}}} \left(1 + \frac{\Re \mathfrak{G}}{4} \right)^{\pm \frac{1}{2}}, \tag{895}$$

wo das obere Vorzeichen für die Sternschaltung, das untere für die Dreieckschaltung zu nehmen ist. Nun ist für beide Schaltungen

$$\mathfrak{G} \mathfrak{I} g - 1 = \frac{\Re \mathfrak{G}}{2} = 2 \mathfrak{C} \sin^2 \frac{g}{2}; \tag{896}$$

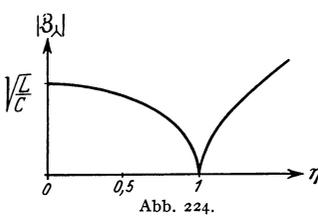
man kann also auch schreiben

$$\mathfrak{Z}_\lambda = \sqrt{\frac{\Re}{\mathfrak{G}}} \mathfrak{C} \mathfrak{I} \frac{g}{2}, \quad \mathfrak{Z}_\Delta = \sqrt{\frac{\Re}{\mathfrak{G}}} \frac{1}{\mathfrak{C} \mathfrak{I} \frac{g}{2}}. \tag{897}$$

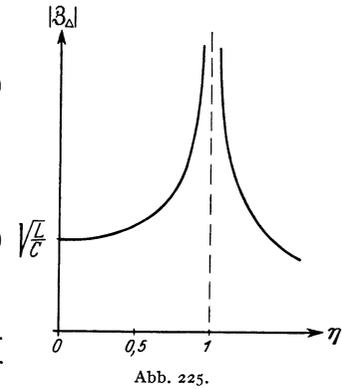
Bei der verlustfreien Spulenleitung ist

$$\left. \begin{aligned} \Re &= j \omega s L, & \mathfrak{G} &= j \omega s C, \\ \mathfrak{C} \sin \frac{g}{2} &= j \eta; \end{aligned} \right\} \tag{898}$$

und daher



$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Z}_\lambda &= \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \eta^2}, \\ \mathfrak{Z}_\Delta &= \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}}. \end{aligned} \right\} \tag{899}$$



Für $\eta < 1$, also für Frequenzen unterhalb der Grenzfrequenz, sind diese

beiden Ausdrücke reell. In diesem Bereich, dem Durchlaßbereich, hat die Spulenleitung also den Charakter eines reinen Widerstandes. Ihr Wellenwiderstand beginnt als Funktion der Frequenz mit dem Werte $\sqrt{L/C}$; er sinkt bei der Sternschaltung bis zu dem Werte 0, er steigt bei der Dreiecksschaltung bis zu dem Werte Unendlich (Abb. 224 und 225). Bei der Grenzfrequenz ent-

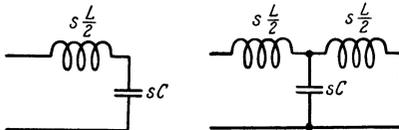


Abb. 226.

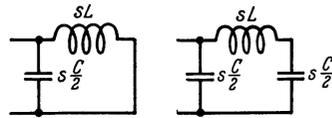


Abb. 227.

steht (vgl. § 159) für den Kurzschlußwiderstand der Sternschaltung Spannungsresonanz, für den Leerlaufwiderstand der Dreiecksschaltung Stromresonanz.

Oberhalb der Grenzfrequenz ist der Wellenwiderstand (wegen $\eta^2 > 1$) rein imaginär, und zwar hat er bei der Sternschaltung den Charakter einer Induktivität, bei der Dreiecksschaltung den einer Kapazität. Bei hohen Frequenzen gibt nämlich, wie die Abb. 226 und 227 zeigen, bei der Sternschaltung die vorgeschaltete halbe Spule, bei der Dreiecksschaltung die parallelgeschaltete Kapazität des halben Spulenfelds den Ausschlag.

Die Abb. 226 und 227 zeigen zugleich, daß der Wellenwiderstand für niedrige Frequenzen in jedem Falle reell sein muß.

§ 258. Der Frequenzgang des Wellenwiderstands einer Spulenleitung bei Berücksichtigung der Verluste. Wir führen unter Vernachlässigung der Ableitung außer dem Frequenzmaß η wieder das Dämpfungsmaß b_1 und den durch (865), § 252 definierten Parameter x ein. Dann wird

$$\frac{\Re}{\Im} = \frac{R + j\omega L}{j\omega C} = \frac{L}{C} \left(1 - j \frac{b_1}{\eta} \right) = \frac{L}{C} \left(1 - j \frac{1}{\Im \sin x} \right), \quad (900)$$

$$1 + \frac{\Re \Im}{4} = 1 - \frac{\omega^2 s^2 L C}{4} + j \frac{\omega s R C}{4} = 1 - \eta^2 + j b_1 \eta. \quad (901)$$

Die Frequenz sei zunächst so tief, daß $1 + \Re \Im / 4 \approx 1$, der Wellenwiderstand also gleich seinem Nennwert gesetzt werden darf. Dann wird

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - j \frac{1}{\Im \sin x}} = Z + j Z'. \quad (902)$$

Quadriert man, so erhält man zur Bestimmung der Komponenten Z und Z' die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} Z^2 - Z'^2 &= \frac{L}{C} \\ \text{und} \quad 2 Z Z' &= -\frac{L}{C \Im \sin x} \end{aligned} \right\} \quad (903)$$

Man überzeugt sich leicht, daß diesen Bedingungen die Werte

$$\left. \begin{aligned} Z &= \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2x}}} \sqrt{\frac{L}{C}}, \\ Z' &= -\frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{aligned} \right\} \quad (904)$$

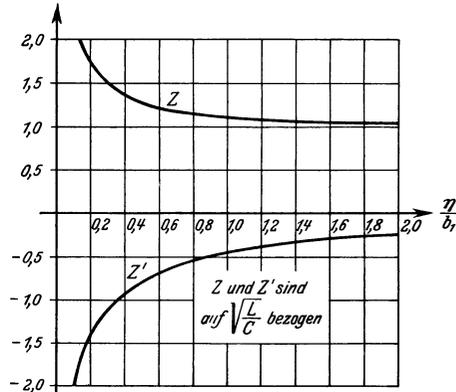


Abb. 228.

genügen. Bezieht man also jetzt die Komponenten von \mathfrak{Z} auf den Wert $\sqrt{L/C}$, η auf den Wert b_1 als Einheit, so erhält man wieder (vgl. § 252) eine von physikalischen Konstanten freie, für alle Pupinleitungen gleiche Darstellung des Frequenzgangs in dem angenommenen Bereich; sie ist in Abb. 228 wiedergegeben.

Für kleine x wird wie beim gleichmäßigen Kabel

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{2^x}} (1 - j) = \sqrt{\frac{L}{C}} \angle -45^\circ = \sqrt{\frac{R}{\omega C}} \angle -45^\circ; \quad (905)$$

für sehr große x

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad Z' = -e^{-x} \sqrt{\frac{L}{C}} \approx -\frac{1}{2 \Im \sin x} \sqrt{\frac{L}{C}} = -\frac{s R}{4 \eta}. \quad (906)$$

Ist die Frequenz so hoch, daß das Glied $\sqrt{1 + \Re \Im / 4}$ berücksichtigt werden muß, so schreibt man

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{\Re}{\Im}} &= \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 - j \frac{b_1}{2 \eta} \right), \\ \sqrt{1 + \frac{\Re \Im}{4}} &= \sqrt{1 - \eta^2} \left(1 + j \frac{b_1 \eta}{2(1 - \eta^2)} \right), \end{aligned} \right\} \quad (907)$$

und erhält nach Anhang 1 b), c):

$$\mathfrak{Z}_\lambda = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \eta^2} - j \frac{sR}{4} \left(\sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\eta}} - \frac{\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} \right) = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 - \eta^2} - j \frac{sR}{4} \frac{1 - 2\eta^2}{\eta \sqrt{1 - \eta^2}}, \quad (908)$$

$$\mathfrak{Z}_\Delta = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}} - j \frac{sR}{4} \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}} \left(\frac{1}{\eta} + \frac{\eta}{1 - \eta^2} \right) = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}} - j \frac{sR}{4} \frac{1}{\eta (1 - \eta^2)^{3/2}}. \quad (909)$$

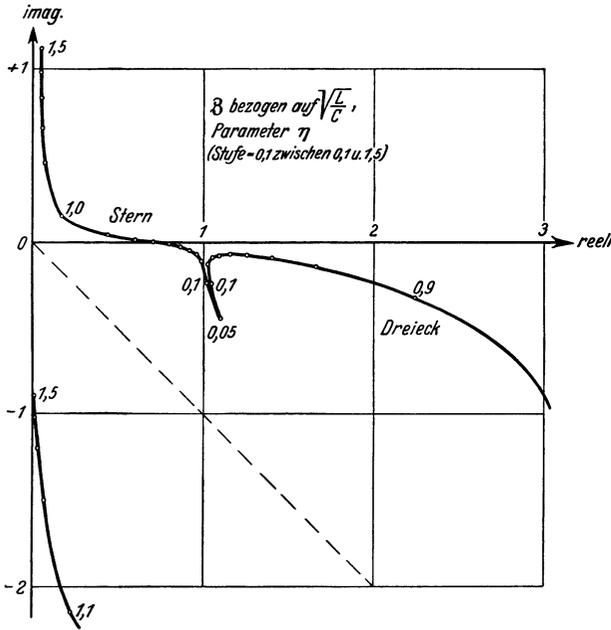


Abb. 229.

Minimum ab, um dann wieder anzusteigen. Die Abszisse des Minimums ergibt sich aus der logarithmischen Differentiation von $\eta (1 - \eta^2)^{3/2}$ zu $\eta = 0,5$; der zugehörige Minimalwert ist $4/(3\sqrt{3}) \cdot sR = 0,77 sR$.

Bei der Grenzfrequenz selbst wird:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{\Re}{\Im}} &= \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 - j \frac{b_1}{2} \right) \approx \sqrt{\frac{L}{C}}, \\ \sqrt{1 + \frac{\Re}{\Im}} &= \sqrt{j b_1}, \end{aligned} \right\} \quad (910)$$

und daher

$$\mathfrak{Z}_\lambda \approx \sqrt{\frac{L}{C}} b_1 \angle 45^\circ = \sqrt{\frac{sR}{2}} \sqrt{\frac{L}{C}} \angle 45^\circ, \quad (911)$$

$$\mathfrak{Z}_\Delta \approx \sqrt{\frac{L}{b_1 C}} \angle -45^\circ = \frac{L}{C} \sqrt{\frac{sR}{2}} \sqrt{\frac{L}{C}} \angle -45^\circ. \quad (912)$$

\mathfrak{Z}_λ ist also gleich dem geometrischen Mittel aus $sR/2$ [vgl. (913)] und $\sqrt{L/C}$, \mathfrak{Z}_Δ gleich dem mit der Potenz $\sqrt{L/C}$ zu diesem Mittelwert inversen Widerstand.

Der Wirkwiderstand sR bleibt also ohne Einfluß auf den reellen Teil des Wellenwiderstands; er ruft nur einen Blindteil hervor.

Bei der Sternschaltung ist der imaginäre Bestandteil zuerst kapazitätsartig, nimmt aber oberhalb von $\eta = 1/\sqrt{2}$, d. h. oberhalb der „Trichterfrequenz“, den Charakter einer Induktivität an. Für diese trennende Frequenz, die sich ja aus den Elementen der einzelnen Masche berechnen läßt, wird demnach der Wellenwiderstand reell.

Bei der Dreiecksschaltung bewahrt der imaginäre Bestandteil seinen Charakter als Kapazität. Sein Betrag nimmt zunächst bis zu einem

Oberhalb der Grenzfrequenz vertauschen Z und Z' , da jetzt $\sqrt{1-\eta^2} = j\sqrt{\eta^2-1}$ zu setzen ist, sozusagen ihre Rollen:

$$\mathfrak{B}_\lambda = \frac{sR}{4} \frac{2\eta^2-1}{\eta\sqrt{\eta^2-1}} + j\sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{\eta^2-1} \approx \frac{sR}{2} + j\sqrt{\frac{L}{C}} \eta, \quad (9I3)$$

$$\mathfrak{B}_\Delta = \frac{sR}{4} \frac{1}{\eta(\eta^2-1)^{3/2}} - j\sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{\eta^2-1}} \approx \frac{sR}{4\eta^4} - j\sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\eta}, \quad (9I4)$$

wobei die zuletzt angegebenen Näherungswerte jedesmal für große η gelten.

Der Gesamtfrequenzgang des Wellenwiderstands bei den beiden Schaltungen wird für $b_1 = 0,05$ durch die beiden Ortskurven der Abb. 229 dargestellt.

§ 259. Einfluß der Anlaufstrecke. Da sich die Frequenzabhängigkeit des Wellenwiderstands, wie wir soeben gesehen haben, beim Übergang von der Stern- zur Dreiecksschaltung von Grund auf ändert, wollen wir jetzt annehmen, einer langen Pupinleitung in Sternschaltung seien auf beiden Seiten je eine halbe Spule und ein Stück Leitung von der veränderlichen Länge $x s$ angefügt. Der Scheinwiderstand \mathfrak{W} des auf diese Weise entstehenden Gebildes kann offenbar in guter Näherung nach dem Ersatzbild Abb. 230 berechnet werden. Berücksichtigt man die Gleichungen (896) und (897) des § 257, so erhält man

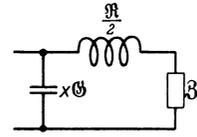


Abb. 230.

$$\begin{aligned} \mathfrak{W} &= \frac{\frac{\Re}{2} + \mathfrak{B}}{1 + x \mathfrak{G} \left(\frac{\Re}{2} + \mathfrak{B} \right)} = \sqrt{\frac{\Re}{\mathfrak{G}}} \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\Re \mathfrak{G}} + \mathfrak{Cof} \frac{\mathfrak{G}}{2}}{1 + \frac{x}{2} \Re \mathfrak{G} + x \sqrt{\Re \mathfrak{G}} \mathfrak{Cof} \frac{\mathfrak{G}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\Re}{\mathfrak{G}}} \frac{\mathfrak{Sin} \frac{\mathfrak{G}}{2} + \mathfrak{Cof} \frac{\mathfrak{G}}{2}}{1 + 2x \mathfrak{Sin}^2 \frac{\mathfrak{G}}{2} + 2x \mathfrak{Sin} \frac{\mathfrak{G}}{2} \mathfrak{Cof} \frac{\mathfrak{G}}{2}} \end{aligned} \quad (9I5)$$

und nach Erweiterung mit $e^{-\frac{\mathfrak{G}}{2}}$

$$\mathfrak{W} = \sqrt{\frac{\Re}{\mathfrak{G}}} \frac{1}{e^{-\frac{\mathfrak{G}}{2}} + 2x \mathfrak{Sin} \frac{\mathfrak{G}}{2}} = \sqrt{\frac{\Re}{\mathfrak{G}}} \frac{1}{\mathfrak{Cof} \frac{\mathfrak{G}}{2} - (1-2x) \mathfrak{Sin} \frac{\mathfrak{G}}{2}}. \quad (9I6)$$

Bei Vernachlässigung der Wirkwiderstände ist:

$$\mathfrak{Sin} \frac{\mathfrak{G}}{2} = j\eta; \quad \mathfrak{Cof} \frac{\mathfrak{G}}{2} = \sqrt{1-\eta^2}, \quad (9I7)$$

und man erhält schließlich

$$\mathfrak{W} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2} - (1-2x)j\eta} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\sqrt{1-\eta^2} + j(1-2x)\eta}{1-4x(1-x)\eta^2} \quad (9I8)$$

als Darstellung für die Frequenzabhängigkeit des Wellenwiderstands bei beliebiger Anlaufstrecke.

Zeichnet man den reellen Teil W von \mathfrak{W} als Funktion von η für verschiedene x (Abb. 231), so erkennt man, daß es Werte von x gibt, für die W nur wenig von der Frequenz abhängt. Da diese Tatsache für die Theorie der Leitungsnachbildungen von großer Bedeutung ist, wollen wir einen möglichst günstigen Wert von x ermitteln. Am besten erscheint es, den Zahlenwert von W , bezogen auf $\sqrt{L/C}$, bei niedrigen Frequenzen ein wenig über, bei hohen dafür ein wenig

unter 1 zu legen. Da die Frequenzen in der Nähe der Grenzfrequenz überhaupt nicht benutzt werden, wollen wir fordern, daß der Zahlenwert von W gerade bei $\eta = 3/5$ wieder durch den Wert 1 hindurchgeht. Diese Forderung führt nach (918) auf die quadratische Gleichung

$$\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = 1 - 4x(1 - x) \frac{9}{25}, \tag{919}$$

die die beiden Wurzeln $x = 1/6$ und $x = 5/6$ hat, ein Ergebnis, von dem wir im Abschnitt XIV häufig Gebrauch machen werden.

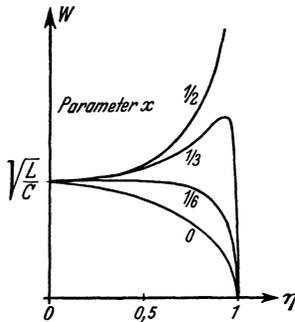


Abb. 231.

Der imaginäre Teil W' des Scheinwiderstands ist nach (918) im allgemeinen auch bei der verlustlosen Pupinleitung von Null verschieden. Er ist für niedrige und mittlere Frequenzen annähernd der Frequenz proportional; bei der Grenzfrequenz nimmt er den Wert $\sqrt{L/C} \cdot 1/(1 - 2x)$ an. Nur für $x = 1/2$ ist er gleich Null.

Durchschneidet man ein Spulenfeld an irgendeiner Stelle, so sind die von den Schnittflächen aus gemessenen Scheinwiderstände zueinander konjugiert; und zwar hat das Stück mit der kürzeren Anlaufstrecke den Charakter einer Induktivität, das mit der längeren den Charakter einer Kapazität.

§ 260. Schwankungen des Wellenwiderstandes infolge von Ungleichmäßigkeiten.

Der Frequenzgang des Wellenwiderstandes eines Pupinkabels ist, wie Lüschen¹ zuerst beobachtet hat, außerordentlich empfindlich gegen wenn auch kleine Störungen in der Gleichmäßigkeit des Kabelaufbaus. Es handelt sich dabei um eine Art Resonanzerscheinung; denn die besonders starken Abweichungen von dem glatten Verlauf der theoretischen Wellenwiderstandskurve fallen mit den in § 221 festgestellten extremen Werten der Leerlauf- und Kurzschlußwiderstände zusammen.

Im folgenden wollen wir die Erscheinung, die für die Theorie der Leitungsnachbildung von großer Bedeutung ist, an Hand der zuerst von Wagner und Küpfmüller² aufgestellten Theorie etwas genauer untersuchen.

Wir denken uns die Pupinleitung durch eine Spulenleitung ersetzt und nehmen an, ein Glied dieser Spulenleitung unterscheide sich von den übrigen: seine Induktivität sei prozentisch um λ , seine Kapazität um \varkappa vergrößert³. Alle Längen und Abstände beziehen wir auf die Länge des einzelnen Gliedes als Einheit; l sei der Zahlenwert der ganzen Leitungslänge, x der des Abstands der Mitte des fehlerhaften Gliedes vom Ende der Leitung. Den normalen Stücken der Leitung geben wir die Indizes I und III (Abb. 232), ihre Parameter seien \mathfrak{Z}_0 und g_0 (je Glied); im fehlerhaften Glied dagegen (Index II) sei der Wellenwiderstand auf $\mathfrak{Z}_{II} = \mathfrak{Z}_0(1 + \zeta)$, das Übertragungsmaß auf $g_{II} = g_0 + \gamma$

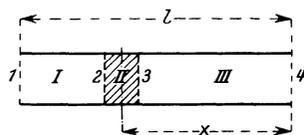


Abb. 232.

erhöht. Die Abweichungen λ , \varkappa und damit auch ζ , γ seien so klein, daß ihre Quadrate neben 1 zu vernachlässigen sind.

Es handelt sich hier um drei hintereinander geschaltete Vierpole. Zur Vereinfachung wollen wir $\mathfrak{Cof} g_I = \mathfrak{C}_I$, $\mathfrak{Sin} g_I = \mathfrak{S}_I$ setzen und bei den andern hyperbolischen Funktionen entsprechend verfahren. $\mathfrak{Cof} g_0$ und $\mathfrak{Sin} g_0$ kürzen wir durch \mathfrak{C}_0 und \mathfrak{S}_0 , $\mathfrak{Cof} g_0 l$ und $\mathfrak{Sin} g_0 l$ durch \mathfrak{C} und \mathfrak{S} ab. Dann ist

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{Cof}(g_0 + \gamma) &= \mathfrak{C}_{II} \approx \mathfrak{C}_0 + \gamma \mathfrak{S}_0, \\ \mathfrak{Sin}(g_0 + \gamma) &= \mathfrak{S}_{II} \approx \mathfrak{S}_0 + \gamma \mathfrak{C}_0. \end{aligned} \right\} \tag{920}$$

¹ Vgl. K. W. Wagner u. K. Küpfmüller: Arch. Elektrot. 9, 461 (1921).

² Wagner, K. W. u. K. Küpfmüller: a. a. O.

³ Diese Voraussetzungen weichen etwas von denen Wagners und Küpfmüllers ab; daher ein kleiner Unterschied in den Ergebnissen.

und wir können nach den Vierpolgrundgleichungen schreiben

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U}_2 = \mathfrak{C}_I \mathfrak{U}_1 - \mathfrak{B}_0 \mathfrak{S} \mathfrak{I}_1 &= (\mathfrak{C}_0 + \gamma \mathfrak{S}_0) (\mathfrak{C}_{III} \mathfrak{U}_4 + \mathfrak{B}_0 \mathfrak{S}_{III} \mathfrak{I}_4) \\ &+ \mathfrak{B}_0 (\mathfrak{S}_0 + \gamma \mathfrak{C}_0 + \zeta \mathfrak{S}_0) \left(\frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{B}_0} \mathfrak{S}_{III} \mathfrak{U}_4 + \mathfrak{C}_{III} \mathfrak{I}_4 \right), \\ \mathfrak{I}_2 = -\frac{\mathfrak{S}_I}{\mathfrak{B}_0} \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{C}_I \mathfrak{I}_1 &= \frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{B}_0} (\mathfrak{S}_0 + \gamma \mathfrak{C}_0 - \zeta \mathfrak{S}_0) (\mathfrak{C}_{III} \mathfrak{U}_4 + \mathfrak{B}_0 \mathfrak{S}_{III} \mathfrak{I}_4) \\ &+ (\mathfrak{C}_0 + \gamma \mathfrak{S}_0) \left(\frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{B}_0} \mathfrak{S}_{III} \mathfrak{U}_4 + \mathfrak{C}_{III} \mathfrak{I}_4 \right). \end{aligned} \right\} \quad (921)$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen¹ zuerst mit \mathfrak{C}_I und $\mathfrak{B}_0 \mathfrak{S}_I$, dann mit $\mathfrak{S}_I/\mathfrak{B}_0$ und \mathfrak{C}_I und addieren, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{U}_1 &= (\mathfrak{C} + \gamma \mathfrak{S} - \zeta \mathfrak{S}_0 \mathfrak{S}_x) \mathfrak{U}_4 + \mathfrak{B}_0 (\mathfrak{S} + \gamma \mathfrak{C} + \zeta \mathfrak{S}_0 \mathfrak{C}_x) \mathfrak{I}_4, \\ \mathfrak{I}_1 &= \frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{B}_0} (\mathfrak{S} + \gamma \mathfrak{C} - \zeta \mathfrak{S}_0 \mathfrak{C}_x) \mathfrak{U}_4 + (\mathfrak{C} + \gamma \mathfrak{S} + \zeta \mathfrak{S}_0 \mathfrak{S}_x) \mathfrak{I}_4. \end{aligned} \right\} \quad (922)$$

Dabei bedeutet

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{C}_x &= \mathfrak{C}_I \mathfrak{C}_{III} - \mathfrak{S}_I \mathfrak{S}_{III} = \mathfrak{C} \cos g_0 (l - 2x), \\ \mathfrak{S}_x &= \mathfrak{S}_I \mathfrak{C}_{III} - \mathfrak{C}_I \mathfrak{S}_{III} = \mathfrak{S} \sin g_0 (l - 2x). \end{aligned} \right\} \quad (923)$$

Daher ergibt sich für die resultierenden Parameter des Gesamtvierpols bei Vernachlässigung kleiner Größen höherer Ordnung

$$\mathfrak{C} \text{ of } g = \mathfrak{C} + \gamma \mathfrak{S}, \quad (924)$$

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \left(1 + \zeta \frac{\mathfrak{S}_0}{\mathfrak{C}} \mathfrak{C}_x \right), \quad (925)$$

$$\mathfrak{s} = 1 + \zeta \frac{\mathfrak{S}_0}{\mathfrak{C}} \mathfrak{S}_x. \quad (926)$$

In erster Linie interessiert der Wellenwiderstand von der vorderen Seite

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{s}} \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \left\{ 1 + \zeta \mathfrak{S}_0 \left(\frac{\mathfrak{C}_x}{\mathfrak{C}} - \frac{\mathfrak{S}_x}{\mathfrak{C}} \right) \right\} = \mathfrak{B}_0 \left(1 + \zeta \frac{\mathfrak{S}_0}{\mathfrak{C}} \mathfrak{C} \text{ of } 2 g_0 x \right). \quad (927)$$

Hier müssen wir noch die prozentische Änderung ζ auf die prozentischen Änderungen λ und κ zurückführen. Für die verlustlose Pupinleitung gilt nach § 257

$$\mathfrak{B}_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\mathfrak{I}}{\sqrt{1 - \eta^2}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\mathfrak{I}}{\cos \frac{a_0}{2}}. \quad (928)$$

Der hier vorkommende Nenner $\cos (a_0/2)$ enthält ebenfalls die Eigenschaften L und C , da ja

$$\sin \frac{a_0}{2} = \frac{\omega s \sqrt{LC}}{2}. \quad (929)$$

Differenziert man diese beide Gleichungen logarithmisch, so erhält man die Näherungsformeln

$$\zeta = \frac{1}{2} (\lambda - \kappa) + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{a_0}{2} d a_0 \quad (930)$$

und

$$\frac{\mathfrak{I}}{2} \operatorname{ctg} \frac{a_0}{2} d a_0 = \frac{\mathfrak{I}}{2} (\lambda + \kappa), \quad (931)$$

aus denen

$$\zeta = \frac{\mathfrak{I}}{2} (\lambda - \kappa) + \operatorname{tg}^2 \frac{a_0}{2} \cdot \frac{\mathfrak{I}}{2} (\lambda + \kappa) = \frac{\lambda - \kappa \cos a_0}{2 \cos^2 \frac{a_0}{2}} \quad (932)$$

folgt. Der am Leitungseingang gemessene Wellenwiderstand ist daher

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{s}} \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 \left\{ 1 + 2 (\lambda - \kappa \cos a_0) \operatorname{tg} \frac{a_0}{2} \cdot \frac{\cos 2 a_0 x}{\sin 2 a_0 l} \right\}. \quad (933)$$

¹ Bei der Ausrechnung empfiehlt es sich, die leicht verständlichen Abkürzungen \mathfrak{C}_{III} und \mathfrak{S}_{III} zu verwenden.

Zu dem normalen Anstieg, wie er durch Gleichung (928) dargestellt ist, kommt eine der Differenz $\lambda - \kappa$ a_0 proportionale Schwankung hinzu, die in sehr verwickelter Weise von der Frequenz abhängt.

Über sie ist vor allem zu sagen, daß sie wegen des Gliedes $\text{tg} \frac{a_0}{2}$ sehr stark mit der Annäherung an die Grenzfrequenz wächst.

Weiter hat einen Einfluß besonderer Art das Nennerglied $\sin 2 a_0 l$. Das Argument $2 a_0 l$ durchläuft im Durchlaßbereich der Spulenleitung alle Werte zwischen 0 und $l \cdot 360^\circ$. Es gibt also in diesem Bereich $2 l$ „kritische“ Frequenzen, bei denen $\sin 2 a_0 l$ gleich Null wird, bei denen also schon ein kleiner Fehler in L und C eine sehr große Schwankung des Wellenwiderstands hervorruft. Diese Frequenzen drängen sich nach der Grenzfrequenz hin zusammen; denn für sie gilt

$$\omega = \omega_0 \sin \frac{a_0}{2} = \omega_0 \sin \frac{2 a_0 l}{4 l} = \omega_0 \sin \left(\frac{k}{4 l} \cdot 180^\circ \right) = \omega_0 \cos \frac{2 l - k}{2 l} 90^\circ \quad (934)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, 2 l).$$

Bei ihnen nehmen der Leerlaufwiderstand $\mathfrak{R}_1^k = j \mathfrak{Z} \text{ctg} a_0 l$ und der Kurzschlußwiderstand $\mathfrak{X}_1^k = j \mathfrak{Z} \text{tg} a_0 l$ ihre Extremwerte 0 und ∞ an.

Das Glied $\cos 2 a_0 x$ bringt weitere vom Ort der Störung abhängige wellenartige Schwankungen hinzu, durch die die starken Schwankungen bei den kritischen Frequenzen zum Teil wieder ausgelöscht werden, auf die wir aber nicht näher eingehen.

Aus Gleichung (924) geht hervor, daß dieselben Erscheinungen nicht auch beim Dämpfungsmaß auftreten.

Die hier gegebene Theorie zeigt, daß man für größte Gleichmäßigkeit der Induktivitäten und Kapazitäten Sorge tragen muß. Dabei ist zu beachten, daß auf den Leitungen der Effektivwert des Stroms im allgemeinen nicht überall derselbe ist; damit variiert aber von Glied zu Glied die Permeabilität und die Induktivität. Man muß also für die Spulenkerne eine Eisensorte von möglichst stromunabhängiger Permeabilität wählen (vgl. § 262).

Zu den Ungleichmäßigkeiten, die die Nachbildbarkeit beeinträchtigen, gehören auch alle sonstigen Stoßstellen. Hauptsächlich aus diesem Grunde verbindet man Leitungen verschiedenen Wellenwiderstands durch sorgfältig angepaßte Übertrager.

§ 261. Der Bau der Pupinspulen. Da die Pupinspulen als Induktivitäten wirken und möglichst wenig dämpfen sollen, muß das Verhältnis ihrer Induktivität zu ihrem Wirkwiderstand, d. h. ihre Zeitkonstante τ , recht groß sein. Man bildet sie daher als möglichst gleichmäßig gewickelte Ringspulen aus und wählt ein hochpermeables verlustarmes Kernmaterial, das man, um die Wirbelstromverluste herabzusetzen, unterteilt.

Ob die Kerne mit vielen Windungen dünnen oder mit wenig Windungen dickeren Drahts bewickelt werden, ist für die Höhe der Zeitkonstante von geringer Bedeutung. Ist nämlich ϱ der Radius des (kreisförmigen) Drahtquerschnitts, F ein Spulenschnitt (Abb. 233¹) quer durch die Drähte, $f = w \varrho^2 \pi / F$ der sogenannte „Füllfaktor“ oder „Raumfaktor“, u der mittlere Umfang einer einzelnen Windung und κ die Leitfähigkeit des Drahtmetalls, so ist der Widerstand der ganzen Spule

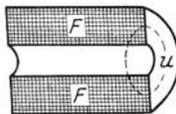


Abb. 233.

$$R = \frac{w u}{\kappa \varrho^2 \pi} = \frac{w^2 u}{f \kappa F}. \quad (935)$$

D. h. er ist bei gegebenem Wicklungsraum (gegebenem u, F) dem Quadrat der Windungszahl direkt, dem Füllfaktor umgekehrt proportional. Soweit man diesen also als konstant ansehen kann, ist der Widerstand ebenso wie die Induktivität dem Quadrat der Windungszahl proportional; die Zeitkonstante als das Verhältnis der beiden Größen ist nahezu konstant.

Als Kernmaterial wird heutzutage vorzugsweise Pulver aus reinem Eisen oder aus einer der neueren hochpermeablen Legierungen verwendet. Die wirksame Permeabilität des Eisenpulvers ist zwar wegen der mit Isolierstoff ausgefüllten Zwischenräume zwischen den Körnern nicht sehr hoch (meist etwa $30 \dots 35 \mu_0$); wegen der geringen scheinbaren (wirksamen) Remanenz des Pulvers ändert sich jedoch nach § 75 die Induktivität der Spulen bei plötzlichen

¹ Die Ringspule ist aufgeschnitten und geradegebogen gedacht.

starken Zusatzmagnetisierungen, wie sie im Betriebe vorkommen können, nur wenig, die Kerne sind sehr „stabil“. Wegen ihrer feinen Unterteilung sind auch die Wirbelstromverluste gering; außerdem kann man den Pulverkernen beim Pressen leicht jeden gewünschten Querschnitt geben.

§ 262. **Verlustwiderstand von Pupinspulen.** Jordan¹ hat den sogenannten Verlustwiderstand R von Pupinspulen, d. h. den Widerstand, der bei Wechselstrom zu dem Gleichstromwiderstand hinzutritt, in seiner Abhängigkeit von der Frequenz f und der Stromstärke \mathfrak{I} gemessen und gefunden, daß sein Verhältnis zu der mit der Frequenz multiplizierten Induktivität L der Spulen bei den in der Fernmeldetechnik verwendeten Frequenzen und Strömen sehr nahe eine lineare Funktion der Frequenz und des Stromes ist:

$$\frac{R}{L f} = A_n + A_w f + A_h |\mathfrak{I}|. \quad (936)$$

Die hier auftretenden Spulenkonstanten A_n , A_w und A_h sind unabhängig von der Frequenz und der Stromstärke. A_n ist dimensionslos, A_w eine Zeit, A_h ein reziproker Strom.

Setzt man die Verlustleistung N entsprechend der Definition des Verlustwiderstands gleich $R |\mathfrak{I}|^2$, so folgt aus (936) die energetische Beziehung:

$$\frac{N}{f} = (A_n + A_w f + A_h |\mathfrak{I}|) L |\mathfrak{I}|^2, \quad (937)$$

aus der hervorgeht, daß der Verlust je Schleife proportional ist der in den Spulenkernen enthaltenen magnetischen Energie, und zwar mit der linearen Funktion der Gleichung (936) als Proportionalitätsfaktor.

Jordan schreibt den Teil der Verlustleistung, der einfach der magnetischen Energie und der Frequenz proportional ist, einer Art „Nachwirkung“ zu (vgl. § 210). Das Glied $A_w f^2 L |\mathfrak{I}|^2$ ist die Wirbelstrom-, das Glied $A_h f L |\mathfrak{I}|^3$ die Hysteresisverlustleistung.

Von besonderem Interesse ist bei Pulverkernspulen der Hysteresisverlust. Man gibt zur Kennzeichnung einer Pupinspule gewöhnlich ihren „Hysteresisfaktor“ an, d. h. das Produkt aus der Konstanten A_h und der Induktivität L . Als Einheit für den Hysteresisfaktor wählt man meist 1,25 mH/A; nach der Gleichung

$$R_h = A_h |\mathfrak{I}| L f = \frac{A_h L}{1,25 \text{ mH/A}} \frac{f}{800 \text{ Hz}} \frac{|\mathfrak{I}|}{\text{A}} \Omega \quad (938)$$

kann man dann bei Berechnung des Hysteresiswiderstands aus dem Hysteresisfaktor die Frequenz auf die Frequenz 800 Hz als Einheit beziehen.

Der Ansatz, wonach der Hysteresisverlust der dritten Potenz des Stromes proportional ist, folgt schon aus älteren magnetometrischen Messungen von Rayleigh². Dieser hat seine Ergebnisse in der Feststellung zusammengefaßt, daß die Magnetisierungsschleife bei Feldern von der Größenordnung eines mOersted dargestellt werden kann durch die beiden Gleichungen zweiten Grades

$$\mathfrak{B} = (\mu_A + 2\nu \hat{\mathfrak{H}}) \mathfrak{H} \pm \nu (\hat{\mathfrak{H}}^2 - \mathfrak{H}^2), \quad (939)$$

wo unter $\hat{\mathfrak{H}}$ der Scheitelwert der als sinusförmig angenommenen magnetischen Feldstärke zu verstehen ist (Abb. 234). Man erkennt, daß die beiden Kurven³

¹ Jordan, H.: Elektr. Nachr.-Techn. I, 7 (1924).

² Lord Rayleigh: Phil. Mag. (5) 23, 225 (1887).

³ Das obere Parabelstück hat bezogen auf P als Nullpunkt, die Gleichung $\mathfrak{B} = \mu_A \mathfrak{H} - \nu \mathfrak{H}^2$, das untere, bezogen auf P' als Nullpunkt, die Gleichung $\mathfrak{B} = \mu_A \mathfrak{H} + \nu \mathfrak{H}^2$. In diesen beiden Formen wird das Ergebnis Rayleighs gewöhnlich geschrieben.

tatsächlich in den Punkten $\mathfrak{H} = \pm \hat{\mathfrak{H}}$ zusammentreffen (P und P') und daß die „Remanenz“ gleich $\nu \hat{\mathfrak{H}}^2$ ist. Die Steilheiten der beiden Kurven sind

$$\frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{H}} = \mu_A + 2\nu(\hat{\mathfrak{H}} \mp \mathfrak{H}); \quad (940)$$

μ_A hat also¹ die Bedeutung der Anfangspermeabilität, d. h. der Permeabilität

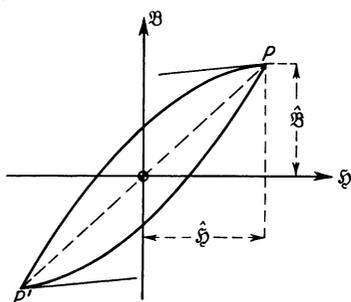


Abb. 234.

für $\hat{\mathfrak{H}} \approx \mathfrak{H} \approx 0$.

Zu dem Hysteresisverlust N_h tragen nun offenbar nur die quadratischen Glieder in den beiden Gleichungen (939) bei. Nach (937) erhält man, wenn man das Volumen des Kerns mit V bezeichnet:

$$\begin{aligned} \frac{N_h}{fV} &= \frac{A_h L |\mathfrak{H}|^3}{V} \\ &= 2\nu \int_{-\hat{\mathfrak{H}}}^{+\hat{\mathfrak{H}}} (\hat{\mathfrak{H}}^2 - \mathfrak{H}^2) d\mathfrak{H} = \frac{8}{3} \nu \hat{\mathfrak{H}}^3. \end{aligned} \quad (941)$$

Daraus kann man auf den Zusammenhang der Spulenkonstanten A_h , $A_h L$ und R_h mit der Rayleighschen Materialkonstante ν schließen: es ist unter Berücksichtigung der Gleichungen $L = \mu_A \cdot w^2 F/l$, $V = Fl$ und $\hat{\mathfrak{H}} = w |\mathfrak{H}| \sqrt{2}/l$:

$$A_h = \frac{Fl \cdot l}{\mu_A w^2 F} \frac{8}{3} \nu \left(\frac{w\sqrt{2}}{l}\right)^3 = \frac{16\sqrt{2}}{3} \frac{w}{l} \frac{\nu}{\mu_A} = 9,50 \frac{w}{l/\text{cm}} \frac{\nu \text{ Oersted}}{\mu_A} \frac{1}{\text{A}}, \quad (942)$$

$$A_h L = \frac{16\sqrt{2}}{3} \nu V \left(\frac{w}{l}\right)^3 = 95,2 V \left(\frac{w \cdot 10^{-2}}{l}\right)^3 \frac{\nu}{\mu_0/\text{Oersted}} \frac{1,25 \text{ mH}}{\text{A}}, \quad (943)$$

$$R_h = \frac{16\sqrt{2}}{3} \frac{w |\mathfrak{H}|}{l} \frac{\nu}{\mu_A} L f = 9,50 \frac{w |\mathfrak{H}|/\text{A}}{l/\text{cm}} \frac{\nu \text{ Oersted}}{\mu_A} \frac{L}{\text{mH}} \frac{f}{\text{kHz}} \Omega. \quad (944)$$

A_h hängt nur von der Windungszahl der Längeneinheit w/l und dem Verhältnis ν/μ_A , der Hysteresisfaktor nur von w/l , ν und dem Kernvolumen ab.

Zur Veranschaulichung berechnen wir mit Deutschmann² den Verlustwiderstand eines Seekabels von 300 km Länge, das in Abständen von je 2 km mit Spulen von je 54 mH Induktivität pupinisiert sei. Die Wicklungen mögen aus je 690 Windungen bei einem Gesamtkraftlinienweg von rund 14,6 cm bestehen; ihr Querschnitt sei gleich 4,4 cm². Für das Eisenpulver des Kerns gelte $\mu_A = 30 \mu_0$; $\nu = 0,24 \mu_0/\text{Oersted}$. Der Effektivwert der Stromstärke am Anfang des Kabels betrage 150 mA. Dann ist für 800 Hz nach (942), (943) und (944)

$$A_h = 9,5 \frac{690}{14,6} \frac{0,24}{30} \frac{1}{\text{A}} = 3,5 \frac{1}{\text{A}}, \quad (945)$$

$$A_h L = 95,2 \cdot 0,24 \cdot 4,4 \cdot 14,6 \left(\frac{6,90}{14,6}\right)^3 \frac{1,25 \text{ mH}}{\text{A}} = 153 \frac{1,25 \text{ mH}}{\text{A}}, \quad (946)$$

$$R_h = 9,5 \cdot \frac{690 \cdot 0,150}{14,6} \cdot \frac{0,24}{30} 54 \cdot 0,8 \Omega = 23 \Omega. \quad (947)$$

Der Strom $|\mathfrak{H}|$, dem der Verlustwiderstand nach (938) proportional ist, nimmt längs den Pupinleitungen allmählich ab. Hat die Leitung n Glieder, wo n eine große Zahl sei, ist ferner die beim ersten Gliede der Leitung durch Hysteresis hervorgerufene Dämpfung gleich $b_{h,1}$, die Dämpfung für verschwindend schwachen

¹ μ_A ist auch die Neigung der weniger steilen Tangenten in den Punkten P und P' , während die Neigung der Linie PP' $= \mu_A + 2\nu \hat{\mathfrak{H}}$ ist.

² Deutschmann, W.: Elektr. Nachr.-Techn. 6, 82 (1929).

Strom je Glied gleich b , so ist die Dämpfung für die ganze Leitung in erster Näherung gleich

$$nb + b_{h_1} + b_{h_1}e^{-b} + b_{h_1}e^{-2b} + \dots \approx nb + b_{h_1} \frac{1}{1 - e^{-b}} \approx nb + \frac{b_{h_1}}{b}; \quad (948)$$

d. h. der Dämpfungszuwachs durch Hysterisis ist annähernd gleich dem Verhältnis des Hysterisiswiderstands des ersten Glieds der Leitung zu dem Widerstande sR desselben Glieds für unendlich schwachen Strom.

Ist bei dem vorhin betrachteten Seekabel $sR = 60 \Omega$, so ist der durch Hysterisis verursachte Gesamtzuwachs der Leitungsdämpfung gleich 0,38. Setzen wir $C = 48 \text{ nF/km}$ voraus, so ergibt sich

$$nb = 150 \cdot \frac{60 \Omega}{2} \sqrt{\frac{2 \cdot 48 \text{ nF}}{54 \text{ mH}}} = 6 \text{ Neper}; \quad (949)$$

der durch Hysterisis verursachte Dämpfungszuwachs ist also schon bei 800 Hz nicht unbeträchtlich.

Neuere Messungen haben nicht bestätigt, daß der Koeffizient des zweiten Gliedes auf der rechten Seite der Gleichung (939) die Hysterisiskonstante ν enthält, wie es aus dem Rayleighschen empirischen Ansatz folgt. Es ist daher zweifelhaft, ob bei den magnetischen Materialien immer hoher Hysterisisverlust mit inkonstanter Permeabilität Hand in Hand geht. Die Höhe der Anfangspermeabilität hat sicher mit den Verlusten nichts zu tun¹.

Die Induktivität L ist nach (939) eine lineare Funktion des Stromes:

$$L = L_0 \left(1 + \frac{2\nu \hat{\Phi}}{\mu_A} \right) = L_0 \left(1 + \frac{3}{8} A_h |\mathfrak{S}| \right). \quad (950)$$

Bei der von uns betrachteten Spule ändert sich z. B. L bei einem Stromzuwachs von 1 mA um $3/8 \cdot 3,5 \cdot 10^{-3} = 1,3/100$. Bei stärkeren Strömen ist daher die Änderung der Induktivität wohl zu beachten.

§ 263. **Flattern.** Auf Ummagnetisierungsverluste ist auch die Erscheinung des „Flatterns“ zurückzuführen. Wird auf einer Leitung gleichzeitig gesprochen und telegraphiert (wie z. B. bei der Unterlagerungstelegraphie § 372), so nimmt die Stärke der Fernsprechströme bei jeder Änderung der Stärke der Telegraphierströme ab. Dadurch entstehen Schwankungen der Lautstärke, die man Flattern nennt.

Nach Deutschmann² rührt die Erscheinung davon her, daß bei Übereinanderlagerung von sprechfrequenten und telegraphierfrequenten Schwankungen in der \mathfrak{B} - \mathfrak{S} -Ebene kompliziertere Kurven durchlaufen werden, mit denen für die Fernsprechströme höhere Hysterisisverluste verbunden sind. Das Flattern kann daher durch Wahl eines Materials mit niedrigem Hysterisisfaktor beseitigt werden.

§ 264. **Phantomschaltung.** Um die Pupin- und Krarupkabel besser auszunutzen, verwendet man in der Technik der Fernkabel meist je zwei Aderpaare, die beiden „Stammleitungen“ oder „Stämme“, als Hin- und Rückleitung eines dritten Sprechkreises, des sogenannten „Phantomkreises“ („Trugkreises“). Die Verbindung der Leitungen mit den Sprechstellen ist in Abb. 235 angedeutet. Sind die „Differentialübertrager“ richtig abgeglichen und die Leitungen völlig symmetrisch, so kann weder ein Gespräch in einer der Stammleitungen den Phantomkreis, noch ein Gespräch im Phantomkreis eine der Stammleitungen beeinflussen. Man nennt diese Schaltung, durch die die Zahl der Sprechkreise ohne Mehraufwand von Kupfer um 50% erhöht wird, auch „Doppelsprechschaltung“.

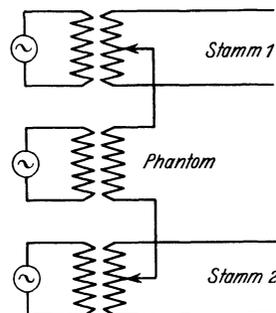


Abb. 235.

¹ Einen allgemeineren Ansatz hat E. Peterson zugrunde gelegt: Bell Syst. Techn. J. 7, 762 (1928).

² Deutschmann, W.: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. 8, H. 2, 22 (1929).

Zur Pupinisierung der Phantomkabel dienen nach dem Verfahren von Ebeling jedesmal vier Spulen: Jede Stammleitung erhält zwei Spulen, je eine für die Stammleitung selbst und je eine für den zugehörigen Phantomkreis. Eine Pupinspule wirkt ja nur dann als Induktivität, wenn ihre Wicklungshälften so mit der Leitung verbunden werden, daß sich ihre Durchflutungen addieren. Da nun in den beiden Leitungen eines Stammes der Stammstrom in entgegengesetzter, der Phantomstrom in derselben Richtung fließt, kann durch geeignete Polung erreicht werden, daß die eine Spule nur auf den Stammstrom, die andere nur auf den Phantomstrom wirkt.

Neuerdings bevorzugt man das Dreispulnverfahren nach Campbell und Shaw. Bei ihm wird dem Phantomkreis nur ein einziger Kern mit vier Wicklungen zugeordnet; durch richtige Verbindung der Wicklungen mit den Leitungen wird dafür gesorgt, daß die zugefügte Induktivität nur für den Phantomkreis wirksam wird.

§ 265. Einfluß der Verseilung auf die Belastung von Phantomkabeln. Bei Kabeln, die in Phantomschaltung betrieben werden, ist es nicht möglich, die Belastungen für die Stämme und für die Phantomkreise unabhängig voneinander zu wählen. Denn die Phantomspulen und die Stammspulen werden zweckmäßigerweise an denselben Stellen eingebaut; außerdem fordert man für alle Sprechkreise dieselbe Dämpfung.

In der Gleichung (vgl. § 254)

$$\omega_0 = \frac{4\beta_1}{sRC} \quad (95I)$$

ist das Verhältnis β_1/s für alle Sprechkreise dasselbe. Ob die Grenzfrequenz der Stammkreise oder die der Phantomkreise die kleinere ist, hängt demnach davon ab, für welche der beiden Sprechkreisarten das Produkt RC den größeren Wert hat.

Nun steht den Phantomströmen der doppelte Kupferquerschnitt zur Verfügung; der bezogene Widerstand R der Stämme ist also nahezu doppelt so groß wie der der Phantomkreise. Das Verhältnis der bezogenen Kapazitäten C dagegen hängt von der gegenseitigen Lage der Leiter und damit von der Art der Verseilung ab (§ 223).

Paarverseilung, also unmittelbare Lagenverseilung der in sich verdrehten Stämme, kommt für die Phantomschaltung nicht in Betracht, weil sie keinen Schutz gegen das Nebensprechen zwischen benachbarten Phantomkreisen böte; diese wären ja unverdrillt.

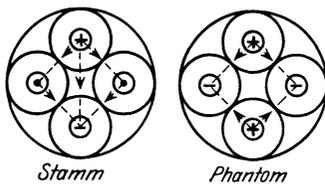


Abb. 236.

Die Viererverseilung und die Achterverseilung dagegen eignen sich zur Phantomschaltung; eine Ausnahme bildet nur die Sternviererverseilung. Wir wollen beim Vergleich der Verseilungsarten wieder voraussetzen, daß die Kapazität der Doppelleitungen, also der Stämme, bei allen Verseilungen dieselbe sei. Verfolgt man nun bei dem normalen Sternvierer den Verlauf der Verschiebungsströme (Abb. 236), so erkennt man, daß sich die Kapazität der Phantomkreise aus vier parallelen und an sich schon großen Kapazitäten zusammensetzt, also ganz erheblich größer sein muß als die Kapazität der Stämme. In der Tat zeigt die Messung, daß die Kapazität der Sternphantomkreise annähernd gleich dem 2,7fachen der Kapazität der Sternstämme, also auch gleich dem 2,7fachen der Kapazität der DM-Stämme ist. Bei der DM-Verseilung dagegen ist die Phantomkapazität nur 1,62mal so groß wie die Stammkapazität. Das Produkt RC ist daher bei den Sternphantomkreisen etwa 1,35mal so groß wie bei den Sternstämmen, bei den DM-Phantomkreisen dagegen nur etwa 0,8mal so groß wie bei den DM-Stämmen.

Daraus folgt in Verbindung mit Gleichung (951), daß bei den Sternvierern die Grenzfrequenz der Phantomkreise, bei den DM-Vierern dagegen die Grenzfrequenz der Stammkreise die niedrigere ist. Soll auch die niedrigere der beiden Frequenzen noch hoch genug liegen, so muß man nach (951) bei der Sternverseilung eine 1,35 mal höhere bezogene Dämpfung in Kauf nehmen als bei der DM-Verseilung.

Um die Vorteile der Sternverseilung auch bei den Fernkabeln auszunutzen, hat man¹ zum ersten Male bei dem 1924 für die Norwegischen Staatsbahnen gelieferten Fernkabel Drammen—Kongsberg auf Phantomausnutzung verzichtet und den Wegfall der Phantomkreise durch die günstigere Raumausnutzung der Sternverseilung, durch den Wegfall der Phantomschichten mit ihrem Widerstand und andere Vorteile wettzumachen gesucht.

Die Doppelsternkabel (§ 223) können ohne weiteres in Phantomschaltung betrieben werden. Bei ihnen bildet man immer aus zwei einander diagonal gegenüber liegenden Doppelleitungen die Phantomkreise. Deren Kapazität ist, wie die Messung zeigt, bei 0,9-mm-Adern nur 1,13 mal, bei 1,4-mm-Adern nur 1,25 mal so groß als die der Stammkreise².

Daß sich bei der Phantomschaltung im allgemeinen zwei verschiedene Grenzfrequenzen ergeben, ist kein Nachteil. Hohe Grenzfrequenz erlaubt eine klanggetreue Übertragung; außerdem lassen sich mit ihr aus später zu erörternden Gründen auch höhere Reichweiten erzielen. Man verwendet daher die Sprechkreise mit höherer Grenzfrequenz, also bei DM-Verseilung die Phantomkreise, vorwiegend zur Übermittlung von Musik und zur Übertragung auf große Entfernungen.

XI. Messungen an Leitungen.

§ 266. Messung der Ableitung und der Kapazität von Kabelstücken. Wenn die vier Leitungseigenschaften R , L , G , C bei kurzen Kabelstücken bestimmt werden sollen, kann das im § 214 besprochene Verfahren durch ein einfacheres ersetzt werden. Dann ist nämlich

$$\mathfrak{B}^l = \mathfrak{B} \operatorname{ctg} g \approx \frac{\mathfrak{B}}{\gamma l} = \frac{1}{(G + j \omega C) l}, \quad (952)$$

$$\mathfrak{B}^k = \mathfrak{B} \mathfrak{I} g \approx \gamma l \mathfrak{B} = (R + j \omega L) l. \quad (953)$$

Aus einer Messung des Leerlaufleitwerts folgt also unmittelbar die Ableitung und die Kapazität, aus einer Messung des Kurzschlußwiderstands der Widerstand und die Induktivität.

Von praktischer Bedeutung ist vor allem die Messung der Ableitung und der Kapazität auf Grund der Gleichung (952). Um beurteilen zu können, wie lang die Kabelstücke sein dürfen, schreiben wir (nach Anhang 4.e) genauer

$$\begin{aligned} \frac{1}{(G + j \omega C) l} &= \frac{\mathfrak{B}}{\gamma l} = \frac{\mathfrak{B}^l}{\operatorname{Cos} \gamma l} \frac{\operatorname{Sin} \gamma l}{\gamma l} \approx \frac{\mathfrak{B}^l}{1 + \frac{\gamma^2 l^2}{2}} \left(1 + \frac{\gamma^2 l^2}{6} \right) \\ &\approx \mathfrak{B}^l \left(1 - \frac{\gamma^2 l^2}{3} \right) \approx \mathfrak{B}^l \left(1 - j \frac{\omega R C l^2}{3} \right). \end{aligned} \quad (954)$$

In einem Korrektionsglied darf man ja beim Kabel die Ableitung und die Induktivität vernachlässigen.

Nun pflegt man den Leerlaufwiderstand \mathfrak{B}^l bei Messung in der Brücke mit einer Reihenschaltung von Widerstand R_0 und Kapazität C_0 zu vergleichen. Die gesuchten Größen G und C können daher, da $(Gl)^2$ immer sehr klein ist

¹ Vgl. auch H. Jordan u. W. Wolff: Elektr. Nachr.-Techn. 2, 445 (1925); Lüschen, F.: Fernkabel 1926, H. 10, 29.

² Fischer, K.: Europ. Fernspr.-Dienst 1930, H. 18, 317.

gegenüber $(\omega Cl)^2$, berechnet werden nach

$$\frac{1}{(G + j\omega C)l} \approx \frac{Gl}{(\omega Cl)^2} - j\frac{1}{\omega Cl} = \left(R_0 - j\frac{1}{\omega C_0}\right) \left(1 - j\frac{\omega R C l^2}{3}\right), \quad (955)$$

woraus

$$\left. \begin{aligned} Gl &= (\omega Cl)^2 \left(R_0 - \frac{Cl}{C_0} \frac{Rl}{3}\right), \\ Cl &= C_0 \left(1 - R_0 \frac{Rl}{3} \omega^2 C_0 Cl\right). \end{aligned} \right\} \quad (956)$$

Setzt man zur Abkürzung $g = Rl/3 \cdot \omega^2 C_0^2$, so wird:

$$Cl \approx C_0(1 - R_0 g), \quad Gl \approx (\omega Cl)^2 \left(R_0 - \frac{Rl}{3}\right) = R_0 (\omega Cl)^2 - g. \quad (957)$$

Dies sind die genaueren Formeln für C und G . $R_0 g$ ist meist gegen 1 sehr klein.

§ 267. **Betriebskapazität.** Bei den im vorigen Paragraphen beschriebenen Messungen erhält man die betriebsmäßige Kapazität nur dann, wenn sich das Kabel bei der Messung in demselben Zustand befindet wie im Betrieb, d. h. wenn die Potentiale der beiden Adern beständig symmetrisch liegen zu dem Potential des geerdeten Mantels (§ 56). Um dieses zu erreichen, schaltet man nach Küpfmüller und Thomas¹ (Abb. 237) zu der Brücke einen Widerstand ρ hinzu, der so bemessen wird, daß der Spannungsfall AC bei Brückengleichgewicht ebenso groß ist wie der Spannungsfall DB . Außerdem sorgt man durch Symmetrierung der Stromquelle dafür, daß die Potentiale der Punkte A und B bei der Messung beständig symmetrisch zum Erdpotential liegen. Sind die Widerstände AE und AC gleich groß ($= R$), so muß man offenbar $\rho = R/2$ wählen.

Mit der Wagnerschen Brücke² (Abb. 91 des § 109) kann man die Teilkapazitäten C_{12} , C_{13} und C_{23} noch nicht verlegter Kabel für sich messen; aus ihnen setzt man dann nach den Formeln des § 54 die Betriebskapazität zusammen. Zur Messung z. B. der Teilkapazität C_{12} schaltet man wie in Abb. 91; durch Variation der eigentlichen Brückenkombination und des Hilfszweigs $A_1 E B_1$ kann man erreichen, daß die beiden Fernhörer T_1 und T_2 stromlos bleiben. Dann sind die Leiter 1 und 3 auf demselben Potential, die Kapazität C_{13} bleibt also unwirksam; die Kapazität C_{23} ist aber ohne Einfluß auf das Brückengleichgewicht, weil man sie als parallel zu $B B_1$ liegend ansehen kann. Die Brückenbedingung liefert also in dem angenommenen Falle nur die Teilkapazität C_{12} .

§ 268. **Messung des Wellenwiderstandes und des Übertragungsmaßes von Leitungen.** Die Methoden, nach denen die Grundparameter der Vierpole bestimmt werden können, sind bereits im Abschnitt VI besprochen worden.

Bei Leitungen interessiert man sich meist in erster Linie für die Wellenparameter. Den Wellenwiderstand bestimmt man als geometrischen Mittelwert aus Kurzschluß- und Leerlaufwiderstand. Bei geringer Dämpfung können diese beiden Widerstände nach § 162 auch zur Bestimmung des Übertragungsmaßes dienen; bei höherer Dämpfung mißt man dagegen besser nach § 161 und 160 die Spannungsübersetzung bei Leerlauf oder (bequemer) bei Anpassung.

Oft interessiert man sich nur für den reellen Teil des Übertragungsmaßes, das Dämpfungsmaß. Dann ist es das einfachste, die Lautstärke am Ende der Leitung unmittelbar zu vergleichen mit der Lautstärke am Ende einer „Eichleitung“ einstellbaren und ablesbaren Dämpfungsmaßes. Man variiert dieses so lange, bis die Lautstärken gleich geworden sind.

¹ Küpfmüller, K., u. P. Thomas: ETZ 43, 461 (1922).

² Wagner, K. W.: ETZ 33, 635 (1912).

Die meist benutzte Schaltung zeigt Abb. 238. Sind die Dämpfungen der beiden Vierpole so groß, daß die Spannung u_1 der gemeinsamen Eingangsklemmen bei der Umschaltung des Fernhörers ungeändert bleibt, so hat man nach Gleichung (446) des § 156 gleiche Lautstärke, wenn (die Größen mit Index 0 beziehen sich auf die Eichleitung)

$$\left| \mathcal{C}of\ g + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{R}_e} \mathcal{S}in\ g \right| = \left| \mathcal{C}of\ g_0 + \frac{\mathfrak{Z}_0}{\mathfrak{R}_e} \mathcal{S}in\ g_0 \right| \quad (958)$$

oder, weil g und g_0 groß sind:

$$\frac{e^b}{2} \left| 1 + \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{R}_e} \right| = \frac{e^{b_0}}{2} \left| 1 + \frac{\mathfrak{Z}_0}{\mathfrak{R}_e} \right|. \quad (959)$$

Wählt man $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_0$, so folgt $b = b_0$; d. h. aus gleichen Lautstärken darf man auf gleiche Dämpfungen schließen. Stimmen \mathfrak{Z} und \mathfrak{Z}_0 nach Betrag und Phase nicht völlig überein (\mathfrak{Z}_0 ist meist reell, s. § 269), so erlaubt die Gleichung (959) bei bekannten Wellenwiderständen und bekanntem Widerstand des Fernhörers die im allgemeinen nur geringe Korrektur zu berechnen, die man an b_0 anbringen muß, um b zu erhalten.

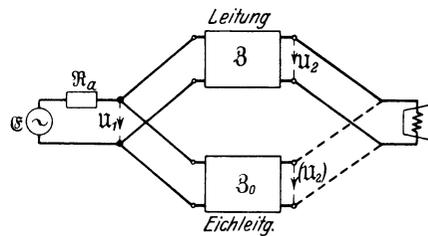


Abb. 238.

Bei geringer Dämpfung des zu untersuchenden Vierpols schaltet man ihm entweder eine bekannte Dämpfung zu, oder man legt auch die Stromquelle mit Hilfe eines zweiten zwei-poligen Umschalters abwechselnd an die zu untersuchende und an die Eichleitung. Nach Gleichung (455) des § 158 hat man dann bei symmetrischen Vierpolen gleiche Lautstärke, wenn

$$\begin{aligned} & \left| (\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e) \mathcal{C}of\ g + \left(\mathfrak{Z} + \frac{\mathfrak{R}_a \mathfrak{R}_e}{\mathfrak{Z}} \right) \mathcal{S}in\ g \right| \\ &= \left| (\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e) \mathcal{C}of\ g_0 + \left(\mathfrak{Z}_0 + \frac{\mathfrak{R}_a \mathfrak{R}_e}{\mathfrak{Z}_0} \right) \mathcal{S}in\ g_0 \right|. \quad (960) \end{aligned}$$

Da die beiden Seiten dieser Gleichung für $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_0$ und $g = g_0$ miteinander identisch werden, ist bei gleicher Lautstärke und annähernder Angleichung der Wellenwiderstände das zu bestimmende Dämpfungsmaß nahezu gleich dem Dämpfungsmaß der Eichleitung; aus (960) läßt sich berechnen, um wieviel bei gegebenem g , \mathfrak{Z} , \mathfrak{Z}_0 , \mathfrak{R}_a , \mathfrak{R}_e das eingestellte b_0 von b abweicht.

Statt Lautstärken mit dem Fernhörer abzugleichen, kann man die sekundären Klemmen auch durch die Wellenwiderstände abschließen und auf Gleichheit der sekundären Spannungen einstellen. Hierzu bedient man sich vorzugsweise des Röhrenspannungsmessers.

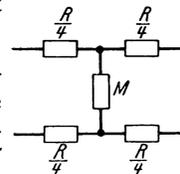


Abb. 239.

§ 269. Vergleichsvierpole (Eichleitungen). Bei mäßigen Ansprüchen an die Genauigkeit kann man als Vergleichsvierpole Sternschaltungen verwenden, die aus reinen Widerständen zusammengesetzt sind und einen festen reellen Wellenwiderstand Z haben, der in der Nähe des Wellenwiderstands der zu messenden Leitung liegt. Für die „H-Schaltung“ der Abb. 239 gilt z. B.

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{R}_1^l &= \mathfrak{R}_2^l = \frac{R}{2} + M, \\ \mathfrak{R} &= M, \end{aligned} \right\} \quad (961)$$

also

$$\mathcal{C}of\ g = 1 + \frac{R}{2M} = \mathcal{C}of\ b, \quad (962)$$

$$\mathfrak{R} = M = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathcal{S}in\ g} = \frac{Z}{\mathcal{S}in\ b}. \quad (963)$$

Nach (963) berechnet man M ; R ergibt sich gemäß (962) aus

$$R = 2 M (\operatorname{Cof} b - 1) = 2 Z \mathfrak{L}g(b/2).$$

Soll z. B. $Z = 600$ sein, so gehört zu

$b =$	1	2	3	4	5
$M =$	511	165	60	22	8,1 Ω

und daher

$R =$	555	915	1086	1158	1184 Ω .
-------	-----	-----	------	------	-----------------

§ 270. Der Schleifendämpfungsmesser¹. Zwei Vierpole, der zu untersuchende und ein Vergleichsvierpol, etwa eine gewöhnliche verzerrungsfreie Eichleitung, seien wie bei den gewöhnlichen Dämpfungsmessern an dieselbe Stromquelle

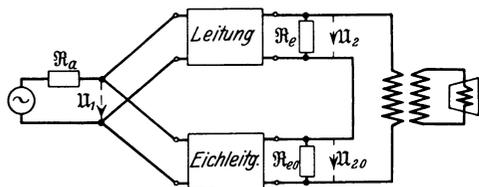


Abb. 240.

angeschlossen; an ihren Enden liege je ein Abschlußwiderstand $\mathfrak{R}_e, \mathfrak{R}_{e0}$. Schaltet man sie wie in Abb. 240 zur Schleife, so bleiben die Schleifendrähte nach der Maschenregel dann und nur dann stromlos, wenn die beiden Spannungen U_2 und U_{20} dem Betrage nach gleich und — bei den Zählpfeilen der Abbildung — der Phase

nach genau entgegengesetzt sind. Stellt man also irgendwie auf Stromlosigkeit der Schleife ein, so gilt nach § 156 ohne jeden systematischen Fehler:

$$\operatorname{Cof} g + \frac{3}{\mathfrak{R}_e} \operatorname{Sin} g = - \left(\operatorname{Cof} b_0 + \frac{Z_0}{\mathfrak{R}_{e0}} \operatorname{Sin} b_0 \right). \quad (964)$$

Für die bisher noch willkürlichen Widerstände \mathfrak{R}_e und \mathfrak{R}_{e0} wollen wir zwei besondere Voraussetzungen machen:

1. $\mathfrak{R}_e = \mathfrak{R}_{e0} = \infty$; d. h. die offenen Enden der Vierpole seien zur Schleife geschaltet. Dann gilt nach (964)

$$\operatorname{Cof} g = - \operatorname{Cof} b_0,$$

also

$$b = b_0, \quad a = 180^\circ, 540^\circ, \dots \quad (965)$$

2. $\mathfrak{R}_e = Z_0, \mathfrak{R}_{e0} = Z_0$; d. h. die Vierpole seien durch ihre Wellenwiderstände abgeschlossen. Dann gilt

$$e^g = - e^{b_0} = e^{b_0} \angle 180^\circ, 540^\circ, \dots,$$

also wieder

$$b = b_0, \quad a = 180^\circ, 540^\circ, \dots$$

Polt man die Eichleitung etwa an ihrem Eingang um, so bleibt in beiden Fällen die Schleife stromlos, wenn

$$b = b_0, \quad a = 0^\circ, 360^\circ, \dots \quad (966)$$

Gelingt es also, die Schleife stromlos zu machen (was man mit einem Telephon feststellt), so ist das zu messende Winkelmaß ein ganzzahliges Vielfaches von 180° , das zu messende Dämpfungsmaß gleich dem ablesbaren Dämpfungsmaß der Eichleitung.

Das Winkelmaß a des zu untersuchenden Vierpols braucht nicht zufällig gleich $k \cdot 180^\circ$ zu sein, wo k eine ganze Zahl bedeutet. Denn man kann die Meßfrequenz so regeln, daß a zu einem ganzzahligen Vielfachen von 180° wird. Man erhält zwar auf diese Weise $b + ja$ nicht für eine vorgeschriebene Frequenz;

¹ Mayer, H. F.: Elektr. Nachr.-Techn. 3, 141 (1926).

meist genügen aber einige Meßwerte, um die Kurve $a = f(\omega)$ recht genau zeichnen zu können. Die Bestimmung der ganzen Zahl k ist leicht, da der Verlauf der Funktion $f(\omega)$ immer angenähert bekannt ist.

Ob in dem praktisch benutzten Frequenzbereich genügend viele Meßpunkte liegen, hängt davon ab, ob die Kurve $f(\omega)$ steil genug ist; ihre Steilheit $da/d\omega$ ist der Leitungslänge proportional.

Verlangt man die Messung des Übertragungsmaßes für beliebige Frequenzen, so muß man eine Eichschaltung nehmen, bei der die Größe U_1/U_2 nach Betrag und nach Phase geändert werden kann, also z. B. eine gewöhnliche Eichleitung in Verbindung mit einer Phasenbrücke (§ 113).

§ 271. Der Streckendämpfungsmesser. Mit ihm kann die Dämpfung einer Leitung, die zwei Orte A und B verbindet, durch Vergleich mit der Dämpfung einer Eichleitung gemessen werden.

Man schließt (Abb. 241) die Leitung am Ende B etwa betriebsmäßig ab, speist sie am Anfang A in einer sofort näher zu besprechenden Weise und mißt den Betrag der Spannung zwischen den sekundären Klemmen, etwa mit einem Röhrenspannungsmesser. Sodann speist man eine Eichleitung, die sich am Orte B befindet und ebenfalls betriebsmäßig abgeschlossen ist, an ihrem Eingang genau in derselben Weise wie vorher das Kabel und regelt sie so lange, bis der jetzt an ihrem Ausgang angelegte Röhrenspannungsmesser denselben Ausschlag

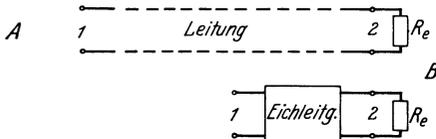


Abb. 241.

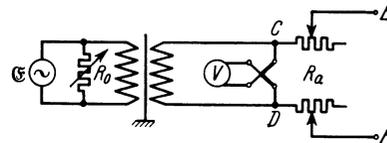


Abb. 242.

zeigt wie vorher. Die Ablesung an der Eichleitung stellt dann unmittelbar die gesuchte Dämpfung dar.

Damit am Kabelanfang in A genau dieselbe Spannung liegt wie am Eingang der Eichleitung in B , benutzt man auf beiden Stationen einen sogenannten „Normalgenerator“ (Abb. 242). Eine Wechselstromquelle \mathcal{G} arbeitet auf einen Übertrager, zu dessen primärer Wicklung ein regelbarer Widerstand R_0 parallel liegt. Hinter dem Übertrager liegt auf jeder Seite ein Widerstand $R_a/2$ von der halben Größe des Soll-Scheinwiderstands der zwischen E und F anzuschaltenden Leitung. Die Spannung zwischen den Punkten C und D wird angezeigt durch ein geeichtes Thermogalvanometer; man regelt gemäß internationaler Übereinkunft den Widerstand R_0 so lange, bis zwischen C und D eine Spannung von 1,55 V, zwischen E und F also (bei Anpassung) eine Spannung von 0,775 V liegt. Diese Zahlenwerte sind so festgesetzt, daß der Generator an einen zwischen E und F angeschalteten und angepaßten Verbraucher von 600Ω Widerstand eine Leistung von gerade 1 mW abgibt. In der Tat ist ja $1,55^2 \text{ V}^2 / (4 \cdot 600 \Omega) = 1,001 \text{ mW}$. Bei beliebigem Scheinwiderstand der Leitung ist die Leistung an ihrem Eingang von 1 mW natürlich verschieden.

