Wissenschaftliche Abhandlungen

der

Kaiserlichen Normal-Eichungs-Kommission

(Fortsetzung der „Metronomischen Beiträge“)

VI. Heft

Über die gleichzeitige Bestimmung der Teilungsfehler zweier Maszstäbe durch die Methode des Durchschiebens

von Professor Dr. A. Leman

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1906.

Vorher sind erschienen:

Wissenschaftliche Abhandlungen

der

Kaiserlichen Normal-Eichungs-Kommission.

Heft I. Anschluß der Normale der Deutschen Maße und Gewichte an die neuen Prototype des Meter und des Kilogramm. Mit 16 in den Text gedruckten Figuren . . . . Preis M. 8,—.

Heft II. Die Dichte, Ausdehnung und Kapillarität von Lösungen reinen Rohrzuckers in Wasser. Unter Mitwirkung von Dr. J. Domke und Dr. H. Harting untersucht und bearbeitet von Dr. F. Plato. Mit 9 in den Text gedruckten Figuren . . . . Preis M. 7—.

Heft III. Untersuchungen über Kapillarität und Benetzungserscheinungen: Kapillaritäts-Untersuchungen nach der Methode der Steighöhen, von Dr. Domke. Experimentelle Bestimmung der Oberflächenspannung von Flüssigkeiten durch Messung der Wellenlänge der auf ihnen erzeugten Kapillarwellen von Professor Dr. L. Grunmach. Benetzungsrückstände bei Inhaltsermittelung von Maßen von Dr. Bein. Mit 20 in den Text gedruckten Figuren . . . . . Preis M. 8,—.

Heft IV. Über die Ermittelung der inneren Teilungsfehler zweier Maßstäbe nach der Methode des Durchschiebens von Prof. Dr. Dziobek. Bericht über die Untersuchungen, welche seitens der Normal-Eichungs-Kommission über Länge und Ausdehnung einer für die Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften zu Berlin bestimmten Kopie des preußischen 3' Urmaßes ausgeführt worden sind. Über die Veränderlichkeit von Gewichtsstücken von Dr. H. Stadthagen. Über die Veränderlichkeit der Maße von Achat von Dr. H. Stadthagen. Beitrag zur Untersuchung von Magnalium-Legierungen von Dr. H. Stadthagen und Dr. E. Fischer. Über den Zusammenhang von Schwingungsdauer und Empfindlichkeit einer Waage von Weymann. Über den Einfluß der Schneide auf die Schwingungsdauer des Pendels und der Waage von Dr. Wilhelm Felgenträger. Mit 11 in den Text gedruckten Figuren . . . . Preis M. 8,—.

Heft V. Die Dichte und Ausdehnung von chemisch reinen Schwefelsäure-Wasser-Mischungen. Unter Mitwirkung von Dr. H. Bode, Dr. E. Fischer, K. v. Höegh untersucht und bearbeitet von Dr. J. Domke. Die Grundlagen und Resultate der Beobachtungen über die Dichte von Schwefelsäure-Wasser-Mischungen. Bearbeitet von Dr. W. Bein. Untersuchung von Handels-Schwefelsäuren auf spezifisches Gewicht, Prozentgehalt und Verunreinigungen. Bearbeitet von Dr. E. Fischer. Mit 11 in den Text gedruckten Figuren . . . . Preis M. 10,—.

Verlagsbuchhandlung von Julius Springer in Berlin.
Monbijouplatz 3.

WISSENSCHAFTLICHE ABHANDLUNGEN

DER

KAISERLICHEN NORMAL-EICHUNGS-KOMMISSION

FORTSETZUNG DER „METRONOMISCHEN BEITRÄGE")

VI. HEFT

SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH 1906

ÜBER DIE GLEICHZEITIGE BESTIMMUNG

DER

TEILUNGSFEHLER ZWEIER MASZSTÄBE

DURCH DIE

METHODE DES DURCHSCHIEBENS

VON

PROFESSOR DR. A. LEMAN

MIT 2 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN

SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH 1906

ISBN 978-3-662-31817-1 ISBN 978-3-662-32643-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-32643-5

VORWORT.

Die nachfolgende Arbeit des Herrn Professor Dr. Leman behandelt den gleichen Gegenstand wie die in Heft IV dieser Abhandlungen erschienene, fast gleichlautend bezeichnete Veröffentlichung des Herrn Professor Dr. Dziobek. Inwieweit die von den Verfassern gegebenen Entwickelungen sich voneinander unterscheiden, wird eine Vergleichung der beiderseitigen Arbeiten lehren müssen.

Wie der zweitgenannte Herr Verfasser gehört auch Herr Professor Dr. Leman nicht mehr zu den Beamten der Normal-Eichungs-Kommission, er ist jetzt Mitglied der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. Da indessen die vorliegende Arbeit aus seiner früheren Beschäftigung bei der Normal-Eichungs-Kommission erwachsen ist und ihr Gegenstand dem Arbeitsgebiet dieser Behörde unmittelbar angehört, ist dem Wunsche nach Veröffentlichung in diesen Abhandlungen gern stattgegeben worden. Die mathematischen Entwickelungen sind durch ein ausgeführtes Zahlenbeispiel erläutert.

INHALTSVERZEICHNIS.

I. Vorbemerkung.

Ein in Heft IV der Wissenschaftlichen Abhandlungen der Kaiserlichen Normal-Eichungs-Kommission erschienener Artikel mit ähnlicher Überschrift von Herrn Prof. Dr. Dziobek nimmt bezug auf eine in dem „Handbuch der physikalischen Maßbestimmungen" von B. Weinstein enthaltene, nicht ganz zutreffende Angabe, an deren Entstehung ich mich insofern mitschuldig fühle, als ich die Veröffentlichung des mathematischen Teiles vorliegender Arbeit bislang verabsäumt habe. Die Gründe, welche mich zu der jetzigen verspäteten Bekanntgabe desselben bestimmen, werden aus den folgenden einleitenden Darlegungen hervorgehen.

II. Die Methode des Durchschiebens.

In dem genannten Werke wird Bd. II S. 274—282 eine Methode zur gleichzeitigen Bestimmung der Teilungsfehler zweier Maßstäbe besprochen, welche von den Herren Leman und Thiesen herrühren und bei der Kaiserlichen Normal-Eichungs-Kommission vielfache Anwendung erfahren haben soll. Der erste Teil dieser Angabe entspricht den Tatsachen nur teilweise und bedarf zunächst einer Klarstellung.[1])

Gegen Ende der siebziger Jahre vorigen Jahrhunderts, da ich bei der Kaiserlichen Normal-Eichungs-Kommission aushilfsweise als Rechner und Beobachter beschäftigt war, wurde ich vor folgende Aufgabe gestellt: Auf einem durchweg in Centimeterintervalle eingeteilten Meterstabe (Martins No. 8) waren durch fortgesetzte Halbierungen und Fünftelungen die Teilungsfehler der in Abständen von je 5 cm aufeinanderfolgenden Teilstriche, zwar nicht vollkommen homogen, aber mit ausreichender Sicherheit bereits bestimmt, und

[1]) Herrn Prof. Thiesens Beteiligung an der Methode glaubte ich aus den mir damals zur Verfügung stehenden Vorlagen entnehmen zu sollen. Auch verweise ich auf die Veröffentlichung des Genannten in den Abhandlungen der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt Bd. 2 S. 97, 98. Weinstein.

es sollten nunmehr die Fehler der übrigen Striche möglichst gleichwertig dazwischen eingeschaltet werden. Von vorgesetzter Seite wurde mir dazu die Anwendung des von P. A. Hansen angegebenen Verfahrens empfohlen, dessen klassisches Werk: Von der Bestimmung der Teilungsfehler eines geradlinigen Maßstabes (Abh. der math.-physik. Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. 10 Nr. VII) damals kürzlich erschienen war.

Der Grundgedanke dieses Verfahrens besteht bekanntlich darin, daß zunächst die einzelnen Intervalle[1]) des zu untersuchenden Maßstabs mit einem Hilfsintervalle von nahe gleicher Größe verglichen werden, sodann aber auch noch alle aus der Verbindung von je zwei, drei usw. aneinanderstoßenden Einzelintervallen entstehenden Strecken der Vergleichung mit je einem entsprechenden Hilfsintervalle unterworfen werden. In dem vorliegenden Falle wäre dasselbe auf jede der aus fünf Intervallen bestehenden Abteilungen des Meterstabs, also zwanzigmal anzuwenden gewesen.

Nun enthält ein Maßstab von fünf Intervallen:

5 einzelne Intervalle,
4 aus 2 Einzelintervallen bestehende Strecken,
3 „ 3 „ „ „
2 „ 4 „ „ „

und schließlich noch die alle fünf Einzelintervalle umfassende Gesamtlänge. Wenn die Vergleichung der letzteren mit einem Hilfsintervalle, da sie zur Bestimmung der inneren Teilungsfehler nichts beizutragen vermag, unterblieb, so wären somit 14 verschiedene Strecken mit 4 entsprechenden Hilfsintervallen zu vergleichen gewesen. Jede Intervallvergleichung besteht aus der Messung von zwei Strichabständen; die Aufgabe würde demnach die Beobachtung von

$$20 \cdot 14 \cdot 2 = 560$$

Strichabständen erfordert haben.

Die Hilfsintervalle können ganz unabhängig voneinander, sogar auf verschiedenen Maßstäben gelegen sein. Ordnet man sie aber auf einem und demselben Stabe an und legt ihre Anfangspunkte zusammen, so bilden sie eine nahezu gleichmäßig geteilte Skale. Aus den obigen Messungen gehen gleichzeitig auch die relativen Längen dieser Hilfsintervalle hervor und liefern in ihrer Gesamtheit wiederum die Teilungsfehler der Hilfsskale, frei-

[1]) Das Wort „Intervall“ bezeichnet zwar im allgemeinen Sinne den Abstand zweier beliebiger Striche einer Teilung voneinander. Der Deutlichkeit des Ausdrucks halber wird es hier, wie bei Hansen, fast ausschließlich in dem engeren Sinne angewendet, wonach es den Abstand zweier benachbarter Striche bedeutet.

lich in so großer Ungleichwertigkeit, daß ihnen eine praktische Bedeutung wohl kaum zugesprochen werden kann.

Durch eine Abänderung des Beobachtungsverfahrens lassen sich nun anscheinend erhebliche Vorteile erreichen. Um das veränderte Verfahren bequem beschreiben zu können, mögen die Striche des Metermaßstabs von links nach rechts fortlaufend mit 0, 1, ..., 100, die der aus vier Einzelintervallen bestehenden Hilfsskale aber umgekehrt von rechts nach links mit 0′ bis 4′ bezeichnet gedacht sein. Man beginnt in der Weise, daß man das erste Intervall der Hilfsskale mit dem ersten Intervall des Maßstabs vergleicht. Es liegen dabei, wenn man sich die Sache möglichst einfach vorstellt, bezw. die Striche 0 und 1′, 1 und 0′ nahe beieinander; man mißt die beiden Abstände {0,1′} und {1,0′}, deren Unterschied dem der beiden Intervalle (1—0) und (1′—0′) gleich ist. Darauf bringt man die Hilfsskale in eine zweite Lage, indem man sie um den Betrag eines Intervalls nach rechts verschiebt, sodaß jetzt die drei Strichpaare 0 und 2′, 1 und 1′, 2 und 0′ zusammentreffen, und mißt nunmehr alle drei Abstände {0,2′}, {1,1′} und {2,0′}. Der Unterschied zwischen den Abständen {1,1′} und {2,0′} ist gleich dem des zweiten Intervalls (2—1) des Meterstabes und dem ersten (1′—0′) der Hilfsskale; der Unterschied zwischen den Abständen {2,0′} und {0,2′} aber gibt gleichzeitig die Vergleichung der Strecke (2—0) auf dem Meterstabe mit der Strecke (2′—0′) der Hilfsskale. Bei der nächsten Lage erhält man in analoger Weise durch die Messungen der vier Strichabstände {0,3′}, {1,2′}, {2,1′}, {3,0′} gleichzeitig die Vergleichungen der Strecken

(3—2) mit (1′—0′),
(3—1) mit (2′—0′),
(3—0) mit (3′—0′).

Fährt man in gleicher Weise fort, so sind bei der 4ten Lage fünf Strichabstände zu messen, bei den 97 folgenden Lagen aber auch nur je fünf, weil die Hilfsskale ja nur fünf Striche besitzt. Bei der 100sten Lage langt der Strich 0′ bei 100 an und geht bei den folgenden Lagen darüber hinaus. Daher folgen dann wieder nur noch je eine Lage mit 4, 3 und 2 zu messenden Strichabständen.

In dem so erhaltenen Beobachtungsmaterial finden sich sämtliche der Vorschrift Hansens entsprechenden Vergleichungen vertreten; man braucht dazu aber nur

$$2\,(2+3+4)+97\cdot 5=503$$

einzelne Beobachtungen von Strichabständen und erhält nebenbei ein merklich bequemeres Arbeitsprogramm. Es ergeben sich dabei aber noch weitere

Vorteile. Einmal ist zu beachten, daß bei der überwiegenden Mehrzahl der verschiedenen Lagen die Hilfsskale mit einem oder mehreren Intervallen in zwei benachbarte Abteilungen des Meterstabs eingreift und hierdurch bei vollkommener Ausnutzung des Beobachtungsmaterials durch strenge Ausgleichung eine gegenseitige Verknüpfung der Striche der verschiedenen Abteilungen untereinander, also eine noch gesteigerte Gleichförmigkeit herbeigeführt wird. Anderseits aber werden jetzt die Teilungsfehler der Hilfsskale mit nahezu vollkommener Gleichwertigkeit und nebst der relativen Gesamtlänge mit sehr hoher Genauigkeit mitbestimmt.

Die hier erörterten Vorzüge scheinen nun allerdings durch einen wesentlichen Nachteil erkauft zu werden. Die aus einer einzelnen Lage der Hilfsskale hervorgehenden Intervalldifferenzen sind streng genommen nicht ganz unabhängig voneinander, indem die verschiedenen Intervalle beziehungsweise gemeinschaftliche Anfangspunkte besitzen, deren Abstände voneinander nur einfach beobachtet, in die Ausgleichungen mit verhältnismäßig zu hohem Gewicht eingehen würden. Dieser Nachteil ist indessen, wie die späteren Erörterungen zeigen werden, nur ein scheinbarer oder wird vielmehr durch andere Umstände aufgehoben, sodaß ihm eine wirkliche Bedeutung nicht beizumessen ist. Ganz ohne Einfluß ist er allerdings nicht; in welcher Weise derselbe sich äußert, kann erst an späterer Stelle erörtert werden.

Diese, damals von mir angestellten Erwägungen fanden bei der vorgesetzten Stelle Zustimmung und es wurden daher die Beobachtungen nach dem beschriebenen Programm ausgeführt, mit der Abweichung jedoch, daß, hauptsächlich zur Erreichung eines Nebenzweckes, eine fünf Intervalle umfassende Hilfsskale zur Anwendung kam[1]). Dabei ging natürlich der ökonomische Nutzen verloren, indem jetzt

$$2\,(2+3+4+5)+96\cdot 6=604$$

einzelne Strichabstände gemessen werden mußten. Der nicht unbeträchtliche Mehraufwand an Beobachtungsarbeit wurde jedoch als nicht besonders ins Gewicht fallend angesehen, gegenüber der durch das noch verstärkte Über-

[1]) Der damaligen Umstände vermag ich mich heute noch bis ins kleinste sicher zu entsinnen. Die Hilfsskale wurde eigens für diesen Zweck von Herrn Mechaniker C. Reichel in Berlin hergestellt und bestand aus einem nur etwa 2 mm dicken und 10 mm breiten Streifen fast reinen Silbers. Sie wurde bei den Beobachtungen unmittelbar auf den Meterstab aufgelegt und erhielt darum die Bezeichnung „Klappe K“. Sie trug 10 Centimeterintervalle, und es bestand ursprünglich die Absicht, die erste Hälfte derselben für die Untersuchung der Striche 0 bis 50 cm auf dem Meterstabe zu benutzen, für die Striche 50 bis 100 cm aber die andere Hälfte der Klappe zu verwenden. Durch ein Mißverständnis des Beobachters wurden dann jedoch sämtliche Intervalle von 0 bis 100 cm auf M. 8 nur mit der ersten Hälfte von K verglichen.

greifen der Hilfsskale in benachbarte Abteilungen des Meterstabs zu erwartenden Verbesserung der Homogenität.

Nach Beendigung der Messungen lehrte bereits eine oberflächliche Betrachtung der Ergebnisse, daß die daraus zu berechnenden Werte der Teilungsfehler im Durchschnitt nicht ganz klein ausfallen würden; daher schien es wünschenswert, zunächst auf einem einfachen Wege möglichst gute Näherungswerte für dieselben abzuleiten, um es bei der dann vorzunehmenden strengen Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate nur noch mit kleinen Zahlen zu tun zu haben. Ein sehr bequemes Verfahren, solche Näherungswerte zu finden, ergab sich aus einer Überlegung, die später berührt werden wird (s. Abschnitt VIII).

Nunmehr aber stellte sich heraus, daß durch die gefundenen Näherungswerte die Beobachtungen bereits so gut dargestellt wurden, daß auch von einer strengen Ausgleichung ein erheblicher Nutzen nicht mehr zu erwarten stand. Nebenher bestand bezüglich der letzteren ein eigentümliches Dilemma, welchem allerdings von vornherein entgegengesehen worden war. Wollte man nämlich, zum ursprünglichen Plane zurückkehrend, die bereits auf anderem Wege ermittelten Werte der Teilungsfehler der 5-cm-Striche unangetastet lassen und sich damit begnügen, die Fehler der übrigen Striche dazwischen einzuschalten, so wäre das allerdings mit verhältnismäßig geringem Aufwand von Rechenarbeit ausführbar gewesen. Dann aber gerade würden wegen der Natur des Näherungsverfahrens die Ergebnisse sich nur um ganz minimale Beträge von den Näherungswerten haben unterscheiden können. Außerdem aber ging damit der oben so sehr betonte Vorteil des Übergreifens ganz verloren; das Beobachtungsmaterial wurde nicht erschöpfend ausgenutzt, und die Ergebnisse konnten darum nicht als vollkommen streng angesehen werden. Um vollständige Ausnutzung zu erreichen, gab es nur einen Weg. Es mußten zunächst die schon bekannten Werte der Fehler der 5-cm-Striche unbeachtet gelassen und die Werte der Fehler aller Striche des ganzen Meterstabs nur aus dem neuen Beobachtungsmaterial abgeleitet werden. Hierbei war natürlich ein starkes Sinken der Gewichte nach der Mitte des Stabes hin unausbleiblich. Hierauf hätten die so gefundenen Werte durch die schon von früher her bekannten verbessert werden müssen, wobei allerdings die Gewichte wieder auf annähernd gleiche Höhe gebracht, gleichzeitig aber auch die den 5-cm-Strichen, wie erwähnt, anhaftende Unhomogenität fast voll wieder eingeführt worden wäre. Eine gewisse Willkür war dabei auch nicht zu vermeiden, weil die Gewichte der aus dem neuen Material sich ergebenden Fehler der 5-cm-Striche mit denen der schon bekannten Werte nicht mehr sicher vergleichbar waren; als absolut streng wären deshalb auch die auf diesem Wege ermittelten Schlußergebnisse nicht zu bezeichnen gewesen. Dieses zweite Verfahren würde freilich eine sehr große Rechenarbeit verursacht haben, welche kaum noch in angemessenem Verhältnis zum Werte seines Ergebnisses gestanden hätte. Indessen wäre es möglich gewesen, wenn man sich einen geringfügigen und mit Rücksicht auf die erwähnte unvermeidliche Willkür praktisch völlig bedeutungslosen Nachlaß an Strenge erlauben durfte, auf erheblich einfachere Weise zum gleichen Ziele zu gelangen. Zu dieser Arbeit fand ich aber, durch andere, dringliche Arbeiten in Anspruch genommen, nicht mehr die erforderliche Zeit, und so verblieben die erst gefundenen Näherungswerte, die dem Bedürfnis ohnehin schon gut genug entsprachen, schließlich als definitive.

Dies ist die, leider nicht ganz rühmlich abgeschlossene, Geschichte der Entstehung des sogenannten Durchschiebeverfahrens, welches sich natürlich auch sonst noch — ob mit Vorteil oder nicht, soll später untersucht werden (s. Abschnitt VI D), — für die gleichzeitige Bestimmung der Teilungsfehler zweier Maßstäbe anwenden läßt. Ich habe darin keine hervorragende oder besonders wichtige Neuerung, sondern lediglich eine unter Umständen vorteilhafte Modifikation des Hansenschen Verfahrens erblickt, letzteres umsomehr, als auch die strenge Ausgleichung der Beobachtungsergebnisse, nachdem nur eine, dem veränderten Beobachtungsverfahren logisch entsprechende, Umgestaltung der rechnerischen Grundlagen erfolgt ist, wieder in allerengstem Anschluß an die elegante Methode Hansens bewirkt werden kann, also die nahe Verwandtschaft des neuen Verfahrens mit dem ursprünglichen auch nach dieser Richtung hin deutlich hervortritt. Aus diesem Grunde habe ich es unterlassen, etwas über den oben geschilderten, nicht zum Abschlusse gekommenen, Versuch zu veröffentlichen; es war nicht zu vermuten, daß bei Wiederanwendung des Verfahrens in anderen Fällen man sich stets mit der näherungsweisen Berechnung ohne nähere Prüfung ihres Charakters begnügen würde. Auch die Darstellung der letzteren in dem Weinsteinschen Buche rührt nicht von mir her, sondern dürfte wohl nur aus meinen, in den Akten der Kaiserlichen Normal-Eichungs-Kommission enthaltenen numerischen Rechnungen abgeleitet worden sein.

III. Verwandtschaft der Methode des Durchschiebens mit dem Verfahren von Hansen.

Das Interesse an diesem Gegenstande ist in neuerer Zeit wieder belebt worden, indem Herr Prof. Dziobek den Mangel an Strenge in dem bislang stets angewendeten näherungsweisen Ausgleichungsverfahren hervorgehoben und in der eingangs erwähnten größeren Abhandlung entfernt hat. Dem Verfasser muß unbedingt darin beigepflichtet werden, daß eine nur näherungsweise Ausgleichung mit dem großen Aufwand von Beobachtungsmaterial, welchen die Anwendung dieses Verfahrens bei nur einigermaßen höheren Strichzahlen erfordert, in üblem Verhältnis steht, auch wenn sie, wie im vorliegenden Falle, weniger die Werte der Unbekannten selbst, als vielmehr nur deren Gewichte verfälschend beeinflußt. Seine Behandlungsweise des Problems ist jedenfalls original, jedoch erscheint es nicht überflüssig, ihr diejenige gegenüberzustellen, welche sich aus der Anlehnung an das geniale Grundprinzip Hansens ergibt.

Herr Dziobek geht, wie er auf S. 5 seiner Abhandlung ausspricht, von der Annahme aus, daß die strenge Ausgleichung bisher allgemein noch nicht versucht worden sei, weil sie für zu umständlich gehalten werde. Er wendet sich dann bezüglich des Ansatzes der Bedingungsgleichungen und der strengen weiteren Behandlung derselben sogleich ausschließlich dem besonderen Falle zu, in welchem die beiden nach dem Durchschiebungsverfahren miteinander verglichenen Maßstäbe gleiche Anzahl von Intervallen besitzen. In der Tat bietet wohl dieser Spezialfall praktisch erheblich höheres Interesse, als der allgemeine und verdient schon aus diesem Grunde eine Bevorzugung; er läßt aber auch eine wesentlich bequemere Behandlung zu und zwar wegen eines besonderen Umstandes, welcher abermals die nahe innere Verwandtschaft des vorliegenden Problems mit dem ursprünglichen Hansenschen dokumentiert und in einem neuen Lichte zeigt. Ändert man nämlich bei letzterem das Beobachtungsverfahren dahin ab, daß man die Reihe der allmählich wachsenden Vergleichsintervalle nicht vollständig zur Anwendung bringt, sondern irgendwo abbricht, oder mit anderen Worten, daß man zur Prüfung des Maßstabs eine Hilfsskale von geringerer Länge benutzt, so genügen die so erhaltenen Beobachtungen noch immer zu einer vollständigen Bestimmung der Teilungsfehler; das System der Normalgleichungen nimmt dann aber eine weniger einfache Form an. Es läßt sich trotzdem darauf noch immer mit Nutzen das Prinzip anwenden, welches der von Hansen angegebenen Methode der Auflösung zugrunde liegt, jedoch gehen dabei die besonderen Vorteile verloren, die im Falle der vollständigen Beobachtung dieser Methode erst ihren eigentümlichen Wert verleihen.

Genau ebenso verhält es sich auch bei dem erweiterten Problem, und es herrscht demnach eine strenge Analogie zwischen beiden, derart, daß dem Sonderfalle hier die vollständige Beobachtung dort, dem allgemeinen

Falle hier die ebenfalls als allgemeiner anzusehende unvollständige Beobachtungsart dort entspricht. In dem neuen Sonderfalle, daß der eine Maßstab nur aus einem einzelnen Intervalle besteht, gehen beide Verfahren ineinander über.

Gleichwohl läßt sich das neue Problem im allgemeinen Sinne doch noch erheblich weiter behandeln und bis zu einem Punkte führen, an dem im einzelnen Falle die numerische Schlußrechnung unmittelbar anknüpfen kann.

Bezüglich des Ansatzes der aus den Beobachtungen folgenden Bedingungsgleichungen müssen zunächst einige Bemerkungen vorausgeschickt werden, um Mißverständnissen zu begegnen. Unter allen Umständen folgt der Unterschied irgend einer Strecke gegen eine zweite erst mittelbar aus der Differenz der beiden unmittelbar gemessenen Strichabstände. Da aber alle in Betracht kommenden Streckenunterschiede auf vollkommen gleichartige Weise gefunden werden, so sind sie offenbar als mit den gleichen wahrscheinlichen Fehlern behaftet anzusehen. Wenn nun nach der ursprünglichen Vorschrift Hansens beobachtet worden ist, so sind diese Streckenunterschiede vollkommen unabhängig voneinander, daher ist es durchaus zulässig, sie wie unmittelbar beobachtete Größen gleichen Gewichtes zu behandeln und als solche in die Bedingungsgleichungen einzuführen, wie dies Hansen tatsächlich tut.

