

# Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Methode des Viermomentensatzes

Von

**Ing. Friedrich Bleich**  
Wien

Mit 108 Textfiguren



Springer-Verlag Berlin Heidelberg  
1918

# Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Methode des Viermomentensatzes

Von

**Ing. Friedrich Bleich**

Wien

Mit 108 Textfiguren



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1918

Alle Rechte,  
insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen  
vorbehalten

Copyright 1918 Springer-Verlag Berlin Heidelberg  
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer, Berlin in 1918

ISBN 978-3-662-42277-9      ISBN 978-3-662-42546-6 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-42546-6

## Vorwort.

Das in diesem Buche dargestellte Verfahren zur Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke soll als ein Versuch betrachtet werden, eine genügend allgemeine Methode für jene Fälle zur Verfügung zu stellen, wo die üblichen schulmäßigen Berechnungsweisen bei der Anwendung versagen oder zumindest einen Umweg bedeuten. Die Schwierigkeiten, die die Untersuchung von vielfach statisch unbestimmten Systemen nach den Methoden von Mohr und Castigliano, die auf den Begriff der Formänderungsarbeit aufgebaut sind, bieten, sind bekannt. Zahlreich und mannigfaltig sind daher die Bemühungen, derartige Tragwerke durch Betrachtung des geometrischen und elastischen Zusammenhanges der einzelnen Glieder — im Gegensatze zu den sich auf den Arbeitsbegriff stützenden gebräuchlichen Methoden — zu berechnen. Doch beschränken sich diese Arbeiten meist auf ein engbegrenztes Gebiet; die zurechtgelegten Verfahren sind in erster Linie auf den Sonderfall zugeschnitten und lassen sich nicht leicht auf andere Fälle übertragen. Aus diesem Bedürfnisse nach einer in jedem Falle verwendbaren Methode zur Ermittlung der statisch unbestimmten Größen, die die Mängel und die Weitläufigkeit der üblichen Berechnungsweisen vermeidet, ist diese Arbeit entstanden.

Viele Leser werden in diesem Buche Zusammenhänge und Berührungspunkte mit eigenen Arbeiten und den Veröffentlichungen anderer Forscher finden. Dies ist bei den vielfachen Bestrebungen der letzten Jahre, die Methoden der Baustatik auszubauen und für besonders schwierige Systeme handliche Formeln und Berechnungsverfahren aufzustellen, begreiflich. Hier sei nur Axel Bendixsens „Methode der  $\alpha$ -Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen“, Berlin 1914, erwähnt, da diese Abhandlung ähnliche Ziele verfolgt wie die vorliegende Veröffentlichung. Leider scheint diese bemerkenswerte Arbeit noch wenig bekannt geworden zu sein.

Die vorliegende Schrift enthält zunächst eine allgemeine Darstellung der Elastizitätsbedingungen der Methode des Viermomentensatzes, an die sich im folgenden Abschnitt die Aufstellung der besonderen Formen dieser Bedingungsgleichungen für Tragwerke aus geraden oder schwach gekrümmten Stäben unveränderlichen Querschnittes anschließt. In § 7 dieses Abschnittes wird gezeigt, wie u. U. noch eine weitere Vereinfachung des Rechnungsganges durch Einführung der Hilfsgrößen  $I'$  erzielt werden kann. Die Ausführungen dieses Absatzes weisen aber auch auf jene Grenzen hin, die der zweckmäßigen Anwendung dieser Hilfsgrößen gezogen sind. Wer das oben erwähnte Buch von Bendixsen kennt, wird hier leicht den Berührungspunkt zwischen der Methode des Viermomentensatzes und dem Verfahren des genannten Verfassers herausfinden, aber auch die Grenzen erkennen, die diesem Verfahren bei der Anwendung gesteckt sind.

Bei der Auswahl der Beispiele, die den dritten umfangreichsten Abschnitt füllen, war ich bemüht, die vielfachen Anwendungsmöglichkeiten der vorgeführten Methode zunächst an einfacheren, dann an schwierigeren Beispielen zu zeigen. Ich habe es bewußt vermieden, gewisse Kunstgriffe, wie z. B. den der Zerlegung der Lastgruppen in symmetrische und spiegelsymmetrische Laststellungen, zu benützen, um nicht eine etwaige Einfachheit des Rechnungsganges vorzutauschen, die nicht der Methode des Viermomentensatzes gut geschrieben werden kann. Bei der praktischen Anwendung wird man natürlich in geeigneten Fällen eine weitere Kürzung der Untersuchung durch Benutzung derartiger Lastanordnungen gerne anstreben. Eine Reihe von Beispielen wurden auch zahlenmäßig durchgerechnet, da erst bei einer derartigen Behandlung die Zweckmäßigkeit des Verfahrens erprobt werden kann. Es war auch notwendig darzutun, daß die zur Bestimmung der Überzähligen dienenden Gleichungen, selbst bei großer Zahl und Beschränkung auf wenige Dezimalstellen in den Beiwerten, genügend genaue Ergebnisse liefern. Gerade in dieser Richtung liegt ja einer der hauptsächlichsten Mängel der gebräuchlichen Methoden.

Der folgende Abschnitt ist der Anwendung des neuen Verfahrens zur Darstellung von Biegelinien gewidmet. Die beiden letzten Abschnitte enthalten die Darstellung der Elastizitätsbedingungen für Tragwerke mit Stäben von stetig veränderlichem Querschnitt und endlich für Tragwerke von beliebiger Form und Querschnittsgestaltung. Auch hier wurden die allgemeinen Ergebnisse an Beispielen erläutert.

Im Anhang wurden die wichtigsten Formeln und Tafelwerte für den Gebrauch nochmals übersichtlich zusammengestellt.

Ich lege dieses Buch, das aus dem Bedürfnisse der Praxis heraus in erster Linie für den ausübenden Statiker geschrieben ist, den Fachgenossen mit dem Wunsche vor, es nicht nur zu lesen und als wissenschaftliche Studie zu betrachten, sondern gegebenen Falles auch einen Versuch zu wagen, das dargelegte Verfahren anzuwenden. Die verhältnismäßig geringe Mühe, die es kostet, sich mit dem Wesen der Methode vertraut zu machen, wird sicherlich ihren Lohn finden.

An der Ostfront, im Februar 1918.

**Friedrich Bleich.**

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung . . . . .	I
<b>I. Die Elastizitätsbedingungen der Methode des Viermomentensatzes.</b>	
§ 1. Das Bildungsgesetz ebener Systeme . . . . .	5
§ 2. Die Ermittlung der statisch unbestimmbaren Größen im einfachen Grundsystem . . . . .	II
§ 3. Anwendung auf beliebige statisch unbestimmte Tragsysteme . . . .	18
<b>II. Tragwerke mit geraden oder schwach gekrümmten Stäben von unveränderlichem Querschnitt.</b>	
§ 4. Der Viermomentensatz . . . . .	26
§ 5. Die Berechnung der Längenänderungen $\Delta l$ in den Winkelgleichungen	39
§ 6. Darstellung der Einflußlinien der statisch nicht bestimmbaren Größen; Zusammenfassung . . . . .	43
§ 7. Einführung der Hilfsgrößen $\Gamma$ . . . . .	47
<b>III. Beispiele für die Anwendung der Methode des Viermomentensatzes.</b>	
§ 8. Tragwerke, die aus einem einfachen Grundsysteme abgeleitet werden	54
§ 9. Tragwerke, die aus mehrfachen Grundsystemen abgeleitet werden .	68
§ 10. Berechnung des Vierendeelträgers . . . . .	125
§ 11. Die Berechnung der Nebenspannungen im Fachwerkträger . . . .	152
<b>IV. Die Ermittlung der Formänderungen von Stabzügen und die Darstellung der Biegelinien nach der Methode des Viermomentensatzes.</b>	
§ 12. . . . .	156

**V. Tragwerke aus geraden oder schwach gekrümmten  
Stäben mit innerhalb der Stabfelder stetig veränderlichem  
Trägheitsmoment.**

	Seite
§ 13. Die Viermomentengleichungen . . . . .	165
§ 14. Die Ermittlung der Längenänderungen $\Delta l$ in den Winkelgleichungen	178

**VI. Tragwerke allgemeinsten Form.**

§ 15. Die Viermomentengleichungen . . . . .	186
§ 16. Berechnung der Dehnungen $\Delta l$ in den Winkelgleichungen; Einfluß- linien; Zahlenbeispiel . . . . .	195

**Anhang.**

Zusammenstellung der Formeln und Tafelwerte . . . . .	209
---	-----

## Einleitung.

Jede Art der Berechnung statisch unbestimmter Systeme fußt auf dem Grundgedanken, Beziehungen zwischen den elastischen Verschiebungen ausgezeichneter Punkte des Tragwerkes aufzustellen, um derart Bedingungsgleichungen — die sogenannten Elastizitätsbedingungen — zur Ermittlung der statisch nicht bestimmbar GröÙen im Systeme zu erlangen. Diese Elastizitätsbedingungen werden in der Regel durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten auf passend gewählte Belastungszustände des betrachteten Tragwerkes (Mohr) oder aus der Gleichung der Formänderungsarbeit mittels der Sätze von Castigliano und Fränkel erhalten. So schön diese Verfahren und so allgemein ihre Anwendungsmöglichkeiten auch sind, so ist doch nicht zu verkennen, daß insbesondere bei vielfach statisch unbestimmten Systemen meist die Übung und Geschicklichkeit des erfahrenen Statikers bei der Auswahl der statisch nicht bestimmbar GröÙen notwendig sind, um die Lösung der gestellten Aufgabe ohne ein Übermaß an Rechenarbeit zu ermöglichen, falls nicht diese Methoden, was häufig genug vorkommt, praktisch ganz versagen, denn sie geben, und das muß als ihr Hauptnachteil bezeichnet werden, keine Anhaltspunkte für die zweckmäßige Auswahl der überzähligen GröÙen<sup>1)</sup>.

Bei Systemen mit biegeungssteifen Elementen treten in den nach dem üblichen Verfahren gewonnenen Elastizitätsgleichungen Integralausdrücke auf, die in jedem Einzelfalle neu ausgewertet werden müs-

---

<sup>1)</sup> Man erinnere sich nur der zahlreichen Veröffentlichungen über die Berechnung vielfach statisch unbestimmter Systeme, wie Vierendeelträger, mehrstielige Rahmen u. ä. Tragwerke, die alle, unter Vermeidung der Methode der Formänderungsarbeit, mittels Betrachtungen über den geometrischen Zusammenhang der einzelnen Teile des Systems, die gestellten Aufgaben zu lösen suchten. Die wenigen Ausnahmen hiervon lassen nur den Verdacht aufkommen, daß die Anwendung der Methode der Formänderungsarbeit erst möglich wurde, nachdem die Eigenschaften der behandelten Tragwerke durch vorangehende Arbeiten auf geometrischer Grundlage geklärt und erst hierdurch Anhaltspunkte für die zweckmäßige Wahl der statisch nicht bestimmbar GröÙen gewonnen wurden.

sen. Es steht daher die Methode in dieser Hinsicht sicher gegen jedes andere rechnerische Verfahren an Brauchbarkeit zurück, das die Integration der Elastizitätsgleichungen schon in ihrer allgemeinen Form erlaubt, so daß die Elastizitätsbedingungen in jedem Sonderfalle unmittelbar in Form gewöhnlicher Gleichungen angeschrieben werden können<sup>1)</sup>. Die Erkenntnis dieser Schwierigkeiten des üblichen Verfahrens hat wohl zu Versuchen geführt, durch zweckmäßige Deutung der Integralausdrücke in den Elastizitätsgleichungen die Berechnung zu vereinfachen. Doch ist es auf diesem Wege, von den Arbeitsgleichungen ausgehend, nicht gelungen, ein genügend allgemeines Verfahren, das nicht bloß auf eine bestimmte, oft engbegrenzte Systemgruppe beschränkt blieb, zu entwickeln.

Die Lösung der Aufgabe, die Berechnung der statisch nicht bestimmten Tragwerke mit biegungssteifen Stäben auf die Lösung eines Systems von Elastizitätsgleichungen zurückzuführen, ohne daß zu ihrer Aufstellung im Einzelfalle die Durchführung von Infinitesimaloperationen, die den Rechnungsgang erheblich verlängern, notwendig ist, d. h. die Lösung der Aufgabe einer allgemeinen Integration der Elastizitätsbedingungen mußte auf einem ganz anderen Wege gesucht werden.

Das Wesentliche des in diesem Buche dargestellten Berechnungsverfahrens besteht in folgendem: Für eine Reihe besonderer Punkte des Systems, der sogenannten ausgezeichneten Punkte, wird die Kontinuitätsbedingung, das ist die Bedingung der Unveränderlichkeit des Winkels, den zwei im ausgezeichneten Punkte zusammenstoßende und dort steif verbundene Stäbe oder Stabteile miteinander einschließen, aufgestellt. Diese Kontinuitätsbedingung erscheint in Form einer Gleichung zwischen Differentialquotienten, deren Beträge in allgemeiner Form berechnet werden können. Das Ergebnis dieser Integration der Kontinuitätsbedingung wird durch den Viermomentensatz dargestellt, so genannt, weil diese Gleichung eine Verknüpfung zwischen den vier Endmomenten der beiden im betrachteten Punkte steif angeschlossenen Stäbe oder Stabteile darstellt. Da die Zahl der Kontinuitätsbedingungen im allgemeinen nicht ausreicht, um sämtliche Unbekannten zu bestimmen, zu denen außer den statisch nicht bestimmbareren Größen auch die Verschiebungen der ausgezeichneten Punkte, die ebenfalls in die Viermomentengleichung eintreten, gehören, so werden auf Grund geometrischer Betrachtungen noch weitere Zusammenhänge zwischen diesen Verschiebungen

<sup>1)</sup> Unter Integration ist die Ausrechnung der Differential- und Integralausdrücke der Elastizitätsbedingungen verstanden. So stellen z. B. die Clapeyronschen Gleichungen die integrierten Elastizitätsbedingungen für den durchlaufenden Balken vor.

aufgestellt. Diese Zusammenhänge werden durch die Winkelgleichungen ausgedrückt. Viermomenten- und Winkelgleichungen bilden die Gesamtheit der Elastizitätsbedingungen unseres Verfahrens. Nach Elimination der Verschiebungsgrößen und Ersatz der in den Viermomentengleichungen vorkommenden Kraftgrößen und Stablängenänderungen durch Ausdrücke, die nur die äußeren Kräfte und die überzähligen Größen enthalten, werden so viele lineare Gleichungen gewonnen, als statisch nicht bestimmbare Größen vorhanden sind. Diese Gleichungen bilden das System der Bestimmungsgleichungen. Wie man erkennt, ist das Verfahren im wesentlichen ein geometrisches, im Gegensatze zu den von Maxwell und Mohr gegebenen Methoden, die als mechanische Methoden angesprochen werden können<sup>1)</sup>.

Die Vorzüge des hier dargestellten neuen Verfahrens, das wir die Methode des Viermomentensatzes nennen wollen, sind z. T. schon aus den vorangeführten knappen Darlegungen zu erkennen. Der Zusammenhang zwischen den Formänderungen einerseits und den angreifenden und widerstehenden Kräften andererseits, kurz, das sogenannte Kräftespiel, tritt in jedem Punkte der Rechnung deutlich zutage. Sind die statisch nicht bestimmbaren Größen einmal bekannt, so können, meist unter Zuhilfenahme der Zwischenergebnisse der Rechnung, Fragen nach den Formänderungen, deren Beantwortung unerlässlich ist, wenn das Kräftespiel im untersuchten Systeme klar erkannt werden soll, ohne viel Mühe erledigt werden. In dieser Hinsicht wird sich unser Verfahren der üblichen Methode an Anschaulichkeit überlegen erweisen.

Als Hauptvorzug aber muß der Umstand bezeichnet werden, daß die Auswahl der statisch nicht bestimmbaren Größen erst nach Aufstellung der Elastizitätsbedingungen erfolgt; sie kann daher so getroffen werden, daß die Rechenarbeit auf ein Kleinstmaß beschränkt wird, denn z. T. rein arithmetische Überlegungen zeigen, nachdem die Gleichungen bereits festgelegt sind, in jedem Einzelfalle den Weg, wie unter Wahrung weitgehender Arbeitsökonomie die Überzähligen auszuwählen sind. Die einfache und übersichtliche Form der Viermomenten- und Winkelgleichungen erleichtert in hohem Maße die Entscheidung über den weiteren Rechnungsgang. Vielfach weisen die Gleichungen selbst auf bestimmte Kraftgrößen hin, so daß im gewissen Sinne von einem selbsttätigen Auswählen der statisch nicht bestimmbaren Größen gesprochen werden kann. Im allgemeinen erweist sich

<sup>1)</sup> Maxwell faßt z. B. das Fachwerk als eine Maschine auf, mittels welcher eine treibende Kraft  $P$  (Last) einen Widerstand  $S$  (Stabkraft) überwindet. „On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames.“ Phil. Mag. 1864, Bd. 27, S. 294.

der ganze Rechnungsgang, wie aus den Beispielen ersichtlich werden wird, bedeutend kürzer als bei den üblichen Methoden. Dies tritt vornehmlich bei mehrfach statisch unbestimmten Systemen deutlich hervor, da in vielen Fällen bereits die angesetzten Viermomentengleichungen die Bestimmungsgleichungen für die Überzähligen vorstellen, oder diese durch einfache Umformungen daraus gewonnen werden können, was bei der gebräuchlichen Methode erst nach Durchführung von kürzeren oder längeren Integrationen, die bei unserem Verfahren ganz entfallen, möglich ist. Das hier erörterte Verfahren führt auch zu der bemerkenswerten Erkenntnis, daß die Einflußlinien der Überzähligen, unabhängig von der Art des Tragwerkes und dem Grade seiner Unbestimmtheit, aus wenigen unveränderlichen Stamm-  
linien (Stammfunktionen) in einfacher Weise dargestellt werden können, wodurch die Ermittlung dieser Linien, insbesondere bei hochwertig statisch unbestimmten Systemen, bedeutend erleichtert wird.

---

# I. Die Elastizitätsbedingungen der Methode des Viermomentensatzes.

## § 1. Das Bildungsgesetz ebener Systeme.

Jedes Tragwerk — auch das Fachwerk — kann als Steifrahmen aufgefaßt werden. In diesem Sinne sind die Erörterungen dieses Abschnittes als vollkommen allgemein gültig aufzufassen.

Unter einem ebenen Steifrahmen verstehen wir ein Traggebilde, das aus geraden oder gekrümmten Stäben, die miteinander steif oder gelenkig verbunden sind, besteht. Die Zahl der Stäbe, deren Verbindungen untereinander, sowie die Lagerung des ganzen Systems müssen so beschaffen sein, daß ein in der Systemebene unverschiebliches Tragwerk entsteht, wenn von den elastischen Formänderungen abgesehen wird. Sind sämtliche Knotenpunkte als Gelenke ausgebildet gedacht, dann geht das eigentliche Rahmentragwerk in ein Fachwerk über.

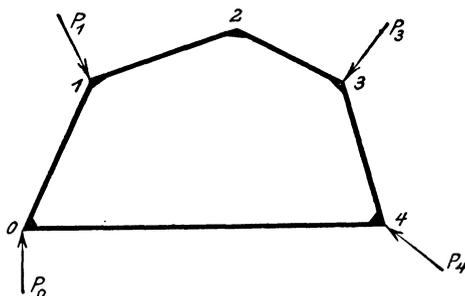


Abb. 1.

*Das Grundsystem.* Wir bezeichnen als einfaches Grundsystem einen aus beliebig vielen Elementen gebildeten ebenen, geschlossenen Rahmen mit überall steifen Ecken, dessen äußere Kräfte bekannt und untereinander im Gleichgewicht sind (Abb. 1).

Unter Element verstehen wir dabei einen geraden oder gekrümmten Stab oder Stabteil, der zwischen zwei ausgezeichneten Punkten liegt.

*Ausgezeichnete Punkte.* Wir nennen ausgezeichnete Punkte eines Systems alle jene Punkte, in denen unter Wahrung des elastischen Zusammenhangs der dort zusammentreffenden Stäbe oder

Stabteile Unstetigkeiten auftreten. Hierher gehören: steife Ecken, Punkte, in denen mehr als zwei Stäbe zusammenstoßen, wobei wenigstens zwei derselben miteinander steif verbunden sein müssen, endlich jene Punkte, in denen das Trägheitsmoment eines sonst in seiner Achsenführung stetig verlaufenden Stabes eine plötzliche Änderung erfährt.

Gelenkpunkte gehören nicht zu den ausgezeichneten Punkten, da dort der elastische Zusammenhang gestört ist. In

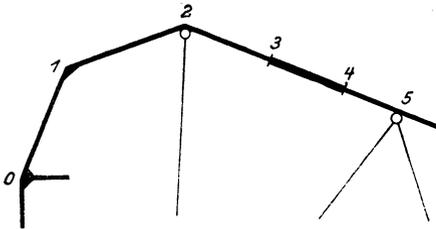


Abb. 2.

Abb. 2 sind: Punkt 0 und 1 ausgezeichnete Punkte der ersten Art, Punkt 2 und 5 ausgezeichnete Punkte der zweiten Art und die Punkte 3 und 4, in denen die Querschnitte plötzliche Änderungen erleiden, ausgezeichnete Punkte der dritten Art.

*Zurückführung der Tragwerke auf einfache Grundsysteme.* Es läßt sich nun zeigen, daß jedes Tragwerk aus dem dreifach statisch unbestimmten einfachen Grundsystem abgeleitet werden kann:

1. Durch Einschalten von Gelenken entsteht der zweifach, der einfach statisch unbestimmte und der statisch bestimmte Ring.

2. Jeder offene einfache Rahmen kann in einen geschlossenen Rahmen verwandelt werden, wenn man die Auflager durch Stäbe verbindet, die gewisse Auflagerwiderstände in ihrer Wirkung ersetzen.

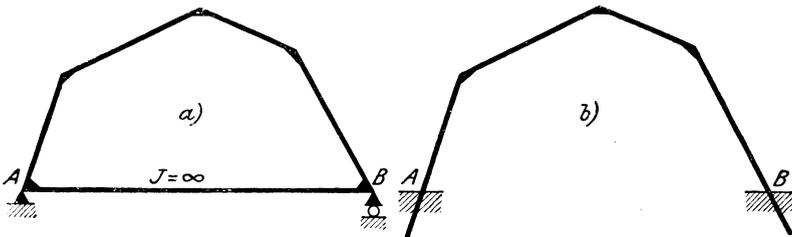


Abb. 3.

a) Der in Abb. 3a dargestellte geschlossene Rahmen mit dem in  $A$  und  $B$  steif angeschlossenen Stab  $AB$ , dem wir das Trägheitsmoment  $J = \infty$  zuschreiben, ersetzt, als Balken gelagert, den dreifach statisch unbestimmten eingespannten Rahmen der Abb. 3b.

b) Ist der Stab  $AB$  einerseits fest, andererseits gelenkig angeschlossen (Abb. 4a), dann entsteht das in Abb. 4b dargestellte zweifach statisch unbestimmte Tragwerk.

c) Wenn sowohl in  $A$  als auch in  $B$  Gelenke vorgesehen sind (Abb. 5a), im übrigen aber der Querschnitt des Stabes  $AB$ ,  $F = \infty$ , so kann diesem geschlossenen Systeme der in Abb. 5b zur Dar-

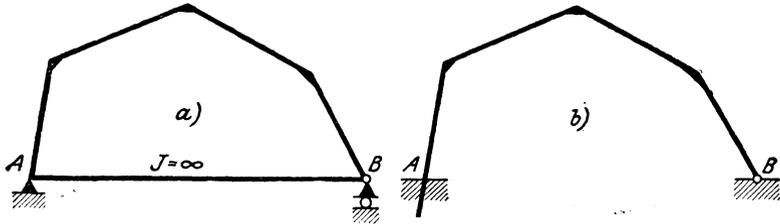


Abb. 4.

stellung gebrachte Zweigelenrahmen mit unverschieblichen Kämpfern zugeordnet werden. Ist der Stabquerschnitt  $F$  endlich, dann liegt der Zweigelenrahmen mit Zugband vor.

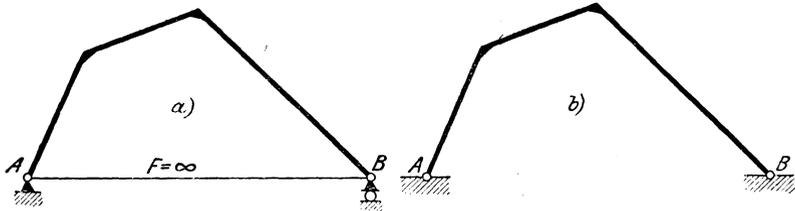


Abb. 5.

d) Sind zwei Schlußstäbe vorgesehen, von denen der eine steif angeschlossen, der zweite als Pendel wirkt (Abb. 6a), so entspricht

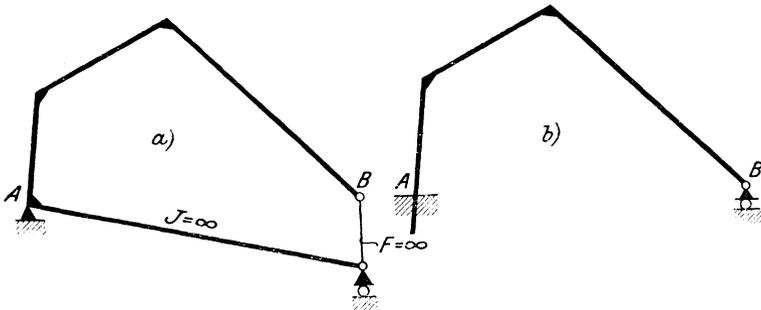


Abb. 6.

diese Anordnung dem in Abb. 6b dargestellten Tragwerk. Ist bei  $A$  statt der steifen Ecke ein Gelenk vorhanden, dann geht der Rahmen in den frei aufliegenden Balken über.

Die in den Abb. 3 bis 6 verzeichneten Tragsysteme können weiter durch Einschalten von Gelenken in Systeme von niedrigerem Grade statischer Unbestimmtheit verwandelt werden. Im System der Abb. 3 dürfen ein, zwei oder drei Gelenke eingeschaltet werden. Das System der Abb. 4 gestattet die Anordnung von einem oder zwei Gelenken. Wird in Abb. 5 ein Knoten gelenkig gemacht, so entsteht der Dreigelenkbogen. Das System der Abb. 6 erlaubt noch die Anbringung eines Gelenkes.

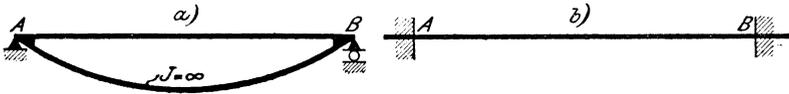


Abb. 7.

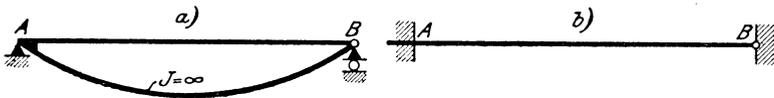


Abb. 8.

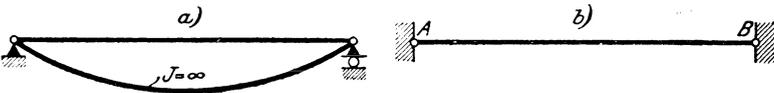


Abb. 9.

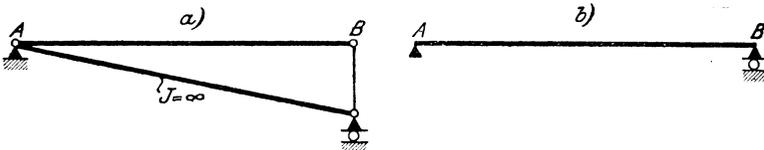


Abb. 10.

3. Denkt man sich den Stab  $AB$  in den Abb. 3 bis 6 nach unten gekrümmt, dafür aber die Rahmenstäbe in der Verbindungslinie  $AB$  gerade gestreckt, so ersetzen diese Anordnungen der Reihe nach: den beiderseits eingespannten Balken (Abb. 7), den einerseits eingespannten, andererseits mit festem Gelenk versehenen Tragbalken (Abb. 8), den beiderseits mit festem Gelenk versehenen geraden Stab (Abb. 9) und endlich den gewöhnlichen Balken (Abb. 10).

Wir sehen somit, wie durch Einschaltung von Gelenken sowie durch passende Annahmen über die Steifigkeit und die Querschnittsbeschaffenheit einzelner Stäbe des Grundsystems sich sämtliche möglichen Tragsysteme, die aus einem einfachen Stabzug bestehen und in zwei Punkten gestützt sind, ableiten lassen.

4. Alle übrigen möglichen Tragwerke lassen sich aus Verbindungen von mehreren einfachen Grundsystemen entwickeln.

Schließt man an das Grundsystem  $abcd$  (Abb. 11) einen zweiten Rahmen  $cefd$  an, so entsteht ein zweifaches Grundsystem, das sechsfach statisch unbestimmt ist, und in die beiden einfachen Grundsysteme  $abcd$  und  $cefd$ , die die Seite  $cd$  gemeinsam haben, zerfällt. Wir setzen wie beim einfachen Grundsystem voraus, daß sämtliche äußeren Kräfte bekannt und untereinander im Gleichgewichte sind. In derselben Weise, wie das zweifache System, können auch drei- und mehrfache Grundsysteme geschaffen werden. Sind  $n$  einfache Grundsysteme zu einem Tragsysteme vereinigt, so sprechen wir von einem  $n$ -fachen Grundsystem, das  $3n$ -fach statisch unbestimmt ist, wenn die äußeren Kräfte gegeben sind. Sowie sich aus dem einfachen Grundsystem die Reihe der möglichen

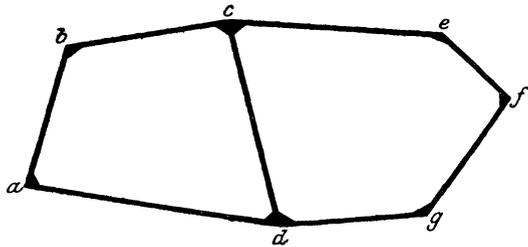


Abb. 11.

Tragwerke durch Einschalten von Gelenken und durch Wahl passender Querschnitte bestimmter Stäbe ableiten läßt, so lassen sich in der gleichen Weise auch aus dem allgemeinen  $n$ -fachen Grundsystem alle bei der gegebenen Stabzahl und Stabanordnung möglichen Tragsysteme entwickeln. Da wir hinsichtlich Stabzahl und Stabanordnung keine einschränkende Annahme gemacht haben, so folgt daraus, daß jedes nur denkbare Tragsystem sich auf ein ein- oder mehrfaches Grundsystem zurückführen läßt.

Abb. 12 stellt ein Beispiel eines vierfachen Grundsystems vor. Es zerfällt in die vier einfachen Grundsysteme  $abcdea$ ,  $aedfa$ ,  $cdgfc$  und  $cdfic$  und ist  $4 \times 3 = 12$  fach statisch unbestimmt. Es ist hierbei zu beachten, daß die Art der Zerlegung der Grundsysteme eine gewisse Willkür zuläßt; so können an Stelle der

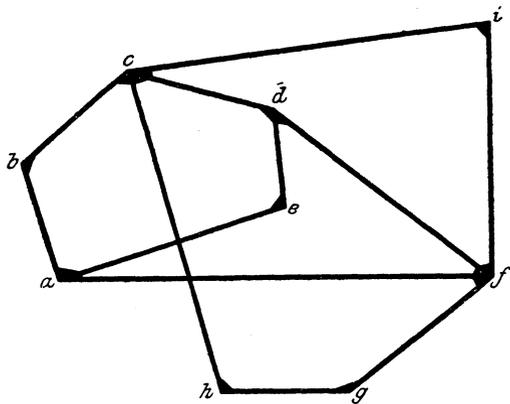


Abb. 12.

ersten zwei eben genannten Grundsysteme auch die Systeme  $abcdfa$  und  $abcdea$  treten, da man sowohl  $f$  an das System  $abcdea$  als auch  $e$  an das System  $abcdfa$  anschließen kann. Einige Beispiele mögen das voranstehend Erörterte veranschaulichen.

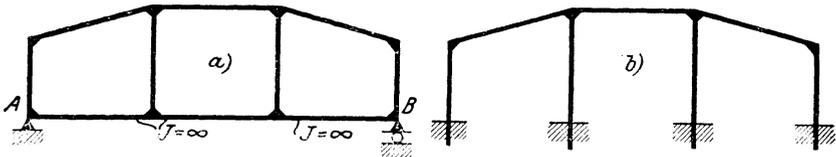


Abb. 13.

Abb. 13a zeigt ein dreifaches Grundsystem, das in seiner Wirkungsweise dem in Abb. 13b dargestellten dreifeldigen Rahmen mit vier eingespannten Ständern entspricht.

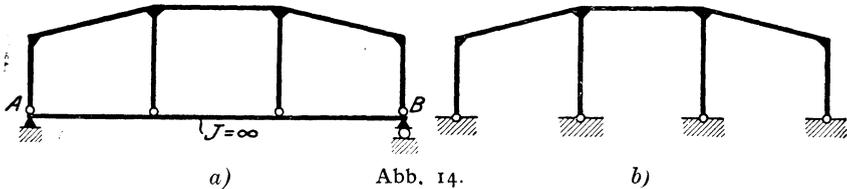


Abb. 14.

Aus diesem Grundsystem kann durch Einschalten von vier Gelenken (Abb. 14a) ein Abb. 14b gleichwertiges System geschaffen werden. Es ist zu beachten, daß der Stab  $AB$  ohne Unterbrechung durch die Gelenke steif durchläuft.

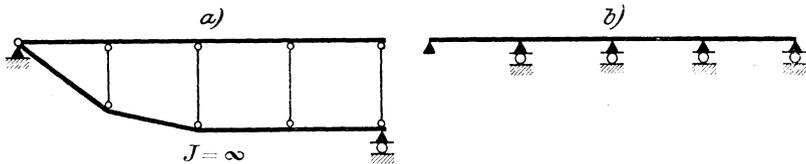


Abb. 15.

Ein aus einem vierfachen Grundsystem entwickeltes Tragwerk zeigt Abb. 15a. Es ist, wie leicht einzusehen, dem in Abb. 15b gezeichneten vierfeldigen durchlaufenden Balken gleichwertig. Ebenso leicht ersichtlich ist, daß die in den Abb. 16a und b dargestellten Systeme einander ersetzen können.

Abb. 16a ist aus einem dreifachen Grundsystem durch Einschalten von vier Gelenken entstanden. Daher  $9 - 4 = 5$ fach statisch unbestimmt.

Der einfache geschlossene Rahmen der Abb. 17b, der äußerlich dreifach statisch unbestimmt ist, läßt sich auf ein zweifaches Grundsystem, das in Abb. 17a zur Darstellung gebracht ist, zurückführen.

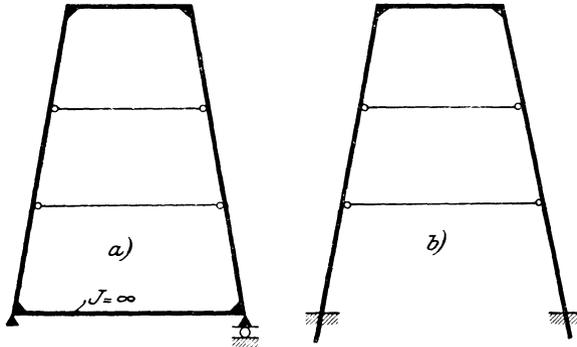


Abb. 16.

Jedes Fachwerk mit  $n$  Feldern kann aus einem  $n$ -fachen Grundsystem abgeleitet werden, wenn man in den Knoten Gelenke anordnet.

Es sei noch bemerkt, daß die in den Abb. 3 bis 17 gezeichneten geraden Stäbe auch durch gekrümmte Stäbe ersetzt werden können, da wir die Grundsysteme aus geraden oder gekrümmten Stäben zusammengesetzt erklärt haben.

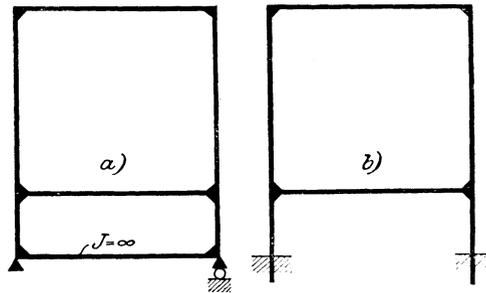


Abb. 17.

## § 2. Die Ermittlung der statisch unbestimmbaren Größen im einfachen Grundsystem.

Wie im vorangehenden Absatze gezeigt wurde, läßt sich jedes Tragsystem aus Grundsystemen ableiten. Gelingt es nun, die überzähligen Größen des einfachen Grundsystems zu berechnen, so ist damit auch ein allgemeines Verfahren gegeben, das bei wiederholter Anwendung auf mehrfache Grundsysteme oder auf aus solchen abgeleitete Tragwerke deren statisch nicht bestimmbar Größen liefert. Unsere Aufgabe läuft also zunächst auf die Berechnung des dreifach statisch unbestimmten einfachen Grundsystems hinaus.

a) Die Kontinuitätsbedingung.

Für jeden ausgezeichneten Punkt kann eine Kontinuitätsbedingung aufgestellt werden. Diese Bedingung besagt, daß die Endtangenten beider in einem ausgezeichneten Punkte zusammenstößenden und dort steif verbundenen Stäbe oder Stabteile (Elemente) vor und nach der Formänderung den gleichen Winkel miteinander einschließen.

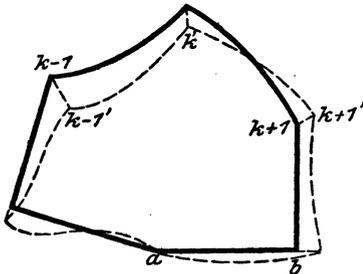


Abb. 18.

Das in Abb. 18 dargestellte Grundsystem sei durch den Angriff einer im Gleichgewichte stehenden Lastgruppe verzerrt, wobei die Sehne des Stabes  $ab$  in ihrer Richtung festgehalten gedacht ist. Die Verzerrungsfigur ist in der Abbildung strichliert angedeutet. Wir betrachten nun

zwei benachbarte Elemente des Grundsystems, und zwar die Stäbe  $k-1$ ,  $k$  und  $k$ ,  $k+1$  in ihrem elastischen Zusammenhange vor und nach der Verzerrung. In Abb. 19 sind die beiden ins Auge gefaßten Stäbe in beiden Lagen herausgezeichnet.

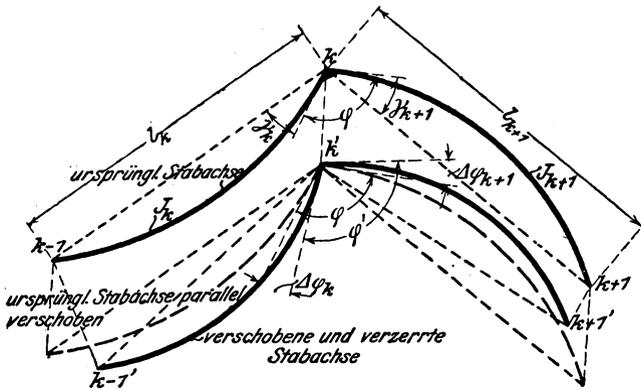


Abb. 19.

Bezeichnet  $\varphi$  den Winkel, den die Tangenten der in  $k$  zusammenstoßenden Stäben vor der Verformung miteinander einschließen,  $\varphi'$  den Winkel nach derselben, so besagt die Kontinuitätsbedingung, daß  $\varphi = \varphi'$  sein muß. Aus Abb. 19 ist ohne weiteres ersichtlich, daß dann der Winkel  $\Delta\varphi_k$ , um den sich die Tangente im Punkte  $k$  des Stabes  $l_k$  bei der Verschiebung und Verzerrung dreht, gleich

sein muß dem Tangentendrehwinkel  $\Delta \varphi_{k+1}$  des Stabes  $l_{k+1}$ .  
Somit ist

$$\Delta \varphi_k = \Delta \varphi_{k+1}.$$

Nun setzt sich jeder der beiden Winkel aus zwei Teilen zusammen. In Abb. 20 sind die einzelnen aufeinanderfolgend gedachten Verschiebungs- und Verzerrungszustände des Stabes  $k - 1, k$  zur Darstellung gebracht. Denken wir uns nun den Stab unverzerrt parallel zu sich verschoben, bis  $k$  nach  $k'$  gelangt (strichlierte Stabachse in Abb. 20), dann um den Winkel  $\vartheta$  gedreht, bis die Stabsehne

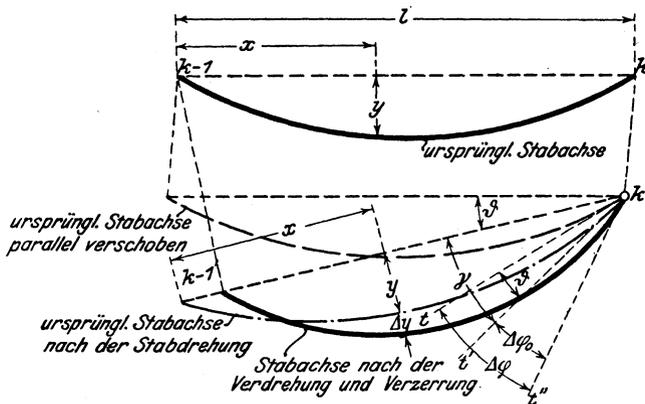


Abb. 20.

ihre endgültige Richtung erreicht (strichpunktiertere Stabachse) und endlich verzerrt, so hat sich bei diesen schrittweisen Verschiebungen die Stabtangente in  $k$  bei der Drehung um den Winkel  $\vartheta$  zunächst ebenfalls um  $\vartheta$  gedreht, um schließlich bei der darauffolgenden Verzerrung nach einer weiteren Verdrehung um den Winkel  $\Delta \varphi^0$  ihre endgültige Lage zu erreichen.

Somit ist für jeden der beiden Stäbe

$$\Delta \varphi = \Delta \varphi^0 + \vartheta$$

und die oben angegebene Bedingung geht über in

$$\Delta \varphi_k^0 + \vartheta_k = \Delta \varphi_{k+1}^0 + \vartheta_{k+1}.$$

Die Winkel  $\vartheta_k$  und  $\vartheta_{k+1}$ , die die relative Lage der verschobenen Knotenpunkte  $k - 1, k'$  und  $k', k + 1'$  beschreiben, bezeichnen wir als Stabdrehwinkel.

Betrachtet man die Stabsehnenrichtung als Abszissenachse und den linken Stabendpunkt als Koordinatenanfangspunkt, bezeichnet man weiter mit  $\gamma$  den Winkel, den die Stabtangente in  $k$  im unverzerrten

Zustände mit der Abszissenachse bildet (Abb. 20), so bestehen für jeden Stab die Gleichungen:

$$\operatorname{tg} \gamma = \left[ \frac{dy}{dx} \right]_{x=0}^l \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} (\gamma + \Delta \varphi^0) = \left[ \frac{d(y + \Delta y)}{dx} \right]_{x=0}^l.$$

Unter  $y$  sind die Ordinaten der ursprünglichen Stabachse bezogen auf die Stabsehne, unter  $\Delta y$  die Verschiebungen der Stabpunkte in Richtung senkrecht zur gedrehten Stabsehne verstanden (siehe Abb. 20).  $x$  ist 0 oder  $l$  zu setzen, je nachdem die obigen Gleichungen auf den Stab  $l_{k+1}$  oder  $l_k$  angewendet werden.

Nach einer bekannten trigonometrischen Formel ist nun

$$\operatorname{tg} (\gamma + \Delta \varphi^0) = \frac{\operatorname{tg} \gamma + \Delta \varphi^0}{1 - \Delta \varphi^0 \operatorname{tg} \gamma} = (\operatorname{tg} \gamma + \Delta \varphi^0)(1 + \Delta \varphi^0 \operatorname{tg} \gamma),$$

wobei wegen der Kleinheit des Winkels  $\Delta \varphi^0$

$$\operatorname{tg} \Delta \varphi^0 = \Delta \varphi^0$$

gesetzt wurde.

Nach Ausführung der Multiplikation und Vernachlässigung der kleinen Glieder zweiter Ordnung entsteht

$$\operatorname{tg} (\gamma + \Delta \varphi^0) = \operatorname{tg} \gamma + \Delta \varphi^0(1 + \operatorname{tg}^2 \gamma).$$

Aus diesem Zusammenhange folgt

$$\Delta \varphi^0 = \frac{\operatorname{tg} (\gamma + \Delta \varphi^0) - \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma} = [\operatorname{tg} (\gamma + \Delta \varphi^0) - \operatorname{tg} \gamma] \cos^2 \gamma.$$

Nach Einführung der Differentialquotienten geht diese Gleichung über in

$$\Delta \varphi^0 = \left[ \frac{d\Delta y}{dx} \right]_{x=0}^l \cos^2 \gamma.$$

Wendet man diese Formel auf die oben ausgesprochene Bedingung

$$\Delta \varphi_k = \Delta \varphi_{k+1}$$

an, so erhält man die Kontinuitätsbedingung in der Form

$$\left[ \frac{d\Delta y}{dx} \right]_{x=l}^k \cos^2 \gamma_k - \left[ \frac{d\Delta y}{dx} \right]_{x=0}^{k+1} \cos^2 \gamma_{k+1} + \vartheta_k - \vartheta_{k+1} = 0 \cdot \text{I}$$

Die Zeiger  $k$  und  $k+1$  zeigen das Stabfeld an, auf welches sich das Gleichungsglied bezieht.

In dem Sonderfalle, in dem die Elemente gerade sind, ist der Winkel  $\gamma = 0$ , daher  $\cos^2 \gamma = 1$  (Abb. 21) und die Kontinuitätsbedingung nimmt die einfachere Gestalt an

$$\left[ \frac{d\Delta y}{dx} \right]_{x=l}^k - \left[ \frac{d\Delta y}{dx} \right]_{x=0}^{k+1} + \vartheta_k - \vartheta_{k+1} = 0 \dots \text{I}')$$

Diese Gleichung gilt selbstverständlich auch dann, wenn die beiden steif vereinigten Stäbe in eine Gerade fallen (Abb. 22).

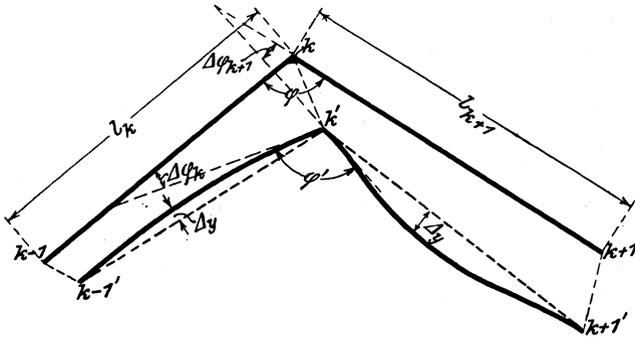


Abb. 21.

Ist der ausgezeichnete Punkt dadurch gekennzeichnet, daß er den Grenzpunkt zwischen zwei Stababschnitten mit verschiedenen Trägheitsmomenten bildet, so haben die Winkel  $\gamma$  der Grundgleichung 1) die aus Abb. 23 hervorgehende Bedeutung. Bei geraden Stäben ist wieder  $\gamma = 0$  und es gilt dann Gleichung 1').

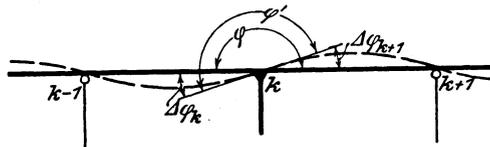


Abb. 22.

Die Gleichung 1) stellt die allgemeinste Form der Kontinuitätsbedingung dar, weshalb wir in der weiteren Entwicklung von dieser Gleichung ausgehen werden.

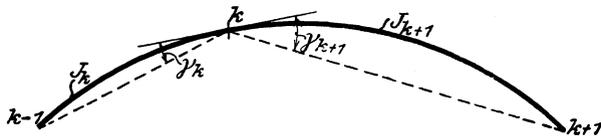


Abb. 23.

Da die Kontinuitätsbedingung 1) eine Beziehung zwischen den Formänderungen zweier benachbarter Elemente darstellt, so ist sie eine Art Elastizitätsbedingung, die zur Bestimmung der statisch unbestimm. Größen im Systeme dienen kann. Es fragt sich nun: Wie groß ist die Zahl derartiger im einfachen Grundsystem aus  $n$  Stäben aufstellbaren Kontinuitätsbedingungen und reicht diese Zahl aus, um sämtliche überzähligen Größen und sonstigen Unbekannten im Grundsysteme zu berechnen?

Wir betrachten ein einfaches Grundsystem aus  $n$  Elementen, dessen eine Seite in ihrer Richtung festgehalten ist. Die Kontinuitätsbedingungen der Form 1) enthalten die Differentialquotienten der Verschiebungen  $\Delta y$  und die Stabdrehwinkel. Diese Verschiebungen und somit auch ihre Differentialquotienten lassen sich als Funktionen der äußeren Kräfte und der drei Überzähligen des Grundsystems darstellen. Die Gesamtheit der Kontinuitätsbedingungen für das ins Auge gefaßte Grundsystem enthält demnach die äußeren Kräfte, die statisch nicht bestimmbar sind und  $n - 1$  Drehwinkel, da ein Stab voraussetzungsgemäß als festgehalten den Drehwinkel Null hat. Da die äußeren Kräfte des Grundsystems als bekannt angenommen werden, so verbleiben in den Kontinuitätsbedingungen an Unbekannten:

$$\begin{aligned} &3 \text{ statisch unbestimmbare Größen} \\ &n - 1 \text{ Stabdrehwinkel,} \end{aligned}$$

zusammen  $n + 2$  Unbekannte. Ihnen stehen bei  $n$  ausgezeichneten Punkten  $n$  Kontinuitätsbedingungen der Form 1) gegenüber, so daß es notwendig erscheint, zwei weitere Beziehungen zwischen den Unbekannten aufzusuchen, um die gestellte Aufgabe lösen zu können.

**b) Die Winkelgleichungen.**

Die Kontinuitätsbedingungen beschreiben den elastischen Zusammenhang je zweier aufeinanderfolgender Elemente des Grundsystems. Nun ist es noch notwendig, die geometrische Unveränderlichkeit des ganzen Rahmengebildes, d. h. die Bedingung, daß der geschlossene Rahmen auch nach der Verzerrung ein geschlossener Rahmen bleibe, in Form von Elastizitätsgleichungen festzulegen.

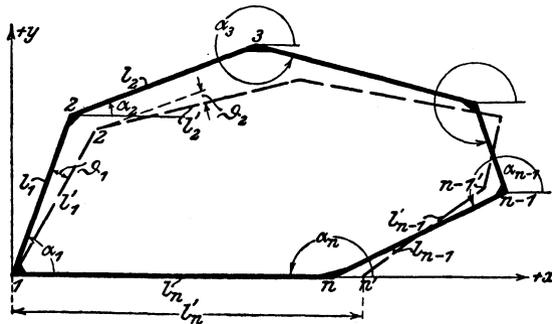


Abb. 24.

Der geschlossene Stabzug 1, 2 . . .  $n$  der Abb. 24 gehe nach der Verzerrung in den strichliert gezeichneten Stabzug 1', 2' . . .  $n'$  über, wobei sich die Stabsehnen, und nur diese sind in der Abbildung dar-

gestellt, um die Stabdrehwinkel  $\vartheta_1, \vartheta_2 \dots \vartheta_{n-1}$  drehen. Stab  $1-n$  sei hierbei in seiner Richtung festgehalten gedacht, da es nur auf die Verdrehung der Stäbe gegeneinander und nicht auf eine Verdrehung des ganzen Gebildes ankommt. Wir projizieren nun die beiden Stabpolygone auf zwei aufeinander senkrecht stehende Achsen  $x$  und  $y$ . Die  $x$ -Achse falle mit der Stabsehne  $1-n$  zusammen, der Achsenursprung liege in  $1$ . Soll jeder der beiden Stabzüge eine geschlossene Figur bilden, so muß die Summe der Projektionen aller Vieleckseiten auf die beiden Achsen  $x$  und  $y$  Null sein. Demnach ist

für das unverzerrte Stabvieleck

$$\sum l \cos \alpha = 0 \quad \text{und} \quad \sum l \sin \alpha = 0,$$

und für das verzerrte Stabvieleck

$$\sum l' \cos \alpha' = 0 \quad \text{und} \quad \sum l' \sin \alpha' = 0.$$

Die Winkel  $\alpha$  bzw.  $\alpha'$  sind am niedriger bezifferten Stabende, von der Richtung der positiven  $x$ -Achse ausgehend, entgegengesetzt dem Sinn der Uhrzeigerbewegung zu zählen, wie dies in Abb. 24 durch Pfeile angedeutet ist.

Wir führen nun  $l' = l + \Delta l$  und  $\alpha' = \alpha - \vartheta$  ein. Einem positiven  $\Delta l$  entspricht somit eine Stabverlängerung, einem positiven  $\vartheta$  eine Verkleinerung des Winkels  $\alpha$ ; der Stab dreht sich demnach bei positivem  $\vartheta$  um sein niedriger beziffertes Ende im Sinne der Uhrzeigerbewegung. Diese Festsetzungen wollen wir festhalten<sup>1)</sup>.

Für einen beliebigen Stab gilt demnach

$$l' \cos \alpha' = (l + \Delta l) \cos(\alpha - \vartheta) = (l + \Delta l)(\cos \alpha + \vartheta \sin \alpha),$$

wobei, wegen der Kleinheit des Winkels  $\vartheta$ ,  $\cos \vartheta = 1$  und  $\sin \vartheta = \vartheta$  gesetzt wurde. Nach Ausführung der angedeuteten Multiplikation folgt

$$l' \cos \alpha' = l \cos \alpha + \Delta l \cos \alpha + \vartheta \cdot l \sin \alpha,$$

hierbei wurde das Glied  $\Delta l \cdot \vartheta \cdot \sin \alpha$  als klein von der zweiten Größenordnung vernachlässigt.

In derselben Weise findet man

$$l' \sin \alpha' = (l + \Delta l) \sin(\alpha - \vartheta) = (l + \Delta l)(\sin \alpha - \vartheta \cos \alpha)$$

oder

$$l' \sin \alpha' = l \sin \alpha + \Delta l \sin \alpha - \vartheta \cdot l \cos \alpha.$$

<sup>1)</sup> Wegen des Zusammenhanges der Winkelgleichungen mit den Kontinuitätsbedingungen, in denen ebenfalls die Drehwinkel  $\vartheta$  auftreten, wurde einer Verkleinerung des Winkels  $\alpha$  ein positives  $\vartheta$  zugeordnet.

Nach Einsetzen in die eingangs aufgestellten Summengleichungen gewinnt man

$$\begin{aligned}\Sigma l \cos \alpha + \Sigma \Delta l \cos \alpha + \Sigma \vartheta \cdot l \sin \alpha &= 0 \\ \Sigma l \sin \alpha + \Sigma \Delta l \sin \alpha - \Sigma \vartheta \cdot l \cos \alpha &= 0.\end{aligned}$$

Die ersten Glieder dieser beiden Gleichungen sind Null und die Formeln nehmen daher die einfache Gestalt an

$$\left. \begin{aligned}\Sigma \Delta l \cos \alpha + \Sigma \vartheta \cdot l \sin \alpha &= 0 \\ \Sigma \Delta l \sin \alpha - \Sigma \vartheta \cdot l \cos \alpha &= 0\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 2)$$

Diese beiden Gleichungen werden als **Winkelgleichungen** bezeichnet. Die Summenzeichen erstrecken sich auf alle Stäbe des Systems, ob diese gelenkig oder steif angeschlossen sind. Das Vorzeichen der einzelnen Summenglieder hängt vom Vorzeichen der Winkel­funktion des Winkels  $\alpha$  ab. Die  $\Delta l$  bedeuten die Längenänderungen der Stabsehnen und sind Funktionen der Längskräfte, Temperaturänderungen und der verbiegenden Momente bei gekrümmten Stäben. Die  $\Delta l$  und  $\vartheta$  werden als Unbekannte zunächst positiv angenommen.

In den vorstehenden Entwicklungen wurde die  $x$ -Achse mit einer Rahmenseite zusammenfallend angenommen, und dieser Rahmenseite, als festgehalten, der Drehwinkel Null beigelegt. Dies muß keineswegs immer der Fall sein; man kann jede beliebige Richtung als Projektionslinie wählen, d. h. der Winkel  $\alpha$  kann auf eine beliebig gewählte Gerade mit Richtungssinn bezogen werden, nur muß diese Gerade im Grundsysteme selbst, also gegen irgendeinen Stab desselben, festgelegt sein.

Die beiden Winkelgleichungen bilden die für die Berechnung des Grundsystems noch notwendigen Elastizitätsbedingungen. Damit ist auch die Aufgabe, die überzähligen Größen im einfachen Grundsysteme zu bestimmen, im Prinzip gelöst. Kontinuitätsbedingungen und Winkelgleichungen stellen beim  $n$ -stäbigen einfachen Grundsystem die  $n + 2$  Elastizitätsbedingungen vor, aus denen die  $n + 2$  Unbekannten (Stabdrehwinkel und Überzählige) ermittelt werden können. Sie gelten in der Form der Gleichungen 1) und 2) unabhängig von der Stabform und der Querschnittsgestaltung, haben daher allgemeine Bedeutung.

### § 3. Anwendung auf beliebige statisch unbestimmte Tragsysteme.

Wir betrachten zunächst die aus einem einfachen Grundsystem abgeleiteten Träger. Durch Einschalten eines Gelenkes in einem ausgezeichneten Punkte fällt eine überzählige Größe, also eine Unbekannte, fort, ebenso entfällt aber auch eine Kontinuitätsbedingung, da

im Gelenkpunkte keine Kontinuität besteht. Bei zwei Gelenken fallen zwei Unbekannte und zwei Kontinuitätsbedingungen fort usw. Man erkennt somit, daß das Gleichgewicht zwischen der Zahl der Unbekannten und der Zahl der zu ihrer Berechnung dienenden Elastizitätsbedingungen in jedem Falle für alle nach den Regeln des § 1 aus dem einfachen Grundsysteme abgeleiteten Tragwerke ungestört bleibt, womit die Möglichkeit der Berechnung beliebiger Tragwerke dieser Gruppe mit Hilfe der Kontinuitätsbedingungen 1) und der Winkelgleichungen 2) dargetan ist.

Liegt der Gelenkpunkt nicht in einem ausgezeichneten Punkte des Grundsystems, wie in Abb. 25, so bleibt die Zahl der Kontinuitätsbedingungen unverändert, aber die Zahl der Stabdrehwinkel  $\vartheta$  wird um Eins vermehrt, da den Stabteilen  $ag$  und  $gb$  verschiedene Drehwinkel zukommen. Dafür entfällt aber eine Überzählige, wodurch das Gleichgewicht zwischen der Zahl der Unbekannten und der Zahl der Elastizitätsbedingungen wieder hergestellt ist.

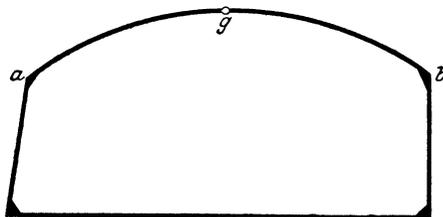


Abb. 25.

Liegt ein mehrfaches Grundsystem vor, so sind zunächst zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall. Zwei aneinandergeschlossene Grundsysteme haben nur einen Stab gemeinsam. Für jedes einfache Grundsystem können so viele Kontinuitätsbedingungen angesetzt werden als es ausgezeichnete Punkte besitzt, außerdem je zwei Winkelgleichungen. Haben die aneinandergeschlossenen Grundsysteme  $p, q, r \dots$  ausgezeichnete Punkte und sind insgesamt  $\beta$  einfache Grundsysteme zu einem Tragwerk vereinigt, so beträgt die Gesamtzahl der Elastizitätsbedingungen

$$p + q + r + \dots + 2\beta.$$

Denken wir uns nun vom ersten einfachen Grundsystem eine Seite festgehalten, ihren Stabdrehwinkel  $\vartheta$  also Null gesetzt, so beträgt die Zahl der unbekannt Stabdrehwinkel um 1 weniger als die Zahl der ausgezeichneten Punkte dieses Feldes. Auch die Zahl der Stabdrehwinkel der anschließenden Grundsysteme ist je um 1 kleiner als die Zahl der ausgezeichneten Punkte, da der Stabdrehwinkel der gemeinsamen Seite schon im vorangehenden Felde als Unbekannte gezählt wurde.

Es liegen demnach

$$(p - 1) + (q - 1) + (r - 1) + \dots + 3\beta$$

Unbekannte vor, wenn wir beachten, daß ein  $\beta$ -faches Grundsystem  $3\beta$ -fach statisch unbestimmt ist. Die Gesamtzahl der Unbekannten ist demnach gleich der Zahl der Elastizitätsbedingungen, d. i.

$$p + q + r + \dots + 2\beta.$$

2. Fall. Sind zwei oder mehr Stäbe den beiden aneinandergereihten einfachen Grundsystemen gemeinsam, wie z. B. in Abb. 26, so zeigt eine einfache Überlegung, daß in solchen Fällen so viel Drehwinkel aus der Zahl der Unbekannten herausfallen als gemeinsame Stäbe vorhanden sind. Gleichzeitig vermindert sich aber auch die Zahl der Kontinuitätsbedingungen, da für die zwischen den Anschlußpunkten  $a$

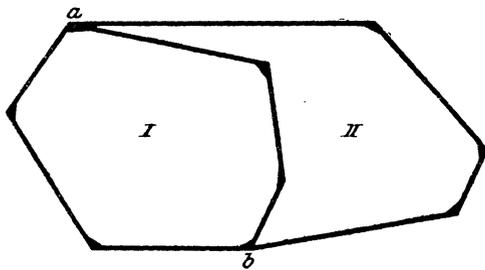


Abb. 26.

und  $b$  liegenden ausgezeichneten Punkte nur einmal Kontinuitätsbedingungen angesetzt werden dürfen, und zwar entweder bei Betrachtung des Systems I oder II. Die betreffenden Kontinuitätsbedingungen sind in beiden Systemen identisch, zählen also nur einmal. Entfallen  $\nu$  gemeinsame Stabdreh-

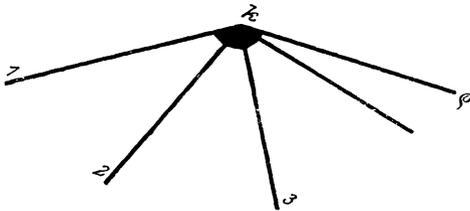
winkel als Unbekannte, so können  $\nu - 1$  Kontinuitätsbedingungen weniger aufgestellt werden, so daß der Unterschied zwischen der Zahl der Kontinuitätsbedingungen und der Zahl der unbekannt Stabdrehwinkel, genau wie bei Fall 1, für jedes einfache Grundsystem Eins beträgt. Es ist demnach auch hier die Zahl der Unbekannten gleich der Zahl der Elastizitätsbedingungen.

Beachtet man noch zum Schlusse, daß hinsichtlich des Einflusses der Gelenke auf die Zahl der Unbekannten und die Zahl der Elastizitätsbedingungen das gleiche gilt wie beim einfachen Grundsysteme, so ist der Beweis erbracht, daß jedes beliebige statisch unbestimmte System mit Hilfe der Kontinuitätsbedingungen und der Winkelgleichungen berechnet werden kann.

Wir wollen noch einen Satz über mehrfache Grundsysteme beweisen, dessen Kenntnis für die praktische Anwendung des Verfahrens wichtig ist. Dieser Satz lautet:

Stoßen in einem Tragwerksknoten  $q$  Stäbe zusammen, die sämtlich steif angeschlossen sind, so lassen sich für diesen Knoten nur  $q - 1$  voneinander unabhängige Kontinuitätsbedingungen aufstellen.

Da  $\varrho$  Stäbe angeschlossen sind (Abb. 27), so kann jeder dieser  $\varrho$  Stäbe, mit einem der übrigen vereinigt gedacht, eine Kontinuitätsbedingung liefern. Die Zahl der so möglichen Bedingungen ist gleich der Zahl der Kombinationen zu zwei Elementen ohne Wiederholung, d. i.



$$z = \frac{\varrho(\varrho - 1)}{2}.$$

Abb. 27.

Wir greifen nun eine beliebige Kontinuitätsbedingung heraus, z. B. die, welche sich auf Stab  $\mathbf{I}$  und Stab  $\nu$  bezieht. Diese lautet:

$$\left[ \frac{d\Delta y}{dx} \right]_1 \cos^2 \gamma_1 - \left[ \frac{d\Delta y}{dx} \right]_\nu \cos^2 \gamma_\nu + \vartheta_1 - \vartheta_\nu = 0.$$

Weiter jene, die die Stäbe  $\mathbf{I}$  und  $\nu + \mathbf{I}$  umfaßt:

$$\left[ \frac{d\Delta y}{dx} \right]_1 \cos^2 \gamma_1 - \left[ \frac{d\Delta y}{dx} \right]_{\nu+1} \cos^2 \gamma_{\nu+1} + \vartheta_1 - \vartheta_{\nu+1} = 0.$$

Subtrahiert man beide Gleichungen, so entsteht

$$\left[ \frac{d\Delta y}{dx} \right]_\nu \cos^2 \gamma_\nu - \left[ \frac{d\Delta y}{dx} \right]_{\nu+1} \cos^2 \gamma_{\nu+1} + \vartheta_\nu - \vartheta_{\nu+1} = 0,$$

d. i. eine Kontinuitätsbedingung zwischen Stab  $\nu$  und  $\nu + \mathbf{I}$ , die aber schon in der Gesamtzahl der möglichen Bedingungen enthalten ist. Verbindet man einen beliebigen Stab der Reihe nach mit den übrigen  $\varrho - \mathbf{I}$  Stäben zu Kontinuitätsbedingungen, so erhält man  $\varrho - \mathbf{I}$  Gleichungen, die voneinander unabhängig sind. Durch Subtrahieren von je zweien können Kontinuitätsbedingungen abgeleitet werden, deren Gesamtzahl der Zahl der Kombinationen aus  $(\varrho - \mathbf{I})$  Elementen zu zwei Elementen ohne Wiederholung gleich ist. Diese Zahl  $z'$  beträgt

$$z' = \frac{(\varrho - 1)(\varrho - 2)}{2}.$$

Da die Gesamtzahl aller Kontinuitätsbedingungen  $z$  ist, so ist die Zahl der überhaupt möglichen, voneinander unabhängigen Kontinuitätsbedingungen  $z - z'$ , demnach

$$z - z' = \frac{\varrho(\varrho - 1)}{2} - \frac{(\varrho - 1)(\varrho - 2)}{2} = \varrho - 1,$$

was zu beweisen war.

Es werde noch bemerkt, daß es im Grunde genommen gleichgültig ist, welche von den möglichen Kontinuitätsbedingungen eines Knotens

angesetzt werden. Bedingung ist nur, daß sie voneinander unabhängig sind, wobei man sich bei der Auswahl der Kombinationen nur von Zweckmäßigkeitsgründen hinsichtlich der Vereinfachung der Berechnung leiten lassen wird.

Bei der Anwendung der Winkelgleichungen auf mehrfache Grundsysteme oder auf aus solchen abgeleitete Tragwerke wird man in Anwendung des am Schlusse der Darstellung der Winkelgleichungen auf S. 18 Gesagten alle Einzelrahmen, in die das betrachtete System zerfällt, auf eine und dieselbe Projektionsgerade, die am zweckmäßigsten eine Auflagerverbindungsline ist, beziehen. Doch steht es auch frei, für jeden einfachen Rahmen oder für eine Gruppe derselben je eine andere Bezugsgerade für den Winkel  $\alpha$  zu wählen.

Einige Beispiele sollen die Zurückführung der Tragsysteme auf Grundsysteme und das Gleichgewicht zwischen der Zahl der Elastizitätsbedingungen und der Unbekannten zeigen.

1. Der in Abb. 28 dargestellte Halbrahmen ist einfach statisch unbestimmt. Mit gerissenen Linien sind die Ergänzungsstäbe zum

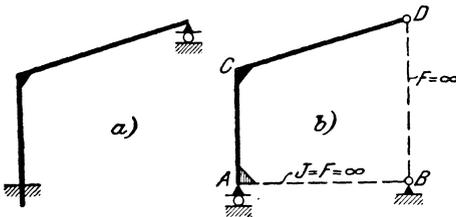


Abb. 28.

geschlossenen Rahmen dargestellt. An Unbekannten zählen wir: eine statisch unbestimmbare Größe und drei Stabdrehwinkel, da vier Stäbe vorliegen, von denen der Stab  $AB$  in seiner Richtung festgehalten ist und daher keine Verdrehung erleiden kann. Insgesamt vier Unbekannte.

Zu ihrer Ermittlung dienen zwei Kontinuitätsbedingungen für die ausgezeichneten Punkte  $A$  und  $C$ , sowie die beiden Winkelgleichungen. Somit vier Gleichungen.

2. Eingespannter Bogen nach Abb. 29. Dieses Tragwerk ist dreifach statisch unbestimmt. Als Unbekannte kommen nur drei Überzählige in Betracht, weil  $A$  und  $B$  fest sind und daher sämtliche Stabdrehwinkel verschwinden.

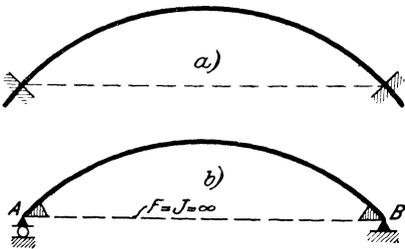


Abb. 29.

An Elastizitätsbedingungen liegen vor: zwei Kontinuitätsbedingungen für die ausgezeichneten Punkte  $A$  und  $B$ , sowie eine Winkelgleichung, da in der zweiten Winkelgleichung, wie man sich leicht überzeugt, sämtliche Glieder Null sind. Zusammen also drei Gleichungen.

3. Der Eingelenkrahmen der Abb. 30 ist zweifach statisch unbestimmt. Unbekannt sind: zwei Überzählige und vier Stabdrehwinkel, somit liegen sechs Unbekannte vor. Zu ihrer Berechnung dienen vier Kontinuitätsbedingungen für die Punkte  $A, B, E$  und  $F$  sowie zwei Winkelgleichungen, somit sechs Gleichungen.

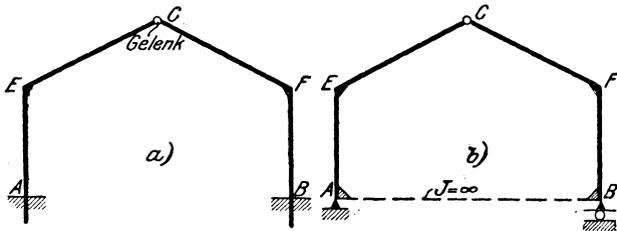


Abb. 30.

4. Der Doppelrahmen nach Abb. 31 ist vierfach statisch unbestimmt. Den fünf wirklichen Systemstäben entsprechen fünf Stabdrehwinkel; Stab  $ACB$  hat den Drehwinkel  $\vartheta = 0$ . Zusammen mit den vier Überzähligen sind neun Unbekannte zu ermitteln. An Bedingungsgleichungen liegen vor: fünf Kontinuitätsbedingungen, und zwar je eine für die Punkte  $D$  und  $F$  und je zwei für die Punkte  $E$

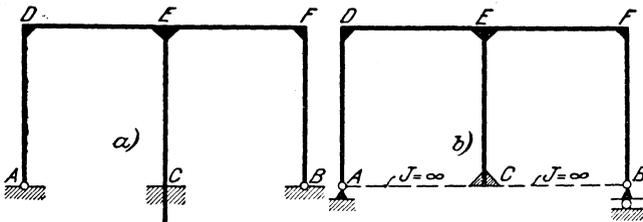


Abb. 31.

und  $C$ , wo je drei Stäbe zusammenstoßen. Die beiden Gleichungen für Punkt  $C$  sind aber miteinander identisch, da beiden Stab  $CE$  gemeinsam ist und die von den Zusatzstäben  $AC$  und  $CB$  herrührenden Glieder, wegen  $J = \infty$ , verschwinden. Die sechs möglichen Kontinuitätsbedingungen verringern sich somit auf fünf. Hierzu kommen für jedes Rahmenfeld zwei Winkelgleichungen. Insgesamt stehen daher zur Berechnung der neun Unbekannten  $5 + 4 = 9$  Gleichungen zur Verfügung.

5. Das in Abb. 32 dargestellte dreifeldrige Tragwerk ist dreifach statisch unbestimmt, da in den Außenfeldern je ein Gelenk angeordnet ist. Neben den drei Überzähligen zählen wir neun Stabdrehwinkel, also insgesamt zwölf Unbekannte. An Gleichungen liegen vor: für die Eckpunkte  $E$  und  $H$  je eine, für die Punkte  $F$  und  $G$ , wo drei

Stäbe zusammenstoßen, je zwei Kontinuitätsbedingungen, zusammen also sechs Kontinuitätsgleichungen. Dazu treten noch  $3 \times 2 = 6$  Winkelgleichungen, daher insgesamt zwölf Gleichungen.

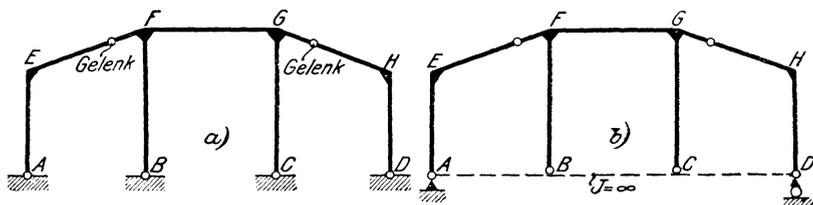


Abb. 32.

6. In Abb. 33 ist ein Zweigelenkrahmen mit zwei gelenkig angeschlossenen Zwischenriegeln dargestellt. Dieses Traggebilde ist dreifach statisch unbestimmt.

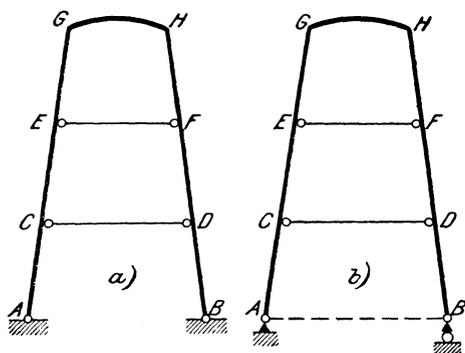


Abb. 33.

Dieses Traggebilde ist dreifach statisch unbestimmt. Berücksichtigt man, daß neun Stabdrehwinkel in Betracht kommen, so sind insgesamt zwölf Unbekannte zu bestimmen. Dieser Zahl von Unbekannten stehen gegenüber: sechs Kontinuitätsbedingungen für die ausgezeichneten Punkte C, D, E, F, G und H, und  $3 \times 2 = 6$  Winkelgleichungen; zusammen zwölf Gleichungen.

7. Der unterspannte Balken (Abb. 34) ist einfach statisch unbestimmt. Die Auszählung ergibt: an Unbekannten: eine Überzählige und sieben Stabdrehwinkel, zusammen acht; an Gleichungen: zwei Kontinuitätsbedingungen und sechs Winkelgleichungen, zusammen ebenfalls acht. Hierbei wurde der Stabdrehwinkel eines der acht Stäbe als gegeben angenommen, da ja ein Stab in seiner Richtung festzuhalten ist.

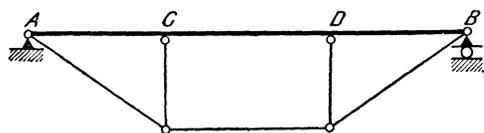


Abb. 34.

8. Der einerseits eingespannte, andererseits beweglich gelagerte Balken AB sei mit dem Stabpaar CE und ED steif verbunden (Abb. 35). Das so entstandene Tragsystem ist vierfach statisch unbestimmt.

Der einerseits eingespannte, andererseits beweglich gelagerte Balken AB sei mit dem Stabpaar CE und ED steif verbunden (Abb. 35). Das so entstandene Tragsystem ist vierfach statisch unbestimmt.

stimmt. Fügt man die Zahl der unbekanntnen Stabdrehwinkel für die fünf Stäbe des gegebenen Systems und für den fingierten Stab  $BF$  hinzu, so sind insgesamt zehn Unbekannte zu bestimmen. Zu ihrer

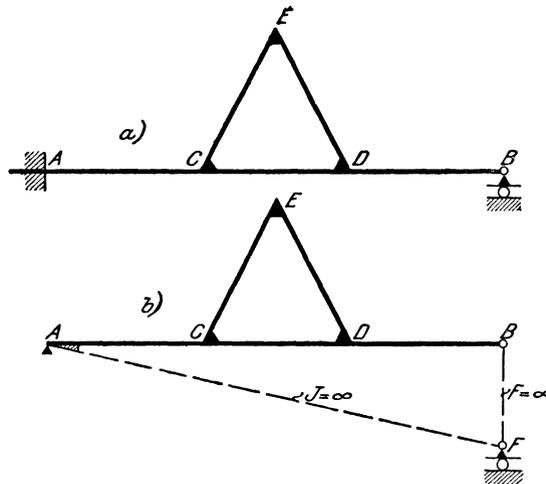


Abb. 35.

Ermittlung dienen: sechs Kontinuitätsbedingungen, und zwar je eine für die Punkte  $A$  und  $E$  und je zwei für die Punkte  $C$  und  $D$ ; dann  $2 \times 2 = 4$  Winkelgleichungen für die beiden geschlossenen Figuren  $ABF$  und  $CDE$ ; insgesamt zehn Gleichungen.

9. Der Vierendeelbalken (Abb. 36) ist bei  $n$  Feldern  $3n$ -fach statisch unbestimmt. Die Zahl der Unbekannten beträgt demnach  $3n$

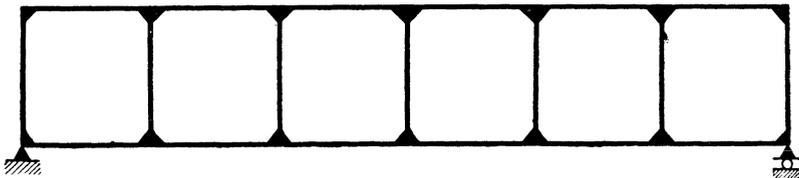


Abb. 36.

Überzählige, zu denen bei  $3n + 1$  Stäben,  $3n$  Stabdrehwinkel hinzukommen, also  $6n$ . An Bestimmungsgleichungen stehen zur Verfügung: für jedes Rahmenfeld vier Kontinuitätsbedingungen und zwei Winkelgleichungen, insgesamt  $6n$  Bedingungsgleichungen.

## II. Tragwerke aus geraden oder schwach gekrümmten Stäben mit unveränderlichem Querschnitt.

### § 4. Der Viermomentensatz.

Für die nachstehenden Entwicklungen gelten die folgenden einschränkenden Voraussetzungen:

1. Die Querschnittsabmessungen der einzelnen Elemente des Tragwerks sind klein gegenüber den Stablängen, so daß es erlaubt ist, vom Einfluß der Querkräfte abzusehen und die inneren Kräfte und Formänderungen gekrümmter Stäbe in der gleichen Weise zu ermitteln wie bei geraden Stäben.

2. Der Krümmungshalbmesser gekrümmter Stäbe ist an allen Stellen groß genug und der Wölbungspfeil zwischen zwei ausgezeichneten Punkten genügend klein, um die Neigung der Stabachse gegen die Stabsehne bei Ermittlung der Formänderung vernachlässigen oder durch einen Mittelwert ersetzen zu dürfen.

3. Trägheitsmoment und Querschnittsfläche sind innerhalb eines Elementes unveränderlich.

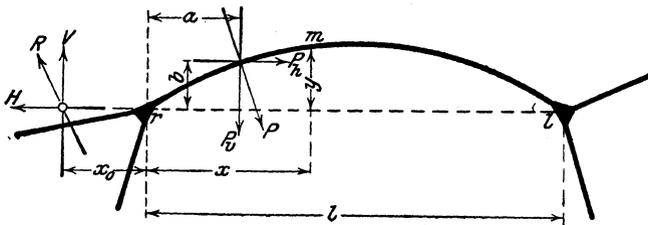


Abb. 37.

Wir betrachten einen aus einem Grundsystem herausgeschnittenen Stab  $r-l$  (Abb. 37). Die Mittelkraft aller links vom Punkte  $r$  liegenden äußeren Kräfte werde mit  $R$  bezeichnet. Ihre Teilkräfte parallel und senkrecht zur Stabsehne  $r-l$  seien  $V$  und  $H$ . Mit  $P$  kenn-

zeichnen wir die äußeren Kräfte im herausgehobenen Stabfelde selbst. Auch diese Kräfte werden in ihren Angriffspunkten in die Teilkräfte  $P_v$  und  $P_h$  zerlegt. Für das Biegemoment  $M_x$  im Punkte  $m$  mit den Ordinaten  $x$  und  $y$  finden wir, wenn wir die Bezeichnungen der Abb. 37 beachten und die Momente wie üblich positiv zählen, falls sie am rechten festgehalten gedachten Stabteil angreifend im Sinne der Uhrzeigerbewegung drehen:

$$M_x = V(x_0 + x) + Hy - \sum_0^x P_v(x - a) - \sum_0^x P_h(y - b).$$

Da  $Vx_0 = M^r$  ist, wobei  $M^r$  das Moment von  $R$ , bezogen auf einen unendlich nahe rechts von  $r$  gelegenen Punkt bedeutet, so wird

$$M_x = M^r + Vx + Hy - \sum_0^x P_v(x - a) - \sum_0^x P_h(y - b).$$

Setzt man  $x = l$ , so geht  $M_x$  in  $M^l$  über, wobei der links von  $l$  gelegene unendlich nahe Punkt den Bezugspunkt für das Moment  $M^l$  darstellt. Es ist demnach

$$M^l = M^r + Vl - \sum_0^l P_v(l - a) + \sum_0^l P_h b$$

und daraus

$$V = \frac{M^l - M^r}{l} + \frac{1}{l} \sum_0^l P_v(l - a) - \frac{1}{l} \sum_0^l P_h b.$$

Führt man diesen Wert von  $V$  in die Gleichung für  $M_x$  ein, so entsteht

$$M_x = M^r + \frac{M^l - M^r}{l} x + Hy + \frac{x}{l} \sum_0^l P_v(l - a) - \sum_0^x P_v(x - a) - \frac{x}{l} \sum_0^l P_h b - \sum_0^x P_h(y - b).$$

Die vier Summenausdrücke stellen das Moment des frei aufliegenden mit den Lasten  $P$  belasteten Balkens  $r - l$  vor, wenn man sich das feste Lager in  $l$  angeordnet denkt. Wir bezeichnen dieses Moment mit  $\mathfrak{M}_x$ . Die Gleichung für  $M_x$  nimmt daher nach Umordnung die einfache Form an

$$M_x = M^r \left(1 - \frac{x}{l}\right) + M^l \frac{x}{l} + Hy + \mathfrak{M}_x, \quad \dots \dots \dots 3)$$

wobei  $H$  die in die Stabsehnenrichtung fallende Teilkraft von  $R$  ist.  $H$  wird positiv gezählt, wenn es den Stab auf Zug beansprucht.  $y$  ist positiv, wenn der Stab nach außen, negativ, wenn der Stab nach dem Rahmeninnern gekrümmt ist. Gleichung 3) gilt natürlich auch, wenn an Stelle der bisher vorausgesetzten Einzellasten zwischen  $r$  und  $l$  irgendeine andere Art der Belastung in Betracht kommt, da sich jede

Belastung letzten Endes mit genügender Annäherung auf ein System von Einzellasten zurückführen läßt. Die Momente  $M^r$  und  $M^l$  nennen wir die Anschlußmomente.