§ 272. Pegelmessung. Wenn die Vierpoltheorie ergeben hat, daß das Dämpfungsmaß b bei Anpassung ein logarithmisches Maß für die Schwächung der Spannung oder des Stromes ist, so trifft sich das insofern gut, als nach dem „psychophysischen Grundgesetz“ von Weber und Fechner unsere Empfindungen, wenn erst einmal die „Schwellenwerte“ der sie erregenden physikalischen Reize erreicht sind, den Logarithmen der Reize annähernd proportional wachsen. Werden die Reize immer stärker, so hören an einer gewissen oberen

Grenze die reinen, ungemischten Empfindungen wieder auf; das Auge wird geblendet, die Gehörorgane empfinden Schallschwingungen als etwas Schmerzhaftes.

Die Breite des Schalldruckgebiets (Reizgebiets), in dem eine reine Schallempfindung hervorgerufen wird, ist, wie die Beobachtung zeigt, stark von der Frequenz (Tonhöhe) abhängig. Den Gang des Schwellenwerts mit der Frequenz¹ zeigt die Kurve *a* der Abb. 243, den der oberen Grenze die Kurve *b*. Die von

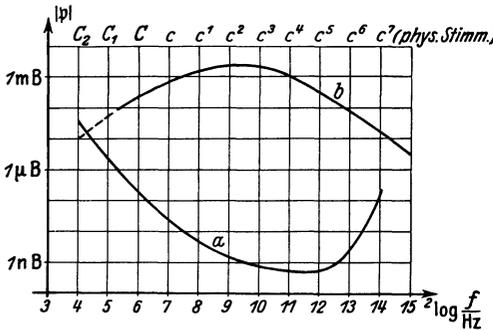


Abb. 243.

den beiden Kurven umschlossene „Hörfläche“² gibt den Bereich der Frequenzen und Schalldrucke an, innerhalb dessen überhaupt etwas gehört wird.

In einem Schallfeld schwankt der Luftdruck mit einer gewissen Frequenz und einem gewissen Scheitelwert um seinen Normalwert herum. $|p|$ sei der Effektivwert seiner Wechselkomponente. Dieser Schalldruck ist mit der größten Verrückung der Luftteilchen, wie hier nicht bewiesen werden soll, durch die Gleichung

$$|p| = 2 \pi f \bar{\rho} a \frac{\xi}{\sqrt{2}} = 184 \frac{f}{\text{kHz}} \frac{\xi}{\text{m}\mu} \text{ nb} \quad (967)$$

verbunden; $\bar{\rho}$ bedeutet dabei den Mittelwert, um den die Luftdichte im Schallfelde schwankt, a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles. Es ist³ für 1 Atm (= 760 T) und 20^0 $\bar{\rho} = 1,205 \text{ mg}^t/\text{cm}^3$, $a = 344 \text{ m/sec}$. Die Druckeinheit b (bar) ist gleich 10^6 dyn/cm^2 .

Die durch eine Flächeneinheit strömende Schalleistung berechnet sich nach

$$\frac{N}{F} = \frac{|p|^2}{\bar{\rho} a} = 2,4 \cdot 10^{-15} \left(\frac{|p|}{\text{nb}} \right)^2 \frac{\text{W}}{\text{cm}^2} \quad (968)$$

Die außerordentliche Empfindlichkeit des menschlichen Ohrs für Töne mittlerer Höhe zeigt sich darin, daß man nach (967) und (968) bei der Tonhöhe c^4 eine Verrückung der Luftteilchen um $1,4 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ und eine Schalleistung von $0,65 \cdot 10^{-15} \text{ W/cm}^2$ noch wahrnehmen kann.

Die Schalldrucke der gewöhnlichen Sprache liegen natürlich weit über den Schwellenwerten. Man rechnet im Mittel mit etwa $1 \mu\text{b}$ Schalldruck in 25 cm Abstand vom Munde eines Sprechenden. Die schwächsten und stärksten Schalldrucke, die bei Orchestermusik vorkommen, stehen in dem wichtigsten Frequenzbereich im Verhältnis von etwa $1 : 10^4$.

Bei den Problemen der Fernmeldetechnik kommt es nicht nur auf die in der Vierpol- und Leitungstheorie vorzugsweise betrachteten Schwächungen der Spannungen, Ströme, Schalldrucke usw. an, sondern auch auf die Spannungen usw. selbst. Die Frage liegt nahe, ob man auch diese in logarithmischem Maße angeben kann. Es sei z. B. die Spannung an irgendeiner Stelle einer Verbindung gleich $0,2 \text{ V}$; dann könnte man sie logarithmisch etwa durch

$$\phi_u = \ln |u| = \ln (0,2 \text{ V}) \quad (970)$$

¹ Das Ohr empfindet auch Tonhöhen logarithmisch. Denn wir haben beispielsweise den Eindruck, als ob die Töne a, a^1, a^2 usw. gleichweit auseinander lägen, obgleich sich ihre Frequenzen wie $1 : 2 : 4 \dots$ verhalten. In der Musiktheorie rechnet man daher nach Euler häufig mit den auf der Abszissenachse der Abb. 243 aufgetragenen Logarithmen der Zahlenwerte der Frequenzen zur Basis 2. Oberhalb der Abbildung stehen die musikalischen Töne in „physikalischer Stimmung“. In dieser hat der Ton c^1 die Frequenz $2^8 = 256$, in der international angenommenen „temperierten“ Stimmung dagegen die Frequenz

$$435 \cdot 2^{-\frac{9}{12}} = 258,65 \text{ Hz} \quad (969)$$

² Die Hörfläche ist natürlich bei den einzelnen Menschen verschieden begrenzt. Die Kurven sind auf Grund von Mittelwerten gezeichnet.

³ g^t ist die Masse eines Grammstücks.

⁴ Häufig wird auch die 10^6 mal kleinere Einheit dyn/cm^2 mit „bar“ bezeichnet.

darstellen. Faßt man hier die Größe $|u|$ folgerichtigerweise wieder als Produkt auf, so erhält man

$$p_u = \ln 0,2 + \ln V = - 1,61 \text{ Neper} + \ln V = 5,30 \text{ Neper} + \ln \text{mV}. \quad (971)$$

Man sieht: Bei logarithmischen Angaben sind die Bezugswerte additiv, nicht multiplikativ; nicht die Einheit, sondern der Nullpunkt muß festgelegt werden. Geht man z. B. von dem Nullpunkt $\ln V$ zu dem „tieferen“ Nullpunkt $\ln \text{mV}$ über, so muß man den Neperwert nicht mit einem Faktor multiplizieren, sondern ihm den positiven Summand $6,91$ Neper zufügen.

Wir nennen p_u den „Spannungspegel“ an der betreffenden Stelle der Verbindung. Als Nullpunkt des „absoluten“ Spannungspegels wählt man gemäß den im vorigen Paragraphen erwähnten Festsetzungen den Wert $\ln (0,775 \text{ V})$. Legt man an den Eingang der zu untersuchenden Verbindung eine Spannung von $0,775 \text{ V}$, so gibt der Zahlenwert des Pegelstands zugleich in logarithmischem Maß die Schwächung der Spannung bis zu dem betrachteten Punkt.

„Leistungspegel“ nennen wir die Größe

$$p = \ln \sqrt{N}. \quad (972)$$

Als Nullpunkt des „absoluten“ Leistungspegels wählt man in der Regel den Wert $\ln \sqrt{\text{mW}}$. Ist der hinter dem betrachteten Punkt liegende Scheinwiderstand R_e reell, so ist $N = |u|^2/R_e$; also gilt auch

$$p - \ln \sqrt{\text{mW}} = \ln |u| - \ln \sqrt{R_e} - \ln \sqrt{\text{mW}} = p_u - \ln(0,775 \text{ V}) + \ln \sqrt{\frac{600 \Omega}{R_e}}. \quad (973)$$

Der Zahlenwert des Leistungspegels ist um $\ln \sqrt{600 \Omega/R_e}$ größer als der des Spannungspegels. In der Tat sinkt z. B. bei einer Transformation der Spannung nach unten ($R_e < 600 \Omega$) die Spannung mehr, als der Schwächung der Leistung entspricht; durch das Zusatzglied wird der Pegel gerade wieder um das richtige Maß gehoben.

Ebenso wie man eine gegebene Spannung mit Hilfe eines geeichten Spannungsmessers unmittelbar in Volt messen kann, ebenso kann man an einem geeichten „Pegelzeiger“¹ ohne weiteres den Stand des Spannungspegels an irgendeiner Stelle einer betriebsmäßigen Fernsprechverbindung in logarithmischem Maße ablesen. Den dabei verwendeten, mit Hilfe eines Normalgenerators eichbaren Röhrenspannungsmesser kann man so herstellen, daß sein Ausschlag dem Spannungspegel annähernd proportional und von der Frequenz unabhängig ist.

Unter dem „relativen Pegel“ versteht man die Differenz der absoluten Pegel in dem betrachteten Punkt und in dem „Nullpunkt“ des Systems. Als Nullpunkt wählt man einen Punkt am Eingang der Verbindung, dessen genaue Lage für jede Verbindungsart besonders festgesetzt werden muß.

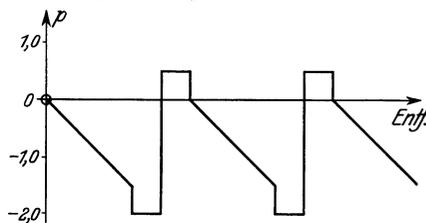


Abb. 244.

Die Ortsabhängigkeit des Spannungs- oder Leistungspegels auf einer Verbindung kann durch den Pegelzeiger bequem überwacht werden. Bei einer Zweidrahtleitung (§ 347) sieht das Pegelbild etwa wie in Abb. 244 aus. Den Verstärkerfeldern entspricht ein allmähliches Absinken der Leistung um $1,5$ Neper. Der Zwischenverstärker läßt sie zunächst um

¹ Mayer, H. F.: Elektr. Nachr.-Techn. 4, 379 (1927).

weitere 0,5 Neper sinken; dann verstärkt er sie um 2,5 Neper, endlich läßt er sie wieder auf den Ausgangsstand absinken. Wenn die Verhältnisse dieses Pegelbilds bei einer Verbindung aufrechterhalten werden, ist ihre Restdämpfung gleich der Dämpfung des einzelnen Verstärkerfeldes.

Der registrierende „Pegelschreiber“ liefert automatisch den Frequenzgang des Pegels z. B. am Ende einer Fernleitung.

XII. Störungen durch benachbarte Leitungen.

§ 273. **Allgemeines über den Einfluß von Starkstromleitungen auf Fernmeldeleitungen.** In der neueren Zeit geht man bekanntlich immer mehr zur Fernleitung hochgespannter elektrischer Energie in engmaschigen Netzen über. Bei den Eisenbahnen wird vielfach der elektrische Betrieb eingeführt. Die Elektrotechnik sieht sich daher immer dringender vor die Aufgabe gestellt, zu verhindern, daß die starken und hochgespannten Ströme, die in den Hochspannungsleitungen, in den Fahrdrähten, Speiseleitungen und Zubringerleitungen der Eisenbahnen fließen, den Fernmeldebetrieb stören oder gefährden.

Ob dieser nur gestört oder gestört und gefährdet wird, hängt von der Größenordnung der Spannungen und Ströme ab, die in den Meldeleitungen entstehen. Bei Eisenbahnsignalanlagen haben Betriebsstörungen vielfach mittelbar Betriebsgefährdungen zur Folge.

Bei der reinen Störung ist die Frequenz der Störspannungen und Störströme von großer Bedeutung. Hängt schon die Empfindlichkeit der Telegraphen- und Fernsprechapparate von der Frequenz ab, so gilt dies in besonders starkem Maße auch von der Empfindlichkeit des menschlichen Ohrs, die für Frequenzen zwischen 1000 und 1500 Hz, wie wir bereits im § 272 gesehen haben, ein Maximum hat; daher rührt die verhältnismäßig hohe Störwirkung der Oberschwingungen technischer Wechselströme.

Ursache der Beeinflussung der Fernmeldeleitungen ist in jedem Falle eine gewisse „Kopplung“ zwischen ihnen und den Starkstromleitungen. Man unterscheidet drei Arten: die Kopplung durch Leitungsströme („galvanische“ Kopplung), durch Verschiebungsströme („elektrische“ Kopplung) und durch Induktionslinien („magnetische“ Kopplung). Wir werden diese drei Arten der Kopplung der Reihe nach besprechen.

§ 274. **Galvanische Kopplung.** Durch unmittelbaren Übergang von Leitungsströmen wirkt eine Starkstromleitung auf eine Fernmeldeleitung ein, wenn bei beiden Leitungen die Erde als Rückleitung verwendet wird und die Erdungsstellen nahe beieinander liegen, oder wenn Kurzschlüsse nach Erde hin vorkommen. Können sich die Ströme bei den gegebenen geologischen Verhältnissen

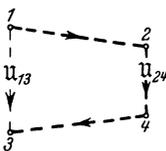


Abb. 245.

an den Erdungspunkten sofort nach allen Richtungen hin ausbreiten, so ist der galvanische Einfluß im allgemeinen gering und gegenüber den anderen Einflüssen praktisch zu vernachlässigen.

§ 275. **Elektrische Kopplung.** Viel wichtiger als der galvanische ist der elektrische Einfluß. Besteht zwischen zwei Leitungen 1 und 3 (Abb. 245) eine Gleich- oder Wechselspannung, so erzeugt diese zwischen zwei benachbarten Leitungen 2 und 4 ebenfalls eine Gleich- oder Wechselspannung. Die Höhe der „influenzierten“ Leerlaufspannung u_{24} ergibt sich einfach aus der Spannungsteilergleichung:

$$u_{24} = \frac{R_{24}}{R_{1243}} u_{13}, \quad (974)$$

in der die \mathfrak{R} die dielektrischen Widerstände auf den durch die Indizes ange- deuteten Wegen bedeuten. Bei gegebener influenzierender Spannung U_{13} wird also die influenzierte Spannung U_{24} um so größer, einen je größeren Bruchteil des Gesamt- widerstands \mathfrak{R}_{1243} der Widerstand \mathfrak{R}_{24} ausmacht. Bedeuten die Lei- tungen 1 3 einerseits, 2 4 andererseits Doppelleitungen, so sind die Widerstände \mathfrak{R}_{12} und \mathfrak{R}_{43} im allgemeinen gegenüber dem Widerstande \mathfrak{R}_{24} groß, so daß nur ver- hältnismäßig geringe Spannungen entstehen.

Viel gefährlicher ist die elektrische Kopplung, wenn die Starkstrom- und die Fernmeldeleitung beide mit Erdrückleitung arbeiten. Der häufigste Fall ist der einer eindrätigen Telegraphen-, Signal- oder Fernsprechleitung (vgl. § 279 am Schluß), welche parallel zu dem Fahrdrabt oder der Fahrschiene einer elektri- schen Bahn verläuft. Aber auch eine symmetrische Drehstromleitung, in der ein Erdschluß auftritt, ist zu den Leitungen mit Erdrückleitung zu rechnen.

Der Verschiebungsstrom, der von einer Starkstromleitung auf der Länge l zu einer Fernmeldeleitung übergeht (Abb. 246), teilt sich in drei Teile: ein Teil fließt

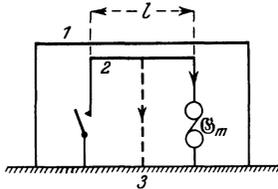


Abb. 246.

als Verschiebungsstrom weiter zur Erde, ein anderer Teil in die Fernmeldeleitung nach vorn und ein dritter in sie nach hinten. Um vorsichtig zu rechnen, nehmen wir an, daß sich z. B. beim Telegraphenbetrieb die Taste gerade in der Schwebestellung befindet; dann haben wir die Schaltung der Abb. 247, G_m ist der metallische Leitwert des Endapparats. Aus dem-

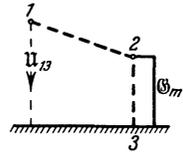


Abb. 247.

selben Grunde fragen wir nur nach dem influenzierten störenden Kurzschluß- strom und der influenzierten gefährdenden Leerlaufspannung. Nennen wir die dielektrischen Leitwerte der Abb. 247 G_{12} und G_{23} , so berechnen sich offenbar der „Kurzschlußstrom“ und die „Leerlaufspannung“ nach den Gleichungen:

$$I_m^k = G_{12} U_{13}, \quad U_{23}^l = \frac{G_{12}}{G_{12} + G_{23}} U_{13}. \quad (975)$$

Um nach (975) die störenden und gefährdenden Einflüsse wenigstens an- nähernd vorausberechnen zu können, greifen wir auf die Entwicklungen des § 55 zurück. Wir dürfen jetzt im Gegensatz zu früher den Ab- stand a der Drähte (Abb. 248) gegenüber ihren Höhen h_1 und h_2 nicht mehr als klein ansehen und schreiben daher zu- nächst ohne Vernachlässigung:

$$\left. \begin{aligned} 2 \pi \varepsilon l U_{13} &= Q_1 \ln \frac{2 h_1}{\varrho_1} + Q_2 \ln \frac{r'}{r}, \\ 2 \pi \varepsilon l U_{23} &= Q_1 \ln \frac{r'}{r} + Q_2 \ln \frac{2 h_2}{\varrho_2}. \end{aligned} \right\} \quad (976)$$

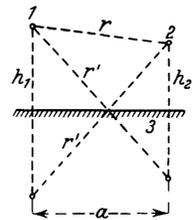


Abb. 248.

Die hier vorkommenden Logarithmanden sind von verschie- dener Größenordnung. So erhält man z. B. für $h_1 = h_2 = 6$ m, $\varrho_1 = 4$ mm, $\varrho_2 = 2$ mm

$$\ln \frac{2 h_1}{\varrho_1} = \ln (3 \cdot 10^3) = 8,0, \quad \ln \frac{2 h_2}{\varrho_2} = \ln (6 \cdot 10^3) = 8,7. \quad (977)$$

Dagegen ist selbst für $a = h_1 = h_2$

$$\ln \frac{r'}{r} = \ln \frac{\sqrt{a^2 + (2 h)^2}}{a} = \ln \sqrt{5} = 0,8, \quad (978)$$

und dieser Wert wird mit wachsendem Abstand a noch kleiner. Wir bekommen

daher eine ausreichende Näherung, wenn wir $\ln(2h_1/\rho_1) = 8$, $\ln(2h_2/\rho_2) = 9$ setzen und in der Nennerdeterminante der Gleichungen (976) das Quadrat von $\ln(r'/r)$ neben dem Produkt $8 \cdot 9$ weglassen. Damit wird

$$Q_2 = \frac{\pi \varepsilon l}{36} \left(-\ln \frac{r'}{r} U_{13} + 8 U_{23} \right) \quad (979)$$

oder, wenn wir noch $U_{13} = U_{12} + U_{23}$ setzen:

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{\pi \varepsilon l}{36} \left\{ -\ln \frac{r'}{r} U_{12} + \left(8 - \ln \frac{r'}{r} \right) U_{23} \right\} \\ &\approx \frac{\pi \varepsilon l}{36} \ln \frac{r'}{r} U_{21} + \frac{2 \pi \varepsilon l}{9} U_{23}. \end{aligned} \quad (980)$$

Der Koeffizient von U_{21} ist die Teilkapazität $C_{12}l$, der von U_{23} die Teilkapazität $C_{23}l$. Nach (975) erhalten wir daher

$$\begin{aligned} |\mathfrak{S}_m^k| &= \omega C_{12}l |u_{13}| = \omega \cdot \frac{\pi \varepsilon l}{36} |u_{13}| \ln \frac{r'}{r} \\ &= 11,2 \cdot \frac{f}{\text{Hz}} \frac{l}{\text{km}} \frac{|u_{13}|}{\text{kV}} \lg \frac{r'}{r} \mu\text{A}; \end{aligned} \quad (981)$$

$$\begin{aligned} |u_{23}^l| &= \frac{C_{12}}{C_{12} + C_{23}} |u_{13}| \approx \frac{C_{12}}{C_{23}} |u_{13}| = \frac{|u_{13}|}{8} \ln \frac{r'}{r} \\ &= 0,29 |u_{13}| \lg \frac{r'}{r}. \end{aligned} \quad (982)$$

Es sei z. B. $a = h_1 = h_2 = 7 \text{ m}$; $|u_{13}| = 15 \text{ kV}$, $f = 16\frac{2}{3} \text{ Hz}$, $l = 25 \text{ km}$. Dann ist

$$\mathfrak{S}_m^k = 11,2 \cdot 16,7 \cdot 25 \cdot 15 \lg \sqrt{5} \mu\text{A} = 24 \text{ mA},$$

$$u_{23}^l = 0,29 \cdot 15 \lg \sqrt{5} \text{ kV} = 1,5 \text{ kV}.$$

Ein influenzierter Strom von 24 mA ist unzulässig, da der Normalstrom einer Telegraphenleitung etwa 15 mA beträgt und der influenzierte Strom auf höchstens 4 % des Normalwerts steigen darf. Andererseits ist die influenzierte Spannung von 1500 V so hoch, daß die Berührung der isolierten Fernmeldeleitung mit Lebensgefahr verbunden wäre.

Am bequemsten greift man r'/r auf einer maßstäblichen Skizze ab. Bei großem Abstand a kann man setzen:

$$\ln \frac{r'}{r} = \ln \frac{\sqrt{a^2 + (h_1 + h_2)^2}}{\sqrt{a^2 + (h_1 - h_2)^2}} = \ln \frac{1 + \frac{(h_1 + h_2)^2}{2a^2}}{1 + \frac{(h_1 - h_2)^2}{2a^2}} \approx \ln \left(1 + \frac{2h_1h_2}{a^2} \right) \approx \frac{2h_1h_2}{a^2} \quad (983)$$

und daher¹

$$|\mathfrak{S}_m^k| = \omega \frac{\pi \varepsilon l}{18} |u_{13}| \cdot \frac{h_1 h_2}{a^2} = 9,7 \frac{f}{\text{Hz}} \frac{l}{\text{km}} \frac{|u_{13}|}{\text{kV}} \frac{h_1 h_2}{a^2} \mu\text{A}, \quad (984)$$

$$|u_{23}^l| = \frac{1}{4} |u_{13}| \cdot \frac{h_1 h_2}{a^2}. \quad (985)$$

Der influenzierte Strom und die influenzierte Spannung nehmen also bei größerer Entfernung umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung ab. Praktisch ist daher in Entfernungen über 200 m, selbst bei hohen Spannungen und langen Parallelführungen, von einer elektrischen Einwirkung nichts mehr wahrzunehmen. Die Influenzwirkung verschwindet auch mit abnehmenden Leitungshöhen h_1 und h_2 .

Gegen den elektrischen Einfluß gibt es drei Maßnahmen: Vergrößerung des Abstandes a , Verwendung von symmetrischen Doppelleitungen und Verkabe-

¹ Die gewöhnlich angegebene Lienemannsche Formel enthält statt des Nenners a^2 den Nenner $a^2 + h_1^2 + h_2^2$.

lung. Bei Kabeln ist die elektrische Kopplung gleich Null, da der Bleimantel die Schwachstromleitung elektrisch vollkommen gegen die Starkstromleitung abschirmt.

§ 276. Genauere Theorie der Starkstrombeeinflussung. Bisher haben wir noch keine Rücksicht darauf genommen, daß die Fernmeldeleitungen Gebilde mit verteiltem Widerstand, verteilter Induktivität usw. sind, so daß elektromagnetische Vorgänge, die in ihnen durch benachbarte Starkstromleitungen erregt werden, im allgemeinen eine gewisse Abhängigkeit vom Ort zeigen müssen.

Außer der elektrischen wollen wir sofort auch die magnetische Kopplung zwischen Starkstrom- und Fernmeldeleitung berücksichtigen¹. Sie rührt davon her, daß mit jeder benachbarten Fernmeldeleitung ein Teil der von dem Starkstrom \mathfrak{I}_0 erzeugten magnetischen Kraftlinien verkettet ist. Nennen wir die bezogene Gegeninduktivität zwischen Starkstrom- und Meldeleitung L_{01} und die bezogene Teilkapazität zwischen den Leitungen C_{01} (früher schrieben wir C_{12}), so erhalten wir bei der Anordnung und den Zählpfeilen der Abb. 249 als Grunddifferentialgleichungen (vgl. § 227) für die Spannung u und den Strom \mathfrak{I} auf der Meldeleitung in den üblichen Bezeichnungen

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d u}{d x} &= (R + j \omega L) \mathfrak{I} + j \omega L_{01} \mathfrak{I}_0, \\ -\frac{d \mathfrak{I}}{d x} &= (G + j \omega C) u - j \omega C_{01} u_0. \end{aligned} \right\} \quad (986)$$

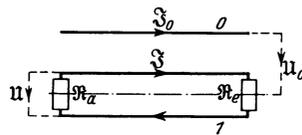


Abb. 249.

Der störende Strom \mathfrak{I}_0 und die störende Spannung u_0 seien vom Orte unabhängig. Die Gleichungen (986) können dann ähnlich wie im § 124 durch die Einführungen

$$\left. \begin{aligned} u - \frac{j \omega C_{01}}{G + j \omega C} u_0 &= u - \xi_1 u_0 = u', \\ \mathfrak{I} + \frac{j \omega L_{01}}{R + j \omega L} \mathfrak{I}_0 &= \mathfrak{I} + \xi_2 \mathfrak{I}_0 = \mathfrak{I}' \end{aligned} \right\} \quad (987)$$

„homogen“ gemacht

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d u'}{d x} &= (R + j \omega L) \mathfrak{I}', \\ -\frac{d \mathfrak{I}'}{d x} &= (G + j \omega C) u' \end{aligned} \right\} \quad (988)$$

und durch die gewöhnlichen Leitungsgrundgleichungen gelöst werden ($\xi = x/l$):

$$\left. \begin{aligned} u - \xi_1 u_0 &= (u_1 - \xi_1 u_0) \mathfrak{C} \operatorname{of} g \xi - \mathfrak{I} (\mathfrak{I}_1 + \xi_2 \mathfrak{I}_0) \mathfrak{S} \operatorname{in} g \xi, \\ \mathfrak{I} + \xi_2 \mathfrak{I}_0 &= -\frac{1}{\mathfrak{I}} (u_1 - \xi_1 u_0) \mathfrak{S} \operatorname{in} g \xi + (\mathfrak{I}_1 + \xi_2 \mathfrak{I}_0) \mathfrak{C} \operatorname{of} g \xi. \end{aligned} \right\} \quad (989)$$

Als Integrationskonstanten sind hier zunächst die beiden Anfangswerte u_1 und \mathfrak{I}_1 gewählt: für $\xi = 0$ wird ja $u = u_1$, $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1$. Wir müssen sie durch die Endwiderstände \mathfrak{R}_a und \mathfrak{R}_e ersetzen. Da in der Fernmeldeleitung keine elektromotorische Kraft liegt, lauten die Bedingungen (vgl. § 231)

$$u_1 = -\mathfrak{R}_a \mathfrak{I}_1 = -\mathfrak{I} \mathfrak{I} g r_a \mathfrak{I}_1, \quad (990)$$

$$u_2 = \mathfrak{R}_e \mathfrak{I}_2 = \mathfrak{I} \mathfrak{I} g r_e \mathfrak{I}_2. \quad (991)$$

Aus (991) und (989) folgt, wenn man u_1 unmittelbar aus (990) entnimmt:

¹ Vgl. H. Pleijel: Untersuchungen über Schwachstromstörungen bei Einphasen-Wechselstrombahnen. München: Oldenbourg 1920. Krause, G., u. A. Zastrow: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. 2, 422 (1922). Eggeling, G.: Elektr. Nachr.-Techn. 5, 312 (1928).

$\mathfrak{f}_1 \mathfrak{U}_0 + (-\mathfrak{B} \mathfrak{I} g r_a \mathfrak{S}_1 - \mathfrak{f}_1 \mathfrak{U}_0) \mathfrak{Cof} g - \mathfrak{B} (\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{f}_2 \mathfrak{S}_0) \mathfrak{Sin} g$
 $= -\mathfrak{f}_2 \mathfrak{I} g r_e \cdot \mathfrak{B} \mathfrak{S}_0 - \mathfrak{I} g r_e (-\mathfrak{B} \mathfrak{I} g r_a \cdot \mathfrak{S}_1 - \mathfrak{f}_1 \mathfrak{U}_0) \mathfrak{Sin} g + \mathfrak{B} \mathfrak{I} g r_e (\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{f}_2 \mathfrak{S}_0) \mathfrak{Cof} g$
 oder, nach \mathfrak{S}_1 aufgelöst:

$$\mathfrak{S}_1 = -\frac{\mathfrak{Cof} r_a}{\mathfrak{B} \mathfrak{Sin} (g + r_a + r_e)} \left\{ (\mathfrak{Cof} (g + r_e) - \mathfrak{Cof} r_e) \mathfrak{f}_1 \mathfrak{U}_0 + (\mathfrak{Sin} (g + r_e) - \mathfrak{Sin} r_e) \mathfrak{f}_2 \mathfrak{B} \mathfrak{S}_0 \right\} \quad (992)$$

oder nach der Rechenregel Anhang 4 h) ($x = g/2 + r_e$, $y = g/2$):

$$\mathfrak{S}_1 = -\frac{2 \mathfrak{Cof} r_a \mathfrak{Sin} \frac{g}{2}}{\mathfrak{B} \mathfrak{Sin} (g + r_a + r_e)} \left\{ \mathfrak{f}_1 \mathfrak{U}_0 \mathfrak{Sin} \left(\frac{g}{2} + r_e \right) + \mathfrak{f}_2 \mathfrak{B} \mathfrak{S}_0 \mathfrak{Cof} \left(\frac{g}{2} + r_e \right) \right\}, \quad (993)$$

wozu sich nach (990) die Gleichung

$$\mathfrak{U}_1 = \frac{2 \mathfrak{Sin} r_a \mathfrak{Sin} \frac{g}{2}}{\mathfrak{Sin} (g + r_a + r_e)} \left\{ \mathfrak{f}_1 \mathfrak{U}_0 \mathfrak{Sin} \left(\frac{g}{2} + r_e \right) + \mathfrak{f}_2 \mathfrak{B} \mathfrak{S}_0 \mathfrak{Cof} \left(\frac{g}{2} + r_e \right) \right\} \quad (994)$$

gesellt.

Die nachfolgende Tabelle zeigt, was sich aus (993), (994) und (989) für die beiden Kopplungsarten und für die beiden wichtigen Fälle des beiderseitigen Leerlaufs ($r_a = r_e = j \cdot 90^\circ$) und des beiderseitigen Kurzschlusses ($r_a = r_e = 0$) ergibt:

	Rein elektrische Kopplung		Rein magnetische Kopplung	
	Leerlauf	Kurzschluß	Leerlauf	Kurzschluß
\mathfrak{U}_1	$\mathfrak{f}_1 \mathfrak{U}_0$	o	$\mathfrak{f}_2 \mathfrak{B} \mathfrak{S}_0 \mathfrak{I} g \frac{g}{2}$	o
\mathfrak{S}_1	o	$-\frac{\mathfrak{f}_1 \mathfrak{U}_0 \mathfrak{I} g \frac{g}{2}}{\mathfrak{B}}$	o	$-\mathfrak{f}_2 \mathfrak{S}_0$
\mathfrak{U}	$\mathfrak{f}_1 \mathfrak{U}_0$	$\mathfrak{f}_1 \mathfrak{U}_0 \frac{2 \mathfrak{Sin} \left(\frac{g}{2} \xi \right) \mathfrak{Sin} \left(\frac{g}{2} (1 - \xi) \right)}{\mathfrak{Cof} \frac{g}{2}}$	$\mathfrak{f}_2 \mathfrak{B} \mathfrak{S}_0 \frac{\mathfrak{Sin} \left(\frac{g}{2} (1 - 2 \xi) \right)}{\mathfrak{Cof} \frac{g}{2}}$	o
\mathfrak{S}	o	$-\frac{\mathfrak{f}_1 \mathfrak{U}_0 \mathfrak{Sin} \left(\frac{g}{2} (1 - 2 \xi) \right)}{\mathfrak{B} \mathfrak{Cof} \frac{g}{2}}$	$-\mathfrak{f}_2 \mathfrak{S}_0 \frac{2 \mathfrak{Sin} \left(\frac{g}{2} \xi \right) \mathfrak{Sin} \left(\frac{g}{2} (1 - \xi) \right)}{\mathfrak{Cof} \frac{g}{2}}$	$-\mathfrak{f}_2 \mathfrak{S}_0$

Bei rein elektrischer Kopplung nimmt demnach im Leerlauffall die Fernmeldeleitung stromlos überall die Spannung $\mathfrak{f}_1 \mathfrak{U}_0$ an. Im Kurzschlußfall dagegen fällt der Effektivwert der Spannung von der Mitte der Fernmeldeleitung, wo er gleich $\left| \mathfrak{f}_1 \mathfrak{U}_0 \mathfrak{I} g \frac{g}{2} \mathfrak{I} g \frac{g}{4} \right|$ (also im allgemeinen kleiner als $|\mathfrak{f}_1 \mathfrak{U}_0|$) ist, nach beiden Enden hin ab; der influenzierte Strom fließt bei positivem $\mathfrak{f}_1 \mathfrak{U}_0$ auf der vorderen Hälfte der Leitung von hinten nach vorn, auf der hinteren von vorn nach hinten, sein Effektivwert nimmt nach den Leitungsenden hin bis zu dem Höchstwert $|\mathfrak{f}_1 \mathfrak{U}_0 / \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{I} g g/2|$ zu. Auch dieser Höchstwert ist im allgemeinen kleiner als $|\mathfrak{f}_1 \mathfrak{U}_0 / \mathfrak{B}|$. Bei Kurzschluß liegen also an den Leitungsenden Spannungsknoten und Strombäuche.

Umgekehrt ist es bei rein magnetischer Kopplung. Im Kurzschlußfall wird zwischen Hin- und Rückleitung überhaupt keine Spannung induziert; es entsteht nur ein konstanter, bei positivem $\mathfrak{f}_2 \mathfrak{S}_0$ dem störenden Strom entgegengesetzt fließender Strom $-\mathfrak{f}_2 \mathfrak{S}_0$. Im Leerlauffall dagegen ist der Störstrom in der Mitte der Leitung am stärksten $\left(= -\mathfrak{f}_2 \mathfrak{S}_0 \cdot \mathfrak{I} g \frac{g}{2} \mathfrak{I} g \frac{g}{4} \right)$, während die Spannung zwischen Hin- und Rückleitung auf den beiden Leitungshälften verschiedenes Vorzeichen hat und an den Enden am größten ist (nämlich $= \pm \mathfrak{f}_2 \mathfrak{B} \mathfrak{S}_0 \cdot \mathfrak{I} g g/2$). Bei Leerlauf liegen also an den Leitungsenden Spannungsbäuche und Stromknoten.

§ 277. **Magnetische Kopplung.** Die Gegeninduktivität zwischen einer Starkstrom- und einer Meldedoppelleitung kann leicht auf Grund der Entwicklungen des § 88 beurteilt werden. Man geht aus von dem dort gefundenen Ausdruck für die Gegeninduktivität der Längeneinheit zwischen zwei parallelen Stromfäden:

$$L_{01} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\ln \frac{2l}{a} - 1 \right), \quad (995)$$

wo l die Länge und a den Abstand der Fäden bedeuten. Die Summation über die beiden entgegengesetzten Ströme (Abb. 250) ergibt:

$$L_{01} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\ln \frac{2l}{a_{01}} - 1 - \ln \frac{2l}{a_{02}} + 1 \right) = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{a_{02}}{a_{01}}. \quad (996)$$

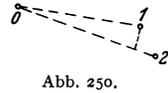


Abb. 250.

Im ungünstigsten Falle¹, wenn $a_{02} = a_{01} + a_{12}$ ist, kann man dafür

$$L_{01} \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{a_{12}}{a_{01}} = 0,2 \frac{a_{12}}{a_{01}} \frac{\text{mH}}{\text{km}} \quad (997)$$

schreiben.

Ist etwa $a_{01} = 10 \text{ m}$, $a_{12} = 20 \text{ cm}$, $f = 16 \frac{2}{3} \text{ Hz}$, so ergibt sich nach (997)

$$L_{01} = 0,2 \cdot \frac{20 \text{ cm}}{10 \text{ m}} \frac{\text{mH}}{\text{km}} = 4 \frac{\mu\text{H}}{\text{km}},$$

$$2\pi f L_{01} = \frac{2\pi \cdot 16,7}{\text{s}} 4 \frac{\mu\text{H}}{\text{km}} = \frac{42 \text{ mV}}{100 \text{ Akm}};$$

d. h. ein Starkstrom von 100 A induziert in einer Doppelleitung, die ihr auf 1 km parallel geführt ist, eine Spannung von 42 mV.

Man erkennt, daß die magnetische Einwirkung nur umgekehrt proportional der ersten Potenz des Abstands a_{01} abnimmt. Auch in größeren Entfernungen muß man daher, falls man die Fernmeldeleitung nicht sorgfältig verdrillt, noch mit merklichen Einwirkungen rechnen.

Wenn beide Leitungen, die störende und die gestörte, über Erde geschlossen sind, wird die Berechnung von L_{01} sehr schwierig. Da sich die Rückströme im Erdreich verteilen, könnte man versucht sein, sie bei der Berechnung von L_{01} ganz zu vernachlässigen und sich allein an die Formel (995) für die Gegeninduktivität zwischen zwei parallelen Fäden zu halten. In Wirklichkeit ist aber die Gegeninduktivität durch den trotz der „Verdünnung“ noch immer entgegenwirkenden Einfluß der Rückströme geringer, als sie sich nach dieser Formel ergäbe.

Neuerdings haben verschiedene Verfasser den Einfluß der Rückströme theoretisch untersucht². Sie finden, daß deren Verlauf sehr wesentlich von der Frequenz abhängt. Es entsteht eine Art Hautwirkung: die Rückströme konzentrieren sich bei höheren Frequenzen mehr in der Nähe der Erdoberfläche und wirken infolgedessen stärker auf die Gegeninduktanz ein als bei Gleichstrom. Maßgebend ist auch hier (vgl. § 84) die dimensionslose Kombination $p = a \sqrt{\pi f \mu_0}$.

Die Theorie ist durch Messungen³ bestätigt worden. Abb. 251 zeigt die gemessene Frequenzabhängigkeit der bezogenen Gegeninduktivität zwischen zwei beiderseits geerdeten Einfachleitungen, die in 5 km Länge über dem Truppenübungsplatz Münsingen in der Schwäbischen Alb parallel ausgespannt waren.

¹ Steht die Verbindungslinie 12 senkrecht auf der Mittellinie zwischen 01 und 02, so ist L_{01} gleich Null.

² Vgl. insbes. F. Pollaczek: Elektr. Nachr.-Techn. 3, 339 (1926); 4, 18 (1927). Carson, J. R.: Bell Syst. Techn. J. 5, 539 (1926); 8, 94 (1929). Haberland, G.: Z. ang. Math. Mech. 6, 366 (1926).

³ Zastrow, A.: Elektr. Bahnen 2, 368 (1926); Klewe, H.: Elektr. Nachr.-Techn. 6, 467 (1929), dort auch weitere Literatur zur Theorie.

Parameter der Darstellung ist der Abstand a zwischen der Starkstrom- und der Fernmeldeleitung. Wie man sieht, nimmt die Gegeninduktanz mit steigender Frequenz wegen der wirksameren Kompensation durch die konzentrierteren Erdströme ab. Dieser Frequenzgang zeigt sich am ausgeprägtesten in großen Entfernungen. Er ist natürlich erwünscht, da ja gerade die Oberschwingungen des technischen Wechselstroms unangenehme Störungen verursachen.

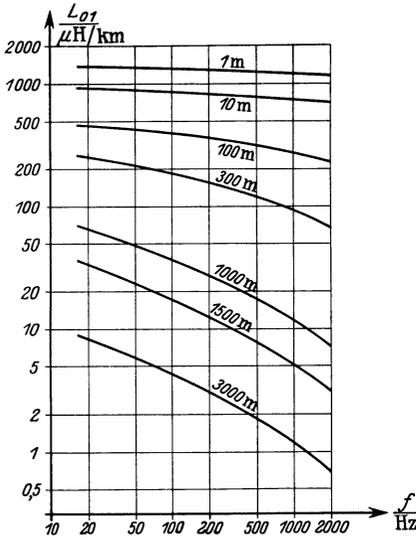


Abb. 251.

Die Phase der Gegeninduktanz $j\omega L_{01}$ ist nach Theorie und Erfahrung kleiner als 90° .

§ 278. **Kompensation der magnetischen Einwirkung.** Wenn der Strom im Fahrdrabt einer Einphasenbahn eine benachbarte Fernmeldeleitung magnetisch sehr viel stärker beeinflusst als der Strom in einer Doppelleitung, so rührt das, wie wir gesehen haben, von der mangelhaften Konzentration der Rückstromlinien her. Der Betriebsstrom fließt zwar am Belastungspunkt durch die elektrische Lokomotive zunächst in die Schienen; er verläßt diese aber in der Regel sofort wieder, um weit ausgebreitet durch das Erdreich zum Speisepunkt zurückzufließen.

Daß ein starker Schienenstrom günstig wirkt, kann man auch folgendermaßen einsehen. Wir geben dem Fahrdrabt den Index 0, der Fernmeldeleitung den Index 1, den Schienen den Index s und beziehen alle Widerstände und Induktivitäten auf die Längeneinheit. Dann gilt für die Schienen

$$0 = \Re_s \mathfrak{I}_s + j\omega L_{0s} \mathfrak{I}_0; \text{ also } \mathfrak{I}_s = -\frac{j\omega L_{0s}}{\Re_s} \mathfrak{I}_0. \tag{998}$$

Auf die Längeneinheit der Meldeleitung (1) fällt daher, von der Starkstromanlage herrührend, die induktive Spannung:

$$j\omega L_{01} \mathfrak{I}_0 + j\omega L_{s1} \mathfrak{I}_s = j\omega L_{01} \mathfrak{I}_0 \left\{ 1 - j\omega L_{s1} \cdot \frac{L_{0s}}{L_{01} \Re_s} \right\}. \tag{999}$$

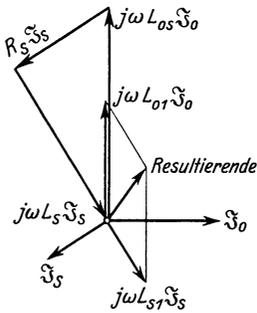


Abb. 252.

Die Einwirkung des Fahrstroms kann demnach tatsächlich durch den Schienenstrom bis zu einem gewissen Grade aufgehoben werden. Abb. 252 veranschaulicht die Phasenverhältnisse unter der (nach § 277 allerdings nicht zutreffenden) Voraussetzung rein induktiver Gegeninduktanzen.

Man sucht die Gegeninduktivität L_{0s} zwischen dem Fahrdrabt und den Schienen z. B. durch „Saugtransformatoren“ zu vergrößern. Das sind Transformatoren, durch die man den Fahrdrabt in gewissen Abständen (z. B. in Pupinspulenabständen) mit den Schienen unmittelbar induktiv koppelt. Durch diese und ähnliche

Maßnahmen ist es gelungen, den Schienenstrom auf 96% des Fahrstroms zu erhöhen und dadurch die wirksame Induktanz zwischen einer Starkstrom- und einer Fernmeldeeinzelleitung bei einem Abstand von etwa 50 m und bei 16 2/3 Hz auf 20 mV/100 Akm herabzudrücken: $L_{01} \approx 1,9 \mu\text{H/km}$. Nach Abb. 251

müßte man, um dieselbe Wirkung ohne Saugtransformatoren zu erzielen, den Abstand auf einige Kilometer vergrößern.

Bei Fernmeldekabeln wird auch im Kabelmantel ein kompensierender Strom erregt¹. Nennen wir \mathfrak{S}'_0 den Anteil des Starkstroms, der noch nicht durch den Schienenstrom oder durch andere Maßnahmen auf der Starkstromseite aufgehoben ist, und geben wir dem Mantel den Index m , so wirkt in einer Fernmelde-einfachleitung die Spannung gegen Erde

$$j \omega L_{01} \mathfrak{S}'_0 + j \omega L_{m1} \mathfrak{S}_m = j \omega L_{01} \mathfrak{S}'_0 - j \omega L_{m1} \cdot \frac{j \omega L_{0m}}{\mathfrak{R}_m} \mathfrak{S}'_0. \quad (1000)$$

Nun ist $L_{01} \approx L_{0m}$; außerdem kann man $L_{m1} \approx L_m$ setzen, da für die Induktivität des Mantels annähernd derselbe mittlere Stromfadenabstand maßgebend ist wie für die Gegeninduktivität zwischen Mantel und Ader. Daher ist die störende Spannung

$$j \omega L_{01} \mathfrak{S}'_0 \left(1 - \frac{j \omega L_m}{\mathfrak{R}_m} \right) = j \omega L_{01} \mathfrak{S}'_0 \cdot \frac{L_m}{\mathfrak{R}_m}; \quad (1001)$$

d. h. man muß die Zeitkonstante L_m/R_m möglichst groß machen. Deshalb verbindet man die Kabelmäntel an den Spleiß- und Einführungsstellen gut leitend durch oder legt noch eine dicke Kupferschicht zwischen Mantel und Adern oder einen dicken Kupferleiter zwischen die Adern. Auch geeignete Ausbildung der Bewehrung (Eisenband statt Eisendrahts) und Wahl hochpermeablen Eisens (z. B. Siliziumeisens) für sie ist nach Gleichung (1001) günstig. Bei höheren Frequenzen (Sprechfrequenzen) gelingt es durch solche Maßnahmen, die Störungen auf $\approx 1 \dots 2\%$ herabzusetzen².

Der Mantel muß nach der Tabelle des § 276, wenn in ihm auf der ganzen Länge ein Strom induziert werden soll, an den Enden gut geerdet werden.

Die störenden Ströme nehmen besonders dann gefährliche Stärken an, wenn in den Starkstromsystemen Kurzschlüsse auftreten. Man muß dann mit Stromstärken von über 1000 A, die in Bruchteilen von Sekunden entstehen, und mit induzierten Spannungen von über 1000 V rechnen. Gegen solche Ströme und Spannungen ist mit den erwähnten Schutzmaßnahmen auf der Schwachstromseite nichts auszurichten; man schaltet aber wenigstens die Betriebsapparate nicht unmittelbar, sondern durch Übertrager oder Relais an die Leitungen an. Die Kurzschlußströme dauern meist nur kurze Zeit (< 1 s), da sich die Starkstromleitungen selbsttätig abschalten.

§ 279. Einfluß der Symmetrie der Fernmeldeleitungen. Auf eine Fernmelde-Doppelleitung wirkt eine Starkstromleitung im allgemeinen nur schwach, weil man die Doppelleitungen verdreht, so daß sich die an den einzelnen Stellen auftretenden elektromotorischen Kräfte gegeneinander aufheben. Die Störungen, die trotzdem noch zu beobachten sind, rühren von den Unsymmetrien der Fernmeldeleitungen her. Denn die Koeffizienten \mathfrak{k}_1 und \mathfrak{k}_2 des § 276 hängen ja nicht nur von den Kopplungen, sondern auch von den Leitungseigenschaften ab. Diesen Einfluß kann man in der folgenden einfachen Weise berücksichtigen³.

Man denkt sich die (etwa innerhalb eines Mantels verlaufende) als lang vorausgesetzte Doppelleitung durch zwei einfache Leitungen 1 und 2 mit Erdrückleitung ersetzt. Dann entstehen z. B. an den Aderanfängen der gedachten Leitungen nach der Tabelle im § 276 die Spannungen

$$\frac{j \omega L_{01}}{R_1 + j \omega L_1} \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_0 \mathfrak{E} \mathfrak{g} \frac{\mathfrak{g}_1}{2} \approx \frac{j \omega L_{01}}{\gamma_1} \mathfrak{S}_0 \quad (1002)$$

und

$$\frac{j \omega L_{02}}{R_2 + j \omega L_2} \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_0 \mathfrak{E} \mathfrak{g} \frac{\mathfrak{g}_2}{2} \approx \frac{j \omega L_{02}}{\gamma_2} \mathfrak{S}_0. \quad (1003)$$

¹ Zastrow, A.: Siemens-Zeitschr. 4, 296 u. 344 (1924).

² Zastrow, A.: Siemens-Jahrb. 1929, 473.

³ Küpfmüller, K.: ETZ 44, 452 (1923).

Sie erzeugen auch dann, wenn infolge der Verdrillung $L_{01} = L_{02}$ ist, zwischen den Adern der Doppelleitung die Spannung

$$j \omega L_{01} \mathfrak{I}_0 \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2} \right). \quad (1004)$$

Diese ist zwar verglichen mit den Spannungen der Adern gegen Erde nur klein, aber bei starken Strömen \mathfrak{I}_0 sehr wohl zu beachten.

Die bezogenen Übertragungsmaße γ sind nach (1004) im wesentlichen den Wurzeln aus den betriebsmäßigen Kapazitäten der Einfachleitungen proportional; also den Wurzeln aus den Kapazitäten, die man zwischen den Adern und dem Mantel mißt. Durch Ausgleich dieser Kapazitäten nach den in § 285 zu besprechenden Methoden kann der Einfluß des Starkstroms \mathfrak{I}_0 zum Verschwinden gebracht werden.

Bei mehrlagigen Fernsprechkabeln liegen die Verhältnisse verwickelter, da die Verteilung des Potentials über die einzelnen Leiter berücksichtigt werden muß¹.

Einfachleitungen, wie sie besonders häufig im Ortsverkehr bei Nebenstellenanlagen verwendet werden, sind vollkommen unsymmetrisch. Das Fernsprechen in solchen Anlagen kann daher durch benachbarte Bahnen (besonders Gleichrichterbahnen) außerordentlich stark beeinträchtigt werden².

§ 280. Nebensprechen. Wie schon im § 222 ausgeführt, werden die Fernmeldeleitungen auch durch die Sprechströme in den Nachbarleitungen ihres eigenen Kabels beeinflusst. Ursache der Beeinflussung sind auch in diesem Falle Verschiebungsströme, die zwischen den Leitern durch das Dielektrikum laufen, und Flußänderungen, durch welche Ströme induziert werden. Bei Pulinleitungen, bei denen man mit verhältnismäßig hoher Spannung, aber geringem Strom arbeitet, kommen die induktiven Beeinflussungen neben den kapazitiven nur wenig in Betracht; wir werden sie daher im folgenden (abgesehen von § 286) der Einfachheit halber überhaupt nicht berücksichtigen³.

Da bei Verwendung der Phantomschaltung außer den vier Leitern der beiden Stämme auch die umgebenden Leiter, die man in erster Näherung durch eine einzige geerdete Hülle ersetzen kann, zu berücksichtigen sind, ist das einfachste Schaltbild für das durch elektrische Kopplungen verursachte Nebensprechen das in Abb. 253 dargestellte (vgl. § 222 am Schluß).

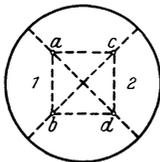


Abb. 253.

Beim praktischen Ausgleich ist nicht nur das Nebensprechen innerhalb desselben Vierers, sondern auch das zwischen Nachbarvierern zu berücksichtigen.

§ 281. Vereinfachung des Schaltbildes. Wir zeigen zunächst, daß man die Leitwerte zwischen den Drähten und der Hülle zu den übrigen Leitwerten schlagen und dadurch das Schaltbild vereinfachen kann⁴. Dazu bedürfen wir eines Umwandelungssatzes⁵, von dem wir im § 23 einen Sonderfall kennengelernt haben. Wir beweisen, daß jeder n -strahlige Stern durch ein „vollständiges n -Eck“ ersetzt werden kann (Abb. 254) und verstehen dabei unter einem vollständigen n -Eck ein Netzwerk von n Knotenpunkten, die in jeder möglichen Weise durch Leitwerte miteinander verbunden sind.

¹ Vgl. J. Collard, Brit. Pat. Nr. 304 367 v. 20. Okt. 1927.

² Roehmann, L.: Elektr. Nachr.-Techn. 6, 283 (1929), dort auch weitere Literatur.

³ Näheres bei K. Kämpfmüller: Arch. Elektrot. 12, 160 (1923).

⁴ Pollock, S. A.: Post Off. El. Eng. J. 7, 41 (1914).

⁵ Kämpfmüller, K.: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. 3, H. 1, 130 (1923).

Die von außen nach dem Stern fließenden Ströme nennen wir $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_n$, die Spannungen u_{10}, u_{20}, \dots beim Stern, u_{12}, u_{13}, \dots beim n -Eck, die Leitwerte entsprechend. Dann gelten für den Stern Gleichungen der Form

$$\mathfrak{I}_1 = \mathcal{G}_{10} u_{10} \text{ usw.} \tag{1005}$$

Die n Ströme $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \dots, \mathfrak{I}_n$ sind aber nicht alle willkürlich, sondern es besteht zwischen ihnen — und daher auch zwischen den Spannungen — nach der Knotenregel die Beziehung:

$$\mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2 + \dots = \mathcal{G}_{10} u_{10} + \mathcal{G}_{20} u_{20} + \dots = 0. \tag{1006}$$

Beim vollständigen n -Eck gelten entsprechend n Gleichungen

$$\mathfrak{I}_1 = \mathcal{G}_{12} u_{12} + \mathcal{G}_{13} u_{13} + \dots \text{ usw.}, \tag{1007}$$

für die man auch schreiben kann

$$\mathfrak{I}_1 = \mathcal{G}_{12} (u_{10} - u_{20}) + \mathcal{G}_{13} (u_{10} - u_{30}) + \dots \text{ usw.} \tag{1008}$$

Aus der Forderung der Gleichwertigkeit folgt, daß die Ströme beim Stern und beim Vieleck für alle denkbaren Spannungen u_{10}, \dots , die der Gleichung (1006) genügen, miteinander übereinstimmen müssen. Wir setzen zunächst:

$$\left. \begin{aligned} u_{10} = u_{20} = u_{30} = \dots = 0, \\ u_{20} = 1, \\ u_{30} = -\frac{\mathcal{G}_{20}}{\mathcal{G}_{30}}; \end{aligned} \right\} \tag{1009}$$

dann folgt aus (1005) und (1007):

$$0 = -\mathcal{G}_{12} + \mathcal{G}_{13} \frac{\mathcal{G}_{20}}{\mathcal{G}_{30}}$$

oder

$$\frac{\mathcal{G}_{12}}{\mathcal{G}_{13}} = \frac{\mathcal{G}_{20}}{\mathcal{G}_{30}}. \tag{1010}$$

Ähnlich kann man ableiten

$$\frac{\mathcal{G}_{12}}{\mathcal{G}_{23}} = \frac{\mathcal{G}_{10}}{\mathcal{G}_{30}} \text{ usw.},$$

also allgemein

$$\mathcal{G}_{ih} = \mathfrak{f} \mathcal{G}_{i0} \mathcal{G}_{h0}, \tag{1011}$$

wo \mathfrak{f} eine für alle Leitwerte \mathcal{G}_{ih} gleiche Konstante bedeutet. Um sie zu bestimmen, wählen wir jetzt — wieder in Übereinstimmung mit (1006) — die n Spannungen mit der Abkürzung $\mathcal{G}_{10} + \mathcal{G}_{20} + \dots + \mathcal{G}_{n0} = \mathcal{C}$ wie folgt:

$$u_{10} = -\frac{\mathcal{G}_{20} + \mathcal{G}_{30} + \dots}{\mathcal{G}_{10}} = -\frac{\mathcal{C} - \mathcal{G}_{10}}{\mathcal{G}_{10}}, \quad u_{20} = u_{30} = \dots = 1, \tag{1012}$$

$$u_{10} - u_{i0} = -\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{G}_{10}}. \tag{1013}$$

Dann ist nach (1005), (1008) und (1011)

$$\mathfrak{I}_1 = -(\mathcal{C} - \mathcal{G}_{10}) = -\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{G}_{10}} (\mathcal{G}_{12} + \mathcal{G}_{13} + \dots + \mathcal{G}_{1n}) = -\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{G}_{10}} \mathfrak{f} \mathcal{G}_{10} (\mathcal{C} - \mathcal{G}_{10}), \tag{1014}$$

woraus $\mathfrak{f} = 1/\mathcal{C}$. Die gesuchten Umwandlungsgleichungen haben daher die Gestalt:

$$\mathcal{G}_{12} = \frac{\mathcal{G}_{10} \mathcal{G}_{20}}{\mathcal{G}_{10} + \mathcal{G}_{20} + \dots + \mathcal{G}_{n0}} \text{ usw.} \tag{1015}$$

Da mit Ausnahme des Falles $n = 3$ die Zahl der Sternstrahlen kleiner ist als die der Vieleckseiten, kann man im allgemeinen nur die Sterne in Vielecke verwandeln, aber nicht umgekehrt die Vielecke in Sterne¹.

¹ Den abgeleiteten Umwandlungssatz kann man ganz allgemein zur Vereinfachung komplizierterer Schaltungen verwenden: Rosen, A.: J. Inst. El. Eng. 62, 916 (1924). Man braucht bei einer Schaltung mit n Knoten nur irgendeinen Knoten mit den Leitwerten, die in ihm zusammenlaufen, zu einem Stern zusammenzufassen und diesen in ein Vieleck zu verwandeln, um sofort ein Netzwerk mit nur $n - 1$ Knoten zu erhalten.

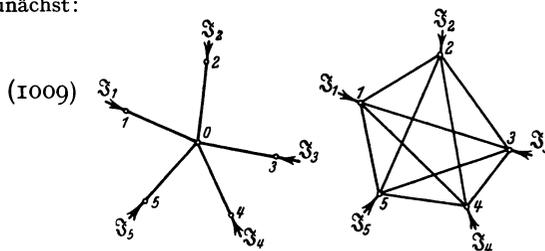


Abb. 254.

Die vier Teilkapazitäten zwischen den Leitern und dem Mantel Abb. 253 bilden einen vierstrahligen Stern; Sternscheitelpunkt ist der Mantel. Man kann sie also durch ein vollständiges Viereck ersetzen, dessen Kapazitäten man zu den Kapazitäten des schon vorhandenen vollständigen Vierecks der Leiter a, b, c, d schlägt.

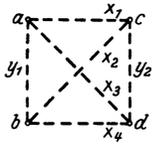


Abb. 255.

Zahlenbeispiel. Bei einem Kabelstück mögen in irgendeinem Maße die folgenden Teilkapazitäten zwischen den Leitern a, b, c, d und dem Mantel m liegen:

ac	bc	ad	bd	am	bm	cm	dm
39	40	42	41	56	55	57	55

Dann sind nach den Gleichungen (1015) die wirksamen Kapazitäten gemäß Abb. 255

x_1	x_2	x_3	x_4
53,314	54,058	55,812	54,565

§ 282. Nebensprechen zwischen den Stämmen („Übersprechen“). In der Stammleitung 1 werde gesprochen; es herrsche also an irgendeiner Stelle zwischen den Leitern a und b eine Spannung u_1 . Wir denken uns diese auf einem Stück von der geringen Länge s konstant und fragen nach der Spannung u_2 , die durch sie zwischen den Leitern c und d hervorgerufen wird, und zwar zunächst bei Leerlauf, d. h., wenn die Leitungstücke c und d unmittelbar nur durch den dielektrischen Leitwert $j\omega y_2$ miteinander verbunden sind. Da der Leitwert $j\omega y_1$ keine Rolle spielt, kann die Schaltung durch die Brückenschaltung Abb. 256 ersetzt werden; nach der Gleichung (47) des § 21 gilt also für die Spannung u_2 am Brückenzweig cd (die $j\omega$ heben sich weg):

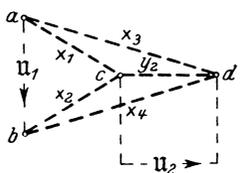


Abb. 256.

$$u_2 = \frac{u_1}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \frac{x_1 x_4 - x_2 x_3}{y_2 + \frac{(x_1 + x_2)(x_3 + x_4)}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}} \quad (1016)$$

Nun ist aber der Nenner des zweiten Bruchs (vgl. den Schluß des § 23) nichts anderes als die Kapazität C_2 , die für ein Gespräch im Stamm 2 bei vollkommener Symmetrie (also wenn zwischen a und b keine Spannung entsteht) maßgebend ist. Man kann also auch schreiben

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{x_1 x_4 - x_2 x_3}{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) C_2} \quad (1017)$$

oder wenn wir als die Kopplung k_1 des Nebensprechens zwischen den Stämmen die Größe

$$k_1 = 4 \frac{x_1 x_4 - x_2 x_3}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \quad (1018)$$

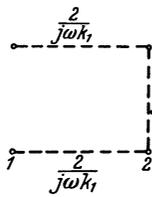


Abb. 257.

definieren,

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{k_1}{4 C_2} = \frac{1/j\omega C_2}{4/j\omega k_1} \approx \frac{1/j\omega C_2}{1/j\omega C_2 + 2 \cdot 2/j\omega k_1} \quad (1019)$$

Für das Nebensprechen zwischen den Stämmen gilt also das einfache Ersatzbild Abb. 257: der Stamm 2 zapft von der treibenden Spannung u_1 einfach nach der Spannungsteilergleichung einen gewissen Bruchteil ab. k_1 ist als eine Differenzkapazität sehr viel kleiner als die Kapazitäten x, y und C_2 selbst¹.

Die Kopplung k_1 verschwindet, wenn die „Brückenbedingung“ erfüllt ist:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4} \quad (1020)$$

¹ Der Bruch $k_1/4 C_2$ entspricht dem Kopplungsfaktor k_1 des § 276.

Im Betriebsfalle wirkt \mathbb{U}_2 auf die Parallelschaltung der beiden Scheinwiderstände des Stammes 2, gemessen von der Störungsstelle nach vorn und nach hinten, also, wenn die Leitungen vorn und hinten nach dem Wellenwiderstand angepaßt sind, auf den halben Wellenwiderstand des Stammes 2 \mathfrak{Z}_2 . Im Betriebsfalle ist also unter der angegebenen Voraussetzung¹

$$\frac{\mathbb{U}_2}{\mathbb{U}_1} = \frac{\mathfrak{Z}_2/2}{4/j\omega k_1} = j\omega k_1 \frac{\mathfrak{Z}_2}{8}. \quad (1021)$$

§ 283. Nebensprechen zwischen Stamm und Phantom („Mitsprechen“). Bei der Untersuchung des Mitsprechens unterscheiden wir zwei Fälle. Es werde zunächst in einer Stammlleitung, z. B. der Leitung 1, gesprochen, d. h. zwischen den Punkten a und b (Abb. 255) liege eine Spannung \mathbb{U}_1 . Dann wirkt auch im Phantomkreis eine Spannung, wenn der Mittelwert der Potentiale in a und b verschieden ist von dem Mittelwert der Potentiale in c und d . Denn a und b bilden für den Vierer die Hinleitung, c und d die Rückleitung. Auch hier betrachten wir zunächst den Fall des Leerlaufs.

Zur Vereinfachung der Rechnung setzen wir voraus, daß die Brückenbedingung (1020) erfüllt sei, daß also das Nebensprechen zwischen den beiden Stämmen völlig verschwinde; in dieser Voraussetzung liegt nur das Superpositionsprinzip. Dann sind die Punkte c und d auf demselben Potential; und man kann die im Phantomkreis entstehende Spannung nach der vereinfachten Gleichung (Abb. 258)

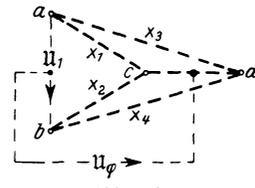


Abb. 258.

$$\mathbb{U}_\varphi = \frac{\mathbb{U}_{ac} + \mathbb{U}_{bd}}{2} = \frac{\mathbb{U}_{ac} - \mathbb{U}_{cb}}{2} \quad (1022)$$

berechnen. \mathbb{U}_{ac} und \mathbb{U}_{cb} folgen aus der Spannungsteilergleichung; es ist gleichzeitig nach Gleichung (30), § 14:

$$\left. \begin{aligned} (x_1 + x_2) \mathbb{U}_{ac} &= x_2 \mathbb{U}_1, \\ (x_3 + x_4) \mathbb{U}_{ad} &= x_4 \mathbb{U}_1, \end{aligned} \right\} \quad (1023)$$

also, da $\mathbb{U}_{ac} = \mathbb{U}_{ad}$, auch

$$\mathbb{U}_{ac} = \frac{x_2 + x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \mathbb{U}_1 \quad (1024)$$

und entsprechend

$$\mathbb{U}_{cb} = \frac{x_1 + x_3}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} \mathbb{U}_1. \quad (1025)$$

Für die im Phantomkreis influenzierte Spannung ergibt sich demnach

$$\frac{\mathbb{U}_\varphi}{\mathbb{U}_1} = - \frac{x_1 + x_3 - x_2 - x_4}{2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}. \quad (1026)$$

Wir setzen

$$k_2 = x_1 + x_3 - x_2 - x_4 \quad (1027)$$

und nennen k_2 die Kopplung des Nebensprechens zwischen dem Stamm 1 und dem Phantomkreis. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ ist nach Abb. 255 die Betriebskapazität C_φ des Phantomkreises. Das Endergebnis ist daher

$$\frac{\mathbb{U}_\varphi}{\mathbb{U}_1} = - \frac{k_2}{2 C_\varphi}. \quad (1028)$$

Diese Gleichung entspricht fast genau der Gleichung (1019); nur enthält sie statt des Faktors 4 den Faktor 2.

¹ Wir werden diese Voraussetzung später durch eine andre ersetzen.

Wir gehen jetzt zu dem Fall über, daß im Phantomkreis gesprochen wird. Die Gleichungen (1023) zeigen, daß man so rechnen kann, als ob die Adern c und d leitend miteinander verbunden wären. Wir wollen daher jetzt diese vereinfachende Annahme von vornherein machen (Abb. 259). Aus der Spannungsteilergleichung folgt dann

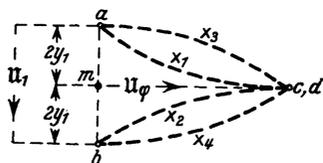


Abb. 259.

$$u_{ma} = \frac{x_1 + x_3}{2 y_1 + x_1 + x_3} u_\varphi, \tag{1029}$$

$$u_{mb} = \frac{x_2 + x_4}{2 y_1 + x_2 + x_4} u_\varphi, \tag{1030}$$

oder, da $x_1 + x_3 \approx x_2 + x_4$:

$$u_1 = u_{ma} + u_{mb} = \left(\frac{x_2 + x_4}{2 y_1 + x_2 + x_4} - \frac{x_1 + x_3}{2 y_1 + x_1 + x_3} \right) u_\varphi \approx - \frac{k_2}{2 \left(y_1 + \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \right)} u_\varphi. \tag{1031}$$

Hier ist $y_1 + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/4$ die Betriebskapazität des Stammes 1; wir erhalten also für das Nebensprechen zwischen dem Phantomkreis und dem Stamme 1 die Gleichung

$$\frac{u_1}{u_\varphi} = - \frac{k_2}{2 C_1}. \tag{1032}$$

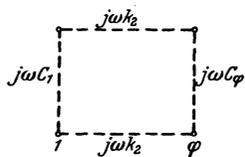


Abb. 260.

In jedem Falle gilt für die Kopplung k_2 das Ersatzbild Abb. 260.

Entsprechend kann man für das Nebensprechen zwischen dem Stamme 2 und dem Phantomkreis eine Kopplung

$$k_3 = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \tag{1033}$$

definieren.

Im Betriebsfall gilt

für das Nebensprechen zwischen Stamm und Phantomkreis
$$\frac{u_\varphi}{u_{1,2}} = - j \omega k_{2,3} \frac{\mathfrak{z}_\varphi}{4}, \tag{1034}$$

für das Nebensprechen zwischen Phantomkreis und Stamm
$$\frac{u_{1,2}}{u_\varphi} = - j \omega k_{2,3} \frac{\mathfrak{z}_{1,2}}{4}. \tag{1035}$$

§ 284. Messung der Kabelunsymmetrien. Da das Nebensprechen sowohl wie die Starkstromstörungen bei vollkommener Symmetrie der Kabel verschwinden, muß es das Ziel des Kabelausgleichs sein, einerseits die koppelnden Teilkapazitäten („Seitenkapazitäten“) zwischen den Adern, andererseits die Teilkapazitäten zwischen den Adern und dem Mantel einander gleichzumachen. Dazu bedarf es zunächst der Messung der Unsymmetrien.

Wir wollen wieder nur das stark vereinfachte Schaltbild Abb. 255 zugrunde legen. Auch bei ihm sind die für die einzelnen Störungen wirksamen Kapazitäten bereits recht verwickelte Kombinationen der Teilkapazitäten. Für das Nebensprechen haben wir diese Kombinationen, die Nebensprechkopplungen k , in den §§ 282 und 283 berechnet; für die Starkstromstörungen sind nach § 279 ganz andere Kombinationen maßgebend. Es ist klar, daß man durch Messung und Ausgleich z. B. der vier wirksamen Kapazitäten zwischen den Adern und dem Mantel keineswegs sämtliche Teilkapazitäten gleich groß machen könnte; nach dem Ausgleich wären zwar nach § 279 die Starkstromstörungen, aber durchaus nicht die verschiedenen Arten des Nebensprechens verschwunden. Gliche man das Nebensprechen noch nachträglich aus, so würde dadurch im allgemeinen der vorhergegangene Ausgleich der Starkstromstörungen wieder verdorben.

Diese Schwierigkeit kann folgendermaßen überwunden werden¹. Man beginnt mit dem Ausgleich der Teilkapazitäten zwischen den Adern und dem Mantel, und zwar auf Grund von Brückenmessungen nach Abb. 261. Bei der gezeichneten Anordnung sind beispielsweise die Teilkapazitäten ac , ad , bc , bd , cm , dm und die Kapazitäten der Paare unwirksam oder verschwindend wenig wirksam; gemessen wird lediglich die Differenz der Erdkapazitäten am und bm . Die Messung kann also als Grundlage dienen für einen Ausgleich der Teilkapazitäten am und bm .

Entsprechendes gilt für den Ausgleich der übrigen Teilkapazitäten nach dem Mantel hin. Sind aber erst einmal alle Teilkapazitäten am , bm , cm , dm gemessen

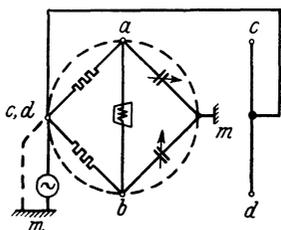


Abb. 261.