Bei dem abgeänderten Beobachtungsverfahren aber liegen die Verhältnisse anders. Man denke sich wieder wie früher, S. 7, die beiden Maßstäbe so zusammengelegt, daß die Strichpaare 0 und $2'$, 1 und $1'$, 2 und $0'$ bezw. nahe beieinander liegen und die drei Strichabstände $\{0,2'\}$, $\{1,1'\}$ und $\{2,0'\}$ gemessen. Dann folgt zwar wie dort, wenn wieder die Strecke zwischen den Strichen 0 und 1 mit $(1-0)$ bezeichnet wird, u. s. f. zunächst:

$$\begin{aligned}(2-1)-(1'-0') &= \{2,0'\}-\{1,1'\},\\ (2-0)-(2'-0') &= \{2,0'\}-\{0,2'\},\end{aligned}$$

aber auch gleichzeitig:

$$(1-0)-(2'-1') = \{1,1'\}-\{0,2'\}.$$

Von diesen drei Intervalldifferenzen wird eine jede auf gleiche Weise als Differenz zweier mit gleichem Gewichte unmittelbar beobachteter Größen gefunden; sie haben also alle drei gleiches Gewicht, also auch gleiche Berechtigung. Da aber eine jede die Folge der beiden anderen ist, so sind sie nicht unabhängig voneinander und dürfen daher nicht in die Bedingungsgleichungen eingeführt werden. Analog würden sich aus den vier beobachteten Strichabständen der nächsten Lage die sechs gleichberechtigten, aber voneinander abhängigen Streckenunterschiede ergeben:

$$
\begin{aligned}
(3-2)-(1'-0') &= \{3,0'\}-\{2,1'\}\\
(3-1)-(2'-0') &= \{3,0'\}-\{1,2'\}\\
(3-0)-(3'-0') &= \{3,0'\}-\{0,3'\}\\
(2-1)-(2'-1') &= \{2,1'\}-\{1,2'\}\\
(2-0)-(3'-1') &= \{2,1'\}-\{0,3'\}\\
(1-0)-(3'-2') &= \{1,2'\}-\{0,3'\}
\end{aligned}
$$

u. s. w. bei den folgenden Lagen.

Es ist aus dieser Betrachtung leicht zu erkennen, daß sich das gegenseitige Verhältnis der beiden Methoden in folgender Weise charakterisieren läßt. Bei dem ursprünglichen Verfahren Hansens werden alle Intervalle und Intervallkombinationen des einen Maßstabs mit nur je einer entsprechenden Strecke des anderen verglichen, wobei die gefundenen Unterschiede unabhängig voneinander sind. Bei dem Durchschiebeverfahren dagegen werden alle Intervalle und Intervallverbindungen des einen Maßstabs mit allen entsprechenden des anderen verglichen, wobei die gefundenen Unterschiede aber vielfältig abhängig voneinander sind.

IV. Die Bedingungsgleichungen.

Um hier zu einwandfreien Bedingungsgleichungen zu gelangen, muß auf die ursprünglich beobachteten Strichabstände zurückgegriffen werden. Die Ausführungen des Herrn Dziobek treffen hierin das Richtige; doch ist es vorteilhaft, eine formale Änderung daran vorzunehmen, welche nicht allein von vornherein gewisse Umständlichkeiten beseitigt, sondern auch in den folgenden Untersuchungen eine bemerkenswerte Symmetrie erzeugt.

Herr Dziobek führt in die Bedingungsgleichungen nicht unmittelbar die kleinen Werte der Teilungsfehler der beiden Maßstäbe ein, sondern die Abstände der Striche von den Nullstrichen oder beliebig gewählten Ausgangspunkten, um dann aus diesen Größen die eigentlichen Fehlerwerte zu berechnen. Dieser Umweg läßt sich in folgender Weise vermeiden. Neben der wirklichen Teilung jedes der beiden Maßstäbe denke man sich noch eine zweite, fehlerfreie vorhanden, deren Anfangs- und Endstrich im allgemeinen nicht mit denen der eigentlichen Teilung zusammenfallen und deren willkürliche

Intervallgröße auch nur näherungsweise, aber nicht vollkommen mit der durchschnittlichen Intervallgröße des Maßstabs übereinstimmt. Dann ist der Abstand des Striches mit der Nummer i bezw. j der wirklichen Teilung vom Nullstriche der ideellen bei dem einen der beiden Maßstäbe

$$i\,w + x_i$$

und bei dem andern

$$j\,\omega + \xi_j,$$

wo w und ω die willkürlichen Intervallgrößen, x_i und ξ_j aber positive oder negative kleine Größen sind.[1])

Die Gleichung

$$x_0 = 0$$

bedeutet dann offenbar, daß der Anfangsstrich des ersten Maßstabs mit dem Anfangsstriche der zugehörigen ideellen Teilung zusammenfällt. Ist dann n die Anzahl der Intervalle dieses Maßstabs, daher auch die Nummer des Endstriches, und x_n von Null verschieden, so ist

$$x_i - \frac{i}{n}\,x_n$$

der Wert des inneren Teilungsfehlers des Striches mit der Nummer i, positiv im Sinne der fortschreitenden Bezifferung, und folglich x_i dieser innere Teilungsfehler unmittelbar, falls auch $x_n = 0$, d. h. der Endstrich des Maßstabs mit dem Endstriche der zugehörigen ideellen Teilung zusammenfällt. Es kann sofort bemerkt werden, daß von den drei Größen w, x_0 und x_n zwei jederzeit willkürlich gewählt werden können, daß damit aber die dritte relativ bestimmt wird. Analoges gilt für den anderen Maßstab, bei welchem die Anzahl der Intervalle ν sei. Dabei ist die Voraussetzung zulässig:

$$\nu \angle n.$$

1) Die einfache und zweckmäßige Bezeichnungsweise Hansens würde sich zwar hier in leichter Modifikation beibehalten lassen, aber mitunter zu Schwerfälligkeiten des Ausdrucks im Texte Veranlassung geben. Es erschien aus diesem Grunde rätlich und auch der Übersichtlichkeit in den Formeln förderlich, sie durch die obige zu ersetzen. Auch im übrigen erwies sich die Absicht, die in den folgenden Entwickelungen vorkommenden Größen, welche mit in der Hansenschen Arbeit enthaltenen gleiche oder nahe verwandte Bedeutung besitzen, mit denselben oder verwandten Buchstaben zu bezeichnen, wie dort, nicht überall durchführbar. Soweit angängig, ist sie aber befolgt worden. Nur ist an Stelle des von Hansen als Index benutzten Schriftzeichens k hier das etwas stärker ins Auge fallende Zeichen i verwendet worden.

Es seien nun i, j die Nummern beliebiger Striche auf dem ersten, bezw zweiten Maßstabe. Bei irgend einer der gegenseitigen Lagen der letzteren wird der Abstand $\{i, j\}$ gemessen. (Vergl. die Figur 1, in welcher die dick gezeichneten Striche die wirklichen Teilstriche, die dünn gezogenen die Striche der beiden ideellen Teilungen vorstellen.) Dann ist unmittelbar:

$$x_i + \xi_j + \{i, j\} = e_{i,j}\,.$$

Die Größe $e_{i,j}$ bedeutet nach der Figur den Abstand zwischen den beiden ideellen Strichen, welche den wirklichen Strichen mit den Nummern i und j entsprechen. Wenn $\omega = w$ wäre, so würde $e_{i,j}$ bei allen ein und derselben relativen Lage der Maßstäbe angehörigen Beobachtungen den gleichen, aber unbekannten Wert besitzen, der demnach als neue Unbekannte in den

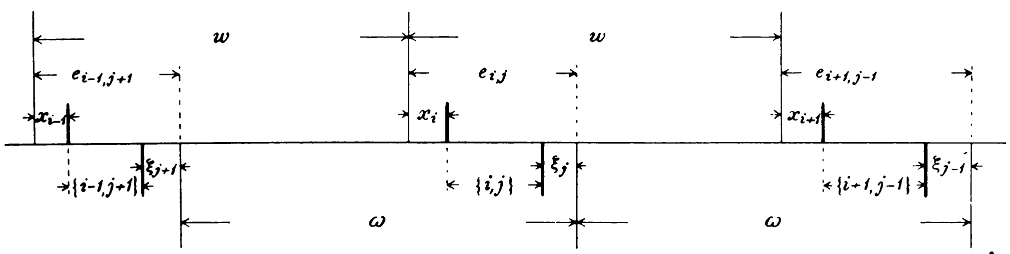

Fig. 1.

Bedingungsgleichungen auftreten würde. Ist aber $\omega > w$, so ist $e_{i+1,j-1}$ um den Betrag $\omega - w$ größer als $e_{i,j}$. Setzt man daher $\omega - w = 2m$ und für ein bestimmtes Wertepaar i, j:

$$e_{i,j} = z,$$

so wird:

$$e_{i \pm k, j \mp k} = z \pm 2\,k\,m\,,$$

und es treten in den Bedingungsgleichungen die beiden Größen m und z als neue Unbekannte auf.

Jede Lage ergibt eine Gruppe von Bedingungsgleichungen und führt eine neue, dieser Lage eigentümliche Unbekannte z ein, während m allen Lagen gemeinschaftlich ist. Es bedarf kaum des Hinweises, daß, wenn den vier Größen x_0, x_n, ξ_0 und ξ_ν sämtlich der Wert Null beigelegt wird, im Falle $\nu < n$ die Größe $\nu 2m$ den Überschuß der Gesamtlänge des kürzeren Maßstabs über den entsprechenden Teilbetrag der Gesamtlänge des längeren, im Falle $\nu = n$ also unmittelbar den Unterschied der Gesamtlängen beider Maßstäbe angibt. Die Größen z spielen in den folgenden Betrachtungen fast genau dieselbe Rolle, wie in der Arbeit Hansens die mit dem Buchstaben m bezeichneten, haben aber, wie sich später zeigen wird, eine wesentlich andere Bedeutung als jene.

Nimmt man, der Vollständigkeit halber, auch diejenigen beiden Lagen, bei welchen nur die Anfangs- und Endstriche in Betracht kommen, mit hinzu, trotzdem sie gar keine Intervalldifferenzen ergeben und somit zur Bestimmung der Teilungsfehler nichts beitragen können, so ist bei passender Wahl derjenigen Werte $e_{i,j}$, welche z genannt werden, das vollständige System der Bedingungsgleichungen das folgende:

$$
\begin{array}{lllrcl}
x_0 & +\xi_0 & -z_0 & & = & -\{0,0\} \\
\hline
x_0 & +\xi_1 & -z_1 & -m & = & -\{0,1\} \\
x_1 & +\xi_0 & -z_1 & +m & = & -\{1,0\} \\
\hline
x_0 & +\xi_2 & -z_2 & -2m & = & -\{0,2\} \\
x_1 & +\xi_1 & -z_2 & & = & -\{1,1\} \\
x_2 & +\xi_0 & -z_2 & +2m & = & -\{2,0\} \\
\hline
\multicolumn{6}{c}{\text{u. s. w. bis:}} \\
\hline
x_0 & +\xi_\nu & -z_\nu & -\nu m & = & -\{0,\nu\} \\
x_1 & +\xi_{\nu-1} & -z_\nu & -(\nu-2)m & = & -\{1,(\nu-1)\} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
x_\nu & +\xi_0 & -z_\nu & +\nu m & = & -\{\nu,0\} \\
\hline\hline
x_1 & +\xi_\nu & -z_{\nu+1} & -\nu m & = & -\{1,\nu\} \\
x_2 & +\xi_{\nu-1} & -z_{\nu+1} & -(\nu-2)m & = & -\{2,(\nu-1)\} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
x_{\nu+1} & +\xi_0 & -z_{\nu+1} & +\nu m & = & -\{(\nu+1),0\} \\
\hline
x_2 & +\xi_\nu & -z_{\nu+2} & -\nu m & = & -\{2,\nu\} \\
x_3 & +\xi_{\nu-1} & -z_{\nu+2} & -(\nu-2)m & = & -\{3,(\nu-1)\} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
x_{\nu+2} & +\xi_0 & -z_{\nu+2} & +\nu m & = & -\{(\nu+2),0\} \\
\hline
\multicolumn{6}{c}{\text{u. s. w. bis:}} \\
\hline
x_{n-\nu} & +\xi_\nu & -z_n & -\nu m & = & -\{(n-\nu),\nu\} \\
x_{n-\nu+1} & +\xi_{\nu-1} & -z_n & -(\nu-2)m & = & -\{(n-\nu+1),(\nu-1)\} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\
x_n & +\xi_0 & -z_n & +\nu m & = & -\{n,0\} \\
\hline\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
x_{n-\nu+1} + \xi_\nu & - z_{n+1} - (\nu - 1)\, m & = & -\{(n-\nu+1), \nu\} \\
x_{n-\nu+2} + \xi_{\nu-1} & - z_{n+1} - (\nu - 3)\, m & = & -\{(n-\nu+2), (\nu-1)\} \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
x_n \quad + \xi_1 & - z_{n+1} + (\nu - 1)\, m & = & -\{n, 1\} \\
\hline
x_{n-\nu+2} + \xi_\nu & - z_{n+2} - (\nu - 2)\, m & = & -\{(n-\nu+2), \nu\} \\
x_{n-\nu+3} + \xi_{\nu-1} & - z_{n+2} - (\nu - 4)\, m & = & -\{(n-\nu+3), (\nu-1)\} \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \cdot \\
x_n \quad + \xi_2 & - z_{n+2} + (\nu - 2)\, m & = & -\{n, 2\}
\end{array}
$$

u. s. w. bis:

$$
\begin{array}{lllll}
x_{n-1} \quad + \xi_\nu & - z_{n+\nu-1} \quad - m & = & -\{(n-1), \nu\} \\
x_n \quad + \xi_{\nu-1} & - z_{n+\nu-1} \quad + m & = & -\{n, (n-1)\} \\
\hline
x_n \quad + \xi_\nu & - z_{n+\nu} & = & -\{n, \nu\}.
\end{array}
$$

Es ist sofort zu überblicken, daß das System im ganzen $(n+1)(\nu+1)$ Gleichungen enthält, welche in $n+\nu+1$ Gruppen zerfallen. Da jede Gruppe die ihr eigentümliche Unbekannte z einführt, so kommen zu den $n+1$ Unbekannten x und $\nu+1$ Unbekannten ξ noch $n+\nu+1$ Unbekannte z und die Unbekannte m hinzu; die Gesamtzahl aller Unbekannten ist daher $2(n+\nu+2)$. In der Natur des Problems liegt es, daß von den $n+\nu+3$ Unbekannten x, ξ, m, vier beliebige willkürlich gewählt werden müssen. Da anderseits die erste und letzte Bedingungsgleichung an sich bedeutungslos sind, bei ihrer Weglassung aber auch die beiden Unbekannten z_0 und $z_{n+\nu}$ mit in Wegfall kommen, so ist die Anzahl der wirklich überschüssigen Bedingungsgleichungen:

$$(n+1)(\nu+1) - (2(n+\nu+2) - 4) = (n-1)(\nu-1).$$

Das Verständnis der folgenden algebraischen Betrachtungen wird durch die unmittelbare Anschauung des Baues der zu behandelnden Gleichungen außerordentlich unterstützt. Aus diesem Grunde ist das ganze System der Bedingungsgleichungen in folgendem Schema I für die beiden, aus Zweckmäßigkeitsgründen gewählten Werte $n=8$ und $\nu=5$ dargestellt. Unter den im Kopfe bezeichneten Unbekannten sind darin die zugehörigen Koeffizienten der verschiedenen Gleichungen numerisch aufgeführt.

Schema I.

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	ξ_0	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}	z_{11}	z_{12}	z_{13}	m	=
+1									+1						−1																−{0,0'}
+1										+1						−1													−1	−{0,1'}
	+1								+1						−1													+1	−{1,0'}
+1											+1						−1												−2	−{0,2'}
	+1								+1						−1														−{1,1'}
		+1						+1								−1												+2	−{2,0'}
+1												+1						−1											−3	−{0,3'}
	+1										+1						−1											−1	−{1,2'}
		+1							+1								−1											+1	−{2,1'}
			+1					+1									−1											+3	−{3,0'}
+1													+1						−1										−4	−{0,4'}
	+1											+1						−1										−2	−{1,3'}
		+1									+1						−1											−{2,2'}
			+1						+1								−1										+2	−{3,1'}
				+1				+1										−1										+4	−{4,0'}
+1														+1						−1									−5	−{0,5'}
	+1												+1						−1									−3	−{1,4'}
		+1											+1						−1									−1	−{2,3'}
			+1								+1								−1									+1	−{3,2'}
				+1						+1										−1									+3	−{4,1'}
					+1			+1											−1									+5	−{5,0'}.
	+1														+1							−1								−5	−{1,5'}
		+1											+1							−1								−3	−{2,4'}
			+1										+1								−1								−1	−{3,3'}
				+1								+1										−1								+1	{4,2'}
					+1						+1											−1								+3	−{5,1'}
						+1		+1												−1								+5	−{6,0'}
		+1													+1								−1							−5	−{2,5'}
			+1												+1								−1							−3	−{3,4'}
				+1										+1									−1							−1	−{4,3'}
					+1								+1											−1							+1	−{5,2'}
						+1						+1													−1							+3	−{6,1'}
							+1	+1															−1							+5	−{7,0'}
			+1														+1									−1						−5	−{3,5'}
				+1												+1									−1						−3	−{4,4'}
					+1										+1										−1						−1	−{5,3'}
						+1								+1												−1						+1	−{6,2'}
							+1						+1														−1						+3	−{7,1'}
								+1	+1																−1						+5	−{8,0'}
				+1														+1										−1					−4	−{4,5'}
					+1												+1										−1					−2	−{5,4'}
						+1										+1											−1						−{6,3'}
							+1								+1													−1					+2	−{7,2'}
								+1						+1															−1					+4	−{8,1'}
					+1														+1											−1				−3	−{5,5'}
						+1												+1											−1				−1	−{6,4'}
							+1										+1												−1				+1	−{7,3'}
								+1								+1														−1				+3	−{8,2'}
						+1														+1												−1			−2	−{6,5'}
							+1												+1												−1				−{7,4'}
								+1										+1													−1			+2	−{8,3'}
							+1														+1													−1		−1	−{7,5'}
								+1												+1													−1		+1	−{8,4'}
								+1														+1															−1			−{8,5'}

Von den obigen Gleichungen könnten, wie bereits erwähnt, die erste und letzte einfach weggelassen werden, da sie der Natur der Sache nach zur Bestimmung der Teilungsfehler nichts beitragen; ihre Hinzunahme aber bildet das Analogon zu dem Kunstgriffe, mittels dessen Hansen bei seinem einfacheren Falle die so elegante Lösung ermöglicht, indem er desfalls die den bloßen Unterschied der Gesamtlänge des zu untersuchenden Maßstabs gegen ein beliebiges anderes Intervall angebende und daher für die Bestimmung der Teilungsfehler einflußlose Gleichung mit hinzuzieht. Natürlich brauchen die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen, also die Größen $\{0, 0\}$ und $\{n, \nu\}$ nicht die Ergebnisse von Messungen zu sein, sondern können willkürlich angenommen werden; ihr Einfluß betrifft lediglich die beiden Unbekannten z_0 und $z_{n+\nu}$, welche bei der Weglassung der beiden Gleichungen mit in Wegfall kommen würden. Hansen führt in der, alle seine Schriften auszeichnenden, zuweilen fast an Pedanterie streifenden Gründlichkeit sogar den strengen Nachweis, daß tatsächlich die willkürliche Annahme jenes Wertes (bei ihm handelt es sich nur um einen solchen) weder auf die Werte der übrigen Unbekannten, noch auf deren Gewichte irgendwelchen Einfluß ausübt; hier kann dieser Punkt, der ja eigentlich von vornherein als selbstverständlich einleuchtet, beiseite gelassen werden.

Die Unbekannten m bei Hansen vermitteln die Bestimmung der Längen der bei den Beobachtungen verwendeten Hilfsintervalle; die ihnen hier entsprechenden Unbekannten z haben keinerlei praktische Bedeutung und treten lediglich als lästige, aber unvermeidliche Nebengrößen auf, an deren Mitberechnung nichts gelegen ist. Anscheinend wäre es daher das Einfachste, sie unmittelbar aus den Bedingungsgleichungen zu eliminieren, bevor man noch zur Aufstellung der Normalgleichungen für die übrigen Unbekannten schreitet. Es wäre dies leicht zu bewerkstelligen, ohne an Strenge etwas zu vergeben, indem man zur Elimination von z_i einfach das Mittel sämtlicher Gleichungen der $(i+1)$ten Gruppe benutzt. Da nämlich z_i nur in den Gleichungen dieser Gruppe vorkommt, so ist deren Summe ja die Normalgleichung für z_i. Das Beschreiten dieses Weges bietet aber keinen Vorteil, sondern führt lediglich zu Unzuträglichkeiten. Wegen der Entstehung von Bruchkoeffizienten in den Bedingungsgleichungen, welche mit Rücksicht auf die Gewichte nicht anders als durch die Multiplikation mit dem großen Generalnenner in ganze Zahlen umgewandelt werden dürfen, erhalten die Koeffizienten der Normalgleichungen sehr große und verwickelten Bildungsgesetzen unterworfene Werte und werden dadurch für den hier zu verfolgenden Zweck, jene Unbekannten sowohl, als auch die ihnen zukommenden Gewichte in unbestimmter Form darzustellen, d. h. ein einfaches Auflösungsverfahren abzuleiten, recht ungeeignet. Obwohl es nicht ausgeschlossen erscheint, das Ziel auch auf diesem Wege erreichen zu können, ist es doch vorzuziehen, einen bequemeren einzuschlagen.

V. Das System der Normalgleichungen.

Unter der Voraussetzung, daß jeder der Werte $\{i, j\}$ das Mittel aus der gleichen Anzahl von Einzelmessungen darstellt, hat jede der obigen Bedingungsgleichungen dasselbe Gewicht, welches der Einheit gleichgesetzt werden kann, und es geht daher aus ihnen das folgende System von Normalgleichungen hervor:

$$
1) \ldots \left\{
\begin{array}{ll}
(i=0,1\ldots\ldots n) & (\nu+1)\,x_i + [\xi_k]_0^\nu - [z_k]_i^{i+\nu} - a_i m = X \\
(i=0,1\ldots\ldots \nu) & (n+1)\,\xi_i + [x_k]_0^n - [z_k]_i^{i+n} + \alpha_i m = \Xi_i \\
(i=0,1\ldots\ldots \nu) & (i+1)\,z_i - [x_k]_0^i - [\xi_k]_0^i \\
(i=\nu+1\ldots\ldots n) & (\nu+1)\,z_i - [x_k]_{i-\nu}^i - [\xi_k]_0^\nu \\
(i=n+1\ldots n+\nu) & (n+\nu+1-i)\,z_i - [x_k]_{i-\nu}^n - [\xi_k]_{i-n}^\nu \\
& b\,m - [a_k x_k]_0^n + [\alpha_k \xi_k]_0^\nu = M.
\end{array}
\right.
\qquad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} = Z_i
$$

Hierin ist,

$$
2) \ldots \left\{
\begin{array}{ll}
 & \text{wenn } 2\nu \leqq n: \\
(i=0,1\ldots\ldots \nu) & a_i = \tfrac{1}{2}(\nu-i)(\nu-i+1) \\
(i=\nu\ldots\ldots n-\nu) & a_i = 0 \\
(i=n-\nu\ldots n) & a_i = -\tfrac{1}{2}(n-\nu-i)(n-\nu-i-1), \\
 & \text{wenn dagegen } 2\nu \geqq n: \\
(i=0\ldots\ldots n-\nu) & a_i = \tfrac{1}{2}(\nu-i)(\nu-i+1) \\
(i=n-\nu\ldots\ldots \nu) & a_i = \tfrac{1}{2}(2\nu-n+1)(n-2i) \\
(i=\nu\ldots\ldots n) & a_i = -\tfrac{1}{2}(n-\nu-i)(n-\nu-i-1), \\
 & \text{ferner in beiden Fällen:} \\
(i=0\ldots\ldots \nu) & \alpha_i = \tfrac{1}{2}(2n-\nu+1)(\nu-2i) \\
 & b = \tfrac{1}{6}\nu(\nu+1)(\nu+2)(2n-\nu+1).
\end{array}
\right.
$$

Die Werte X_i, Ξ_i, Z_i und M setzen sich aus den durch die Beobachtungen erhaltenen Zahlengrößen $\{i, j\}$ zusammen, und zwar die drei ersten in folgender Weise:

$$
\text{a)} \ldots \left\{
\begin{array}{ll}
(i=0,1\ldots\ldots n) & X_i = -\left[\{i,k\}\right]_{k=0}^{k=\nu} \\
(i=0,1\ldots\ldots \nu) & \Xi_i = -\left[\{k,i\}\right]_{k=0}^{k=n} \\
(i=0,1\ldots\ldots \nu) & Z_i = \left[\{k,(i-k)\}\right]_{k=0}^{k=i} \\
(i=\nu+1,\ldots\ldots n) & Z_i = \left[\{(i-\nu+k),(\nu-k)\}\right]_{k=0}^{k=\nu} \\
(i=n+1,\ldots n+\nu) & Z_i = \left[\{(i-\nu+k),(\nu-k)\}\right]_{k=0}^{k=n+\nu-i}
\end{array}
\right.
$$

Die Berechnung von M ist im bestimmten Falle zwar etwas umständlicher, aber auch noch ganz leicht zu bewirken; die allgemeine Formel für diese Größe aber wird recht unübersichtlich und ist deshalb hier nicht aufgeführt. Auch wird sich zeigen, daß es der Berechnung nur bedarf, wenn man auf die Anwendung der Kontrollformel β) auf S. 26 nicht verzichten will. Ebenso ist die Kenntnis des Bildungsgesetzes der Zahlenkoeffizienten a_i und α_i nur aus theoretischen Gründen erforderlich, ihre numerische Berechnung aber entbehrlich.

Der Anschaulichkeit wegen sind wieder die Koeffizienten des ganzen Systems der Normalgleichungen in dem Schema II für den bestimmten Fall $n = 8$, $\nu = 5$ zusammengestellt.

Schema II.

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	ξ_0	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7	z_8	z_9	z_{10}	z_{11}	z_{12}	z_{13}	m	=
6									1	1	1	1	1	1	−1	−1	−1	−1	−1	−1									−15	X_0
	6								1	1	1	1	1	1		−1	−1	−1	−1	−1	−1								−10	X_1
		6							1	1	1	1	1	1			−1	−1	−1	−1	−1	−1							−6	X_2
			6						1	1	1	1	1	1				−1	−1	−1	−1	−1	−1						−3	X_3
				6					1	1	1	1	1	1					−1	−1	−1	−1	−1	−1					0	X_4
					6				1	1	1	1	1	1						−1	−1	−1	−1	−1	−1				+3	X_5
						6			1	1	1	1	1	1							−1	−1	−1	−1	−1	−1			+6	X_6
							6		1	1	1	1	1	1								−1	−1	−1	−1	−1	−1		+10	X_7
								6	1	1	1	1	1	1									−1	−1	−1	−1	−1	−1	+15	X_8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	9						−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1						+30	Ξ_0
1	1	1	1	1	1	1	1	1		9						−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1					+18	Ξ_1
1	1	1	1	1	1	1	1	1			9						−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1				+6	Ξ_2
1	1	1	1	1	1	1	1	1				9						−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1			−6	Ξ_3
1	1	1	1	1	1	1	1	1					9						−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1		−18	Ξ_4
1	1	1	1	1	1	1	1	1						9						−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−30	Ξ_5
−1									−1						1															Z_0
−1	−1								−1	−1						2														Z_1
−1	−1	−1							−1	−1	−1						3													Z_2
−1	−1	−1	−1						−1	−1	−1	−1						4												Z_3
−1	−1	−1	−1	−1					−1	−1	−1	−1	−1						5											Z_4
−1	−1	−1	−1	−1	−1				−1	−1	−1	−1	−1	−1						6										Z_5
	−1	−1	−1	−1	−1	−1			−1	−1	−1	−1	−1	−1							6									Z_6
		−1	−1	−1	−1	−1	−1		−1	−1	−1	−1	−1	−1								6								Z_7
			−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1									6							Z_8
				−1	−1	−1	−1	−1		−1	−1	−1	−1	−1										5						Z_9
					−1	−1	−1	−1			−1	−1	−1	−1											4					Z_{10}
						−1	−1	−1				−1	−1	−1												3				Z_{11}
							−1	−1					−1	−1													2			Z_{12}
								−1						−1														1		Z_{13}
−15	−10	−6	−3	0	+3	+6	+10	+15	+30	+18	+6	−6	−18	−30															420	M

Führt man nunmehr nach dem Vorgange Hansens in dieses System von $2(n+\nu+2)$ Gleichungen Summe und Differenz der Fehler je zweier gleich weit von den Enden der Maßstäbe gelegener Striche ein und verfährt in entsprechender Weise auch mit den Größen X_i, Ξ_i und Z_i, so zerfällt dasselbe in zwei voneinander völlig unabhängige Systeme, deren jedes nur etwa halb soviel Unbekannte und Gleichungen enthält und darum in der weiteren Behandlung erhebliche Erleichterung gewährt.