Unter den eingangs gemachten Voraussetzungen kann die Differentialgleichung der elastischen Linie eines Stabes (Elementes) in der Form geschrieben werden

$$EJ \cos^3 \varphi \frac{d^2 \Delta y}{dx^2} = -M_x.$$

$\Delta y$  ist wie in § 2 die Änderung der Stabachsenordinate durch die Verzerrung,  $M_x$  das Biegemoment im Punkte  $m$ ,  $E$  und  $J$  Elastizitätsmaß und Trägheitsmoment des Stabes (Abb. 37).  $\varphi$  bedeutet eine mittlere Neigung der Stabelemente gegen die Stabsehne.

Die zweimalige Integration der Differentialgleichung ergibt

$$EJ' \Delta y = - \int_0^x \mu_x dx + C_1 x + C_2,$$

wenn zunächst

$$\int_0^x M_x dx = \mu_x$$

eingeführt und  $J \cos^3 \varphi = J'$  gesetzt wird.

Um die Festwerte  $C_1$  und  $C_2$  zu bestimmen, setzen wir, da sich die Ordinaten  $y$  der Stabachse auf die Stabsehne beziehen,

$$\text{für } x=0 \quad \Delta y = 0$$

$$\text{für } x=l \quad \Delta y = 0$$

und finden

$$C_1 = \frac{1}{l} \int_0^l \mu_x dx$$

$$C_2 = 0.$$

Die Gleichung der elastischen Linie nimmt damit die Form an

$$EJ' \Delta y = \frac{x}{l} \int_0^l \mu_x dx - \int_0^x \mu_x dx.$$

Um die Beträge der für die Kontinuitätsbedingungen notwendigen Differentialquotienten zu erhalten, differenzieren wir die voranstehende Lösung und finden

$$EJ' \frac{d \Delta y}{dx} = \frac{1}{l} \int_0^l \mu_x dx - \mu_x.$$

Durch partielle Integration gelangen wir zu der allgemein gültigen Verknüpfung

$$\int \mu_x dx = x\mu_x - \int x \frac{d\mu_x}{dx} dx = x\mu_x - \int M_x x dx;$$

mithin ist

$$\int_0^l \mu_x dx = l\mu_l - \int_0^l M_x x dx,$$

wenn  $\mu_l$  den Wert von  $\mu_x$  für  $x=l$  bedeutet.

Mit diesem Ausdrucke für das bestimmte Integral geht die Gleichung des gesuchten Differentialquotienten über in

$$EJ' \frac{d\Delta y}{dx} = \mu_l - \mu_x - \frac{1}{l} \int_0^l M_x x dx.$$

Beachtet man, daß  $\mu_l - \mu_x$  die durch  $M_x$  definierte Momentenfläche von  $x$  bis  $l$  ist, weiter, daß das durch  $l$  geteilte Integral in der letzten Gleichung den rechten Auflagerdruck der ganzen Momentenfläche vorstellt, so läßt sich die rechte Seite dieser Gleichung, als die zur Momentenfläche  $M_x$  als Belastung gehörende, negativ genommene Querkraft  $\mathfrak{R}_x$  an der Stelle  $x$  deuten (Satz von Mohr). Sonach können wir auch schreiben

$$EJ' \frac{d\Delta y}{dx} = -\mathfrak{R}_x. \dots \dots \dots 4)$$

Zwecks Verwendung dieses wichtigen Ergebnisses für die Kontinuitätsbedingung bestimmen wir die Sonderwerte des Differentialquotienten für  $x=l$  und  $x=0$ . Es ist offenbar

$$\left. \begin{aligned} \left[ \frac{d\Delta y}{dx} \right]_{x=l} &= -\frac{\mathfrak{B}}{EJ}, \\ \left[ \frac{d\Delta y}{dx} \right]_{x=0} &= \frac{\mathfrak{A}}{EJ}, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 5)$$

wenn mit  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  die von der Momentenfläche  $M_x$  herrührenden Auflagerkräfte im linken bzw. rechten Endpunkt bezeichnet werden.

Die Verknüpfung der Gleichungen 5) mit der Kontinuitätsbedingung 1) liefert die Beziehung

$$\frac{\cos^2 \gamma_k}{EJ_k \cos^3 \varphi_k} \mathfrak{B}_k + \frac{\cos^2 \gamma_{k+1}}{EJ_{k+1} \cos^3 \varphi_{k+1}} \mathfrak{A}_{k+1} - \vartheta_k + \vartheta_{k+1} = 0,$$

wobei sämtliche Glieder mit  $-1$  multipliziert wurden. Setzt man für schwach gekrümmte Stäbe genau genug  $\cos^2 \gamma : \cos^3 \varphi = 1$ , so entsteht

$$\frac{\mathfrak{B}_k}{EJ_k} + \frac{\mathfrak{A}_{k+1}}{EJ_{k+1}} - \vartheta_k + \vartheta_{k+1} = 0 \dots \dots \dots 6)$$

Durch die Zeiger  $k$  und  $k+1$  wird die Zugehörigkeit der einzelnen Glieder zu den durch die Gleichung 6) in Verbindung gebrachten Stäben  $l_k$

und  $l_{k+1}$  festgelegt.  $E$  wurde zeigerlos belassen, da wir das Elastizitätsmaß in allen Stäben gleich groß annehmen wollen.

Gleichung 6) stellt, unter den eingangs angeführten einschränkenden Bedingungen, die integrierte Kontinuitätsbedingung vor. Faßt man die Momentenflächen der durch 6) verknüpften Stäbe als Belastungen auf, so stellen  $\mathfrak{B}_k$  und  $\mathfrak{A}_{k+1}$  die von dieser Belastung herrührenden Balkenwiderstände im Zusammenhangspunkte  $k$  vor.

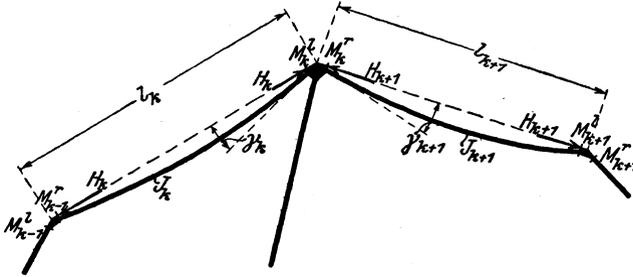


Abb. 38.

Wir haben in Gleichung 3) einen Ausdruck für das Biegemoment  $M_x$  für den allgemeinsten Belastungsfall eines Elementes gefunden.

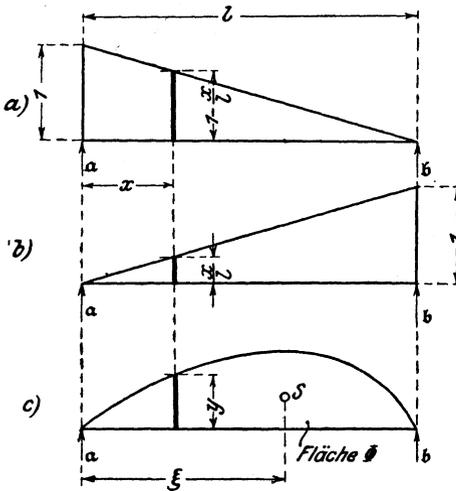


Abb. 39.

An Stelle der Momente  $M^r$  und  $M^l$  führen wir für den Stab  $l_k$  die Anschlußmomente  $M_{k-1}^r$  und  $M_k^l$  entsprechend den beiden Endpunkten  $k-1$  und  $k$  ein, ebenso  $M_k^r$  und  $M_{k+1}^l$  für den Stab  $l_{k+1}$ , dessen Endpunkte  $k$  und  $k+1$  sind (Abb. 38). Alle übrigen Kraftgrößen und Abmessungen, die sich auf die durch die Kontinuitätsbedingung in Zusammenhang gebrachten Stäbe  $l_k$  und  $l_{k+1}$  beziehen, werden durch die Zeiger  $k$  und  $k+1$  unterschieden. Wir können daher schreiben

für Stab  $l_k$ :

$$M_x = M_{k-1}^r \left(1 - \frac{x}{l}\right) + M_k^l \frac{x}{l} + H_k y_k + \mathfrak{M}_x^k,$$

für Stab  $l_{k+1}$ :

$$M_x = M_k^r \left(1 - \frac{x}{l}\right) + M_{k+1}^l \frac{x}{l} + H_{k+1} y_{k+1} + \mathfrak{M}_x^{k+1}.$$

Die durch  $M_x$  definierten Momentenflächen zerfallen sonach für jeden Stab in vier Teile; wir bestimmen deshalb die Auflagerkräfte  $\mathfrak{B}_k$  und  $\mathfrak{A}_{k+1}$  zweckmäßigerweise für jeden Teil getrennt. Aus Abb. 39, in der die einzelnen Momentenflächen unter der Annahme, daß  $M^r$ ,  $M^l$  und  $H$  Eins sind, dargestellt erscheinen, findet man leicht

für die Momentenfläche a)

$$\mathfrak{b}_k = \frac{1}{6} l_k, \quad \mathfrak{a}_{k+1} = \frac{1}{3} l_{k+1},$$

für die Momentenfläche b)

$$\mathfrak{b}_k = \frac{1}{3} l_k, \quad \mathfrak{a}_{k+1} = \frac{1}{6} l_{k+1},$$

für die Momentenfläche c)

$$\mathfrak{b}_k = \Phi_k \frac{\xi_k}{l_k} = \frac{\mathfrak{E}_k^{k-1}}{l_k} \quad \mathfrak{a}_{k+1} = \Phi_{k+1} \frac{\xi_{k+1}}{l_{k+1}} = \frac{\mathfrak{E}_{k+1}^{k+1}}{l_{k+1}}.$$

$\mathfrak{E}_k^{k-1}$  und  $\mathfrak{E}_{k+1}^{k+1}$  sind die statischen Momente der zwischen Stabachse und Stabsehne gelegenen Flächen  $\Phi_k$  bzw.  $\Phi_{k+1}$ . Der untere Zeiger stimmt mit dem Stabzeiger überein, der obere Zeiger gibt den Bezugspunkt an, durch den die Momentenachse geht.

Die Werte von  $\mathfrak{B}_k$  und  $\mathfrak{A}_{k+1}$  infolge der zunächst nicht näher bestimmten Feldbelastung (Moment  $\mathfrak{M}_x$ ) bezeichnen wir mit  $\mathfrak{B}_k^P$  und  $\mathfrak{A}_{k+1}^P$ .

Für das Gesamtmoment  $M_x$  gilt somit

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_k &= M_{k-1}^r \frac{l_k}{6} + M_k^l \frac{l_k}{3} + H_k \frac{\mathfrak{E}_k^{k-1}}{l_k} + \mathfrak{B}_k^P, \\ \mathfrak{A}_{k+1} &= M_k^r \frac{l_{k+1}}{3} + M_{k+1}^l \frac{l_{k+1}}{6} + H_{k+1} \frac{\mathfrak{E}_{k+1}^{k+1}}{l_{k+1}} + \mathfrak{A}_{k+1}^P, \end{aligned}$$

damit geht Gleichung 6) über in

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EJ_k} \left[ M_{k-1}^r \frac{l_k}{6} + M_k^l \frac{l_k}{3} + H_k \frac{\mathfrak{E}_k^{k-1}}{l_k} + \mathfrak{B}_k^P \right] + \\ & + \frac{1}{EJ_{k+1}} \left[ M_k^r \frac{l_{k+1}}{3} + M_{k+1}^l \frac{l_{k+1}}{6} + H_{k+1} \frac{\mathfrak{E}_{k+1}^{k+1}}{l_{k+1}} + \mathfrak{A}_{k+1}^P \right] - \\ & - \vartheta_k + \vartheta_{k+1} = 0. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren nun mit  $6EJ_c$ , wobei  $J_c$  ein beliebig gewähltes Trägheitsmoment bedeutet, lösen die Klammern auf, ordnen die Gleichung und führen

$$l \frac{J_c}{J} = l'$$

ein.  $l'$  heiße die reduzierte Länge des Stabes. Wir erhalten danach

$$M_{k-1}^r l'_k + 2 M_k^l l'_k + 2 M_k^r l'_{k+1} + M_{k+1}^l l'_{k+1} + 6 H_k \mathfrak{S}_k^{k-1} \frac{l'_k}{l_k^2} + 6 H_{k+1} \mathfrak{S}_{k+1}^{k+1} \frac{l'_{k+1}}{l_{k+1}^2} - 6 E J_c (\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) = N \dots 7)$$

Mit  $N$  haben wir das von der Belastung abhängige Glied bezeichnet. Es ist

$$N = - 6 \mathfrak{B}_k^P \frac{l'_k}{l_k} - 6 \mathfrak{B}_{k+1}^P \frac{l'_{k+1}}{l_{k+1}} \dots \dots \dots 8)$$

Gleichung 7) tritt an Stelle der Kontinuitätsbedingung in die Gesamtheit der Elastizitätsbedingungen ein, sie enthält keine Differentialquotienten mehr, erscheint also als das Integral der Kontinuitätsbedingung 1). Da sie eine Funktion der vier Anschlußmomente der beiden zusammenhängenden Stäbe darstellt, so wollen wir Gleichung 7) in ihrer allgemeinsten Form als **Viermomentensatz** bezeichnen. Die nach diesem Satze im Sonderfalle aufgestellten Elastizitätsbedingungen heißen dann Viermomentengleichungen. Viermomenten- und Winkelgleichungen bilden somit das System der Elastizitätsbedingungen, aus denen, wie wir sehen werden, die Bestimmungsgleichungen für die Ermittlung der berzhligten Gren herausgelöst werden. Die Kontinuitätsbedingung 1) selbst hat für die hier betrachtete Tragwerkgruppe keine praktische Bedeutung mehr, an ihre Stelle ist der Viermomentensatz getreten. Das Belastungsglied  $N$  hängt nur von der Belastung der beiden durch die Viermomentengleichung verknüpften Stäbe ab und ist unabhängig von der Belastung der übrigen Elemente.

Kommen nur gerade Stäbe in Betracht, so fallen die Glieder mit  $H$  fort, da die Flächenmomente  $\mathfrak{S}$  Null sind. Der Satz nimmt dann die einfachere Form an:

$$M_{k-1}^r l'_k + 2 M_k^l l'_k + 2 M_k^r l'_{k+1} + M_{k+1}^l l'_{k+1} - 6 E J_c (\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) = N. 7')$$

Für den besonderen Fall, daß im Punkte  $k$  nur zwei gerade Stäbe zusammenstoßen, wie beim einfachen Grundsystem, geht die letzte Gleichung in den bekannten Dreimomentensatz über.

$$M_{k-1}^r l'_k + 2 M_k (l'_k + l'_{k+1}) + M_{k+1}^l l'_{k+1} - 6 E J_c (\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) = N. 7'')$$

Man erkennt hier ohne weiteres die Clapeyronschen Gleichungen

wieder, wenn man die Drehwinkel  $\vartheta$  durch die Differenzen der Knoten verschiebungen ersetzt.

In der vorangehenden Darstellung wurden jene Momente positiv gezählt, welche, an dem rechten festgehalten gedachten Stabteil angreifend, im Uhrzeigerbewegungssinne drehen. Diese Festsetzung muß noch mit Rücksicht auf zusammengesetzte Rahmenformen ergänzt werden. Wir denken uns jedes Rahmentragwerk zu einem einfachen oder mehrfachen geschlossenen Rahmen ergänzt und die ausgezeichneten Punkte jedes Einzelrahmens von einem beliebigen Punkte aus im Sinne der Uhrzeigerbewegung beziffert. Dann ist, um links und rechts festzulegen, der Beschauer so aufzustellen, daß er die niedrigere Ziffer zur linken Hand hat. Unsere Festsetzung besagt demnach, daß die Momente dann positiv gezählt werden, wenn sie den Stab gegen das Innere des Einzelrahmens, also gegen den im Innern stehenden Beschauer zu wölben trachten.

Die Viermomentengleichungen werden nun für jeden einzelnen Rahmen gemäß Satz 7 in der Reihenfolge, die durch die eben angegebene Bezifferung festgelegt ist, angeschrieben. Sämtliche Anschlußmomente dieser Gleichungen werden mit einer Ausnahme positiv angenommen.

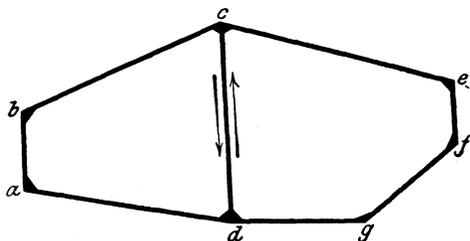


Abb. 40.

Diese Ausnahme bezieht sich auf die Endmomente jener Stäbe, die zwei benachbarten Einzelrahmen gemeinsam sind, wie z. B. Stab  $cd$  in Abb. 40. Dieser Stab wird als Glied des Rahmens  $abcd$  bei Aufstellung der Viermomentengleichung im Sinne  $c \rightarrow d$  durchlaufen. Seine Endmomente werden hierbei positiv angenommen. Als Stab des Rahmens  $cefgd$  wird aber  $cd$  beim Ansatz der Momentengleichungen dieses Rahmens im umgekehrten Sinne von  $d$  nach  $c$  durchfahren; der Beschauer steht jetzt auf der anderen Seite des Stabes, so daß Punkt  $d$  als niedrigere Ziffer zu seiner linken Hand ist. Nun ist der Sinn der positiv drehenden Momente durch die angesetzten Gleichungen des Rahmens  $abcd$ , soweit Stab  $cd$  in Betracht kommt, bereits festgelegt. Vom Rahmen  $cefgd$  gesehen sind diese Momente jetzt negativ drehend. Sie sind daher das zweitemal mit negativem Vorzeichen einzuführen. Wir erhalten daher folgende Vorzeichenregel: Sämtliche Anschlußmomente sind positiv in die Viermomentengleichungen einzuführen, mit Ausnahme der Anschlußmomente jener Stäbe, die zwei benachbarten Einzel-

rahmen gemeinsam sind. Diese sind einmal positiv, einmal negativ in die Viermomentengleichungen einzusetzen.

Die Sehnkräfte  $H$  sind positiv, wenn sie den Stab zu verlängern trachten. Die Fläche  $\Phi$  oder deren statische Momente  $\mathfrak{S}$  sind positiv zu zählen, wenn der gekrümmte Stab nach außen, negativ, wenn der Stab gegen das Rahmeninnere gewölbt ist. Bei krummen Stäben, die zwei benachbarten Feldern gemeinsam sind, wird deshalb  $\Phi$  und  $\mathfrak{S}$  einmal positiv, einmal negativ in den Viermomentengleichungen erscheinen.

**Berechnung des Belastungsgliedes  $N$ .**

Es bleibt noch übrig, die mit  $N$  bezeichnete rechte Seite der Viermomentengleichung 7) — das Belastungsglied — auf Grund der Formel 8) für einzelne praktisch wichtige Lastsysteme zu berechnen.

a) *Belastung der Stäbe  $l_k$  und  $l_{k+1}$  durch Einzellasten  $P_k$  und  $P_{k+1}$ , die senkrecht zur Stabsehne gerichtet sind. Abb. 41a.*

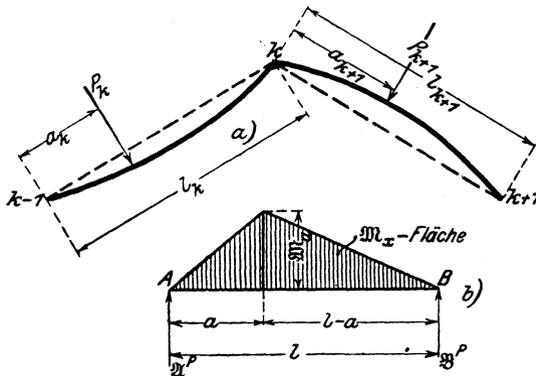


Abb. 41.

Die Momentenfläche  $M_x$  für eine Einzellast  $P$  im Abstände  $a$  vom linken Auflager ist in Abb. 41b dargestellt. Die Auflagerkräfte  $X^P$  und  $Y^P$  sind leicht zu berechnen. Bezeichnet man das Moment in der Entfernung  $a$  mit  $M_a$ , so folgt zunächst

$$Y^P = \frac{1}{l} \left[ \frac{M_a a}{2} \cdot \frac{2}{3} a + \frac{M_a (l-a)}{2} \left( a + \frac{1}{3} (l-a) \right) \right] = \frac{M_a}{6} (l+a);$$

nun ist

$$M_a = P \frac{l-a}{l} a,$$

mit welchem Betrage sich

$$Y^P = \frac{P}{6} \frac{a}{l} \left[ 1 - \left( \frac{a}{l} \right)^2 \right] l^2$$

ergibt. Vertauscht man  $a$  mit  $(l-a)$ , so erhält man auf kurzem Wege  $\mathfrak{U}^P$ , und zwar

$$\mathfrak{U}^P = \frac{P}{6} \frac{l-a}{l} \left[ 1 - \left( \frac{l-a}{l} \right)^2 \right].$$

Gleichung 8) geht mit diesen Werten, wenn man eine Gruppe paralleler Lasten ins Auge faßt, über in

$$N = - \sum P_k a_k l'_k \left( 1 - \frac{a_k^2}{l_k^2} \right) - \sum P_{k+1} (l-a)_{k+1} l'_{k+1} \left( 1 - \frac{(l-a)_{k+1}^2}{l_{k+1}^2} \right) \dots 9)$$

Bezeichnet man die von den besonderen Systemabmessungen unabhängigen Teile in  $N$  mit  $f_1$  und  $f_2$ , nämlich

$$f_1 = \frac{l-a}{l} \left[ 1 - \left( \frac{l-a}{l} \right)^2 \right], \quad f_2 = \frac{a}{l} \left[ 1 - \left( \frac{a}{l} \right)^2 \right], \dots 10)$$

so läßt sich Gleichung 9) in der Form schreiben

$$N = - l_k l'_k \sum P_k f_2 - l_{k+1} l'_{k+1} \sum P_{k+1} f_1 \dots 9)$$

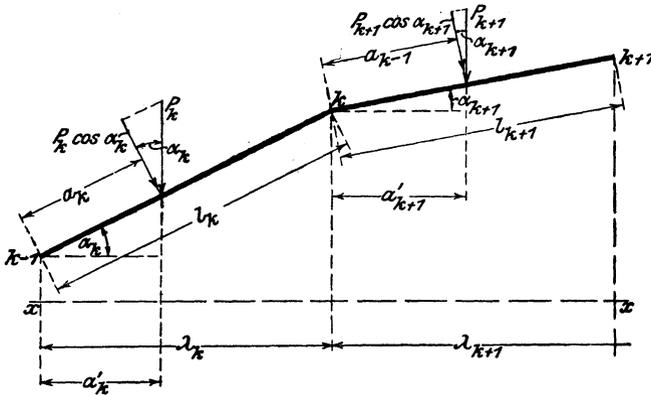


Abb. 42.

$f_1$  und  $f_2$  sind Funktionen der Verhältniszahlen  $\frac{a}{l}$  bzw.  $\frac{l-a}{l}$  und können ein für allemal in Tafeln vorberechnet werden. Derartige Tafeln der Funktionen  $f_1$  und  $f_2$ , die wir als Stammfunktionen bezeichnen, und die bei der Darstellung der Einflußlinien eine wichtige Rolle spielen werden, sind im Anhange für  $\frac{a}{l}$  von 0,01 zu 0,01 steigend enthalten.

b) Die geraden Stäbe sind durch ein System paralleler Einzellasten belastet, deren Richtung im allgemeinen gegen die Stabrichtungen geneigt ist. Abb. 42.

Wir bezeichnen die Winkel, die die Stäbe  $l_k$  und  $l_{k+1}$  mit einer Geraden  $x-x$ , die senkrecht zur Lastrichtung steht, einschließen, mit  $\alpha_k$  und  $\alpha_{k+1}$ . Jede Last wird in zwei Teilkräfte senkrecht und parallel zur Stabrichtung zerlegt, wie dies Abb. 42 zeigt. Da bei geraden Stäben der Einfluß der Längskräfte auf die Momente Null ist, so bleibt für jeden Stab ein System von senkrecht zur Stabrichtung wirkenden Kräften zurück, für welche die Beziehung 9 oder 9' gilt.

Wir finden somit, wenn wir Gleichung 9' benutzen,

$$N = -l_k l'_k \cos \alpha_k \sum P_k f_2 - l_{k+1} l'_{k+1} \cos \alpha_{k+1} \sum P_{k+1} f_1$$

oder

$$N = -\lambda_k l'_k \sum P_k f_2 - \lambda_{k+1} l'_{k+1} \sum P_{k+1} f_1 \quad \dots \quad \text{II)}$$

$\lambda_k$  und  $\lambda_{k+1}$  sind die Projektionen der Stablängen  $l_k$  und  $l_{k+1}$  auf die Richtung  $x-x$ .  $f_1$  und  $f_2$  werden für die Verhältnisse  $\frac{a}{l}$  oder  $\frac{a'}{\lambda}$  den vorerwähnten Tafeln entnommen.

c) Belastung durch gleichförmig verteilte Streckenlasten  $p_k$  bzw.  $p_{k+1}$  in den Stabfeldern  $l_k$  und  $l_{k+1}$ . Abb. 43.

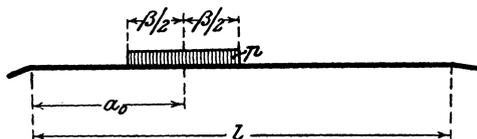


Abb. 43.

Setzt man in Gleichung 9) für  $P$  den Wert  $p dx$  und für das Summenzeichen das Integralzeichen, so erhält man

$$N_p = -p_k l'_k \int_{a_0 - \frac{\beta}{2}}^{a_0 + \frac{\beta}{2}} \left( 1 - \frac{a_k^2}{l_k^2} \right) dx - p_{k+1} l'_{k+1} \int_{a_0 - \frac{\beta}{2}}^{a_0 + \frac{\beta}{2}} (l-a)_{k+1} \left[ 1 - \frac{(l-a)_{k+1}^2}{l_{k+1}^2} \right] dx$$

und nach Ausführung der Integrationen

$$N_p = -p_k l'_k [\alpha_0 \beta]_k \left[ 1 - \frac{4 a_0^2 + \beta^2}{4 l^2} \right]_k - p_{k+1} l'_{k+1} [(l-a_0) \beta]_{k+1} \left[ 1 - \frac{4 (l-a_0)^2 + \beta^2}{4 l^2} \right]_{k+1} \quad \text{I2)}$$

d) *Totale gleichförmig verteilte Belastung*  $p_k$  bzw.  $p_{k+1}$  in den Stabfeldern  $l_k$  und  $l_{k+1}$ .

Führt man in Gleichung 12)  $\beta=l$  und  $a_0 = \frac{l}{2}$  ein, so wird

$$N_p^{tot} = -\frac{1}{4} p_k l_k l_k^2 - \frac{1}{4} p_{k+1} l_{k+1} l_{k+1}^2 \dots \quad 13)$$

e) *Belastung durch Drehmomente*  $\mu_k$  und  $\mu_{k+1}$  in den Feldern  $l_k$  und  $l_{k+1}$ . *Abb. 44.*

Das Moment  $\mu$  greife in  $m$  im Abstände  $a$  von der linken Stütze an. *Abb. 44a.* Es wird positiv gezählt, wenn es vom Rahmeninnern gesehen, im Sinne der Uhrzeigerbewegung dreht.

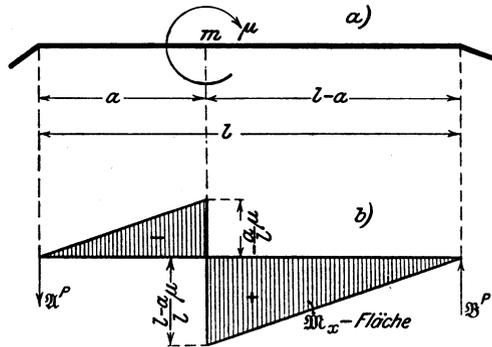


Abb. 44.

Mit den Bezeichnungen der *Abb. 44b*, die die Momentenfläche  $M_x$  darstellt, findet man zunächst:

$$\begin{aligned} B^P &= \frac{1}{l} \left[ -\mu \frac{a^2}{2l} \cdot \frac{2}{3} a + \mu \frac{(l-a)^2}{2l} \left( a + \frac{l-a}{3} \right) \right] \\ &= \frac{\mu}{6} l \left[ 1 - 3 \left( \frac{a}{l} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

ferner  $X^P$  aus dem Betrag von  $B^P$ , wenn man  $a$  durch  $(l-a)$  ersetzt und beachtet, daß  $X^P$  negativ ist. Man erhält sonach

$$X^P = -\frac{\mu}{6} l \left[ 1 - 3 \left( \frac{l-a}{l} \right)^2 \right].$$

Mit diesen Werten nimmt Gleichung 8) die Form an

$$N_\mu = -\mu_k l'_k \left[ 1 - 3 \left( \frac{a}{l} \right)^2 \right]_k + \mu_{k+1} l'_{k+1} \left[ 1 - 3 \left( \frac{l-a}{l} \right)^2 \right]_{k+1} \quad 14)$$

f) *Belastung durch Einzellasten*  $P_h$  parallel zur Stabsehne. *Abb. 45.*

In Übereinstimmung mit den Annahmen bei der Aufstellung des vollständigen Ausdruckes für  $M_x$  (Gleichung 3 S. 27) fassen wir  $A$  als bewegliches,  $B$  als festes Lager des Balkens  $AB$  auf, so daß in den Endpunkten die senkrechten Auflagerwiderstände  $A$  und  $B$  und außerdem in  $B$  die wagerechte Last  $P_h$  zur Wirkung kommt. *Abb. 45a.*  $a$  und  $b$  sind die Koordinaten des Angriffspunktes der Last  $P_h$ .

Die Momentenfläche läßt sich zweckmäßig in zwei Teile zerlegen: In das überschlagene Dreieck, Abb. 45b, und in die krummlinig begrenzte schraffierte Momentenfläche mit den Ordinaten  $P_h y$ , Abb. 45c.

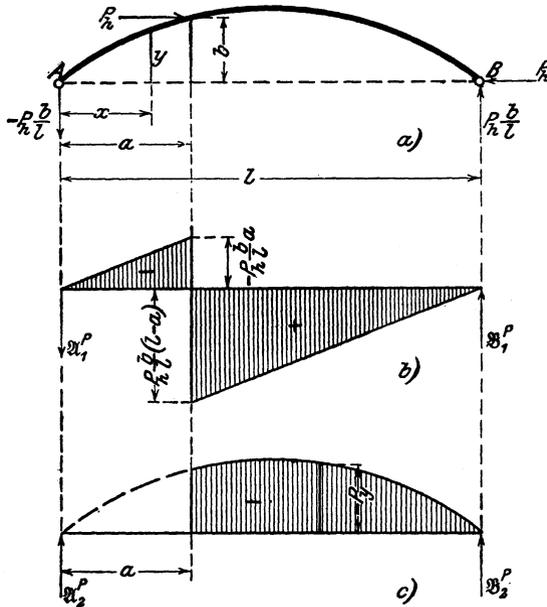


Abb. 45.

Die erstgenannte Fläche stimmt mit der Momentenfläche unter e) überein, weshalb man unter Verwertung der oben gewonnenen Ergebnisse, wenn  $\mu = P_h b$  gesetzt wird, findet

$$\mathfrak{A}_1^P = -\frac{P_h b}{6} l \left[ 1 - 3 \left( \frac{l-a}{l} \right)^2 \right] \quad \mathfrak{B}_1^P = \frac{P_h b}{6} l \left[ 1 - 3 \left( \frac{a}{l} \right)^2 \right].$$

Bezeichnet man das statische Moment der schraffierten Momentenfläche der Abb. 45c von  $a$  bis  $l$ , bezogen auf den rechten bzw. linken Endpunkt, mit  $\mathfrak{B}^B$  und  $\mathfrak{B}^A$ , so ist

$$\mathfrak{A}_2^P = \frac{\mathfrak{B}^B}{l} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_2^P = \frac{\mathfrak{B}^A}{l},$$

und Gleichung 8) geht über in

$$N_h = -P_h^k l_k' b_k \left[ 1 - 3 \left( \frac{a}{l} \right)^2 \right]_k + P_h^{k+1} l_{k+1}' b_{k+1} \left[ 1 - 3 \left( \frac{l-a}{l} \right)^2 \right]_{k+1} + 6 P_h^k \frac{l_k'}{l_k^2} \mathfrak{B}_k^{k-1} + 6 P_h^{k+1} \frac{l_{k+1}'}{l_{k+1}^2} \mathfrak{B}_{k+1}^{k+1} \dots \dots \dots \text{15)}$$

$\mathfrak{S}_k^{k-1}$  und  $\mathfrak{S}_k^{k+1}$  sind die statischen Momente der zwischen Stabachse und Stabsehne gelegenen Fläche von  $a$  bis  $l$  des Stabes  $l_k$  bzw.  $l_{k+1}$  bezogen auf  $k-1$  bzw.  $k+1$ .

**§ 5. Die Berechnung der Längenänderungen  $\Delta l$  in den Winkelgleichungen.**

Wir fassen den einem Tragwerke entnommenen Stab  $r-l$  als Balken auf, der in  $r$  ein festes, in  $l$  ein in Sehnenrichtung bewegliches Lager besitzt, mit den Anschlußmomenten  $M^r$  und  $M^l$ , der Sehnenkraft  $H$  und der Feldbelastung  $P$  belastet ist, und berechnen die Verschiebung  $\Delta l$  des Punktes  $l$  in der Richtung der Sehne infolge dieser Belastung. Abb. 46.

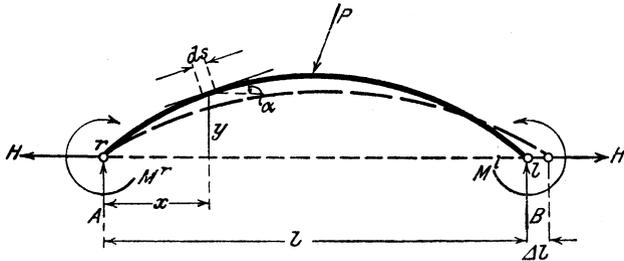


Abb. 46.

Betrachtet man die stetig gekrümmte Stabachse als Stabeck mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten, die sich bei der Belastung um die Drehwinkel  $\vartheta$  drehen, so kann die Gleichung der elastischen Linie bei Vernachlässigung der Neigung der Stabelemente gegen die Stabsehne auch in der Form geschrieben werden:

$$EJ \frac{d\vartheta_x}{dx} = -M_x.$$

$\vartheta_x$  ist der Drehwinkel des Elementes  $ds$  und  $M_x$  das Biegemoment an der Stelle  $x$ . Aus dieser Verknüpfung zwischen  $\vartheta_x$  und  $M_x$  folgt nach dem in § 4 abgeleiteten Satze (Gleichung 4) die Beziehung

$$EJ \vartheta_x = -\mathfrak{R}_x \dots \dots \dots \text{r6)}$$

$\mathfrak{R}_x$  ist die Querkraft an der Stelle  $x$ , wenn der Balken  $r-l$  mit der durch  $M_x$  beschriebenen Momentenfläche belastet ist.

Um nun einen Zusammenhang zwischen dem Winkel  $\vartheta_x$  und den Längenänderungen zu finden, wenden wir die erste Winkelgleichung auf unser Stabviereck an. Mit Rücksicht auf die unendlich kleinen

Elemente von der Länge  $ds$  geben wir dieser Gleichung die Gestalt

$$\int_0^l \Delta ds \cos \alpha + \int_0^l \vartheta_x ds \sin \alpha - \Delta l = 0.$$

Wir setzen nun für den Bogen

$$\Delta ds \cos \alpha = \frac{N_x ds}{EF} \cos \alpha + \alpha_t t ds \cos \alpha,$$

wobei  $F$  der Stabquerschnitt,  $\alpha_t$  die Ausdehnungsziffer für  $1^\circ$  Temperaturänderung,  $t$  die Temperaturschwankung ist.  $N_x$  bedeutet die Normalkraft im Elemente  $ds$  an der Stelle  $x$ . Im Einklange mit der beim Ansatz der Differentialgleichung getroffenen Vereinfachung setzen wir  $N_x$  gleich der Sehnkraft  $H$  und erhalten somit, wenn wir noch beachten, daß  $ds \cos \alpha = dx$  ist,

$$\Delta ds \cos \alpha = \frac{H}{EF} dx + \alpha_t t dx.$$

Die Einführung dieses Ausdruckes in die Winkelgleichung ergibt, da  $ds \sin \alpha = dy$  geschrieben werden kann,

$$\frac{H}{EF} \int_0^l dx + \alpha_t t \int_0^l dx + \int_0^l \vartheta_x dy - \Delta l = 0$$

und daraus

$$\Delta l = \frac{Hl}{EF} + \alpha_t tl + \int_0^l \vartheta_x dy = 0.$$

Benutzt man für  $\vartheta_x$  den Wert aus Gleichung 16), nämlich:

$$\vartheta_x = -\frac{\mathfrak{R}_x}{EJ},$$

so entsteht

$$\Delta l = \frac{Hl}{EF} + \alpha_t tl - \frac{1}{EJ} \int_0^l \mathfrak{R}_x dy.$$

Diese Gleichung läßt deutlich den im § 2 unter b) erwähnten dreifachen Ursprung der Sehnlangenänderung  $\Delta l$  erkennen. Wir heben den von der Biegung herrührenden Teil, den wir mit  $\Delta l_b$  bezeichnen wollen, heraus; setzen also

$$\Delta l_b = -\frac{1}{EJ} \int_0^l \mathfrak{R}_x dy.$$

Durch partielle Integration gelangt man zu der Beziehung

$$\int \mathfrak{R}_x dy = \mathfrak{R}_x y - \int y \frac{d\mathfrak{R}_x}{dx} dx = \mathfrak{R}_x y - \int M_x y dx;$$

somit nimmt  $\Delta l_b$ , da für  $x=0$  und  $x=l$ ,  $y=0$  ist, den Wert an

$$\Delta l_b = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_x y dx.$$

Nach Einbringen des vollständigen Ausdruckes für  $M_x$  (Gl. 3, Seite 27) wird

$$\Delta l_b = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{M^r}{l} \int_0^l y(l-x) dx + \frac{M^l}{l} \int_0^l yx dx + H \int_0^l y^2 dx + \int_0^l \mathfrak{M}_x y dx \right].$$

Nun bedeuten

$$\int_0^l y(l-x) dx = \mathfrak{E}^l \quad \text{und} \quad \int_0^l yx dx = \mathfrak{E}^r$$

die gleichen Flächenmomente, denen wir bereits in der Viermomenten-gleichung begegnet sind.  $\mathfrak{E}^l$  ist das Moment der zwischen Stabachse und Sehne gelegenen Fläche bezogen auf den rechten,  $\mathfrak{E}^r$  das statische Moment der gleichen Fläche bezogen auf den linken Stabendpunkt.

Ferner ist

$$\int_0^l y^2 dx = 2 \int_0^x \frac{y}{2} y dx = 2 \mathfrak{E}_x,$$

wo  $\mathfrak{E}_x$  das statische Moment der obenerwähnten Fläche bezogen auf die Stabsehne bedeutet.

Wir bezeichnen schließlich das Lastglied

$$\int_0^l \mathfrak{M}_x y dx = G$$

und erhalten den Gesamtbetrag der Längenänderung  $\Delta l$  in der Form

$$\Delta l = \frac{Hl}{EF} + \alpha_t t l + \frac{1}{EJ} \left[ M^r \frac{\mathfrak{E}^l}{l} + M^l \frac{\mathfrak{E}^r}{l} + 2H \mathfrak{E}_x + G \right]. \quad (17)$$

Das Vorzeichen der Kraftgrößen  $M$ ,  $H$  und  $\mathfrak{M}$ , sowie der Ordina-ten  $y$  ist nach den in § 4 getroffenen Vereinbarungen festzusetzen.  $t$  ist für eine Temperaturzunahme positiv einzuführen. In Abb. 45 haben wir sämtliche Kraftgrößen positiv angenommen. Dieser Anordnung entspricht im einzelnen eine Zunahme der Sehnenlänge, welcher Zunahme wir im vorangehenden das positive Vorzeichen von  $\Delta l$

zugeordnet haben. Einem positiven  $\Delta l$  entspricht somit eine Sehnenverlängerung, einem negativen eine Sehnenverkürzung.

Ist der Stab, was meistens der Fall sein wird, nach einer symmetrischen Achsenlinie geformt, deren Fläche wir mit  $\Phi$  bezeichnen, so gewinnt Gleichung 17) etwas einfachere Gestalt, und zwar:

$$\Delta l = \frac{Hl}{EF} + \alpha_t t l + \frac{1}{EJ} \left[ \frac{\Phi}{2} (M^r + M^l) + 2H\Phi\sigma + G \right], \quad (17')$$

worin  $\sigma$  der Abstand des Schwerpunktes der Fläche  $\Phi$  von der Stabsehne ist.

Für den Fall der Belastung mit einer Einzellast  $P=1$  läßt sich bei symmetrischen Stäben das Lastglied  $G$  in der Form

$$G = g \uparrow l^3$$

darstellen, wo  $g$  eine von der Stabform und dem Laststellungsverhältnis  $\frac{a}{l}$  abhängige Funktion,  $\uparrow$  den Pfeil in Stabmitte bedeutet. Da wir es nur mit schwach gekrümmten Stäben zu tun haben, wird es angängig sein, die Achsenlinie stets durch eine Parabel zu ersetzen, wodurch die Möglichkeit gewonnen wird, die Funktion  $g$  im voraus zu berechnen.

Für eine Last 1 im Abstände  $a$  vom linken Auflager ist

$$\text{für } x < a \quad \mathfrak{M}_x = \frac{l-a}{l} x,$$

$$\text{für } x > a \quad \mathfrak{M}_x = \frac{a}{l} (l-x).$$

Die Gleichung der Achsenlinie lautet bei der Pfeilhöhe  $\uparrow$

$$y = \frac{4\uparrow}{l^2} x(l-x),$$

somit ist

$$\begin{aligned} G &= \int_0^l \mathfrak{M}_x y dx = \frac{4\uparrow}{l^2} \left[ \frac{l-a}{l} \int_0^a x^2 (l-x) dx + \frac{a}{l} \int_a^l x (l-x)^2 dx \right] \\ &= \frac{1}{3} l^3 \left[ \left( \frac{a}{l} \right)^4 - 2 \left( \frac{a}{l} \right)^3 + \frac{a}{l} \right]. \end{aligned}$$

Damit ist die Funktion  $g$  gegeben durch

$$g = \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{a}{l} \right)^4 - 2 \left( \frac{a}{l} \right)^3 + \left( \frac{a}{l} \right) \right].$$

Im Anhang ist  $g$  für verschiedene Werte von  $\frac{a}{l}$  in einer Tafel dargestellt.

Für parabelförmige Achsenlinien gilt ferner:

$$\Phi = \frac{2}{3} l f \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{2}{3} f.$$

Mit diesen Werten findet man den Betrag von  $\Delta l$  für die Belastung mit der Einzellast  $P$

$$\Delta l = \frac{Hl}{EF} + \alpha_i t l + \frac{l f}{EJ} \left[ \frac{1}{3} (M^r + M^l) + \frac{8}{15} H f + P g l \right]. \quad (17'')$$

$g$  ist, der Stellung der Last  $P$  entsprechend, aus der Tafel zu entnehmen.

### § 6. Die Darstellung der Einflußlinien der statisch nicht bestimmaren Größen; Zusammenfassung.

Die Gesamtheit der Elastizitätsbedingungen besteht aus den Viermomenten- und Winkelgleichungen.

Die Viermomentengleichungen sind Funktionen der Knotenmomente  $M$ , der Sehnkräfte  $H$  und der Stabdrehwinkel  $\vartheta$ . Sie können schematisch in der Form

$$f(M H \vartheta) = N$$

geschrieben werden.

Die Winkelgleichungen sind Funktionen der Sehn­längenänderungen  $\Delta l$  und der Stabdrehwinkel  $\vartheta$ . Wir schreiben daher symbolisch

$$\varphi(\Delta l \vartheta) = 0.$$

Es sei nun das Element  $i - I, i$ , und nur dieses, im Abstände  $a$  vom Punkte  $i - I$  mit der Last  $P = 1$  belastet. Die Last sei senkrecht zur Stabsehne gerichtet. Nach Gleichung 9) nimmt das Lastglied  $N$  in den beiden zu den ausgezeichneten Punkten  $i - I$  und  $i$  gehörenden Viermomentengleichungen folgende Werte an:

$$N_{i-1} = - (l - a)_i l'_i \left( 1 - \frac{(l - a)^2}{l^2} \right)_i = F_1,$$

$$N_i = - a_i l'_i \left( 1 - \frac{a^2}{l^2} \right) = F_2.$$

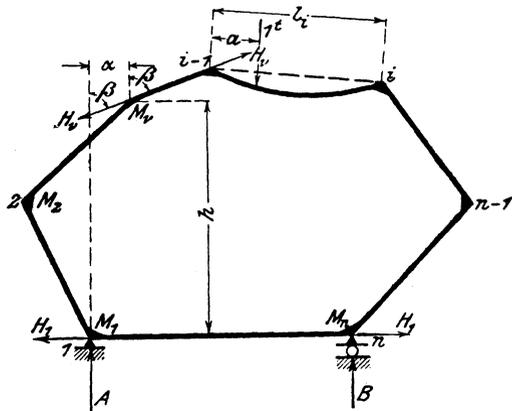


Abb. 47.

Diese beiden Ausdrücke, die Funktionen dritten Grades von  $a$  sind, bezeichnen wir mit  $F_1$  und  $F_2$ . Da  $a$  mit  $(l - a)$  vertauscht werden kann, so stellt die  $F_1$ -Linie das Spiegelbild der  $F_2$ -Linie vor.

Nachdem die andern Felder unbelastet sind, werden alle übrigen  $N$ -Werte Null. Das System der Viermomentengleichung hat daher die Form

$$\begin{aligned} f_1(MH\vartheta) &= 0 \\ f_2(MH\vartheta) &= 0 \\ &\dots \dots \dots \\ f_{i-1}(MH\vartheta) &= F_1 \\ f_i(MH\vartheta) &= F_2 \\ &\dots \dots \dots \\ f_n(MH\vartheta) &= 0. \end{aligned}$$

Eliminiert man mit Hilfe der Winkelgleichungen die Drehwinkel  $\vartheta$ , so erhält man ein neues System von Gleichungen, deren Zahl der Anzahl der Überzähligen entspricht und die die Form haben

$$\Phi(MH\Delta l) = c_1 F_1 + c_2 F_2.$$

Die Beiwerte  $c_1$  und  $c_2$  sind aus den Koeffizienten von  $M$ ,  $H$  und  $\Delta l$  entstanden und hängen somit nur mit den Abmessungen des Systems zusammen, sind also Festwerte.

Die Sehnkräfte  $H$ , die Momente  $M$  und die Dehnungen  $\Delta l$  stellen Funktionen der Belastung und somit Funktionen der veränderlichen Größe  $a$ , sowie der Überzähligen  $X$  vor. Wir wollen zunächst untersuchen, wie diese Abhängigkeiten von  $a$  beschaffen sind. Zu diesem Zwecke betrachten wir ein beliebiges einfaches Grundsystem, als dessen Überzählige wir die Momente  $M_1$  und  $M_n$  und die Stabkraft  $H_1$  ansehen. Abb. 47.

Für das Eckmoment  $M_v$  finden wir

$$M_v = M_1 + H_1 h + A a.$$

Da  $A$  linear abhängig ist von  $a$ , so ist auch  $M_v$  mit  $a$  durch lineare Beziehungen verbunden.

Für eine beliebige Sehnkraft  $H_v$  gilt die Beziehung

$$H_v = -A \cos \beta + H_1 \sin \beta.$$

Durch  $A$  wird auch  $H_v$  eine lineare Funktion von  $a$ .

Soweit  $\Delta l$  von den Endmomenten  $M$  und den Sehnkräften  $H$  abhängt, ist auch für  $\Delta l$  der lineare Zusammenhang mit  $a$  gewahrt. Nur die durch  $\mathfrak{M}_x$  von der Belastung abhängige Funktion  $G$  in  $\Delta l$  (bei gebogenen Stäben) kann verschiedene Formen annehmen, weshalb auch der damit zusammenhängende Teil von  $\Delta l$  in verschiedenster

Weise mit  $a$  verknüpft sein kann. Wir bezeichnen die Funktion von  $a$ , die diesen Zusammenhang ausdrückt, mit  $G(a)$ .

$\Delta l$  kann demnach geschrieben werden

$$\Delta l = u'' a + v'' + G(a).$$

Das, was für das einfache Grundsystem gilt, besteht auch für jedes andere System zu Recht, das aus einfachen Grundsystemen abgeleitet wird. Wir können daher die Momente  $M$ , die Kräfte  $H$  und die Dehnungen  $\Delta l$  eines beliebigen Systems in der folgenden allgemeinen Form darstellen:

$$M = \alpha X_1 + \beta X_2 + \dots + u a + v$$

$$H = \alpha' X_1 + \beta' X_2 + \dots + u' a' + v'$$

$$\Delta l = \alpha'' X_1 + \beta'' X_2 + \dots + u'' a + v'' + G_1(a) + G_2(a) + \dots,$$

wenn mit  $X_1, X_2 \dots$  die Überzähligen bezeichnet werden.

Die Koeffizienten  $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \dots u, v, u', v'$  usf. hängen von den Abmessungen des Systems ab. Setzt man die vorstehenden Ausdrücke in die Bestimmungsgleichungen ein, so wird man bei  $n$  Überzähligen ein System von  $n$  Gleichungen folgender Art erhalten:

$$m X_1 + n X_2 + p X_3 + \dots = c_1 F_1 + c_2 F_2 + c' G_1(a) + c'' G_2(a) + \dots + da + e.$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystems nach den Unbekannten  $X_1, X_2 \dots$  liefert eine beliebige Unbekannte  $X$  als Funktion der Größen  $F_1, F_2, G(a)$  und  $a$  und zwar:

$$X = \bar{c}_1 F_1 + \bar{c}_2 F_2 + \bar{c}' G_1(a) + \bar{c}'' G_2(a) + \dots \bar{d} a + \bar{e}.$$

In allen Unbekannten kehren die Funktionen  $F_1$  und  $F_2$  sowie  $G(a)$  immer wieder.

$F_1$  und  $F_2$  können wir unter Hinweis auf Formel 9') S. 35 die Form geben

$$F_1 = -f_1 l l' \quad \text{und} \quad F_2 = -f_2 l l',$$

wobei  $f_1$  und  $f_2$  die oben erwähnten Stammfunktionen sind.

Die Funktionen  $G(a)$ , die nur dann auftreten, wenn im Tragwerk gekrümmte Stäbe vorhanden sind, hängen von der Stabachsenform ab und können, wie wir gesehen haben, in die Gestalt

$$G = g \int l^2$$

gebracht werden.  $\int$  ist der Krümmungspfeil des Stabes.

$\bar{d} a + \bar{e}$  ist eine gerade Linie, die die Endordinaten des Einflußlinienzweiges festlegt, da die Funktionen  $f_1, f_2$  und  $g$  für  $\frac{a}{l} = 0$  und  $\frac{a}{l} = 1$  die Ordinaten Null aufweisen.

Da die Stabachsen bei geringer Krümmung als Parabeln angesehen werden können, so unterscheiden sich die Funktionen  $G_1, G_2 \dots$  nur durch einen konstanten Faktor voneinander. Ihre Summe kann daher geschrieben werden:

$$\bar{c}'G_1(a) + \bar{c}''G_2(a) + \dots = g(\bar{c}'f_1l_1^2 + \bar{c}''f_2l_2^2 + \dots) = Cg.$$

Somit entsteht unter Benutzung der Gleichungen für  $F_1$  und  $F_2$

$$X = Af_1 + Bf_2 + Cg + \bar{d}a + \bar{e}.$$

$A, B$  und  $C$  sind Festwerte, die nur mit den Abmessungen des Systems zusammenhängen.

Man erkennt somit, daß das vorgeführte Verfahren auch für die Darstellung der Einflußlinien der Überzähligen insofern Vorteile bietet, als es bei den hier betrachteten Systemen nicht mehr notwendig ist, Biegelinien zu berechnen und zu zeichnen. Aus zwei Grundlinien  $f_1$  und  $f_2$  und aus der  $g$ -Linie lassen sich sämtliche Einflußlinien nach Auflösen der Bestimmungsgleichungen zusammensetzen. Man hat im allgemeinsten Falle, unabhängig vom Grade der statischen Unbestimmtheit, nur drei bekannte Linien zu addieren und von einer Geraden abzutragen. Besondere Vorteile bieten sich naturgemäß bei Tragwerken, die nur aus geraden Stäben bestehen. Dort stellt  $X$  nur eine lineare Verknüpfung der beiden Stammfunktionen  $f_1$  und  $f_2$  vor.

**Zusammenfassung.** Am Schlusse der allgemeinen Ausführungen über die Berechnung der statisch unbestimmbaren Größen in Systemen mit geraden oder schwach gekrümmten Stäben angelangt, möge eine kurze Zusammenfassung des Rechnungsganges gegeben werden.

1. Nachdem das Tragwerk durch passende Zusatzstäbe zu einem einfachen oder mehrfachen geschlossenen Rahmen ergänzt ist, werden für jedes Rahmenfeld so viele Viermomentengleichungen angesetzt, als ausgezeichnete Punkte vorhanden sind, wobei man jeden einfachen Rahmen im Sinne der Uhrzeigerbewegung, von einem beliebigen Punkte beginnend, durchläuft. Die Anschlußmomente jener Stäbe, die zweien benachbarten Rahmen gemeinsam sind, werden in dem einen Felde positiv, im andern Felde negativ in Rechnung gestellt. Alle übrigen Anschlußmomente und die Sehnenkräfte  $H$  sind positiv einzuführen. Es ist, wenn verschiedene Belastungsmöglichkeiten in Betracht kommen, zweckmäßig, die Viermomentengleichungen ohne Rücksicht auf die Art der Belastung anzusetzen, d. h. also, die rechte Seite der Gleichungen mit  $N$  zu bezeichnen und mit diesem allgemeinen Werte einstweilen zu rechnen.

2. Für jedes Rahmenfeld werden zwei Winkelgleichungen angeschrieben. Die  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  sind zunächst positiv anzunehmen. Das

Vorzeichen der Winkelfunktionen wird durch die Neigungswinkel  $\alpha$  der Stabsehnen gegen die Richtung der Projektionslinie  $x-x$  bestimmt, welche Winkel von der von links nach rechts gerichteten Parallelen zu  $x-x$ , die im niedriger bezifferten Stabendpunkte angesetzt wird, entgegengesetzt dem Sinne der Uhrzeigerbewegung zu zählen sind. Siehe die Pfeile in der Abb. 24 auf S. 16. Als Bezugslinie  $x-x$  für die Winkel  $\alpha$  kann jede beliebige Gerade der Trägerebene, die zum Tragwerk festgelegt ist, gewählt werden.

3. Die Stabdrehwinkel  $\vartheta$  werden aus den Gleichungen eliminiert, worauf so viel Bestimmungsgleichungen gewonnen werden, als statisch nicht bestimmbare Größen vorhanden sind. Diese Bestimmungsgleichungen gelten für jede Art der Belastung, da sie nur die allgemeine Bezeichnung  $N$  enthalten.

4. Wahl der Überzähligen  $X$  und Einführung der Ausdrücke für die Anschlußmomente  $M$ , Sehnenkräfte  $H$  und Dehnungen  $\Delta l$ , sowie Einführung der der Belastung entsprechenden Werte der  $N$ . Die  $M$ ,  $H$  und  $\Delta l$  sind hierbei als Funktionen der Belastung, Temperaturänderung und der Überzähligen  $X$  darzustellen. Bei der Aufstellung dieser statischen Beziehungen sind, in Hinsicht auf das Vorzeichen der Momente, die Stäbe von jenem Rahmen aus zu betrachten, in dessen Viermomentengleichungen sie positiv eingeführt wurden. Bei Ermittlung der Längenänderungen  $\Delta l$ , soweit sie von bekannten oder in ihrer Richtung durch Annahmen festgelegten äußeren Kräften, wozu auch die Auflagerreaktionen gehören, herrühren, sind die Sehnenkräfte mit positivem Vorzeichen zu versehen, wenn sie den Stab zu verlängern, mit negativem Vorzeichen, wenn sie den Stab zu verkürzen trachten.

5. Auflösung der so erhaltenen, endgültigen Bestimmungsgleichungen nach den Unbekannten  $X$ .

6. Sind Einflußlinien aufzutragen, dann setze man nach der Aufstellung der Bestimmungsgleichungen für die rechten Gleichungsseiten die abgekürzten Bezeichnungen  $F_1$  und  $F_2$  und stelle nach Auflösung dieser Gleichungen die Einflußlinien mit Hilfe der Tabellen der Funktionen  $f_1$ ,  $f_2$  und  $g$  im Anhang zusammen. Wo dies zweckmäßig erscheint, kann von der eben angegebenen Reihenfolge abgewichen werden, wie dies auch aus einzelnen der nachfolgenden Beispiele er sehen werden kann.

## § 7. Einführung der Hilfsgrößen $\Gamma$ .

Die Hauptschwierigkeit in der Berechnung hochwertig statisch unbestimmter Systeme liegt in dem Umstande, daß die Überzähligen aus einem Gleichungssysteme mit einer großen Zahl von Unbekannten

berechnet werden müssen. Das vorgeführte Verfahren gibt nun ein Mittel an die Hand, durch Einführung neuer Hilfsgrößen unter Umständen die Zahl der Bestimmungsgleichungen und die Anzahl der Glieder in den Gleichungen zu verringern, wodurch die Berechnung derartiger Tragwerke in hohem Maße vereinfacht wird.

Wir betrachten ein  $i$ -fach statisch unbestimmtes Traggebilde aus geraden Stäben mit  $n$  Knotenpunkten und  $r$  Stäben. Jeder Knoten liefert  $\nu - 1$  Viermomentengleichungen, wenn  $\nu$  die veränderliche Anzahl der in einem Knoten steif angeschlossenen Elemente bedeutet. Ferner stehen uns  $2p$  Winkelgleichungen zur Verfügung, falls das System in  $p$  Einzelrahmen zerlegt werden kann. Durch die Gesamtheit dieser Gleichungen sind die Unbekannten der Rechnung, d. s. die Überzähligen und Drehwinkel, bestimmt.

Fassen wir zunächst die Winkelgleichungen für sich ins Auge. Ihre Anzahl kann kleiner, gleich oder größer sein als die Zahl der unbekanntenen Drehwinkel. Beträgt, wie oben festgesetzt, die Stabzahl  $r$ , so ist die Zahl der unbekanntenen Drehwinkel  $r - 1$ , sonach

$$2p \begin{matrix} \leq \\ \equiv \\ \geq \end{matrix} r - 1.$$

Wenn  $2p = r - 1$  ist, so sind die Drehwinkel sämtlicher Stäbe bereits durch den geometrischen Zusammenhang der Stäbe festgelegt. Denkt man sich statt der steifen Knoten Gelenke angeordnet, so stellt die so entstehende „Ersatzfigur“ ein statisch bestimmtes unverschiebliches Fachwerk vor. Der Beweglichkeitsgrad oder der Freiheitsgrad der Ersatzfigur ist Null.

In dem Falle, wo  $2p < r - 1$  ist, reichen die Winkelgleichungen nicht aus, um sämtliche Drehwinkel zu berechnen.  $2p$ -Winkel können als Funktion der übrigen dargestellt werden, die schließlich mit Hilfe der durch die Momentengleichungen gegebenen, elastischen Zusammenhänge gleichzeitig mit den Überzähligen bestimmt werden. Die Ersatzfigur stellt keine unverschiebliche Stabverbindung mehr vor. Ihr Freiheitsgrad  $e$  beträgt

$$e = r - 1 - 2p.$$

$e$  Stäbe wären somit hinzuzufügen, um aus der Ersatzfigur ein unverschiebliches Fachwerk herzustellen.

Ist  $2p > r - 1$ , dann stellt die Ersatzfigur ein statisch unbestimmtes Fachwerk vor. Die Winkelgleichungen gestatten die Berechnung der Überzähligen der Ersatzfigur. Der Freiheitsgrad ist, da keine Beweglichkeit vorhanden ist, Null.

Wir haben somit zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Der Freiheitsgrad der Ersatzfigur ist Null.
2. Der Freiheitsgrad der Ersatzfigur ist von Null verschieden.

Wir besprechen zunächst Systeme der ersten Art. Die Anschlußmomente der Viermomentengleichungen wollen wir in etwas anderer Weise, als es bisher der Fall gewesen ist, bezeichnen. Sind  $\alpha, \beta$  die Knotenpunktsziffern des Stabes  $l_{\alpha\beta}$ , so werden seine Anschlußmomente  $M_{\alpha\beta}$  und  $M_{\beta\alpha}$  genannt. Der untere Zeiger weist auf den Anschlußknoten hin, beide Zeiger bezeichnen den Stab, für welchen das Moment gilt. Ähnlich lauten die Anschlußmomente der übrigen in  $\alpha$  zusammenstoßenden Stäbe, Abb. 48,  $M_{\alpha\gamma}$  und  $M_{\gamma\alpha}$ ,  $M_{\alpha\delta}$  und  $M_{\delta\alpha}$  usw.

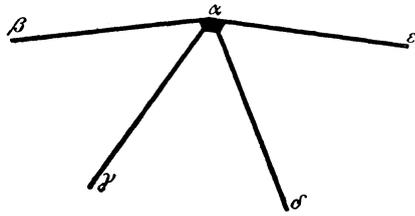


Abb. 48.

Für jeden Knotenpunkt werden die Viermomentengleichungen aufgestellt, indem jedesmal ein Stab der Reihe nach mit den andern in dem betreffenden Knoten fest angeschlossenen Stäben in einer Gleichung zusammengefaßt wird. Die Momentengleichungen für den Knoten  $\alpha$  lauten, wenn die zwei benachbarten Gliedern gemeinsame reduzierte Länge herausgehoben und für  $6EJ_c = \varrho$  geschrieben wird:

$$\begin{aligned} (M_{\beta\alpha} + 2M_{\alpha\beta})l'_{\alpha\beta} + (2M_{\alpha\gamma} + M_{\gamma\alpha})l'_{\alpha\gamma} - \varrho(\vartheta_{\alpha\beta} - \vartheta_{\alpha\gamma}) &= N_{\alpha}^1 \\ (M_{\beta\alpha} + 2M_{\alpha\beta})l'_{\alpha\beta} + (2M_{\alpha\delta} + M_{\delta\alpha})l'_{\alpha\delta} - \varrho(\vartheta_{\alpha\beta} - \vartheta_{\alpha\delta}) &= N_{\alpha}^2 \\ (M_{\beta\alpha} + 2M_{\alpha\beta})l'_{\alpha\beta} + (2M_{\alpha\epsilon} + M_{\epsilon\alpha})l'_{\alpha\epsilon} - \varrho(\vartheta_{\alpha\beta} - \vartheta_{\alpha\epsilon}) &= N_{\alpha}^3 \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Wir setzen nun ganz allgemein:

$$(M_{\lambda\mu} + 2M_{\mu\lambda})l'_{\lambda\mu} = \Gamma_{\mu}^{\lambda} \quad \text{und} \quad (M_{\mu}^{\lambda} + 2M_{\lambda\mu})l'_{\lambda\mu} = \Gamma_{\lambda}^{\mu} \quad \text{. 18)}$$

Der untere Zeiger der Hilfsgröße  $\Gamma$  stimmt jeweilig mit dem unteren Zeiger jener Momentengröße überein, die mit dem Faktor 2 versehen ist.

Aus den Definitionsgleichungen 18) folgen die Formeln

$$\left. \begin{aligned} M_{\mu}^{\lambda} &= \frac{1}{3l'_{\lambda\mu}} (2\Gamma_{\mu}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda}^{\mu}) \\ M_{\lambda}^{\mu} &= \frac{1}{3l'_{\lambda\mu}} (2\Gamma_{\lambda}^{\mu} - \Gamma_{\mu}^{\lambda}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{19)}$$

Die Viermomentengleichungen nehmen daher die Form an:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\gamma} - \varrho(\vartheta_{\alpha\beta} - \vartheta_{\alpha\gamma}) &= N_{\alpha}^1 \\ \Gamma_{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\delta} - \varrho(\vartheta_{\alpha\beta} - \vartheta_{\alpha\delta}) &= N_{\alpha}^2 \\ \Gamma_{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\epsilon} - \varrho(\vartheta_{\alpha\beta} - \vartheta_{\alpha\epsilon}) &= N_{\alpha}^3 \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Die Drehwinkel  $\vartheta$  sind, da der Freiheitsgrad der Ersatzfigur unserer Annahme gemäß Null ist, durch die Winkelgleichungen bestimmt und ebenso wie die Belastungsglieder  $N$  als gegebene Größen zu betrachten. Wir machen hierbei stillschweigend die weiter unten noch näher zu erörternde Voraussetzung, daß die in den Winkelgleichungen auftretenden Stablängenänderungen entweder Null oder ihrer Größe nach bekannt sind. Faßt man nun die Stabdrehwinkel-differenzen mit den rechten Gleichungsseiten in einen Zahlenwert  $B$  zusammen, so kann man schreiben:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha}^{\beta} + \Gamma_{\alpha}^{\gamma} &= B_{\alpha}^1 \\ \Gamma_{\alpha}^{\beta} + \Gamma_{\alpha}^{\delta} &= B_{\alpha}^2 \\ \Gamma_{\alpha}^{\beta} + \Gamma_{\alpha}^{\varepsilon} &= B_{\alpha}^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

In allen diesen auf den Knoten  $\alpha$  bezüglichen Gleichungen tritt die Größe  $\Gamma_{\alpha}^{\beta}$  auf. Wir bezeichnen sie als Hauptwert der Hilfsgrößen  $\Gamma$  für den Knoten  $\alpha$ . Es lassen sich daher alle vom Knoten  $\alpha$  abhängigen  $\Gamma$ -Werte (d. s. jene, welche mit dem unteren Zeiger  $\alpha$  versehen sind) durch den Hauptwert  $\Gamma_{\alpha}^{\beta}$  ausdrücken. So nach gilt

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{\alpha}^{\gamma} &= B_{\alpha}^1 - \Gamma_{\alpha}^{\beta} \\ \Gamma_{\alpha}^{\delta} &= B_{\alpha}^2 - \Gamma_{\alpha}^{\beta} \\ \Gamma_{\alpha}^{\varepsilon} &= B_{\alpha}^3 - \Gamma_{\alpha}^{\beta} \\ &\dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 20)$$

In gleicher Weise lassen sich die  $\Gamma$ -Werte der anderen Knotenpunkte durch die betreffenden Hauptwerte ausdrücken. Die Gesamtzahl der unbekanntenen Hauptwerte der  $\Gamma$ -Größen beträgt daher  $n$ , wenn das Tragwerk  $n$  Knoten, in denen Stäbe steif angeschlossen sind, besitzt. Mit der Aufstellung der Beziehungen 20) zwischen den  $\Gamma$ -Werten wurden sämtliche Verknüpfungen, die die Elastizitätsbedingungen liefern, ausgenützt. Sie ergeben höchst einfache Zusammenhänge zwischen den Unbekannten  $\Gamma$ , die verwendet werden können, um auf Grund der statischen Beziehungen, die zwischen den Hilfsgrößen  $\Gamma$  bestehen, die Bestimmungsgleichungen abzuleiten.

Wir stellen zu diesem Zwecke für jeden Knoten die Bedingungs-gleichung

$$\Sigma M = 0$$

auf. Die Zahl derartiger Gleichungen ist gleich der Knotenzahl  $n$ . Führt man mittels der Formeln 19) die Hilfsgrößen  $\Gamma$  ein und benutzt man ferner die Formeln 20), um sämtliche  $\Gamma$ -Größen bis auf die  $n$  Hauptwerte zu eliminieren, so erhält man schließlich ein System von  $n$  Be-

stimmungsgleichungen mit  $n$  Unbekannten, womit die Berechnung eines  $i$ -fach statisch unbestimmten Systems auf die Auflösung eines Systems linearer Gleichungen mit  $n$  Unbekannten zurückgeführt erscheint. Das Verfahren ist natürlich nur dann zweckmäßig, wenn  $n < i$  ist, was häufig genug der Fall ist.

Um ein Urteil über die Anzahl der Glieder einer Bestimmungsgleichung zu erhalten, stellen wir die Gleichgewichtsbedingungen für den Knoten  $\alpha$  auf. Diese lautet:

$$M_{\alpha^{\beta}} + M_{\alpha^{\gamma}} + M_{\alpha^{\delta}} + \dots + m = 0,$$

falls  $m$  ein etwa vorhandenes in  $\alpha$  angreifendes Lastmoment bedeutet.

Drückt man nun  $M_{\alpha^{\beta}}, M_{\alpha^{\gamma}}, M_{\alpha^{\delta}}, \dots$  durch die Hilfsgrößen  $\Gamma$  mittels der Formeln 19) aus, so treten die Größen  $\Gamma_{\alpha^{\beta}}^{\beta} \Gamma_{\beta^{\alpha}}^{\alpha}, \Gamma_{\alpha^{\gamma}}^{\gamma} \Gamma_{\gamma^{\alpha}}^{\alpha}, \Gamma_{\alpha^{\delta}}^{\delta} \Gamma_{\delta^{\alpha}}^{\alpha}, \dots$  in die Gleichgewichtsbedingung ein. Da  $\nu$  Knotenpunkte durch  $\nu$  Stäbe mit dem Punkte  $\alpha$  verbunden sind, so lassen sich die Hilfsgrößen unserer Gleichung durch die  $\nu$  Hauptwerte der verbundenen Knoten und durch den Hauptwert des Knotens  $\alpha$  ersetzen. Insgesamt zählt demnach eine Bestimmungsgleichung  $\nu + 1$  Unbekannte. Die Zahl der Glieder einer Gleichung ist sonach beschränkt, was der Vereinfachung der Rechnung bei der Auflösung der Gleichungen zugute kommt.

Führt einer der Stäbe (Stützenstab) nach einem Lagerpunkt (bewegliches Lager, Gelenk, Einspannung), so zählt dieser Lagerpunkt nicht als Knoten, da keine Gleichgewichtsbedingung für ihn aufgestellt werden kann, dementsprechend fällt auch, wie man sich an einem Beispiel leicht überzeugen kann, ein Hauptwert der  $\Gamma$ -Größen aus. In die Zahl  $n$  der Knoten sind daher nur jene Punkte aufzunehmen, von denen mindestens zwei Stäbe ausgehen, wobei höchstens der eine ein Stützenstab sein darf. Zusatzstäbe, die den Rahmen schließen, sind als Stützenstäbe anzusehen. Gehen daher von einem Knoten Stützenstäbe aus, so verringert sich die Zahl der Glieder der zu diesem Knoten gehörenden Bestimmungsgleichung um die Anzahl der Stützenstäbe. Sind die Auflagerpunkte durch einen Zusatzstabzug untereinander verbunden, so sind diese Stäbe bei der Bestimmung des Freiheitsgrades  $e$  als ein Stab zu zählen, da allen der gleiche Drehwinkel (Null) zukommt.

Liegt ein Tragwerk der zweiten Art vor, dessen Ersatzfigur Beweglichkeit besitzt — der Freiheitsgrad sei  $e$  —, so kann im wesentlichen der gleiche Berechnungsgang eingeschlagen werden.

Unter derselben Voraussetzung, daß die Stablängenänderungen Null sind oder, wenn von Null verschieden, zunächst als bekannt anzusehen sind, können mit Hilfe der Winkelgleichungen, deren Zahl jetzt um  $e$  kleiner ist als die Zahl der unbekanntenen Stabdrehwinkel,  $e$  von ihnen als Hauptwerte der Drehwinkel ausgewählt

und die übrigen durch diese Hauptwerte ausgedrückt werden. Die Viermomentengleichungen, aus denen wir die Hilfsgrößen  $I$  durch ihre Hauptwerte bestimmen, enthalten demnach noch  $e$  Hauptwerte der Drehwinkel. Somit treten diese  $n + e$  Hauptwerte ( $I$ -Größen und Drehwinkel) in die  $n$  Gleichgewichtsbedingungen ein. Faßt man die Drehwinkelhauptwerte zunächst als bekannte Größen auf, so lassen sich die  $n$  Gleichungen wie oben auflösen und man erhält die  $n$  Hauptwerte der  $I$ -Größen als lineare Funktionen der  $e$  Hauptwerte der Drehwinkel. Um endlich diese zu bestimmen, stellt man noch  $e$  passend gewählte Gleichgewichtsbeziehungen auf, in welchen man die Momente und Längskräfte durch die Hauptwerte der Hilfsgrößen  $I$  und der Drehwinkel  $\vartheta$  ersetzt. Die Berechnung läuft also auf die Auflösung zweier Systeme linearer Gleichungen mit  $n$  und  $e$  Unbekannten, oder auf die Lösung eines Systems mit  $n + e$  Unbekannten hinaus. Wie leicht einzusehen, ist das Verfahren nur dann zweckmäßig, wenn  $e$  eine kleine Zahl ist.

Wir haben in den voranstehenden Darlegungen die Voraussetzung gemacht, daß die Stablängenänderungen als bekannt anzusehen, oder mit andern Worten, daß sie unabhängig von den Unbekannten unserer Rechnung sind. Dies ist im allgemeinen nur dann der Fall, wenn die Längenänderungen von Wärmeschwankungen herrühren. Sollen auch die von den Stablängskräften hervorgerufenen Längenänderungen Berücksichtigung erfahren, weil ihre Vernachlässigung nicht statthaft ist, so ist deren Größe schätzungsweise einzuführen. Man geht dann so vor, daß man die  $\Delta l$  zunächst Null setzt, mit den so bestimmten Werten der Unbekannten die Stablängenänderungen ermittelt und für eine zweite Berechnung benützt. Mit diesem Vorgange ist gewöhnlich keine Mehrarbeit verbunden, da fast immer eine wiederholte Berechnung zwecks schrittweiser Anpassung der Querschnitte notwendig ist. Theoretisch läge wohl keine Schwierigkeit vor, die Berechnung auch in Hinsicht auf die Wirkung der Längskräfte genau durchzuführen, doch gingen damit meist jene Vorteile verloren, die wir durch Einführung der Hilfsgrößen  $I$  angestrebt haben.

Das in der Abb. 49a zur Darstellung gebrachte zweifeldrige Tragwerk ist 6fach statisch unbestimmt. Die Ersatzfigur zeigt einfache Bewegungsmöglichkeit, da durch Anbringung eines Stabes, z. B. der strichliert gezeichneten Strebe in Abb. 49c, ein unverschiebliches Fachwerk entsteht. Auch die Auszählung der Abb. 49b, in der die Zusatzstäbe eingezeichnet sind, ergibt  $e = r - 1 - 2p = 1$ . Es ist nämlich  $r = 6$ , da 5 wirkliche Stäbe und die als ein Stab zu zählenden Zusatzstäbe vorhanden sind; weiter ist  $2p = 4$ , also gilt:  $e = 5 - 4 = 1$ . Die Zahl  $n$  der Knoten mit mindestens zwei Stäben beträgt 3 (die unteren Knoten in Abb. 49b sind nicht zu zählen, da dort nur Stützen-

stäbe zusammentreffen), der Freiheitsgrad  $e$  ist 1, sonach wird die Berechnung dieses 6fach statisch unbestimmten Systems durch die Einführung der Hilfsgrößen  $\Gamma$  auf  $n + e = 4$  Gleichungen zurückgeführt.

Würden die Stützen statt der Einspannung gelenkige Auflagerung aufweisen, so sinkt der Grad der statischen Unbestimmtheit auf 3 herab. Bei Einführung der Hilfsgrößen  $\Gamma$  würde die Zahl der Bestimmungsgleichungen wie oben vier betragen, da sich weder  $n$  noch  $e$  geändert haben. In diesem Falle wäre die Anwendung des in diesem Abschnitte erörterten Verfahrens unzuweckmäßig, da die Lösung der Aufgabe nach der früher dargestellten allgemeinen Methode auf bloß drei Bestimmungsgleichungen führt.

Wie man aus diesem Beispiele ersieht, ist es sehr einfach, von Fall zu Fall zu entscheiden, ob mit der Einführung der Hilfsgrößen  $\Gamma$  Vorteile verbunden sind oder nicht. Beispiel 12 in § 8, sowie § 11 zeigen Anwendungen des Verfahrens mit den Hilfsgrößen  $\Gamma$ .

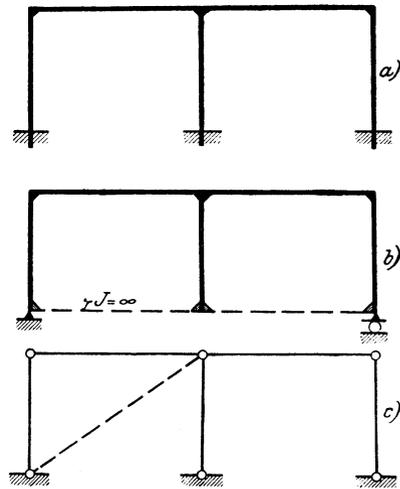


Abb. 49.

### III. Beispiele für die Anwendung der Methode des Viermomentensatzes.

#### § 8. Tragwerke, die aus einem einfachen Grundsysteme abgeleitet werden.

1. Beispiel. Der in Abb. 50 zur Darstellung gebrachte Zweigelenkrahmen ist einfach statisch unbestimmt. Über die Art der Belastung werden später Annahmen getroffen werden, nachdem der erste Teil der Berechnung ohne Rücksicht auf die Belastungsweise durchführbar ist und dabei einfachere Aufschreibungen gestattet.

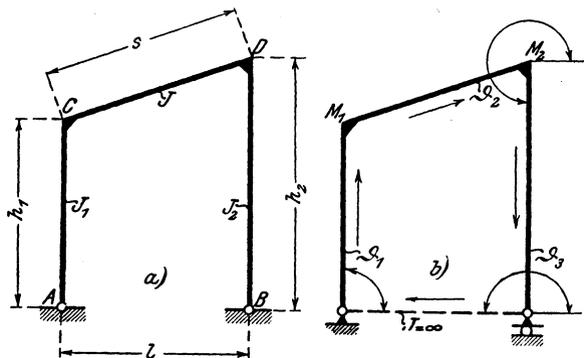


Abb. 50.

Die Eckmomente bei  $C$  und  $D$  werden mit  $M_1$  und  $M_2$  bezeichnet. Wir beginnen mit der Aufstellung der Dreimomentengleichungen (da es sich um einen einfachen Rahmen handelt, geht die allgemeine Viermomentengleichung in die Dreimomentengleichung über), und zwar für die Stabpaare  $ACD$  und  $CDB$ , wobei zu beachten ist, daß die Momente in  $A$  und  $B$  Null sind. Wir beginnen die erste Gleichung bei Punkt  $A$  und gehen über  $C$  nach  $D$ . Die zweite Gleichung beginnen wir bei Punkt  $C$  und gehen über  $D$  nach  $B$ . Bei allen An-

schreibungen halten wir die vorgeschriebene Pfeilrichtung, siehe Abb. 50 b, genauest ein.

Mit den Bezeichnungen der Abb. 50 nehmen die Dreimomentengleichungen 7'') die Form an

$$\begin{aligned} 2M_1(h_1' + s') + M_2s' - 6EJ(\vartheta_1 - \vartheta_2) &= N_1, \\ M_1s' + 2M_2(s' + h_2') - 6EJ(\vartheta_2 - \vartheta_3) &= N_2, \end{aligned}$$

hierbei wurde als  $J_c$  das Trägheitsmoment  $J$  des Querriegels gewählt. Die gestrichenen Größen sind die reduzierten Längen.

Vernachlässigt man die Wirkung der Längskräfte, setzt also alle  $\Delta l = 0$ , so lauten die Winkelgleichungen

$$\Sigma \vartheta \cdot l \sin \alpha = 0, \quad - \Sigma \vartheta \cdot l \cos \alpha = 0.$$

Führt man für den Riegel  $s \sin \alpha = h_2 - h_1$  und  $s \cos \alpha = l$  ein, beachtet man weiter die in der Abbildung durch Pfeile angedeutete Zählrichtung der Winkel  $\alpha$ , so ist

$$\begin{aligned} h_1 \vartheta_1 + (h_2 - h_1) \vartheta_2 - h_2 \vartheta_3 &= 0, \\ \vartheta_2 l &= 0. \end{aligned}$$

Das letzte Glied der ersten Winkelgleichung ist negativ, da für den Stab  $h_2$ ,  $\alpha > \pi$ , daher  $\sin \alpha < 0$  ist.

Aus den Winkelgleichungen folgt:

$$\vartheta_1 = \frac{h_2}{h_1} \vartheta_3 = k \vartheta_3, \quad \vartheta_2 = 0.$$

Nach Einführung in die Momentengleichungen erhält man

$$\begin{aligned} 2M_1(h_1' + s') + M_2s' - 6EJk\vartheta_3 &= N_1, \\ M_1s' + 2M_2(s' + h_2') + 6EJ\vartheta_3 &= N_2. \end{aligned}$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit  $k$  und addiert sodann beide Gleichungen, so gewinnt man die Bestimmungsgleichung für die Berechnung der einen Überzähligen:

$$M_1[2(h_1' + s') + ks'] + M_2[s' + 2(h_2' + s')k] = N_1 + kN_2 \quad . \quad a)$$

Damit ist die Aufgabe im Prinzip gelöst. Wir haben eine Gleichung gefunden, die, neben den übrigen statischen Beziehungen angewendet, die Berechnung des gegebenen Systems ermöglicht.

Wir benutzen nun die Gleichung a), um für drei verschiedene Belastungsfälle die Überzählige zu ermitteln.

1. *Wagerechte Last P im Abstände a vom Fußgelenk A.* Abb. 51. Wir wählen als Überzählige den Horizontalschub  $H$  und erhalten

$$M_1 = Pa - Hh_1 \quad \text{und} \quad M_2 = -Hh_2.$$

Ferner ist (Gl. 9) S. 35)

$$N_1 = -Pa h_1' \left( 1 - \frac{a^2}{h_1'^2} \right) \quad \text{und} \quad N_2 = 0,$$

somit geht Gleichung a) über in

$$\begin{aligned} (Pa - Hh_1) [2(h_1' + s') + ks'] - Hh_2 [s' + 2(h_2' + s')k] \\ = -Ph_1' a \left( 1 - \frac{a^2}{h_1'^2} \right), \end{aligned}$$

aus welcher Gleichung  $H$  in der Form

$$H = \frac{P \frac{a}{h_1} \left[ 2 + k + \frac{h_1'}{s'} \left( 3 - \frac{a^2}{h_1'^2} \right) \right]}{1 + k + k^2 + \frac{h_1'}{s'} + \frac{h_2'}{s'} k^2} \quad \dots \dots \quad \text{b)}$$

gewonnen wird, wo

$$h_1' = h_1 \frac{J}{J_1}, \quad h_2' = h_2 \frac{J}{J_2}, \quad s' = s \frac{J}{J} = s.$$

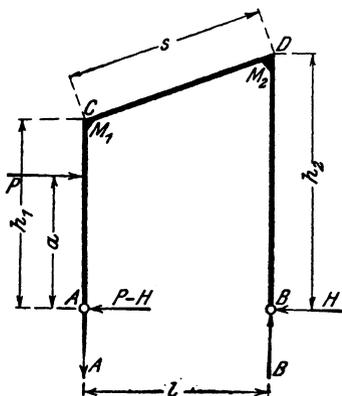


Fig. 51.

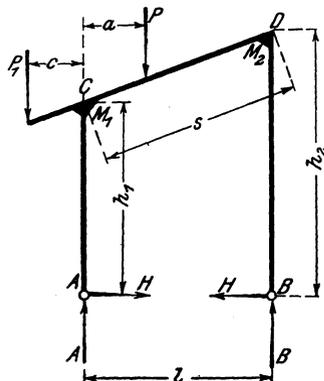


Abb. 52.