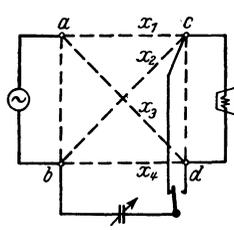


Abb. 262.

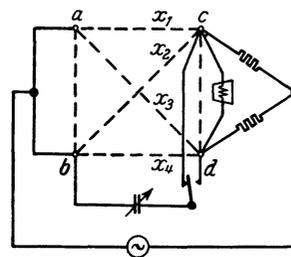


Abb. 263.

und gleich groß gemacht, so sind sie nach § 281 ohne Einfluß auf das Nebensprechen. Durch die Messung und den Ausgleich der Nebensprechkopplungen werden daher nicht nur die wirksamen, sondern auch die Teilkapazitäten ac , ad , bc , bd einander gleichgemacht und damit sowohl die Starkstrom- als auch die Nebensprechstörungen beseitigt.

Die Nebensprechkopplungen werden in der Weise gemessen, daß man parallel zu einer der koppelnden Teilkapazitäten einen meßbar veränderlichen Kondensator legt und dessen Kapazität so lange verändert, bis das Nebensprechen verschwindet. Die Zusatzkapazität ist dann ohne weiteres gleich der betreffenden Nebensprechkopplung. Schaltungen für die Messung des Nebensprechens zwischen den beiden Stämmen und zwischen Stamm und Phantomkreis sind in den Abb. 262 und 263 dargestellt. Die Umschalter sind nötig, weil die Kopplungen positiv und negativ sein können.

§ 285. Kreuzungsausgleich und Kondensatorausgleich. In der Fernmelde-technik sind zwei verschiedene Methoden des Ausgleichs üblich, der Kreuzungsausgleich und der Kondensatorausgleich.

Beim Kreuzungsausgleich², wie er in der amerikanischen Technik ausgebildet worden ist, schaltet man die Vierer der einzelnen Fabrikationslängen nicht glatt durch, sondern verbindet sie auf Grund der im vorigen Paragraphen besprochenen Messungen — wenn nötig unter Vertauschung der Adern innerhalb der Vierer — so miteinander, daß für die ganzen Spulenfelder die für die Störung durch Starkströme maßgebenden Kapazitätsdifferenzen und die Nebensprechkopplungen möglichst klein³ werden. In der deutschen Technik wird der Kreuzungsausgleich seltener und nur unter glatter Durchschaltung der Vierer verwendet; so z. B. beim Ausgleich der Teilerdkkapazitäten.

¹ Küpfmüller, K.: ETZ 44, 453 (1923).

² Pollock, S. A.: Post Off. El. Engs. J. 7, 41 (1914); 357 (1915).

³ Das Nebensprechen kann natürlich niemals völlig beseitigt werden. Derartige Störungen brauchen immer nur unter eine gewisse durch die Erfahrung gegebene Grenze gedrückt zu werden.

Beim Ausgleich nach dem Kondensatorverfahren schaltet man den kleineren der gleichzumachenden Teilkapazitäten auf Grund der Unsymmetriemessungen kleine Kondensatoren zu. Als Ausgleichsabschnitt kann jedesmal ein ganzes Spulenfeld angesehen werden. Da die Zusatzkapazitäten erheblich kleiner sind als die Betriebskapazitäten, wird die Dämpfung durch sie nicht merklich vergrößert.

Im einzelnen verfährt man beim Kondensatorausgleich folgendermaßen: wenn die relativen Abweichungen δ der Teilkapazitäten von ihrem Mittelwert x nur klein sind, kann man

$$k_1 = \frac{x_1 x_4 - x_2 x_3}{x} = x \{ (1 + \delta_1)(1 + \delta_4) - (1 + \delta_2)(1 + \delta_3) \} \approx x_1 + x_4 - x_2 - x_3 \tag{1036}$$

setzen. Hieraus und aus den Gleichungen für k_2 und k_3 [(1027) und (1033)] folgt: es enthalten

$$\begin{aligned} k_1 & x_1 + x_4 \text{ und } x_2 + x_3, & k_2 \text{ und } k_3 & \text{ aber nur } x_1 - x_4 \text{ und } x_2 - x_3, \\ k_2 & x_1 + x_3 \text{ ,, } x_2 + x_4, & k_1 \text{ ,, } k_3 \text{ ,, ,, } & x_1 - x_3 \text{ ,, } x_2 - x_4, \\ k_3 & x_1 + x_2 \text{ ,, } x_3 + x_4, & k_1 \text{ ,, } k_2 \text{ ,, ,, } & x_1 - x_2 \text{ ,, } x_3 - x_4. \end{aligned}$$

Vergrößert man also bei positivem k_1 sowohl x_2 wie x_3 um die kleine Kapazität $\frac{k_1}{2}$ oder bei negativem k_1 sowohl x_1 wie x_4 um die kleine Kapazität $\left| \frac{k_1}{2} \right|$, so verschwindet das Nebensprechen Stamm/Stamm, ohne daß sich das Nebensprechen Stamm/Phantom mitänderte. Entsprechend kann man die Kopplungen k_2 und k_3 unabhängig voneinander und vom k_1 zum Verschwinden bringen.

Zahlenbeispiel. Für das im § 281 betrachtete Kabelstück ergeben sich nach den Gleichungen (1018), (1036), (1027) und (1033) theoretisch die folgenden Kopplungen:

$$\begin{array}{cccc} & k_1 & k_2 & k_3 \\ \text{nach (1018)} & \text{nach (1036)} & & \\ - 1,984 & - 1,991 & + 0,503 & - 3,005 \end{array}$$

Bei der Messung schaltet man zunächst zu x_1 und x_4 je eine Kapazität $\xi/2$ parallel, die man so lange variiert, bis das Nebensprechen zwischen den Stämmen eben verschwindet; nach der

Auszugleichende Kopplung	Erforderliche Zusätze zu			
	x_1	x_2	x_3	x_4
k_1	0,993	—	—	0,993
k_2	—	0,251	—	0,252
k_3	1,503	1,502	—	—
zusammen ¹	2,496	1,753	—	1,245

genauen Gleichung (1018) ist dann $(x_1 + \xi/2)(x_4 + \xi/2) - x_2 x_3 = 0$, woraus sich $\xi = 1,986$ ergibt. Hiernach und nach der vorhin gegebenen Meßvorschrift schaltet man etwa die Kapazität 0,993 je zu x_1 und x_4 . Berücksichtigt man entsprechend die Gleichungen (1027) und (1033), so ergibt

sich auf Grund der drei Kopplungsmessungen das nebenstehende Schema für die Zufügung der Kondensatoren.

Hiermit wird in der Tat in den Grenzen der Rechengenauigkeit $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

§ 286. Nebensprechen durch Unsymmetrien in den Widerständen und Induktivitäten. Wenn ein Vierer hinsichtlich der Widerstände oder Induktivitäten der Leitungsstücke selbst oder der Spulen nicht völlig symmetrisch ist, so erhalten die Mittelpunkte der sekundären Spulen der in Abb. 235 gezeichneten Diffe-

¹ Da es nur auf die Kapazitätsdifferenzen ankommt, und man die Zusatzkapazitäten so klein wie möglich halten muß, schaltet man natürlich nie mehr als drei Kondensatoren zu, auch wenn sich rechnerisch vier Werte ergeben.

rentialübertrager durch einen Stammstrom Spannung gegeneinander, und es entsteht ein Strom auch im Phantomkreis. Das Entsprechende gilt für die Einwirkung eines Phantomgesprächs auf die Stämme.

Wir wollen diese Erscheinung etwas näher untersuchen, aber nur für den Fall des im Phantomkreis wahrgenommenen eigentlichen Nebensprechens (vgl. § 287) und nur für den Fall einer rein induktiven Unsymmetrie einer Phantomspule. Die Windungszahl der im Leiter *a* liegenden Wicklungshälfte sei w_a , die der im Leiter *b* liegenden w_b ; der magnetische Leitwert des Kerns sei G , w_b sei größer als w_a .

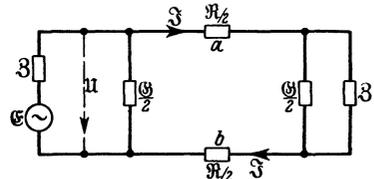


Abb. 264 stelle zunächst ein vorn und hinten durch seinen Wellenwiderstand abgeschlossenes Glied des Stammes 1 dar. An seinem Eingang liege (von einem Stammgespräch herührend) die Spannung U_1 . Der Scheinwiderstand der in der Schaltung zweimal vorkommenden Parallelschaltung von $G_{1/2}$ und B_1 sei zunächst

$$U_1 = (R_1 + B_1) I_1. \tag{1037}$$

Dieser Wechselstrom I_1 fließt durch die beiden Hälften der Phantomspule und erzeugt in jeder von ihnen induktive Spannungen. Da die Wicklungen, bezogen auf die Zählpfeile der Abbildung, gegensinnig sind, entsteht [vgl. die Gleichung (505) des § 170] in der Hälfte *a* die induktive Spannung

$$\left. \begin{aligned} j \omega w_a G (w_a I_1 - w_b I_1) &\approx -j \omega \frac{w_b^2 - w_a^2}{2} G I_1, \\ \text{in der Hälfte } b \text{ die induktive Spannung} \\ j \omega w_b G (w_b I_1 - w_a I_1) &\approx j \omega \frac{w_b^2 - w_a^2}{2} G I_1. \end{aligned} \right\} \tag{1038}$$

Für den Stammkreis heben sich diese Spannungen auf. Nicht so für den Phantomkreis. In diesem bilden die beiden Leiter *a* und *b* zusammen die Hinleitung; läßt man also im Phantomkreis die Zählpfeile einheitlich von links nach rechts laufen, so entsteht in den beiden parallelen Leitern der Phantomhinleitung je die Spannung

$$-j \omega \frac{w_b^2 - w_a^2}{2} G I_1 = -j \omega \frac{m}{2} I_1, \tag{1039}$$

wenn wir mit m die unmittelbar meßbare Differenz der Induktivitäten der Spulenhälften bezeichnen¹.

Diese beiden parallelen induktiven Spannungen sind gleichwertig einer einzigen von derselben Größe. Sieht man nunmehr die Abb. 264 als Darstellung des Phantomkreises an², so liest man leicht ab, daß für die Spannung U_φ am Eingang des Phantomglieds und für den Phantomstrom I_φ das Gleichungspaar

$$\left. \begin{aligned} U_\varphi &= -B_\varphi I_\varphi, \\ (R_\varphi + 2 B_\varphi) I_\varphi - j \omega \frac{m}{2} I_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{1040}$$

gilt. Es ist daher mit (1037):

$$\frac{U_\varphi}{U_1} = -B_\varphi \frac{j \omega m / 2 \cdot I_1}{(R_\varphi + 2 B_\varphi) U_1} = -\frac{j \omega m B_\varphi}{2 (R_1 + B_1) (R_\varphi + 2 B_\varphi)}. \tag{1041}$$

¹ In der Praxis wird die Unsymmetrie auf die im Stammkreis wirksame Gesamtinduktivität L_1 bezogen. Man setzt $m L_1 = \varepsilon$.

² Die gezeichnete EMK denke man sich jetzt weg.

Nun ist nach § 212 und 257 für alle Dreiecksschaltungen

$$\Re = \mathfrak{B} \sin \frac{g}{2}, \quad \mathfrak{B} = \sqrt{\frac{\Re}{\mathfrak{G}}} \frac{1}{\mathfrak{Cof} \frac{g}{2}}, \quad \sin \frac{g}{2} = \frac{\sqrt{\Re \mathfrak{G}}}{2}. \quad (1042)$$

Hieraus folgt aber

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B} &= \frac{\mathfrak{B}}{1 + \frac{\mathfrak{G} \mathfrak{B}}{2}} = \frac{\mathfrak{B}}{1 + \mathfrak{T} \mathfrak{g} \frac{g}{2}} = \mathfrak{B} e^{-\frac{g}{2}} \mathfrak{Cof} \frac{g}{2}, \\ \Re + \mathfrak{B} &= \mathfrak{B} \left(2 \sin \frac{g}{2} \mathfrak{Cof} \frac{g}{2} + e^{-\frac{g}{2}} \mathfrak{Cof} \frac{g}{2} \right) = \mathfrak{B} e^{\frac{g}{2}} \mathfrak{Cof} \frac{g}{2}, \\ \Re + 2 \mathfrak{B} &= \mathfrak{B} \left(2 \sin \frac{g}{2} \mathfrak{Cof} \frac{g}{2} + 2 e^{-\frac{g}{2}} \mathfrak{Cof} \frac{g}{2} \right) = 2 \mathfrak{B} \mathfrak{Cof}^2 \frac{g}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (1043)$$

und es ergibt sich daher

$$\frac{u_\varphi}{u_1} = -j \omega m \frac{\mathfrak{B}_\varphi e^{-\frac{g_\varphi}{2}} \mathfrak{Cof} \frac{g_\varphi}{2}}{2 \mathfrak{B}_1 e^{\frac{g_1}{2}} \mathfrak{Cof} \frac{g_1}{2} \cdot 2 \mathfrak{B}_\varphi \mathfrak{Cof}^2 \frac{g_\varphi}{2}} = -\frac{j \omega m}{\mathfrak{B}_{01} \mathfrak{B}_{0\varphi}} e^{-\frac{g_1 + g_\varphi}{2}} \frac{\mathfrak{B}_\varphi}{4}, \quad (1044)$$

wenn durch den Zusatzindex 0 die „Nennwerte“ gekennzeichnet werden (§ 211). Definiert man eine durch die Ungleichheit der Spulenhälften hervorgerufene „Mitsprechkopplung“ k_m durch die Gleichung $u_\varphi = -j \omega k_m \mathfrak{B}_{\varphi/4} \cdot u_1$, so ergibt sich für sie

$$k_m = \frac{m}{\mathfrak{B}_{01} \mathfrak{B}_{0\varphi}} e^{-\frac{g_1 + g_\varphi}{2}}. \quad (1045)$$

Auch das durch Ungleichheiten in den Widerständen und Induktivitäten hervorgerufene Nebensprechen kann durch Einschaltung von Zusatzkondensatoren verringert werden. Das Ausgleichsverfahren wird jedoch einfacher, wenn man durch sorgfältige Herstellung und Prüfung der Leitungen und Spulen die Fehler von vornherein so klein wie möglich macht. Man erreicht bei diesem Ausgleich außerordentlich hohe Genauigkeiten.

§ 287. Das Zusammenwirken der Kopplungen bei längeren Leitungen. Die bisher betrachteten Kopplungen k bezogen sich (mit Rücksicht auf den Gebrauch der Praxis) nicht auf die Längeneinheit, sondern auf kurze Kabelstücke. Bei längeren Leitungen gehen an jeder Stelle entsprechend den örtlichen Kopplungen Verschiebungsströme über. Was man in einem Fernhörer am Anfang oder am Ende der gestörten Leitung wahrnimmt, ist die Gesamtwirkung dieser elementaren Verschiebungsströme und der durch sonstige Unsymmetrien hervorgerufenen Kopplungen.

Wir geben von jetzt ab der störenden Leitung den Index 1, der gestörten den Index 2. Verstärker sollen nicht vorhanden sein. Größen ohne weiteren Index beziehen

sich (Abb. 265) auf die Stellen der Leitungen, die von den Anfängen um die Strecke $x = \xi l$ entfernt sind; die Zusatzindizes a und e bedeuten „am Anfang“ und „am Ende“. k sei jetzt eine gemeinsame Abkürzung für die Kopplung der Längeneinheit, und zwar sei k gleich den früheren Größen $k_1/4$, $k_2/2$, $k_3/2$ und $k_m/2$ je Längeneinheit.

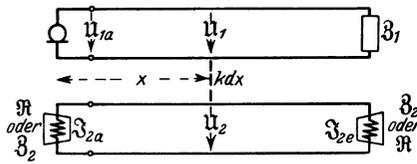


Abb. 265.

Der Einfachheit halber werde vorausgesetzt, daß die Enden der Leitungen, an denen kein Fernhörer liegt, mit den Wellenwiderständen (\mathfrak{B}_1 oder \mathfrak{B}_2) abgeschlossen seien. Nennen wir den Widerstand des Fernhörers \mathfrak{R} und setzen wir

$$\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{B}_2} = \mathfrak{X} g r, \quad (1046)$$

so ist der Scheinwiderstand der gestörten Leitung an der Einmündung des störenden Verschiebungsstroms nach § 233 entweder gleich

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{B}_2 \cdot \mathfrak{B}_2 \mathfrak{X} g (g_2 \xi + r)}{\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{X} g (g_2 \xi + r)} = \mathfrak{B}_2 \frac{\mathfrak{C} \sin (g_2 \xi + r)}{e^{g_2 \xi + r}} \quad (1047)$$

oder gleich

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{B}_2 \cdot \mathfrak{B}_2 \mathfrak{X} g (g_2 (1 - \xi) + r)}{\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{X} g (g_2 (1 - \xi) + r)} = \mathfrak{B}_2 \frac{\mathfrak{C} \sin (g_2 (1 - \xi) + r)}{e^{g_2 (1 - \xi) + r}}, \quad (1048)$$

je nachdem, ob der Fernhörer am nahen oder fernen Ende der gestörten Leitung liegt, d. h. je nachdem, ob das eigentliche Nebensprechen oder das sogenannte „Gegennebensprechen“ berechnet werden soll. Weiter ist wegen der Anpassung am Ende der störenden Leitung

$$u_1 = u_{1a} e^{-g_1 \xi}, \quad (1049)$$

also nach der Gleichung (776) des § 231¹ und mit der Abkürzung $g_1 + g_2 = 2g$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{2a} &= \frac{u_2}{\mathfrak{B}_2} \frac{\mathfrak{C} \cos r}{\mathfrak{C} \sin (g_2 \xi + r)} = j \omega k l d \xi u_1 \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_2} \frac{\mathfrak{C} \cos r}{\mathfrak{C} \sin (g_2 \xi + r)} \\ &= j \omega k l d \xi u_1 \frac{\mathfrak{C} \cos r}{e^{g_2 \xi + r}} = j \omega k l d \xi u_{1a} \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{R}} e^{-2g\xi} \end{aligned} \quad (1050)$$

und entsprechend²

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{2e} &= j \omega k l d \xi u_{1a} \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{R}} e^{-g_1 \xi - g_2 (1 - \xi)} \\ &= j \omega k l d \xi u_{1a} \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{R}} e^{-g - (g_2 - g_1) (\frac{1}{2} - \xi)}. \end{aligned} \quad (1051)$$

Bei gleichen Übertragungsmaßen ($g_1 = g_2$) ist also das Nebensprechen, wie auch ohne Rechnung einleuchtet, um so geringer, je weiter die Kopplungsstelle vom Leitungsanfang entfernt ist; das Gegennebensprechen dagegen ist von der Lage der Kopplungsstelle unabhängig und in jedem Falle entsprechend der ganzen Leitungsdämpfung geschwächt. Bei ungleichen Übertragungsmaßen hängt auch das Gegennebensprechen von dem Ort der Überbrückung ab. Das Entsprechende gilt für die Phasendrehungen.

Dringt z. B. ein Gespräch aus dem einen Stamm eines Vierers in den andern Stamm ein, so ist $g_1 = g_2$, und man kann das Gegennebensprechen kompensieren, indem man einen Kondensator geeigneter Größe an irgendeiner beliebigen Stelle einfügt. Bei dem eigentlichen Nebensprechen dagegen und auch bei dem Gegennebensprechen zwischen Stamm und Phantom muß man den kompensierenden Kondensator annähernd dort einschalten, wo die Nebensprechkopplung liegt; denn die Beträge und die Phasen der Fernhörerströme \mathfrak{S}_2 hängen nach den Gleichungen (1050) und (1051) stark von ξ , d. h. von dem Ort der Überbrückung ab.

Durch unsere Gleichungen wird auch das Auftreten der Exponentialfunktion in (1044) begrifflich: Das Spannungsverhältnis u_q/u_1 berechnet sich so, als ob die Kopplung $m/(\mathfrak{B}_{01} \mathfrak{B}_{0q})$ in der Mitte des Pupingliedes säße.

¹ Für ξ setze man r , für g $g\xi$, außerdem $r_a = 0$.

² Ähnlich wie in § 286 ergibt sich leicht, daß sich die Kopplung k_m für das Gegennebensprechen von der für das eigentliche Nebensprechen durch das Vorzeichen unterscheidet.

Das resultierende Nebensprechen erhält man, wenn man die Ausdrücke (1050) und (1051) über sämtliche Elemente $d\xi$ der Leitungen summiert. Es kann natürlich nicht wirklich berechnet werden, da die Verteilung der Kopplungen von den zufälligen Abweichungen der Kapazitäten und Spuleninduktivitäten abhängt und daher nicht angebbar ist. Wir wollen nur untersuchen, was für ein Nebensprechen sich ergibt, wenn k zwischen $\xi_0 - \sigma/2$ und $\xi_0 + \sigma/2$ ($\sigma = s/l$) konstant und überall sonst gleich Null ist. Dann findet man durch Integration von $\xi_0 - \sigma/2$ bis $\xi_0 + \sigma/2$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{2a} &= j \omega k l \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_2 + \Re} \mathfrak{U}_{1a} e^{-2g\left(\xi_0 - \frac{\sigma}{2}\right)} \frac{1 - e^{-2g\sigma}}{2g} \\ &= j \omega k s \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_2 + \Re} \mathfrak{U}_{1a} e^{-2g\xi_0} \cdot \frac{\mathfrak{S}in g\sigma}{g\sigma},\end{aligned}\quad (1052)$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{2e} &= j \omega k l \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_2 + \Re} \mathfrak{U}_{1a} e^{-g^2 + (g_2 - g_1)\left(\xi_0 - \frac{\sigma}{2}\right)} \cdot \frac{1 - e^{-(g_1 - g_2)\sigma}}{g_1 - g_2} \\ &= j \omega k s \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_2 + \Re} \mathfrak{U}_{1a} e^{-g_1\xi_0 - g_2(1-\xi_0)} \cdot \frac{\mathfrak{S}in \frac{g_1 - g_2}{2}\sigma}{\frac{g_1 - g_2}{2}\sigma}.\end{aligned}\quad (1053)$$

Herrscht auf der ganzen Länge l eine konstante Kopplung ($\xi_0 = 1/2$, $\sigma = 1$), so wird

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{2a} &= \frac{j \omega k}{2\gamma} \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_2 + \Re} \mathfrak{U}_{1a} (1 - e^{-2g}) \\ &= j \omega k l \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_2 + \Re} \mathfrak{U}_{1a} \left(1 - g + \frac{2}{3} g^2 - \dots\right),\end{aligned}\quad (1054)$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{2e} &= j \omega k l \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_2 + \Re} \mathfrak{U}_{1a} e^{-g} \left(1 + \frac{(g_1 - g_2)^2}{24} + \dots\right) \\ &\approx j \omega k l \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_2 + \Re} \mathfrak{U}_{1a} e^{-g} \left(1 - \frac{(a_1 - a_2)^2}{24} + \dots\right).\end{aligned}\quad (1055)$$

Das eigentliche Nebensprechen \mathfrak{S}_{2a} ist also bei längeren Leitungen von deren Länge und, da bei Pupinleitungen $\gamma \approx j\omega \sqrt{LC}$, von der Frequenz annähernd unabhängig. Das Gegennebensprechen dagegen ist bei gleichen Übertragungsmaßen der Frequenz proportional und um die ganze Leitungsdämpfung geringer, als man es aus der gesamten Kopplung kl berechnen würde.

Man erkennt, daß Kopplungen, infolge deren zwischen zwei Leitungen auf ihrer ganzen Länge Verschiebungsströme im wesentlichen desselben Richtungsinnes übergehen, besonders ungünstig auf das Gegennebensprechen wirken. Denn bei diesem kann man nicht damit rechnen, daß sich die einzelnen Kopplungen zufällig kompensieren infolge von Zusatzphasendrehungen, die durch die exponentiellen Glieder der Gleichungen (1050) und (1051) hervorgerufen werden. Und zwar gilt dies nach (1051) ganz besonders für den Fall, daß die beiden Übertragungsmaße g_1 und g_2 übereinstimmen.

Da in den Gleichungen (1050) und (1051) Exponentialfunktionen des Übertragungsmaßes vorkommen, sind die beiden Arten des Nebensprechens bei längeren Leitungen komplizierte Funktionen der Frequenz.

Es hat sich als nützlich erwiesen, nach dem Nebensprechausgleich die Adern noch an bestimmten Stellen (einmal oder mehrere Male) in jedem Verstärkerfeld zu kreuzen, um auch das Gegennebensprechen so klein wie möglich zu machen.

§ 288. Der Ausgleich des Nebensprechens in längeren Pupinkabeln. Nach (1052) gilt für das Nebensprechen, das durch die Kopplung eines kleinen Stückes von der Länge $s = \sigma l$ (eines Ausgleichsabschnitts z. B.) verursacht wird:

$$\mathfrak{S}_{2a} \approx j \omega k s \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{R}} \mathfrak{U}_{1a} e^{-2g\xi_0}. \quad (1056)$$

Brächte man am Anfang des Stückes, also in dem Punkt $x_0 - s/2$, einen Ausgleichskondensator von der Kapazität κ an, so verursachte dieser nach (1050) (für $kld\xi$ ist κ zu setzen) ein Nebensprechen von der Größe

$$\mathfrak{S}'_{2a} = j \omega \kappa \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{R}} \mathfrak{U}_{1a} e^{-2g\left(\xi_0 - \frac{\sigma}{2}\right)} \approx j \omega \kappa \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{R}} \mathfrak{U}_{1a} e^{-2g\xi_0} (1 + g\sigma). \quad (1057)$$

Eine vollständige Kompensation wäre daher nur möglich, wenn

$$\kappa = ks(1 - g\sigma) = ks(1 - b\sigma - ja\sigma), \quad (1058)$$

d. h. wenn $a\sigma = 2\pi s/\lambda$ sehr klein wäre. Durch Einschaltung einer konzentrierten (nicht verteilten) Kapazität am Anfang eines Ausgleichsabschnittes kann also das Nebensprechen innerhalb des Abschnitts nur kompensiert werden, wenn er gegen die Wellenlänge kurz ist. Die Phase der komplexen Größe $1 - b\sigma - ja\sigma$ [also der Bruch $a\sigma/(1 - b\sigma)$] ist ein Maß für den prozentischen Fehler, den man bei einer derartigen Kompensation begeht.

Schaltet man den Ausgleichskondensator in der Mitte des Ausgleichsabschnittes ein, so wird

$$\mathfrak{S}'_{2a} = j \omega \kappa \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{R}} \mathfrak{U}_{1a} e^{-2g\xi_0}, \quad (1059)$$

und der Ausgleich ist vollständig, soweit der in (1052) vorkommende Quotient

$$\frac{\mathfrak{C} \sin g\sigma}{g\sigma} = 1 - \frac{(g\sigma)^2}{6} + \dots \quad (1060)$$

gleich 1 gesetzt werden darf. Man erkennt, daß dieses Verfahren um eine Größenordnung besser ist. Man mißt daher die Kopplungen der Abschnitte von ihrer Mitte aus und setzt auch an diesen Stellen die ihren Kopplungen entsprechenden Ausgleichskondensatoren ein.

Während man früher das Feld zwischen zwei Verstärkern unter Belastung abglich, wobei die bereits ausgeglichenen Abschnitte als Abschluß dienten, symmetriert man jetzt, wie schon bemerkt, die Widerstände und die Induktivitäten der Leitungen und Spulen schon bei der Fertigung und gleicht dann die Kopplungen nur in den einzelnen Spulenabschnitten aus. Wird dies sorgfältig ausgeführt, so ist das resultierende Nebensprechen des ganzen Verstärkerfelds von selbst hinreichend klein.

Da der Drall aufeinanderfolgender Lagen und auch der Drall unmittelbar benachbarter Vierer derselben Lage verschieden groß gewählt werden¹, beeinflussen sich benachbarte Vierer nur wenig. Beim Kreuzungsverfahren verringert sich dieser Einfluß von selbst, da die Vierer immer nur auf kurze Stücke Nachbarvierer sind; dafür nimmt man die Summe sehr vieler Nachbargespräche wahr, das sog. „Babbeln“.

§ 289. Das Dämpfungsmaß des Nebensprechens und seine Messung. Die störende und die gestörte Leitung stellen zusammen mit den dielektrischen, induktiven und galvanischen Kopplungen einen Vierpol dar, dessen Dämpfungsmaß b in der gewöhnlichen Weise definiert werden kann. Im Falle des Übersprechens ist der Vierpol symmetrisch, im Falle des Gegenübersprechens und des Mitsprechens im allgemeinen unsymmetrisch.

¹ Die Verschiedenheit des Dralls bringt eine kleine Verschiedenheit der Kapazität mit sich, die man durch besondere Maßnahmen bei der Fertigung kompensieren kann.

Bei der Messung kann man die Stämme durch einen vierstrahligen Stern aus gleichen Widerständen R abschließen, die nach der Gleichung

$$R = \frac{1}{4} \mathfrak{Z} + \frac{1}{2} \mathfrak{Z}_\varphi \quad (1061)$$

bemessen sind, wo sich \mathfrak{Z} auf die Stämme, \mathfrak{Z}_φ auf den Phantomkreis bezieht. Da nach der allgemeinen Gleichung $\beta_1 = R/(2|\mathfrak{Z}|)$ nahezu $\mathfrak{Z}_\varphi = \mathfrak{Z}/2$, also $R = \frac{\mathfrak{Z}}{2} = \mathfrak{Z}_\varphi$, so ist dann das Ende der Stämme je mit dem Widerstand $2R = \mathfrak{Z}$, das Ende des Phantomkreises mit dem Widerstande $2R/2 = \mathfrak{Z}_\varphi$ beschaltet, d. h. das Kabel befindet sich nahezu in seinem betriebsmäßigen Zustand.

Das Dämpfungsmaß des Nebensprechens ist immer sehr groß; man darf daher bei seiner Messung nach der Methode des § 268 die vereinfachte Gleichung

$$\left| \frac{u_1}{u_2} \right| = \left| \frac{1}{\mathfrak{G}} \operatorname{Cof} g \left(1 + \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{R}} \right) \right| = \left| \mathfrak{A}_1 \left(1 + \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{R}} \right) \right| \quad (1062)$$

benutzen, wo \mathfrak{R} den Widerstand des Fernhörers bedeutet. Man sorgt dafür, daß an der störenden und an der Vergleichsleitung dieselbe Spannung u_1 liegt; ist dann der Wellenwiderstand \mathfrak{Z}_2 der gestörten Leitung gleich dem Ausgangswellenwiderstand \mathfrak{Z}_{20} der Eichleitung, die wir als unsymmetrisch voraussetzen, so darf man aus gleicher Lautstärke an den Enden der gestörten Leitung und der Eichleitung nach (1062) den Schluß ziehen, daß die Koeffizienten \mathfrak{A}_1 übereinstimmen. Ist die Vergleichsleitung so geeicht, daß für ihre Ablesung b_0 die Gleichung gilt

$$|\mathfrak{A}_{10}| = \frac{e^{b_0}}{2} \quad (1063)$$

und erhält man gleiche Lautstärke mit der Einstellung b_0 , so gilt

$$|\mathfrak{A}_1| = \frac{e^b}{2|\mathfrak{Z}|} = \frac{e^{b_0}}{2}. \quad (1064)$$

Vertauscht man dann die gestörte Leitung mit der störenden und erhält man jetzt gleiche Lautstärke mit einer andern Einstellung b'_0 , so gilt

$$|\mathfrak{A}'_1| = \frac{|\mathfrak{Z}| e^{b'}}{2} = \frac{e^{b'_0}}{2}. \quad (1065)$$

Die gesuchte Dämpfung b ist also gleich dem arithmetischen Mittel aus den beiden Einstellungen b_0 und b'_0 .

Besteht die Eichleitung aus einer unsymmetrischen Sternschaltung $\mathfrak{R}_1/2$, $\mathfrak{R}_2/2$, \mathfrak{G} , so ist

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A}_{10} &= \frac{\frac{\mathfrak{R}_1}{2} + \frac{1}{\mathfrak{G}}}{\frac{1}{\mathfrak{G}}} = 1 + \frac{\mathfrak{R}_1 \mathfrak{G}}{2}, \\ \mathfrak{Z}_{20} &\approx \mathfrak{Z}'_2 = \frac{\mathfrak{R}_2}{2} + \frac{1}{\mathfrak{G}}. \end{aligned} \right\} \quad (1066)$$

Hält man also \mathfrak{G} konstant, so können \mathfrak{A}_{10} und \mathfrak{Z}_{20} durch Verstellen von $\mathfrak{R}_1/2$ und $\mathfrak{R}_2/2$ unabhängig voneinander verändert werden. Ist \mathfrak{G} sehr groß und besteht die Eichleitung nur aus Wirkwiderständen, so gilt mit $\mathfrak{G} = 1/M$

$$\mathfrak{A}_{10} = \frac{1}{2} e^{b_0} \approx \frac{R_1}{2M}, \quad \text{also} \quad b_0 = \ln \frac{R_1}{M}, \quad \mathfrak{Z}_{20} = \frac{R_2}{2}. \quad (1067)$$

Man kann die Widerstände R_1 und R_2 so eichen, daß man an ihnen unmittelbar das Dämpfungsmaß b_0 und den Wellenwiderstand \mathfrak{Z}_{20} von der Ausgangsseite abliest¹.

¹ Lüschen, F., u. K. Küpfmüller: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. 2, 401 (1922). Dort wird auch eine Eichleitung angegeben, bei der man die ganzen und die Zehntelneper einstellen kann.

Liegt auf einem kurzen Stück von der Länge s eine Kopplung ks , so kann man durch

$$\omega ks \frac{|B_2|}{2} = e^{-b_n} \quad (1068)$$

eine „örtliche“ Nebensprechdämpfung b_n einführen. Diese ruft an den Enden der gestörten Leitung „wirksame“ Nebensprechdämpfungen hervor, die, wenn überall angepaßt ist, durch die Logarithmen der Spannungsverhältnisse $|u_{1a}/u_{2a}|$ und $|u_{1a}/u_{2e}|$ definiert werden können. Die wirksamen Dämpfungen setzen sich nach den Gleichungen (1052) und (1053) additiv aus b_n und den Dämpfungen der Leitungsstücke zusammen, über die die störende Energie gelaufen ist.

XIII. Wellenfilter¹.

§ 290. Allgemeines. Unter einem Wellensieb oder Wellenfilter verstehen wir eine Vierpolschaltung, die, primär durch eine Zweipolquelle betrieben, einem sekundär angeschalteten verbrauchenden Zweipol in gewissen Frequenzbereichen endlicher Breite sehr viel, in allen übrigen Frequenzbereichen dagegen sehr wenig Energie zuführt.

Wir haben schon im Abschnitt IV Schaltungen mit starkem Frequenzgang der in den Endwiderstand übergehenden Leistung kennengelernt. Das waren Schaltungen, bei denen sich Blindwiderstände bei gewissen ausgezeichneten Frequenzen (den „Scheinfrequenzen“) kompensierten. Aber es waren meist keine ausgesprochenen Filter. Von solchen verlangen wir (was freilich keine scharfe Unterscheidung sein soll), daß ihre Resonanzkurve, wenn auch nicht völlig, so doch annähernd rechteckig verläuft.

Aufgabe der Filtertheorie ist es, festzustellen, wie die Induktivitäten und Kapazitäten eines zu bauenden Filters zu wählen sind, damit sein Durchlaßbereich bei der vorgeschriebenen Frequenz liegt und die vorgeschriebene Breite hat, und welche Bedingungen zu erfüllen sind, damit die Resonanzkurve möglichst rechteckig wird. Da die Filterwirkung nicht auf einem Frequenzgang der Verluste, sondern auf Resonanz beruht, läßt sich die Theorie in den wesentlichsten Zügen unter Vernachlässigung aller Widerstände ableiten.

§ 291. Lage des Durchlaßbereichs. Bei einem gegebenen Filter ist es im allgemeinen leicht, eine Frequenz anzugeben, in deren Nähe es durchlässig ist. Bei dem Filter der Abb. 266 z. B. kompensieren sich offenbar die Induktivität $L_1/2$ und die Kapazität $2C_1$ bei der Frequenz

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{L_1}{2} \cdot 2C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}. \quad (1069)$$

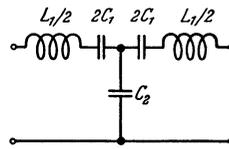


Abb. 266.

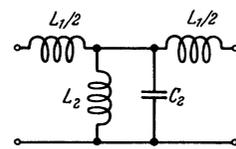


Abb. 267.

Das Filter ist also sicher bei der Frequenz ω_1 und in deren Umgebung durchlässig.

Ähnlich stellen bei der Schaltung Abb. 267 die Induktivität L_2 und die Kapazität C_2 für die Frequenz

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}} \quad (1070)$$

einen unendlich großen Querwiderstand dar. Durch beide Klemmenpaare fließt also derselbe Strom; der Vierpol ist in der Nähe von ω_2 durchlässig.

Solche Betrachtungen sind nützlich, sie können aber natürlich nur einen ersten Anhalt geben.

¹ Der Erfinder der Wellenfilter ist K. W. Wagner (1915). Unabhängig von ihm hat G. A. Campbell im Juli 1915 ein Wellenfilterpatent angemeldet. Vgl. auch K. W. Wagner: Arch. Elektrot. 8, 61 (1919); Elektr. Nachr.-Techn. 5, 1 (1928).

§ 292. Die Grundgleichungen der einfachen Filtertheorie. Wir wollen in diesem Abschnitt nur solche Filter untersuchen, die als symmetrische Sternschaltungen oder symmetrische Dreiecksschaltungen aufgefaßt werden können¹. Dann gelten die im 9. Abschnitt (§ 211 und 212) abgeleiteten Formeln (681), (682) und (686).

Kennt man die Frequenzabhängigkeit des Übertragungsmaßes und des Wellenwiderstandes und außerdem die Frequenzabhängigkeiten der Elemente der Stromquelle und des Verbrauchers, so kann man nach den Gleichungen der Vierpoltheorie auch den Frequenzgang der in den Verbraucher übergehenden Leistung, oder, was auf dasselbe hinauskommt, den Frequenzgang der Betriebsdämpfung berechnen.

Meist ist es nicht nötig, so umständlich zu rechnen. Die Diskussion der Gleichung (681) zeigt nämlich, daß bei allen verlustfreien Filtern das Vierpoldämpfungsmaß (wie bei der Pupinleitung § 249) in endlichen Frequenzbereichen konstant gleich Null ist. Wir nennen diese Bereiche die „theoretischen Durchlaßbereiche“ und ihre Breiten die „theoretischen Lochbreiten“. Die Erfahrung hat gezeigt — und die Theorie macht es verständlich —, daß man die in der Praxis verwendeten Filter meist mit ausreichender Genauigkeit auf dieser Grundlage berechnen kann, ohne den Frequenzgang der Betriebsdämpfung untersuchen zu müssen.

§ 293. Grundfilter. Zobel hat aus den Filtern in Stern- oder Dreieckschaltung eine Gruppe herausgehoben, die sich durch besonders einfache Eigenschaften auszeichnet und die wir die Gruppe der „Grundfilter“ nennen wollen². Das sind die Filter, für die der Nennwert des Wellenwiderstands $\sqrt{\Re/\Im}$ gleich einer reellen Größe k gesetzt werden kann, die von der Frequenz unabhängig ist oder mit anderen Worten: für die der Querwiderstand \Im/\Im zu dem Längswiderstand \Re invers ist mit der reellen frequenzunabhängigen Potenz k .

Zu den Grundfiltern gehört z. B. die verlustfreie Pupinleitung. Denn für sie ist

$$\Re = j\omega L_s, \quad \Im = j\omega s C; \quad (1071)$$

also ist das Verhältnis

$$k = \sqrt{\frac{\Re}{\Im}} = \sqrt{\frac{L_s}{sC}} \quad (1072)$$

reell und von der Frequenz unabhängig.

Bei jedem solchen Grundfilter kann man mit den Abkürzungen

$$\Re = jR', \quad \Im = jG', \quad \text{also} \quad k^2 = \frac{R'}{G'} \quad (1073)$$

den Ansatz

$$\cos \alpha = 1 - \frac{R'G'}{2} = 1 - \frac{R'^2}{2k^2} \quad (1074)$$

machen. Nun hatten wir den „theoretischen Durchlaßbereich“ jedes Filters durch die Bedingung $b = 0$, also $\cos \alpha = 1$ definiert; demnach gelten für ihn die Bedingungen

$$-1 \leq 1 - \frac{R'^2}{2k^2} \quad (1075) \quad \text{und} \quad 1 - \frac{R'^2}{2k^2} \leq 1. \quad (1076)$$

Die Bedingung (1076), die man auch in der Form

$$\frac{R'^2}{2k^2} \geq 0 \quad (1077)$$

¹ Diese Beschränkung führen wir nur der Einfachheit wegen ein; es gibt an sich unzählige Filterformen. Im § 320 werden wir kurz auch noch die Filter in Brückenform behandeln.

² Zobel, O. J.: Bell Syst. Techn. J. 2, Nr. 1, 1 (1923). Zobel nennt die Filter „constant- k -filter“.

schreiben kann, ist von selbst erfüllt, weil R' und k reell sind; die Bedingung (1075) dagegen liefert

$$R'^2 \leq 4k^2 \tag{1078}$$

oder, wenn wir voraussetzen, daß k immer positiv berechnet wird:

$$-2k \leq R' \leq +2k. \tag{1079}$$

Zeichnerisch findet man hiernach den Durchlaßbereich eines Grundfilters, indem man den Blindwiderstand R' als Funktion der Frequenz aufträgt und feststellt, in welchem Frequenzbereich er zwischen $-2k$ und $+2k$ liegt (Abb. 268).

Nach (682) und (686) ist für jedes Grundfilter

$$\mathfrak{B} = \sqrt{\frac{\Re}{\mathfrak{G}}} \left(1 + \frac{\Re \mathfrak{G}}{4} \right)^{\pm 1/2} = k \left(1 - \frac{R'^2}{4k^2} \right)^{\pm 1/2} \tag{1080}$$

Der Nennwert k ist also nichts anderes als der Wellenwiderstand des Grundfilters für die „Mittelfrequenz“ ω_m , die dem Werte $R' = 0$ entspricht (Abb. 268). Er muß bei allen Grundfiltern als eine durch die inneren Widerstände der Stromquelle und des Verbrauchers — wenigstens annähernd — gegebene Konstante angesehen werden.

Da an den Lochgrenzen $R'^2 = 4k^2$ wird, verschwindet dort der Wellenwiderstand aller Grundfilter in Sternform, während der Wellenwiderstand aller Grundfilter in Dreiecksform über alle Grenzen wächst.

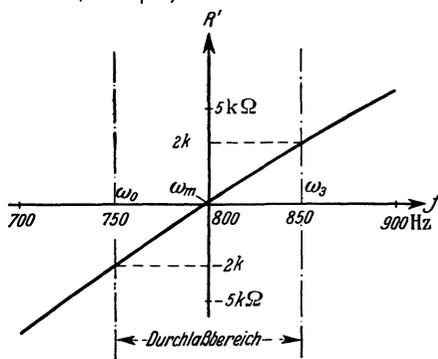


Abb. 268.

§ 294. Spulenleitung und Kondensator-kette. Bei der Spulenleitung L , C ist

$$R' = \omega L; \quad k = \sqrt{\frac{L}{C}}; \tag{1081}$$

ihr Durchlaßbereich ist also (Abb. 269) gegeben durch die Bedingung

$$-2\sqrt{\frac{L}{C}} \leq \omega L \leq +2\sqrt{\frac{L}{C}}, \tag{1082}$$

wofür man auch

$$-\frac{2}{\sqrt{LC}} \leq \omega \leq \frac{2}{\sqrt{LC}} \tag{1083}$$

schreiben kann. Dies stimmt überein mit den Ergebnissen des § 249, wenn man beachtet, daß es keine negativen Frequenzen gibt (vgl. aber § 328 und § 340f.). Die Mittelfrequenz ist hier die Frequenz $\omega = 0$.

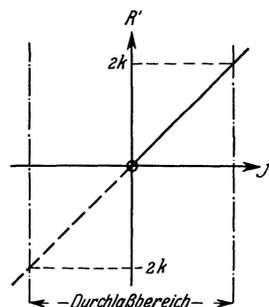


Abb. 269.

Die Spulenleitungen werden in der Technik sehr viel verwendet. Man kann durch sie z. B. Wechselströme von ihren Oberschwingungen befreien, also sehr nahe sinusförmige Ströme herstellen. In der Unterlagerungstelegraphie halten Spulenleitungen die Fernsprechströme von den Telegraphenapparaten ab usw.

Das Gegenstück zu der Spulenleitung bildet die „Kondensator-kette“ L , C (Abb. 270). Auch ihr Einzelglied ist ein Grundfilter; denn für sie gilt

$$\Re = \frac{1}{j\omega C} = -j \cdot \frac{1}{\omega C}, \quad \mathfrak{G} = \frac{1}{j\omega L} = -j \cdot \frac{1}{\omega L}, \tag{1084}$$

also wie bei der Spulenleitung

$$k = \sqrt{\frac{R'}{G'}} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{1085}$$

Die R' -Kurve ist eine zweiästige gleichseitige Hyperbel (Abb. 271); die untere Grenzfrequenz des Durchlaßbereichs wird durch

$$-\frac{1}{\omega C} = -2\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \text{also} \quad \omega = \frac{1}{2\sqrt{LC}} = \omega_0, \tag{1086}$$

die obere durch

$$-\frac{1}{\omega C} = +2\sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \text{also} \quad \omega = -\frac{1}{2\sqrt{LC}} = -\omega_0, \tag{1087}$$

gegeben. Die Kondensatorkette ist also durchlässig von der positiven Grenzfrequenz ω_0 ab aufwärts bis ins Unendliche und dann wieder von negativ unendlich großen Frequenzen ab aufwärts bis zu der negativen Grenzfrequenz $-\omega_0$. Praktisch ist der Bereich negativer Frequenzen natürlich wieder bedeutungslos.

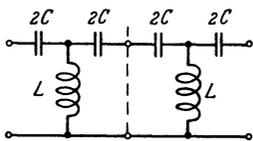


Abb. 270.

Da die mittlere Frequenz, für die $R' = 0$ wird,

jetzt im Unendlichen liegt, hat der Nennwert k bei der Kondensatorkette die Bedeutung des Wellenwiderstands für sehr hohe Frequenzen.

Es sei z. B. für einen äußeren Scheinwiderstand $R_e = 600 \Omega$ eine Kondensatorkette zu entwickeln, deren Grenzfrequenz bei 480 Hz liegt. Da der Wellenwiderstand der Sternschaltung an den Durchlaßgrenzen verschwindet und den Wert k erst für $f_m \rightarrow \infty$ erreicht, schreiben wir vor, daß er bei $f_r = 800$ Hz gleich dem Endwiderstand R_e sei. Dies bedeutet nach (1080), da wir die Sternschaltung voraussetzen:

$$R_e = k \sqrt{1 - \frac{R'^2}{4k^2}} = k \sqrt{1 - \frac{(R')_{f_r}^2}{(R')_{f_0}^2}} = k \sqrt{1 - \frac{f_0^2}{f_r^2}}, \tag{1088}$$

also

$$R_e = k \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

oder

$$k = \frac{5}{4} 600 \Omega = 750 \Omega.$$

Wir haben daher die beiden Bedingungen zu erfüllen:

$$\frac{1}{2\sqrt{LC}} = 2\pi \cdot 480 \text{ Hz} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{L}{C}} = 750 \Omega.$$

Aus ihnen folgt durch Multiplikation:

$$C = \frac{s}{\pi \cdot 1920 \cdot 750 \Omega} = 0,221 \mu\text{F},$$

durch Division:

$$L = \frac{750 \Omega s}{\pi \cdot 1920} = 0,124 \text{ H}.$$

Kondensatorketten können bei akustischen Versuchen verwendet werden, um die Obertöne eines Klanges ohne den Grundton erklingen zu lassen. Bei der Unterlagerungstelegraphie halten Kondensatorketten die Telegraphierströme von den Fernsprechapparaten ab.

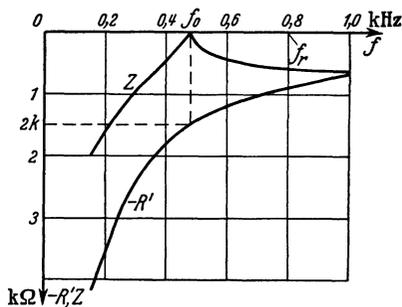


Abb. 271.

§ 295. Das Doppelsieb. „Doppelsieb“ nennt man den Vierpol der Abb. 272, wenn die Scheinfrequenzen $1/\sqrt{L_1 C_1}$ und $1/\sqrt{L_2 C_2}$ miteinander übereinstimmen. Da bei dieser Schaltung allgemein

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{R} &= j \omega L_1 + \frac{1}{j \omega C_1} = \frac{1}{j \omega C_1} (1 - \omega^2 L_1 C_1), \\ \mathfrak{G} &= j \omega C_2 + \frac{1}{j \omega L_2} = \frac{1}{j \omega L_2} (1 - \omega^2 L_2 C_2) \end{aligned} \right\} \quad (1089)$$

ist, ist der Nennwert $\sqrt{\mathfrak{R}/\mathfrak{G}}$ unter der angegebenen Voraussetzung frequenzunabhängig und gleich $\sqrt{L_2/C_1} = \sqrt{L_1/C_2}$; das Doppelsieb ist demnach ein Grundfilter.

Die Frequenzabhängigkeit von

$$R' = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \quad (1090)$$

ergibt sich wie im § 115 durch Überlagerung einer Geraden und einer gleichseitigen Hyperbel (Abb. 268). Die in § 293 angegebene Konstruktion ist daher leicht auszuführen. Sie zeigt, daß das Doppelsieb in einem endlichen Bereich zwischen zwei bestimmten Frequenzen ω_0 und ω_3 durchlässig ist. Die durch die Bedingung $R' = 0$ definierte Frequenz ω_m , bei der der Wellenwiderstand seinen Nennwert annimmt, stimmt mit den Frequenzen $\omega_1 = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ und $\omega_2 = 1/\sqrt{L_2 C_2}$ überein.

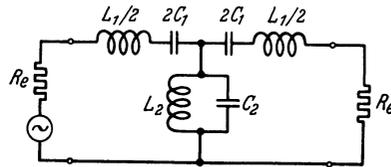


Abb. 272.

Das Kosinusnetz gibt wie auch schon bei der Theorie der Pupinleitungen einen guten Überblick über den Frequenzgang des Übertragungsmaßes. Verbindet man in ihm die den einzelnen Frequenzen entsprechenden Werte von $\mathfrak{C}of\mathfrak{g}$ durch eine Kurve und schreibt man an deren Punkte die zugehörigen Frequenzen, so erkennt man, daß nach (1074) die drei Frequenzen ω_0 , $\omega_m = \omega_1 = \omega_2$ und ω_3 auf drei aufeinanderfolgenden Sätteln liegen. $\mathfrak{C}of\mathfrak{g}$ durchläuft also im Durchlaßbereich zwei Sattelabstände; entsprechend wächst das Winkelmaß bei einem einzelnen Glied um 360° , bei n Gliedern um $n \cdot 360^\circ$. Wir werden später sehen, daß bei dem gewöhnlichen einfachen Sieb nur ein Sattelabstand durchlaufen wird und daß das Winkelmaß dementsprechend nur um 180° oder $n \cdot 180^\circ$ wächst.

Es sei z. B. ein Doppelsieb zu berechnen, das zwischen 750 und 850 Hz durchläßt und für die sich ergebende Mittelfrequenz ω_m einen Wellenwiderstand von $k = 1600 \Omega$ hat. Aus diesen Bedingungen ergeben sich nach (1079) die beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} (R')_{750 \text{ Hz}} &= - 3200 \Omega, \\ (R')_{850 \text{ Hz}} &= + 3200 \Omega, \end{aligned} \right\} \quad (1091)$$

oder ausführlich

$$\begin{aligned} 4,71 \frac{L_1}{\text{ms}} - 0,212 \frac{\text{ms}}{C_1} &= - 3,2 \text{ k}\Omega, \\ 5,34 \frac{L_1}{\text{ms}} - 0,1872 \frac{\text{ms}}{C_1} &= + 3,2 \text{ k}\Omega. \end{aligned}$$

Die Nennerdeterminante ist 0,251, also ist

$$L_1 = \frac{3,2 \text{ k}\Omega \text{ ms}}{0,251} (0,1872 + 0,212) = 5,09 \text{ H}, \quad (1092)$$

$$C_1 = \frac{0,251 \text{ ms}}{3,2 \text{ k}\Omega (4,71 + 5,34)} = 7,80 \text{ nF}. \quad (1093)$$

Die Querinduktivität ergibt sich aus der Gleichung

$$L_2 = k^2 C_1 = 2,56 (\text{k}\Omega)^2 \cdot 7,80 \text{ nF} = 20,0 \text{ mH}, \quad (1094)$$

die Querkapazität entsprechend aus der Abstimmungsbedingung

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} = \frac{5,09 \cdot 7,80}{0,0200} \text{ nF} = 1,99 \mu\text{F}. \quad (1095)$$

§ 296. Der Durchlaßbereich bei einem beliebigen Stern- oder Dreiecksfilter. Erfüllt ein Filter die besondere Grundfilterbedingung des § 293 nicht, so muß man zur Feststellung seines Durchlaßbereichs die Frequenzabhängigkeit des Längswiderstands \Re und des Querleitwerts \mathcal{G} heranziehen. Wieder ist das Filter durchlässig, wenn der Hyperbelkosinus

$$\cos a = 1 - \frac{R'G'}{2}, \quad (1096)$$

zwischen -1 und $+1$ liegt. Die Ungleichung

$$1 - \frac{R'G'}{2} \leq 1 \quad (1097)$$

liefert die Bedingung

$$R'G' \geq 0, \quad (1098)$$

die nun nicht von selbst erfüllt ist; sie besagt, daß im Durchlaßbereich R' und G' immer dasselbe Vorzeichen haben. Die der Bedingung $R'G' = 0$ entsprechenden Grenzfrequenzen nennen wir „Grenzfrequenzen erster Art“. Die andere Ungleichung

$$-1 \leq 1 - \frac{R'G'}{2}, \quad (1099)$$

liefert die weitere Bedingung

$$\frac{R'G'}{4} \leq 1. \quad (1100)$$

Da R' und G' dasselbe Vorzeichen haben, kann man dafür auch

$$|R'| \leq \frac{4}{|G'|} \quad (1101)$$

setzen. Dies ist die zweite allgemeine Filterbedingung; wir nennen die zugehörigen Frequenzen „Grenzfrequenzen zweiter Art“.

Beim Doppelsieb waren die mittleren Frequenzen ω_1 und ω_2 Frequenzen erster Art, die beiden äußeren Frequenzen dagegen Frequenzen zweiter Art.

§ 297. Der Wellenwiderstand bei einem beliebigen Stern- oder Dreiecksfilter. Zur vollkommenen Berechnung eines Filters reicht die Feststellung der Lage seiner Grenzfrequenzen schon deshalb nicht aus, weil sich aus Frequenzen keine Induktivitäten und Kapazitäten zusammensetzen lassen. Es muß (wie bei der Berechnung der Grundfilter) noch eine Festsetzung über die Höhe des Wellenwiderstands hinzutreten. Am nächsten läge es, ihn entsprechend der Formel

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{R'}{G'} \left(1 - \frac{R'G'}{4}\right)^{\pm \frac{1}{2}}} \quad (1102)$$

für die Grenzfrequenz erster Art ($R'G' = 0$) vorzuschreiben; denn auch für die im § 293 eingeführte „mittlere“ Frequenz ω_m war $R'G' = 0$. Leider aber ist im allgemeinen Falle der erste Faktor der Gleichung (1102) und damit der Wellenwiderstand selbst bei der Grenzfrequenz erster Art entweder gleich Null oder unendlich groß, eine Anpassung an dieser Stelle also unmöglich. Nur beim Grundfilter ist der Nennwert k konstant gleich dem endlichen Werte k .

Auch bei der Grenzfrequenz zweiter Art kann man nicht anpassen; denn für sie ist $R'G'/4 = 1$, also der Wellenwiderstand bei der Sternschaltung gleich Null, bei der Dreiecksschaltung unendlich groß.

Der Wellenwiderstand kann daher im allgemeinen nur vorgeschrieben werden für eine Frequenz, die zwischen den beiden Grenzfrequenzen liegt. Dadurch wird die Theorie der hier zu betrachtenden Filter umständlicher als die des Grundfilters; insbesondere ist eine ausführlichere Untersuchung des Frequenzgangs des Wellenwiderstands unerlässlich.

§ 298. Der Durchlaßbereich bei einem Wellenfilter aus drei Elementen. Zur Erläuterung der in den beiden letzten Paragraphen abgeleiteten Beziehungen betrachten wir das in Abb. 273 dargestellte Filter. Bei ihm ist:

$$\left. \begin{aligned} R' &= \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}, \\ \frac{4}{G'} &= -4 \omega L_2. \end{aligned} \right\} \quad (1103)$$

Nach Abb. 274, die diese Frequenzabhängigkeiten veranschaulicht, liegt der Durchlaßbereich des Filters zwischen einer Grenzfrequenz erster Art, die nichts anderes ist als die Scheinfrequenz des Längszweipols:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}, \quad (1104)$$

und einer Grenzfrequenz zweiter Art ω_0 , deren etwas kompliziertere Gleichung wir erst später anschreiben wollen.

Wie man sieht, hängt die Lage der oberen Durchlaßgrenze nur von R' , die Lochbreite dagegen zugleich von R' und G' ab.

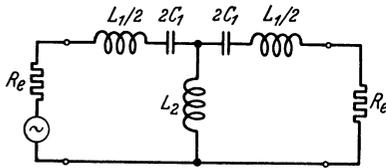


Abb. 273.

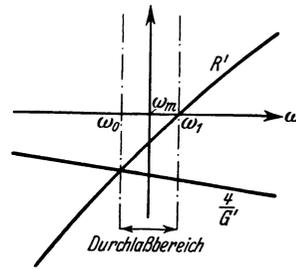


Abb. 274.

Auch bei den Filtern empfiehlt es sich meist, die Frequenz auf eine ausgezeichnete Frequenz ω_m zu beziehen. Wir setzen:

$$\omega_m = \frac{\omega}{\eta} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{L_1}{2} + L_2\right) 2 C_1}}, \quad (1105)$$

wählen also die Frequenz, die sich unmittelbar aus der Induktivität und der Kapazität einer der beiden Maschen (Abb. 273) berechnen läßt, als Bezugsfrequenz. Führen wir weiter nach

$$\kappa = \frac{L_2}{L_1/2 + L_2} \quad (1106)$$

die „Kopplung“ κ ein, so wird

$$\frac{L_1}{2} + L_2 = \frac{L_1}{2(1-\kappa)}, \quad (1107)$$

$$\frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{\eta \omega_m C_1} = \frac{1}{\eta} 2 \omega_m \left(\frac{L_1}{2} + L_2\right) = \frac{\omega_m L_1}{\eta(1-\kappa)}, \quad (1108)$$

$$R' = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = \omega_m L_1 \left(\eta - \frac{1}{(1-\kappa)\eta}\right), \quad (1109)$$

$$G' = -\frac{1}{\omega L_2} = -\frac{2(1-\kappa)}{\omega_m L_1 \kappa \eta} \quad (1110)$$

und daher schließlich

$$\mathcal{C}\mathcal{O}f g = 1 + \frac{1-\kappa}{\kappa} - \frac{1}{\kappa \eta^2} = \frac{1}{\kappa} \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right). \quad (1111)$$

Für $\omega = \omega_m$ wird $\mathcal{C}\mathcal{O}f g = 0$. Die Frequenz ω_m ist also die „Trichterfrequenz“, während die Frequenzen ω_0 und ω_1 „Sattelfrequenzen“ vorstellen. Während sich der Durchlaßbereich beim Doppelsieb von einem Sattel bis zum übernächsten

Sattel erstreckte und der zwischenliegende Sattel die mittlere Frequenz darstellte, bedeckt er bei dem jetzt betrachteten Sieb nur einen Sattelabstand, und die mittlere Frequenz entspricht dem Trichter.

Die Sattelfrequenzen erhält man durch die Ansätze

$$\frac{1}{\kappa} \left(1 - \frac{1}{\eta^2} \right) = \pm 1,$$

also

$$\frac{1}{\eta^2} = 1 \mp \kappa = \begin{cases} 1 - \kappa & (\text{obere Grenze, } \eta_1), \\ 1 + \kappa & (\text{untere Grenze, } \eta_0). \end{cases} \quad (\text{III2})$$

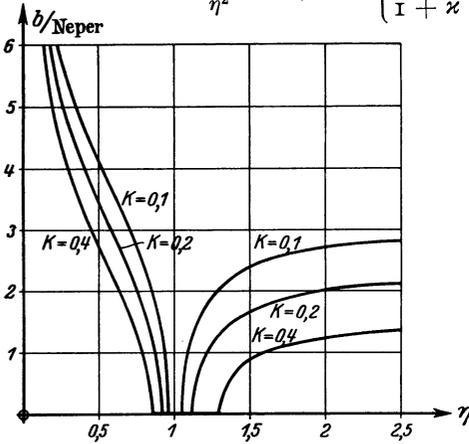


Abb. 275.

Nimmt man also $1/\eta^2$ als „Frequenzmaß“ und trägt man die Dämpfung als Funktion dieses Frequenzmaßes auf, so liegt das Frequenzmaß $1/\eta_m^2 = 1$ genau in der Mitte zwischen den Lochgrenzen. Das Loch wird mit wachsendem κ immer breiter (Abb. 275); für die größte mögliche Kopplung: $\kappa = 1$ ($L_1 = 0$) rücken seine Grenzen nach $1/\eta_0^2 = 2$ und $1/\eta_1^2 = 0$, also nach $\omega_0 = 0,707 \omega_m$ und $\omega_1 = \infty$: das Sieb wird zur Kondensator-kette.

Oberhalb des Lochs ($\eta > \eta_1$, $a = 360^\circ$) gilt

$$\mathfrak{G} \mathfrak{f} g = \mathfrak{G} \mathfrak{f} b = \frac{1}{\kappa} \left(1 - \frac{1}{\eta^2} \right), \quad (\text{III3})$$

unterhalb davon ($\eta < \eta_0$, $a = 180^\circ$):

$$\mathfrak{G} \mathfrak{f} g = \mathfrak{G} \mathfrak{f} (b + j 180^\circ) = - \mathfrak{G} \mathfrak{f} b = - \frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{\eta^2} - 1 \right). \quad (\text{III4})$$

In den Sperrbereichen (besonders im unteren) wächst demnach die Dämpfung rasch an. Für $\omega = \eta = 0$ wird die Dämpfung unendlich groß (Gleichstrom wird ja nicht durchgelassen); für $\omega = \eta = \infty$ dagegen bleibt sie endlich. Letzteres ist leicht zu verstehen: bei unendlich hohem ω werden die Kapazitäten zu Kurzschlüssen, und es ist

$$\mathfrak{G} \mathfrak{f} g = \left(\frac{U_1}{U_2} \right)^2 = \frac{L_1/2 + L_2}{L_2} = \frac{1}{\kappa}. \quad (\text{III5})$$

Je höher demnach die Kopplung κ , um so unzulänglicher die Sperrwirkung bei den hohen Frequenzen; um so mehr nähern sich die Eigenschaften des Siebs denjenigen der Kondensator-kette.

§ 299. Der Wellenwiderstand eines Filters aus drei Elementen. Für die beiden Faktoren, aus denen sich der Wellenwiderstand sowohl der Stern- wie der Dreieckschaltung zusammensetzt, erhalten wir mit den eingeführten Abkürzungen das Folgende:

$$\frac{\Re}{\mathfrak{G}} = - \omega_m^2 L_1^2 \frac{\kappa}{2(1-\kappa)} \left(\eta^2 - \frac{1}{1-\kappa} \right) = - \omega_m^2 L_1^2 \frac{\kappa \eta_1^2}{2} (\eta^2 - \eta_1^2), \quad (\text{III6})$$

$$1 + \frac{\Re}{4} = 1 + \frac{1-\kappa}{2\kappa} - \frac{1}{2\kappa \eta^2} = \frac{1}{2\kappa} \left(1 + \kappa - \frac{1}{\eta^2} \right) = \frac{1}{2\kappa \eta_0^2 \eta^2} (\eta^2 - \eta_0^2). \quad (\text{III7})$$

Daher ist bei der Sternschaltung

$$\mathfrak{B} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \frac{1}{2 \eta_0 \eta} \sqrt{(\eta_1^2 - \eta^2) (\eta^2 - \eta_0^2)}, \quad (\text{III8})$$

bei der Dreiecksschaltung

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \varkappa \eta_0 \eta \sqrt{\frac{\eta_1^2 - \eta^2}{\eta^2 - \eta_0^2}}. \quad (\text{III9})$$

Im Durchlaßbereich stellen beide Formen wie die idealen Leitungen reine Widerstände dar; an den Lochgrenzen springt die Phase ihres Wellenwiderstands, wie leicht zu sehen, um 90° .

Daß der Wellenwiderstand aller verlustfreien Schaltungen in ihren Durchlaßbereichen reell ist, läßt sich leicht allgemein beweisen. In jedem Durchlaßbereich ist nämlich definitionsgemäß $b = 0$, also $\mathfrak{Z}g^2g = (jtg a)^2 = -tg^2 a$. Nach der Gleichung (467) des § 162 ist dieser negative Wert aber gleich dem Verhältnis des Kurzschlußwiderstands zum Leerlaufwiderstand. Diese beiden Widerstände haben daher im Durchlaßbereich entgegengesetzte Phasen; daraus folgt aber, daß der Wellenwiderstand als ihr Mittel reell ist.

Die Sternschaltung hat, wie man am besten aus Abb. 273 ersieht, im unteren Sperrbereich den Charakter einer Kapazität, im oberen den einer Induktivität; die Dreiecksschaltung dagegen stellt in beiden Sperrbereichen eine Induktivität dar.

Was den Betrag des Wellenwiderstands angeht, so ist er bei der Sternschaltung an beiden Grenzen gleich Null, an der Grenze erster Art wegen $R' = 0$, an der

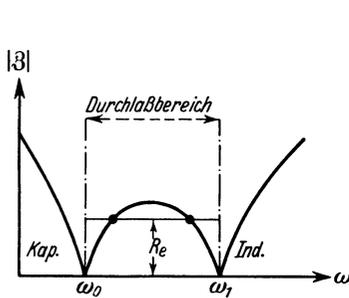


Abb. 276.

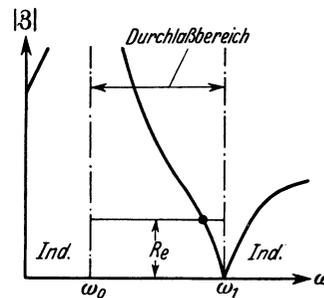


Abb. 277.

Grenze zweiter Art, weil dort $\mathfrak{r} = R'G'/4$ ist (Abb. 276). Die Dreiecksschaltung verhält sich ebenso nur an der oberen Grenze, die ja eine Grenze erster Art ist; an der unteren, der Grenze zweiter Art, wächst ihr Wellenwiderstand wie der aller Dreiecksschaltungen über alle Grenzen (Abb. 277).

Man kann sich dieses Verhalten der Wellenwiderstände auch an Hand der Gleichung (460), § 159 klarmachen. Der Leerlaufwiderstand der Sternschaltung zeigt bei ω_m Spannungsresonanz, ihr Kurzschlußwiderstand bei ω_0 und ω_1 Spannungsresonanz, bei ω_m Stromresonanz. Der Leerlaufwiderstand der Dreiecksschaltung zeigt bei ω_0 Stromresonanz, bei ω_m Spannungsresonanz, ihr Kurzschlußwiderstand bei ω_m Stromresonanz, bei ω_1 Spannungsresonanz.

§ 300. **Anpassung an die abschließenden Widerstände.** Wegen des starken Frequenzganges ihres Wellenwiderstands lassen sich die Filter nur für wenige Frequenzen anpassen. Es besteht daher bei ihnen ein erheblicher Unterschied zwischen dem Frequenzgang der Vierpoldämpfung und dem der Betriebsdämpfung.

Da der Wellenwiderstand der Sternschaltung, die wir von jetzt ab allein betrachten wollen, an den beiden Lochgrenzen verschwindet, wird er in der Nähe der Lochmitte einen Höchstwert haben; und es liegt nahe, diesen ausgezeichneten Wert zu den Abschlußwiderständen R_e in Beziehung zu setzen. Setzt man den Differentialquotient des Ausdrucks [vgl. (III8)]

$$\frac{(\eta_1^2 - \eta^2)(\eta^2 - \eta_0^2)}{\eta^2} = \eta_1^2 - \eta^2 - \frac{\eta_0^2 \eta_1^2}{\eta^2} + \eta_0^2 \quad (\text{II20})$$

gleich Null, so ergibt sich für die Lage des Höchstwerts

$$\eta = \sqrt{\eta_0 \eta_1}, \quad (1121)$$

oder

$$\frac{1}{\eta^2} = \sqrt{(1 + \kappa)(1 - \kappa)} = \sqrt{1 - \kappa^2}. \quad (1122)$$

Er liegt also bei dem geometrischen Mittel der beiden Grenzfrequenzen, d. h. annähernd bei der Trichterfrequenz ($\eta = 1$).

Zur Berechnung der erforderlichen Induktivitäten und Kapazitäten brauchen wir die Größe des höchsten Wellenwiderstands:

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{Z}} &= \sqrt{\frac{L_1}{C_1} \frac{1}{2 \eta_0} \frac{1}{\sqrt{\eta_0 \eta_1}} \sqrt{(\eta_1^2 - \eta_0 \eta_1)(\eta_0 \eta_1 - \eta_0^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{L_1}{C_1} \frac{\eta_1 - \eta_0}{2 \eta_0}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L_1}{C_1} \left(\frac{\sqrt{1 + \kappa}}{\sqrt{1 - \kappa}} - 1 \right)}, \end{aligned} \quad (1123)$$

oder bei kleiner Kopplung

$$\hat{\mathfrak{Z}} \approx \frac{\kappa}{2} \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \approx \omega_m L_2. \quad (1124)$$

Da L_2 ein Maß für die Kopplung und daher auch für die Lochbreite ist, nimmt hiernach der Wellenwiderstand im Durchlaßbereich um so höhere Werte an, je breiter das durchgelassene Frequenzband ist.