Aus Gründen, welche bereits auf S. 11 angedeutet sind, ist es aber ratsam, die Verfolgung des allgemeinen Problems hier vorläufig abzubrechen und sich vorerst derjenigen des engeren zuzuwenden, welches durch den besonderen Fall gebildet wird, in welchem $\nu = n$ ist.

VI. Ausführliche Behandlung des Sonderfalles $\nu = n$.

A. Auflösung der Normalgleichungen.

1.

In diesem Sonderfalle nimmt, wie ein Blick auf das Schema II lehrt, das System der Normalgleichungen insofern eine eigentümliche Form an, als die Gleichungen, welche die zweite Abteilung bilden, an Anzahl und Form denen der ersten Abteilung vollkommen gleich werden. Dieser Umstand bietet Gelegenheit, den bereits erwähnten Kunstgriff Hansens mit entsprechendem Vorteil zum zweiten Male, freilich in etwas anderem Sinne, darauf anzuwenden, indem man Differenz und Summe der Fehler der mit gleichen Nummern bezeichneten Striche der beiden Maßstäbe einführt. Diese Transformation der Gleichungen ist zuerst vorzunehmen.

Setzt man also:

$$\text{b)} \quad . \; . \; . \quad (i = 0, 1 \; . \; . \; . \; . \; n) \qquad \begin{cases} \delta_i = x_i - \xi_i, & \Delta_i = X_i - \Xi_i, \\ \sigma_i = x_i + \xi_i, & \Sigma_i = X_i + \Xi_i \end{cases}$$

und beachtet, daß, wenn $\nu = n$ ist, für alle Werte von $i = 0, 1 \; . \; . \; . \; n$:

$$3) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad \begin{cases} a_i = \frac{1}{2}(n+1)(n-2i), \\ b = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)^2(n+2) \end{cases}$$

wird, so gehen die Gleichungen 1) über in die folgenden beiden getrennten Systeme:

$$4a) \quad (i = 0, 1 \ldots n) \qquad (n+1)\,\delta_i - [\delta_k]_0^n - 2\,a_i\,m \quad = \Delta_i,$$

$$4b) \qquad b\,m - [a_k\,\delta_k]_0^n = M,$$

$$5a) \quad (i = 0, 1 \ldots n) \qquad (n+1)\,\sigma_i + [\sigma_k]_0^n - 2\,[z_k]_i^{i+n} = \Sigma_i,$$

$$5b) \quad \left.\begin{cases} (i = 0, 1 \ldots n) & 2\,(i+1)\,z_i - 2\,[\sigma_k]_0^i \\ (i = n, \ldots 2n) & 2\,(2\,n+1-i)\,z_i - 2\,[\sigma_k]_{i-n}^n \end{cases}\right\} = 2\,Z_i,$$

Das durch die allgemeinen Gleichungen 4a) und 4b) dargestellte System von $n+2$ Gleichungen enthält nur noch die $n+2$ Unbekannten $\delta_0 \ldots \delta_n$ und m, das aus den $3\,n+2$ Gleichungen 5a) und 5b) bestehende[1]) nur die $3\,n+2$ Unbekannten $\sigma_0 \ldots \sigma_n$ und $z_0 \ldots z_{2n}$. Beide Systeme sind unter abermaliger Anwendung des Hansenschen Prinzips weiter zu behandeln.

2.

In das System 4a), 4b) führe man ein:

$$c) \quad \begin{cases} \mathfrak{s}_i = \delta_i + \delta_{n-i}, & \mathfrak{S}_i = \Delta_i + \Delta_{n-i}, \\ \mathfrak{d}_i = \delta_i - \delta_{n-i}, & \mathfrak{D}_i = \Delta_i - \Delta_{n-i}. \end{cases}$$

Dabei ist jedoch zu unterscheiden, ob

$$n = 2\,p,$$

also eine gerade Zahl, oder

$$n = 2\,q + 1,$$

also eine ungerade Zahl ist. In letzterem Falle sind die δ und Δ durchweg paarweise vorhanden und es wird:

$$\mathfrak{s}_q = \delta_q + \delta_{q+1}, \qquad \mathfrak{S}_q = \Delta_q + \Delta_{q+1},$$
$$\mathfrak{d}_q = \delta_q - \delta_{q+1}, \qquad \mathfrak{D}_q = \Delta_q - \Delta_{q+1};$$

im anderen Falle aber bleiben δ_p und Δ_p vereinzelt, daher werden:

$$\mathfrak{d}_p = 0, \qquad \mathfrak{D}_p = 0,$$

und es seien:

$$c') \quad \mathfrak{s}_p = 2\delta_p, \qquad \mathfrak{S}_p = 2\Delta_p.$$

---

[1]) Die Gleichungen 5b) erscheinen hier mit dem Faktor 2 multipliziert, damit dem ganzen System die Eigenschaft erhalten bleibt, in bezug auf die Koeffizienten der linken Seite zur Diagonale symmetrisch zu sein.

Diese Substitutionen haben den Erfolg, das ganze vorliegende System von Gleichungen abermals in zwei voneinander unabhängige zu spalten, von denen jedes nur etwa halb soviel Unbekannte enthält, als das ursprüngliche.

3.

Das aus der Einführung der Summen hervorgehende System wird durch die folgenden allgemeinen Gleichungen dargestellt.

Wenn $n = 2q + 1$, durch:

$$6\text{a})\quad \ldots\ldots\ (i = 0, 1 \ldots q)\qquad (n+1)\mathfrak{z}_i - 2\left[\mathfrak{z}_k\right]_0^q = \mathfrak{S}_i,$$

wenn aber $n = 2p$ ist, durch:

$$6\text{b})\quad \ldots\ (i = 0, 1 \ldots p-1)\qquad \begin{aligned}(n+1)\,\mathfrak{z}_i - 2\left[\mathfrak{z}_k\right]_0^{p-1} - \mathfrak{z}_p &= \mathfrak{S}_i,\\ p\,\mathfrak{z}_p - \left[\mathfrak{z}_k\right]_0^{p-1} &= \tfrac{1}{2}\mathfrak{S}_p.\end{aligned}$$

Dieses System von $q+1$ bezw. $p+1$ Gleichungen enthält nur noch die Unbekannten $\mathfrak{z}_0 \ldots \mathfrak{z}_q$ bezw. $\mathfrak{z}_p$, ist dagegen frei von der Unbekannten m. Es würde demnach zur Berechnung der $\mathfrak{z}$ gerade ausreichen, wenn die Gleichungen unabhängig voneinander wären. Dies ist aber nicht der Fall, denn in der Summe der linken Seiten werden alle Koeffizienten gleich Null. Demzufolge muß auch die Summe der rechten Seiten verschwinden, was sofort zu der Kontrollgleichung führt:

$$\alpha)\quad \ldots\ldots\quad \left[\mathfrak{S}_i\right]_0^q = 0 \ \text{bezw.}\ \left[\mathfrak{S}_i\right]_0^{p-1} + \tfrac{1}{2}\,\mathfrak{S}_p = 0,$$

welche auch umgeformt werden kann in:

$$\alpha')\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\quad \left[\Delta_i\right]_0^n = 0.$$

Von den Unbekannten $\mathfrak{z}$ kann irgend eine, z. B. $\mathfrak{z}_t$ willkürlich gewählt werden, dann ergeben sich aus 6a) und 6b), indem man im Falle $n-2p$ die letzte der Gleichungen 6b) verdoppelt, die Werte der übrigen Unbekannten durch bloße Subtraktion der $\mathfrak{z}_t$ mit dem Faktor $n+1$ multipliziert enthaltenden Gleichung von allen übrigen:

$$7)\quad \ldots\ldots\ldots\quad \mathfrak{z}_i = \mathfrak{z}_t + \frac{\mathfrak{S}_i - \mathfrak{S}_t}{n+1}.$$

Die Auswahl derjenigen Unbekannten, welcher hier ein willkürlicher Wert beizulegen ist, steht zwar zunächst völlig frei, ist aber für das Folgende von einem gewissen bindenden Einfluß. Es läßt sich nämlich schon jetzt im voraus überblicken, daß auch von den bereits eingeführten Unbekannten $\mathfrak{d}_i$ und ebenso von den später (S. 27) einzuführenden s_i und d_i je eine unbestimmbar bleiben und daher willkürlich anzunehmen sein wird. Vergegenwärtigt man sich aber den Zusammenhang dieser Substituten mit den ursprünglichen Unbekannten x_i und ξ_i, so bedarf es nur geringer Überlegung, um einzusehen, daß die vier willkürlich gewählten notwendig zu demselben Index gehören müssen. Bevorzugt man hier $\mathfrak{s}_t$ und dementsprechend dann auch $\mathfrak{d}_t$, s_t und d_t, so ist das gleichbedeutend damit, daß den vier Teilungsfehlern x_t, x_{n-t} ξ_t, ξ_{n-t} willkürliche Werte beigelegt werden. Ein gegebenes System der Teilungsfehler eines Maßstabs kann aber jederzeit in bekannter Weise so umgewandelt werden, daß die Fehler zweier beliebiger Striche vorgeschriebene Werte annehmen. Daher bedeutet es keine unzulässige Spezialisierung, wenn statt eines beliebigen Index t der bestimmte 0 gewählt wird.

Hierfür gibt die Gleichung 7) insbesondere:

$$\text{A)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{s}_i = \mathfrak{s}_0 + \frac{\mathfrak{S}_i - \mathfrak{S}_0}{n+1}$$

Wird dann allen vier Größen $\mathfrak{s}_0$, $\mathfrak{d}_0$, s_0, d_0 der willkürliche Wert Null beigelegt, so erhalten auch x_0, x_n, ξ_0 und ξ_n sämtlich den Wert Null und die übrigen x und ξ sind unmittelbar die inneren Teilungsfehler. Da es aber, wenn auch nur in selteneren Fällen, vorkommen kann, daß x_0, x_n, ξ_0 und ξ_n vorgeschriebene Werte erhalten sollen, so sind die daraus ohne Mühe abzuleitenden Größen $\mathfrak{s}_0$, $\mathfrak{d}_0$, s_0, d_0 in dieser unbestimmten Form stehen gelassen worden, die auch den Vorteil für sich hat, allgemeiner zu erscheinen.

4.

Die Einführung der Differenzen in die Gleichungen 4a) und 4b) liefert im Falle $n = 2q + 1$ das folgende System:

$$\text{8a)} \quad \ldots\ldots \quad (i = 0, 1 \ldots q) \qquad (n+1)\,\mathfrak{d}_i - 4\,a_i\,m = \mathfrak{D}_i,$$

$$\text{8b)} \quad \ldots\ldots \qquad b\,m - [a_k\,\mathfrak{d}_k]_0^q = M,$$

und diese Gleichungen bleiben, da $\mathfrak{d}_p$, $\mathfrak{D}_p$ und a_p sämtlich gleich Null sind, auch im Falle $n = 2p$ gültig, wenn p für q gesetzt wird.

Multipliziert man die allgemeine Gleichung 8a) mit $(n - 2i)$, Gleichung 8b) mit 2 und bildet sodann die Summe aller Gleichungen des Systems, so verschwinden in der Summengleichung wiederum alle Koeffizienten der linken Seite. Somit ist abermals eine der Unbekannten willkürlich, für welche jetzt nach der Erörterung auf S. 25 $\mathfrak{d}_0$ gewählt werden muß. Dann ergibt sich sofort:

$$\text{9a)} \quad \mathfrak{d}_i = \frac{a_i}{a_0} \mathfrak{d}_0 + \frac{1}{n+1} \left(\mathfrak{D}_i - \frac{a_i}{a_0} \mathfrak{D}_0 \right),$$

$$\text{9b)} \quad 2m = \frac{1}{2a_0} \left((n+1)\, \mathfrak{d}_0 - \mathfrak{D}_0 \right),$$

oder, indem man für a_0 und a_i die Werte aus 3) einsetzt:

$$\text{B)} \quad 2m = \frac{1}{n} \left(\mathfrak{d}_0 - \frac{\mathfrak{D}_0}{n+1} \right),$$

$$\text{C)} \quad \mathfrak{d}_i = (n - 2i)\, 2m + \frac{\mathfrak{D}_i}{n+1}.$$

Aus dem identischen Verschwinden der obigen Summengleichung folgt weiter die Kontrollgleichung:

$$\beta) \quad \left[(n - 2i)\, \mathfrak{D}_i \right]_0^{q \text{ bezw. } p} + 2M = 0,$$

welche, indem man auf die Größen $\varDelta_i$ zurückgeht, auch

$$\beta') \quad \left[(n - 2i)\, \varDelta_i \right]_0^n + 2M = 0,$$

oder schließlich, mit Rücksicht auf α'):

$$\beta'') \quad \left[i\, \varDelta_i \right]_0^n - M = 0$$

geschrieben werden kann.

5.

Weniger elegant, dafür aber rechnerisch merklich einfacher, lassen sich die Gleichungen 4a) und 4b) noch auf andere Weise behandeln. Substituiert man darin:

$$\text{d)} \quad \vartheta_i = \delta_i + i\, 2m,$$

so wird dadurch keine weitere Änderung bewirkt, als daß ϑ_i an Stelle von δ_i tritt, m aber ganz daraus verschwindet. Aus den Gleichungen 4a) folgt dann sofort wieder die Kontrolle α), aus der Hinzunahme von 4b) unmittelbar die Kontrolle β). Eine der Unbekannten ϑ_i bleibt willkürlich; wählt man dafür ϑ_t, so wird:

$$\vartheta_i = \vartheta_t + \frac{\varDelta_i - \varDelta_t}{n+1}$$

und insbesondere, mit Rücksicht auf Gleichung d):

$$\vartheta_i = \delta_0 + \frac{\Delta_i - \Delta_0}{n+1},$$

daher

$$\text{D)} \quad \delta_i = \delta_0 + \frac{\Delta_i - \Delta_0}{n+1} - i\,2\,m.$$

Um m zu erhalten, muß noch einem zweiten δ, z. B. δ_t, ein willkürlicher Wert beigelegt werden, dann folgt:

$$2\,m = \frac{1}{t}\,(\delta_0 - \delta_t) + \frac{\Delta_t - \Delta_0}{t\,(n+1)}$$

und insbesondere:

$$\text{E)} \quad 2\,m = \frac{1}{n}\left\{(\delta_0 - \delta_n) + \frac{\Delta_n - \Delta_0}{(n+1)}\right\},$$

in vollkommener Übereinstimmung mit B).

6.

In das durch die Gleichungen 5a) und 5b) gebildete System führe man ein:

$$\text{e)} \quad \begin{cases} d_i = \sigma_i - \sigma_{n-i}, & D_i = \Sigma_i - \Sigma_{n-i}, \\ s_i = \sigma_i + \sigma_{n-i}, & S_i = \Sigma_i + \Sigma_{n-i}, \\ g_i = z_i - z_{2n-i}, & G_i = Z_i - Z_{2n-i}, \\ h_i = z_i + z_{2n-i}, & H_i = Z_i + Z_{2n-i}, \end{cases}$$

wobei bezüglich der Größen d_i und s_i, sowie D_i und S_i wieder, wie früher, die beiden Fälle

$$n = 2\,p \quad \text{und} \quad n = 2\,q + 1$$

voneinander zu unterscheiden sind. Im letzteren sind die σ und Σ wieder durchweg paarweise vorhanden und es wird:

$$d_q = \sigma_q - \sigma_{q+1}, \quad D_q = \Sigma_q - \Sigma_{q+1},$$
$$s_q = \sigma_q + \sigma_{q+1}, \quad S_q = \Sigma_q + \Sigma_{q+1}.$$

Im anderen Falle aber bleiben σ_p und Σ_p vereinzelt, daher werden:

$$d_p = 0, \qquad D_p = 0,$$

und es seien:

$$\text{e')} \quad s_p = 2\,\sigma_p, \qquad S_p = 2\,\Sigma_p.$$

Bezüglich der Größen g_i, h_i, H_i, G_i ist eine solche Unterscheidung nicht erforderlich, weil $2n$ immer gerade ist, z_n und Z_n also stets vereinzelt bleiben. Analog wie vorhin seien:

$$\text{e}'') \quad . \; . \; . \; . \; . \quad h_n = 2\,z_n, \qquad\qquad H_n = 2\,Z_n,$$

während g_n und G_n verschwinden.

Es tritt abermals ein Zerfall des ursprünglichen Systems von $3n+2$ Gleichungen in zwei voneinander unabhängige ein, von denen jedes nur etwa halb soviel Unbekannte enthält.

7.

Das aus der Einführung der Differenzen hervorgehende System wird durch die allgemeinen Gleichungen dargestellt:

$$\text{10a)} \quad . \quad (i = 0, 1 \; . \; . \; . \; . \; p-1 \text{ bezw. } q) \qquad (n+1)\,d_i - 2\left[g_k\right]_i^{n-1-i} = D_i,$$

$$\text{10b)} \quad . \quad \left\{\begin{array}{ll} (i = 0, 1 \; . \; . \; . \; . \; p-1 \text{ bezw. } q) & 2\,(i+1)\,g_i - 2\left[d_k\right]_0^i \\ (i = p-1 \text{ bezw. } q \; . \; . \; . \; n-1) & 2\,(i+1)\,g_i - 2\left[d_k\right]_0^{n-1-i} \end{array}\right\} = 2\,G_i.$$

Der Unterschied zwischen den beiden Fällen, n gerade oder ungerade, ist ein rein formaler und für die weiteren Entwickelungen ohne wesentliche Bedeutung. Er macht sich auch nur an einer einzigen Stelle bemerklich, worauf zurückgekommen werden wird, nachdem der Fall $n = 2p$ bis zu einem geeigneten Punkte behandelt worden ist.

Setzt man:

$$\text{f)} \quad . \; . \; . \quad \left\{\begin{array}{ll} (i = 0, 1 \; . \; . \; . \; n) & U_i = (n-i)\,G_i, \\ (i = 0, 1 \; . \; . \; . \; p-1) & A_i = U_i + U_{n-1-i}, \end{array}\right.$$

so folgt aus den Gleichungen 10b):

$$\text{11)} \quad (i = 0, 1 \; . \; . \; . \; p-1) \quad (i+1)\,(n-i)\,(2\,g_i + 2\,g_{n-1-i}) - 2\,(n+1)\left[d_k\right]_0^i = 2\,A_i;$$

die Gleichungen 10a) aber liefern als Differenz zweier aufeinander folgenden:

$$\text{12)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (n+1)\,(d_i - d_{i+1}) - (2\,g_i + 2\,g_{n-1-i}) = D_i - D_{i+1},$$

gültig zunächst nur für $i = 0, 1 \; . \; . \; . \; p-2$, aber auch noch für $i = p-1$, weil d_p und D_p gleich Null sind.

Aus 11) und 12) läßt sich nun die Summe der beiden Unbekannten g_i und g_{n-1-i} eliminieren, wodurch man erhält:

13) . . $(i=0,1\,\ldots\,p-1)$ $$-2\left[d_k\right]_0^{i-1}+\big((i+1)(n-i)-2\big)\,d_i - (i+1)(n-i)\,d_{i+1}=C_i,$$

wo

g) . . . . $$C_i=\frac{1}{n+1}\,(2\,A_i+B_i),$$

h) . . . . $$B_i=(i+1)(n-i)(D_i-D_{i+1}).$$

In der Summe dieser p Gleichungen 13) nehmen auf der linken Seite wieder alle Koeffizienten den Wert Null an, daher muß auch

γ) . . . . $$\left[C_i\right]_0^{p-1}=0$$

sein, woraus durch Umordnung der Glieder die Kontrollgleichung folgt:

δ) . . . . . $$\left[(n-2\,i)\,D_i\right]_0^p+2\left[(n-i)\,G_i\right]_0^n=0.$$

Im Falle $n=2\,q+1$ gilt Gleichung 11) und demzufolge auch 13) bis $i=q-1$ und es bleibt unter den Gleichungen 10b) die mittelste vereinzelt. Diese lautet:

14) . . . . $$2\,(q+1)\,g_q-2\left[d_k\right]_0^q=2\,G_q.$$

Die letzte der Gleichungen 10a) aber ist:

15) . . . . $$(n+1)\,d_q-2\,g_q=D_q,$$

und es folgt durch Elimination von g_q aus 14) und 15):

$$-2\left[d_k\right]_0^{q-1}+\big((n+1)\,(q+1)-2\big)\,d_q=(q+1)\,D_q+2\,G_q,$$

oder

16) . . . . $$-\left[d_k\right]_0^{q-1}+\big((q+1)\,(q+1)-1\big)\,d_q=C_q,$$

worin

$$C_q=G_q+\tfrac{1}{2}\,(q+1)\,D_q,$$

oder

g') . . . $$C_q=\tfrac{1}{n+1}\big((q+1)\,2\,G_q+(q+1)(q+1)\,D_q\big).$$

Bildet man jetzt die Summe der q Gleichungen 13) für $i=0,1\,\ldots\,q-1$ und nimmt die für $i=q$ gültige 16) noch hinzu, so werden wiederum alle Koeffizienten der linken Seite gleich Null; es muß daher jetzt rechts

γ') . . . . $$\left[C_i\right]_0^q=0$$

sein, woraus durch Umformung der Glieder eine Gleichung entsteht, welche mit der obigen δ) übereinstimmt, wenn darin q für p gesetzt wird. Auch dieser formale Unterschied verschwindet noch, sobald man auf die Größen Σ_i bezw. Z_i zurückgeht. Die Gleichung δ) verwandelt sich dann in beiden Fällen in

$$\varepsilon) \quad \ldots\ldots \quad \left[(n-2\,i)\,\Sigma_i\right]_0^n + 2\left[(n-i)\,G_i\right]_0^n = 0,$$

oder auch

$$\varepsilon') \quad \ldots\ldots \quad \left[(n-2\,i)\,\Sigma_i\right]_0^n + 2\left[(n-i)\,Z_i\right]_0^{2n} = 0$$

und geht endlich, mit Rücksicht auf die Gleichung η') auf S. 32, über in:

$$\varepsilon'') \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left[i\,\Sigma_i\right]_0^n + \left[i\,Z_i\right]_0^{2n} = 0.$$

In beiden Fällen zeigt das Verschwinden der Summengleichung an, daß die zur Bestimmung der p bezw. $q+1$ Unbekannten d zur Verfügung stehenden p bezw. $q+1$ Gleichungen nicht unabhängig voneinander sind, sondern eine jede als Folge der übrigen angesehen und deshalb weggelassen werden kann. Wählt man hierfür die letzte, so verschwindet damit die ganze Verschiedenheit der beiden Fälle und es kann die weitere Behandlung wieder einheitlich fortgeführt werden. Selbstverständlich reichen die übrig bleibenden $p-1$ bezw. q Gleichungen nicht mehr zur Bestimmung aller Unbekannten aus; eine der letzteren muß willkürlich gewählt werden und es kann dafür nach den Erörterungen auf S. 25 keine andere in Betracht kommen als d_0.

Die Gleichungen 13) lauten ausgeschrieben:

$$\text{F)} \quad .\ . \left\{ \begin{array}{lllll} (n-2)\,d_0 & -\,n\,d_1 & & & = C_0 \\ -\,2\,d_0 & +\,(2\,n-4)\,d_1 & -\,(2\,n-2)\,d_2 & & = C_1 \\ -\,2\,d_0 & -\,2\,d_1 & +\,(3\,n-8)\,d_2 & -\,(3\,n-6)\,d_3 & = C_2 \\ & & \text{u. s. w.} & & \end{array} \right.$$

und sind, nachdem für d_0 ein bestimmter Wert gesetzt worden ist, bereits in dieser Form zur schrittweisen Berechnung von d_1, d_2 u. s. w. geeignet. Sie lassen sich aber, indem man aus ihnen der Reihe nach d_0, d_1 u. s. f. eliminiert, in die noch viel bequemeren überführen:

$$\begin{array}{llll} (n-2)\,d_0 & -\,n\,d_1 & & = K_0 \\ & (n-4)\,d_1 - (n-2)\,d_2 & & = K_1 \\ & & (n-6)\,d_2 - (n-4)\,d_3 & = K_2 \\ & & \text{u. s. w.} & \end{array}$$

oder allgemein:

$$17) \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad \big(n-2\,(i+1)\big)\,d_i-(n-2\,i)\,d_{i+1}=K_i\,,$$

worin

$$\text{i)} \quad . \quad . \quad . \quad K_i=\frac{1}{(i+1,\ (n-i)}\Big(2\,\big[C_k\big]_0^i+\big(n-2\,(i+1)\big)\,C_i\Big)\,.$$

Durch Umstellung folgt aus 17):

$$\text{F}') \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad d_{i+1}=\frac{1}{n-2\,i}\,\Big\{\big(n-2\,(i+1)\big)\,d_i-K_i\Big\},$$

eine sehr bequeme Rekursionsformel zur Berechnung von d_{i+1} aus d_i, welche schließlich auch liefert:

$$\text{F}'') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad d_i=(n-2\,i)\left\{\frac{d_0}{n}-T_{i-1}\right\},$$

worin:

$$\text{k)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad T_i=\left[\frac{K_k}{(n-2\,k)\,\big(n-2\,(k+1)\big)}\right]^i$$

8.

Bis hierher stimmen die Entwickelungen, zwar nicht in der Form, aber dem inneren Wesen nach durchaus mit denjenigen überein, welche den Inhalt der Artikel 8 bis 14 der Arbeit Hansens ausmachen. Während aber damit dort die engere Aufgabe, die Werte der Teilungsfehler zu berechnen, bereits ihre vollständige Lösung findet, tritt hier als notwendige Ergänzung noch die Auflösung derjenigen Gleichungen hinzu, welche durch Einführung der mit s_i, h_i und H_i bezeichneten Summen in das durch die allgemeinen Gleichungen 5a) und 5b) dargestellte System entstehen. Das Verfahren bei diesem Problem ist im Anfange dem zuletzt behandelten analog, gestaltet sich später aber etwas verwickelter. Ein vollkommenes Analogon dazu findet sich aus naheliegendem Grunde in der Arbeit Hansens freilich nicht, doch ist der Weg, welcher hier eingeschlagen ist, in gewissem Sinne wenigstens, bereits wieder vorgezeichnet in den Entwickelungen Hansens in Art. 84, welche allerdings einen etwas abseits gelegenen Gegenstand behandeln.