Da  $N_1 = -Ph_1 h_1' f_2$  ist, so hätte man auch schreiben können:

$$H = \frac{P \frac{h_1'}{s'} f_2 + \frac{a}{h_1} \left[ 2 \left( \frac{h_1'}{s'} + 1 \right) + k \right]}{1 + k + k^2 + \frac{h_1'}{s'} + \frac{h_2'}{s'} k^2} = \frac{P}{2} \left[ K_1 f_2 + K_2 \frac{a}{h_1} \right],$$

wobei  $K_1$  und  $K_2$  Festwerte sind, die nur von den Systemabmessungen abhängen, während  $f_2$  der Tabelle der Stammfunktionen im Anhang entnommen werden kann.

2. Lotrechte Last  $P$  im Abstände  $a$  vom Eckpunkte  $C$ . Abb. 52.

Es ist

$$M_1 = -Hh_1, \quad M_2 = -Hh_2.$$

$N_1$  und  $N_2$  sind durch Gleichung 11) bestimmt und zwar

$$N_1 = -Pls'f_1 = -Ps'(l-a) \left( 1 - \frac{(l-a)^2}{l^2} \right)$$

und 
$$N_2 = -Pls'f_2 = -Ps'a \left( 1 - \frac{a^2}{l^2} \right).$$

Gleichung a) nimmt daher folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} & -Hh_1[2(h_1' + s') + ks'] - Hh_2[s' + 2(h_2' + s')k] \\ & = -Ps' \left[ (l-a) \left( 1 - \frac{(l-a)^2}{l^2} \right) - ka \left( 1 - \frac{a^2}{l^2} \right) \right] \end{aligned}$$

und daraus

$$H = \frac{P}{2} \frac{\frac{l}{h_1} \left\{ \left( 1 - \frac{a}{l} \right) - \left( 1 - \frac{a}{l} \right)^3 + k \left[ \frac{a}{l} - \left( \frac{a}{l} \right)^3 \right] \right\}}{1 + k + k^2 + \frac{h_1'}{s'} + \frac{h_2'}{s'} k^2} \dots c)$$

Benutzt man die Stammfunktionen, so kann man einfacher schreiben:

$$H = \frac{P}{2} \frac{\frac{l}{h_1} (f_1 + kf_2)}{1 + k + k^2 + \frac{h_1'}{s'} + \frac{h_2'}{s'} k^2} = \frac{P}{2} [K_3 f_1 + K_4 f_2].$$

3. Es soll auch der Fall untersucht werden, daß die Riegelast außerhalb der Stützweite  $A - B$  angreife. Last  $P_1$  in Abb. 52.

Dieser Fall kann als Belastung des Ständers mit einem Moment  $\mu = -P_1 c$  aufgefaßt werden. Die Lastglieder  $N_1$  und  $N_2$  nehmen jetzt gemäß Gleichung 14) folgende Werte an:

$$N_1 = P_1 c h_1' \left( 1 - 3 \frac{h^2}{h^2} \right) = -2 P_1 c h_1',$$

$$N_2 = 0.$$

Ferner besteht

$$M_1 = -P_1 c - H h_1,$$

$$M_2 = -H h_2,$$

somit geht die Bestimmungsgleichung a) über in

$$-(P_1 c + H h_1)[2(h_1' + s') + ks'] - H h_2[s' + 2(h_2' + s')k] = -2 P_1 c h_1'.$$

Daraus ermittelt man  $H$  in der Form

$$H = -\frac{P_1 c}{2 h_1} \frac{k + 2}{1 + k + k^2 + \frac{h_1'}{s'} + \frac{h_2'}{s'} k^2} \dots d)$$

Zum Schlusse mögen die Verschiebungen der Eckpunkte  $C$  und  $D$  für den Belastungsfall I. ermittelt werden.

Aus den Winkelgleichungen wurde gefunden:

$$\vartheta_1 = k \vartheta_3, \quad \vartheta_2 = 0.$$

Aus der zweiten Momentengleichung folgt, da  $N_2 = 0$  ist,

$$\begin{aligned} \vartheta_3 &= -\frac{I}{6EJ} [M_1 s' + 2M_2 (s' + h_2')] \\ &= -\frac{I}{6EJ} [(Pa - Hh_1) s' - 2Hh_2 (s' + h_2')] \end{aligned}$$

und somit die wagrechte Verschiebung  $\Delta y_D$  des Punktes  $D$

$$\Delta y_D = h_2 \vartheta_3 = -\frac{s h_2}{6EJ} \left[ Pa - H \left( h_1 + 2h_2 + 2 \frac{h_2^2}{s} \frac{J}{J_2} \right) \right].$$

Die wagrechte Verschiebung des Punktes  $C$  ist dann

$$\Delta y_C = \vartheta_1 h_1 = \frac{h_2}{h_1} \vartheta_3 h_1 = h_2 \vartheta_3 = \Delta y_D,$$

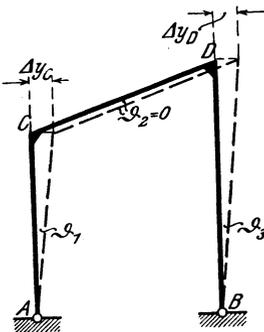


Abb. 53.

somit muß sich der Stab  $CD$  parallel zu sich verschieben, siehe Abb. 53, was auch unmittelbar aus  $\vartheta_2 = 0$  folgt.

Verfolgt man den oben angegebenen Rechnungsgang und vergleicht ihn mit der Berechnung nach dem üblichen Verfahren, so erkennt man deutlich die Vorteile der neuen Methode. Mit der schon nach wenigen Aufschreibungen bestimmten Gleichung a) ist die Aufgabe für jede beliebige Belastung gelöst; ebenso können alle die Formänderungen betreffenden Fragen mit Hilfe dieser Gleichung und der ihr vorangehenden

Zwischenergebnisse beantwortet werden.

Ist es notwendig, Einflußlinien aufzutragen oder eine größere Zahl von  $H$ -Werten zu berechnen, dann leisten die Tafeln der  $f_1$ - und  $f_2$ -Werte, wie man leicht erkennen kann, ausgezeichnete Dienste.

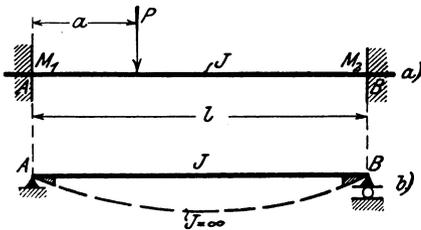


Abb. 54.

**2. Beispiel.** Der beiderseits eingespannte gerade Stab, Abb. 54, ist zweifach statisch unbestimmt. Um einen einfachen geschlossenen Rahmen zu er-

zielen, denken wir uns einen in  $A$  und  $B$  fest angeschlossenen Stab mit  $J=\infty$  hinzugefügt. Abb. 54 b.

Wenn man beachtet, daß der Drehwinkel  $\vartheta$  des Stabes  $AB$  Null ist, so lauten die beiden Dreimomentengleichungen für die ausgezeichneten Punkte  $A$  und  $B$  bei Belastung durch eine Einzellast  $P$  im Abstände  $a$  vom linken Stabende

$$2M_1l + M_2l = -Pl(l-a)\left(1 - \frac{(l-a)^2}{l^2}\right),$$

$$M_1l + 2M_2l = -Pal\left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right).$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt unmittelbar

$$M_1 = -P \frac{a(l-a)^2}{l^2} \quad \text{und} \quad M_2 = -P \frac{a^2(l-a)}{l^2}.$$

**3. Beispiel.** Der geschlossene, ringsum durch den Innendruck  $p$  belastete Rahmen — Abb. 55 — verlangt mit Rücksicht auf die Symmetrieverhältnisse bloß die Berechnung einer einzigen Überzähligen, da alle vier Eckmomente untereinander gleich sind. Die Dreimomentengleichung für eine beliebige Ecke lautet daher

$$Ma' + 2M(a' + b') + Mb' = -\frac{1}{4}pa'a^2 - \frac{1}{4}pb'b^2.$$

Sämtliche Drehwinkel  $\vartheta$  sind, da die Seitenwände bei der Formänderung keine Verdrehung erfahren, Null. Aus der Dreimomentengleichung folgt

$$M = -\frac{p}{12} \frac{a'a^2 + b'b^2}{a' + b'}.$$

Setzt man

$$a' = a, \quad b' = b \frac{J_a}{J_b},$$

so wird

$$M = -\frac{p}{12} \frac{a^3 + b^3 \frac{J_a}{J_b}}{a + b \frac{J_a}{J_b}}.$$

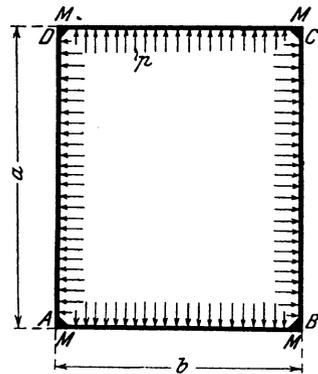


Abb. 55.

**4. Beispiel.** Der beiderseits eingespannte, einmal geknickte, symmetrische Balken nach Abb. 56 sei durch eine im Scheitel  $C$  angreifende Einzelkraft  $P$  belastet. Die beiderseitige Einspannung denke man sich durch einen festgehaltenen Stab  $AB$  mit unendlich großem Trägheitsmoment hervorgerufen. Es liegen sonach drei ausgezeichnete Punkte  $A$ ,  $B$  und  $C$  vor, für welche die Dreimomentengleichungen anzu-

schreiben sind. Es ist dabei zu beachten, daß die reduzierte Länge  $l'$  des Stabes  $AB$  Null ist, da sein Trägheitsmoment  $J$  unendlich groß ist. Die betreffenden Glieder fallen mithin in den Dreimomentengleichungen

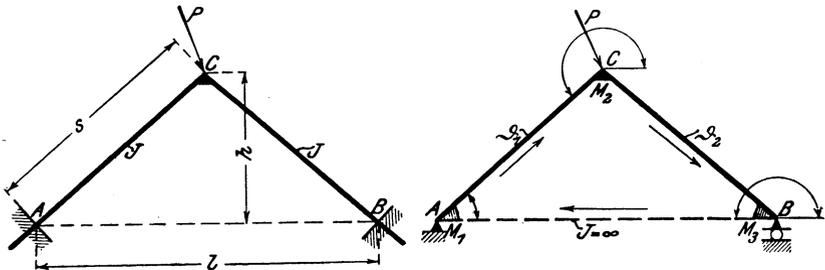


Abb. 56.

fort. Beginnt man mit der Aufschreibung bei Punkt  $B$  und schreitet in der in Abb. 56 angegebenen Pfeilrichtung fort, so lauten die Momentengleichungen:

$$\begin{aligned} 2M_1 s' + M_2 s' + 6EJ\vartheta_1 &= 0, \\ M_1 s' + 4M_2 s' + M_3 s' - 6EJ(\vartheta_1 - \vartheta_2) &= 0, \\ M_2 s' + 2M_3 s' - 6EJ\vartheta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Setzt man  $s' = s \frac{J}{J} = s$  und dividiert mit dieser Größe, so nehmen die Gleichungen die einfache Form an:

$$\left. \begin{aligned} 2M_1 + M_2 &= -\varrho\vartheta_1 \\ M_1 + 4M_2 + M_3 &= \varrho(\vartheta_1 - \vartheta_2) \\ M_2 + 2M_3 &= \varrho\vartheta_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots a)$$

Hierbei wurde  $\frac{6EJ}{s} = \varrho$  gesetzt.

Die Winkelgleichungen lauten, wenn mit  $\Delta s_1$  die Dehnung des Stabes  $AC$ , mit  $\Delta s_2$  die des Stabes  $BC$  bezeichnet wird,

$$\left. \begin{aligned} \frac{l}{2s}(\Delta s_1 + \Delta s_2) + h(\vartheta_1 - \vartheta_2) &= 0 \\ \frac{h}{s}(\Delta s_1 - \Delta s_2) - \frac{l}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots b)$$

Würde man die Dehnungen  $\Delta s$  Null setzen, den Einfluß der Längskräfte also vernachlässigen, so wären gemäß den Gleichungen b) die Stabdrehwinkel und somit auch sämtliche Momente nach Gleichung a) Null. Die Scheitelkraft  $P$  würde die beiden Stäbe nur durch Längskräfte

beanspruchen, die Wirkung der Einspannung und der Einfluß des steifen Knotens  $C$  käme in diesem Falle gar nicht zum Ausdruck.

Durch die beiden Gleichungen b) sind die Stabdrehwinkel  $\vartheta$  bestimmt. Faßt man die Momente  $M_1$ ,  $M_2$  und  $M_3$  der angesetzten Momentengleichungen als Überzählige auf, so können aus den Gleichungen a) diese Überzähligen durch die Stabdrehwinkel ausgedrückt werden. Es wird

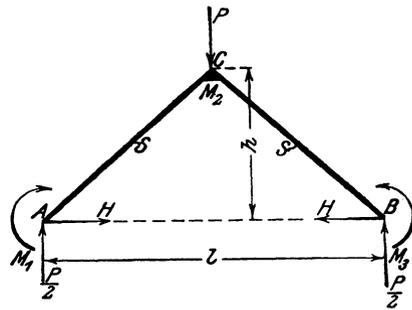


Abb. 57.

$$M_1 = -\frac{\varrho}{4}(3\vartheta_1 - \vartheta_2), \quad M_2 = \frac{\varrho}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_2), \quad M_3 = -\frac{\varrho}{4}(\vartheta_1 - 3\vartheta_2). \quad \text{c)}$$

Damit ist die Aufgabe allgemein gelöst.

Wir machen nun bezüglich der Richtung von  $P$  zwei Annahmen:

1. Last  $P$  senkrecht zur Stabsehne  $AB$ . Abb. 57.

Da  $\Delta s_1 = \Delta s_2 = \Delta s$  ist, so folgt aus den Gleichungen b)

$$\vartheta_1 = -\frac{l}{2hs} \Delta s \quad \text{und} \quad \vartheta_2 = \frac{l}{2hs} \Delta s \quad \dots \quad \text{d)}$$

Mit Bezug auf Abb. 57 ist nun

$$M_2 = M_1 + \frac{P}{4}l - Hh$$

und darum

$$H = \frac{M_1 - M_2}{h} + \frac{Pl}{4h}.$$

Die Stabspannung  $S$  eines Schenkels ist

$$S = -\frac{P}{2} \sin \alpha - H \cos \alpha = -\frac{M_1 - M_2}{h} \frac{l}{2s} - \frac{P}{2} \left( \frac{h}{s} + \frac{l^2}{4hs} \right).$$

Die Stabdehnungen  $\Delta s$  betragen demnach

$$\Delta s = \frac{Ss}{EF} = -\frac{l}{2hEF} (M_1 - M_2) - \frac{P}{2EF} \left( h + \frac{l^2}{4h} \right). \quad \dots \quad \text{e)}$$

Aus den Gleichungen c) folgt

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= M_3 = -\varrho \vartheta_1 \\ M_2 &= \varrho \vartheta_1 \\ M_1 - M_2 &= -2\varrho \vartheta_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{f)}$$

Fügt man den Wert für  $M_1 - M_2$  in die Gleichung e) ein, so erhält man  $\Delta s$  als Funktion von  $\vartheta_1$ , welche Verknüpfung, in d) eingesetzt, eine Gleichung zur Bestimmung von  $\vartheta_1$  liefert:

$$\vartheta_1 = -\frac{l}{2hs} \left[ 2\varrho \vartheta_1 \frac{l}{2hEF} - \frac{P}{2EF} \left( h + \frac{l^2}{4h} \right) \right]$$

und daher

$$\vartheta_1 = \frac{P}{4} \frac{\frac{1}{EF} \frac{l}{hs} \left( h + \frac{l^2}{4h} \right)}{1 + 3 \frac{J}{F} \frac{l^2}{h^2 s^2}} = \frac{P}{4EF} \frac{ls}{h^2 + 3 \frac{J}{F} \frac{l^2}{s^2}}.$$

Ist  $\vartheta_1$  bekannt, so sind auch die Momente aus den Gl. f) bestimmt:

$$M_1 = M_3 = -\frac{P}{2} \frac{s}{\frac{l}{s} + \frac{3l}{J} \frac{F}{h^2 s}},$$

$$M_2 = -M_1 = \frac{P}{2} \frac{s}{\frac{l}{s} + \frac{3l}{J} \frac{F}{h^2 s}}.$$

An das eben erhaltene Ergebnis wollen wir eine wichtige Bemerkung anschließen. In der Gleichung für  $\vartheta_1$  ist das zweite Nennerglied sehr klein gegen das erste und kann praktisch immer vernachlässigt werden. Es beträgt, wenn der Scheitelwinkel nicht zu stumpf ist, meist weniger als  $\frac{1}{100}$  des ersten Gliedes.  $\vartheta_1$  nimmt dann die einfachere Form an:

$$\vartheta_1 = \frac{P}{4EF} \frac{ls}{h^2}.$$

Das ist aber der Wert, den man für  $\vartheta_1$  erhält, wenn man in den Eckpunkten Gelenke annimmt. Es war also die genaue Berechnung der Stabkraft  $S$ , die oben durchgeführt wurde, nicht notwendig, es hätte genügt,  $P$  in die beiden Stabkomponenten zu zerlegen, um dann rechnerisch oder zeichnerisch die Verschiebung des Scheitelpunktes unter Annahme von Gelenken in den Eckpunkten und somit auch den Drehwinkel  $\vartheta_1$  zu finden. Sein so ermittelter Wert in die Gleichungen c) eingesetzt, hätte dann auf einfachste Weise die gesuchten Momente ergeben. An diesen Verhältnissen ändert sich auch nichts, wenn man sich an Stelle des unendlich steifen Zusatzstabes  $AB$  einen Stab mit endlichem Querschnitt gesetzt denkt. Von dieser wichtigen Eigenschaft der Stabdreiecke mit steifen Ecken werden wir bei der Anwendung unserer Methode auf die Berechnung der Nebenspannungen im Fachwerke Gebrauch machen.

2. Last  $P$  parallel zur Stabsehne  $AB$ .

Aus Abb. 58 entnehmen wir

$$M_2 = M_1 - \frac{M_1 - M_3}{l} \frac{l}{2} - \frac{Ph}{2} + (P - H)h = \frac{Ph}{2} + \frac{M_1 + M_3}{2} - Hh$$

und somit

$$H = \frac{P}{2} + \frac{M_1 + M_3}{2h} - \frac{M_2}{h}.$$

Da nun  $\frac{M_1 + M_3}{2} = -M_2$  ist, was aus den allgemein gültigen Gleichungen c) hervorgeht, so vereinfacht sich der Ausdruck für  $H$  und zwar wird

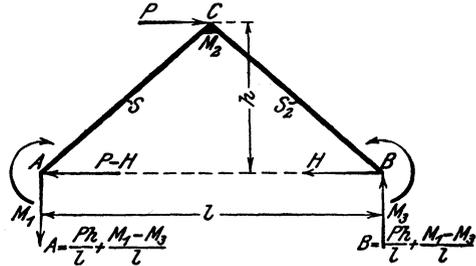


Abb. 58.

$$H = \frac{P}{2} - \frac{2M_2}{h}.$$

Damit können die Stabspannungen  $S_1$  und  $S_2$  ermittelt werden. Wir finden:

$$\begin{aligned} S_1 &= \left( \frac{Ph}{l} + \frac{M_1 - M_3}{l} \right) \sin \alpha + (P - H) \cos \alpha \\ &= P \frac{h}{l} \frac{h}{s} + P \frac{l}{2s} - \frac{P}{2} \frac{l}{2s} + \frac{M_1 - M_3}{l} \frac{h}{s} + \frac{2M_2}{h} \frac{l}{2s} \\ &= P \frac{s}{l} + \frac{M_1 - M_3}{l} \frac{h}{s} + \frac{M_2 l}{hs} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} S_2 &= - \left[ \left( \frac{Ph}{l} + \frac{M_1 - M_3}{l} \right) \sin \alpha + H \cos \alpha \right] \\ &= - \left[ P \frac{h}{l} \frac{h}{s} + \frac{P}{2} \frac{l}{2s} + \frac{M_1 - M_3}{l} \frac{h}{s} + 2 \frac{M_2}{h} \frac{l}{2s} \right] \\ &= - \left[ P \frac{s}{l} + \frac{M_1 - M_3}{l} \frac{h}{s} + \frac{M_2 l}{hs} \right] \end{aligned}$$

$$S_1 = -S_2 \quad \text{und somit ist auch} \quad \Delta s_1 = -\Delta s_2.$$

Aus den Gleichungen b) geht dann unmittelbar hervor:

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0,$$

daher

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \frac{2h}{ls} \Delta s_1.$$

Aus den Gleichungen c) folgt unter Benutzung dieser Zusammenhänge zwischen den Stabdrehwinkeln  $\vartheta$

$$M_2 = 0, \quad M_1 = -M_3 = -\frac{\rho}{2} \vartheta_1.$$

Weiter ist

$$\Delta s_1 = \frac{s}{EF} \left[ \frac{Ps}{l} + \frac{2M_1 h}{l s} \right] = \frac{s}{EF} \left[ \frac{Ps}{l} - \rho \vartheta_1 \frac{h}{sl} \right].$$

Aus der Gleichung für  $\vartheta_1$  gewinnt man mit diesem Werte von  $\Delta s_1$

$$\vartheta_1 = \frac{2h}{ls} \frac{s}{EF} \left[ \frac{Ps}{l} - 6 \frac{EJ}{sl} \frac{h}{s} \vartheta_1 \right]$$

und daraus

$$\vartheta_1 = \frac{2P}{EF} \frac{hs}{l^2 + 12 \frac{J}{F} \left( \frac{h}{s} \right)^2}.$$

Auch hier ist das zweite Nennerglied, wenn der Schenkelwinkel nicht zu spitz ist, verhältnismäßig klein gegen das erste. Wird es vernachlässigt, so geht  $\vartheta_1$  über in

$$\vartheta_1 = \frac{2P}{EF} \frac{hs}{l^2},$$

in den Wert des Drehwinkels für gelenkig aneinander geschlossene Stäbe. Auch hier gilt somit das unter 1. Gesagte.

Zum Schlusse berechnen wir noch die genauen Werte von  $M_1$  und  $M_3$ :

$$M_1 = - \frac{Ph}{2 \left( \frac{h}{s} \right)^2 + \frac{Fl^2}{6J}}, \quad M_3 = + \frac{Ph}{2 \left( \frac{h}{s} \right)^2 + \frac{Fl^2}{6J}}.$$

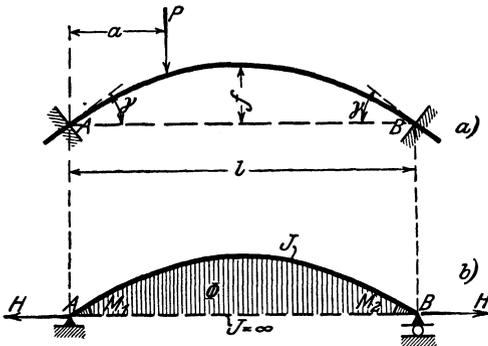


Abb. 59.

**5. Beispiel.** Für den beiderseits eingespannten, symmetrischen Parabelbogen, Abb. 59, sind die Einflußlinien der überzähligen Größen für Belastungen senkrecht zur Stabsehne zu entwickeln. Durch Einschalten eines unendlich steifen Stabes zwischen A und B, der in diesen Punkten steif an den Bogen angeschlossen ist, ge-

winnt man ein einfaches Grundsystem, aus dem die Dreimomentengleichungen für die beiden ausgezeichneten Punkte A und B abgeleitet

werden können. Bezeichnet man mit Rücksicht auf die Belastung durch eine Einzellast die rechten Seiten gemäß den Ausführungen auf S. 43 und 47 mit  $-F_1$  bzw.  $-F_2$ , so lauten die Momentengleichungen folgendermaßen:

$$2M_1l' + M_2l' + 6H\mathfrak{S}_B \frac{l'}{l^2} = -F_1,$$

$$M_1l' + 2M_2l' + 6H\mathfrak{S}_A \frac{l'}{l^2} = -F_2.$$

Die Stabdrehwinkel der beiden das Grundsystem bildenden Stäbe sind Null, da  $A$  und  $B$  fest sind, weshalb die Glieder, die von  $\vartheta$  abhängen, in den vorstehenden Gleichungen entfallen.

Weiter ist  $l' = l \cos^2 \gamma$ , und weil es sich um eine symmetrische Parabellinie handelt, sind

$$\mathfrak{S}_A = \mathfrak{S}_B = \Phi \frac{l}{2} = \frac{2}{3} l f \frac{l}{2} = \frac{1}{3} l^2 f$$

die statischen Momente der schraffierten Fläche  $\Phi$  (Abb. 59b) bezogen auf die Endpunkte  $A$  bzw.  $B$ .

Die Momentengleichungen nehmen daher nach Division mit  $l'$  die Form an:

$$\left. \begin{aligned} 2M_1 + M_2 + 2Hf &= -\frac{F_1}{l'} \\ M_1 + 2M_2 + 2Hf &= -\frac{F_2}{l'} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots a)$$

Da, wie schon oben erwähnt, der einzige in Betracht kommende Stabdrehwinkel Null ist, ebenso auch der Winkel  $\alpha$ , den die Stabsehne mit der festgehaltenen Richtung  $AB$  einschließt, so liefern beide Winkelgleichungen, wie man sich leicht überzeugt, die einzige Beziehung

$$\Delta l = 0.$$

Aus Gleichung 17'), die für symmetrische Achsenlinien gilt, folgt dann:

$$\frac{Hl}{EF} + \frac{1}{EJ} \left[ \frac{\Phi}{2} (M_1 + M_2) + 2H\Phi\sigma + G \right] \pm \alpha_t l = 0 \dots b)$$

Mit den Beziehungen a) und b) sind die drei Bestimmungsgleichungen zur Ermittlung der drei Überzähligen gegeben. Wie ein Blick auf diese Gleichungen lehrt, ist es am besten, die darin vorkommenden Momente  $M_1$  und  $M_2$  und die Längskraft  $H$  als Überzählige aufzufassen. Durch Addition der Gleichungen gewinnt man ohne weiteres

$$M_1 + M_2 = -\frac{4}{3} Hf - \frac{F_1 + F_2}{3l'};$$

führt man diese Momentensumme in b) ein, so erhält man  $H$  in der Form

$$H = - \frac{G - \frac{\Phi}{2} \frac{F_1 + F_2}{3l'} + EJ\alpha_t t l}{\frac{J}{F} l + 2\Phi\sigma - \frac{2}{3} f\Phi}.$$

Setzt man für

$$\Phi = \frac{2}{3} lf \quad \text{und für} \quad \Phi\sigma = \frac{2}{3} lf \cdot \frac{2}{5} f = \frac{4}{15} lf^2$$

und

$$F_1 = f_1 l l', \quad F_2 = f_2 l l', \quad G = g f l^2,$$

so wird

$$H = - \frac{g - \frac{1}{9}(f_1 + f_2) + \frac{EJ\alpha_t t}{fl}}{\frac{J}{F} \frac{1}{fl} + \frac{4}{45} \frac{f}{l}} \dots \dots \dots c)$$

Damit ist die Einflußlinie für den Horizontalschub  $H$  des Bogens bestimmt. Für die Funktionen  $f_1$ ,  $f_2$  und  $g$  kann man die im Anhang berechnete Tabelle benutzen. Da  $f_1$  spiegelsymmetrisch zu  $f_2$  ist, so ist  $f_1 + f_2$  eine zu  $x = \frac{l}{2}$  symmetrische Linie, und da auch  $g$  symmetrisch ist, so zeigt die  $H$ -Linie in bezug auf die durch  $x = \frac{l}{2}$  gehende Vertikale Symmetrie.

Nach Subtraktion der Gleichungen a) erhält man

$$M_1 - M_2 = \frac{F_2 - F_1}{l'},$$

$$M_1 + M_2 = -\frac{4}{3} Hf - \frac{F_1 + F_2}{3l'}.$$

Die zweite Gleichung wurde schon oben erhalten. Beide Beziehungen liefern

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{F_2 - 2F_1}{3l'} - \frac{2}{3} Hf = \frac{l}{3}(f_2 - 2f_1) - \frac{2}{3} Hf \\ M_2 &= \frac{F_1 - 2F_2}{3l'} - \frac{2}{3} Hf = \frac{l}{3}(f_1 - 2f_2) - \frac{2}{3} Hf \end{aligned} \right\} \dots \dots d)$$

Damit sind auch die Einflußlinien für  $M_1$  und  $M_2$  festgelegt. Es genügt die Ausrechnung einer der beiden Linien, da sie spiegelsymmetrisch sind.

Man bestimmt zunächst die  $H$ -Linie und mit ihrer Hilfe die Einflußlinien der Momente  $M_1$  und  $M_2$ .

6. Beispiel. Der aus zwei eingespannten Ständern und gelenkig gelagertem Riegel bestehende einfache Rahmen der Abb. 60a ist einfach statisch unbestimmt. Das Ersatzsystem zeigt Abb. 60b. Als Elastizitätsbedingungen kommen zwei Momentengleichungen und zwei Winkelgleichungen in Betracht, welchen vier Gleichungen eine Überzählige und drei Stabdrehwinkel als Unbekannte gegenüberstehen.

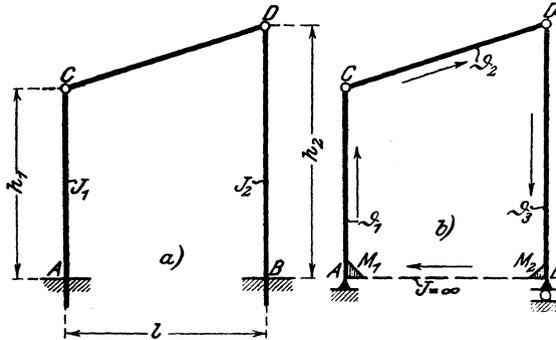


Abb. 60.

Die Momentengleichungen lauten, falls man bei der Aufstellung mit dem Stab  $AB$  beginnt, im Sinne der Pfeile fortschreitet und beachtet, daß die reduzierte Länge des Zusatzstabes  $AB$  Null ist,

$$\left. \begin{aligned} 2M_1 h_1' + 6EJ\vartheta_1 &= N_1 \\ 2M_2 h_2' - 6EJ\vartheta_3 &= N_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots a)$$

Die Winkelgleichungen ergeben, wenn man die Stablängenänderungen unberücksichtigt läßt, die Beziehungen

$$\begin{aligned} \vartheta_1 h_1 + \vartheta_2 (h_2 - h_1) - \vartheta_3 h_2 &= 0, \\ \vartheta_2 l &= 0, \end{aligned}$$

somit ist

$$\vartheta_1 = \frac{h_2}{h_1} \vartheta_3 \quad \text{und} \quad \vartheta_2 = 0.$$

Die Beziehungen a) liefern somit

$$\begin{aligned} 2M_1 h_1' + 6EJ \frac{h_2}{h_1} \vartheta_3 &= N_1, \\ 2M_2 h_2' - 6EJ \vartheta_3 &= N_2. \end{aligned}$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit  $\frac{h_2}{h_1}$  und addiert beide Gleichungen, so erhält man

$$2M_1 h_1' + 2M_2 h_2' \frac{h_2}{h_1} = N_1 + \frac{h_2}{h_1} N_2$$

als Bestimmungsgleichung für die Überzählige, welche Gleichung wir unter Einführung von

$$h_1' = h_1 \frac{J_2}{J_1}, \quad h_2' = h_2$$

in der Form schreiben wollen

$$M_1 h_1^2 \frac{J_2}{J_1} + M_2 h_2^2 = \frac{I}{2} (h_1 N_1 + h_2 N_2). \quad \dots \quad b)$$

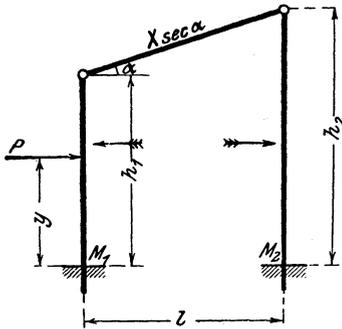


Abb. 61.

Wir wenden nun diese Formel auf den in Abb. 61 dargestellten Belastungsfall an.

Als überzählige Größe wählen wir die wagerechte Teilkraft der Riegelspannung  $X \sec \alpha$ . Es gilt dann, falls  $X$  als Druck angenommen wird<sup>1)</sup>,

$$M_1 = -Py + Xh_1,$$

$$M_2 = +Xh_2$$

und

$$N_1 = -Ph_1^2 \frac{J_2}{J_1} f_1, \quad N_2 = 0.$$

Mit diesen Werten geht die Bestimmungsgleichung über in:

$$X \left( h_1^3 + h_2^3 \frac{J_1}{J_2} \right) = Pyh_1^2 - \frac{I}{2} Ph_1^3 f_1.$$

Daraus ergibt sich

$$X = P \frac{\frac{y}{h_1} - \frac{I}{2} f_1}{1 + \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^3 \frac{J_1}{J_2}}.$$

$f_1$  wird für verschiedene Werte von  $\frac{y}{h_1}$  aus der Tabelle im Anhang entnommen.

### § 9. Tragwerke, die aus mehrfachen Grundsystemen abgeleitet werden.

**7. Beispiel.** Als einfachstes Beispiel mehrfeldriger Systeme wollen wir den an beiden Stabenden eingespannten durchlaufenden Balken betrachten. Abb. 62. Dieser Träger ist bei  $n$  Feldern ( $n + 1$ )-fach

<sup>1)</sup> Bei der Aufstellung der folgenden Gleichgewichtsbeziehungen ist jeder Stab so zu betrachten, wie bei der Aufstellung der Viermomentengleichungen. Siehe die gefiederten Betrachtungspfeile in Abb. 61.



anwendet. Das Trägheitsmoment der beiden Zusatzstäbe ist dann  $J = \infty$  anzunehmen. Abb. 62 c.

**8. Beispiel.** Das in Abb. 63 dargestellte symmetrische, dreifeldrige Tragwerk ist dreifach statisch unbestimmt. Die Einflußlinien der

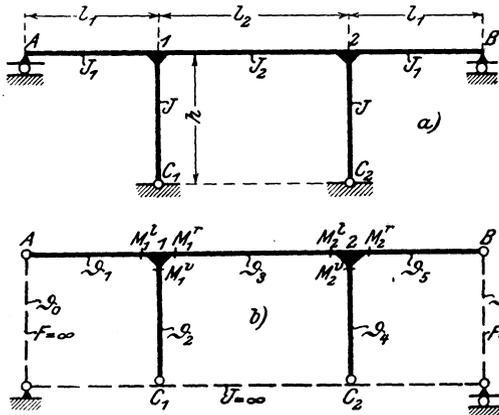


Abb. 63.

passend auszuwählen- den statisch unbestimm- baren Größen sind für lotrechte Belastung zu ermitteln. Die Berech- nung erfolgt unter Vernachlässigung der Wirk- ung der Längskräfte auf die Formänderungen.

Wir bezeichnen die Knotenmomente der in den Punkten 1 und 2 zusammenstoßenden Stäbe (siehe Abb. 63 b) mit  $M_1^l, M_1^r, M_1^v$  bzw.  $M_2^l, M_2^r, M_2^v$ .

Da zwei steife Knotenpunkte mit je drei zusammentreffenden Stäben vorhanden sind, so können  $2 \cdot (3 - 1) = 4$  Viermomentengleichungen aufgestellt werden. Das linke Feld liefert eine Momentengleichung, die das Stabpaar  $A \text{ I } C_1$  umfaßt, das Mittelfeld zwei Gleichungen für die Stabpaare  $C_1 \text{ I } 2$  und  $\text{I } 2 \text{ C}_2$  und das rechte Feld schließlich eine Gleichung für  $C_2 \text{ 2 } B$ . Wir weichen aber hier von der Regel der feldweisen Aufstellung ab und wählen die Stabverbindungen  $A \text{ I } C_1, A \text{ I } 2, \text{I } 2 \text{ B}$  und  $C_2 \text{ 2 } B$ . Die Momentengleichungen lauten demnach, wenn man die Vorzeichenregel der Momente beachtet, ohne Rücksicht auf die Art der Belastung:

$$\left. \begin{aligned} 2 M_1^l l_1' + 2 M_1^v h' - 6 E J (\vartheta_1 - \vartheta_2) &= N_1 \\ 2 M_1^l l_1' + 2 M_1^r l_2' + M_2^l l_2' - 6 E J (\vartheta_1 - \vartheta_3) &= N_2 \\ M_1^r l_2' + 2 M_2^l l_2' + 2 M_2^r l_1' - 6 E J (\vartheta_3 - \vartheta_5) &= N_3 \\ - 2 M_2^v h' + 2 M_2^r l_1' - 6 E J (\vartheta_4 - \vartheta_5) &= N_4 \end{aligned} \right\} \dots a)$$

Hierin ist

$$l_1' = l_1 \frac{J}{J_1}, \quad l_2' = l_2 \frac{J}{J_2}, \quad h' = h,$$

<sup>1)</sup> Hätte man die Momentengleichungen nach der Regel feldweise aufgestellt, so wäre  $M_2^v$  bereits in der vorangehenden Gleichung aus dem Mittelfelde mit  $+$ -Zeichen behaftet aufgetreten. Vom dritten Feld aus gesehen, ändert somit  $M_2^v$  sein Vorzeichen.

wobei das Trägheitsmoment  $J$  der Ständer als  $J_c$  gewählt wurde. Außer diesen vier Momentengleichungen können  $3 \cdot 2 = 6$  Winkelgleichungen angesetzt werden. Diese lauten:

$$\begin{array}{lll} -h\vartheta_0 + h\vartheta_2 = 0 & -h\vartheta_2 + h\vartheta_4 = 0 & -h\vartheta_4 + h\vartheta_6 = 0 \\ l_1\vartheta_1 = 0 & l_2\vartheta_3 = 0 & l_1\vartheta_5 = 0. \end{array}$$

Es ist sonach

$$\text{und } \left. \begin{array}{l} \vartheta_1 = \vartheta_3 = \vartheta_5 = 0 \\ \vartheta_0 = \vartheta_2 = \vartheta_4 = \vartheta_6 = \vartheta, \end{array} \right\} \dots \dots \dots \text{ b)}$$

welches Ergebnis auch ohne Zuhilfenahme der Winkelgleichungen durch eine einfache Überlegung hätte gefunden werden können. Führt man die Werte b) in a) ein, so vereinfachen sich die Viermomentengleichungen und man erhält

$$\begin{aligned} 2M_1^l l_1' + 2M_1^v h + 6EJ\vartheta &= N_1 \\ 2M_1^l l_1' + 2M_1^r l_2' + M_2^l l_2' &= N_2 \\ M_1^r l_2' + 2M_2^l l_2' + 2M_2^r l_1' &= N_3 \\ -2M_2^v h + 2M_2^r l_1' - 6EJ\vartheta &= N_4. \end{aligned}$$

Addiert man die erste und letzte Gleichung, so fällt  $\vartheta$  aus dem Gleichungssystem heraus und man gewinnt drei Bestimmungsgleichungen zur Ermittlung der drei Überzähligen, und zwar:

$$\left. \begin{array}{l} 2M_1^l l_1' + 2M_1^v h - 2M_2^v h + 2M_2^r l_1' = N_1 + N_4 \\ 2M_1^l l_1' + 2M_1^r l_2' + M_2^l l_2' = N_2 \\ M_1^r l_2' + 2M_2^l l_2' + 2M_2^r l_1' = N_3 \end{array} \right\} \dots \dots \text{ c)}$$

Wir betrachten nun zwei Belastungsfälle:

1. Last  $\mathbf{r}^t$  im ersten Felde im Abstände  $a$  von der linken Endstütze;
2. Last  $\mathbf{r}^t$  im Mittelfelde im Abstände  $a_1$  vom Knotenpunkt 1.

Um die rechten äußeren Einflußlinienzweige zu bestimmen, ist es nicht notwendig, auch das dritte Feld zu belasten, da mit Rücksicht auf die Symmetrie der Anordnung die Berechnung der beiden Zweige 1 und 2 genügt. Allerdings setzt dies voraus, daß die ausgewählten Überzähligen ebenfalls symmetrische Anordnung zeigen.

Als Überzählige wählen wir die Auflagerkräfte  $A$  und  $B$ , sowie den Horizontalschub  $H$ .

Aus Abb. 64 folgt:

1. für Last  $\mathbf{r}^t$  im Endfelde

$$\begin{array}{ll} M_1^l = Al_1 - \mathbf{r}(l_1 - a) & M_2^l = Bl_1 - Hh \\ M_1^r = Al_1 - \mathbf{r}(l_1 - a) - Hh & M_2^r = Bl_1 \\ M_1^v = Hh & M_2^v = -Hh. \end{array}$$

Weiter ist:

$$N_1 = -F_2 = -f_2 l_1 l_1', \quad N_2 = -F_2 = -f_2 l_1 l_1', \quad N_3 = N_4 = 0.$$

2. für Last  $r^t$  im Mittelfelde:

$$\begin{aligned} M_1^l &= A l_1 & M_2^l &= B l_1 - H h \\ M_1^r &= A l_1 - H h & M_2^r &= B l_1 \\ M_1^v &= H h & M_2^v &= -H h. \end{aligned}$$

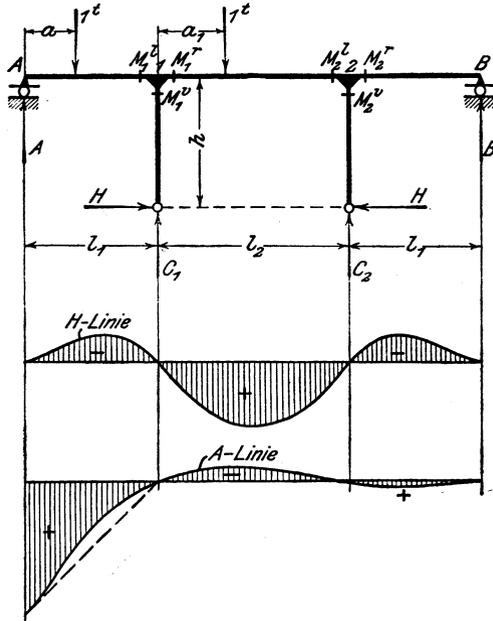


Abb. 64.

Ferner gilt:

$$N_2 = -F_1 = -f_1 l_2 l_2', \quad N_3 = -F_2 = -f_2 l_2 l_2', \quad N_1 = N_4 = 0.$$

Nach Einführung dieser Werte gehen die Gleichungen c) über in:

i. Last  $r^t$  im Endfelde

$$\left. \begin{aligned} A + B + 2H \frac{h^2 J_1}{l_1^2 J} &= \left(1 - \frac{a}{l_1}\right) - \frac{f_2}{2} \\ A \left(1 + \frac{l_1 J_2}{l_2 J_1}\right) + \frac{B}{2} - \frac{3}{2} H \frac{h}{l_1} &= \left(1 - \frac{a}{l_1}\right) \left(1 + \frac{l_1 J_2}{l_2 J_1}\right) - \frac{f_2 l_1 J_2}{2 l_2 J_1} \\ \frac{A}{2} + B \left(1 + \frac{l_1 J_2}{l_2 J_1}\right) - \frac{3}{2} H \frac{h}{l_1} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{a}{l_1}\right). \end{aligned} \right\} d)$$

Hierbei wurden die Werte  $l_1'$  und  $l_2'$  durch die ausführlicheren Bezeichnungen ersetzt.

Addiert man die beiden letzten Gleichungen d), so erhält man

$$A + B = \left(1 - \frac{a}{l_1}\right) - \frac{f_2}{2} \frac{l_1}{l_2} \frac{J_2}{J_1} k_1 + 3H \frac{h}{l_1} k_1,$$

wenn

$$k_1 = \frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{l_1}{l_2} \frac{J_2}{J_1}} \dots \dots \dots \text{e)}$$

gesetzt wird.

Mit diesem Wert von  $A + B$  ergibt sich  $H$  aus der ersten Gleichung in der Form

$$H = - \frac{1 - \frac{l_1}{l_2} \frac{J_2}{J_1} k_1}{2 \frac{h}{l_1} \left(3k_1 + 2 \frac{h}{l_1} \frac{J_1}{J}\right)} f_2 = -K_1 f_2, \dots \dots \text{f)}$$

wobei  $K_1$  ein nur von den Abmessungen des Systems abhängiger, stets positiver Faktor ist. Die beiden Außenzweige der  $H$ -Linie lassen sich somit mittels der  $f_2$ -Linie in einfachster Weise bestimmen. Benutzt man nun die Gleichung von  $H$ , so kann man aus den Gleichungen d)  $A$  und  $B$  ermitteln, man erhält zunächst

$$A + B = 2K_1 f_2 \frac{h^2}{l_1^2} \frac{J_1}{J} + \left(1 - \frac{a}{l_1}\right) - \frac{f_2}{2},$$

$$A - B = \left(1 - \frac{a}{l_1}\right) - \frac{f_2}{2} \frac{l_1}{l_2} \frac{J_2}{J_1} k_2,$$

wobei

$$k_2 = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{l_1}{l_2} \frac{J_2}{J_1}} \dots \dots \dots \text{g)}$$

ist, und daraus

$$\left. \begin{aligned} A &= \left(1 - \frac{a}{l_1}\right) - \left[ \frac{1}{4} \left(1 + \frac{l_1}{l_2} \frac{J_2}{J_1} k_2\right) - K_1 \frac{h^2}{l_1^2} \frac{J_1}{J} \right] f_2 = \left(1 - \frac{a}{l_1}\right) - K_2 f_2, \\ B &= - \left[ \frac{1}{4} \left(1 - \frac{l_1}{l_2} \frac{J_2}{J_1} k_2\right) - K_1 \frac{h^2}{l_1^2} \frac{J_1}{J} \right] f_2 = -K_3 f_2. \end{aligned} \right\} \text{h)}$$

$K_2$  und  $K_3$  sind, ebenso wie  $K_1$ , Festwerte, die nur mit den Systemabmessungen verknüpft sind. Der linke Außenzweig der  $A$ -Linie ergibt sich demnach durch Abtragen der  $K_2 f_2$ -Linie von der Geraden  $1 - \frac{a}{l_1}$ , die durch den Punkt 1 geht und über  $A$  die Ordinate 1 hat. Die Festwerte  $K_2$  und  $K_3$  sind stets positiv. Den rechten Außenzweig

der  $A$ -Linie berechnet man als Spiegelbild der  $B$ -Linie aus der Gleichung  $B = -K_3 f_2$ . Siehe die Abb. 64.

2. Last  $\mathbf{I}'$  im Mittelfelde.

Die drei Bestimmungsgleichungen lauten jetzt:

$$\left. \begin{aligned} A + B + 2H \frac{h^2 J_1}{l_1^2 J} &= 0, \\ A \left( \mathbf{I} + \frac{l_1 J_2}{l_2 J_1} \right) + \frac{B}{2} - \frac{3}{2} H \frac{h}{l_1} &= -\frac{f_1}{2} \frac{l_2}{l_1}, \\ \frac{A}{2} + B \left( \mathbf{I} + \frac{l_1 J_2}{l_2 J_1} \right) - \frac{3}{2} H \frac{h}{l_1} &= -\frac{f_2}{2} \frac{l_2}{l_1}. \end{aligned} \right\} \dots i)$$

Der weitere Vorgang ist der gleiche wie oben; durch Addition der beiden letzten Gleichungen i) gewinnt man

$$A + B = 3H \frac{h}{l_1} k_1 - \frac{\mathbf{I}}{2} (f_1 + f_2) \frac{l_2}{l_1} k_1.$$

$k_1$  hat die gleiche Bedeutung wie oben.

Die Einführung von  $A + B$  in die erste der drei Bestimmungsgleichungen liefert  $H$ , und zwar:

$$H = \frac{k_1}{2 \frac{h}{l_2} \left( 3k_1 + 2 \frac{h J_1}{l_1 J} \right)} (f_1 + f_2) = K_1' (f_1 + f_2) \dots k)$$

Weiter wird auf dem gleichen Wege wie früher gefunden

$$\left. \begin{aligned} A &= - \left[ K_1' \frac{h^2 J_1}{l_1^2 J} (f_1 + f_2) + \frac{l_2 k_2}{l_1 4} (f_1 - f_2) \right] \\ &= - [K_2' (f_1 + f_2) + K_3' (f_1 - f_2)], \\ B &= - \left[ K_1' \frac{h^2 J_1}{l_1^2 J} (f_1 + f_2) - \frac{l_2 k_2}{l_1 4} (f_1 - f_2) \right] \\ &= - [K_2' (f_1 + f_2) - K_3' (f_1 - f_2)]. \end{aligned} \right\} \dots l)$$

Damit sind sämtliche Einflußlinienzweige festgelegt. An einem Zahlenbeispiel soll noch die zahlenmäßige Auswertung der gewonnenen Formeln mit Hilfe der Tafel der  $f$ -Werte im Anhang gezeigt werden.

**Zahlenbeispiel<sup>1)</sup>.**

Es sei:

$$\begin{aligned} l_1 &= 10 \text{ m}, & l_2 &= 15 \text{ m}, & h &= 5 \text{ m}, \\ \frac{J_2}{J_1} &= 2, & \frac{J_1}{J} &= 2. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Mit dem Rechenschieber gerechnet.

Damit findet man die Festwerte  $k_1$  und  $k_2$  gemäß den Gleichungen e) und g) und zwar:

$$k_1 = \frac{1}{\frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{10}{15}} = 0,353,$$

$$k_2 = \frac{1}{\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{10}{15}} = 0,545.$$

a) Außenzweige der Einflußlinien. [Gleichungen f) und h).]

$$K_1 = \frac{1 - \frac{2}{3} \cdot 0,353}{2 \cdot \frac{1}{2} \left( 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 + 3 \cdot 0,353 \right)} = \mathbf{0,173},$$

$$K_2 = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 0,545 \right) - 0,173 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = \mathbf{0,345},$$

$$K_3 = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot 0,545 \right) - 0,173 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = -\mathbf{0,0184}.$$

In der folgenden Tabelle sind unter Benutzung der Tafel auf S. 211 die Ordinaten der Einflußlinien für die Außenöffnung zusammengestellt.

Tafel 1. Außenzweige der Einflußlinien.

$\frac{a}{l_1}$	$f_2$	H-Linie $H = -K_1 f_2$	A-Linie $A = \left( 1 - \frac{a}{l} \right) - K_2 f_2$			B-Linie $B = -K_3 f_2$
			$1 - \frac{a}{l}$	$K_2 f_2$	A	
			0	0	0	
0,1	0,099	-0,0171	0,9000	0,0342	0,8658	0,0018
0,2	0,192	-0,0332	0,8000	0,0662	0,7338	0,0035
0,3	0,273	-0,0473	0,7000	0,0942	0,6058	0,0050
0,4	0,336	-0,0581	0,6000	0,1158	0,4842	0,0062
0,5	0,375	-0,0648	0,5000	0,1293	0,3707	0,0069
0,6	0,384	-0,0664	0,4000	0,1325	0,2675	0,0071
0,7	0,357	-0,0618	0,3000	0,1231	0,1769	0,0066
0,8	0,288	-0,0499	0,2000	0,0994	0,1006	0,0053
0,9	0,171	-0,0296	0,1000	0,0590	0,0410	0,0032
1,0	0	0	0	0	0	0

b) Mittelzweige der Einflußlinien. [Gleichungen k) und l).]

$$K_1' = \frac{0,353}{2 \cdot \frac{1}{3} \left( 3 \cdot 0,353 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \right)} = \mathbf{0,173},$$

$$K_2' = 0,173 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 = \mathbf{0,0865},$$

$$K_3' = \frac{15}{10} \cdot \frac{0,545}{4} = \mathbf{0,204}.$$

In Tafel 2 sind die Ordinaten für die Mittelzweige der Einflußlinien berechnet.

Tafel 2. Mittelzweige der Einflußlinien.

$\frac{a}{l_2}$	Werte der Funktionen		$f_1 + f_2$	$f_1 - f_2$	H-Linie $H = K_1'(f_1 + f_2)$	A-Linie und B-Linie $\frac{A}{B} = -[K_2'(f_1 + f_2) \pm K_3'(f_1 - f_2)]$			
	$f_1$	$f_2$				$K_2'(f_1 + f_2)$	$K_3'(f_1 - f_2)$	A	B
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,171	0,099	0,270	0,072	0,0468	0,0233	0,0147	-0,0380	-0,0086
0,2	0,288	0,192	0,480	0,096	0,0830	0,0415	0,0196	-0,0611	-0,0219
0,3	0,357	0,273	0,630	0,084	0,1089	0,0545	0,0172	-0,0717	-0,0373
0,4	0,384	0,336	0,720	0,048	0,1245	0,0613	0,0098	-0,0711	-0,0515
0,5	0,375	0,375	0,750	0	0,1297	0,0649	0	-0,0649	-0,0649
0,6	0,336	0,384	0,720	-0,048	0,1245	0,0613	-0,0098	-0,0515	-0,0711
0,7	0,273	0,357	0,630	-0,084	0,1089	0,0545	-0,0172	-0,0373	-0,0717
0,8	0,192	0,288	0,480	-0,096	0,0830	0,0415	-0,0196	-0,0219	-0,0611
0,9	0,099	0,171	0,270	-0,072	0,0468	0,0233	-0,0147	-0,0086	-0,0380
1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

In Abb. 64 ist der allgemeine Verlauf der Einflußlinien für H und A dargestellt.

9. Beispiel. Die dreischiffige Halle mit vier eingespannten Ständern und gelenkig aufgesetzten Bindern (Abb. 65a) ist dreifach statisch un-

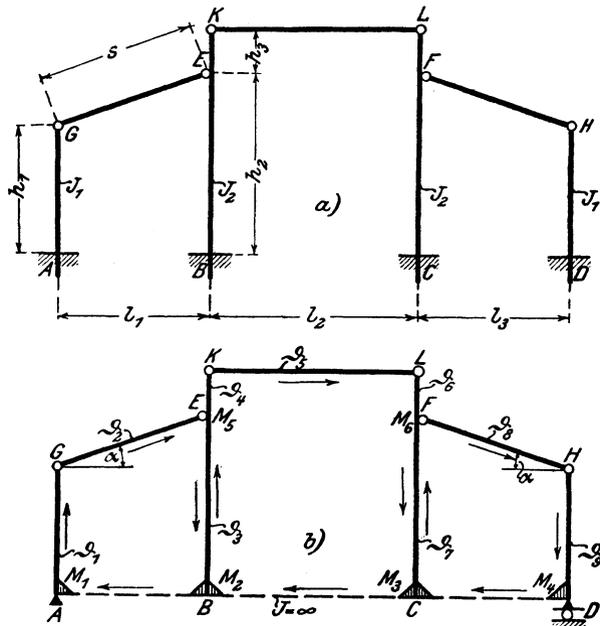


Abb. 65.

bestimmt. Das Ersatzsystem zeigt Abb. 65b. Ausgezeichnete Punkte sind die Ständerfußpunkte, sowie die Knoten  $E$  und  $F$ , somit können sechs Momentengleichungen angesetzt werden<sup>1)</sup>. Fügt man die  $3 \times 2 = 6$  Winkelgleichungen hinzu, so stehen zwölf Elastizitätsbedingungen zur Verfügung. Unbekannt sind: Drei Überzählige und neun Stabdrehwinkel, zusammen also zwölf Größen. Bei der Aufstellung der Momentengleichungen (nach dem Dreimomentensatz) beginne man mit dem linken Außenfeld, und zwar bei Punkt  $B$  und schreite im Sinne der eingezeichneten Pfeile fort. Im zweiten Fach beginne man bei Punkt  $C$ , im dritten Fach bei Punkt  $D$ . Jene Glieder der Momentengleichungen, welche die reduzierte Länge des Zusatzstabes als Beiwert enthalten, entfallen, da die reduzierte Länge des Zusatzstabes wegen des unendlich großen Trägheitsmomentes Null ist.

Die sechs Dreimomentengleichungen lauten, wenn man  $J_2$  als  $J_0$  wählt:

Erstes Feld:

$$2 M_1 h_1' + 6 E J_2 \vartheta_1 = N_1.$$

Zweites Feld:

$$- 2 M_2 h_2' - M_3 h_3' + 6 E J_2 \vartheta_3 = N_2,$$

$$- M_2 h_2' - 2 M_3 (h_2' + h_3') - 6 E J_2 (\vartheta_3 - \vartheta_4) = N_3, \quad \dots a)$$

$$2 M_3 (h_2' + h_3') + M_3 h_3' - 6 E J_2 (\vartheta_6 - \vartheta_7) = N_4,$$

$$M_3 h_2' + 2 M_3 h_3' - 6 E J_2 \vartheta_7 = N_5.$$

Drittes Feld:

$$2 M_4 h_1' - 6 E J_2 \vartheta_9 = N_6.$$

Die Winkelgleichungen nehmen, wenn man die von den Längskräften herrührenden Formänderungen vernachlässigt, folgende einfache Gestalt an (siehe Abb. 65b):

Erstes Feld:

$$+ h_1 \vartheta_1 + s \sin \alpha \cdot \vartheta_2 - h_2 \vartheta_3 = 0$$

$$s \cos \alpha \cdot \vartheta_2 = 0.$$

Zweites Feld:

$$+ h_2 \vartheta_3 + h_3 \vartheta_4 - h_3 \vartheta_6 - h_2 \vartheta_7 = 0$$

$$\vartheta_5 = 0.$$

Drittes Feld:

$$+ h_2 \vartheta_7 - s \sin \alpha \cdot \vartheta_8 - h_1 \vartheta_9 = 0$$

$$s \cos \alpha \cdot \vartheta_8 = 0.$$

<sup>1)</sup> Die Punkte  $B$  und  $C$  liefern wohl vier Momentengleichungen, doch stimmen je zwei Gleichungen miteinander überein.

Aus den Winkelgleichungen folgt ohne weiteres:

$$\vartheta_2 = \vartheta_5 = \vartheta_8 = 0,$$

$$\vartheta_1 = \frac{h_2}{h_1} \vartheta_3 = k \vartheta_3, \quad \vartheta_9 = \frac{h_2}{h_1} \vartheta_7 = k \vartheta_7.$$

Mittels dieser Beziehungen kann man aus den beiden ersten und aus den beiden letzten Momentengleichungen je einen der Stabdrehwinkel eliminieren, z. B.  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_9$ , und so vier Gleichungen gewinnen, von denen die ersten zwei den Winkel  $\vartheta_3$ , die andern zwei den Winkel  $\vartheta_7$  enthalten. Wir finden also, wenn wir  $6 E J_2 = \varrho$  setzen,

$$2 M_1 h_1' + \varrho k \vartheta_3 = N_1,$$

$$- 2 M_2 h_2' - M_5 h_2' + \varrho \vartheta_3 = N_2$$

und daraus nach Entfernung von  $\vartheta_3$

$$2 M_1 h_1' + 2 k M_2 h_2' + k M_5 h_2' = N_1 - k N_2.$$

In der gleichen Weise:

$$M_6 h_2' + 2 M_3 h_2' - \varrho \vartheta_7 = N_5$$

$$2 M_4 h_1' - \varrho k \vartheta_7 = N_6$$

und daraus, wenn man  $\vartheta_7$  eliminiert,

$$- 2 k M_3 h_2' + 2 M_4 h_1' - k M_6 h_2' = N_6 - k N_5.$$

Aus der ersten und letzten der in Rede stehenden vier Gleichungen folgt aber auch

$$\left. \begin{aligned} \varrho \vartheta_3 &= -\frac{2}{k} M_1 h_1' + \frac{N_1}{k}, \\ \varrho \vartheta_7 &= \frac{2}{k} M_4 h_1' - \frac{N_6}{k}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots c)$$

Die Einführung dieser Werte in die mittleren zwei Momentengleichungen der Gruppe a) und in die mittlere der Gleichungen b) liefert, wenn man noch die beiden oben erhaltenen winkelfreien Gleichungen hinzufügt, folgendes System von fünf Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} - M_2 h_2' - 2 M_5 (h_2' + h_3') + \frac{2}{k} M_1 h_1' + \varrho \vartheta_3 &= N_3 + \frac{N_1}{k}, \\ 2 M_6 (h_2' + h_3') + M_3 h_2' + \frac{2}{k} M_4 h_1' - \varrho \vartheta_7 &= N_4 + \frac{N_6}{k}, \\ 2 M_1 h_1' + 2 k M_2 h_2' + k M_5 h_2' &= N_1 - k N_2, \\ 2 M_4 h_1' - k M_6 h_2' - 2 k M_3 h_2' &= N_6 - k N_5, \\ \frac{2}{k} h_1' (M_1 + M_4) - \varrho (\vartheta_3 - \vartheta_7) \frac{h_3}{h_2} &= \frac{1}{k} (N_1 + N_6). \end{aligned} \right\} \dots d)$$

Addiert man die beiden ersten Gleichungen und entfernt die entstehende Winkeldifferenz mittels der letzten Gleichung, so erhält man das endgültige System der drei Bestimmungsgleichungen in der Form:

$$\left. \begin{aligned} (M_3 - M_2) h_2 + 2(M_6 - M_5)(h_2 + h_3) + \frac{2}{k}(M_1 + M_4) \left(1 + \frac{h_2}{h_3}\right) h_1 \frac{J_2}{J_1} \\ = N_3 + N_4 + \frac{1}{k} \left(1 + \frac{h_2}{h_3}\right) (N_1 + N_6), \\ 2 M_1 h_1 \frac{J_2}{J_1} + 2 k M_2 h_2 + k M_5 h_2 = N_1 - k N_2, \\ 2 M_4 h_1 \frac{J_2}{J_1} - k M_6 h_2 - 2 k M_3 h_2 = N_6 - k N_5, \end{aligned} \right\} e)$$

wobei für die reduzierten Längen die ausführlich geschriebenen Werte

$$h_1' = h_1 \frac{J_2}{J_1}, \quad h_2' = h_2, \quad h_3' = h_3$$

eingeführt wurden.

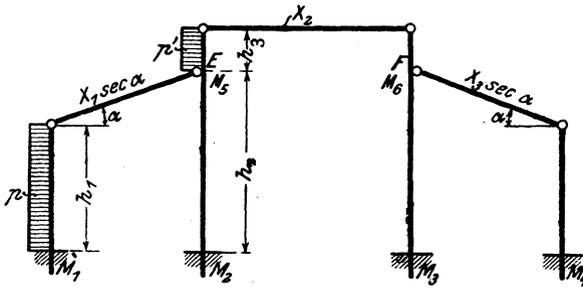


Abb. 66.

Als überzählige Größen wählen wir die wagerechten Teilkräfte der Riegeldrücke,  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$ , Abb. 66, und bestimmen für einige Belastungsfälle den Zusammenhang zwischen den Momenten  $M_1$  bis  $M_6$  und den vorerwähnten  $X$ -Kräften und der Belastung.

**1. Belastungsfall: Die Riegel sind lotrecht belastet.** Es gilt in diesem Falle, falls man die Kräfte  $X$  als Zugkräfte annimmt,

$$\begin{aligned} M_1 &= -X_1 h_1, & M_2 &= -X_1 h_2 - X_2 (h_2 + h_3), \\ M_3 &= -X_2 (h_2 + h_3) + X_3 h_3, & M_4 &= -X_3 h_1, \\ M_5 &= X_2 h_3, & M_6 &= -X_2 h_3, \end{aligned}$$

sämtliche  $N$ -Werte sind Null.

Da die Momente  $M_1$  bis  $M_6$  von  $P$  unabhängig, alle  $N$ -Werte aber Null sind, so verschwinden die rechten Seiten der Bestimmungs-

gleichungen e). Sämtliche Zählerdeterminanten sind daher Null. Daraus folgt

$$X_1 = X_2 = X_3 = 0$$

und somit

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 0.$$

2. *Belastungsfall.* Die Ständer  $h_1$  und  $h_3$  sind mit  $p^{t/m}$  bzw.  $p^{t'/m}$  gleichförmig über ihre ganze Länge belastet. Abb. 66. Es gilt, wenn man die Riegel als gedrückt ansieht,

$$M_1 = -p \frac{h_1^2}{2} + X_1 h_1,$$

$$M_2 = p' h_3 \left( h_2 + \frac{h_3}{2} \right) + X_1 h_2 - X_2 (h_2 + h_3),$$

$$M_3 = X_2 (h_2 + h_3) - X_3 h_2,$$

$$M_4 = X_3 h_1,$$

$$M_5 = p' \frac{h_3^2}{2} - X_2 h_3,$$

$$M_6 = X_2 h_3,$$

$$N_1 = -\frac{1}{4} p h_1^3 \frac{J_2}{J_1}, \quad N_3 = -\frac{1}{4} p' h_3^3, \quad N_2 = N_4 = N_5 = N_6 = 0.$$

Führt man diese Werte in das Gleichungssystem e) ein, so gelangt man zu den Bestimmungsgleichungen für die Überzähligen  $X$  von der Form:

$$\begin{aligned} & \left[ -h_2^2 + \frac{2}{k} h_1^2 \left( 1 + \frac{h_2}{h_3} \right) \frac{J_2}{J_1} \right] X_1 + 2(h_2 + h_3)(h_2 + 2h_3) X_2 \\ & + \left[ -h_2^2 + \frac{2}{k} h_1^2 \left( 1 + \frac{h_2}{h_3} \right) \frac{J_2}{J_1} \right] X_3 \\ & = \frac{3}{4} \frac{p h_1^3}{k} \left( 1 + \frac{h_2}{h_3} \right) \frac{J_2}{J_1} + \frac{p' h_3}{4} (3h_3^2 + 4h_2^2 + 6h_2 h_3), \\ & 2 \left[ h_2^2 + \frac{1}{k} h_1^2 \frac{J_2}{J_1} \right] X_1 - h_2 (2h_2 + 3h_3) X_2 \\ & = \frac{3}{4} \frac{p h_1^3}{k} \frac{J_2}{J_1} - \frac{p' h_2 h_3}{2} (4h_2 + 3h_3), \\ & -h_2 (2h_2 + 3h_3) X_2 + 2 \left[ h_2^2 + \frac{1}{k} h_1^2 \frac{J_2}{J_1} \right] X_3 = 0. \end{aligned}$$

Wir schreiben die Gleichungen in der vereinfachten Gestalt

$$\begin{aligned} \alpha X_1 + \beta X_2 + \alpha X_3 &= Z_1, & \gamma X_1 - \varepsilon X_2 &= Z_2, \\ -\varepsilon X_2 + \gamma X_3 &= 0. \end{aligned}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt

$$X_1 = \frac{Z_2}{\gamma} + \frac{\varepsilon}{\gamma} X_2 \quad \text{und} \quad X_3 = \frac{\varepsilon}{\gamma} X_2.$$

Damit geht die erste Gleichung über in

$$X_2 \left( \beta + 2 \alpha \frac{\varepsilon}{\gamma} \right) = Z_1 - \frac{\alpha}{\gamma} Z_2,$$

somit wird

$$X_2 = \frac{Z_1 - \frac{\alpha}{\gamma} Z_2}{\beta + 2 \frac{\alpha \varepsilon}{\gamma}}$$

und schließlich

$$X_1 = \frac{Z_2}{\gamma} + \frac{\varepsilon}{\gamma} \frac{Z_1 - \frac{\alpha}{\gamma} Z_2}{\beta + 2 \frac{\alpha \varepsilon}{\gamma}},$$

$$X_3 = \frac{\varepsilon}{\gamma} \frac{Z_1 - \frac{\alpha}{\gamma} Z_2}{\beta + 2 \frac{\alpha \varepsilon}{\gamma}}.$$

Zum Schlusse möge noch die Berechnung der Knotenverschiebungen, die von der wagerechten Belastung  $p$  und  $p'$  herrühren, gezeigt werden.

Aus den Gleichungen c) auf S. 78 folgt:

$$\vartheta_3 = -\frac{2}{k_Q} M_1 h_1' + \frac{N_1}{k_Q},$$

$$\vartheta_7 = \frac{2}{k_Q} M_4 h_1' - \frac{N_6}{k_Q}.$$

Mit den Werten von  $N_1$  und  $Q$  erhält man, da  $N_6$  Null ist,

$$\vartheta_3 = -\frac{1}{6kEJ_1} \left( 2M_1 h_1 + \frac{1}{4} p h_1^3 \right),$$

$$\vartheta_7 = \frac{1}{3kEJ_1} M_4 h_1;$$

somit ist auch  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_9$  bekannt, nämlich:

$$\vartheta_1 = k \vartheta_3 \quad \text{und} \quad \vartheta_9 = k \vartheta_7.$$

Die erste Winkelgleichung des Mittelfeldes liefert:

$$\vartheta_4 - \vartheta_8 = \frac{h_2}{h_3} (\vartheta_7 - \vartheta_3)$$

und die dritte Gleichung des Gleichungssystems a) auf S. 77

$$\vartheta_4 = \vartheta_3 + \frac{I}{6EJ_2} \left[ M_2 h_2 + 2M_5 (h_2 + h_3) - \frac{I}{4} p' h_3^3 \right],$$

somit auch

$$\vartheta_8 = \vartheta_3 \left( 1 + \frac{h_2}{h_3} \right) - \frac{h_2}{h_3} \vartheta_7 + \frac{I}{6EJ_2} \left[ M_2 h_2 + 2M_5 (h_2 + h_3) - \frac{I}{4} p' h_3^3 \right].$$

Mit den so berechneten Stabdrehwinkeln ergeben sich die wagerechten Verschiebungen der oberen Ständerpunkte (Abb. 65) wie folgt:

$$\begin{aligned} \Delta G &= \vartheta_1 h_1, & \Delta E &= \vartheta_3 h_2, & \Delta K &= \vartheta_3 h_2 + \vartheta_4 h_3, \\ \Delta H &= \vartheta_9 h_1, & \Delta F &= \vartheta_7 h_2, & \Delta L &= \vartheta_7 h_2 + \vartheta_8 h_3. \end{aligned}$$

Diese Werte reichen in der Regel aus, um über die Steifigkeit des Tragsystems Aufschluß zu erhalten. Die Kenntnis der Formänderungen der Stäbe zwischen den Knotenpunkten ist meistens nicht notwendig; um ein ungefähres Bild zu erhalten, genügt es, aus dem Momentenverlauf die Vorzeichen der Momente und die Momenten-Nullpunkte (Inflexionspunkte der elastischen Linien) zu entnehmen und durch die verschobenen Endpunkte die elastischen Linien beiläufig einzuzeichnen.

**10. Beispiel.** Als ein Muster für die Ermittlung der Überzähligen in einem vielfach statisch unbestimmten Systeme möge die Berechnung der in Abb. 67 dargestellten dreischiffigen Halle, einer Tragwerksform, die im Eisenbetonbau häufig Anwendung findet, ausführlich behandelt werden. Das Tragwerk ist neunfach statisch unbestimmt; es gestattet, da acht einfache Knoten und zwei Knoten mit je drei Anschlußstäben vorliegen, die Aufstellung von  $8 + 2 \cdot 2 = 12$  Viermomentengleichungen und von  $2 \cdot 3 = 6$  Winkelgleichungen. Diesen achtzehn Gleichungen stehen achtzehn Unbekannte gegenüber und zwar: neun Überzählige und neun Drehwinkel.

Die Belastung des Tragwerkes besteht aus dem Winddruck auf die Seitenwände und einer gleichförmig verteilten Belastung der Dachflächen, vom Eigengewicht oder Schneedruck herrührend, die in den Seitenhallen sich auf alle Fälle über die ganze Dachfläche, in der Mittelhalle aber unter Umständen nur über die eine Dachhälfte erstrecken soll. Es ist natürlich von Fall zu Fall jene Lastanordnung zu wählen, die für die zu berechnende Größe einen Höchstwert liefert. Die allgemeine Untersuchung führen wir für den in der Abb. 67a dargestellten Belastungsfall durch, wobei wir den Winddruck für die Längeneinheit mit  $w$ , die lotrechte Belastung der Außenhalle mit  $p'$ , die der Mittelhalle mit  $p''$  bezeichnen. Setzt man in den Endergebnissen alle

Belastungswerte bis auf einen Null, so erhält man den Einfluß dieser Belastung für sich allein.

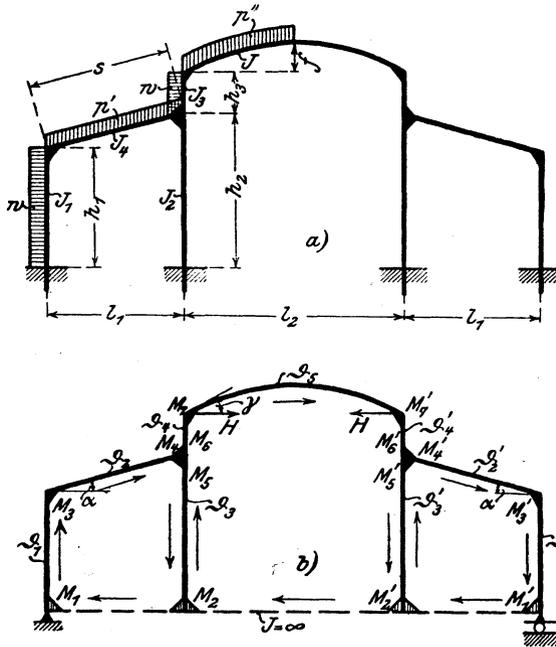


Abb. 67.

Unter Bezugnahme auf Abb. 67b, in der die Umlaufrichtungen durch Pfeile angegeben sind, lauten die Momentengleichungen:

erstes Feld:

$$2M_1 h_1' + M_3 h_1' + 6EJ \vartheta_1 = N_1,$$

$$M_1 h_1' + 2M_3 (h_1' + s') + M_4 s' - 6EJ (\vartheta_1 - \vartheta_2) = N_2,$$

$$M_3 s' + 2M_4 s' - 2M_5 h_2' - M_2 h_2' - 6EJ (\vartheta_2 - \vartheta_3) = N_3^1);$$

zweites Feld:

$$2M_2 h_2' + M_5 h_2' + 6EJ \vartheta_3 = 0,$$

$$M_2 h_2' + 2M_5 h_2' + 2M_6 h_3' + M_7 h_3' - 6EJ (\vartheta_3 - \vartheta_4) = N_4,$$

$$M_6 h_3' + 2M_7 (h_3' + l_2') + M_7' l_2' + 6H \ominus \frac{l_2'}{l_2} - 6EJ (\vartheta_4 - \vartheta_5) = N_5,$$

<sup>1)</sup> Aus Gründen der Symmetrie wurden  $M_2$  und  $M_5$ , vom Mittelfelde aus gesehen, positiv angenommen. Diese Momente erscheinen demnach in dieser Gleichung mit negativem Vorzeichen.

$$M_7 l_2' + 2 M_7' (l_2' + h_3') + M_8' h_3' + 6 H \mathfrak{S} \frac{l_2'}{l_2^2} - 6 EJ (\vartheta_5 - \vartheta_4') = N_6,$$

$$M_7' h_3' + 2 M_8' h_3' + 2 M_5' h_2' + M_2' h_2' - 6 EJ (\vartheta_4' - \vartheta_3') = 0,$$

$$M_5' h_2' + 2 M_2' h_2' - 6 EJ \vartheta_3' = 0;$$

drittes Feld:

$$- M_2' h_2' - 2 M_5' h_2' + 2 M_4' s' + M_3' s' - 6 EJ (\vartheta_3' - \vartheta_2') = 0,$$

$$M_4' s' + 2 M_3' (s' + h_1') + M_1' h_1' - 6 EJ (\vartheta_2' - \vartheta_1') = 0,$$

$$M_3' h_1' + 2 M_1' h_1' - 6 EJ \vartheta_1' = 0.$$

Als  $J_c$  wurde das Trägheitsmoment  $J$  des Mittelhallenbinders angenommen.

$H$  bedeutet die Sehnkraft in diesem Stabe,  $\mathfrak{S}$  das statische Moment der zwischen Sehne und Stabachse gelegenen Fläche, bezogen auf einen der Endpunkte.

Die Winkelgleichungen haben die Form<sup>1)</sup>:

erstes Feld:

$$A_2 l \cos \alpha + h_1 \vartheta_1 + (h_2 - h_1) \vartheta_2 - h_2 \vartheta_3 = 0,$$

$$A_1 l + A_2 l \sin \alpha - A_3 l - l_1 \vartheta_2 = 0;$$

zweites Feld:

$$A_5 l + h_2 \vartheta_3 + h_3 \vartheta_4 - h_3 \vartheta_4' - h_2 \vartheta_3' = 0,$$

$$A_3 l + A_4 l - A_4' l - A_3' l - l_2 \vartheta_5 = 0;$$

drittes Feld:

$$A_2' l \cos \alpha + h_2 \vartheta_3' - (h_2 - h_1) \vartheta_2' - h_1 \vartheta_1' = 0,$$

$$A_3' l - A_2' l \sin \alpha - A_1' l - l_1 \vartheta_2' = 0.$$

Der Einfluß der Längskräfte werde vernachlässigt, da er, wie wir uns später überzeugen werden, unerheblich ist. Da wir aber die Wirkung von Temperaturänderungen kennen lernen wollen, so dürfen die Dehnungen  $\Delta l$  nicht ohne weiteres Null gesetzt werden. Es darf auch nicht übersehen werden, daß bei dem gebogenen Stab des Mittelfeldes die Änderung der Sehnlänge infolge der Biegung berücksichtigt werden muß.

Nimmt man überall gleiche Temperaturänderung an, so gilt mit Hinsicht auf die Symmetrie des Tragwerkes

<sup>1)</sup> In den folgenden Gleichungen wurden die Stabdehnungen  $\Delta l$  mit jenem Zeiger versehen, den der zu dem betreffenden Stab gehörende Drehwinkel  $\vartheta$  besitzt. Um Verwechslungen zu vermeiden, wurde der Zeiger unmittelbar nach dem Zeichen  $\Delta$  gesetzt.

$$\begin{aligned} \Delta_1 l &= \Delta_1' l = \Delta h_1, & \Delta_2 l &= \Delta_2' l = \Delta s, \\ \Delta_3 l &= \Delta_3' l = \Delta h_2, & \Delta_4 l &= \Delta_4' l = \Delta h_3, \\ & & \Delta_5 l &= \Delta l_2. \end{aligned}$$

Ferner setzen wir

$$\sin \alpha = \frac{h_2 - h_1}{s} \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \frac{l_1}{s},$$

mit welchen Werten die Winkelgleichungen folgende Gestalt annehmen:

$$\begin{aligned} \Delta s \frac{l_1}{s} + h_1 \vartheta_1 + (h_2 - h_1) \vartheta_2 - h_2 \vartheta_3 &= 0, \\ \Delta h_1 - \Delta h_2 + \Delta s \frac{h_2 - h_1}{s} - l_1 \vartheta_2 &= 0, \\ \Delta l_2 + h_2 \vartheta_3 + h_3 \vartheta_4 - h_3 \vartheta_4' - h_2 \vartheta_3' &= 0, \\ l_2 \vartheta_5 &= 0, \\ \Delta s \frac{l_1}{s} + h_2 \vartheta_3' - (h_2 - h_1) \vartheta_2' - h_1 \vartheta_1' &= 0, \\ -\Delta h_1 + \Delta h_2 - \Delta s \frac{h_2 - h_1}{s} - l_1 \vartheta_2' &= 0. \end{aligned}$$

Aus der zweiten, vierten und letzten Gleichung folgt:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_2 &= -\frac{\Delta h_2 - \Delta h_1}{l_1} + \frac{h_2 - h_1}{l_1} \frac{\Delta s}{s} = -\frac{h_2 - h_1}{l_1} \alpha_t t + \frac{h_2 - h_1}{l_1} \alpha_t t = 0 \\ \vartheta_2' &= \frac{\Delta h_2 - \Delta h_1}{l_1} - \frac{h_2 - h_1}{l_1} \frac{\Delta s}{s} = \frac{h_2 - h_1}{l_1} \alpha_t t - \frac{h_2 - h_1}{l_1} \alpha_t t = 0, \\ \vartheta_5 &= 0. \end{aligned} \right\} \text{a)}$$

$\alpha_t$  bedeutet die Ausdehnungsziffer für  $1^\circ$  Temperaturschwankung.

Aus den drei übrigen Gleichungen ergeben sich damit:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 &= \frac{h_2}{h_1} \vartheta_3 - \Delta s \frac{l_1}{s} \frac{1}{h_1} = k_1 \vartheta_3 - \alpha_t t \frac{l_1}{h_1} = k_1 \vartheta_3 - N_t, \\ \vartheta_1' &= \frac{h_2}{h_1} \vartheta_3' + \Delta s \frac{l_1}{s} \frac{1}{h_1} = k_1 \vartheta_3' + \alpha_t t \frac{h_1}{h_1} = k_1 \vartheta_3' + N_t, \end{aligned} \right\} \text{b)}$$

$$(\vartheta_4' - \vartheta_4) = \frac{\Delta l_2}{h_3} - (\vartheta_3' - \vartheta_3) \frac{h_2}{h_3} = \frac{\Delta l_2}{h_3} - k_2 (\vartheta_3' - \vartheta_3).$$

Zur Abkürzung wurde

$$k_1 = \frac{h_2}{h_1}, \quad k_2 = \frac{h_2}{h_3} \quad \text{und} \quad N_t = \alpha_t t \frac{l_1}{h_1}$$

gesetzt. Der ausführliche Wert für  $\Delta l_2$  wird später eingeführt werden.

In den ersten zwei Viermomentengleichungen ersetzen wir nun  $\vartheta_1$  durch  $\vartheta_3$  und bezeichnen

$$6EJ = \varrho.$$

Somit lauten die ersten vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2M_1 h_1' + M_3 h_1' + k_1 \varrho \vartheta_3 &= N_1 + \varrho N_t, \\ M_1 h_1' + 2M_3 (h_1' + s') + M_4 s' - k_1 \varrho \vartheta_3 &= N_2 - \varrho N_t, \\ M_3 s' + 2M_4 s' - 2M_5 h_2' - M_2 h_2' + \varrho \vartheta_3 &= N_3, \\ 2M_2 h_2' + M_5 h_2' + \varrho \vartheta_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ebenso ersetzen wir in den letzten zwei Gleichungen  $\vartheta_1'$  durch  $\vartheta_3'$  und gelangen zur folgenden Gleichungsgruppe:

$$\begin{aligned} M_5' h_2' + 2M_2' h_2' - \varrho \vartheta_3' &= 0, \\ -M_2' h_2' - 2M_5' h_2' + 2M_4' s' + M_3' s' - \varrho \vartheta_3' &= 0, \\ M_4' s' + 2M_3' (s' + h_1') + M_1' h_1' + k_1 \varrho \vartheta_3' &= -\varrho N_t, \\ M_3' h_1' + 2M_1' h_1' - k_1 \varrho \vartheta_3' &= \varrho N_t. \end{aligned}$$

Um  $\vartheta_4$  und  $\vartheta_4'$  zu eliminieren, addieren wir die fünfte und sechste Gleichung, sowie die siebente und achte und gewinnen hierdurch

$$\begin{aligned} M_2 h_2' + 2M_5 h_2' + 3M_6 h_3' + M_7 (3h_3' + 2l_2') + M_7' l_2' \\ + 6H \varrho \frac{l_2'}{l_2} - \varrho \vartheta_3 &= N_4 + N_5, \\ M_2' h_2' + 2M_5' h_2' + 3M_6' h_3' + M_7' (3h_3' + 2l_2') + M_7 l_2' \\ + 6H \varrho \frac{l_2'}{l_2} + \varrho \vartheta_3' &= N_6. \end{aligned}$$

Wenn man endlich die mittleren zwei Gleichungen addiert und die entstehende Differenz ( $\vartheta_4' - \vartheta_4$ ) durch die Differenz ( $\vartheta_3' - \vartheta_3$ ) ausdrückt, so findet man noch die Beziehung

$$\begin{aligned} M_6 h_3' + M_7 (2h_3' + 3l_2') + M_7' (2h_3' + 3l_2') + M_6' h_3' \\ + 12H \varrho \frac{l_2'}{l_2} - \varrho k_2 (\vartheta_3' - \vartheta_3) + \varrho \frac{Al_2}{h_3} &= N_5 + N_6. \end{aligned}$$

Damit haben wir an Stelle der ursprünglichen achtzehn Gleichungen elf Gleichungen mit elf Unbekannten (neun Überzählige und zwei Drehwinkel) erhalten.

Nun beseitigen wir die Größen  $\vartheta_3$  und  $\vartheta_3'$ .