Erst jetzt sind wir in der Lage, ein Filter vorgeschriebener Siebwirkung nach Abb. 273 zu berechnen. Sind die beiden Grenzfrequenzen f_0 und f_1 und — durch irgendeine Beziehung zu R_e , also durch eine Anpassungsvorschrift — der Höchstwert des Wellenwiderstands im Durchlaßbereich gegeben, so ist in den meisten Fällen das folgende Rechenverfahren genau genug: Man nimmt das Mittel f_m aus den beiden Grenzfrequenzen und berechnet κ nach der Gleichung $\kappa = (f_1 - f_0)/f_m$, die sich aus (1112) als Näherungsgleichung ergibt. Dann folgt L_2 nach (1124) aus

$$L_2 = \frac{\hat{\mathfrak{Z}}}{2 \pi f_m}, \quad (1125)$$

L_1 nach (1106) aus

$$\frac{L_1}{2} + L_2 = \frac{L_2}{\kappa} \quad (1126)$$

und C_1 nach (1105) aus

$$C_1 = \frac{1}{2 \left(\frac{L_1}{2} + L_2 \right) 4 \pi^2 f_m^2}. \quad (1127)$$

Fordern wir z. B.

$$f_0 = 750 \text{ Hz}, \quad f_1 = 850 \text{ Hz}, \quad \hat{\mathfrak{Z}} = 1600 \Omega,$$

so ist $f_m = 800 \text{ Hz}$, $\kappa = 0,125$, $L_2 = 1600/(2 \pi 800 \text{ Hz}) = 0,318 \text{ H}$, $L_1 = 4,46 \text{ H}$, $C_1 = s^2/(2 \cdot 2,55 \text{ H} \cdot 4 \pi^2 \cdot 800) = 7,8 \text{ nF}$.

Für die Anpassungsvorschrift, aus der die Größe des höchsten Wellenwiderstands folgt, kann erst die Theorie der Betriebsdämpfung Anhaltspunkte liefern.

§ 301. **Wellenfilter nach Zobel.** Auch ohne Kenntnis der Theorie der Betriebsdämpfung kann man annehmen, daß unter sonst gleichen Umständen ein Wellenfilter um so besser siebt, je steiler das Dämpfungsmaß außerhalb des Loches ansteigt.

Nach § 164 läßt sich die Dämpfungskurve durch Verwendung mehrerer Siebglieder hintereinander steiler machen; denn das Dämpfungsmaß von n Gliedern ist n mal so groß wie das des einzelnen Glieds. Bei diesem Verfahren wird aber auch die immer vorhandene Wirkdämpfung vervielfacht. Man versucht deshalb die

Dämpfungskurve des einzelnen Glieds durch Zufügung von Schaltelementen steiler zu machen. Ob man mit einer komplizierteren Schaltung Erfolg hat, dafür sind häufig Nebenrückichten maßgebend, die von der einfachen Theorie nicht erfaßt werden (z. B. die Rücksicht auf die Verluste in den Kondensatoren und in den Spulen oder auf die Abhängigkeit der Induktivitäten von der Stromstärke oder auch rein wirtschaftliche Rücksichten).

Zobel hat gezeigt¹, wie man von einem Grundfilter ausgehend die Dämpfungskurve systematisch durch Zufügung weiterer Schaltelemente steiler machen kann. Beim Grundfilter ist allgemein $\Re/\mathcal{G} = k^2$. Ist also der Längswiderstand bei einer mittleren Frequenz eines Durchlaßbereichs gleich Null, so gilt bei derselben Frequenz dasselbe für den Querleitwert. Umgekehrt: Ist \Re bei einer Sperrfrequenz unendlich groß, so ist es an derselben Stelle notwendig auch \mathcal{G} . Die Sperrbereiche aller Grundfilter enthalten demnach eine Frequenz, bei der gleichzeitig \Re und \mathcal{G} und damit auch die Vierpoldämpfung über alle Grenzen wächst. Ein Filter, das nicht gerade ein Grundfilter ist, sperrt aber z. B. auch schon dann, wenn \Re beliebig und nur \mathcal{G} unendlich groß ist. Wählt man also als Querleitwert \mathcal{G} einen Zweipol, dessen Null- und Unendlichstellen rascher aufeinander folgen als die des Längswiderstandes \Re , so sperrt das Filter, das jetzt natürlich kein Grundfilter ist, schon in größerer Nähe des Durchlaßbereichs, d. h. die Dämpfungskurve verläuft steiler.

Wir wollen dies an dem besonders einfachen Beispiel des Drosselglieds im einzelnen zeigen.

Die Dämpfung des Drosselglieds, dessen Längsinduktivität wir L , dessen Querkapazität wir C nennen, steigt oberhalb seiner Grenzfrequenz ω_0 nur langsam an. Wir ersetzen es daher durch das kompliziertere Filter Abb. 278, dessen Querleitwert bei der Scheinfrequenz ω_∞ den Verbraucher kurz schließen möge. Die drei Elemente L_1 , L_2 und C_2 bestimmen wir so, daß erstens die Scheinfrequenz ω_∞ an der uns günstig erscheinenden Stelle liegt und daß zweitens der Frequenzgang des Wellenwiderstands der neuen Schaltung völlig übereinstimmt mit dem des Wellenwiderstands des zugrundeliegenden Drosselglieds. Da die Grenzfrequenzen diejenigen Frequenzen sind, bei denen der Wellenwiderstand gleich Null oder Unendlich wird, sichert die zweite Bedingung zugleich die Übereinstimmung der Lochgrenzen bei dem zu entwerfenden Filter und dem Grundfilter.

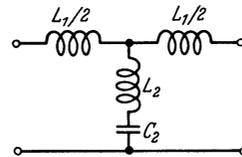


Abb. 278.

Die erste Bedingung sagt

$$\omega_\infty^2 L_2 C_2 = 1; \quad (1128)$$

nach der zweiten soll für alle Frequenzen

$$\frac{\Re}{\mathcal{G}} + \frac{\Re^2}{4} = \frac{\Re_0}{\mathcal{G}_0} + \frac{\Re_0^2}{4} \quad (1129)$$

sein, wo

$$\Re_0 = j \omega L, \quad \mathcal{G}_0 = j \omega C \quad (1130)$$

gesetzt ist. Nun ist nach dem Schaltbild

$$\Re = j \omega L_1, \quad \mathcal{G} = \frac{j \omega C_2}{1 - \omega^2 L_2 C_2}; \quad (1131)$$

aus (1129) folgt also die Gleichung

$$\frac{L_1}{C_2} (1 - \omega^2 L_2 C_2) - \omega^2 \frac{L_1^2}{4} \equiv \frac{L}{C} - \omega^2 \frac{L^2}{4}, \quad (1132)$$

¹ Zobel, O. J.: Bell Syst. Techn. J. 2, Nr. 1, 11 ff. (1923).

die für alle Frequenzen richtig sein soll. Daraus ergeben sich die beiden weiteren Bedingungen

$$\frac{L_1}{C_2} = \frac{L}{C} \quad (1133)$$

und

$$L_1 L_2 + \frac{L_1^2}{4} = \frac{L^2}{4}. \quad (1134)$$

Man multipliziert (1128) mit (1133):

$$\omega_\infty^2 L_1 L_2 = \frac{L}{C} = \frac{L^2}{L C} = \omega_0^2 \frac{L^2}{4} \quad (1135)$$

und setzt $L_1 L_2$ in (1134) ein:

$$\frac{\omega_0^2}{\omega_\infty^2} L^2 + L_1^2 = L^2.$$

Dann ergeben sich die Dimensionierungsvorschriften:

$$\frac{L_1}{L} = \frac{C_2}{C} = \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_\infty^2}} = m \quad (1136)$$

und nach (1135)

$$\frac{L_2}{L} = \frac{1}{4} \frac{\omega_0^2}{m \omega_\infty^2} = \frac{1 - m^2}{4 m}. \quad (1137)$$

Es erscheine uns z. B. günstig, $\omega_\infty = 1,25 \omega_0$ zu wählen. Dann ist $m = 0,6$, $L_1 = 0,6 L$, $L_2 = 0,267 L$, $C_2 = 0,6 C$.

Der Gang der Vierpoldämpfung mit $m = 0,6$ ist in Abb. 279 veranschaulicht. Gestrichelt ist der Verlauf bei der zugehörigen Spulenleitung. Man überzeugt sich leicht, daß die Dämpfungskurve im Sperrbereich zwar mit abnehmendem m immer steiler verläuft, dafür aber auch für $\omega = \infty$ einem verhältnismäßig niedrigen Endwert zustrebt. Für m wird es demnach ein Optimum geben.

Durch die genaue Angleichung des Wellenwiderstands an den des Grundfilters wird nicht nur erreicht, daß die Lochgrenzen des neuen Filters an denselben Stellen liegen wie die des Grundfilters, sondern auch daß alle Wellenfilter, die man nach der angegebenen Methode zu einem gegebenen Grundfilter berechnen kann, aneinander angepaßt sind; schaltet man also mehrere solche Filter hintereinander, so addieren sich ihre Dämpfungsmaße, und ihr Gesamtwellenwiderstand ist bei allen Frequenzen gleich dem Wellenwiderstand des Grundfilters.

Aus einer Diskussion der Gleichung für $\mathcal{G}[\beta]$ ergibt sich, daß das Winkelmaß der hier berechneten Spulenleitung bei der Unendlichkeitsfrequenz ω_∞ von 180° auf 360° springt.

Das Zobel'sche Rechenverfahren ist im allgemeinen verwickelt. Geht man z. B. vom Doppelsieb aus, so liefert die Identifizierung der Wellenwiderstände vier Gleichungen; man kann also die Bedingung $\mathcal{G} = \infty$ für zwei Frequenzen (in jedem Sperrbereich eine) vorschreiben und hat dann im ganzen sechs Gleichungen für die sechs Elemente des zu berechnenden Filters. Man findet das Ergebnis der Rechnung bei Zobel: a. a. O., S. 41.

Die Formelzusammenstellungen Zobel's erlauben für jeden vorgeschriebenen Durchlaßbereich ein — im allgemeinen mehrgliedriges — Filter zu berechnen, dessen Dämpfungsverlauf im Sperrbereich in gewissen Grenzen beliebig einstellbar

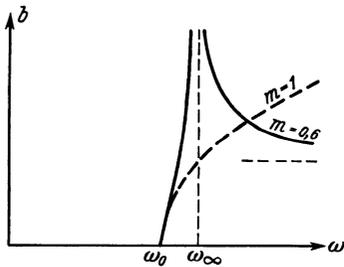


Abb. 279.

ist, und dessen Wellenwiderstand bei allen Frequenzen mit dem Wellenwiderstand des zugehörigen Grundfilters übereinstimmt¹.

Über die Anpassung derartiger Wellenfilter an konstante Widerstände vgl. § 316.

§ 302. Die Frequenzabhängigkeit des Winkelmaßes im Durchlaßbereich und die Wirkdämpfung der Filter. Im Kosinusnetz liegen die Durchlaßbereiche der Filter, wie wir gesehen haben, immer auf der imaginären Achse zwischen zwei (benachbarten oder nicht benachbarten) Sätteln. Das Winkelmaß ändert sich also in jedem Durchlaßbereich um ein ganzzahliges Vielfaches von 180° . Ob diese Änderung eine Zunahme oder Abnahme ist, läßt sich bei dem verlustfreien Sieb nicht entscheiden; denn nach § 241 hat der Hyperbelkosinus auf der periodischen Achse zu beiden Seiten der Sättel dieselbe Phase (0° oder 180°).

Sind in dem Sieb Widerstände vorhanden, so treten in dem Ausdruck für $\mathfrak{C}\circ\mathfrak{f}g$ neue Glieder auf. Bei der Spulenleitung ist z. B.

$$\mathfrak{C}\circ\mathfrak{f}g = \mathbf{1} + (R + j\omega L)j\omega C, \quad (\text{II38})$$

d. h. die Phase von $\mathfrak{C}\circ\mathfrak{f}g$ liegt, da R positiv ist, im ersten oder zweiten Quadranten. Ein Blick auf das Kosinusnetz zeigt aber, daß hiermit nur ein Anstieg des Winkelmaßes mit wachsender Frequenz vereinbar ist².

Nach Zobel³ kann man allgemein beweisen, daß das Winkelmaß im Durchlaßbereich mit wachsender Frequenz steigt. Dies folgt auch aus einer Formel von H. F. Mayer⁴, die den Frequenzgang der Dämpfung im Durchlaßbereich eines Vierpols in Beziehung setzt zu dem Frequenzgang seines Winkelmaßes.

Wir wollen diese Formel ableiten unter der Voraussetzung, daß das Übertragungsmaß g eine Funktion nur von Produkten der Form

$$(R_i + j\omega L_i)(G_k + j\omega C_k) \approx -L_i C_k \left\{ \omega^2 - j\omega \left(\frac{R_i}{L_i} + \frac{G_k}{C_k} \right) \right\} \quad (\text{II39})$$

ist. Nimmt man der Einfachheit halber an, daß sämtliche Verhältnisse R_i/L_i und ebenso sämtliche Verhältnisse G_k/C_k einander gleich und frequenzunabhängig seien, so darf man

$$g = f(\omega^2 - j\omega \varepsilon) \quad (\text{II40})$$

schreiben, wo die Frequenz nur explizite in dem Argument $\omega^2 - j\omega \varepsilon$ vorkommt und ε eine Abkürzung für $R/L + G/C$ ist. ε/ω sei klein. Dann kann man für das Zusatzübertragungsmaß, das von den Verlusten ε herrührt, nach dem Taylorschen Lehrsatz

$$\Delta g \approx \left(\frac{\partial g}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \varepsilon = -j\omega (f')_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon \quad (\text{II41})$$

setzen, wo f' den Differentialquotient der Funktion f nach $\omega^2 - j\omega \varepsilon$ bedeutet. $(f')_{\varepsilon=0}$ tritt aber auch bei der Differentiation von g nach ω auf: es ist

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \omega} \right)_{\varepsilon=0} = 2\omega (f')_{\varepsilon=0}, \quad (\text{II42})$$

und es folgt daher:

$$\begin{aligned} \Delta g &= -j\omega \left(\frac{\partial g}{\partial \omega} \right)_{\varepsilon=0} \cdot \frac{1}{2\omega} \varepsilon = -j \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial \omega} \right)_{\varepsilon=0} \\ &= -j \frac{\varepsilon}{2} j \frac{\partial a}{\partial \omega} = \frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial a}{\partial \omega}. \end{aligned} \quad (\text{II43})$$

¹ Siehe auch W. Cauer: Siebschaltungen. Berlin: VDI-Verlag 1931.

² Liegt die Phase von $\mathfrak{C}\circ\mathfrak{f}g$ im dritten und vierten Quadranten, so steigt das Winkelmaß von 180° auf 360° .

³ Zobel, O. J.: Bell Syst. Techn. J. 2, Nr. 1, 5 und 37 (1923).

⁴ Mayer, H. F.: Elektr. Nachr.-Techn. 2, 335 (1925).

Die Verluste rufen also einen reellen Zuwachs des Übertragungsmaßes, d. h. ein Dämpfungsmaß b hervor, für das die einfache Formel gilt:

$$b = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \frac{da}{d\omega}. \quad (1144)$$

Da b positiv sein muß, kann auch das Winkelmaß mit steigender Frequenz nur zunehmen.

Die Gleichung (1144) gestattet, die Frequenzabhängigkeit der Dämpfung eines Vierpols mit Verlusten ε in einfacher Weise herzuleiten, wenn die Frequenzabhängigkeit seines Winkelmaßes für $\varepsilon = 0$ bekannt ist.

Bei der verlustfreien Freileitung ist

$$\alpha = \omega \sqrt{LC}, \quad \text{also} \quad \frac{d\alpha}{d\omega} = \sqrt{LC}.$$

Demnach wird

$$\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \sqrt{LC} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (1145)$$

wie in § 216.

Bei der verlustfreien Spulenleitung ist nach § 249

$$\sin \frac{a}{2} = \eta$$

und

$$\frac{da}{d\omega} = \frac{2}{\cos \frac{a}{2}} \frac{d\eta}{d\omega} = \frac{\sqrt{LC}}{\sqrt{1-\eta^2}}. \quad (1146)$$

Daher wird

$$b = \left(\frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{G}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} \right) \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \quad (1147)$$

wie im § 252, Gleichung (869).

Um die Gleichung auf Filter anwenden zu können, müssen wir wieder die Frequenzabhängigkeit des Winkelmaßes a im Durchlaßbereich des verlustfreien Filters kennen. Sie ist von Filter zu Filter verschieden; für alle verlustfreien Filter gilt jedoch der Satz, daß das Winkelmaß an der einen Lochgrenze auf einem Sattel des Kosinusreliefs beginnt und an der anderen Grenze ebenfalls auf einem Sattel endigt. Wie viele Sattel die Frequenzkurve im Durchlaßbereich außer diesen beiden berührt, hängt von der Zahl der Kettenglieder und von ihrem Bau ab. Wir wollen die Zahl der im Durchlaßbereich durchlaufenen Sattelabstände n nennen und annehmen, daß a an der unteren Grenze gleich Null ist. Dann steigt der Winkel a/n im Durchlaßbereich, der sich von $\omega_m - w/2$ bis $\omega_m + w/2$ erstreckt, von 0° auf 180° , und sein Kosinus nimmt ab von 1 auf -1 . Sieht man den Verlauf dieser Abnahme näherungsweise als einen geradlinigen an:

$$\cos \frac{a}{n} = \frac{2}{w} (\omega_m - \omega), \quad (1148)$$

so erhält man

$$-\frac{1}{n} \sin \frac{a}{n} \frac{da}{d\omega} = -\frac{2}{w}$$

und daher für die Lochmitte ($\cos a/n = 0$; $\sin a/n = 1$):

$$b = \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right) \frac{n}{w}. \quad (1149)$$

Die Dämpfung in der Lochmitte ist demnach um so kleiner, je breiter das Loch ist. Da im Zähler von (1149) die Zahl n steht, ist die Lochdämpfung bei mehrgliedrigen Filtern der Gliedzahl proportional und beim Doppelsieb bei gleicher Lochbreite doppelt so hoch als beim einfachen.

§ 303. Die Betriebsdämpfung der Wellenfilter. Da bei den Wellenfiltern der Wellenwiderstand im Durchlaßbereich stark von der Frequenz abhängt, kann die Vierpoldämpfung, die wir bisher allein betrachtet haben, nur in großen Zügen ein zutreffendes Bild von der Filterwirkung geben.

H. Riegger hat zuerst¹ die Frequenzabhängigkeit des sekundären Stroms \mathfrak{S}_2 bei gegebener EMK \mathfrak{E} der Stromquelle, also die „Resonanzkurve“ des Stroms, untersucht. Statt ihrer kann man auch die Betriebsdämpfung diskutieren, die ja durch

$$\mathbf{b} = \ln \left| \frac{\mathfrak{E}}{2 \mathfrak{S}_2 \sqrt{\mathfrak{R}_a \mathfrak{R}_e}} \right| \quad (1150)$$

definiert ist; man hat dann den Vorteil, daß die beiden Maße, das Betriebsmaß und das Vierpolmaß, logarithmische Maße sind, also unmittelbar miteinander verglichen werden können.

Die Theorie der Betriebsdämpfung ist bei den Wellenfiltern ziemlich verwickelt; wir leiten sie daher nur für das theoretisch verhältnismäßig einfache und praktisch besonders wichtige Doppelsieb ab.

§ 304. Die Betriebsdämpfung des Doppelsiebs. \mathfrak{W}^l sei der Leerlaufwiderstand des Doppelsiebs, \mathfrak{M} sein Kernwiderstand; vorn und hinten sei es durch denselben reellen, frequenzunabhängigen Widerstand R_e abgeschlossen. Dann gilt für die Betriebsdämpfung

$$\mathbf{b} = \ln \left| \frac{(R_e + \mathfrak{W}^l)^2 - \mathfrak{M}^2}{2 \mathfrak{M} R_e} \right|. \quad (1151)$$

Hierin ist mit der Abkürzung $\omega^2 L_1 C_1 = \omega^2 L_2 C_2 = \omega^2 / \omega_m^2 = \eta^2$

$$\mathfrak{M} = \frac{j \omega L_2}{1 - \omega^2 L_2 C_2} = \frac{j \eta \omega_m L_2}{1 - \eta^2} = - \frac{j \omega_m L_2}{\eta - \frac{1}{\eta}}, \quad (1152)$$

$$\mathfrak{W}^l = \frac{1}{2} \left(j \omega L_1 + \frac{1}{j \omega C_1} \right) + \mathfrak{M} = \frac{j \omega_m L_1}{2} \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right) - \frac{j \omega_m L_2}{\eta - \frac{1}{\eta}}. \quad (1153)$$

Wir setzen

$$\frac{\omega_m L_1}{2 R_e} \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right) = U, \quad \frac{\omega_m \sqrt{L_1 L_2}}{R_e} = m \quad (1154)$$

und erhalten

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{W}^l &= j \left(U - \frac{m^2}{2 U} \right) R_e, \\ \mathfrak{M} &= -j \frac{m^2}{2 U} R_e. \end{aligned} \right\} \quad (1155)$$

Die Frequenzfunktion U wollen wir mit Riegger als angenähertes Frequenzmaß ansehen. Da nämlich für $\eta \approx 1$

$$\eta - \frac{1}{\eta} = \frac{\eta^2 - 1}{\eta} = \frac{\eta + 1}{\eta} (\eta - 1) \approx 2 (\eta - 1), \quad (1156)$$

ist die Funktion U der Abweichung der Frequenz von der Mittelfrequenz ω_m nahezu proportional; in der Nähe der Resonanz kann man also statt der Kurve $\mathbf{b} = f(\eta)$ auch die Kurve $\mathbf{b} = f(U)$ diskutieren. Zu dieser läßt sich die genaue Kurve immer leicht punktweise auf Grund der Definitionsgleichung (1154) zeichnen.

Setzen wir die Gleichungen (1155) in (1151) ein, so kommt:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \ln \left| \frac{\left(1 + j \left(U - \frac{m^2}{2 U} \right) \right)^2 + \frac{m^4}{4 U^2}}{-j \frac{m^2}{U}} \right| \\ &= \ln \left| 1 - \frac{2 U^2}{m^2} + j \frac{U}{m^2} (1 - U^2 + m^2) \right| \\ &= \frac{1}{2} \ln \left\{ \left(1 - \frac{2 U^2}{m^2} \right)^2 + \frac{U^2}{m^4} (1 - U^2 + m^2)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{1}{m^4} (m^4 + (m^2 - 1)^2 U^2 - 2 (m^2 - 1) U^4 + U^6) \right\}. \end{aligned} \quad (1157)$$

¹ Vgl. die Arbeiten von H. Riegger u. H. Backhaus: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. I, H. 3, 126 (1921); 3, H. 1, 190 (1923); H. 2, 101 (1924); 4, H. 1, 33 (1925).

Dies ist die Formel für die Betriebsdämpfung des Doppelsiebs als Funktion des festen Parameters m und des Frequenzmaßes U . Da nur gerade Potenzen von U vorkommen, wird die Betriebsdämpfung mit der Veränderlichen U als Abszisse durch eine zur Frequenz ω_m ($U = 0$) symmetrische Kurve dargestellt.

Die Gestalt dieser Kurve hängt nur von m ab. Um ihre Maxima und Minima zu finden, differenzieren wir nach Anhang 3. a) die Funktion sechsten Grades in U , die in der großen Klammer der Gleichung (1157) steht. Der erste Differentialquotient ist

$$6U \left\{ U^4 - \frac{4}{3}(m^2 - 1)U^2 + \frac{1}{3}(m^2 - 1)^2 \right\}. \quad (1158)$$

Extrema liegen also bei $U = 0$, bei

$$U = \pm \sqrt{\frac{m^2 - 1}{3}} \quad (1159)$$

und bei

$$U = \pm \sqrt{m^2 - 1}. \quad (1160)$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Betriebsdämpfung sowohl für $U = 0$ als auch für $U^2 = m^2 - 1$ verschwindet. Da das Filter nicht verstärken kann, folgt daraus unmittelbar, daß die Stellen $U = \pm \sqrt{(m^2 - 1)/3}$ Maxima darstellen. Der Verlauf der Betriebsdämpfung ist also qualitativ der durch die ausgezogenen Kurven der Abb. 280 dargestellte.

§ 305. Die Betriebsdämpfung für $m \leq 1$. Die vier durch (1159) und (1160) festgelegten Extrema sind reell nur, soweit $m > 1$.

Für $m = 1$ fallen sie mit dem mittleren Extremum $U = 0$ zusammen. Es wird dann

$$b = \frac{1}{2} \ln(1 + U^6). \quad (1161)$$

Bei dem im § 295 berechneten Doppelsieb z. B. ist nach (1154) $m = 1$; für die Frequenz 820 Hz wird daher

$$U = \frac{\omega_m L_1}{2 R_e} \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right) = 7,98 \left(\eta - \frac{1}{\eta} \right) = 0,43$$

und nach (1161)

$$b = \frac{1}{2} \ln(1 + 0,006) = 0,003 \text{ Neper};$$

für die Frequenz 840 Hz dagegen $U = 0,81$ und

$$b = \frac{1}{2} \ln(1 + 0,28) = 0,13 \text{ Neper}.$$

An den theoretischen Lochgrenzen 750 und 850 Hz ist $U \approx 1 = m$ und die Betriebsdämpfung daher gleich 0,35 Neper. Die stark gestrichelte Kurve der Abb. 280 veranschaulicht den Verlauf der Betriebsdämpfung für $m = 1$.

Man erkennt, daß das Filter auch für $m = 1$ noch gut brauchbar ist; infolge der hohen Potenz U^6 steigt die Betriebsdämpfung von der Mitte des Durchlaßbereiches aus ($U = 0$) auf beiden Seiten erst sehr langsam, dann aber um so rascher an.

Sinkt der Parameter m stark unter den Wert 1, so verliert die Betriebsdämpfung immer mehr den Charakter einer Filterdämpfung. Für $m = 1/\sqrt{2}$ und $m = 1/2$ erhält man die beiden dünn gestrichelten Kurven der Abb. 280. Die zugehörigen Resonanzkurven ähneln mehr der Kurve eines gewöhnlichen Resonanzkreises.

§ 306. Die Betriebsdämpfung für $m > 1$. Steigt m über den Wert 1, so hat die Kurve der Betriebsdämpfung drei Nullstellen; und die beiden äußeren von ihnen rücken nach (1160) mit wachsendem Parameter m immer weiter nach außen. Die zugehörige Resonanzkurve wird, wie man es auch ausdrückt, „mehrwellig“.

Um einen Überblick zu bekommen, wollen wir die beiden besonderen Fälle $m = \sqrt{2}$ und $m = 2$ betrachten.

a) Für $m = \sqrt{2}$ liegen die äußeren Nullstellen der Betriebsdämpfung bei $U = \pm 1$, die dazwischen liegenden Maxima bei $U = \pm 1/\sqrt{3} = 0,58$. Für die Beurteilung der Filterwirkung ist vor allem die Höhe dieser Maxima wesentlich; sie ergeben sich gleich

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} \ln \frac{1}{4} (4 + U^2 - 2U^4 + U^6) & (1162) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{4} (4 + \frac{1}{3} - \frac{2}{9} + \frac{1}{27}) \right) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{27} \right) = 0,0182 \text{ Neper.} \end{aligned}$$

Für $U = \sqrt{2}$ erhält man

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{4} (4 + 2 - 8 + 8) \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln 1,5 = 0,203 \text{ Neper.} \end{aligned} \quad (1163)$$

Die Betriebsdämpfung wird in diesem Falle durch die ausgezogene Kurve der Abb. 280 mit der Anschrift $\sqrt{2}$ dargestellt; d. h. das Filter kann jedenfalls in dem Bereich zwischen den äußeren Nullstellen als praktisch völlig durchlässig angesehen werden.

b) Für $m = 2$ liegen die äußeren Nullstellen der Betriebsdämpfung bei $\pm \sqrt{3} = \pm 1,732$. Bei $U = \pm 1$ nimmt die Betriebsdämpfung den Maximalwert

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{16} (16 + 9U^2 - 6U^4 + U^6) \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{4} \right) = 0,112 \text{ Neper} \end{aligned} \right\} \quad (1164)$$

an. Für $U = 2$ wird

$$b = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{16} (16 + 36 - 96 + 64) \right) = 0,112 \text{ Neper.} \quad (1165)$$

Diesen Frequenzgang veranschaulicht die ausgezogene Kurve der Abb. 280 mit der Anschrift 2; man erkennt, daß man jedenfalls in den meisten Fällen nicht weit über den Wert $m = 2$ hinausgehen wird.

§ 307. Die Bedeutung der Konstante m . Die Konstante m hängt mit dem Wellenwiderstand des Filtergliedes zusammen. Es ist nämlich

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\mathfrak{Z}_1^2 - \mathfrak{X}^2} = \sqrt{-\left(U - \frac{m^2}{2U} \right)^2 + \frac{m^4}{4U^2}} R_e = \sqrt{m^2 - U^2} R_e. \quad (1166)$$

Setzt man $U = 0$, so wird $\mathfrak{Z} = m R_e$. Das Produkt $m R_e = \omega_m \sqrt{L_1 L_2}$ ist demnach gleich dem Wellenwiderstand für $U = 0$, also für die Lochmitte.

Das in § 295 zahlenmäßig durchgerechnete Filter war in seiner Lochmitte an seine Abschlußwiderstände angepaßt; sein Parameter m hatte also den Wert 1. Bei beliebigem m ist ein Filter angepaßt für $1 = \sqrt{m^2 - U^2}$ oder

$$U = \pm \sqrt{m^2 - 1}, \quad (1167)$$

d. h. für die beiden äußeren Nullstellen der Betriebsdämpfung. Bei Anpassung gehen ja Betriebsdämpfung und Vierpoldämpfung ineinander über.

Die Lage der beiden äußeren Nullstellen der Betriebsdämpfung läßt sich demnach ohne weiteres konstruieren nur auf Grund der Kurve, die den Frequenzgang des Wellenwiderstands darstellt. Man zieht (Abb. 276) in der Höhe R_e

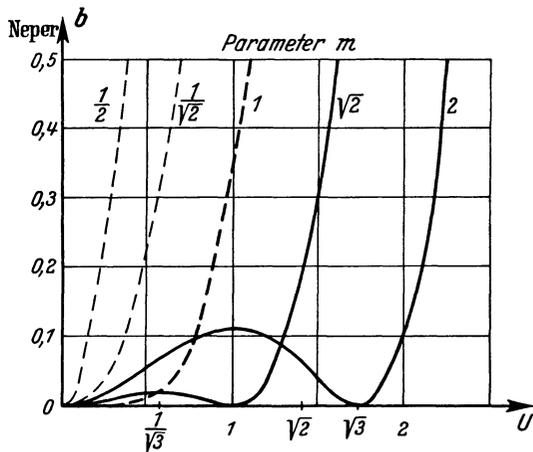


Abb. 280.

über der Abszissenachse eine Horizontale; ihren Schnittpunkten mit der Wellenwiderstandskurve entspricht die Lage der Nullstellen der Betriebsdämpfung¹.

Für $U = \pm m$ wird der Wellenwiderstand gleich Null. Dort liegen demnach die theoretischen Lochgrenzen, wie sie sich aus der Theorie der Vierpoldämpfung ergeben haben.

§ 308. Dimensionierung des Doppelsiebs. Unsere Theorie erlaubt, die Wirkung der Anpassung auf den Frequenzgang der Betriebsdämpfung zu überblicken. Paßt man an den Wellenwiderstand in der Lochmitte an, so gibt es nur eine einzige Nullstelle der Betriebsdämpfung. Wählt man dagegen die Abschlußwiderstände kleiner als den Wellenwiderstand in der Lochmitte, so treten in der Kurve der Betriebsdämpfung zwei äußere Nullstellen auf; zwischen ihnen ist die Betriebsdämpfung von Null verschieden, und zwar steigt sie beispielsweise, wenn $R_e = 70\%$ des höchsten Wellenwiderstands ist, bis auf $2/100$ Neper.

Man wählt daher den Parameter m zweckmäßig etwas größer als 1, aber nicht so groß, daß im Durchlaßbereich nennenswerte Betriebsdämpfungen auftreten.

Eine möglichst gleichmäßige Durchlässigkeit ist auch mit Rücksicht auf die Einschwingvorgänge erwünscht (vgl. den Abschnitt XV).

Nach Wahl des Parameters m kann man die wahre Lochbreite des Durchlaßbereichs noch in weiten Grenzen ändern; denn das Frequenzmaß U ist ja dem praktisch allein maßgebenden Frequenzmaß $\eta - 1/\eta$ nur proportional.

Hier tritt die Frage auf, was vom Standpunkt der Theorie der Betriebsdämpfung aus unter der „Lochbreite“ zu verstehen ist. Am besten ist es, zu sagen, daß die Lochgrenzen dort liegen, wo die Betriebsdämpfung um einen willkürlich festgesetzten Neperwert größer ist als innerhalb des Lochs, also z. B. — unter Berücksichtigung der Wirkdämpfung — in der Lochmitte.

Im § 306 haben wir festgestellt, daß die Betriebsdämpfung

bei $m = 1$ für $U = 1$ auf 0,35 Neper,

bei $m = \sqrt{2}$ für $U = \sqrt{2}$ auf 0,20 Neper,

bei $m = 2$ für $U = 2$ auf 0,11 Neper

gestiegen ist. An den theoretischen Lochgrenzen ($U = m$) ist also die Dämpfung noch ziemlich klein: man wird daher praktisch den Durchlaßbereich als noch etwas breiter ansehen dürfen.

Wir wollen das Doppelsieb des § 295 von neuem berechnen unter der Annahme, wir hätten uns für den Wert $m = \sqrt{2}$ und eine Dämpfung an den Lochgrenzen von $\approx 0,5$ Neper entschieden. Dann geht aus (1162) hervor, daß \bar{U} (wir wollen alle auf die obere Grenze bezüglichen Größen durch Überstreichen kennzeichnen) etwas größer als 1,6 gewählt werden kann. Denn für $U = 1,60 = 1,13 m$ wird die Betriebsdämpfung gleich

$$b = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{U^2}{4} - \frac{U^4}{2} + \frac{U^6}{4} \right) = 0,47. \quad (1168)$$

Wählen wir $\bar{U} = 1,60$, so folgt aus (1154)

$$\frac{\omega_m L_1}{2 R_e} \left(\bar{\eta} - \frac{1}{\bar{\eta}} \right) = 1,60. \quad (1169)$$

Nun ist $\bar{\eta}$ immer vorgeschrieben. Wir setzen $\bar{\eta} = 850/800$. Dann kann man zunächst L_1 berechnen:

$$L_1 = 3,20 \frac{1600 \Omega}{2 \pi \cdot 800 \text{ Hz} \left(\frac{8,5}{8} - \frac{8}{8,5} \right)} = 8,4 \text{ H}. \quad (1170)$$

¹ Goering, H.: Arch. Elektrot. 17, 316 (1927).

Weiter ergibt sich C_1 aus

$$C_1 = \frac{1}{4 \pi^2 f_m^2 L_1} = 4,7 \text{ nF}, \quad (\text{II71})$$

L_2 aus

$$L_2 = \frac{m^2 R_e^2}{4 \pi^2 f_m^2 L_1} = m^2 C_1 R_e^2 = 24 \text{ mH}, \quad (\text{II72})$$

endlich C_2 aus

$$C_2 = \frac{1}{4 \pi f_m^2 L_2} = 1,6 \text{ } \mu\text{F}. \quad (\text{II73})$$

Bei dem so berechneten Doppelsieb ist die Betriebsdämpfung an den vorgeschriebenen Grenzen 750 Hz und 850 Hz annähernd gleich 0,5 Neper; zwischen den Nullstellen steigt sie an keiner Stelle höher als auf 0,0182 Neper.

Wir sind bei dieser Berechnung auf etwas andere Werte für die Elemente des Siebs geführt worden als im § 295; das rührt hauptsächlich davon her, daß wir hier nicht $m = 1$, sondern $m = \sqrt{2}$ gesetzt haben.

§ 309. Die Betriebsdämpfung bei anderen Siebformen. Wenn bei dem Doppelsieb die Betriebsdämpfung verhältnismäßig leicht diskutiert werden kann, so ist dies dem Umstand zu verdanken, daß sich seine Parameter als Funktionen des einen Frequenzmaßes U darstellen lassen. Bei dem einfachen Sieb des § 298 dagegen läßt sich zwar auch R als Funktion von U hinschreiben; G' dagegen nur als Funktion von ω oder η selbst. Man muß also entweder die Betriebsdämpfung als Funktion von ω oder η diskutieren, was umständlich ist; oder man muß sich bei der Diskussion auf einen so schmalen Frequenzbereich in der Nähe der Resonanz beschränken, daß in G' das Frequenzmaß $\eta = 1$ gesetzt werden kann. Riegger hat den letzteren Weg eingeschlagen und gefunden, daß z. B. bei dem in den §§ 298, 299 und 300 behandelten Filter die Betriebsdämpfung in der Mitte des Durchlaßbereichs unter den gewöhnlichen Anpassungsverhältnissen keine Nullstelle, sondern ein Maximum hat; es gibt nur zwei Nullstellen, sie liegen symmetrisch zur Lochmitte.

Auch hier kann man die beiden Nullstellen der Betriebsdämpfung leicht mit Hilfe der Wellenwiderstandskurve finden; sie liegen dort, wo diese von einer in der Höhe R_e gezogenen Horizontale geschnitten wird.

Sind die Elemente des Einfachfilters zum Dreieck geschaltet, so ist nur noch eine einzige schwingungsfähige Masche vorhanden; die Schaltung besteht also nicht mehr wie bei dem Stern oder beim Doppelsieb aus 2 oder 3 miteinander gekoppelten Schwingungskreisen. Da nun das Auftreten von mehr als einer Nullstelle der Betriebsdämpfung nichts weiter als die Folge der engen Kopplung mehrerer schwingungsfähiger Maschen ist, kann man von vornherein erwarten, daß beim einzelnen Dreieck in keinem Falle mehr als eine einzige Nullstelle der Betriebsdämpfung auftritt. Dies wird durch die genaue Rechnung bestätigt.

Man kann diesen Schluß auch aus der Abb. 277 (§ 299) ziehen, die den Frequenzgang des Wellenwiderstands eines Filters nach Abb. 273, aber in Dreiecksform, darstellt: eine Horizontale in der Höhe R_e kann diese Kurve im Durchlaßbereich nur einmal schneiden.

Die in den §§ 296 bis 300 abgeleitete einfache Filtertheorie, die für die Dreiecksschaltung denselben Verlauf der Vierpoldämpfung liefert wie für die Sternschaltung, scheint demnach irrezuführen. Es ist jedoch zu beachten, daß ein Filter nur dann wirksam werden kann, wenn sein Scheinwiderstand im Durchlaßbereich niedrig, im Sperrbereich hoch ist. Dieser Forderung entspricht nach den Abb. 276 und 277 wohl die Sternschaltung, aber nicht die Dreiecksschaltung. Auch die einfache Filtertheorie legt daher den Schluß nahe, daß eine einzelne Dreiecksschaltung als Filter nicht zu gebrauchen ist.

§ 310. Symmetrische verlustfreie Wellenfilter zwischen gleichen frequenzunabhängigen reinen Widerständen. Wir wollen in diesem Paragraphen einige Gesetzmäßigkeiten ableiten, die für Filter von der in der Überschrift genannten Art gelten. Innerhalb des Durchlaßbereichs jedes verlustfreien Filters kann man $\mathfrak{C} \circ \mathfrak{f} g = \cos a$, $\mathfrak{S} \text{in} g = j \sin a$ setzen. Außerdem ist nach § 299 der Wellenwiderstand dort immer als reell ($= Z$) anzusehen. Es gilt also, wenn $\mathfrak{s} = 1$, $\mathfrak{R}_a = \mathfrak{R}_e = R_e$ ist, für die Betriebsdämpfung [mit der Gleichung (498) des § 166]

$$\begin{aligned} \mathfrak{b} &= \ln \left| \frac{R_e}{2 \mathfrak{R}} + \mathfrak{C} \circ \mathfrak{f} g + \frac{Z^2}{2 \mathfrak{R} R_e} \right| \\ &= \ln \left| \frac{R_e}{2 Z} j \sin a + \cos a + \frac{Z}{2 R_e} j \sin a \right| \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\cos^2 a + \frac{1}{4} \left(\frac{R_e}{Z} + \frac{Z}{R_e} \right)^2 \sin^2 a \right) \end{aligned} \quad (\text{II74})$$

oder

$$b = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{R_e}{Z} - \frac{Z}{R_e} \right)^2 \sin^2 a \right). \quad (1175)$$

Aus dieser in ähnlicher Form von Goering¹ abgeleiteten Gleichung erkennt man, daß bei jedem Filter der angegebenen Art Nullstellen der Betriebsdämpfung auftreten, und zwar bei den Sattelfrequenzen, bei denen ja a gleich einem Vielfachen von 180° ist, und außerdem noch bei den Frequenzen, für die das Filter an den Verbraucher angepaßt ist ($R_e = Z$). Die Lochgrenzen, an denen Z gleich Null oder gleich Unendlich wird, müssen jedoch bei dieser Überlegung außer Betracht bleiben.

Beim Doppelsieb z. B. durchläuft das Winkelmaß 360° . Eine Nullstelle der Betriebsdämpfung liegt also bei der mittleren Sattelfrequenz ($a = 180^\circ$); außerdem fallen Betriebs- und Vierpoldämpfung (für $m > 1$) noch zusammen bei den beiden Frequenzen, für die angepaßt ist. Deshalb haben wir für die Betriebsdämpfung des dreimaschigen Doppelsiebs im ganzen drei Nullstellen gefunden.

Da $\sin^2 a$ höchstens gleich 1 werden kann, ist nach (1175) die Betriebsdämpfung bei allen Frequenzen des Durchlaßbereichs kleiner als die Frequenzfunktion

$$b' = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{R_e}{Z} - \frac{Z}{R_e} \right)^2 \right) = \ln \left(\frac{1}{2} \left(\frac{R_e}{Z} + \frac{Z}{R_e} \right) \right), \quad (1176)$$

höchstens ebenso groß. Die Frequenzabhängigkeit von b' läßt sich aber sehr leicht auf Grund der Wellenwiderstandskurve zeichnen; in Abb. 281 ist dies für ein

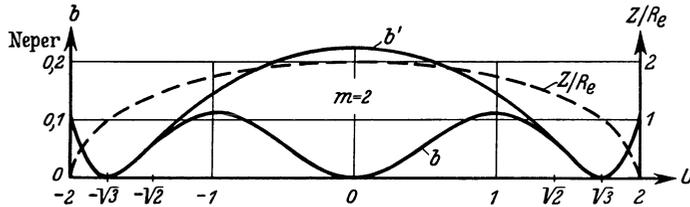


Abb. 281.

Doppelsieb geschehen. Man sieht, daß diese (ebenfalls von Goering angegebene) obere Grenzkurve, wenn die Nullstellen gefunden sind, einen Anhalt dafür gibt, wie hoch die Maxima der Betriebsdämpfung im Durchlaßbereich höchstens ansteigen

Die Betriebsdämpfung und die Dämpfung b' fallen bei den Trichterfrequenzen zusammen ($a = 90^\circ, 270^\circ \dots$). Dort gilt also für die Betriebsdämpfung die besonders einfache Formel (1176). Die zugehörigen Werte stellen annähernd die Höchstwerte der Betriebsdämpfung im Durchlaßbereich dar.

Die Gleichung (1175) für die Betriebsdämpfung enthält nur die drei Veränderlichen b , $Z/R_e = \sqrt{y}$ und $\sin a = \sqrt{x}$. Da Z und a als durch die besondere Theorie des betreffenden Filters gegebene Funktionen der Frequenz anzusehen sind, kann man eine von dieser besonderen Theorie unabhängige zeichnerische Darstellung der Betriebsdämpfung nur geben, wenn man bei den genannten drei Veränderlichen bleibt, also etwa die Kurven

$$x = \frac{4y}{(1-y)^2} (e^{2b} - 1) \quad (0 < x < 1) \quad (1177)$$

mit der Betriebsdämpfung b als Parameter zeichnet (Abb. 282, ausgezogene Kurven). Sind dann auf Grund der besonderen Theorie des betreffenden Filters

¹ Goering, H.: Arch. Elektrot. 17, 316 (1927).

die Beziehungen $y = \varphi_1(\eta)$ und $x = \varphi_2(\eta)$ bekannt, so kann man eine Kurve $y = \psi(x)$ (in Abb. 282 gestrichelt) in die allgemeine Darstellung der Betriebsdämpfung eintragen. Setzt man an die einzelnen Punkte dieser Kurve die zugehörigen Frequenzen oder Frequenzmaße η , so gibt der Verlauf dieser Punktreihe durch die Kurven konstanter Betriebsdämpfung hindurch ein Bild der Frequenzabhängigkeit der Betriebsdämpfung. In Abb. 282 ist die gestrichelte Kurve nach den Gleichungen (III8) und (III) mit den Werten $\kappa = 0,2$, $R_e = 0,07/\eta_0 \cdot \sqrt{L_1/C_1}$ konstruiert.

Ist das betrachtete Filter im besondern ein Grundfilter in Stern- oder Dreieckschaltung, so kann man nach § 293 Z/k sowohl wie a als Funktionen von R'/k allgemein berechnen. Man darf dann (II75) als eine Gleichung zwischen den Größen b , R_e/k und R'/k ansehen und etwa R'/k als Abszisse, R_e/k als Ordinate, b als Parameter wählen.

Eine solche Darstellung für ein Grundfilter in Dreieckschaltung ist in Abb. 283 wiedergegeben¹. Man erkennt, daß bei Wahl von Abschlußwiderständen $R_e \approx 1,5 k$ die Betriebsdämpfung im Durchlaßbereich besonders konstant ist und daß bei weiterer Steigerung von R_e die beiden Maxima der Betriebsdämpfung im allmählich anwachsen. Mit unseren Darlegungen im § 307 stehen diese Ergebnisse nicht im Widerspruch, da die Wellenwiderstandskurven bei den Dreiecksgliedern in der Mitte des Durchlaßbereichs zu einem Minimum absinken (vgl. § 293), so daß sich günstigste Abschlußwiderstände ergeben, die größer als k sind.

In den Sperrbereichen der Wellenfilter kann man $\mathcal{O}f g = e^g/2$ und $\mathcal{I}/\mathcal{M}t = e^g/(2jZ')$ setzen, so daß

$$\begin{aligned}
 b &= b + \ln \left| \frac{1}{2} \left(\frac{R_e}{j2Z'} + 1 + j \frac{Z'}{2R_e} \right) \right| \\
 &= b + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} \left(\frac{R_e}{Z'} - \frac{Z'}{R_e} \right)^2 \right) \\
 &= b + \ln \left(\frac{1}{4} \left(\frac{R_e}{Z'} + \frac{Z'}{R_e} \right) \right). \quad (II78)
 \end{aligned}$$

Die Betriebsdämpfung ist hiernach zwischen $Z' = R_e/(2 + \sqrt{3}) = 0,27 R_e$ und $Z' = R_e/(2 - \sqrt{3}) = 3,7 R_e$ kleiner als die Vierpoldämpfung, im übrigen jedoch größer als sie.

¹ Nach R. Feldtkeller: Elektr. Nachr.-Techn. 5, 145, insbes. 157 (1928).
Wallot, Schwachstromtechnik.

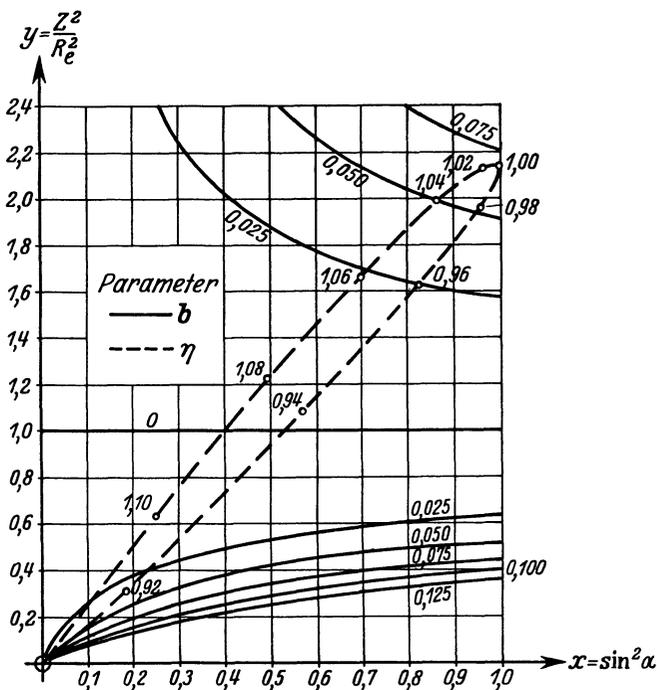


Abb. 282.

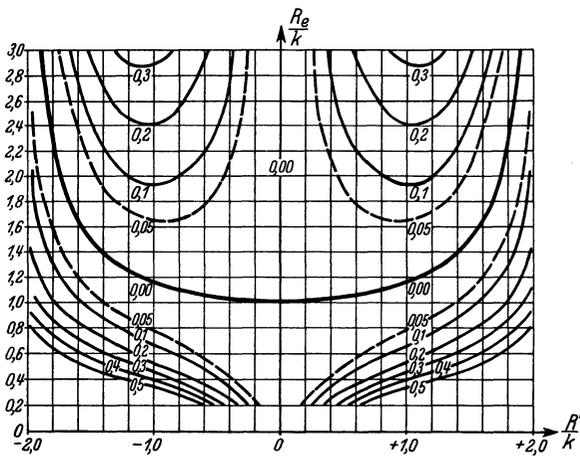


Abb. 283.

XIV. Nachbildungen und verwandte Kunstschaltungen.

§ 311. **Zweiwegverstärker.** Die Verstärkerröhren verstärken nur in einer Richtung. Ein Fernsprechverkehr über Verstärker in beiden Richtungen ohne Umschaltung auf Sprechen oder Hören ist daher nur mit besonderen Schaltungen möglich.

Abb. 284 zeigt — unter Weglassung aller zunächst nicht unbedingt nötigen Schaltelemente — eine Form der bei längeren Fernsprechverbindungen üblichen Zwischenverstärker. Der obere Verstärker 1 verstärkt von links nach rechts,

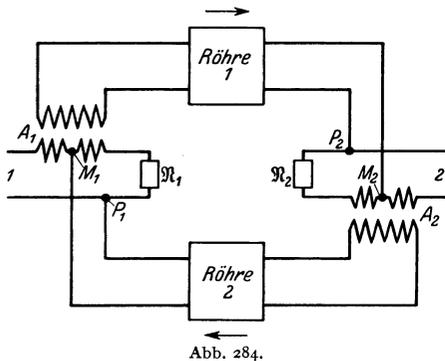


Abb. 284.

der untere 2 von rechts nach links. Die Energie der Sprechströme wird durch „Ausgleichsübertrager“ A_1 und A_2 auf die Gitter der Röhren übertragen. Diese Übertrager bestehen aus je einer primären und einer sekundären Wicklung auf demselben Kern; die Mittlen M_1 und M_2 ihrer primären Wicklungen und die jenseits der Kunstschaltungen \mathfrak{N}_1 und \mathfrak{N}_2 liegenden Punkte P_1 und P_2 sind mit den Ausgängen der in der umgekehrten Richtung wirkenden Verstärker verbunden.

Wird auf der Seite 1 gesprochen, so führen die beiden Hälften der primären

Wicklung des Übertragers A_1 Strom derselben Richtung, wenn auch verschiedener Stärke; es entsteht daher in seiner sekundären Wicklung ähnlich wie bei einem gewöhnlichen Übertrager ein induzierter Strom. Dieser wird in der Röhre 1 verstärkt.

Auf der Seite 2 spaltet sich der verstärkte Strom in zwei Teilströme: der eine fließt in die auf der Seite 2 abgehende Leitung, der andere durchfließt die Kunstschaltung \mathfrak{N}_2 . Ist der Scheinwiderstand der Leitung für alle Frequenzen gleich dem Scheinwiderstand der Kunstschaltung, so werden die beiden primären Wicklungshälften des Ausgleichsübertragers A_2 von gleichen, aber entgegengesetzten Strömen durchflossen: sein Kern bleibt unmagnetisch und seine sekundäre Wicklung stromlos. Es tritt also nur der Verstärker 1 in Tätigkeit.

Entsprechend verstärkt der Verstärker 2 ein von der Seite 2 kommendes Gespräch, ohne daß der Verstärker 1 in Tätigkeit träte. Freies Gegengesprechen ist also möglich.

Stimmen die Scheinwiderstände der beiden Leitungen und der Kunstschaltungen \mathfrak{N} nur unvollkommen miteinander überein, so fließt, wenn von der Seite 1 her gesprochen wird, ein schwacher durch A_2 übertragener Steuerstrom auf das Gitter der Röhre 2, wird verstärkt und kann nun seinerseits wieder über den Ausgleichsübertrager A_1 die Röhre 1 beeinflussen usw. Durch eine derartige immer wiederholte „Rückkopplung“ kann der Zwischenverstärker schließlich zum Sender werden; er erregt sich, pfeift (§ 209).

Da dies vermieden werden muß, sucht man die Scheinwiderstände der Leitungen und der Kunstschaltungen \mathfrak{N} für alle wichtigen Frequenzen so genau wie möglich gleichzumachen. Der beschriebene Zweiwegverstärker stellt also der Technik die Aufgabe, den Frequenzgang eines Scheinwiderstands mit möglichst großer Genauigkeit durch den Frequenzgang einer Kunstschaltung nachzubilden. Mit den Methoden, die zur Lösung dieser Aufgabe entwickelt worden sind, werden wir uns in diesem Abschnitt zunächst beschäftigen.

Die entwickelten Kunstschaltungen können natürlich auch bei Messungen an Leitungen als Endabschlüsse verwendet werden, wenn es darauf ankommt, in einem möglichst breiten Frequenzbereich anzupassen.

Ersetzt man die beiden Hälften des Ausgleichsübertragers gemäß Abb. 157 (§ 175) je durch die gleichwertige Sternschaltung — eine Umwandlung, deren Zulässigkeit allerdings genau genommen besonders bewiesen werden muß —, so erhält man eine gewöhnliche Brückenschaltung. Bei dieser spielt der verstärkte Strom die Rolle des Speisestroms, der rückgekoppelte die des Brückenstroms. Der Zwischenverstärker kann sich nicht erregen, wenn die beiden Brücken für alle Frequenzen im Gleichgewicht sind.

Nach unserer Ableitung muß eigentlich der Scheinwiderstand nachgebildet werden. Wir haben aber früher gesehen (vgl. § 221), daß die Frequenzabhängigkeit der Scheinwiderstände von Leitungen viel komplizierter ist als die der Wellenwiderstände. Andererseits müssen meist lange und angepaßt beschaltete Leitungen nachgebildet werden. Man begnügt sich daher fast immer mit der Nachbildung des Wellenwiderstands.

Auch die Aufgabe der Nachbildung des Wellenwiderstands ist häufig unlösbar; denn der Frequenzgang der Wellenwiderstände ist, wie wir im § 260 gesehen haben, besonders in der Nähe der Grenzfrequenz außerordentlich empfindlich gegen wenn auch kleine Störungen in der Gleichmäßigkeit des Aufbaus der Leitungen. In der neueren Zeit legt man die Grenzfrequenz so hoch, daß im Bereich der wesentlichen Frequenzen nur geringe Schwankungen vorkommen, die die Nachbildbarkeit nicht erheblich beeinträchtigen.

§ 312. Nachbildung des Wellenwiderstands gleichmäßiger Leitungen. Bei Freileitungen, zu denen auch die Krarupkabel zu rechnen sind, hängt nach § 219 der Wellenwiderstand nur wenig von der Frequenz ab. Vernachlässigt man die Ableitung und das Quadrat des Verlustwinkels ϵ , so kann man

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{L}{C} \left(1 - j \frac{R}{\omega L}\right)} \approx \sqrt{\frac{L}{C}} - j \frac{R}{2\omega \sqrt{LC}} \quad (1179)$$

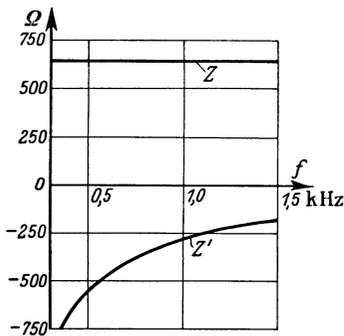


Abb. 285.

schreiben. Der hierdurch dargestellte Frequenzgang (Abb. 285) stimmt genau mit dem einer Reihenschaltung von Widerstand und Kapazität überein (Abb. 286):

$$R_0 - j \frac{1}{\omega C_0} \quad (1180)$$

Man hat also eine gute Nachbildung, wenn man

$$R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (1181)$$

$$\frac{1}{C_0} = \frac{R}{2 \sqrt{LC}} \quad (1182)$$

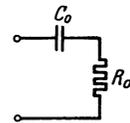


Abb. 286.

wählt. Diese Dimensionierungsvorschrift ist von Hoyt schon im Jahre 1913 angegeben worden¹.

Bei der in den §§ 216 und 219 betrachteten 4-mm-Freileitung erhält man z. B. $R_0 = 545 \Omega$, $C_0 = 2,2 \mu F$.

Die Frequenzabhängigkeit des Wellenwiderstands der gleichmäßigen Leitungen ist nicht immer so einfach. Setzt sich eine Leitung z. B. aus Freileitungs- und Kabelstücken zusammen, so nimmt nach der Gleichung (724) des § 219 im allgemeinen auch der reelle Teil ihres Wellenwiderstands mit steigender Frequenz ab. Dann benutzt man als Nachbildung eine kompliziertere Schaltung, z. B. die „Treppenschaltung“ Abb. 287, und berechnet sie so, daß ihr Scheinwiderstand für bestimmte wichtige Frequenzen mit dem gemessenen Wellenwider-

¹ Vgl. R. S. Hoyt: Bell Syst. Techn. J. 2, Nr. 2, 1 (1923).

stand der nachzubildenden Leitung übereinstimmt¹. Natürlich gelingt dies nur, wenn die Schaltung den gegebenen Frequenzgang überhaupt darstellen kann und aus genügend vielen Elementen besteht. Weitere sehr reichhaltige Angaben über die Nachbildung gleichmäßiger Leitungen findet man bei Hoyt a. a. O.

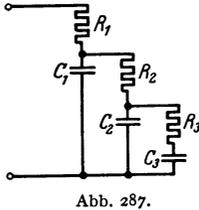


Abb. 287.

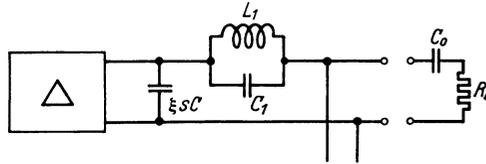


Abb. 288.

§ 313. Umbildung des Wellenwiderstands von Pupinkabeln. Der im § 257 abgeleitete Frequenzgang des Wellenwiderstands eines verlustarmen Pupinkabels, das mit einem halben Spulenfeld beginnt und endet, ist wesentlich schwieriger nachzubilden als der des Wellenwiderstands einer gleichmäßigen Leitung.

Durch einen quergeschalteten Kondensator (Abb. 288) kann man jedoch den Wellenwiderstand des Pupinkabels so umbilden, daß er sich leichter nachbilden läßt; denn der Leitwert des Kondensators wächst mit steigender Frequenz, er kann also den Anstieg des Wellenwiderstands des Kabels bis zu einem gewissen Grade kompensieren.

Wir wollen die Gesamtkapazität, auf die das Endspulenfeld des Kabels durch die Querschaltung des Kondensators gebracht wird, in Übereinstimmung mit den Bezeichnungen des § 259 $x s C$ nennen und zunächst $x < 1$ voraussetzen. Die Querkapazität selbst ist dann $(x - 1/2) s C = \xi s C$, und der Scheinwiderstand der ganzen nachzubildenden Schaltung ergibt sich wie im § 259 zu:

$$\Re = \frac{\sqrt{1 - \eta^2} - j(2x - 1)\eta}{1 - 4x(1 - x)\eta^2} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (1183)$$

Wählt man nun $x = 5/6$, also $\xi = 1/3$, so wird $4x(1 - x) = 5/9$, $2x - 1 = 2/3$ und daher:

$$\Re = \frac{\sqrt{1 - \eta^2} - j\frac{2}{3}\eta}{1 - \frac{5}{9}\eta^2} \sqrt{\frac{L}{C}} \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \left(1 + \frac{\eta^2}{18}\right) - j \frac{\frac{\omega}{3} s L}{1 - \frac{5\omega^2 s^2 L C}{36}}, \quad (1184)$$

wenn man bei dem reellen Teil höhere Potenzen von η^2 vernachlässigt. Schaltet man demnach dem Kabel einen Kondensator von der Kapazität $0,333 s C$ quer, so kann man bis zu hohen Frequenzen hinauf den reellen Teil der Zusammenschaltung sehr nahe durch einen frequenzunabhängigen reinen Widerstand $R_0 = \sqrt{L/C}$ nachbilden (Abb. 288; vgl. § 259). Der imaginäre Teil aber kann kompensiert werden durch eine längsliegende schwingungsfähige Masche L_1, C_1 (Abb. 288); denn deren Widerstand ist

$$+ \frac{j \omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1},$$

man braucht also nur

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \frac{sL}{3} = 0,333 s L, \\ C_1 &= \frac{5 s^2 L C}{36 L_1} = \frac{5 s C}{12} = 0,417 s C \end{aligned} \right\} \quad (1185)$$

zu wählen.

¹ Eine Näherungskonstruktion bei F. Strecker: Tel.- u. Fernspr.-Techn. 17, 329 (1928).

Der Gedanke, eine Kapazität quer zu schalten, die den reellen Teil des Kabelwellenwiderstands zu einem nahezu frequenzunabhängigen Widerstand umbildet und den hinzukommenden Blindteil durch eine schwingungsfähige Masche wieder aufzuheben, liegt einem Patent von Küpfmüller zugrunde (1919).

Bei einem verlustbehafteten Pupinkabel bleibt nach der Umbildung noch eine schwache, der Frequenz umgekehrt proportionale kapazitative Komponente zurück, die sich wie bei der Freileitung durch einen Kondensator C_0 in Reihe mit dem Widerstande R_0 nachbilden läßt (Abb. 288).

§ 314. Unmittelbare Nachbildung von Pupinkabeln nach Hoyt. Die Gleichung (1183) gilt auch für den Fall, daß man das Endspulenfeld verkürzt, also für $x < 1/2$. Man schreibt dann besser

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &= \frac{\sqrt{1 - \eta^2 + j(1 - 2x)}}{1 - 4x(1-x)\eta^2} \sqrt{\frac{L}{C}} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{1 - 4x(1-x)\eta^2} \sqrt{\frac{L}{C}} + j \frac{\omega(\frac{1}{2} - x) s L}{1 - x(1-x)\omega^2 s^2 L C} \end{aligned} \quad (1186)$$

Auch jetzt kann man durch geeignete Wahl des Faktors x den reellen Teil von \mathfrak{R} annähernd frequenzunabhängig machen; der imaginäre ist aber nicht (wie vorher) entgegengesetzt gleich, sondern unmittelbar gleich dem Scheinwiderstand einer schwingungsfähigen Masche L_1, C_1 . Man kann das verkürzte Kabel also unmittelbar nachbilden durch einen Widerstand R_0 und eine mit ihm in Reihe liegende schwingungsfähige Masche (Abb. 289). Für die Dimensionierung gelten die allgemeinen Regeln:

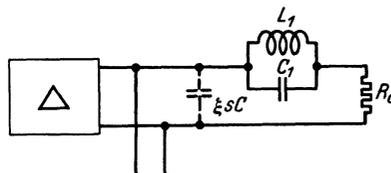


Abb. 289.

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= \sqrt{\frac{L}{C}}, & L_1 &= \left(\frac{1}{2} - x\right) s L, \\ C_1 &= \frac{x(1-x) s^2 L C}{L_1} = \frac{x(1-x)}{\frac{1}{2} - x} s C. \end{aligned} \right\} \quad (1187)$$

Wählt man $x = 0,2$, so wird

$$L_1 = 0,3 s L, \quad C_1 = 0,533 s C; \quad (1188)$$

der Wirkteil von \mathfrak{R} ist nach (1186)

für $\eta = 0,5$	0,6	0,7	0,8	0,9
um	3,1	4,0	4,1	1,6
				-9,5 %

größer als R_0 .

Nach Hoyt, von dem diese Art der Nachbildung herrührt¹, ist es nicht nötig, das letzte Spulenfeld wirklich zu verkürzen; man kann statt dessen auf der Nachbildungsseite einen Kondensator entsprechender Kapazität $\xi s C = (1/2 - x) s C$ querschalten (Abb. 289). In unserm Beispiel ist $\xi s C$ gleich $0,3 s C$.

Die Scheinfrequenz der schwingungsfähigen Masche ist nach (1186)

$$\omega' = \frac{\omega_0}{2 \sqrt{x(1-x)}}; \quad (1189)$$

sie liegt also immer oberhalb der Grenzfrequenz, für $x = 0,2$ ist sie z. B. gleich $1,25 \omega_0$.

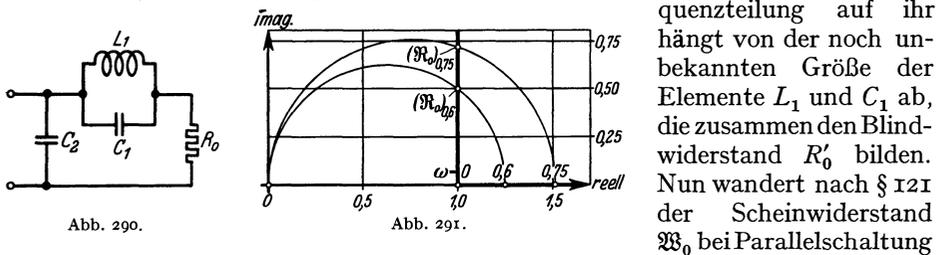
¹ Hoyt, R. S.: Bell Syst. Techn. J. 3, 447 (1924).

§ 315. **Zeichnerische Dimensionierung der Nachbildungen.** Die Werte der Schaltelemente, aus denen eine Nachbildung, z. B. die Hoytsche, zusammengesetzt ist, können auch auf zeichnerischem Wege gefunden werden; man wählt sie so, daß die Scheinwiderstandskurven der Leitung und der Nachbildung bei einigen herausgegriffenen wichtigen Frequenzen genau zusammenfallen.

Wie man das machen kann, zeigen wir in engem Anschluß an ein Beispiel von Strecker und Feldtkeller¹. Wir verwenden dabei Zahlenwertgleichungen; als (spezifische) Einheiten nehmen wir für die Widerstände den Widerstand $\sqrt{L/C}$, für die Frequenzen die Frequenz ω_0 und daher für die Induktivitäten die Induktivität $\sqrt{L/C} \cdot 1/\omega_0 = sL/2$ und für die Kapazitäten die Kapazität $\sqrt{C/L} \cdot 1/\omega_0 = sC/2$.

Wir suchen die Elemente der Nachbildung so zu bestimmen, daß ihr Scheinwiderstand \mathfrak{B}_0 für die beiden willkürlich herausgegriffenen Frequenzzahlenwerte 0,6 und 0,75 gemäß Gleichung (899), § 257, möglichst genau gleich $1/\sqrt{1 - \omega^2}$ wird.

Aus Abb. 290 geht zunächst hervor, daß bei tiefen Frequenzen $\mathfrak{B}_0 \approx R_0$ ist. Da der nachzubildende Scheinwiderstand in demselben Frequenzgebiet den Wert $\sqrt{L/C}$ annimmt, wählt man den Zahlenwert R_0 gleich 1. Der ganze aus R_0 und der schwingungsfähigen Masche bestehende Zweig $\mathfrak{R}_0 = R_0 + jR'_0$ (Abb. 290) wird dann in der komplexen Ebene nach § 118 dargestellt durch eine zu der imaginären Achse parallele Gerade im Abstand 1 (Abb. 291). Die Frequenzteilung auf ihr hängt von der noch unbekanntem Größe der Elemente L_1 und C_1 ab, die zusammen den Blindwiderstand R'_0 bilden.



Nun wandert nach § 121 der Scheinwiderstand \mathfrak{B}_0 bei Parallelschaltung eines Kondensators C_2 auf seinem Reaktanzkreis; R'_0 muß daher für die Frequenzen 0,6 und 0,75 so gewählt werden, daß der zugehörige Reaktanzkreis durch die vorgeschriebenen (gegebenen) reellen Werte $1/\sqrt{1 - \omega^2}$ geht. Man schlägt also über $1/\sqrt{1 - \omega^2}$ für jede der beiden Frequenzen einen Halbkreis; er schneidet jeweils auf der Senkrechten durch den reellen Wert 1 die zugehörige Strecke R'_0 ab. Führt man diese Konstruktion aus (Abb. 291), so erhält man² für $\omega = 0,6$ $R'_0 = 0,500$, für $\omega = 0,75$ $R'_0 = 0,715$.

Es gelten also die beiden Bedingungsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{0,6 L_1}{1 - 0,36 L_1 C_1} &= 0,500, \\ \frac{0,75 L_1}{1 - 0,563 L_1 C_1} &= 0,715, \end{aligned} \right\} \quad (1190)$$

aus denen die Vorschriften

$$L_1 = 0,680, \quad C_1 = 0,749$$

oder, als Größengleichungen geschrieben,

$$L_1 = 0,340 s L, \quad C_1 = 0,375 s C \quad (1191)$$

folgen.

¹ Strecker, F., u. R. Feldtkeller: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. 5, H. 3, 137 (1927).

² Auch rechnerisch kann man die Strecken der beiden Widerstände R'_0 leicht bestimmen, da sie gleich den geometrischen Mitteln der zugehörigen Strecken 1 und $3 - 1$ sind.

Wir sind nun sicher, daß die durch die Punkte $(\Re_0)_{0,6}$ und $(\Re_0)_{0,75}$ gelegten Reaktanzkreise durch die vorgeschriebenen Werte des nachzubildenden Wellenwiderstands gehen. Wir müssen aber noch dafür sorgen, daß der Scheinwiderstand \Re_0 wirklich bis auf die reelle Achse geschoben wird. Da nur noch das eine Element C_2 frei ist, wählen wir es so, daß es den Scheinwiderstand \Re_0 bei der Frequenz 0,75 nach dem Punkt 1,512 schiebt. Dazu ist nur nötig, daß der Blindteil des Leitwerts $1/\Re_0$ durch C_2 gerade kompensiert wird. Der Leitwert $1/\Re_0$ kann aber durch eine Inversion gefunden werden (Abb. 292). Sein Blindteil ist nach Konstruktion gleich $-0,473$; der Zahlenwert von C_2 ergibt sich daher nach

$$C_2 = \frac{0,473}{0,75} = 0,631, \quad (1192)$$

oder in Form einer Größengleichung $C_2 = 0,316 \text{ sC}$.

Man sieht, daß sich nach diesem Verfahren die Faktoren L_1/sL und C_2/sC nicht als gleich groß ergeben. Der Scheinwiderstand der Nachbildung schließt sich infolgedessen besser als im § 314 an den Wellenwiderstand der Leitung an: in dem Frequenzbereich von $\omega = 0,1$ bis 0,8 beträgt der Fehler bei Vernachlässigung der Verluste nur etwa 2,5%¹.