Das System der jetzt zu betrachtenden Gleichungen ist in allgemeiner Form dargestellt, das folgende:

A) für $n = 2q + 1$

$$\text{18a)} \quad (i = 0, 1 \ldots\ldots q) \qquad (n+1)\,s_i \;+ 2\,[s_k]_0^q \;- 2\,[h_k]_i^n - 2\,[h_k]_{n-i}^{n-1} = S_i$$

$$\text{18b)} \quad \left\{ \begin{array}{lllll} (i = 0, 1 \ldots\ldots q) & -2\,[s_k]_0^i & & +2\,(i+1)\,h_i & \multirow{2}{*}{$\Big\} = 2\,H_i$} \\ (i = q+1 \ldots n-1) & -2\,[s_k]_0^q & -2\,[s_k]_{n-i}^q & +2\,(i+1)\,h_i & \\ (i = n) & -2\,[s_k]_0^q & & +\;(n+1)\,h_n & = H_n \end{array} \right.$$

B) für $n = 2p$

$$\begin{array}{lllllll} \text{18a)} & (i = 0, 1 \ldots\ldots p-1) & (n+1)\,s_i & +2\,[s_k]_0^{p-1} + s_p & -2\,[h_k]_i^n - 2\,[h_k]_{n-i}^{n-1} & = S_i \\ & (i = p) & (p+1)\,s_p & +2\,[s_k]_0^{p-1} & -2\,[h_k]_p^{n-1} - h_n & = \frac{1}{2}\,S_p \end{array}$$

$$\text{18b)} \quad \left\{ \begin{array}{lllll} (i = 0, 1 \ldots\ldots p) & -2\,[s_k]_0^i & & +2\,(i+1)\,h_i & \multirow{2}{*}{$\Big\} = 2\,H_i$} \\ (i = p+1 \ldots n-1) & -2\,[s_k]_0^p & -2\,[s_k]_{n-i}^{p-1} & +2\,(i+1)\,h_i & \\ (i = n) & -2\,[s_k]_0^{p-1} & -\;s_p & +\;(n+1)\,h_n & = H_n \end{array} \right.$$

Die Verschiedenheit der beiden Fälle (n gerade oder ungerade) macht sich zwar hier von vornherein in dem Bau der entsprechenden Gleichungen bemerklich und nötigt daher zu deren getrennter Aufführung, ist aber für die Folge von noch geringerem Einfluß als vorhin. Es kann sofort in die gemeinschaftliche Behandlung beider Fälle eingetreten werden. Zunächst ist zu bemerken, daß wiederum in der Summe der Gleichungen 18a) und 18b) die linke Seite identisch verschwindet und daher

$$\eta) \quad \left\{ \begin{array}{ll} & [S_i]_0^q + 2\,[H_i]_0^{n-1} + H_n = 0\,, \\ \text{bezw.} & \\ & [S_i]_0^{p-1} + \frac{1}{2}\,S_p + 2\,[H_i]_0^{n-1} + H_n = 0 \end{array} \right.$$

sein muß. Beide Gleichungen aber liefern, wenn man auf die ursprünglichen Größen Σ_i und Z_i zurückgreift, die für beide Fälle gemeinschaftlich gültige Kontrolle:

$$\eta') \quad [\Sigma_i]_0^n + 2\,[Z_i]_0^{2n} = 0,$$

welche auch schon unmittelbar aus dem Gleichungssystem 1) hätte ersehen werden können.

Setzt man jetzt, analog wie früher:

$$\text{l)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} (i = 0, 1 \ldots\ldots n) & V_i = (n-i)\,H_i\,, \\ (i = 0, 1 \ldots p-1 \text{ bezw. } q) & \mathfrak{A}_i = V_i - V_{n-1-i}\,, \end{array} \right.$$

und zur Abkürzung:

$$\text{m)} \quad f_i = 2\,(n - 1 - 2\,i),$$

so folgt im Falle $n = 2p$ aus den Gleichungen 18b):

19) . $(i = 0, 1 \ldots p-1)$

$$-f_i \left[s_k\right]_0^i + 4(i+1)\left[s_k\right]_{i+1}^{p-1} + 2(i+1)\,s_p + 2(i+1)(n-i)(h_i - h_{n-1-i}) = 2\,\mathfrak{A}_i,$$

und diese Gleichungen bleiben auch im anderen Falle gültig, wenn überall q statt p geschrieben und $2\,s_q$ für s_p gesetzt wird.

Anderseits liefern die Gleichungen 18a), indem man im Falle $n = 2p$ die letzte verdoppelt:

20) $(i = 0, 1 \ldots p-1$ bezw. $q-1)$ $\quad (n+1)(s_i - s_{i+1}) - 2(h_i - h_{n-1-i}) = S_i - S_{i+1},$

und es folgt durch Elimination von $(h_i - h_{n-1-i})$ aus 19) und 20) im Falle $n = 2p$:

21) $(i = 0, 1 \ldots p-1)$

$$-f_i\left[s_k\right]_0^{i-1} + \{(n+1)(i+1)(n-i) - f_i\}\,s_i$$
$$-(i+1)\{(n+1)(n-i) - 4\}\,s_{i+1} + 4(i+1)\left[s_k\right]_{i+2}^{p-1} + 2(i+1)\,s_p = \mathfrak{C}_i$$

worin

n) . . . . . . $\begin{cases} \mathfrak{C}_i = 2\,\mathfrak{A}_i + \mathfrak{B}_i \\ \mathfrak{B}_i = (i+1)(n-i)(S_i - S_{i+1}). \end{cases}$

Auch diese Gleichungen bleiben gültig, wenn q für p und $2\,s_q$ für s_p gesetzt wird.

In beiden Fällen ist die Anzahl der Gleichungen 21) um eins kleiner als die der Unbekannten $s_1 \ldots s_q$ bezw. s_p und reicht daher, nachdem s_0 willkürlich ein bestimmter Wert beigelegt worden ist, zur Bestimmung der übrigen gerade hin. Die Gleichungen 21) lassen sich, trotz des anscheinend sehr verwickelten Baues ihrer Koeffizienten, einer besonderen Eigenschaft wegen allgemein auflösen. Ihrer Entstehungsweise zufolge hat in der allgemeinen Gleichung 21) die Summe aller Koeffizienten der linken Seite den Wert Null; setzt man daher:

p) . . . . . . $(i = 1 \ldots p$ bezw. $q)$ $\qquad r_i = s_i - s_{i-1},$

so verschwindet s_0 äußerlich aus 21) und es wird im Falle $n = 2p$:

22) . . . $(i = 0 \ldots p-1)$

$$f_i\left[k\,r_k\right]_1^i - (i+1)\left(\{(n+1)(n-i) - f_i\}\,r_{i+1} - \left[\left(f_i - 4(k-1-i)\right)r_k\right]_{i+2}^p\right) = \mathfrak{C}_i.$$

Die Summe dieser p Gleichungen gibt:

23) . . . . $\qquad -2p(p+1)\left[k\,r_k\right]_1^p = \left[\mathfrak{C}_k\right]_0^{p-1},$

oder

ζ) . . . . $\qquad \left[k\,r_k\right]_1^p = -\,\mathfrak{C},$

worin

$$\text{q)} \quad \mathfrak{S} = \frac{1}{2\,\varrho_p}\left[\mathfrak{S}_k\right]_0^{p-1},$$

$$\text{r)} \quad \varrho_p = p\,(p+1).$$

Multipliziert man nun Gleichung ζ) mit f_i und subtrahiert Gleichung 22) von dem Produkt, so fallen alle Glieder r_1 bis $i\,r_i$ weg; der Rest aber erhält den gemeinschaftlichen Faktor $n+1$, mit welchem sonach gekürzt werden kann.

Wird somit

$$\text{s)} \quad \mathfrak{R}_i = -\frac{1}{n+1}\left(\mathfrak{S}_i + f_i\,\mathfrak{S}\right)$$

gesetzt, so ergibt sich:

$$\text{24)} \quad (i = 0, 1 \ldots p-1) \qquad (i+1)(n-i)\,r_{i+1} + 2\left[(k-1-i)\,r_k\right]_{i+2}^{p} = \mathfrak{R}_i\,.$$

Im Falle $n = 2q+1$ behalten die Gleichungen 22) bis 24) ebenfalls ihre Gültigkeit, wenn q für p geschrieben wird, jedoch ist dann

$$\text{r}') \quad \varrho_q = (q+1)^2$$

zu setzen.[1])

In umgekehrter Reihenfolge der Unbekannten ausgeschrieben, lauten die Gleichungen 24) nach entsprechender Umstellung:

$$\text{G)} \quad \left\{\begin{array}{l} \text{A) für } n = 2p: \\ p(p+1)\,r_p = \mathfrak{R}_{p-1} \\ (p-1)(p+2)\,r_{p-1} = \mathfrak{R}_{p-2} - 2\,r_p \\ (p-2)(p+3)\,r_{p-2} = \mathfrak{R}_{p-3} - 2\,r_{p-1} - 4\,r_p \\ \text{u. s. w.} \\ \text{B) für } n = 2q+1: \\ q(q+2)\,r_q = \mathfrak{R}_{q-1} \\ (q-1)(q+3)\,r_{q-1} = \mathfrak{R}_{q-2} - 2\,r_q \\ (q-2)(q+4)\,r_{q-2} = \mathfrak{R}_{q-3} - 2\,r_{q-1} - 4\,r_q \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right.$$

Der naheliegende Versuch, in analoger Weise wie auf S. 30 und 31 für die Größen d, auch hier aus den Gleichungen G) eine Rekursionsformel zur unmittelbaren Berechnung von r_{p-i} aus r_{p+1-i} abzuleiten, führt zu einem für die praktische Anwendung wenig geeigneten Ergebnis; es bleibt vorzuziehen,

1) Wo im späteren ϱ ohne Index erscheint, soll dasselbe sowohl ϱ_p als ϱ_q bedeuten.

die Berechnung der Größen r schrittweise auszuführen, zumal sich dies hier auch einfacher gestaltet, als für die Größen d dort nach Gleichung F).

Nach Berechnung der Werte r ergibt zunächst ζ) eine gute Kontrolle, darauf folgt aus p):

H) . . . . $s_i = s_0 + [r_k]_1^i$.

Zwischen den durch die Gleichungen h) und o) definierten Größen B_i und $\mathfrak{B}_i$ besteht eine einfache Beziehung, welche als Kontrolle dienen kann. Wird nämlich:

t) . . . . $Y_i = (i+1)(n-i)(\Sigma_i - \Sigma_{i+1})$

gesetzt, so wird:

ϑ) . . . . . . $\begin{cases} B_i = Y_i + Y_{n-1-i}, \\ \mathfrak{B}_i = Y_i - Y_{n-1-i}. \end{cases}$

9.

Analog, wie in Abschnitt 5 durch die Substitution d) eine erhebliche Vereinfachung der numerischen Rechnung erzielt wurde, indem sich dadurch dort die Ermittelung der Werte $\mathfrak{s}_i$ und $\mathfrak{d}_i$ ganz erübrigte, läßt sich durch eine Maßnahme anderer Art ein ähnlicher Vorteil auch hier erreichen. Ein Blick auf das System der Bedingungsgleichungen S. 16 lehrt, daß man sich innerhalb einer jeden Gruppe derselben die Werte der rechten Seiten auf die Summe Null gebracht denken kann, indem dadurch nur die der Gruppe eigentümliche Unbekannte z_i geändert wird. Diese Summe ist aber nach 1) nichts anderes als die rechte Seite Z_i der Normalgleichung für z_i. Die Folge einer derartigen in sämtlichen Gruppen ausgeführten vorbereitenden Reduktion ist daher das Nullwerden sämtlicher Z_i, also auch G_i, H_i, A_i und $\mathfrak{A}_i$ und somit eine wesentliche Vereinfachung der numerischen Berechnung der Werte C_i und $\mathfrak{C}_i$ nach g) und n).

Wegen des Fortfalles von A_i läßt sich dann auch die Berechnung von K_i noch etwas vereinfachen. Setzt man nämlich

u) . . . . . . $(n-i)(i+1)\ E_i = [(n-2i)\,D_i]_0^i$,

so wird

$$(n+1)\,K_i = (n-2\,(i+1))\,D_i - (n-2i)\,D_{i+1} - 2\,E_i\,.$$

Der Vorteil in der Anwendung dieser Formeln ist aber nur unbedeutend und wird auch dadurch wieder aufgehoben, daß die obige Kontrolle ϑ) dabei zur Hälfte verloren geht.

Von besonderer Bedeutung ist aber der Einfluß der obigen Reduktion auf die verschiedenen Kontrollgleichungen.

Die Gleichungen δ) und η) gehen über in:

$$\iota) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left[(n-2i)\,D_i\right]_0^{q \text{ bezw. } p} = 0$$

und

$$\varkappa) \quad \ldots\ldots \quad \left[S_i\right]_0^q = 0 \text{ bezw. } \left[S_i\right]_0^{p-1} + \tfrac{1}{2} S_p = 0;$$

aus η') und ε'') folgen

$$\lambda) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \left[\Sigma_i\right]_0^n = 0,$$

$$\mu) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \left[i\Sigma_i\right]_0^n = 0,$$

und endlich erhält man aus $\varkappa$) mit Rücksicht auf α):

$$\nu) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left[X_i\right]_0^n = 0 \text{ und } \left[\Xi_i\right]_0^n = 0.$$

Nachdem die Werte von d_i und s_i bekannt sind, ergeben sich die von g_i und h_i unmittelbar durch die Gleichungen 10b) bezw. 18b). Die wirkliche Berechnung dieser Größen, deren Kombination die Werte von z_i und z_{2n-i} liefern würde, ist aber entbehrlich, indem die letzteren, nach Bestimmung von x_i und ξ_i, sich nicht weniger einfach sogleich aus der dritten Abteilung des Gleichungssystems 1) ergeben. Da ihnen eine eigene praktische Bedeutung nicht zukommt, so ist ihre Bestimmung nur bei der Substitution der Werte x_i und ξ_i in die Bedingungsgleichungen zum Zwecke der Berechnung der übrigbleibenden Fehler erforderlich und bei dieser Gelegenheit gewissermaßen nebensächlich zu bewirken.

B. Behandlung der Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler.

Aus der Summe der mit den Gewichten der zugehörigen Bedingungsgleichungen multiplizierten Quadrate der übrigbleibenden Fehler folgt in bekannter Weise der mittlere bezw. wahrscheinliche Fehler derjenigen Bedingungsgleichung, deren Gewicht der Einheit gleich gesetzt ist.

Der Wert dieser Summe kann aber auch unabhängig von den Einzelfehlern der Bedingungsgleichungen unmittelbar aus den Normalgleichungen hergeleitet werden. Sind allgemein $u_0\ u_1\ u_2 \ldots$ beliebige Unbekannte, zu deren Bestimmung eine Reihe von Bedingungsgleichungen

$$a_0 u_0 + a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots\ldots = l \text{ mit dem individuellen Gewicht } p$$

vorliegt, und bezeichnet in der üblichen Weise $[p\,v\,v]$ die Summe der mit den Gewichten p multiplizierten Quadrate der übrigbleibenden Fehler, so ist bekanntlich:

$$[p\,v\,v] = [p\,l\,l] - \Omega,$$

wo

$$\Omega = [p\,a_0\,l]\,u_0 + [p\,a_1\,l]\,u_1 + \ldots .$$

Im vorliegenden Falle sind die Gewichte p sämtlich der Einheit gleich; die Koeffizienten $[a_0\,l]$, $[a_1\,l]$ usw. sind die Größen X_i, Ξ_i, Z_i und M, daher wird hier

25) . . . . . . $$\Omega = [X_i\,x_i]_0^n + [\Xi_i\,\xi_i]_0^n + [Z_i\,z_i]_0^{2n} + M\,m.$$

Diese Formel ist schon unmittelbar zur Anwendung geeignet, unter der Voraussetzung natürlich, daß die Werte z_i bestimmt sind und auch die Größe M, welche nach dem Früheren zur Bestimmung der Unbekannten nicht eigentlich berechnet zu werden brauchte, ihrem Werte nach bekannt ist. Gleichung 25) läßt sich aber, wiederum unter Anlehnung an die einfacheren Entwickelungen Hansens in den Art. 20 und 21 seines Werkes, in andere, für die numerische Rechnung bequeme Formen bringen, welche die Größe M überhaupt nicht mehr enthalten und in denen die Größen z_i nicht mehr einzeln, sondern nur noch in einer geringen Anzahl von Kombinationen auftreten, deren Werte sich leicht angeben lassen.

Aus den Substitutionen b) S. 22 folgt zunächst:

$$[X_i\,x_i]_0^n + [\Xi_i\,\xi_i]_0^n = \tfrac{1}{2}\,[\Sigma_i\,\sigma_i]_0^n + \tfrac{1}{2}\,[\Delta_i\,\delta_i]_0^n,$$

und damit

26) . . . . $$\Omega = \tfrac{1}{2}\,[\Sigma_i\,\sigma_i]_0^n + \tfrac{1}{2}\,[\Delta_i\,\delta_i]_0^n + [Z_i\,z_i]_0^{2n} + M\,m.$$

Die weitere Behandlung gestaltet sich nunmehr wieder etwas verschieden, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Es wird genügen, den etwas einfacheren Fall $n = 2\,q + 1$ für sich zu betrachten und die Abweichungen, welcher der andere im Schlußergebnis bedingt, nachträglich anzugeben.

Die Substitutionen c) und e) liefern bezw.:

27) . . . . . . $$[\Delta_i\,\delta_i]_0^n = \tfrac{1}{2}\,[\mathfrak{S}_i\,\mathfrak{s}_i]_0^q + \tfrac{1}{2}\,[\mathfrak{D}_i\,\mathfrak{d}_i]_0^q,$$

28) . . . . . . $$[\Sigma_i\,\sigma_i]_0^n = \tfrac{1}{2}\,[S_i\,s_i]_0^q + \tfrac{1}{2}\,[D_i\,d_i]_0^q,$$

29) . . . . . . $$[Z_i\,z_i]_0^{2n} = \tfrac{1}{2}\,[G_i\,g_i]_0^{n-1} + \tfrac{1}{2}\,[H_i\,h_i]_0^{n-1} + \tfrac{1}{4}\,H_n\,h_n$$

und

$$30) \quad \ldots\ldots \quad \left[\mathfrak{S}_i^2\right]_0^q + \left[\mathfrak{D}_i^2\right]_0^q = 2\left[\varDelta_i^2\right]_0^n,$$

$$31) \quad \ldots\ldots \quad \left[S_i^2\right]_0^q + \left[D_i^2\right]_0^q = 2\left[\Sigma_i^2\right]_0^n.$$

Nach Gleichung A) ist:

$$\mathfrak{s}_i = \mathfrak{s}_0 + \frac{\mathfrak{S}_i - \mathfrak{S}_0}{n+1},$$

daher

$$\mathfrak{S}_i\,\mathfrak{s}_i = \left(\mathfrak{s}_0 - \frac{\mathfrak{S}_0}{n+1}\right)\mathfrak{S}_i + \frac{\mathfrak{S}_i^2}{n+1},$$

$$\left[\mathfrak{S}_i\,\mathfrak{s}_i\right]_0^q = \left(\mathfrak{s}_0 - \frac{\mathfrak{S}_0}{n+1}\right)\left[\mathfrak{S}_i\right]_0^q + \frac{1}{n+1}\left[\mathfrak{S}_i^2\right]_0^q.$$

Da aber nach α):

$$\left[\mathfrak{S}_i\right]_0^q = 0,$$

so wird

$$32) \quad \ldots\ldots \quad \left[\mathfrak{S}_i\,\mathfrak{s}_i\right]_0^q = \frac{1}{n+1}\left[\mathfrak{S}_i^2\right]_0^q.$$

Nach Gleichung C) wird:

$$\mathfrak{D}_i\,\mathfrak{d}_i = 2\,z\,(n-2\,i)\,\mathfrak{D}_i + \frac{1}{n+1}\,\mathfrak{D}_i^2,$$

daher mit Rücksicht auf β'):

$$33) \quad \ldots\ldots \quad \left[\mathfrak{D}_i\,\mathfrak{d}_i\right]_0^q = \frac{1}{n+1}\left[\mathfrak{D}_i^2\right] - 4\,M m.$$

Aus der Verbindung der Gleichungen 27), 30), 32) und 33) folgt

$$\left[\varDelta_i\,\delta_i\right]_0^n = \frac{1}{n+1}\left[\varDelta_i^2\right]_0^n - 2\,M m,$$

und indem dies in 26) eingeführt wird,

$$34) \quad \ldots \quad 2\,\Omega = \frac{1}{n+1}\left[\varDelta_i^2\right]_0^n + \left[\Sigma_i\,\sigma_i\right]_0^n + 2\left[Z_i\,z_i\right]_0^{2n},$$

worin die Größe M nicht mehr vorkommt.

Wegen 28) und 29) geht 34) über in:

$$35) \quad 4\,\Omega = \frac{2}{n+1}\left[\varDelta_i^2\right]_0^n + \left(\left[D_i\,d_i\right]_0^q + 2\left[G_i\,g_i\right]_0^{n-1}\right) + \left(\left[S_i\,s_i\right]_0^q + 2\left[H_i\,h_i\right]_0^{(n)}\right),$$

worin, wie auch für die Folge, die um die obere Grenze gesetzte Klammer anzeigen soll, daß das letzte Glied der Summe nur halb zu nehmen ist.

Setzt man in den Gleichungen 10a) zur Abkürzung:

v) . . . . $2\left[G_k\right]_i^{n-1-i} = L_i$,

so wird:

36) . . . . $(n+1)\, d_i = D_i + L_i$,

und hierin stellen die Größen L_i Kombinationen der Größen g_i dar, deren Zahlenwerte sich aus:

v′) . . . . $L_i = (n+1)\, d_i - D_i$

sehr einfach ergeben.

Aus 36) folgt dann:

37) . . . $(n+1)\left[D_i d_i\right]_0^q = \left[D_i^2\right]_0^q + \left[L_i D_i\right]_0^q$.

Die Gleichungen 10b) ergeben durch Multiplikation mit g_i und Summation:

$$2\left[(i+1)\, g_i^2\right]_0^q = 2\left[G_i g_i\right]_0^{n-1} + \left[L_i d_i\right]_0^q,$$

woraus, mit Rücksicht auf 36)

$$2\,(n+1)\left[G_i g_i\right]_0^{n-1} = 2\,(n+1)\,\left[(i+1)\, g_i^2\right]_0^q - \left[L_i^2\right]_0^q - \left[D_i L_i\right]_0^q$$

hervorgeht, und es folgt somit durch Vereinigung dieser Gleichung mit 37):

$$(n+1)\left\{\left[D_i d_i\right]_0^q + 2\left[G_i g_i\right]_0^{n-1}\right\} = 2\,(n+1)\left[(i+1)\, g_i^2\right]_0^q - \left[L_i^2\right]_0^q + \left[D_i^2\right]_0^q.$$

Die Gleichungen 10b) liefern aber auch:

38) . . . . . $2\,(i+1)\, g_i - 2\,(n-i)\, g_{n-1-i} = 2\, R_i$,

während aus *v*) folgt:

39) . . . . $2\, g_i + 2\, g_{n-1-i} = N_i$,

wenn

w) . . . . . $(i = 0\, \ldots\ldots\, q)$ $\quad R_i = G_i - G_{n-1-i}$,

w′) . . . . . $(i = 0\, \ldots\, q-1)$ $\quad N_i = L_i - L_{i+1}$

gesetzt wird.

Aus 38) und 39) erhält man:

$$\begin{aligned} 2\,(n+1)\, g_i &= (n-i)\, N_i + 2\, R_i \\ 2\,(n+1)\, g_{n-1-i} &= (i+1)\, N_i - 2\, R_i, \end{aligned}$$

und, indem man diese beiden Gleichungen quadriert und das Produkt $N_i R_i$ eliminiert:

$$4\,(n+1)\left((i+1)\,g_i^2 + (n-i)\,g_{n-1-i}^2\right) = (i+1)\,(n-i)\,N_i^2 + 4\,R_i^2.$$

Demnach wird:

$$4\,(n+1)\left[(i+1)\,g_i^2\right]_0^q = 4\left[R_i^2\right]_0^q + \left[(i+1)\,(n-i)\,N_i^2\right]_0^{q-1},$$

und schließlich

$$40) \quad \ldots\ldots \quad (n+1)\left\{\left[D_i\,d_i\right]_0^q + 2\left[G_i\,g_i\right]_0^{q-1}\right\}$$
$$= \left[D_i^2\right]_0^q - \left[L_i^2\right]_0^q + 2\left[R_i^2\right]_0^q + \tfrac{1}{2}\left[(i+1)\,(n-i)\,N_i^2\right]_0^{q-1},$$

wo auf der rechten Seite die Größen g_i nicht mehr einzeln vorkommen, sondern nur noch in den Kombinationen L_i und N_i enthalten sind.

Setzt man in den Gleichungen 18a):

$$\text{x)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \left[s_k\right]_0^q = \chi,$$

$$\text{y)} \quad \ldots\ldots \quad 2\left[h_k\right]_i^n + 2\left[h_k\right]_{n-i}^{n-1} - 2\,\chi = \mathfrak{L}_i,$$

so wird:

$$41) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (n+1)\,s_i = S_i + \mathfrak{L}_i,$$

und es stellen die Größen $\mathfrak{L}_i$ Kombinationen der Größen h_i dar, deren Zahlenwerte sich aus

$$\text{y}') \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathfrak{L}_i = (n+1)\,s_i - S_i$$

einfach berechnen lassen.

Aus 41) folgt dann:

$$42) \quad \ldots\ldots \quad (n+1)\left[S_i\,s_i\right]_0^q = \left[S_i^2\right]_0^q + \left[\mathfrak{L}_i\,S_i\right]_0^q,$$

aus den Gleichungen 18b) aber:

$$2\left[(i+1)\,h_i^2\right]_0^{(n)} = 2\left[H_i\,h_i\right]_0^{(n)} + \left[(\mathfrak{L}_i + 2\,\chi)\,s_i\right]_0^q,$$

oder wegen Gleichung x):

$$2\left[(i+1)\,h_i^2\right]_0^{(n)} = 2\left[H_i\,h_i\right]_0^{(n)} + \left[\mathfrak{L}_i\,s_i\right]_0^q + 2\,\chi^2,$$

woraus, mit Rücksicht auf 41) zunächst:

$$2\,(n+1)\left[H_i\,h_i\right]_0^{(n)} = 2\,(n+1)\left[(i+1)\,h_i^2\right]_0^{(n)} - \left[\mathfrak{L}_i^2\right]_0^q - \left[\mathfrak{L}_i\,S_i\right]_0^q - 2\,(n+1)\,\chi^2$$

und sodann, durch Vereinigung mit 42):

$$(n+1)\left\{\left[S_i s_i\right]_0^q + 2\left[H_i h_i\right]_0^{(n)}\right\}$$
$$= 2(n+1)\left[(i+1)\, h_i^2\right]_0^{(n)} + \left[S_i^2\right]_0^q - \left[\mathfrak{L}_i^2\right]_0^q - 2(n+1)\,\chi^2$$

hervorgeht.