Aus der vierten und fünften Gleichung des reduzierten Gleichungssystems findet man

$$\varrho \vartheta_3 = -2M_2 h_2' - M_5 h_2',$$

$$\varrho \vartheta_3' = M_5' h_2' + 2M_2' h_2'.$$

Nach Durchführung der Rechnung erhält man folgende neun Bestimmungsgleichungen, wobei zur Vereinfachung an Stelle der zweiten Gleichung die Summe der ersten und zweiten, statt der siebenten Gleichung die Summe der siebenten und achten gesetzt wurde:

$$\left. \begin{aligned} 2M_1 h_1' - 2k_1 M_2 h_2' + M_3 h_1' - k_1 M_5 h_2' &= N_1 + \varrho N_t, \\ 3M_1 h_1' + M_3(3h_1' + 2s') + M_4 s' &= N_1 + N_2, \\ -3M_2 h_2' + M_3 s' + 2M_4 s' - 3M_5 h_2' &= N_3, \\ -3M_2' h_2' + M_3' s' + 2M_4' s' - 3M_5' h_2' &= 0, \\ 3M_1' h_1' + M_3'(3h_1' + 2s') + M_4' s' &= 0, \\ 2M_1' h_1' - 2k_1 M_2' h_2' + M_3' h_1' - k_1 M_5' h_2' &= \varrho N_t, \\ 3M_2 h_2' + 3M_5 h_2' + 3M_6 h_3' + M_7(3h_3' + 2l_2') + M_7' l_2' \\ &+ 3H\Phi \frac{l_2'}{l_2} = N_4 + N_5, \\ 3M_2' h_2' + 3M_5' h_2' + 3M_6' h_3' + M_7'(3h_3' + 2l_2') + M_7' l_2' \\ &+ 3H\Phi \frac{l_2'}{l_2} = N_6, \\ -2k_2(M_2 + M_2') h_2' - k_2(M_5 + M_5') h_2' + (M_6 + M_6') h_3' \\ &+ (M_7 + M_7') \left( 2h_3' + 3l_2' + \frac{3\Phi}{h_3} \right) \\ &+ 12H\Phi \left( \frac{l_2'}{2l_2} + \frac{\sigma}{h_3} \right) = N_5 + N_6 - \frac{6G}{h_3} \mp \varrho \frac{l_2}{h_3} \alpha_t t. \end{aligned} \right\} c)$$

In den letzten Gleichungen wurde für

$$\varrho = \Phi \frac{l_2}{2}$$

und für

$$\Delta l_2 = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{\Phi}{2} (M_7 + M_7') + 2H\Phi \sigma + G \right] \pm \alpha_t t l_2^1$$

eingeführt.

Wir wählen als statisch unbestimmbare Größen die Momente  $M_1 M_1'$ ,  $M_2 M_2'$ ,  $M_3 M_3'$ ,  $M_4 M_4'$ , sowie die Sehnkraft  $H$  des Stabes  $l_2$  im Mittelfelde.

<sup>1)</sup> Die Dehnung  $\frac{H l_2}{EF}$  wurde wie bei den übrigen Stäben vernachlässigt.

Mit Hilfe der Abb. 68 findet man folgende Gleichgewichtsbeziehungen<sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned}
 M_5 &= M_3 + H_2 h_2 = M_3 + H h_2 - (M_3 - M_1) k_1 + w h_2 \left( \frac{h_1}{2} + h_3 \right), \\
 M_6 &= M_4 + M_5 = M_4 + M_2 + H h_2 - (M_3 - M_1) k_1 + w h_2 \left( \frac{h_1}{2} + h_3 \right), \\
 M_7 &= M_4 + M_5 + (H_1 + H_2) h_3 - w \left( h_1 h_3 + \frac{h_3^2}{2} \right) \\
 &= M_4 + M_2 - (M_3 - M_1) k_1 + H(h_2 + h_3) + w \left[ h_2 \left( \frac{h_1}{2} + h_3 \right) + \frac{h_3^2}{2} \right], \\
 M'_5 &= M'_2 + H'_2 h'_2 = M'_2 + H h'_2 - (M'_3 - M'_1) k_1, \\
 M'_6 &= M'_4 + M'_5 = M'_4 + M'_2 + H h'_2 - (M'_3 - M'_1) k_1, \\
 M'_7 &= M'_4 + M'_5 + (H'_1 + H'_2) h'_3 \\
 &= M'_4 + M'_2 - (M'_3 - M'_1) k_1 + H(h'_2 + h'_3).
 \end{aligned} \right\} d)$$

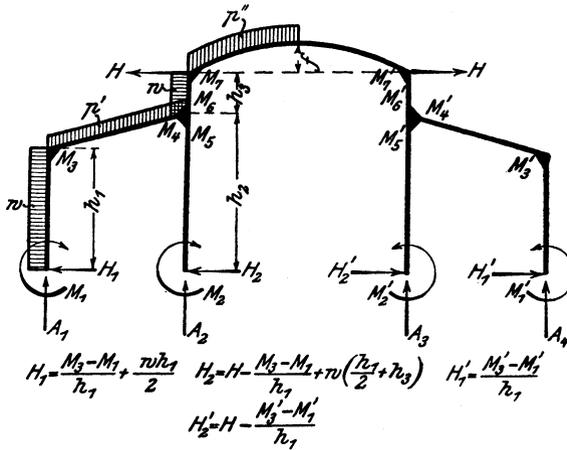


Abb. 68.

Nach Einführung dieser Werte in die Gleichungen c) erhält man das endgültige System der Bestimmungsgleichungen, und zwar zunächst die ersten sechs Gleichungen:

<sup>1)</sup> Bei der Aufstellung dieser Beziehungen beachte man die Bemerkung über das Vorzeichen der Momente in Punkt 4 der Zusammenfassung auf Seite 47.

$$\left. \begin{aligned}
 & M_1(2h_1' - k_1^2 h_2') - 3k_1 M_2 h_2' + M_3(h_1' + k_1^2 h_2') - k_1 H h_2 h_2' \\
 & \quad = \alpha k_1 h_2' w + N_1 + \varrho N_i, \\
 & 3M_1 h_1' + M_3(3h_1' + 2s') + M_4 s' = N_1 + N_2, \\
 - & 3k_1 M_1 h_2' - 6M_2 h_2' + M_3(s' + 3k_1 h_2') + 2M_4 s' - 3H h_2 h_2' \\
 & \quad = 3\alpha h_2' w + N_3, \\
 - & 3k_1 M_1' h_2' - 6M_2' h_3' + M_3'(s' + 3k_1 h_2') + 2M_4' s' - 3H h_2 h_2' = 0, \\
 & 3M_1' h_1' + M_3'(3h_1' + 2s') + M_4' s' = 0, \\
 & M_1'(2h_1' - k_1^2 h_2') - 3k_1 M_2' h_2' + M_3'(h_1' + k_1^2 h_2') - k_1 H h_2 h_2' \\
 & \quad = \varrho N_i.
 \end{aligned} \right\} e)$$

Hierbei wurde zur Vereinfachung für

$$h_2 \left( \frac{h_1}{2} + h_3 \right) = \alpha$$

geschrieben.

Die nächsten beiden Gleichungen des Systems c) benutzen wir, um durch Addition und Subtraktion zwei neue Gleichungen abzuleiten, in denen schließlich mittels der Gleichungen d) alle Momente durch die Überzähligen ausgedrückt werden.

Man erhält mit den Substitutionen

$$\begin{aligned}
 h_2 \left( \frac{h_1}{2} + h_3 \right) + \frac{h_3^2}{2} &= \beta \\
 h_2' + 2h_3' + l_2' &= \varphi_1, \\
 h_2' + 2h_3' + \frac{l_2'}{3} &= \varphi_2, \\
 3 \left( h_3' + l_2' + \frac{\Phi}{h_3} \right) &= \psi
 \end{aligned}$$

die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned}
 & k_1(M_1 + M_1') \varphi_1 + (M_2 + M_2')(\varphi_1 + h_2') - k_1(M_3 + M_3') \varphi_1 \\
 & \quad + (M_4 + M_4')(\varphi_1 - h_2') + 2H \left[ \varphi_1 h_2 + (h_3' + l_2') h_3 + \Phi \frac{l_2'}{l_2} \right] \\
 & \quad = \frac{I}{3} (N_4 + N_5 + N_6) - w [\alpha (h_2' + h_3') + \beta (h_3' + l_2')], \\
 & k_1(M_1 - M_1') \varphi_2 + (M_2 - M_2')(\varphi_2 + h_2') - k_1(M_3 - M_3') \varphi_2 \\
 & \quad + (M_4 - M_4')(\varphi_2 - h_2') \\
 & \quad = \frac{I}{3} (N_4 + N_5 - N_6) - w [\alpha (h_2' + h_3') + \beta (h_3' + \frac{l_2'}{3})],
 \end{aligned} \right\} f)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & k_1(M_1 + M_1')(\psi - k_2 h_2') + (M_2 + M_2')(\psi - 3k_2 h_2') \\
 & - k_1(M_3 + M_3')(\psi - k_2 h_2') + (M_4 + M_4')\psi \\
 & + 2H \left[ h_2(h_3' - k_2 h_2') + (h_2 + h_3)(\psi - h_3') + 6\Phi \left( \frac{l_2'}{2l_3} + \frac{\sigma}{h_3} \right) \right] \\
 & = N_5 + N_6 - w[\alpha(h_3' - k_2 h_2') + \beta(\psi - h_3')] - \frac{6G}{h_3} \mp \varrho \frac{l_2}{h_3} \alpha_t t.
 \end{aligned} \right\} f)$$

Die Gesamtheit der Bestimmungsgleichungen zerfällt in drei Gleichungsgruppen, wobei sich die Systeme e) und e') nur in den Beträgen der rechten Gleichungsseiten unterscheiden. Setzt man nun in den Gleichungen e) die Glieder, die  $M_4$  und  $H$  enthalten, auf die rechten Seiten und bezeichnet diese zusammenfassend mit  $a_1, a_2, a_3$ , so erscheinen nach Einführung der Zahlenwerte auf den linken Seiten dieser drei Gleichungen und nach Auflösung derselben die Momente  $M_1, M_2$  und  $M_3$  als lineare Funktionen von  $a_1, a_2$  und  $a_3$  dargestellt. Diese Lösungen können auch ohne weiteres für die Gleichungen e') verwendet werden, da die Beiwerte der Unbekannten in beiden Gleichungsgruppen dieselben sind. Nun ersetzt man in den so berechneten sechs Lösungen die  $a$ -Werte durch ihre tatsächlichen Beträge, d. h. man bestimmt die Momente  $M_1, M_2, M_3$  und  $M_1', M_2', M_3'$  als Funktionen der übrigen drei Überzähligen  $M_4, M_4'$  und  $H$  und führt die so gewonnenen Ausdrücke in die Gruppe f) ein, wodurch man zu drei Gleichungen mit den drei Unbekannten  $M_4, M_4'$  und  $H$  gelangt, die daraus bestimmt werden können. Damit sind auch alle andern Überzähligen gegeben. Die Berechnung des neunfach statisch unbestimmten Tragwerkes läuft somit auf die Auflösung zweier Gleichungsgruppen mit je drei Unbekannten hinaus.

Wir ermitteln schließlich noch die Beträge für die Belastungsglieder  $N$ . Es ist

$$\left. \begin{aligned}
 N_1 &= -\frac{1}{4} w h_1' h_1^2, \\
 N_2 &= -\frac{1}{4} w h_1' h_1^2 - \frac{1}{4} p' s' l_1^2, \\
 N_3 &= -\frac{1}{4} p' s' l_1^2, \\
 N_4 &= -\frac{1}{4} w h_3' h_3^2, \\
 N_5 &= -\frac{1}{4} w h_3' h_3^2 - \frac{9}{64} p'' l_2' l_2^2, \\
 N_6 &= -\frac{7}{64} p'' l_2' l_2^2.
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots g)$$

Bei der Berechnung von  $N_5$  und  $N_6$  wurde die Gleichung 12) auf S. 36 benutzt. Für  $a_0$  wurde  $\frac{l}{4}$ , für  $\beta, \frac{l}{2}$  gesetzt.

**Zahlenbeispiel:**

Wir wählen folgende Tragwerksabmessungen, und nehmen an, daß der Mittelbogen nach einer Parabel gekrümmt ist.

$$\begin{aligned}
 l_1 &= 8 \text{ m}, & l_2 &= 12 \text{ m}, & f &= 1,50 \text{ m}, & s &= 8,06 \text{ m}, \\
 h_1 &= 5 \text{ m}, & h_2 &= 6 \text{ m}, & h_3 &= 2 \text{ m}, \\
 \frac{J}{J_1} &= 3, & \frac{J}{J_2} &= \frac{J}{J_3} = \frac{J}{J_4} &= 2,
 \end{aligned}$$

somit ist:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{h_2}{h_1} = 1,2, & k_2 &= \frac{h_2}{h_3} = 3, \\
 l_3' &= l_2 \cos^2 \gamma = \frac{l_2^3}{l_2^2 + 16f^2} = 9,6^1),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s' &= s \frac{J}{J_4} = 16,12 \text{ m}, & h_1' &= h_1 \frac{J}{J_1} = 15 \text{ m}, & h_2' &= h_2 \frac{J}{J_2} = 12 \text{ m}, \\
 h_3' &= h_3 \frac{J}{J_3} = 4 \text{ m}.
 \end{aligned}$$

Ferner gilt für den Mittelbogen

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \frac{2}{3} l_2 f = 12 \text{ m}^2, \\
 \sigma &= \frac{2}{5} f = 0,6 \text{ m}.
 \end{aligned}$$

Mit diesen Zahlen findet man die Festwerte

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= 12 + 8 + 9,6 = 29,6 \text{ m}, & \varphi_2 &= 12 + 8 + 3,2 = 23,2 \text{ m}, \\
 \psi &= 3(4 + 9,6 + 6) = 58,8 \text{ m}, \\
 \alpha &= 27 \text{ m}^2 & \text{und} & & \beta &= 29 \text{ m}^2.
 \end{aligned}$$

Das von der Krümmung des Mittelhallenbinders herrührende Glied  $\frac{6G}{h_3}$  ist nach Seite 41 durch die Gleichung gegeben

$$\frac{6G}{h_3} = \frac{6}{h_3} \int_0^l \mathfrak{M}_x y \, dx,$$

worin  $\mathfrak{M}_x$  das statische Moment des nach Abb. 69 belasteten Balkens von  $l_2 = 12 \text{ m}$  Stützweite bedeutet.

Nun ist

$$\text{für } x < \frac{l}{2} \quad \mathfrak{M}_x = \frac{p''}{8} x (3l_2 - 4x),$$

$$\text{für } x > \frac{l}{2} \quad \mathfrak{M}_x = \frac{p''}{8} l_2 (l_2 - x);$$

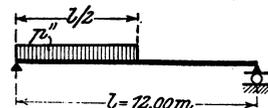


Abb. 69.

$$\text{für } y \text{ setzen wir} \quad y = \frac{4f}{l_2^2} x (l - x).$$

<sup>1)</sup> Bei der Parabel ist  $\text{tg } \gamma = \frac{4f}{l_2^2}$ , daher  $\cos^2 \gamma = \frac{l_2^2}{l_2^2 + 16f^2}$ .

Somit folgt

$$\int_0^x \mathfrak{M}_x y dx = \frac{f}{2l_2^2} p'' \left[ \int_0^{\frac{l_2}{2}} x^2 (l_2 - x) (3l_2 - 4x) dx + \int_{\frac{l_2}{2}}^{l_2} l_2 x (l_2 - x)^2 dx \right]$$

$$= \frac{1}{30} p'' f l_2^3,$$

demnach

$$\frac{6G}{h_3} = \frac{p''}{5} \frac{f}{h_3} l_2^3 = 259,2 p''.$$

Wir berechnen ferner die von der Belastung abhängigen Größen  $N$  nach den Gleichungen g).

Nach Einführung der Zahlenwerte erhält man:

$$\begin{aligned} N_1 &= -93,75 w, & N_2 &= -93,75 w - 257,92 p', \\ N_3 &= -257,92 p', & N_4 &= -4 w, \\ N_5 &= -4 w - 194,4 p'', & N_6 &= -151,2 p''. \end{aligned}$$

Die Gleichungen e) lauten sonach

$$\begin{aligned} 12,72 M_1 - 43,20 M_2 + 32,28 M_3 &= a_1, \\ 45,00 M_1 &+ 77,00 M_3 = a_2, \\ -43,20 M_1 - 72,00 M_2 + 59,32 M_3 &= a_3. \end{aligned}$$

Ihre Auflösung liefert

$$\left. \begin{aligned} 100 M_1 &= 2,46490 a_1 + 0,10569 a_2 - 1,47896 a_3, \\ 100 M_2 &= -2,62609 a_1 + 0,95251 a_2 + 0,20837 a_3, \\ 100 M_3 &= -1,43605 a_1 + 1,23309 a_2 + 0,86164 a_3. \end{aligned} \right\} \dots h)$$

Nun ist in den Gleichungen e)

$$\begin{aligned} a_1 &= 86,40 H + 295,05 w + \varrho N_t, \\ a_2 &= -16,12 M_4 - 187,50 w - 257,92 p', \\ a_3 &= 216,00 H - 32,24 M_4 + 972,00 w - 257,92 p'. \end{aligned}$$

Mit diesen Beträgen wird

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= 0,4598 M_4 - 1,0649 H - 7,2990 w + 3,5419 p' + 0,02465 \varrho N_t, \\ M_2 &= -0,2207 M_4 - 1,8500 H - 7,6151 w - 2,9941 p' - 0,02663 \varrho N_t, \\ M_3 &= -0,4765 M_4 + 0,6200 H + 1,8243 w - 5,4023 p' - 0,01436 \varrho N_t. \end{aligned} \right\} h')$$

Die Lösungen der Gleichungen e') unterscheiden sich von den Lösungen h') nur dadurch, daß die von  $w$  und  $p'$  abhängigen Glieder Null sind. Sie haben sonach die Form

$$\left. \begin{aligned} M_1' &= 0,4598 M_4' - 1,0649 H + 0,02465 \varrho N_t, \\ M_2' &= -0,2207 M_4' - 1,8500 H - 0,02663 \varrho N_t, \\ M_3' &= -0,4765 M_4' - 0,6200 H - 0,01436 \varrho N_t. \end{aligned} \right\} \dots h'')$$

Die Gleichungen f) nehmen nach Ausrechnung der Beiwerte die Gestalt an

$$35,52 (M_1 + M_1') + 41,60 (M_2 + M_2') - 35,52 (M_3 + M_3') + 17,60 (M_4 + M_4') + 428,80 H = - 829,07 w - 115,20 p'',$$

$$27,84 (M_1 - M_1') + 35,20 (M_2 - M_2') - 27,84 (M_3 - M_3') + 11,20 (M_4 - M_4') = - 643,47 w - 14,40 p'',$$

$$27,36 (M_1 + M_1') - 49,20 (M_2 + M_2') - 27,36 (M_3 + M_3') + 58,80 (M_4 + M_4') + 593,60 H = - 729,20 w - 604,80 p'' - 3,75 e N_t.$$

Aus den Gleichungen h') und h'') bestimmt man nun die Momentensummen bzw. -differenzen mit den Zeigern 1, 2 und 3 und führt die Werte in die vorstehenden Gleichungen ein. Als Ergebnis dieser Rechnung finden wir:

$$\left. \begin{aligned} 41,676 (M_4 + M_4') + 155,185 H &= \\ = - 188,222 w - 193,143 p' - 115,2 p'' - 0,5556 e N_t \\ 29,498 (M_4 - M_4') &= - 121,426 w - 143,614 p' - 14,4 p'' \\ 95,276 (M_4 + M_4') + 683,442 H &= \\ = - 854,249 w - 392,023 p' - 604,8 p'' - 8,505 e N_t \end{aligned} \right\} \dots i)$$

In den Gleichungen i) sind nurmehr die Unbekannten  $M_4$ ,  $M_4'$  und  $H$  vertreten. Aus der mittleren Gleichung folgt unmittelbar:

$$(M_4 - M_4') = - 4,1163 w - 4,8637 p' - 0,4881 p''.$$

Die beiden anderen Gleichungen, die nur  $(M_1 + M_1')$  und  $H$  als Unbekannte enthalten, ergeben nach der Auflösung:

$$\begin{aligned} (M_4 + M_4') &= + 0,2866 w - 5,1953 p' + 1,1041 p'' + 0,06863 e N_t, \\ H &= - 1,2899 w + 0,1507 p' - 1,0389 p'' - 0,02200 e N_t. \end{aligned}$$

Aus der Summe und aus der Differenz der Momente  $M_4$  und  $M_4'$  findet man leicht  $M_4$  und  $M_4'$  selbst. Mit diesen Momentenwerten und dem Betrage von  $H$  sind durch die Formeln h') und h'') auch die anderen Unbekannten gegeben. Man findet so:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= - 6,8056 w + 1,0677 p' + 1,2479 p'' + 0,06386 e N_t \\ M_2 &= - 4,8063 w - 2,1623 p' + 1,8540 p'' + 0,00650 e N_t \\ M_3 &= + 1,9368 w - 2,9112 p' - 0,7909 p'' - 0,04435 e N_t \\ M_4 &= - 1,9143 w - 5,0320 p' + 0,3080 p'' + 0,03432 e N_t \end{aligned} \right\} \dots j)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1' &= + 2,3858 w - 0,2355 p' + 1,4723 p'' + 0,06386 e N_t \\ M_2' &= + 1,8995 w - 0,2428 p' + 1,7463 p'' + 0,00650 e N_t \\ M_3' &= - 1,8487 w + 0,1712 p' - 1,0234 p'' - 0,04435 e N_t \\ M_4' &= + 2,2014 w - 0,1633 p' + 0,7961 p'' + 0,03432 e N_t \end{aligned} \right\} \dots j')$$

$$H = - 1,2899 w + 0,1507 p' - 1,0389 p'' - 0,02200 e N_t \dots j'')$$

Damit ist die Aufgabe im Grunde genommen gelöst. Für jede Stelle des Tragwerkes können Moment und Querkraft, sowie die Längskraft auf Grund der Gleichgewichtsbeziehungen festgestellt werden. Setzt man in den Lösungen  $p'$ ,  $p''$  und  $N_t$  Null, so erhält man die Unbekannten für den Winddruck  $w$  auf die Seitenwände. Nimmt man  $w$ ,  $p''$  und  $N_t$  Null an, so findet man den Einfluss einer Belastung  $p'$  des linken Seitenfeldes auf die Überzähligen. Vertauscht man die gestrichelten Momentengrößen mit den ungestrichelten, so liefern diese

Formeln auch den Einfluß einer Belastung des rechten Seitenfeldes. Ebenso geht man vor, um den Einfluß einer Totalbelastung der Mittelöffnung festzustellen. Wählt man  $w$ ,  $p'$  und  $N_i$  Null, so geben die voranstehenden Formeln die Wirkung der Belastung der linken Hälfte des Mittelhallenbinders. Nach Vertauschung der gestrichenen und ungestrichenen Momente erhält man den Einfluß der Belastung der rechten Binderhälfte. Durch Summation der beiden Teileinflüsse kann die Wirkung der Gesamtbelastung erhalten werden. Auf ähnliche Weise lassen sich auch die Einflüsse aller anderen üblichen Lastanordnungen berechnen.

In Anwendung des eben Gesagten mögen einige Belastungsfälle eingehender behandelt werden.

1. Bleibende Belastung.

Das Eigengewicht nehmen wir in allen Feldern mit  $0,33 \text{ t/qm}$  an. Bei einer Binderentfernung von  $6 \text{ m}$  ergibt das  $p' = p'' = 2,0 \text{ t/m}$ .

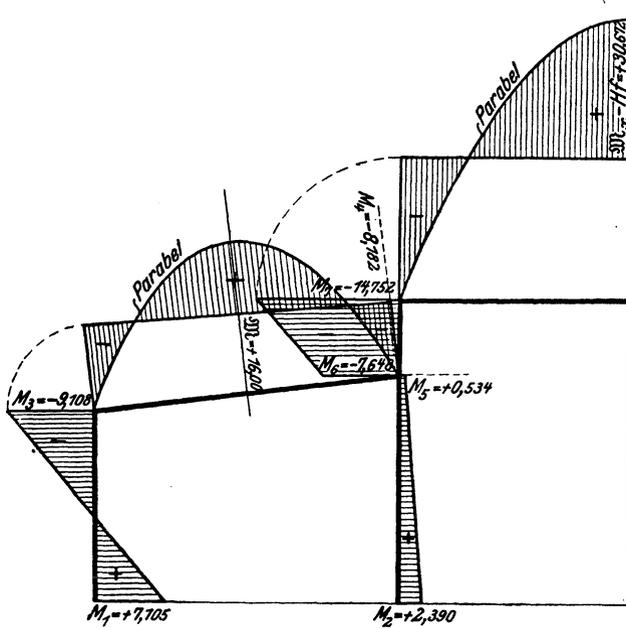


Abb. 70.

Wir berechnen auf Grund der Formeln j), j') und j''), in denen  $w$  und  $N_i$  Null gesetzt werden, die unserer Belastung entsprechenden Momentenwerte. Diese Zahlen finden sich in Tafel 3, Reihe 1 eingetragen. Vertauscht man nun  $M_1$  mit  $M_1'$ ,  $M_2$  mit  $M_2'$  usw., so entsteht die Zahlenreihe 2, die die Momentenwerte für die Belastung der rechten Gebäudehälfte angibt. Die Wirkung der Totalbelastung weist die Ziffernreihe 3 aus, die die Summenbeträge aus 1 und 2 enthält. Aus diesen Werten berechnet man leicht auf Grund der Gleichgewichtsbeziehungen d) auf S. 88 die übrigen Anschlußmomente (siehe die untere Hälfte der Tafel 3), um den Verlauf der Momente übersicht-

lich darstellen zu können. Das Momentendiagramm ist in Abb. 70 ersichtlich gemacht<sup>1)</sup>.

2. Schneebelastung.

Diese Belastung sei ebenfalls über die ganze Dachfläche gleichförmig verteilt angenommen. Da  $s = 0,075$  t/qm ist, so ergibt sich für die Berechnung  $p' = p'' = 6 \cdot 0,075 = 0,45$  t/m.

Man erhält die Zahlenwerte der Kolonne 4, wenn man die der Kolonne 3 mit  $\frac{0,45}{2} = 0,225$  multipliziert.

3. Winddruck auf die Wände.

Der Berechnung wurde ein Winddruck von  $w = 0,150$  t/qm zugrunde gelegt; dies liefert  $w = 6 \cdot 0,150 = 0,900$  t/m. Mit diesem Werte wurde auf Grund der Formeln j), j') und j''), in denen  $p'$ ,  $p''$  und  $N_t$  Null gesetzt wurden, die Reihe 5 in Tafel 3 berechnet und der Verlauf der Momente in Abb. 71 eingetragen.

Tafel 3. Momentenwerte in mt.

Moment	Bleibende Last $p' = p'' = 2$ t/m			Schneelast $p' = p'' = 0,45$ t/m	Winddruck auf die Seitenwände (Wind von links) $w = 0,9$ t/m	Temperatur- änderung $t = + 20^\circ \text{C}$
	Belastung des linken Seitendaches und der linken Hälfte des Mitteldaches	Belastung des rechten Seitendaches und der rechten Hälfte des Mitteldaches	Gesamt- belastung (Summe 1 und 2)			
	1	2	3			
	mt	mt	mt	mt	mt	mt
$M_1$	+ 4,631	+ 2,474	+ 7,105	+ 1,597	- 6,125	+ 2,299
$M_2$	- 0,617	+ 3,007	+ 2,390	+ 0,538	- 4,326	+ 0,234
$M_2'$	+ 3,007	- 0,617	+ 2,390	+ 0,538	+ 1,710	+ 0,234
$M_1'$	+ 2,474	+ 4,631	+ 7,105	+ 1,597	+ 2,147	+ 2,299
$M_3$	- 7,404	- 1,704	- 9,108	- 2,048	+ 1,743	+ 1,597
$M_4$	- 9,448	+ 1,266	- 8,182	- 1,841	- 1,723	+ 1,236
$M_4'$	+ 1,266	- 9,448	- 8,182	- 1,841	+ 1,981	+ 1,236
$M_3'$	- 1,704	- 7,404	- 9,108	- 2,048	- 1,664	+ 1,597
$H_{in t}$	- 1,766	- 1,766	- 3,552	- 0,779	- 1,161	+ 0,792
$M_5$			+ 0,534	+ 0,120	+ 3,566	+ 0,157
$M_6$			- 7,648	- 1,721	+ 1,843	+ 1,393
$M_7$			- 14,752	- 3,319	+ 1,321	+ 0,191
$M_7'$			- 14,752	- 3,319	- 1,024	+ 0,191
$M_6'$			- 7,648	- 1,721	+ 1,298	+ 1,393
$M_5'$			+ 0,534	+ 0,120	- 0,683	+ 0,157

4. Einfluß einer Temperaturänderung.

Es ist:

$$e N_t = 6 E J \frac{l_1}{h_1} \alpha_t t.$$

<sup>1)</sup> Beim Mittelbalken darf nicht der Einfluß der Sehnkraft  $H$  auf die Momente übersehen werden. Für die Bogenmitte ist z. B.:

$$M_{\text{mitte}} = M_7 + \frac{1}{8} p'' l_3^2 + Hf = - 14,752 + 36 - 5,328 = + 15,920 \text{ mt.}$$

Wir wählen  $EJ = 15\,000\text{ tm}^2$  und  $t = 20^\circ$ , dann wird mit  $\alpha_t = 1:80000$ :

$$\rho N_t = 6 \cdot 15\,000 \frac{8}{5} \cdot \frac{20}{80000} = 36.$$

Die berechneten Momentenwerte sind in der Vertikalreihe 6 der Tafel 3 angeführt.

Den Schluß dieses Beispiels möge die Ermittlung der Knotenverschiebungen infolge Windbelastung der Wände (Wind von links) machen.

Wir haben auf S. 87 gefunden:

$$\vartheta_3 = -2 M_2 h_2' - M_5 h_2',$$

$$\vartheta_3' = 2 M_2' h_2' + M_5' h_2'.$$

daraus ergibt sich unmittelbar:

$$\vartheta_3 = -\frac{h_2'}{\rho} (2 M_2 + M_5),$$

$$\vartheta_3' = \frac{h_2'}{\rho} (2 M_2' + M_5').$$

Mit  $h_2' = 12\text{ m}$

und  $\rho = 6 EJ = 90\,000\text{ tm}^2$

erhält man unter Benutzung der Momentenwerte der Reihe 5 in Tafel 3:

$$\vartheta_3 = +0,000678$$

$$\vartheta_3' = +0,000365.$$

Damit ist auch  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_1'$  gegeben, und zwar:

$$\vartheta_1 = k_1 \vartheta_3 = +0,000814,$$

$$\vartheta_1' = k_1 \vartheta_3' = +0,000438.$$

Weiter findet man aus den Momentengleichungen des Mittelfeldes (siehe die Gleichungen auf S. 83 u. 84):

$$6 EJ (\vartheta_3 - \vartheta_4) = M_2 h_2' + 2 M_5 h_2' + 2 M_6 h_2' + M_7 h_2' - N_4,$$

$$6 EJ (\vartheta_4' - \vartheta_3') = M_7' h_2' + 2 M_6' h_2' + 2 M_5' h_2'.$$

Nach dem Einsetzen der Zahlenwerte der Momente aus Tafel 3, Reihe 5 erhält man:

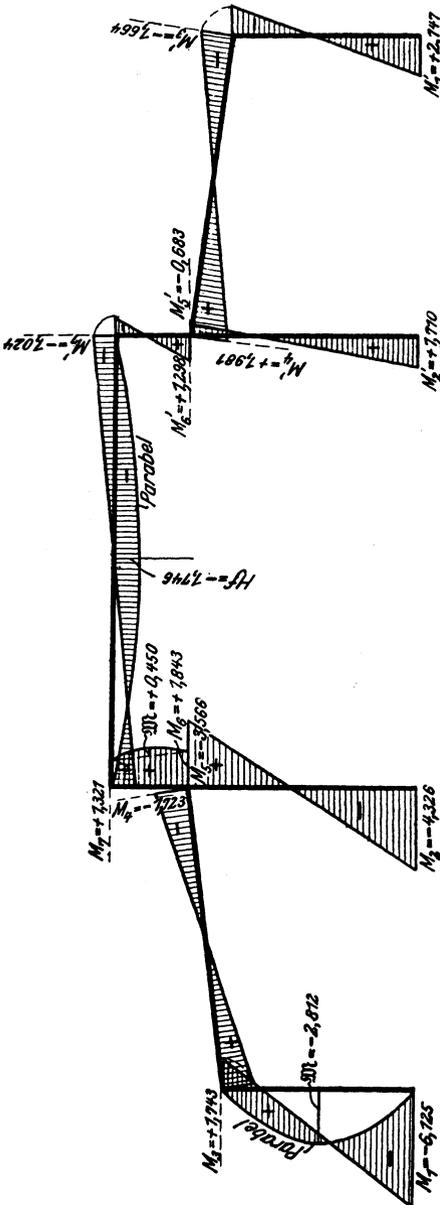


Abb. 71.

$$6 EJ(\vartheta_3 - \vartheta_4) = + 57,30,$$

$$6 EJ(\vartheta_4' - \vartheta_3') = + 10,42^1)$$

somit unter Benutzung der oben errechneten Werte von  $\vartheta_3$  und  $\vartheta_3'$ :

$$\vartheta_4 = \vartheta_3 - \frac{57,30}{6 EJ} = + 0,000041,$$

$$\vartheta_4' = \vartheta_3' + \frac{10,42}{6 EJ} = + 0,000472.$$

Alle übrigen Stabdrehwinkel sind Null. Die Knotenpunkte erleiden sonach nur wagerechte Verschiebungen  $\delta$ , die wir mit dem kleinsten Momentenzeiger des betreffenden Knotens bezeichnen, und zwar:

$$\delta_3 = h_1 \vartheta_1 = 0,000814 \cdot 500 = 0,407 \text{ cm}$$

$$\delta_4 = h_2 \vartheta_3 = 0,000678 \cdot 600 = 0,407 \text{ cm}$$

$$\delta_7 = \delta_4 + h_3 \vartheta_4 = 0,407 + 0,000041 \cdot 200 = 0,415 \text{ cm}$$

$$\delta_3' = h_1 \vartheta_1' = 0,000438 \cdot 500 = 0,219 \text{ cm}$$

$$\delta_4' = h_2 \vartheta_3' = 0,000365 \cdot 600 = 0,219 \text{ cm}$$

$$\delta_7' = \delta_4' + h_3 \vartheta_4' = 0,219 + 0,000472 \cdot 200 = 0,313 \text{ cm}.$$

Benutzt man diese Verschiebungswerte und die Anhaltspunkte, die das Momentendiagramm, Abb. 71, für die Lage der Inflexionspunkte (Momentennullpunkte) und für die Richtung der Verbiegung bietet, dann läßt sich ein anschauliches Bild von dem Verzerrungszustand des Tragwerkes herstellen, ohne daß es notwendig wäre, die genaue Form der elastischen Linien zwischen zwei Knoten rechnerisch festzulegen. Abb. 72 zeigt die Verzerrungsfigur in 200-facher Übertreibung.

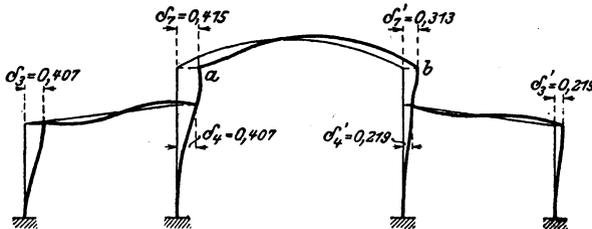


Abb. 72.

Die eben ermittelten Verschiebungswerte wollen wir benutzen, um die eingangs gemachte Voraussetzung, daß der Einfluß der Längskräfte auf die Formänderungen gering sei und daher vernachlässigt werden könne, zu überprüfen. Zu diesem Zwecke betrachten wir den Binderstab  $l_3$  des Mittelschiffes. Seine Sehnenkraft wurde für Windbelastung mit:

$$H = - 1,161 \text{ t (Druck)}$$

bestimmt. (Siehe Reihe 5 in Tafel 3.)

<sup>1)</sup> Das positive Vorzeichen der Drehwinkel  $\vartheta$  besagt, daß die Verdrehung derart erfolge, daß die Winkel  $\alpha$  der Winkelgleichungen verkleinert werden.

Nimmt man im Zusammenhange mit dem oben gewählten  $EJ$ -Betrag  $EF = 300000 \text{ t}$  an, so ergibt sich die Zusammendrückung des Stabes  $l_2$ , wenn man die Längskraft, genau genug, überall gleich  $H$  setzt.

$$\Delta l = \frac{1,161 \cdot 12,00}{300000} = 0,000047 \text{ m} = 0,0047 \text{ cm}.$$

Um diesen Betrag hat sich der Stab  $ab$  (Abb. 72) verkürzt. Denkt man sich die Wirkung dieser Verkürzung nur bei Punkt  $b$  zum Ausdruck kommend, welche Annahme die ungünstigste ist, die wir machen können, so ist die Verschiebung in Abb. 72 um den Betrag  $0,0047 \text{ cm}$  zu groß angegeben. Der Fehler beträgt in Hundertteilen

$$f = \frac{100 \cdot 0,0047}{0,313} = 1,50 \text{ v. H.}$$

Der angegebene Verschiebungszustand des Systems ist demnach im Punkte  $b$  mit einem Fehler behaftet, dessen obere Grenze  $1,5 \text{ v. H.}$  beträgt.

Macht man eine ähnliche Berechnung für die beiden Binderstäbe der Außenfelder, so findet man die betreffenden Fehler (mit  $EF = 200000 \text{ t}$  gerechnet) mit

$$f_1 = 0,67 \text{ v. H.} \quad \text{und} \quad f_2 = 1,56 \text{ v. H.}$$

Die Fehler der aus dem angenähert bestimmten Verschiebungszustand ermittelten statisch unbestimmbaren Größen werden sich in der gleichen Größenordnung bewegen.

**11. Beispiel.** Die Berechnung des bekannten Lohseträgers, dessen Überzähligen meist mittels Näherungsverfahren bestimmt werden, gestaltet sich selbst bei beliebiger Form und Querschnittsanordnung der beiden Gurtbogen verhältnismäßig einfach und übersichtlich. Das Tragsystem ist in Abb. 73 dargestellt. Die Berechnung wird hier für den Fall von  $n$  gleich breiten Feldern durchgeführt, unter der Annahme, daß Lasten nur in den Knotenpunkten übertragen werden können<sup>1)</sup>.

Bei  $n$  Feldern ist das System  $n$ -fach statisch unbestimmt. Die Momente in den Obergurtknotenpunkten werden mit  $M^o$ , die in den Untergurtknoten mit  $M^u$  bezeichnet. Die Neigungswinkel der Obergurtstäbe gegen die Verbindungslinie  $o-n$  nennen wir  $\alpha$ , die des Untergurtes  $\beta$ .

Da die Pfosten gelenkig angeschlossen sind, so kommen sie für die Momentengleichungen nicht in Betracht, wir denken sie uns bei der Aufstellung derselben weggehoben. Man hat es daher beim Ansatz der Momentengleichungen nur mit einem einfachen geschlossenen Rahmen aus  $2n$  Stäben, der in  $o$  und  $n$  Gelenke hat, zu tun. Es sind somit  $2(n-1)$  ausgezeichnete Punkte vorhanden, denen  $2n-2$  Dreimo-

<sup>1)</sup> Eine genaue Berechnung mittels der Arbeitsgleichungen bei unveränderlichem Querschnitt der Tragbalken wurde vom Verfasser in: „Vom Wettbewerb um den Umbau der Aspernbrücke über den Donaukanal in Wien,“ Eisenbau 1915, Heft 3—5, mitgeteilt.

mentengleichungen entsprechen. Wir beginnen bei Punkt  $o$  und schreiten im Obergurt nach rechts fort. Den Untergurt sollten wir dann der Regel gemäß von  $n$  gegen  $o$  durchschreiten. Da aber beide Hälften durch Gelenke getrennt und auch sonst keine gemeinsamen Stäbe vorhanden sind, das System der Dreimomentengleichungen des Obergurtes also vollständig unabhängig von dem des Untergurtes ist, so steht es frei, für den Untergurt eine andere Reihenfolge zu wählen. Wir werden demnach auch den Untergurt von links nach rechts durchschreiten. Für beide Gurte sind dann positive Momente solche, welche die Stäbe nach unten zu wölben trachten.

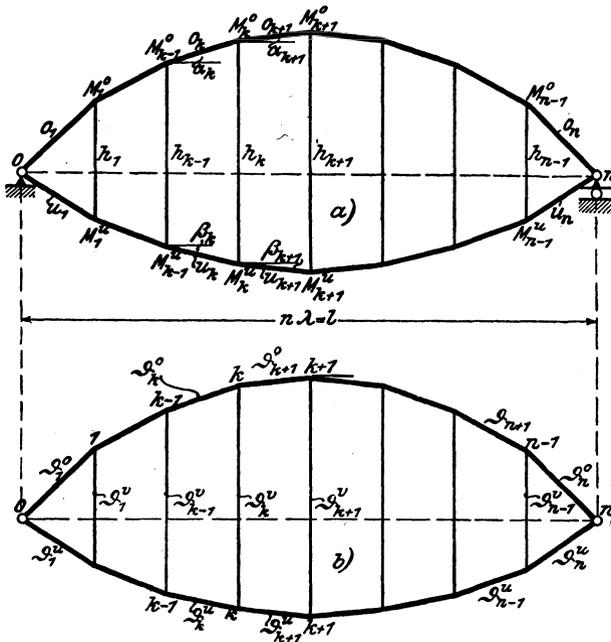


Abb. 73.

Außer den  $2n - 2$  Momentengleichungen können bei  $n$  Feldern  $2n$  Winkelgleichungen aufgestellt werden, so daß zur Berechnung sämtlicher Unbekannten, d. s.  $n$  Überzählige und  $3n - 2$  Stabdrehwinkel,  $4n - 2$  Gleichungen zur Verfügung stehen.

Den Einfluß der Längenänderungen der Gurtstäbe infolge der Stablängskräfte und Temperaturänderungen wollen wir mit in Rechnung ziehen. Es ist nun nicht notwendig, sämtliche Dreimomenten- und Winkelgleichungen anzuschreiben, da sie gesetzmäßigen Bau haben und sich nur durch die aufeinanderfolgenden Zeiger ihrer Glieder unterscheiden.

Wir wählen einen beliebigen Punkt  $k$  aus und stellen für diesen Punkt die Momentengleichung des Ober- bzw. Untergurtes auf. Mit den Bezeichnungen der Abb. 73 finden wir:

$$\left. \begin{aligned} &\text{für den Obergurt:} \\ &M_{k-1}^o o'_k + 2M_k^o(o'_k + o'_{k+1}) + M_{k+1}^o o'_{k+1} - \varrho(\vartheta_k^o - \vartheta_{k+1}^o) = 0 \\ &\text{für den Untergurt:} \\ &M_{k-1}^u u'_k + 2M_k^u(u'_k + u'_{k+1}) + M_{k+1}^u u'_{k+1} - \varrho(\vartheta_k^u - \vartheta_{k+1}^u) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ a)}$$

Hierin ist

$$\varrho = 6EJ_c,$$

wobei  $J_c$  ein beliebig gewähltes Trägheitsmoment bedeutet, mit dem die Werte  $o'$  und  $u'$  in der bekannten Weise berechnet werden. Setzt man in den Gleichungen a) der Reihe nach  $k = 1, 2 \dots n - 1$ , so erhält man die sämtlichen  $2n - 2$  Dreimomentengleichungen.

Wir stellen nun die Winkelgleichungen für das  $k$ -te und  $k + 1$ -ste Feld auf, wobei die Längenänderungen der Pfosten als unerheblich vernachlässigt werden. Die Gleichungen lauten für das  $k$ -te Feld:

$$\Delta o_k \cos \alpha_k - \Delta u_k \cos \beta_k + h_{k-1} \vartheta_{k-1}^v + \vartheta_k^o o_k \sin \alpha_k - h_k \vartheta_k^v + \vartheta_k^u u_k \sin \beta_k = 0$$

$$\Delta o_k \sin \alpha_k + \Delta u_k \sin \beta_k - \vartheta_k^o o_k \cos \alpha_k + \vartheta_k^u u_k \cos \beta_k = 0$$

und für das  $k + 1$ -ste Feld:

$$\Delta o_{k+1} \cos \alpha_{k+1} - \Delta u_{k+1} \cos \beta_{k+1} + h_k \vartheta_k^v + \vartheta_{k+1}^o o_{k+1} \sin \alpha_{k+1} - h_{k+1} \vartheta_{k+1}^v + \vartheta_{k+1}^u u_{k+1} \sin \beta_{k+1} = 0$$

$$\Delta o_{k+1} \sin \alpha_{k+1} + \Delta u_{k+1} \sin \beta_{k+1} - \vartheta_{k+1}^o o_{k+1} \cos \alpha_{k+1} + \vartheta_{k+1}^u u_{k+1} \cos \beta_{k+1} = 0.$$

Wir setzen nun:

$$o \cos \alpha = u \cos \beta = \lambda$$

$$o \sin \alpha = \lambda \operatorname{tg} \alpha \quad \text{und} \quad u \sin \beta = \lambda \operatorname{tg} \beta$$

und erhalten, wenn wir die Gleichungen in etwas anderer Reihenfolge schreiben:

$$\left. \begin{aligned} &\Delta o_k \cos \alpha_k - \Delta u_k \cos \beta_k - (h_k \vartheta_k^v - h_{k-1} \vartheta_{k-1}^v) + \lambda(\vartheta_k^o \operatorname{tg} \alpha_k + \vartheta_k^u \operatorname{tg} \beta_k) = 0 \\ &\Delta o_{k+1} \cos \alpha_{k+1} - \Delta u_{k+1} \cos \beta_{k+1} - (h_{k+1} \vartheta_{k+1}^v - h_k \vartheta_k^v) + \lambda(\vartheta_{k+1}^o \operatorname{tg} \alpha_{k+1} + \vartheta_{k+1}^u \operatorname{tg} \beta_{k+1}) = 0 \end{aligned} \right\} \dots \text{ b)}$$

$$\left. \begin{aligned} &\Delta o_k \sin \alpha_k + \Delta u_k \sin \beta_k - \lambda(\vartheta_k^o - \vartheta_k^u) = 0 \\ &\Delta o_{k+1} \sin \alpha_{k+1} + \Delta u_{k+1} \sin \beta_{k+1} - \lambda(\vartheta_{k+1}^o - \vartheta_{k+1}^u) = 0 \end{aligned} \right\} \dots \text{ c)}$$

Wir ziehen nun die beiden Momentengleichungen a) voneinander ab

$$M_{k-1}^o o'_k - M_{k-1}^u u'_k + 2 [M_k^o (o'_k + o'_{k+1}) - M_k^u (u'_k + u'_{k+1})] + M_{k+1}^o o'_{k+1} - M_{k+1}^u u'_{k+1} - \varrho (\vartheta_k^o - \vartheta_k^u) + \varrho (\vartheta_{k+1}^o - \vartheta_{k+1}^u) = 0.$$

Ebenso subtrahieren wir die Winkelgleichungen c) voneinander

$$\Delta o_k \sin \alpha_k - \Delta o_{k+1} \sin \alpha_{k+1} + \Delta u_k \sin \beta_k - \Delta u_{k+1} \sin \beta_{k+1} - \lambda (\vartheta_k^o - \vartheta_k^u) + \lambda (\vartheta_{k+1}^o - \vartheta_{k+1}^u) = 0.$$

Die beiden letzten Glieder der so erhaltenen neuen Gleichungen sind, wenn man von den Faktoren  $\lambda$  und  $\varrho$  absieht, einander gleich, und wir gewinnen daher aus beiden Gleichungen die Beziehung

$$M_{k-1}^o o'_k - M_{k-1}^u u'_k + 2 [M_k^o (o'_k + o'_{k+1}) - M_k^u (u'_k + u'_{k+1})] + M_{k+1}^o o'_{k+1} - M_{k+1}^u u'_{k+1} - r_k = 0, \quad \dots \quad \text{d)}$$

wobei

$$r_k = \frac{\varrho}{\lambda} [\Delta o_k \sin \alpha_k - \Delta o_{k+1} \sin \alpha_{k+1} + \Delta u_k \sin \beta_k - \Delta u_{k+1} \sin \beta_{k+1}] \quad \text{d}'$$

bedeutet.

Gleichung d) enthält keine Drehwinkel mehr, sie ist demnach eine Bestimmungsgleichung. Da für  $k$  der Reihe nach  $1, 2, \dots, n-1$  gesetzt werden kann, so stehen  $n-1$  Gleichungen der Form d) zur Verfügung. Um die letzte noch fehlende Beziehung zu bestimmen, geht man folgendermaßen vor:

Aus der ersten der Winkelgleichungen c) berechnet man

$$\lambda \vartheta_k^u = \lambda \vartheta_k^o - (\Delta o_k \sin \alpha_k + \Delta u_k \sin \beta_k)$$

Nach Einführung dieses Ausdruckes für  $\lambda \vartheta_k^u$  in die erste der Winkelgleichungen b) entsteht

$$(\Delta o_k \cos \alpha_k - \Delta u_k \cos \beta_k) - (\Delta o_k \sin \alpha_k + \Delta u_k \sin \beta_k) \operatorname{tg} \beta_k + \lambda \vartheta_k^o (\operatorname{tg} \alpha_k + \operatorname{tg} \beta_k) - (h_k \vartheta_k^o - h_{k-1} \vartheta_{k-1}^o) = 0.$$

Derartige Gleichungen können in der Zahl  $n$  aufgestellt werden. Die erste enthält bloß  $h_1 \vartheta_1^o$ , die zweite die Differenz  $h_2 \vartheta_2^o - h_1 \vartheta_1^o$ , die dritte  $h_3 \vartheta_3^o - h_2 \vartheta_2^o$  usw. Addiert man diese  $n$  Gleichungen, so heben sich sämtliche Glieder  $h \vartheta^o$  weg und die Summengleichung erhält die Form

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n [\Delta o_k (\cos \alpha_k - \sin \alpha_k \operatorname{tg} \beta_k) - \Delta u_k (\cos \beta_k + \sin \beta_k \operatorname{tg} \beta_k)] \\ = - \sum_{k=1}^n \vartheta_k^o \lambda (\operatorname{tg} \alpha_k + \operatorname{tg} \beta_k). \end{aligned}$$

Da nun  $\lambda(\operatorname{tg} \alpha_k + \operatorname{tg} \beta_k) = h_k - h_{k-1}$  ist, so nimmt die obige Gleichung, wenn noch auf der rechten Seite  $\operatorname{tg} \beta$  durch  $\frac{\sin \beta}{\cos \beta}$  ersetzt und auf gemeinsamem Nenner gebracht wird, folgende Gestalt an:

$$\sum_{k=1}^n \vartheta_k^o (h_k - h_{k-1}) = -t, \quad \dots \dots \dots \text{e)}$$

wobei

$$t = \sum_{k=1}^n \left[ \Delta o_k \frac{\cos(\alpha_k + \beta_k)}{\cos \beta_k} - \Delta u_k \frac{1}{\cos \beta_k} \right] \dots \dots \dots \text{e')}$$

ist.

Wir multiplizieren jetzt die Momentengleichungen des Obergurtes in der Gruppe a) der Reihe nach mit  $h_1, h_2 \dots h_{n-1}$  und addieren sodann.

Man erhält:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} [M_{k-1}^o o'_k + 2M_k^o (o'_k + o'_{k+1}) + M_{k+1}^o o'_{k+1}] h_k \\ - \varrho \sum_{k=1}^{n-1} (\vartheta_k^o - \vartheta_{k+1}^o) h_k = 0. \end{aligned}$$

Wir schreiben das zweite Summenglied, in seine Elemente zerlegt, in übersichtlicher Form an:

$$\begin{aligned} \vartheta_1^o h_1 - \vartheta_2^o h_1 \\ + \vartheta_2^o h_2 - \vartheta_3^o h_2 \\ + \vartheta_3^o h_3 - \vartheta_4^o h_3 \\ \dots \\ \vartheta_{n-2}^o h_{n-2} - \vartheta_{n-1}^o h_{n-2} \\ + \vartheta_{n-1}^o h_{n-1} - \vartheta_n^o h_{n-1}. \end{aligned}$$

Nun ist, wenn man je zwei übereinander stehende Glieder zusammenfaßt,

$$\begin{aligned} \vartheta_1^o (h_1 - h_0) + \vartheta_2^o (h_2 - h_1) + \vartheta_3^o (h_3 - h_2) + \dots + \vartheta_{n-1}^o (h_{n-1} - h_{n-2}) \\ + \vartheta_n^o (h_n - h_{n-1}) = \sum_{k=1}^n \vartheta_k^o (h_k - h_{k-1}), \end{aligned}$$

wobei zur Vervollständigung des Zahlenbildes das erste und letzte Glied durch  $h_0$  und  $h_n$ , die beide Null sind, ergänzt wurden. Der so gewonnene Summenwert ist aber bereits durch Gleichung e) bestimmt und man gelangt somit zur letzten Elastizitätsbedingung:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (M_{k-1}^o o_k' + 2 M_k^o (o_k' + o_{k+1}') + M_{k+1}^o o_{k+1}') h_k + \varrho t = 0.$$

Wir formen den linksstehenden Summenausdruck noch um. Zu diesem Zwecke schreiben wir drei aufeinander folgende Glieder der Summe ausführlich an, nämlich

$$\begin{aligned} M_{k-2}^o o_{k-1}' h_{k-1} + 2 M_{k-1}^o (o_{k-1}' + o_k') h_{k-1} + M_k^o o_k' h_{k-1} \\ + M_{k-1}^o o_k' h_k \qquad \qquad \qquad + 2 M_k^o (o_k' + o_{k+1}') h_k + M_{k+1}^o o_{k+1}' h_k \\ + M_k^o o_{k+1}' h_{k+1} \qquad \qquad \qquad + \dots \end{aligned}$$

Somit treten immer drei Glieder von  $M^o$  mit gemeinsamem Zeiger auf, der voranstehenden Gleichung kann daher folgende endgültige Form gegeben werden:

$$\sum_{k=1}^{n-1} M_k^o [o_k' (h_{k-1} + 2 h_k) + o_{k+1}' (2 h_k + h_{k+1})] + \varrho t = 0. \dots f)$$

Es bleibt noch übrig, die in den Elastizitätsbedingungen d) und f) vorkommenden Momente  $M$  und Längenänderungen  $\Delta l$  in den Ausdrücken  $r$  und  $t$  durch die  $n$  Überzähligen, die tunlichst zweckmäßig auszuwählen sind, zu ersetzen, um zu den Bestimmungsgleichungen zu gelangen. Mit Rücksicht auf die einfachen statischen Beziehungen, die zwischen Obergurt- und Untergurtnotenmomenten bestehen, wähle man die eine Hälfte dieser Momente, z. B. die Obergurtnotenmomente, als  $n - 1$  Überzählige. In der Gleichung f) sind dann, wenn man zunächst vom Gliede  $\varrho t$  absehen will, keine Änderungen mehr vorzunehmen. In den  $n - 1$  Elastizitätsbedingungen d) ist der Ersatz des  $M^u$  durch das  $M^o$  desselben Feldes sehr einfach, es wird auch hierdurch die Zahl der Glieder in den Gleichungen nicht vermehrt, was für die Auflösung der Gleichungen wichtig ist. Als letzte Überzählige wähle man die Horizontalkraft  $H$ , die in den Verbindungspunkten  $o$  und  $n$  vom Oberteil auf den Unterteil übertragen wird, weil sich durch diese Kraft alle Stablängskräfte und somit die in den Gliedern  $r$  und  $t$  enthaltenen Längenänderungen  $\Delta o$  und  $\Delta u$  einfach ausdrücken lassen. Der Vorteil, den unsere Methode durch Feststellung der Elastizitätsbedingungen vor der Wahl der Überzähligen bietet, ist hier, wo es sich um die Auflösung einer großen Zahl von Gleichungen handelt, besonders einleuchtend. Wollte man z. B. die Hängestangenkräfte als Überzählige benutzen, so würde man sofort nach Aufstellung der statischen Beziehungen erkennen, daß sich die Zahl der Gleichungsglieder bedeutend vermehren und hierdurch die Arbeit der Ermittlung der Unbekannten aus den Gleichungen vervielfachen würde.

Behufs Aufstellung der Gleichgewichtsbeziehungen betrachten wir Abb. 74, die die linke Hälfte des in einem beliebigen Felde knapp neben den Knoten  $k$  entzwei geschnittenen Tragwerkes darstellt. Die im Ober- und Untergurt übertragenen Schnittkräfte sind die Momente  $M_k^o$  und  $M_k^u$ , die Knotenmomente unserer Momentengleichungen, ferner die waagerechte Schubkraft  $H$ , welche im Ober- und Untergurt gleich ist, nachdem wir nur lotrechte äußere Kräfte voraussetzen wollen, und schließlich die Querkraft  $Q_k^o$  und  $Q_k^u$ . Das Moment aller links vom Schnitte liegenden äußeren Kräfte, bezogen auf die unendlich nahe neben den Knoten geführte Schnittlinie  $s-s$ , sei  $\mathfrak{M}_k r_k = \mathfrak{M}_k$ . Die einzige in Betracht kommende Gleichgewichtsbeziehung lautet daher, wenn sämtliche Momente auf den Obergurtschwerpunkt der Schnittstelle bezogen werden:

und daraus

$$M_k^o + M_k^u + H h_k - \mathfrak{M}_k = 0^1)$$

$$M_k^u = -M_k^o - H h_k + \mathfrak{M}_k \dots \dots \dots g)$$

Es ist hierbei gleichgültig, wo die äußeren Kräfte angreifen, ob an dem Obergurt, Untergurt oder zwischen beiden Gurten an den Hängestangen. Führt man für sämtliche  $M^u$  den Wert nach Gleichung g) ein, so nehmen die Elastizitätsbedingungen d) und f) zunächst die Form an

$$\begin{aligned} &M_{k-1}(o_k' + u_k') + 2 M_k(o_k' + u_k' + o_{k+1}' + u_{k+1}') + M_{k+1}(o_{k+1}' + u_{k+1}') \\ &\quad + H[u_k'(h_{k-1} + 2 h_k) + u_{k+1}'(2 h_k + h_{k+1})] - r_k \\ &= \mathfrak{M}_{k-1} u_k' + 2 \mathfrak{M}_k(u_k' + u_{k+1}') + \mathfrak{M}_{k+1} u_{k+1}' \\ &\quad \sum_{k=1}^{n-1} M_k[o_k'(h_{k-1} + 2 h_k) + o_{k+1}'(2 h_k + h_{k+1})] + \varrho t = 0. \end{aligned}$$

Da eine Verwechslung zwischen Obergurt und Untergurt nicht mehr möglich ist, so haben wir den oberen Zeiger  $o$  weggelassen, bemerken aber ausdrücklich, daß unter  $M_k$  das Moment im Knoten  $k$  des Obergurtes verstanden wird. Gleichung f), die wir hier nochmals eingestellt haben, ist unverändert geblieben.

<sup>1)</sup> Die Momente  $M_k^o$  und  $M_k^u$  sind in Abb. 74 gemäß den Festsetzungen am Beginn dieses Beispiels positiv drehend angenommen.

Nun haben wir noch die Aufgabe, die Ausdrücke  $r$  und  $t$  zu berechnen. Zu diesem Behufe müssen die Längenänderungen  $\Delta o$  und  $\Delta u$  durch die Überzähligen ausgedrückt werden. Da der Einfluß dieser Glieder auf die Unbekannten verhältnismäßig gering ist, so genügt es, die Stablängskräfte  $O$  und  $U$  durch die Gleichungen

$$O \doteq -H \cos \alpha, \quad U = H \cos \beta$$

zu beschreiben. Hierbei ist der Einfluß der Querkräfte des Tragwerkes auf die Stablängskräfte vernachlässigt. Mit Rücksicht auf die in Abb. 74 angenommenen Richtungen der Schnittkräfte  $H$  ergibt sich  $O$  als Druckspannung,  $U$  als Zugspannung, was wir durch Vorsetzen des  $-$ -Zeichen vor  $O$  berücksichtigt haben. Es ist somit

$$\Delta o = -H \frac{o \cos \alpha}{E F^o}, \quad \Delta u = H \frac{u \cos \beta}{E F^u}.$$

Da  $o \cos \alpha = u \cos \beta = \lambda$  ist, so wird

$$\Delta o = -H \frac{\lambda}{E F^o} \quad \text{und} \quad \Delta u = H \frac{\lambda}{E F^u}.$$

Mit diesen Werten geht  $r_k$  über in

$$r_k = 6H \left[ -\frac{J_c}{F_k^o} \sin \alpha_k + \frac{J_c}{F_{k+1}^o} \sin \alpha_{k+1} + \frac{J_c}{F_k^u} \sin \beta_k - \frac{J_c}{F_{k+1}^u} \sin \beta_{k+1} \right] h$$

und  $qt$  in

$$qt = -6H\lambda \sum_{k=1}^n \left[ \frac{J_c}{F_k^o} \frac{\cos(\alpha_k + \beta_k)}{\cos \beta_k} + \frac{J_c}{F_k^u} \frac{1}{\cos \beta_k} \right]. \quad \dots \dots i)$$

Wie man erkennt, sind  $r$  und  $t$  nur von  $H$  abhängig und stellen Zusatzglieder der Koeffizienten dieser Unbekannten vor. Die Bestimmungsgleichungen für die statisch unbestimmbaren Größen  $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$  und  $H$  nehmen daher die folgende endgültige Gestalt an:

$$\begin{aligned} &M_{k-1}(o_k' + u_k') + 2M_k(o_k' + u_k' + o_{k+1}' + u_{k+1}') + M_{k+1}(o_{k+1}' + u_{k+1}') \\ &+ H \left[ u_k'(h_{k-1} + 2h_k) + u_{k+1}'(2h_k + h_{k+1}) + \right. \\ &+ 6 \left( \frac{J_c}{F_k^o} \sin \alpha_k - \frac{J_c}{F_{k+1}^o} \sin \alpha_{k+1} - \frac{J_c}{F_k^u} \sin \beta_k + \frac{J_c}{F_{k+1}^u} \sin \beta_{k+1} \right) \left. \right] \\ &= \mathfrak{M}_{k-1} u_k' + 2\mathfrak{M}_k(u_k' + u_{k+1}') + \mathfrak{M}_{k+1} u_{k+1}' \dots \dots k) \\ &\sum_{k=1}^{n-1} M_k \left[ o_k'(h_{k-1} + 2h_k) + o_{k+1}'(2h_k + h_{k+1}) \right] \\ &- 6H\lambda \sum_{k=1}^n \left[ \frac{J_c \cos(\alpha_k + \beta_k)}{F_k^o \cos \beta_k} + \frac{J_c}{F_k^u} \frac{1}{\cos \beta_k} \right] = 0 \quad \dots \dots l) \end{aligned}$$

Beachtet man, daß  $\frac{J_c}{F}$  als Quadrat eines Trägheitshalbmessers  $i$  aufgefaßt werden kann, so erkennt man, daß das Zusatzglied im Beiwert von  $H$  in den Gleichungen k) klein gegen das Hauptglied ist und in der Regel vernachlässigt werden kann, da das Schlankheitsverhältnis der Gurtstäbe kaum kleiner als 20 sein wird. Man ist hierzu um so mehr berechtigt als  $\sin \alpha$  und  $\sin \beta$  meist kleine Brüche sind und außerdem nur die Differenzen zweier aufeinanderfolgenden Brüche zu berücksichtigen sind. Der von den Stabquerschnitten abhängige Beiwert von  $H$  in Gleichung l) darf dagegen nicht vernachlässigt werden.

Die Berechnung des Lohseträgers ist somit auf ein System von  $n - 1$  Dreimomentengleichungen mit  $H$ -Glied der Form k) und auf eine Gleichung l), die alle Unbekannten enthält, zurückgeführt. Die Berechnung der Unbekannten erfolgt am zweckmäßigsten durch schrittweise Elimination. Da  $M_0 = 0$  ist, so enthält die erste der Gleichungen k) nur die Unbekannten  $M_1$ ,  $M_2$  und  $H$ . Drückt man  $M_2$  durch  $M_1$  und  $H$  aus und führt den Wert hiervon in die folgende Gleichung ein, so kann man aus dieser  $M_3$  durch  $M_1$  und  $H$  darstellen. Auf diese Weise kann man aus jeder Gleichung eine Unbekannte durch  $M_1$  und  $H$  bestimmen, bis auf die  $n - 1$ -te Gleichung, aus der dann  $M_1$  unmittelbar als Funktion von  $H$  hervorgeht. Mit dieser Beziehung zwischen  $M_1$  und  $H$  können die sämtlichen unbekanntenen Momente durch  $H$  definiert werden. Diese Werte in die Gleichung l) eingesetzt, liefern endlich  $H$  und somit alle übrigen Unbekannten.

Da es sich fast immer um die Ermittlung der Einflußlinien der überzähligen Größen handelt, so empfiehlt sich die Einhaltung des folgenden Vorganges:

Man berechnet zunächst die Koeffizienten der Unbekannten nach den Vorschriften der Gleichungen k) und l), am besten in Form einer Tafel, da sich aus einer solchen die Summenausdrücke leicht bestimmen lassen. Bei symmetrisch gebauten Tragwerken, die meistens vorliegen werden, genügt natürlich die Berechnung der Beiwerte für eine Trägerhälfte, nur ist etwas Vorsicht bei Ermittlung der Summenausdrücke geboten, damit kein Glied verloren gehe, oder zweimal berücksichtigt erscheine. Nun denkt man sich die Last  $\mathfrak{r}$  der Reihe nach in jedem Knoten angebracht und bestimmt rechnerisch oder durch Zeichnung die zugehörigen Momentendreiecke der  $\mathfrak{M}$ -Linien. In einer zweiten Tafel werden nun mit Hilfe der gerechneten oder der Zeichnung entnommenen  $\mathfrak{M}$ -Werte die dreigliedrigen Ausdrücke der rechten Seiten der Gleichungen k) zusammengestellt. Für jede Laststellung werden derartige  $n - 1$  Zahlen in einer Tafel zusammengestellt.

Bei symmetrischen Trägern genügt es, nur die halbe Zahl der Laststellungen zu berücksichtigen, indem nur die Knoten der einen Trägerhälfte einschließlich eines bei gerader Felderzahl vorhandenen Mittelknotens der Reihe nach mit  $P=1$  belastet werden.

Bei der Auflösung der Gleichung geht man nun so vor, daß man für die Beiwerte der Unbekannten die berechneten Zahlenwerte einführt, die rechten Gleichungsseiten aber zunächst mit Buchstaben bezeichnet und diese Buchstaben während der Auflösung beibehält. Die Gleichungen sehen daher folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \beta_1 M_1 + \gamma_1 M_2 + \delta_1 H &= a_1 \\ \alpha_2 M_1 + \beta_2 M_2 + \gamma_2 M_3 + \delta_2 H &= a_2 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$\alpha, \beta \dots$  sind hierin Zahlenwerte. Man erhält nach Auflösung der Gleichungen die Unbekannten in der Form

$$M = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 + \dots + \mu_{n-1} a_{n-1}$$

$\mu_1, \mu_2 \dots$  sind ebenfalls Zahlen. Nun erst setzt man für  $a_1, a_2 \dots$  der Reihe nach die Zahlenreihen ein, die der Belastung der einzelnen Knotenpunkte entsprechen und bestimmt in einer Tafel die Produkte und Summen. Aus den so errechneten Ordinaten lassen sich die Einflußlinien der Unbekannten mit Hilfe des Satzes von der Gegenseitigkeit der Wirkungen einfach zusammenstellen.

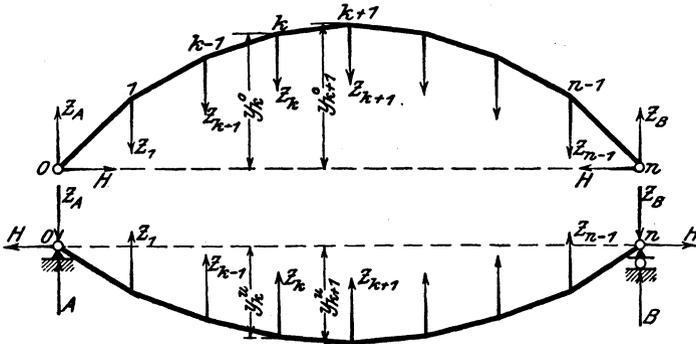


Abb. 75.

Die Auflösung der Gleichungen wird bedeutend erleichtert, wenn man die Elimination von zwei Seiten beginnt, das heißt von der ersten und  $n-1$ sten Gleichung aus und gegen die Mitte fortschreitet. Man gewinnt durch diesen Eliminationsvorgang schließlich zwei Gleichungen, die außer  $H$  noch zwei unbekannte Momente enthalten, die sich somit als Funktionen von  $H$  darstellen lassen. Der weitere Vorgang ist

genau der gleiche wie er oben beschrieben wurde. Ist das Tragwerk symmetrisch zur Mitte gebaut, dann genügt die zahlenmäßige Durchführung der Elimination in der einen Hälfte der Gleichungen. Man erhält die Ergebnisse für die zweite Hälfte, wenn man in den ersterrechneten Resultaten  $M_1$  gegen  $M_{n-1}$ ,  $M_2$  gegen  $M_{n-2}$  usw., ebenso  $a_1$  gegen  $a_{n-1}$ ,  $a_2$  gegen  $a_{n-2}$  usw. vertauscht. Im übrigen sei auf das Zahlenbeispiel in § 10 hingewiesen.

Sind die statisch nicht bestimmbaren Größen einmal bekannt, dann lassen sich auf Grund einfacher statischer Beziehungen die Momente (Kernmomente) für einen beliebigen Gurtpunkt ableiten.

Um auch die Pfostenkräfte zu bestimmen, denken wir uns das Tragwerk, wie dies in Abb. 75 dargestellt wurde, in zwei Hälften zerlegt und die Schnittkräfte angebracht. Für das Moment im Knoten  $k$  des Obergurtes gilt, wenn die äußeren Lasten am Untergurt wirkend angenommen werden,

$$M_k = m_k - Hy_k^0.$$

Hier ist  $m_k$  das Moment der Hängestangenkräfte links von  $k$ , bezogen auf den Punkt  $k$ .

Nun ist bei der Feldweite  $\lambda$

$$m_{k+1} = m_k + \lambda Q_k^z,$$

wenn  $Q_k^z$  die Mittelkraft aller links von  $k+1$  gelegenen Hängestangenkräfte, einschließlich der Schnittkraft  $Z_A$ , bezeichnet.

Es ist also

$$Q_k^z = \frac{m_{k+1} - m_k}{\lambda}$$

und daher

$$\begin{aligned} -Z_k &= Q_k^z - Q_{k-1}^z = \frac{m_{k+1} - m_k}{\lambda} - \frac{m_k - m_{k-1}}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} (m_{k+1} - 2m_k + m_{k-1}) \end{aligned}$$

Drückt man zum Schluß die Hilfsmomente  $m$  durch die Überzähligen  $M$  und  $H$  gemäß der erstangeführten Gleichung aus, so entsteht

$$Z_k = -\frac{1}{\lambda} (M_{k+1} - 2M_k + M_{k-1}) - \frac{H}{\lambda} (y_{k+1}^0 - 2y_k^0 + y_{k-1}^0) \dots m$$

**12. Beispiel.** Ein bemerkenswertes Beispiel für die Vorteile, die das in diesem Buche dargestellte Berechnungsverfahren bei der Untersuchung vielfach statisch unbestimmter Systeme bietet, liefert der Fall des vielfeldrigen Rahmens mit eingespannten Ständern und steifen Ecken, wie er in Abb. 76 dargestellt ist. Die große Zahl der statisch nicht bestimmbaren Größen gestaltet die Untersuchung dieses Tragsystems nach der Methode der Formänderungsarbeit sehr schwierig,

weshalb vielfach Näherungsverfahren eingeschlagen wurden. Wir werden zeigen, daß sich bei zweckmäßiger Ausnutzung der durch die Methode des Viermomentensatzes gebotenen Hilfsmittel, insbesondere durch die Einführung der Hilfsgrößen  $I$ , die Berechnung derartiger Tragwerke verhältnismäßig einfach gestaltet. Da bei  $n$  Feldern  $n + 1$  mehrstäbige Knoten vorhanden sind und die Ersatzfigur (siehe § 7) einfache Bewegungsmöglichkeit besitzt, so kann die Ermittlung der überzähligen Größen auf die Lösung von  $n + 2$  Gleichungen zurückgeführt werden.

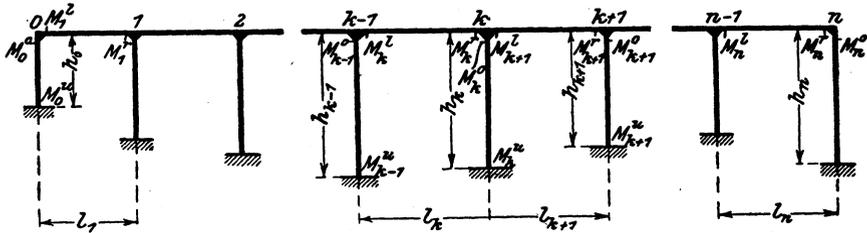


Abb. 76.

Folgende Bezeichnungsweise wird sich als zwecktuulich erweisen:

Die Riegelknoten werden von links nach rechts mit  $0, 1, 2 \dots n$  beziffert. Der Zeiger des rechten Riegelendpunktes gibt den Zeiger für den Riegel ab. Es wird also der Stab  $k - 1$  bis  $k, l_k$  genannt. Die Stützen erhalten den Zeiger des oberen Anschlußpunktes. Ist dieser  $k$ , so heißt die Stütze  $h_k$ . Die Momente in den Anschlußpunkten eines Riegels bezeichnen wir mit dem gleichen unteren Zeiger, wie die zugehörige Stablänge, und unterscheiden die beiden zu einem Stab gehörenden Anschlußmomente durch die oberen Zeiger  $r$  und  $l$ .  $M_k^r$  ist demnach das Moment am rechten Stabende des Riegels  $l_k$ ,  $M_k^l$  das Moment am linken Stabende des gleichen Riegels. Für das obere Anschlußmoment und das untere Einspannungsmoment der Stütze  $h_k$  schreiben wir  $M_k^o$  und  $M_k^u$ . Der Stabdrehwinkel des Riegels  $l_k$  wird mit  $\varphi_k^r$ , der der Stütze  $h_k$  mit  $\varphi_k^o$  bezeichnet.

Für jeden Riegelknoten werden nun die Momentengleichungen angesetzt. Die Punkte  $0$  und  $n$  liefern je eine Gleichung, die Zwischenpunkte je zwei Gleichungen. Außerdem gibt jeder Stützenfußpunkt der Einspannung wegen je eine weitere Viermomentengleichung, wenn man sich die einzelnen Felder durch einen Schlußstab mit unendlich großem Querschnitt zu geschlossenen Rahmen ergänzt denkt.

Im ganzen verfügen wir über  $3n + 1$  Viermomentengleichungen, zu denen noch  $2n$  Winkelgleichungen hinzukommen, so daß das System der Elastizitätsbedingungen, von dem wir ausgehen, aus  $5n + 1$  Gleichungen besteht, denen  $3n$  Überzählige und  $2n + 1$  Stabdrehwinkel als Unbekannte gegenüberstehen.

Die Momentengleichungen für den Riegelknoten  $k$  lauten:

$$\left. \begin{aligned} (M_k^l + 2 M_k^r) l'_k + (2 M_k^o + M_k^u) h'_k - \varrho (\vartheta_k - \vartheta_k^v) &= N_k^l \\ (M_k^l + 2 M_k^r) l'_k + (2 M_{k+1}^l + M_{k+1}^r) l'_{k+1} - \varrho (\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) &= N_k^l + N_{k+1}^r \end{aligned} \right\} \text{a)}$$

und für den darunterliegenden Spannungspunkt der Stütze  $l_k$

$$(M_k^o + 2 M_k^u) h'_k - \varrho \vartheta_k^v = 0 \quad \dots \dots \dots \text{b)}$$

Einige Erläuterung bedarf die Bezeichnungsweise der rechten Gleichungsseiten. Wir setzen nur die Riegelstäbe als belastet voraus, die Stützen aber, seien zwischen Kopf- und Fußpunkt unbelastet. Die rechte Seite jeder Viermomentengleichung besteht im allgemeinen aus zwei Teilen, von denen der erste den Einfluß der Belastung des linken Feldes, wenn man beim Anschreiben der Momentengleichung von links nach rechts fortschreitet, der zweite den Einfluß des folgenden rechts liegenden Feldes angibt. Wir bezeichnen hier jeden Teil mit  $N$ . Der Fußzeiger  $k$  gibt an, von welcher Feldbelastung das Glied herrührt, und der obere Zeiger  $l$  oder  $r$ , ob das betreffende Feld für diese Momentengleichung linkes oder rechtes Feld ist, da  $N_k^l$  und  $N_k^r$  im allgemeinen voneinander verschieden sind.

Wir fassen nun die in den Klammern stehenden Momentensummen samt den Faktoren  $l'$  oder  $h'$  in Übereinstimmung mit den Darlegungen in § 7 als neue Unbekannten (Hilfsgrößen  $I'$ ) auf und setzen

$$\left. \begin{aligned} (M_k^l + 2 M_k^r) l'_k &= X_k^r & (M_k^u + 2 M_k^o) h'_k &= Y_k^o \\ (M_k^r + 2 M_k^l) l'_k &= X_k^l & (M_k^o + 2 M_k^u) h'_k &= Y_k^u \end{aligned} \right\} \dots \dots \text{c)}$$

Der untere Zeiger von  $X$  und  $Y$  steht im Einklang mit dem unteren Zeiger der Momente, gibt also den Stab an, auf den sich diese Hilfsgrößen beziehen.  $X_k$  gilt somit für den  $k$ -ten Riegel,  $Y_k$  für die  $k$ -te Stütze. Der obere Zeiger stimmt jeweils überein mit dem oberen Zeiger jenes Momentes, das mit dem Faktor 2 versehen ist. Die Anzahl der Hilfsgrößen  $X$  und  $Y$  ist gleich der Anzahl der in unseren Momentengleichungen vorkommenden Momente.

Nach Einführung der Größen  $X$  und  $Y$  in die Momentengleichungen a) und b) nehmen diese folgende Gestalt an:

$$\left. \begin{aligned} X_k^r + Y_k^o - \varrho (\vartheta_k - \vartheta_k^v) &= N_k^l \\ X_k^r + X_{k+1}^l - \varrho (\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) &= N_k^l + N_{k+1}^r \\ Y_k^u - \varrho \vartheta_k^v &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \text{d)}$$

Wie man erkennt, gewinnen die Elastizitätsbedingungen nach Einführung der Unbekannten  $X$  und  $Y$  sehr einfache und übersichtliche Form, die die Ausscheidung einzelner Unbekannten und eine hierdurch

bewirkte Verringerung der Zahl der Bestimmungsgleichungen leicht ermöglicht. Zur Beseitigung der Drehwinkel aus den Gleichungen d) benützen wir die Winkelgleichungen, die für ein beliebiges Feld lauten:

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_k + h_{k-1} \vartheta_{k-1}^v - h_k \vartheta_k^v &= 0 \\ \Delta h_{k-1} - \Delta h_k - l_k \vartheta_k &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots e)$$

Wir setzen fest, daß die Stabdehnungen  $\Delta l$  und  $\Delta h$  nur dann berücksichtigt werden sollen, wenn sie von Temperaturänderungen herrühren; der Einfluß der Stablängenänderungen infolge der Normalkräfte soll als gering vernachlässigt werden. Sind die Stützen gleich hoch oder in der Länge nur wenig verschieden, so ist der Ausdehnungsunterschied  $\Delta h_{k-1} - \Delta h_k$  Null oder doch sehr klein, weshalb er gleichfalls unberücksichtigt bleiben kann. Somit finden wir aus der zweiten Winkelgleichung

$$\vartheta_1 = \vartheta_2 = \dots = \vartheta_k \dots = \vartheta_n = 0 \dots \dots \dots f)$$

Die erste der Gleichungen e) liefert, da  $\Delta l_k$ , die Dehnung des Stabes  $l_k$  infolge der Temperaturänderung, als gegebene Größe betrachtet wird, einen Zusammenhang zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stützendrehwinkeln; da bei  $n + 1$  Stützen  $n$  derartige Gleichungen vorhanden sind, so können sämtliche Stützendrehwinkel durch einen von ihnen ausgedrückt werden. Wir wählen hierzu  $\vartheta_0^v$ ; es erscheinen daher diese Drehwinkel durch die folgenden Gleichungen mit  $\vartheta_0^v$  verknüpft.

$$\left. \begin{aligned} h_1 \vartheta_1^v &= h_0 \vartheta_0^v + \Delta l_1 \\ h_2 \vartheta_2^v &= h_0 \vartheta_0^v + \Delta l_1 + \Delta l_2 \\ &\dots \dots \dots \\ h_k \vartheta_k^v &= h_0 \vartheta_0^v + \sum_1^k \Delta l \\ &\dots \dots \dots \\ h_n \vartheta_n^v &= h_0 \vartheta_0^v + \sum_1^n \Delta l \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots g)$$

Die Gleichungen f) und g) gestatten die Elimination sämtlicher Stabdrehwinkel aus den Elastizitätsbedingungen d) bis auf den Winkel  $\vartheta_0^v$ . Die Beziehungen d) nehmen mithin die Gestalt an

$$\left. \begin{aligned} X_k^r + Y_k^o + \varrho \frac{h_0}{h_k} \vartheta_0^v &= N_k^l - \frac{\varrho}{h_k} \sum_1^k \Delta l^t \\ X_k^r + X_{k+1}^l &= N_k^l + N_{k+1}^r \\ Y_k^u - \varrho \frac{h_0}{h_k} \vartheta_0^v &= \frac{\varrho}{h_k} \sum_1^k \Delta l^t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots h)$$

Die Dehnungen  $\Delta l$  wurden mit dem Zeiger  $t$  versehen, um anzudeuten, daß es sich um Längenänderungen der Riegel infolge Wärmeschwankungen handelt.

Die Zahl der Gleichungen h) beträgt, wie wir bereits oben festgestellt haben,  $3n + 1$ . Die Zahl der in diesen Gleichungen auftretenden Unbekannten  $X$  und  $Y$  ist bei  $2n + 1$  Stäben,  $4n + 2$ ; hierzu kommt noch der Drehwinkel  $\vartheta_0^v$ , so daß die Gesamtzahl der Un-

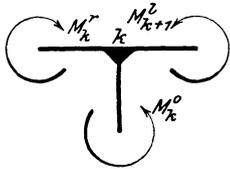


Abb. 77.

bekannten  $4n + 3$  beträgt. Da aber die Gleichungen h) die Gesamtheit der Elastizitätsbedingungen, die nach Verwendung der Winkelgleichungen übrigbleibt, darstellt, so müssen zwischen den Größen  $X$  und  $Y$  noch  $n + 2$  statische Beziehungen bestehen, die wir zur weiteren Berechnung heranziehen und mit den Elastizitätsgleichungen in Verbindung bringen<sup>1)</sup>.

Zur Erlangung dieser Beziehungen benützen wir folgende Gleichgewichtsbedingungen:

1. Die Summe aller in einem Riegelknoten angreifenden Momente ist Null.
2. Die Summe aller auf das Tragwerk wirkenden wagerechten äußeren Kräfte ist Null.

Bedingung 1 gibt bei  $n + 1$  Riegelknoten  $n + 1$  Gleichungen, Bedingung 2 eine Gleichung, womit die fehlenden  $n + 2$  Zusammenhänge aufgestellt erscheinen.