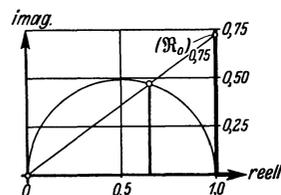


Abb. 292.

§ 316. Endnetzwerke. Die Nachbildungen der §§ 313 und 314 unterscheiden sich — abgesehen von ihrer Dimensionierung im einzelnen — hauptsächlich dadurch voneinander, daß der Querkondensator und die schwingungsfähige Längsmasche — wir wollen beides zusammen den „Zwischenvierpol“ nennen — bei Küpfmüller auf der Leitungsseite, bei Hoyt dagegen auf der Nachbildungsseite liegen. Auf den Zwischenvierpol folgt in jedem Falle ein reiner frequenzunabhängiger Widerstand.

Es läßt sich zeigen, daß die von Küpfmüller und Hoyt benutzten Zwischenvierpole unsymmetrische Vierpole sind, deren Wellenwiderstand von der Seite der Leitung aus gemessen gleich dem gegebenen Wellenwiderstand der Leitung, von der Seite der Nachbildung aus gemessen gleich einem frequenzunabhängigen reellen Widerstand ist. Die Zwischenvierpole lösen demnach das Problem der stoßfreien Verbindung einer Pupinleitung mit einem frequenzunabhängigen reinen Widerstand.

Zobel hat sich² mit der allgemeinen Aufgabe beschäftigt, eine Kette von Vierpolen durch unsymmetrische Vierpole abzuschließen, die den Wellenwiderstand der Kette in einen nahezu frequenzunabhängigen Widerstand umbilden. Um unsymmetrische Vierpole von einfachen Eigenschaften zu gewinnen, denkt er sich eine symmetrische Stern- oder Dreiecksschaltung wie in Abb. 293 in der Mitte durchschnitten. Dadurch entstehen jedesmal zwei Teilvierpole

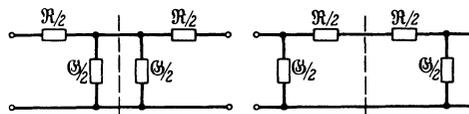


Abb. 293.

$\Re/2, \mathcal{G}/2$, die nach § 164, Gleichung (485) auf der Seite des Längswiderstands $\Re/2$ den Wellenwiderstand \Re_λ der Sternschaltung, auf der Seite des Querleitwerts $\mathcal{G}/2$ den Wellenwiderstand \Re_Δ der Dreiecksschaltung haben.

Ist die abzuschließende Kette eine Grundsternschaltung \Re_0, \mathcal{G}_0 , so ist es natürlich nicht möglich, einen unsymmetrischen Teilvierpol $\Re_0/2, \mathcal{G}_0/2$ zum Abschluß zu verwenden; denn dieser würde den Wellenwiderstand der Sternschal-

¹ Über die Nachbildung verlustbehafteter Leitungen s. F. Strecker u. R. Feldtkeller: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. 5, H. 3, 143 (1927).

² Zobel, O. J.: Bell Syst. Techn. J. 2, Nr. 1, 1 (1923).

tung ja nur in den der Dreiecksschaltung umbilden. Wohl aber kann man aus der Grundsternschaltung $\mathfrak{R}_0, \mathfrak{G}_0$ wie im § 301 einen Teilvierpol $\mathfrak{R}/2, \mathfrak{G}/2$ herleiten, der auf der einen Seite den Wellenwiderstand \mathfrak{Z}_λ , auf der anderen dagegen einen frequenzunabhängigen Wellenwiderstand hat. Um diesen Teilvierpol zu finden, fordert man, daß sich der gesuchte Längswiderstand \mathfrak{R} von \mathfrak{R}_0 nur dem Betrage nach, aber nicht der Art der Schaltung nach unterscheidet, so daß man $\mathfrak{R} = m \mathfrak{R}_0$ setzen kann, wo m eine positive Zahl ist¹. Man bestimmt dann zunächst die Elemente des gesuchten Querleitwerts so, daß die Gleichung (1129) für alle Frequenzen erfüllt ist, daß also der Teilvierpol auf der Seite des Längswiderstands an die Grundsternschaltung genau angepaßt ist. Den Faktor m , der hierbei noch unbestimmt bleibt, wählt man so, daß der Teilvierpol auf seiner anderen Seite einen möglichst konstanten Wellenwiderstand \mathfrak{Z}_Δ hat. Es soll also nach (1129) mit den Abkürzungen

$$\frac{\mathfrak{R}_0 \mathfrak{G}_0}{4} = -\eta^2, \quad \frac{\mathfrak{R}_0^2}{4} = \frac{\mathfrak{R}_0 \mathfrak{R}_0 \mathfrak{G}_0}{4} = -k^2 \eta^2 \quad (1193)$$

der Widerstand

$$\mathfrak{Z}_\Delta = \sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{G}}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}{4}}} = \sqrt{\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{G}}} \frac{\sqrt{1 + \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}{4}}}{1 + \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}{4}} = \frac{k \sqrt{1 - \eta^2}}{1 + \frac{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}{4}}, \quad (1194)$$

möglichst konstant sein. Nun ist aber, wieder nach (1129),

$$\frac{m \mathfrak{R}_0}{\mathfrak{G}} + \frac{m^2 \mathfrak{R}_0^2}{4} = \frac{m \mathfrak{R}_0}{\mathfrak{G}} - m^2 k^2 \eta^2 = k^2 (1 - \eta^2), \quad (1195)$$

also

$$\mathfrak{G} = \frac{m \mathfrak{R}_0}{k^2 (1 - (1 - m^2) \eta^2)}, \quad (1196)$$

und es wird daher

$$\mathfrak{Z}_\Delta = \frac{k \sqrt{1 - \eta^2}}{1 - \frac{m^2 \eta^2}{1 - (1 - m^2) \eta^2}} = k \frac{1 - (1 - m^2) \eta^2}{\sqrt{1 - \eta^2}}. \quad (1197)$$

Der auf die Konstante k als Einheit bezogene Wellenwiderstand \mathfrak{Z}_Δ hängt hiernach nur von der Zahl m und der Größe η^2 ab. Zeichnet man \mathfrak{Z}_Δ/k als Funktion von η^2 für verschiedene Parameter m , so erhält man Kurven ähnlich wie im § 259. Man überzeugt sich leicht, daß \mathfrak{Z}_Δ für $m \approx 0,6$ in einem weiten Frequenzbereiche nahezu konstant gleich k wird.

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß die im Eingang des Paragraphen erwähnten Zwischenvierpole sehr nahe solche Zobel'sche unsymmetrische Endvierpole sind mit $m \approx 0,6$. Für die Spulenleitung in Sternschaltung muß man nach § 301 wählen für $m = 0,6$

$$L_1 = 0,6 L, \quad L_2 = 0,267 L, \quad C_2 = 0,6 C. \quad (1198)$$

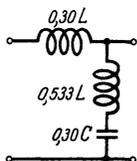


Abb. 294.

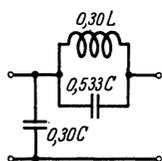


Abb. 295.

Dies bedeutet aber, daß man in der Schaltung Abb. 294 die Längsinduktivität $L_1/2$ gleich $0,30 L$, die Querinduktivität $2 L_2$ gleich $0,533 L$, die Querkapazität $C_2/2$ gleich $0,30 C$ zu wählen hat.

Nun ist in Deutschland die Dreiecksschaltung der Pupinleitungen üblich; bei ihr hat man die dual entsprechende Schaltung Abb. 295 anzuwenden. Deren Dimensionierung stimmt aber mit der Dimensionierung des § 314

¹ Dieselbe Voraussetzung haben wir im § 301 gemacht bei der Anwendung der allgemeinen Methode auf die Spulenleitung.

überein, wenn man $x = 0,2$ setzt; denn dann ist

$$\frac{1}{2} - x = 0,3; \quad \frac{x(1-x)}{\frac{1}{2}-x} = 0,533. \quad (1199)$$

Zwischenvierpole, wie wir sie hier nach Zobel berechnet haben, können nicht nur unmittelbar bei der Nachbildung von Pupinkabeln verwendet werden; sie sind vielmehr auch unentbehrliche Schaltmittel überall dort, wo Vierpole verschiedenen Wellenwiderstands miteinander verbunden werden sollen. Denn der Scheinwiderstand einer Kette von Vierpolen hat einen um so einfacheren und glatteren Frequenzverlauf, ist also um so nachbildbarer, je besser ihre Glieder nach dem Wellenwiderstand aneinander angepaßt sind¹.

§ 317. **Nachbildungen in der Telegraphie.** Auch in der Telegraphie braucht man bei verschiedenen Schaltungen Nachbildungen, z. B. bei den Schaltungen der sogenannten Duplex-telegraphie. Darunter versteht man ein Telegraphieverfahren, bei dem man gleichzeitig in verschiedenen Richtungen über dieselbe Leitung telegraphiert.

Bei der Differentialschaltung² gemäß Abb. 296 werden die beiden Wicklungen des zum eigenen Amt gehörigen polarisierten Empfangsrelais von dem Sendestrom in entgegengesetztem Sinne durchlaufen, so daß sein Anker in Ruhe bleibt. Auf dem fernen Amte dagegen verzweigt sich der Empfangsstrom, nachdem er die eine Wicklung durchflossen hat: nur ein schwacher Teil von ihm geht — noch dazu im gleichen Sinn — durch die andre Wicklung, der Rest fließt über die Taste zur Erde ab, so daß das Relais betätigt wird. Gleichheit der Ströme, die durch die beiden Wicklungen auf der Sendeseite fließen, wird durch eine Nachbildung N_1 erreicht, deren Scheinwiderstand bei den verschiedenen in den Telegraphierzeichen enthaltenen Frequenzen gleich dem Scheinwiderstand des nach dem fernen Amte führenden Zweiges ist.

Zur Nachbildung verwendet man Kombinationen aus Widerständen und Kapazitäten, z. B. „Treppenschaltungen“, oder Kettenleiter.

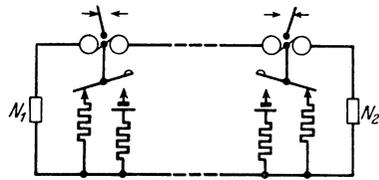


Abb. 296.

§ 318. **Leitungsverlängerungen.** In den §§ 312 bis 317 haben wir überall Zweipole nachgebildet. In der Schwachstromtechnik tritt aber auch die Aufgabe auf, Vierpole, insbesondere Leitungen nachzubilden, und zwar nicht nur (wie bei den Eichleitungen) zu Meßzwecken. So muß z. B., wenn aus örtlichen Gründen der Abstand zweier Verstärkerämter zu klein ist, das fehlende Leitungsstück durch eine Kunstschaltung ersetzt werden.

Bei solchen Nachbildungen handelt es sich im allgemeinen nur um die Nachbildung der Dämpfung und des Betrages des Wellenwiderstands; man läßt es zu, daß das Winkelmaß und die Phase des Wellenwiderstands der Nachbildungen von den Werten der Leitungen selbst abweichen.

Ein gewöhnliches Kabel kann beispielsweise durch die Kunstschaltung Abb. 297 nachgebildet werden³. Da der Leitwert des Querkondensators mit wachsender Frequenz größer wird, nimmt die Dämpfung dieser Kunstschaltung mit steigender Frequenz zu, der Wellenwiderstand ab, wie es beim wirklichen Kabel der Fall ist.

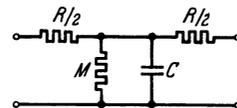


Abb. 297.

Ein Pupinkabel in Dreiecksform kann in dieser Weise nicht nachgebildet werden, da der Betrag seines Wellenwiderstands im Durchlaßbereich mit steigender Frequenz zunimmt. Man kann jedoch z. B. den Querkondensator durch eine Längsinduktivität ersetzen (Abb. 298); denn infolge ihrer Drosselwirkung steigen dann Dämpfung und Wellenwiderstand

¹ Vgl. R. S. Hoyt: Bell Syst. Techn. J. 3, 446 (1924).

² Eine andre Duplexschaltung beruht auf dem Prinzip der Wheatstoneschen Brücke.

³ Breisig, F.: Verhandl. Dtsch. Physik. Ges. 12, 185 (1910).

mit wachsender Frequenz. Man paßt solche Schaltungen punktweise an; je mehr Elemente sie enthalten, um so genauer kann man sie anpassen, um so schwieriger wird aber auch die Rechnung¹.

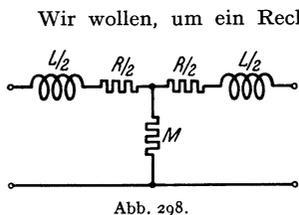


Abb. 298.

Wir wollen, um ein Rechenbeispiel zu geben, die Schaltung Abb. 298 etwas genauer untersuchen. Da sie aus drei Elementen R, M, L besteht, kann man drei Bedingungen vorschreiben. Wir fordern z. B. für die Frequenzen ω_1 und ω_2 bestimmte Dämpfungen b_1 und b_2 , für die Frequenz ω_3 einen bestimmten Betrag des Wellenwiderstandes $|\mathfrak{Z}_3|$.

Für das Übertragungsmaß zunächst gilt allgemein

$$\cos g = 1 + \frac{R + j \omega L}{2 M}; \tag{1200}$$

von den beiden hierin steckenden Gleichungen verwenden wir aber nur die eine

$$\left(1 + \frac{R}{2 M}\right)^2 + \left(\frac{\omega L}{2 M}\right)^2 = 1, \tag{1201}$$

die sich wie im § 161 ergibt. Da sie für ω_1 und b_1 , aber auch für ω_2 und b_2 erfüllt sein soll, hat man zwei Bedingungen, aus denen sich die Unbekannten $1 + R/2M$ und $L/2M$ berechnen lassen. Eine dritte Bedingung zur Bestimmung der drei Unbekannten R, M, L steht dann in der Gleichung

$$|\mathfrak{Z}_3| = \left(\sqrt{\frac{\Re}{\Im}} \sqrt{\left|1 + \frac{\Re \mathfrak{G}}{4}\right|} \right)_{\omega_3} \tag{1202}$$

zur Verfügung.

Es sei z. B. die Aufgabe gestellt, ein 0,9-mm-Pupinkabel von 10 km Länge so nachzubilden, daß

$$\begin{aligned} \text{für } \omega_1 &= 5/\text{ms} & b_1 &= 0,186, \\ \text{für } \omega_2 &= 10/\text{ms} & b_2 &= 0,210, \\ \text{für } \omega_3 &= 7/\text{ms} & |\mathfrak{Z}_3| &= 1875 \Omega. \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \cos b_1 &= 1,017, & \sin b_1 &= 0,187, \\ \cos b_2 &= 1,022, & \sin b_2 &= 0,212, \end{aligned}$$

und es gelten die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 0,966 \left(1 + \frac{R}{2 M}\right)^2 + 7,14 \left(\frac{10^4 L}{2 M \text{ s}}\right)^2 &= 1, \\ 0,957 \left(1 + \frac{R}{2 M}\right)^2 + 22,3 \left(\frac{10^4 L}{2 M \text{ s}}\right)^2 &= 1, \end{aligned}$$

aus denen

$$\left. \begin{aligned} \frac{R}{M} &= 0,030, & (\Re)_{\omega_3} &= (0,030 + j 0,035) M, \\ \frac{L}{M} &= 5,0 \mu\text{s}, & 1 + \frac{\Re \mathfrak{G}}{4} &\approx 1 \end{aligned} \right\} \tag{1203}$$

folgt. Setzt man dies in die Gleichung (1202) ein, so erhält man $M = 8,8 \text{ k}\Omega$ und damit $R = 265 \Omega, L = 43 \text{ mH}$. Natürlich ist die Kunstsaltung im Gegensatz zu dem nachgebildeten Kabel ein induktives Gebilde (vgl. § 235); auch ihr Winkelmaß weicht bei den Frequenzen ω_1 und ω_2 völlig ab von dem Winkelmaß des Kabels.

Besonders vollkommen lassen sich Leitungen mit Hilfe der im § 322 zu besprechenden Schaltungen nachbilden.

§ 319. Dämpfungsausgleich. Mit der Aufgabe der Dämpfungsnachbildung nahe verwandt ist die Aufgabe des Dämpfungsausgleichs, wie sie uns auf dem Gebiete der Fernsprechverstärkertechnik entgegentritt. Es betrage z. B. die bezogene Dämpfung eines 1,4-mm-Pupinkabels bei niedrigen Frequenzen

¹ Vgl. A. Byk: Arch. Elektrot. 20, 533 (1928).

8,6 Neper/Mm; dann beträgt sie nach § 252 bei der Frequenz $0,75 f_0$ etwa 13 Neper/Mm. Wollen wir eine Nachricht auf eine Entfernung von nur 100 km übermitteln, so schadet dieser Frequenzgang der Dämpfung nur wenig: diese zeigt für alle Frequenzen bis hinauf zu der Frequenz $0,75 f_0$ Unterschiede von höchstens 0,5 Neper. Wird aber auf 1000 km gesprochen und sind Verstärker eingebaut, die für alle Frequenzen gleichmäßig eine Dämpfung von 7,3 Neper wieder aufheben, so bleibt für die niedrigen Frequenzen eine Restdämpfung von 1,3 Neper, für die höheren dagegen von 5,7 Neper. Bei frequenzunabhängiger Verstärkung sind also im wesentlichen nur die tiefen Frequenzen wahrnehmbar; die Übertragung ist stark verzerrt.

Hieraus geht hervor, daß bei langen Fernsprechverbindungen der Frequenzgang der Leitungsdämpfung wieder aufgehoben werden muß, und zwar durch „entzerrende“ Vierpole, deren Dämpfung bei tiefen Frequenzen beträchtlich, bei hohen dagegen gering ist.

Das älteste Verfahren zum Dämpfungsausgleich besteht darin, die erste Scheinfrequenz der zu den Verstärkern gehörenden Vorübertrager in das Gebiet

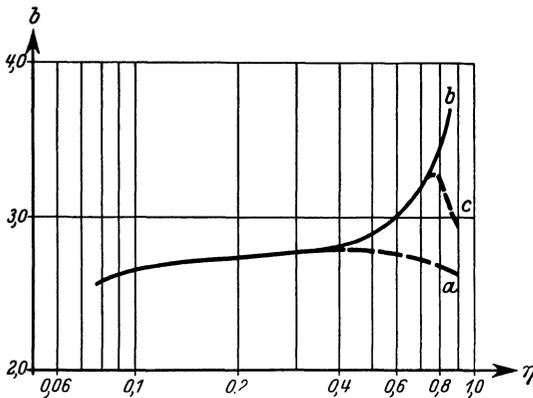


Abb. 299.

der hohen Sprechfrequenzen zu schieben, so daß die im § 184 besprochene Zunahme der Übersetzung der Verstärkung zugute kommt¹.

Die hierdurch erreichbare Entzerrung genügt jedoch nicht. Das Maximum der Übersetzung

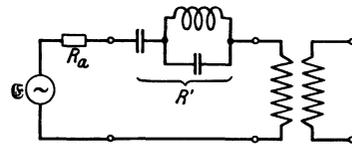


Abb. 300.

des Vorübertragers in der Nähe der ersten Scheinfrequenz verläuft flach und konvex nach oben (Abb. 299, a). Da die Dämpfungskurve eines Pupinkabels im wesentlichen konkav nach oben verläuft (Kurve b, Abb. 299), muß man versuchen, die Übersetzung oberhalb der ersten Scheinfrequenz zu steigern (etwa wie in Kurve c). Dies kann man erreichen durch Zuschaltung eines Blindwiderstands R' in Reihe mit dem Übertrager (Abb. 300). Dieser hat nämlich nach § 176 für die Frequenzen oberhalb seiner ersten Scheinfrequenz f_0 den Charakter einer Kapazität; man kann also bei gegebenem Übertrager leicht einen induktiven Blindwiderstand R' finden, der bei einer Frequenz oberhalb der Scheinfrequenz den Leerlauf-Blindwiderstand W_1' des Übertragers gerade kompensiert.

Stellt der Blindwiderstand R' bei Variation der Frequenz unterhalb von f_0 eine Kapazität dar, oberhalb davon eine Induktivität, so gibt es sogar zwei Frequenzen, eine unterhalb und eine oberhalb von f_0 , bei denen sich R' und W_1' gerade kompensieren, so daß die Übersetzung u_1 (§ 149) durch Resonanz besonders groß wird. Überwiegt in R' die Kapazität, so hat man hohe Übersetzung nur unterhalb von f_0 ; überwiegt in R' die Induktivität, so hat man sie oberhalb davon. Da die Verstärkung nach Abb. 299, c mit steigender Frequenz wachsen soll,

¹ Vgl. K. Höpfner u. B. Pohlmann: Das Fernsprechen im Weitverkehr, S. 63. Berlin: W. Ernst & Sohn 1923.

müssen die Entzerrer vorwiegend induktiven Charakter haben. Eine praktisch verwendete Schaltung zeigt Abb. 300.

Früher hat man Entzerrer gewöhnlich an den Nachübertragern der Röhren angebracht. Man legte z. B. eine Querschaltung nach Abb. 301 vor die weiterführende Leitung. Sie wurde so bemessen, daß in der Nähe von 1300 Hz Spannungsresonanz, in der Nähe von 2450 Hz dagegen Stromresonanz entstand¹. Die Spannungsresonanz machte die Verstärkungskurve konkav nach oben, die Stromresonanz ergab den Anstieg der Verstärkung bei hohen Frequenzen. Ein Nachteil dieser Entzerrer lag in der mangelhaften Ausnutzung der Röhren.

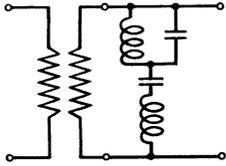


Abb. 301.

§ 320. Vierpolparameter des Kreuzgliedes. In der neueren Zeit haben die sogenannten „Kreuzglieder“ („Brückenglieder“) und die „Brückensternglieder“ („Brücken-T-Glieder“) für die Entzerrung größere Bedeutung gewonnen. Während die Sternschaltungen zwei, die Dreiecksschaltungen drei Knoten enthalten, stellen die Kreuzglieder und die überbrückten Sternglieder die einfachsten (nicht auf dreiknotige zurückführbaren) vierknotigen Gebilde dar.

Wir wollen zunächst die Theorie des Kreuzgliedes ableiten unter der vereinfachenden Voraussetzung, daß die beiden Längs- und die beiden Schrägwider-

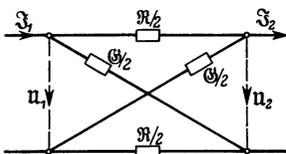


Abb. 302.

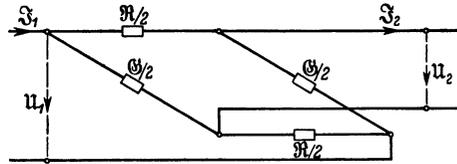


Abb. 303.

stände einander gleich sind (Abb. 302). Nach den Definitionen des Leerlauf- und des Kernwiderstandes ist (vgl. Abb. 303)

$$\mathfrak{R}' = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathfrak{R}}{2} + \frac{2}{\mathfrak{G}} \right), \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\mathfrak{G}} - \frac{\mathfrak{R}}{2} \right), \quad (I204)$$

$$\mathfrak{Z}^2 = \mathfrak{R}'^2 - \mathfrak{M}^2 = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{G}}, \quad (I205)$$

$$\mathfrak{C} \text{ of } g = \frac{4 + \mathfrak{R} \mathfrak{G}}{4 - \mathfrak{R} \mathfrak{G}}, \quad (I206)$$

$$\mathfrak{S} \text{ in } g = \frac{4 \sqrt{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}}{4 - \mathfrak{R} \mathfrak{G}}, \quad (I207)$$

also

$$e^a = e^b \angle a = \frac{(2 + \sqrt{\mathfrak{R} \mathfrak{G}})^2}{4 - \mathfrak{R} \mathfrak{G}} = \frac{2 + \sqrt{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}}{2 - \sqrt{\mathfrak{R} \mathfrak{G}}}. \quad (I208)$$

Bemerkenswert ist besonders, daß der (im allgemeinen frequenzabhängige) Wellenwiderstand des Kreuzgliedes gleich dem „Nennwert“ ist.

Noch einfacher werden die Ergebnisse, wenn man voraussetzt, daß \mathfrak{R} und \mathfrak{G} reine Blindgebilde sind. Haben in einem Frequenzbereich R' und G' dasselbe Vorzeichen, so wird

$$e^b \angle a = \frac{2 + j \sqrt{|R' G'|}}{2 - j \sqrt{|R' G'|}} = \angle 2 \arctg \frac{\sqrt{|R' G'|}}{2}; \quad (I209)$$

haben sie dagegen verschiedene Vorzeichen, so wird

$$e^b \angle a = \frac{2 + \sqrt{|R' G'|}}{2 - \sqrt{|R' G'|}} \angle n \cdot 180^\circ. \quad (I210)$$

¹ Höpfner, K., u. F. Lüschen: Fernkabel H. 9, 35 (1925).

Für die Durchlaß- und Sperrbereiche der Kreuzglieder aus reinen Blindwiderständen gilt demnach eine Regel, die noch einfacher ist als die im § 296 abgeleitete Regel für Stern- und Dreiecksglieder.

Sind \Re und $1/\mathcal{G}$ zueinander invers mit frequenzunabhängiger reeller Potenz k , so ist die Dämpfung für alle Frequenzen gleich Null, und es gilt für das Winkelmaß die einfache Formel

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{|R'G'|}}{2} = \frac{R'}{2k}. \tag{I211}$$

Der Wellenwiderstand ist konstant gleich k . Solche „Grundkreuzglieder“ sind natürlich als Filter unbrauchbar und auch als Entzerrer nicht ohne weiteres zu gebrauchen (s. § 322); sie eignen sich jedoch gut zum sogenannten Phasenausgleich (§ 358).

§ 321. Vierpolparameter des Brückensternglieds. Bei ihm¹ wollen wir von vornherein vereinfachend voraussetzen, daß (Abb. 304) der überbrückende Widerstand \Re und der Querwiderstand der T-Schaltung $1/\mathcal{G}$ zueinander invers sind mit derselben frequenzunabhängigen reellen Potenz k , die wir uns in die beiden Längszweige der T-Schaltung eingeschaltet denken. Dann ist unmittelbar nach den Definitionen der Vierpoltheorie und nach § 26

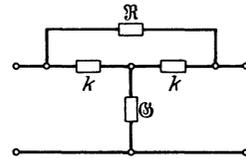


Abb. 304.

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}^l &= \frac{k(k + \Re)}{2k + \Re} + \frac{1}{\mathcal{G}} = \frac{k(k + \Re)}{2k + \Re} + \frac{k^2}{\Re}, \\ \mathfrak{M} &= \frac{k}{2k + \Re} k + \frac{1}{\mathcal{G}} = \frac{k^2}{2k + \Re} + \frac{k^2}{\Re}. \end{aligned} \right\} \tag{I212}$$

Hier ist es bequem, $k + \Re = \mathcal{C} = |\mathcal{C}| \angle \sigma$ zu setzen. Man erhält dann

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{B}^l &= \frac{k\mathcal{C}}{\mathcal{C} + k} + \frac{k^2}{\mathcal{C} - k} = \frac{\mathcal{C}^2 + k^2}{\mathcal{C}^2 - k^2} k, \\ \mathfrak{M} &= \frac{k^2}{\mathcal{C} + k} + \frac{k^2}{\mathcal{C} - k} = \frac{2\mathcal{C}k}{\mathcal{C}^2 - k^2} k \end{aligned} \right\} \tag{I213}$$

und daher

$$\operatorname{Co}f g = \frac{\mathcal{C}^2 + k^2}{2\mathcal{C}k}, \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{M} \operatorname{Sin} g = k, \tag{I214}$$

$$\operatorname{Sin} g = \frac{\mathcal{C}^2 - k^2}{2\mathcal{C}k}, \quad \mathfrak{B}^k = \frac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{B}^l} = \frac{\mathcal{C}^2 - k^2}{\mathcal{C}^2 + k^2} k, \tag{I215}$$

$$e^a = \frac{\mathcal{C}}{k}, \quad \text{also} \quad b = \ln \frac{|\mathcal{C}|}{k}, \quad a = \sigma. \tag{I216}$$

Wie man sieht, hat man auch bei der Brückensternschaltung der angenommenen besonderen Art einfache Gleichungen vor allem für den Wellenwiderstand und das Übertragungsmaß. k sieht man am besten als Widerstandseinheit an. Der Zusammenhang der meßbaren Widerstände $\mathfrak{B}^l, \mathfrak{M}, \mathfrak{B}^k$ mit \mathcal{C} wird dann durch gebrochene Funktionen zweiten Grades vermittelt. Setzt man \mathcal{G} als gegeben voraus, so kann man besonders einfach nach den Zahlenwertgleichungen

$$\mathfrak{B}^l = 1 + \frac{1}{\mathcal{G}} - \frac{1}{2 + \mathcal{G}}, \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{\mathcal{G}} + \frac{1}{2 + \mathcal{G}} \tag{I217}$$

konstruieren².

¹ G. H. Stevenson: Am. Pat. 1606817 vom 16. 11. 26.

² Darstellungen des Zusammenhangs der Parameter \mathfrak{B}^l und \mathfrak{B}^k mit dem Widerstand $1/\mathcal{G}$ findet man bei V. Gandtner u. G. Wohlgemuth: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. 7, H. 2, 71 u. 72 (1929).

Ist noch spezieller \Re ein reiner Blindwiderstand, so gilt

$$e^b \angle a = 1 + j \frac{R'}{k},$$

also

$$e^{2b} = 1 + \frac{R'^2}{k^2}, \quad \text{tg } a = \frac{R'}{k}. \tag{1218}$$

§ 322. Vierpole konstanten Wellenwiderstands. Wenn ein Entzerrer keine Reflexionen in eine Zusammenschaltung bringen soll, empfiehlt es sich, ihn so zu bauen, daß er einen frequenzunabhängigen Wellenwiderstand besitzt.

Zu den Gliedern frequenzunabhängigen Wellenwiderstands gehören u. a. die im § 320 besprochenen „Grundkreuzglieder“ \Re , \mathcal{G} , für die die Bedingung $\Re = k^2 \mathcal{G}$ erfüllt ist. Bestehen diese Kreuzglieder aus reinen Blindwiderständen, so ist ihre Dämpfung nach § 320 im ganzen Frequenzbereich Null, und sie sind daher als Entzerrer nicht zu gebrauchen. Man kann ihnen aber reelle Widerstände zuschalten, ohne daß sie aufhören, Vierpole konstanten Wellenwiderstands zu sein. Nach Zobel gilt nämlich der fast selbstverständliche Satz, daß man zu den Widerständen \Re und $1/\mathcal{G}$, aus denen ein solches Kreuzglied besteht, weitere Widerstände \Re' und $1/\mathcal{G}'$ in Reihe und parallel oder parallel und in Reihe schalten kann, ohne daß der Wellenwiderstand des entstehenden zusammengesetzten Kreuzglieds frequenzabhängig würde, wenn nur \Re' und \mathcal{G}' so gewählt sind, daß $\Re' = k^2 \mathcal{G}'$. Enthalten \Re' und \mathcal{G}' nur Blindbestandteile, so ist auch das entstehende Kreuzglied dämpfungsfrei. Macht man aber $\Re' = 1/\mathcal{G}' = k$, so erhält man ein als Entzerrer brauchbares dämpfendes Kreuzglied.

Zobel hat für eine große Zahl solcher Kreuzglieder die Frequenzgänge des Dämpfungsmaßes und des Winkelmaßes ausgerechnet und zusammengestellt¹. Aus dieser Sammlung kann man sich im einzelnen Falle die Glieder auswählen, deren Dämpfungs- und Winkelmaß die für die Entzerrung nötigen Frequenzgänge zeigen. Da die Wellenwiderstände der Glieder konstant sind, und daher für alle Glieder gleich gewählt werden können, addieren sich ihre Übertragungsgrößen.

Auch die Brückensternglieder eignen sich zur Entzerrung. Doch wird man im allgemeinen die Widerstände \Re als komplex voraussetzen müssen; denn aus den Gleichungen (1218) folgt in Verbindung mit dem Zobel'schen Reaktanztheorem (§ 115), daß die Dämpfung einer solchen Schaltung aus Blindwiderständen keine Maxima haben kann. Liegt z. B. im überbrückenden Zweig nur eine Kapazität, ist also $\Re = 1/j\omega C$, so folgt aus (1216)

$$b = \ln \frac{|\mathcal{G}|}{k} = \ln \left| 1 + \frac{1}{j\omega k C} \right|. \tag{1219}$$

Die Dämpfung nimmt also mit abnehmender Frequenz einfach unendlich stark zu. Man kann diese Zunahme mildern durch einen quergeschalteten reinen Widerstand R gemäß Abb. 305:

$$b = \ln \left| 1 + \frac{R}{k(1 + j\omega RC)} \right|; \tag{1220}$$

denn dann nähert sich die Vierpoldämpfung für kleine ω dem Werte $\ln(1 + R/k)$, wird also nicht mehr unendlich groß. Schaltet man zu dem Kondensator noch eine Induktivität in Reihe, so wird (vgl. § 14²)

$$b = \ln \left| 1 + \frac{R}{k \left(1 + \frac{j\omega RC}{1 - \omega^2 LC} \right)} \right|; \tag{1221}$$

¹ Zobel, O. J.: Bell Syst. Techn. J. 7, 512 ff. (1928). Die Netzwerke 13 . . . 17 sind reine Blindnetzwerke, 1 . . . 12 enthalten Widerstände.

² Für den Leitwert der Reihenschaltung eines Widerstands und eines Leitwerts gibt es einen dual entsprechenden Satz.

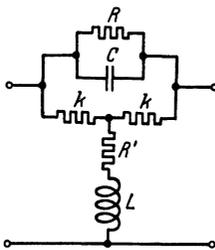


Abb. 305.

d. h. der Verlauf für niedere Frequenzen wird kaum geändert, bei der Scheinfrequenz $\omega = 1/\sqrt{LC}$ erscheint jedoch eine Nullstelle im Endlichen.

Beispiel¹. Es sei der in Abb. 306 durch die Kurve 1 wiedergegebene Frequenzgang der Betriebsdämpfung eines nichtpupinisierten 0,8-mm-Kabels von 15 km Länge zwischen 50 und 10000 Hz durch einen Entzerrer des Frequenzgangs der Kurve 2 zu entzerren. Der Wellenwiderstand soll konstant gleich 600Ω sein. Wir verwenden die Gleichung (1220) in der Form

$$b = \ln \left| 1 + \frac{R}{k \left(1 + j \frac{R}{k} \frac{f}{f_0} \right)} \right|, \quad (1222)$$

indem wir mit f_0 die Frequenz $f_0 = 1/2\pi kC$ bezeichnen. Fordern wir für niedrige Frequenzen entsprechend Kurve 2 eine Dämpfung von 3,6 Neper, so ergibt sich

$$\frac{R}{k} = e^{3,6} - 1 = 35,6. \quad (1223)$$

Da sich die Dämpfung bei sehr großem R/k für die Frequenz ω_0 dem Werte $\ln |1 - j| = 0,34$ nähert, wollen wir $f_0 = 9000$ Hz setzen und erhalten damit

$$C = \frac{1}{2\pi \cdot 9000 \text{ Hz} \cdot 600 \Omega} = 29 \text{ nF}. \quad (1224)$$

So ergibt sich aber nach (1222) die gestrichelte Kurve 2', die von der gewünschten Kurve 2 stark abweicht. Die Übereinstimmung wird viel besser, wenn wir durch zwei Brücken-T-Schaltungen in Kette je die halbe Dämpfung (Kurve 3) nachbilden. Wir erhalten dann (mit dem Ausgangswert 3,5 statt 3,6)

$$\frac{R}{k} = e^{1,75} - 1 = 4,75 \quad (1225)$$

und mit dem alten Wert von f_0 die gestrichelte Kurve 3', die nur bei ganz hohen Frequenzen etwas von der Kurve 3 abweicht.

⊗ berechnet sich nach

$$\frac{1}{\mathcal{G}} = \frac{k^2}{\mathfrak{R}} = \frac{k^2}{R} + k^2 j \omega C = 126 \Omega + j \omega \cdot 10,8 \text{ mH}. \quad (1226)$$

Den Anschluß bei den hohen Frequenzen kann man noch verbessern durch Hinzunahme einer Induktivität in Reihe entsprechend Gleichung (1221)².

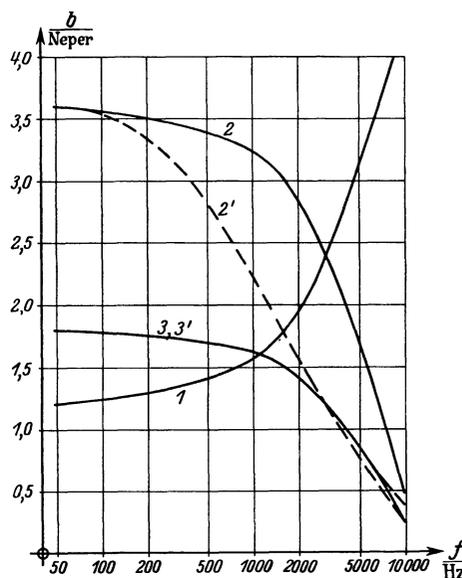


Abb. 306.

XV. Allgemeinere Theorie der Schaltvorgänge und der Verzerrungen in linearen Systemen.

§ 323. Das benutzte Rechenverfahren. Im Abschnitt V haben wir darauf hingewiesen, daß sich die so bequeme komplexe Rechenweise auf Schaltvorgänge nicht ohne weiteres anwenden läßt, da ihr die Voraussetzung zugrunde liegt, daß die wechselnden Größen für alle Zeiten (von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$) durch einfache Sinusfunktionen der Zeit dargestellt werden können.

Die komplexe Rechenweise läßt sich jedoch erweitern. Seit Fourier weiß man, daß jeder zeitliche Ablauf durch Übereinanderlagerung andauernder Sinusschwingungen dargestellt werden kann; und zwar nicht nur jeder periodische Ablauf, sondern auch jeder unperiodische. Man kann daher jede Ursache, z. B. eine

¹ Nach Gandtner u. Wohlgemuth: a. a. O., S. 79.

² Kompliziertere Entzerrerketten kann man mit Hilfe des von Gandtner u. Wohlgemuth (a. a. O.) abgeleiteten „Additionstheorems“ häufig nachträglich wieder vereinfachen.

irgendwie zeitlich veränderliche elektromotorische Kraft, zunächst in andauernde sinusartige Teilursachen zerlegen. Zu jeder solchen Teilursache läßt sich dann, wenn das übertragende System (das Netzwerk, die Leitung, das Filter usw.) „linear“ ist, nach der komplexen Rechenweise ihre Teilfolge berechnen; und die einzelnen Teilfolgen kann man wieder zu einer Gesamtfolge zusammensetzen. Dieses in seinem Grundgedanken sehr einfache Rechenverfahren erweist sich gerade für die Theorie der Fernmeldetechnik als außerordentlich fruchtbar.

Bei der Berechnung von Schaltvorgängen nach ihm tritt die mathematische Aufgabe auf, Integrale der Form

$$\int_0^{\infty} \varphi(\omega) \sin \omega t d\omega \quad \text{oder} \quad \int_0^{\infty} \varphi(\omega) \underline{\omega t} d\omega \quad (1227)$$

auszuwerten. Die Lösung solcher Aufgaben kann man sich sehr erleichtern, wenn man beachtet, daß bestimmte Integrale häufig auch dann leicht berechnet werden können, wenn die zugehörigen unbestimmten Integrale gar nicht bekannt sind. Eine der wichtigsten Methoden zur Auswertung bestimmter Integrale ist die Integration in der komplexen Ebene. Der Ableitung dieser Methode sind die nächsten Paragraphen gewidmet.

§ 324. **Funktionen einer komplexen Veränderlichen.** $z = x + jy$ sei eine komplexe Veränderliche. Stellt man sie durch einen Punkt in der komplexen Ebene dar, so durchläuft dieser bei Variation von x und y eine Kurve. Es sei weiter $u = f_1(x, y)$, $v = f_2(x, y)$, wo f_1 und f_2 beliebige eindeutige Funktionen sind, und es werde die Kombination $w = u + jv$ gebildet; z. B. $u = x$, $v = ny$ und daher $w = x + jny$. Dann ist in der komplexen Ebene (oder wenigstens in einem gewissen Bereich von ihr) jedem Punkte z ein Punkt w zugeordnet. Im allgemeinen kann man aber nicht behaupten, daß w eine „Funktion von z “ sei; denn in dem Ausdruck für w braucht, wie unser Beispiel zeigt, nicht notwendig gerade nur die Kombination $z = x + jy$ vorzukommen. w ist im allgemeinen nur eine „komplexe Funktion der reellen Veränderlichen x und y “.

Wir wollen nun zeigen, daß eine solche Funktion w immer dann und nur dann zugleich eine „Funktion von z “ ist, wenn die Bedingung

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x = j \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y \quad (1228)$$

erfüllt ist (was bei unserem Beispiel $w = x + jny$ nur für $n = 1$ zutrifft). Zum Beweise gehen wir davon aus, daß w eine Funktion von x und y ist. Daraus folgt

$$dw = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x dy. \quad (1229)$$

Setzt man hier (1228) ein, so erhält man

$$dw = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y (dx + j dy) = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y dz. \quad (1230)$$

Nun kann man aber w auch als Funktion von z und y ansehen (statt von x und y) und denselben Ansatz machen; dann erhält man

$$dw = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y dz + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z dy \quad (1231)$$

und durch Gleichsetzen der beiden Differentiale dw nach (1230) und (1231)

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y dz = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y dz + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z dy. \quad (1232)$$

Hier sind dz und dy beliebige Änderungen; setzt man $dz = 0$, so folgt

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z = 0; \tag{1233}$$

setzt man $dy = 0$, so folgt

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y. \tag{1234}$$

Die erste Gleichung (1233) sagt aber aus, daß die Größe w , wenn man sie als Funktion von z und y ansieht, in Wirklichkeit überhaupt nicht von y abhängt, d. h., daß w eine Funktion der komplexen Veränderlichen z allein ist, was wir beweisen wollten¹.

Aus der zweiten Gleichung (1234) geht hervor, daß der partielle Differentialquotient $(\partial w/\partial z)_y$, der ja nach (1231) und (1233) gleich dem totalen Differentialquotient dw/dz ist, auch gleich dem partiellen Differentialquotienten von w nach der reellen Veränderlichen x ist:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = -j \frac{\partial w}{\partial y}. \tag{1235}$$

Diese beiden Gleichungen sind von der größten Wichtigkeit für die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Es sei z. B.

$$w = (x^2 - y^2) + j \cdot 2xy. \tag{1236}$$

Dann ist

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} &= -2y + 2jx = j(2x + 2jy), \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= 2x + 2jy; \end{aligned} \right\} \tag{1237}$$

d. h. die Bedingung (1228) ist erfüllt. In der Tat kann man für w auch

$$w = (x + jy)^2 = z^2 \tag{1238}$$

schreiben.

Wir haben bis jetzt nur nachgewiesen, daß die Gleichung $w = f(z)$ eine Folge der Bedingung (1228) ist. Umgekehrt ist es fast selbstverständlich, daß aus $w = f(z)$ die Bedingung (1228) folgt. Diese ist also nicht nur eine hinreichende, sondern auch eine notwendige Bedingung dafür, daß w eine Funktion der Veränderlichen z oder, wie man auch sagt, eine „analytische“ Funktion ist.

Aus (1235) geht hervor, daß der Differentialquotient der Funktion w nach ihrem Argument z einen bestimmten Wert hat, unabhängig von der Richtung, in der sich der Punkt z in der komplexen Ebene verschiebt.

In der Tat berechnet sich z. B. aus (1235) und (1237) derselbe Differentialquotient dz , der sich auch aus (1238) ergibt.

Man überzeugt sich leicht, daß der Differentialquotient dw/dz von dy/dx , also der Richtung der Änderung dz abhängt, sobald die Gleichung (1228) nicht erfüllt ist.

§ 325. Randintegrale analytischer Funktionen. Die Bedingung (1228), die wir für analytische Funktionen aufgestellt haben, nimmt, wenn wir die Komponenten u und v einführen, die folgende Form an:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + j \frac{\partial v}{\partial y} = j \left(\frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

oder nach Trennung des Reellen und Imaginären:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{1239}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1240}$$

¹ Der Beweis kann natürlich auch so geführt werden, daß die Gleichung $(\partial w/\partial x)_z = 0$ herauskommt.

Von diesen rein reellen Beziehungen wollen wir nun ausgehen. Wir betrachten die folgenden Integrale, die über die in Abb. 307 hervorgehobene von einer geschlossenen Kurve umrandete einfach zusammenhängende ebene Fläche F in der x - y -Ebene zu erstrecken seien¹:

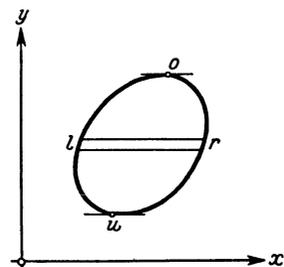


Abb. 307.

$$\iint \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy, \quad (1241)$$

$$\iint \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy. \quad (1242)$$

Wir integrieren zunächst den ersten Summand des ersten Integrals $J_1 = \iint \partial u / \partial x \cdot dx dy$ nach x bei konstant gehaltenem y , also über einen waagerechten Streifen; das ergibt (die Bedeutung der Indizes geht aus der Abbildung hervor):

$$J_1 = \int dy \int \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int dy (u_r - u_l). \quad (1243)$$

Hier sind u_r und u_l , da die Randkurve und damit der Zusammenhang der Koordinaten x_r und x_l mit y als gegeben vorausgesetzt werden müssen, bekannte Funktionen von y allein, und es ist daher

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{u_o} dy (u_r - u_l) = \int_{u_r o} dy \cdot u_r - \int_{u_l o} dy \cdot u_l = \int_{u_r o} u_r dy + \int_{o l u} u_l dy \\ &= \int_{u_r o l u} u dy = \int_{\oint} u dy, \end{aligned} \quad (1244)$$

wenn wir die unnötig gewordenen Indizes bei u weglassen und durch einen Umlaufspfeil die Integration über die geschlossene Randkurve andeuten.

Entsprechend kann man die andern Integrale umformen; für das zweite Integral von (1241) erhält man z. B.

$$J_2 = - \iint \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = - \int_{\oint} v dx = \int_{\oint} v dx. \quad (1245)$$

Nach (1239) wird also

$$\int_{\oint} (u dy + v dx) = 0, \quad (1246)$$

und nach (1240)

$$\int_{\oint} (u dx - v dy) = 0. \quad (1247)$$

Multipliziert man jetzt die Gleichung (1246) mit j und addiert sie zur Gleichung (1247), so ergibt sich² die überraschende und wichtige Beziehung:

$$\int_{\oint} (u + jv)(dx + j dy) = \int_{\oint} w dz = 0. \quad (1248)$$

Das Integral einer analytischen Funktion über den geschlossenen Rand einer in der z -Ebene liegenden Fläche hat daher den Wert Null, vorausgesetzt, daß die angesetzten Integrationen Sinn haben, d. h. daß die Funktionen u und v samt ihren Differentialquotienten in dem Integrationsgebiet F endlich und stetig sind.

§ 326. **Unstetigkeitspunkte.** Wird die Funktion w in einem einzigen Punkte z_0 unstetig, so kann man diesen durch einen kleinen Kreis mit dem Radius r um-

¹ Der Einfachheit halber werde vorausgesetzt, daß eine Parallele zu einer der beiden Achsen die Randkurve nicht in mehr als zwei Punkten schneide. Der abzuleitende Satz ist jedoch, wie leicht zu ersehen von dieser Voraussetzung unabhängig. Einfach zusammenhängend ist eine Fläche, wenn jeder in der Fläche verlaufende geschlossene Weg nur Punkte der Fläche selbst umschließt.

² Man vergleiche den Gedankengang mit dem Gedankengang im § 97.

gehen (Abb. 308). Dadurch entsteht eine zweifach zusammenhängende ringartige Fläche. Um unseren Satz anwenden zu können, verwandeln wir sie durch einen Schnitt S in eine einfach zusammenhängende Fläche, die den Punkt z_0 nicht mehr enthält. Das Integral über deren Rand ist aber gleich Null; das Integral über den äußeren Rand, umlaufen entsprechend dem Pfeil τ , ist daher, da sich die beiden Integrale über den Schnitt aufheben, gleich dem Integral über den Kreis um z_0 , umlaufen entgegengesetzt dem Pfeil z .

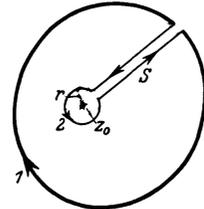


Abb. 308.

Wie man sieht, zieht sich das Integral über den äußeren Rand zusammen auf das Integral um den Unstetigkeitspunkt z_0 , beide Integrale im selben Umlaufsinn genommen.

Man kann dieses Ergebnis erweitern auf den Fall, daß im Innern der Fläche, über die das Randintegral zu erstrecken ist, beliebig viele Unstetigkeitspunkte liegen. Dann ist das Integral gleich der Summe der Randintegrale über die kleinen Kreise, die man um die Unstetigkeitspunkte herum schlagen kann.

§ 327. Berechnung eines besonders wichtigen Punktintegrals. Wir wollen nun voraussetzen, die Unstetigkeit der Funktion $f(z)$ in dem Punkte z_0 rühre nur davon her, daß in ihrem Nenner die Differenz $z - z_0$ steht. Dann verhält sich offenbar die Funktion

$$g(z) = f(z)(z - z_0) \tag{1249}$$

im Innern des Kreises um z_0 regulär, und unsere Aufgabe ist es, den Grenzwert des Integrals

$$J = \int_{z_0} f(z) dz = \int_{z_0} \frac{g(z)}{z - z_0} dz \tag{1250}$$

erstreckt über den Kreis für immer kleiner werdende r zu bestimmen.

Die Veränderliche z läuft auf dem Kreis um z_0 , wenn sie die Gleichung (vgl. Abb. 309)

$$z = z_0 + r \angle \varphi \tag{1251}$$

mit φ als einziger Veränderlicher befriedigt. Da hiernach

$$dz = r d \angle \varphi = j r \angle \varphi d \varphi, \tag{1252}$$

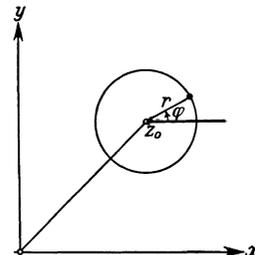


Abb. 309.

folgt wegen der Kleinheit von r und weil g regulär ist:

$$J = \int_{z_0} \frac{g(z_0 + r \angle \varphi)}{r \angle \varphi} j r \angle \varphi d \varphi = \int_0^{2\pi} j g(z_0) d \varphi = 2 \pi j g(z_0). \tag{1253}$$

Das gesuchte Integral ist also einfach gleich $2 \pi j$ multipliziert mit dem Wert, den die Funktion $g(z)$ (nicht $f(z)$!) im Punkte z_0 annimmt. Den Faktor von $2 \pi j$ nennt man auch das zu dem „Pol“ z_0 gehörige „Residuum“.

§ 328. Darstellung der Einschaltung einer konstanten EMK durch ein bestimmtes Integral. Bei unserer elementaren Theorie der Einschaltung einer konstanten EMK E im Abschnitt V haben wir vorausgesetzt, daß für negative Zeiten der Augenblickswert e gleich Null sei, für positive dagegen gleich E . Diesen „Sprung“ der EMK e von 0 auf E kann man, wie wir jetzt zeigen wollen, für alle, negative und positive, Zeiten durch einen einzigen Ausdruck darstellen, und zwar durch das Integral

$$e = \frac{E}{2 \pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\angle \omega t}{\omega} d \omega, \tag{1254}$$

das zu erstrecken ist über die reelle Achse, jedoch unter Umgehung des Nullpunktes durch einen kleinen im 3. und 4. Quadranten verlaufenden Halbkreis (wie in Abb. 310). ω ist dabei zunächst eine beliebige Veränderliche, kann also auch komplexe Werte annehmen und braucht nicht die Kreisfrequenz zu bedeuten.

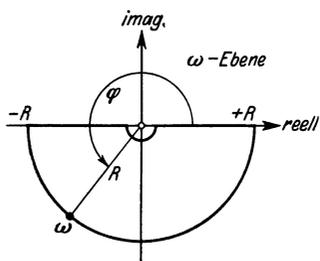


Abb. 310.

Um die Gleichung (1254) zu beweisen, wollen wir zunächst voraussetzen, daß $t = 0$ sei. Dann ist gemäß Abb. 310

$$e = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{E}{2\pi j} \int_{-R}^{+R} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{E}{2\pi j} J_0. \quad (1255)$$

Wir ergänzen den Integrationsweg durch einen im 3. und 4. Quadranten verlaufenden Halbkreis vom Radius R zu einem geschlossenen Weg, innerhalb dessen sich die Funktion $f(\omega) = 1/\omega$ natürlich regulär verhält (sie wird ja nur für $\omega = 0$ unendlich groß). Dann folgt aus dem Lehrsatz (1248), daß das Integral J_0 ebenso groß ist wie der Grenzwert, den das über den Halbkreis vom Radius R von $\varphi = \pi$ bis 2π (Abb. 310) erstreckte Integral für unendlich großes R annimmt. Nun ist für den großen Halbkreis mit komplexem $\omega = R \angle \varphi$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int \frac{d\omega}{\omega} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{d(R \angle \varphi)}{R \angle \varphi} = j\pi; \quad (1256)$$

also wird auch

$$e = \frac{E}{2\pi j} \cdot j\pi = \frac{E}{2}. \quad (1257)$$

Für die Zeit $t = 0$ ergibt das Integral also den Wert $E/2$.

Für negative $t = -|t|$ ergänzt man den Integrationsweg in derselben Weise. Jetzt ist aber das Integral über den großen Halbkreis (nach Anhang 6.) gleich

$$\int_{\pi}^{2\pi} \underline{\underline{R|t| \angle \varphi}} j d\varphi = j \int_{\pi}^{2\pi} e^{R|t| \sin \varphi} \underline{\underline{R|t| \cos \varphi}} d\varphi, \quad (1258)$$

und dieser Ausdruck wird für unendlich großes R , da $\sin \varphi$ im 3. und 4. Quadranten negativ ist, gleich Null. Für negative t ist also e beständig gleich Null.

Für positive t endlich ergänzt man den Integrationsweg durch einen Halbkreis um den Nullpunkt im 1. und 2. Quadranten (Abb. 311). Das Integral über diesen Halbkreis

$$\int_0^{\pi} \underline{\underline{R|t| \angle \varphi}} j d\varphi = j \int_0^{\pi} e^{-R|t| \sin \varphi} \underline{\underline{R|t| \cos \varphi}} d\varphi \quad (1259)$$

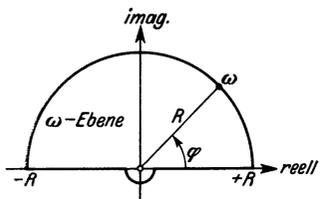


Abb. 311.

wird für $R \rightarrow \infty$ wieder gleich Null, weil jetzt $\sin \varphi$ positiv ist; das Integral über den vollen Rand der Fläche ist aber jetzt gleich $2\pi j$ mal dem Residuum im Punkte $\omega = 0$, und dieses ist

$$g(0) = f(0) \cdot \omega = (\angle \omega t)_{\omega=0} = 1. \quad (1260)$$

Das Ergebnis ist also für positive t

$$e = \frac{E}{2\pi j} \cdot 2\pi j = E. \quad (1261)$$

Das Integral (1254) liefert, um es zusammenzufassen,

$$\begin{aligned} &\text{für } t < 0 \text{ den Wert } 0, \\ &,, \quad t = 0 \quad ,, \quad ,, \quad E/2, \\ &,, \quad t > 0 \quad ,, \quad ,, \quad E, \end{aligned}$$

kann also zur Darstellung der plötzlichen Einschaltung einer EMK E im Zeitpunkt $t = 0$ dienen.

§ 329. Berechnung eines Einschaltvorgangs mit Hilfe des Fourierschen Integrals. Wir sind nunmehr bereits in der Lage, gewisse einfache Schaltvorgänge nach der im § 323 ange deuteten Methode zu berechnen. Wir wollen einen Kreis mit Widerstand, Induktivität und Kapazität in Reihe voraussetzen und wollen untersuchen, wie die Kondensatorspannung u ansteigt, wenn wir zur Zeit $t = 0$ eine konstante elektromotorische Kraft E anlegen. Führen wir wie im § 117 das (komplexe) Frequenzmaß $\eta = \omega/\omega_0$ und den Dämpfungswinkel ϑ ein, so gilt nach der damals abgeleiteten Gleichung (294) und nach § 323

$$u = \frac{E}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\angle \omega_0 \eta t}{\eta (1 - \eta^2 + j 2 \eta \sin \vartheta)} d\eta. \tag{1262}$$

Um die Unstetigkeitsstellen des Integranden zu finden, setzen wir die Klammerfunktion in seinem Nenner gleich Null:

$$-(\eta^2 - 2j\eta \sin \vartheta - 1) = 0. \tag{1263}$$

Diese Gleichung hat die im 1. und 2. Quadranten liegenden komplexen Wurzeln

$$\eta = j \sin \vartheta \pm \sqrt{-\sin^2 \vartheta + 1} = j \sin \vartheta \pm \cos \vartheta = \pm \angle \pm \vartheta; \tag{1264}$$

sie sind in Abb. 312 eingetragen. Ergänzt man wie im vorigen Paragraphen den Integrationsweg für positive Zeiten durch einen im ersten und zweiten Quadranten verlaufenden Halbkreis mit sehr großem Radius zu einem geschlossenen, so verschwindet das Integral über den großen Halbkreis wie im § 328, und man erhält das Resultat, daß das gesuchte Integral gleich $2\pi j$ mal der Summe der Residuen in den Punkten 0 und $\pm \angle \pm \vartheta$ ist. Das Residuum im Punkte 0 ist

$$-\left(\frac{\angle \omega_0 \eta t}{\eta^2 - j 2 \eta \sin \vartheta - 1}\right)_{\eta=0} = 1, \tag{1265}$$

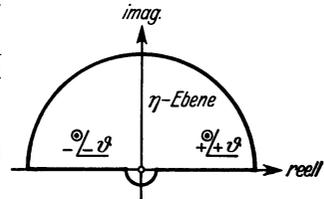


Abb. 312.

die Residuen in den Punkten $\eta = \pm \angle \pm \vartheta$ sind

$$-\left(\frac{\angle \omega_0 \eta t}{\eta (\eta \pm \angle \mp \vartheta)}\right)_{\eta = \pm \angle \pm \vartheta} = -\frac{\angle \pm \omega_0 \angle \pm \vartheta t}{\angle \pm \vartheta (\angle \pm \vartheta + \angle \mp \vartheta)} = -\frac{\angle \pm \omega_0 \angle \pm \vartheta t \mp \vartheta}{2 \cos \vartheta}, \tag{1266}$$

so daß sich nach Anhang 6. die reelle Gleichung

$$\begin{aligned} u &= E \left\{ 1 - \frac{1}{2 \cos \vartheta} e^{-\omega_0 \sin \vartheta \cdot t} (\angle \omega_0 \cos \vartheta \cdot t - \vartheta + \angle -(\omega_0 \cos \vartheta \cdot t - \vartheta)) \right\} \\ &= E \left\{ 1 - \frac{e^{-\omega_0 \sin \vartheta \cdot t}}{\cos \vartheta} \cos (\omega_0 \cos \vartheta \cdot t - \vartheta) \right\} \end{aligned} \tag{1267}$$

ergibt, in völliger Übereinstimmung mit der früheren Gleichung (356) des § 134, da $\omega_0 \cos \vartheta$ gleich der wahren Eigenkreisfrequenz, $\omega_0 \sin \vartheta$ gleich dem reziproken Wert der doppelten ersten Zeitkonstante ist.

§ 330. Die „Heavisidesche Regel“. Heaviside hat gezeigt, daß man, wenn eine konstante Ursache plötzlich auftritt, nicht jedesmal von neuem im Komplexen zu integrieren braucht, sondern diese Integration ein für allemal ausführen kann. Wir wollen voraussetzen, daß die stationär wechselnde Wirkung \mathfrak{F} mit der stationär wechselnden Ursache \mathfrak{E} durch die Gleichung

$$\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{B}} \tag{1268}$$

verknüpft sei, wo \mathfrak{B} eine Funktion der Frequenz ω ist, also nicht etwa ein Widerstand zu sein braucht. Dann beruht die Heavisidesche Regel wieder auf der Annahme des § 323, daß man den Augenblickswert i der Wirkung nach dem Fourierschen Integral

$$i = \frac{E}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\angle \omega t}{\omega \mathfrak{B}(\omega)} d\omega \tag{1269}$$

berechnen könne. Aus diesem Ansatz ergibt sich die Regel in der folgenden Weise.

Man ergänzt den Integrationsweg (wie auch früher) für positive Zeiten durch einen im ersten und zweiten Quadranten liegenden Halbkreis (Abb. 313); auf demselben Weg wie früher findet man dann, daß das gesuchte Integral gleich $2\pi j$ mal der Summe der Residuen ist, die sich für die im ersten und zweiten Quadranten liegenden Pole ergeben.

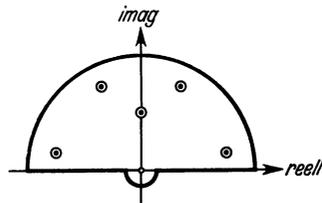


Abb. 313.

Pole der Funktion $f(\omega)$ sind aber der Punkt $\omega = 0$ und die sämtlichen Punkte $\omega = \omega_i$, in denen die „Stammfunktion“ $\mathfrak{B}(\omega)$ gleich Null wird. Das Residuum im Punkt $\omega = 0$ ist gleich

$$\left(\frac{\angle \omega t}{\mathfrak{B}(\omega)} \right)_{\omega=0} = \frac{1}{\mathfrak{B}(0)}. \tag{1270}$$

Zur Berechnung der Residuen in den Punkten $\omega = \omega_i$ beachten wir, daß mit der im § 327 eingeführten Bezeichnung

$$g(\omega) = (\omega - \omega_i) f(\omega) = \frac{(\omega - \omega_i) \angle \omega t}{\omega \mathfrak{B}(\omega)} \tag{1271}$$

ist. Nach dem Taylorschen Lehrsatz gilt aber

$$\mathfrak{B}(\omega) = \left(\frac{d\mathfrak{B}}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_i} (\omega - \omega_i) + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2\mathfrak{B}}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_i} (\omega - \omega_i)^2 + \dots, \tag{1272}$$

da \mathfrak{B} in dem Punkte $\omega = \omega_i$ selbst ja verschwindet. Man erhält daher aus (1271)

$$g(\omega_i) = \frac{\angle \omega_i t}{\omega_i \left(\left(\frac{d\mathfrak{B}}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_i} + \left(\frac{d^2\mathfrak{B}}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_i} (\omega - \omega_i) + \dots \right)_{\omega=\omega_i}} = \frac{\angle \omega_i t}{\omega_i \left(\frac{d\mathfrak{B}}{d\omega} \right)_{\omega_i}} \tag{1273}$$

und damit die Heavisidesche Regel

$$i = \frac{E}{\mathfrak{B}(0)} + E \sum_i \frac{\angle \omega_i t}{\omega_i \left(\frac{d\mathfrak{B}}{d\omega} \right)_{\omega_i}}. \tag{1274}$$

Die Gleichung $\mathfrak{B} = 0$ heißt „Stammgleichung“, die Werte ω_i „Eigenwerte“, das erste Glied in (1274) „Gleichstromlösung“.

Für negative Zeiten muß das Integral (1269) den Wert Null liefern. Da man in diesem Zeitbereich wie im § 328 den Integrationsweg durch einen im dritten und vierten Quadranten verlaufenden Halbkreis schließen muß, dürfen in diesen beiden Quadranten keine Pole des Integranden liegen. In der Tat hat z. B. die Stammgleichung des folgenden Paragraphen

$$R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = 0 \tag{1275}$$

nur die beiden Lösungen

$$\omega = j \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \tag{1276}$$

deren imaginäre Teile (auch für $R^2/4L^2 > 1/LC$) positiv sind.

Unsere Ableitung ist nur möglich gewesen unter der folgenden (stillschweigend gemachten) Voraussetzung: Damit das für positive Zeiten über den großen Halbkreis mit dem Halb-

messer R (§ 328) erstreckte Integral verschwindet, darf die Funktion $\mathfrak{B}(\omega)$, durch die sich ja das Integral (1269) von dem Integral (1254) unterscheidet, mit unendlich wachsendem ω nicht gegen Null konvergieren; d. h. die ω_i müssen alle im Endlichen liegen. \mathfrak{B} darf daher z. B. keiner reinen Kapazität entsprechen; denn $1/j\omega C$ nähert sich mit unendlich wachsendem ω der Null¹.

§ 331. Anwendung der Heavisideschen Regel auf einen einfachen Schaltvorgang. Wir betrachten als Beispiel den Fall des § 132. Für die Schaltung der Abb. 127 lautet die Stammgleichung

$$\mathfrak{B} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = \frac{j\omega RC - \omega^2 LC + 1}{j\omega C} = 0. \quad (1277)$$

Sie hat zwei Lösungen ω_1 und ω_2 , und zwar stimmen diese abgesehen von dem Faktor j mit den Lösungen δ_1 und δ_2 des § 132 überein:

$$\omega_{1,2} = \omega_i = \frac{j}{2\tau_1} \pm \omega_0 \cos \vartheta. \quad (1278)$$

Die Gleichstromlösung ist gleich Null, da \mathfrak{B} für $\omega = 0$ unendlich groß wird. Dagegen ist

$$\omega \frac{d\mathfrak{B}}{d\omega} = j\omega \left(L + \frac{1}{\omega^2 C} \right) = j\omega L + \frac{j}{\omega C}. \quad (1279)$$

Da hier $\omega = \omega_i$ zu setzen ist, kann man davon Gebrauch machen, daß nach (1277)

$$\frac{j}{\omega_i C} = R + j\omega_i L; \quad (1280)$$

es wird also mit der Abkürzung $\omega_0 \cos \vartheta = \omega_e$:

$$\left(\omega \frac{d\mathfrak{B}}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_i} = R + 2j\omega_i L = R - \frac{L}{\tau_1} \pm j2\omega_e L = \pm j2\omega_e L. \quad (1281)$$

Der Einschaltvorgang wird demnach dargestellt durch

$$\begin{aligned} i &= \frac{E}{2\omega_e L j} e^{-\frac{t}{2\tau_1}} (\sphericalangle \omega_e t - \sphericalangle -\omega_e t), \\ &= \frac{E}{\omega_e L} e^{-\frac{t}{2\tau_1}} \sin \omega_e t = E \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{1}{\cos \vartheta} e^{-\frac{t}{2\tau_1}} \sin \omega_e t \end{aligned} \quad (1282)$$

in völliger Übereinstimmung mit dem Ergebnis des § 134. Die Lösung ergibt sich einschließlich der Integrationskonstanten aus der Heavisideschen Regel.

§ 332. Einschaltvorgang auf einem Telegraphenkabel; Thomsonkurve². An den Eingang eines Kabels werde zur Zeit $t = 0$ eine konstante elektromotorische Kraft E gelegt. Wir fragen nach dem zeitlichen Verlauf des Stroms am Kabelende. Zur Lösung dieser Aufgabe empfiehlt es sich, zunächst ein künstliches Kabel zu betrachten und von ihm erst später zu dem gleichmäßigen Kabel überzugehen.

Das künstliche Kabel bestehe aus n Gliedern in Dreiecksschaltung mit Längswiderstand R und Querkapazität C . Die Widerstände der Stromquelle und des Verbrauchers seien verschwindend gering. Dann ist in der allgemeinen Formel (776) des § 231 $\xi = 1$, $r_a = r_e = 0$ zu setzen oder, wenn wir das Übertragungsmaß des einzelnen Glieds mit g bezeichnen:

$$\mathfrak{S}_2 = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{B}} = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{B} \sin n g}. \quad (1283)$$

¹ Wie man zu verfahren hat, wenn die Stammgleichung mehrfache Wurzeln hat (das ist z. B. der Fall des § 137), wird in dem Aufsätze von K. W. Wagner: Arch. Elektrot. 4, 165 (1916), auseinandergesetzt.

² Wagner, K. W.: Arch. Elektrot. 4, 172 (1916).

Die Stammgleichung lautet daher

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{J} \mathfrak{S} \sin n g = 0 \quad (1284)$$

oder nach der Gleichung (689) des § 212

$$\mathfrak{B} = R \frac{\mathfrak{S} \sin n g}{\mathfrak{S} \sin g} = 0. \quad (1285)$$

Da

$$\mathfrak{C} \cos g = 1 + j \frac{\omega R C}{2}, \quad (1286)$$

wachsen $|\mathfrak{C} \cos g|$ und damit auch $|\mathfrak{S} \sin g|$ auf dem großen Halbkreis der Abb. 313, wenn sein Halbmesser immer größer genommen wird, schließlich über alle Grenzen; die Stammfunktion wird dort also gleich $Re^{(n-1)g}$, d. h. in keinem Falle gleich Null. Alle Eigenwerte ergeben sich daher aus der Bedingung

$$\mathfrak{S} \sin n g = \mathfrak{S} \sin n b \cos n a + j \mathfrak{C} \cos n b \sin n a = 0 \quad (1287)$$

oder

$$n g = j n a = j k \pi, \quad (1288)$$

wo k eine zunächst beliebige ganze Zahl ist. Setzt man (1288) in (1286) ein, so folgen aus

$$\cos \frac{k \pi}{n} = 1 + j \frac{\omega_k R C}{2} \quad (1289)$$

die in diesem Falle rein imaginären Eigenwerte:

$$\omega_k = \frac{2}{j R C} \left(\cos \frac{k \pi}{n} - 1 \right) = \frac{4}{R C} \sin^2 \left(\frac{k}{n} 90^\circ \right) \angle 90^\circ. \quad (1290)$$

Hier erkennt man leicht das Folgende: Wenn k die Reihe der ganzen Zahlen durchläuft, so ergeben sich doch nur $n + 1$ verschiedene Eigenwerte; und von diesen sind außerdem noch die Werte ω_0 und ω_n zu streichen, da für $k = 0$ und für $k = n$ auch der Nenner der Gleichung (1285) verschwindet. Für $n = 1$ beispielsweise gibt es überhaupt keinen Eigenwert; der Endstrom springt sofort auf den Wert E/R , ein Ergebnis, das man auch unmittelbar aus einem Bild der Schaltung ablesen kann.