Ganz analog, wie oben wird:

$$(i=0\,.\,.\,.\,.\,.\,q)\qquad 2(i+1)\,h_i + 2(n-i)\,h_{n-1-i} = 2\,\mathfrak{R}_i + 4\,\chi$$
$$(i=0\,.\,.\,q-1)\qquad 2\,h_i - \qquad 2\,h_{n-1-i} = \mathfrak{N}_i$$

worin,

$$\text{z)}\,\ldots\ldots\left\{\begin{array}{ll}(i=0\,.\,.\,q-1) & \mathfrak{R}_i = H_i + H_{n-1-i}, \\ & \mathfrak{R}_q = 2\,H_q,\end{array}\right.$$

$$\text{z}')\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\qquad \mathfrak{N}_i = \mathfrak{L}_i - \mathfrak{L}_{i+1},$$

und es folgt daraus:

$$2(n+1)\,h_i \qquad = 2(\mathfrak{R}_i + 2\,\chi) + (n-i)\,\mathfrak{N}_i,$$

$$2(n+1)\,h_{n-1-i} = 2(\mathfrak{R}_i + 2\,\chi) - (i+1)\,\mathfrak{N}_i,$$

$$4(n+1)\left[(i+1)\,h_q^2 + (n-i)\,h_{n-1-i}^2\right]_0^{q-1} = 4\left[(\mathfrak{R}_i + 2\,\chi)^2\right]_0^{q-1} + \left[(i+1)(n-i)\,\mathfrak{N}_i^2\right]_0^{q-1}.$$

Addiert man hierzu noch die beiden, aus 18b) folgenden Gleichungen:

$$4(n+1)(q+1)\,h_q^2 = 2(\mathfrak{R}_q + 2\,\chi)^2,$$

$$4(n+1)\,\frac{n+1}{2}\,h_n^2 = 2(H_n + 2\,\chi)^2,$$

so läßt sich die Summe der linken Seiten zusammenziehen in

$$4(n+1)\left[(i+1)\,h_i^2\right]_0^{(n)};$$

die drei ersten Glieder der rechten Seite aber geben nach Ausführung der Quadraturen:

$$4\left[\mathfrak{R}_i^2\right]_0^{(q)} + 2\,H_n^2 + 16\,\chi\left[H_i\right]_0^{(n)} + 8(n+1)\,\chi^2.$$

Zufolge Gleichung η) bezw. η') ist:

$$2\left[H_i\right]_0^{(n)} = -\left[S_i\right]_0^q = -\left[\Sigma_i\right]_0^n,$$

daher wird:

$$4(n+1)\left[(i+1)\,h_i^2\right]_0^{(n)} = 4\left[\mathfrak{R}_i^2\right]_0^{(q)} + 2\,H_n^2 + \left[(i+1)(n-i)\,\mathfrak{N}_i^2\right]_0^{q-1}$$
$$+ 8(n+1)\,\chi^2 - 8\,\chi\left[\Sigma_i\right]_0^n,$$

$$43) \quad \ldots \quad (n+1)\left\{\left[S_i\, s_i\right]_0^q + 2\left[H_i\, h_i\right]_0^{(n)}\right\}$$
$$= \left[S_i^2\right]_0^q - \left[\mathfrak{L}_i^2\right]_0^q + 2\left[R_i^2\right]_0^{(q)} + H_n^2 + \tfrac{1}{2}\left[(i+1)(n-i)\,\mathfrak{N}_i^2\right]_0^{q-1} + 2(n+1)\chi^2 - 4\chi\left[\Sigma_i\right]_0^n,$$

und man erhält durch Einführung von Gleichung 40) und 43) in 35) und mit Rücksicht auf 31):

$$\text{J)} \quad 2(n+1)(2\,\Omega - \chi^2) = 2\left[\Delta_i^2\right]_0^n + 2\left[\Sigma_i^2\right]_0^n - \left[L_i^2\right]_0^q - \left[\mathfrak{L}_i^2\right]_0^q$$
$$+ 2\left[R_i^2\right]_0^q + 2\left[\mathfrak{R}_i^2\right]_0^q + H_n^2 + \tfrac{1}{2}\left[(i+1)(n-i)\left(N_i^2 + \mathfrak{N}_i^2\right)\right]_0^{q-1} - 4\chi\left[\Sigma_i\right]_0^n.$$

Im Falle $n = 2p$ nimmt Gleichung J) die Form an:

$$\text{J}') \quad 2(n+1)(2\,\Omega - \chi^2) = 2\left[\Delta_i^2\right]_0^n + 2\left[\Sigma_i^2\right]_0^n - \left[L_i^2\right]_0^{p-1} - \left[\mathfrak{L}_i^2\right]_0^{(p)}$$
$$+ 2\left[R_i^2\right]_0^{p-1} + 2\left[\mathfrak{R}_i^2\right]_0^{p-1} + H_n^2 + \tfrac{1}{2}\left[(i+1)(n-i)\left(N_i^2 + \mathfrak{N}_i^2\right)\right]_0^{p-1} - 4\chi\left[\Sigma_i\right]_0^n,$$

worin jedoch jetzt:

$$\text{x}') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \chi = \left[s_k\right]_0^{(p)}$$

zu setzen ist.

Diese Formeln entsprechen wieder vollkommen den in Art. 23 der Arbeit Hansens gegebenen. Da in ihnen nach b) S. 22 für $2\left[\Delta_i^2\right]_0^n + 2\left[\Sigma_i^2\right]_0^n$ auch $4\left[X_i^2\right]_0^n + 4\left[\Xi_i^2\right]_0^n$ geschrieben werden kann, so ist leicht festzustellen, daß die beiden willkürlich anzunehmenden Werte $\{0, 0'\}$ und $\{n, n'\}$ in Ω ganz in derselben Weise enthalten sind, in der sie auch in $[l\,l]$ vorkommen, daher aus $[v\,v]$ herausfallen. Ferner sind schon in der Zwischenform 34) die beiden willkürlichen Werte $\mathfrak{s}_0$ und $\mathfrak{d}_0$ herausgefallen. Die beiden anderen derartigen Größen s_0 und d_0 bleiben allerdings der Form nach in Ω enthalten. Bei Hansen handelt es sich nur um eine solche Größe und für diese ist in dem Art. 24 der strenge Beweis geführt, daß sie trotzdem ohne Einfluß auf den Wert von $[v\,v]$ bleiben muß. Das Gleiche würde auch hier für die beiden Größen s_0 und d_0 nachgewiesen werden können, doch soll davon Abstand genommen werden, da die Richtigkeit eigentlich wieder a priori einzusehen ist.

Die Formeln für Ω vereinfachen sich noch, wenn, wie bereits S. 35 behandelt, die Bedingungsgleichungen der Reduktion unterzogen worden sind, durch welche sämtliche Größen Z_i den Wert Null erhalten. Alsdann kommen in obigen Gleichungen die aus den G_i und H_i zusammengesetzten Werte in Wegfall. Außerdem verschwindet auch nach k) $\left[\Sigma_i\right]_0^n$ und damit das ganze letzte Glied. Die vereinfachten Formeln lauten demnach:

$$J'') \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2\,(n+1)\,(2\,\Omega - \chi^2)$$

$$= 2\left[\varDelta_i^2\right]_0^n + 2\left[\Sigma_i^2\right]_0^n + \begin{Bmatrix} -\left[L_i^2\right]_0^q - \left[\mathfrak{L}_i^2\right]_0^q + \frac{1}{2}\left[(i+1)\,(n-i)\left(N_i^2 + \mathfrak{N}_i^2\right)\right]_0^{q-1} \\ -\left[L_i^2\right]_0^{p-1} - \left[\mathfrak{L}_i^2\right]_0^{(p)} + \frac{1}{2}\left[(i+1)\,(n-i)\left(N_i^2 + \mathfrak{N}_i^2\right)\right]_0^{p-1} \end{Bmatrix}$$

und nehmen somit vollständig den Charakter der entsprechenden Formel Hansens an, indem die rechte Seite ausschließlich aus Summen von Quadratzahlen und mit ganzen Zahlen multiplizierten oder dividierten Quadratzahlen besteht, für die numerische Rechnung also den Vorteil bietet, die vorhandenen Tafeln der Quadratzahlen benutzen zu können.

C. Bestimmung der Gewichte der Unbekannten.

1.

Es bleibt noch zu zeigen, daß auch in bezug auf die Frage nach den Gewichten, mit welchen die Werte der Teilungsfehler aus der Ausgleichung hervorgehen, der von Hansen eingeschlagene Weg bei dem verwickelteren Problem ebenfalls wieder bequem zum Ziele führt.

Hier ist zunächst vorauszuschicken, daß, da bei jedem Maßstabe den Fehlern zweier Striche willkürlich vorgeschriebene Werte beizulegen sind, die Gewichte dieser beiden Fehlerwerte überhaupt nicht bestimmt werden können, sondern von vornherein als unendlich groß anzusehen sind. Die Gewichte der Fehler der übrigen Striche hängen dann von der Auswahl der bevorzugten Striche ab, können aber in als bekannt vorauszusetzender Weise umgerechnet werden, wenn von der zu Grunde gelegten Auswahl zu einer anderen übergegangen werden soll. Demnach ist es gerechtfertigt, die bisherige Bevorzugung der Striche 0 und n bei beiden Maßstäben auch für das Folgende bestehen zu lassen.

Alsdann leuchtet von selbst ein, daß die Gewichte der Fehler mit gleichen Nummern bezeichneter Striche beider Maßstäbe dieselben Werte und ferner auch bei jedem einzelnen Maßstabe die Fehler gleich weit von der Mitte gelegener Striche gleich große Gewichte erhalten, daß also einerseits das Gewicht von x_i und ξ_i gemeinschaftlich mit P_i bezeichnet werden kann und ferner

$$P_i = P_{n-i}$$

ist. Es bedarf daher nur der Bestimmung von P_i für $i = 1 \ldots\ldots q$ bezw. p.

Aus dem System der Normalgleichungen geht durch Elimination aller übrigen Unbekannten x_i als lineare Funktion der verschiedenen Größen X_i, Ξ_i, Z_i und M, sowie der vier willkürlichen Werte x_0, x_n, ξ_0, ξ_n hervor. Bekanntlich gibt der partielle Differenzialquotient dieser Funktion in bezug auf X_i, abgesehen vom Vorzeichen, den reziproken Wert des Gewichtes von x_i an:

$$44) \quad \pm \frac{\partial x_i}{\partial X_i} = \frac{1}{P_i}.$$

Es ist dabei aber zu beachten, daß die Funktion x_i sämtliche Größen X_i u. s. w. enthält, welche im vorliegenden Falle nicht unabhängig voneinander sind. Die zwischen ihnen bestehende vierfache Abhängigkeit findet in den vier Kontrollgleichungen α), β), ε), η) ihren Ausdruck; diese würden zunächst dazu verwendet werden können, vor Ableitung des allgemeinen Ausdruckes für den Differenzialquotienten $\frac{\partial x_i}{\partial X_i}$ vier beliebige der Größen X_0 bis X_n und Ξ_0 bis Ξ_n aus der Funktion x_i zu eliminieren. Da aber nach Elimination von X_k der Wert von $\frac{\partial x_k}{\partial X_k}$ unbestimmbar wird, so liegt auf der Hand, daß keine anderen, als die vier Größen X_0, X_n, Ξ_0, Ξ_n eliminiert werden dürfen, aber auch eliminiert werden müssen, damit eben die nach dem Früheren zu stellende Forderung, daß $\frac{1}{P_0}$ unbestimmbar bleibt und also gleich Null gesetzt werden darf, erfüllbar wird. In der Tat würde ja auch das ganze Problem einer anderen, wenn auch weniger zweckmäßigen Behandlung fähig gewesen sein, indem unter Festsetzung willkürlicher Werte für x_0, x_n, ξ_0, ξ_n die vier Normalgleichungen für diese vier Größen hätten einfach weggelassen werden können, womit die Abhängigkeit der übrigen voneinander in Wegfall gebracht worden wäre. Die aus dieser Behandlungsweise entspringende Funktion x_i würde dann die vier Größen X_0, X_n, Ξ_0, Ξ_n nicht mehr enthalten und somit, wie leicht einzusehen, gerade mit derjenigen Form übereinstimmen müssen, welche aus der hier vorliegenden durch die Elimination dieser vier Größen mittels der Kontrollgleichungen α'), β''), ε''), η') entstehen würde.

Natürlich kann, was vorteilhafter ist, die Elimination auch nachträglich erfolgen, wenn nur, sowohl in der Funktion x_i als auch in den Kontrollgleichungen, alle nicht mit dem Index 0 behafteten Größen X_i, Ξ_i als unabhängig voneinander, die zum Index 0 gehörigen aber als abhängig von allen übrigen, in derselben Gleichung enthaltenen Größen gleicher Art angesehen werden. Dieselbe Überlegung überträgt sich ohne weiteres auch auf die aus den Größen X_i und Ξ_i zusammengesetzten Σ_i, Δ_i u. s. w.

Zugleich leuchtet ein, daß der unter diesem Gesichtspunkte abgeleitete allgemeine Ausdruck für $\frac{\partial x_i}{\partial X_i}$ notwendig für $i=0$ seine Gültigkeit verliert und die aus ihm hierfür hervorgehenden Werte bedeutungslos sind, weil er ja gerade unter der Festsetzung erhalten wird, daß $\frac{\partial x_0}{\partial X_0}$ unbestimmbar bleiben soll.

2.

Aus den Substitutionen a), c) und e) folgt, mit Rücksicht auf das soeben Erörterte:

$$
\text{K)}\quad \begin{cases} (i = 1 \ldots\ldots q \text{ bezw. } p-1) & \dfrac{1}{P_i} = \dfrac{1}{4\,(n+1)}\,(F_i + Q_i + \mathfrak{F}_i + \mathfrak{Q}_i), \\[2ex] \text{aber:} & \dfrac{1}{P_p} = \dfrac{1}{2\,(n+1)}\,(F_p + \mathfrak{Q}_p), \end{cases}
$$

worin zur Abkürzung:

$$
\mathfrak{a})\ \ldots\ldots \begin{cases} (n+1)\,\dfrac{\partial\,\mathfrak{s}_i}{\partial\,\mathfrak{S}_i} = F_i, & (n+1)\,\dfrac{\partial\,d_i}{\partial\,D_i} = Q_i, \\[2ex] (n+1)\,\dfrac{\partial\,\mathfrak{d}_i}{\partial\,\mathfrak{D}_i} = \mathfrak{F}_i, & (n+1)\,\dfrac{\partial\,s_i}{\partial\,S} = \mathfrak{Q}_i \end{cases}
$$

gesetzt ist.

3.

Gleichung A) liefert, da $\mathfrak{s}_0$ einen willkürlichen, als konstant anzusehenden Wert bedeutet, allgemein:

$$
\frac{\partial\,\mathfrak{s}_i}{\partial\,\mathfrak{S}_i} = \frac{1}{n+1}\,\frac{\partial\,(\mathfrak{S}_i - \mathfrak{S}_0)}{\partial\,\mathfrak{S}_i} = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{\partial\,\mathfrak{S}_0}{\partial\,\mathfrak{S}_i}\right).
$$

Die Größen $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{S}_i$ sind durch Gleichung α) miteinander verknüpft; aus dieser folgt:

$$
(i = 0, \ldots\ldots q \text{ bezw. } p-1) \qquad \frac{\partial\,\mathfrak{S}_0}{\partial\,\mathfrak{S}_i} = -1,
$$

$$
\frac{\partial\,\mathfrak{S}_0}{\partial\,\mathfrak{S}_p} = -\frac{1}{2}
$$

und somit wird:

$$
\text{L)}\ \ldots \begin{cases} (i = 1 \ldots\ldots q \text{ bezw. } p-1) & F_i = 2 \\[1ex] & F_p = \dfrac{3}{2} \end{cases}
$$

4.

Aus Gleichung B) folgt, nachdem daraus $2z$ mittels Gleichung C) eliminiert worden ist:

$$
(i = 0 \ldots\ldots q \text{ bezw. } p) \qquad \frac{\partial\,\mathfrak{d}_i}{\partial\,\mathfrak{D}_i} = \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{n-2i}{n}\,\frac{\partial\,\mathfrak{D}_0}{\partial\,\mathfrak{D}_i}\right)
$$

aus Gleichung β) aber:

$$n \frac{\partial \mathfrak{D}_0}{\partial \mathfrak{D}_i} + (n - 2i) = 0$$

und es wird somit

$$\mathbf{M}) \quad . \quad . \quad . \quad (i = 1 \, . \, . \, . \, . \, q \text{ bezw. } p) \qquad \mathfrak{F}_i = 1 + \frac{(n - 2\, i)^2}{n^2} .$$

5.

Gleichung F″) gibt in Verbindung mit k):

$$45) \qquad \frac{\partial d_i}{\partial D_i} = -(n - 2\, i) \left[\frac{1}{(n - 2\, k)(n - 2)(k + 1)} \frac{\partial K_k}{\partial D_i} \right]_{k=0}^{k=i-1},$$

aus i) aber folgt:

$$46) \qquad \frac{\partial K_k}{\partial D_i} = \frac{1}{(k + 1)(n - k)} \left\{ (n - 2\, k) \frac{\partial C_k}{\partial D_i} + 2 \left[\frac{\partial C_t}{\partial D_i} \right]_{t=0}^{t=k-1} \right\}.$$

Der aus g) in Verbindung mit h) folgende Ausdruck für $\frac{\partial C_t}{\partial D_i}$ hat von Null verschiedenen Wert zunächst nur für $t = i$ und $t = i - 1$, von denen, wenn man sich 46) in 45) substituiert denkt, der erste überhaupt nicht, der zweite

$$47) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial C_{i-1}}{\partial D_i} = - \frac{i\,(n - (i - 1))}{n + 1}$$

nur im letzten Gliede der rechten Seite vorkommt.

Da aber wieder D_0 und damit auch C_0 als abhängig von D_i anzusehen ist, so hat $\frac{\partial C_t}{\partial D_i}$ auch noch für $t = 0$ einen von Null verschiedenen Wert. Mit Rücksicht hierauf folgt aus 46)

$$48) \left\{ \begin{array}{ll} & \frac{\partial K_0}{\partial D_i} = \frac{\partial C_0}{\partial D_i}, \\ (k = 1 \, . \, . \, . \, . \, i - 2) & \frac{\partial K_k}{\partial D_i} = \frac{2}{(k + 1)(n - k)} \frac{\partial C_0}{\partial D_i}, \\ & \frac{\partial K_{i-1}}{\partial D_i} = - \frac{n - 2\,(i - 1)}{n + 1} + \frac{2}{i\,(n - (i - 1))} \frac{\partial C_0}{\partial D_i} \end{array} \right.$$

Da nach g) und h):

$$C_0 = \frac{1}{n + 1} \{ 2\, A_0 + n\, (D_0 - D_1) \}$$

ist, so wird

$$\frac{\partial C_0}{\partial D_1} = \frac{1}{n + 1} \left\{ \frac{\partial (2\, A_0 + n\, D_0)}{\partial D_1} - n \right\}$$

und im übrigen:

$$\frac{\partial C_0}{\partial D_i} = \frac{1}{n+1} \frac{\partial (2 A_0 + n D_0)}{\partial D_i} .$$

Aus γ) folgt:

$$(i = 1 \ldots p-1 \text{ bezw. } q) \qquad \frac{\partial (2 A_0 + n D_0)}{\partial D_i} = -(n-2i);$$

daher ist:

$$\frac{\partial C_0}{\partial D_1} = -\frac{2(n-1)}{n+1}$$

und im übrigen:

$$\frac{\partial C_0}{\partial D_i} = -\frac{n-2i}{n+1} .$$

Man erhält somit, indem man dies in 48) und die damit erhaltenen Ausdrücke für $\frac{\partial K_k}{\partial D}$ in 45) einführt, nach einfachen Reduktionen:

N) . . $(i = 1 \ldots p-1 \text{ bezw. } q)$

$$Q_i = 1 + (n-2i)^2 \left\{ \frac{1}{n(n-2)} + 2 \left[\frac{1}{(k+1)(n-k)(n-2k)(n-2(k+1))} \right]_1^{i-1} \right\} .$$

Obwohl dieser Ausdruck für Q_i hier in ganz anderer Gestalt erscheint, als der mit dem gleichen Buchstaben von Hansen bezeichnete, so hat er doch vollkommen gleiche Bedeutung wie jener und würde sich auch ohne Schwierigkeit auf dieselbe Form bringen lassen. Tatsächlich liefert er auch dieselben numerischen Werte.

6.

Für $\mathfrak{Q}_i$ läßt sich ein Ausdruck geschlossener Form nicht wohl aufstellen, dafür aber auf gleicher Grundlage eine zur numerischen Rechnung nicht unbequeme Methode herleiten. Es bedarf dazu der Entwickelung von $\frac{\partial \mathfrak{K}_i}{\partial S_t}$ für sämtliche Werte von $i = 0$ bis $p-1$ bezw. $q-1$ und t von 1 bis p bezw. q.

Da $\mathfrak{K}_i$ sich nach Gleichung s) und q) aus den verschiedenen Größen $\mathfrak{C}_i$ zusammensetzt, so ist zuvörderst der Wert von $\frac{\partial \mathfrak{C}_i}{\partial S_t}$ für die gleichen Werte von i und t festzustellen. Aus n) und o) folgt zunächst:

$$\frac{\partial \mathfrak{C}_i}{\partial S_t} = 0$$

für alle Wertepaare i, t, in denen nicht:

$$t = i \text{ oder } i+1,$$

oder umgekehrt:

$$i = t \text{ oder } t-1.$$

Für diese erhält man sogleich:

$$49) \ldots \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{C}_i}{\partial S_i} = (i+1)(n-i), & \dfrac{\partial \mathfrak{C}_i}{\partial S_{i+1}} = - (i+1)(n-i), \\ \dfrac{\partial \mathfrak{C}_t}{\partial S_t} = (t+1)(n-t), & \dfrac{\partial \mathfrak{C}_{t-1}}{\partial S_t} = - t\big(n-(t-1)\big). \end{cases}$$

Eine Ausnahme hiervon macht jedoch wieder $\mathfrak{C}_0$ wegen der durch die Gleichungen η) ausgedrückten Abhängigkeit der verschiedenen Größen S und H voneinander.

Es ist zunächst nach n):

$$\mathfrak{C}_0 = 2\mathfrak{A}_0 + n(S_0 - S_1),$$

$$50) \begin{cases} \text{daher} & \dfrac{\partial \mathfrak{C}_0}{\partial S_1} = \dfrac{\partial(2\mathfrak{A}_0 + n S_0)}{\partial S_1} - n \\ \text{und im übrigen} & \dfrac{\partial \mathfrak{C}_0}{\partial S_t} = \dfrac{\partial(2\mathfrak{A}_0 + n S_0)}{\partial S_t}. \end{cases}$$

Ersetzt man in η) $2H_0$ durch den aus l) für $i=0$ hervorgehenden Wert:

$$2H_0 = \frac{1}{n}(2\mathfrak{A}_0 + 2H_{n-1}),$$

so folgt daraus:

$$51) \ldots \begin{cases} (t = 1 \ldots p-1 \text{ bezw. } q) & \dfrac{\partial(2\mathfrak{A}_0 + n S_0)}{\partial S_t} = -n, \\ \text{für } t = p \text{ aber} & \dfrac{\partial(2\mathfrak{A}_0 + n S_0)}{\partial S_p} = -\dfrac{n}{2}, \end{cases}$$

und es wird somit:

$$52) \ldots \begin{cases} & \dfrac{\partial \mathfrak{C}_0}{\partial S_1} = -2n, \\ (t = 2 \ldots p-1 \text{ bezw. } q) & \dfrac{\partial \mathfrak{C}_0}{\partial S_t} = -n, \\ & \dfrac{\partial \mathfrak{C}_0}{\partial S_p} = -\dfrac{1}{2}n. \end{cases}$$

Aus Gleichung q) ergibt sich dann:

$$(t = 1 \ldots p-1) \quad \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial S_t} = \frac{1}{2\varrho_p}\left(\frac{\partial \mathfrak{C}_0}{\partial S_t} + \frac{\partial \mathfrak{C}_{t-1}}{\partial S_t} + \frac{\partial \mathfrak{C}_t}{\partial S_t}\right),$$

oder, indem man die Werte aus 49) einsetzt:

$$53) \begin{cases} (t = 1 \ldots p-1) & \dfrac{\partial \mathfrak{E}}{\partial S_t} = -\dfrac{t}{q}, \\ \text{für } t = p \text{ aber} & \dfrac{\partial \mathfrak{E}}{\partial S_p} = \dfrac{1}{2\varrho_p}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{C}_0}{\partial S_p} + \dfrac{\partial \mathfrak{C}_{p-1}}{\partial S_p}\right) = -\dfrac{p^2 + 2p}{2\varrho_p} \\ \text{und für } t = q & \dfrac{\partial \mathfrak{E}}{\partial S_q} = \dfrac{1}{2\varrho_q}\left(\dfrac{\partial \mathfrak{C}_0}{\partial S_q} + \dfrac{\partial \mathfrak{C}_{q-1}}{\partial S_q}\right) = -\dfrac{(q+1)^2 + 2q}{2\varrho_q}. \end{cases}$$

Die hieraus und mit Rücksicht auf 52) aus Gleichung s) hervorgehenden Ausdrücke für

$$\mathfrak{b}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad W_{i,t} = \varrho(n+1)\frac{\partial \mathfrak{K}_i}{\partial S_t}$$

sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

$W_{i,t}$

$i \diagdown t$	1	2	3	. . .	$p-2$
0	$f_0 \qquad + 2n\varrho_p$	$2f_0 \qquad + n\varrho_p$	$3f_0 \qquad + n\varrho_p$	. . .	$(p-2)f_0 \qquad + n\varrho_p$
1	$f_1 - 2(n-1)\varrho_p$	$2f_1 + 2(n-1)\varrho_p$	$3f_1$	. . .	$(p-2)f_1$
2	f_2	$2f_2 - 3(n-2)\varrho_p$	$3f_2 + 3(n-2)\varrho_p$	. . .	$(p-2)f_2$
.	.	.	.	. . .	.
.	.	.	.	. . .	.
.	.	.	.	. . .	.
$p-2$	f_{p-2}	$2f_{p-2}$	$3f_{p-2}$	. . .	$(p-2)f_{p-2} - (p-1)(p+2)\varrho_p$
$p-1$	f_{p-1}	$2f_{p-1}$	$3f_{p-1}$	. . .	$(p-2)f_{p-1}$

$i \diagdown t$	$p-1$	p	q
0	$(p-1)f_0 \qquad + n\varrho_p$	$\frac{1}{2}(p^2+2p)f_0 + \frac{n}{2}\varrho_p$	$\frac{1}{2}\left((q+1)^2+2q\right)f_0 \qquad + n\varrho_q$
1	$(p-1)f_1$	$\frac{1}{2}(p^2+2p)f_1$	$\frac{1}{2}\left((q+1)^2+2q\right)f_1$
2	$(p-1)f_2$	$\frac{1}{2}(p^2+2p)f_2$	$\frac{1}{2}\left((q+1)^2+2q\right)f_2$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
$p-2$	$(p-1)f_{p-2} + (p-1)(p+2)\varrho_p$	$\frac{1}{2}(p^2+2p)f_{p-2}$	$\frac{1}{2}\left((q+1]^2+2q\right)f_{q-2}$
$p-1$	$(p-1)f_{p-1} \qquad - \varrho_p\varrho_p$	$\frac{1}{2}(p^2+2p)f_{p-1} - \varrho_p\varrho_p$	$\frac{1}{2}\left((q+1)^2+2q\right)f_{q-1} + (\varrho_q-1)\varrho_q$

Diese Tabelle behält ihre Gültigkeit, wenn überall q für p geschrieben, die Spalte für $t = p$ mit der für $t = q$ vertauscht und in dem Werte für $i = q-1$, $t = q-1$, der Ausdruck $\varrho_q(\varrho_q - 1)$ statt ϱ_p^2 gesetzt wird.