Aus 1 gewinnen wir unter Hinweis auf Abb. 77 Gleichungen von der Form

$$-M_k^o + M_k^r - M_{k+1}^l = 0 \quad \dots \dots \dots \text{i)}$$

Aus den Definitionsgleichungen c) folgt gleichzeitig

$$\left. \begin{aligned} M_k^l &= \frac{1}{3 l_k'} (2 X_k^l - X_k^r) \\ M_k^r &= \frac{1}{3 l_k'} (2 X_k^r - X_k^l) \\ M_k^o &= \frac{1}{3 h_k'} (2 Y_k^o - Y_k^u) \\ M_k^u &= \frac{1}{3 h_k'} (2 Y_k^u - Y_k^o). \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{k)}$$

<sup>1)</sup> Man erinnere sich der allgemeinen Ausführungen über diese Frage in § 7.

Die Verknüpfung der Gleichungen i) mit den Formeln k) liefert die Gleichgewichtsbedingungen in der Form

$$-\frac{I}{h_k'}(2Y_k^o - Y_k^u) + \frac{I}{l_k'}(2X_k^r - X_k^l) - \frac{I}{l_{k+1}'}(2X_{k+1}^l - X_{k+1}^r) = 0. \quad l)$$

Nun ergeben die Gleichungen h) die folgenden einfachen Zusammenhänge:

$$\left. \begin{aligned} X_k^r &= -Y_k^o - \varrho \frac{h_0}{h_k} \vartheta_0^v + N_k^l - \frac{\varrho}{h_k} \sum_1^k \Delta l^t \\ X_k^l &= Y_{k-1}^o + \varrho \frac{h_0}{h_{k-1}} \vartheta_0^v + N_k^r + \frac{\varrho}{h_{k-1}} \sum_1^{k-1} \Delta l^{t1} \\ Y_k^u &= \varrho \frac{h_0}{h_k} \vartheta_0^v + \frac{\varrho}{h_k} \sum_1^k \Delta l^t \end{aligned} \right\} \dots m)$$

Sämtliche Unbekannten  $X$  und  $Y$  sind somit durch die Größen  $Y^o$  und  $\vartheta_0^v$  ausgedrückt. Wir führen die Beziehungen m) in die Gleichgewichtsbedingungen l) ein, multiplizieren mit der beliebig gewählten reduzierten Länge  $l_c'$  und gelangen zu nachstehendem Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} Y_{k-1}^o \frac{l_c'}{l_k'} + 2Y_k^o \left( \frac{l_c'}{l_k'} + \frac{l_c'}{h_k'} + \frac{l_c'}{l_{k+1}'} \right) + Y_{k+1}^o \frac{l_c'}{l_{k+1}'} \\ + D \left[ \frac{h_0}{h_{k-1}} \frac{l_c'}{l_k'} + \frac{h_0}{h_k} \left( 2 \frac{l_c'}{l_k'} - \frac{l_c'}{h_k'} + 2 \frac{l_c'}{l_{k+1}'} \right) + \frac{h_0}{h_{k+1}} \frac{l_c'}{l_{k+1}'} \right] \\ = \frac{l_c'}{l_k'} (2N_k^l - N_k^r) - \frac{l_c'}{l_{k+1}'} (2N_{k+1}^r - N_{k+1}^l) \\ - \varrho \alpha_t t \left[ \frac{L_{k-1}}{h_{k-1}} \frac{l_c'}{l_k'} + \frac{L_k}{h_k} \left( 2 \frac{l_c'}{l_k'} - \frac{l_c'}{h_k'} + 2 \frac{l_c'}{l_{k+1}'} \right) + \frac{L_{k+1}}{h_{k+1}} \frac{l_c'}{l_{k+1}'} \right] \end{aligned} \right\} n)$$

Für den  $\varrho$ -fachen Drehwinkel  $\vartheta_0^v$  wurde  $D$  gesetzt; demnach ist

$$D = 6 E J_c \vartheta_0^v.$$

An Stelle von  $\Delta l^t$  wurde  $\alpha_t t l$  eingeführt, somit wird

$$\sum_1^k \Delta l^t = \alpha_t t \sum_1^k l = \alpha_t t L_k.$$

$L_k$  bedeutet die Summe der Riege­längen von 0 bis zum Punkte  $k$ .

Das vollständige Gleichungssystem wird aus der für das  $k$ -te Feld gültigen Gleichung n) erhalten, indem man  $k$  der Reihe nach

<sup>1)</sup> Aus den Gleichungen h) wird zunächst  $X_{k+1}^l$  gefunden. Durch Verringerung die Zeigerziffern um 1 wird daraus  $X_k^l$  abgeleitet.

0, 1, 2, . . . , n setzt. Für  $k=0$  und  $k=n$  denke man sich einen 0 vorangehenden beziehungsweise n nachfolgenden Stab hinzu, setze aber alle auf diese Stäbe bezüglichen Glieder Null. Die zweite und vorletzte Gleichung ist bis auf den Klammerwert des Temperaturgliedes vollständig. In diesem Klammerwert entfällt bei der zweiten Gleichung das erste Glied, bei der vorletzten Gleichung das letzte Glied.

Die Gleichungen n) haben die Form von Dreimomentengleichungen, doch unterscheiden sie sich von diesen durch das von  $\vartheta_0^v$  herrührende Zusatzglied. Sie können kurz in der Form geschrieben werden:

$$\alpha_{k-1} Y_{k-1}^o + 2 \beta_k Y_k^o + \alpha_{k+1} Y_{k+1}^o + \gamma_k D = N_k + \tau_k \varrho \alpha_t t.$$

$N_k$  ist der von der Feldbelastung,  $\tau_k \varrho \alpha_t t$  der von der Temperaturänderung der Riegel abhängige Teil der rechten Gleichungsseite. Die  $n + 1$  Gleichungen n) enthalten  $n + 1$  Unbekannte  $Y^o$  und den Stützdrehwinkel  $\vartheta_0^v$ .

Die noch fehlende Gleichung leiten wir aus der Gleichgewichtsbedingung 2 ab. Diese lautet:

$$\sum_{k=0}^n H_k + \sum_{k=1}^n P_k^h = 0.$$

$H$  ist die wagerechte Auflagerkraft in [den Stützenfußpunkten,  $P_k^h$  die Summe aller in der Riegelachse des  $k$ -ten Feldes wirkenden wagerechten Kräfte,

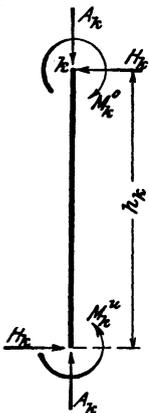


Abb. 78.

Zwischen  $H_k$  und den Stützenmomenten besteht, wenn man die Abb. 78 beachtet, die Beziehung

$$+ M_k^o - M_k^u - H_k h_k = 0.$$

Mithin ist

$$H_k = \frac{1}{h_k} (M_k^o - M_k^u),$$

oder nach Einführung der Hilfsgrößen  $Y$  durch die Formeln k)

$$H_k = \frac{1}{h_k h_k'} (Y_k^o - Y_k^u).$$

Nun ist

$$Y_k^u = \varrho \frac{h_0}{h_k} \vartheta_0^v + \frac{\varrho}{h_k} \sum_1^k \Delta l' = \varrho \frac{h_0}{h_k} \vartheta_0^v + \alpha_t t \varrho \frac{L_k}{h_k},$$

somit

$$H_k = \frac{1}{h_k h_k'} \left[ Y_k^o - \frac{h_0}{h_k} D - \alpha_t t \varrho \frac{L_k}{h_k} \right].$$

Die Gleichgewichtsbedingung nimmt daher nach Multiplikation aller Glieder mit  $h_k^2$  die Form an

$$\sum_{k=0}^n \frac{h_k}{h_k'} Y_k^o - D \sum_{k=0}^n \frac{h_0}{h_k'} = -h_k^2 \sum_{k=1}^n P_k^h + \alpha_t t \varrho \sum_{k=0}^n \frac{L_k}{h_k'} \dots \dots \dots 0)$$

Mit dieser Gleichung haben wir die letzte noch fehlende Bestimmungsgleichung zur Ermittlung der Größen  $Y^0$  und des Drehwinkels  $\vartheta_0^0$  gefunden. Unsere Aufgabe ist somit im Grunde genommen gelöst.

Die Gleichungen n) und o) weisen den gleichen Bau auf, wie die Bestimmungsgleichungen für den Lohseträger. Ihre Auflösung kann daher nach dem gleichen Eliminationsverfahren erfolgen, wie dort.

### **Einflußlinien der Größen $Y^0$ und $\vartheta_0^0$ .**

In der Mehrzahl der Fälle wird es notwendig sein, Einflußlinien zur Untersuchung des Tragwerkes heranzuziehen. Ihre Darstellung auf Grund der allgemeinen Lösungen der Bestimmungsgleichungen macht keine Schwierigkeiten.

Bezeichnet man die rechte Seite der Gleichungen n) mit  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ , die der Gleichung o) mit  $a_D$  und behält man diese allgemeinen Zahlen bei der Auflösung bei, während für die Beiwerte der Unbekannten die tatsächlichen Zahlenwerte eingeführt werden, so nehmen die allgemeinen Lösungen der Bestimmungsgleichungen n) und o) die Form an:

$$\left. \begin{aligned} Y_k^0 &= \mu_0^k a_0 + \mu_1^k a_1 + \dots + \mu_{i-1}^k a_{i-1} + \mu_i^k a_i + \dots \\ &\quad + \mu_n^k a_n + \mu_D^k a_D \\ D &= \nu_0 a_0 + \nu_1 a_1 + \dots + \nu_{i-1} a_{i-1} + \nu_i a_i + \dots + \nu_n a_n + \nu_D a_D \end{aligned} \right\} p)$$

$\mu$  und  $\nu$  sind Zahlenwerte, die aus den Beiwerten der Gleichungen n) und o) entstehen.

Zwecks Ermittlung des Einflußlinienzweiges im  $i$ -ten Riegelfelde denken wir uns dieses Feld mit der Einzellast  $P = 1$  an beliebiger Stelle belastet. Da die übrigen Felder unbelastet sind, so sind alle  $N$ -Werte unserer Gleichungen mit Ausnahme von  $N_i^l$  und  $N_i^r$  Null. Für die Belastung mit  $P = 1$  ist aber

$$\begin{aligned} N_i^l &= -f_2 l_i l_i', \\ N_i^r &= -f_1 l_i l_i', \end{aligned}$$

wenn  $f_1$  und  $f_2$  die Stammfunktionen sind.

Nun ist

$$a_{i-1} = -\frac{l_o'}{l_i'} (2 N_i^r - N_i^l),$$

$$a_i = \frac{l_o'}{l_i'} (2 N_i^l - N_i^r)$$

und daher

$$\begin{aligned} a_{i-1} &= l_i (2 f_1 - f_2) l_o', \\ a_i &= -l_i (2 f_2 - f_1) l_o', \end{aligned}$$

während alle anderen  $a$ -Werte einschließlich  $a_D$  Null werden. Die Lösungen p) vereinfachen sich daher bedeutend und lauten jetzt:

$$\left. \begin{aligned} Y_k^o &= \mu_i^{k-1} a_{i-1} + \mu_i^k a_i \\ D &= \nu_{i-1} a_{i-1} + \nu_i a_i \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{p)}$$

Mit den vorangehend dargestellten Werten von  $a_{i-1}$  und  $a_i$  gehen die Gleichungen p') über in

$$\begin{aligned} Y_k^o &= l_i [\mu_i^{k-1} (2 f_1 - f_2) - \mu_i^k (2 f_2 - f_1)] l_c' \\ D &= l_i [\nu_{i-1} (2 f_1 - f_2) - \nu_i (2 f_2 - f_1)] l_c'. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$2 f_1 - f_2 = \Phi_1 \quad \text{und} \quad 2 f_2 - f_1 = \Phi_2$$

und erhalten die Gleichungen der Einflußlinien der Überzähligen in der endgültigen Form

$$\left. \begin{aligned} Y_k^o &= \mu_i^{k-1} l_i l_c' \Phi_1 - \mu_i^k l_i l_c' \Phi_2, \dots \dots \dots \text{r)} \\ D &= \nu_{i-1} l_i l_c' \Phi_1 - \nu_i l_i l_c' \Phi_2. \dots \dots \dots \text{s)} \end{aligned} \right\}$$

Setzt man der Reihe nach  $k=0, 1, 2, \dots n$  und bei festgehaltenem  $k$  jedesmal  $i=1, 2, \dots n$  und wählt man aus den allgemeinen Lösungen, die den Zeigern  $k$  und  $i$  entsprechenden Zahlenwerte der  $\mu$  aus, so können nach Formel r) alle Einflußlinienzweige sämtlicher Unbekannten  $Y_k^o$  berechnet werden. Gleichung s) liefert, wenn man der Reihe nach  $i=1, 2, \dots n$  setzt, die Zweige der  $D$ -Linie, falls man die zugehörigen  $\nu$ -Beträge den allgemeinen Lösungen entnimmt. Die Funktionen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  sind in allen Unbekannten und in allen Zweigen dieselben. Sie werden mittels der Tafelwerte von  $f_1$  und  $f_2$  für die ausgewählten Zwischenpunkte berechnet. Die Ermittlung sämtlicher Einflußlinienordinaten ist somit auf die Berechnung von Ausdrücken der Form  $A \Phi_1 + B \Phi_2$  zurückgeführt.

Mit Hilfe der  $Y^o$ - und  $D$ -Linien können alle übrigen Einflußlinien leicht abgeleitet werden. Aus den Formeln k) und m) findet man

$$\left. \begin{aligned} M_k^l &= \frac{I}{3 l_k'} \left[ (2 Y_{k-1}^o + Y_k^o) + \left( 2 \frac{h_0}{h_{k-1}} + \frac{h_0}{h_k} \right) D + (2 N_k^r - N_k^l) \right] \\ \text{oder} \\ M_k^l &= \frac{I}{3 l_k'} \left[ (2 Y_{k-1}^o + Y_k^o) + \left( 2 \frac{h_0}{h_{k-1}} + \frac{h_0}{h_k} \right) D \right] - \left( \frac{l_k}{3} \Phi_1 \right) \\ \text{und ebenso} \\ M_k^r &= - \frac{I}{3 l_k'} \left[ (2 Y_k^o + Y_{k-1}^o) + \left( 2 \frac{h_0}{h_k} + \frac{h_0}{h_{k-1}} \right) D \right] - \left( \frac{l_k}{3} \Phi_2 \right) \end{aligned} \right\} \dots \text{t)}$$

Hierbei ist das Schlußglied  $\left(\frac{l_k}{3} \Phi_1\right)$  bzw.  $\left(\frac{l_k}{3} \Phi_2\right)$  nur beim  $k$ -ten Zweig der Einflußlinie hinzuzufügen.

Ferner besteht

$$\left. \begin{aligned} M_k^o &= \frac{I}{3 h_k'} \left[ 2 Y_k^o - \frac{h_0}{h_k} D \right] \\ M_k^u &= \frac{I}{3 h_k'} \left[ 2 \frac{h_0}{h_k} D - Y_k^o \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots u)$$

und schließlich

$$H_k = \frac{I}{h_k h_k'} \left[ Y_k^o - \frac{h_0}{h_k} D \right] \dots \dots \dots v)$$

**Rahmenträger mit Fußgelenken.**

Die Gleichungen für Rahmenträger mit gelenkig aufgesetzten Stützen lassen sich an der Hand des voranstehend Dargelegten sehr einfach ableiten. Da die Momente  $M_k^u$  Null sind, so entfallen die Viermomentengleichungen b), außerdem gewinnt man aus den Definitionsformeln c) eine einfache Beziehung zwischen  $Y_k^o$  und  $Y_k^u$ . Es ist nämlich, wenn man in c)  $M_k^u = 0$  setzt,

$$2 M_k^o h_k' = Y_k^o \quad \text{und} \quad M_k^o h_k' = Y_k^u$$

und daher

$$Y_k^u = \frac{I}{2} Y_k^o.$$

Im übrigen bleiben die Zusammenhänge zwischen den Größen  $X$  und  $Y$  und zwischen den Rieglmomenten unverändert.

Die Einführung von  $Y_k^o$  in die Gleichgewichtsbedingungen liefert jetzt folgende Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{aligned} & Y_{k-1}^o \frac{l_c'}{l_k'} + 2 Y_k^o \left( \frac{l_c'}{l_k'} + \frac{3 l_c'}{4 h_k'} + \frac{l_c'}{l_{k+1}'} \right) + Y_{k+1}^o \frac{l_c'}{l_{k+1}'} \\ & + D \left[ \frac{h_0}{h_{k-1}} \frac{l_c'}{l_k'} + 2 \frac{h_0}{h_k} \left( \frac{l_c'}{l_k'} + \frac{l_c'}{l_{k+1}'} \right) + \frac{h_0}{h_{k+1}} \frac{l_c'}{l_{k+1}'} \right] \\ & = \frac{l_c'}{l_k'} (2 N_k^l - N_k^r) - \frac{l_c'}{l_{k+1}'} (2 N_{k+1}^r - N_{k+1}^l) \\ & - \rho \alpha_t t \left[ \frac{L_{k-1}}{h_{k-1}} \frac{l_c'}{l_k'} + 2 \frac{L_k}{h_k} \left( \frac{l_c'}{l_k'} + \frac{l_c'}{l_{k+1}'} \right) + \frac{L_{k+1}}{h_{k+1}} \frac{l_c'}{l_{k+1}'} \right] \quad n') \end{aligned}$$

und da

$$H_k = \frac{I}{2 h_k h_k'} Y_k^o$$

ist, so folgt

$$\frac{I}{2} \sum_{k=0}^n \frac{Y_k^o}{h_k h_k'} = - \sum_{k=1}^n P_k^h \dots \dots \dots o')$$

Die Gleichungen n') enthalten nur in den Beiwerten der Unbekannten  $Y_k^o$  und  $D$ , sowie im Temperaturgliede unwesentliche Abweichungen gegenüber den Gleichungen n). Ihre Gestalt ist die gleiche geblieben. In o') entfallen im Vergleiche zu o) die von  $D$  und den Temperaturschwankungen abhängigen Glieder. Da in den Formeln n') die Lastglieder die gleichen sind wie in n), so erfahren auch die Formeln für die Einflußlinien der  $Y^o$  und  $D$  keine Änderungen. Ebenso unverändert bleiben die Gleichungen für die  $M_k^l$ - und  $M_k^r$ -Linien.

Für  $M_k^o$  gilt jetzt

$$M_k^o = \frac{Y_k^o}{2 h_k'}$$

und für  $H_k$  die bereits vorangehend angeführte Formel.

**Zahlenbeispiel.**

Das zu untersuchende Tragwerk ist in Abb. 79 Seite 123 ersichtlich gemacht. Es besitzt fünf Öffnungen mit den Stützweiten 15, 15, 20, 15, 15 m. Die Stützhöhe beträgt durchwegs 8 m. Die Querschnittsmaße sind in der Skizze eingeschrieben.

Tafel 4. Beiwerte der Unbekannten  $Y_k^o$  und  $D$ .

$$\beta_k = \frac{l_c'}{l_k'} + \frac{l_c'}{h_k'} + \frac{l_c'}{l_{k+1}'}, \quad \gamma_k = 3 \frac{l_c'}{l_k'} - \frac{l_c'}{h_k'} + 3 \frac{l_c'}{l_{k+1}'}$$

$k$	$\frac{l_c'}{l_k'}$	$\frac{l_c'}{h_k'}$	$\beta_k$	$\gamma_k$
0	—	1	1,889	1,667
1	0,889	1	2,778	4,333
2	0,889	1	3,889	7,667
3	2,000	1	3,889	7,667
4	0,889	1	2,778	4,333
5	0,889	1	1,889	1,667

Die erste Aufgabe ist die Ermittlung der Beiwerte in den Bestimmungsgleichungen n). Sie wurde in Tafelform (Tafel 4, oben) durchgeführt. Die der Berechnung zugrunde gelegten reduzierten Längen sind:

$$l_1' = l_2' = l_4' = l_5' = 3 \cdot 15 = 45 \text{ m}$$

$$l_3' = 1 \cdot 20 = 20 \text{ m}$$

$$h_0' = h_1' = h_2' = h_3' = h_4' = h_5' = h' = 5 \cdot 8 = 40 \text{ m.}$$

Als  $l'_c$  wählen wir  $h'$  und finden damit die Verhältniszahlen

$$\frac{l'_c}{l'_1} = \frac{l'_c}{l'_2} = \frac{l'_c}{l'_4} = \frac{l'_c}{l'_5} = \frac{40}{45} = 0,889$$

$$\frac{l'_c}{l'_3} = \frac{40}{20} = 2$$

$$\frac{l'_c}{h'} = 1.$$

Sämtliche Verhältnisse  $\frac{h_0}{h_k}$  sind 1.

Um die durch die Symmetrie des Tragwerks hervorgerufenen Gesetzmäßigkeiten im Bau der Bestimmungsgleichungen n) ausnützen zu können, vereinigen wir das Glied  $\gamma_k D$  mit der rechten Seite der Gleichung und setzen

$$a'_k = a_k - \gamma_k D,$$

so daß die Gleichungen die einfache Form annehmen

$$\begin{aligned} 3,778 Y_0^0 + 0,889 Y_1^0 &= a'_0 \\ 0,899 Y_0^0 + 5,556 Y_1^0 + 0,889 Y_2^0 &= a'_1 \\ 0,889 Y_1^0 + 7,778 Y_2^0 + 2,000 Y_3^0 &= a'_2 \\ 2,000 Y_2^0 + 7,778 Y_3^0 + 0,889 Y_4^0 &= a'_3 \\ 0,889 Y_3^0 + 5,556 Y_4^0 + 0,889 Y_5^0 &= a'_4 \\ 0,889 Y_4^0 + 3,778 Y_5^0 &= a'_5 \end{aligned}$$

Die Auflösung dieses symmetrischen Systems durch Elimination macht wenig Mühe<sup>1)</sup>, wir finden

$$\begin{aligned} Y_0^0 &= 0,25526 a'_0 - 0,04493 a'_1 + 0,00551 a'_2 - 0,00144 a'_3 \\ &\quad + 0,00024 a'_4 - 0,00005 a'_5 \\ Y_1^0 &= -0,04493 a'_0 + 0,19089 a'_1 - 0,02340 a'_2 + 0,00613 a'_3 \\ &\quad - 0,00102 a'_4 + 0,00024 a'_5 \\ Y_2^0 &= 0,00551 a'_0 - 0,02340 a'_1 + 0,14073 a'_2 - 0,03689 a'_3 \\ &\quad + 0,00613 a'_4 - 0,00144 a'_5 \end{aligned}$$

Die weiteren Unbekannten  $Y_3^0$ ,  $Y_4^0$  und  $Y_5^0$  erhält man aus den vorstehenden Ausdrücken, indem man bei den Größen  $Y^0$  und  $a'$  die Zeiger derart vertauscht, daß an Stelle von 0, 1, 2, ... 5 die Zeiger 5, 4, 3, ... 0 treten.

<sup>1)</sup> Man sehe darüber die ausführlichen Erörterungen auf S. 142 nach.

Nun führen wir für  $a_k'$  den Ausdruck  $a_k - \gamma_k D$  wieder ein und erhalten nach Durchführung der Zahlenrechnung:

$$\begin{aligned}
 Y_0^0 &= 0,27526 a_0 - 0,04493 a_1 + 0,00551 a_2 - 0,00144 a_3 \\
 &\quad + 0,00024 a_4 - 0,00005 a_5 - 0,29622 D \\
 Y_1^0 &= -0,04493 a_0 + 0,19089 a_1 - 0,02340 a_2 + 0,00613 a_3 \\
 &\quad - 0,00102 a_4 + 0,00024 a_5 - 0,61587 D \\
 Y_2^0 &= 0,00551 a_0 - 0,02340 a_1 + 0,14073 a_2 - 0,03689 a_3 \\
 &\quad + 0,00613 a_4 - 0,00144 a_5 - 0,72805 D \\
 Y_3^0 &= -0,00144 a_0 + 0,00613 a_1 - 0,03689 a_2 + 0,14073 a_3 \\
 &\quad - 0,02340 a_4 + 0,00551 a_5 - 0,72805 D \\
 Y_4^0 &= 0,00024 a_0 - 0,00102 a_1 + 0,00613 a_2 - 0,02340 a_3 \\
 &\quad + 0,19089 a_4 - 0,04493 a_5 - 0,61587 D \\
 Y_5^0 &= -0,00005 a_0 + 0,00024 a_1 - 0,00144 a_2 + 0,00551 a_3 \\
 &\quad - 0,04493 a_4 + 0,27526 a_5 - 0,29622 D \\
 \hline
 \sum_{k=0}^5 Y_k^0 &= 0,23457 a_0 + 0,12791 a_1 + 0,09064 a_2 + 0,09064 a_3 \\
 &\quad + 0,12791 a_4 + 0,23457 a_5 - 3,28028 D
 \end{aligned}$$

Die Bestimmungsgleichung o) lautet, wenn man

$$\frac{h_k}{h_k'} = \frac{h_0}{h_0'} = \frac{1}{5}$$

setzt,

$$\frac{1}{5} \sum_{k=0}^5 Y_k^0 - \frac{6}{5} D = a_D.$$

Wir multiplizieren mit 5 und gewinnen die einfache Gleichung:

$$\sum_{k=0}^5 Y_k^0 - 6 D = 5 a_D.$$

Die Summe  $\sum_{k=0}^5 Y_k^0$  wurde oben durch Addition der Lösungen  $Y^0$  bestimmt. Nach Einsetzen des Summenwertes gelangt man zur allgemeinen Lösung von  $D$ , nämlich:

$$\begin{aligned}
 D &= 0,025277 a_0 + 0,013783 a_1 + 0,009767 a_2 + 0,009767 a_3 \\
 &\quad + 0,013783 a_4 + 0,025277 a_5 - 0,53878 a_D \dots 1)
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man schließlich die allgemeinen Formeln für die  $Y^0$  angeben, und zwar:

$$\left. \begin{aligned}
 Y_0^0 &= 0,26778 a_0 - 0,04901 a_1 + 0,00262 a_2 - 0,00433 a_3 \\
 &\quad - 0,00384 a_4 - 0,00753 a_5 + 0,15960 a_D \\
 Y_1^0 &= -0,06050 a_0 + 0,18240 a_1 - 0,02941 a_2 + 0,00012 a_3 \\
 &\quad - 0,00951 a_4 - 0,01534 a_5 + 0,33182 a_D \\
 Y_2^0 &= -0,01290 a_0 - 0,03344 a_1 + 0,13362 a_2 - 0,04400 a_3 \\
 &\quad - 0,00391 a_4 - 0,01985 a_5 + 0,39226 a_D \\
 Y_3^0 &= -0,01985 a_0 - 0,00391 a_1 - 0,04400 a_2 + 0,13362 a_3 \\
 &\quad - 0,03344 a_4 - 0,01290 a_5 + 0,39226 a_D \\
 Y_4^0 &= -0,01534 a_0 - 0,00951 a_1 + 0,00012 a_2 - 0,02941 a_3 \\
 &\quad + 0,18240 a_4 - 0,06050 a_5 + 0,33182 a_D \\
 Y_5^0 &= -0,00753 a_0 - 0,00384 a_1 - 0,00433 a_2 + 0,00262 a_3 \\
 &\quad - 0,04901 a_4 + 0,26778 a_5 + 0,15960 a_D
 \end{aligned} \right\} \dots II)$$

In den allgemeinen Lösungen I) und II) liegen sämtliche Zahlenwerte  $\mu$  und  $\nu$ , die zur Darstellung der Einflußlinien nach den oben abgeleiteten Formeln benötigt werden, als Beiwerte der  $a$ -Größen vor.

Wir wollen die Ordinaten der Einflußlinien für je 9 Zwischenpunkte eines Feldes berechnen, weshalb es noch notwendig ist, die Werte der Funktionen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  für diese Zwischenpunkte zu ermitteln. Wir bedienen uns hierzu der Tafel der Stammfunktionen  $f_1$  und  $f_2$  im Anhang und finden:

Tafel 5. Werte der Funktionen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ .

$\frac{a}{l}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\Phi_1$	0	0,243	0,384	0,441	0,432	0,375	0,288	0,189	0,096	0,027	0
$\Phi_2$	0	0,027	0,096	0,189	0,288	0,375	0,432	0,441	0,384	0,243	0

In der Tafel 6, S. 122 ist die Berechnung der Einflußlinie von  $D$  dargestellt. Da diese Linie spiegelsymmetrisch ist, so sind nur die Ordinaten bis zur Mitte des Mittelfeldes ausgewiesen. Die vollständige Linie zeigt Abb. 79b).

In gleicher Weise berechnet man die Ordinaten der Einflußlinien für  $Y_0^0, Y_1^0, Y_2^0$ , aber weil diese Linien unsymmetrisch sind, für sämtliche fünf Felder.  $Y_3^0, Y_4^0, Y_5^0$  sind die Spiegelbilder dieser Linien.

Gleichung 1) liefert unter Benutzung der Beiwerte  $\mu$  aus den allgemeinen Lösungen folgende Formeln für die Einflußlinienzweige:

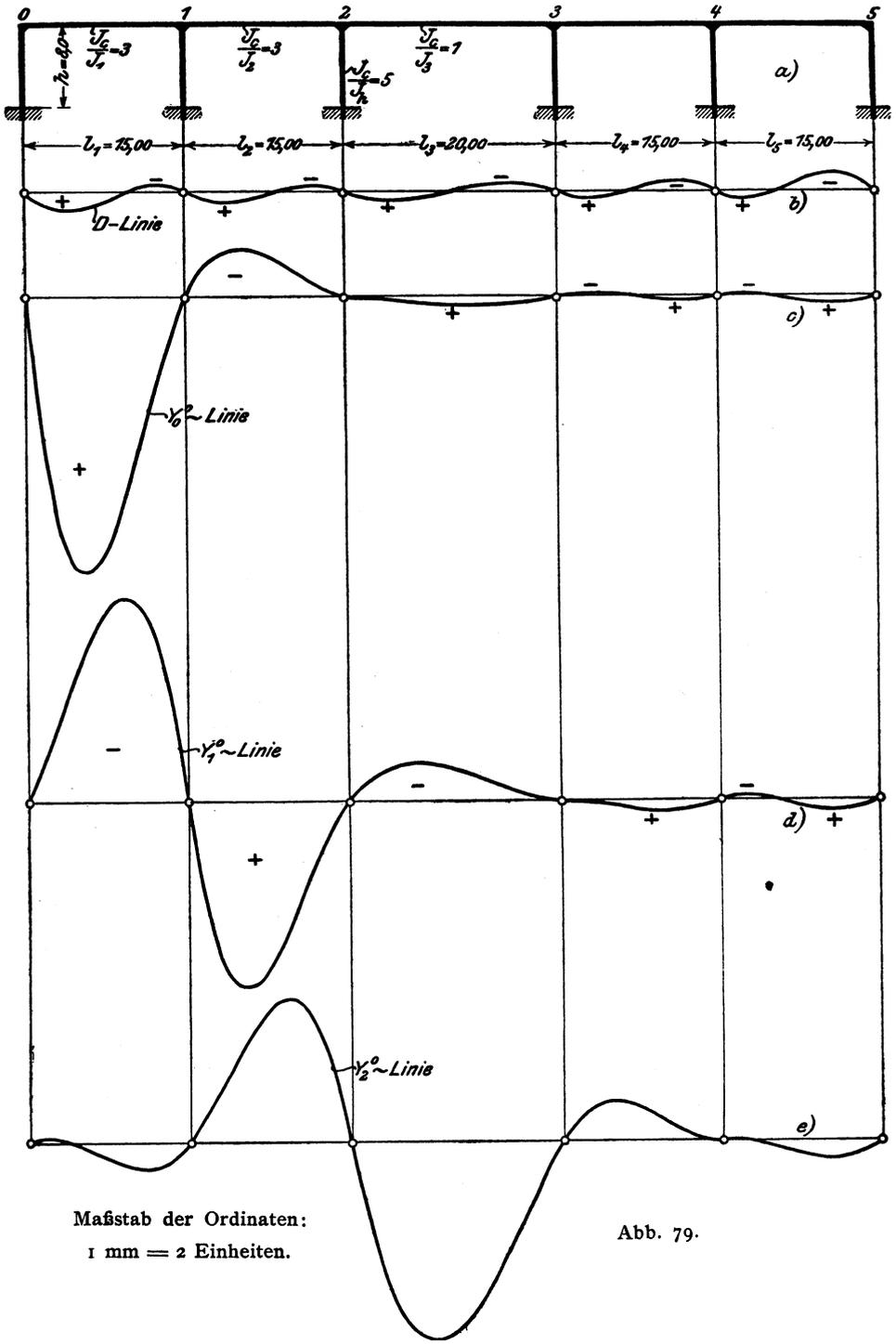
Feld	$Y_0^o$	$Y_1^c$	$Y_2^o$
1	$160,68 \Phi_1 + 29,40 \Phi_2$	$-36,30 \Phi_1 - 109,44 \Phi_2$	$-7,74 \Phi_1 + 20,04 \Phi_2$
2	$-29,40 \Phi_1 - 1,57 \Phi_2$	$109,44 \Phi_1 + 17,64 \Phi_2$	$-20,04 \Phi_1 - 80,16 \Phi_2$
3	$2,10 \Phi_1 + 3,46 \Phi_2$	$-23,52 \Phi_1 - 0,10 \Phi_2$	$106,88 \Phi_1 + 35,20 \Phi_2$
4	$-2,60 \Phi_1 + 2,30 \Phi_2$	$0,07 \Phi_1 + 5,71 \Phi_2$	$-26,40 \Phi_1 + 2,35 \Phi_2$
5	$-2,30 \Phi_1 + 4,52 \Phi_2$	$-5,71 \Phi_1 + 9,20 \Phi_2$	$-2,35 \Phi_1 + 11,88 \Phi_2$

Tafel 6. Berechnung der Einflußlinie  $D$ .

$$D = A \Phi_1 - B \Phi_2, \quad A = \nu_{i-1} l_i l'_c, \quad B = \nu_i l_i l'_c.$$

$i$	$l_i l'_c$	$\nu_{i-1}$	$\nu_i$	$A$	$B$	$\frac{a}{l}$	$D$
1	600	0,02528	0,01378	15,168	8,268	0,1	+ 3,463
						0,2	+ 5,031
						0,3	+ 5,126
						0,4	+ 4,171
						0,5	+ 2,588
						0,6	+ 0,797
						0,7	- 0,779
						0,8	- 1,719
						0,9	- 1,600
2	600	0,01378	0,00977	8,268	5,862	0,1	+ 1,851
						0,2	+ 2,612
						0,3	+ 2,538
						0,4	+ 1,884
						0,5	+ 0,902
						0,6	- 0,151
						0,7	- 1,022
						0,8	- 1,457
						0,9	- 1,201
3	800	0,00977	0,00977	7,816	7,816	0,1	+ 1,688
						0,2	+ 2,251
						0,3	+ 1,970
						0,4	+ 1,126
						0,5	0

Die  $Y^0$ -Linien sind in Abb. 79c bis e) ersichtlich gemacht. Ein Vergleich der Ordinatenwerte der  $D$ - und  $Y^0$ -Linien zeigt, daß die Werte von  $D$  verhältnismäßig klein gegenüber den Beträgen von  $Y^0$  sind. Der Einfluß von  $D$  auf die Momente ist daher nicht groß. Bei ersten Annäherungen wird man sonach  $D$  und somit  $\vartheta_0^o$  Null setzen können, wodurch die Rechnung einigermaßen vereinfacht wird. Bei einer genaueren Berechnung aber ist die Berücksichtigung von  $D$  meist unerlässlich, insbesondere dann, wenn einseitige Belastung eines Feldes in Frage kommen kann. Bei Totalbelastung der Felder ist die Wirkung von  $D$  klein, sie nimmt von den Enden gegen die Mitte rasch ab, was eine Betrachtung der Einflußlinie von  $D$  sofort lehrt.



Maßstab der Ordinaten:  
1 mm = 2 Einheiten.

Abb. 79.

Bei der praktischen Anwendung des hier dargelegten Rechnungsganges ist es nicht notwendig, die  $Y^0$ -Linien abzutragen — es geschah hier nur, um den Einfluß von  $D$  zu veranschaulichen, — sondern man berechnet unmittelbar mit Hilfe der Zahlenformeln für die verschiedenen  $Y^0$  auf S. 122 oben und mittels der Gleichungen t), u) und v) die Zahlausdrücke für die Einflußlinienzweige der Momente und Auflagerkräfte  $H$ , die sich alle auf die Form  $A\Phi_1 + B\Phi_2$  bringen lassen.

Die allgemeinen Gleichungen n) und o) sollen noch verwendet werden, um die Größen  $D$  und  $Y^0$  für den Fall zu bestimmen, daß die Riegel infolge einer Temperaturschwankung ihre Längen ändern. Wir wählen  $t = \pm 35^0 \text{ C}$ .

Die rechte Seite der Gleichung o), die mit  $a_D$  bezeichnet wurde, nimmt folgenden Wert an:

$$\begin{aligned} a_D &= \alpha_t t \varrho \sum_{k=0}^n \frac{L_k}{h_k} = \pm \frac{35}{80000} \cdot \frac{1}{40} (15 + 30 + 50 + 65 + 80) \varrho \\ &= \pm \frac{35 \cdot 240}{80000 \cdot 40} \varrho. \end{aligned}$$

Für  $\varrho$  setzen wir

$$\varrho = 6 EJ_c = 4 \cdot 10^5 \text{ tm}^2$$

und finden damit

$$a_D = \pm 1050 \text{ tm}^2.$$

Die Werte  $a_0$  bis  $a_5$  [rechte Seite der Gleichungen n)] haben, falls nur die Wärmewirkung berücksichtigt wird, die Form:

$$a_k = -\varrho \alpha_t t \left[ \frac{L_{k-1}}{h_{k-1}} \frac{l'_c}{l'_k} + \frac{L_k}{h_k} \left( 2 \frac{l'_c}{l'_k} - \frac{l'_c}{h'_k} + 2 \frac{l'_c}{l'_{k+1}} \right) + \frac{L_{k+1}}{h_{k+1}} \frac{l'_c}{l'_{k+1}} \right]$$

Nach Einsetzen der Zahlenwerte erhält man

$$\begin{aligned} a_0 &= -0,833 \varrho \alpha_t t = \mp 145,8 \text{ tm}^2 \\ a_1 &= -4,063 \varrho \alpha_t t = \mp 711,0 \text{ „} \\ a_2 &= -16,042 \varrho \alpha_t t = \mp 2807,4 \text{ „} \\ a_3 &= -16,042 \varrho \alpha_t t = \mp 2807,4 \text{ „} \\ a_4 &= -17,604 \varrho \alpha_t t = \mp 3080,7 \text{ „} \\ a_5 &= -7,500 \varrho \alpha_t t = \mp 1312,5 \text{ „} \end{aligned}$$

Mit den ermittelten Werten von  $a_k$  kann man unter Benutzung der allgemeinen Lösungen I) und II) S. 120 u. 121 die Beträge von  $D$  und  $Y^0$  und somit auch die Werte der Momente und Auflagerkräfte infolge der Wärmeschwankungen berechnen.

Wir bestimmen hier nur  $D$ . Durch Einbringung der Zahlenwerte der  $a$  in I) berechnet man

$$D = \mp 709,7 \text{ tm}^2.$$

Da  $D = \rho \vartheta_0^v$  ist, so wird

$$\vartheta_0^v = \frac{D}{\rho} = \mp \frac{709,7}{400000} = \mp 0,001774,$$

mithin die Verschiebung des Punktes o in wagerechter Richtung

$$\delta_0 = h_0 \vartheta_0^v = 800 \cdot 0,001774 = 1,42 \text{ cm.}$$

Das negative Vorzeichen von  $\vartheta_0^v$  bedeutet, daß der Winkel, den die Stütze  $h_0$  mit der Schlußlinie durch die Stützenfußpunkte einschließt, bei Temperaturerhöhung vergrößert wird, die Stütze bewegt sich sonach nach außen. Die große Verschiebung von 1,42 cm läßt natürlich bedeutende Momente in Stützen und Balken erwarten. Der Einfluß der Wärmeschwankungen ist bei derartigen Systemen bedeutend. Er wächst mit der Felderzahl.

### § 10. Berechnung des Vierendeelträgers.

Die Umrißlinie des Trägers sei beliebig gestaltet, nur die Querschnittsausbildung der Gurte sei an die einschränkende Bedingung geknüpft, daß in jedem Felde die reduzierte Länge des Obergurtstabes gleich der reduzierten Länge des Untergurtstabes sei. Im übrigen kann der Querschnitt der Gurtstäbe beliebig wechseln. Die Querschnittsgestaltung der Pfosten unterliege keiner Einschränkung.

Für die Gurtstäbe eines Feldes gilt demnach

$$o' = u',$$

also

$$o \frac{J_c}{J_o} = u \frac{J_c}{J_u}$$

oder

$$\frac{J_o}{J_u} = \frac{o}{u}, \dots \dots \dots \text{a)}$$

d. h. die Trägheitsmomente der Gurtstäbe eines Feldes verhalten sich so wie die zugehörigen Stablängen. Längeren Stäben entspricht demnach ein größeres Trägheitsmoment; gleichlange Stäbe eines Feldes haben gleiches Trägheitsmoment. Diese Verhältnisse treffen bei ausgeführten Tragwerken der Vierendeelbauart in der Regel gut zu, falls nicht besondere Gründe für die stärkere Ausbildung eines Gurtes vorliegen.

Die in den Abb. 80 a, b, c dargestellten Tragwerkformen, die in jedem Felde gleiche Obergurt- und Untergurtlänge aufweisen, müssen unserer Voraussetzung gemäß auch im Ober- und Untergurt eines Feldes gleiches Trägheitsmoment besitzen. Bei den Tragwerken der

Abb. 81 a, b, c, die durch verschiedene Gurtlängen in einem Felde gekennzeichnet sind, sind nach Wahl der aufeinanderfolgenden Trägheitsmomente eines Gurtes die Trägheitsmomente des zweiten Gurtes durch die Forderung a) festgelegt. Für alle Stäbe gilt, daß der Querschnitt zwischen zwei Knotenpunkten unveränderlich sei.

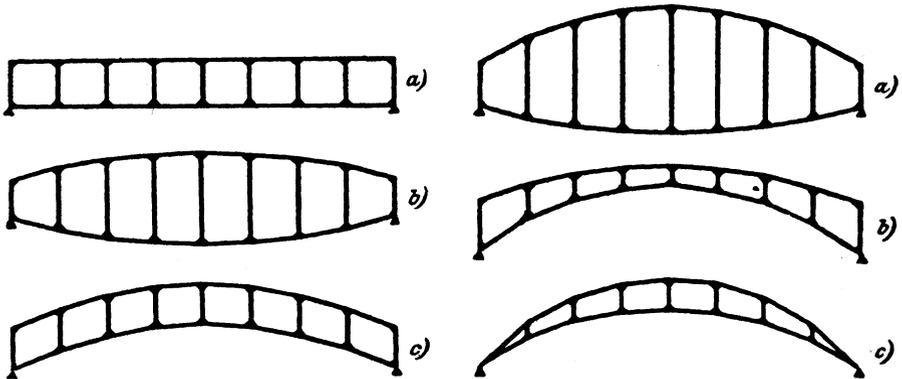


Abb. 80.

Abb. 81.

Da das  $n$ -feldrige Tragwerk aus  $n$  einfachen Grundsystemen entstanden ist, so ist es bei statisch bestimmter Lagerung, die wir zunächst voraussetzen wollen,  $3n$ -fach statisch unbestimmt. Wie bereits in § 3, S. 25 gezeigt wurde, können  $6n$  Elastizitätsbedingungen zur Ermittlung der  $3n$  Überzähligen und  $3n$  Drehwinkel aufgestellt werden. Den Einfluß der Längenänderungen der Gurtstäbe wollen wir, da er u. U. erheblich wird, in der nachfolgenden Rechnung berücksichtigen. Die Längenänderung der Pfosten kann in jedem Falle vernachlässigt werden. Die Belastung bestehe aus Einzellasten, die in den Knotenpunkten angreifen und in die Pfostenrichtung fallen.

Die aufeinanderfolgenden Pfosten werden von links nach rechts mit  $0, 1, 2, \dots, n$  bezeichnet (Abb. 82). Die zwischen den Pfosten  $k-1$  und  $k$  gelegenen Gurtstäbe erhalten den Zeiger  $k$ .

Es bedeuten ferner:

$M_k^l$  und  $M_k^r$  die Gurtmomente unmittelbar links bzw. rechts vom Obergurtnoten  $k$ ,

$\bar{M}_k^l$  und  $\bar{M}_k^r$  die Gurtmomente unmittelbar links bzw. rechts vom Untergurtnoten  $k$ ,

$M_k^v$  und  $\bar{M}_k^v$  die Momente im oberen bzw. unteren Anschlußpunkte des Pfostens  $k$ ,

- $o_k$  und  $u_k$  die wahren Längen des Ober- bzw. Untergurtes zwischen den Pfosten  $k-1$  und  $k$ ,
- $s'_k$  die reduzierte Länge der Gurtstäbe dieses Feldes,
- $h_k$  und  $h'_k$  die wahre und die reduzierte Länge des Pfostens  $k-k$ ,
- $\alpha_k$  den Neigungswinkel des Obergurtstabes  $o_k$  gegen die Auflagerverbindungsline,
- $\beta_k$  den Neigungswinkel des Untergurtstabes  $u_k$  gegen die Auflagerverbindungsline,
- $\Delta o_k$  und  $\Delta u_k$  die Stablängenänderungen der Gurtstäbe  $o_k$  und  $u_k$  infolge der Längskräfte und Temperaturänderungen,
- $\vartheta_k^o, \vartheta_k^u, \vartheta_k^v$  die Stabdrehwinkel der Stäbe  $o_k, u_k$  und  $h_k$ .

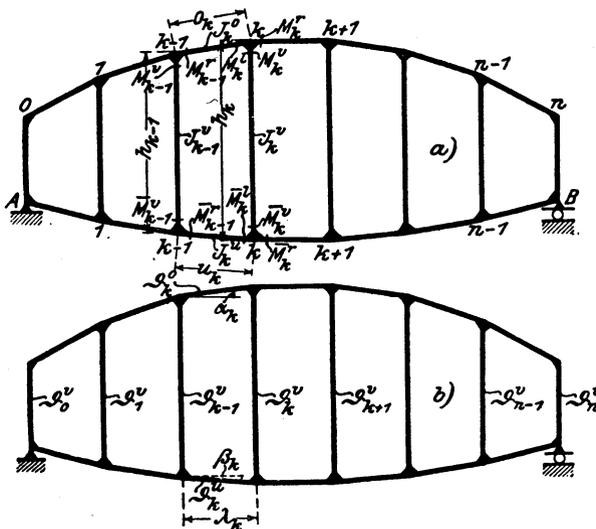


Abb. 82.

Da jedes Feld vier ausgezeichnete Punkte aufweist, so können je vier Momentengleichungen angesetzt werden. Es genügt, wenn die Aufschreibung für ein Feld, z. B. für das zwischen den Pfosten  $h_{k-1}$  und  $h_k$  liegende, durchgeführt wird. Wir durchschreiten die Stäbe dieses Feldes, bei Punkt  $k-1$  des Untergurtes beginnend, im Sinne der Uhrzeigerbewegung und gewinnen folgende Viermomentengleichungen:

$$\left. \begin{aligned} -\bar{M}_{k-1}^v h_{k-1}' - 2 M_{k-1}^v h_{k-1}' + 2 M_{k-1}^r s_k' + M_k^l s_k' \\ - \varrho (\vartheta_{k-1}^v - \vartheta_k^o) = 0^1) \\ M_{k-1}^r s_k' + 2 M_k^l s_k' + 2 M_k^v h_k' + \bar{M}_k^v h_k' - \varrho (\vartheta_k^o - \vartheta_k^v) = 0 \\ M_k^v h_k' + 2 \bar{M}_k^v h_k' + 2 \bar{M}_k^l s_k' + \bar{M}_{k-1}^r s_k' - \varrho (\vartheta_k^v - \vartheta_k^u) = 0 \\ \bar{M}_k^l s_k' + 2 \bar{M}_{k-1}^r s_k' - 2 \bar{M}_{k-1}^v h_{k-1}' - M_{k-1}^v h_{k-1}' \\ - \varrho (\vartheta_k^u - \vartheta_{k-1}^v) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ b)}$$

Hierbei wurde für

$$6 E J_c = \varrho$$

geschrieben. Die rechten Seiten sind Null, da wir nur Knotenbelastung vorausgesetzt haben. Addiert man je zwei Gleichungen des Systems b), die gleiche Pfostenmomente enthalten, also je die erste und vierte, und je die zweite und dritte, so erhält man zunächst zwei neue Gleichungen:

$$\begin{aligned} -3(M_{k-1}^v + \bar{M}_{k-1}^v) h_{k-1}' + 2(M_{k-1}^r + \bar{M}_{k-1}^r) s_k' + (M_k^l + \bar{M}_k^l) s_k' \\ + \varrho (\vartheta_k^o - \vartheta_k^u) = 0 \\ 3(M_k^v + \bar{M}_k^v) h_k' + 2(M_k^l + \bar{M}_k^l) s_k' + (M_{k-1}^r + \bar{M}_{k-1}^r) s_k' \\ - \varrho (\vartheta_k^o - \vartheta_k^u) = 0. \end{aligned}$$

Zur Beseitigung der Drehwinkel aus den vorstehenden Beziehungen benützen wir die Winkelgleichungen, die wir unverändert aus dem vorangehenden Beispiele des Lohsträgers übernehmen können, da das Stabnetz, geometrisch aufgefaßt, dasselbe ist. Die Gleichungen lauten für das  $k$ -te Feld (siehe Gl. b) und c), S. 100:

$$\left. \begin{aligned} \Delta o_k \cos \alpha_k - \Delta u_k \cos \beta_k - (h_k \vartheta_k^v - h_{k-1} \vartheta_{k-1}^v) \\ + \lambda (\vartheta_k^o \operatorname{tg} \alpha_k + \vartheta_k^u \operatorname{tg} \beta_k) = 0 \\ \Delta o_k \sin \alpha_k + \Delta u_k \sin \beta_k - \lambda (\vartheta_k^o - \vartheta_k^u) = 0. \end{aligned} \right\} \text{ c)}$$

Man könnte nun für die Differenz  $(\vartheta_k^o - \vartheta_k^u)$  in den obigen Momentengleichungen den Wert aus der zweiten Winkelgleichung einführen. Nun ist aber der Einfluß des Gliedes  $\Delta o_k \sin \alpha_k + \Delta u_k \sin \beta_k$ , auf die Größe der Überzähligen praktisch so geringfügig, daß wir es, ohne nennenswerten Fehler zu begehen, vernachlässigen und

$$\vartheta_k^o - \vartheta_k^u = 0 \dots \dots \dots \text{ d)}$$

setzen können. Gleichung d) ist für die in Abb. 80 a und b dargestellten Tragwerksformen bei lotrechter Belastung strenge richtig.

1) Die Pfostenmomente  $\bar{M}_{k-1}^v$  und  $M_{k-1}^v$  wurden negativ eingeführt, da man sich das Vorzeichen dieser Momente durch die Momentengleichungen des links vorangehenden Feldes bei entgegengesetzter Durchschreitungsrichtung des Stabes  $h_{k-1}$  als positiv festgelegt denken muß.

Um die Anzahl der Unbekannten zu verringern, berücksichtigen wir die statischen Beziehungen, die zwischen den drei Momenten eines Knotens bestehen. Aus der Bedingung, daß die Summe der Momente an einem herausgeschnittenen Knoten Null ist, folgt für jeden Ober- bzw. Untergurtnoten:

$$M^v = M^l - M^r \quad \text{und} \quad \bar{M}^v = \bar{M}^l - \bar{M}^r,$$

womit die voranstehenden Gleichungen übergehen in

$$\left. \begin{aligned} -3(M_k^l{}_{-1} + \bar{M}_k^l{}_{-1})h'_{k-1} + (M_k^r{}_{-1} + \bar{M}_k^r{}_{-1})(3h'_{k-1} + 2s'_k) \\ + (M_k^l + \bar{M}_k^l)s'_k = 0 \\ (M_k^r{}_{-1} + \bar{M}_k^r{}_{-1})s'_k + (M_k^l + \bar{M}_k^l)(3h'_k + 2s'_k) \\ - 3(M_k^r + \bar{M}_k^r)h'_k = 0. \end{aligned} \right\} \text{ e)}$$

Derartige Gleichungen können in der Zahl  $2n$  aufgestellt werden. Faßt man die in den Klammern stehenden Momentensummen als Unbekannte auf, so ist leicht zu erkennen, daß nur  $2n$  verschiedene Momentensummen möglich sind, daher können diese  $2n$  Größen aus den Gleichungen e) ermittelt werden. Ihre Berechnung ist sehr einfach. Da die rechten Seiten durchwegs Null sind, so verschwinden die Zählerdeterminanten sämtlicher Unbekannten und es folgt:

$$M_k^l + \bar{M}_k^l = 0 \quad \text{und} \quad M_k^r + \bar{M}_k^r = 0$$

oder

$$M_k^l = -\bar{M}_k^l \quad \text{und} \quad M_k^r = -\bar{M}_k^r \quad \dots \dots \text{ f)}$$

Wir gelangen damit zu  $2n$  sehr einfachen Beziehungen zwischen den Gurtmomenten. Die Gleichungen f) besagen, daß Ober- und Untergurtnomente eines Feldes paarweise der Größe nach gleich sind und, vom Innern des Feldes gesehen, entgegengesetzten Drehsinn haben. Von den  $3n$  Bestimmungsgleichungen zur Ermittlung der Überzähligen haben wir somit  $2n$  in den Gleichungen f) gefunden. Es bleibt daher nur noch die Aufstellung von  $n$  weiteren Gleichungen übrig.

Wir gehen zu diesem Zwecke nochmals auf die Ausgangsgleichungen b) zurück, um durch eine neue Verbindung eine weitere Gruppe von winkelfreien Gleichungen zu gewinnen. Wir benutzen hierzu die ersten zwei Gleichungen, die mit  $h_{k-1}$  und  $h_k$  multipliziert und sodann addiert werden. Es entsteht:

$$\begin{aligned} & -(\bar{M}_k^v{}_{-1} + 2M_k^v{}_{-1})h'_{k-1}h_{k-1} + (\bar{M}_k^v + 2M_k^v)h'_k h_k \\ & + M_k^r{}_{-1}s'_k(2h_{k-1} + h_k) + M_k^l s'_k(h_{k-1} + 2h_k) \\ & - Q[-(h_k \vartheta_k^v - h_{k-1} \vartheta_k^v{}_{-1}) + \vartheta_k^o(h_k - h_{k-1})] = 0. \end{aligned}$$

Die erste Winkelgleichung kann in der Form geschrieben werden:

$$-(h_k \vartheta_k^v - h_{k-1} \vartheta_{k-1}^v) + \vartheta_k^o (h_k - h_{k-1}) = -(\Delta o_k \cos \alpha_k - \Delta u_k \cos \beta_k),$$

wenn man beachtet, daß nach Gleichung d)  $\vartheta_k^o = \vartheta_k^u$  ist, und daß die Beziehung besteht:

$$\lambda (\operatorname{tg} \alpha_k + \operatorname{tg} \beta_k) = h_k - h_{k-1}.$$

Aus Momenten- und Winkelgleichungen folgt die winkelfreie Beziehung:

$$\begin{aligned} & -(\bar{M}_{k-1}^v + 2 M_{k-1}^v) h_{k-1}' h_{k-1} + (\bar{M}_k^v + 2 M_k^v) h_k' h_k \\ & + M_{k-1}^r s_k' (2 h_{k-1} + h_k) + M_k^l s_k' (h_{k-1} + 2 h_k) \\ & + \varrho (\Delta o_k \cos \alpha_k - \Delta u_k \cos \beta_k) = 0. \end{aligned}$$

Wir beseitigen noch die Pfostenmomente, indem wir sie wie oben durch die benachbarten Gurtmomente ersetzen, und erhalten:

$$\begin{aligned} & -(\bar{M}_{k-1}^l + 2 M_{k-1}^l) h_{k-1}' h_{k-1} + (\bar{M}_{k-1}^r + 2 M_{k-1}^r) h_{k-1}' h_{k-1} \\ & + M_{k-1}^r s_k' (2 h_{k-1} + h_k) + (\bar{M}_k^l + 2 M_k^l) h_k' h_k + M_k^l s_k' (h_{k-1} + 2 h_k) \\ & - (\bar{M}_k^r + 2 M_k^r) h_k' h_k + \varrho (\Delta o_k \cos \alpha_k - \Delta u_k \cos \beta_k) = 0 \dots g) \end{aligned}$$

Da  $n$  derartige Gleichungen aufgestellt werden können, so haben wir in den Gleichungen f) und g) die  $3n$  Bestimmungsgleichungen gefunden, die die Ermittlung der Überzähligen ermöglichen.

Unsere Aufgabe ist es nun, die  $4n$  Gurtmomente dieser Gleichungen durch die äußeren Lasten und die zweckmäßig zu wählenden Überzähligen auszudrücken. Wir betrachten zu diesem Zwecke Abb. 83.

In der oberen Abbildung sind die Schnittkräfte für einen Schnitt unendlich nahe links vom Knoten  $k$  eingetragen. Das Moment der äußeren Kräfte sei durch  $\Delta_k r_k = \mathfrak{M}_k$  gegeben. Da zunächst nur lotrechte in die Pfostenrichtung fallende Knotenlasten und Auflagerkräfte vorausgesetzt werden, so ist die wagerechte Komponente der Schnittkraft im Obergurt gleich der wagerechten Komponente der

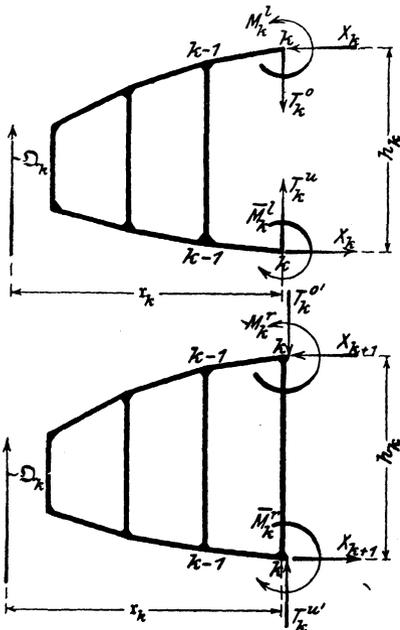


Abb. 83.

Schnittkraft im Untergurt desselben Feldes. Wir bezeichnen diese Teilkraft mit  $X_k$ .  $T_k^o$  und  $T_k^u$  sind die lotrechten Komponenten der Schnittkräfte an den Schnittstellen beider Gurte. Die Gesamtkraft aus  $X_k$  und  $T_k$  nennen wir die Feldkraft im  $k$ ten Felde des Ober- bzw. Untergurtes. Sie ist nicht zu verwechseln mit der Längskraft des Ober- bzw. Untergurtes, da die Feldkraft keineswegs in die Gurtrichtung fällt.

Die Momentengleichung für den Obergurtnoten  $k$  lautet somit (Abb. 83 a):

$$-M_k^l + \bar{M}_k^l + \mathfrak{M}_k - X_k h_k = 0.$$

Unter Benutzung der Gleichungen f) erhält man daraus:

$$M_k^l = \frac{\mathfrak{M}_k}{2} - \frac{X_k h_k}{2} \dots \dots \dots \text{h)}$$

In derselben Weise findet man  $M_k^r$ , wenn man einen Schnitt unendlich nahe rechts vom Knoten  $k$  in Betracht zieht (Abb. 83 b). Die Momentengleichung wird jetzt

$$-M_k^r + \bar{M}_k^r + \mathfrak{M}_k - X_{k+1} h_k = 0$$

und daraus bei Benutzung der vereinfachenden Beziehungen f):

$$M_k^r = \frac{\mathfrak{M}_k}{2} - \frac{X_{k+1} h_k}{2} \dots \dots \dots \text{h')}$$

Es ist also gelungen, die Obergurtmomente  $M^l$  und  $M^r$  durch die äußeren Momente  $\mathfrak{M}$  und durch die Feldkraftkomponenten  $X$  auszudrücken, somit sind auch die Untergurtmomente durch diese Größen bestimmbar und wir finden daher

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_k^l &= -M_k^l = -\frac{\mathfrak{M}_k}{2} + \frac{X_k h_k}{2} \\ \bar{M}_k^r &= -M_k^r = -\frac{\mathfrak{M}_k}{2} + \frac{X_{k+1} h_k}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{i)}$$

Ebenso können die in der Gleichung g) vorkommenden Längenänderungen leicht durch die Größen  $X$  dargestellt werden, nämlich:

$$\Delta o_k \cos \alpha_k = \frac{O_k \cos \alpha_k \cdot o_k}{E F_k^o} \pm \alpha_t t o_k \cos \alpha_k = -\frac{X_k o_k}{E F_k^o} \pm \alpha_t t \lambda_k,$$

$$\Delta u_k \cos \beta_k = \frac{U_k \cos \beta_k \cdot u_k}{E F_k^u} = \frac{X_k u_k}{E F_k^u},$$

wobei  $\pm t$  die Temperaturdifferenz des Obergurtes gegen den Untergurt bezeichnet. Somit ist

$$\varrho (\Delta o_k \cos \alpha_k - \Delta u_k \cos \beta_k) = -6 X_k \left[ o_k \frac{J_c}{F_k^o} + u_k \frac{J_c}{F_k^u} \right] \pm 6 E J_c \alpha_t t \lambda_k \dots \dots \dots \text{k)}$$

9\*

Bei der Aufstellung der Ausdrücke für die Längenänderungen wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß die Feldkraft gleich der Gurtlängskraft ist, was, wie schon oben bemerkt wurde, nicht richtig ist. Gewöhnlich ist aber die Neigung der Feldkraft gegen die Gurt- richtung nicht allzu groß, so daß es erlaubt erscheint, bei der Er- mittlung des an sich nicht beträchtlichen Gliedes, das den Einfluß der Längenänderungen darstellt, die oben benutzte Vereinfachung ein- zuführen<sup>1)</sup>.

Sämtliche Momente und Längenänderungen der Bestimmungsgleichungen g) können daher als Funktionen der  $n$  Größen  $X$ , die wir als Überzählige wählen wollen, dargestellt werden. Die Gleichung g) nimmt nach Einführung der Werte aus den Formeln h), i), k) die endgültige Form an:

$$X_{k-1} h'_{k-1} h_k^2 - X_k \left[ h'_{k-1} h_k^2 + 2 s'_k (h_k^2 - 1 + h_{k-1} h_k + h_k^2) + h'_k h_k^2 + 12 \left( o_k \frac{J_c}{F_k^o} + u_k \frac{J_c}{F_k^u} \right) \right] + X_{k+1} h'_k h_k^2 = - [\mathfrak{M}_{k-1} s'_k (2 h_{k-1} + h_k) + \mathfrak{M}_k s'_k (h_{k-1} + 2 h_k)] \mp 12 E J_c \alpha_i t \lambda_k . \quad 1)$$

Hierbei ist  $k$  der Reihe nach 1, 2, ...  $n$  zu setzen. Die rechten Seiten der ersten und letzten Gleichung des Systems 1) weichen etwas von der allgemeinen Form ab.

Die erste Gleichung lautet:

$$\dots = - [\mathfrak{M}_0 (h'_0 h_0 + s'_1 (2 h_0 + h_1)) + \mathfrak{M}_1 s'_1 (h_0 + 2 h_1)]$$

und die letzte Gleichung:

$$\dots = - [\mathfrak{M}_{n-1} s'_n (2 h_{n-1} + h_n) + \mathfrak{M}_n (s'_n (2 h_n + h_{n-1}) + h'_n h_n)].$$

Ist  $\mathfrak{M}_0$  und  $\mathfrak{M}_n$  wie beim frei aufliegenden Balken mit lotrechter Belastung Null, dann fällt diese Unterscheidung fort.

Die  $n$  Gleichungen 1) reichen aus, um die Größen  $X$  und somit alle anderen Werte zu bestimmen. Die Ermittlung der Überzähligen ist damit auf die Auflösung eines Systems dreigliedriger Gleichungen der Form 1) zurückgeführt.

Wir hätten den Rechnungsgang insofern abkürzen können, als wir nach Feststellung der Gleichungen f) diese einfachen Zusammen-

<sup>1)</sup> Es steht natürlich nichts im Wege, die Berechnung dieses Einflusses genau durchzuführen. Für die Gurtkraft  $S$  ist dann zu setzen

$$S = X \cos \alpha + T \sin \alpha ,$$

wenn  $\alpha$  die Neigung des Gurtes gegen die Wagerechte bedeutet.  $T$  kann man ebenfalls durch  $X$  ausdrücken und erhält ein Zusatzglied im Beiwert von  $X_n$ , wie oben, außerdem ein weiteres von  $\mathfrak{M}$  abhängiges Glied auf der rechten Seite.



als Momentenpunkt gebildet haben. Die in diesen Gleichungen auftretenden  $X$ -Kräfte sind demnach die wagerechten Komponenten der Feldkräfte des Untergurtes. Halten wir das fest, dann ergibt sich unter Hinweis auf Abb. 84 die wagerechte Komponente der Obergurtfeldkraft im  $k$ ten Felde mit

$$X_k^o = X_k^u - \sum_1^{k-1} H.$$

Da nun  $X_k^o$  und  $X_k^u$  ihrem absoluten Werte nach nicht mehr gleich sind, so ändert sich hierdurch das unter dieser Voraussetzung abgeleitete, von den Gurtlängskräften herrührende Zusatzglied der Gleichung 1).

Es ist jetzt

$$\Delta o_k \cos \alpha_k = \frac{O_k \cos \alpha_k \cdot o_k}{E F_k^o} \pm \alpha_t t o_k \cos \alpha_k = - \frac{(X_k^u - \sum_1^{k-1} H) o_k}{E F_k^o} \pm \alpha_t t \lambda_k,$$

$$\Delta u_k \cos \beta_k = \frac{U_k \cos \beta_k \cdot u_k}{E F_k^u} = \frac{X_k^u u_k}{E F_k^u},$$

somit folgt

$$\varrho (\Delta o_k \cos \alpha_k - \Delta u_k \cos \beta_k)$$

$$= -6 X_k^u \left[ o_k \frac{J_c}{F_k^o} + u_k \frac{J_c}{F_k^u} \right] + 6 o_k \frac{J_c}{F_k^o} \sum_1^{k-1} H \pm 6 E J_c \alpha_t t \lambda_k \dots k'$$

Mit diesem Gliede nehmen die Bestimmungsgleichungen die Form an:

$$X_{k-1}^u h_{k-1}' h_{k-1}^2 - X_k^u \left[ h_{k-1}' h_{k-1}^2 + 2 s_k' (h_{k-1}^2 + h_{k-1} h_k + h_k^2) + h_k' h_k^2 + I_2 \left( o_k \frac{J_c}{F_k^o} + u_k \frac{J_c}{F_k^u} \right) \right] + X_{k+1} h_{k+1}' h_{k+1}^2$$

$$= - \left[ \mathfrak{M}_{k-1} s_k' (2 h_{k-1} + h_k) + \mathfrak{M}_k s_k' (h_{k-1} + 2 h_k) + \right.$$

$$\left. + I_2 o_k \frac{J_c}{F_k^o} \sum_1^{k-1} H \right] \mp I_2 E J_c \alpha_t t \lambda_k \dots \dots \dots 1')$$

Die Gleichung 1') unterscheidet sich somit nur durch das von  $\Sigma H$  abhängige Glied auf der rechten Seite von der Gleichung 1). Durch den oberen Zeiger  $u$  wurde angedeutet, daß die aus dieser Gleichung errechneten Werte der Überzähligen  $X$  sich auf den Untergurt beziehen.

Vernachlässigt man, was unter Umständen erlaubt ist, die Wirkung der Gurtlängskräfte, dann fällt auf der rechten Seite das unterscheidende Zusatzglied weg und die Gleichung 1') geht in die Gleichung 1) über.

**Einflußlinien der Überzähligen.**

Nach der Auflösung der Bestimmungsgleichungen erhält man die Unbekannten  $X$  in der Gestalt

$$X = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 + \dots + \mu_k a_k + \dots + \mu_n a_n \quad . \quad n)$$

$\mu_1 \mu_2 \dots$  sind Zahlenwerte, die sich aus den Beiwerten der Unbekannten im Gleichungssysteme ergeben. Die  $a_1 a_2 \dots$  sind die zunächst unbestimmt gelassenen rechten Seiten der Gleichungen 1).

Um nun die Einflußlinien der Überzähligen zu finden, belastet man der Reihe nach die einzelnen Knoten mit  $P = 1$ , bestimmt hierfür die Werte  $a$  und mit Hilfe der Lösungen n) die Einzelwerte der Unbekannten  $X$ , aus denen dann die Einflußlinien zusammengestellt werden. Bei symmetrischen Trägern genügt natürlich die Berechnung für eine Trägerhälfte.

Aus der Tatsache, daß der Beiwert der mittleren Unbekannten in den Gleichungen 1) bedeutend größer ist als die Beiwerte der rechts und links stehenden Gleichungsglieder, folgt, daß in dem Ausdrucke n) der Unbekannten  $X_k$  der Beiwert  $\mu_k$  weitaus größer ist als alle übrigen Zahlenwerte. Die Beiwerte  $\mu$  nehmen vom Gliede  $\mu_k a_k$  rasch nach beiden Seiten ab. In erster Annäherung kann daher auch

$$X_k = \mu_k a_k$$

gesetzt werden. Für genaue Berechnungen genügt die Berücksichtigung je zweier Glieder vor und hinter  $\mu_k a_k$ , alle anderen Glieder können Null gesetzt werden. Mit dieser Eigenschaft der Lösungen n) hängt in weiterer Folge auch die bemerkenswerte Form der Einflußlinien der Überzähligen  $X$  zusammen. In Abb. 85 ist eine solche Einflußlinie dargestellt. Scharf betont sind nur die Punkte  $a$  und  $b$ , während die Knicke  $c$  und  $d$  nur wenig merklich sind. Die Teile  $o - c$  und  $d - n$  weichen so wenig von der geraden Linie ab,

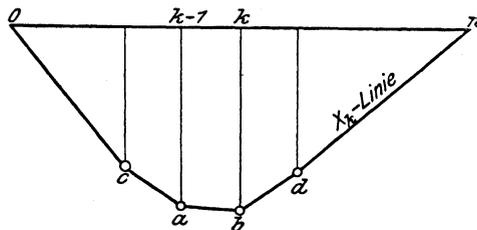


Abb. 85.

daß selbst bei größerem Zeichnungsmaßstab die Krümmung dieser Zweige nicht zum Ausdruck kommt. Für Vorberechnungen genügt daher die Ermittlung der zwei Punkte  $a$  und  $b$  der Einflußlinie, die dann mit  $o$  und  $n$  geradlinig verbunden werden. Für genauere Berechnungen empfiehlt es sich, auch noch die Punkte  $c$  und  $d$  zu bestimmen.

**Näherungsverfahren.**

Obwohl die Auflösung des Gleichungssystems 1) selbst bei vielen Gliedern keine besonderen Schwierigkeiten macht, ist es doch zweckmäßig, für Vorberechnungen einfache Bestimmungsgleichungen für die Überzähligen  $X$  zur Hand zu haben. Diese können nach dem Vorbilde Engessers<sup>1)</sup> in der Weise gewonnen werden, daß man den Einfluß der Verbiegung der Pfosten vernachlässigt, deren Trägheitsmoment also unendlich groß annimmt; dementsprechend werden die reduzierten Längen  $h'_k$  Null und in den Gleichungen 1) verschwinden die Außenglieder. Die Gleichungen nehmen jetzt die einfache Form an:

$$2 X_k s'_k [h_{k-1}^2 + h_{k-1} h_k + h_k^2] = s'_k [\mathfrak{M}_{k-1} (2 h_{k-1} + h_k) + \mathfrak{M}_k (h_{k-1} + 2 h_k)]$$

und daraus

$$X_k = \frac{\mathfrak{M}_{k-1} (2 h_{k-1} + h_k) + \mathfrak{M}_k (h_{k-1} + 2 h_k)}{2 (h_{k-1}^2 + h_{k-1} h_k + h_k^2)} \dots \text{o)}$$

Die so berechneten Werte entsprechen den Stammwerten Engessers. Sie weichen allerdings manchmal nicht unerheblich von den genauen Werten ab, doch sind sie, wie man sieht, unabhängig von der Querschnittsgestaltung der aufeinanderfolgenden Gurtstäbe, weshalb sie für eine Vorberechnung, um vorläufige Anhaltspunkte für die Querschnittsgestaltung zu erhalten, sehr gut zu verwenden sind. Um die Einflußlinien zu bestimmen, genügt es, zwei Werte von  $X_k$  nach Formel o) zu berechnen, indem man die Last  $\mathfrak{I}$  im Knoten  $k - 1$  und hierauf im Knoten  $k$  aufstellt und die zugehörigen  $\mathfrak{M}$ -Werte ermittelt.

**Bogenträger der Vierendeelbauart.**

Es soll noch der Fall untersucht werden, daß das Vierendeeltragwerk statisch unbestimmt gelagert ist. Als Beispiel wählen wir

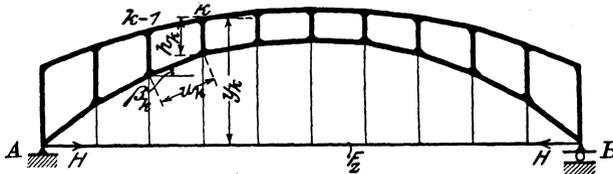


Abb. 86.

den Zweigelenksbogen (Abb. 86). Die Lasten greifen mittels Hängestangen am Untergurt an.

<sup>1)</sup> Prof. Dr.-Ing. Fr. Engesser, Die Berechnung der Rahmenträger. Berlin 1913.

Zu den  $3n$  Unbekannten des Balkenträgers tritt noch eine weitere Unbekannte, der Bogenschub  $H$ , hinzu. Dementsprechend benötigen wir auch eine weitere Elastizitätsbedingung. Die festen Kämpfergelenke denken wir uns durch einen Stab mit unendlich großem Querschnitt, der die Auflagerpunkte verbindet, ersetzt. Da kein neuer ausgezeichneter Punkt hinzutritt, so können auch keine weiteren Momentengleichungen aufgestellt werden. Dafür aber können zwei neue Winkelgleichungen, die sich über das Stabeck erstrecken, das vom Untergurt und dem Zusatzstab gebildet wird, angesetzt werden. Die eine Winkelgleichung bestimmt das unbekannte  $H$ , die zweite einen weiteren, neu hinzugekommenen Stabdrehwinkel, da durch Hinzutreten des Verbindungsstabes  $AB$  die Zahl der Stabdrehwinkel um Eins vermehrt wurde.

Die beiden Winkelgleichungen lauten mit Bezug auf Abb. 86:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n \Delta u_k \cos \beta_k + \sum_{k=1}^n u_k \vartheta_k \sin \beta_k &= 0 \\ \sum_{k=1}^n \Delta u_k \sin \beta_k - \sum_{k=1}^n u_k \vartheta_k \cos \beta_k &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots p)$$

Da an Stelle des äußeren Momentes  $\mathfrak{M}_k$  das Moment  $\mathfrak{M}_k - Hy_k$  tritt, so kommt in jeder der  $n$  Bestimmungsgleichungen l') ein von  $H$  abhängiges Glied, ähnlich wie beim Lohseträger, hinzu. Drückt man nun in den Gleichungen p) die  $\vartheta_k$  durch die Unbekannten und äußeren Lasten aus, so erhält man eine weitere Gleichung zur Ermittlung von  $H$ .

Man kann nun unter Verwertung der Rechnungsergebnisse für den Balkenträger einen kürzeren Weg zur Bestimmung des Bogenschubes  $H$  einschlagen. Wir denken uns zu diesem Zwecke das Balkenträgersystem einmal mit den gegebenen Lasten, das zweitemal mit der zunächst unbekanntem Kraft  $H$  belastet. Diesen beiden Belastungszuständen entsprechen die Unbekannten  $X_k^P$  und  $X_k^H$ ; dann ist der tatsächliche Wert der Überzähligen im Bogenträger

$$X_k = X_k^P + X_k^H.$$

Dementsprechend ist auch

$$\vartheta_k = \vartheta_k^P + \vartheta_k^H$$

oder

$$\vartheta_k = \vartheta_k^P + H \vartheta_k^{H=1}$$

und ebenso

$$\Delta u_k = \Delta u_k^P + H \Delta u_k^{H=1},$$

wenn mit  $\vartheta_k^{H=1}$  der Drehwinkel des  $k$ ten Gurtstabes und mit  $\Delta u_k^{H=1}$  die Längenänderung des Stabes  $u_k$  für den Belastungszustand  $H = 1$

bezeichnet werden. Die erste der Gleichungen p) nimmt nun folgende Gestalt an:

$$\sum_{k=1}^n u_k \vartheta_k^P \sin \beta_k + H \sum_{k=1}^n u_k \vartheta_k^{H=1} \sin \beta_k + \sum_{k=1}^n \Delta u_k^P \cos \beta_k + H \sum_{k=1}^n \Delta u_k^{H=1} \cos \beta_k = 0,$$

woraus sich

$$H = - \frac{\sum_{k=1}^n u_k \vartheta_k^P \sin \beta_k + \sum_{k=1}^n \Delta u_k^P \cos \beta_k}{\sum_{k=1}^n u_k \vartheta_k^{H=1} \sin \beta_k + \sum_{k=1}^n \Delta u_k^{H=1} \cos \beta_k} \dots \dots \text{r)}$$

bestimmt.

Betrachten wir den Zähler näher. Das Produkt  $u_k \vartheta_k^P \sin \beta_k$  ist gemäß Abb. 87 nichts anderes als die wagerechte Verschiebung des Punktes  $k$  infolge der Stabdrehung, wenn der Punkt  $k - 1$  festgehalten ist; ebenso ist  $\Delta u_k^P \cos \beta_k$  die wagerechte Verschiebung des Punktes  $k$  infolge der Stablängenänderung. Somit wird

$$\delta_B^P = \sum_{k=1}^n u_k \vartheta_k^P \sin \beta_k + \sum_{k=1}^n \Delta u_k^P \cos \beta_k$$

die wagerechte Verschiebung des Punktes  $B$  des Balkentragwerkes unter der Wirkung der Lasten  $P$ , wenn  $A$  festgehalten wird.

Kommt nur eine einzige Knotenlast  $P = 1$ , wie dies bei der Berechnung der Einflußlinien der Fall ist, in Frage, so kann man vom Satze über die Gegenseitigkeit der Verschiebungen Gebrauch machen und schließen: Die wagerechte Verschiebung  $\vartheta_B^P$  des

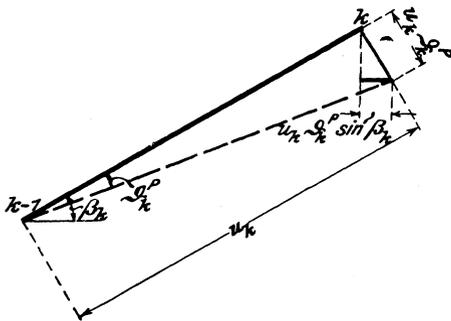


Abb. 87.

Punktes  $P$  durch die lotrechte Last  $1$  im Knoten  $m$  ist gleich der Verschiebung des Punktes  $m$  im lotrechten Sinne, wenn der Träger mit  $H = 1$  belastet wird. Der Zähler bedeutet also die Ordinate der Biegelinie (für lotrechte Verschiebungen) im Punkte  $m$ , wenn auf das System die Last  $H = 1$  wirkt. Damit ist auch die Einflußlinie für  $H$  gegeben;

man braucht bloß die Ordinaten der Biegelinie mit dem Nenner der Gleichung r) zu dividieren. Auch dieser Nenner kann, wie eine einfache Überlegung lehrt, als wagerechte Verschiebung des Punk-

tes  $B$  für den Lastzustand  $H=1$  gedeutet werden. Der Bogen-  
schub  $H$  kann demnach geschrieben werden

$$H = - \frac{\delta_m^{H=1}}{\delta_B^{H=1}} \dots \dots \dots r')$$

Der Vorgang bei Berechnung des Bogenträgers nach Vierendeel-  
bauart ist sonach folgender:

Man ermittelt die Einflußlinien der Größen  $X$  für den Balken-  
träger, wie dies oben beschrieben wurde, sowie die Werte der Größen  $X$   
für den Lastzustand  $H=1$ . Die diesem Belastungszustande ent-  
sprechenden Werte der Überzähligen bezeichne man mit  $\bar{X}$ . Nun  
bestimmt man noch die Drehwinkel  $\vartheta_k^{H=1}$  aus  $n-1$  Gleichungen  
der Form

$$2 \varrho (\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) = - [y_{k-1} s'_k + 2 y_k (s'_k + s'_{k+1}) + y_{k+1} s'_{k+1}] \\ - \bar{X}_k s'_k (h_{k-1} + 2 h_k) - \bar{X}_{k+1} s'_{k+1} (2 h_k + h_{k+1}), \dots \dots s)$$

wo  $k$  der Reihe nach 1, 2, ...  $n-1$  zu setzen ist<sup>1)</sup> und aus der  
bisher noch nicht benutzten zweiten Winkelgleichung p). Aus diesen  
insgesamt  $n$  Gleichungen können die  $n$  fraglichen Stabdrehwinkel  
berechnet werden. Sind einmal die Gurtdrehwinkel bekannt, so lassen  
sich nach dem weiter unten in § 12 gezeigten Verfahren die Biegungs-  
linie und der Betrag des Nenners der Gleichung r') mittels eines  
Verschiebungsplanes unschwer ermitteln. Damit ist die  $H$ -Linie ge-  
funden und somit sind auch die endgültigen  $X$ -Werte bzw. deren  
Einflußlinien durch die Beziehung

$$X = X^P + H \bar{X}$$

festgelegt.

Aus dem Umstande, daß die  $X$ -Werte bei Belastung mit der  
Bogenkraft  $H$  für Ober- und Untergurt verschieden sind, erkennen  
wir, daß beim Bogenträger wohl die Gurtmomente eines Feldes gleich,  
die Gurtlängskräfte aber verschieden sind. Sollen aber die Trägheits-

<sup>1)</sup> Die Gleichungen s) sind leicht gefunden. Man stellt für zwei aufein-  
anderfolgende Gurtstäbe die Viermomentengleichung auf; diese lautet:

$$M_{k-1}^r s'_k + 2 M_k^l s'_k + 2 M_k^r s'_{k+1} + M_{k+1}^l s'_{k+1} - \varrho (\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) = 0.$$

Nun ersetzt man die Obergurtmomente gemäß den Gleichungen h) und h')  
durch die äußeren Momente  $\mathfrak{M}$  und die Überzähligen  $X$ . Das äußere Moment  
im Punkte  $k$  des Obergurtes ist nun

$$\mathfrak{M}_k = -1 \cdot y_k,$$

wobei  $y_k$  die Ordinate des Obergurtpunktes  $k$  bedeutet (Abb. 86). Nach Durchfüh-  
rung der angegebenen Substitutionen und Einführung der Momentenwerte  $\mathfrak{M}$   
erhält man die Gleichung s). Bei  $n$  Gurtstäben können  $n-1$  derartige  
Gleichungen aufgestellt werden.

momente beider Gurtstäbe, bei gleichen Stablängen z. B., gleich sein, so muß der eine Gurt, der den größeren Stabquerschnitt erfordert, in der Trägerebene etwas gedrängter gebaut werden, was meist leicht zu erreichen ist, da der Unterschied gewöhnlich nicht sehr groß ist. Durch zweckmäßige bauliche Durchbildung kann daher eine Forderung erfüllt werden, die die Berechnung der hier in Rede stehenden Tragwerksart überaus vereinfacht.