Weiter findet man bei Beachtung von (1285):

$$\omega_k \left(\frac{d \mathfrak{B}}{d \omega} \right)_{\omega_k} = n \omega_k R \left(\frac{\mathfrak{C} \cos n g}{\mathfrak{S} \sin g} \frac{d g}{d \omega} \right)_{\omega_k}. \quad (1291)$$

Nach (1286) ist aber

$$\mathfrak{S} \sin g d g = j \frac{R C}{2} d \omega = \frac{\mathfrak{C} \cos g - 1}{\omega} d \omega, \quad (1292)$$

also

$$\omega_k \left(\frac{d \mathfrak{B}}{d \omega} \right)_{\omega_k} = n R \left(\frac{\mathfrak{C} \cos n g}{2 \mathfrak{C} \cos^2 \frac{g}{2}} \right)_{\omega_k} = \frac{n R}{2} \frac{(-1)^k}{\cos^2 \left(\frac{k}{n} 90^\circ \right)}. \quad (1293)$$

Unter Berücksichtigung des Gleichstromglieds ergibt sich daher schließlich

$$i_2 = \frac{E}{n R} + \frac{2 E}{n R} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \cos^2 \left(\frac{k}{n} 90^\circ \right) e^{-\frac{4 t}{R C} \sin^2 \left(\frac{k}{n} 90^\circ \right)}. \quad (1294)$$

In Abb. 314 ist dieser Verlauf für ein künstliches Kabel von 2, 3 und 4 Gliedern dargestellt. Die Gleichung für den Strom am Ende eines gleichmäßigen Kabels erhält man, wenn man n über alle Grenzen wachsen und dafür R und C gegen Null konvergieren läßt. Es ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^2 \left(\frac{k}{n} 90^\circ \right) = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\frac{k}{n} 90^\circ \right) = \frac{k^2}{n^2} \frac{\pi^2}{4}; \quad (1295)$$

also wird

$$i_2 = \frac{E}{nR} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-\frac{k^2 \pi^2 t}{nRnC}} \right). \quad (1296)$$

Diese Formel ist zuerst von W. Thomson abgeleitet worden. nR ist der Gesamtwiderstand des Kabels, nC seine Gesamtkapazität. Auch die durch (1296) dargestellte zeitliche Abhängigkeit des Endstroms ist in Abb. 314 wiedergegeben. Die Reihe konvergiert für kleine t sehr langsam, für $t=0$ divergiert sie sogar.

Aus Abb. 314 ist zu entnehmen, daß sich der Endstrom nach Ablauf etwa der Zeit $t = 0,17 nRnC$ noch um 36,8% von dem Gleichstromwert E/nR unterscheidet. Im § 141 haben wir unter der Voraussetzung, daß die Gesamtkapazität in der Mitte des Kabels konzentriert sei, die Zeitkonstante des Vorgangs zu $0,25 nRnC$ berechnet¹. Wenn der Strom am Kabelende in Wirklichkeit etwas rascher ansteigt, so kommt das daher, daß die Spannung auf dem Kabel allmählich abfällt und die Kabelkapazität daher nur mit einem gewissen Prozentsatz wirksam wird².

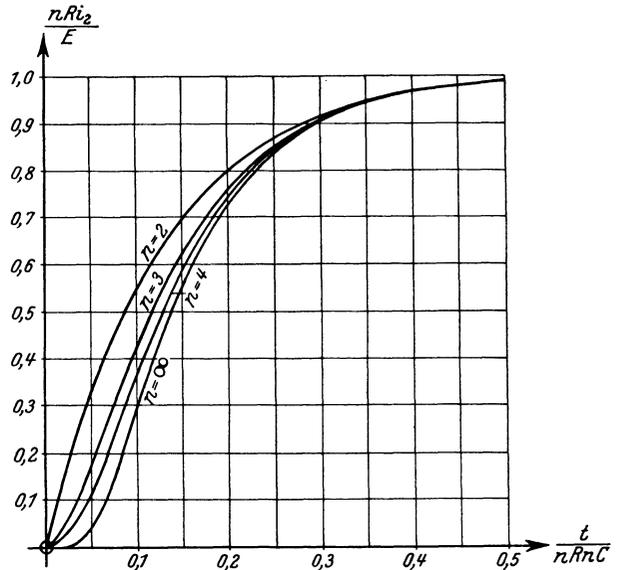


Abb. 314.

§ 333. Übertragung eines beliebigen Vorgangs. In den letzten Paragraphen haben wir uns mit dem Problem beschäftigt, die Wirkung einer plötzlich einsetzenden konstanten Ursache zu berechnen. Wir wollen jetzt dieses Problem als gelöst voraussetzen; die Rechnung habe ergeben, daß eine konstante Ursache von der Größe 1 , die zur Zeit $t = 0$ auftritt, im Zeitpunkt t eine Folge $\varphi(t)$ hervorruft. Die bekannte Funktion $\varphi(t)$ nennen wir die „Übergangsfunktion“.

Es sei nun die Aufgabe gestellt, die Folge einer im Augenblicke t_1 plötzlich einsetzenden, dann aber beliebig weiterverlaufenden Ursache $e = f(t)$ zu berechnen. Schon im § 124 haben wir für einen einfachen Kreis mit Widerstand und Induktivität die Übergangsfunktion berechnet und dann im § 127 aus ihr auf die Wirkung eines einfachen Telegraphierzeichens geschlossen. Ähnlich werden wir jetzt die Ursache $f(t)$ als Übereinanderlagerung unzählig vieler nacheinander plötzlich einsetzender konstanter Ursachen auffassen und dann wie im § 127 die Folge durch eine Summation über die Teilfolgen dieser Teilursachen berechnen.

Abb. 315 zeigt, wie die Zerlegung der Ursache $f(t)$ gedacht ist. t sei der feste Zeitpunkt, für den wir die Folge i berechnen wollen; der variable Zeitpunkt dagegen, in welchem die einzelne Teilursache einsetzt, werde mit λ bezeichnet. Es trete also zu der Zeit $\lambda = t_1$ zunächst einmal die endliche Ursache $f(t_1)$ auf; zu

¹ Bei der Kurve für $n = 2$ ist die Zeitkonstante gleich $0,125 nRnC$; das zweigliedrige Kunstkabel entspricht nämlich völlig der Ersatzschaltung des § 141 mit dem einzigen Unterschied, daß bei ihm nur die halbe Kabelkapazität in der Mitte eingeschaltet ist.

² Über Seekabeltelegraphie siehe z. B. K. W. Wagner: Elektr. Nachr.-Techn. 1, 114 (1924).

ihr geselle sich im Zeitpunkt $\lambda = t_1 + d\lambda$ die konstante sehr kleine Teilursache $f(t_1 + d\lambda) - f(t_1)$, im Zeitpunkt $\lambda = t_1 + 2 d\lambda$ die konstante sehr kleine Teilursache $f(t_1 + 2 d\lambda) - f(t_1 + d\lambda)$, im Zeitpunkte $\lambda = \lambda$ die konstante sehr kleine Ursache $f(\lambda) - f(\lambda - d\lambda)$ usw. Für die im Zeitpunkte t_1 plötzlich eintretende Ursache gilt nach § 125 die Übergangsfunktion $\varphi(t - t_1)$, für die im Zeitpunkt $\lambda = \lambda$ eintretende die Übergangsfunktion $\varphi(t - \lambda)$. Die Gesamtfolge ist daher

$$i = f(t_1) \varphi(t - t_1) + \sum_{\lambda=t_1}^t (f(\lambda) - f(\lambda - d\lambda)) \varphi(t - \lambda) \tag{1297}$$

oder in Integralform

$$i = f(t_1) \varphi(t - t_1) + \int_{t_1}^t \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \varphi(t - \lambda) d\lambda. \tag{1298}$$

Integriert man hier partiell, so erhält man¹

$$\begin{aligned} i &= f(t_1) \varphi(t - t_1) + [f(\lambda) \varphi(t - \lambda)]_{t_1}^t - \int_{t_1}^t f(\lambda) \frac{d(\varphi(t - \lambda))}{d\lambda} d\lambda \\ &= f(t) \varphi(0) + \int_{t_1}^t f(\lambda) \frac{d(\varphi(t - \lambda))}{dt} d\lambda \end{aligned} \tag{1299}$$

oder auch

$$i = \frac{d}{dt} \int_{t_1}^t f(\lambda) \varphi(t - \lambda) d\lambda; \tag{1300}$$

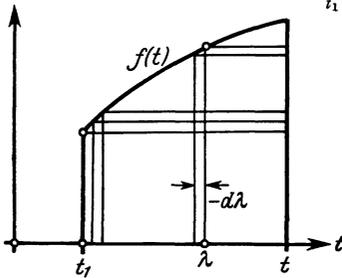


Abb. 315.

denn die unabhängige Veränderliche t steckt nicht nur in der Funktion $\varphi(t - \lambda)$, sondern bildet auch die obere Grenze. Nach dieser Vorschrift² kann man die Wirkung einer beliebigen Ursache berechnen, wenn man die Übergangsfunktion, d. h. die Wirkung einer plötzlich einsetzenden konstanten Ursache von der Größe 1 kennt.

Beispiel. An eine Drosselspule werde im Augenblicke $t = 0$ eine reine Wechselspannung $f(t) = \hat{e} \sin \omega t$ gelegt. Dann ist die Übergangsfunktion nach § 124:

$$\varphi(t) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right). \tag{1301}$$

Da sie für $t = 0$ verschwindet, verwenden wir die Gleichung (1299) und erhalten

$$i = \hat{e} \int_0^t \sin \omega \lambda \frac{e^{-\frac{t-\lambda}{\tau}}}{\tau R} d\lambda = \frac{\hat{e}}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^t e^{\frac{\lambda}{\tau}} \sin \omega \lambda d\lambda. \tag{1302}$$

Nach Anhang 7. folgt hieraus:

$$\begin{aligned} i &= \frac{\hat{e}}{L} e^{-\frac{t}{\tau}} \left| \frac{e^{\frac{\lambda}{\tau}}}{\frac{1}{\tau^2} + \omega^2} \left(\frac{1}{\tau} \sin \omega \lambda - \omega \cos \omega \lambda \right) \right|_0^t \\ &= \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2} \hat{e} e^{-\frac{t}{\tau}} \left\{ e^{\frac{t}{\tau}} \left(\frac{1}{\tau} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right) + \omega \right\} \\ &= \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \hat{e} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \hat{e} \left(\sin \omega t - \frac{\omega L}{R} \cos \omega t \right) \\ &= \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \hat{e} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\hat{e}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin \left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R} \right). \end{aligned} \tag{1303}$$

¹ Bezeichnet man die Ableitung von $\varphi(t - \lambda)$ nach dem Argument $t - \lambda$ mit φ' , so ist $d\varphi/d\lambda = -\varphi'$, $d\varphi/dt = \varphi'$, daher $d\varphi/d\lambda = -d\varphi/dt$.

² Carson, J. R.: Proc. Am. Inst. Electr. Eng. 38, 407 (1919).

Über den im § 97 abgeleiteten stationären Vorgang lagert sich also ein mit der Zeitkonstante τ abklingender flüchtiger Vorgang, der gerade so verläuft, daß der Strom im Augenblick der Einschaltung nicht plötzlich um einen endlichen Betrag springt.

§ 334. **Näherungsverfahren zur Berechnung von Einschwingdauern.** Im allgemeinen werden die Teilschwingungen, die in dem „Spektrum“ einer beliebigen zeitlich veränderlichen Ursache enthalten sind, durch das Übertragungssystem in verschiedener Weise umgebildet. Übernimmt man die umbildende, d. h. schwächende und verzerrende Wirkung des Übertragungssystems aus der komplexen Wechselstromtheorie, wie wir es bisher getan haben, so hat man häufig mathematische Schwierigkeiten zu überwinden, die in keinem rechten Verhältnis zu der physikalischen Einfachheit des Problems stehen. In manchen Fällen kann es zweckmäßiger sein, das Ergebnis der Wechselstromtheorie zu idealisieren; dann werden einfach und mit praktisch hinreichender Genauigkeit auch solche Aufgaben lösbar, bei denen die genaue Methode versagt.

Das Verfahren, die zeitlich veränderliche Ursache in ein Spektrum zu zerlegen, für die umbildende Wirkung des Übertragungssystems unter Berücksichtigung der Ergebnisse der Wechselstromtheorie angenäherte Ansätze zu machen und schließlich die umgewandelten Teilschwingungen zu der gesuchten Folge wieder zusammensetzen, hat in der Hand Küpfmüllers¹ zu wichtigen und auffallend einfachen Ergebnissen geführt.

Als Maß der umbildenden Wirkung eines Übertragungssystems verwenden wir mit Küpfmüller von jetzt ab statt des Widerstandes \mathfrak{B} in Anlehnung an die Bezeichnungsweise der Leitungs- und Filtertheorie einen Faktor $\mathfrak{A} = |\mathfrak{A}| \angle -a$, dessen Betrag $|\mathfrak{A}|$ man den „Übertragungsfaktor“, dessen mit einem Minuszeichen versehene Phase a wir den „Übertragungswinkel“ des Systems nennen. $|\mathfrak{A}|$ und a sind im allgemeinen Funktionen der Frequenz. Wenn Ursache und Folge dieselbe Dimension haben, kann man den Übertragungsfaktor gleich e^{-b} setzen; b und a sind aber nicht gleich den ebenso bezeichneten Vierpolgrößen.

Ist im besonderen der Übertragungsfaktor $|\mathfrak{A}|$ frequenzunabhängig, der Übertragungswinkel a dagegen der Frequenz proportional: $a = t_0\omega$, und betrachten wir den Fall, daß eine konstante Ursache E zur Zeit $t = 0$ plötzlich zu wirken beginnt, so kann die Folge dieser Ursache nach § 328 dargestellt werden durch

$$i = \frac{E}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\mathfrak{A}| \angle -a \angle \omega t}{\omega} d\omega = \frac{|\mathfrak{A}| E}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\angle \omega (t - t_0)}{\omega} d\omega. \quad (1304)$$

Da sich dieser Ausdruck von dem gewöhnlichen Fourierschen Integral nur durch den vorgesetzten Faktor $|\mathfrak{A}|$ und durch die Zusatzzeit $-t_0$ unterscheidet, ist die Folge gegen die Ursache zwar in ihrer Stärke verändert und nach § 125 um die „Laufzeit“ t_0 verzögert, aber in keiner Weise „verzerrt“. Wesentlich ist vor allem der Faktor $|\mathfrak{A}|$; er bedeutet meist eine Schwächung der Folge. Die bloße Verzögerung um t_0 ist in der Praxis der Fernmeldetechnik, solange sie unter 200 bis 300 ms bleibt, ohne Bedeutung.

Nach § 216 sind die hier gemachten Voraussetzungen bei der dickdrähtigen Freileitung sehr nahe erfüllt. Sind sie nicht erfüllt, so gehört das Übertragungssystem zu den verzerrenden Systemen.

Aus der Zerlegung des Faktors \mathfrak{A} in den Übertragungsfaktor und den Übertragungswinkel ergeben sich sofort zwei Arten der Verzerrung: die Amplituden- oder Dämpfungsverzerrung (herrührend von einem Frequenzgang des Übertragungsfaktors) und die Phasenverzerrung (herrührend von einem Frequenz-

¹ Küpfmüller, K.: Elektr. Nachr.-Techn. 5, 19 (1928).

gang des Übertragungswinkels). Zu ihnen gesellt sich als dritte Verzerrung die durch Nichtlinearitäten hervorgerufene Verzerrung; sie tritt auf, wenn der Übertragungsfaktor oder der Übertragungswinkel vom Strom oder von der Spannung abhängen.

§ 335. **Filterwirkung und Aufbauzeiten.** Unsere Aufgabe soll es vor allem sein (§ 339 ff.), den Einfluß eines Filters auf die flüchtigen Vorgänge festzustellen.

Eine reine Sinusschwingung hat ihrer Definition nach eine konstante Amplitude. Anschwellende oder abschwelende Schwingungen können nur durch Übereinanderlagerung von Sinusschwingungen verschiedener Frequenzen dargestellt werden.

Das einfachste Beispiel ist die „Schwebung“. Sie entsteht durch Überlagerung zweier Frequenzen. Je weniger sich diese voneinander unterscheiden, um so langsamer schwankt die Amplitude, um so mehr Zeit beansprucht jedes Einschwingen und jedes Ausschwingen. Man kann hieraus schon schließen, daß jede Beschneidung der zur Übertragung benutzten Frequenzen eine Verlängerung der Auf- und Abbauzeiten nach sich ziehen muß. Hohe auswählende (selektive) Durchlässigkeit ist mit raschem Einschwingen nicht vereinbar.

Es ist daher auch verständlich, weshalb es im allgemeinen nicht erwünscht ist, die zeitliche Dämpfung sehr klein zu machen. Je kleiner sie ist, um so schmaler wird nach § 116 das durchgelassene Frequenzband, um so schwächer werden die flüchtigen Vorgänge abgedämpft. Bei unendlich hoher Abstimmstärke (Schmalheit des durchgelassenen Frequenzbands, Selektivität) ist nur die reine ungedämpfte Sinusschwingung möglich, bei der das Ein- und Ausschwingen unendlich lange dauert.

In den folgenden Paragraphen werden wir den Zusammenhang theoretisch ableiten, der hiernach zwischen der Lochbreite eines Filters und der Aufbauzeit eines Fernmeldezeichens bestehen muß.

§ 336. **Eine zweite Integraldarstellung.** Aus dem Fourierschen Integral (1254) läßt sich leicht ein Integral mit reellem Integranden ableiten, bei dem nur über positive Frequenzen summiert wird. Wir haben im § 328 gefunden, daß für positive Zeiten

$$\int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \frac{\angle \omega t}{\omega} d\omega = 2\pi j \quad (t > 0) \quad (1305)$$

ist. Da $-t$ für positive Zeiten ein negativer Parameter ist, gilt weiter:

$$\int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \frac{\angle -\omega t}{\omega} d\omega = 0 \quad (t > 0), \quad (1306)$$

Subtrahiert man nun die beiden letzten Gleichungen und dividiert zugleich durch $2j$, so erhält man

$$\int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \frac{\angle \omega t - \angle -\omega t}{2j\omega} d\omega = \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \frac{2\pi j}{2j} = \pi. \quad (1307)$$

Da der Integrand $\sin \omega t / \omega$ für $\omega = 0$ den Wert t annimmt, also endlich bleibt, ist es bei diesem Integral nicht nötig, den Nullpunkt durch einen kleinen Halbkreis zu umgehen.

Für negative Zeiten verschwindet das Integral mit dem Faktor $\angle \omega t$, wogegen das Integral mit dem Faktor $\angle -\omega t$ den Wert $2\pi j$ annimmt, da jetzt

– t positiv ist. Bildet man wieder die Differenz der Integrale und teilt durch $2j$, so erhält man den Wert $-\pi$.

Für $t = 0$ nehmen beide Teilintegrale denselben Wert πj an, sie heben sich also bei der Differenzbildung zu Null auf.

Da¹

$$\int_{\omega=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = -\int_{-\omega=\infty}^0 \frac{\sin(-\omega t)}{(-\omega)} d(-\omega) + \int_{\omega=0}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega, \quad (1308)$$

kann man das Ergebnis auch folgendermaßen aussprechen: Das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega$$

ist für positive Zeiten gleich $\pi/2$, für negative $= -\pi/2$, für die Zeit Null gleich Null.

Der Ausdruck

$$e = \frac{E}{2} + \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega \quad (1309)$$

nimmt offenbar für negative Zeiten den Wert Null, für $t = 0$ den Wert $E/2$ und für positive Zeiten den Wert E an; er kann also ebenso wie das Integral (1254) des § 328 zur Darstellung der plötzlichen Einschaltung einer konstanten EMK E dienen. Der erste Summand $E/2$ in (1309) ist als konstante elektromotorische Kraft aufzufassen, die für alle (also auch negative) Zeiten wirkt; er wird durch die unendlich vielen zusammenwirkenden Teilschwingungen des zweiten Glieds für negative Zeiten gerade kompensiert, für positive zu E ergänzt.

§ 337. **Spektrum eines Telegraphenzeichens.** Bevor wir an die Lösung der im § 335 gestellten Aufgabe gehen, wollen wir kurz ein für die Telegraphentechnik wichtiges Problem behandeln. Es werde wie im § 127 ein Telegraphierzeichen gegeben von der Dauer τ_0 ; zur Zeit t_1 werde die Taste heruntergedrückt, zur Zeit $t_2 = t_1 + \tau_0$ wieder losgelassen. Ist E die Betriebsspannung, so können wir uns vorstellen, daß zur Zeit $t = t_1$ eine andauernde elektromotorische Kraft $+E$, zur Zeit t_2 dazu noch eine andauernde elektromotorische Kraft $-E$ eingeschaltet werde. Nach § 125 und (1309) ist also

$$\begin{aligned} e &= \frac{E}{2} + \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega(t-t_1)}{\omega} d\omega - \frac{E}{2} - \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega(t-t_2)}{\omega} d\omega \\ &= \frac{E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega(t-t_1) - \sin \omega(t-t_2)}{\omega} d\omega. \end{aligned} \quad (1310)$$

Wir setzen (Abb. 316)

$$t - t_1 = t - t_m + \frac{\tau_0}{2}, \quad t - t_2 = t - t_m - \frac{\tau_0}{2} \quad (1311)$$

und erhalten

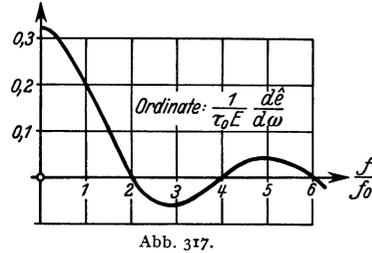
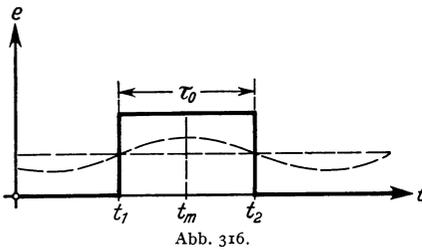
$$e = \frac{2E}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \frac{\omega \tau_0}{2} \cos \omega(t-t_m)}{\omega} d\omega. \quad (1312)$$

¹ Man beachte, daß es bei bestimmten Integralen gleichgültig ist, ob man die Integrationsveränderliche x oder ω oder $-x$ oder $-\omega$ nennt.

Auch ein ganzes Zeichen von der Länge τ_0 kann demnach als eine Über-einanderlagerung von andauernden Teilschwingungen aufgefaßt werden. Die Amplituden dieser Teilschwingungen nehmen aber nicht nur mit steigender Frequenz ab, sondern wechseln noch dazu periodisch. Nennen wir den Scheitelwert einer Teilschwingung $d\hat{e}$, so ist

$$\frac{d\hat{e}}{d\omega} = \frac{2E}{\pi\omega} \sin \frac{\omega\tau_0}{2}. \tag{1313}$$

Dieser Quotient gibt an, mit welchem „Gewicht“ die einzelnen Teilschwingungen zu dem Telegraphierzeichen beitragen. Er ist in Abb. 317 als Funktion



der Frequenz aufgetragen. Dabei bedeutet f_0 die sogenannte „Punktfrequenz“, die der Schwingungsdauer $T = 2\tau_0$ entspricht. Man erkennt, daß in dem „Spektrum“ eines elementaren Telegraphierzeichens im wesentlichen sehr niedrige Frequenzen in der Umgebung der Punktfrequenz enthalten sind, daß dagegen die geraden Vielfachen von f_0 völlig fehlen, ein nach Abb. 316 einleuchtendes Ergebnis.

Bei einer Telegraphiergeschwindigkeit von 600 Buchst/min ist z. B. nach § 128 für einen Schnelltelegraphenapparat mit $z = 5$

$$f_0 = \frac{1}{2\tau_0} = \frac{nz}{2} = \frac{600 \cdot 5}{2 \text{ min}} = 25 \text{ Hz}.$$

§ 338. **Spektrum der plötzlichen Einschaltung einer Sinusspannung.** Ist e der Scheitelwert, Ω die Frequenz einer sinusartigen EMK, die zur Zeit $t = t_1$ plötzlich angeschaltet wird, so ist ihr Augenblickswert für negative und positive Zeiten darstellbar durch

$$e = \frac{\hat{e}}{2} \sin \Omega(t - t_1) + \frac{\hat{e}}{\pi} \sin \Omega(t - t_1) \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega(t - t_1)}{\omega} d\omega; \tag{1314}$$

denn der erste Summand e_1 auf der rechten Seite stellt eine Sinusschwingung vom halben Scheitelwerte dar, der zweite e_2 dagegen für positive Zeiten dasselbe, für negative das Entgegengesetzte. Um die Amplituden der in e_2 steckenden Teilschwingungen zu erhalten, setzen wir zunächst nach einer bekannten Rechenregel

$$e_2 = \frac{\hat{e}}{2\pi} \left(\int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega - \Omega)(t - t_1)}{\omega} d\omega - \int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega + \Omega)(t - t_1)}{\omega} d\omega \right). \tag{1315}$$

In die beiden Teilintegrale führen wir neue Veränderliche ein; und zwar setzen wir

- bei dem ersten Integral in dem Bereich von 0 bis Ω : $\omega = -\omega'$,
- „ „ „ „ „ „ „ „ „ Ω „ ∞ : $\omega = \omega' + \Omega$,
- „ „ zweiten „ „ „ „ „ „ „ „ 0 „ $-\Omega$: $\omega = \omega'$,
- „ „ „ „ „ „ „ „ „ $-\Omega$ „ ∞ : $\omega = \omega' - \Omega$.

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}
 e_2 &= \frac{\hat{e}}{2\pi} \left(\int_{\omega'=0}^{-\Omega} \frac{\cos(\omega' + \Omega)(t - t_1)}{\omega'} d\omega' + \int_{\omega'=0}^{\infty} \frac{\cos \omega'(t - t_1)}{\omega' + \Omega} d\omega' \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\omega'=0}^{-\Omega} \frac{\cos(\omega' + \Omega)(t - t_1)}{\omega'} d\omega' - \int_{\omega'=0}^{\infty} \frac{\cos \omega'(t - t_1)}{\omega' - \Omega} d\omega' \right) \\
 &= \frac{\hat{e}}{2\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\omega' + \Omega} - \frac{1}{\omega' - \Omega} \right) \cos \omega'(t - t_1) d\omega' = \frac{\Omega \hat{e}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega'(t - t_1)}{\Omega^2 - \omega'^2} d\omega'. \quad (I3I6)
 \end{aligned}$$

Die Amplitude einer Teilschwingung, deren Frequenz zwischen ω und $\omega + d\omega$ liegt, ist also in diesem Falle mit $\eta = \omega/\Omega$:

$$d\hat{e}_2 = \frac{\hat{e} \Omega d\omega}{\pi(\Omega^2 - \omega^2)} = \frac{\hat{e} d\eta}{\pi(1 - \eta^2)}. \quad (I3I7)$$

In Abb. 318 ist die Kurve $d\hat{e}_2/d\eta$ gezeichnet. Unter den Teilschwingungen ist unendlich stark die Frequenz Ω vertreten; außer ihr enthält die plötzlich eingeschaltete Sinusspannung aber auch — mit geringerer Amplitude — alle anderen Frequenzen von 0 bis ∞ .

In der plötzlichen Anschaltung der Frequenz 800 Hz ist nach (I3I7) ein 10 Hz breiter Spektralbereich in der Nähe von 700 Hz mit dem Scheitelwert 0,0170 \hat{e} , in der Nähe von 300 Hz mit dem Scheitelwert 0,0046 \hat{e} vertreten.

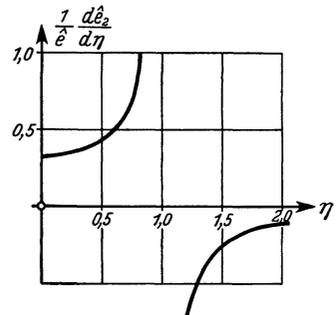


Abb. 318.

§ 339. Plötzliche Anlegung einer konstanten EMK an eine Spulen- oder Pupinleitung. Nachdem wir in den beiden vorhergehenden Paragraphen die beiden praktisch wichtigsten Ursachen in ihre Teilursachen zerlegt haben, gehen wir jetzt zu einem besonders einfachen Beispiel für die Dämpfungsverzerrung über. Eine konstante EMK E , die zur Zeit $t = t_1$ plötzlich einsetzt:

$$e = E \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega(t - t_1)}{\omega} d\omega \right\} \quad (I3I8)$$

werde an eine Spulen- oder Pupinleitung gelegt. Dieser komme in dem Bereich von $\omega = 0$ bis $\omega = \omega_0$ der konstante Übertragungsfaktor $|\mathfrak{A}|$ zu; ihr Übertragungswinkel steige in demselben Bereich proportional der Frequenz:

$$a = t_0 \omega, \quad (I3I9)$$

eine Voraussetzung, die natürlich eigentlich nur für Frequenzen erheblich unter der Grenzfrequenz zulässig ist. Dann ist die Wirkung am Ende der Pupinleitung, also z. B. die Spannung u an ihrem Ausgang, darstellbar durch

$$u = |\mathfrak{A}| E \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} \frac{\sin \omega(t - t_1 - t_0)}{\omega} d\omega \right\}. \quad (I320)$$

Das hier auftretende Integral unterscheidet sich von dem im § 336 betrachteten dadurch, daß es nicht zwischen 0 und ∞ , sondern zwischen endlichen Grenzen zu nehmen ist.

Solche Integrale sind näher untersucht: Man nennt die transzendenten Funktionen

$$-\int_x^\infty \frac{\cos y}{y} dy = \text{Ci}(x) \quad \text{und} \quad \int_0^x \frac{\sin y}{y} dy = \text{Si}(x) \quad (1321)$$

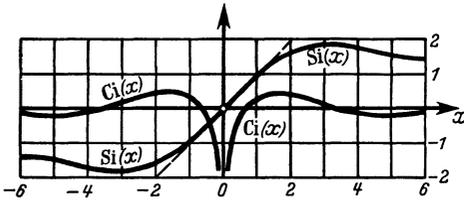


Abb. 319.

„Integralkosinus“ und „Integralsinus“. Sie können für reelle Argumente mit Hilfe von Reihenentwicklungen¹ leicht zahlenmäßig berechnet werden. Ihr Verlauf ist in Abb. 319 wiedergegeben. Ci konvergiert bei unendlich wachsendem x gegen Null, Si gegen $\pi/2$.

Aus den Definitionen (1321) lassen sich einige einfache Rechenregeln ableiten, die wir hier zusammenstellen. Zunächst ist

$$\text{Ci}(-x) = \text{Ci}(x), \quad \text{Si}(-x) = -\text{Si}(x) \quad (1323)$$

wie bei den trigonometrischen Funktionen. Setzt man weiter $y = \omega t$, $x = \omega_0 t$, wo t eine beliebige Zeit, ω_0 eine ausgezeichnete Frequenz ist, so erhält man aus (1321)

$$-\int_{\omega=\omega_0}^\infty \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega = \text{Ci}(\omega_0 t), \quad \int_{\omega=0}^{\omega_0} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \text{Si}(\omega_0 t). \quad (1324)$$

Endlich ist

$$\frac{d}{dx} \text{Si}(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad (1325)$$

also

$$\frac{d}{dt} \text{Si}(\omega_0 t) = \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t} \omega_0. \quad (1326)$$

Wir wenden die Rechenregel (1324) auf die Gleichung (1320) an und erhalten

$$u = |\mathfrak{U}| E \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\omega_0(t - t_1 - t_0)) \right\}. \quad (1327)$$

Die Endspannung strebt also mit wachsender Zeit dem Werte $|\mathfrak{U}| E$ zu. Den Wert $|\mathfrak{U}| E/2$ erreicht sie zur Zeit $t = t_1 + t_0$ (Punkt P Abb. 320); die Konstante t_0 der Gleichung (1319) kann daher wieder als „Laufzeit“ gedeutet werden.

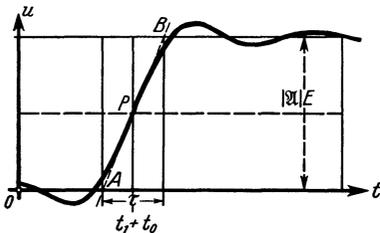


Abb. 320.

Die „Einschwingdauer“ τ läßt sich, wenn sie zweckmäßig definiert wird, leicht berechnen. Wir denken uns im Punkte P die Berührende an die Kurve $u = f(t)$ gelegt. Sie schneide die Zeitachse im Punkte A, eine Horizontale in der Höhe $|\mathfrak{U}| E$ in B. Dann sehen wir als Einschwingdauer τ den Abstand des Punktes A von der Projektion des Punktes B auf die Abszissenachse an.

Aus dieser Definition ergibt sich in unserem Fall sofort:

$$\tau = \left(\frac{|\mathfrak{U}| E}{du/dt} \right)_{t=t_1+t_0} = \left(\frac{1}{\frac{1}{\pi} \frac{\sin \omega_0(t - t_1 - t_0)}{\omega_0(t - t_1 - t_0)} \omega_0} \right)_{t=t_1+t_0} = \frac{\pi}{\omega_0} = \frac{1}{2 f_0}. \quad (1328)$$

¹ Für den Integralsinus kann man die Reihe

$$\text{Si}(x) = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \dots \quad (1322)$$

leicht ableiten, indem man den Sinus entwickelt und Glied für Glied integriert. Näheres über den Integralkosinus und Integralsinus findet man in den Funktionentafeln von E. Jahnke u. F. Emde. Leipzig: B. G. Teubner 1909.

Die Spannung am Ende einer Spulen- oder Pupinleitung, an deren Anfang man die konstante EMK E legt, steigt also um so rascher auf den Wert $|\mathfrak{A}| E$, je höher die Grenzfrequenz liegt; und zwar ist die Aufbaudauer gleich dem reziproken Wert der doppelten in Hertz ausgedrückten Grenzfrequenz. Soll also z. B. bei der Unterlagerungstelegraphie (§ 372) der Auf- und Abbau der Zeichen nicht länger als 4 ms dauern, so muß die benutzte Spulenleitung mindestens die Frequenzen von 0 bis zu $1/8\text{ms} = 125 \text{ Hz}$ übertragen.

Wenn die Theorie auch schon für negative Zeiten eine Wirkung am Ausgang des Übertragungssystems liefert, so kommt dies natürlich nur von der starken Idealisierung des Problems. Genau genommen stimmt unser Ergebnis nur für hohe Laufzeiten t_0 mit der Erfahrung überein¹.

§ 340. Plötzliche Anlegung einer sinusförmigen elektromotorischen Kraft an eine Spulen- oder Pupinleitung. Wird zur Zeit $t = t_1$ an eine Spulen- oder Pupinleitung eine sinusartige elektromotorische Kraft plötzlich angeschaltet, so müssen wir nach § 338 von dem Ansatz

$$e = \frac{\hat{e}}{2} \left\{ \sin \Omega (t - t_1) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos (\omega - \Omega) (t - t_1)}{\omega} d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos (\omega + \Omega) (t - t_1)}{\omega} d\omega \right\} \quad (1329)$$

ausgehen².

Bei den hier eingeführten Integralen ist zu beachten, daß nicht die Frequenzen der Teilschwingungen, sondern die Integrationsveränderlichen ω von 0 bis ∞ laufen. Das erste Integral enthält z. B. Teilschwingungen aller Frequenzen von $-\Omega$ bis ∞ , das zweite dagegen Teilschwingungen nur von $+\Omega$ bis ∞ (Abb. 321).

Die Spulen- oder Pupinleitung schwäche nun alle Teilschwingungen des Durchlaßbereichs um den

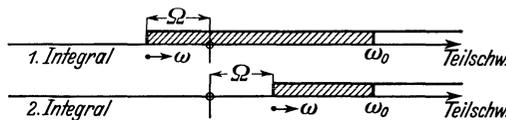


Abb. 321.

Faktor $|\mathfrak{A}|$; die Teilschwingungen des Sperrbereichs unterdrücke sie. Außerdem drehe sie wieder die Phasen aller Teilschwingungen um den Winkel $\alpha = t_0 \omega$. Dabei kommt es überall auf die Teilschwingungen, nicht auf die Integrationsveränderlichen an. Die Phasendrehung im ersten Glied von (1329) ist daher $t_0 \Omega$, im zweiten $t_0 (\omega - \Omega)$, im dritten $t_0 (\omega + \Omega)$.

Eine Schwierigkeit für das Verständnis des Folgenden liegt darin, daß im ersten Integral Teilschwingungen von negativer Frequenz stecken. Aus der Gleichung (1083) des § 294 folgt jedoch, daß die Pupinleitung auch Teilschwingungen negativer Frequenz durchläßt, vorausgesetzt, daß der Betrag dieser Frequenzen unter der Grenzfrequenz bleibt. Man darf an den hier auftretenden negativen Frequenzen so wenig Anstoß nehmen wie z. B. an den komplexen Frequenzen des § 330.

Für den Strom am Ende der Pupinleitung müssen wir demnach gemäß Abb. 321 mit der Abkürzung $t - t_1 - t_0 = t'$ den folgenden Ansatz machen:

$$i = |\mathfrak{A}| \frac{\hat{e}}{2} \left\{ \sin \Omega t' + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0 + \Omega} \frac{\cos (\omega - \Omega) t'}{\omega} d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0 - \Omega} \frac{\cos (\omega + \Omega) t'}{\omega} d\omega \right\}. \quad (1330)$$

Zur Vereinfachung und in Anbetracht dessen, daß die Teilamplituden der Frequenz umgekehrt proportional sind, wollen wir jedoch voraussetzen, die Frequenz des Wechselstroms Ω liege so weit unterhalb der Grenzfrequenz ω_0 , daß

¹ Vgl. K. Küpfmüller: Elektr. Nachr.-Techn. 5, 30 (1928).

² Der Ansatz (1314) kann nicht verwendet werden, weil sein Integrand das Produkt zweier Sinusschwingungen enthält.

wir die beiden oberen Grenzen gleich ω_0 setzen können. Dann dürfen wir die beiden Integrale zusammenfassen und erhalten:

$$i = |\mathfrak{A}| \frac{\hat{e}}{2} \left\{ \sin \Omega t' + \frac{2}{\pi} \sin \Omega t' \int_0^{\omega_0} \frac{\sin \omega t'}{\omega} d\omega \right\}$$

$$= |\mathfrak{A}| \hat{e} \sin \Omega (t - t_1 - t_0) \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si} (\omega_0 (t - t_1 - t_0)) \right\}. \quad (I331)$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von der Gleichung (I327) nur dadurch, daß sie an Stelle von E die gegen die treibende elektromotorische Kraft e um die Laufzeit t_0 verzögerte Schwingung $\hat{e} \sin \Omega (t - t_1 - t_0)$ enthält. Solange also die Sendefrequenz Ω gegen die Grenzfrequenz ω_0 klein ist, schwingt die Endspannung mit einer „Einhüllenden“ $\varphi(t)$ ein, für die die Gleichung

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si} (\omega_0 (t - t_1 - t_0)) \quad (I332)$$

gilt. Die Einschwingdauer ist wie vorher gleich $1/2f_0$.

Wenn die Sendefrequenz in der Nähe der Grenzfrequenz liegt, muß man¹ die oberen Grenzen $\omega_0 + \Omega$ und $\omega_0 - \Omega$ der beiden Integrale beibehalten. Dann werden die Rechnungen etwas verwickelter; die Einschwingdauer wird größer als $1/2f_0$. Doch macht der Fehler bei $\Omega = 0,8 \omega_0$ erst etwa 20% aus.

§ 341. Plötzliche Anlegung einer sinusförmigen elektromotorischen Kraft an ein Wellenfilter. Statt der in den beiden vorhergehenden Paragraphen betrachteten Spulen- oder Pupinleitung wollen wir uns jetzt als Übertragungssystem ein Wellenfilter denken. Die Frequenz der plötzlich angelegten Sendeschwingung liege in der Mitte des Durchlaßbereichs, dessen Breite wir w nennen; das Filter schwächt also zwischen $\omega = \Omega - w/2$ und $\omega = \Omega + w/2$ mit dem Übertragungsfaktor $|\mathfrak{A}|$, während es außerhalb dieser Frequenzen alles wegschneidet.

Der Übertragungswinkel der Wellenfilter steigt im Durchlaßbereich von 0 auf $n\pi$, wo n eine ganze Zahl ist. Wir setzen wieder vereinfachend voraus, daß dieser Anstieg ein linearer sei und schreiben daher im Durchlaßbereich

$$a = n\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{\omega - \Omega}{w} \right) = a_0 + t_0 \omega, \quad (I333)$$

wo $n\pi/w$ durch t_0 abgekürzt ist.

Auch in diesem Falle gilt der Ansatz (I329). Der Durchlaßbereich besteht jetzt aber (Abb. 322) bei dem ersten Integral aus zwei Stücken, einem im Posi-

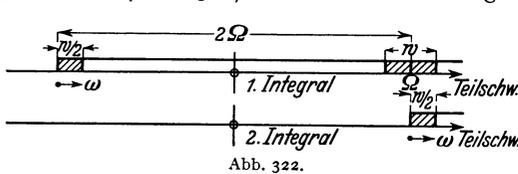


Abb. 322.

tiven liegenden von der Breite w (zwischen $\omega = 2\Omega - w/2$ und $\omega = 2\Omega + w/2$) und einem im Negativen liegenden von der Breite $w/2$ (zwischen $\omega = 0$ und $\omega = w/2$). Bei dem zweiten Integral kommt nur ein im Positiven

liegendes Stück von der Breite $w/2$ in Frage (zwischen $\omega = 0$ und $\omega = w/2$).

Nehmen wir zur Vereinfachung an, die Bandbreite w sei klein im Vergleich zur Sendefrequenz, so hebt sich das Teilintegral

$$\int_{2\Omega - \frac{w}{2}}^{2\Omega + \frac{w}{2}} \frac{\cos((\omega - \Omega)t' - a_0)}{\omega} d\omega \quad (I334)$$

¹ Außerdem muß man dann die Phasenverzerrung berücksichtigen, s. § 346.

fast völlig auf, und wir erhalten näherungsweise

$$i = |\mathfrak{X}| \frac{\hat{\epsilon}}{2} \left\{ \sin(\Omega t' - a_0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{w}{2}} \frac{\cos((\omega - \Omega)t' - a_0)}{\omega} d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{w}{2}} \frac{\cos((\omega + \Omega)t' - a_0)}{\omega} d\omega \right\}$$

$$= |\mathfrak{X}| \hat{\epsilon} \sin(\Omega(t - t_1 - t_0) - a_0) \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si} \left(\frac{w}{2}(t - t_1 - t_0) - a_0 \right) \right\}. \quad (\text{I335})$$

Die Einhüllende ist also bei dem Einschwingvorgang des Wellenfilters

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si} \left(\frac{w}{2}(t - t_1 - t_0) - a_0 \right). \quad (\text{I336})$$

Sie ähnelt der Einhüllenden bei der Pupinleitung; doch ist die Einschwingdauer

$$\tau = \frac{2\pi}{w} = \frac{1}{f_2 - f_1}, \quad (\text{I337})$$

wenn wir die Frequenzen der Durchlaßgrenzen mit f_1 und f_2 bezeichnen. Die Einschwingdauer ist daher gleich dem reziproken Wert der in Hz gemessenen Bandbreite. Umgekehrt erfordert eine vorgeschriebene Einschwingdauer τ unter allen Umständen ein Frequenzband von der in Hz gemessenen Bandbreite $1/\tau$. Zu der Einschwingdauer 10 ms gehören z. B. 100 Hz.

Diese Beziehung ist insbesondere für die Tonfrequenztelegraphie von großer Wichtigkeit.

§ 342. Plötzliche Anlegung einer sinusförmigen elektromotorischen Kraft an ein Wellenfilter, wenn ihre Frequenz nicht in den Durchlaßbereich fällt. Unsere Überlegungen in dem vorhergehenden Paragraphen zeigen, daß es eine vollkommene Filterwirkung überhaupt nicht geben kann. Denn jede plötzlich einsetzende Sinusschwingung enthält in sich ein ganzes Spektrum von Frequenzen. Ein Teilfrequenzband wird in jedem Falle vom Filter durchgelassen. Freilich können sich solche Einwirkungen nur als vorübergehende Stöße bemerkbar machen. Haben sie ihren Beharrungszustand erreicht, so ist das Filter nicht mehr durchlässig für sie. Die Einwirkung ist nach dem Spektrum der Abb. 318 um so stärker, je breiter der Durchlässigkeitsbereich ist und je näher ihm die Frequenz der Störung liegt.

§ 343. Phasenverzerrung. Phasenverzerrung¹ tritt auf, wenn der Übertragungswinkel einen von dem linearen Verlauf abweichenden Frequenzgang zeigt. Leider ist auch bei den einfachsten praktisch wichtigen Frequenzgängen des Übertragungswinkels die Auswertung des entsprechenden Fourierschen Integrals kaum möglich.

Man kann aber ein Näherungsverfahren benutzen, das auf dem Gedanken beruht, daß die einzelnen z. B. in einer plötzlich angeschalteten sinusartigen EMK enthaltenen Frequenzen zum Durchlaufen eines phasenverzerrenden Übertragungssystems verschiedene Zeiten brauchen und daß dadurch ebenfalls eine Verlangsamung des Einschwingens hervorgerufen wird.

Wir werden daher zunächst die Frage nach den den einzelnen Frequenzen zuzuordnenden Laufzeiten zu beantworten suchen.

§ 344. Phasen- und Gruppengeschwindigkeit. In § 228 haben wir als Phasengeschwindigkeit einer Welle

$$y = A \cos(\omega t - \alpha x + \varphi)$$

¹ Küpfmüller, K.: Tel.- u. Fernspr.-Techn. 12, 53 (1923); Küpfmüller, K., und H. F. Mayer: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. 5, 51 (1926).

die Größe

$$v = \frac{\omega}{\alpha}$$

definiert. Sie ist im allgemeinen frequenzabhängig, da dies meist für das bezogene Winkelmaß α zutrifft; nur auf der dickdrätigen Freileitung (und bei der drahtlosen Telegraphie und Telephonie im leeren Raum) pflanzen sich die Wellen aller Frequenzen mit derselben Phasengeschwindigkeit oder, wie man es optisch ausdrücken kann, „dispersionsfrei“ fort.

Enthält eine Welle gleichzeitig mehrere Frequenzen, ist sie also optisch gesprochen nicht einfarbig, so kann man für sie eine neue Geschwindigkeit, die „Gruppengeschwindigkeit“, definieren.

Wir zeigen dies zunächst für den einfachsten Fall, für zwei Wellen gleicher Amplitude von den wenig verschiedenen Frequenzen ω_1 und ω_2 , denen die Wellenlängenkonstanten α_1 und α_2 und die Anfangsphasen φ_1 und φ_2 zugeordnet seien. Diese Wellen lassen sich leicht summieren:

$$y = A (\cos (\omega_1 t - \alpha_1 x + \varphi_1) + \cos (\omega_2 t - \alpha_2 x + \varphi_2)) \\ = 2A \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} x + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} x + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right). \quad (I338)$$

Die „Wellengruppe“ (Abb. 323) besteht also aus einer Welle von der hohen Frequenz $(\omega_1 + \omega_2)/2$ und der kurzen Wellenlänge $4\pi/(\alpha_1 + \alpha_2)$, deren Amplitude sich in einer solchen Weise zeitlich-räumlich ändert, daß der Eindruck entsteht, als ob die kurze und hochfrequente Welle ihrerseits wieder eine längere Welle bildete, deren Wellenlänge gleich $4\pi/(\alpha_1 - \alpha_2)$ ist. Diese längere Welle, die eine Art „räumliche Schwebung“ darstellt, verschiebt sich mit einer Geschwindigkeit

$$g = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad (I339)$$



Abb. 323.

und zwar, falls man nur auf ihren äußeren Umriß (ihre Einhüllende) achtet, ohne Formänderung; die kürzeren höherfrequenten Wellen freilich laufen im Rahmen der Schwebungswelle mit der von g abweichenden Phasengeschwindigkeit

$$v = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \quad (I340)$$

über die Schwebungswelle hin. Da die Energie der Gesamtwelle in den Bäuchen der Schwebung konzentriert ist, ist g die Geschwindigkeit der Energie, v dagegen angenähert die mittlere Phasengeschwindigkeit der beiden Teilwellen.

Stimmen ω_1 und ω_2 nahezu überein, so kann man

$$g = \frac{d\omega}{d\alpha} \quad (I341)$$

setzen. Diese Größe nennt man die „Gruppengeschwindigkeit“¹.

Die Ableitung läßt sich leicht für eine Übereinanderlagerung vieler Einzelwellen verallgemeinern. Greifen wir aus ihnen ein unendlich schmales Frequenzband heraus, das von ω bis $\omega + d\omega$ reicht, so sitzt an irgendeiner Stelle x zur Zeit t nur dann ein Energiezentrum der Frequenz ω , wenn sich die Amplituden innerhalb des Bandes gegenseitig verstärken, d. h. wenn zwischen ihnen keine Phasenunterschiede bestehen. Mathematisch bedeutet dies: die Lage x der Energiezentren muß der Bedingung

$$\frac{d}{d\omega} (\omega t - \alpha x + \varphi) = 0 \quad (I342)$$

¹ Vgl. Lord Rayleigh: Proc. Lond. Math. Soc. 9, 21 (1877).

genügen. Aus ihr folgt aber

$$t = \frac{d\alpha}{d\omega} x - \frac{d\varphi}{d\omega} = 0 \quad (1343)$$

oder

$$x = \frac{d\omega}{d\alpha} \left(t + \frac{d\varphi}{d\omega} \right). \quad (1344)$$

Wendet man hierauf die allgemeine Definition der Geschwindigkeit an, so erkennt man, daß sich die Energie mit der Gruppengeschwindigkeit g bewegt.

Bei Leitungen ist es bequemer, mit der Gruppenlaufzeit t_0 zu rechnen, d. h. mit der Zeit, die irgendeine Frequenz ω zum Durchlaufen der Leitung braucht. Sie ist definiert durch

$$t_0 = \frac{l}{g} = l \frac{d\alpha}{d\omega} = \frac{da}{d\omega}, \quad (1345)$$

ist also gleich dem Differentialquotienten des Winkelmaßes nach der Frequenz.

Die Gruppengeschwindigkeit und die Gruppenlaufzeit müssen als die für die Fortpflanzung von Wellen beliebiger Art maßgebenden Größen angesehen werden, da es in der Wirklichkeit keine scharfen Einzelfrequenzen, sondern nur mehr oder weniger schmale Frequenzbänder gibt.

§ 345. Die Gruppenlaufzeit beim Pupinkabel. Die Gruppenlaufzeit unterscheidet sich bei allen Leitungsarten mit Ausnahme allein der ganz dickdrähtigen Freileitungen merklich von der Phasenlaufzeit. Von praktischer Bedeutung ist jedoch der Unterschied der beiden Laufzeiten nur beim Pupinkabel, bei dem er mit dem Bestehen einer endlichen Grenzfrequenz zusammenhängt.

Bezeichnen wir die Zahl der Spulenfelder mit n und den Übertragungswinkel des ganzen Kabels mit a , so ist

$$\sin \frac{a}{2n} = \eta, \quad (1346)$$

also

$$\frac{a}{\omega} = n s \sqrt{LC} \frac{\arcsin \eta}{\eta} = l \sqrt{LC} \frac{\arcsin \eta}{\eta}. \quad (1347)$$

Andererseits ist

$$\frac{1}{2n} \cos \frac{a}{2n} \cdot \frac{da}{d\omega} = \frac{d\eta}{d\omega} = \frac{1}{\omega_0} \quad (1348)$$

und daher

$$\frac{da}{d\omega} = \frac{2n}{\omega_0 \cos \frac{a}{2n}} = \frac{l\sqrt{LC}}{\sqrt{1-\eta^2}}. \quad (1349)$$

Beim Pupinkabel sind also die beiden Laufzeiten für niedrige Frequenzen nahezu konstant gleich $l\sqrt{LC}$; bei Annäherung an die Grenzfrequenz steigen sie jedoch an, die Phasenlaufzeit auf das $\pi/2$ fache, die Gruppenlaufzeit auf unendlich hohe Werte (Abb. 324). Da die Gruppenlaufzeit maßgebend ist¹, pflanzen sich die hohen Frequenzen auf den Pupinleitungen sehr viel langsamer fort als die niedrigen. Man nennt diese Erscheinung in Übereinstimmung mit der Definition in § 334 „Phasenverzerrung“.

§ 346. Einschaltung eines Wechselstroms bei Phasenverzerrung. Nach § 338 enthält ein plötzlich einsetzendes Wechselstromzeichen der Frequenz Ω ein ganzes Spektrum von Frequenzen von 0 bis ∞ , darunter mit besonderer Stärke die Frequenzen in der Nähe von Ω . Wir wollen voraussetzen, daß das Über-

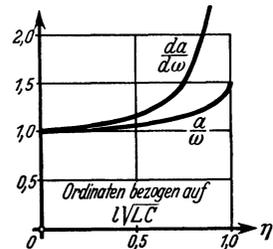


Abb. 324.

¹ Der Verfasser hat die Vermutung, daß für die Phasenverzerrung nicht, wie zuerst angenommen wurde, die Phasen-, sondern die Gruppengeschwindigkeit maßgebend ist, sehr bald nach der ersten Auffindung der Erscheinung ausgesprochen.

tragungssystem frei von Dämpfungsverzerrung sei. Dann ist es auch ohne Rechnung einleuchtend, daß die erste Spur einer Wirkung am Ausgang des Systems nach Ablauf der kleinsten Gruppenlaufzeit, die Hauptwirkung dagegen nach Ablauf der zu der Sendefrequenz gehörigen Gruppenlaufzeit eintrifft. Die Frequenzen unter Ω laufen ja rascher, die Frequenzen über Ω sind nach Abb. 318 von geringem Einfluß. Die Einschwingdauer kann daher gleich

$$\tau = \left(\frac{da}{d\omega}\right)_{\Omega} - \left(\frac{da}{d\omega}\right)_{\min} \quad (1350)$$

gesetzt werden¹. Zur experimentellen Nachprüfung dieser Gleichung mißt man $da/d\omega$ am bequemsten mit dem Schleifendämpfungsmesser.

Wenden wir das Gesagte auf den Fall an, daß ein Wechselstromzeichen über ein langes Pupinkabel gesandt wird. Bei diesem ist ($H = \Omega/\omega_0$)

$$\left(\frac{da}{d\omega}\right)_{\Omega} = \frac{l\sqrt{LC}}{\sqrt{1-H^2}}; \quad \left(\frac{da}{d\omega}\right)_{\min} = \left(\frac{da}{d\omega}\right)_{\eta=0} = l\sqrt{LC}, \quad (1351)$$

also

$$\tau = l\sqrt{LC} \left(\frac{1}{\sqrt{1-H^2}} - 1 \right) = \frac{2n}{\omega_0} \left(\frac{1}{\sqrt{1-H^2}} - 1 \right), \quad (1352)$$

wo n die Zahl der Spulen bedeutet. Oszillographische Aufnahmen haben gezeigt, daß diese Formel gut mit der Erfahrung übereinstimmt.

Die bei langen Leitungen durch die Phasenverzerrung hervorgerufene Verlängerung der Einschwingdauer kann durch Wahl einer besonders hohen Grenzfrequenz, also „leichte Pupinisierung“, unschädlich gemacht werden. Nennen wir die höchste zulässige Einschwingdauer τ , so gilt nach (1352)

$$\tau \approx \frac{2n}{\omega_0} \left(1 + \frac{H^2}{2} - 1 \right) = \frac{2n}{\omega_0} \frac{\Omega^2}{2\omega_0^2} \quad (1353)$$

oder

$$\omega_0 \approx \sqrt[3]{\frac{n\Omega^2}{\tau}}. \quad (1354)$$

Die Grenzfrequenz muß demnach proportional der dritten Wurzel aus der Leitungslänge erhöht werden. Will man also von einer Reichweite von 500 km zu einer Reichweite von 4000 km übergehen, ohne daß die durch die Phasenverzerrung hervorgerufene Einschwingdauer zunimmt, so muß man die Grenzfrequenz doppelt so hoch wählen², — vorausgesetzt natürlich, daß man zur Aufhebung der Phasenverzerrung keine andern Hilfsmittel verwendet (§ 358).

In einer amerikanischen Patentanmeldung der Western Electric Company wird der (unnötig niedrige) Wert $\tau = 5$ ms für $\Omega = 12500/s$ als Höchstwert angegeben³. Nehmen wir $\tau = 10$ ms, so erhalten wir für eine Leitung von 4000 km Länge bei einem Spulenabstand von 2 km die Grenzfrequenz $f_0 \approx 5000$ Hz.

Bei langen Leitungen und Benutzung von Wellenfiltern, z. B. bei langen Leitungen für Tonfrequenztelegraphie, hat man Amplituden- und Phasenverzerrung gleichzeitig. Am nächsten liegt die Annahme, daß es erlaubt sei, die nach den Formeln (1337) und (1350) berechneten Einschwingdauern einfach zu addieren. Ist w die Durchlaßbreite des Filters, so hätte man danach

$$\tau = \frac{2\pi}{w} + \left(\frac{da}{d\omega}\right)_{\Omega} - \left(\frac{da}{d\omega}\right)_{\Omega - \frac{w}{2}} \quad (1355)$$

zu setzen.

Küpfmüller hat gezeigt, daß diese Art der Berechnung zwar bei kürzeren Leitungen zulässig ist, bei längeren jedoch zu Fehlern führt.

¹ Wegen der Begründung dieses Ansatzes vergleiche man die Arbeit von Küpfmüller u. Mayer: a. a. O. (§ 343).

² Damit steigen auch die Kosten der Leitung ungefähr auf das Doppelte.

³ Deutsche Anmeldung B 103603 VIII. 21 c.

XVI. Telephonie und Telegraphie auf große Entfernungen.

§ 347. Vierdraht- und Zweidrahtverbindungen. Schon im § 311 haben wir die Schaltung eines Zweiröhrenverstärkers kennengelernt, der die störungsfreie Verstärkung eines Wechselgesprächs ermöglicht. Die beiden an einen solchen Verstärker heranführenden Leitungen gabeln sich, und es steht daher für jede Gesprächsrichtung eine besondere Röhre zur Verfügung. Rückkopplungen werden durch die in § 311 beschriebenen Ausgleichs- oder Brückenschaltungen unterdrückt.

Bei langen Verbindungen läßt sich dieser Grundgedanke auf verschiedene Weise in die Wirklichkeit umsetzen.

Man kann zunächst für jede Sprechrichtung eine besondere Doppelleitung mit einseitig wirkenden Verstärkern vorsehen und die beiden Doppelleitungen nur an den beiden Enden der ganzen Verbindung zusammenführen. Schematisch ist diese Schaltung, die „Vierdrahtschaltung“, in Abb. 325 dargestellt. Die dicke Linie stellt die Doppelleitung für die Sprechrichtung von links nach rechts, die dünne die Doppelleitung für die Sprechrichtung von rechts nach links dar. Da zur Verbindung der Stationen untereinander vier Drähte nötig sind, machen bei den Vierdrahtverbindungen die Leitungskosten einen sehr erheblichen Teil der Anlagekosten aus.

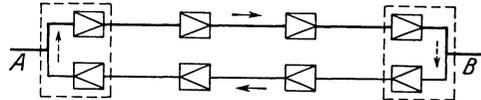


Abb. 325.

Die Endgabeln mit den Ausgleichs- oder Brückenschaltungen liegen in den Fernämtern; in der Regel werden dort bereits Verstärker eingeschaltet (siehe die Abbildung).

Bei den „Zweidrahtverbindungen“ (Abb. 326) gabeln sich im Gegensatz zu den Vierdrahtverbindungen die Stromwege in jedem Verstärkerarm von neuem.

Zwischen den Ämtern laufen die Gespräche beider Richtungen über dieselben Doppelleitungen. Die Leitungskosten sind gegenüber den Vierdrahtverbindungen annähernd auf die Hälfte herabgesetzt; ein Nachteil der Schaltung liegt aber darin, daß, wie die Abbildung zeigt, viel mehr Rückkopplungswege zu sperren sind als bei den Vierdrahtverbindungen.

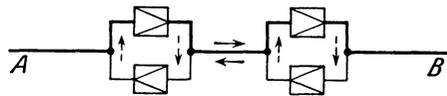


Abb. 326.

Ein neueres Verfahren, die „Zweibandtelephonie“, sucht die wirtschaftlichen Vorteile der Zweidrahtverbindung mit den physikalischen der Vierdrahtverbindung zu vereinigen. Wir werden auf sie im § 364 zurückkommen.

§ 348. Störungen bei langen Fernsprechverbindungen. Bei den langen Verbindungen treten teils infolge ihrer Länge, teils infolge des Zusammenwirkens dämpfender und verstärkender Elemente neue Störungen und Schwierigkeiten auf, die es bei kürzeren Verbindungen entweder überhaupt nicht gibt oder die sich wenigstens praktisch nicht bemerkbar machen. Wir wollen diese besonderen Einflüsse jetzt genauer untersuchen; und zwar beginnen wir mit dem Einfluß von Störungen, die man zusammenfassend als Echostörungen bezeichnet. Wir verstehen darunter Störungen, die dadurch veranlaßt werden, daß die Energie nicht nur in der beabsichtigten Richtung, sondern — infolge von Reflexionen oder Gabelungen der Stromwege — auch in der umgekehrten Richtung wandert. Im Abschnitt IX (z. B. im § 233) haben wir zwar gesehen, daß sich wegen der

Leitungsdämpfung ein Anpassungsfehler seinem vollen Betrage nach nur unmittelbar vor der Fehlerstelle bemerkbar macht. Die langen Verbindungen enthalten jedoch Verstärker, und zwar für beide Übertragungsrichtungen; die Echoströme werden daher wie die Fernsprechströme selbst verstärkt, und dies kann zu unangenehmen Verzerrungen oder gar zur Selbsterregung der Schaltungen führen.

§ 349. Verzerrung durch mangelhafte Anpassung bei verstärkenden Vierpolen. Wir wollen — zunächst ohne Rücksicht auf die Bemerkungen im § 199 — voraussetzen, ein verstärkender Vierpol werde durch eine Stromquelle vom Anpassungsmaß r_a betrieben und arbeite auf einen Verbraucher vom Anpassungsmaß r_e . Die komplexe „Vierpolverstärkung“ des Vierpols sei $\mathfrak{s} = -g$. Dann ist nach § 236 die Betriebsverstärkung

$$\mathfrak{s} = -g = \mathfrak{s} - \ln \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{I}g r_a}} + \sqrt{\mathfrak{I}g r_a} \right) \right) - \ln \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{I}g r_e}} + \sqrt{\mathfrak{I}g r_e} \right) \right) - \ln (1 - e^{-2(r_a + r_e - \mathfrak{s})})$$

oder, wenn die Anpassungsgüte nicht allzu gering ist,

$$\mathfrak{s} \approx \mathfrak{s} - \ln (1 - e^{-2(r_a + r_e - \mathfrak{s})}). \quad (1356)$$

Von Interesse ist vor allem der der Dämpfung b entsprechende reelle Anteil der komplexen Verstärkung

$$s \approx s - \ln |1 - e^{-2(r_a + r_e - \mathfrak{s})}|. \quad (1357)$$

Bei unvollkommener Anpassung (nicht unendlich großem $r_a + r_e$) kann hiernach zwischen der Betriebsverstärkung und der Vierpolverstärkung ein erheblicher Unterschied bestehen, und zwar trifft dies ganz besonders bei hoher Vierpolverstärkung zu. Setzt man $r_a + r_e - \mathfrak{s} = D + jD'$, so wird

$$s = s - \ln |1 - e^{-2D} \angle -2D'| = s - \frac{1}{2} \ln (1 - 2e^{-2D} \cos 2D' + e^{-4D}). \quad (1358)$$

Ist z. B. bei irgendeiner Frequenz $r_a + r_e - \mathfrak{s} = 0,5 + j \cdot 0^0$, so übertrifft die Betriebsverstärkung die Vierpolverstärkung um 0,46 Neper; ist dagegen z. B. $r_a + r_e - \mathfrak{s} = 0,5 \pm j \cdot 90^0$, so wird die Vierpolverstärkung im Betriebe nicht völlig erreicht, die Betriebsverstärkung ist um 0,31 Neper kleiner. Man bezeichnet diese Verstärkungsverzerrungen als „Rückkopplungsverzerrungen“.

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo die Komponenten D und D' der komplexen Differenz $r_a + r_e - \mathfrak{s}$ beide gleich Null sind, wo also die Vierpolverstärkung nach Betrag und Phase die Summe der Anpassungsmaße erreicht: in diesem Falle wird die Betriebsverstärkung unendlich groß. Zur Erzeugung eines endlichen Ausgangsstroms \mathfrak{S}_2 bedarf es keiner endlichen elektromotorischen Kraft \mathfrak{E} mehr. Dann¹ erregt sich die Schaltung von selbst; wir wollen daher den Wert $s_0 = r_a + r_e$ die „Pfeifgrenze“ oder „Selbsterregungsgrenze“ nennen. Die Vierpolverstärkung s muß offenbar für alle benutzten Frequenzen unterhalb der Pfeifgrenze s_0 bleiben.

An der Pfeifgrenze wird die im § 150 eingeführte „komplexe Kopplung“ \mathfrak{K} gleich ± 1 . Nach den Gleichungen (775) und (776) des § 231 ist nämlich allgemein

$$\mathfrak{K}^2 = \frac{\mathfrak{Cof} r_a \mathfrak{Cof} r_e}{\mathfrak{Cof} (g + r_a) \mathfrak{Cof} (g + r_e)}. \quad (1359)$$

Dieser Bruch nimmt für $g + r_a + r_e = -\mathfrak{s} + r_a + r_e = 0$ den Wert 1 an. Dann wird nach (414), wenn die elektromotorische Kraft gleich Null ist, der sekundäre Strom nicht eben-

¹ Feldtkeller, R.: Tel.- u. Fernspr.-Techn. 14, 274 (1925).

falls gleich Null, sondern unbestimmt. Die Kopplung wird allerdings auch dann gleich ± 1 , wenn das Übertragungsmaß g verschwindet. Dadurch erregt sich jedoch das System nicht, da dann der Kernwiderstand nach (442) über alle Grenzen wächst. Der sekundäre Strom nimmt, wie leicht zu sehen, für $g = 0$ den Wert $\mathcal{E}/(\mathfrak{R}_a + \mathfrak{R}_e)$ an.

Da sich die in Zweidrahtverbindungen verwendeten Zweiwegverstärker in der einen Übertragungsrichtung genau ebenso verhalten wie in der andern, waren wir berechtigt, die im Abschnitt VI abgeleitete Vierpoltheorie auf sie anzuwenden, eine Auffassung, an deren Zulässigkeit nach dem Ergebnis zahlreicher Messungen nicht zu zweifeln ist.

§ 350. Das Zustandekommen der Selbsterregung beim Zweiwegverstärker. Auf der Grundlage der Überlegungen des § 209 wollen wir noch genauer verfolgen, wie die Selbsterregung in einem Zweiwegverstärker zustande kommt. Wir verweisen auf die Abb. 284 des § 311; ein Teil von ihr ist in Abb. 327 noch einmal gesondert gezeichnet. \mathfrak{I} sei die Stromstärke eines im Verstärker 1 verstärkten Gesprächs; die beiden Hälften der primären Wicklung des Ausgleichsübertragers A_2 mögen von den Strömen \mathfrak{I}'_2 und \mathfrak{I}''_2 durchflossen werden. Dann gelten, wenn wir von den Gleichstromwiderständen¹ der Wicklungshälften absehen, die Gleichungen

$$\frac{\mathfrak{I}'_2}{\mathfrak{I}} = \frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{R}_e + \mathfrak{R}_2} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{I}''_2}{\mathfrak{I}} = \frac{\mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_e + \mathfrak{R}_2}. \quad (1360)$$

Setzen wir daher

$$\frac{\mathfrak{R}_e}{\mathfrak{R}_2} = \mathfrak{I}g n_2, \quad (1361)$$

so wird der Differenzstrom

$$\mathfrak{I}''_2 - \mathfrak{I}'_2 = \frac{\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_e}{\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_e} \mathfrak{I} = \frac{1 - \mathfrak{I}g n_2}{1 + \mathfrak{I}g n_2} \mathfrak{I} = e^{-2n_2} \mathfrak{I}. \quad (1362)$$

Der hier eingeführte Parameter n_2 ist offenbar ein logarithmisches Maß für die Güte der Nachbildung \mathfrak{R}_2 :

$$n_2 = \ln \sqrt{\frac{\mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_e}{\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_e}}. \quad (1363)$$

Wird er unendlich groß ($\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_e$), so wird der Differenzstrom unendlich klein. Die Differential- oder Brückenschaltung (vgl. § 311) verhält sich also so, als ob sie dem durch den Verstärker 1 verstärkten Strom, soweit er nach dem Verstärker 2 hin rückgekoppelt wird, eine „Brücken-“ oder „Echodämpfung“ $2n_2$ erteilt.

Der Differenzstrom $\mathfrak{I}''_2 - \mathfrak{I}'_2$ wirkt nun (Abb. 328) über den Ausgleichsübertrager A_2 auf den Verstärker 2 und löst auf dessen Ausgangsseite einen verstärkten Strom aus, den wir gleich seinem e^{δ} -fachen setzen wollen. Auf der Primärseite der ganzen Schaltung wiederholt sich das Spiel: Die Gabel dämpft mit $2n_1$, der Verstärker 1 verstärkt mit δ . Die ganze Schaltung fängt nach § 209 an zu pfeifen, wenn der am Ausgang des Verstärkers 1 entstehende rückgekoppelte Strom gleich dem ursprünglichen Strom \mathfrak{I} ist:

$$e^{-2n_2} \cdot e^{\delta} \cdot e^{-2n_1} \cdot e^{\delta} \cdot \mathfrak{I} = e^{2(\delta - n_1 - n_2)} \mathfrak{I} = \mathfrak{I}. \quad (1364)$$

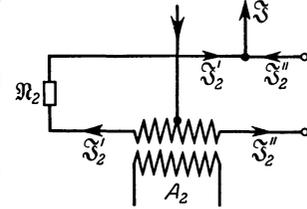


Abb. 327.

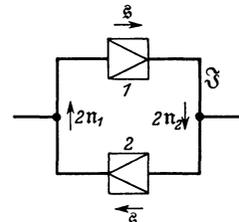


Abb. 328.

¹ Die Induktivitäten wirken nur in zweiter Näherung ein, weil sie bei genauem Abgleich durch die Gegeninduktivitäten zwischen den Wicklungshälften aufgehoben werden. (Der Kern von A_2 bleibt bei genauem Abgleich unmagnetisch.) Ebenso sind die Wechselstrom-Verlustwiderstände zu vernachlässigen.