Es folgt sodann aus 24):

54) $\begin{pmatrix} i = 0, \dots p-1 & \text{bezw. } q-1 \\ t = 1, \dots p & \text{bezw. } q \end{pmatrix}$

$$(i+1)(n-i)\frac{\partial (n+1)\,\varrho\, r_{i+1}}{\partial S_t} + 2\left[(k-1-i)\frac{\partial \varrho\,(n+1)\, r_k}{\partial S_t}\right]_{k=i+2}^{k=p \text{ bezw. } q} = W_{i,t}.$$

Hieraus lassen sich nach Analogie von G) die Werte $\frac{\partial \varrho\,(n+1)\, r_i}{\partial S_t}$ bestimmen und man erhält darauf nach Gleichung H):

O) für $n > 3$: $$\mathfrak{Q}_i = \frac{1}{\varrho}\left[\frac{\partial \varrho\,(n+1)\, r_k}{\partial S_t}\right]_1^i.$$

Die numerische Rechnung ist selbst für größere Werte von n verhältnismäßig leicht auszuführen, auch bietet sich für den umständlichsten Teil derselben, die Auflösung der Gleichungen 54), eine wertvolle Kontrolle.

Aus ζ) S. 33 folgt nämlich:

$$55) \; \dots\dots \quad \left[k\frac{\partial \varrho\,(n+1)\, r_k}{\partial S_t}\right]_{k=1}^{k=p \text{ bezw. } q} = -\varrho\,(n+1)\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial S_t},$$

daher mit Rücksicht auf 53):

$$\xi)\left\{\begin{array}{lll} (t = 1 \dots p-1) & \left[k\dfrac{\partial \varrho\,(n+1)\, r_k}{\partial S_t}\right]_{k=1}^{k=p \text{ bezw. } q} & = (n+1)\, t, \\ & \left[k\dfrac{\partial \varrho\,(n+1)\, r_k}{\partial S_p}\right]_{k=1}^{k=p} & = \dfrac{1}{2}(n+1)(p^2+2p), \\ & \left[k\dfrac{\partial \varrho_q (n+1)\, r_k}{\partial S_q}\right]_{k=1}^{q} & = \dfrac{1}{2}(n+1)((q+1)^2+2q). \end{array}\right.$$

Einer besonderen Betrachtung bedürfen aber noch die beiden Fälle $n = 2$ und $n = 3$, weil in ihnen p bezw. q gleichbedeutend sind mit 1, die obige Tabelle daher zwei verschiedene Werte für $W_{0,1}$ liefert, je nachdem man letztere aus den Spalten für $t = 1$ oder $t = p$ bezw. q entnimmt. In beiden Fällen geht aus Gleichung 55) hervor:

$$\frac{\partial r_1}{\partial S_1} = -\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial S_1}$$

und aus Gleichung q):

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial S_1} = \frac{1}{2\varrho}\frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial S_1}.$$

Die Gleichungen 50) und 51) geben aber in diesen Sonderfällen:

für $n = 2$ $\qquad \frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial S_1} = -\frac{3}{2}\, n = -3,$

für $n = 3$ $\qquad \frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial S_1} = -\, 2\, n = -6,$

und es wird somit

für $n = 2$ $\qquad \mathfrak{Q}_1 = 2{,}25,$

für $n = 3$ $\qquad \mathfrak{Q}_1 = 3{,}00.$

Endlich erhält man aus den Gleichungen 1) und 2) sofort:

$$\text{P)} \quad \frac{1}{P_m} = \frac{\partial m}{\partial M} = \frac{1}{b} = \frac{1}{n+1}\, \frac{6}{n\,(n+1)\,(n+2)},$$

oder, wenn mit

$$\text{c)} \quad \mu = n\, 2\, m$$

der Unterschied der Gesamtlängen der beiden miteinander verglichenen Stäbe bezeichnet wird:

$$\text{P}') \quad \frac{1}{P_\mu} = \frac{1}{n+1}\, \frac{24\, n}{(n+1)\,(n+2)}.$$

7.

Die aus den Gleichungen L), M), N), O), und P′ für $n = 2$ bis $n = 10$ berechneten Zahlenwerte sind im Folgenden tabellenmäßig zusammengestellt und aus ihnen nach Gleichung K) die Werte für P_i abgeleitet. Die unter P_i^* aufgeführten Zahlen sind die Werte von $\frac{2\,(n+1)}{F_i + Q_i}$ bezw. $\frac{n+1}{F_p}$ d. h. die Gewichte, welche das ursprüngliche Verfahren Hansens liefert; sie stimmen mit den in der Arbeit Hansens mitgeteilten vollkommen überein.

	$F_i + Q_i$					$\mathfrak{J}_i$				$\mathfrak{Q}_i$				
$n \diagdown i$	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	3	4	5
2	1,500									2,250				
3	3,333					1,111				3,000				
4	3,500	1,500				1,250				2,722	2,111			
5	3,600	3,150				1,360	1,040			2,555	2,972			
6	3,667	3,267	1,500			1,444	1,111			2,447	2,789	2,012		
7	3,714	3,357	3,084			1,510	1,184	1,020		2,372	2,656	2,872		
8	3,750	3,429	3,163	1,500		1,563	1,250	1,063		2,318	2,556	2,748	1,942	
9	3,778	3,486	3,222	3,054		1,605	1,309	1,111	1,012	2,277	2,481	2,649	2,779	
10	3,800	3,533	3,293	3,109	1,500	1,640	1,360	1,160	1,040	2,244	2,422	2,570	2,690	1,888

	P_i^*					P_i					P_μ
$n \diagdown i$	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
2	2,00					1,60					0,75
3	2,40					2,15					1,11
4	2,86	3,33				2,68	2,77				1,56
5	3,33	3,81				3,19	3,35				2,10
6	3,82	4,29	4,67			3,70	3,91	3,99			2,72
7	4,31	4,77	5,19			4,21	4,45	4,59			3,43
8	4,80	5,25	5,69	6,00		4,72	4,98	5,16	5,23		4,22
9	5,29	5,74	6,19	6,55		5,22	5,50	5,73	5,84		5,09
10	5,79	6,23	6,69	7,04	7,33	5,73	6,02	6,27	6,43	6,49	6,05

D. Das ökonomische Verhältnis zwischen der Methode des Durchschiebens und dem ursprünglichen Verfahren Hansens.

1.

Die Vergleichung der numerischen Werte von P_i mit den entsprechenden von P_i^* läßt zunächst erkennen, daß die ersteren durchweg etwas kleiner ausfallen, als letztere. Der Unterschied nimmt mit wachsender Strichzahl n ab, ist aber freilich auch schon bei den kleinsten so geringfügig, daß ihm eine praktische Bedeutung kaum noch zugesprochen werden kann. Anderseits zeigen die Werte von P_i zwar ebenfalls ein Ansteigen nach der Mitte des Maßstabes hin, aber ein geringeres als die von P_i^*, nähern sich somit der Gleichmäßigkeit noch mehr; indessen ist auch dieser Unterschied sehr unbedeutend. Da der erste ungünstig, der zweite aber als günstig anzusehen ist, so heben sich beide in ihrer Wirkung etwa auf, und es würde daher von diesem Gesichtspunkte allein weder der einen, noch der anderen Methode ein entschiedener Vorzug vor der anderen zuerkannt werden können. Es sind aber noch andere Umstände mit in Betracht zu ziehen.

Der Kürze des Ausdruckes wegen möge im folgenden die ursprüngliche Methode Hansens mit I, die dem Durchschiebungsverfahren eigentümliche mit II bezeichnet werden.

Den Gewichten der Unbekannten liegt als Einheit das Gewicht einer Bedingungsgleichung zu Grunde. Diese Einheit ist jedoch bei den beiden verschiedenen Methoden nicht dieselbe. Bei Methode II entspricht sie unmittelbar dem Quadrate der mittleren oder wahrscheinlichen Unsicherheit der Messung eines Strichabstandes, bei Methode I dagegen dem Quadrate der Unsicherheit einer Intervallvergleichung, also der Differenz der Messungen zweier Strichabstände. Wird die Unsicherheit der einzelnen Strichabstandmessung als eine bekannte, bei beiden Methoden gleiche Größe angesehen, so ist diejenige der Differenz zweier solchen $\sqrt{2}$ fach größer, daher die Einheit des Gewichtes einer der Bedingungsgleichungen bei Methode I nur halb so groß wie bei Methode II. Demzufolge sind auch in der obigen Zusammenstellung die unter P_i^* aufgeführten Zahlenwerte, um sie auf die Unsicherheit der einzelnen Strichabstandmessung zu beziehen und damit erst wirklich vergleichbar mit den unter P_i enthaltenen zu machen, noch mit 2 zu dividieren. Hiernach liefert also Methode II nicht allein dieselbe Anzahl von Teilungsfehlern, wie Methode I für zwei Maßstäbe gleichzeitig, sondern deren Werte auch noch mit wahrscheinlichen Fehlern behaftet, die unbedeutend größer sind, als das $\frac{1}{\sqrt{2}}$ fache der bei Methode I erhaltenen. Sie würde demnach, wenn die erforderliche Beobachtungsarbeit bei beiden Methoden gleich wäre, in bezug auf Ökonomie der Methode I nur um geringes weniger als das vierfache überlegen sein.

Bei Methode II ist, wenn jetzt die beiden Größen $\{0, 0\}$ und $\{n, n\}$ nicht mehr mitgerechnet werden, die Anzahl (II) der wirklich zu beobachtenden Strichabstände

$$(\mathrm{II}) = (n+1)^2 - 2.$$

Bei Methode I beträgt, wenn auch hier die unnötige Vergleichung der Gesamtlänge des zu untersuchenden Maßstabes mit einem Hilfsintervalle außer Ansatz bleibt, die Anzahl der Bedingungsgleichungen $\frac{n(n+1)}{2} - 1$. Da aber die rechte Seite jeder Bedingungsgleichung einen Intervallunterschied darstellt, so ist die Anzahl (I) der zu beobachtenden Strichabstände doppelt so groß:

$$(\mathrm{I}) = n(n+1) - 2,$$

und es sind somit bei Methode II:

$$(\mathrm{II}) - (\mathrm{I}) = n + 1$$

Strichabstände mehr zu beobachten, als bei Methode I.

Bezeichnet nun φ das ökonomische Verhältnis von Methode II zu Methode I, so ergibt sich hiernach mit genügender Annäherung:

$$\varphi = 4\,\frac{(\mathrm{I})}{(\mathrm{II})},$$

oder, da der Bruch (I)/(II) schon für kleinere Werte von n für den vorliegenden Zweck hinreichend genau mit $\frac{n}{n+1}$ vertauscht werden kann:

$$\varphi = 4\,\frac{n}{n+1}.$$

2.

Dieses jedenfalls etwas unerwartete Ergebnis steht in engem Zusammenhange mit einer anderen eigenartigen Erscheinung.

Werden bei beiden Methoden nur die wirklich bestimmbaren Unbekannten gezählt und ebenso nur die wirklich erforderlichen Beobachtungen, so ergeben sich daraus die in der folgenden Zusammenstellung enthaltenen Beziehungen:

Anzahl der	bei Methode II	bei Methode I	Unterschied II — I
erforderlichen Beobachtungen . . .	$(n+1)^2-2$	$n(n+1)-2$	$n+1$
Bedingungsgleichungen	$(n+1)^2-2$	$\frac{1}{2}n(n+1)-1$	$\frac{1}{2}n(n+3)$
darin enthaltenen Unbekannten . . .	$4n-2$	$2n-2$	$2n$
überschüssigen Gleichungen	$(n-1)^2$	$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$	$\frac{1}{2}n(n-1)$

Obwohl somit bei Methode II die Anzahl der erforderlichen Beobachtungen nur um $n+1$, die Anzahl der Unbekannten aber um $2n$ größer ist, bleiben bei ihr doch nicht weniger, sondern mehr als doppelt soviel Gleichungen überschüssig, als bei Methode I. Der Grund hiervon liegt äußerlich zwar auf der Hand, bedarf aber noch einer weiteren Beleuchtung.

Bei beiden Methoden zerfallen die Unbekannten ihrer praktischen Bedeutung nach in verschiedene Klassen. Die erste wird gebildet durch die Werte der inneren Teilungsfehler, welchen jedenfalls das Hauptinteresse zukommt. Bei Methode I enthält sie die $n-1$ Größen $x_1 \ldots x_{n-1}$, bei Methode II doppelt soviel, nämlich die Größen $x_1 \ldots x_{n-1}$ und $\xi_1 \ldots \xi_{n-1}$. Die zweite Klasse umfaßt die Größen m, deren Mitbestimmung zwar noch praktischen Wert haben kann, streng genommen aber doch nur als ein von dem eigentlichen Ziele des Problems abseits gelegenes Nebenergebnis zu betrachten ist. Von dieser Art ist bei Methode II nur eine Größe vorhanden, bei Methode I aber ist die Anzahl dieser Größen gleich der der Unbekannten erster Klasse, nämlich $n-1$. Als dritte Klasse treten bei Methode II dann noch die $2n-1$ Größen z auf, welche gar keine praktische Bedeutung haben. Unbekannte dieser Art kommen in den Bedingungsgleichungen der Methode I nicht vor; ihr Fehlen ist aber nicht etwa als ein diese Methode vor der anderen auszeichnender charakteristischer Vorzug anzusehen, sondern nur ein in der Natur der Gleichungen begründeter Umstand.

Wie bereits mehrfach hervorgehoben, enthält jede der Bedingungsgleichungen Hansens die Differenz zweier der unmittelbar beobachteten

Strichabstände. Sie ist demnach keine ursprüngliche, sondern erst als Folge zweier solchen anzusehen. Natürlich aber könnte man auch bei Methode I von den ursprünglichen Bedingungsgleichungen ausgehen. In folgender Figur 2 bedeuten in nahezu vollständigem Anschluß an die Auseinandersetzungen Hansens in Art. 1 seines Werkes (k) und (k') die Fehler zweier

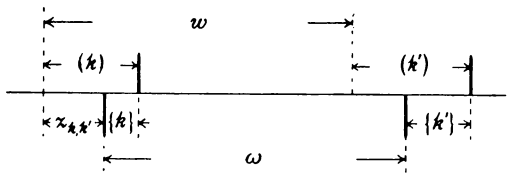

Fig. 2.

Striche des zu untersuchenden Maßstabes, daher w die verbesserte Länge des Intervalles zwischen ihnen, ω das Hilfsintervall und $\{k\}$, $\{k'\}$ die unmittelbar beobachteten Strichabstände. Es ergeben sich daraus sofort die beiden ursprünglichen Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned} (k') + m - z_{k,k'} &= \{k'\}, \\ (k) \qquad - z_{k,k'} &= \{k\}, \end{aligned}$$

worin

$$m = w - \omega$$

gesetzt ist. Hier sind (k), (k') und m die in dem Hansenschen Ausgleichungsverfahren vorkommenden Unbekannten, $z_{k,k'}$ eine neu hinzutretende, welche keine praktische Bedeutung besitzt und ihrem Charakter nach den oben bei Methode II mit gleichem Buchstaben bezeichneten Größen vollkommen entspricht.

Die vollständige Prüfung eines Maßstabes von n Intervallen nach dem Programm Hansens würde unter Weglassung der nicht wirklich erforderlichen Vergleichung der ganzen Länge desselben mit einem Hilfsintervall $\frac{1}{2} n(n+1) - 1$ Paare derartiger ursprünglicher Bedingungsgleichungen liefern. Jedes Paar enthält eine ihm eigentümliche solche Unbekannte $z_{k,k'}$, welche in keinem anderen mehr vorkommt; die Normalgleichung für $z_{k,k'}$ ist somit einfach die Summe der beiden Gleichungen des Paares. Eliminiert man mit ihrer Hilfe $z_{k,k'}$ aus den beiden obigen Gleichungen, so erhält man unmittelbar die Bedingungsgleichungen Hansens; eine jede zweimal und jede mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ behaftet. Hierin ist zunächst der strenge Beweis für die vollkommene Richtigkeit der letzteren gegeben, zugleich aber auch dafür, daß die Einheit ihres Gewichtes nur halb so groß ist, als diejenige einer der ursprünglichen Bedingungsgleichungen.

Ferner aber leuchtet jetzt ein, daß bei Methode I außer den $2n-2$ Unbekannten erster und zweiter Klasse noch $\frac{1}{2}n(n+1)-1$ solche dritter Klasse als ursprünglich existierend und nur in den Hansenschen Bedingungsgleichungen durch Elimination verschwunden zu denken sind. Die Gesamtzahl aller Unbekannten beträgt somit bei Methode I eigentlich $\frac{1}{2}(n-1)(n+6)$, also um $\frac{1}{2}n(n-3)-1$ mehr als bei Methode II, während zu ihrer Bestimmung bezw. Elimination $n+1$ ursprüngliche Gleichungen weniger vorhanden sind. Hierdurch erfährt vor allem die verhältnismäßig geringe Anzahl überschüssiger Gleichungen ihre tiefere Begründung; es ergeben sich aber aus diesem neuen Gesichtspunkte noch weitere Schlüsse.

Zur Elimination völlig nutzloser Unbekannten bedarf es bei Methode I stets der Aufopferung der vollen Hälfte aller überhaupt vorhandenen Gleichungen, während bei Methode II das entsprechende Verhältnis nur $\frac{2n-1}{(n+1)^2-2}$ beträgt, welches mit wachsendem n sich dem Werte $\frac{4}{2n+5}$ nähert, also immer günstiger wird. Es findet somit bei Methode I offenbar Arbeitsvergeudung statt.

Rechnet man umgekehrt die Unbekannten erster und zweiter Klasse als nutzbare zusammen, so hat das Verhältnis ihrer Anzahl zu derjenigen aller Unbekannten überhaupt bei Methode II den unveränderlichen Wert $\frac{1}{2}$, bei Methode I nur den Wert $\frac{4}{n+6}$, welcher mit wachsendem n immer ungünstiger wird. Die Anzahl der nutzbaren Unbekannten selbst ist bei Methode II nur um eins größer als bei Methode I, dieselben gehören aber bis auf eine einzige sämtlich der ersten Klasse an, bei Methode I nur zur Hälfte; ihre Verteilung in die beiden Klassen ist also bei Methode II ungleich vorteilhafter.

Dazu kommt endlich noch der nicht unerhebliche Nebenumstand, daß die eine Größe m bei Methode II dem Hauptziele des Problems viel näher verwandt ist und auch mit viel höherem Gewicht hervorgeht, als die verschiedenen Größen m_i bei Methode I, von denen besonders die mit größerem Index behafteten nur noch verhältnismäßig sehr unsicher erhalten werden.

3.

Es würde einem längst aufgestellten Erfahrungssatze widerstreiten, wenn diesen großen Vorzügen der Methode II nicht auch mehr oder minder erhebliche Mängel gegenüber ständen. Ein solcher liegt freilich unmittelbar auf der Hand: unter gleichen äußeren Umständen ist das Anwendungsgebiet für Methode II ein beschränkteres, weil für die Auflagerung der Maßstäbe deren doppelte Länge zur Verfügung stehen muß. Für die Benutzung vorhandener Instrumente ist dies allerdings ein nicht unerheblicher, vom theoretischen Gesichtspunkte betrachtet doch aber mehr nebensächlicher Nachteil; ein anderer Umstand aber ist von wesentlich höherer Bedeutung. Beide Methoden gründen sich auf die Voraussetzung, daß die oben mit dem Buchstaben m bezeichneten Größen während der Dauer der Beobachtungen unveränderlich sind. Das würde aber doch nur der Fall sein, wenn sich entweder in der dazu erforderlichen Zeit die Temperatur nicht änderte oder Temperatur und thermische Ausdehnung des Materiales bei beiden Maßstäben genau übereinstimmte, Annahmen, die beide im allgemeinen nicht zutreffend sind. Nun kommt bei Methode I jede der verschiedenen Größen m_i immer nur in einer einzigen Gruppe von Beobachtungen vor, deren Zeitdauer verhältnismäßig nicht lang ist; die Veränderlichkeit von m_i wird in dieser kurzen Zeit nur geringe Beträge annehmen können und auch der Zeit nahe proportional verlaufen. Ihr Einfluß kann somit durch doppelte Ausführung der Beobachtungen in umgekehrter Reihenfolge bis auf minimale Reste eliminiert werden. Bei Methode II aber gehört dieselbe Größe m allen Gruppen gemeinschaftlich an und wenn sich auch ihre Veränderlichkeit innerhalb einer jeden Gruppe in derselben Weise unschädlich machen läßt, wie bei Methode I, so bleibt sie doch von Gruppe zu Gruppe bestehen, weil diese durch beliebige Zeiträume voneinander getrennt sein können. Jedenfalls stößt die Elimination des Temperatureinflusses hier auf erheblich größere Schwierigkeiten als dort.

Um vollkommen streng zu verfahren, müßte man bei Methode II die Größe m nicht als Konstante, sondern als Funktion der bei den Messungen der einzelnen Gruppen mit zu beobachtenden Temperaturen und der relativen Ausdehnung α der beiden Materialien betrachten. Man hätte dann die Wahl, entweder α als neue Unbekannte in die Bedingungsgleichungen einzuführen, wobei jedoch das entwickelte Ausgleichungsverfahren seine Anwendbarkeit verlieren würde, oder unter Benutzung der aus anderen Quellen stammenden Werte von α die Beobachtungen vor der Ausgleichung von dem Einflusse der Temperatur zu befreien.

Es ist nicht zu verkennen, daß hierbei ein fremdes Element hinzutritt, dessen Mitwirkung namentlich bei längeren Stäben aus verschiedenartigem Material nicht immer hinreichend erscheint, Unrichtigkeiten zuverlässig auszuschließen, und daß hierdurch der Methode II immerhin ein Teil ihres großen Übergewichtes über die andere wieder verloren geht.

E. Numerisches Rechnungsbeispiel.

Die Anwendung der in den vorangegangenen Abschnitten A und B entwickelten Formeln in einem zweckmäßigen Rechnungsschema wird durch das folgende Zahlenbeispiel veranschaulicht. Dasselbe entspricht dem Falle

$n = 2p\,(= 10)$, kann aber mit geringfügigen Änderungen auch in dem anderen, $n = 2q + 1$ benutzt werden.

Die hier zu Grunde gelegten Ausgangswerte $\{i, j\}$ sind nicht Ergebnisse wirklicher Beobachtungen, sondern unter durch später hervortretende Zweckmäßigkeitsgründe bestimmtem Gesichtspunkte willkürlich angenommene. Sie sind in der folgenden Tabelle mit doppeltem Eingang enthalten und entsprechen ihrer Größenordnung nach etwa den Resten, welche bei der rationellen Behandlung eines wirklichen Systems guter, in ganzen Einheiten ausgedrückter Beobachtungen nach Einführung mittelmäßiger Näherungswerte in den Bedingungsgleichungen auftreten würden. Das mit ihnen durchgeführte Beispiel gibt daher auch ein Urteil über die in einem solchen Falle bei den verschiedenen Operationen entstehende Größe der Zahlen.

$\{i, j\}$

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,0	− 0,5	+ 0,3	+ 1,8	+ 1,5	+ 1,5	+ 0,1	+ 2,4	+ 1,4	+ 0,5	+ 2,0
1	+ 0,5	+ 1,0	+ 0,2	+ 2,6	+ 2,3	+ 2,0	+ 0,8	+ 3,3	+ 2,0	+ 1,1	+ 2,7
2	− 1,3	− 2,4	− 2,3	+ 0,1	− 0,6	− 0,6	− 1,7	+ 0,5	− 0,6	− 1,4	+ 0,1
3	+ 0,3	+ 0,2	+ 0,4	+ 2,3	+ 1,9	+ 2,1	+ 0,7	+ 3,0	+ 1,9	+ 1,0	+ 2,3
4	− 1,8	− 1,9	− 2,2	+ 0,1	− 0,2	− 0,3	− 1,6	+ 0,7	− 0,4	− 1,6	+ 0,3
5	− 2,4	− 3,0	− 3,0	− 0,6	− 1,1	− 1,3	− 2,4	− 0,2	− 1,6	− 2,1	− 0,5
6	+ 1,2	+ 0,9	+ 1,0	+ 3,2	+ 2,7	+ 2,7	+ 1,4	+ 3,5	+ 2,7	+ 1,8	+ 3,1
7	− 2,6	− 2,8	− 2,8	− 0,7	− 1,0	− 1,1	− 2,7	0,0	− 1,1	− 2,2	− 0,4
8	− 2,2	− 2,6	− 2,7	− 0,4	− 0,8	− 1,2	− 2,1	+ 0,2	− 1,1	− 1,7	− 0,2
9	− 0,5	− 0,9	− 0,8	+ 1,4	+ 0,7	+ 1,0	− 0,3	+ 1,8	+ 1,0	+ 0,1	+ 1,2
10	− 1,4	− 1,7	− 1,7	+ 0,3	+ 0,2	+ 0,1	− 1,4	+ 1,2	0,0	− 1,2	0,0

Beim Vorliegen wirklicher Beobachtungen wird die Summe der je einer Gruppe von Bedingungsgleichungen angehörenden Reste $\{i, j\}$ von selbst schon stets dem Werte Null sehr nahe kommen, ihn aber der Abrundungen wegen nicht immer ganz streng annehmen. Vom praktischen Gesichtspunkte betrachtet, liegt darin kein Hindernis, die auf S. 35 angedeutete vereinfachte Rechnungsweise zur Anwendung zu bringen; es wird stets leicht zu beurteilen sein, ob die Vernachlässigung der geringfügigen Abweichungen merklichen Einfluß auf die Endergebnisse äußern kann oder nicht. Natürlich aber werden dann auch die verschiedenen Kontrollgleichungen nicht mehr ganz streng erfüllt sein, und da einzelne der letzteren die Einführung größerer Faktoren bedingen, so wird das Urteil, ob die darin erkennbaren Abweichungen in der Sachlage hinreichende Begründung finden oder auf Rechenfehler zurückzuführen sind, in unliebsamer Weise erschwert; ein Übelstand, welchem freilich durch eine dem gewandten Rechner geläufige, durchaus zulässige Lizenz bei der Abrundung der der Rechnung zu Grunde zu legenden Restwerte $\{i,j\}$ leicht gesteuert werden kann. Der Vollständigkeit wegen ist hier von diesem rechnerischen Kunstgriff kein Gebrauch gemacht worden, sondern es sind die kleinen, absichtlich ziemlich hoch und ungünstig gewählten Werte Z_i mit berücksichtigt. Aus dem Rechnungsschema wird dabei zugleich ersichtlich, welcher Art die Ersparnis an Rechenarbeit ist, die durch vollständige Unterdrückung dieser Werte Z_i erwächst.