Den gleichen Weg, den wir hier bei Bestimmung des Horizontal-schubes  $H$  beschrieben haben, schlägt man auch ein, wenn der Vierendeelträger als durchlaufender Balken gelagert ist oder einem Hängegurt als Versteifungsträger dient. Man berechnet das  $3n$ -fach statisch unbestimmte System unabhängig von den durch die Lagerung oder sonstigen Verbindungen gegebenen Überzähligen und legt das so bestimmte System der weiteren Berechnung als Hauptsystem zugrunde, ein Vorgang, wie er ja jedem Statiker geläufig ist. Auf die Identität der Gleichung  $r$ ) mit der im gebräuchlichen Verfahren benutzten Beziehung braucht hier nicht ausdrücklich verwiesen zu werden.

**Zahlenbeispiel.**

Der in Abb. 88 dargestellte Bogenträger in Vierendeelbauweise habe 60 m Stützweite. Die Pfeilhöhe des Untergurtes betrage 9 m, die Trägerhöhe am Scheitel 2 m, die Pfostenhöhe am Auflager 6 m. Die Gurtknotenpunkte liegen auf Parabeln. In der Abbildung sind die auf Grund der vorstehenden Angaben berechneten Stablängen eingeschrieben. Wir nehmen ferner an, daß sämtliche Obergurtstäbe gleichen Querschnitt haben und wählen das Trägheitsmoment

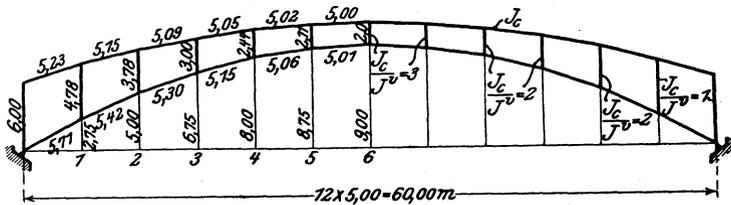


Abb. 88.

des Obergurtes als  $J_c$ . Die reduzierten Längen  $s'$  der Obergurtstäbe sind somit gleich den wahren Längen  $s$ . Da nun Ober- und Untergurt, entsprechend den Voraussetzungen unserer Rechnung, in jedem Felde die gleiche reduzierte Länge haben sollen, so folgt, daß die reduzierte Länge eines Untergurtstabes gleich der wahren Länge des Obergurtstabes des gleichen Feldes ist. Für die Größen  $s_k'$  unserer Gleichungen sind daher die in Abb. 88 eingeschriebenen Obergurtlängen einzuführen.

Für die Pfosten gelten folgende Querschnittsannahmen:

$$\frac{J_c}{J_0^v} = \frac{J_c}{J_1^v} = 1, \quad \frac{J_c}{J_2^v} = \frac{J_c}{J_3^v} = \frac{J_c}{J_4^v} = 2, \quad \frac{J_c}{J_5^v} = \frac{J_c}{J_6^v} = 3.$$

Sonach berechnen sich die reduzierten Längen der Pfosten wie folgt:

$$h'_0 = 6,00 \text{ m}, \quad h'_1 = 4,78 \text{ m}, \quad h'_2 = 7,56 \text{ m}, \quad h'_3 = 6,00 \text{ m}, \\ h'_4 = 4,88 \text{ m}, \quad h'_5 = 6,33 \text{ m}, \quad h'_6 = 6,00 \text{ m}.$$

Wir untersuchen zunächst das Tragwerk als Balkenträger, ermitteln also die Überzähligen  $X$ , die die wagerechten Komponenten der Feldkräfte darstellen, aus den Bestimmungsgleichungen 1) Seite 132. In Tafel 7 sind die Beiwerte der Unbekannten in den Gleichungen 1) dargestellt. Wegen der Trägersymmetrie wurde die Berechnung nur für die linke Trägerhälfte durchgeführt.

Tafel 7.

Berechnung der Beiwerte der Bestimmungsgleichungen 1).

$$v_k = h_k^2 - 1 + h_{k-1} h_k + h_k^2, \quad B_k = h_{k-1} h_k^2 - 1 + 2 s_k' v_k + h_k' h_k^2, \\ A_k = 12 \left( o_k \frac{J_c}{F_k^3} + u_k \frac{J_c}{F_k^3} \right)^{1/2}$$

$k$	$h_k$ m	$h'_k$ m	$h_k' h_k^2$ m <sup>3</sup>	$h_k^2$ m <sup>2</sup>	$h_{k-1} h_k$ m <sup>2</sup>	$v_k$ m <sup>2</sup>	$s_k'$ m	$B_k$ m <sup>3</sup>	$A_k$ m <sup>3</sup>	$B_k + A_k$ m <sup>3</sup>
0	6,00	6,00	216,00	36,00						
1	4,78	4,78	109,22	22,85	28,68	87,53	5,23	1240,78	7,5	1248,28
2	3,78	7,56	108,03	14,29	18,07	55,21	5,15	785,91	7,5	793,41
3	3,00	6,00	54,00	9,00	11,34	34,63	5,09	514,56	7,5	522,06
4	2,44	4,88	29,04	5,95	7,32	22,27	5,05	307,97	7,5	315,47
5	2,11	6,33	28,17	4,45	5,15	15,55	5,02	213,33	7,5	220,83
6	2,00	6,00	24,00	4,00	4,22	12,67	5,00	178,87	7,5	186,37

Die Bestimmungsgleichungen lauten somit, wenn man beide Seiten der Gleichungen mit  $-1$  multipliziert,

1) Da die Werte  $A_k$  klein gegenüber  $B_k$  sind und nur wenig voneinander abweichen, so setzen wir sie einander gleich und berechnen  $A_k$  für die mittelsten Gurtstäbe, deren Längenänderungen den größten Einfluß auf die Unbekannten  $X$  ausüben.

Bezeichnet  $J_c$  das Trägheitsmoment der mittelsten Gurtstäbe, so ist  $\sqrt{\frac{J_c}{F}} = i$  der Trägheitsradius dieser Stäbe und wir finden daher für  $A_k$ , wenn  $o_k = u_k = \lambda$  eingeführt wird, wo  $\lambda$  die Feldweite bedeutet,

$$A_k = 24 \lambda i^3 \quad \text{oder} \quad A_k = 24 \lambda^3 \left( \frac{i}{\lambda} \right)^3;$$

$\frac{\lambda}{i}$  ist das Schlankheitsverhältnis, das wir mit 20 annehmen wollen. Wir ermitteln schließlich, wenn für  $\lambda = 5 \text{ m}$  eingeführt wird,

$$A_k = \frac{24 \cdot 5^3}{20^3} = 7,5 \text{ m}^3.$$

$$\begin{aligned}
& + 1248,3 X_1 - 109,2 X_2 = a_1 \\
- 109,2 X_1 + 793,4 X_2 - 108,0 X_3 & = a_2 \\
- 108,0 X_2 + 522,1 X_3 - 54,00 X_4 & = a_3 \\
- 54,00 X_3 + 315,5 X_4 - 29,04 X_5 & = a_4 \\
- 29,04 X_4 + 220,8 X_5 - 28,17 X_6 & = a_5 \\
- 28,17 X_5 + 186,4 X_6 - 24,00 X_7 & = a_6 \\
- 24,00 X_6 + 186,4 X_7 - 28,17 X_8 & = a_7 \\
- 28,17 X_7 + 220,8 X_8 - 29,04 X_9 & = a_8 \\
- 29,04 X_8 + 315,5 X_9 - 54,00 X_{10} & = a_9 \\
- 54,00 X_9 + 522,1 X_{10} - 108,0 X_{11} & = a_{10} \\
- 108,0 X_{10} + 793,4 X_{11} - 109,2 X_{12} & = a_{11} \\
- 109,2 X_{11} + 1248,3 X_{12} & = a_{12}
\end{aligned}$$

Wir schreiben nun die ersten beiden Gleichungen nochmals an (S. 143), derart, daß die Glieder mit gleichen Unbekannten untereinander stehen, multiplizieren wechselweise mit den Beiwerten von  $X_1$  und addieren sodann. Die so entstehende neue Gleichung a) ist frei von  $X_1$ . Um nicht überflüssige Ziffern mitzuführen, wurden sämtliche Beiwerte der Gleichung a) mit 1000 dividiert. Es genügen, unbeschadet des angestrebten Genauigkeitsgrades, vier Stellen. Unter a) setzen wir nun die dritte Gleichung des voranstehenden Systems, multiplizieren wechselweise mit den Beiwerten von  $X_2$  und addieren, wodurch  $X_2$  aus der Gleichung b), die in der Aufschreibung ebenfalls mit 1000 dividiert erscheint, verschwindet. In dieser Weise schreiten wir bis Gleichung e) fort, die die Unbekannten  $X_6$  und  $X_7$  enthält.

Nun denken wir uns den gleichen Eliminationsvorgang von der letzten Gleichung ausgehend durchgeführt, derart, daß zunächst  $X_{12}$ , dann  $X_{11}$  usw. ausgesondert werden. Da die zweite Hälfte der Gleichungen aus der ersten gewonnen wird, wenn man statt  $X_1, X_{12}$ , statt  $X_2, X_{11}$  usw., ebenso statt  $a_1, a_{12}$ , statt  $a_2, a_{11}$  usw. setzt, so erhält man das Endresultat dieses Aussonderungsvorganges ohne jede Rechnung aus Gleichung e), wenn in dieser Gleichung  $X_6$  durch  $X_7$  und umgekehrt ersetzt und für  $a_1, a_{12}$ , für  $a_2, a_{11}$  usw. geschrieben wird. Das Ergebnis ist Gleichung e'). Auch diese Gleichung enthält bloß die Unbekannten  $X_6$  und  $X_7$ . Durch e) und e') sind diese beiden Überzähligen bestimmt.

Wir eliminieren aus e) und e')  $X_7$  und gewinnen  $X_6$  als lineare Funktion der Größen  $a$ . Benutzen wir diesen Wert der Unbekannten  $X_6$  für Gleichung d), so erhalten wir  $X_5$  und in der gleichen Weise weiter nach rückwärts schreitend alle übrigen Unbekannten bis  $X_1$  als Funktionen der Größen  $a$ .

Schon aus den Gleichungen a) bis e) erkennt man, daß die Beiwerte der  $a$ , von einem bestimmten Gliede an, nach beiden Seiten rasch abnehmen. Es ist daher, nachdem  $X_6$  bestimmt ist, nicht mehr notwendig, bei der schrittweisen Berechnung der übrigen Unbekannten alle Glieder mitzuführen. Im vorliegenden Falle genügen je drei Glieder vor und hinter dem maßgebenden größten Glied, da nur vier Stellen zu berücksichtigen sind. Das maßgebende Glied ist in der Rechnung durch fetteren Druck gekennzeichnet.

$$\begin{array}{l}
 + 1248,3 X_1 - 109,2 X_2 = a_1 \quad \left| \begin{array}{l} 109,2 \\ 1248,3 \end{array} \right. \\
 - 109,2 X_1 + 793,4 X_2 - 108,0 X_3 = a_2 \\
 \hline
 \text{a) } \dots + 978,9 X_2 - 134,9 X_3 = 0,1092 a_1 + 1,249 a_2 \quad \left| \begin{array}{l} 108,0 \\ 978,9 \end{array} \right. \\
 - 108,0 X_2 + 522,1 X_3 - 54,00 X_4 = a_3 \\
 \hline
 \text{b) } \dots + 496,5 X_3 - 52,86 X_4 = 0,01179 a_1 + 0,1349 a_2 + 0,9798 a_3 \quad \left| \begin{array}{l} 54,00 \\ 496,5 \end{array} \right. \\
 - 54,00 X_3 + 315,5 X_4 - 29,04 X_5 = a_4 \\
 \hline
 \text{c) } \dots + 153,8 X_4 - 14,42 X_5 = 0,036367 a_1^1) + 0,027295 a_2 + 0,05286 a_3 \quad \left| \begin{array}{l} 29,04 \\ 153,8 \end{array} \right. \\
 - 29,04 X_4 + 220,8 X_5 - 28,17 X_6 = a_5 \\
 \hline
 \text{d) } \dots + 33,54 X_5 - 4,333 X_6 = 0,041849 a_1 + 0,032118 a_2 + 0,021535 a_3 \quad \left| \begin{array}{l} 28,17 \\ 33,54 \end{array} \right. \\
 - 28,17 X_5 + 186,4 X_6 - 24,00 X_7 = a_6 \\
 \hline
 \text{e) } \dots + 6,130 X_6 - 0,805 X_7 = 0,065209 a_1 + 0,055966 a_2 + 0,044324 a_3 \quad \left| \begin{array}{l} 6,130 \\ 0,8050 \end{array} \right. \\
 + 0,034062 a_4 + 0,024333 a_5 + 0,03354 a_6 \\
 \hline
 \text{e') } \dots - 0,805 X_6 + 6,130 X_7 + 0,03354 a_7 + 0,024333 a_8 + 0,034062 a_9 \quad \left| \begin{array}{l} 0,8050 \\ 0,044324 \end{array} \right. \\
 + 0,044324 a_{10} + 0,055966 a_{11} + 0,065209 a_{12}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 39,93 X_6 = 0,0002651 a_3 + 0,002490 a_4 + 0,02656 a_5 + 0,2056 a_6 \\
 + 0,02700 a_7 + 0,003488 a_8 + 0,0003270 a_9 \\
 1000 X_6 = 0,0072 a_3 + 0,0675 a_4 + 0,7192 a_5 + \mathbf{5,567} a_6 + 0,7311 a_7 \\
 + 0,0945 a_8 + 0,0089 a_9 \\
 33,54 X_5 = 0,0002118 a_2 + 0,001566 a_3 + 0,01471 a_4 + 0,1569 a_5 \\
 + 0,02412 a_6 + 0,003168 a_7 + 0,000410 a_8 \\
 1000 X_5 = 0,0065 a_2 + 0,0468 a_3 + 0,4368 a_4 + \mathbf{4,678} a_5 + 0,7192 a_6 \\
 + 0,0945 a_7 + 0,0122 a_8 \\
 153,8 X_4 = 0,0006367 a_1 + 0,007389 a_2 + 0,05353 a_3 + 0,5028 a_4 \\
 + 0,06746 a_5 + 0,01037 a_6 + 0,00136 a_7 \\
 1000 X_4 = 0,0042 a_1 + 0,0480 a_2 + 0,3480 a_3 + \mathbf{3,269} a_4 + 0,4386 a_5 \\
 + 0,0675 a_6 + 0,0088 a_7 \\
 496,5 X_3 = 0,01201 a_1 + 0,1374 a_2 + 0,9973 a_3 + 0,1728 a_4 + 0,02318 a_5 \\
 + 0,00356 a_6 \\
 1000 X_3 = 0,0242 a_1 + 0,2768 a_2 + \mathbf{2,009} a_3 + 0,3480 a_4 + 0,0468 a_5 \\
 + 0,0072 a_6 \\
 978,9 X_2 = 0,1125 a_1 + 1,287 a_2 + 0,2710 a_3 + 0,04695 a_4 + 0,00633 a_5 \\
 1000 X_2 = 0,1149 a_1 + \mathbf{1,315} a_2 + 0,2768 a_3 + 0,0480 a_4 + 0,0065 a_5 \\
 1248,3 X_1 = 1,013 a_1 + 0,1436 a_2 + 0,3023 a_3 + 0,0524 a_4 \\
 1000 X_1 = \mathbf{0,8112} a_1 + 0,1149 a_2 + 0,0242 a_3 + 0,0042 a_4
 \end{array}$$

Nachfolgend sind die Werte der Überzähligen X nochmals übersichtlich zusammengestellt, wobei für die weitere Rechnung eine Dezimalstelle abgeworfen

<sup>1)</sup> Der kürzeren Schreibweise wegen wurde z. B. statt 0,0006 . . . , 0,036 . . . gesetzt.

wird und dementsprechend auch das drittvorhergehende und drittfolgende Glied des maßgebenden Gliedes unterdrückt werden. Ein größerer Genauigkeitsgrad ist zwecklos, da beim Auftragen und Übertragen der Einflußlinien in den üblichen Zeichnungsmaßstäben die vierte Stelle nicht mehr mit Sicherheit mitgeführt werden kann. Die Werte der Unbekannten  $X_7$  bis  $X_{12}$  gewinnt man aus den oben berechneten Gleichungen, wenn man die Zeiger der Unbekannten und  $a$ -Größen durch die Zeiger der symmetrisch gelegenen Größen der rechten Trägerhälfte ersetzt.

$$\begin{aligned}
 1000 X_1 &= \mathbf{0,811} a_1 + 0,115 a_2 + 0,024 a_3 \\
 1000 X_2 &= 0,115 a_1 + \mathbf{1,315} a_2 + 0,277 a_3 + 0,048 a_4 \\
 1000 X_3 &= 0,024 a_1 + 0,277 a_2 + \mathbf{2,009} a_3 + 0,348 a_4 + 0,047 a_5 \\
 1000 X_4 &= 0,048 a_2 + 0,348 a_3 + \mathbf{3,269} a_4 + 0,439 a_5 + 0,068 a_6 \\
 1000 X_5 &= 0,047 a_3 + 0,439 a_4 + \mathbf{4,678} a_5 + 0,719 a_6 + 0,095 a_7 + 0,012 a_8 \text{ } ^1) \\
 1000 X_6 &= 0,068 a_4 + 0,719 a_5 + \mathbf{5,567} a_6 + 0,731 a_7 + 0,095 a_8 + 0,009 a_9 \text{ } ^1) \\
 1000 X_7 &= 0,009 a_4 + 0,095 a_5 + 0,731 a_6 + \mathbf{5,567} a_7 + 0,719 a_8 + 0,068 a_9 \\
 1000 X_8 &= 0,012 a_5 + 0,095 a_6 + 0,719 a_7 + \mathbf{4,678} a_8 + 0,439 a_9 + 0,047 a_{10} \\
 1000 X_9 &= 0,068 a_7 + 0,439 a_8 + \mathbf{3,269} a_9 + 0,348 a_{10} + 0,048 a_{11} \\
 1000 X_{10} &= 0,047 a_8 + 0,348 a_9 + \mathbf{2,009} a_{10} + 0,277 a_{11} + 0,024 a_{12} \\
 1000 X_{11} &= 0,048 a_9 + 0,277 a_{10} + \mathbf{1,315} a_{11} + 0,115 a_{12} \\
 1000 X_{12} &= 0,024 a_{10} + 0,115 a_{11} + \mathbf{0,811} a_{12}
 \end{aligned}$$

Die nächste Aufgabe ist die Bestimmung der Größen  $a_k$  für die verschiedenen Laststellungen.  $a_k$  hat allgemein die Form:

$$a_k = \alpha_k M_{k-1} + \beta_k M_k.$$

Tafel 8 enthält die Berechnung der Beiwerte  $\alpha_k$  und  $\beta_k$ .

Tafel 8. Berechnung der Beiwerte  $\alpha_k$  und  $\beta_k$ .

$$\alpha_k = s'_k (2 h_{k-1} + h_k), \quad \beta_k = s'_k (h_{k-1} + 2 h_k).$$

$k$	$s'_k$ m	$h_k$ m	$2 h_{k-1} + h_k$ m	$h_{k-1} + 2 h_k$ m	$\alpha_k$ m <sup>2</sup>	$\beta_k$ m <sup>2</sup>
0		6,00				
1	5,23	4,78	16,78	15,56	123,76 <sup>2)</sup>	81,37
2	5,15	3,78	13,34	12,34	68,70	63,55
3	5,09	3,00	10,56	9,78	53,75	49,78
4	5,05	2,44	8,44	7,88	42,62	39,79
5	5,02	2,11	6,99	6,66	35,09	33,43
6	5,00	2,00	6,22	6,11	31,10	30,55
7	5,00	2,11	6,11	6,22	30,55	31,10
8	5,02	2,44	6,66	6,99	33,43	35,09
9	5,05	3,00	7,88	8,44	39,79	42,62
10	5,09	3,78	9,78	10,56	49,78	53,75
11	5,15	4,78	12,34	13,34	63,55	68,70
12	5,23	6,00	15,56	16,78	81,37	123,76 <sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Da die Beiwerte von  $a_9$  und  $a_9$  in  $X_5$  und  $X_6$  verhältnismäßig groß sind, wurde bei diesen beiden Unbekannten ausnahmsweise noch ein weiteres Glied berücksichtigt.

<sup>2)</sup> Hier erscheinen noch die Glieder  $h_0 h_0'$  und  $h_{12} h_{12}' = 36$  hinzugefügt. Siehe die Bemerkung zu Gleichung 1) auf S. 132.

In Tafel 9 S. 146 sind die Ordinatenwerte der  $\mathfrak{M}_k$ -Linien für die aufeinanderfolgenden Knotenbelastungen zusammengestellt und neben jeder  $\mathfrak{M}_k$ -Reihe mittels der Werte  $\alpha_k$  und  $\beta_k$  das zugehörige  $a_k$  berechnet. In den letzten Vertikalreihen finden wir die der Belastung mit  $H = -1$  entsprechenden  $\mathfrak{M}_k$ - und  $a$ -Werte sowie das von den Längskräften abhängige Zusatzglied (Gleichung 1') dargestellt. Die Momente  $\mathfrak{M}_k$  sind hierbei auf den Oberrug bezogen.

Mit Hilfe der in Tafel 9 berechneten  $a_k$ -Werte können, unter Benutzung der oben zusammengestellten Formeln für die Unbekannten  $X_k$ , die Ordinaten der Einflußlinien berechnet werden. Der Vorgang werde an der Berechnung von  $X_4$  gezeigt.

Es ist  $1000 X_4 = 0,048 a_2 + 0,348 a_3 + 3,269 a_4 + 0,439 a_5 + 0,068 a_6$ . Die Zahlenrechnung führt man wie folgt übersichtlich durch:

Last in	1	2	3	4	5	6
0,048 $a_2$	28	39	35	31	27	23
0,348 $a_3$	143	286	335	298	261	223
3,269 $a_4$	955	1912	2867	3127	2736	2346
0,439 $a_5$	94	188	282	376	394	337
0,068 $a_6$	11	23	34	45	57	58
1000 $X_4$	1231	<b>2448</b>	<b>3553</b>	<b>3877</b>	<b>3475</b>	2987

Man ermittle immer eine ganze Horizontalreihe der vorstehenden Tafel, da der eine Faktor hierbei unverändert bleibt, was beim Arbeiten mit dem Rechenschieber oder auf der Rechenmaschine von Vorteil ist. Die erste Zeile erhält man, wenn die  $a_k$ -Werte der zweiten Zeile ( $k = 2$ ) der Tafel 9 mit 0,048 multipliziert werden. Die zweite Zeile wird durch Multiplikation der dritten Zeile ( $k = 3$ ) der Tafel 9 mit 0,348 gewonnen usf. Nach Summation findet man die aufeinanderfolgenden Einflußlinienordinaten für die Punkte 1 bis 6 in der Schlußzeile nebeneinander stehen. In Abb. 89 d ist die Einflußlinie für  $X_4$  aufgetragen. Die Äste der Linie links von 2 und rechts von 5 wurden durch geradlinige Verbindung der abgetragenen Punkte 2 und 5 mit den Auflagerpunkten 0 und 12 gefunden. Demgemäß war die Berechnung der ersten und letzten Kolonne in der Darstellung von  $X_4$  überflüssig. Wie man sich leicht überzeugt, weicht der unter 1 stehende Ordinatenwert nur wenig vom Halbwert der folgenden Ordinate ab. Punkt 1 liegt daher nahezu auf der Verbindungsgeraden 0—2. Ähnliches gilt für 6 und die folgenden Punkte. Bei der praktischen Durchführung der Rechnung ist es daher nicht notwendig, alle  $a_k$ -Werte zu bestimmen. Es genügt die Ermittlung der durch die stark gezeichneten Stufenlinien eingerahmten Werte der Tafel 9.

In der Abb. 89 sind die auf dem vorherbeschriebenen Wege ermittelten Einflußlinien für die Überzähligen  $X_1$  bis  $X_6$  zur Darstellung gebracht. Die Berechnung des gegebenen Tragwerkes als Balkenträger ist somit, soweit die Ermittlung der statisch unbestimmbaren Größen in Frage kommt, vollendet. Da die  $X$ -Werte positiv sind, so besteht die bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbeziehungen getroffene Annahme zu Recht (Abb. 83 S. 130). Der Oberrug wird gedrückt, der Unterrug gezogen.

Die in der Abb. 89 gestrichelt eingetragenen Einflußlinien entsprechen jenen Einflußwerten, die bei Vernachlässigung der Gurtlängskräfte gefunden werden. Der Unterschied ist für die Stäbe in Trägermitte am größten und nimmt gegen die Auflager hin ab. Von  $X_3$  an ist der Unterschied schon so klein, daß er in dem gewählten Darstellungsmaßstabe nicht mehr deutlich zum Ausdruck

Tafel 9. Berechnung der  $\alpha_k$ -Werte.

k	$\alpha_k$ m <sup>2</sup>	$\beta_k$ m <sup>3</sup>	$\alpha_k = \alpha_k \mathfrak{M}_{k-1} + \beta_k \mathfrak{M}_k$												Lastzustand H = — t			
			Last it in 1		Last it in 2		Last it in 3		Last it in 4		Last it in 5		Last it in 6		$\mathfrak{M}_k$	$\alpha_k'$	$\Delta_k^{(1)}$	$\alpha_k' + \Delta_k$
			$\mathfrak{M}_k$	$\alpha_k$	$\mathfrak{M}_k$	$\alpha_k$	$\mathfrak{M}_k$	$\alpha_k$	$\mathfrak{M}_k$	$\alpha_k$	$\mathfrak{M}_k$	$\alpha_k$	$\mathfrak{M}_k$	$\alpha_k$	mt	m <sup>2</sup> t	m <sup>2</sup> t	m <sup>2</sup> t
0	—	—	0	—	0	—	0	—	0	—	0	—	0	—	6,00	—	—	—
1	123,76	81,37	4,583	372,7	4,167	339,7	3,750	305,0	3,333	271,1	2,917	237,2	2,500	203,4	7,53	— 1355,0	— 3,8	— 1358,8
2	68,70	63,55	4,167	579,0	8,333	815,9	7,500	734,2	6,667	652,6	5,833	571,1	5,000	489,6	8,78	— 1075,1	— 3,8	— 1078,9
3	53,75	49,78	3,750	410,8	7,500	820,9	11,250	962,8	10,000	856,0	8,750	749,0	7,500	642,0	9,75	— 956,9	— 3,8	— 960,7
4	42,62	39,79	3,333	292,3	6,667	585,0	10,000	877,1	13,333	956,5	11,667	837,0	10,000	717,5	10,44	— 830,6	— 3,8	— 834,4
5	35,09	33,43	2,917	214,4	5,833	429,0	8,750	643,3	11,667	857,5	14,583	896,7	12,500	768,7	10,86	— 729,3	— 3,8	— 733,1
6	31,10	30,55	2,500	167,2	5,000	334,1	7,500	501,2	10,000	668,3	12,500	835,2	15,000	846,9	11,00	— 673,7	— 3,8	— 677,5
7	30,55	31,10	2,083	141,1	4,167	282,2	6,250	423,6	8,333	564,7	10,417	705,7	12,500	846,9	10,86	— 673,7	— 3,8	— 677,5
8	33,43	35,09	1,667	128,1	3,333	256,2	5,000	384,4	6,667	512,8	8,333	640,6	10,000	768,7	10,44	— 729,3	— 3,8	— 733,1
9	39,79	42,62	1,250	119,7	2,500	239,1	3,750	358,7	5,000	478,6	6,250	597,7	7,500	717,5	9,75	— 830,6	— 3,8	— 834,4
10	49,78	53,75	0,833	106,8	1,667	214,1	2,500	321,1	3,333	428,0	4,167	535,0	5,000	642,0	8,78	— 956,9	— 3,8	— 960,7
11	63,55	68,70	0,417	81,5	0,833	163,0	1,250	244,9	1,667	326,3	2,083	408,0	2,500	489,6	7,53	— 1075,1	— 3,8	— 1078,9
12	81,37	123,76	0	34,2	0	67,7	0	101,7	0	135,6	0	169,5	0	203,4	6,00	— 1355,0	— 3,8	— 1358,8

Die  $\alpha_k$ -Werte wurden mit dem Rechenschieber (50 cm lang) berechnet, die letzte Stelle ist daher unsicher.

1)  $\Delta_k = 12 \frac{J_0}{F_k^2} \alpha_k = 3,75$ .

kommt. Im übrigen sei auf die Bemerkungen über die Vernachlässigung des Einflusses der Normalkräfte am Schlusse dieses Paragraphen verwiesen.

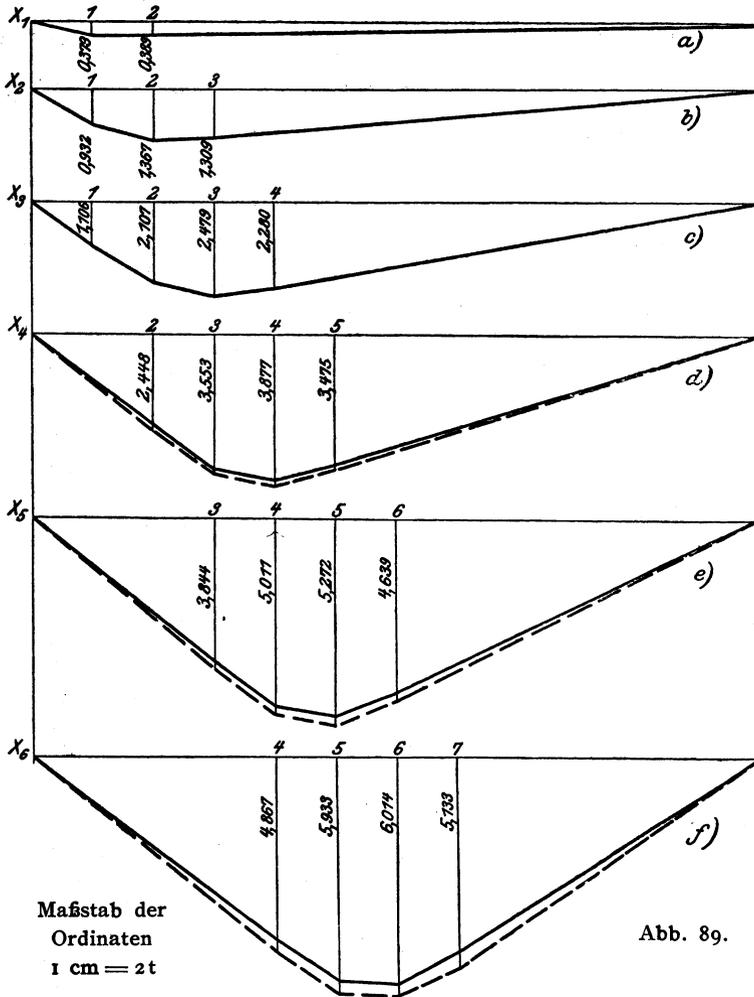


Abb. 89.

Mit Hilfe der Gleichungen h) und h') findet man die Gurtmomente bzw. deren Einflußlinien für den Balkenträger mit

$$M_k^l = \frac{1}{2} (\mathfrak{M}_k - X_k h_k),$$

$$M_k^r = \frac{1}{2} (\mathfrak{M}_k - X_{k+1} h_k)$$

und für die Anschlußmomente der Pfosten

$$M_k^v = M_k^l - M_k^r = (X_{k+1} - X_k) \frac{h_k}{2}.$$

Die Gurtlängskräfte sind

$$\text{für den Obergurt } O_k = X_k \left[ \cos \alpha_k + \frac{\sin \alpha_k}{2} (\operatorname{tg} \alpha_k - \operatorname{tg} \beta_k) \right] + \frac{1}{2} \mathfrak{D}_k \sin \alpha_k,$$

$$\text{für den Untergurt } U_k = X_k \left[ \cos \beta_k - \frac{\sin \beta_k}{2} (\operatorname{tg} \alpha_k - \operatorname{tg} \beta_k) \right] + \frac{1}{2} \mathfrak{D}_k \sin \beta_k.$$

$\mathfrak{D}_k$  ist die Balkenquerkraft im  $k$ -ten Felde. Der Obergurt ist gedrückt, der Untergurt gezogen.

Die Pfostenlängskraft  $V_k$  ist durch die Formel gegeben

$$V_k = \frac{X_{k+1}}{2} (\operatorname{tg} \alpha_{k+1} - \operatorname{tg} \beta_{k+1}) - \frac{X_k}{2} (\operatorname{tg} \alpha_k - \operatorname{tg} \beta_k) \pm \frac{P_k}{2}.$$

$P_k$  ist die Knotenlast im Punkte  $k$ . Das  $+$ -Zeichen gilt, wenn die Last am Obergurt, das  $-$ -Zeichen, wenn die Last am Untergurt angreift. Ergibt sich  $V_k$  positiv, so sind die Pfosten gedrückt, andernfalls gezogen.

Bei der Einführung der Werte für die Winkelfunktionen  $\sin$  und  $\operatorname{tg}$  ist auf das Vorzeichen der Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  zu achten. Die Vorzeichen dieser Funktionen in den vorstehenden Formeln gelten für Tragwerke von der Form Abb. 82, also für rechts steigende Obergurte und für rechts fallende Untergurte. Hat einer der Gurte entgegengesetzte Steigung, so ist das Vorzeichen vor den betreffenden Funktionen  $\sin$  und  $\operatorname{tg}$  umzukehren.

Wir benutzen die  $a_k$ -Werte der letzten Vertikalreihe der Tafel 6, um noch die Größe der Überzähligen für den Lastzustand  $H = 1$  zu finden.

Nach Einführung der  $\alpha_k$  in die Formeln von  $X_1$  bis  $X_6$  auf Seite 144 findet man

$$\begin{array}{ll} \bar{X}_1^u = -1,250 \text{ t}, & \bar{X}_4^u = -3,482 \text{ t}, \\ \bar{X}_2^u = -1,882 \text{ t}, & \bar{X}_5^u = -4,402 \text{ t}, \\ \bar{X}_3^u = -2,586 \text{ t}, & \bar{X}_6^u = -4,926 \text{ t}. \end{array}$$

Die Werte wurden mit dem oberen Zeiger  $u$  versehen, um anzudeuten, daß es sich um die wagerechten Komponenten der Feldkräfte des Untergurtes handelt, nachdem sich die in Rechnung gesetzten Momente  $\mathfrak{M}$  infolge  $H = -1$  auf die Obergurtnoten beziehen.

Die Berechnung des Horizontalschubes  $H$  erfordert die Kenntnis der Stabdrehwinkel einer Gurtung bei Belastung durch  $H = -1$ . Wir benutzen zu ihrer Bestimmung die Gleichungen s) auf S. 139 und die zweite Winkelgleichung p) von S. 137. Die Ordinaten  $y_k$  der Gleichungen s) beziehen sich auf die Obergurtpunkte; für die Überzähligen  $\bar{X}$  sind die oben gefundenen Werte einzuführen. Die Berechnung ist in Tafel 10 durchgeführt.

Die Gleichungen s) liefern die  $2\varrho$ -fachen Differenzen der Drehwinkel, die wir in Kolonne 10 ausgewiesen finden. In der nächsten Vertikalreihe sind sämtliche Drehwinkel durch  $\vartheta_1$  ausgedrückt. Die Summe dieser Glieder wird nun in die Winkelgleichung eingeführt und liefert, wie wir sehen werden, den Wert von  $\vartheta_1$  und somit auch den Wert aller anderen Drehwinkel.

Die Winkelgleichung zur Berechnung von  $\vartheta_1$  lautet:

$$\sum_{k=1}^n \Delta u_k \sin \beta_k - \sum_{k=1}^n u_k \vartheta_k \cos \beta_k = 0.$$

Die erste Summe ist Null, da  $\Delta u_k$  in symmetrisch zur Mitte gelegenen Stäben gleich groß und  $\sin \beta_k$  in der linken Trägerhälfte positiv, in der rechten negativ ist. Setzt man  $u_k \cos \beta_k = \lambda$  und multipliziert mit  $2\varrho$ , da unsere Tabelle

Tafel 10. Berechnung der Stabdrehwinkel  $\vartheta_k$  und Längenänderungen  $\Delta w_k$  für den Belastungszustand  $H = -1$ .

$$\gamma_k = y_{k-1} s'_k + 2y_k (s'_k + s'_{k+1}) + y_{k+1} s'_{k+1}$$

$$\beta_k = s'_k (h_{k-1} + 2h_k)$$

$$\alpha_{k+1} = s'_{k+1} (2h_k + h_{k+1})$$

k	s'	y <sub>k</sub>	γ <sub>k</sub>	X̄ <sub>k</sub>	β <sub>k</sub> *)	α <sub>k+1</sub> *)	X̄ <sub>k</sub> β <sub>k</sub>	X̄ <sub>k+1</sub> α <sub>k+1</sub>	2ϱ(ϑ <sub>k</sub> - ϑ <sub>k+1</sub> )	2ϱϑ <sub>k</sub>		2ϱΔw <sub>k</sub> **)	
										11	12		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
0	—	6,00	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
1	5,23	7,53	233,1	—1,250	81,37	—	—101,7	—129,3	—2,1	—	—90,5	—6,1	
2	5,15	8,78	268,2	—1,882	63,55	68,70	—119,6	—139,0	—9,6	2ϱϑ <sub>1</sub>	—88,4	—8,3	
3	5,09	9,75	295,2	—2,586	49,78	53,75	—128,7	—147,6	—18,9	2,1 + 2ϱϑ <sub>1</sub>	—78,8	—10,9	
4	5,05	10,44	313,8	—3,462	39,79	42,62	—137,8	—154,5	—21,5	11,7 + 2ϱϑ <sub>1</sub>	—59,9	—13,8	
5	5,02	10,86	325,0	—4,402	33,43	35,09	—147,2	—153,2	—24,6	30,6 + 2ϱϑ <sub>1</sub>	—38,4	—16,9	
6	5,00	11,00	328,6	—4,926	30,55	31,10	—150,5	—159,5	—27,6	52,1 + 2ϱϑ <sub>1</sub>	—13,8	—18,5	
7	5,00	10,86	325,0	—4,926	31,10	30,55	—153,2	—147,2	—24,6	76,7 + 2ϱϑ <sub>1</sub>	+13,8	—18,5	
8	5,02	10,44	313,8	—4,402	35,09	33,43	—154,5	—137,8	—21,5	104,3 + 2ϱϑ <sub>1</sub>	+38,4	—16,9	
9	5,05	9,75	295,2	—3,462	42,62	39,79	—147,6	—128,7	—18,9	128,9 + 2ϱϑ <sub>1</sub>	+59,9	—13,8	
10	5,09	8,78	268,2	—2,586	53,75	49,78	—139,0	—119,6	—9,6	150,4 + 2ϱϑ <sub>1</sub>	+78,8	—10,9	
11	5,15	7,53	233,1	—1,882	68,70	63,55	—129,3	—101,7	—2,1	169,3 + 2ϱϑ <sub>1</sub>	+88,4	—8,3	
12	5,23	6,00	—	—1,250	—	81,37	—	—	—	181,0 + 2ϱϑ <sub>1</sub>	+90,5	—6,1	
											1086,0 + 24ϱϑ <sub>1</sub>		

\*) Aus Tafel 8 entnommen.

$$2\varrho\Delta w_k = 12 EJ_c \frac{\bar{X}_k^u \sec \beta_k \cdot w_k}{EF_k^u} = 12 \bar{X}_k^u \frac{J_c}{F_k^u} w_k \sec \beta_k = 12 \bar{X}_k^u \lambda_k^2 \left( \frac{i}{\lambda_k} \right)^2 w_k \sec \beta_k = 0,75 \bar{X}_k^u w_k \sec \beta_k$$

die  $2\varrho$ -fachen Drehwinkelwerte aufweist, so entsteht die einfache Beziehung

$$\sum_{k=1}^n 2\varrho \vartheta_k = 0.$$

Diese Summe haben wir in Kolonne 11 gefunden. Es ist somit

$$1086,0 + 24\varrho \vartheta_1 = 0$$

und  $2\varrho \vartheta_1 = -90,5$ . Mit diesem Werte wurde sodann aus Kolonne 11 die Wertreihe 12 berechnet.

In der letzten Vertikalreihe 13 sind die  $2\varrho$ -fachen Werte der Verkürzungen der Untergurtstäbe zusammengestellt, weil es notwendig ist, den Einfluß der Normalkräfte bei der Ermittlung der Biegelinie infolge  $H = -1$  zu berücksichtigen. Ihre Berechnung zeigt die Fußnote zu Tafel 10. Es wurden hierbei die gleichen Vereinfachungen benutzt wie bei der Aufstellung des von den Längskräften herrührenden Zusatzgliedes in Tafel 7;  $\frac{i}{l}$  wurde wie dort 20 angenommen.

Die Darstellung der Biegelinie und der Verschiebungsgröße des Punktes  $B$  aus den oben berechneten  $\vartheta$ - und  $\Delta u$ -Werten wird in § 12 S. 156 ff. gezeigt werden. Dort soll auch das vorliegende Zahlenbeispiel fortgeführt werden.

Den Schluß dieses Absatzes mögen einige Bemerkungen über die Größe der Fehler, die durch Vernachlässigung der Gurtlängenänderungen bei Berechnung der Überzähligen im Vierendeelträger entstehen, bilden.

Man findet in der Literatur des Vierendeelträgers vielfach die Anmerkung, daß der Einfluß der Formänderungen durch die Normalkräfte auf die Größe der Überzähligen unerheblich ist und ohne weiteres vernachlässigt werden kann. Dies ist, in so allgemeiner Fassung wenigstens, keineswegs richtig. Die Verhältnisse liegen vielmehr folgendermaßen:

Der Einfluß der Gurtdehnungen auf die statisch unbestimmbaren Größen und auf die daraus abgeleiteten Momentenwerte hängt von zwei Umständen ab: 1. Vom Schlankheitsgrad ( $l/i$ ) der Gurtstäbe und zwar derart, daß mit abnehmendem Schlankheitsgrad der Einfluß der Normalkräfte größer wird. 2. Vom Verhältnis ( $h/\lambda$ ), d. i. das Verhältnis von Fachhöhe zur Fachbreite, derart, daß bei gleichem Schlankheitsgrad mit zunehmender Fachhöhe der Einfluß der Normalkräfte kleiner wird. Bei breitgebauten Gurtstäben und niedrigen Feldern wird der Einfluß der Normalkräfte auf den Wert der Überzähligen größer sein, als bei schlanken Stäben und hohen Feldern. Den Einfluß der Feldhöhe (bei gleicher Feldweite) erkennen wir deutlich in unserem Beispiel (Abb. 89). In der Trägermitte, wo die Trägerhöhe gering ist, beträgt der Unterschied zwischen dem genauen und dem Näherungswert von  $X_6$  etwa 5 v. H. Bei  $X_5$  ist er, wie die Abbildung lehrt, geringer und wird bei  $X_3$  unmerklich. Eine zahlen-

mäßige Grenze für die Notwendigkeit, den Einfluß der Längskräfte berücksichtigen zu müssen, läßt sich nicht gut angeben, da zwei Umstände vorhanden sind, die die Größe des Einflusses bestimmen. Es ist aber leicht, sich in jedem Sonderfalle über die beiläufige Höhe dieses Einflusses Rechenschaft zu geben. Hat man die Beiwerte  $B_k$  (Tafel 7), d. s. die Beiwerte der mittleren Glieder der Bestimmungsgleichungen, berechnet, so genügt eine überschlägige Bestimmung des Zusatzgliedes  $A_k$  (Tafel 7), um zunächst zu sehen, ob es unberücksichtigt bleiben kann oder nicht. Ist der Unterschied zwischen  $B_k$  und  $(B_k + A_k)n$  v. H., so ist auch der Unterschied zwischen dem genauen und dem angenäherten Wert von  $X_k$  beiläufig  $n$  v. H. Danach kann man seine Entschlüsse richten.

Es sei aber bemerkt, daß die Einbeziehung der Gurtlängskräfte in die Rechnung so geringe Mühe macht, daß es empfehlenswert ist, bei allen genaueren Berechnungen darauf Rücksicht zu nehmen. Die gesamte Mehrarbeit erstreckt sich auf die Berechnung der einen Wertreihe  $A_k$  in Tafel 7. Diese Arbeit kann, meist ohne Schaden, noch dadurch verringert werden, daß man den Wert von  $A_k$  für alle Stäbe gleich annimmt und nach dem Schlankheitsgrad des niedrigsten Feldes bemißt, wie dies oben für die Trägermitte geschehen ist. In diesem Falle ist nur eine einzige Zahl auszurechnen.

Bei der Festsetzung der zulässigen Fehlergrenze der Unbekannten  $X$  darf nicht übersehen werden, daß eine Abweichung vom genauen Werte von  $X$  in erhöhtem Maße in die daraus berechneten Gurt- und Pfostenmomente übertragen wird. Für das Gurtmoment  $M_k^l$  haben wir gefunden

$$M_k^l = \frac{1}{2}(\mathfrak{M}_k - X_k h_k).$$

$M_k$  erscheint hier als Differenz zweier Zahlen. Ein Fehler in  $X_k$  wird sich daher in  $M_k^l$  in erhöhter Weise bemerkbar machen.

Für eine in Trägermitte (Punkt 6) stehende Einzellast  $P = 1^t$  ist  $\mathfrak{M}_6 = 15$  mt. Das zugehörige  $X_6$  beträgt, wie wir aus Abb. 89 entnehmen, 6,014 t;  $h_6$  ist 2 m, somit

$$M_6^l = \frac{1}{2}(15,000 - 2 \cdot 6,014) = 1,486 \text{ mt.}$$

Ist  $X_6$  um 5 v. H. größer, d. i.  $X_6' = 6,314$ , so wird

$$M_6^l = \frac{1}{2}(15,000 - 2 \cdot 6,314) = 1,186 \text{ mt.}$$

Das mit dem angenäherten Werte von  $X_6$  ermittelte  $M_6^l$  ist somit um 20 v. H. zu klein.

Diese Unterschiede können bei statisch unbestimmt gelagerten Systemen noch größer werden, da dort weitere mit Fehlern behaftete Glieder hinzutreten.

### § 11. Die Berechnung der Nebenspannungen im Fachwerkträger.

Das Fachwerk mit steifen (vernieteten) Knotenpunkten stellt einen vielgliedrigen Steifrahmen vor, dessen innere Kräfte sich nach der Methode des Viermomentensatzes genau bestimmen lassen. Ihre Berechnung bietet ein ausgezeichnetes Beispiel für die Anwendung der in § 7 eingeführten Hilfsgrößen  $I$ . Für den Gang der Untersuchung ist es hierbei gleichgültig, ob das Fachwerk überzählige Stäbe besitzt oder nicht.

Hat das Fachwerk  $n$  Knotenpunkte, so beträgt, wie man leicht nachprüfen kann, die Gesamtzahl der Überzähligen, falls der Träger eine Dreieckskette darstellt,  $3n - 6$ . Für jeden überzähligen Stab treten die beiden Anschlußmomente und die Stablängskraft als weitere Unbekannte hinzu. Bei der Ermittlung der Nebenspannungen eines  $f$ -fach statisch unbestimmten Fachwerkes sind somit, wenn man von den Stabdrehwinkeln absieht,  $3(n + f) - 6$  Unbekannte zu berechnen. Gelingt es, die Stabdrehwinkel unseres Rahmensystems unabhängig von der Ermittlung der Nebenspannungen genau genug darzustellen, so sind diese Winkel für unsere Berechnung als bekannt zu betrachten, womit die Voraussetzung für die Anwendung des in § 7 erörterten Verfahrens mit den Hilfsgrößen  $I$  gegeben ist. Da der Freiheitsgrad  $e$  der Ersatzfigur Null ist, so erscheint die Benutzung der Hilfsgrößen besonders zweckmäßig, wodurch die Berechnung der  $3(n + f) - 6$  Unbekannten auf die Auflösung von  $n$  Gleichungen zwischen den Größen  $I$  zurückgeführt wird.

Wir haben bei der Untersuchung des Stabdreieckes mit steifen Ecken (Beispiel 4, S. 59 ff.) gefunden, daß die Stablängskräfte und Drehwinkel bei beliebiger Knotenbelastung nur wenig von jenen Werten abweichen, die man erhält, wenn man in den Eckpunkten Gelenke anordnet. Was für das einzelne Dreieck gilt, gilt auch für die Dreieckskette. Wir können daher an Stelle der aus den Winkelgleichungen zu berechnenden Drehwinkel jene Stabdrehwinkel in die Viermomentengleichungen einführen, die unter der Voraussetzung gelenkiger Knotenverbindungen für die gleiche Belastung ermittelt wurden. Es scheiden demnach die Drehwinkel und die überzähligen Stablängskräfte als Unbekannte aus, da sie auf Grund der gegebenen Belastung nach den Lehren der Fachwerkstheorie berechnet oder zeichnerisch bestimmt werden können. Die Aufgabe läuft somit auf die Bestimmung der Biegemomente, die durch einen gegebenen Verschiebungszustand der Fachwerksknoten in den Stäben entstehen, heraus.

In der Regel werden die Lasten nur in den Knotenpunkten angreifen, die rechten Seiten der Viermomentengleichungen sind daher Null. Sitzen aber Lasten zwischen den Knotenpunkten oder ist der

Einfluß des Eigengewichtes langer Stäbe mit zu berücksichtigen, oder sind endlich einzelne Stäbe in den Knotenpunkten exzentrisch angeschlossen, so ist der der Feldbelastung entsprechende Wert von  $N$  (rechte Seite der Viermomentengleichung) einzuführen. Im übrigen kann die Rechnung in der gleichen Weise durchgeführt werden wie bei bloßer Knotenbelastung. Bei einseitigen Stabanschlüssen ist das hierdurch entstehende Biegemoment aus der bekannten Stabkraft (nach der Fachwerktheorie berechnet) und der bekannten Exzentrizität zu ermitteln und der hiermit berechnete Wert  $N_\mu$  (nach Formel 14) auf der rechten Seite der betreffenden Viermomentengleichungen einzuführen.

Fassen wir das bisher Gesagte kurz zusammen: Die Ermittlung der Nebenspannungen eines  $f$ -fach statisch unbestimmten Fachwerkes mit  $n$  Knotenpunkten läßt sich auf die Aufstellung von  $3(n + f) - 6$  Viermomentengleichungen mit ebenso vielen Unbekannten zurückführen. Die Ermittlung der Unbekannten erfolgt nach Einführung der Hilfsgrößen  $\Gamma$  aus  $n$  Gleichungen, die zunächst die sogenannten Hauptwerte liefern, womit alle anderen Unbekannten durch die einfachen Beziehungen zwischen ihnen und den Hauptwerten festgelegt sind.

Wir beziffern die aufeinanderfolgenden Knotenpunkte von links nach rechts mit  $1, 2, \dots, n$ , wie das in Abb. 90 für einige herausgegriffene Punkte gezeigt ist. Die Stäbe bezeichnen wir mit dem Zeiger jener Knoten, die sie verbinden, so daß  $s_{\alpha\beta}$  die Länge des Stabes bedeutet, der die Knotenpunkte  $\alpha$  und  $\beta$  verbindet. Die Anschlußmomente des Stabes  $s_{\alpha\beta}$  heißen  $M_\beta^\alpha$  und  $M_\alpha^\beta$ . Beide Zeiger weisen auf den Stab hin, auf den sich die Momente beziehen, der untere Zeiger gibt den Momentenpunkt selbst an.  $M_\alpha^\beta$  bedeutet demnach das Moment im Anschlußpunkte (Knoten)  $\alpha$  des Stabes  $s_{\alpha\beta}$ ,  $M_\beta^\alpha$  das Moment im Anschlußpunkt (Knoten)  $\beta$  des gleichen Stabes.

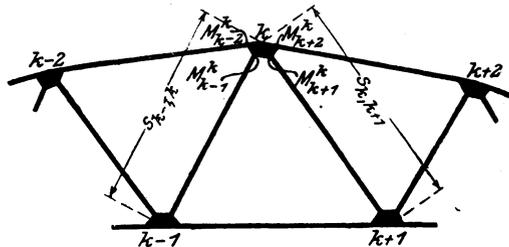


Abb. 90.

Mit Bezug auf Abb. 90 bezeichnen somit  $M_k^{k-2}, M_k^{k-1}, M_k^{k+1}, M_k^{k+2}$  die Biegemomente der Stäbe  $s_{k-2,k}, s_{k-1,k}, s_{k,k+1}, s_{k,k+2}$  im Anschlußpunkte  $k$ . Mit  $\vartheta_{\alpha\beta}$  ist der Drehwinkel des Stabes  $s_{\alpha\beta}$  benannt. Die vorgeschlagene Bezeichnungsweise hat den Vorteil, daß sie einfach ist und auch bei jeder anderen von der Dreieckskette abweichenden Fachwerksform angewendet werden kann.

Für jeden Knoten werden nun die Viermomentengleichungen aufgestellt. Für den Knoten  $k$  lauten diese Gleichungen, wenn wir den Stab  $s_{k-2, k}$  der Reihe nach mit den anderen in  $k$  angeschlossenen Stäben zusammenfassen:

$$\left. \begin{aligned} (M_{k-2}^k + 2 M_k^{k-2}) s'_{k-2, k} + (2 M_k^{k-1} + M_{k-1}^k) s'_{k-1, k} \\ - \varrho (\vartheta_{k-2, k} - \vartheta_{k-1, k}) = 0 \\ (M_{k-2}^k + 2 M_k^{k-2}) s'_{k-2, k} + (2 M_k^{k+1} + M_{k+1}^k) s'_{k, k+1} \\ - \varrho (\vartheta_{k-2, k} - \vartheta_{k, k+1}) = 0 \\ (M_{k-2}^k + 2 M_k^{k-2}) s'_{k-2, k} + (2 M_k^{k+2} + M_{k+2}^k) s'_{k, k+2} \\ - \varrho (\vartheta_{k-2, k} - \vartheta_{k, k+2}) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ a)}$$

In diesen Gleichungen bedeutet

$$s'_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta} \frac{J_c}{J_{\alpha\beta}} \quad \text{und} \quad \varrho = 6 E J_c,$$

wenn  $J_c$  ein beliebig gewähltes Trägheitsmoment ist.

Wir setzen nun allgemein

$$\left. \begin{aligned} (M_{\alpha\beta} + 2 M_{\beta\alpha}) s'_{\alpha\beta} = \Gamma_{\beta\alpha} \\ (M_{\beta\alpha} + 2 M_{\alpha\beta}) s'_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{ b)}$$

Der obere Zeiger der neuen Unbekannten  $\Gamma$  stimmt jeweilig mit dem oberen Zeiger jenes Momentes überein, das mit dem Beiwert 2 versehen ist.

Aus b) leitet man die Transformationsformeln c) ab, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} M_{\beta\alpha} = \frac{1}{3 s'_{\alpha\beta}} (2 \Gamma_{\beta\alpha} - \Gamma_{\alpha\beta}) \\ M_{\alpha\beta} = \frac{1}{3 s'_{\alpha\beta}} (2 \Gamma_{\alpha\beta} - \Gamma_{\beta\alpha}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \text{ c)}$$

Die Viermomentengleichungen a) nehmen dann die Form an

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_k^{k-2} + \Gamma_k^{k-1} - \varrho (\vartheta_{k-2, k} - \vartheta_{k-1, k}) = 0 \\ \Gamma_k^{k-2} + \Gamma_k^{k+1} - \varrho (\vartheta_{k-2, k} - \vartheta_{k, k+1}) = 0 \\ \Gamma_k^{k-2} + \Gamma_k^{k+2} - \varrho (\vartheta_{k-2, k} - \vartheta_{k, k+2}) = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \text{ d)}$$

Die Drehwinkeldifferenzen der Gleichungen d) sind uns der Größe nach bekannt. Wir schreiben daher kürzer für

$$\varrho (\vartheta_{k-2, k} - \vartheta_{k-1, k}) = k D_{k-2}^{k-1} \quad \text{usw.}$$

und drücken sämtliche Hilfsgrößen des Knotens  $k$  durch den Hauptwert  $\Gamma_{k-2}^k$  aus. Somit finden wir

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_k^{k-1} &= kD_{k-2}^{k-1} - \Gamma_k^{k-2} \\ \Gamma_k^{k+1} &= kD_{k-2}^{k+1} - \Gamma_k^{k-2} \\ \Gamma_k^{k+2} &= kD_{k-2}^{k+2} - \Gamma_k^{k-2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots e)$$

Gleichungen der Form e) können für jeden Knotenpunkt an- geschrieben werden, wobei für die Größen  $D$  die Zahlenwerte ein- zuführen sind. Nun setzen wir für jeden Knoten die Gleichgewichts- bedingung

$$\Sigma M = 0$$

an, wie dies § 7 lehrt, drücken die Momente mit Hilfe der Formeln c) durch die Hilfsgrößen  $\Gamma$  aus, eliminieren sodann sämtliche Hilfs- größen bis auf die  $n$  Hauptwerte vermittels der Beziehungen e), wo- durch die  $n$  Bestimmungsgleichungen der Hauptwerte der Hilfsgrößen  $\Gamma$  gefunden sind. Ihre Auflösung liefert diese Hauptwerte und somit auch die Beträge der übrigen Hilfsgrößen und Momente.

Bei Fachwerken nach Art der Abb. 90 (Dreiecksketten) sind die Gleichungen fünfgliedrig. Tritt in einem Knoten ein weiterer Stab hinzu, so vermehrt sich die Zahl der Gleichungsglieder für diesen Knoten um Eins.

Diejenigen Leser, die sich bereits mit dem Problem der Neben- spannungen beschäftigt haben, werden erkannt haben, daß der hier vorgeführte Berechnungsgang mit der von Engesser vorgeschlagenen Methode zur Berechnung der Nebenspannungen übereinstimmt und daß die Hauptwerte der Hilfsgrößen  $\Gamma$  mit den von Mohr in seiner damit verwandten Berechnungsmethode der Nebenspannungen benutzten Knotendrehwinkeln  $\varphi$  in sehr einfachem Zusammenhange stehen.

Es ist nämlich

$$\varphi = \frac{\Gamma}{\rho} + \vartheta.$$

Wir sind nach Ansetzen der Viermomentengleichungen und nach Ein- führung der Hilfsgrößen  $\Gamma$  gewissermaßen zwangläufig zu jener Lö- sung gelangt, die in der Literatur der Nebenspannungen als die ein- fachste Methode erkannt wurde. Bei allen andern bisher bekannt ge- wordenen Verfahren ist die Zahl der zu lösenden Gleichungen größer.

## IV. Die Ermittlung der Formänderungen von Stabzügen und die Darstellung der Biegelinien nach der Methode des Viermomentensatzes.

### § 12.

Die Viermomentengleichungen beschreiben den Zusammenhang zwischen den inneren und äußeren Kräften einerseits und den Formänderungen andererseits, sie können daher unmittelbar zur Berechnung der Verschiebungen gewisser Punkte des Tragwerkes dienen. Für die Beurteilung der Formänderungen der aus steifen Stäben zusammengesetzten Tragsysteme kommt weniger das Verformungsbild des einzelnen Stabes, als vielmehr die Gestaltung der Verzerrungsfigur des ganzen Tragwerkes in Frage. Diese ist aber in erster Linie durch die Verschiebungen der ausgezeichneten Punkte und der Gelenkpunkte des Systems bedingt. Wo es notwendig erscheint, kann die Zahl der ausgezeichneten Punkte für die Berechnung der Formänderungen beliebig vermehrt werden, da jeder Punkt eines steifen Stabes als ausgezeichneter Punkt angesehen werden kann und eine weitere Elastizitätsbedingung liefert. Sind die Verschiebungen dieser Punkte einmal bekannt, so lassen sich, wenn dies unter Umständen notwendig ist, Verschiebungen von weiteren Zwischenpunkten mit Hilfe der Differentialgleichung der elastischen Linie leicht berechnen. Meist genügt aber die Kenntnis der Bewegung der ausgezeichneten Punkte und der Lage der mit den Momentennullpunkten übereinstimmenden Inflexionspunkte, um ein für die Zwecke der Praxis ausreichendes Verformungsbild herzustellen. Wir wollen daher die Aufgabe, die Formänderungen eines statisch bestimmten oder statisch unbestimmten Systems zu ermitteln, als erledigt betrachten, wenn es gelungen ist, die Verschiebungen der ausgezeichneten Punkte und Gelenkpunkte des Systems, unter Berücksichtigung der durch die Lagerung gegebenen Bedingungen, darzustellen.

In einzelnen Beispielen der §§ 8 und 9 wurde bereits gezeigt, wie in einfachen Fällen aus den Drehwinkeln  $\varphi$ , deren Werte sich als Zwischenergebnisse der Berechnung vorfinden, die Verschiebungen bestimmt werden. Da es sich bei vielfeldrigen Rahmensystemen meist um die Darstellung der Verschiebungen der ausgezeichneten Punkte eines aus dem System herausgegriffenen zusammenhängenden Stabzuges handelt, so bleibt noch übrig, ein einfaches Verfahren anzugeben, wie aus den aus Momenten- und Winkelgleichungen gewonnenen Stabdrehwinkeln die Verschiebungen aller besonderen Punkte eines solchen Stabzuges bestimmt werden können. Vorher ist es aber notwendig, die Frage der Ermittlung der Drehwinkel für einen zusammenhängenden Stabzug kurz zu erörtern.

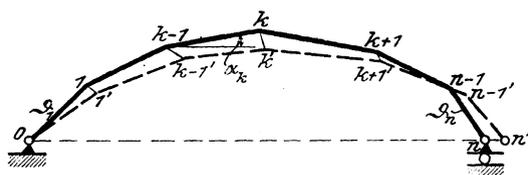


Abb. 91.

Wir betrachten zu diesem Zwecke einen aus irgendwelchem Tragwerk entnommenen Stabzug von  $n$  Stäben (Abb. 91), der in  $n$  gelenkig oder durch Einspannung festgehalten ist und in  $n$  entweder auf gegebener Bahn beweglich gelagert, oder ebenfalls gelenkig bzw. durch Einspannung festgehalten ist. Ebenso können auch andere Punkte des Stabzuges beliebig gestützt oder sonstwie mit den übrigen Teilen des Tragwerkes zusammenhängen. Diese Lagerungen und Verbindungen kommen in der Größe der inneren und äußeren Kräfte zum Ausdruck, die wir uns sämtlich als gegeben vorstellen, insbesondere die Momente in bzw. unendlich nahe rechts und links von den ausgezeichneten Punkten des Stabzuges. Wir setzen nur voraus, daß der Stabbogen keine freischwebenden Gelenke aufweise.

Bei  $n$  Stäben sind  $n$  Drehwinkel zu bestimmen. Zu ihrer Ermittlung stehen nur  $n - 1$  Momentengleichungen für die zwischen den Endauflagern liegenden  $n - 1$  ausgezeichneten Punkte zur Verfügung. Durch diese Momentengleichungen ist die Lage der Stäbe zueinander festgelegt. Ein Winkel bleibt noch willkürlich, der so zu bestimmen ist, daß die Punkte  $0$  und  $n$  des Stabzuges in die festgehaltene Linie  $0 - n$  fallen. Der Zusammenhang zwischen der Geraden  $0 - n$  und dem Stabzug kann nun durch eine Winkelgleichung, die den ganzen Stabzug umfaßt, beschrieben werden.

Die Viermomentengleichungen weisen, wenn wir nur gerade Stäbe ins Auge fassen wollen, die Form auf

$$M_{k-1}^r s'_k + 2 M_k^l s'_k + 2 M_k^r s'_{k+1} + M_{k+1}^l s'_{k+1} - 6 E J_c (\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) = N_k.$$

Daraus folgt

$$(\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) = \frac{1}{6 E J_c} [M_{k-1}^r s'_k + 2 M_k^l s'_k + 2 M_k^r s'_{k+1} + M_{k+1}^l s'_{k+1} - N_k]. \quad (2I)$$

$N_k$  ist das von der Feldbelastung abhängige Glied, es wird Null, wenn die Lasten nur in den Knotenpunkten angreifen. Da sämtliche Größen der rechten Seiten der Gleichungen (2I) als bekannt vorausgesetzt werden, so lassen sich die Differenzen je zweier aufeinanderfolgender Drehwinkel in einer Tafel berechnen.

Die Winkelgleichung lautet

$$\sum_{k=1}^n \Delta s_k \sin \alpha_k - \sum_{k=1}^n \vartheta_k s_k \cos \alpha_k = 0.$$

Wird der Einfluß der Normalkräfte vernachlässigt, so fallen die ersten Summenausdrücke in den Winkelgleichungen fort. Aber selbst dort, wo dies nicht der Fall ist, kann der erste Teil der Winkelgleichung vernachlässigt werden, da er entweder genau Null oder nur wenig davon verschieden ist. Man kann nämlich die Summen immer in zwei im Werte gleiche oder wenig voneinander abweichende Teilsommen zerlegen, die wegen der Winkelfunktion  $\sin \alpha_k$  mit verschiedenen Vorzeichen behaftet sind.

Den Bestimmungsgleichungen für die Drehwinkel  $\vartheta$  können wir daher nach dem Vorhergesagten die Gestalt

$$\vartheta_k - \vartheta_{k+1} = z_k \dots \dots \dots (2I')$$

und

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \vartheta_k = 0 \dots \dots \dots (22)$$

geben, wobei  $z_k$  die bei der Ausrechnung der rechten Seite der Gleichung (2I) gefundene Zahl ist und  $\lambda_k$  die Projektion von  $s_k$  auf die Gerade  $o - n$  darstellt.

Drückt man sämtliche Drehwinkel mittels (2I') durch  $\vartheta_1$  aus, so entstehen Gleichungen von der Form

$$\vartheta_k = \vartheta_1 - \xi_k,$$

worin, wie man sich leicht überzeugt,

$$\xi_k = \sum_1^{k-1} z_k.$$

Nach Einführung dieser Beziehungen in Gleichung 22) erhält man

$$\vartheta_1 \sum_{k=1}^n \lambda_k - \sum_{k=1}^n \xi_k \lambda_k = 0,$$

mithin

$$\vartheta_1 = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k, \quad \dots \dots \dots \quad 23)$$

wenn  $L$  die Entfernung der Punkte 0 und  $n$  bedeutet.

Mit  $\vartheta_1$  sind auch alle übrigen Drehwinkel gegeben.

Auf einen bemerkenswerten Zusammenhang der Gleichung 21) mit der Formel für die elastischen Gewichte eines Stabbogens sei hier verwiesen.

Setzt man für alle Punkte  $M_k^l = M_k^r = M_k$ , was beim einfachen Stabzug der Fall ist, und nimmt man nur Knotenbelastung, also  $N_k = 0$  an, so stimmt die rechte Seite von Gleichung 21) mit der von Müller-Breslau angegebenen Gleichung der elastischen Gewichte eines Stabbogens genau überein<sup>1)</sup>. Das elastische Gewicht ist demnach gleich der Differenz zweier aufeinanderfolgender Stabdrehwinkel. Dieser Zusammenhang geht natürlich auch aus der Ableitung der Formeln für die elastischen Gewichte hervor. Man kann sich den Zusammenhang auch klarmachen, wenn man das Krafteck, das zur Darstellung der Biegelinie dient, betrachtet. Der Winkel, den zwei aufeinanderfolgende Polstrahlen miteinander einschließen, stimmt mit der  $\nu$ -fachen Differenz der Drehwinkel zweier benachbarter Stäbe überein, wenn  $\nu$  den Verzerrungsmaßstab der Zeichnung bedeutet. Der Einführung der Winkelgleichung in die Rechnung entspricht die Durchführung eines Polwechsels bei der Darstellung der Biegelinie, um den Auflagerbedingungen zu genügen<sup>2)</sup>. Der Einfluß der Normalkräfte erscheint in unseren Gleichungen, im Gegensatze zu dem von Müller-Breslau angegebenen vollständigen Ausdruck für die elastischen Gewichte, nicht berücksichtigt. Dieser Gegensatz ist nur scheinbar, die Wirkung der Normalkräfte wird, wie wir w. u. sehen werden, bei der Darstellung des Verschiebungsplanes nachträglich in Rücksicht gezogen werden.

Wir wollen noch den Fall eines frei schwebenden Zwischen gelenkes im Stabbogen der Erörterung unterziehen. Abb. 92 stellt

1) Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre. Dritte Auflage, Leipzig 1904, S. 174.

2) Im allgemeinsten Falle (verschiedene Momente rechts und links vom Knoten) würde die Gleichung für die elastischen Gewichte mit den Bezeichnungen von Müller-Breslau lauten:

$$\omega_m = \frac{1}{6 E} \left[ \frac{\lambda_m}{J_m^r} (M_{m-1}^r + 2 M_m^l) + \frac{\lambda_{m-1}}{J_{m+1}^l} (2 M_m^r + M_{m+1}^l) \right]$$

einen solchen Stabzug vor. Die Enden sind entweder, wie in der Zeichnung angenommen, gelenkig gelagert oder weisen eine andere Art der Lagerung auf. Bei  $n$  Stäben können nur mehr  $n - 2$  Momentengleichungen aufgestellt werden. Es müssen daher beide Winkelgleichungen zu Hilfe genommen werden, um die  $n$  unbekannt

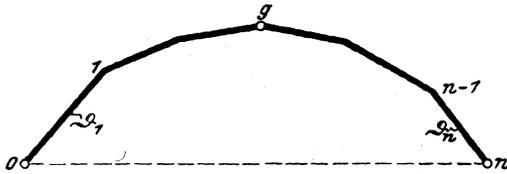


Abb. 92.

Stabdrehwinkel zu bestimmen. Da die Drehwinkel links vom Gelenk  $g$  und die Drehwinkel rechts vom  $g$  in den Momentengleichungen nicht zusammenhängen, so kann man sämtliche Drehwinkel der linken

Seite durch  $\vartheta_1$ , die der rechten Seite durch  $\vartheta_n$  ausdrücken. Führt man die so gewonnenen Werte der Stabdrehwinkel in die beiden Winkelgleichungen ein, so gelangt man zu zwei Gleichungen für  $\vartheta_1$  und  $\vartheta_n$ , welche Größen daraus berechnet werden können. Mithin sind auch alle anderen Stabdrehwinkel eindeutig festgelegt.

Wir gehen nun dazu über, die Verschiebungen aus den Stabdrehwinkeln und Stabdehnungen darzustellen.

Für den Stabzug  $0, 1, 2, \dots, n$  in Abb. 93a seien nach Ermittlung aller inneren und äußeren Kraftgrößen die Stabdrehwinkel  $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n$  sowie die Stabdehnungen  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  bestimmt worden. Für die weitere Untersuchung werden wir daher  $\vartheta$  und  $\Delta$  eines jeden Stabes als gegebene Größen betrachten.

In Abb. 93b sind die ersten zwei Stäbe in ihren Lagen und Längen vor und nach der Verzerrung vergrößert herausgezeichnet. Punkt  $0$  sei festgehalten. Infolge der Stabdehnung  $\Delta_1$  gelangt der Punkt  $1$  nach  $1'$  und nach der Stabdrehung um den Winkel  $\vartheta_1$  nach  $1''$ , derart, daß die Verschiebung  $1' - 1''$  senkrecht zur Stabrichtung, die wir mit  $\delta_1$  bezeichnen wollen, der Bedingung  $\delta_1 = l_1 \vartheta_1$  genügt. Faßt man  $\Delta_1$  und  $\delta_1$  als Vektoren auf, so ist die Gesamtverschiebung  $1 - 1''$  durch die Vektorsumme

$$a_1 = \Delta + \delta_1$$

gegeben.

Nun denken wir uns den Stab  $l_2$  bei unveränderter Länge parallel zu seiner ursprünglichen Lage verschoben, so daß Punkt  $2$  nach  $\bar{2}$  gelangt und hierbei den Weg  $a_1$  zurücklegt. Wegen der Stabdehnung  $\Delta_2$  gelangt  $\bar{2}$  nach  $2'$  und infolge der Drehung endlich  $2'$  nach  $2''$ , wobei die Verschiebung  $\delta_2 = l_2 \vartheta_2$  beträgt. Die Gesamtverschiebung des Punktes  $2$  ist wieder die Vektorsumme der drei Verschiebungs-

vektoren  $a_1$ ,  $\Delta_2$  und  $\delta_2$ , so daß

$$a_2 = a_1 + \Delta_2 + \delta_2.$$

Durch ähnliche Überlegungen finden wir

$$a_3 = a_2 + \Delta_3 + \delta_3$$

und allgemein

$$a_k = a_{k-1} + \Delta_k + \delta_k.$$

Man kann daher einen Verschiebungsplan folgender Art zeichnen (Abb. 93 c): Von einem Punkte  $O$  (Pol) ausgehend, trägt man in einem

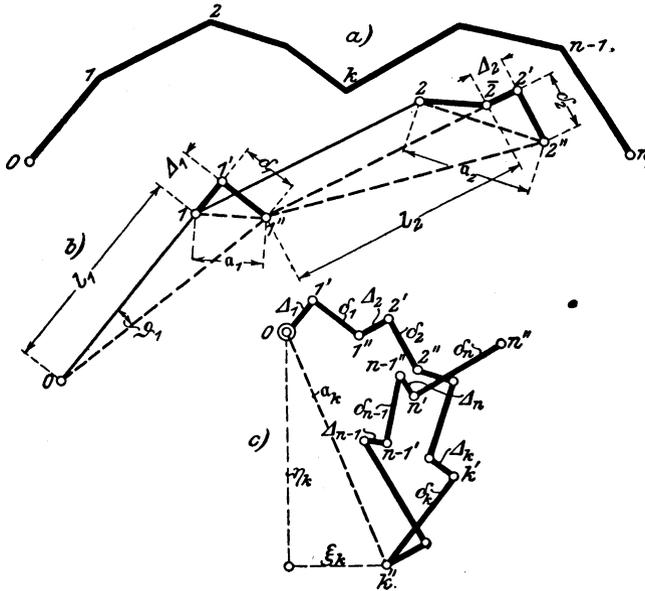


Abb. 93.

beliebig gewählten Maßstab zunächst  $\Delta_1$  seiner Richtung und Größe nach auf  $(O-1'$  in Abb. 93 c), fügt an dem Endpunkt  $1'$  die Strecke  $\delta_1$  ihrer Richtung und Größe nach an.  $O-1''$  ist mithin die Verschiebung  $a_1$  des Punktes 1 unseres Tragwerkes. Nun setzt man an  $1''$ ,  $\Delta_2$  an, an dessen Endpunkt  $2''$  die Verschiebung  $\delta_2$  und gelangt so nach  $2''$ .  $O-2''$  stellt die Verschiebung  $a_2$  des Punktes 2 vor. Ebenso werden die Punkte  $3'', 4''$  usw. bestimmt. Ihre Lage zum Pol  $O$  gibt im Maßstabe der Zeichnung die Verschiebung des betreffenden Punktes nach Richtung und Größe an.

Da bei der Berechnung der  $\vartheta$ -Werte die Auflagerbedingungen bereits berücksichtigt wurden, so ergibt der Verschiebungsplan die tatsächlichen Verschiebungen der Punkte 1, 2, ... n.

Mit der Aufzeichnung eines Verschiebungsplanes in der Art der Abb. 93 c ist die Aufgabe, die Verrückungen bestimmter Punkte des Tragwerkes zu finden, gelöst. Hierbei ist es gleichgültig, ob der betrachtete Stabzug Gelenke besitzt oder nicht, da ihre Wirkung, ebenso wie die der Lagerung oder sonstiger Verbindungen, schon bei der Berechnung der Drehwinkel zum Ausdruck kommt. Der Einfluß der Stablängskräfte wird durch Eintragen der Verschiebungsvektoren  $\Delta$  in den Verschiebungsplan berücksichtigt.

Aus den Verrückungen lassen sich leicht Biegelinien für bestimmte Richtungen darstellen, indem man die in dieser Richtung genommenen Verschiebungskomponenten in bekannter Weise von einer Geraden abträgt. (Siehe die Komponenten  $\xi_k$  und  $\eta_k$  in Abb. 93 c).

Wir haben bisher die einzelnen Stababschnitte als Gerade betrachtet. Es macht nun gar keine Schwierigkeiten, den gleichen Rechnungsgang auch auf schwach gekrümmte Stäbe zu übertragen. In  $z$  (Gl. 21') tritt dann noch ein von der Sehnkraft  $H$  abhängiges Glied hinzu. Außerdem ist bei der Berechnung der Größen  $\Delta$  noch der Einfluß der Stabbiegung auf die Stabdehnung nach Formel 17) zu bestimmen.

Das dargestellte Verfahren wird nachstehend an einem Beispiele erprobt werden.

### Beispiel (Fortsetzung des Zahlenbeispiels aus § II).

Nachdem bereits in § II die  $2\varrho$ -fachen Beträge der Gurtdrehwinkel  $\vartheta_k$  und der Stabdehnungen  $\Delta_k$  berechnet wurden, bleibt nur noch die Darstellung des Verschiebungsplanes übrig, um die Einflußlinie des Horizontalschubes  $H$  auftragen zu können.

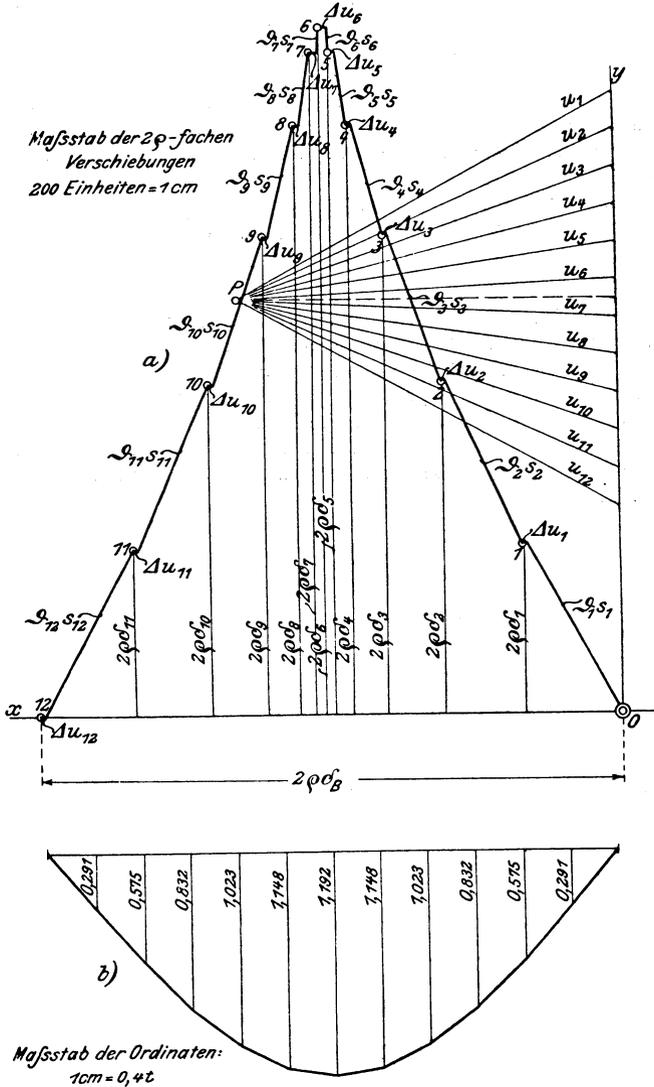
Sämtliche für die Herstellung des Verschiebungsplanes notwendigen Werte sind in Tafel II übersichtlich zusammengestellt. Da sich der Horizontalschub  $H$  als Quotient zweier, aus dem gleichen Plane zu entnehmenden Verschiebungen darstellt, so fällt der Faktor  $2\varrho$ , mit dem die Grundwerte  $\vartheta$  und  $\Delta$  multipliziert erscheinen, am Schlusse fort, weshalb die Darstellung des Planes mit den in der Tabelle angegebenen  $2\varrho$ -fachen Verschiebungswerten durchgeführt wurde.

Tafel II. Zusammenstellung der  $2\varrho\vartheta_k$ - und  $2\varrho\Delta u_k$ -Werte zum Verschiebungsplan Abb. 94.

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$2\varrho\vartheta_k$	-90,5	-88,4	-78,8	-59,9	-38,4	-13,8	+13,8	+38,4	+59,9	+78,8	+88,4	+90,5
$s_k$	5,71	5,42	5,30	5,15	5,06	5,01	5,01	5,06	5,15	5,30	5,42	5,71
$2\varrho\vartheta_k s_k$	-517	-479	-418	-308	-194	-69	+69	+194	+308	+418	+479	+517
$2\varrho\Delta u_k$	-6	-8	-11	-14	-17	-19	-19	-17	-14	-11	-8	-6

In Abb. 94 a ist der Verschiebungsplan gezeichnet. Der Pol o entspricht dem linken festgehaltenen Kämpferpunkt A. Da die Berechnung der Dreh-

winkel die  $\vartheta$ -Werte für die linke Trägerhälfte mit negativem, für die rechte Hälfte mit positivem Vorzeichen liefert, so bedeutet das, daß durch die Stabverdrehung die Winkel  $\beta$  in der rechten Hälfte vergrößert, in der linken



verkleinert, die Knotenpunkte also gehoben werden. Wir tragen dementsprechend die Verschiebungen  $2\rho\vartheta_k s_k$  nach aufwärts auf. Die Richtung dieser Verschiebungen ist durch die Normalen zu den im Plane von einem beliebigen

Punkte  $P$  aus abgetragenen Stabrichtungen gegeben<sup>1)</sup>. Da der Untergurt bei  $H = -1$  Druck erfährt, so sind die Verschiebungen  $\Delta u_k$  von rechts nach links abzutragen<sup>2)</sup>. Die Vektoren  $o_1, o_2$  usw. geben sodann die  $2\rho$ -fachen Beträge der tatsächlichen Verschiebungen der Knotenpunkte 1, 2 usw. an.

Bestimmt man im Plane die Abstände der Punkte 1, 2, 3, . . . von der  $x$ -Achse, so erhält man die  $2\rho$ -fachen Werte der lotrechten Verschiebungskomponenten dieser Punkte. Dividiert man die Beträge dieser Ordinaten mit dem Betrag der wagerechten Verschiebung  $2\rho\delta_B$  des Punktes  $B$ , so gewinnt man die Ordinaten der  $H$ -Linie, die in der Abb. 94b zur Darstellung gebracht ist. Unsere Darstellung bietet somit den Vorteil, Zähler und Nenner der Gleichung für die Überzählige  $H$  aus einem Verschiebungsplan entnehmen zu können.

Bei Vernachlässigung der Stabdehnungen  $\Delta u$  hätte sich, wie man sich aus dem Verschiebungsplan leicht überzeugt,  $H$  um rd. 10 v. H. zu groß ergeben.

---

<sup>1)</sup> Es ist viel zweckmäßiger, die Stabrichtungen in der Weise der Abb. 94 darzustellen, als den ganzen zusammenhängenden Stabzug, wie dies vielfach üblich ist, aufzutragen. Wählt man in letzterem Falle den Längenmaßstab zu klein, so sind die Stabrichtungen nicht genau genug festgelegt, wählt man ihn größer, so macht das Ziehen der Parallelen Schwierigkeiten.

<sup>2)</sup> In der Abb. 94a ist in der Beschriftung der Verschiebungen  $\delta s$  und  $\Delta u$  der Faktor  $2\rho$  weggelassen worden, um die Übersichtlichkeit der Zeichnung zu fördern.

## V. Tragwerke aus geraden oder schwach gekrümmten Stäben mit innerhalb der Stabfelder stetig veränderlichem Trägheitsmoment.

### § 13. Die Viermomentengleichungen.

In § 4 haben wir die Integration der Kontinuitätsbedingung für den Fall von Stäben mit unveränderlichem Querschnitt durchgeführt. Wenn auch die Aufgabe, Systeme zu berechnen, deren Stäbe stetige oder unstetige Querschnittsänderungen aufweisen, zurückgeführt werden kann auf die Berechnung von Tragwerken mit Stäben konstanten Querschnitts, und zwar in der Weise, daß man sich die Stäbe in Teilfelder zerlegt denkt, innerhalb welcher der Querschnitt als unveränderlich angenommen werden kann, womit nur die Zahl der ausgezeichneten Punkte und somit die Zahl der Viermomentengleichungen erhöht wird, so ist doch nicht zu übersehen, daß durch diese Vermehrung der Elastizitätsbedingungen die Berechnung u. U. bedeutend erschwert wird. Da andererseits gerade der moderne Eisen- und Eisenbetonbau der Baustoffersparnis wegen oder aus Schönheitsrücksichten vielfach Stäbe mit veränderlichem Querschnitt benutzt, der Einfluß dieser Veränderlichkeit auf die Größe der Überzähligen aber nicht ohne weiteres vernachlässigt werden darf, so erscheint es notwendig, die Methode des Viermomentensatzes auch auf derartige Tragwerke auszudehnen, d. h. die Integration der Kontinuitätsbedingung für den Fall auszuführen, daß die Trägheitsmomente  $J$  der im ausgezeichneten Punkte zusammenhängenden Elemente stetig veränderlich sind.