Daraus folgt aber als Bedingung für die Pfeifgrenze:

$$\bar{s} = n_1 + n_2. \tag{1365}$$

Die „Verstärkung“ \bar{s} darf höchstens so hoch getrieben werden, bis sie (nach Betrag und Phase) gleich der Summe der beiden Nachbildungsgüten oder gleich der mittleren Echodämpfung geworden ist; sonst pfeift der Zwischenverstärker. Und zwar muß diese Bedingung für alle Frequenzen erfüllt sein.

Die Bedingung (1365) für die Pfeifgrenze stimmt, wie man sieht, überein mit der im § 349 abgeleiteten Bedingung für das Unendlichwerden der Betriebsverstärkung, wenn man voraussetzt, daß die hier eingeführte „Verstärkung“ \bar{s} mit der dort eingeführten Vierpolverstärkung \bar{s} zusammenfällt¹. Da man die Nachbildungen so einstellt, daß ihr Frequenzgang übereinstimmt mit dem eines an den Verstärker angepaßten äußeren Widerstandes \mathfrak{R}_e , darf man $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{Z}_2$ und daher nach (1361) $n_2 = r_e$ setzen.

Häufig führt man (vgl. § 232) „Nachbildungsfehler“ ϑ oder Δ nach den Gleichungen

$$\vartheta = \frac{\Delta}{2} = e^{-2n} \tag{1366}$$

ein. Dann ist die Pfeifgrenze gegeben durch die Bedingungen

$$e^{\bar{s}} = e^{n_1} e^{n_2} = \frac{1}{\sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2}} = \frac{2}{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}}. \tag{1367}$$

§ 351. Ketten aus Verstärkerfeldern und Zweiwegverstärkern. Eine Zweidrahtverbindung bestehe aus $m + 1$ Verstärkerfeldern und m Verstärkern. Wir fragen nach der Pfeifgrenze für den i -ten Verstärker. Dabei wollen wir der Einfachheit halber voraussetzen, daß die Nachbildungsgüte bei allen Verstärkern dieselbe (n) sei, und daß die Dämpfung jedes Verstärkerfeldes durch die Verstärkung des folgenden Verstärkers für alle Frequenzen vollkommen aufgehoben werde, wie es durch die in den § 319 ff. besprochenen Mittel erreicht werden kann.

Dann zeigt die Abb. 329, daß die hinter dem i -ten Verstärker liegenden Verstärker für die Rückkopplung von Strömen nach seiner Röhre z hin sozusagen parallel geschaltet sind. Es fließt Strom nach der Röhre z des i -ten Verstärkers nicht nur an der sekundären Seite des i -ten, sondern auch an den sekundären Seiten aller folgenden Verstärker. Dabei sind aber die über die folgenden Verstärker rückgekoppelten Ströme nicht etwa schwächer als der unmittelbar rückgekoppelte Strom; denn sie werden zwar 2, 4, 6 . . . mal gedämpft, aber auch 2, 4, 6 . . . mal verstärkt. Der Differenzstrom, der in der Röhre z des i -ten Verstärkers verstärkt wird, ist daher, da $m - i$ Verstärker hinter dem i -ten liegen:

$$(m - i + 1) e^{-2n} \mathfrak{S}. \tag{1368}$$

Entsprechend stehen auf der Primärseite des i -ten Verstärkers dem verstärkten Strom im ganzen i parallele Wege offen. Die Pfeifbedingung nimmt daher schließlich die Form

$$(m - i + 1) e^{-2n} \cdot e^{\bar{s}} \cdot i e^{-2n} \cdot e^{\bar{s}} \mathfrak{S} = \mathfrak{S} \tag{1369}$$

oder²

$$\bar{s} = 2n - \frac{1}{2} \ln(i(m - i + 1)) \tag{1370}$$

an.

¹ Von dem verstärkten Strom \mathfrak{S} fließt zwar nach (1360) nur etwa die Hälfte in die weiterführende Leitung; dafür ist aber die für die Rückkopplung maßgebende Durchflutung auch nur gleich $w/2 \cdot \mathfrak{S}'_2 - w/2 \cdot \mathfrak{S}_2 = w(\mathfrak{S}'_2 - \mathfrak{S}_2)/2$, wo w die Windungszahl der primären Wicklung des Ausgleichübertragers bedeutet. Vgl. W. Deutschmann: Z. Fernmeldetechn. 6, 31 (1925); Weinitschke, W.: Elektr. Nachr.-Techn. 6, 399 (1929).

² Feldtkeller, R.: Tel.- u. Fernspr.-Techn. 14, 281 (1925).

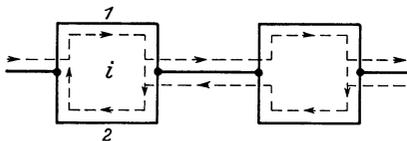


Abb. 329.

Mit steigender Zahl der Zwischenverstärker wird also die Pfeifgrenze herabgesetzt: je mehr Verstärker, um so niedriger muß man — und zwar unabhängig von der Nachbildungsgüte — die Verstärkung des einzelnen Verstärkers halten. Nach (1370) pfeifen die mittleren Verstärker am leichtesten; und zwar liegt das Minimum der Pfeifgrenze bei dem Verstärker der Nummer $i = (m + 1)/2$. Da auch dieser nicht pfeifen darf, wird die Pfeifgrenze bei m Zwischenverstärkern um

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{m+1}{2} \left(m+1 - \frac{m+1}{2} \right) \right) = \ln \frac{m+1}{2} \quad (1371)$$

erniedrigt, z. B. bei

	2	3	4	5	6	7	8	9	Verstärkern
um	0,4	0,7	0,9	1,1	1,25	1,39	1,50	1,61	Neper.

Stimmt die Dämpfung der Verstärkerfelder nicht völlig mit der Verstärkung überein, so wird die Pfeifgrenze bei überwiegender Dämpfung um weniger, bei überwiegender Verstärkung um mehr herabgesetzt.

Wird die Verstärkerfelddämpfung gemäß § 319ff. in dem ganzen wesentlichen Frequenzbereich durch die Verstärkung genau nachgebildet, so besteht für die höheren Frequenzen wegen des Anstiegs der Verstärkung eine größere Pfeifgefahr als für die niedrigeren. Mit der Annäherung an die Grenzfrequenz sinkt nach § 260 zugleich die Nachbildbarkeit der Leitungen; man hat daher bei langen Zweidrahtverbindungen sehr triftige Gründe, die Grenzfrequenz recht hoch zu legen.

In den meisten Fällen ist es sogar nötig, die höchsten für die Verständigung nicht mehr erforderlichen Frequenzen durch Spulenleitungen oder ähnliche Schaltungen völlig abzdämpfen, damit sie die Pfeifsicherheit der Leitungen nicht beeinträchtigen. D. h. man muß irgendwie dafür sorgen, daß die Verstärkung oberhalb der oberen Entzerrungsgrenze möglichst steil wieder abfällt.

Nach den Vorschriften des CCI muß die Betriebsverstärkung überall mindestens um 0,4 Neper unterhalb der Pfeifgrenze (der mittleren Echodämpfung) liegen.

Neuerdings hat man auf Zweidrahtleitungen, deren Grenzfrequenz in der Nähe von 3400 Hz lag, Pfeifsicheren Betrieb mit etwa 10 Zwischenverstärkern auf etwa 1500 km erzielt¹.

§ 352. Rückkopplungen bei Vierdrahtverbindungen; Echosperrern. Bei langen Vierdrahtverbindungen können die Entfernungen, welche die an den Endgabeln rückgekoppelten Ströme zurücklegen müssen, so groß sein, daß deutlich wahrnehmbare Echos entstehen². Diese erschweren die Verständigung und müssen daher bei langen Leitungen unterdrückt werden.

Für die Störf Wirkung der Echoströme ist ihre Verzögerung gegenüber den ursprünglichen Sprechströmen wesentlich. Die Geschwindigkeit der auf einem normal pupinisierten 0,9-mm-Kabel wandernden Wellen ist nach §§ 228 und 249 für tiefe Tonfrequenzen³ etwa gleich 17 km/ms; daraus folgt, daß die Zeit, in der sich eine Störung über eine Leitung von 1000 km Länge fortpflanzt, etwa 60 ms beträgt. Wenn Phasenausgleich (§ 358) angewendet ist, erhöht sich diese Zeit noch auf etwa 85 ms. Ein Sprecher hört also das, was gesagt wird, nach $2 \cdot 85 = 170$ ms noch einmal, nach 340 ms zum zweiten Male usw. Ähnlich kann auch der Hörer mehrere Echos mit denselben Verzögerungen wahrnehmen. Da die Verzögerungen größenordnungsmäßig mit der Dauer der einzelnen Sprach-

¹ Lüschen, F., u. H. F. Mayer: Elektr. Nachr.-Techn. 6, 149 (1929).

² Clark, A. B.: J. Am. Inst. Electr. Eng. 42, 1 (1923).

³ In diesem Gebiet braucht nicht zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit unterschieden zu werden.

laute (50...100 ms) übereinstimmen, ist die starke Störwirkung der Echos verständlich.

Man könnte meinen, bei der großen Länge der Vierdrahtverbindungen seien nur schwache Echos zu vernehmen. Die Verstärker heben jedoch die Dämpfung der Echos ebenso auf wie die der Sprechströme. Schwach werden die Echos daher nur, wenn man mit verhältnismäßig hohen Restdämpfungen vorlieb nimmt.

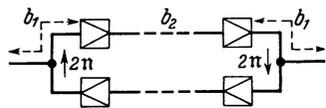


Abb. 330.

Es sei z. B.¹ die Dämpfung im Amt des Sprechers (Abb. 330) über die zugehörige Gabel bis zu dem Eingang des ersten Verstärkers gleich b_1 , die entsprechende Dämpfung im Amt des Hörers ebensogroß, die — im allgemeinen negative — Gesamtdämpfung der Leitung mit ihren Verstärkern gleich $2n$. Dann ist die Restdämpfung b_r des eigentlichen Gesprächs gleich $2b_1 + b_2$. Die Dämpfung des ersten Sprecherechos dagegen ist

$$b_1 + b_2 + 2n + b_2 + b_1 = 2b_1 + 2b_2 + 2n = b_r + b_2 + 2n, \quad (I372)$$

während sich für den Überschuß der Dämpfung des ersten Hörerechos über die Restdämpfung

$$b_1 + b_2 + 2n + b_2 + 2n + b_2 + b_1 - b_r = 2b_2 + 4n \quad (I373)$$

ergibt. Nehmen wir also an, daß es möglich ist, die Nachbildungsgüte $2n$ auf 3 Neper zu bringen und fordern wir für die Vierdrahtverbindungen eine Restdämpfung von 1,0 Neper, so erhalten wir mit $b_1 \approx 1,5$ Neper², also $b_2 = -2$ Neper für das erste Sprecherecho wie für das erste Hörerecho eine Dämpfung von nur 2 Neper — beide Schwächungen bezogen auf die Lautstärke des eigentlichen Gesprächs.

Will man also mit geringer Restdämpfung arbeiten, so muß man die Echos durch besondere Hilfsmittel unterdrücken. Das kann auf zwei Weisen geschehen: durch leichte Pupinisierung und durch Echosperrung.

Bei leichter Pupinisierung nimmt die Verzögerung ab, weil die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach §§ 228 und 249 umgekehrt proportional der Wurzel aus der bezogenen Induktivität steigt. Damit werden die Echos weniger merklich; ganz beseitigt sind sie aber nicht.

Das wirksamere Hilfsmittel ist die Echosperrung. Hinter einem Verstärker der Doppelleitung *I* zweigt man von dem Sprechstrom einen Querstrom ab, der mit Hilfe einer sogenannten „Echosperrre“ den gegenüberliegenden Verstärker der Doppelleitung *II* außer Tätigkeit setzt. Da der querfließende Sperrstrom einen kürzeren Weg hat als der zu übertragende Sprechstrom, der ja über die Endgabel rückgekoppelt wird, ist eine gewisse nicht zu lange Ansprechzeit der Sperre zulässig. Andererseits muß die Wirkung der Echosperrre auch noch eine kleine Zeit nach dem Aufhören des Sprechstroms bestehen bleiben, weil der Echostrom, der ja mit Verspätung auf der Doppelleitung *II* eintrifft, diese sonst nicht mehr gesperrt vorfände. Die Ansprech- und Verzögerungszeit der Sperren kann mit Hilfe von Zusatzschaltungen nach Bedarf eingestellt werden.

Man kann den gegenüberliegenden Verstärker durch Relais oder auch durch Verlagerung der Gittervorspannung einer Röhre ins Negative außer Tätigkeit setzen³.

Hat eine Vierdrahtverbindung so schlechte Nachbildungen, daß sie ohne Echosperrungen pfeife, so ist sie auch mit Echosperrungen nicht völlig stabil. Denn in den Gesprächspausen wirkt die Sperre erst, wenn bereits ein Pfeifton entstanden ist. Man vernimmt daher einen unterbrochenen Ton. Diese Störung kann beseitigt werden durch die sogenannten Rückkopplungssperren⁴. Sie sperren — wieder durch Gitterspannungsverlagerung — im unbesprochenen

¹ Vgl. K. Küpfmüller: Telefunken-Zg 10, 27 (1929).

² b_1 liegt z. T. in der Gabelschaltung, z. T. in einem künstlichen Dämpfungszusatz.

³ Clark, A. B., u. R. C. Mathes: J. Am. Inst. Electr. Engs. 44, 618 (1925); Mayer, H. F.: ETZ 47, 1379 (1926).

⁴ Fenyő, L.: Fachberichte des VDE 1929.

Zustand mit einer Zusatzdämpfung von einigen Neper den Weg des Sprechstroms, im besprochenen Zustand — wie die Echosperren — den Rückweg.

§ 353. Das Nebensprechen bei langen Fernsprechverbindungen¹. Auch auf das Nebensprechen können die in die Verbindungen eingebauten Verstärker ungünstig wirken.

Bei den Zweidrahtverbindungen heben im allgemeinen m Verstärker die Dämpfung von $m + 1$ Verstärkerfeldern auf. Die Restdämpfung ist bei ihnen also

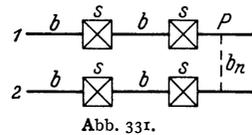
$$b_r = (m + 1)b - ms, \tag{I374}$$

wo b die Dämpfung je Verstärkerfeld und s die Verstärkung je Verstärker bedeutet. Da hiernach

$$s - b = \frac{b - b_r}{m} \tag{I375}$$

ist, muß die Einzelverstärkung größer sein als die aufzuhebende Verstärkerfeld-dämpfung, wenn die Verstärkerfelddämpfung größer sein soll als die Restdämpfung.

Durch hohe Verstärkung kann aber die Nebensprechdämpfung geringer werden. Abb. 331 zeigt zwei Doppelleitungen 1 und 2, zwischen denen im Punkte P — etwa hinter dem letzten Verstärker — eine Nebensprechkoppelung bestehen möge, der die Dämpfung b_n entspreche. Ein Gespräch in der Leitung 1 macht sich dann nach § 289 am Anfang der Leitung 2 bemerkbar mit einer „wirksamen“ Nebensprechdämpfung



$$(b_n)_{\text{wirks.}} = b_n - 2m(s - b) = b_n - 2(b - b_r) \tag{I376}$$

nach (I375). Diese ist also nicht wie bei verstärkerfreien Leitungen um die doppelte Leitungsdämpfung höher als die örtliche Nebensprechdämpfung. Nun verlangt das CCI (vgl. § 354), daß die wirksame Nebensprechdämpfung größer ist als 7,5 Neper; man muß also fordern

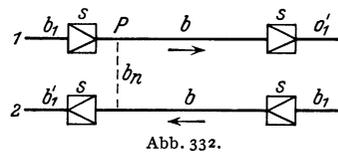
$$b_n - 2(b - b_r) > 7,5 \text{ Neper} \tag{I377}$$

oder mit dem Wert $b_r = 1,0$ Neper

$$b < 1 + \frac{b_n - 7,5}{2}. \tag{I378}$$

Gelingt es z. B. nicht, b_n auf einen Wert über 8,5 Neper zu steigern, so darf man die Verstärkerfelddämpfung b höchstens gleich 1,5 Neper machen. Die Rücksicht auf das Nebensprechen setzt also der Erhöhung der Verstärkerfelddämpfung b eine Grenze.

Bei den Vierdrahtverbindungen betrachten wir nur den Fall, daß eine Leitung 1 hinter dem ersten Verstärker bei P (Abb. 332²) auf eine von ihr unabhängige Leitung 2 der andern Gesprächsrichtung einwirkt; und zwar sei $b = s$. Es gilt dann einerseits



$$b_r = b_1 + b_1' + (m - 1)b - ms = b_1 + b_1' - b, \tag{I379}$$

andererseits

$$(b_n)_{\text{wirks.}} = b_n + b_1 + b_1' - 2s > 7,5 \text{ Neper}, \tag{I380}$$

also

$$b < b_n + b_r - 7,5. \tag{I381}$$

¹ Lüschen, F., u. K. Küpfmüller: Europ. Fernspr.-D., H. 4, 14 (1927).

² An dem fernen Ende der Leitung 2 kann nichts wahrgenommen werden, weil die Verstärker ja nur in der einen Richtung wirken.

Beispielsweise ist für $b_1 = 2,35$, $b'_1 = 1,45$, $b = s = 2,8$ nach (1379) die Restdämpfung gleich 1,0 Neper; die wirksame Nebensprechdämpfung ist dann nach (1380) um 1,8 Neper niedriger als die örtliche, und die Ungleichung (1381) ist erst für örtliche Nebensprechdämpfungen von mindestens 9,3 Neper erfüllt. Man vergrößert daher die Dämpfungen des eigentlichen Nebensprechens, indem man die Leitungen der beiden Gesprächsrichtungen voneinander trennt und gegeneinander noch — etwa durch Hüllen aus metallisiertem Papier — abschirmt. Die Dämpfungen des Gegennebensprechens sind weniger gefährlich, da zu ihnen nach § 287 immer noch die Gesamtdämpfung der Leitung tritt.

Durch sehr sorgfältige Herstellung der Kabel ist es in der neuesten Zeit gelungen, die Nebensprechdämpfungen und damit die Verstärkerfelddämpfung wesentlich hinaufzusetzen. Von besonderer Bedeutung ist dies für längere Seekabel, da man bei diesen mit höheren Verstärkerfelddämpfungen rechnen muß.

§ 354. Verständlichkeitsmessungen. Wir haben in den vorhergehenden Paragraphen unsere Aufmerksamkeit besonders den Störungen zugewandt, die auch dann, wenn gar nicht gesprochen wird, in den Schaltungen entstehen können oder von außen in sie eindringen. Für die Bemessung der langen Fernkabeln sind aber ebenso wesentlich die Verzerrungen, die die Fernsprechströme selbst beim Durchgang durch die Schaltungen erfahren. Noch vor wenigen Jahren hat man ihre Wirkung hauptsächlich nach dem unbestimmten Güteindruck beurteilt, den der Benutzer der Anlage bei ihrem Gebrauch hatte. Die Meinungen sind geteilt, ob es möglich ist, das Urteil über eine Übertragungsanlage lediglich auf objektive Messungen zu gründen; so viel steht aber fest, daß es ein einigermaßen sicheres Maß für die Güte einer Verbindung, die der Übertragung von Sprache dient, erst seit der Einführung der sogenannten „Verständlichkeitsmessung“¹ gibt.

Diese beruht darauf, daß man beispielsweise zusammenhanglose Silben („Sprachatome“) in eine Leitung hineinspricht; der Prozentsatz der am anderen Ende richtig verstandenen² Silben heißt „Silbenverständlichkeit“. Da die einzelnen Sprachlaute nicht gleich verständlich sind, müssen die Silben möglichst genau in derselben Weise aus Lauten gemischt werden wie die gewöhnliche Sprache.

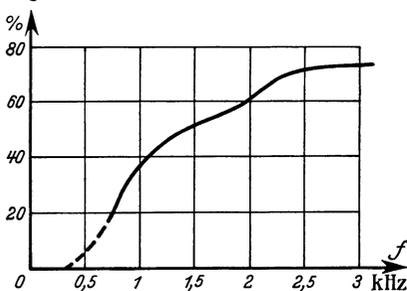


Abb. 333.

Benutzt man eine hinreichende Menge Silben (z. B. 500 Silben in zeitlichen Abständen von 2 bis 3 Sekunden), so erhält man Verständlichkeiten, die bei verschiedenen Beobachtern nur um wenige Prozent schwanken.

Abb. 333 zeigt die Abhängigkeit der Verständlichkeit von der oberen Grenze des benutzten Frequenzbands. Es wurde bei der Aufnahme dieser Schaulinie zwischen zwei Zentralbatteriestationen über eine verzerrungsfreie Eichleitung, eine Kondensatorleitung mit der Grenzfrequenz 300 Hz und eine Spulenleitung von veränderbarer Grenzfrequenz gesprochen. Man erkennt, daß bei Hinzunahme der Frequenzen über 2400 Hz die Verständlichkeit nur noch wenig steigt und daß auch in der Gegend von 1600 Hz Frequenzen liegen, die zur Verständlichkeit nur wenig beitragen. Man genügt daher den höchsten mit üblichen Endapparaten erfüllbaren An-

¹ Fletcher, H.: J. Frankl. Inst. 193, 729 (1922); Jones, R. L.: J. Am. Inst. Electr. Eng. 43, 321 (1924); Mayer, H. F.: Elektr. Nachr.-Techn. 4, 184 (1927).

² Was dies heißt, muß definiert werden.

forderungen, wenn man zur Übertragung alle Frequenzen bis zu 2400 Hz benutzt. Läßt das Übertragungssystem auch noch höhere Frequenzen hindurch, so kann man diese zu anderen Zwecken verwenden (vgl. § 364).

Abb. 334 zeigt die Abhängigkeit der Verständlichkeit von der Dämpfung für normale Apparate. Bei sehr starker Verringerung der Dämpfung beobachtet man keinen Anstieg, sondern einen kleinen Abfall: unter zu großer Lautstärke leidet die Verständlichkeit. Bei $b = 7,5$ ist die Verständlichkeit auf Null gesunken. Einer Dämpfung von 3,3 Neper entspricht noch eine recht hohe Verständlichkeit. Störgeräusche setzen die Verständlichkeit außerordentlich stark herab. Schließt man sie völlig aus und verwendet man besonders verzerrungsfreie Apparate, so kommt man zu wesentlich höheren Verständlichkeiten, als sie in den Kurven Abb. 333 und 334 niedergelegt sind.

Die Erfahrung zeigt, daß mit der Silbenverständlichkeit auch die Satzverständlichkeit steigt; letztere ließe sich schwerer einwandfrei messen, da sie von nicht rein akustischen Einflüssen zu sehr abhängig ist (z. B. von der Auffassungsgabe des Hörenden, von der Art und dem Inhalt des Gesprochenen, von der Mundart usw.)¹.

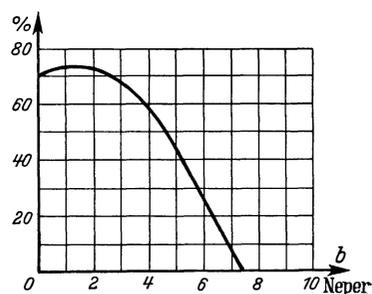


Abb. 334.

§ 355. Wahl der Restdämpfung und der Verstärkerfelddämpfung. Aus den Verständlichkeitsmessungen ergibt sich, daß die Gesamtdämpfung einer Fernkabelverbindung einschließlich der Anschlußleitungen bis zu den Teilnehmern hin nicht größer sein darf als etwa 3,3 Neper; denn von dieser Dämpfung ab beginnt bei Benutzung der gewöhnlichen Apparate die Verständlichkeit stark zu sinken. Da man für jede Teilnehmeranschlußleitung mit einer Dämpfung von etwa 1 Neper rechnen muß, hat das CCI als die höchste für Fernkabelverbindungen zulässige Restdämpfung b_r den Wert 1,3 Neper festgesetzt².

Praktisch ist es heute nicht schwer, die Restdämpfung bis auf etwa 1,0 Neper herabzudrücken. Verringert man sie noch weiter, so wächst nach § 352 die Lautstärke der Echos; außerdem sinkt die Betriebssicherheit. Ob sich Gegenmaßnahmen wie Erhöhung der Nachbildungsgüte, Einbau von Echo- und Rückkopplungssperren (§ 352) lohnen, ist eine Frage der Wirtschaftlichkeit.

Zwischen 300 und 2400 Hz sollen die Abweichungen der Restdämpfung von ihrem Mittel höchstens $\pm 0,5$ Neper ausmachen.

Von der Restdämpfung b_r , die man klein zu halten wünscht, zu unterscheiden ist die Dämpfung b je Verstärkerfeld, die man, um mit möglichst wenig Verstärkern auszukommen, groß zu machen sucht. Grenzen für die Verstärkerfelddämpfung ergeben sich aus den Überlegungen des § 353. Lüschen und Küpfmüller, die vor einiger Zeit³ Vorschläge über die zweckmäßigste Pupinisierung der Fernkabel gemacht haben, rechnen bei Zweidrahtverbindungen mit einer Dämpfung $b = 1,4$ Neper, bei Vierdrahtverbindungen mit einer Dämpfung $b = 2,85$ Neper. Dieser letztere Wert ist, verglichen mit den Angaben im § 353, verhältnismäßig niedrig angenommen, weil bei noch höheren Verstärkerfelddämpfungen Zweiröhrenverstärker verwendet werden müßten.

§ 356. Wahl der Entzerrungsgrenzen und der Grenzfrequenz. Die obere Entzerrungsgrenze hat man früher mit Rücksicht darauf, daß sich Störungen bei den

¹ Vgl. J. Collard: *Electr. Commun.* 7, 175 (1929); 8, 141 (1930).

² Neuerdings werden für neu einzurichtende Verbindungen Restdämpfungen von 1,0 bzw. 0,8 Neper empfohlen.

³ Lüschen, F., u. K. Küpfmüller: *Europ. Fernspr.-D.*, H. 4, 10 (1927). S. auch W. Weinitschke: *Elektr. Nachr.-Techn.* 7, 141' (1930).

verschiedenen Verbindungsarten verschieden leicht beseitigen lassen, verschieden hoch gelegt. Es wäre jedenfalls erwünscht, den Einfluß der Störungen in allen Fällen so weit zu beseitigen, daß man den Übertragungsbereich bis auf mindestens 2400 Hz erweitern kann.

Die untere Grenze 300 Hz darf nach dem Ergebnis von Verständlichkeitsmessungen nicht wesentlich heraufgesetzt werden.

Man überzeugt sich an Hand des § 340 leicht, daß die Schmalheit des von den Pupinleitungen durchgelassenen Frequenzbands keine merkliche Verzögerung des Einschwingens zur Folge hat.

Wenn sich sonach die Entzerrungsgrenzen leicht in bestimmter Weise festlegen lassen, so ist die Entscheidung bei der Wahl der Grenzfrequenz etwas schwieriger. Wir haben vor allem im § 351 Gründe kennengelernt, die dafür sprechen, die Spanne zwischen Entzerrungsgrenze und Grenzfrequenz nicht zu klein zu wählen. Besonders bei den Zweidrahtverbindungen darf man pfeisicheren Betrieb nur erwarten, wenn auch die höchsten benutzten Frequenzen noch weit unter ω_0 liegen.

Bei sehr langen Fernkabelverbindungen ist für die Wahl der Grenzfrequenz die Phasenverzerrung entscheidend, vorausgesetzt, daß man sie nicht künstlich beseitigen will. Sie setzt zwar die Verständlichkeit nicht besonders stark herab, verleiht aber der Sprache einen unangenehmen Charakter. Die Grenze des Zulässigen liegt bei einer Einschwingdauer τ von etwa 30 ms; bei ihr ist die Verständlichkeit auf etwa 60% gesunken.

Um die richtige Lage der Grenzfrequenz für eine vorgeschriebene durch die Phasenverzerrung bedingte Einschwingdauer τ zu berechnen, formen wir die Gleichung (1352) des § 346 mit der Einführung $f_0 = f_1 \cos x$ folgendermaßen um (n ist die Gesamtspulenzahl):

$$\text{oder} \quad \tau = \frac{n}{\pi f_1 \cos x} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - 1 \right) = \frac{2n}{\pi f_1} \frac{e^{-x}}{\sin 2x} \tag{1382}$$

$$\frac{n}{f_1 \tau} = \frac{\pi}{2} e^x \sin 2x \approx \frac{\pi}{4} e^{3x}. \tag{1383}$$

Für einigermaßen große $2x$ wird dieser Zusammenhang, wenn man die Abszisse logarithmisch teilt, durch die gerade Linie

$$x = \frac{\ln 10}{3} \left(\lg \frac{n}{f_1 \tau} - \lg \frac{\pi}{4} \right) = 0,768 \lg \frac{n}{f_1 \tau} + 0,08 \tag{1384}$$

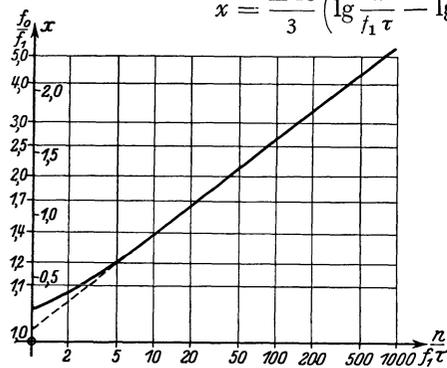


Abb. 335.

dargestellt. Aus Abb. 335 können als Funktion der logarithmisch geteilten Abszisse $n/f_1 \tau$ der Parameter x und das zugehörige Verhältnis f_0/f_1 abgelesen werden. Man erkennt, daß man mit steigender Leitungslänge (n) und mit wachsenden Ansprüchen an die Güte der Übertragung (kleines τ) die Grenzfrequenz hinaufsetzen muß. Man entnimmt der Darstellung [oder der Gleichung (1383)] z. B. zu $n = 300$, $f_1 = 2400$ Hz und $\tau = 10$ ms, also $n/f_1 \tau = 12,5$ den Wert $f_0/f_1 = 1,47$, also

$f_0 = 3500$ Hz. Bei der 10fachen Länge ergäbe sich $x \approx 0,768 \cdot 2,097 + 0,08 = 1,69$, also $f_0/f_1 = 2,80$, $f_0 = 6700$ Hz.

Neben der Phasenverzerrung sind bei langen Zweidrahtverbindungen für die Lage der Grenzfrequenz auch die Echostörungen maßgebend, die den Charakter

der Sprache in ähnlicher Weise beeinflussen wie die Phasenverzerrung und die man nicht durch Echosperrern beseitigen kann. Es empfiehlt sich daher, bei der Berechnung nach (1383) für die Zweidrahtverbindungen eine Einschwingdauer von nur etwa 15 ms zuzulassen.

§ 357. Pupinisierung der Fernkabel. Für die Dimensionierung der Fernkabel bleiben die in den §§ 249 und 254 abgeleiteten Formeln (838) und (873) maßgebend. Wir schreiben sie, indem wir die Verstärkerfeldlänge l_0 einführen, in den Formen

$$s l_0 R = \frac{4 b}{\omega_0 C} \tag{1385}$$

und

$$L_s = \frac{4}{\omega_0^2 s C} . \tag{1386}$$

Was zunächst die erste Formel angeht, so haben wir die Überlegungen bereits kennengelernt, die zur Wahl einer bestimmten Verstärkerfelddämpfung b und einer bestimmten Grenzfrequenz ω_0 führen. Die Kapazität der Leiter C hängt nur wenig von ihrer Dicke ab. Die rechte Seite der Gleichung (1385) kann daher, sobald entschieden ist, ob eine Zweidraht- oder eine Vierdrahtverbindung zu dimensionieren ist, als eine gegebene Konstante angesehen werden. Dann folgt aber, daß Änderungen der drei Größen s , l_0 und R nur in der Weise möglich sind, daß ihr Produkt konstant bleibt.

Will man also z. B. an Verstärkern sparen, d. h. l_0 vergrößern, so muß man das Produkt sR in demselben Maße verkleinern. Bei Verkleinerung des Spulenabstands s wachsen die Pupinisierungskosten, bei Verkleinerung des Widerstands R die Kosten der Leitungsstücke zwischen den Spulen. Bei den Zweidrahtverbindungen ist das Produkt $s l_0 R$ rund halb so groß wie bei den Vierdrahtverbindungen. Bei der ersten Leitungsart muß man also entweder Drähte von $\sqrt{2}$ facher Dicke nehmen oder im halben Verstärkerabstand Nebenverstärkerämter einbauen.

Welche Werte s , l_0 , R man schließlich wählt, ist eine reine Kostenfrage. Berechnungen¹ haben ergeben, daß die günstigste Dimensionierung etwa die folgende ist:

Verbindungsart	s km	l_0 km	R Ω/km	Leiterstärke mm
Zweidrahtverbindungen	1,5...2,0	100...110	23...31	1,2...1,4
Vierdrahtverbindungen	2,0...2,5	90...100	45...70	0,8...1,0

(1386) dient nach Feststellung der übrigen Größen zur Berechnung der Spuleninduktivität.

Da die Verstärkerämter in Deutschland mit 140 km Entfernung bereits festliegen, während einer Änderung des Spulenabstands keine Hindernisse entgegenstehen, haben Lüschen und Küpfmüller (a. a. O.) mit einer oberen Entzerrungsgrenze von 2400 Hz und einem Spulenabstand von 1,7 km folgenden Vorschlag gemacht:

Leitungsart	L_s mH	C_0 nF/km	ω_0 kHz	b (800 Hz) Neper	$\frac{n}{f_1 \tau}$ (Abb. 335)	Reichweite ² km	τ ms
Zweidraht 1,4 mm	{ Stamm	140	35,5	3,4	1,4	660	15
	{ Phantom	56	57,5	4,3		1700	15
Vierdraht 0,9 mm	{ Stamm	140	33,5	3,45	2,85	1400	30
	{ Phantom	56	54,0	4,3		3400	30

¹ Lüschen, F., u. K. Küpfmüller: Europ. Fernspr.-D. H. 4, 10 (1927).

² Nach Abb. 335. Die Begrenzung der Reichweite durch die Annäherung an die Pfeifgrenze ist hier nicht berücksichtigt.

Kennzeichnend ist für diesen Vorschlag vor allem die Wahl verhältnismäßig hoher Grenzfrequenzen.

Um auf ganz große Entfernungen (> 3400 km) sprechen zu können, kann man nach § 356 leicht pupinisieren. Geht man aber mit der Grenzfrequenz auf das Doppelte, so muß man, wenn man die übrigen Kabelkonstanten ungeändert lassen will, nach (1385) den Verstärkerabstand halbieren. Nach dem Vorschlag von Lüschen und Küpfmüller erzielt man dann mit Spulen von 30 und 12 mH Induktivität nach Abb. 335 — allerdings mit der doppelten Verstärkerzahl — Reichweiten von mindestens 6000 km.

Es gibt jedoch noch einen zweiten Weg, den sogenannten „Phasenausgleich“, zu dessen Besprechung wir uns jetzt wenden.

§ 358. Phasenausgleich. Ein Verfahren zur Kompensierung der Phasenverzerrung ist von Küpfmüller angegeben worden¹. Da die Wirkung dieser Verzerrung darin besteht, daß die in den Sprechströmen enthaltenen höheren Frequenzen am Ende des Übertragungssystems später ankommen als die tieferen, kann man sie aufheben durch eine Kunstschaltung, die die tieferen Frequenzen mehr verzögert als die höheren. Solche Kunstschaltungen stehen uns in den Kreuzgliedern und Brückensterngliedern (§§ 320 und 321) zur Verfügung.

Wir betrachten hier nur die einfachsten Kreuzglieder. Um zu verhüten, daß durch den Phasenausgleich die Dämpfung der ganzen Verbindung vergrößert wird, verwendet man Glieder, deren Elemente möglichst verlustfrei sind, so daß \Re und \mathcal{G} als reine Blindwiderstände aufgefaßt werden können. Sind sie dazu noch mit der frequenzunabhängigen Potenz k zueinander invers, so ist nach (1209) das Dämpfungsmaß bei allen Frequenzen gleich Null; für das Winkelmaß dagegen gilt nach (1211):

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{R'}{2k}. \quad (1387)$$

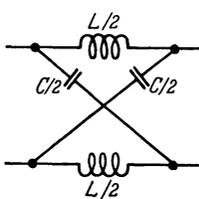
Da hiernach

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{a}{2}} \frac{da}{d\omega} = \frac{1}{k} \frac{dR'}{d\omega}, \quad (1388)$$

ergibt sich die Laufzeit aus

$$\frac{da}{d\omega} = \frac{\cos^2 \frac{a}{2}}{k} \frac{dR'}{d\omega} = \frac{1}{k \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}\right)} \frac{dR'}{d\omega}. \quad (1389)$$

Um mit einem einfachen Fall zu beginnen, sei z. B. (Abb. 336)



$$\Re = j\omega L, \quad \mathcal{G} = j\omega C, \quad \mathfrak{Z} = k = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (1390)$$

Dann ist

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\omega L}{2k} \quad (1391)$$

und

$$\frac{da}{d\omega} = \frac{L}{k \left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{4k^2}\right)} = \frac{\sqrt{LC}}{1 + \frac{\omega^2 LC}{4}}. \quad (1392)$$

Abb. 336.

Bei einem solchen Kreuzglied nimmt also², wie wir es gefordert haben, die Gruppenlaufzeit mit wachsender Frequenz ab (Abb. 338, A). Man kann jedoch mit solchen einfachen Gliedern, die man auch A-Glieder nennt, noch keinen ausreichenden

¹ Küpfmüller, K.: Elektr. Nachr.-Techn. 3, 82 (1926). Küpfmüller, K., und H. F. Mayer: Wiss. Veröff. Siemens-Konz. 5, 51 (1926).

² Daß das Kreuzglied die Phase dreht, ist unmittelbar aus dem Schaltbild zu erkennen; es „schaltet“ bei tiefen Frequenzen „durch“, bei hohen „kreuzt“ es.

Ausgleich erzielen. Deshalb nimmt man noch *B*-Glieder nach Abb. 337 hinzu. Bei diesen ist

$$\left. \begin{aligned} R' &= \frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_1}, & k &= \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{L_2}{C_1}}, \\ G' &= \frac{\omega C_2}{1 - \omega^2 L_2 C_2}, & L_1 C_1 &= L_2 C_2, \end{aligned} \right\} \quad (1393)$$

also nach (1389) und (1387) mit den Abkürzungen $\omega^2 L_1 C_1 = \eta^2$, $C_2 = 4 \kappa C_1$:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{d\omega} &= \frac{1}{k \left(1 + \frac{\omega^2 L_1^2}{4 k^2 (1 - \omega^2 L_1 C_1)^2} \right)} \frac{L_1 (1 - \omega^2 L_1 C_1) + 2 \omega^2 L_1^2 C_1}{(1 - \omega^2 L_1 C_1)^2} \\ &= \sqrt{L_1 C_2} \frac{1 + \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + \kappa \eta^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1394)$$

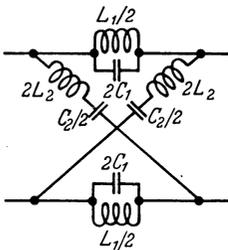


Abb. 337.

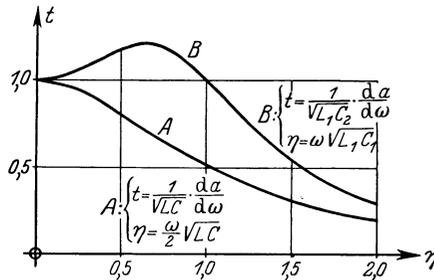


Abb. 338.

Abb. 338, *B* zeigt die Frequenzabhängigkeit dieses Ausdrucks für $\kappa = 2$. Die Laufzeit steigt demnach bei diesen Gliedern mit wachsender Frequenz zunächst auf ein Maximum (vom Betrage $1,2 \sqrt{L_1 C_2}$ bei $\eta = 0,64$) und nimmt dann ebenfalls auf Null ab.

In der Praxis nimmt man Kombinationen von *A*- und *B*-Gliedern. Da man den frequenzunabhängigen Wellenwiderstand der verschiedenen Glieder gleich groß machen kann, addieren sich die Laufzeiten.

Für den ganzen Durchlaßbereich die Phasenverzerrung zu beseitigen ist nicht möglich. Je näher man an die Grenzfrequenz herangeht, um so kompliziertere Ausgleichsschaltungen muß man nehmen. Näheres hierüber a. a. O.

Ob die leichte Pupinisierung oder der Phasenausgleich in Verbindung mit Echosperren das bessere Hilfsmittel zur Beseitigung des Einflusses der Einschwingvorgänge und Echostörungen ist, läßt sich nur auf Grund praktischer Erfahrungen entscheiden. Die Deutsche Reichspost hat deshalb 1928/29 in Verbindung mit der Firma Siemens & Halske an einem Kabel zwischen Hannover und Wiedenbrück Versuche anstellen lassen.

Das Ergebnis war das folgende¹:

Bei normal belasteten Vierdrahtverbindungen erhielt man mit Echosperren und Phasenausgleich selbst auf 10880 km Entfernung bei einer Restdämpfung von ≈ 1 Neper noch eine ausgezeichnete Verständigung. Mit diesen Hilfsmitteln ist die Vierdrahtleitung also für beliebige irdische Entfernungen brauchbar.

Schwach belastete Vierdrahtleitungen ohne Phasenausgleich waren annähernd ebensogut. Nur machte sich der Umstand unangenehm bemerkbar, daß bei tiefen Frequenzen infolge einer Zusatzphasenverzerrung durch die zahlreicheren Verstärker die Laufzeit stark erhöht ist.

¹ Vgl. F. Lüschen u. H. F. Mayer: Elektr. Nachr.-Techn. 6, 143 (1929).

Da die schwach belasteten Leitungen sowohl in der Anlage als auch in der Unterhaltung und im Betrieb teurer sind als die normal belasteten Verbindungen mit Phasenausgleich, und da sich auch manche Störungen (z. B. Temperatureinflüsse, ferner das im § 252 unter b) besprochene Absinken der Dämpfung bei tiefen Frequenzen) bei den leicht pupinisierten Leitungen mehr bemerkbar machen, kommen Lüschen und Mayer, die über die Versuche berichten, zu dem Schluß, daß bei den in Europa vorkommenden Entfernungen die normale Pupinisierung mit Phasenausgleich der leichten Pupinisierung vorzuziehen sei. Bei Leitungslängen über 4000 km allerdings wird man mit Rücksicht auf die bei normal belasteten Leitungen recht hohe Laufzeit t_0 (§ 334) doch wohl auf die leichte Pupinisierung zurückgreifen müssen¹.

Für Rundfunk, Bildtelegraphie usw. nimmt man am besten dickere Leitungen und schwächere Pupinisierungen.

§ 359. Zusammengesetzte Schwingungen. Die Strom- und Spannungsschwankungen, die von unseren Fernverbindungen übertragen werden, haben nur ausnahmsweise den Charakter reiner Sinusschwingungen. Im allgemeinen ist ihre Form verwickelter; sie enthalten, auch wenn sie periodisch sind, außer einer „Grundschwingung“ noch mehr oder weniger starke „Oberschwingungen“. Die Vokale z. B. setzen sich aus harmonischen Teilschwingungen zusammen, d. h. aus Schwingungen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache einer gewissen Grundfrequenz sind; die einzelnen Vokale *aei* . . . unterscheiden sich wieder dadurch voneinander, daß unter ihren Obertönen diejenigen einer bestimmten absoluten Tonhöhe (die sogenannten „Formanten“) besonders stark vertreten sind.

In den vorhergehenden Abschnitten haben wir fast überall lineare Übertragungssysteme vorausgesetzt. Für diese gilt das Superpositionsprinzip: Bei Übermittlung eines Frequenzgemischs kann man die Übertragung der Teilfrequenzen für sich betrachten; das Übertragungsergebnis ist gleich der Summe der für die einzelnen Frequenzen berechneten Teilergebnisse.

Anders bei den nichtlinearen Übertragungssystemen. In ihnen können neue Frequenzen entstehen, die in dem zu übertragenden Frequenzgemisch noch nicht enthalten waren.

Diese neu auftretenden Frequenzen können als Störungen empfunden werden; dann spricht man von Formverzerrung oder Verzerrung durch Nichtlinearität oder auch kurz nichtlinearer Verzerrung. In anderen Fällen ist die Veränderung der Schwingungsform beabsichtigt; hierhin gehört die sog. „Modulation“. Die mit der Nichtlinearität zusammenhängenden Erscheinungen sollen uns in den nächsten Paragraphen beschäftigen.

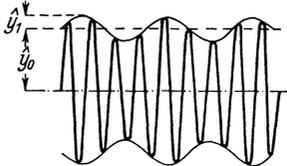


Abb. 339.

§ 360. Die „modulierte“ Schwingung. In der Nieder- und Hochfrequenztechnik werden sehr oft „modulierte“ Schwingungen² übertragen. Man denke sich eine Wechselgröße y von der festen hohen Frequenz Ω , deren Amplitude \hat{y} mit einer wesentlich niedrigeren Frequenz ω um einen gewissen Mittelwert \hat{y}_0 herum schwankt (Abb. 339). Sie kann im einfachsten Falle dargestellt werden durch

$$y = \hat{y} \cos \Omega t = (\hat{y}_0 + \hat{y}_1 \cos \omega t) \cos \Omega t. \quad (1395)$$

Man nennt eine solche Schwingung „moduliert“; und zwar heißt Ω die „Träger-

¹ Vgl. K. Höpfner u. F. Lüschen: Europ. Fernspr.-D. H. 21, 3 (1931). — Über Seekabel s. A. Ebeling u. K. Küpfmüller: Ebenda S. 27.

² Über die sog. „Frequenzmodulation“ s. z. B. W. Runge: Telefunken-Ztg. 11, 28 (1930).

frequenz“, ω die „modulierende“ oder „Modulationsfrequenz“, \hat{y}_1/\hat{y}_0 das „Aussteuerungsverhältnis“ oder der „Modulationsgrad“. Für $\hat{y}_1 = \hat{y}_0$, d. h. 100%ige Aussteuerung, erhält man das Bild Abb. 340.

Eine solche modulierte Schwingung läßt sich als Übereinanderlagerung einfacher (nichtharmonischer) Sinusschwingungen auffassen; und zwar ist die Zerlegung auf elementarem Wege möglich: es ist

$$y = \hat{y}_0 \cos \Omega t + \frac{\hat{y}_1}{2} \cos (\Omega - \omega) t + \frac{\hat{y}_1}{2} \cos (\Omega + \omega) t. \quad (1396)$$

Die modulierte Schwingung der Abb. 339 enthält demnach die Frequenzen $\Omega - \omega$, Ω und $\Omega + \omega$, aber keine weiteren.

Man muß besonders beachten, daß in der modulierten Schwingung (1395) die Frequenz ω fehlt, mit der die Amplitude \hat{y} schwankt. Das ist praktisch von der größten Bedeutung; denn ein System, das einen modulierten Strom der Form (1395) übertragen soll, braucht nur für Frequenzen

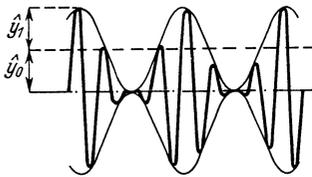


Abb. 340.

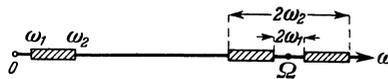


Abb. 341.

in der Nähe der Trägerfrequenz Ω , aber nicht für die viel niedrigere modulierende Frequenz ω durchlässig zu sein.

In den praktisch wichtigen Fällen liegen meist nicht die einfachen Verhältnisse der Gleichung (1395) vor, sondern es ist eine Übereinanderlagerung vieler Frequenzen zu übertragen. Dann enthält die modulierte Schwingung außer der Trägerfrequenz zwei Frequenzbänder, die sog. „Seitenbänder“, die zu beiden Seiten der Trägerfrequenz liegen (Abb. 341). Die Breite jedes der beiden Bänder in Hz gemessen ist gleich der Breite des modulierenden Frequenzbandes.

Die Trägerfrequenz Ω muß immer groß sein gegen die Frequenzen ω , weil sie sonst von diesen nicht scharf moduliert werden kann.

Modulierte Schwingungen können genau ihrer Definition entsprechend hergestellt werden z. B. mit Hilfe eines Mikrophons, das man in einen hochfrequent schwingenden elektrischen Kreis einschaltet. Denn da die auf das Mikrophon auftreffenden Schallschwingungen Schwankungen des Widerstands hervorrufen, entsteht entsprechend der Gleichung (1395) ein trägerfrequenter Strom, dessen Scheitelwert \hat{y} im Rhythmus der Schallschwingungen schwankt.

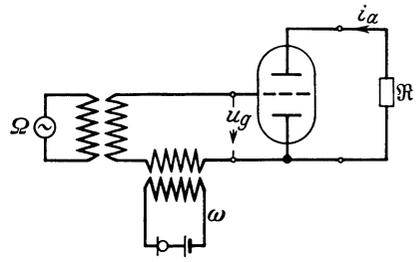


Abb. 342.

§ 361. Modulation durch nichtlineare Gebilde. Modulierte Schwingungen entstehen nicht nur in dem nichtlinearen Mikrophon durch äußere Einwirkung, sondern auch von selbst, wenn in einem System nicht-

lineare Gebilde vorhanden sind. Es werde z. B. dem Gitter einer „Modulationsröhre“ gemäß der Schaltung Abb. 342 gleichzeitig (additiv) eine hochfrequente und eine niederfrequente Schwingung aufgedrückt:

$$u_g = U_g + A \cos \Omega t + a \cos \omega t, \quad (1397)$$

und es bestehe zwischen der Gitterspannung und dem Anodenstrom bei gegebenem Verbraucherwiderstand \mathfrak{R} ein nichtlinearer Zusammenhang, der durch

die Arbeitskurve der Abb. 343 ausgedrückt werde. Dann kann man aus der nach unten aufgetragenen Kurve der Gitterspannung punktwise die nach rechts aufgetragene Kurve des Anodenstromes konstruieren. Aus der Konstruktion geht

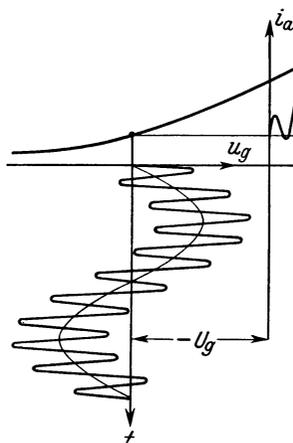


Abb. 343.

hervor, daß der Anodenstrom aufgefaßt werden kann als eine Überlagerung des Ruhegleichstroms I_a , einer hinzugegetretenen Gleichstromkomponente, einer etwas verzerrten Schwingung von der Frequenz ω und einer mit ω modulierten Schwingung von der Trägerfrequenz Ω . Siebt man also die konstanten und niederfrequenten Komponenten heraus, so hat man eine modulierte Schwingung nach der Definition des vorigen Paragraphen.

Man kann dieses Ergebnis folgendermaßen rechnerisch ableiten. Der Arbeitskurve der Abbildung entspreche die Gleichung

$$i_a = c_0 + c_1 u_g + c_2 u_g^2. \quad (1398)$$

Setzt man u_g aus Gleichung (1397) ein, so erhält man

$$\left. \begin{aligned} i_a = c_0 + c_1 (U_g + A \cos \Omega t + a \cos \omega t) \\ + c_2 (U_g^2 + A^2 \cos^2 \Omega t + a^2 \cos^2 \omega t + 2 U_g (A \cos \Omega t \\ + a \cos \omega t) + 2 A a \cos \Omega t \cos \omega t). \end{aligned} \right\} \quad (1399)$$

Nun ist aber $c_0 + c_1 U_g + c_2 U_g^2$ gleich dem Anodenruhestrom I_a , $c_1 + 2 c_2 U_g$ gleich der Steilheit S für $u_g = U_g$; man kann also schreiben:

$$\left. \begin{aligned} i_a = I_a + S (A \cos \Omega t + a \cos \omega t) \\ + \frac{c_2}{2} \{ (A^2 + a^2) + (A^2 \cos 2 \Omega t + a^2 \cos 2 \omega t) \\ + 2 A a (\cos (\Omega - \omega) t + \cos (\Omega + \omega) t) \}. \end{aligned} \right\} \quad (1400)$$

Durch das quadratische Glied der Gleichung (1398) entstehen außer einer Zusatzgleichstromkomponente (einem „Richtstrom“) und den Oktaven 2Ω und 2ω die Kombinationsfrequenzen $\Omega - \omega$ und $\Omega + \omega$, die zusammen mit der Trägerfrequenz Ω die modulierte Schwingung ergeben.

Drückt man nur eine einzige Frequenz ω auf das Gitter, so fallen die Kombinationsfrequenzen weg. Dann besteht die Wirkung des quadratischen Glieds — abgesehen von einer gewissen Gleichrichtung — nur darin, daß die Oktave der treibenden Frequenz als Störung auftritt.

Man kann die Gleichung (1398) als den Anfang einer Reihenentwicklung nach Potenzen von $u_g - U_g$ ansehen. Dann hat S die Bedeutung di_a/du_g , $2 c_2$ die Bedeutung $d^2 i_a/du_g^2$, beide Ableitungen genommen für den Ruhepunkt. Den zweiten Differentialquotient nennt man vielfach auch „Richtfaktor“.

Da der Anodenstrom von der Steuerspannung, also einer Kombination von Gitter- und Anodenspannung abhängt, gibt es noch zwei andere Möglichkeiten der Schaltung: man kann auch mit hochfrequent oder niederfrequent variierender Anodenspannung arbeiten.

§ 362. Demodulation. Beim Empfang modulierter Schwingungen muß im Demodulator die im Modulator unterdrückte Niederfrequenz wiederhergestellt und wahrnehmbar gemacht werden. Hierzu können wieder nichtlineare Gebilde

dienen. Die Niederfrequenz erscheint als Differenz der Frequenzen $\Omega + \omega$ und Ω oder Ω und $\Omega - \omega$.

In der Tat zeigt eine punktmäßige Konstruktion (Abb. 344), daß in dem entstehenden Schwingungsgemisch eine niederfrequente Komponente enthalten ist, die auf die Membran eines Telephons einzuwirken vermag.

§ 363. Unterdrückung des einen Seitenbandes und der Trägerfrequenz. Aus dem im vorigen Paragraphen Gesagten geht hervor, daß es nicht nötig ist, die beiden Seitenbänder einer modulierten Schwingung zu übertragen. Ja man kann sogar außer dem einen Seitenband auch noch die Trägerfrequenz wegschneiden, wenn man sie auf der Empfangsseite wieder zusetzt. Denn die zu übermittelnde Nachricht steckt natürlich nur in den Seitenbändern.

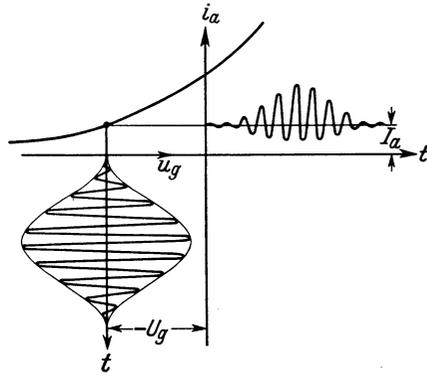


Abb. 344.

Man kann das übertragene eine Seitenband auch dadurch demodulieren, daß man es zur unmittelbaren Modulation einer auf der Empfangsseite zur Verfügung gestellten Trägerfrequenz $\hat{Y} \cos \Omega t$ verwendet. Dann liefert nämlich beispielsweise das obere Band die modulierte Schwingung

$$\hat{Y} \cos \Omega t \cdot \frac{\hat{y}_1}{2} \cos \{(\Omega + \omega) t\} = \frac{\hat{y}_1 \hat{Y}}{4} \cos \omega t + \frac{\hat{y}_1 \hat{Y}}{4} \cos \{(2 \Omega + \omega) t\}; \quad (1401)$$

d. h. es entsteht die gewünschte niederfrequente Schwingung und darüber gelagert eine hochfrequente, die man — z. B. durch eine Spulenleitung — wegfiltern kann.

§ 364. Zweibandtelephonie. Bei der Zweibandtelephonie¹ (Abb. 345) sind die Ämter wie beim Zweidrahtbetrieb nur durch je zwei Drähte miteinander verbunden. Das Auftreten von Rückkopplungen wird jedoch — abgesehen von den normal geschalteten Endgabeln — durch Wellenfilter verhindert.

Die Sprechströme der einen Energieströmungsrichtung $A \rightarrow B$ werden mit dem normalen Frequenzband zwischen 300 und 2400 Hz, die Sprechströme der anderen Energieströmungsrichtung $B \rightarrow A$ dagegen mit einem höheren Frequenz-

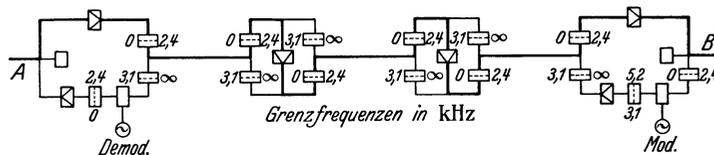


Abb. 345.

band zwischen 3100 und rund 5200 Hz übertragen. In Abb. 345 ist der Niederfrequenzweg mit dicken, der Hochfrequenzweg mit dünnen Strichen gezeichnet.

Das Frequenzband zwischen 3100 und 5200 Hz entsteht als unteres Seitenband durch Modulation einer Trägerfrequenz von etwa 5500 Hz; durch Filter wird die Trägerfrequenz und das obere Band schon im Sender beseitigt. Selbst-

¹ Mayer, H. F.: Tel.- u. Fernspr.-Techn. 18, 312 (1929). Höpfner, K.: Europ. Fernspr.-D. H. 14, 229 (1929).

verständlich ist Zweibandtelephonie nur auf leicht pupinisierten Kabeln (oder auf Freileitungen oder Krarupkabeln) möglich.

Der Verlauf im einzelnen ist etwa der folgende. Die niederfrequenten Ströme werden in der gewöhnlichen Weise durch Ausgleichsübertrager mit Nachbildungen auf den ersten Verstärker, der noch im Fernamt liegt, übertragen. Nach der Verstärkung werden sie durch eine Spulenleitung von allen Schwingungen oberhalb von 2400 Hz gereinigt und über eine einfache Gabel ohne Ausgleichsschaltung der Fernleitung zugeführt. Der Rückweg über den Trägerfrequenzempfänger wird ihnen durch eine Kondensatorleitung versperrt. In den Zwischenverstärkern werden den Sprechströmen wieder alle Wege, die für sie bestimmt sind, durch Spulenleitungen freigegeben, alle anderen Wege durch Kondensatorleitungen gesperrt. Auf der Empfangsseite werden die Sprechströme in der gewöhnlichen Weise verstärkt und über die Endgabel dem Hörenden zugeführt; der Weg in den Trägerfrequenzsender ist ihnen auch hier durch eine Kondensatorleitung verlegt.

Verwickelter sind die Schaltungen für die trägerfrequenten Ströme. Auch die Sprechströme der Richtung $B \rightarrow A$ werden zunächst von allen Frequenzen über 2400 Hz gereinigt; dann modulieren sie die Trägerfrequenz. Die modulierten Ströme durchlaufen zuerst ein Filter, das nur das untere Seitenband¹ durchläßt; dieses wird verstärkt und über die einfache Gabel der Fernleitung zugeführt; Rückkopplungen und Fehlleitungen werden durch Wellenfilter verhindert. Auf der Empfangsseite setzt man die weggesiebte Trägerfrequenz wieder zu; in der demodulierenden Röhre wird die Sprechfrequenz zurückgewonnen, verstärkt und über die Endgabel dem Hörenden zugeführt.

Die Gefahr einer Selbsterregung ist auch bei den Zweibandkabeln in Anbetracht der hohen Verstärkungen nicht zu unterschätzen. Rückkopplungen sind möglich über die Endgabeln, ferner über die einfachen Gabeln, falls die Filter im Sperrbereich noch etwas durchlässig sind. Außerdem kann Selbsterregung auch die Folge von Nichtlinearitäten sein. Entsteht nämlich z. B. in irgendeiner Pupinspule gemäß § 367 aus der bei A gesandten Niederfrequenz $f = 1375$ Hz die Frequenz $3f = 4125$ Hz, so ist für sie der Trägerfrequenzkanal durchlässig; sie wird also im Empfänger der Richtung $B \rightarrow A$ demoduliert, und es entsteht bei A wieder die ursprüngliche Frequenz 1375 Hz. Diese ist also sozusagen über das Seitenband hinweg rückgekoppelt worden. Durch sorgfältige Ausbildung der Filter und Wahl eines Spulenkerns von geringer Hysteresiskonstante kann man die hier beschriebenen Rückkopplungen fast vollkommen unterdrücken.

Die Zweibandtelephonie bringt besondere Vorteile bei den Seekabeln, die bisher wegen der nötigen hohen Verstärkerfelddämpfungen in der wirtschaftlich ungünstigen Vierdrahtschaltung betrieben werden mußten².

§ 365. Formverzerrung. Wie schon im § 359 erwähnt, können infolge von Nichtlinearitäten auch störende Zusatzfrequenzen auftreten. Besteht z. B. zwischen einer Ursache e und ihrer Folge i eine Beziehung der Form

$$i = ae + be^3 \quad (1402)$$

und ist $e = \hat{e} \cos \omega t$, so wird

$$i = ae + b\hat{e}^3 \cos^3 \omega t. \quad (1403)$$

Auch dieser Ausdruck läßt sich in elementarer Weise in Teilschwingungen zerlegen. Es ist nämlich allgemein:

$$\begin{aligned} \cos^3 \alpha &= \cos^2 \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \cos \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{1}{2} \frac{\cos 3\alpha + \cos \alpha}{2} \\ &= \frac{3}{4} \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos 3\alpha \end{aligned} \quad (1404)$$

¹ Allerdings häufig auch die Frequenz 2ω , die nach der Gleichrichtung die Frequenz $\Omega - 2\omega$ ergibt, die wieder in den Bereich der Sprechfrequenzen fallen und deshalb stören kann. Über ihre Beseitigung siehe H. F. Mayer: a. a. O.

² S. auch H. F. Mayer u. G. Mücke: Europ. Fernspr.-D. H. 20, 370 (1930).

und daher

$$i = a \left(1 + \frac{3}{4} \frac{b}{a} \hat{e}^2 \right) e + \frac{b}{4} \hat{e}^3 \cos 3 \omega t. \tag{1405}$$

Die Folge i enthält demnach außer der schon in der Ursache vorhandenen Frequenz ω auch die dreifache Frequenz (die zweite Oberquint) als harmonische Oberschwingung; außerdem aber ist die Amplitude der Grundschwingung der Folge verändert in einem Maße, das von der Amplitude \hat{e} der Ursache abhängt.

Neben der im § 361 betrachteten Röhre ist das wichtigste nichtlineare Gebilde die Spule mit ferromagnetischem Kern. Bei ihr tritt wie bei dem Zusammenhang (1402) vor allem die zweite Oberschwingung, also die dritte Teilschwingung, auf. Um dies nachweisen zu können, müssen wir jedoch zuerst die Fouriersche Rechenmethode zur „harmonischen Analyse“ ableiten.

§ 366. **Harmonische Analyse einer vorgelegten Kurve.** Die Aufgabe, festzustellen, aus welchen harmonischen Teilschwingungen eine vorgelegte periodische Kurve zusammengesetzt gedacht werden kann, ist von Fourier schon im Jahre 1822 gelöst worden.

Es sei die Kurve $y = f(t)$ gegeben; sie beginne an der Stelle $t = 0$ und erstrecke sich bis $t = T$. T sei ihre Grundperiode, d. h. es sei $f(t + nT) = f(t)$, wo n eine positive oder negative ganze Zahl ist.

Wir versuchen die Darstellung durch den Ansatz

$$y = A_0 + a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + a_3 \cos(3\omega t + \varphi_3) + \dots, \tag{1406}$$

wo $\omega = 2\pi/T$ sein soll. Die Koeffizienten a und die Phasen φ sollen so bestimmt werden, daß die unendliche trigonometrische Reihe mit der gegebenen Funktion übereinstimmt. Da

$$a_p \cos(p\omega t + \varphi_p) = a_p (\cos p\omega t \cos \varphi_p - \sin p\omega t \sin \varphi_p),$$

kann man auch die Koeffizienten

$$A_p = a_p \cos \varphi_p, \quad B_p = -a_p \sin \varphi_p \tag{1407}$$

einführen; dann hat man die Form

$$y = A_0 + A_1 \cos \omega t + A_2 \cos 2\omega t + \dots + A_p \cos p\omega t + \dots + B_1 \sin \omega t + B_2 \sin 2\omega t + \dots + B_p \sin p\omega t + \dots \tag{1408}$$

Zur Bestimmung zunächst irgendeines Koeffizienten A_q multipliziert man die ganze Gleichung mit $\cos q\omega t dt$ und integriert von 0 bis T . Dann wird

$$\left. \begin{aligned} \int_0^T y \cos q\omega t dt &= A_0 \int_0^T \cos q\omega t dt + A_1 \int_0^T \cos \omega t \cos q\omega t dt \\ &+ \dots + A_p \int_0^T \cos p\omega t \cos q\omega t dt + \dots + B_1 \int_0^T \sin \omega t \cos q\omega t dt \\ &+ \dots + B_p \int_0^T \sin p\omega t \cos q\omega t dt + \dots \end{aligned} \right\} \tag{1409}$$

Für das allgemeine Glied mit dem Koeffizienten A_p schreiben wir

$$\frac{A_p}{2} \left\{ \int_0^T \cos \left((p+q) \frac{2\pi t}{T} \right) dt + \int_0^T \cos \left((p-q) \frac{2\pi t}{T} \right) dt \right\}, \tag{1410}$$

für das allgemeine Glied mit dem Koeffizienten B_p

$$\frac{B_p}{2} \left\{ \int_0^T \sin \left((p+q) \frac{2\pi t}{T} \right) dt + \int_0^T \sin \left((p-q) \frac{2\pi t}{T} \right) dt \right\}. \tag{1411}$$

Da p und q ganze Zahlen sind, verschwinden nach einem schon oft verwendeten Satz alle Glieder mit Ausnahme des Glieds

$$\frac{A_q}{2} \int_0^T \cos \left((q - p) \frac{2\pi t}{T} \right) dt = \frac{A_q}{2} \int_0^T dt = \frac{A_q T}{2}. \quad (1412)$$

Es bleibt also nach (1409)

$$A_q = \frac{2}{T} \int_0^T y \cos q \omega t dt. \quad (1413)$$

Demnach hat man, um A_q zu finden, die Ordinaten der gegebenen Kurve Punkt für Punkt mit $\cos q \omega t$ zu multiplizieren, eine neue Kurve mit $y \cos q \omega t$ zu zeichnen und deren Flächeninhalt zwischen den Abszissen 0 und T festzustellen. Dieser Inhalt, durch $T/2$ dividiert, ist der Koeffizient A_q .

Zur Bestimmung der Koeffizienten B_q multipliziert man mit $\sin q \omega t dt$ und integriert wieder zwischen 0 und T . Dann treten die allgemeinen Glieder

$$\frac{A_p}{2} \left\{ \int_0^T \sin \left((p + q) \frac{2\pi t}{T} \right) dt - \int_0^T \sin \left((p - q) \frac{2\pi t}{T} \right) dt \right\} \quad (1414)$$

und

$$\frac{B_p}{2} \left\{ \int_0^T \cos \left((p - q) \frac{2\pi t}{T} \right) dt - \int_0^T \cos \left((p + q) \frac{2\pi t}{T} \right) dt \right\} \quad (1415)$$

auf, und es bleibt als einziges Glied

$$\frac{B_q}{2} \int_0^T \cos \left((q - p) \frac{2\pi t}{T} \right) dt = \frac{B_q}{2} \int_0^T dt = \frac{B_q T}{2}. \quad (1416)$$

B_q ergibt sich also nach

$$B_q = \frac{2}{T} \int_0^T y \sin q \omega t dt. \quad (1417)$$

Den Koeffizient A_0 erhält man, wenn man (1408) mit dt multipliziert und integriert. Dann bleibt

$$\int_0^T y dt = A_0 \int_0^T dt = A_0 T. \quad (1418)$$

Der Koeffizient A_0 ist also gleich dem Mittelwert der Funktion $f(t)$ innerhalb des Intervalls T .

Aus den Koeffizienten A_q und B_q können leicht die Koeffizienten a_q und φ_q berechnet werden.

Die in dieser Weise zu analysierenden Kurven dürfen natürlich keine unendlich großen Werte haben und nirgends mehrwertig sein. Da die Koeffizienten durch Integrationen gefunden werden, brauchen die Kurven nicht durch je eine einzige Funktion gegeben zu sein.