Aus der obigen Tabelle erhält man sofort zufolge der Definitionsgleichungen 1) S. 20 die Werte X_i als negativ zu nehmende Summe der dem Index i entsprechenden Horizontalreihe, die Werte $-\Xi_i$ als Summe der dem Index j entsprechenden Vertikalkolumne der Werte $\{i,j\}$. Ferner ergeben die Summen der Werte $\{i,j\}$, welche die Reihen von allmählich wachsender, bezw. abnehmender Gliederzahl bilden, die der Diagonale von links unten nach rechts oben parallel laufen, von links oben beginnend, die Werte $Z_0, Z_1 \ldots Z_{2n}$.

In dem Sonderfalle $\nu = n$ ist auch die Berechnung des Wertes M besonders einfach. Bildet man nämlich von rechts oben beginnend die Summen der Werte $\{i,j\}$, welche der anderen Diagonale parallel laufende Reihen bilden, so erhält man die $2n$ Zahlen:

$$+2,0 \quad +3,2 \quad +2,6 \quad \ldots\ldots\ldots -4,8 \quad -2,2 \quad -1,4,$$

deren Summe natürlich den Wert $\left[Z_i\right]_0^{2n}$ ergeben muß, was als Kontrolle benutzt werden kann. Diese Zahlen der Reihe nach mit $n, n-1 \ldots$ $-(n-1), -n$, im vorliegenden Falle also mit $+10, +9, \ldots -9, -10$ multipliziert und addiert, liefern, wie ein Blick auf das System der Bedingungsgleichungen S. 16 lehrt, den Wert M:

$$M = +373{,}1.$$

Der Gang der weiteren Rechnung ist nun folgender:

i	0	1	2	3	4	p	6	7	8	9	n	Kontrollen
X_i	— 11,0	— 18,5	+ 10,2	— 16,1	+ 8,9	+ 18,2	— 24,2	+ 17,4	+ 14,8	— 4,7	+ 5,6	$[X_i]_0^n = +0{,}6$
Ξ_i	+ 10,2	+ 13,7	+ 13,6	— 10,1	— 5,6	— 4,9	+ 9,2	— 16,4	— 4,2	+ 5,7	— 10,6	$[\Xi_i]_0^n = +0{,}6$
Z_i	0,0	0,0	0,0	— 0,1	+ 0,2	0,0	— 0,2	— 0,1	+ 0,3	— 0,4	— 0,4	$[Z_i]_0^{2n} = -0{,}6$
Z_{2n-i}	0,0	0,0	— 0,1	+ 0,1	+ 0,2	+ 0,2	0,0	— 0,3	— 0,3	+ 0,3		
$i\,Z_i$	0,0	0,0	0,0	— 0,3	+ 0,8	0,0	— 1,2	— 0,7	+ 2,4	— 3,6	— 4,0	$[i\,Z_i]_0^{2n} = -4{,}7$
$(2n-i)\,Z_{2n-i}$	0,0	0,0	— 1,8	+ 1,7	+ 3,2	+ 3,0	0,0	— 3,9	— 3,6	+ 3,3		
$G_i = Z_i - Z_{2n-i}$	0,0	0,0	+ 0,1	— 0,2	0,0	— 0,2	— 0,2	+ 0,2	+ 0,6	— 0,7	0,0	
$H_i = Z_i + Z_{2n-i}$	0,0	0,0	— 0,1	0,0	+ 0,4	+ 0,2	— 0,2	— 0,4	0,0	— 0,1	— 0,8	$[H_i]_0^n = [Z_i]_0^{2n}$
$\Sigma_i = X_i + \Xi_i$	— 0,8	— 4,8	+ 23,8	— 26,2	+ 3,3	+ 13,3	— 15,0	+ 1,0	+ 10,6	+ 1,0	— 5,0	$[\Sigma_i]_0^n = +1{,}2$
$\Delta_i = X_i - \Xi_i$	— 21,2	— 32,2	— 3,4	— 6,0	+ 14,5	+ 23,1	— 33,4	+ 33,8	+ 19,0	— 10,4	+ 16,2	$[\Delta_i]_0^n = 0$
$i\,\Sigma_i$	0,0	— 4,8	+ 47,6	— 78,6	+ 13,2	+ 66,5	— 90,0	+ 7,0	+ 84,8	+ 9,0	— 50,0	$[i\,\Sigma_i]_0^n = +4{,}7$
$i\,\Delta_i$	0,0	— 32,2	— 6,8	— 18,0	+ 58,0	+115,5	—200,4	+236,6	+152,0	— 93,6	+162,0	$[i\,\Delta_i]_0^n = M$
$U_i = (n-i)\,G_i$	0,0	0,0	+ 0,8	— 1,4	0,0	— 1,0	— 0,8	+ 0,6	+ 1,2	— 0,7		
$V_i = (n-i)\,H_i$	0,0	0,0	— 0,8	0,0	+ 2,4	+ 1,0	— 0,8	— 1,2	0,0	— 0,1		
$\Sigma_i - \Sigma_{i+1}$	+ 4,0	— 28,6	+ 50,0	— 29,5	— 10,0	+ 28,3	— 16,0	— 9,6	+ 9,6	+ 6,0		
$(i+1)(\Sigma_i - \Sigma_{i+1})$	+ 4,0	— 57,2	+ 150,0	— 118,0	— 50,0	+169,8	—112,0	— 76,8	+ 86,4	+ 60,0		
$Y_i = (n-i)(i+1)(\Sigma_i - \Sigma_{i+1})$	+ 40,0	—514,8	+1200,0	— 826,0	— 300,0	+849,0	—448,0	—230,4	+172,8	+ 60,0		
$\Delta_i - \Delta_0$	0,0	— 11,0	+ 17,8	+ 15,2	+ 35,7	+ 44,3	— 12,2	+ 55,0	+ 40,2	+ 10,8	+ 37,4	
$\frac{1}{n+1}(\Delta_i - \Delta_0)$	0,000	— 1,000	+ 1,618	+ 1,382	+ 3,245	+ 4,027	— 1,109	+ 5,000	+ 3,655	+ 0,982	+ 3,400	
$i\,2\,m$	0,000	+ 0,340	+ 0,680	+ 1,020	+ 1,360	+ 1,700	+ 2,040	+ 2,380	+ 2,720	+ 3,060	+ 3,400	
* $(n+1)\,s_i$	0,00	+ 3,26	+ 42,64	— 19,10	— 5,60	+ 33,50		(Nachträglich einzufügen)				
$S_i = \Sigma_i + \Sigma_{n-i}$	— 5,8	— 3,8	+ 34,4	— 25,2	— 11,7	+ 26,6						
$D_i = \Sigma_i - \Sigma_{n-i}$	+ 4,2	— 5,8	+ 13,2	— 27,2	+ 18,3	0,0						
* $(n+1)\,d_i$	0,00	— 9,86	+ 10,11	— 30,44	+ 17,38	0,0			(desgl.)			
$S_i - S_{i+1}$	— 2,0	— 38,2	+ 59,6	— 13,5	— 38,3							
$(i+1)(S_i - S_{i+1})$	— 2,0	— 76,4	+ 178,8	— 54,0	— 191,5							
$\mathfrak{B}_i = (n-i)(i+1)(S_i - S_{i+1})$	— 20,0	—687,6	+1430,4	— 378,0	—1149,0							$\mathfrak{B}_i = Y_i - Y_{n-1-i}$
$\mathfrak{A}_i = V_i - V_{n-1-i}$	+ 0,1	0,0	+ 0,4	+ 0,8	+ 1,4							

$D_i - D_{i+1}$	+ 10,0	− 19,0	+ 40,4	− 45,5	+ 18,3								
$(i+1)(D_i - D_{i+1})$	+ 10,0	− 38,0	+ 121,2	− 182,0	+ 91,5								
$B_i = (n-i)(i+1)(D_i - D_{i+1})$	+100,0	−342,0	+ 969,6	−1274,0	+ 549,0								$B_i = Y_i + Y_{n-1-i}$
$A_i = U_i + U_{n-1-i}$	− 0,7	+ 1,2	+ 1,4	− 2,2	− 1,0								
$\mathfrak{C}_i = 2\mathfrak{A}_i + \mathfrak{B}_i$	− 18,8	−687,6	+1431,2	− 376,4	−1146,2							$[\mathfrak{C}_i]_0^{p-1} = \varrho\, 2\,\mathfrak{C} = -797{,}8$	
$\mathfrak{C} f_i$	−239,3	−186,2	− 133,0	− 79,8	− 26,6							$\varrho = p(p+1) = 30, \quad 2\,\mathfrak{C} = -26{,}593$	
$-(n+1)\mathfrak{R}_i = \mathfrak{C}_i + \mathfrak{C} f_i$	−258,1	−873,8	+1298,2	− 456,2	−1172,8							$\frac{1}{2} f_i = n - 1 - 2i$	
$\mathfrak{R}_i$	+ 23,46	+ 79,44	− 118,02	+ 41,47	+ 106,62								
$-((p-1)-i)\,2r_p$	− 28,43	− 21,32	− 14,22	− 7,11			4) . . .					(Reihenfolge nebenstehender	
$-((p-2)-i)\,2r_{p-1}$	− 7,36	− 4,91	− 2,45				8) . .					Rechenoperationen.)	
$-((p-3)-i)\,2r_{p-2}$	+ 22,45	+ 11,22					12) .						
$-((p-4)-i)\,2r_{p-3}$	− 7,16						16)						
$(n-i)(i+1)\,r_{i+1}$	+ 2,96	+ 64,43	− 134,69	+ 34,36	+ 106,62		17)	13)	9)	5)	1)		
$(i+1)\,r_{i+1}$	+ 0,296	+ 7,159	− 16,836	+ 4,909	+ 17,770		18)	14)	10)	6)	2)		$[(i+1)r_{i+1}]_0^{p-1} = -\mathfrak{C}$
r_{i+1}	+ 0,296	+ 3,580	− 5,612	+ 1,227	+ 3,554		19)	15)	11)	7)	3)		
$(n+1)\,C_i = 2A_i + B_i$	+ 98,6	−339,6	+ 972,4	−1278,4	+ 547,0							$p(p+1)\,r_p = \mathfrak{R}_{p-1}$	
C_i	+ 8,96	− 30,87	+ 88,40	− 116,22	+ 49,73							$(p-1)(p+2)\,r_{p-1} = \mathfrak{R}_{p-2} - 2r_p$	
												$(p-2)(p+3)\,r_{p-2} = \mathfrak{R}_{p-3} - 4r_p - 2r_{p-1}$	
$(n-2(i+1))\,C_i$	+ 71,68	−185,22	+ 353,60	− 232,44	0,00							$(p-3)(p+4)\,r_{p-3} = \mathfrak{R}_{p-4} - 6r_p - 4r_{p-1} - 2r_{p-2}$	
$[C_i]_0^i$	+ 8,96	− 21,91	+ 66,49	− 49,73	0,00								$[C_i]_0^{p-1} = 0$
$(n-i)(i+1)\,K_i$	+ 89,60	−229,04	+ 486,58	− 331,90	0,00							$(n-i)(i+1)\,K_i = (n-2(i+1))\,C_i + 2\,[C_i]_0^i$	
$(i+1)\,K_i$	+ 8,960	− 25,449	+ 60,823	− 47,414	0,00								
K_i	+ 8,960	− 12,725	+ 20,274	− 11,854	0,00								
d_i	0,000	− 0,896	+ 0,919	− 2,767	+ 1,580								
$(n-2(i+1))\,d_i$	0,000	− 5,376	+ 3,675	− 5,533									
$(n-2i)\,d_{i+1}$	− 8,960	+ 7,349	− 16,599	+ 6,321								$(n-2i)\,d_{i+1} = (n-2(i+1))\,d_i - K_i$	
$s_i = s_0 + [r_i]_1^i$	0,000	+ 0,296	+ 3,876	− 1,736	− 0,509	+ 3,045							
$\vartheta_i = \frac{1}{n+1}(\Delta_i - \Delta_0) - i\,2m$	0,000	− 1,340	+ 0,938	+ 0,362	+ 1,885	+ 2,327	− 3,149	+ 2,620	+ 0,935	− 2,078	0,000		
$\sigma_i = \frac{1}{2}(s_i \pm d_i)$	0,000	− 0,300	+ 2,398	− 2,252	+ 0,535	+ 1,522	− 1,045	+ 0,515	+ 1,479	+ 0,596	0,000		
$x_i = \frac{1}{2}(\sigma_i + \vartheta_i)$	0,000	− 0,820	+ 1,668	− 0,945	+ 1,210	+ 1,925	− 2,097	+ 1,568	+ 1,207	− 0,741	0,000		
$\xi_i = \frac{1}{2}(\sigma_i - \vartheta_i)$	0,000	+ 0,520	+ 0,730	− 1,307	− 0,675	− 0,402	+ 1,052	− 1,052	+ 0,272	+ 1,337	0,000		

Für die Berechnung von Ω nach der Formel J′) ist folgendes Schema recht zweckmäßig:

i	0	1	2	3	4	p		
$R_i = G_i - G_{n-1-i}$	$+0{,}7$	$-0{,}6$	$-0{,}1$	$0{,}0$	$+0{,}2$		$\chi = [\sigma_i]_0^{(p)}$	$+3{,}449$
$R_i = H_i + H_{n-1-i}$	$-0{,}1$	$0{,}0$	$-0{,}5$	$-0{,}2$	$+0{,}6$			
$L_i = (n+1)\,d_i - D_i$	$-4{,}20$	$-4{,}06$	$-3{,}09$	$-3{,}24$	$-0{,}92$			
$\mathfrak{L}_i = (n+1)\,s_i - S_i$	$+5{,}80$	$+7{,}06$	$+8{,}24$	$+6{,}10$	$+6{,}10$	$+6{,}90$		
$N_i = L_i - L_{i+1}$	$-0{,}14$	$-0{,}97$	$+0{,}15$	$-2{,}32$	$-0{,}92$			
$\mathfrak{N}_i = \mathfrak{L}_i - \mathfrak{L}_{i+1}$	$-1{,}26$	$-1{,}18$	$+2{,}14$	$0{,}00$	$-0{,}80$			
N_i^2	0,02	0,94	0,02	5,38	0,85			
$\mathfrak{N}_i^2$	1,59	1,39	4,58	0,00	0,64			
$N_i^2 + \mathfrak{N}_i^2$	1,61	2,33	4,60	5,38	1,49			
$(i+1)\left(N_i^2 + \mathfrak{N}_i^2\right)$	1,61	4,66	13,80	21,52	7,45			
$(n-i)\,(i+1)\left(N_i^2 + \mathfrak{N}_i^2\right)$	16,10	41,94	110,40	150,64	44,70		$\left[(n-i)\,(i+1)\left(N_i^2 + \mathfrak{N}_i^2\right)\right]_0^{p-1}$	363,78
L_i^2	17,64	16,48	9,55	10,50	0,85		$\left[L_i^2\right]_0^{p-1}$	55,02
$\mathfrak{L}_i^2$	33,64	49,84	67,90	37,21	37,21	47,61	$\left[\mathfrak{L}_i^2\right]_0^{(p)}$	249,60
R_i^2	0,49	0,36	0,01	0,00	0,04		I $\left[R_i^2\right]_0^{p-1}$	0,90
$\mathfrak{R}_i^2$	0,01	0,00	0,25	0,04	0,36		II $\left[\mathfrak{R}_i^2\right]_0^{p-1}$	0,66
1) Σ_i^2	0,64	23,04	566,44	686,44	10,89	176,89	III $\frac{1}{2} H_n^2$	0,32
2) Σ_{n-i}^2	25,00	1,00	112,36	1,00	225,00		IV $\frac{1}{4}\left[(n-i)\,(i+1)\left(N_i^2 + \mathfrak{N}_i^2\right)\right]_0^{p-1}$	90,94
3) Δ_i^2	449,44	1036,84	11,56	36,00	210,25	533,61	V $-\frac{1}{2}\left\{\left[L_i^2\right]_0^{p-1} + \left[\mathfrak{L}_i^2\right]_0^{(p)}\right\}$	$-152{,}31$
4) Δ_{n-i}^2	262,44	108,16	361,00	1142,44	1115,56		VI $-2\,\chi\left[\Sigma_i\right]_0^n$	$-\ \ 8{,}28$
1) + 2) + 3) + 4)	737,52	1169,04	1051,36	1865,88	1561,67	710,50	VII $\left[\Delta_i^2\right]_0^n + \left[\Sigma_i^2\right]_0^n$	7095,97
							$(n+1)\,(2\,\Omega - \chi^2) = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \ldots + \mathrm{VII}$	7028,20
							$2\,\Omega - \chi^2$	638,93
							χ^2	11,90
							$2\,\Omega$	650,83
							Ω	325,415

Die Summe der Quadrate der Werte $\{i, j\}$ beträgt 325,52, daher wird die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler $325{,}52 - \Omega = 0{,}105$. Für dieselbe Größe ergibt sich durch Substitution der aus der Ausgleichungsrechnung hervorgegangenen Werte x_i, ξ_i und m in die Bedingungsgleichungen der Betrag 0,102 und daraus rückwärts $\Omega = 325{,}418$. Wird schließlich Ω auch unmittelbar nach der Formel 25) S. 37 berechnet, so findet sich zunächst

$$[X_i\, x_i]_0^n + [\Xi_i\, \xi_i]_0^n + M\,m = 325{,}420$$

und hierzu liefern die bei der Substitution sich mit ergebenden Werte z_i noch den Beitrag

$$[Z_i\, z_i]_0^{2n} = +\,0{,}006,$$

sodaß also auf diesem Wege

$$\Omega = 325{,}426$$

gefunden wird. Die an sich ganz unwesentlichen Unterschiede der drei verschiedenartig hergeleiteten Werte finden durch die bereits bei der Berechnung von δ_i, d_i und s_i einsetzenden Vernachlässigungen bedeutungsloser Dezimalstellen hinreichende Erklärung.

VII. Gedrängte Behandlung des allgemeinen Falles.

Die erschöpfende Behandlung, welche in Abschnitt VI dem Sonderfalle $\nu = n$ zuteil geworden ist, entspricht nicht nur der größeren Wichtigkeit desselben, sondern verfolgte gleichzeitig den Zweck, einen Einblick in das Wesen des allgemeinen, $\nu < n$, vorzubereiten. In bezug auf diesen bedarf es jetzt nur noch weniger Hinweise.

A. Auflösung der Normalgleichungen.

Da hier die früheren Substitutionen b) auf S. 22 nicht mehr ausführbar sind, so müssen die Größen x_i und ξ_i weiterhin getrennt gehalten werden. Setzt man daher jetzt unmittelbar:

$$\text{b)}\ \left\{\begin{array}{llll} s_i = x_i + x_{n-i}, & s'_i = \xi_i + \xi_{\nu-i}, & S_i = X_i + X_{n-i}, & S'_i = \Xi_i + \Xi_{\nu-i}, \\ d_i = x_i - x_{n-i}, & d'_i = \xi_i - \xi_{\nu-i}, & D_i = X_i - X_{n-i}, & D'_i = \Xi_i - \Xi_{\nu-i}, \\ & h_i = z_i + z_{n+\nu-i}, & H_i = Z_i + Z_{n+\nu-i}, & \\ & g_i = z_i - z_{n+\nu-i}, & G_i = Z_i - Z_{n+\nu-i}, & \end{array}\right.$$

wobei dem früheren entsprechend, Rücksicht darauf zu nehmen ist, daß sowohl

$$n = 2p \quad \text{oder} \quad 2q+1,$$

als auch

$$\nu = 2p' \quad \text{oder} \quad 2q'+1,$$

d. h. sowohl n als auch ν gerade oder ungerade Zahlen sein können, so spaltet sich das System 1) der Normalgleichungen in zwei voneinander unabhängige, deren eines nur die Unbekannten s_i s'_i h_i, das andere die Unbekannten d_i d'_i g_i und m enthält. Für den schon früher als Typus benutzten speziellen Fall $n = 8$, $\nu = 5$ sind diese beiden Systeme in schematischer Form die folgenden:

Schema III.

s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s'_0	s'_1	s'_2	h_0	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6	=
+ 6					+ 2	+ 2	+ 2	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1		S_0
	+ 6				+ 2	+ 2	+ 2		− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	S_1
		+ 6			+ 2	+ 2	+ 2			− 1	− 1	− 1	− 1	− 2	S_2
			+ 6		+ 2	+ 2	+ 2				− 1	− 1	− 2	− 2	S_3
				+ 3	+ 1	+ 1	+ 1					− 1	− 1	− 1	$\frac{1}{2} S_4$
+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 1	+ 9			− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 2	− 2	S'_0
+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 1		+ 9			− 1	− 1	− 1	− 2	− 2	− 2	S'_1
+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 1			+ 9			− 1	− 2	− 2	− 2	− 2	S'_2
− 1					− 1			+ 1							H_0
− 1	− 1				− 1	− 1			+ 2						H_1
− 1	− 1	− 1			− 1	− 1	− 1			+ 3					H_2
− 1	− 1	− 1	− 1		− 1	− 1	− 2				+ 4				H_3
− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 2	− 2					+ 5			H_4
− 1	− 1	− 1	− 2	− 1	− 2	− 2	− 2						+ 6		H_5
	− 1	− 2	− 2	− 1	− 2	− 2	− 2							+ 6	H_6

Schema IV.

d_0	d_1	d_2	d_3	d'_0	d'_1	d'_2	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	m	=
+ 6							− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1		− 30	D_0
	+ 6							− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 20	D_1
		+ 6							− 1	− 1	− 1	− 1		− 12	D_2
			+ 6							− 1	− 1			− 6	D_3
				+ 9			− 1	− 1	− 1	− 1	− 1			+ 60	D'_0
					+ 9			− 1	− 1	− 1				+ 36	D'_1
						+ 9			− 1					+ 12	D'_2
− 1				− 1			+ 1								G_0
− 1	− 1			− 1	− 1			+ 2							G_1
− 1	− 1	− 1		− 1	− 1	− 1			+ 3						G_2
− 1	− 1	− 1	− 1	− 1	− 1					+ 4					G_3
− 1	− 1	− 1	− 1	− 1							+ 5				G_4
− 1	− 1	− 1										+ 6			G_5
	− 1												+ 6		G_6
−15	−10	− 6	− 3	+30	+18	+ 6								+420	M

Jedes derselben besteht aus drei Abteilungen und in jedem herrscht eine doppelte Abhängigkeit der Gleichungen untereinander, welche, analog wie früher, bei dem ersten unmittelbar erkennbar ist, bei dem zweiten sich aber erst im Laufe der weiteren Behandlung herausstellt. Von den Größen s_i, d_i, s'_i, d'_i und m sind demnach wieder vier willkürlich und es kann ohne weiteres die Festsetzung getroffen werden, daß s_0, s'_0, d_0, d'_0 dafür gewählt werden.

Aus beiden Systemen lassen sich dann die Größen g_i und h_i in derselben Weise wie früher eliminieren, im zweiten bildet aber die ungünstigere Beschaffenheit der Koeffizienten von m eine größere Unbequemlichkeit, als im Sonderfalle. Dort stand es frei, durch die Substitution d) S. 26 diese Unbekannte zum Verschwinden zu bringen; hier ist man genötigt, das Gleichungssystem durch die beiden Substitutionen:

$$\text{e)} \quad \dots \quad \begin{cases} & \vartheta_i = d'_i + 2\,(\nu - 2\,i)\,m \\ (i = 0 \dots \nu) & g'_i = g_i + 2\,(\nu - i)\,m \\ (i > \nu) & g'_i = g_i \end{cases}$$

von ihr zu befreien. Diese bewirken in dem System wiederum weiter keine Änderung, als daß überall ϑ_i und g'_i bezw. an Stelle von d'_i und g_i treten, die Größe m aber ganz herausgeht, wodurch die Anzahl der Gleichungen um eins größer wird, als die der darin enthaltenen Unbekannten. Die aus der ursprünglichen Normalgleichung für m durch die Substitutionen b) hervorgegangene, welche die dritte Abteilung dieses Systems bildet, verwandelt sich durch die Substitutionen e) in eine Beziehung zwischen den Unbekannten d_i und ϑ_i allein:

$$-\left[a_k\, d_k\right]_0^{\nu - 1 \text{ bzw. } q} + \left[\alpha_k\, \vartheta_k\right]_0^{\nu' - 1 \text{ bzw. } q'} = M,$$

welche keine g'_i enthält und ihrem Charakter nach völlig anders beschaffen ist, als die übrigen Gleichungen des Systems. Wird diese als die überzählige angesehen, so bedarf es auch hier wieder nicht notwendig der etwas umständlichen Berechnung des numerischen Wertes von M.

Die Elimination der Größen g_i und h_i führt zu Gleichungen, welche ihrem Charakter nach den früheren 13) und 21) entsprechen aber nicht mehr von so einfachem Bau sind. Ihre allgemeine Form aufzustellen, wäre nicht schwierig, aber zwecklos; praktischer Wert würde ihr des Mangels an Übersichtlichkeit wegen nicht mehr zukommen; im gegebenen Falle gelangt man bequemer durch schrittweise Elimination zu ihnen. — Es bedarf kaum des

Hinweises, daß man auch hier die Größen G_i und H_i durch dieselbe Reduktion, wie im Sonderfalle zweckmäßig wieder auf den Wert Null bringen kann.

Das die Größen s_i, s'_i und h_i enthaltende System besitzt, wie ein Blick auf das Schema III lehrt, die Eigenschaft, daß die Summe der Gleichungen der ersten und dritten Abteilung identisch verschwindet und ebenso die Summe der Gleichungen der zweiten und dritten Abteilung. Hieraus folgen sogleich die beiden, der früheren Kontrollformel η) entsprechenden:

$$\pi) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} [S_i]_0^{q \text{ bzw. } (p)} + [H_i]_0^{\mathfrak{q} \text{ bzw. } \mathfrak{p}} = 0, \\ [S'_i]_0^{q' \text{ bzw. } (p')} + [H_i]_0^{\mathfrak{q} \text{ bzw. } \mathfrak{p}} = 0, \end{cases}$$

worin

$$\mathfrak{q} = q + p' \text{ oder } p + q',$$
$$\mathfrak{p} = p + p' \text{ oder } q + q' + 1$$

gesetzt ist, und welche auch in der Form:

$$\pi') \quad \ldots\ldots\ldots \quad \begin{cases} [X_i]_0^n + [Z_i]_0^{n+\nu} = 0, \\ [\Xi_i]_0^\nu + [Z_i]_0^{n+\nu} = 0 \end{cases}$$

geschrieben werden können und in dieser wiederum bereits unmittelbar aus dem Gleichungssystem 1) hervorgehen.