Es ist nun klar, daß diese Integration nur dann durchführbar ist, wenn das Gesetz, nach welchem sich das Trägheitsmoment ändert, für jeden Stab von vorneherein festgelegt ist. Nun wäre eine allzuweit gehende, jedem möglichen Sonderfall angepaßte Verfolgung der tatsächlichen Querschnittsverhältnisse in der Baupraxis ohne besonderen Vorteil; wichtig ist nur, daß der Kleinst- und Größtwert des Trägheits-

momentes innerhalb eines Stabfeldes berücksichtigt erscheinen. Wir machen daher für unsere Untersuchung folgende Voraussetzungen:

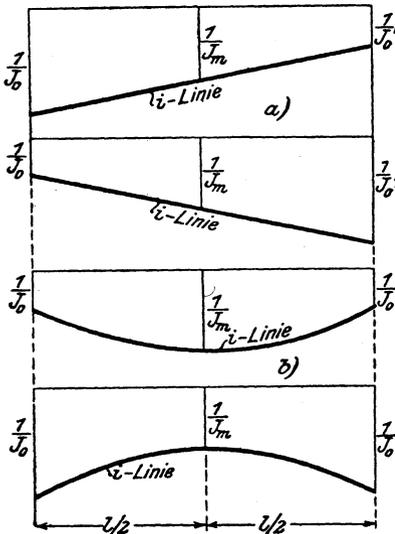


Abb. 95.

In Abb. 95 a und b sind die beiden idealisierten Fälle dargestellt, wobei die Linie der reziproken Trägheitsmomente als  $i$ -Linie bezeichnet wurde.

**a) Unsymmetrische Stäbe.**

Für das Trägheitsmoment eines Zwischenquerschnittes gelte die einschränkende Bestimmung, daß er der Größe nach zwischen den Trägheitsmomenten der Endquerschnitte liege; mit anderen Worten: die Linie der tatsächlichen Trägheitsmomente darf keine Maximum- oder Minimumstellen aufweisen.

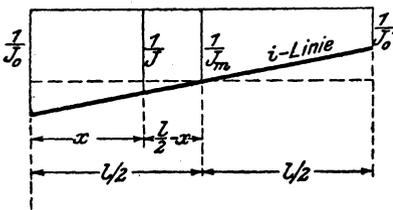


Abb. 96.

1. Das Gesetz, nach welchem sich die Trägheitsmomente ändern, sei gleichgültig, maßgebend bleibe nur das Verhältnis des kleinsten zum größten Trägheitsmoment.

2. Die die tatsächliche Änderung der reziproken Werte der Trägheitsmomente beschreibende Funktion der Abzisse  $x$  ( $i$ -Linie) werde bei unsymmetrischen Stäben durch das Geradeliengesetz, bei symmetrischen Stäben durch das Parabelgesetz vertreten.

Es werden demnach zwei Fälle der Betrachtung unterzogen werden:

- a) Stäbe mit unsymmetrischem Verlauf der  $J$ -Linie;
- b) Stäbe mit symmetrischem Verlauf der  $J$ -Linie.

Bezeichnet man mit  $J_0$  und  $J_0'$  die tatsächlichen Trägheitsmomente des linken bzw. rechten Endquerschnittes, so ist, wenn die  $\frac{1}{J}$ -Werte

nach einer geraden Linie verlaufen sollen, nach Abb. 96

$$\frac{1}{J_m} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{J_0} + \frac{1}{J_0'} \right),$$

somit 
$$J_m = \frac{2 J_0 J_0'}{J_0 + J_0'}, \dots \dots \dots 24)$$

wobei  $J_m$  nicht das tatsächliche, sondern ein ideales Trägheitsmoment in Stabmitte bedeutet. Ferner ist nach Abb. 96

$$\frac{I}{J} = \frac{I}{J_m} + \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right) \left(\frac{I}{J_0} - \frac{I}{J_m}\right) = \frac{I}{J_m} + \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right) \frac{J_m - J_0}{J_m J_0}$$

oder

$$\frac{J_m}{J} = 1 + \alpha \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right),$$

wobei

$$\alpha = \frac{J_m - J_0}{J_0} \dots \dots \dots 24')$$

bedeutet.  $\alpha$  kann positiv oder negativ sein, je nachdem  $J_m \geq J_0$  ist. Hierbei nimmt  $\alpha$  alle Werte von  $+1$  bis  $-1$  an.  $\alpha = 0$  entspricht  $J_0 = J_0'$ , d. i. der Stab mit unveränderlichem Querschnitt.

Das Verhältnis  $\frac{J_m}{J}$  führen wir in die Differentialgleichung der Biegungslinie des Stabes ein, indem wir beiderseits des Gleichheitszeichens mit  $J_m$  multiplizieren und erhalten mit  $J_m' = J_m \cos^3 \varphi$ :

$$E J_m' \frac{d^2 \Delta y}{d x^2} = - \frac{J_m}{J} M_x,$$

demnach

$$E J_m' \frac{d^2 \Delta y}{d x^2} = - \left[1 + \alpha \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)\right] M_x$$

oder

$$E J_m' \frac{d^2 \Delta y}{d x^2} = - M_x - \alpha M_x',$$

wenn man

$$\left(1 - 2 \frac{x}{l}\right) M_x = M_x'$$

setzt.

Der Lösung dieser linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung kann die Form gegeben werden:

$$\Delta y = \Delta y_0 + \alpha \Delta y',$$

worin  $\Delta y_0$  und  $\Delta y'$  die Teillösungen sind, falls die rechte Seite nur aus  $M_x$  oder  $M_x'$  besteht. Demgemäß ist auch

$$\frac{d \Delta y}{d x} = \frac{d \Delta y_0}{d x} + \alpha \frac{d \Delta y'}{d x}$$

und die Kontinuitätsbedingung 1) lautet mithin

$$\left[ \frac{d \Delta y_0 \cos^2 \gamma}{dx} \right]_k^{x=l} - \left[ \frac{d \Delta y_0 \cos^2 \gamma}{dx} \right]_{k+1}^{x=0} + \left[ \alpha \frac{d \Delta y'}{dx} \cos^2 \gamma \right]_k^{x=l} - \left[ \alpha \frac{d \Delta y'}{dx} \cos^2 \gamma \right]_{k+1}^{x=0} + \vartheta_k - \vartheta_{k+1} = 0.$$

Der erste Teil dieser Gleichung in Verbindung mit dem Gliede  $\vartheta_k - \vartheta_{k+1}$  stimmt mit der Kontinuitätsbedingung für Stäbe mit unveränderlichem Querschnitt überein, da  $\Delta y_0$  zum Momente  $M_x$  gehört. Die Ausrechnung dieser zwei Glieder, nach Einführung des vollständigen Ausdruckes für  $M_x$ , ergibt somit die Viermomentengleichung 7) in § 4, nur ist an Stelle des unveränderlichen Trägheitsmomentes  $J$ , in Übereinstimmung mit der hier zugrunde gelegten Differentialgleichung, das durch Gleichung 24) definierte ideale Trägheitsmoment der Stabmitte  $J_m$  zu setzen. Die beiden letzten Glieder stellen einen Zusatz zu der Viermomentengleichung für Stäbe unveränderlichen Querschnittes vor, den wir nun bestimmen wollen.

Da die Differentialgleichung für  $\Delta y'$  den gleichen Bau zeigt wie die Ausgangsgleichung in § 4, so können sämtliche dort gewonnenen allgemeinen Ergebnisse der Integration für die Berechnung des Zusatzgliedes verwertet werden; nur ist an Stelle  $M_x$ ,  $M_x'$  zu setzen und  $J_m$  statt  $J$  einzuführen.

Insbesondere finden wir nach den Gleichungen 5)

$$\left[ \frac{d \Delta y'}{dx} \right]_{x=l} = - \frac{\mathfrak{B}'}{E J_m \cos^3 \varphi},$$

$$\left[ \frac{d \Delta y'}{dx} \right]_{x=0} = \frac{\mathfrak{U}'}{E J_m \cos^3 \varphi},$$

wo  $\mathfrak{U}'$  und  $\mathfrak{B}'$  die linken und rechten Auflagerdrücke der durch das Gesetz von  $M_x'$  gegebenen Momentenfläche bedeuten.

Bezeichnen wir den ersten Teil der Kontinuitätsbedingung, den wir uns durch die mit  $-6EJ_c$  dividierte Viermomentengleichung 7) ersetzt denken, kurz mit  $-\frac{\mathbf{V}}{6EJ_c}$ <sup>1)</sup> und nehmen darauf Bedacht, daß die Verschiebungen der Endpunkte, die durch die Drehwinkel  $\vartheta$  in unseren Gleichungen zum Ausdruck kommen, bereits in  $\mathbf{V}$  berücksichtigt erscheinen, so können wir unter Benutzung der oben angegebenen Aus-

1) Wir haben bei der Integration der Kontinuitätsbedingung in § 4 die Gleichungen mit  $-\frac{1}{6EJ_c}$  multipliziert, was bei Einführung des Integrationsergebnisses in unsere Kontinuitätsbedingung wieder rückgängig gemacht werden muß.

drücke für die Grenzwerte der Differentialquotienten die Kontinuitätsbedingung in die Form

$$-\frac{V}{6EJ_c} - \alpha_k \frac{I}{EJ_m^k} \mathfrak{B}'_k - \alpha_{k+1} \frac{I}{EJ_m^{k+1}} \mathfrak{A}'_{k+1} = 0 \quad \dots \quad 25)$$

bringen, wobei wie in § 4  $\cos^2 \gamma : \cos^3 \varphi = I$  gesetzt wurde. Da

$$M'_x = \left( I - 2 \frac{x}{l} \right) M_x$$

ist, so folgt nach Einführung des vollständigen Ausdruckes für  $M_x$  (Gleichung 3) in § 4

$$M'_x = M' \left( I - 2 \frac{x}{l} \right) \left( I - \frac{x}{l} \right) + M'' \left( I - 2 \frac{x}{l} \right) \frac{x}{l} + H \left( I - 2 \frac{x}{l} \right) y + \left( I - 2 \frac{x}{l} \right) \mathfrak{M}_x.$$

Wir ermitteln nun der Reihe nach für die einzelnen Glieder die Auflagerdrucke  $a'$  und  $b'$ , und zwar

a)  $m_x = \left( I - 2 \frac{x}{l} \right) \left( I - \frac{x}{l} \right):$

$$a' = \frac{I}{l} \int_0^l \left( I - 2 \frac{x}{l} \right) \left( I - \frac{x}{l} \right) \cdot (l - x) dx = \frac{I}{6} l,$$

$$b' = \frac{I}{l} \int_0^l \left( I - 2 \frac{x}{l} \right) \left( I - \frac{x}{l} \right) \cdot x dx = 0.$$

b)  $m_x = \left( I - 2 \frac{x}{l} \right) \frac{x}{l}:$

$$a' = \frac{I}{l} \int_0^l \left( I - 2 \frac{x}{l} \right) \frac{x}{l} (l - x) dx = 0,$$

$$b' = \frac{I}{l} \int_0^l \left( I - 2 \frac{x}{l} \right) \frac{x}{l} x dx = -\frac{I}{6} l.$$

c)  $m_x = \left( I - 2 \frac{x}{l} \right) y:$

Wir nennen

$$y' = \left( I - 2 \frac{x}{l} \right) y$$

die reduzierte Achsenlinie, und bezeichnen die statischen Momente der zwischen der Linie  $y'$  und der Stabsehne gelegenen Fläche bezogen auf den rechten bzw. linken Endpunkt mit  $\mathfrak{S}'^l$  und  $\mathfrak{S}'^r$ , dann ist

$$a' = \frac{\mathfrak{S}'^l}{l} \quad \text{und} \quad b' = \frac{\mathfrak{S}'^r}{l}.$$

d)  $m_x = \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right) \mathfrak{M}_x :$

Da das Gesetz von  $\mathfrak{M}_x$  zunächst unbekannt ist, so benutzen wir für die Auflagerdrucke die allgemeinen Bezeichnungen

$$\mathfrak{A}'^P \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}'^P.$$

Die voranstehenden Werte der Auflagerdrucke ergeben

$$\mathfrak{B}'_k = -M_k^l \frac{l_k}{6} + H_k \frac{\mathfrak{S}'_k{}^{k-1}}{l_k} + \mathfrak{B}'_k{}^P,$$

$$\mathfrak{A}'_{k+1} = M_k^r \frac{l_{k+1}}{6} + H_{k+1} \frac{\mathfrak{S}'_{k+1}{}^{k+1}}{l_{k+1}} + \mathfrak{A}'_{k+1}{}^P.$$

Der untere Zeiger der Flächenmomente  $\mathfrak{S}'$  stimmt mit dem Stabzeiger überein, der obere Zeiger gibt den Bezugspunkt für das Moment an. Mit den Werten von  $\mathfrak{B}'_k$  und  $\mathfrak{A}'_{k+1}$  geht die Gleichung 25), nachdem alle Glieder noch mit  $-6EJ_c$  multipliziert wurden, über in

$$\mathbf{V} + 6\alpha_k \frac{J_c}{J_m^k} \left[ -M_k^l \frac{l_k}{6} + H_k \frac{\mathfrak{S}'_k{}^{k-1}}{l_k} + \mathfrak{B}'_k{}^P \right]$$

$$+ 6\alpha_{k+1} \frac{J_c}{J_m^{k+1}} \left[ M_k^r \frac{l_{k+1}}{6} + H_{k+1} \frac{\mathfrak{S}'_{k+1}{}^{k+1}}{l_{k+1}} + \mathfrak{A}'_{k+1}{}^P \right] = 0$$

oder

$$\mathbf{V} - \alpha_k M_k^l l'_k + \alpha_{k+1} M_k^r l'_{k+1} + 6\alpha_k H_k \mathfrak{S}'_k{}^{k-1} \frac{l'_k}{l_k^2}$$

$$+ 6\alpha_{k+1} H_{k+1} \mathfrak{S}'_{k+1}{}^{k+1} \frac{l'_{k+1}}{l_{k+1}^2} + 6\alpha_k \mathfrak{B}'_k{}^P \frac{l'_k}{l_k} + 6\alpha_{k+1} \mathfrak{A}'_{k+1}{}^P \frac{l'_{k+1}}{l_{k+1}} = 0.$$

Nach Einfügen des vollständigen Ausdrucks für  $\mathbf{V}$  gemäß Gleichung 7) erhält der Viermomentensatz für unsymmetrische Stäbe schließlich die Gestalt

$$M_{k-1}^r l'_k + (2 - \alpha_k) M_k^l l'_k + (2 + \alpha_{k+1}) M_k^r l'_{k+1} + M_{k+1}^l l'_{k+1}$$

$$+ 6H_k \frac{l'_k}{l_k^2} [\mathfrak{S}^{k-1} + \alpha \mathfrak{S}'^{k-1}]_k + 6H_{k+1} \frac{l'_{k+1}}{l_{k+1}^2} [\mathfrak{S}^{k+1} + \alpha \mathfrak{S}'^{k+1}]_{k+1}$$

$$- 6EJ_c (\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) = N', \dots \dots \dots 26)$$

hierbei ist das Belastungsglied

$$N' = N - 6\alpha_k \mathfrak{B}'_k \frac{l'_k}{l_k} - 6\alpha_{k+1} \mathfrak{A}'_{k+1} \frac{l'_{k+1}}{l_{k+1}}, \dots \quad (27)$$

unter  $N$  das Lastglied der Viermomentengleichung 7) verstanden.

Die Viermomentengleichung 26) hat im wesentlichen den gleichen Bau wie die Gleichung 7), sie unterscheidet sich von dieser nur durch die geänderten Beiwerte einzelner Glieder. Sind diese Koeffizienten einmal festgelegt, so ist die weitere Rechnung in der gleichen Weise durchzuführen, wie bei den Systemen mit Elementen von unveränderlichem Querschnitt. Wichtig ist hierbei die Tatsache, daß der von den Drehwinkeln abhängige Teil der Gleichung 26) im Vergleich zu Formel 7) unverändert geblieben ist.

Es bleibt noch übrig, das Belastungsglied  $N'$  zu bestimmen. Wir führen die Berechnung nur für zwei Fälle durch. 1. Einzellasten senkrecht zur Stabsehne und 2. gleichförmig verteilte senkrecht zur Stabsehne gerichtete Vollbelastung.

**1. Belastung der Felder  $l_k$  und  $l_{k+1}$  durch Einzellasten  $P_k$  und  $P_{k+1}$  senkrecht zur Stabsehne, im Abstände  $a_k$  bzw.  $a_{k+1}$  vom linken Stabende.**

Für  $M_x$  gilt

$$\text{wenn } x < a \quad \mathfrak{M}_x = P(l-a) \frac{x}{l},$$

$$\text{,, } x > a \quad \mathfrak{M}_x = Pa \left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

daher findet man für  $\mathfrak{M}'_x$

$$\text{wenn } x < a \quad \mathfrak{M}'_x = P(l-a) \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l},$$

$$\text{,, } x > a \quad \mathfrak{M}'_x = Pa \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right),$$

ferner die Auflagerdrücke  $\mathfrak{A}'^P$  und  $\mathfrak{B}'^P$  der zu  $\mathfrak{M}'_x$  gehörenden Momentenfläche

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}'^P &= P \frac{l-a}{l} \int_0^a \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right) \frac{x}{l} \cdot (l-x) dx \\ &+ P \frac{a}{l} \int_a^l \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right) \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot (l-x) dx = \frac{1}{6} P l a \left(1 - \frac{a}{l}\right)^3, \end{aligned}$$

$$\mathfrak{B}'^P = P \frac{l-a}{l} \int_0^a \left( \mathbf{I} - 2 \frac{x}{l} \right) \frac{x}{l} \cdot x dx$$

$$+ P \frac{a}{l} \int_a^l \left( \mathbf{I} - 2 \frac{x}{l} \right) \left( \mathbf{I} - \frac{x}{l} \right) \cdot x dx = - \frac{\mathbf{I}}{6} Pl(l-a) \left( \frac{a}{l} \right)^3.$$

Mithin lautet  $N'$

$$N' = N + P_k \alpha_k l'_k (l-a) \left( \frac{a_k}{l_k} \right)^3 - P_{k+1} \alpha_{k+1} l'_{k+1} a_{k+1} \left( \mathbf{I} - \frac{a_{k+1}}{l_{k+1}} \right)^3.$$

Damit ergibt sich der Gesamtwert des Belastungsgliedes, wenn man  $N$  nach Gleichung 9) S. 35 einfügt und für ein System paralleler Lasten das Summenzeichen vorsetzt,

$$N' = - l_k l'_k \sum P_k \frac{a_k}{l_k} \left( \mathbf{I} - \frac{a_k}{l_k} \right) \left[ \left( \mathbf{I} + \frac{a}{l} \right) - \alpha \left( \frac{a}{l} \right)^2 \right]_k$$

$$- l_{k+1} l'_{k+1} \sum P_{k+1} \frac{a_{k+1}}{l_{k+1}} \left( \mathbf{I} - \frac{a_{k+1}}{l_{k+1}} \right) \left[ \left( 2 - \frac{a}{l} \right) + \alpha \left( \mathbf{I} - \frac{a}{l} \right)^2 \right]_k$$

28)

Den von  $\frac{a}{l}$  abhängigen Teil der beiden Summenausdrücke fassen wir unter der Bezeichnung  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  zusammen, derart, daß

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{a}{l} \left( \mathbf{I} - \frac{a}{l} \right) \left[ \left( 2 - \frac{a}{l} \right) + \alpha \left( \mathbf{I} - \frac{a}{l} \right)^2 \right] \\ \varphi_2 &= \frac{a}{l} \left( \mathbf{I} - \frac{a}{l} \right) \left[ \left( \mathbf{I} + \frac{a}{l} \right) - \alpha \left( \frac{a}{l} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \dots 29)$$

ist. Mithin erhält Gleichung 28) die Gestalt

$$N' = - l_k l'_k \sum P_k \varphi_2 - l_{k+1} l'_{k+1} \sum P_{k+1} \varphi_1 \dots 28')$$

Ist nur ein einzelnes Feld mit  $P = \mathbf{I}$  belastet, dann geht  $N'$  über in  $F_1'$  bzw.  $F_2'$ , welche Funktionen nun die Werte

$$F_1 = - \varphi_1 l l' \qquad F_2 = - \varphi_2 l l'$$

annehmen.

Zur Erleichterung der Berechnung von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ , die sich auf die Form  $\varphi_1 = A_1 + B_1 \alpha$ ,  $\varphi_2 = A_2 - B_2 \alpha$  bringen lassen, sind für verschiedene Verhältnisse von  $\frac{a}{l}$  die Beiwerte  $A$  und  $B$  im Anhang in Tafel III zusammengestellt.

2. Gleichförmig verteilte Vollbelastung  $p_k$  und  $p_{k+1}$  der Stäbe  $l_k$  und  $l_{k+1}$ .

Setzt man in Gleichung 28) für  $P$ ,  $p da$  und an Stelle des Summenzeichens das Integralzeichen, so erhält man

$$N_p' = -p_k l_k l_k' \int_0^l \frac{a_k}{l_k} \left(1 - \frac{a_k}{l_k}\right) \left[ \left(1 + \frac{a}{l}\right) - \alpha \left(\frac{a}{l}\right)^2 \right]_k da$$

$$- p_{k+1} l_{k+1} l_{k+1}' \int_0^l \frac{a_{k+1}}{l_{k+1}} \left(1 - \frac{a_{k+1}}{l_{k+1}}\right) \left[ \left(2 - \frac{a}{l}\right) + \alpha \left(1 - \frac{a}{l}\right)^2 \right]_{k+1} da.$$

Wir berechnen daher

$$\int_0^l \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{l}\right) \left[ \left(1 + \frac{a}{l}\right) + \alpha \left(\frac{a}{l}\right)^2 \right] da = \left(1 - \frac{\alpha}{5}\right) \frac{l}{4}$$

und

$$\int_0^l \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{l}\right) \left[ \left(2 - \frac{a}{l}\right) + \alpha \left(1 - \frac{a}{l}\right)^2 \right] da = \left(1 + \frac{\alpha}{5}\right) \frac{l}{4}.$$

Somit finden wir

$$N_p' = -\frac{p_k l_k^2 l_k'}{4} \left(1 - \frac{\alpha_k}{5}\right) - \frac{p_{k+1} l_{k+1}^2 l_{k+1}'}{4} \left(1 + \frac{\alpha_{k+1}}{5}\right) \quad . \quad 30)$$

b) Symmetrische Stäbe.

Unter der Voraussetzung, daß die Linie der reziproken Trägheitsmomente ( $i$ -Linie) durch eine Parabel zweiter Ordnung ersetzt werden kann, besteht unter Hinweis auf Abb. 97 folgende Beziehung:

$$\frac{1}{J} = \frac{1}{J_m} + \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)^2 \left(\frac{1}{J_0} - \frac{1}{J_m}\right) = \frac{1}{J_m} + \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)^2 \frac{J_m - J_0}{J_m J_0}$$

oder

$$\frac{J_m}{J} = 1 + \alpha \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)^2, \quad 31)$$

wobei wie früher

$$\alpha = \frac{J_m - J_0}{J_0} \dots 31')$$

bedeutet.  $\alpha$  ist positiv oder negativ, je nachdem  $J_m \geq J_0$  ist.

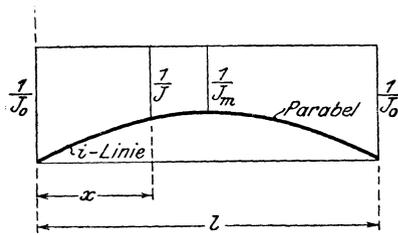


Abb. 97.

Führt man, wie oben, das Verhältnis  $\frac{J_m}{J}$  in die Differentialgleichung der elastischen Linie ein, so lautet diese Gleichung

$$EJ_m \cos^3 \varphi \frac{d^2 \Delta y}{dx^2} = - \left[ 1 + \alpha \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right)^2 \right] M_x$$

oder

$$EJ_m' \frac{d^2 \Delta y}{dx^2} = - M_x - \alpha M_x'',$$

wobei

$$M_x'' = \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right)^2 M_x$$

bedeutet. Auch hier hat die Lösung der Differentialgleichung die Form

$$\Delta y = \Delta y_0 + \alpha \Delta y'',$$

weshalb auch die Kontinuitätsbedingung die gleiche Gestalt wie oben annimmt; nur sind für  $\mathfrak{B}'_k$  und  $\mathfrak{A}'_{k+1}$  die den geänderten Werten von  $M_x''$  entsprechenden Ausdrücke von  $\mathfrak{B}''_k$  und  $\mathfrak{A}''_{k+1}$  einzuführen.

Es ist nun

$$M_x'' = M^r \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right)^2 \left( 1 - \frac{x}{l} \right) + M^l \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right)^2 \frac{x}{l} + H \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right)^2 y + \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right)^2 \mathfrak{M}_x.$$

Wie unter a) bestimmen wir auch hier für die einzelnen Glieder von  $M_x''$  der Reihe nach die Beträge der Auflagerdrucke  $\alpha''$  und  $\beta''$  der Teilmomentenflächen. Wir finden:

$$a) \quad m_x = \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right)^2 \left( 1 - \frac{x}{l} \right):$$

$$\alpha'' = \frac{1}{l} \int_0^l \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right)^2 \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \cdot (l - x) dx = \frac{2}{15} l,$$

$$\beta'' = \frac{1}{l} \int_0^l \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right)^2 \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \cdot x dx = \frac{1}{30} l.$$

$$b) \quad m_x = \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right)^2 \frac{x}{l}:$$

$$\alpha'' = \frac{1}{l} \int_0^l \left( 1 - 2 \frac{x}{l} \right)^2 \frac{x}{l} \cdot (l - x) dx = \frac{1}{30} l,$$

$$b'' = \frac{1}{l} \int_0^l \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)^2 \frac{x}{l} \cdot x dx = \frac{2}{15} l.$$

c)  $m_x = \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)^2 y:$

Deutet man

$$\left(1 - 2 \frac{x}{y}\right)^2 y = y''$$

wieder als reduzierte Achsenlinie und nennt man die statischen Momente der Fläche zwischen  $y''$  und der Stabsehne, bezogen auf den rechten bzw. linken Stabendpunkt,  $\mathfrak{S}''^l$  und  $\mathfrak{S}''^r$ , so ist

$$a'' = \frac{\mathfrak{S}''^l}{l} \quad \text{und} \quad b'' = \frac{\mathfrak{S}''^r}{l}.$$

d)  $m_x = \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)^2 \mathfrak{M}_x:$

Die von  $\mathfrak{M}_x$  abhängigen Teile der Auflagerdrucke bezeichnen wir zunächst kurz mit

$$\mathfrak{A}''^P \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}''^P.$$

Hiermit ergeben sich die Auflagerdrücke  $\mathfrak{B}_k''$  und  $\mathfrak{A}_{k+1}''$  der Kontinuitätsbedingung mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_k'' &= M_{k-1}^r \frac{l_k}{30} + M_k^l \frac{2l_k}{15} + H_k \frac{\mathfrak{S}''^{k-1}}{l_k} + \mathfrak{B}_k''^P, \\ \mathfrak{A}_{k+1}'' &= M_k^r \frac{2l_{k+1}}{15} + M_{k+1}^l \frac{l_{k+1}}{30} + H_{k+1} \frac{\mathfrak{S}''^{k+1}}{l_{k+1}} + \mathfrak{A}_{k+1}''^P. \end{aligned}$$

Somit gewinnen wir aus Gleichung 25) nach Einsetzen der Beträge für  $\mathfrak{B}_k''$  und  $\mathfrak{A}_{k+1}''$  und nachdem wir alle Glieder mit  $-6EJ_c$  multipliziert haben, die Beziehung

$$\begin{aligned} \mathbf{V} + 6\alpha_k \frac{J_c}{J_m^k} \left[ M_{k-1}^r \frac{l_k}{30} + M_k^l \frac{2l_k}{15} + H_k \frac{\mathfrak{S}''^{k-1}}{l_k} + \mathfrak{B}_k''^P \right] \\ + 6\alpha_{k+1} \frac{J_c}{J_m^{k+1}} \left[ M_k^r \frac{2l_{k+1}}{15} + M_{k+1}^l \frac{l_{k+1}}{30} + H_{k+1} \frac{\mathfrak{S}''^{k+1}}{l_{k+1}} + \mathfrak{A}_{k+1}''^P \right] = 0. \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \mathbf{V} + \frac{\alpha_k}{5} M_{k-1}^r l'_k + \frac{4\alpha_k}{5} M_k^l l'_k + \frac{4\alpha_{k+1}}{5} M_k^r l'_{k+1} + \frac{\alpha_{k+1}}{5} M_{k+1}^l l'_{k+1} \\ + 6\alpha_k H_k \mathfrak{S}''^{k-1} \frac{l'_k}{l_k^2} + 6\alpha_{k+1} H_{k+1} \mathfrak{S}''^{k+1} \frac{l'_{k+1}}{l_{k+1}^2} + 6\alpha_k \mathfrak{B}_k''^P \frac{l'_k}{l_k} \\ + 6\alpha_{k+1} \mathfrak{A}_{k+1}''^P \frac{l'_{k+1}}{l_{k+1}} = 0. \end{aligned}$$

Führt man schließlich für  $\mathbf{V}$  den vollständigen Betrag der Gleichung 7) ein, so lautet der **Viermomentensatz für symmetrische Stäbe mit stetig veränderlichem Querschnitt**:

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\alpha_k}{5}\right) M_k^r l'_k + 2 \left(1 + \frac{2\alpha_k}{5}\right) M_k^l l'_k + 2 \left(1 + \frac{2\alpha_{k+1}}{5}\right) M_k^r l'_{k+1} \\ & + \left(1 + \frac{\alpha_{k+1}}{5}\right) M_{k+1}^l l'_{k+1} + 6 H_k \frac{l'_k}{l_k^2} [\mathfrak{S}^{k-1} + \alpha \mathfrak{S}''^{k-1}]_k \\ & + 6 H_{k+1} \frac{l'_{k+1}}{l_{k+1}^2} [\mathfrak{S}^{k+1} + \alpha \mathfrak{S}''^{k+1}]_{k+1} - 6 E J_c (\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) = N'' \end{aligned} \quad 32)$$

Das Belastungsglied  $N''$  ist

$$N'' = N - 6 \alpha_k \mathfrak{B}_k'' P \frac{l'_k}{l_k} - 6 \alpha_{k+1} \mathfrak{B}_{k+1}'' P \frac{l'_{k+1}}{l_{k+1}} \dots \quad 33)$$

$N$  ist das Lastglied der Momentengleichung 7).

Nach Feststellung der Beiwerte auf Grund der Abmessungen der Stäbe  $l_k$  und  $l_{k+1}$ , wobei bei krummen Stäben an Stelle der wirklichen Achsenlinie  $y$  die reduzierte Achsenlinie  $y''$  tritt, erhält man Viermomentengleichungen von der gleichen Gestalt wie bei Systemen mit Stäben unveränderlichen Trägheitsmomentes, weshalb auch die weitere Untersuchung den gleichen Weg nehmen kann.

Ermittlung des Belastungsgliedes  $N''$ .

*I. Belastung der Stäbe  $l_k$  und  $l_{k+1}$  durch Einzellasten  $P_k$  und  $P_{k+1}$  senkrecht zur Stabsehne, im Abstände  $\alpha_k$  bzw.  $\alpha_{k+1}$  vom linken Stabende.*

Es ist

$$\text{für } x < a \quad M_x'' = P (l - a) \frac{x}{l} \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)^2,$$

$$\text{für } x > a \quad M_x'' = P a \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)^2,$$

damit folgen für die Auflagerdrücke  $\mathfrak{A}''^P$  und  $\mathfrak{B}''^P$  die Formeln

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}''^P &= P \frac{l-a}{l} \int_0^a \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)^2 \frac{x}{l} \cdot (l-x) dx + P \frac{a}{l} \int_a^l \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot (l-x) dx \\ &= \frac{1}{30} P l a \left(1 - \frac{a}{l}\right) \left[1 + \frac{l-a}{l} - 4 \left(\frac{l-a}{l}\right)^2 + 6 \left(\frac{l-a}{l}\right)^3\right] \end{aligned}$$

$$\mathfrak{B}''P = P \frac{l-a}{l} \int_0^a \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)^2 \frac{x}{l} \cdot x dx + P \frac{a}{l} \int_a^l \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot x dx$$

$$= \frac{1}{30} Pl a \left(1 - \frac{a}{l}\right) \left[1 + \frac{a}{l} - 4 \left(\frac{a}{l}\right)^2 + 6 \left(\frac{a}{l}\right)^3\right].$$

Wir finden somit  $N''$

$$N'' = N - \frac{\alpha_k}{5} P_k l'_k a_k \left(1 - \frac{a_k}{l_k}\right) \left[1 + \frac{a}{l} - 4 \left(\frac{a}{l}\right)^2 + 6 \left(\frac{a}{l}\right)^3\right]_k$$

$$- \frac{\alpha_{k+1}}{5} P_{k+1} l'_{k+1} a_{k+1} \left(1 - \frac{a_{k+1}}{l_{k+1}}\right) \left[1 + \frac{l-a}{l} - 4 \left(\frac{l-a}{l}\right)^2 + 6 \left(\frac{l-a}{l}\right)^3\right]_{k+1}$$

und schließlich nach Einführung des Wertes von  $N$  für eine Gruppe paralleler Einzellasten

$$N'' = -l_k l'_k \sum P_k \frac{a_k}{l_k} \left(1 - \frac{a_k}{l_k}\right) \left\{ \left(1 + \frac{a}{l}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{5}\right) - \frac{2\alpha}{5} \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left[2 - 3 \left(\frac{a}{l}\right)^2\right] \right\}_k$$

$$- l_{k+1} l'_{k+1} \sum P_{k+1} \frac{a_{k+1}}{l_{k+1}} \left(1 - \frac{a_{k+1}}{l_{k+1}}\right) \left\{ \left(2 - \frac{a}{l}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{5}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{2\alpha}{5} \left(\frac{l-a}{l}\right)^2 \left[2 - 3 \left(\frac{l-a}{l}\right)^2\right] \right\}_{k+1} \dots \dots \dots 34)$$

Bezeichnet man den von  $\frac{a}{l}$  abhängigen Teil der beiden Summen mit  $\varphi_2'$  und  $\varphi_1'$ , so daß

$$\varphi_1' = \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{l}\right) \left\{ \left(2 - \frac{a}{l}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{5}\right) - \frac{2\alpha}{5} \left(\frac{l-a}{l}\right)^2 \left[2 - 3 \left(\frac{l-a}{l}\right)^2\right] \right\}$$

und

$$\varphi_2' = \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{l}\right) \left\{ \left(1 + \frac{a}{l}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{5}\right) - \frac{2\alpha}{5} \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left[2 - 3 \left(\frac{a}{l}\right)^2\right] \right\} \quad \left. \vphantom{\varphi_1'} \right\} 35)$$

ist, so lautet

$$N'' = -l_k l'_k \sum P_k \varphi_2' - l_{k+1} l'_{k+1} \sum P_{k+1} \varphi_1' \dots \dots 34)$$

Setzt man in  $\varphi_1'$  für  $l-a$ ,  $a$ , so geht die Linie in  $\varphi_2'$  über;  $\varphi_1'$  ist somit das Spiegelbild von  $\varphi_2'$ .

Für den Fall, daß bloß ein Feld mit der Einzellast  $\mathbf{1}$  belastet ist (Einflußlinien), geht  $N''$  in die Funktionen  $F_1''$  und  $F_2''$  über, und zwar:

$$F_1'' = -\varphi_1' ll' \quad \text{und} \quad F_2'' = -\varphi_2' ll'.$$

Zur Berechnung der Funktionen  $\varphi_1'$  und  $\varphi_2'$ , die die Form  $\varphi' = A + B\alpha$  annehmen, dient die Tafel IV im Anhang auf S. 217.

2. Gleichförmig verteilte Vollbelastung  $p_k$  und  $p_{k+1}$  der Stäbe  $l_k$  und  $l_{k+1}$ .

Aus Gleichung 34') leiten wir die Beziehung ab:

$$N_p'' = -p_k l_k l_k' \int_0^l \varphi_2' da - p_{k+1} l_{k+1} l_{k+1}' \int_0^l \varphi_1' da.$$

Die Ausrechnung der bestimmten Integrale auf Grund der Formeln 35) für  $\varphi_1'$  und  $\varphi_2'$  liefert

$$N_p'' = -\frac{1}{4} p_k l_k^2 l_k' \left(1 - \frac{\alpha_k}{5}\right) - \frac{1}{4} p_{k+1} l_{k+1}^2 l_{k+1}' \left(1 - \frac{\alpha_{k+1}}{5}\right) . . . \quad 36)$$

#### § 14. Die Ermittlung der Längenänderungen $\Delta l$ in den Winkelgleichungen; Beispiele.

Wir schließen uns eng an den Gedankengang in § 5 an, der die Berechnung der Längenänderungen  $\Delta l$  für Stäbe mit unveränderlichem Querschnitt zeigt, weshalb wir uns in den folgenden Darlegungen etwas kürzer fassen werden. Die Formeln für die Änderungen  $\Delta l$  der Stabsehnens bei symmetrischen und unsymmetrischen Stäben können unter einem entwickelt werden, da beiden Fällen die gleiche Differentialgleichung zugrunde liegt. Der in § 13 benutzten Ausgangsgleichung geben wir jetzt die Form:

$$E J_m \frac{d\vartheta_x}{dx} = -M_x - \alpha \bar{M}_x.$$

$J_m$  ist bei unsymmetrischen Stäben durch Gleichung 24) festgelegt, die eine Verknüpfung der beiden ungleichen Endquerschnitte  $J_0$  und  $J_0'$  darstellt. Bei symmetrisch gebauten Stäben ist  $J_m$  das tatsächliche Trägheitsmoment im Mittelquerschnitt. Unter  $\vartheta_x$  wird, wie in § 5, der Drehwinkel eines unendlich kleinen Stabelementes  $ds$  mit der Abzisse  $x$  verstanden.  $\alpha$  ist in beiden Fällen der durch Formel 24') erläuterte Zahlenwert.

$\bar{M}_x$  ist durch die Gleichungen gegeben:  
bei unsymmetrischen Stäben

$$\bar{M}_x = M_x' = \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right) M_x = \omega(x) M_x,$$

bei symmetrischen Stäben

$$\bar{M}_x = M_x'' = \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)^2 M_x = \omega(x) M_x.$$

Wir bezeichnen den von  $x$  abhängigen Beiwert in beiden Fällen mit  $\omega(x)$

Aus der Differentialgleichung folgt unter Benutzung des in § 4 abgeleiteten Satzes über die Querkraft der Momentenfläche

$$E J_m \vartheta_x = -\mathfrak{R}_x - \alpha \overline{\mathfrak{R}}_x,$$

wo  $\mathfrak{R}_x$  zur Momentenfläche  $M_x$  und  $\overline{\mathfrak{R}}_x$  zur Fläche  $\overline{M}_x$  gehören.

Aus § 5 entnehmen wir die aus der Winkelgleichung entwickelte Beziehung für die Längenänderung  $\Delta l$

$$\Delta l = \frac{Hl}{EF_m} + \alpha_t t l + \int_0^l \vartheta_x dy.$$

$F_m$  bedeutet eine passend gewählte mittlere Querschnittsfläche. Der von der Stabbiegung herrührende Teil von  $\Delta l$ , d. i.  $\Delta l_b$ , nimmt nach Einführung des Betrages für  $\vartheta_x$  den Wert an:

$$\Delta l_b = \int_0^l \vartheta_x dy = -\frac{1}{E J_m} \int_0^l \mathfrak{R}_x dy - \frac{\alpha}{E J_m} \int_0^l \overline{\mathfrak{R}}_x dy.$$

Nun ist

$$\int_0^l \mathfrak{R}_x dy = -\int_0^l M_x y dx$$

und ebenso

$$\int_0^l \overline{\mathfrak{R}}_x dy = -\int_0^l M_x \omega(x) y dx,$$

wenn man für  $\overline{M}_x$  den Betrag  $M_x \omega(x)$  setzt.  $\omega(x) \cdot y$  haben wir im vorangehenden Abschnitt als reduzierte Achsenlinie  $y'$  bzw.  $y''$  bezeichnet. Wir nennen sie jetzt in beiden Fällen  $\overline{y}$  und erhalten

$$\Delta l_b = \frac{1}{E J_m} \left[ \int_0^l M_x y dx + \alpha \int_0^l M_x \overline{y} dx \right].$$

Nach Einsetzen des ausführlichen Wertes von  $M_x$  nimmt diese Gleichung folgende endgültige Form an, falls man, wie vorher, die einzelnen Integralausdrücke als Flächenmomente deutet.

$$\Delta l_b = \frac{1}{E J_m} \left[ \frac{M^r}{l} (\mathfrak{S}^l + \alpha \overline{\mathfrak{S}}^l) + \frac{M^l}{l} (\mathfrak{S}^r + \alpha \overline{\mathfrak{S}}^r) + 2H(\mathfrak{S}_x + \alpha \overline{\mathfrak{S}}_x) + (G + \alpha \overline{G}) \right].$$

$\overline{\mathfrak{S}}^l$ ,  $\overline{\mathfrak{S}}^r$ ,  $\overline{\mathfrak{S}}_x$  und  $\overline{G}$  haben die gleiche Bedeutung wie die Größen  $\mathfrak{S}^l$ ,  $\mathfrak{S}^r$ ,  $\mathfrak{S}_x$  und  $G$  (siehe S. 41), nur ist zu ihrer Bildung an Stelle der Stabachsenlinie  $y$  die reduzierte Achsenlinie  $\overline{y}$  zu setzen.

Für unsymmetrische Stäbe gilt

$$\bar{y} = \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right) y,$$

für symmetrische Stäbe

$$\bar{y} = \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)^2 y.$$

Der Gesamtwert  $\Delta l$  beträgt somit

$$\Delta l = \frac{Hl}{EF_m} + \alpha_t tl + \frac{I}{EJ_m} \left[ \frac{Mr}{l} (\mathcal{C} + \alpha \bar{\mathcal{C}}) + \frac{M^l}{l} (\mathcal{C}^r + \alpha \bar{\mathcal{C}}^r) + 2H(\mathcal{C}_x + \alpha \bar{\mathcal{C}}_x) + (G + \alpha \bar{G}) \right] \dots 37)$$

Bei symmetrischen Stäben kann die Gleichung noch in die einfachere Form gebracht werden:

$$\Delta l = \frac{Hl}{EF_m} + \alpha_t tl + \frac{I}{EJ_m} \left[ \frac{I}{2} (\Phi + \alpha \bar{\Phi})(M^r + M^l) + 2H(\mathcal{C}_x + \alpha \bar{\mathcal{C}}_x) + (G + \alpha \bar{G}) \right], \dots 37')$$

unter  $\Phi$  und  $\bar{\Phi}$  die Flächen zwischen der Stabsehne und den Achsenlinien  $y$  bzw.  $\bar{y}$  verstanden.

Bei geradachsigen Stäben ist der Klammerausdruck Null und  $\Delta l$  beschränkt sich auf

$$\Delta l = \frac{Hl}{EF_m} + \alpha_t tl \dots 37'')$$

**Beispiele.**

1. Beispiel. Es ist die Einflußlinie des Stützenmomentes  $M_1$  des in Abb. 98 dargestellten durchlaufenden Balkens mit zwei gleichen Feldern darzustellen. Die Feldstützweite sei  $l$ , das Verhältnis der Endträgheitsmomente eines Feldes

$$J'_0 = 4 J_0.$$

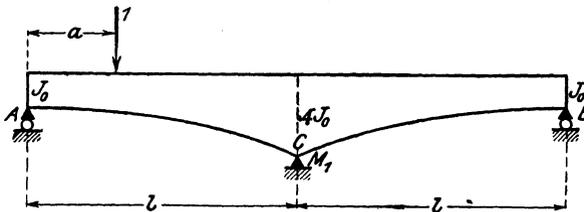


Abb. 98.

Nach Formel 24) (unsymmetrischer Stab) ist das ideale Trägheitsmoment  $J_m$  für die Feldmitte der linken Öffnung

$$J_m = \frac{2 \cdot 4 J_0^2}{5 J_0} = \frac{8}{5} J_0,$$

daher  $\alpha = \frac{J_m}{J_0} - 1 = \frac{3}{5}$ ;

für die rechte Öffnung ist sonach

$$\alpha = -\frac{3}{5},$$

welchen Wert man auch erhält, wenn man  $J_m$  nach Formel 24) berechnet und damit  $\alpha$  bestimmt.

Die Momentengleichung lautet somit (Formel 26)

$$(2 - \frac{3}{5}) M_1 l' + (2 - \frac{3}{5}) M_1 l' = N^2$$

oder

$$2,8 M_1 l' = N,$$

somit

$$M_1 = \frac{N}{2,8 l'} = \frac{l l'}{2,8 l'} \varphi_2 = 0,357 \varphi_2 l.$$

Mit Hilfe der Tafel auf S. 215 finden wir mit  $\alpha = 0,6$  für den linken Zweig der Einflußlinie:

$a/l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$\varphi_2$	0,0985	0,1882	0,2617	0,3130	0,3375	0,3322	0,2953	0,2266	0,1273
$M_1/l$	0,0352	0,0672	0,0934	0,1118	0,1205	0,1186	0,1055	0,0809	0,0455

In Abb. 99 ist die Einflußlinie dargestellt. Zum Vergleiche wurde die Einflußlinie für den Träger unveränderlichen Querschnitts strichliert eingezeichnet.

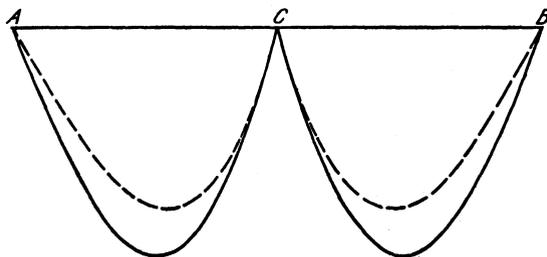


Abb. 99.

2. Beispiel. Die Anwendung der Formeln für den symmetrischen Stab soll an der Berechnung des in Abb. 100 dargestellten Brückenrahmens, dessen oberer Riegel gegen die Mitte abnehmendes Trägheitsmoment aufweist, gezeigt werden. Dieser Riegel, dessen Achse gekrümmt ist, soll zur Vereinfachung der Rechnung als gerade betrachtet werden. Die Abmessungen sind in Abb. 100 eingeschrieben. Die Belastung bestehe in einer wagerechten Einzellast  $W$ , die im linken oberen Eckpunkt angreift.

Wir bezeichnen die 4 Ecken des als Balken gelagert gedachten Rahmens, von links unten beginnend, mit 1 bis 4 und geben

<sup>1)</sup> Eigentlich liegen Stäbe mit gekrümmter Stabachse vor; da aber  $H$  sehr klein ist, so unterdrücken wir die von den Sehnenkräften abhängigen Glieder.

den 4 Eckmomenten die gleichen Zeiger (Abb. 101). Die reduzierte Länge des Querträgers sei  $b'$ , die des Riegels  $r'$  und die der Pfosten  $h'$ . Die dazugehörigen Drehwinkel wurden mit  $\vartheta_r$  und  $\vartheta_h^l$  bzw.  $\vartheta_h^r$  bezeichnet.  $\vartheta_b$ , der Drehwinkel des Querträgers, ist voraussetzungsgemäß Null.

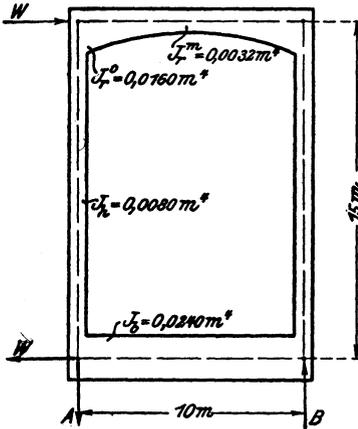


Abb. 100.

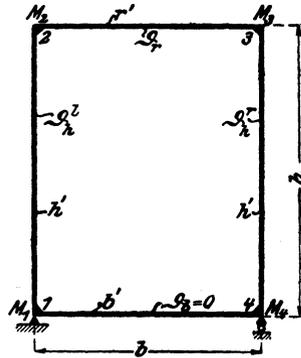


Abb. 101.

Wenn wir bei Punkt 1 beginnen und für den Ansatz Gleichung 32) benutzen, wobei bei den geraden Stäben  $\alpha = 0$  zu setzen ist, so lauten die Momentengleichungen:

$$M_1 h' + 2 M_2 \left[ h' + \left( 1 + \frac{2\alpha}{5} \right) r' \right] + \left( 1 + \frac{\alpha}{5} \right) M_3 r' - 6 E J_c (\vartheta_h^l - \vartheta_r) = 0,$$

$$\left( 1 + \frac{\alpha}{5} \right) M_2 r' + 2 M_3 \left[ \left( 1 + \frac{2\alpha}{5} \right) r' + h' \right] + M_4 h' - 6 E J_c (\vartheta_r - \vartheta_h^r) = 0,$$

$$M_3 h' + 2 M_4 (h' + b') + M_1 b' - 6 E J_c \vartheta_h^r = 0,$$

$$M_4 b' + 2 M_1 (b' + h') + M_2 h' + 6 E J_c \vartheta_h^l = 0.$$

Bei Vernachlässigung der Längenänderungen haben die Winkelgleichungen die einfache Gestalt:

somit

$$h \vartheta_h^l - h \vartheta_h^r = 0, \quad b \vartheta_r = 0,$$

$$\vartheta_h^l = \vartheta_h^r = \vartheta_h \quad \text{und} \quad \vartheta_r = 0.$$

Wir führen dieses Ergebnis in die Momentengleichungen ein, setzen zur Abkürzung

$$h' + \left( 1 + \frac{2\alpha}{5} \right) r' = \kappa, \quad \left( 1 + \frac{\alpha}{5} \right) r' = \lambda,$$

$$6 E J_c = \varrho$$

und erhalten

$$\begin{aligned} M_1 h' + 2 M_2 \kappa + M_3 \lambda - \rho \vartheta_h &= 0, \\ M_2 \lambda + 2 M_3 \kappa + M_4 h' + \rho \vartheta_h &= 0, \\ M_3 h' + 2 M_4 (h' + b') + M_1 b' - \rho \vartheta_h &= 0, \\ M_4 b' + 2 M_1 (b' + h') + M_2 h' + \rho \vartheta_h &= 0. \end{aligned}$$

Da das System dreifach statisch unbestimmt ist, so reichen diese vier Gleichungen zur Berechnung der drei Überzähligen und des Stabdrehwinkels  $\vartheta_h$  aus. Nach Addition der zwei ersten und zwei letzten Gleichungen entsteht

$$\begin{aligned} (M_1 + M_4) h' + (M_2 + M_3)(2 \kappa + \lambda) &= 0, \\ (M_1 + M_4)(3 b' + 2 h') + (M_2 + M_3) h' &= 0. \end{aligned}$$

Betrachtet man die Momentensummen als Unbekannte, so liegen zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten vor. Da die rechten Seiten Null sind, so ist

$$M_1 = -M_4 \quad \text{und} \quad M_2 = -M_3 \dots \dots \dots a)$$

Die Subtraktion innerhalb der Gleichungspaare liefert

$$\begin{aligned} (M_1 - M_4) h' + (M_2 - M_3)(2 \kappa - \lambda) - 2 \rho \vartheta_h &= 0, \\ (M_1 - M_4)(b' + 2 h') + (M_2 - M_3) h' + 2 \rho \vartheta_h &= 0. \end{aligned}$$

Nach Beseitigung von  $\vartheta_h$  durch Addieren dieser Gleichungen folgt

$$(M_1 - M_4)(b' + 3 h') + (M_2 - M_3)(2 \kappa - \lambda + h') = 0 \dots \dots b)$$

In a) und b) haben wir die drei winkelfreien Gleichungen gewonnen, aus denen die drei Überzähligen bestimmt werden können.

Nach Ausscheidung von  $M_3$  und  $M_4$  aus b) mittels der Beziehungen a) findet man schließlich:

$$M_1 (b' + 3 h') + M_2 (2 \kappa - \lambda + h') = 0 \dots \dots c)$$

Gleichung c) enthält noch zwei Unbekannte, es ist daher noch notwendig, die statischen Beziehungen zwischen  $M_1$  und  $M_2$  in Rechnung zu ziehen. Bei der Auswahl der Überzähligen lassen wir uns von den bisherigen Ergebnissen leiten. Da zwischen 1 und 4 sowie 2 und 3 keine Lasten angreifen, so ist die Momentenlinie im oberen und unteren Riegel eine Gerade. Aus den Bestimmungsgleichungen a) geht hervor, daß die Momentennullpunkte in Riegelmitte liegen. Schneidet

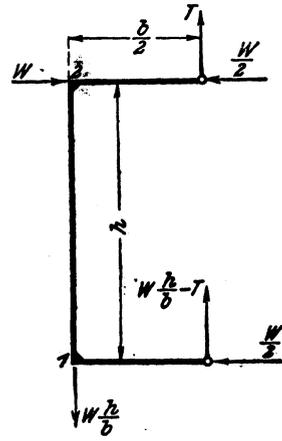


Abb. 102.

man den Rahmen an diesen Stellen durch, so entsteht die in Abb. 102 dargestellte Gleichgewichtsfigur. Nennt man die Querkraft im Momentennullpunkt des oberen Riegels  $T$ , dann ist die Querkraft  $Q$  im Querträger

$$Q = W \frac{h}{b} - T.$$

Nun ist

$$-M_1 = \left( W \frac{h}{b} - T \right) \frac{b}{2} = \frac{1}{2} (Wh - Tb),$$

$$M_2 = \frac{1}{2} T b.$$

Gleichung c) geht damit über in

$$-(Wh - Tb)(b' + 3h') + Tb(2\alpha - \lambda_2 + h') = 0$$

und mithin

$$T = W \frac{h}{b} \frac{b' + 3h'}{b' + 4h' + 2\alpha - \lambda}, \quad \dots \dots \dots \text{d)}$$

womit die Aufgabe gelöst ist, da mit d) auch die Momente  $M_1$  und  $M_2$  bestimmt sind.

#### Zahlenbeispiel.

Nach Abb. 100 ist, falls wir  $J_n = J_c$  wählen,

$$h' = h = 15 \text{ m},$$

$$b' = b \frac{J_c}{J_b} = 10 \cdot \frac{0,008}{0,024} = 3,33 \text{ m},$$

$$r' = b \frac{J_c}{J_r^m} = 10 \cdot \frac{0,008}{0,0032} = 25 \text{ m},$$

ferner ist nach Gleichung 31')

$$\alpha = \frac{J_m - J_0}{J_0} = \frac{0,0032 - 0,0160}{0,016} = -0,8,$$

somit ist

$$\alpha = h' + \left( 1 + \frac{2\alpha}{5} \right) r' = 15 + (1 - 0,32) 25 = 32 \text{ m},$$

$$\lambda = \left( 1 + \frac{\alpha}{5} \right) r' = (1 - 0,16) \cdot 25 = 21 \text{ m}.$$

Mit diesen Werten findet man

$$T = W \frac{15}{10} \frac{3,33 + 45}{3,33 + 60 + 64 - 21} = \mathbf{0,682 W}.$$

Bei gleichbleibendem Trägheitsmoment des Riegels lautet die Formel für  $T$ , wenn man in der Gleichung d)  $\alpha = 0$  setzt,

$$T' = W \frac{h}{b} \frac{b' + 3h'}{b' + 6h' + r'}.$$

Führt man z. B. für  $J_r$  das arithmetische Mittel der Trägheitsmomente in der Mitte und am Ende ein, so erhält man:

$$J_r = \frac{0,0032 + 0,0160}{2} = 0,0096 \text{ m}^4$$

und damit

$$r' = 10 \cdot \frac{0,0080}{0,0096} = 8,33 \text{ m.}$$

Somit

$$T' = \frac{3}{2} W \frac{48,33}{101,66} = 0,713 W.$$

Der Unterschied beträgt beiläufig 5 v. H., ist also verhältnismäßig klein. Mit abnehmender Pfostenhöhe nimmt dieser Unterschied aber bedeutend zu.

## VI. Tragwerke allgemeinsten Form.

### § 15. Die Viermomentengleichungen.

Die vorangehenden Untersuchungen erstreckten sich auf gerade oder schwach gekrümmte Stäbe, deren Trägheitsmomente entweder unveränderlich waren oder einfachen Gesetzen folgende stetige Änderungen aufwiesen. Nun gibt es eine große Gruppe von praktisch wichtigen Tragwerken, bei denen diese Voraussetzungen über Stabform und Querschnittsgestaltung nicht erfüllt sind. Ihre Berechnung nach der Methode des Viermomentensatzes könnte allerdings in der Weise erfolgen, daß man — wie schon einmal auseinandergesetzt wurde — die einzelnen irgendwie geformten und im Querschnitt beliebig wechselnden Stäbe durch Einschalten von zweckmäßig gewählten ausgezeichneten Punkten in Teilstäbe zerlegt, derart, daß innerhalb der Teilstücke die Voraussetzungen, auf welchen die vorangehenden Untersuchungen aufgebaut wurden, genügend genau erfüllt erscheinen. In vielen Fällen aber wird dieser Vorgang zu einer großen Zahl von Viermomentengleichungen führen, aus denen zunächst die den eingeschalteten ausgezeichneten Punkten zukommenden Momente, sowie die hinzugetretenen Stabdrehwinkel ausgesondert werden müssen, um die Zahl der Gleichungen zu verringern.

Es liegt der Gedanke nahe, diese Arbeit der Ausscheidung der Zwischenmomente und Zwischendrehwinkel, die nur Hilfsgrößen darstellen, nicht der Rechnung im Einzelfalle aufzubürden, sondern in allgemeinsten Form ein für allemal zu erledigen. Nachdem es sich gezeigt hat, daß die durch den Viermomentensatz dargestellte Verknüpfung der Anschlußmomente, Sehnkräfte und Stabdrehwinkel die Ermittlung der statisch unbestimmbaren Größen in hohem Maße erleichtert, so werden wir bestrebt sein, die Ausscheidung der Zwischenmomente und Zwischendrehwinkel so zu gestalten, daß das Ergebnis dieser Elimination, die sich auf die Gleichungen zweier elastisch zusammenhängender Stäbe erstrecken wird, einen Zusammenhang zwischen den vier Anschlußmomenten, Sehnkräften und den beiden





Den Winkelgleichungen geben wir die Form:

für Stab  $l_k$

$$\sum_{i=1}^n \Delta s_i \sin \alpha_i - \sum_{i=1}^n \vartheta_i s_i \cos \alpha_i + \vartheta_k l_k = 0,$$

für Stab  $l_{k+1}$

$$\sum_{i=1}^n \Delta s_i \sin \alpha_i - \sum_{i=1}^n \vartheta_i s_i \cos \alpha_i + \vartheta_{k+1} l_{k+1} = 0.$$

$\vartheta_k$  und  $\vartheta_{k+1}$  sind die Drehwinkel der Sehnen, also die Drehwinkel der Stäbe  $l_k$  und  $l_{k+1}$ .

Setzt man

$$\Delta s_i = \frac{S_i s_i}{EF_i}$$

und

$$s_i \cos \alpha_i = \lambda_i,$$

wobei  $S_i$  die Längskraft im Stabe  $s_i$  ist, so nehmen die Gleichungen folgende Gestalt an:

für Stab  $l_k$

$$\sum_{i=1}^n \frac{S_i s_i}{EF_i} \sin \alpha_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i \vartheta_i + l_k \vartheta_k = 0,$$

für Stab  $l_{k+1}$

$$\sum_{i=1}^n \frac{S_i s_i}{EF_i} \sin \alpha_i - \sum_{i=1}^n \lambda_i \vartheta_i + l_{k+1} \vartheta_{k+1} = 0.$$

Wir multiplizieren nun die Gleichungen a) der Reihe nach mit den Abzissen  $x_1, x_2 \dots x_i \dots x_{n-1}$  (siehe Abb. 103) und addieren sodann. Dies ergibt:

$$\begin{aligned} M_{k-1}^r s_1' x_1 + M_1 [2(s_1' + s_2') x_1 + s_2' x_2] + M_2 [s_2' x_1 + 2(s_2' + s_3') x_2 + \\ + s_3' x_3] + \dots + M_i [s_i' x_{i-1} + 2(s_i' + s_{i+1}') x_i + s_{i+1}' x_{i+1}] \\ + \dots + M_{n-1} [s_{n-1}' x_{n-2} + 2(s_{n-1}' + s_n') x_{n-1}] \\ + M_k^l s_n' x_{n-1} - \varrho [(\vartheta_1 - \vartheta_2) x_1 + (\vartheta_2 - \vartheta_3) x_2 + \dots \\ + (\vartheta_{n-1} - \vartheta_n) x_{n-1}] = 0. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (\vartheta_1 - \vartheta_2) x_1 + (\vartheta_2 - \vartheta_3) x_2 + \dots + (\vartheta_{n-1} - \vartheta_n) x_{n-1} \\ = (x_1 - (x_0)) \vartheta_1 + (x_2 - x_1) \vartheta_2 + \dots + (x_{n-1} - x_{n-2}) \vartheta_{n-1} + x_{n-1} \vartheta_n \\ = \lambda_1 \vartheta_1 + \lambda_2 \vartheta_2 + \dots + \lambda_{n-1} \vartheta_{n-1} - (l_k - l_n) \vartheta_n \\ = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vartheta_i - l_k \vartheta_n. \end{aligned}$$

Aus der Winkelgleichung für den Stab  $l_k$  folgt aber

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vartheta_i = l_k \vartheta_k + \sum_{i=1}^n \frac{S_i s_i}{E F_i} \sin \alpha_i.$$

Führt man diesen Zusammenhang oben ein und bezeichnet man die Beiwerte der Momente mit  $l_k \psi_0, l_k \psi_1, \dots, l_k \psi_i, \dots, l_k \bar{\psi}_{n-1}, l_k \bar{\psi}_n^1$ , so entsteht die Gleichung:

$$l_k [M_{k-1}^r \psi_0 + M_1 \psi_1 + \dots + M_i \psi_i + \dots + M_{n-1} \bar{\psi}_{n-1} + M_k^l \bar{\psi}_n] \\ - \varrho l_k \vartheta_k + \varrho l_k \vartheta_n^k - \varrho \sum_{i=1}^n \left[ \frac{S_i s_i}{E F_i} \sin \alpha_i \right]_k = 0,$$

woraus der Betrag von  $-\varrho \vartheta_n^k$  folgt:

$$-\varrho \vartheta_n^k = M_{k-1}^r \psi_0 + M_1 \psi_1 + \dots + M_i \psi_i + \dots + M_{n-1} \bar{\psi}_{n-1} + M_k^l \bar{\psi}_n \\ - \varrho \vartheta_k - \frac{\varrho}{l_k} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{S_i s_i}{E F_i} \sin \alpha_i \right]_k.$$

Um  $\varrho \vartheta_1^{k+1}$  zu finden, multipliziert man die Gleichungen b) der Reihe nach mit  $x_1', x_2' \dots x_i' \dots x_{n-1}'$ , wenn allgemein  $x_i' = l_{k+1} - x_i$  bedeutet (Abb. 103) und erhält nach der Addition:

$$M_k^r s_1' x_1' + M_1 [2(s_1' + s_2') x_1' + s_2' x_2'] + M_2 [s_2' x_1' + 2(s_2' + s_3') x_2' + \\ + s_3' x_3'] + \dots + M_i [s_i' x_{i-1}' + 2(s_i' + s_{i+1}') x_i' + s_{i+1}' x_{i+1}'] \\ + \dots + M_{n-1} [s_{n-1}' x_{n-2}' + 2(s_{n-1}' + s_n') x_{n-1}'] \\ + M_{k+1}^l s_n' x_{n-1}' - \varrho [(\vartheta_1 - \vartheta_2) x_1' + (\vartheta_2 - \vartheta_3) x_2' + \dots \\ + (\vartheta_{n-1} - \vartheta_n) x_{n-1}'] = 0.$$

Es ist jetzt

$$(\vartheta_1 - \vartheta_2) x_1' + (\vartheta_2 - \vartheta_3) x_2' + \dots + (\vartheta_{n-1} - \vartheta_n) x_{n-1}' \\ = x_1' \vartheta_1 - (x_1' - x_2') \vartheta_2 - \dots - (x_{n-1}' - x_n') \vartheta_n \\ = (l_{k+1} - \lambda_1) \vartheta_1 - \lambda_2 \vartheta_2 - \dots - \lambda_n \vartheta_n \\ = l_{k+1} \vartheta_1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i \vartheta_i.$$

Aus der Winkelgleichung für Stab  $l_{k+1}$  entnehmen wir

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vartheta_i = l_{k+1} \vartheta_{k+1} + \sum_{i=1}^n \frac{S_i s_i}{E F_i} \sin \alpha_i,$$

<sup>1)</sup> Durch den Strich bei  $\bar{\psi}_{n-1}$  und  $\bar{\psi}_n$  soll hervorgehoben werden, daß diese beiden Beiwerte im Vergleich zum allgemeinen Gesetz von  $\psi_i$  noch unvollständig sind. Es fehlt das den Faktor  $x_n$  enthaltende Glied.

somit lautet die obenstehende Gleichung, wenn jetzt für die Beiwerte  $l_{k+1} \bar{\psi}'_0, l_{k+1} \bar{\psi}'_1, \dots, l_{k+1} \psi'_i, \dots, l_{k+1} \psi_n$  geschrieben wird,

$$l_{k+1} [M_{k+1}^r \bar{\psi}'_0 + M_1 \bar{\psi}'_1 + \dots + M_i \psi'_i + \dots + M_{n-1} \psi'_{n-1} + M_{k+1}^l \psi_n] \\ + \varrho l_{k+1} \vartheta_{k+1} - \varrho l_{k+1} \vartheta_1^{k+1} + \varrho \sum_{i=1}^n \left[ \frac{S_i s_i}{E F_i} \sin \alpha_i \right]_{k+1} = 0$$

und mithin

$$\varrho \vartheta_1^{k+1} = M_k^r \bar{\psi}'_0 + M_1 \bar{\psi}'_1 + \dots + M_i \psi'_i + \dots + M_{n-1} \psi'_{n-1} + M_{k+1}^l \psi_n' \\ + \varrho \vartheta_{k+1} + \frac{\varrho}{l_{k+1}} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{S_i s_i}{E F_i} \sin \alpha_i \right]_{k+1}.$$

Wir führen nun  $\varrho \vartheta_n^k$  und  $\varrho \vartheta_1^{k+1}$  in Gleichung c) ein und gewinnen

$$[M_{k-1}^r \psi_0 + M_1 \psi_1 + \dots + M_{n-1} \psi_{n-1} + M_k^l \psi_n]_k \\ + [M_k^r \psi'_0 + M_1 \psi'_1 + \dots + M_{n-1} \psi'_{n-1} + M_{k+1}^l \psi_n']_{k+1} \\ - \frac{6}{l_k} \sum_{i=1}^n S_i s_i \frac{J_c}{F_i} \sin \alpha_i + \frac{6}{l_{k+1}} \sum_{i=1}^n S_i s_i \frac{J_c}{F_i} \sin \alpha_i \\ - 6 E J_c (\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) = 0.$$

Durch die beiden ersten Glieder der Gleichung c) ist  $\bar{\psi}_{n-1}$  und  $\bar{\psi}_n$  vervollständigt worden, weshalb  $\psi_{n-1}$  und  $\psi_n$  geschrieben wurde. Gleiches gilt für  $\bar{\psi}'_0$  und  $\bar{\psi}'_1$ , die durch das 3. und 4. Glied der Gleichung c) ergänzt wurden. Die Klammer- und Summenzeiger  $k$  und  $k+1$  wurden hinzugefügt, um erkennen zu lassen, auf welchen Stab sich die Klammer- oder Summenausdrücke beziehen.

Wir beseitigen noch die Zwischenmomente, indem wir setzen:

für Stab  $l_k$

$$M_i = M_{k-1}^r \frac{x_i'}{l_k} + M_k^l \frac{x_i}{l_k} + H_k y_i + \mathfrak{M}_i^k,$$

für Stab  $l_{k+1}$

$$M_i = M_k^r \frac{x_i'}{l_k} + M_{k+1}^l \frac{x_i}{l_k} + H_{k+1} y_i + \mathfrak{M}_i^{k+1}.$$

1) Die Werte  $\bar{\psi}'_0$  und  $\bar{\psi}'_1$  sind unvollständig, weshalb sie durch einen Strich ausgezeichnet sind.

Hierdurch entsteht:

$$\begin{aligned}
 & M_{k-1}^r \left[ \psi_0 + \psi_1 \frac{x_1'}{l_k} + \dots + \psi_{n-1} \frac{x_{n-1}'}{l_k} \right]_k \\
 & \quad + M_k^l \left[ \psi_1 \frac{x_1}{l_k} + \dots + \psi_{n-1} \frac{x_{n-1}}{l_k} + \psi_n \right]_k \\
 & + M_k^r \left[ \psi_0' + \psi_1' \frac{x_1'}{l_{k+1}} + \dots + \psi_{n-1}' \frac{x_{n-1}'}{l_{k+1}} \right]_{k+1} \\
 & \quad + M_{k+1}^l \left[ \psi_1' \frac{x_1}{l_{k+1}} + \dots + \psi_{n-1}' \frac{x_{n-1}}{l_{k+1}} + \psi_n' \right]_{k+1} \\
 & + H_k [\psi_1 y_1 + \psi_2 y_2 + \dots + \psi_{n-1} y_{n-1}]_k \\
 & + H_{k+1} [\psi_1' y_1 + \psi_2' y_2 + \dots + \psi_{n-1}' y_{n-1}]_{k+1} \\
 & - \frac{6}{l_k} \sum_{i=1}^n S_i s_i \frac{J_c}{F_i} \sin \alpha_i + \frac{6}{l_{k+1}} \sum_{i=1}^n S_i s_i \frac{J_c}{F_i} \sin \alpha_i \\
 - 6 E J_c (\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) = & - [\mathfrak{M}_1 \psi_1 + \mathfrak{M}_2 \psi_2 + \dots + \mathfrak{M}_{n-1} \psi_{n-1}]_k \\
 & - [\mathfrak{M}_1 \psi_1' + \mathfrak{M}_2 \psi_2' + \dots + \mathfrak{M}_{n-1} \psi_{n-1}']_{k+1} \\
 \text{oder} \\
 & M_{k-1}^r \sum_{i=0}^n \psi_i \frac{x_i'}{l_k} + M_k^l \sum_{i=0}^n \psi_i \frac{x_i}{l_k} + M_k^r \sum_{i=0}^n \psi_i' \frac{x_i'}{l_{k+1}} + M_{k+1}^l \sum_{i=0}^n \psi_i' \frac{x_i}{l_{k+1}} \\
 & \quad + H_k \sum_{i=0}^n \psi_i y_i + H_{k+1} \sum_{i=0}^n \psi_i' y_i \\
 & - \frac{6}{l_k} \sum_{i=1}^n S_i s_i \frac{J_c}{F_i} \sin \alpha_i + \frac{6}{l_{k+1}} \sum_{i=1}^n S_i s_i \frac{J_c}{F_i} \sin \alpha_i - 6 E J_c (\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) \\
 & = - \sum_{i=0}^n \mathfrak{M}_i \psi_i - \sum_{i=0}^n \mathfrak{M}_i \psi_i' \dots \dots \dots 38)
 \end{aligned}$$

Gleichung 38) stellt die Viermomentengleichung für Tragwerke mit Stäben allgemeinsten Form dar. Sie zeigt im wesentlichen den gleichen Aufbau wie der in § 4 entwickelte Viermomentensatz, nur treten an Stelle der einfachen Beiwerte der Gleichung 7) Summenausdrücke, in welchen sich die Elastizitätsverhältnisse der gekrümmten Stäbe, ihre Form und Querschnittsgestaltung ausprägen. Nach Ermittlung dieser Beiwerte kann die Rechnung in der gleichen Weise durchgeführt werden wie bei geraden oder schwach gekrümmten Stäben. Allerdings enthält Gleichung 38) noch zwei von den Längskräften  $S$  abhängige Glieder, die in Gleichung 7) fehlen; die Beträge dieser Glieder sind aber stets so klein, daß ihre Vernachlässigung ohne belangreichen Einfluß auf das Ergebnis ist.

Es ist somit gelungen, die Vorteile der Methode des Viermomentensatzes auch auf die Berechnung beliebig geformter Systeme auszuweiten. Die Mehrarbeit, die hier zu leisten ist, besteht nur in der Berechnung der Beiwerte der Viermomentengleichungen. Für die leichte Elimination der Drehwinkel  $\vartheta$  ist es von Bedeutung, daß das Glied  $6 EJ_c(\vartheta_k - \vartheta_{k+1})$  unverändert geblieben ist.

Wir gehen nun dazu über, den Summenausdrücken der Gleichung 38) eine für die tafelmäßige Berechnung geeignete Form zu geben. Es ist ganz allgemein:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \frac{I}{l} [s'_i x_{i-1} + 2(s'_i + s'_{i+1}) x_i + s'_{i+1} x_{i+1}] \\ &= \frac{I}{l} [s'_i (x_{i-1} + 2x_i) + s'_{i+1} (2x_i + x_{i+1})], \\ \psi'_i &= \frac{I}{l} [s'_i (l - x_{i-1}) + 2(s'_i + s'_{i+1})(l - x_i) + s'_{i+1} (l - x_{i+1})] \\ &= 3(s'_i + s'_{i+1}) - \frac{I}{l} [s'_i (x_{i-1} + 2x_i) + s'_{i+1} (2x_i + x_{i+1})] \\ &= 3(s'_i + s'_{i+1}) - \psi_i. \end{aligned}$$

Somit gelten für jedes Stabelement die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \psi_i &= \frac{I}{l} [s'_i (x_{i-1} + 2x_i) + s'_{i+1} (2x_i + x_{i+1})] \\ \psi'_i &= 3(s'_i + s'_{i+1}) - \psi_i. \end{aligned} \right\} \dots 39)$$

In dieser Form lassen sich die  $\psi$ -Werte in Tafelform leicht berechnen und Produkte und Summen daraus bilden.

Man bilde zunächst

$$\sum_{i=0}^n \psi_i \frac{x_i}{l}$$

und findet damit

$$\sum_{i=0}^n \psi_i \frac{x'_i}{l} = \sum_{i=0}^n \psi_i - \sum_{i=0}^n \psi_i \frac{x_i}{l}, \dots \dots \dots 40)$$

ebenso berechne man zuerst

$$\sum_{i=0}^n \psi'_i \frac{x_i}{l}$$

und damit

$$\sum_{i=0}^n \psi'_i \frac{x'_i}{l} = \sum_{i=0}^n \psi'_i - \sum_{i=0}^n \psi'_i \frac{x_i}{l} \dots \dots \dots 41)$$

Zwecks Überprüfung beachte man die Beziehung:

$$\sum_{i=0}^n \psi_i \frac{x_i'}{l} = \sum_{i=0}^n \psi_i' \frac{x_i}{l} \dots \dots \dots 42)$$

Endlich berechne man mittels der  $\psi_i$ - und  $\psi_i'$ -Reihe noch die Summenwerte

$$\sum_{i=0}^n \psi_i y_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^n \psi_i' y_i.$$

Wohl in der Mehrzahl der Fälle wird es möglich sein, die Zwischenpunkte  $1, 2 \dots n - 1$  so zu wählen, daß die Sehnenabschnitte  $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$  eines Stabes untereinander gleich werden. Die Berechnung von  $\psi_i$  und  $\psi_i'$  wird hierdurch wesentlich vereinfacht.

Da jetzt

$$x_i = i \lambda$$

ist, so erhält man

$$\psi_i = \frac{1}{n} [s_i' (3i - 1) + s_{i+1}' (3i + 1)] \dots \dots \dots 39')$$

und somit die Summenbeträge in der Form:

$$\sum_{i=0}^n \psi_i \frac{x_i}{l} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \psi_i i,$$

womit sich auch

$$\sum_{i=0}^n \psi_i \frac{x_i'}{l} = \sum_{i=0}^n \psi_i - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \psi_i i \dots \dots \dots 40')$$

ergibt.

Ähnlich findet man die mit  $\psi_i'$  zusammengesetzten Summen, wenn  $\psi_i' = 3(s_i' + s_{i+1}') - \psi_i$  ist, mit

$$\sum_{i=0}^n \psi_i' \frac{x_i}{l} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \psi_i' i$$

und

$$\sum_{i=0}^n \psi_i' \frac{x_i'}{l} = \sum_{i=0}^n \psi_i' - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \psi_i' i \dots \dots \dots 41')$$

Ist der Stab nach einer symmetrischen Linie geformt und sind die Querschnitte symmetrisch gelegener Punkte gleich, so ist die  $\psi'$ -Linie das Spiegelbild der  $\psi$ -Linie und es gelten die einfachen Zusammenhänge:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^n \psi_i x_i &= \sum_{i=0}^n \psi_i' x_i', \\ \sum_{i=0}^n \psi_i x_i' &= \sum_{i=0}^n \psi_i' x_i = \sum \psi_i - \sum \psi_i x_i; \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 43)$$

somit genügt die Berechnung einer  $\psi$ -Reihe, woraus dann alle Summenwerte gefunden werden können.

Ferner gilt

$$\sum_{i=0}^n \psi_i y_i = \sum_{i=0}^n \psi'_i y_i \dots \dots \dots 44)$$

Für einen unsymmetrischen Stab sind somit drei mit  $x$  und zwei mit  $y$  gebildete Summen zu ermitteln. Für einen symmetrischen Stab sind zwei mit  $x$  zusammengesetzte Summen und eine mit  $y$  gebildete Summe zu berechnen.

**Das Lastglied N.**

Das Lastglied hat die Form

$$N = - \sum_{i=0}^k \mathfrak{M}_i \psi_i - \sum_{i=0}^{k+1} \mathfrak{M}_i \psi'_i \dots \dots \dots 45)$$

Es besteht aus zwei Teilen, die von den Belastungen der Stäbe  $l_k$  und  $l_{k+1}$  herrühren. Kommen nur unverschiebliche Lasten in Frage, so ermittelt man rechnerisch oder zeichnerisch die Ordinaten der  $\mathfrak{M}_i$ -Linie und bestimmt tabellarisch die Produkte und Summenbeträge nach Gleichung 45). Über die Form der Lastglieder bei der Darstellung von Einflußlinien wird weiter unten noch gesprochen werden.

**§ 16. Berechnung der Dehnungen  $\Delta l$  in den Winkelgleichungen; Einflußlinien; Beispiel.**

Da die Viermomentengleichungen nicht zur Ermittlung sämtlicher Unbekannten ausreichen, so sind, wie bei Systemen mit geraden Stäben, zwei Winkelgleichungen für jeden Einzelrahmen anzusetzen<sup>1)</sup>. Bei der Aufstellung der Winkelgleichungen kann man sich die krummen oder gebrochenen Stäbe durch ihre Sehnen ersetzt denken. Es erscheint nur notwendig, die in den Winkelgleichungen auftretenden Dehnungen  $\Delta l$  für den besonderen Fall stark gekrümmter Stäbe darzustellen.

Wir gehen hierbei von der zweiten Winkelgleichung für das Stabeck aus, die eine wurde bereits auf S. 189 verwendet; sie lautet:

$$\sum_{i=1}^n \Delta s_i \cos \alpha_i - \Delta l + \sum_{i=1}^n \vartheta_i s_i \sin \alpha_i = 0$$

oder

$$\sum_{i=1}^n \Delta s_i \cos \alpha_i - \Delta l + \sum_{i=1}^n \vartheta_i (y_i - y_{i-1}) = 0.$$

<sup>1)</sup> Diese Winkelgleichungen sind nicht mit den sich auf einen einzelnen Stab beziehenden Winkelgleichungen auf S. 189 zu verwechseln.

Führt man für  $\Delta s_i$  den ausführlichen Betrag ein, wobei  $s_i \cos \alpha_i = \lambda_i$  gesetzt wird, so erhält man für  $\Delta l$  die Gleichung

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{S_i \lambda_i}{EF_i} + \alpha_t t l + \sum_{i=1}^n \vartheta_i (y_i - y_{i-1}).$$

Hierin bedeutet  $S_i$  die Längskraft des  $i$ -ten Stabteiles,  $F_i$  sein Querschnitt.  $\alpha_t t l$  ist die Längenänderung der Stabsehne bei gleichmäßiger Erwärmung des Stabes um  $t^0$ .

Aus den Gleichungen a) S. 188 läßt sich nun die Summe  $\sum \vartheta_i (y_i - y_{i-1})$  berechnen. Man multipliziert zu diesem Zwecke die Gleichungen der Reihe nach mit den Stabordinaten  $y_1, y_2 \dots y_{n-1}$  und addiert sodann. Dies liefert:

$$\begin{aligned} M^r s'_1 y_1 + M_1 [2(s'_1 + s'_2) y_1 + s'_2 y_2] + M_2 [s'_2 y_1 + 2(s'_2 + s'_3) y_2 + s'_3 y_3] \\ + \dots + M_i [s'_i y_{i-1} + 2(s'_i + s'_{i+1}) y_i + s'_{i+1} y_{i+1}] + \dots \\ + M_{n-1} [s'_{n-1} y_{n-2} + 2(s'_{n-1} + s'_n) y_{n-1}] + M^l s'_n y_{n-1} \\ - 6EJ_c [(\vartheta_1 - \vartheta_2) y_1 + (\vartheta_2 - \vartheta_3) y_2 + \dots + (\vartheta_{n-1} - \vartheta_n) y_{n-1}] = 0. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (\vartheta_1 - \vartheta_2) y_1 + (\vartheta_2 - \vartheta_3) y_2 + \dots + (\vartheta_{n-1} - \vartheta_n) y_{n-1} = \\ (y_1 - y_0) \vartheta_1 + (y_2 - y_1) \vartheta_2 + \dots + (y_{n-1} - y_n) \vartheta_n = \sum_{i=1}^n \vartheta_i (y_i - y_{i-1}). \end{aligned}$$

Damit ist die fragliche Summe in der Gleichung für  $\Delta l$  gefunden. Sie erscheint durch die Anschlußmomente  $M^r$  und  $M^l$  und durch die Zwischenmomente ausgedrückt. Sondert man genau wie oben die Zwischenmomente aus, indem man die statischen Beziehungen von S. 191 unten benutzt, und führt man für die in eckigen Klammern stehenden Beiwerte der vorstehenden Gleichung die Bezeichnung  $\chi_i$  ein, so erhält man die Beziehung

$$6EJ_c \sum_{i=1}^n \vartheta_i (y_i - y_{i-1}) = M^r \sum_{i=0}^n \chi_i \frac{x'_i}{l} + M^l \sum_{i=0}^n \chi_i \frac{x_i}{l} + H \sum_{i=0}^n \chi_i y_i + \sum_{i=0}^n \mathfrak{M}_i \chi_i.$$

Es folgt somit für die Dehnung  $\Delta l$  der Ausdruck

$$\begin{aligned} \Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{S_i \lambda_i}{EF_i} + \alpha_t t l \\ + \frac{1}{6EJ_c} \left[ M^r \sum_{i=0}^n \chi_i \frac{x'_i}{l} + M^l \sum_{i=0}^n \chi_i \frac{x_i}{l} + H \sum_{i=0}^n \chi_i y_i + \sum_{i=0}^n \mathfrak{M}_i \chi_i \right]. \quad 46) \end{aligned}$$

Gleichung 46) weist den gleichen Bau auf wie Formel 17). Das von den Stabkräften  $S_i$  herrührende Summenglied kann, wenn nicht vernachlässigbar, mit einem Mittelwert von  $S_i/F_i$  berechnet werden.