§ 367. Analyse der Rayleighschen Magnetisierungsschleife. Wir haben im § 262 gesehen, daß bei schwachen Feldern zwischen \mathfrak{B} und \mathfrak{H} mit guter Annäherung die Beziehung besteht:

$$\mathfrak{B} = (\mu_A + 2\nu \hat{\mathfrak{H}}) \hat{\mathfrak{H}} \pm \nu (\hat{\mathfrak{H}}^2 - \mathfrak{H}^2). \quad (1419)$$

Ändert sich $\hat{\mathfrak{H}}$ sinusförmig, so gilt jedesmal während der ersten Halbperiode (von $t = 0$ bis $t = T/2$)

$$\mathfrak{B} = (\mu_A + 2\nu \hat{\mathfrak{H}}) \hat{\mathfrak{H}} \cos \omega t + \nu \hat{\mathfrak{H}}^2 \sin^2 \omega t, \quad (1420)$$

während der zweiten Halbperiode (von $t = T/2$ bis $t = T$)

$$\mathfrak{B} = (\mu_A + 2\nu \hat{\mathfrak{H}}) \hat{\mathfrak{H}} \cos \omega t - \nu \hat{\mathfrak{H}}^2 \sin^2 \omega t. \quad (1421)$$

Die ersten Glieder der rechten Seiten von (1420) und (1421) können natürlich nicht weiter zerlegt werden. In der Tat verschwindet das Integral

$$\frac{2}{T} (\mu_A + 2\nu \hat{\mathfrak{H}}) \hat{\mathfrak{H}} \int_0^T \cos \omega t \cos q \omega t dt, \quad (1422)$$

für alle von 1 verschiedenen q und das Integral

$$\frac{2}{T} (\mu_A + 2\nu \hat{\mathfrak{H}}) \hat{\mathfrak{H}} \int_0^T \cos \omega t \sin q \omega t dt \quad (1423)$$

für alle q . Die ersten Glieder von (1420) und (1421) liefern daher nur den einen Anteil

$$(\mu_A + 2\nu \hat{\mathfrak{H}}) \hat{\mathfrak{H}} \cos \omega t. \quad (1424)$$

Das zweite Glied der Gleichung (1421) steuert zu den Koeffizienten A_q und B_q die Anteile

$$-\frac{2\nu \hat{\mathfrak{H}}^2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T \sin^2 \omega t \cos q \omega t dt \quad \text{und} \quad -\frac{2\nu \hat{\mathfrak{H}}^2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T \sin^2 \omega t \sin q \omega t dt \quad (1425)$$

bei. Wir führen in diesen Integralen die neue Veränderliche $t' = t - T/2$ ein. Es ist dann zwischen $t' = 0$ und $t' = T/2$ zu integrieren; außerdem ist

$$\cos\left(q\omega\left(t' + \frac{T}{2}\right)\right) = \pm \cos q\omega t', \quad \sin\left(q\omega\left(t' + \frac{T}{2}\right)\right) = \pm \sin q\omega t', \quad (1426)$$

wobei das obere Vorzeichen für gerade, das untere für ungerade q gilt. Die Beiträge der zweiten Glieder von (1420) und (1421) sind also für gerade q einander entgegengesetzt gleich, für ungerade dagegen einander gleich. Demnach liefern diese Glieder zu den Koeffizienten A_q und B_q mit geradem q überhaupt keinen Anteil, zu den Koeffizienten mit ungeradem q dagegen beziehungsweise die Anteile

$$\frac{4\nu \hat{\mathfrak{H}}^2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin^2 \omega t \cos q \omega t dt \quad \text{und} \quad \frac{4\nu \hat{\mathfrak{H}}^2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin^2 \omega t \sin q \omega t dt. \quad (1427)$$

Unbestimmt integriert ist

$$\begin{aligned} \int \sin^2 \omega t \cos q \omega t dt &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2\omega t) \cos q \omega t dt \\ &= \frac{\sin q \omega t}{2q\omega} - \frac{\sin((2+q)\omega t)}{4(2+q)\omega} - \frac{\sin((2-q)\omega t)}{4(2-q)\omega}, \end{aligned} \quad (1428)$$

$$\begin{aligned} \int \sin^2 \omega t \sin q \omega t dt &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2\omega t) \sin q \omega t dt \\ &= -\frac{\cos q \omega t}{2q\omega} + \frac{\cos((2+q)\omega t)}{4(2+q)\omega} - \frac{\cos((2-q)\omega t)}{4(2-q)\omega}. \end{aligned} \quad (1429)$$

Da q ungerade ist, ist weiter für $t = T/2$ sowohl wie für $t = 0$

$$\sin q \omega t = \sin((2+q)\omega t) = \sin((2-q)\omega t) = 0, \quad (1430)$$

andererseits

$$\cos q \omega t = \cos((2+q)\omega t) = \cos((2-q)\omega t) = \mp 1, \quad (1431)$$

wo das obere Vorzeichen für $t = T/2$, das untere für $t = 0$ gelten soll. Demnach wird für ungerade q

$$A_q = 0, \quad (1432)$$

$$B_q = -\frac{8\nu\hat{\mathfrak{H}}^2}{T} \left(-\frac{1}{2q\omega} + \frac{1}{4(2+q)\omega} - \frac{1}{4(2-q)\omega} \right) \\ = \frac{\nu\hat{\mathfrak{H}}^2}{\pi} \left(\frac{2}{q} - \frac{1}{2+q} - \frac{1}{q-2} \right) = -\frac{8\nu\hat{\mathfrak{H}}^2}{\pi(q-2)q(q+2)}. \quad (1433)$$

Das Endergebnis der Fourierschen Analyse ist daher¹:

$$\mathfrak{B} = (\mu_A + 2\nu\hat{\mathfrak{H}}) \hat{\mathfrak{H}} \cos \omega t + \frac{8}{3\pi} \nu \hat{\mathfrak{H}}^2 \sin \omega t \\ - \frac{8}{15\pi} \nu \hat{\mathfrak{H}}^2 \sin 3\omega t - \frac{8}{105\pi} \nu \hat{\mathfrak{H}}^2 \sin 5\omega t - \dots \quad (1434)$$

Durch die Hysteresis wird demnach die Grundschwingung der Induktion nach Betrag und Phase beeinflusst; und zwar ist die Induktion gegen die Feldstärke verzögert mit einer Phase φ , für die

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{8\nu\hat{\mathfrak{H}}}{3\pi(\mu_A + 2\nu\hat{\mathfrak{H}})} \quad (1435)$$

gilt. Außerdem treten Oberschwingungen ungeradzahlicher Ordnung auf.

§ 368. Klirrfaktor der Pupinspulen. Man kann sich vorstellen, daß jede Pupinspule ein Generator für die 3., 5., . . . Teilschwingung ist. Berücksichtigen wir nur die 3. Teilschwingung (die Duodezime), so ist der Scheitelwert der entstehenden elektromotorischen Kraft:

$$\hat{\mathcal{E}}_3 = \omega F \frac{8}{15\pi} 3\omega \cdot \nu \hat{\mathfrak{H}}^2 = \omega F \cdot \frac{16}{5} \nu \hat{\mathfrak{H}}^2. \quad (1436)$$

Nun ist nach § 262

$$R_h = \frac{16\sqrt{2}\omega|\mathfrak{S}|}{3} \frac{\nu}{\mu_A} L f = \frac{16\sqrt{2}}{3} \omega^3 F f |\mathfrak{S}| \frac{\nu}{f^2}; \quad (1437)$$

für den Effektivwert der zu der zweiten Oberquinte gehörenden induzierten elektromotorischen Kraft erhält man also die einfache Formel

$$|\mathfrak{E}_3| = \frac{\hat{\mathcal{E}}_3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{5} R_h |\mathfrak{S}| = \frac{3}{5} A_h L f |\mathfrak{S}|^2. \quad (1438)$$

Er ist also dem Quadrat der Stromstärke proportional mit $3/5$ des Produkts aus Hysteresisfaktor und Grundfrequenz als Proportionalitätsfaktor.

Wir denken uns² eine Pupinleitung hinter ihrer ersten Spule durchschnitten (Abb. 346) und sehen den Schaltungsteil vor dem Schnitt für die dritte Teilschwingung als eine Stromquelle mit der Leerlaufspannung $|\mathfrak{E}_3|$ und dem inneren Widerstand \mathfrak{B} an. Diese Stromquelle erzeugt an der Schnittstelle die Spannung $|\mathfrak{E}_3|/2$, am Leitungsende daher (vgl. § 158) die Spannung $|\mathfrak{E}_3|/2 \cdot e^{-(n-1)b}$. Auch in der 2., 3., . . . n -ten Spule treten solche elektromotorische Kräfte auf; die elektromotorische Kraft jeder folgenden Spule ist aber nach (1438) um den Faktor e^{-2b} schwächer als die der vorhergehenden und erzeugt am Leitungsende, da sie ihm um einen Spulenabstand näher liegt, eine um e^{+b}

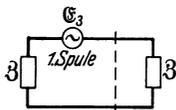


Abb. 346.

¹ Lord Rayleigh: Phil. Mag. (5) 23, 240 (1887).

² Vgl. K. Kämpf Müller: Fachberichte des VDE 1926, 87. Deutschmann, W.: Elektr. Nachr.-Techn. 6, 80 (1929).

stärkere Spannung. Die der dritten Teilschwingung entsprechende Gesamtspannung am Ende ist daher

$$|\mathbf{u}_2|_3 = \frac{|\mathcal{E}_3|}{2} e^{-(n-1)b} (1 + e^{-b} + e^{-2b} + \dots + e^{-(n-1)b}) \approx \frac{|\mathcal{E}_3|}{2b} e^{-(n-1)b}. \quad (1439)$$

Diese Spannung pflegt man mit der der Grundschiwingung entsprechenden Endspannung $|\mathbf{u}_2|_1$ zu vergleichen und die Vergleichszahl „Klirrfaktor“ zu nennen¹. Da

$$|\mathbf{u}_2|_1 = |\mathbf{u}_1|_1 e^{-nb} \approx |\mathbf{u}_1|_1 e^{-(n-1)b} \approx \mathfrak{B} |\mathfrak{S}_1|_1 e^{-(n-1)b}, \quad (1440)$$

ergibt sich für den Klirrfaktor nach (1438) und (1439)

$$\frac{|\mathbf{u}_2|_3}{|\mathbf{u}_2|_1} = \frac{|\mathcal{E}_3|}{2b|\mathfrak{B}||\mathfrak{S}_1|_1} = \frac{3R_h}{10b|\mathfrak{B}|} = \frac{3A_h L f |\mathfrak{S}_1|_1}{10b|\mathfrak{B}|}. \quad (1441)$$

Bei dem im § 262 betrachteten Seekabel ist der Hysteresisfaktor $A_h L = 160 \cdot 1,25$ mH/A, $|\mathfrak{S}_1|_1 = 0,15$ A, $b = 0,04$, $|\mathfrak{B}| = 800 \Omega$ und $f = 800$ Hz, und man erhält daher den hohen Klirrfaktor

$$\frac{3 \cdot 160 \cdot 1 \cdot 0,15}{10 \cdot 0,04 \cdot 800} = 22,5\%.$$

Der Klirrfaktor kann herabgesetzt werden durch Wahl eines Materials von geringem ν oder durch leichte Pupinisierung. Letzteres folgt aus Gleichung (943); bei Erhöhung der Grenzfrequenz auf das Doppelte muß die Windungszahl etwa auf die Hälfte herabgesetzt werden, so daß der Hysteresisfaktor auf den achten Teil heruntergeht.

Dabei ist allerdings zu beachten, daß bei leichter Pupinisierung mehr Verstärker eingebaut werden müssen; hierdurch kann die durch die Röhren hervorgerufene Formverzerrung, die bei normaler Belastung viel kleiner ist als die Spulenzerrung, an Einfluß gewinnen. Auch die zu den Verstärkern gehörenden Übertrager können eine nicht zu vernachlässigende Formverzerrung hervorrufen.

Die durch die Formverzerrung entstehenden Obertöne wirken an sich noch nicht störend; sie verändern nur die Klangfarbe. Viel schlimmer ist der Einfluß der Kombinationstöne (Summen- und Differenzöne). Sie geben häufig Anlaß zu unerträglichen Schwebungen; der Klang der Sprache kann rauh, Musikübertragungen können für empfindliche Ohren ungenießbar werden. Die Verringerung der nichtlinearen Verzerrungen ist daher eine der wichtigsten Aufgaben der Fernmeldetechnik.

§ 369. Trägerfrequenztelephonie über Freileitungen (Drahtfunk)². Der Durchlaßbereich der Freileitungen ist nach dem Abschnitt IX viel breiter als der der Pupinkabel. Er wird ja nach oben hin nicht durch eine Grenzfrequenz, sondern durch den infolge der Stromverdrängung allmählich wachsenden Widerstand der Drähte begrenzt. Man kann daher in dem Durchlaßbereich der Fernsprechfreileitungen außer dem normalen Ferngespräch noch mehrere (bis zu vier) Trägerfrequenzgespräche unterbringen.

Immerhin hat eine 3 mm-Freileitung z. B. für einen hochfrequenten Strom von 50 kHz bereits eine bezogene Dämpfung von etwa 19 Neper/Mm; am Ende einer 300 km langen Freileitung würde ein solcher Strom daher mit einer Dämpfung von fast 6 Neper ankommen.

Die Erfahrung hat gezeigt, daß die Mehrfachtelephonie über die normalen Fernsprechfreileitungen nur bei Frequenzen unter 40 kHz (zugehörige Wellen-

¹ Allgemein ist der Klirrfaktor gleich dem Verhältnis des Effektivwerts aller Oberschwingungen zusammengenommen zu dem Effektivwert der Grundschiwingung.

² Wagner, K. W., u. H. Schulz: ETZ 45, 485 (1924).

länge im leeren Raum: 7,5 km) und auf Entfernungen von mindestens etwa 300 km wirtschaftlich ist. Die Gesamtdämpfung sollte für keine der benutzten Frequenzen wesentlich höher sein als 5 Neper; größere Reichweiten lassen sich, wie bei Fernkabeln, nur durch Einbau von Zwischenverstärkern erzielen. Mit schwachen Endenergien zu arbeiten ist wegen der starken Störungen, denen die Freileitungen ausgesetzt sind, nicht möglich.

Der Durchlaßbereich kann auf die einzelnen Gespräche in verschiedener Weise aufgeteilt werden. Eine übliche Verteilung ist z. B. die folgende:

Art der Ausnutzung	Frequenzbereich kHz	Träger- frequenz (kHz)
Gewöhnliches Fernsprechen oder Tonfrequenztelegraphie	0,3 . . . 2,4	—
Gespräch 3	10,4 . . . 13,4	12,8
Gespräch 1	15,4 . . . 18,4	17,8
Gespräch 2	20,7 . . . 23,7	23,08
Gespräch 3'	25,6 . . . 28,6	28,0
Gespräch 1'	30,35 . . . 33,35	30,95
Gespräch 2'	36,0 . . . 39,0	38,4

Dabei gehören z. B. die Gespräche 1 und 1' zusammen; 1 entspricht der einen, 1' der anderen Gesprächsrichtung.

Da der gesamte Durchlaßbereich für ein Gespräch jedesmal etwa 3000 Hz beträgt, so muß das eine Seitenband (nach der Tabelle teils das obere, teils das untere) unterdrückt werden. Die Trägerfrequenzen werden in Deutschland mit übertragen (anders in Amerika); damit sie noch stark genug hindurchgelassen werden, muß man sie in das Innere der Frequenzbänder legen (vgl. die Tabelle).

Für die Auswahl der Trägerfrequenzen ist teilweise die Frequenzlage der drahtlosen Großstationen maßgebend gewesen, für deren Wellen die Freileitungen wie Antennen wirken.

Die Schaltung der Mehrfachtelephonie ist ähnlich der der Zweibandtelephonie. Die niederfrequenten Ströme werden Trägerfrequenzen überlagert; in Modulationsröhren entstehen dann modulierte Schwingungen. Diese werden gefiltert und über die Freileitungen geschickt. Auf der Empfangsseite hat man entsprechend Empfangsfilter und Demodulationsröhren; der niederfrequente Strom wird dem Hörenden über die gewöhnliche Endgabel zugeführt.

Äußerst störend sind beim Drahtfunk Kabelstücke, wie sie häufig aus örtlichen Gründen in die Freileitungen eingeschaltet werden müssen. Kabelstücke, die länger sind als 200 m, müssen — natürlich leicht — pupinisiert werden.

Die Mehrfachtelephonie über Freileitungen wird in Ländern mit engmaschigem Fernkabelnetz nur in Ausnahmefällen benutzt, z. B. wenn auf einer Strecke vorübergehend ein stärkerer Verkehr bewältigt werden muß. Anders in schwach besiedelten Ländern, wo keine Fernkabel gelegt werden können (z. B. in Rußland).

Besonders wichtig ist das Verfahren neuerdings geworden für den Nachrichtenverkehr der Elektrizitätswerke. Diese müssen zuverlässige Nachrichtenmittel haben, die von dem normalen der Allgemeinheit zur Verfügung stehenden Fernsprechnetz unabhängig sind. Man führt Leitungen oder Luftpfeiler über die Gestänge der Überlandleitungen oder verwendet diese Leitungen selbst. Wegen deren Dicke kann man im letzteren Falle mit der Trägerfrequenz bis auf 200 . . . 300 kHz hinaufgehen. Die Fernmeldeleitungen werden an die Hochspannungsleitungen durch spannungssichere Kondensatoren angekoppelt.

§ 370. Telegraphie und Telephonie. In den letzten Jahren hat das Fernsprechen das Telegraphieren weit zurückgedrängt. Es hat den großen Vorteil, daß es das Wechselgespräch erlaubt; Fragen können unmittelbar beantwortet, Mißverständnisse sofort berichtigt werden. Aber auch die Telegraphie hat ihre Vorzüge. So kann das Telegramm als Urkunde dienen; es erfüllt ferner auch dann noch seinen Zweck, wenn der Empfänger vorübergehend nicht zur Verfügung steht;

es erlaubt endlich auch schwierigere Schriftsätze rasch zu übermitteln, bei denen es auf jedes Wort ankommt. Eine Einrichtung, die unentbehrlich ist, muß aber, wenn irgend möglich, auch so ausgebaut werden, daß sie wirtschaftlich ist.

Deshalb hat gerade das Aufblühen der Fernsprecherei zu einer regen Entwicklung auch der Telegraphie den Anstoß gegeben. Im ersten Jahrzehnt dieses Jahrhunderts suchte man den Fortschritt in der Konstruktion komplizierter und teurer, aber sehr leistungsfähiger Schnelltelegraphen, die in kürzester Zeit eine große Zahl von Telegrammen über eine Leitung zu senden gestatten.

Da die Telegramme bei diesen Apparaten vor der Sendung auf Lochstreifen übertragen werden müssen, konnte das Verfahren nur wirtschaftlich sein, wenn durch die äußerste Ausnutzung der Leitungen so viel an Kapital gespart wurde, daß die Kosten des umständlichen Verfahrens in Kauf genommen werden konnten. Nun schreibt aber ein geschickter Maschinenschreiber gar nicht so viel langsamer als ein Schnelltelegraphenapparat; andererseits stehen durch die Vielfachausnutzung der Leitungen der Telegraphie heutzutage sehr viel mehr — in anderer Weise nicht ausnutzbare — Kanäle zur Verfügung als früher. Telegraphiert man also ohne Lochung mit einer „Fernschreibmaschine“ unmittelbar in die Leitung hinein, so spart man an Kapital, da die Fernschreibmaschinen billiger sind als die Schnelltelegraphen, und an Arbeitslohn, da nur noch ein einziger Apparat zu bedienen ist, ohne daß deshalb die Leitungen schlechter ausgenützt würden.

Es kommt hinzu, daß man die billigeren und einfacheren Fernschreibmaschinen den Kunden der Post in die Hand geben kann; sie können dann eilige Nachrichten einem fernen Empfänger mit der Geschwindigkeit der gewöhnlichen Schreibmaschine übermitteln.

Die Vorzüge der Fernschreibmaschinen, die diese neuere Entwicklung möglich gemacht haben, sind die folgenden: Sie liefern im Gegensatz zu dem Morseapparat und zu dem Schnellmorseapparat unmittelbar Druckschrift in Streifen- oder Blattform; ihre Arbeit ist nur wenig abhängig von dem Synchronismus umlaufender Teile; endlich: sie können von jedem des Maschinenschreibens Kundigen ohne weiteres mit der Geschwindigkeit des Maschinenschreibens bedient werden.

Neue Telegraphierkanäle werden der Freileitungstelegraphie durch die Mehrfachtelegraphie mit Trägerfrequenzen, der Kabeltelegraphie in erster Linie durch die Unterlagerungstelegraphie und die Tonfrequenztelegraphie zugeführt.

§ 371. Die Mehrfachtelegraphie mit Trägerfrequenzen über Freileitungen benutzt das Frequenzband zwischen der normalen Telephonie und der Mehrfachtelephonie mit Trägerfrequenzen, also das Band zwischen 3000 und 10000 Hz. Da ein Telegramm je nach der Telegraphiergeschwindigkeit ein Band zwischen 20 . . . 70 Hz beansprucht, lassen sich in dem Bereich bis zu 20 Telegraphierkanäle unterbringen. Dieses Verfahren veranschaulicht sehr deutlich die Richtigkeit der Behauptung, daß es heute nicht mehr notwendig ist, die Telegraphenapparate so zu bauen, daß die Leitungen auf das äußerste ausgenutzt werden; dies Ziel wird durch die Mehrfachtelegraphie viel wirtschaftlicher erreicht.

§ 372. Unterlagerungstelegraphie¹. Bei der Unterlagerungstelegraphie wird wie beim „Simultanbetrieb“ auf demselben Aderpaar gleichzeitig gesprochen und mit beliebigen Apparaten telegraphiert. Die Sprech- und Telegraphierströme werden ähnlich wie bei den anderen Verfahren zur Vielfachausnutzung der Leitungen mit Hilfe von Siebgebilden voneinander getrennt: die niederfrequenten Telegraphierströme werden durch Kondensatorleitungen von den Fernsprechapparaten, die tonfrequenten Sprechströme durch Spulenleitungen von den Telegraphenapparaten ferngehalten.

¹ Vgl. A. Jipp u. H. Nottebrock: Tel.- u. Fernspr.-Techn. 17, 227 (1928).

Die Schaltung ist in Abb. 347 angedeutet. Man wählt die Grenzfrequenz der Kondensatorleitungen zu 160 Hz, die der Spulenleitungen zu 60 Hz (neuerdings häufig noch niedriger). Die Phantomkreise nutzt man nur für das Fernsprechen aus; die Stämme verwenden man für das Telegraphieren in den beiden Richtungen.

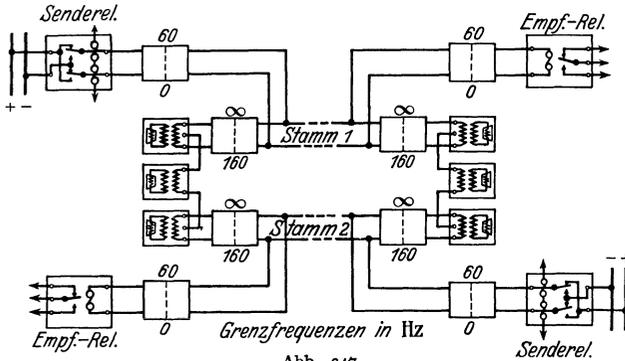


Abb. 347.

Auf den 0,9-mm-Kabeln erreicht man mit der Unterlagerungstelegraphie eine Reichweite von 150 km, die dem Abstand zweier Verstärkerämter entspricht. Auf den 1,4-mm-Kabeln kommt man auf 300 km; dann müssen die Tele-

graphierströme den dazwischen liegenden Verstärker umgehen, wobei wieder Spulen- und Kondensatorleitungen verwendet werden.

Noch größere Entfernungen überbrückt man durch Relaisübertragung; dabei verwendet man die normalen Endrelais der Unterlagerungstelegraphie.

Auch bei der Unterlagerungstelegraphie wird meist eine Duplexschaltung benutzt (§ 317).

§ 373. **Tonfrequenztelegraphie.** Bei der Tonfrequenztelegraphie¹ wird der Tonfrequenzbereich der Fernkabel, der in der Regel der Telephonie zur Verfügung steht, zu einer Vielfachtelegraphie ausgenutzt. Mit Röhrensendern oder Maschinen („Tonrädern“) wird eine größere Zahl von Trägerfrequenzen erzeugt; diese werden einzeln getastet, vereinigt in die Leitung gegeben, am Empfängernde mit Hilfe von Wellenfiltern wieder zerlegt und einzeln nach Gleichrichtung auf die Telegraphenapparate geleitet.

Bei der Tonfrequenztelegraphie sind natürlich nur solche Schriften möglich, die aus zwei Elementen, Strom und Stromlosigkeit, bestehen. Damit die Zeichen von den Relais richtig aufgenommen werden, müssen auf den kürzesten Stromschritt hinreichend viele Wechsel fallen.

Die Wirtschaftlichkeit des Tonfrequenzsystems hängt von der Zahl der Telegramme ab, die man gleichzeitig über eine Leitung senden kann. Nimmt man sie klein, so wird die Leitung schlecht ausgenutzt. Nimmt man sie dagegen groß, so werden die benutzbaren Frequenzbänder schmaler; damit steigen die Einschwingdauern, und man muß langsamer telegraphieren, so daß die hohe Zahl der Telegraphierkanäle keine Erhöhung der Telegraphierleistung mit sich bringt. Mit der Zahl der Kanäle wachsen außerdem die Kosten der Anlage.

Nach der Theorie im Abschnitt XV gilt für die Einschwingdauer τ beim Wellenfilter die einfache Gleichung

$$\tau = \frac{1}{f_2 - f_1}, \quad (1442)$$

wo $f_2 - f_1$ die Breite des benutzten Frequenzbandes ist. Lassen wir wie im § 141 eine Punktdauer τ_0 zu von der Länge der Einschwingdauer τ , so ist die zulässige Zahl der Stromschritte in der Sekunde gleich

$$\frac{1}{\tau_0} = f_2 - f_1; \quad (1443)$$

d. h. es gilt die äußerst einfache Regel: jedes Baud erfordert 1 Hz.

¹ Lüschen, F.: ETZ 44, 1, 28 (1923). Clausing, A.: Ebenda 47, 500 (1926).

Dies gilt aber nur für störungsfreie Übertragung. Praktisch empfiehlt es sich, das Frequenzband etwas breiter zu nehmen, d. h. für jedes Baud etwa 1,25 Hz zu rechnen.

Für die Auswahl der Trägerfrequenzen gibt es eine einfache Regel. Infolge der Nichtlinearität der Verstärker können Obertöne und Kombinationstöne (Summen- und Differenzöne) auftreten. Wählt man nun als Trägerfrequenzen ungerade Vielfache einer Grundfrequenz Ω_0 , z. B. 1, 3, 5, 7 . . . Ω_0 , so sind die Oktaven sowie die Summentöne und die Differenzöne gerade Vielfache von Ω_0 und fallen als solche in die Sperrbereiche.

Läßt man die einzelnen Frequenzbereiche sich unmittelbar aneinander anschließen, so kann man zwar mehr Telegramme unterbringen, muß aber teure Filter mit sehr steilen Resonanzkurven nehmen. Eine Kostenberechnung¹ zeigt, daß es am günstigsten ist, den Abstand zweier Trägerfrequenzen etwa 1,85 mal so groß zu wählen wie die Lochbreite.

Da sich bei höheren Frequenzen die Phasenverzerrung bemerkbar macht, geht man nicht über 1800 Hz hinaus, so daß der ganze Tonfrequenzbereich 1500 Hz umfaßt. Man erhält daher, wenn man sie soeben angegebenen Zahlen zugrunde legt, bei 50 Baud einen Trägerfrequenzabstand von $50 \cdot 1,25 \cdot 1,85 = 115$ Hz und daher 13 Kanäle, bei 100 Baud die Hälfte. Es empfiehlt sich, für die raschen Apparate (Baudot-4fach, Murray) sechs Kanäle vorzusehen, für die langsameren dagegen (Baudot-3fach, Siemens, Fernschreibmaschine) zwölf.

Bei leichter Pupinisierung kann man die Reihe der Trägerfrequenzen nach höheren Frequenzen hin noch erweitern.

Bei sehr großen Entfernungen kommt zu der Einschwingdauer, die von der Schmalheit des Frequenzbandes herrührt, die Einschwingdauer, die der Phasenverzerrung entspricht. Deren Einfluß ist bei den geringeren Reichweiten unbedeutend, weil die bei der Übermittlung eines Telegramms verwendeten Frequenzen gerade wegen der Schmalheit der Bänder nur wenig verschiedene Laufzeiten haben. Überhaupt ist die durch die Phasenverzerrung hervorgerufene Einschwingdauer nach § 346 der Breite des Durchlaßbereichs annähernd proportional. Schmale Frequenzbänder sind also hinsichtlich der Phasenverzerrung allgemein günstig: man kommt mit zwölf Kanälen auf größere Reichweiten als mit sechs. Praktisch wird daher dem Einfachbetrieb (12 Kanäle) durch die Phasenverzerrung überhaupt keine Grenze gesetzt.

Verwendet man Phasenausgleich, so kann man auch beim Mehrfachbetrieb (6 Kanäle) die Reichweite so sehr erhöhen, daß man praktisch jede gewünschte Entfernung überbrücken kann.

Da in der plötzlichen Einschaltung eines Wechselstroms alle Frequenzen von Null bis Unendlich enthalten sind, lassen beim Einschalten irgendeiner Frequenz im allgemeinen alle Filter etwas durch. Um dies zu vermeiden, kann man die Zeichen schon vor der Sendung „erweichen“, indem man sie durch ein Filter schickt. Die Telegraphiergeschwindigkeit wird hierdurch natürlich etwas herabgesetzt.

¹ Lüschen, F., u. K. Küpfmüller: Elektr. Nachr.-Techn. 4, 165 (1927).

Anhang.

Zusammenstellung einiger Rechenregeln.

1. δ und ε seien gegen 1 kleine Zahlen. Dann gilt

- a) $(1 \pm \delta)^n \approx 1 \pm n\delta;$
 b) $(1 \pm \delta)(1 \pm \varepsilon) \approx 1 \pm \delta \pm \varepsilon;$
 c) $\frac{1 \pm \delta}{1 \pm \varepsilon} \approx 1 \pm \delta \mp \varepsilon.$

2. Reihenentwicklungen für Exponentialfunktion, Logarithmus und trigonometrische Funktionen:

- a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots;$
 b) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (-1 < x < +1);$
 c) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots;$
 d) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots;$
 e) $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad (-90^\circ < x < +90^\circ).$

3. Extrema. u, v seien Funktionen von x ; u' und v' ihre Ableitungen. Dann liegen die Extrema von

- a) u^n dort, wo $u' = 0$ (außerdem dort, wo $u^{n-1} = 0$);
 b) $\ln u$ dort, wo $u' = 0$ (außerdem im Unendlichen);
 c) u/v dort, wo $u/v = u'/v'$.

4. Hyperbelfunktionen. Sie sind definiert durch

- a) $\operatorname{Cof} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$
 $\operatorname{Sin} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2};$
 $\operatorname{Tg} x = \frac{1}{\operatorname{Ctg} x} = \frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cof} x}.$

Der Hyperbelkosinus reellen Arguments ist nach Definition immer mindestens gleich +1; mit steigendem Argument wird $\operatorname{Cof} x \approx \operatorname{Sin} x$. Aus a) ergeben sich die Rechenregeln:

- b) $\operatorname{Cof} x \pm \operatorname{Sin} x = e^{\pm x}$ (entspricht dem „Eulerschen Lehrsatz“);
 c) $\operatorname{Cof}^2 x - \operatorname{Sin}^2 x = 1;$
 d) $\operatorname{Cof} jx = \cos x; \quad \cos jx = \operatorname{Cof} x;$
 $\operatorname{Sin} jx = j \sin x; \quad \sin jx = j \operatorname{Sin} x;$
 e) $\operatorname{Cof} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots;$
 $\operatorname{Sin} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots;$
 $\operatorname{Tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \dots;$

- f) $\frac{d}{dx} \operatorname{Cof} x = \operatorname{Sin} x; \quad \frac{d}{dx} \operatorname{Sin} x = \operatorname{Cof} x;$
- g) $\operatorname{Cof}(x \pm y) = \operatorname{Cof} x \operatorname{Cof} y \pm \operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} y;$
 $\operatorname{Sin}(x \pm y) = \operatorname{Sin} x \operatorname{Cof} y \pm \operatorname{Cof} x \operatorname{Sin} y;$
- h) $2 \operatorname{Cof} x \operatorname{Cof} y = \operatorname{Cof}(x+y) + \operatorname{Cof}(x-y);$
 $2 \operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} y = \operatorname{Cof}(x+y) - \operatorname{Cof}(x-y);$
 $2 \operatorname{Sin} x \operatorname{Cof} y = \operatorname{Sin}(x+y) + \operatorname{Sin}(x-y);$
 $2 \operatorname{Cof} x \operatorname{Sin} y = \operatorname{Sin}(x+y) - \operatorname{Sin}(x-y);$
- i) $\operatorname{Sin} 2x = 2 \operatorname{Sin} x \operatorname{Cof} x;$
- k) $\operatorname{Cof} 2x + 1 = 2 \operatorname{Cof}^2 x; \quad \operatorname{Cof} 2x - 1 = 2 \operatorname{Sin}^2 x.$

5. Konjugierte Größen. Es sei $\mathfrak{A} = A + jA' = |\mathfrak{A}| \angle \alpha; \quad \mathfrak{A}^* = A - jA' = |\mathfrak{A}| \angle -\alpha;$
dann gilt:

- a) $\mathfrak{A} \mathfrak{A}^* = |\mathfrak{A}|^2;$
- b) $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^* = 2A; \quad \mathfrak{A} - \mathfrak{A}^* = 2jA'.$

Aus 4. h) und d) ergibt sich daher

- c) $2 \operatorname{Cof} \mathfrak{A} \operatorname{Cof} \mathfrak{A}^* = \operatorname{Cof} 2A + \cos 2A';$
 $2 \operatorname{Sin} \mathfrak{A} \operatorname{Sin} \mathfrak{A}^* = \operatorname{Cof} 2A - \cos 2A';$
 $2 \operatorname{Sin} \mathfrak{A} \operatorname{Cof} \mathfrak{A}^* = \operatorname{Sin} 2A + j \sin 2A';$
 $2 \operatorname{Cof} \mathfrak{A} \operatorname{Sin} \mathfrak{A}^* = \operatorname{Sin} 2A - j \sin 2A';$
- d) $\operatorname{Tg} \mathfrak{A} = \frac{\operatorname{Sin} 2A + j \sin 2A'}{\operatorname{Cof} 2A + \cos 2A'} = \sqrt{\frac{\operatorname{Cof} 2A - \cos 2A'}{\operatorname{Cof} 2A + \cos 2A'}} \angle \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin 2A'}{\operatorname{Sin} 2A};$
 $\operatorname{Ctg} \mathfrak{A} = \frac{\operatorname{Sin} 2A - j \sin 2A'}{\operatorname{Cof} 2A - \cos 2A'} = \sqrt{\frac{\operatorname{Cof} 2A + \cos 2A'}{\operatorname{Cof} 2A - \cos 2A'}} \angle -\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin 2A'}{\operatorname{Sin} 2A}.$

6. $\angle a + b \angle \varphi = e^{-b \sin \varphi} \angle a + b \cos \varphi.$

7. $\int e^{(a+jb)x} dx = \int e^{ax} (\cos bx + j \sin bx) = \frac{e^{(a+jb)x}}{a+jb} + C;$

also ist:

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + C;$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C.$$

Sachverzeichnis.

- Abgleichfehler 229, 298
Ableitung 157
—, Messung 209
Ableitungsdämpfung 195
Abschaltung 88
Abschirmung 219, 302
Abstimmstärke 78, 95, 284
Achslinie 36
Achterverseilung 168, 208
Amperekilometer 221
Amplitude 29
Amplitudenverzerrung 162, 283
Analyse, harmonische 313
Analytische Funktionen 272
Anfangspermeabilität 44, 206
Anfangsphase 30
Anlaufstrecke 201
Anode 1, 138, 141
Anodenbatteriespannung 151
Anodenbelastung 151
Anodenspannung, -strom 141
Anpassung 20, 70, 109
— beim Filter 239, 245
— bei der Röhre 148
— beim Übertrager 129
— bei Vierpolketten 116
— nach dem Wellenwiderstand 109
Anpassungsbedingungen, erste und zweite 112
Anpassungsfehler 176
Anpassungsmaße 175
Ansprechzeit 300
Apparat, Epsteinscher 46
Arbeit, elektrische 17
Arbeitskurve 147
Arbeitsstrom 89
Argument 66
Aufbauzeit 284, 288, 291, 294
Aufnahmefähigkeit, magnetische 43
Aufpunkt 16
Augenblickswerte bei der komplexen Rechnung 66
Ausgleich des Nebensprechens 229, 235
Ausgleichskondensatoren 230, 235
Ausgleichsübertrager 207, 258, 297
Aussteuerungsverhältnis 309
Austrittsarbeit 152
Auswählende Durchlässigkeit 284
Axiale Vektoren 36
- B**
Babbeln 235
Bar 214
Batteriezeichen 4
Baud 90
Beeinflussung 167, 216
Bel 120
Belastete Leitungen 169, 187
- Belastung der Anode 151
—, schwache 195, 300, 303, 307, 317
Betrag 17, 66
Betriebsdämpfung 117
Betriebsdämpfung, Kurven konstanter 256
—, Messung 119
— des Übertragers 131
— des Wellenfilters 250
— zusammengesetzter Leitungen 187
Betriebskapazität 34, 210
Betriebsübertragungsmaß 117, 179
Betriebsverstärkung 152
Bewehrung 223
Bezogen 5, 156
Bezogene Werte der Leitung, Messung 159, 209
Bezugsdämpfung 120
Bilder, elektrische 31
Bildtelegraphie 308
Biot-Savartsches Gesetz 38
Blindleistungslinie 185
Blindteil, -widerstand 66
Bogenmaß 29
Brücke 12, 74, 209
Brückendämpfung 297
Brückensternglied 268, 306
Brückenstrom 13
- CCI** 118
Charakteristik 110
Coulombsches Gesetz 23
- D**
Dämpfung, künstliche 210
—, Messung 210
— des Nebensprechens 235
Dämpfungsausgleich, -entzerrung 266
Dämpfungskonstante 117, 172
Dämpfungsmaß 110
—, bezogenes 117, 172
— von Freileitungen 159
— von Kabeln 162
— von Krarupkabeln 169
— als Maß der Übertragungsfähigkeit 117
— von Pupinkabeln 192
Dämpfungsverzerrung 162, 283
Dämpfungswinkel 71, 93
Darstellung von Frequenzabhängigkeiten 77
Dekrement 95
Demodulation 310
Determinantenbedingung 104, 147
Dezibel 120
Dielektrizitätskonstante 25
Dieselhorst-Martin-Vierer 168, 208
Differentialgleichung, lineare 87, 92, 171
Differentialübertrager 207, 258, 297
Differenzkapazität 226

- Differenztöne 317
 Dimensionslose Potenzprodukte 53
 Diode 136
 Dispersion 173
 DM-Vierer 168, 208
 Doppelleitung, Gegeninduktivität 56
 —, Induktivität 57
 —, Teilkapazitäten 31
 Doppelröhrenzwischenverstärker 258
 Doppelsieb 241
 —, Betriebsdämpfung 251
 —, Dimensionierung 241, 254
 Doppelsprechschaltung 207
 Doppelsternvierer 168, 208
 Doppelstrom 90
 Drahtfunk 317
 Drallänge 167, 235
 Drehgrößen 36
 Drehsinnregeln 36, 38
 Drehpulschreiber 81
 Dreieck 14
 — aus Verschiebungsströmen 31
 Dreiecksschaltung 157
 Dreispulenverfahren 208
 Drosselkette 188, 239
 Duale Beziehungen 15
 Dünndrätige Leitung 161
 Duplexbetrieb 265, 320
 Durchflutung 39
 Durchgriff 143, 144
 Durchlaßbereich 237
 — beim Filter aus drei Elementen 243
 Dynamische Kapazität 153
 Dynamometer 59

 Ebene Vektorrechnung 68
 Echodämpfung 297
 Echosperrung 299
 Echostörungen 295, 299
 Eckfrequenzen 302
 Effektivwert 60
 Eichleitung 210, 211, 236
 Eigenfrequenz 71, 79, 93
 — beim Übertrager 127
 Eigenwerte 278
 Einfachleitungen 217, 221, 224
 Eingangswiderstand der Röhre 153
 Eingeprägte Feldstärke 22
 Einheiten, abgestimmte 3
 —, spezifische 78, 262
 Einschaltvorgang 87, 91, 92, 271
 — beim Kabel 100, 279
 — beim Pupinkabel 287, 289
 — beim Übertrager 135
 — beim Wellenfilter 290, 320
 Einschwingdauer 95, 288, 293
 Eisenverluste 124
 Elektrisierungszahl 25
 Elektrizitätsmenge 1
 Elektrizitätsträger 136
 Elektrizitätswerks-Telephonie 318
 Elektromotorische Kraft 1, 22
 Elektronen 17, 136
 Elektrostatiches Feld 20, 22
 Emission 151

 Empfindlichkeit des Ohrs 214
 Empfindung und Reiz 213
 Endnetzwerk 263
 Energie, elektrische 28
 —, magnetische 54
 —, potentielle 27, 55
 Energieanpassung 20, 70
 Energiegeschwindigkeit 292
 Energieinhalt eines Kondensators 27
 — einer Spule 53
 Energiesatz 37
 Energieströmung bei der Röhre 150
 Entdämpfung 178
 Entmagnetisierungsfaktor 47
 Entzerrung 266
 Entzerrungsgrenze 303
 Epsteinscher Apparat 46
 Erdkapazitäten 74, 228
 Erdrückleitung 217, 221, 224
 Erdschluß 12
 Erdung 216
 Ergiebigkeit 16
 Erhaltung der Elektrizität 6
 Erhitzung der Anode 151
 Erhöhung der Übertragungsfähigkeit 169
 Ersatzbilder des Übertragers 128
 Ersatzspannungsquelle 316
 Erzeuger 7
 Eulerscher Lehrsatz 63, 322
 Extrema 322

 Faradaysches Gesetz der Elektrolyse 1
 Fehlerort 12
 Fehlersatz 176
 Feld, elektrisches 16
 —, elektrostatisches 20, 22
 —, wirbelfreies 21
 Feldstärke, eingeprägte elektrische 22
 —, eingeprägte magnetische 45
 —, elektrische 16
 —, magnetische 39
 Feldzerfall 21
 Fernkabel 295
 Fernschreibmaschine 91, 319, 321
 Ferromagnetika 42
 Filter 237
 — in Kreuzgliedform 268
 — in Stern- oder Dreiecksform 242
 Filterwirkung und Aufbauzeit 284
 Flattern 207
 Flüchtiger Vorgang 88
 Fluß 23
 —, magnetischer 42
 Formanten 308
 Formverzerrung 284, 312
 Fortpflanzungsgeschwindigkeit 172, 299
 Fouriersches Integral 275, 284
 — Reihe 313
 — Zerlegung 271, 313
 Frankesche Maschine 75
 Freileitung, Dämpfung und Winkelmaß 160
 —, Nachbildung 259
 —, Wellenwiderstand 163
 Frequenz 29
 Frequenzabhängigkeiten 76

- Frequenzbrücke 74
 Frequenzgang, zeichnerische Darstellung 81
 Frequenzmaße 71, 244, 251
 Füllfaktor 204
 Fünferzeichen 91
 Funken 91
 Funkenverhütung 98
 Funktionen komplexer Veränderlicher 272
- G**
 Gabel 295
 Ganghöhe 167
 Gauß 36
 Gefährdung 216
 Gegeninduktanz zwischen Stark- und
 Schwachstromleitung 221
 Gegeninduktivität 51
 Gegennebensprechen 233
 Gegensinnig 122
 Generator 7
 Geometrische Addition 63
 Gesamtstrom in der Röhre 141
 Gitter 141
 Gitteranodenkapazität 153
 Gitterspannung, -strom 141
 Gittervorspannung 151
 Gleichmäßige Leitungen 156
 Gleichmäßigkeit des Aufbaues 202, 259
 Gleichrichtung 137, 310
 Gleichsinnig 122
 Gleichstrom 58
 Gleichstromanteil 146
 Gleichstromlösung 278
 Gleichstromschaltungen 1
 Glühkathode 141
 Gradmaß 29
 Gramm-Kraft 17, 18
 Graphisches Verfahren 62
 Grenzdämpfung 72, 73, 97
 Grenzfrequenz und Phasenverzerrung 294,
 304
 — der Spulenleitung 189
 — und Verzerrungsfreiheit 194
 —, Wahl 303
 Grenzfrequenzen erster und zweiter Art 242
 Größengleichungen 2
 —, zugeschnittene 27
 Grundfilter 238
 Grundgleichung des Zweipols 10
 — der Zweipolquelle 11
 — der Filtertheorie 238
 — der Röhre 145
 — des Vierpols 103
 Grundkreuzglied 269
 Grundschiwingung 58, 308
 Gruppengeschwindigkeit 291
 Gruppenlaufzeit 293
 Güte der Röhre 148
- H**
 Harmonische 58, 308
 — Analyse 313
 Harte Zeichen 321
 Hauptgleichung der Röhre 147
 Hautwirkung 52
 Heavisidesche Regel 277
 Heberschreiberschrift 91
- Heizkreis 141
 Helmholtzsche Gleichung 11
 Hertz 30
 Hilfsschaltungen, telegraphische 101
 Hintereinanderschaltung von Widerständen
 7, 71
 Hochfrequenztelephonie und -telegraphie
 über Freileitungen 317, 319
 Hochspannungsleitungen 216
 Hörerecho 300
 Hörfläche 214
 Hörvergleich 210
 Homogene Gleichungen 12
 H-Schaltung 211
 Hüllen bei Kabeladern 302
 Hyperbelfunktionen 96, 322
 —, Tafeln 114
 Hyperbelkosinus 182
 Hyperbeltangens 179
 Hysterese 42
 Hystereseisfaktor 205, 317
 Hystereseiskonstante 206, 314
 Hystereseissschleife, Analyse 314
 Hystereseisverlust 44, 205
 — beim Übertrager 123
 Hystereseiswiderstand 206, 316
- I**
 Imaginärer Teil 66
 Impedanz 62
 Induktanz 50
 Induktion, magnetische 35
 Induktionsgesetz 47, 48
 Induktionsstrom 37
 Induktive Spannung 48
 Induktivität 50
 —, Berechnung 55
 — einer Doppelleitung 57
 — eines Drahtes 57
 — von Pupinspulen 207
 Influenzladungen 216
 Innerer Widerstand von Röhren 145
 Integral, Fouriersches 275, 284
 Integralkosinus und -sinus 288
 Integration im Komplexen 273
 Inverse Widerstände 238
 Inversion 69
 Ionen 136
 Isolationswiderstand von Leitungen 5
- J**
 Jungfräuliche Kurve 43
- K**
 Kabel, Dämpfung und Winkelmaß 162
 —, Kapazität 35, 92
 —, Wellenwiderstand 163
 Kabelschrift 90
 Kabeltheorie 279
 Kapazität 26
 —, dynamische 153
 —, Messung 209
 —, einer Spule 124, 130
 —, symmetrische 34
 Kathode 1, 138, 141
 Kathodenstrom 141
 Kehrwert, zeichnerische Bestimmung 68
 Kelvinsche Bilder 31

- Kennlinie 138
 Kennlinienschar 141
 Kennwiderstand 110
 Kernparameter 104
 Kernwiderstand 105
 Kette von Vierpolen 116
 — aus Verstärkerfeldern und Zweiwegver-
 stärkern 298
 Kettenleiter erster und zweiter Art 157
 Kilogramm-Kraft 17, 18
 Kirchhoffsche Regeln 5
 Klemmenleistung 19, 60, 69
 Klemmenspannung 7
 Klemmenstrom 8
 Klirrfaktor von Röhren 317
 — von Spulen 316
 Knotenregel 6
 Koerzitivkraft 43
 Kombinationstöne 317
 Kompensation von Blindwiderständen 71,
 267
 — der induktiven Einwirkung 222
 — von Induktivität und Kapazität bei
 Schaltvorgängen 102
 Kompensationsapparat 12, 75
 Kompensationsverfahren 11, 75
 Komplexe Leistung 70
 — Rechnung 64
 — Veränderliche, Funktionen 272
 Kondensator 26
 Kondensatorausgleich 229
 Kondensatorreihe 239, 244
 Konjugierte Größen, 68, 323
 Kopplung, elektrische 216, 224, 232
 — bei Filtern 243
 —, galvanische 216
 —, komplexe 107, 296
 — und Lochbreite 246
 —, lose 108
 —, magnetische 221
 Kopplungsfaktor, magnetischer 52
 Kosinusnetz 182
 Krarupleitung 169
 Kreisdiagramm 82, 83
 Kreisfrequenz 29
 Kreuzen 167
 Kreuzglied 268, 306
 Kreuzungsausgleich 229
 Kunstschaltungen 258
 Kurzschluß (Kosinusnetz) 184
 Kurzschlüsse in Starkstromleitungen 223
 Kurzschlußstrom 16, 217
 Kurzschlußwiderstand 112
 — einer Leitung 164
 — eines Übertragers 129

 Ladestrom 98
 Längsentzerrer 266
 Längssymmetrie 104
 Laufzeit, absolute 283, 299, 308
 Leerlauf (Kosinusnetz) 184
 Leerlaufspannung 9, 217
 Leerlaufwiderstand 112
 — einer Leitung 164
 — eines Übertragers 126

 Leichte Pupinisierung 195, 306, 317
 Leistung 19
 —, größte entnehmbare 71
 —, komplexe 70
 Leistungsanpassung 20, 70
 Leistungsaufnahme, höchste 186
 Leistungspegel 215
 Leistungsverlauf, Veranschaulichung 184
 Leitfähigkeit 5
 —, Messung 14
 Leitungen, gleichmäßige 156
 —, Tabelle 164
 —, Übertragungsmaß und Wellenwider-
 stand 158
 — als Vierpolketten 117
 —, Widerstand von 5
 —, zusammengesetzte, Berechnung 186
 Leitungsnachbildungen 265
 Leitungsstrecke 180, 181
 Leitungsverlängerungen 265
 Leitwert 2
 —, dielektrischer 30
 —, innerer 16
 —, magnetischer, eines Spulenkerns 130
 Lenzsches Gesetz 38
 Lichtgeschwindigkeit 173
 Lineare Leiter 5
 Linienintegral 20
 Linksschraube 36
 Lochbreite und Koppelung 246
 —, praktische 254
 —, theoretische 238, 243
 Lochdämpfung 249
 Lochstreifen 319
 Logarithmische Maße 214
 Logatome 302

 Magnetisches Feld 35
 Magnetisierung 43
 —, wahre 45
 Magnetisierungsschleife 42, 205, 314
 Magnetomotorische Kraft 45
 Mantelkapazitäten 228
 Mantelstrom 223
 Maschenfrequenz 243
 Maschenregel 6
 Massekerne 47, 204
 Maßstab einer Zeichnung 44, 46
 Maxwell-Erde 101
 Mehrfachtelegraphie 319
 Mehrfachtelefonie 317
 Mehrwelligkeit 252
 Meilen Standardkabel 120
 Messung der Kabelunsymmetrien 228
 — der Stromstärke 59
 Messungen an Leitungen 209
 Messungen, Wechselstrom- 74
 Mischstrom 58
 Mitsprechen 227
 Modul 66
 Modulation 308
 Modulationsfrequenz, -Grad 309
 Modulationsröhre 309
 Moivrescher Lehrsatz 63, 322
 Molekularströme 43

- Momentanwerte bei der komplexen Rechnung 66
 Morsebetrieb 90, 319
 M-Typ 264
 Musikübertragung 209, 308.
- Nachbildung** 258
 — von Freileitungen 259
 — von Pupinkabeln 260, 261
 Nachbildungen in der Telegraphie 265
 Nachbildungsfehler 298
 Nachbildungsgüte, logarithmisches Maß 297
 Nachwirkung, magnetische 42, 205
 Nachwirkungsverlust 124, 205
 Nebeneinanderschaltung von Widerständen 8, 71
 Nebensprechausgleich 229, 235
 Nebensprechdämpfung 235
 Nebensprechen 167, 224, 301
 —, induktives 224, 230
 — bei langen Verbindungen 301
 — zwischen den Stämmen 226
 — zwischen Stamm und Phantomkreis 227, 230
 Nebensprechkopplung 226, 227, 228, 232
 —, Messung 229
 Negativer Widerstand 154
 Nennwert des Wellenwiderstands 157
 Neper 120
 Netzwerke, lineare 6
 Nichtlineare Systeme 284, 308
 — Verzerrung 284, 308, 312
 Niveaudiagramm 215
 Normalgenerator 213
 Nulllinie 35
 Nullpunkt des Pegels 215
 — des Potentials 21
- Oberschwingungen** 58, 216, 308
 Oersted 40
 Örtliche Nebensprechdämpfung 237
 Ohmsches Gesetz 1, 137
 — —, Differentialform 17
 — —, erweitertes 28, 49, 54
 — — für den magnetischen Kreis 41
 Ohrempfindlichkeit 214
 Ortskurve 83
 Oszillograph 59, 81
 Oxydfaden 152
- Paarverseilung** 168, 208
 Parabeldarstellung der Magnetisierungsschleife 205, 314
 Paralleleresonanz 73
 Parallelschaltung von Widerständen 8, 71
 Parameter 10
 Parameterdarstellung einer Kurve 82
 Parasitäre Kapazitäten 74
 Pedersen-Kompensator 76
 Pegel, absoluter 214
 —, relativer 215
 Pegeldiagramm 215
 Pegelmessung 213
 Pegelschreiber, -zeiger 215
- Periode 58
 Permalloy 170
 Permeabilität 39, 40
 —, komplexe 124
 —, reversible 44, 206
 Pfeifen 258, 296
 Pfeifgrenze 296
 Pfeifsicherheit 299
 Phantomschaltung 207, 224
 — und Verseilung 208
 Phantomspule 208
 Phase 29, 66, 68
 Phasenausgleich 306
 Phasenbrücke 76
 Phasengeschwindigkeit 172, 291
 Phasensprung 79
 Phasenverschiebung 61
 Phasenverzerrung 283, 291, 304, 306, 321
 Poissonsche Gleichung 23
 Pol 275
 Polare Komponenten 66
 — Vektoren 37
 Polarenkonstruktion 69, 83
 Potential 6, 21, 49
 Potenz, Inversions- 69
 Poyntingscher Vektor 19
 Praktisches Maßsystem 3
 Prüfmittel 16, 25, 35
 Psychophysisches Grundgesetz 213
 Pulverkerne 47, 204
 Punktfrequenz 286
 Pupinkabel 169, 187
 —, Diagramm des Wellenwiderstandes 200
 —, Dimensionierung 194, 305
 —, Schwankungen des Wellenwiderstandes 202, 259
 —, Übertragungsmaß 196
 —, Wellenwiderstand 198
 Pupinspulen 204, 207, 314
 —, Einfluß ihrer Unsymmetrie 230
- Querentzerrer** 268
- Randspannung** 40
 Raumbfaktor 204
 Raumladung 138
 Raumladungsformel, ebene Anordnung 138
 —, zylindrische Anordnung 140
 Raumladungsgitterröhre 151
 Rayleighsche Magnetisierungskurve 205, 314
 Reaktanzkreis 86, 262
 Reaktanztheorem 78
 Realteil 66
 Rechenregeln 322
 Rechenschieber bei der komplexen Rechnung 67
 Rechnen mit kleinen Zahlen 322
 Rechtsschraube 36
 Rechtwinklige Komponenten 66
 Reflexion 175, 177
 Reflexionsdämpfung 177, 178
 Reflexionsfaktor 177
 Reichweite 117
 Reichweite eines Pupinkabels 195
 Reihe, Fouriersche 313

- Reihenentwicklungen 322
 Reihenresonanz 73, 79
 Reihenschaltung von Widerständen 7, 71
 Reiz und Empfindung 213
 Rekorderschrift 91
 Reluktanz 42
 Remanenz, scheinbare (wirksame) 47
 —, wahre (des Materials) 43, 206
 Residuum 275
 Resistanzkreis 85
 Resonanz 59, 72
 Resonanzfrequenz 72, 83
 Resonanzkurve 78, 237, 251
 Restdämpfung 216, 300, 303
 Reziproker Wert, zeichnerische Ermittlung 68
 Reziprozität 15
 Richardsonsche Gleichung 151
 Richtfaktor, -strom 310
 Richtungsregeln 4, 37, 38
 Ringspule 41
 —, geschlitzte 45
 Ringübertrager 51
 Röhrengüte 148
 Röhrenverstärker 136
 Rückkopplung 154, 258, 296, 299
 Rückkopplungsfaktor 156
 Rückkopplungssperre 300
 Rückkopplungsverzerrung 296
 Rückstrom 221
 Ruhestrom 91
 Rundfunkübertragung 209, 308
- Sättigung, magnetische 43
 Sättigungsstrom 137, 151
 Sattelfrequenz 189, 243
 Satzverständlichkeit 303
 Saugtransformatoren 222
 Schalldruck, -leistung 214
 Schaltvorgänge 86
 —, allgemeinere Theorie 271
 Scheinfrequenz 71, 93
 — beim Übertrager 127
 Scheinleistung 60
 Scheinleitwert 8
 Scheinwiderstand 8, 62, 70
 —, Berechnung 182
 —, Messung 75, 210
 — eines Übertragers 133
 — eines Vierpols 108, 112, 176
 Scheitelwert 29
 Scherungskorrektur 45
 Scherungslinie 46
 Schienenstrom 222
 Schirmwirkung 218, 302
 Schleifendämpfungsmesser 212
 Schleifenkapazität 34
 Schmerzgrenze 214
 Schnelltelegraphenapparate 319
 Schwankung des Wellenwiderstandes 202, 259
 Schwebung, räumliche 292
 —, zeitliche 284, 317
 Schwellenwert 213
 Schwingung, gedämpfte 94
 Schwingungsdauer 29, 58
 —, wahre 94
- Schwingungsfreier (aperiodischer) Vorgang 96
 Schwingungsvorgang 93
 Schwund, magnetischer 49
 Seekabel 168, 170, 206, 302, 308
 Seekabeltelegraphie 281
 Seitenbänder 309
 Seitenkapazitäten 226
 Selbständige Strömung 137
 Selbsterregung 154, 258, 296
 Selbsterregungsformel 155
 Selbstinduktion, -potential 50, 57
 Selektivität 284
 Serienschaltung von Widerständen 7, 71
 Signalanlagen 216
 Silberverständlichkeit 302
 Silbervoltmeter 1, 3
 Simultanbetrieb, -kapazität 34
 Sinusschwingung 29
 Skineffekt 52
 Spannung 6, 17, 20, 49
 —, induktive 48
 Spannungsknoten und -bäuche 220
 Spannungspegel 215
 Spannungsresonanz 73, 79
 Spannungsteilergleichung 9
 Spannungsübersetzung 109
 Spannungsvergleich 75
 Spannungsverlauf, Veranschaulichung 184
 Spannungsverstärkung 147
 Sparübertrager 123
 Speicherung der Energie 54
 Spektrum 285
 Sprecherecho 300
 Springschreiber 319
 Sprung einer EMK 275
 Spulen 204, 207, 314
 Spulenabstand (-feldlänge) 195
 Spulenfeld 188
 Spulenfluß 49
 Spuleninduktivität, Wahl 194
 Spulenkapazität 124
 Spulenleitung 188, 239
 —, verlustbehaftete, Dämpfung und Winkelmaß 191
 —, verlustfreie, Dämpfung und Winkelmaß 188
 —, Wellenwiderstand 198
 Stabilität der Pupinspulen 47, 204
 Stämme 207
 Stammfunktion, Stammgleichung 278
 Stammspule 208
 Standardkabel 120
 Starkstromstörungen 216, 219
 Start-Stop-Apparat 91, 319
 Steilheit 145
 Stern 14
 —, vielstrahliger 224
 Sternschaltung 157
 Sternverseilung 168
 — bei Fernkabeln 208
 Steuerelektrode 136
 Steuerspannung 143
 Störung 216
 Stoßdämpfung 178
 Streckendämpfungsmesser 213

- Streufrequenz (-resonanz) 127
 Streuung, magnetische 51, 52, 123
 Streuungsloser Transformator 121
 Strömung, selbständige und unselbständige 137
 Strom, wahrer 26
 Stromdichte 17
 Stromknoten und -bäuche 220
 Stromresonanz 73, 78
 Stromschritt, kürzester, und Einschaltdauer 101
 —, Zahl der kürzesten 90
 Stromstärke 2
 Stromübersetzung 106
 Stromverdrängung 52
 Stromverlauf, Veranschaulichung 183
 Stromwärme 18
 Suszeptibilität 43
 Symbolisches Produkt 3
 Symbolisches Verfahren 65
 Symmetrie der Leitungen 223
 Symmetriefaktor 111
 Symmetrische Kapazität 34
 Symmetrischer Vierpol 104

 Tangensnetz 179
 Technisches Maßsystem 18
 Teilkapazität 31
 Teilschwingungen 58, 308
 Teilsache und Teilfolge 272
 Teilwellen 171
 Telegraphengleichung 171
 Telegraphenkabel, Einschaltvorgang 92, 100, 279
 Telegraphenschriften 90
 Telegraphie 86, 318
 Telegraphierfrequenzen 285
 Telegraphiergeschwindigkeit 90
 Telegraphierzeichen 89, 285
 Telephon 44, 59
 Temperaturabhängigkeit des Sättigungsstromes 151
 — des Widerstandes 5
 Théveninsches Theorem 11
 Thomsonbrücke 13
 Thomsonkabel, -kurve 279
 Tonfrequenztelegraphie 320
 Tonhöhe 214
 Tor 138, 214
 Toroid 41
 Träger, Elektrizitäts- 136
 Trägerfrequenz 308
 Trägerfrequenztelegraphie über Freileitungen 319
 Trägerfrequenztelephonie über Freileitungen 317
 Trägheit, elektrische 55
 Transformation 112
 Transformator 121
 Transmission unit 120
 Treppenschaltung 259, 265
 Trichterfrequenz 190, 243
 Trigonometrische Funktionen, Tafeln 114
 Triode 141
 Trugkreis 207

 Überanpassung 150, 151
 Übergangsfunktion 281
 Übersetzer, idealer 128
 Übersetzung 106, 109, 111
 — der EMK 106
 — der EMK beim Übertrager 134
 Übersetzungsverhältnis 121
 Übersprechen 226
 Übertrager 121
 Übertragungseinheit 120
 Übertragungsfähigkeit 117
 Übertragungsfaktor und -winkel 283
 Übertragungsmaß 110
 —, bezogenes 117
 —, Messung 114, 210, 212
 Umbildung des Wellenwiderstandes 260
 — von Widerständen 84
 Umkehrungssatz 107
 Umlaufspannung 21, 48
 Umrechnungen beim komplexen Verfahren 66
 Umwandlung 14, 224
 — einer Reihenschaltung in eine Parallelschaltung 86
 Unendlichkeitsfrequenz 248
 Ungleichmäßigkeiten, Einfluß von 202
 Unselbständige Strömung 137
 Unstetigkeitspunkte 274
 Unterbrechung eines Stromkreises 91
 Unterlagerungstelegraphie 319
 Ureickkreis 120

 Vakuum 138
 Vektor 17
 Vektoren, axiale 36
 — als Hilfsmittel der Darstellung 63
 —, polare 37
 Vektorielle Addition 63
 Verbraucher 7
 Verdrillung 167
 Vergleichsvierpol 211
 Verhältnisgleichungen 2
 Verlängerung von Leitungen 265
 Verlustarme und verzerrungsfreie Leitung 160
 Verlustwiderstand von Pupinspulen 205
 Verlustwinkel 159
 Vernichtung, gegenseitige von Blindwiderständen 71
 Verschiebung, elektrische 23
 —, —, Messung 25
 Verschiebungsfeld eines langen Drahts 24
 — zwischen parallelen Ebenen 24
 Verschiebungskonstante 25
 Verschiebungsspannung bei der Röhre 143
 Verschiebungsstrom 26
 Verseilung 168, 208
 Versorffunktion 64
 Verständlichkeitsmessung 302
 Verstärker 136
 Verstärkerfelddämpfung 303
 Verstärkung 147, 152, 296
 Verteilerung des Dämpfungsverlaufs 246
 Verzerrung in linearen Systemen 271
 — durch Nichtlinearität 308
 Verzerrungsfreie Leitung 160

- Verzögerungsrelais 136
 Vieleck, vollständiges 224
 Vierdrahtverbindung 295
 Viererverseilung 168, 208
 Vierpol, linearer 102
 — konstanten Wellenwiderstandes 270
 —, symmetrischer 104
 Vierpolparameter, Messung 104
 — des Übertragers 125
 Vierpolverstärkung 296
 Vokale 308
 Voltameter 1, 59
 Vorgang, flüchtiger 88
 Vorspannwirkung 101
 Vorzeichen bei Zeichnungen 62
 Vorzeichenregeln 6
- W**ärme, spezifische 19
 Wärmemenge 19
 Wagnersche Brücke 74
 Wahrer Strom 26
 Wechselstromanteil 146
 Wechselstromleistung, entnehmbare, bei der Röhre 148
 Wechselstromschaltungen 58, 61, 67
 Wechselstromtelegraphie 320
 Wechselwirkungsglied 179
 Weiche Zeichen 321
 Wellen auf Leitungen 171, 174
 Wellenfilter 237
 — in Dreiecksform 255
 —, Einschwingzeit 290
 — in Kreuzgliedform 268
 —, Kurvendarstellungen 256
 — in Sternform 242
 —, Wirkdämpfung 249
 Wellenlänge 174
 Wellenlängenkonstante 174
 Wellenparameter, -theorie 111
 Wellenwiderstand 110, 172
 —, Messung 113, 210
 Wheatstonesche Brücke 12, 74
 Wicklungskapazität 124
 Wicklungssinn eines Übertragers 122
- Widerstand 2
 —, charakteristischer 72
 —, induktiver 50
 —, innerer 8, von Röhren 145
 —, magnetischer 42
 —, Messung 11, 74, 75
 —, spezifischer 5
 Widerstandsreziprozität 15, 238
 Windungszahlenverhältnis und Übersetzung beim Übertrager 135
 Winkelmaß 110
 —, bezogenes 117
 —, Frequenzabhängigkeit 249
 —, Messung 212
 Wirbelfreies Feld 21
 Wirbelströme 52
 Wirbelstromverlust 124, 205
 Wirkleistung 60
 Wirksame Kapazität 153
 — Nebensprechdämpfung 237
 Wirkteil 66
 Wirkungsgrad des Vierpols 120
 Wolframfaden 152
- Z**ählnormale 25
 Zählpfeil 4
 Zahlenwertgleichung 3
 Zeichnerisches Verfahren 62, 68, 81
 Zeitkonstante, erste 88
 — eines Kabels 281
 — einer Pupinspule 195, 204
 — eines Relais 136
 —, zweite 91
 Zeitlinie 63
 Zobelsche Filter 246
 Zobelsches Reaktanztheorem 78
 Zusammengesetzte Schwingungen 308
 Zweibandtelephonie 295, 311
 Zweidrahtverbindung 295
 Zweipol, linearer 7
 Zweipolquelle, lineare 10
 Zweiwegverstärker, Zwischenverstärker 258, 295
 Zwischenvierpol 263

Hilfsbuch für die Elektrotechnik. Unter Mitwirkung namhafter Fachgenossen bearbeitet und herausgegeben von Dr. **Karl Strecker**. Zehnte, umgearbeitete Auflage. **Schwachstromausgabe** (Fernmeldetechnik.) Mit 1057 Abbildungen. XXII, 1137 Seiten. 1928. Gebunden RM 42.—

Die wissenschaftlichen Grundlagen des Rundfunkempfangs. Vorträge namhafter Fachleute. Veranstaltet durch das Außeninstitut der Technischen Hochschule zu Berlin, den Elektrotechnischen Verein und die Heinrich-Hertz-Gesellschaft zur Förderung des Funkwesens. Herausgegeben von Professor Dr.-Ing. e. h. Dr. **K. W. Wagner**, Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Präsident des Telegraphentechnischen Reichsamts. Mit 253 Textabbildungen. VIII, 418 Seiten. 1927. Gebunden RM 25.—

Taschenbuch der drahtlosen Telegraphie und Telephonie. Bearbeitet von zahlreichen Fachgelehrten. Herausgegeben von Dr. **F. Banneitz**. Mit 1190 Abbildungen und 131 Tabellen. XVI, 1253 Seiten. 1927. Gebunden RM 64.50

Drahtlose Telegraphie und Telephonie. Ein Leitfaden für Ingenieure und Studierende von **L. B. Turner**. Ins Deutsche übersetzt von Dipl.-Ing. **W. Glitsch**, Darmstadt. Mit 143 Textabbildungen. IX, 220 Seiten. 1925. Gebunden RM 10.50

Handwörterbuch des elektrischen Fernmeldewesens. Herausgegeben von Dr.-Ing. e. h. **Ernst Feyerabend**, Staatssekretär im Reichspostministerium, Dr. rer. pol. **Hugo Heidecker**, Oberpostrat im Reichspostministerium, Professor Dr. phil. **Franz Breisig**, Abteilungsdirigent im Reichspostministerium, **August Kruckow**, Präsident des Reichspostzentralamts. Erster Band: **A—K**. Mit 1319 Bildern. VIII, 830 Seiten. 1929. Zweiter Band: **L—Z**. Mit 1450 Bildern. IV, 903 Seiten. 1929. Zusammen: gebunden RM 192.—

Das elektromagnetische Feld. Ein Lehrbuch von **Emil Cohn**, ehemals Professor der Theoretischen Physik an der Universität Straßburg. Zweite, völlig neubearbeitete Auflage. Mit 41 Textabbildungen. VI, 366 Seiten. 1927. Gebunden RM 24.—

Die Elektromagnete. Grundlagen für die Berechnung des magnetischen Feldes und der darin wirksamen Kräfte insbesondere an Eisenkörpern. Von **Erich Jasse**. Mit 117 Abbildungen im Text. VI, 198 Seiten. 1930. RM 21.—; gebunden RM 22.50

Magnetismus. Elektromagnetisches Feld. Bearbeitet von E. Alberti, G. Angensteiner, E. Gumlich, P. Hertz, W. Romanoff, R. Schmidt, W. Steinhaus, S. Valentiner. Redigiert von **W. Westphal**. (Handbuch der Physik, Band XV.) Mit 291 Abbildungen. VII, 532 Seiten. 1927. RM 43.50; gebunden RM 45.60

Die Stromversorgung von Fernmelde-Anlagen. Ein Handbuch von Ingenieur **G. Harms.** Mit 190 Textabbildungen. VI, 137 Seiten. 1927.
RM 10.20; gebunden RM 11.40

Aussendung und Empfang elektrischer Wellen. Von Professor Dr.-Ing. und Dr.-Ing. e. h. **Reinhold Rüdenberg.** Mit 46 Textabbildungen. VI, 68 Seiten. 1926. RM 3.90

Die Wanderwellenvorgänge auf experimenteller Grundlage. Aus Anlaß der Jahrhundertfeier der Technischen Hochschule Dresden nach den Arbeiten des Institutes für Elektromaschinenbau und elektrische Anlagen dargestellt von Professor Dr.-Ing. **Ludwig Binder,** Dresden. Mit 257 Textabbildungen. VII, 201 Seiten. 1928. RM 22.—; gebunden RM 23.50

Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung. Von **John R. Carson,** American Telephone and Telegraph Company. Erweiterte deutsche Bearbeitung von **F. Ollendorff** und **K. Pohlhausen.** Mit 39 Abbildungen im Text und einer Tafel. IX, 186 Seiten. 1929. RM 16.50; gebunden RM 18.—

Die Grundlagen der Hochfrequenztechnik. Eine Einführung in die Theorie. Von Dr.-Ing. **Franz Ollendorff,** Charlottenburg. Mit 379 Abbildungen im Text und 3 Tafeln. XVI, 640 Seiten. 1926. Gebunden RM 36.—

Hochfrequenzmeßtechnik. Ihre wissenschaftlichen und praktischen Grundlagen. Von Dr.-Ing. **August Hund,** Fellow of the Institute of Radio Engineers, Fellow of the American Physical Society. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 287 Textabbildungen. XIX, 526 Seiten. 1928. Gebunden RM 39.—

Kabeltechnik. Die Theorie, Berechnung und Herstellung des elektrischen Kabels. Von Dipl.-Ing. Dr. phil. **M. Klein,** Berlin. Mit 474 Textabbildungen und 149 Tabellen. VIII, 487 Seiten. 1929. Gebunden RM 57.—

Anleitung zum Bau von Schwachstromanlagen. Herausgegeben von der **Mix & Genest** A.-G., Berlin-Schöneberg. Achte, neubearbeitete und erweiterte Auflage. Jubiläumsausgabe. Mit 672 Abbildungen. XVIII, 710 Seiten. 1928. Gebunden RM 13.50