Für die Berechnung der Größen  $\chi_i$  und der daraus abgeleiteten Summen kommen folgende Formeln in Betracht:

$$\chi_i = s'_i (y_{i-1} + 2 y_i) + s'_{i+1} (2 y_i + y_{i+1}) \dots \dots \dots 47)$$

und die Summenbeziehungen

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^n \chi_i \frac{x}{l} &= \sum_{i=0}^n \psi_i y_i, \\ \sum_{i=0}^n \chi_i \frac{x'}{l} &= \sum_{i=0}^n \psi'_i y_i. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 48)$$

Die Summenwerte  $\sum \psi_i y_i$  und  $\sum \psi'_i y_i$  sind bereits von der Ermittlung der Beiwerte der Viermomentengleichungen her bekannt.

Bei symmetrischen Stäben ist

$$\sum_{i=0}^n \chi_i \frac{x}{l} = \sum_{i=0}^n \chi_i \frac{x'}{l} = \sum_{i=0}^n \psi_i y_i \dots \dots \dots 49$$

Es sind also mit der  $\chi_i$ -Reihe nur die Summen

$$\sum_{i=0}^n \chi_i y_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^n \mathfrak{M}_i \chi_i$$

neu zu bestimmen.

**Die Einflußlinien der Überzähligen.**

Die Ermittlung der Einflußlinien erfolgt nach der Auflösung der Bestimmungsgleichungen in der Weise, daß man sich der Reihe nach die einzelnen Felder mit der wandernden Last  $P = \mathbf{r}$  belastet und die diesen Belastungen entsprechenden Beträge der Lastglieder in die Lösungen einsetzt. Alle Felder bis auf eines sind hierbei unbelastet, weshalb in den Viermomentengleichungen sämtliche Lastglieder bis auf zwei, in den Gleichungen für  $\Delta l$  sämtliche Lastglieder bis auf eines Null sind. Die Gleichung eines Einflußlinienzweiges erscheint daher als Funktion von bloß 3 Lastgliedern. Bezeichnen wir diese Lastglieder, ähnlich wie dies in § 6 geschehen ist, mit  $\widehat{F}_1$ ,  $\widehat{F}_2$  und  $\widehat{G}$ , so gilt

$$\begin{aligned} \widehat{F}_1 &= - \sum_{i=0}^n \mathfrak{M}_i \psi'_i, \\ \widehat{F}_2 &= - \sum_{i=0}^n \mathfrak{M}_i \psi_i, \\ \widehat{G} &= \sum_{i=0}^n \mathfrak{M}_i \chi_i. \end{aligned}$$

Da  $\mathfrak{M}_i$  eine Funktion der Lastabzisse  $a$  ist, so erscheinen auch  $\widehat{F}_1$ ,  $\widehat{F}_2$  und  $\widehat{G}$  als Funktionen der Lastabzissen  $a$ . Während aber bei geraden oder schwach gekrümmten Stäben unveränderlichen Querschnitts die Funktionen  $F_1$  und  $F_2$  für alle Einflußlinien die gleiche Gestalt haben (Stammfunktionen), wechseln in unserem Falle die Funktionen  $\widehat{F}_1$  und  $\widehat{F}_2$ , je nach der verschiedenen Gestaltung der miteinander verknüpften Stäbe, von Zweig zu Zweig ihre Form. Es sind daher für jeden Stab, vor Ermittlung der Einflußlinien, die Funktionen  $\widehat{F}_1$ ,  $\widehat{F}_2$  und  $\widehat{G}$ , die durch die Linienführung und Querschnitts-

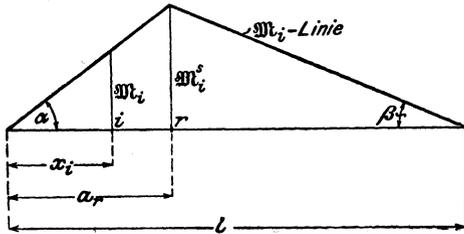


Abb. 104.

gestaltung des Stabes gekennzeichnet sind, zu berechnen.

Für eine im  $r$ -ten Punkte im Abstände  $a_r$  vom linken Stabende stehende Einzellast  $P=1$  ist die Momentenlinie ein Dreieck mit der Spitze über  $r$  (Abb. 104).

Die Scheitelordinate der  $\mathfrak{M}_i$ -Linie beträgt

$$\mathfrak{M}_i^s = \left(1 - \frac{a_r}{l}\right) a_r$$

und die Tangenten der Neigungswinkel der beiden Dreieckseiten ihrem absoluten Werte nach

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 - \frac{a_r}{l}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{a_r}{l}.$$

Somit finden wir

$$\left. \begin{aligned} \widehat{F}_1 &= - \sum_{i=0}^n \mathfrak{M}_i \psi_i' = - \left[ (l - a_r) \sum_{i=0}^r \psi_i' \frac{x_i}{l} + a_r \sum_{i=r+1}^n \psi_i' \frac{x_i'}{l} \right], \\ \widehat{F}_2 &= - \sum_{i=0}^n \mathfrak{M}_i \psi_i = - \left[ (l - a_r) \sum_{i=0}^r \psi_i \frac{x_i}{l} + a_r \sum_{i=r+1}^n \psi_i \frac{x_i'}{l} \right], \\ \widehat{G} &= \sum_{i=0}^n \mathfrak{M}_i \chi_i = (l - a_r) \sum_{i=0}^r \chi_i \frac{x_i}{l} + a_r \sum_{i=r+1}^n \chi_i \frac{x_i'}{l}. \end{aligned} \right\} \dots 50)$$

Die Produkte  $\psi_i' \frac{x_i}{l}$  usw. sind von der Berechnung der Beiwerte der Momentengleichungen bzw. Dehnungsgleichungen her bekannt. Man bildet damit für die aufeinanderfolgenden Werte von  $r=1, 2 \dots$  die Teilsummen, entsprechend den Gleichungen 50), dann deren Produkte mit

den zugehörigen Lastabständen  $a_r$  bzw.  $(l - a_r)$  und gewinnt so die aufeinanderfolgenden Ordinaten der  $\widehat{F}_1$ ,  $\widehat{F}_2$ - und  $\widehat{G}$ -Linien des ins Auge gefaßten Stabes.

Die Einflußlinien der Überzähligen selbst stellen sich in der Form

$$X = m \widehat{F}_1 + n \widehat{F}_2 + p \widehat{G}$$

dar, wo  $m$ ,  $n$  und  $p$  Zahlenwerte sind, die sich aus der allgemeinen Lösung der Bestimmungsgleichungen ergeben.

Bei symmetrisch gebauten Stäben vereinfacht sich die Berechnung insofern, als die  $\psi'$ -Linie das Spiegelbild der  $\psi$ -Linie wird, womit auch die  $\widehat{F}_2$ -Linie als Spiegelbild der  $\widehat{F}_1$ -Linie erscheint. Die  $\widehat{G}$ -Linie wird eine symmetrische Linie.

An einem Zahlenbeispiel soll die praktische Anwendung der aufgestellten Gleichungen gezeigt werden.

### Zahlenbeispiel.

Die in Abb. 105 zur Darstellung gebrachte gewölbte Brücke mit Mittelpfeiler besitzt zwei gleiche Öffnungen von je 24 m Spannweite und 5 m Pfeilhöhe. Die Kämpferstärke beträgt 1,30 m, die Scheitelstärke 0,90 m. Der 10 m hohe Mittelpfeiler ist oben 2,00 m, unten 3,50 m breit. Die Achsenlinie der Gewölbe ist nach einer Parabel gekrümmt.

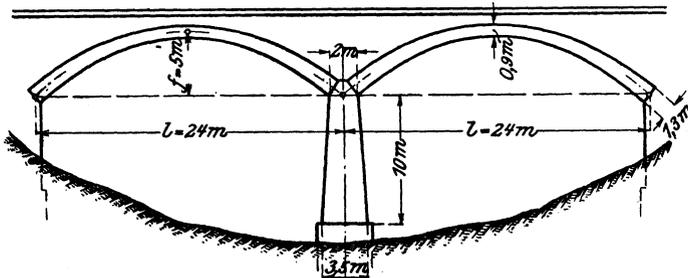


Abb. 105.

Die zunächst zu lösende Aufgabe ist die Berechnung der Beiwerte der Viermomentengleichungen und der Gleichungen für die Dehnungen  $\Delta l$ . Den Bogen teilen wir für die Untersuchung in acht Teile mit je gleicher Horizontalprojektion, den Pfeiler in drei gleich lange Teile. Die der tafelmäßigen Berechnung der Beiwerte zugrunde gelegten Maße sind der Abb. 106 zu entnehmen. Als Trägheitsmoment eines Stababschnittes wurde das Trägheitsmoment des jeweiligen Mittelquerschnittes gewählt. Als  $J_0$  wurde das mittlere Trägheits-

moment des ersten Bogenabschnittes in die Rechnung eingeführt und hiermit die Verhältnisse  $\frac{J_c}{J_i}$  in den nachfolgenden Tafeln festgelegt.

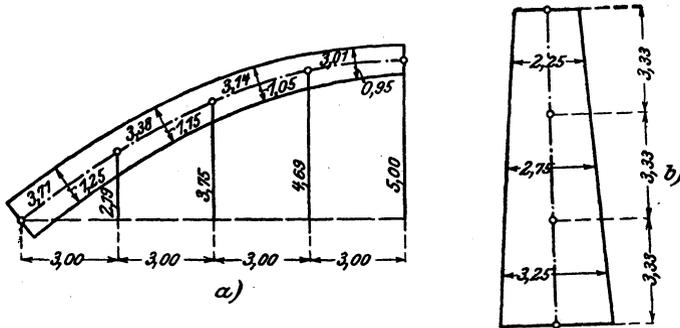


Abb. 106.

Die Berechnung der Beiwerte der Viermomentengleichungen für einen Bogen zeigt Tafel 12, für den Pfeiler Tafel 13. Tafel 14 weist die Ermittlung der Beiwerte der Dehnungsgleichung für den Bogen auf. Da der Bogen symmetrisch ist, so genügt die Ermittlung von  $\sum \psi_i$ ,  $\sum \psi_i i$  und  $\sum \psi_i y_i$ , um alle Beiwerte der Viermomentengleichungen berechnen zu können. Für die Darstellung der Längenänderung  $\Delta l$  erweist sich die Berechnung einer Summe, d. i.  $\sum \chi_i y_i$ , ausreichend. Der gegen oben verjüngte Pfeiler verlangt dagegen die Ausrechnung von drei Summengrößen,  $\sum \psi_i$ ,  $\sum \psi_i i$  und  $\sum \psi_i' i$ . Da er geradachsigt ist, sind die mit  $y_i$  und  $\chi_i$  zusammengesetzten Beiwerte Null.

Tafel 12.

Berechnung der Beiwerte der Viermomentengleichungen für den Bogen.

$$\psi_i = \frac{1}{n} [\vartheta_i' (3i - 1) + \vartheta_{i+1}' (3i + 1)].$$

$i$	$\vartheta_i$	$\frac{J_c}{J_i}$	$\vartheta_i'$	$3i - 1$	$3i + 1$	$\psi_i$	$\psi_i i$	$y_i$	$\psi_i y_i$
0	—	—	—	—	1	0,46	0	0	0
1	3,71	1,00	3,71	2	4	3,09	3,09	2,19	6,67
2	3,38	1,28	4,33	5	7	7,35	14,70	3,75	27,55
3	3,14	1,69	5,31	8	10	13,92	41,76	4,69	65,28
4	3,02	2,28	6,89	11	13	20,67	82,68	5,00	103,35
5	3,02	2,28	6,89	14	16	22,68	113,40	4,69	106,37
6	3,14	1,69	5,31	17	19	21,57	129,42	3,75	80,89
7	3,38	1,28	4,33	20	22	21,03	147,21	2,19	46,05
8	3,71	1,00	3,71	23	—	10,67	85,36	0	0
$\Sigma$						121,44	617,62		436,16

$$\begin{aligned} \text{Somit ist } \sum \psi_i \frac{x}{l} &= \frac{617,62}{8} = 77,20, \\ \sum \psi_i \frac{x'}{l} &= 121,44 - 77,20 = 44,24, \\ \sum \psi_i' \frac{x}{l} &= \sum \psi_i \frac{x'}{l} = 44,24, \\ \sum \psi_i' \frac{x'}{l} &= \sum \psi_i \frac{x}{l} = 77,20, \\ \sum \psi_i y_i &= \sum \psi_i' y_i = 436,2. \end{aligned}$$

Tafel 13.

Berechnung der Beiwerte der Viermomentengleichungen für den Pfeiler.

$$\psi_i = \frac{1}{n} [s_i' (3i - 1) + s_{i+1}' (3i + 1)], \quad \psi_i' = 3(s_i' + s_{i+1}') - \psi_i,$$

$i$	$s_i$	$\frac{J_c}{J_i}$	$s_i'$	$3i-1$	$3i+1$	$\psi_i$	$\psi_i i$	$3(s_i' + s_{i+1}')$	$\psi_i'$	$\psi_i' i$
0	—	—	—	—	1	0,19	0	1,71	1,52	0
1	3,33	0,1714	0,571	2	4	0,80	0,80	2,65	1,85	1,85
2	3,33	0,0939	0,313	5	7	0,97	1,94	1,51	0,54	1,08
3	3,33	0,0569	0,190	8	—	0,51	1,53	0,57	0,06	0,18
$\Sigma$						2,47	4,27		3,97	3,11

$$\begin{aligned} \text{somit } \sum \psi_i \frac{x}{l} &= \frac{4,27}{3} = 1,42, \\ \sum \psi_i' \frac{x}{l} &= \sum \psi_i \frac{x'}{l} = \frac{3,11}{3} = 1,04, \\ \sum \psi_i' \frac{x'}{l} &= 3,97 - 1,04 = 2,93. \end{aligned}$$

Zwecks Überprüfung bestimmen wir noch  $\sum \psi_i' \frac{x}{l}$  nach der Formel

$$\sum \psi_i' \frac{x}{l} = \sum \psi_i - \sum \psi_i \frac{x}{l} = 2,47 - 1,42 = 1,05,$$

in guter Übereinstimmung mit dem oben gefundenen Wert.

Die Berechnung der Tafel 14 liefert:

$$\begin{aligned} \sum \chi_i \frac{x_i}{l} &= \sum \chi_i \frac{x_i'}{l} = \sum \psi_i y_i = 436,16^1), \\ \sum \chi_i y_i &= 3621,03. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Aus Tafel 13 entnommen.

Tafel 14.

Berechnung der Beiwerte für die Längenänderung  $\Delta l$  des Bogens.

$$\chi_i = s'_i (y_{i-1} + 2 y_i) + s'_{i+1} (2 y_i + y_{i+1}).$$

$i$	$s'_i$	$y_i$	$y_{i-1} + 2 y_i$	$2 y_i + y_{i+1}$	$\chi_i$	$\chi_i y_i$
0	—	0	—	2,19	8,12	0
1	3,71	2,19	4,38	8,13	51,45	112,68
2	4,33	3,75	9,69	12,19	106,69	400,09
3	5,31	4,69	13,13	14,38	168,80	791,67
4	6,89	5,00	14,69	14,69	202,43	1012,15
5	6,89	4,69	14,38	13,13	168,80	791,67
6	5,31	3,75	12,19	9,69	106,69	400,09
7	4,33	2,19	8,13	4,38	51,45	112,68
8	3,71	0	2,19	—	8,12	0
$\Sigma$						3621,03

In Abb. 107 ist das 6 fach statisch unbestimmte Tragwerk mit den Ergänzungsstäben dargestellt. Die Bezeichnungen der Momente und Sehnkräfte sind dieser Abbildung zu entnehmen. Da vier ausgezeichnete Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  vorhanden sind, wovon Punkt  $C$  zwei Momentengleichungen liefert, so können insgesamt 5 Viermomentengleichungen aufgestellt werden. Wir verfügen ferner über 4 Winkelgleichungen, zusammen also über 9 Gleichungen, die zur Berechnung der 6 Überzähligen und 3 Drehwinkel genügen.

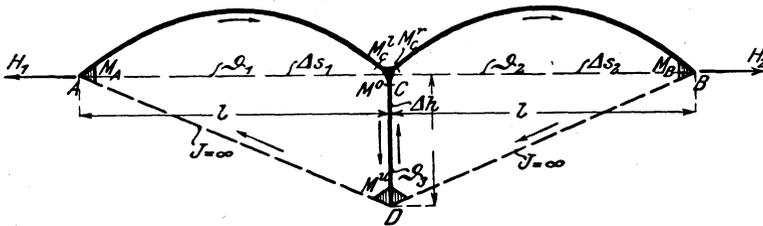


Abb. 107.

Bei der Aufschreibung der Viermomentengleichungen muß die Umfahrung der einzelnen Grundsysteme im Sinne der Uhrzeigerbewegung erfolgen, weil sämtliche Gleichungen unter der Voraussetzung abgeleitet wurden, daß die Abszissen  $x$  von links nach rechts gezählt werden und die Reihenfolge der Momente mit ihren Beiwerten in den Momentengleichungen durch diesen Fortschrittssinn festgelegt ist.

Wir beginnen bei Punkt  $A$  und schreiten über  $C$  nach  $D$  im ersten Rahmen und von  $D$  beginnend über  $C$  nach  $B$  im zweiten Rahmen fort. Hierbei wird der Stab  $CD$  zweimal durchschritten. Außer dem Vorzeichenwechsel der Anschlußmomente des Stabes  $CD$  ist wegen

der Unsymmetrie dieses Stabes noch zu beachten, daß beim zweiten Durchschreiten für  $x, x'$  und für  $\psi, \psi'$  zu setzen ist, da beim ersten Male die Abzissen  $x$  von oben nach unten, das zweitemal von unten nach oben zu zählen sind.

Die nach Gleichung 38) aufgestellten Viermomentengleichungen lauten daher, wenn die Lastglieder zunächst mit  $a_1, a_2 \dots$  bezeichnet werden:

$$\left. \begin{aligned} 77,20 M_A + 44,24 M_C^l + 436,2 H_1 + \varrho \vartheta_1 &= a_1, \\ 44,24 M_A + 77,20 M_C^l + 2,93 M^o + 1,04 M^u + 436,2 H_1 \\ &\quad - \varrho (\vartheta_1 - \vartheta_3) = a_2, \\ 1,04 M^o + 1,42 M^u - \varrho \vartheta_3 &= 0, \\ -1,04 M^u - 2,93 M^o + 77,20 M_C^r + 44,24 M_B + 436,2 H_2 \\ &\quad - \varrho (\vartheta_3 - \vartheta_2) = a_3, \\ 44,24 M_C^r + 77,20 M_B + 436,2 H_2 - \varrho \vartheta_2 &= a_4. \end{aligned} \right\} \dots a)$$

Ferner gelten die Winkelgleichungen:

linkes Feld	rechtes Feld
$\Delta s_1 - \vartheta_3 h = 0,$	$\Delta s_2 + \vartheta_3 h = 0,$
$-\Delta h - \vartheta_1 l = 0,$	$\Delta h + \vartheta_2 l = 0.$

Wir vernachlässigen den Einfluß der Normalkräfte, setzen daher  $\Delta h$ , die Zusammendrückung des Pfeilers, Null. Aus den Winkelgleichungen folgt dann:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 = \vartheta_2 = 0, \quad \vartheta_3 = \frac{1}{2h} (\Delta s_1 - \Delta s_2) \\ \text{sowie die Gleichung} \quad \Delta s_1 + \Delta s_2 = 0. \end{aligned} \right\} \dots b)$$

Für die Beträge  $\Delta s_1$  und  $\Delta s_2$  finden wir nach Formel 46) unter Benutzung der Summenwerte aus den Tafeln 12 und 14

$$\left. \begin{aligned} \varrho \Delta s_1 &= 436,2 (M_A + M_C^l) + 3621,0 H_1 + a_5, \\ \varrho \Delta s_2 &= 436,2 (M_C^r + M_B) + 3621,0 H_2 + a_6, \end{aligned} \right\} \dots c)$$

wobei die Belastungsglieder mit  $a_5$  und  $a_6$  bezeichnet wurden.

Da die Gleichungen a) 6 Momente und 2 Sehnenkräfte enthalten, so beseitigen wir die Momente  $M^o$  und  $M^u$  des Pfeilers durch die statischen Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} M^o &= M_C^l - M_C^r, \\ M^u &= M_C^l - M_C^r - (H_1 - H_2) h. \end{aligned} \right\} \dots d)$$

Vor Einführung dieser Zusammenhänge in die Gleichungen a) addieren und subtrahieren wir je die erste und letzte, zweite und vorletzte Gleichung und gewinnen so folgende zwei Systeme:

Durch Addition:

$$\begin{aligned} 77,20(M_A + M_B) + 44,24(M_C^l + M_C^r) + 436,2(H_1 + H_2) &= a_1 + a_4, \\ 44,24(M_A + M_B) + 77,20(M_C^l + M_C^r) + 436,2(H_1 + H_2) &= a_2 + a_3, \\ \Delta s_1 + \Delta s_2 &= 0, \end{aligned}$$

wenn wir zu dieser Gruppe noch die letzte der Gleichungen b) hinzufügen.

Durch Subtraktion:

$$\begin{aligned} 77,20(M_A - M_B) + 44,24(M_C^l - M_C^r) + 436,2(H_1 - H_2) &= a_1 - a_4, \\ 44,24(M_A - M_B) + 77,20(M_C^l - M_C^r) + 5,86 M^o + 2,08 M^u \\ + 436,2(H_1 - H_2) + 2 \varrho \vartheta_3 &= a_2 - a_3, \\ 1,04 M^o + 1,42 M^u - \varrho \vartheta_3 &= 0. \end{aligned}$$

Nach Einführung der Verknüpfungen b), c) und d) entstehen die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} 77,20(M_A + M_B) + 44,24(M_C^l + M_C^r) + 436,2(H_1 + H_2) &= a_1 + a_4, \\ 44,24(M_A + M_B) + 77,20(M_C^l + M_C^r) + 436,2(H_1 + H_2) &= a_2 + a_3, \\ 436,2(M_A + M_B) + 436,2(M_C^l + M_C^r) + 3621,0(H_1 + H_2) \\ &= -(a_5 + a_6). \end{aligned} \right\} e)$$

$$\left. \begin{aligned} 77,20(M_A - M_B) + 44,24(M_C^l - M_C^r) + 436,2(H_1 - H_2) &= a_1 - a_4, \\ 87,86(M_A - M_B) + 128,76(M_C^l - M_C^r) + 777,5(H_1 - H_2) \\ &= a_2 - a_3 - \frac{1}{10}(a_5 - a_6), \\ 21,81(M_A - M_B) + 19,36(M_C^l - M_C^r) + 195,25(H_1 - H_2) \\ &= -\frac{1}{20}(a_5 - a_6). \end{aligned} \right\} f)$$

Jedes der beiden Gleichungssysteme enthält bloß drei Unbekannte, falls man die in den Klammern stehenden Summen und Differenzen als solche auffaßt.

Die Auflösung von e) liefert:

$$\begin{aligned} M_A + M_B &= 0,045756(a_1 + a_4) + 0,015416(a_2 + a_3) \\ &\quad + 0,007369(a_5 + a_6), \\ M_C^l + M_C^r &= 0,015416(a_1 + a_4) + 0,045756(a_2 + a_3) \\ &\quad + 0,007369(a_5 + a_6), \\ H_1 + H_2 &= -0,007369(a_1 + a_4) - 0,007369(a_2 + a_3) \\ &\quad - 0,002052(a_5 + a_6), \end{aligned}$$

und von f):

$$\begin{aligned} M_A - M_B &= 0,035144(a_1 - a_4) - 0,000685(a_2 - a_3) \\ &\quad + 0,003858(a_5 - a_6), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_C^l - M_C^r &= -0,000685(a_1 - a_4) + 0,019376(a_2 - a_3) \\
 &\quad + 0,001845(a_5 - a_6), \\
 H_1 - H_2 &= -0,003858(a_1 - a_4) - 0,001845(a_2 - a_3) \\
 &\quad - 0,000870(a_5 - a_6).
 \end{aligned}$$

Daraus folgen die Beträge der Überzähligen mit:

$$\left. \begin{aligned}
 M_A &= 0,040450 a_1 + 0,007366 a_2 + 0,008051 a_3 + 0,005306 a_4 \\
 &\quad + 0,005614 a_5 + 0,001756 a_6, \\
 M &= 0,005306 a_1 + 0,008051 a_2 + 0,007366 a_3 + 0,040450 a_4 \\
 &\quad + 0,001756 a_5 + 0,005614 a_6, \\
 M_C^l &= 0,007366 a_1 + 0,032566 a_2 + 0,013190 a_3 + 0,008051 a_4 \\
 &\quad + 0,004607 a_5 + 0,002762 a_6, \\
 M_C^r &= 0,008051 a_1 + 0,013190 a_2 + 0,032566 a_3 + 0,007366 a_4 \\
 &\quad + 0,002762 a_5 + 0,004607 a_6, \\
 H_1 &= -0,005614 a_1 - 0,004607 a_2 - 0,002762 a_3 - 0,001756 a_4 \\
 &\quad - 0,001461 a_5 - 0,000591 a_6, \\
 H_2 &= -0,001756 a_1 - 0,002762 a_2 - 0,004607 a_3 - 0,005614 a_4 \\
 &\quad - 0,000591 a_5 - 0,001461 a_6.
 \end{aligned} \right\} g)$$

Mit der Feststellung der Gleichungen g) ist die Aufgabe der Ermittlung der statisch überzähligen Größen im untersuchten Tragwerke gelöst. Es bleibt nur noch die Bestimmung der  $a$ -Größen auf Grund der angenommenen Belastung übrig, womit dann durch die Formeln g) die Zahlenwerte der Unbekannten gegeben sind. Wir wollen diese Formeln benutzen, um die Einflußlinien der Überzähligen darzustellen.

### Darstellung der Einflußlinien.

Den beiden Öffnungen entsprechend, besitzen die Einflußlinien zwei Zweige. Die zugehörigen Beträge der Belastungsgrößen  $a$  unserer Lösungen sind:

Linker Zweig der Einflußlinie

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 &= \widehat{F}_1, & a_3 &= 0, & a_5 &= \widehat{G}, \\
 a_2 &= \widehat{F}_2, & a_4 &= 0, & a_6 &= 0.
 \end{aligned} \right\}$$

Rechter Zweig der Einflußlinie

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 &= 0, & a_3 &= \widehat{F}_1, & a_5 &= 0, \\
 a_2 &= 0, & a_4 &= \widehat{F}_2, & a_6 &= \widehat{G}.
 \end{aligned} \right\} \dots h)$$

Die  $\widehat{F}_1$ - und  $\widehat{F}_2$ -Linien sind einander spiegelbildlich gleich, weshalb

die Ermittlung der  $\hat{F}_2$ -Linie und der  $\hat{G}$ -Linie genügt, um alle Einflußlinien darstellen zu können. Die zahlenmäßige Berechnung zeigen die Tafeln 15 und 16.

Tafel 15.  
Ermittlung der  $\hat{F}_2$ -Linie.

$$F_2 = -\frac{1}{8} \left[ (l - a_r) \sum_{i=0}^r \psi_i i + a_r \sum_{i=r+1}^n \psi_i (8 - i) \right]^1.$$

$i$	$l - a_r$	$\psi_i i^2$	$\sum_0^r \psi_i i$	$\sum_0^r \psi_i i^2$ $(l - a_r)$	$a_r$	$\psi_i (8 - i)$	$\sum_{i=r+1}^n \psi_i (8 - i)$	$\sum_{i=r+1}^n \psi_i (8 - i)^2$	$-8 \hat{F}_2$	$\hat{F}_2$
0	24	0	0	0	0	3,68	350,22	0	0	0
1	21	3,09	3,09	64,89	3	21,63	328,59	985,77	1050,66	-131,33
2	18	14,70	17,79	320,22	6	44,10	284,49	1706,94	2027,16	-253,39
3	15	41,76	59,55	893,25	9	69,60	214,89	1934,01	2827,26	-353,41
4	12	82,68	142,23	1706,76	12	82,68	132,21	1586,52	3293,28	-411,66
5	9	113,40	255,63	2300,67	15	68,04	64,17	962,55	3263,22	-407,90
6	6	129,42	385,05	2310,30	18	43,14	21,03	378,54	2688,84	-336,10
7	3	147,21	532,26	1590,78	21	21,03	0	0	1596,78	-199,60
8	0	85,36	617,62	0	24	0	-	-	0	0

1) Es ist nämlich in unserem Falle:

$$\psi_i \frac{x}{l} = \frac{1}{8} \psi_i i \quad \text{und} \quad \psi_i \frac{x'}{l} = \frac{1}{8} \psi_i (8 - i).$$

2) Aus der Tafel 12 entnommen.

Tafel 16.  
Ermittlung der  $\hat{G}$ -Linie.

$$\hat{G} = \frac{1}{8} \left[ (l - a_r) \sum_{i=0}^r \chi_i i + a_r \sum_{i=r+1}^n \chi_i (8 - i) \right].$$

$i$	$\chi_i^1$	$\chi_i i$	$\sum_{i=0}^n \chi_i i$	$l - a_r$	$\sum_{i=0}^r \chi_i i^2$ $(l - a_r)$	$\chi_i (8 - i)$	$\sum_{i=r+1}^n \chi_i (8 - i)$	$a_r$	$\sum_{i=r+1}^n \chi_i (8 - i)^2$	$8 \hat{G}$	$\hat{G}$
0	8,12	0	0	24	0	64,96	3425,24	0	0	0	0
1	51,45	51,45	51,45	21	1080,45	360,15	3065,09	3	9195,27	10275,72	1284,5
2	106,69	213,38	264,83	18	4766,94	640,14	2424,95	6	14549,70	19316,64	2414,6
3	168,80	506,40	771,23	15	11568,45	844,00	1580,95	9	14228,55	25797,00	3224,6
4	202,43	809,72	1580,95	12	18971,40	809,72	771,23	12	9254,76	28226,16	3528,3
5	168,80	844,00	2424,95	9	21824,55	506,40	264,83	15	3972,45	25797,00	3224,6
6	106,69	640,14	3065,09	6	18390,54	213,38	51,45	18	926,10	19316,64	2414,6
7	51,45	360,15	3425,24	3	10275,72	51,45	0	21	0	10275,72	1284,5
8	8,12	69,96	3495,20	0	0	0	-	24	-	0	0

1) Der Tafel 14 entnommen.

Die Gleichungen der Einflußlinienzweige der drei Überzähligen  $M_A$ ,  $M_C^I$  und  $H_1$  lauten mithin auf Grund der Formeln g) und h):

linke Zweige

$$\left. \begin{aligned} M_A &= 0,040450 \widehat{F}_1 + 0,007366 \widehat{F}_2 + 0,005614 \widehat{G}, \\ M_C^I &= 0,007366 \widehat{F}_1 + 0,032566 \widehat{F}_2 + 0,004607 \widehat{G}, \\ H_1 &= -0,005614 \widehat{F}_1 - 0,004607 \widehat{F}_2 - 0,001461 \widehat{G}; \end{aligned} \right\} \dots i)$$

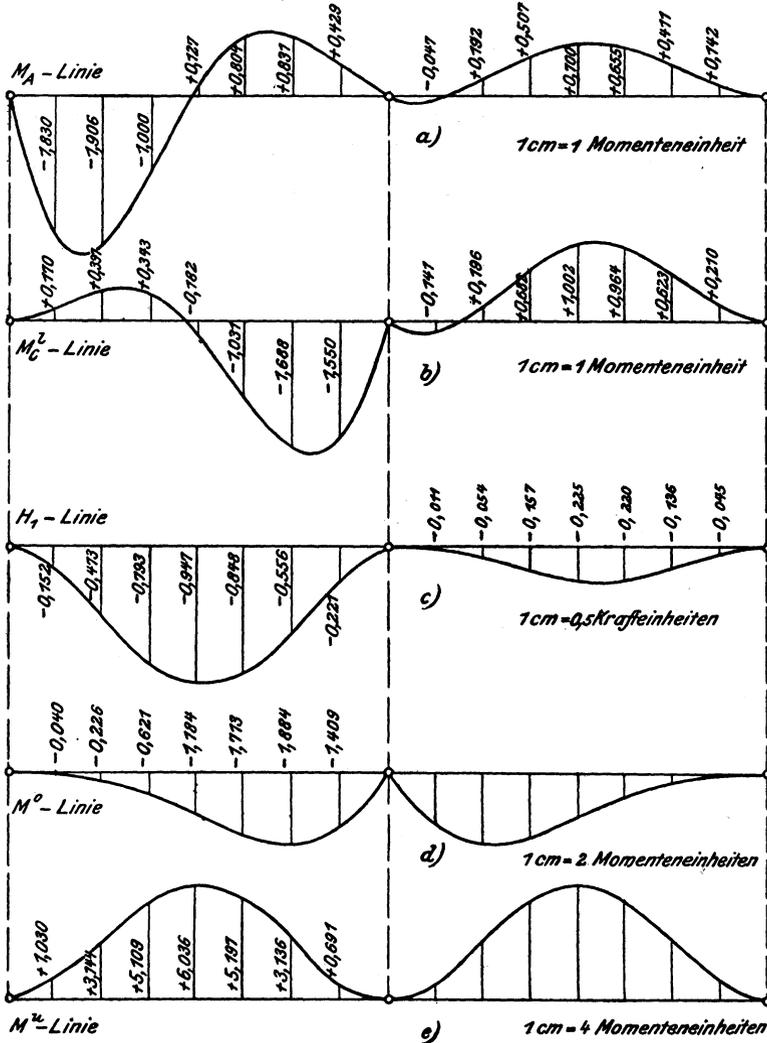


Abb. 108.

rechte Zweige

$$\left. \begin{aligned} M_A &= 0,008051 \widehat{F}_1 + 0,005306 \widehat{F}_2 + 0,001756 \widehat{G}, \\ M'_C &= 0,013190 \widehat{F}_1 + 0,008051 \widehat{F}_2 + 0,002762 \widehat{G}, \\ H_1 &= -0,002762 \widehat{F}_1 - 0,001756 \widehat{F}_2 - 0,000591 \widehat{G}. \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot i)$$

Die Berechnung der Einflußlinienordinaten nach den Formeln i) läßt sich mit dem Rechenschieber sehr schnell durchführen. Das Ergebnis ist in den Abb. 108 a bis c veranschaulicht, die die Einflußlinien der drei Kraftgrößen  $M_A$ ,  $M'_C$  und  $H_1$  aufweisen. Die  $M_B$ - $M'_C$ - und  $H_2$ -Linien sind die Spiegelbilder der drei dargestellten Kurven. Der Vollständigkeit halber wurden mit Hilfe der Formeln d) auf S. 203 die Einflußlinien der Pfeilmomente  $M^o$  und  $M''$  berechnet und in den Abb. 108 d und e zur Darstellung gebracht.

## Anhang.

### Zusammenstellung der Formeln und Tafelwerte.

(Die Formeln sind mit den gleichen Nummern wie im Text versehen. Die in Klammer gesetzte Zahl gibt die Textseite an, um die Gleichung dort rasch auffinden zu können.)

#### Kontinuitätsbedingung.

$$\left[ \frac{d \Delta y}{dx} \right]_{x=l}^k \cos^2 \gamma_k - \left[ \frac{d \Delta y}{dx} \right]_{x=0}^{k+1} \cos^2 \gamma_{k+1} + \vartheta_k - \vartheta_{k+1} = 0 \quad \cdot \quad 1) \quad (\text{S. 14})$$

$\Delta y$  ist die Verschiebung eines Stabpunktes in der Richtung senkrecht zur Stabsehne infolge der Formänderung, wenn die Stabendpunkte festgehalten gedacht sind;

$\gamma$  der Winkel, den die Tangente an die Stabachse im Zusammenhangspunkte  $k$  der beiden Stäbe  $l_k$  und  $l_{k+1}$  mit der Stabsehne bildet. Bei geraden Stäben ist  $\gamma = 0$ ;

$\vartheta$  Stabdrehwinkel, jener Winkel, um den sich die verschobene Stabsehne gegenüber ihrer ursprünglichen Richtung gedreht hat.

#### Winkelgleichungen.

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \Delta l \cos \alpha + \Sigma \vartheta l \sin \alpha &= 0, \\ \Sigma \Delta l \sin \alpha - \Sigma \vartheta l \cos \alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \quad 2) \quad (\text{S. 18})$$

$\Delta l$  sind die Längenänderungen der Stabsehnern;

$\vartheta$  die Stabdrehwinkel (siehe unter Gl. 1);

$\alpha$  die Neigungswinkel der Stabsehnern gegen eine beliebig gewählte Richtung. Über die Zählrichtung der Winkel  $\alpha$  siehe S. 17.

**Viermomentensatz für Tragwerke mit geraden oder schwach gekrümmten Stäben unveränderlichen Querschnittes.**

$$\begin{aligned} M_{k-1}^r l_k' + 2 M_k^l l_k' + 2 M_k^r l_{k+1}' + M_{k+1}^l l_{k+1}' + 6 H_k \mathfrak{C}_k^k \cdot l_k' \\ + 6 H_{k+1} \mathfrak{C}_{k+1}^{k+1} \frac{l_{k+1}'}{l_{k+1}^2} - 6 E J_c (\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) = N \quad \cdot \quad 7) \quad (\text{S. 32}) \end{aligned}$$

$l' = l \frac{J_c}{J} \cos^2 \gamma$  die reduzierte Stablänge;

$J_c$  ein beliebig gewähltes Trägheitsmoment;

$J$  das Trägheitsmoment des betreffenden Stabes;

$\gamma$  siehe unter Gleichung 1);

$H$  die Sehnenkraft;

$\mathfrak{S}_k^{k-1}$  das statische Moment der Fläche  $\Phi_k$ , d. i. der zwischen Stabachse und Stabsehne gelegenen Fläche des Stabes  $l_k$ , bezogen auf den linken Stabendpunkt  $k-1$ ;

$\mathfrak{S}_{k+1}^{k+1}$  das statische Moment der Fläche  $\Phi_{k+1}$  des Stabes  $l_{k+1}$ , bezogen auf den rechten Endpunkt  $k+1$ ;

$\vartheta$  die Stabdrehwinkel (siehe unter Gl. 1);

$N$  das Belastungsglied. Siehe die Formeln 8—15.

Stoßen im Punkte  $k$  nur zwei steif verbundene Stäbe zusammen, dann geht die Viermomentengleichung in die Dreimomentengleichung über:

$$M_{k-1} l'_k + 2 M_k (l'_k + l'_{k+1}) + M_{k+1} l'_{k+1} + 6 H_k \mathfrak{S}_k^{k-1} \frac{l'_k}{l_k^2} + 6 H_{k+1} \mathfrak{S}_{k+1}^{k+1} \frac{l'_{k+1}}{l_{k+1}^2} - 6 E J_c (\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) = N \dots 7')$$

Bei geraden Stäben verschwinden in den Gleichungen 7) und 7') die Glieder mit  $H$ .

Belastungsglied  $N$ .

Die Stäbe  $l_k$  und  $l_{k+1}$  sind mit senkrecht zur Stabsehne gerichteten Kräften belastet:

$$N = -l_k l'_k \sum P_k \frac{a_k}{l_k} \left[ \mathbf{I} - \left( \frac{a}{l} \right)^2 \right]_k - l_{k+1} l'_{k+1} \sum P_{k+1} \frac{(l-a)_{k+1}}{l_{k+1}} \left[ \mathbf{I} - \left( \frac{l-a}{l} \right)^2 \right]_{k+1} \dots 9) \quad (\text{S. 35})$$

$a$  ist der Abstand der Last  $P$  vom linken Stabende;

$l'$  siehe unter Gl. 7)

oder  $N = -l_k l'_k \sum P_k f_2 - l_{k+1} l'_{k+1} \sum P_{k+1} f_1 \dots 9') \quad (\text{S. 35})$

$f_1$  und  $f_2$  sind die Stammfunktionen. Siehe Gl. 10).

Stammfunktionen.

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{l-a}{l} \left[ \mathbf{I} - \frac{(l-a)^2}{l^2} \right], \\ f_2 &= \frac{a}{l} \left[ \mathbf{I} - \left( \frac{a}{l} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \dots 10) \quad (\text{S. 35})$$

Siehe die Tafel der Stammfunktionen auf S. 211.

I. Tafel der Stammfunktionen  $f_1$  und  $f_2$ .

$\frac{a}{l}$	$f_1$	$f_2$									
0,01	0,01970	0,01000	0,26	0,33478	0,24242	0,51	0,37235	0,37735	0,76	0,22618	0,32102
0,02	0,03881	0,01999	0,27	0,34098	0,25032	0,52	0,36941	0,37938	0,77	0,21783	0,31347
0,03	0,05733	0,02997	0,28	0,34675	0,25805	0,53	0,36618	0,38112	0,78	0,20935	0,30545
0,04	0,07526	0,03994	0,29	0,35209	0,26561	0,54	0,36266	0,38254	0,79	0,20074	0,29696
0,05	0,09262	0,04988	0,30	0,35700	0,27300	0,55	0,35888	0,38362	0,80	0,19200	0,28800
0,06	0,10942	0,05978	0,31	0,36149	0,28021	0,56	0,35482	0,38438	0,81	0,18314	0,27856
0,07	0,12564	0,06966	0,32	0,36557	0,28723	0,57	0,35049	0,38481	0,82	0,17417	0,26863
0,08	0,14131	0,07949	0,33	0,36924	0,29406	0,58	0,34591	0,38489	0,83	0,16509	0,25821
0,09	0,15643	0,08927	0,34	0,37250	0,30070	0,59	0,34108	0,38462	0,84	0,15590	0,24730
0,10	0,17100	0,09900	0,35	0,37538	0,30712	0,60	0,33600	0,38400	0,85	0,14662	0,23588
0,11	0,18503	0,10867	0,36	0,37786	0,31334	0,61	0,33068	0,38302	0,86	0,13726	0,22394
0,12	0,19853	0,11827	0,37	0,37995	0,31935	0,62	0,32513	0,38167	0,87	0,12780	0,21150
0,13	0,21150	0,12780	0,38	0,38167	0,32513	0,63	0,31935	0,37995	0,88	0,11827	0,19853
0,14	0,22394	0,13726	0,39	0,38302	0,33068	0,64	0,31334	0,37786	0,89	0,10867	0,18503
0,15	0,23588	0,14662	0,40	0,38400	0,33600	0,65	0,30712	0,37538	0,90	0,09900	0,17100
0,16	0,24730	0,15590	0,41	0,38462	0,34108	0,66	0,30070	0,37250	0,91	0,08927	0,15643
0,17	0,25821	0,16509	0,42	0,38489	0,34591	0,67	0,29406	0,36924	0,92	0,07949	0,14131
0,18	0,26863	0,17417	0,43	0,38481	0,35049	0,68	0,28723	0,36557	0,93	0,06966	0,12564
0,19	0,27856	0,18314	0,44	0,38438	0,35482	0,69	0,28021	0,36149	0,94	0,05978	0,10942
0,20	0,28800	0,19200	0,45	0,38362	0,35888	0,70	0,27300	0,35700	0,95	0,04988	0,09262
0,21	0,29696	0,20074	0,46	0,38254	0,36266	0,71	0,26561	0,35209	0,96	0,03994	0,07526
0,22	0,30545	0,20935	0,47	0,38112	0,36618	0,72	0,25805	0,34675	0,97	0,02997	0,05733
0,23	0,31347	0,21783	0,48	0,37938	0,36941	0,73	0,25032	0,34098	0,98	0,01999	0,03881
0,24	0,32102	0,22618	0,49	0,37735	0,37235	0,74	0,24242	0,33478	0,99	0,01000	0,01970
0,25	0,32812	0,23438	0,50	0,37500	0,37500	0,75	0,23438	0,32812	1,00	0	0

Die geraden Stäbe sind gegen die Lastrichtung geneigt:

$$N = -\lambda_k l'_k \sum P_k f_2 - \lambda_{k+1} l'_{k+1} \sum P_{k+1} f_1 \dots \text{II) (S. 36)}$$

$\lambda$  ist die Projektion der Stablänge  $l$  auf eine zur Lastrichtung senkrechte Gerade.

Gleichförmig verteilte Streckenlast  $p_k$  bzw.  $p_{k+1}$  der Stäbe  $l_k$  und  $l_{k+1}$  senkrecht zur Stabsehne gerichtet:

$$N_p = -p_k l'_k [\alpha_0 \beta]_k \left[ 1 - \frac{4 a_0^2 + \beta^2}{4 l^2} \right]_k - p_{k+1} l'_{k+1} [(l - a_0) \beta]_{k+1} \left[ 1 - \frac{4 (l - a_0)^2 + \beta^2}{4 l^2} \right]_{k+1} \quad \text{I2) (S. 36)}$$

$\beta$  Belastungslänge;

$a_0$  Abstand der Laststreckenmitte vom linken Stabende.

Totale gleichförmig verteilte Belastung  $p_k$  bzw.  $p_{k+1}$  der Stäbe  $l_k$  und  $l_{k+1}$  senkrecht zur Stabsehne gerichtet:

$$N_p^{tot.} = -\frac{1}{4} p_k l_k^2 l'_k - \frac{1}{4} p_{k+1} l_{k+1}^2 l'_{k+1} \dots \text{I3) (S. 37)}$$

Belastung der Stäbe  $l_k$  und  $l_{k+1}$  durch die Drehmomente  $\mu_k$  und  $\mu_{k+1}$ :

$$N_\mu = -\mu_k l'_k \left[ 1 - 3 \left( \frac{a}{l} \right)^2 \right]_k + \mu_{k+1} l'_{k+1} \left[ 1 - 3 \left( \frac{l-a}{l} \right)^2 \right]_{k+1} \quad \text{14) (S. 37)}$$

$\mu$  das Angriffsmoment. Es wird positiv gezählt, wenn es, vom Rahmeninnern gesehen, im Sinne der Uhrzeigerbewegung dreht;  
 $a$  ist der Abstand des Ortes von  $\mu$  vom linken Stabende (siehe Abb. 44 auf S. 37).

Belastung durch zur Stabsehne parallel gerichtete Einzellasten  $P_h^k$  und  $P_h^{k+1}$  in den gekrümmten Stäben  $l_k$  und  $l_{k+1}$ :

$$N_h = -P_h^k l'_k b_k \left[ 1 - 3 \left( \frac{a}{l} \right)^2 \right]_k + P_h^{k+1} l'_{k+1} b_{k+1} \left[ 1 - 3 \left( \frac{l-a}{l} \right)^2 \right]_{k+1} \\ + 6 P_h^k \frac{l'_k}{l_k^2} \beta_k^{k-1} + 6 P_h^{k+1} \frac{l'_{k+1}}{l_{k+1}^2} \beta_{k+1}^{k+1} \quad \dots \quad \text{15) (S. 38)}$$

$a$  ist der Abstand des Lastangriffspunktes vom linken Stabende;  
 $b$  der Abstand des Lastangriffspunktes von der Stabsehne;  
 $\beta_k^{k-1}$  das statische Moment der zwischen Stabachse und Stabsehne gelegenen Fläche des Stabes  $l_k$  von  $a_k$  bis  $l_k$ , bezogen auf den Punkt  $k-1$ ;  
 $\beta_{k+1}^{k+1}$  das statische Moment der zwischen Stabachse und Stabsehne gelegenen Fläche des Stabes  $l_{k+1}$  von  $a_{k+1}$  bis  $l_{k+1}$ , bezogen auf den Punkt  $k+1$ .

Längenänderung  $\Delta l$  der Stabsehne.

$$\Delta l = \frac{Hl}{EF} + \alpha_t t l + \frac{1}{EJ} \left[ M^r \frac{\mathfrak{E}^l}{l} + M^l \frac{\mathfrak{E}^r}{l} + 2 H \mathfrak{E}_x + G \right] \quad \text{17) (S. 41)}$$

$H$  ist die Sehnkraft, positiv, wenn nach außen gerichtet;  
 $F$  die Querschnittsfläche des Stabes;  
 $\alpha_t$  die Ausdehnungsziffer für  $1^\circ$  Temperaturänderung;  
 $M^r$  und  $M^l$  die Anschlußmomente in den Stabendpunkten  $r$  und  $l$ ;  
 $\mathfrak{E}^l$  und  $\mathfrak{E}^r$  die statischen Momente der zwischen Stabende und Stabachse gelegenen Fläche  $\Phi$ , bezogen auf die Stabendpunkte  $l$  und  $r$ ;  
 $\mathfrak{E}_x$  das statische Moment der Fläche  $\Phi$ , bezogen auf die Stabsehne

$$G = \int_0^l \mathfrak{M}_x y dx,$$

wobei  $\mathfrak{M}_x$  das von der Stabelastung herrührende Balkenmoment,  $y$  die Ordinate der Stabachsenlinie, bezogen auf die Stabsehne als Abzissenachse, bedeuten.

Ist die Funktion  $y$  (Stabachsenlinie) symmetrisch zu  $x = \frac{l}{2}$ , so ist  

$$\Delta l = \frac{Hl}{EF} + \alpha_i t l + \frac{1}{EJ} \left[ \frac{\Phi}{2} (M^r + M^l) + 2 H \mathfrak{S}_x + G \right] \quad (S. 42)$$

Bei geraden Stäben ist der Klammerausdruck Null.

Bei parabelförmigen Stabachsenlinien läßt sich  $G$  für Lasten senkrecht zur Stabsehne in der Form darstellen:

$$G = f l^2 \Sigma P g.$$

$g$  ist eine von  $\frac{a}{l}$  abhängige Funktion;

$f$  der Pfeil der Parabel.

Siehe die nachstehende Tafel II.

II. Tafel der Funktion  $g$  für parabelförmige Stabachsenlinien.

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x), \quad g = \frac{1}{3} \left[ \left(\frac{a}{l}\right)^4 - 2 \left(\frac{a}{l}\right)^3 + \frac{a}{l} \right].$$

$\frac{a}{l}$	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
$g$	0	0,01659	0,03270	0,04792	0,06187	0,07422	0,08470
$\frac{a}{l}$	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65
$g$	0,09309	0,09920	0,10292	0,10417	0,10292	0,09920	0,09309
$\frac{a}{l}$	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
$g$	0,08470	0,07422	0,06187	0,04792	0,03270	0,01659	0

**Ermittlung der Formänderungen.**

Berechnung der Drehwinkel.

$$(\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) = z_k, \dots \dots \dots 2I' \quad (S. 158)$$

wenn

$$z_k = \frac{1}{6 EJ_c} [M_{k-1}^r s'_k + 2 M_k^l s'_k + 2 M_k^r s'_{k+1} + M_{k+1}^l s'_{k+1} - N_k].$$

Bedeutung der Bezeichnungen siehe unter Gl. 7).

$$\vartheta_1 = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k \dots \dots \dots 23 \quad (S. 159)$$

$\lambda_n$  die Projektion des Stabes  $s_k$  auf die Verbindungslinie der Endpunkte des Stabzuges;

$L$  die Länge der Projektion des ganzen Stabzuges auf diese Verbindungslinie;

$$\xi_k = \sum_1^{k-1} z_k.$$

**Tragwerke mit Stäben stetig veränderlichen Trägheitsmomentes.**

a) *Unsymmetrische Stäbe.*

Ideales mittleres Trägheitsmoment  $J_m$ .

$$J_m = \frac{2 J_0 J_0'}{J_0 + J_0'} \dots \dots \dots 24) \text{ (S. 167)}$$

$J_0$  und  $J_0'$  sind die Trägheitsmomente des linken bzw. rechten Endquerschnittes.

Querschnittsziffer  $\alpha$ .

$$\alpha = \frac{J_m - J_0}{J_0} \dots \dots \dots 24') \text{ (S. 167)}$$

$\alpha$  kann alle Werte von  $-1$  bis  $+1$  annehmen.

**Viermomentensatz.**

$$\begin{aligned} &M_{k-1}^r l_k' + (2 - \alpha_k) M_k^l l_k' + (2 + \alpha_{k+1}) M_k^r l_{k+1}' + M_{k+1}^l l_{k+1}' \\ &+ 6 H_k \frac{l_k'}{l_k^2} [\mathfrak{C}^{k-1} + \alpha \mathfrak{C}'^{k-1}]_k + 6 H_{k+1} \frac{l_{k+1}'}{l_{k+1}^2} [\mathfrak{C}^{k+1} + \alpha \mathfrak{C}'^{k+1}]_{k+1} \\ &- 6 E J_c (\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) = N. \dots \dots \dots 26) \text{ (S. 170)} \end{aligned}$$

$\mathfrak{C}^{k-1}$  und  $\mathfrak{C}^{k+1}$  sind die statischen Momente der zwischen Stabachse und Stabsehne gelegenen Fläche der Stäbe  $l_k$  bzw.  $l_{k+1}$ , bezogen auf  $k-1$  bzw.  $k+1$ ;

$\mathfrak{C}'^{k-1}$  und  $\mathfrak{C}'^{k+1}$  die statischen Momente der zwischen Stabsehne und reduzierter Stabachsenlinie gelegenen Fläche der Stäbe  $l_k$  bzw.  $l_{k+1}$ , bezogen auf  $k-1$  bzw.  $k+1$ .

**Reduzierte Stabachsenlinie.**

$$y' = \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right) y.$$

$y$  Ordinate der Stabachse, bezogen auf die Stabsehne als Abzissenachse.

**Lastglied  $N'$ .**

Belastung der Stäbe  $l_k$  und  $l_{k+1}$  durch Einzellasten  $P_k$  und  $P_{k+1}$  senkrecht zur Stabsehne im Abstände  $a_k$  bzw.  $a_{k+1}$  vom linken Stabende:

$$N' = -l_k l'_k \sum P_k \left(\frac{a}{l}\right)_k \left(1 - \frac{a}{l}\right)_k \left[ \left(1 + \frac{a}{l}\right) - \alpha \left(\frac{a}{l}\right)^2 \right]_k$$

$$- l_{k+1} l'_{k+1} \sum P_{k+1} \left(\frac{a}{l}\right)_{k+1} \left(1 - \frac{a}{l}\right)_{k+1} \left[ \left(2 - \frac{a}{l}\right) + \alpha \left(1 - \frac{a}{l}\right)^2 \right]_{k+1}$$

28) (S. 172)

oder

$$N' = -l_k l'_k \sum P_k \varphi_2 - l_{k+1} l'_{k+1} \sum P_{k+1} \varphi_1 \quad . \quad 28') \quad (S. 172)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{l}\right) \left[ \left(2 - \frac{a}{l}\right) + \alpha \left(1 - \frac{a}{l}\right)^2 \right], \\ \varphi_2 &= \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{l}\right) \left[ \left(1 + \frac{a}{l}\right) - \alpha \left(\frac{a}{l}\right)^2 \right]. \end{aligned} \right\} \quad 29) \quad (S. 172)$$

III. Tafel zur Berechnung der Funktionen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  für verschiedene Querschnittsziffern  $\alpha$ .

$$\varphi_1 = A_1 + B_1 \alpha, \quad \varphi_2 = A_2 - B_2 \alpha.$$

$\frac{\alpha}{l}$	$\varphi_1$		$\varphi_2$		$\frac{\alpha}{l}$	$\varphi_1$		$\varphi_2$	
	$A_1$	$B_1$	$A_2$	$B_2$		$A_1$	$B_1$	$A_2$	$B_2$
0	0	0	0	0	0,55	0,35888	0,05012	0,38362	0,07487
0,05	0,09262	0,04287	0,04988	0,00012	0,60	0,33600	0,03840	0,38400	0,08640
0,10	0,17100	0,07290	0,09900	0,00090	0,65	0,30712	0,02787	0,37538	0,09612
0,15	0,23588	0,09212	0,14662	0,00287	0,70	0,27300	0,01890	0,35700	0,10290
0,20	0,28800	0,10240	0,19200	0,00640	0,75	0,23438	0,01172	0,32812	0,10547
0,25	0,32812	0,10547	0,23438	0,01172	0,80	0,19200	0,00640	0,28800	0,10240
0,30	0,35700	0,10290	0,27300	0,01890	0,85	0,14662	0,00287	0,23588	0,09212
0,35	0,37538	0,09612	0,30712	0,02787	0,90	0,09900	0,00090	0,17100	0,07290
0,40	0,38400	0,08640	0,33600	0,03840	0,95	0,04988	0,00012	0,09262	0,04287
0,45	0,38362	0,07487	0,35888	0,05012	1,00	0	0	0	0
0,50	0,37500	0,06250	0,37500	0,06250					

Gleichförmig verteilte Vollbelastung  $p_k$  bzw.  $p_{k+1}$  der Stäbe  $l_k$  und  $l_{k+1}$ :

$$N'_p = -\frac{p_k}{4} l_k^2 l'_k \left(1 - \frac{\alpha_k}{5}\right) - \frac{p_{k+1}}{4} l_{k+1}^2 l'_{k+1} \left(1 + \frac{\alpha_{k+1}}{5}\right) \quad . \quad 30) \quad (S. 173)$$

b) *Symmetrische Stäbe.*

Querschnittsziffer  $\alpha$ .

$$\alpha = \frac{J_m - J_0}{J_0} \dots \dots \dots 31') \quad (S. 173)$$

$J_m$  Trägheitsmoment in Stabmitte;

$J_0$  Trägheitsmoment an den Stabenden;

$\alpha$  kann alle Werte von  $-1$  bis  $+\infty$  annehmen.

Viermomentensatz.

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\alpha_k}{5}\right) M_k^r l'_k + 2 \left(1 + \frac{2\alpha_k}{5}\right) M_k^l l'_k + 2 \left(1 + \frac{2\alpha_{k+1}}{5}\right) M_k^r l'_{k+1} \\ & + \left(1 + \frac{\alpha_{k+1}}{5}\right) M_{k+1}^l l'_{k+1} + 6 H_k \frac{l'_k}{l_k^2} [\mathfrak{E}^{k-1} + \alpha \mathfrak{E}''^{k-1}]_k \\ & + 6 H_{k+1} \frac{l'_{k+1}}{l_{k+1}^2} [\mathfrak{E}^{k+1} + \alpha \mathfrak{E}''^{k+1}] - 6 E J_c (\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) = N. \quad \dots \quad 32) \\ & \hspace{15em} \text{(S. 176)} \end{aligned}$$

$\mathfrak{E}^{k-1}$  und  $\mathfrak{E}^{k+1}$  sowie  $\mathfrak{E}''^{k-1}$  und  $\mathfrak{E}''^{k+1}$  haben die gleiche Bedeutung wie unter a).

Reduzierte Stabachsenlinie.

$$y' = \left(1 - 2 \frac{x}{l}\right)^2 y.$$

$y$  Ordinate der Stabachse, bezogen auf die Stabsehne als Abzissenachse.

Lastglied  $N''$ .

Belastung der Stäbe  $l_k$  und  $l_{k+1}$  durch Einzellasten  $P_k$  und  $P_{k+1}$  senkrecht zur Stabsehne im Abstände  $a_k$  bzw.  $a_{k+1}$  vom linken Stabende:

$$\begin{aligned} N'' = & -l_k l'_k \sum P_k \left(\frac{a}{l}\right)_k \left(1 - \frac{a}{l}\right)_k \left\{ \left(1 + \frac{a}{l}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{5}\right) - \frac{2\alpha}{5} \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left[2 - 3 \left(\frac{a}{l}\right)^2\right] \right\}_k \\ & - l_{k+1} l'_{k+1} \sum P_{k+1} \left(\frac{a}{l}\right)_{k+1} \left(1 - \frac{a}{l}\right)_{k+1} \left\{ \left(2 - \frac{a}{l}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{5}\right) - \right. \\ & \left. - \frac{2\alpha}{5} \left(\frac{l-a}{l}\right)^2 \left[2 - 3 \left(\frac{l-a}{l}\right)^2\right] \right\}_{k+1} \dots \dots \dots 34) \text{ (S. 177)} \end{aligned}$$

oder

$$N'' = -l_k l'_k \sum P_k \varphi_2' - l_{k+1} l'_{k+1} \sum P_{k+1} \varphi_1' \dots \dots \dots 34') \text{ (S. 177)}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1' = & \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{l}\right) \left\{ \left(2 - \frac{a}{l}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{5}\right) - \frac{2\alpha}{5} \left(\frac{l-a}{l}\right)^2 \left[2 - 3 \left(\frac{l-a}{l}\right)^2\right] \right\} \\ \varphi_2' = & \frac{a}{l} \left(1 - \frac{a}{l}\right) \left\{ \left(1 + \frac{a}{l}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{5}\right) - \frac{2\alpha}{5} \left(\frac{a}{l}\right)^2 \left[2 - 3 \left(\frac{a}{l}\right)^2\right] \right\}. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \dots \dots \dots 35) \\ \text{(S. 177)} \end{array} \right\}$$

IV. Tafel zur Berechnung der Funktionen  $\varphi_1'$  und  $\varphi_2'$  für verschiedene Querschnittsziffern  $\alpha$ .

$$\varphi_1 = A_1 + B_1 \alpha, \quad \varphi_2 = A_2 + B_2 \alpha.$$

$\frac{\alpha}{l}$	$\varphi_1$		$\varphi_2$		$\frac{\alpha}{l}$	$\varphi_1$		$\varphi_2$	
	$A_1$	$B_1$	$A_2$	$B_2$		$A_1$	$B_1$	$A_2$	$B_2$
0	0	0	0	0	0,55	0,35888	0,04386	0,38362	0,04401
0,05	0,09262	0,03066	0,04988	0,00988	0,60	0,33600	0,04385	0,38400	0,04500
0,10	0,17100	0,04674	0,09900	0,01909	0,65	0,30712	0,04323	0,37538	0,04691
0,15	0,23588	0,05335	0,14662	0,02711	0,70	0,27300	0,04152	0,35700	0,04958
0,20	0,28800	0,05432	0,19200	0,03359	0,75	0,23438	0,03838	0,32812	0,05245
0,25	0,32812	0,05245	0,23438	0,03838	0,80	0,19200	0,03359	0,28800	0,05432
0,30	0,35700	0,04958	0,27300	0,04152	0,85	0,14662	0,02711	0,23588	0,05335
0,35	0,37538	0,04691	0,30712	0,04323	0,90	0,09900	0,01909	0,17100	0,04674
0,40	0,38400	0,04500	0,33600	0,04385	0,95	0,04988	0,00988	0,09262	0,03066
0,45	0,38362	0,04401	0,35888	0,04386	1,00	0			
0,50	0,37500	0,04375	0,37500	0,04375					

Gleichförmig verteilte Vollbelastung  $p_k$  bzw.  $p_{k+1}$  der Stäbe  $l_k$  und  $l_{k+1}$ :

$$N_p = -\frac{p_k}{4} l_k^2 l'_k \left(1 - \frac{\alpha_k}{5}\right) - \frac{p_{k+1}}{4} l_{k+1}^2 l'_{k+1} \left(1 - \frac{\alpha_{k+1}}{5}\right). \quad 36) \text{ (S. 178)}$$

Längenänderung  $\Delta l$  der Stabsehne.

für unsymmetrische Stäbe:

$$\Delta l = \frac{Hl}{EF_m} + \alpha_t t l + \frac{1}{EJ_m} \left[ \frac{M^r}{l} (\mathcal{E}^l + \alpha \mathcal{E}'^l) + \frac{M^l}{l} (\mathcal{E}^r + \alpha \mathcal{E}'^r) + 2H (\mathcal{E}_x + \alpha \mathcal{E}'_x) + (G + \alpha G') \right], \quad \dots \quad 37) \text{ (S. 180)}$$

für symmetrische Stäbe:

$$\Delta l = \frac{Hl}{EF_m} + \alpha_t t l + \frac{1}{EJ_m} \left[ \frac{1}{2} (\Phi + \alpha \Phi') (M^r + M^l) + 2H (\mathcal{E}_x + \alpha \mathcal{E}'_x) + (G + \alpha G') \right]. \quad 37') \text{ (S. 180)}$$

$F_m$  ist ein mittlerer Wert der Querschnittsfläche des Stabes;

$H, M^r, M^l, \alpha_t, t$  haben gleiche Bedeutung wie in Gl. 17);

$\mathcal{E}^l$  und  $\mathcal{E}^r$  sowie  $\mathcal{E}'^l$  und  $\mathcal{E}'^r$  haben dieselbe Bedeutung wie in Gl. 17), wobei sich  $\mathcal{E}'^l$  und  $\mathcal{E}'^r$  auf die reduzierte Stabachse beziehen;

$\mathcal{E}_x$  und  $\mathcal{E}'_x$  sind die statischen Momente der zwischen Stabsehne und Stabachsenlinie bzw. reduzierter Stabachsenlinie gelegenen Fläche  $\Phi$  bzw.  $\Phi'$ , bezogen auf die Stabsehne.

Reduzierte Stabachsenlinien:

für unsymmetrische Stäbe:

$$y' = \left( I - 2 \frac{x}{l} \right) y;$$

für symmetrische Stäbe:

$$y' = \left( I - 2 \frac{x}{l} \right)^2 y.$$

Lastglieder  $G$  und  $G'$ :

$$G = \int_0^l \mathfrak{M}_x y \, dx, \quad G' = \int_0^l \mathfrak{M}_x y' \, dx.$$

**Tragwerke mit Stäben beliebiger Form- und Querschnittsgestaltung.**

Viermomentensatz.

$$\begin{aligned} & M_{k-1}^r \sum_{i=0}^k \psi_i \frac{x_i'}{l_k} + M_k^l \sum_{i=0}^k \psi_i \frac{x_i}{l_k} + M_{k+1}^r \sum_{i=0}^k \psi_i' \frac{x_i'}{l_{k+1}} + M_{k+1}^l \sum_{i=0}^k \psi_i' \frac{x_i}{l_{k+1}} \\ & + H_k \sum_{i=0}^k \psi_i y_i + H_{k+1} \sum_{i=0}^k \psi_i' y_i \\ & - \frac{6}{l_k} \sum_{i=1}^k S_i s_i \frac{J_c}{F_i} \sin \alpha_i + \frac{6}{l_{k+1}} \sum_{i=1}^k S_i s_i \frac{J_c}{F_i} \sin \alpha_i - 6 E J_c (\vartheta_k - \vartheta_{k+1}) \\ & = - \sum_{i=0}^k \mathfrak{M}_i \psi_i - \sum_{i=0}^k \mathfrak{M}_i \psi_i' . . . . . \quad 38) \quad (S. 192) \end{aligned}$$

Die Bedeutung der Größen  $x_i, x_i', y_i, s_i$  ist aus der Abb. 103 S. 187 zu erkennen.

$$\left. \begin{aligned} \psi_i &= s_i' \left( \frac{x_{i-1}}{l} + 2 \frac{x_i}{l} \right) + s_{i+1}' \left( 2 \frac{x_i}{l} + \frac{x_{i+1}}{l} \right), \\ \psi_i' &= 3(s_i' + s_{i+1}') - \psi_i. \end{aligned} \right\} \quad 39) \quad (S. 193)$$

Es bestehen noch die Beziehungen:

$$\sum_{i=0}^n \psi_i \frac{x_i'}{l} = \sum_{i=0}^n \psi_i - \sum_{i=0}^n \psi_i \frac{x_i}{l}, \quad . . . \quad 40) \quad (S. 193)$$

$$\sum_{i=0}^n \psi_i' \frac{x_i'}{l} = \sum_{i=0}^n \psi_i' - \sum_{i=0}^n \psi_i' \frac{x_i}{l}, \quad . . . \quad 41) \quad (S. 193)$$

$$\sum_{i=0}^n \psi_i \frac{x_i'}{l} = \sum_{i=0}^n \psi_i' \frac{x_i}{l} . . . . . \quad 42) \quad (S. 194)$$

Sind die Sehnenabschnitte gleich, also  $x_i = i\lambda$ , so ist

$$\psi_i = \frac{I}{n} [s'_i (3i - 1) + s'_{i+1} (3i + 1)] \dots 39') \text{ (S. 194)}$$

und

$$\sum_{i=0}^n \psi_i \frac{x_i}{l} = \frac{I}{n} \sum_{i=0}^n \psi_i i.$$

Bei symmetrischen Stäben ist

$$\sum \psi_i x_i = \sum \psi'_i x'_i, \quad \sum \psi_i x'_i = \sum \psi'_i x_i \dots 43) \text{ (S. 194)}$$

und

$$\sum \psi_i y_i = \sum \psi'_i y_i \dots 44) \text{ (S. 195)}$$

Längenänderung  $\Delta l$  der Stabsehne.

$$\begin{aligned} \Delta l = & \sum_{i=1}^n \frac{S_i \lambda_i}{EF_i} + \alpha_i t l \\ & + \frac{I}{6 EJ_c} \left[ Mr \sum_{i=0}^n \chi_i \frac{x'_i}{l} + Ml \sum_{i=0}^n \chi_i \frac{x_i}{l} + H \sum_{i=0}^n \chi_i y_i + \sum_{i=0}^n \mathfrak{M}_i \chi_i \right] \end{aligned} \quad 46) \text{ (S. 196)}$$

$$\chi_i = s'_i (y_{i-1} + 2y_i) + s'_{i+1} (2y_i + y_{i+1}) \dots 47) \text{ (S. 197)}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=0}^n \chi_i \frac{x_i}{l} &= \sum_{i=0}^n \psi_i y_i \\ \sum_{i=0}^n \chi_i \frac{x'_i}{l} &= \sum_{i=0}^n \psi'_i y_i \end{aligned} \right\} \dots 48) \text{ (S. 197)}$$

Bei symmetrischen Stäben:

$$\sum_{i=0}^n \chi_i \frac{x_i}{l} = \sum_{i=0}^n \chi_i \frac{x'_i}{l} = \sum_{i=0}^n \psi_i y_i \dots 49) \text{ (S. 197)}$$

Einflußlinien.

$$\left. \begin{aligned} \widehat{F}_1 &= - \left[ (l - a_r) \sum_{i=0}^r \psi'_i \frac{x_i}{l} + a_r \sum_{i=r+1}^n \psi'_i \frac{x'_i}{l} \right], \\ \widehat{F}_2 &= - \left[ (l - a_r) \sum_{i=0}^r \psi_i \frac{x_i}{l} + a_r \sum_{i=r+1}^n \psi_i \frac{x'_i}{l} \right], \\ \widehat{G} &= (l - a_r) \sum_{i=0}^r \chi_i \frac{x_i}{l} + a_r \sum_{i=r+1}^n \chi_i \frac{x'_i}{l}. \end{aligned} \right\} 50) \text{ (S. 198)}$$

# Taschenbuch für Bauingenieure

Unter Mitwirkung von

Ing. Fr. Bleich-Wien, Geheimrat Prof. Th. Böhm-Dresden,  
Geheimrat Prof. H. Engels-Dresden, Prof. Dr. jur. A. Esche-  
Dresden, Geheimrat Prof. M. Foerster-Dresden, Prof.  
Dr.-Ing. W. Gehler-Dresden, Geheimrat Prof. E. Genzmer-  
Dresden, Stadtbaurat a. D. Th. Koehn-Berlin, Privatdozent  
Regierungsbaumeister Dr.-Ing. F. Kögler-Dresden, Geheim-  
rat Prof. G. Lucas-Dresden, Geheimrat Prof. G. Mehrrens-  
Dresden, Baurat Dr.-Ing. A. Schreiber-Dresden,  
Königlicher Bauamtman E. Wentzel-Dresden

herausgegeben von

**Max Foerster**

Geh. Hofrat, ord. Professor an der Technischen Hochschule  
in Dresden

**Zweite, verbesserte und erweiterte Auflage**

2094 Seiten auf bestem Dünndruckpapier — Mit 3054 Figuren

*In zwei Teilen*

In einem Bande gebunden Preis M. 20,—;

in zwei Bänden gebunden Preis M. 21,—

Daß schon drei Jahre nach Erscheinen der ersten Auflage dieses Handbuchs eine Neuauflage notwendig geworden ist, kann wohl als ein sicherer Beweis dafür angesehen werden, daß dies treffliche Hilfswerk den Beifall der Fachgenossen gefunden und ansehnliche Verbreitung gewonnen hat. Dies ist auch wohlverständlich, da das Werk aus der liebevollen Zusammenarbeit zahlreicher hervorragender Fachmänner auf allen einschlägigen Gebieten entstanden ist und dem Studierenden wie auch dem in der Praxis stehenden Bauingenieur all jenen Stoff in bequemer Form zur Hand gibt, der bei baulichem Schaffen gebraucht wird. Wir sind sicher, daß diese Neuauflage die Zahl der Freunde des ausgezeichneten Taschenbuches noch wesentlich vermehren wird. Es ist damit ein beachtenswerter Wettbewerber mit der altbeliebten „Hütte“ entstanden und ein trefflicher und stets verlässlicher Ratgeber für theoretische Belehrung und praktische Verwendung geschaffen worden. Von besonderem Werte und darum eine eigene anerkennende Erwähnung vollauf verdienend, sind die überaus zahlreichen deutlichen und vorzüglich ausgeführten Abbildungen, die sich in der Neuauflage noch wesentlich vermehrt haben. Die Ausstattung ist die bekannt vorzügliche, die wir an allen Verlagswerken von Springer gewohnt sind.

—1.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins.

Teuerungszuschlag auf geheftete Bücher 20<sup>0</sup>/<sub>0</sub>, auf gebundene Bücher 30<sup>0</sup>/<sub>0</sub>

---

**Die Eisenkonstruktionen.** Ein Lehrbuch für bau- und maschinentechnische Fachschulen, zum Selbststudium und zum praktischen Gebrauch nebst einem Anhang, enthaltend Zahlentafeln für das Berechnen und Entwerfen eiserner Bauwerke. Von **L. Geusen**, Dipl.-Ing. und Kgl. Oberlehrer in Dortmund. Zweite, verbesserte Auflage. Mit etwa 520 Textfiguren und mehreren Tafeln. In Vorbereitung.

---

**Leitfaden für den Unterricht in Eisenkonstruktionen an Maschinenbauschulen.** Von Prof. Dipl.-Ing. **L. Geusen**, Oberlehrer an den Königl. Vereinigten Maschinenbauschulen in Dortmund. Mit 173 Textfiguren. Preis kartoniert M. 2,—.

---

**Berichte des Ausschusses für Versuche im Eisenbau.** Herausgegeben vom **Verein deutscher Brücken- und Eisenbau-Fabriken** (Deutscher Eisenbau-Verband). Ausgabe A, Heft 1: **Der Einfluß der Nietlöcher auf die Längenänderung von Zugstäben und die Spannungsverteilung in ihnen.** Nach Versuchen im Königlichen Materialprüfungsamt zu Groß Lichterfelde. Berichterstatter Geh. Reg.-Rat **Max Rudeloff**. Mit 30 Textfiguren. Preis M. 3,60. Ausgabe B, Heft 1: **Zur Einführung. Bisherige Versuche.** Berichterstatter: Reg.-Baumeister a. D. Dr.-Ing. **Kögler**. Mit 26 Abbildungen. Preis M. 1,60.

---

**Widerstandsmomente, Trägheitsmomente und Gewichte von Blechträgern** nebst numerisch geordneter Zusammenstellung der Widerstandsmomente von 59 bis 113 930, zahlreichen Berechnungsbeispielen und Hilfstafeln. Von **B. Böhm**, Königl. Gewerberat in Bromberg, und **E. John**, Königl. Regierungs- und Baurat in Essen. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Preis gebunden M. 12,—.

---

**Anleitung zur statischen Berechnung von Eisenkonstruktionen im Hochbau.** Von Ingenieur **H. Schlösser**. Dritte, verbesserte Auflage, bearbeitet und herausgegeben von **H. Will**, Ingenieur. Mit 160 in den Text gedruckten Abbildungen, einer Beilage u. einem Bauplan. Preis geb. M. 7,—.

---

**Die Berechnung von Steifrahmen** nebst anderen statisch unbestimmten Systemen. Von Ingenieur **E. Björnstad**, Grünberg. Mit 127 Textfiguren, 19 Tabellen und 1 graphischen Anlage. Preis M. 9,—; gebunden M. 10,—.

---

**Die Methode der Alpha-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen.** Von **Axel Bendixsen**, Ingenieur der Bürgerlijke Openbare Werken in Niederländ.-Indien. Mit 31 Textfiguren. Preis M. 3,—.

---

**Studien über strebenlose Raumbauwerke und verwandte Gebilde.** Von Dr.-Ing. **Henri Marcus**. Mit 48 Textfiguren. Preis M. 5,60.

---

**Studien über mehrfach gestützte Rahmen- und Bogenträger.** Von Dr.-Ing. **Henri Marcus**. Mit 52 Textfiguren. Preis M. 4,—.

---

**Die Einflußlinien mehrfach gestützter Rahmenträger.** Von Dr.-Ing. **Henri Marcus**. Preis M. 1,20.

---

**Grundlagen zur Berechnung von Steifrahmen** mit bes. Rücksicht auf Eisenbeton. Von Dr.-Ing. **Richard Rossin**. Mit 54 Textfiguren. Preis M. 3,60.

---

Teuerungszuschlag auf geheftete Bücher 20<sup>0</sup>/<sub>0</sub>, auf gebundene Bücher 30<sup>0</sup>/<sub>0</sub>

---

**Der Bauingenieur in der Praxis.** Eine Einführung in die wirtschaftlichen und praktischen Aufgaben des Bauingenieurs. Von Regierungsbaumeister a. D. **Th. Janßen**, Privatdozent an der Kgl. Techn. Hochschule in Berlin. Preis M. 6,—; gebunden M. 6,80.

---

**Bauakustik.** Schutz gegen Schall und Erschütterungen. Von Dr. **Franz Weisbach**. Mit 31 Textfiguren. Preis M. 3,60.

---

**Die Wirtschaftlichkeit als Konstruktionsprinzip im Eisenbetonbau.** Von Dr.-Ing. **Max Mayer**. Mit 30 Textfiguren, 15 Zahlentabellen und 1 Formeltafel. Preis M. 5,40.

---

**Die Anregungen Taylors für den Baubetrieb.** Vortrag am 7. März 1914 im Württembergischen Verein für Baukunde. Von Dr.-Ing. **Max Mayer**, Stuttgart. Mit 2 Figuren und 18 Tafeln. Preis M. 1,20.

---

**Technische Mechanik.** Ein Lehrbuch der Statik und Dynamik für Maschinen- und Bauingenieure. Von **Ed. Autenrieth**. Zweite Auflage. Neu bearbeitet von Prof. Dr.-Ing. **Max Enßlin** in Stuttgart. Mit 297 Textfiguren. Preis gebunden M. 18,—.

---

**Einführung in die energetische Baustatik.** Einiges über die physikalischen Grundlagen der energetischen Festigkeitslehre von **Carl Kriemler**, Professor der Technischen Mechanik an der k. Technischen Hochschule in Stuttgart. Mit 18 Textfiguren. Preis M. 2,40.

---

**Aufgaben aus der technischen Mechanik.** Von Professor **Ferd. Wittenbauer**, Graz.

I. Band: **Allgemeiner Teil.** Dritte, verbesserte Auflage. 816 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 610 Textfiguren. Preis gebunden M. 6,40.

II. Band: **Festigkeitslehre.** Zweite, verbesserte Auflage. 591 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Mit 490 Textfiguren. Preis M. 6,—; gebunden M. 6,80.

III. Band: **Flüssigkeiten und Gase.** Zweite, verbesserte Auflage. 586 Aufgaben nebst Lösungen und einer Formelsammlung. Mit 396 Textfiguren. Preis M. 9,—; gebunden M. 10,20.

---

**Festigkeitslehre** nebst Aufgaben aus dem Maschinenbau und der Baukonstruktion. Ein Lehrbuch für Maschinenbauschulen und andere technische Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht und für die Praxis. Von **Ernst Wehnert**, Ingenieur u. Oberlehrer an der städt. Gewerbe- u. Maschinenbauschule in Leipzig.

I. Band: **Einführung in die Festigkeitslehre.** Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 247 Textfiguren. Preis gebunden M. 6,—.

II. Band: **Zusammengesetzte Festigkeitslehre.** Mit 142 Textfiguren. Preis gebunden M. 7,—.

---

**Bau und Berechnung gewölbter Brücken und ihrer Lehrgerüste.** Drei Beispiele von der Badischen Murgtalbahn. Von Dr.-Ing. **Ernst Gaber**, Gr. Bauinspektor. Mit 56 Textabbildungen. Preis M. 6,—; gebunden M. 7,—.

---

**Eisenbahn-Balkenbrücken.** Ihre Konstruktion und Berechnung nebst sechs zahlenmäßig durchgeführten Beispielen. Von Ingenieur **Johannes Schwengler**. Mit 84 Textfiguren und 8 lithographischen Tafeln. Preis kartoniert M. 4,—.

---

Teuerungszuschlag auf geheftete Bücher 20<sup>0</sup>/<sub>0</sub>, auf gebundene Bücher 30<sup>0</sup>/<sub>0</sub>

**Vorlesungen über Eisenbeton.** Von Dr.-Ing. E. Probst, ord. Professor an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe. Erster Band: Allgemeine Grundlagen. — Theorie und Versuchsforschung. — Grundlagen für die statische Berechnung. — Statisch unbestimmte Träger im Lichte der Versuche. Mit 171 Textfiguren. Preis gebunden M. 18,—.

---

**Untersuchungen an durchlaufenden Eisenbetonkonstruktionen.** Versuchsvorbereitungen und Ausführungen von Prof. H. Scheit, Geh. Hofrat, Direktor der Kgl. Sächs. Mechan.-Technischen Versuchsanstalt in Dresden. — Versuchsplan, Entwurf, Bearbeitung der Ergebnisse und Schlußfolgerungen von Dr.-Ing. E. Probst, Privatdozent an der Kgl. Technischen Hochschule in Berlin. Mit 52 Textfiguren. Preis M. 5,—.

---

**Über das Wesen und die wahre Größe des Verbundes zwischen Eisen und Beton.** Von Dr.-Ing. Adolf Kleinogel. Mit 5 Text- und 9 Tafelfiguren. Preis M. 2,40.

---

**Vereinfachte Berechnung eingespannter Gewölbe.** Von Dr.-Ing. Kögler, Stadtbaumeister und Privatdozent in Dresden. Mit 8 Textfiguren. Preis M. 2,—.

---

**Schubwiderstand und Verbund in Eisenbetonbalken** auf Grund von Versuch und Erfahrung. Von Dr.-Ing. R. Saliger, ord. Professor der k. k. Technischen Hochschule in Wien. Mit 25 Tabellen und 139 Abbildungen. Preis M. 5,—.

---

**Berechnung des kontinuierlichen Balkens mit veränderlichem Trägheitsmoment auf elastisch drehbaren Pfeilern** sowie Berechnung des mehrfachen Rahmens mit geradem Balken nach der Methode der Fixpunkte. Von Dr.-Ing. Ernst Suter, Oberingenieur der Wayss & Freytag A.-G. in Neustadt an der Hardt. Preis M. 4,—.

---

**Berechnung der Einsenkung von Eisenbetonplatten und Plattenbalken.** Von Dr.-Ing. Karl Heintel, Regierungsbaumeister. Mit 37 Figuren. Preis M. 2,60.

---

**Ein neues Verfahren zur Bestimmung exzentrisch belasteter Eisenbetonquerschnitte.** Von Dr.-Ing. Walther Kunze. Mit 3 Textfiguren. Preis M. 1,—.

---

**Versuche mit Eisenbetonstützen.** Von Geh. Reg.-Rat Prof. G. Lang. Preis M. 1,20.

---

**Armierter Beton.** Monatsschrift für Theorie und Praxis des gesamten Betonbaues. In Verbindung mit Fachleuten herausgegeben von Dr.-Ing. E. Probst, ord. Professor an der Techn. Hochschule Karlsruhe, und M. Foerster, Geh. Hofrat, ord. Professor a. d. Techn. Hochschule Dresden. Erscheint seit 1908 in monatlichen Heften und kann durch den Buchhandel, die Post oder auch von der Verlagsbuchhandlung zum Preise von 20 M. für den Jahrgang bezogen werden.

---

Teuerungszuschlag auf geheftete Bücher  $20\frac{0}{100}$ , auf gebundene Bücher  $30\frac{0}{100}$