Die Elimination der h_i liefert eine Anzahl von Gleichungen, welche um zwei geringer ist, als die der Unbekannten s_i und s'_i zusammengenommen, sodaß also, wie erforderlich, zwei der letzteren unbestimmbar bleiben. Für ihre Auflösung läßt sich ein allgemein verwendbares schematisches Verfahren nicht mehr herleiten; sie kann nur noch numerisch bewirkt werden, wird aber durch den Umstand erleichtert, daß, wie bei dem Sonderfall, in jeder Gleichung, ihrer Entstehungsweise zufolge, die Summe der Koeffizienten der linken Seite den Wert Null hat, hier dies aber auch schon für die Koeffizienten der Unbekannten s_i allein zutrifft und ebenso auch für die Koeffizienten der Unbekannten s'_i allein. Setzt man daher:

$$\mathfrak{f}) \quad \ldots\ldots \quad r_i = s_i - s_{i-1}, \qquad r'_i = s'_i - s'_{i-1},$$

so verschwinden s_0 und s'_0 gleichzeitig. Die Schemata V und VI stellen wieder die dem Falle $n = 8$, $\nu = 5$ entsprechenden Gleichungssysteme dar:

Schema V.

s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s'_0	s'_1	s'_2	$=$
$+30$	-35	$+2$	$+2$	$+1$	-4	$+2$	$+2$	$\mathfrak{C}_0$
-6	$+64$	-68	$+4$	$+2$	-2	-2	$+4$	$\mathfrak{C}_1$
-3	-3	$+105$	-102	$+3$				$\mathfrak{C}_2$
-1	-1	-1	$+119$	-116	-1	$+3$	-2	$\mathfrak{C}_3$
-4	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	$+41$	-43	$+2$	$\mathfrak{C}'_0$
-2	-2	$+2$	$+2$		-2	$+70$	-68	$\mathfrak{C}'_1$

Schema VI.

r_1	r_2	r_3	r_4	r'_1	r'_2	$=$
-30	$+5$	$+3$	$+1$	$+4$	$+2$	$\mathfrak{C}_0$
$+6$	-62	$+6$	$+2$	$+2$	$+4$	$\mathfrak{C}_1$
$+3$	$+6$	-99	$+3$			$\mathfrak{C}_2$
$+1$	$+2$	$+3$	-116	$+1$	-2	$\mathfrak{C}_3$
$+4$	$+3$	$+2$	$+1$	-41	$+2$	$\mathfrak{C}'_0$
$+2$	$+4$	$+2$		$+2$	-68	$\mathfrak{C}'_1$

$$\mathfrak{C}_0 = 6\,(S_0 - S_1) + (6\,H_0 - H_6) \qquad \mathfrak{C}'_0 = 5\,(S'_0 - S'_1) + (5\,H_0 - H_4)$$
$$\mathfrak{C}_1 = 12\,(S_1 - S_2) + (6\,H_1 - 2\,H_6) \qquad \mathfrak{C}'_1 = 8\,(S'_1 - S'_2) + (4\,H_1 - 2\,H_3)$$
$$\mathfrak{C}_2 = 18\,(S_2 - S_3) + (6\,H_2 - 3\,H_5)$$
$$\mathfrak{C}_3 = 20\,(S_3 - S_4) + (5\,H_3 - 3\,H_4)$$

In bezug auf das letztere System ist zu bemerken, daß darin in jeder Gleichung der Koeffizient einer Unbekannten alle übrigen beträchtlich überwiegt und die entsprechende Unbekannte in jeder Gleichung eine andere ist. Dieser Umstand hat zur Folge, daß die Auflösung mit Vorteil durch ein Näherungsverfahren bewirkt werden kann, welches mit dem strengen Verfahren im Sonderfall Ähnlichkeit hat und viel rascher zum Ziele führt, als die schrittweise Elimination. Nach Berechnung der r und r' erhält man dann wieder:

$$\text{Q)} \quad \ldots\ldots \quad s_i = s_0 + [r_k]_1^i, \quad s'_i = s'_0 + [r'_k]_0^i.$$

Aus dem die Differenzgrößen d_i und ϑ_i enthaltenden Gleichungssystem können durch die Elimination der g'_i stets ebensoviele Gleichungen erhalten werden, als die Anzahl der zu bestimmenden Unbekannten d_i und ϑ_i zusammen beträgt. Unter letzteren ist jetzt nur noch eine, d_0 willkürlich, als notwendige Folge der Substitutionen e), durch welche ja die Anzahl der ursprünglich vorhanden gewesenen Unbekannten um eins vermindert worden ist. Somit ist auch eine der zur Verfügung stehenden Gleichungen überflüssig und es kann eine beliebige davon weggelassen werden. Die Auflösung der übrigen läßt sich wieder nur noch numerisch bewirken und gestaltet sich etwas weniger bequem, als die des anderen Systems, bietet aber keinerlei Schwierigkeit. Das vollständige System für den Fall $n = 8$, $\nu = 5$ wird durch das Schema VII dargestellt.

Schema VII.

d_0	d_1	d_2	d_3	ϑ_0	ϑ_1	ϑ_2	=
+30	−35			− 6			C_0
− 6	+64	−72		− 6	− 6		C_1
− 9	− 9	+99	−108	− 6	− 6	− 6	C_2
− 9	− 9	− 9	+111	− 9	− 5		C_3
− 6	− 1	− 1	− 1	+39	−45		C'_0
− 6	− 6	− 2	− 2	− 6	+66	−72	C'_1
− 3	− 3	− 3		− 3	− 3	+78	C'_2

$$C_0 = 6(D_0 - D_1) + (6G_0 - G_6) \qquad C'_0 = 5(D'_0 - D'_1) + (5G_0 + G_4)$$
$$C_1 = 12(D_1 - D_2) + (6G_1 + 2G_6) \qquad C'_1 = 8(D'_1 - D'_2) + (4G_1 + 2G_3)$$
$$C_2 = 18(D_2 - D_3) + (6G_2 + 3G_5) \qquad C'_2 = 9D'_2 + 3G_2$$
$$C_3 = 20D_3 + (5G_3 + 4G_4)$$

Indem nach Berechnung der Werte von d_i und ϑ_i für d'_0 ein willkürlicher Wert gewählt wird, folgen schließlich aus der Substitution e) zunächst

$$\text{R)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad 2m = \frac{1}{\nu}(\vartheta_0 - d'_0)$$

und daraus die Werte der übrigen Größen d'_i.

In bezug auf die Werte der Unbekannten g_i und h_i gilt hier vollkommen das Gleiche wie beim Sonderfalle (vergl. S. 36). Ebenso ist die S. 37 angegebene Formel 25 für Ω noch ohne weiteres anwendbar; sie läßt sich auch nach demselben Verfahren wie oben, allerdings etwas umständlicher, noch immer in eine Summe von Quadratzahlen und mit ganzen Zahlen multiplizierten und dividierten Quadratzahlen umformen.

B. Ermittelung der Gewichte der Unbekannten.

Die Gewichte der Unbekannten können im allgemeinen Falle naturgemäß ebenfalls nur noch durch unmittelbare numerische Berechnung gefunden werden; der Weg aber, auf dem das Ziel verhältnismäßig einfach zu erreichen ist, geht dem im Sonderfalle eingeschlagenen völlig parallel.

Wegen der Bevorzugung der vier Größen x_0, x_n, ξ_0, ξ_n ist hier noch immer:

$$Px_i = Px_{n-i},$$
$$P\xi_i = P\xi_{n-i},$$

und es wird unter Rücksicht auf die Substitutionen $\mathfrak{d}$)

$$\text{S)} \quad \ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(i = 1 \ldots \left\{ \begin{array}{l} q \text{ bezw. } p-1 \\ q' \quad \text{,,} \quad p'-1 \end{array} \right) \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{P x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial X_i} = \frac{1}{2} (\Phi_i + \Psi_i), \\ \frac{1}{P \xi_i} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \Xi_i} = \frac{1}{2} (\Phi'_i + \Psi'_i), \end{array} \right. \\ \qquad \frac{1}{P x_p} = \Phi_p, \qquad \frac{1}{P \xi_{p'}} = \Phi'_{p'}, \end{array} \right.$$

wo:

$$\mathfrak{g}) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Phi_i = \frac{\partial s_i}{\partial S_i}, & \Phi'_i = \frac{\partial s'_i}{\partial S'_i}, \\ \Psi_i = \frac{\partial d_i}{\partial D_i}, & \Psi'_i = \frac{\partial d'_i}{\partial D'_i}. \end{array} \right.$$

Werden bei der Auflösung der dem Schema VI entsprechenden Gleichungen die rechten Seiten nicht unmittelbar numerisch behandelt, sondern in der unbestimmten Form $\mathfrak{C}_0$, $\mathfrak{C}_1 \ldots$, $\mathfrak{C}'_0$, $\mathfrak{C}'_1 \ldots$ belassen, so werden r_i, r'_i und damit auch s_i, s'_i in Gestalt linearer Funktionen der verschiedenen Größen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ erhalten. Eine jede von diesen ist aber selbst wieder eine sehr einfache lineare Funktion je zweier der Größen S bezw. S', deren Koeffizienten sich bereits bei der Elimination der Größen h_i ergeben haben und daher bekannt sind. Somit läßt sich s_i als lineare Funktion der verschiedenen S und S' darstellen, von welcher aber nur die beiden Glieder Interesse haben, welche S_0 und S_i enthalten. Diese seien $c_0 S_0$ und $c_i S_i$, wo c_0 und c_i bekannte numerische Koeffizienten sind. Dann ist sogleich:

$$\frac{\partial s_i}{\partial S_i} = c_0 \frac{\partial S_0}{\partial S_i} + c_i.$$

Aus den Kontrollformeln π) folgt aber:

$$\frac{\partial S_0}{\partial S_i} = -1, \text{ mit der Ausnahme } \frac{\partial S_0}{\partial S_p} = -\frac{1}{2},$$

und es wird somit:

$$\Phi_i = c_i - c_0$$
$$\Phi_p = c_p - \frac{1}{2} c_0.$$

Ganz entsprechende Ausdrücke ergeben sich auch für Φ'_i und $\Phi'_{p'}$.

Um Ψ_i und Ψ'_i zu bestimmen, denke man sich in den dem Schema VII entsprechenden Gleichungen d_0 auf die rechte Seite gebracht und darauf die Auflösung ohne vorherige Streichung einer der Gleichungen in derselben Weise durchgeführt, wie bei dem anderen System. Man gelangt dann im Laufe der schrittweisen Elimination auf eine Beziehung zwischen den verschiedenen Größen C und C', in welcher die eine Art der Abhängigkeit zum Ausdruck kommt, welche in den dem Schema IV entsprechenden System von Gleichungen herrscht. Ist bei der Elimination der Größen g_i nicht in naheliegender Weise sogleich mit relativen Primzahlen operiert, sondern das bei dem Sonderfalle angewendete Verfahren in vollkommen strenger Analogie befolgt worden, so lautet diese Beziehung:

$$\varrho) \quad . \quad . \quad \left[(n-i)\, C_i\right]_0^{n-\nu} + (\nu+1) \left\{\left[C_i\right]_{n-\nu+1}^{q \text{ bzw. } p-1} + \left[C'_i\right]_0^{q' \text{ bzw. } p'-1}\right\} = 0$$

und kann natürlich von vornherein zur Kontrolle der richtigen Bildung der dem Schema VII entsprechenden Gleichungen benutzt werden.

Die Größen $d_1 \ldots, \vartheta_0, \vartheta_1 \ldots$ ergeben sich dann in Gestalt linearer Funktionen von d_0 und den verschiedenen Größen C und C', aus welchen mittels der Relation ϱ) eine beliebige der letzteren Größen eliminiert werden kann. Aus leicht zu erkennendem Grunde ist hierfür C_0 zu wählen.

Substituiert man sodann die gefundenen Ausdrücke für $d_1 \ldots, \vartheta_0, \vartheta_1 \ldots$ in die frühere Gleichung 56), so reduziert sich diese auf eine Beziehung zwischen den Größen C' und M, und zwar unter der gleichen Voraussetzung wie oben auf die folgende:

$$\sigma) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left[C'_i\right]_0^{p'-1 \text{ bzw. } q'} - M = 0.$$

Sie stellt die zweite Art der Abhängigkeit der dem Schema IV entsprechenden Gleichungen untereinander dar und kann dazu benutzt werden, aus den Ausdrücken für d_1 u. s. w. auch noch C'_0 zu eliminieren. Bei der Elimination der g_i hat sich bereits eine jede der Größen C und C' als lineare Funktion je zweier oder auch nur einer der Größen D, bezw. D' ergeben, deren Koeffizienten somit bekannt sind. Werden also nun d_i bezw. ϑ_i durch die Größen D und D' ausgedrückt, so kommen unter den letzteren D_0 und D'_0 nicht mehr vor und man erhält somit ohne weiteres die Werte von

$$\Psi_i = \frac{\partial\, d_i}{\partial\, D_i} \text{ und die von } \frac{\partial\, \vartheta_i}{\partial\, D'_i}.$$

Aus e) folgt aber, nachdem daraus $2m$ mittels R) eliminiert worden ist:

$$\psi'_i = \frac{\partial \vartheta_i}{\partial D'_i} - \frac{\nu - 2i}{\nu} \frac{\partial \vartheta_0}{\partial D'_i}.$$

Endlich ergibt sich sogleich wieder aus der letzten Gleichung des Systems 1):

$$\frac{1}{P_m} = \frac{\partial m}{\partial M} = \frac{1}{b} = 6 \frac{1}{\nu(\nu+1)(\nu+2)(2n-\nu+1)},$$

$$\frac{1}{P_{\nu 2m}} = \frac{24\nu}{(\nu+1)(\nu+2)(2n-\nu+1)}.$$

C. Schlußbemerkung.

Die Gleichung ϱ) entspricht ihrem Charakter nach vollkommen den Kontrollformeln γ) und γ') im Sonderfalle. Daß sie für $\nu = n$ nicht unmittelbar in diese übergeht, hat seinen Grund darin, daß die u ersten Größen C sich in anderer Weise aus den Größen D und G zusammensetzen, als die übrigen, wenn u den Unterschied zwischen p und p', bezw. q und q' bedeutet. Werden aber die Ausdrücke der Größen C und C' durch D, D' und G in ϱ) eingeführt, so verwandelt sich diese in

$$\Big[(n-2i)\,D_i\Big]_0^{p \text{ bzw.} q} + \Big[(\nu-2i)\,D'_i\Big]_0^{p' \text{ bzw.} q'} + \Big[(n+\nu-2i)\,G_i\Big]_0^{p \text{ bzw.} q} = 0$$

und ferner, indem man auf die X, Ξ und Z zurückgeht, in

$$\Big[(n-2i)\,X_i\Big]_0^n + \Big[(\nu-2i)\,\Xi_i\Big]_0^\nu + \Big[(n+\nu-2i)\,Z_i\Big]_0^{n+\nu} = 0,$$

oder, mit Rücksicht auf π') auch in

$$\Big[i\,X_i\Big]_0^n + \Big[i\,\Xi_i\Big]_0^\nu + \Big[i\,Z_i\Big]_0^{n+\nu} = 0,$$

und diese Gleichung fällt für $\nu = n$ unmittelbar mit der Kontrollformel ε'') des Sonderfalles zusammen.

Gleichung σ) stellt eine Beziehung zwischen den Größen C' allein und M dar; durch ihre Substitution in ϱ) würde auch eine solche zwischen den Größen C allein und M hervorgehen. Diese beiden bilden den Ersatz für die hier in Wegfall kommenden beiden Kontrollformeln α) und β) im Sonderfalle, welche sich für $\nu = n$ in ähnlicher Weise wie vorhin daraus ableiten lassen.

Durch die hiermit abgeschlossene summarische Betrachtung des allgemeinen Falles dürfte hinreichend der Nachweis erbracht sein, daß seine

Anwendung zwar etwas unbequemere Rechenarbeit zur Folge hat, als der ausführlich behandelte Sonderfall, keineswegs aber eine so verwickelte, daß ihre Durchführbarkeit in Zweifel gezogen werden müßte. Den umständlichsten Teil bildet dabei jedenfalls die Bestimmung der Gewichte der Unbekannten.

Wird aber die Aufgabe nicht nur vom rein theoretischen Standpunkte betrachtet, sondern auch dem praktischen gebührende Beachtung geschenkt, so bieten sich noch erhebliche Erleichterungen. Das im Abschnitt VI, D angegebene Verfahren, den störenden Einfluß der thermischen Veränderlichkeit innerhalb einer Gruppe von Beobachtungen zu eliminieren, bietet hinreichende Verläßlichkeit nur dann, wenn die zur Ausführung der Beobachtungsreihe erforderliche Zeit nicht allzu lang ist, und es darf selbstredend auch keine Unterbrechung darin eintreten. Daraus ergibt sich mit Notwendigkeit, daß in allen praktischen Fällen ν niemals eine größere Zahl wird sein können; über 10 damit hinauszugehen, dürfte schon nicht mehr ratsam sein.

Ist dann n ebenfalls nicht groß, so stellt die zur Bestimmung der Werte der Teilungsfehler selbst unumgänglich erforderliche Auflösung der beiden Gleichungssysteme eine im Vergleich mit der Beobachtungsarbeit nur unbedeutende Leistung dar. Die Gewichte aber können hierfür, wenn auch nicht vollkommen streng, doch mit völlig ausreichender Genauigkeit ohne große Mühe ein- für allemal ermittelt werden. Zunächst ist für $\nu = 1$ allgemein:

$$\frac{1}{P\,x_i} = \frac{2\,i\,(n-i)}{n},$$

wiederum bezogen auf das Gewicht einer einzelnen Strichabstandmessung als Einheit. Ferner sind die Werte der Gewichte für alle Wertepaare $n = \nu$ für $\nu = 2$ bis $\nu = 10$ bereits in der Tabelle auf S. 52 enthalten. Wird jetzt die strenge Berechnung nur noch für einige wenige zweckmäßig gewählte Kombinationen durchgeführt, so genügen die Ergebnisse, um durch Interpolation die folgende Tabelle herstellen zu können. In dieser ist die nur für die früheren Entwicklungen vorteilhaft gewesene, sonst aber rein formale Festsetzung $\nu < n$ wieder fallen gelassen worden, wodurch die Unterscheidung von $P x_i$ und $P \xi_i$ mit in Wegfall kommt. Streng berechnet sind darin nur die durch stärkeren Druck hervorgehobenen Zahlen, welche sogleich die für die praktische Anwendung unmittelbar geeigneten Werte $1/\sqrt{P_i}$ angeben. Bei den übrigen wird die zweite Dezimalstelle nicht mehr immer bis auf eine Einheit verbürgbar sein; trotzdem läßt der Verlauf der Zahlen erkennen, daß letztere ohne allzugroße Unsicherheit auch noch ein erhebliches Stück über den Rahmen der Tabelle hinaus extrapoliert werden dürften.

$\nu \diagdown n$	2	3	4		5		6			7		
	$\frac{1}{\sqrt{P_1}}$	$\frac{1}{\sqrt{P_2}}$	$\frac{1}{\sqrt{P_1}}$	$\frac{1}{\sqrt{P_2}}$	$\frac{1}{\sqrt{P_1}}$	$\frac{1}{\sqrt{P_2}}$	$\frac{1}{\sqrt{P_1}}$	$\frac{1}{\sqrt{P_2}}$	$\frac{1}{\sqrt{P_3}}$	$\frac{1}{\sqrt{P_1}}$	$\frac{1}{\sqrt{P_2}}$	$\frac{1}{\sqrt{P_3}}$
1	1,00	1,15	1,22	1,41	1,26	1,55	1,29	1,63	1,73	1,31	1,69	1,85
2	0,79	0,84	0,87	0,89	0,88	0,91	0,89	0,93	0,94	0,90	0,95	0,97
3	0,65	0,68	0,70	0,69	0,71	0,70	0,72	0,72	0,72	0,73	0,73	0,73
4	0,57	0,59	0,61	0,60	0,62	0,61	0,63	0,61	0,61	0,63	0,62	0,62
5	0,52	0,54	0,55	0,54	0,56	0,55	0,57	0,55	0,55	0,57	0,56	0,56
6	0,49	0,50	0,51	0,50	0,52	0,50	0,52	0,51	0,50	0,53	0,51	0,51
7	0,45	0,46	0,47	0,46	0,48	0,47	0,48	0,47	0,47	0,49	0,47	0,47
8	0,42	0,43	0,44	0,43	0,45	0,44	0,45	0,44	0,44	0,46	0,45	0,44
9	0,40	0,41	0,41	0,40	0,42	0,41	0,43	0,41	0,41	0,43	0,42	0,41
10	0,38	0,39	0,39	0,38	0,40	0,39	0,40	0,39	0,39	0,41	0,40	0,39

$\nu \diagdown n$	8				9				10				
	$\frac{1}{\sqrt{P_1}}$	$\frac{1}{\sqrt{P_2}}$	$\frac{1}{\sqrt{P_3}}$	$\frac{1}{\sqrt{P_4}}$	$\frac{1}{\sqrt{P_1}}$	$\frac{1}{\sqrt{P_2}}$	$\frac{1}{\sqrt{P_3}}$	$\frac{1}{\sqrt{P_4}}$	$\frac{1}{\sqrt{P_1}}$	$\frac{1}{\sqrt{P_2}}$	$\frac{1}{\sqrt{P_3}}$	$\frac{1}{\sqrt{P_4}}$	$\frac{1}{\sqrt{P_5}}$
1	1,32	1,73	1,94	2,00	1,33	1,76	2,00	2,11	1,34	1,79	2,05	2,19	2,24
2	0,90	0,97	1,00	1,02	0,91	0,99	1,06	1,10	0,92	1,08	1,14	1,20	1,22
3	0,74	0,75	0,75	0,75	0,74	0,77	0,80	0,83	0,75	0,82	0,89	0,93	0,95
4	0,64	0,63	0,63	0,63	0,65	0,65	0,65	0,65	0,65	0,68	0,71	0,74	0,76
5	0,58	0,57	0,56	0,56	0,58	0,58	0,58	0,58	0,59	0,61	0,63	0,64	0,65
6	0,53	0,52	0,51	0,51	0,54	0,53	0,53	0,53	0,54	0,55	0,56	0,56	0,56
7	0,49	0,48	0,47	0,47	0,50	0,49	0,48	0,48	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50
8	0,46	0,45	0,44	0,44	0,47	0,46	0,45	0,44	0,47	0,46	0,45	0,45	0,45
9	0,43	0,42	0,42	0,41	0,44	0,43	0,42	0,41	0,44	0,43	0,42	0,42	0,42
10	0,41	0,40	0,39	0,39	0,41	0,40	0,40	0,39	0,42	0,41	0,40	0,39	0,39

Der andere Fall, daß n eine verhältnismäßig große Zahl ist, während ν sich in mäßigen Grenzen hält, besitzt praktisch noch geringeres Interesse als der vorige. Je größer der Unterschied zwischen n und ν ist, desto ungleichmäßiger verteilen sich naturgemäß die durchschnittlichen Werte der Gewichte auf die beiden Maßstäbe und man gelangt bald an einen Punkt, bei welchem die Teilungsfehler der kürzeren Skale mit überflüssig hohen, die der längeren mit unzureichenden Gewichten behaftet erscheinen, also wiederum Arbeitsvergeudung eintritt, nur in anderer Art, als die im Abschnitt VI E besprochene. Die Aufstellung der Schlußgleichungen wird hier durch den Umstand erleichtert, daß die $n-\nu$ ersten von weit einfacherem Bau sind, als der Rest und deshalb schematisch weiter gebildet werden können. Ihre Auflösung kann natürlich nur noch durch empirische Annäherung bewirkt werden. Eine unverhältnismäßig große Rechenarbeit würde allerdings die Bestimmung der Gewichte sämtlicher Teilungsfehler verursachen. Für praktische Zwecke wird es aber stets genügen, nur einen kleinen Teil derselben wirklich zu berechnen und daraus die übrigen durch Interpolation herzuleiten.

VIII. Die Ermittelung von Näherungswerten.

Dem auf S. 9 erwähnten Verfahren, gute Näherungswerte für die Unbekannten x, ξ und m zu finden, ist in dem Buche von Weinstein eine größere Bedeutung beigelegt, als ihm seiner eigentlichen Grundlage nach zukommt; es scheint nicht überflüssig, letztere kurz zu beleuchten.

Allgemein werden Näherungswerte dadurch bestimmt, daß man eine beschränkte Anzahl der Bedingungsgleichungen in zweckmäßiger Auswahl mehr oder weniger streng auflöst. Bei der großen Anzahl Unbekannter im vorliegenden Falle muß die zu treffende Auswahl unter den Bedingungsgleichungen natürlich unter dem Gesichtspunkte erfolgen, daß ihre Auflösung einfach und leicht zu bewirken ist. Eine solche Auswahl bietet sich aber unmittelbar an. Läßt man von den $(n+\nu+2)$ Gruppen von Bedingungsgleichungen die erste, welche nur eine an sich bedeutungslose Gleichung enthält, weg und hebt aus den folgenden ν Gruppen je die beiden ersten Gleichungen heraus, so enthalten diese 2ν Gleichungen nur gerade diejenigen Beobachtungen, welche der Vergleichung aller Intervalle des kürzeren Maßstabes mit dem ersten des längeren entsprechen. Sie reichen also, nachdem für ξ_0 und ξ_ν willkürliche Werte angenommen sind, zur Bestimmung des Wertes m und der übrigen $\xi_1 \ldots \xi_{\nu-1}$ gerade aus und ihre Auflösung ist überaus bequem. Natürlich nimmt die Unsicherheit der ξ in bekannter Weise nach der Mitte hin zu. Die auf diesem einfachen Wege bestimmbaren Näherungswerte werden zwar ihrem eigentlichen Zwecke wohl immer schon genügen, sind aber noch weiterer Verbesserung fähig. Läßt man nämlich auch die zweite Gruppe der Bedingungsgleichungen weg und hebt aus den folgenden ν Gruppen je die zweite und dritte Gleichung heraus, so erhält man abermals 2ν Gleichungen, welche nur gerade diejenigen Beobachtungen enthalten, die der Vergleichung aller Intervalle des kürzeren Maßstabes mit dem zweiten des längeren entsprechen. Aus ihnen ergibt sich, wenn ξ_0 und ξ_ν mit denselben willkürlichen Werten belegt werden, wie vorher, außer einem zweiten Werte für m auch eine zweite Reihe von Werten für ξ_1 bis $\xi_{\nu-1}$, deren Unsicherheit natürlich in demselben Maße nach der Mitte hin zunimmt, wie bei der ersten. In gleicher Weise fortfahrend, kann man n

solcher Reihen $\xi_1 \ldots \xi_{\nu-1}$ herleiten, die jedoch nicht völlig unabhängig voneinander sind, weil ja je zwei aufeinander folgende aus Gleichungen hervorgehen, die ihnen zur Hälfte gemeinschaftlich sind. Jedoch sind von diesen Reihen die erste, dritte u. s. f. einerseits, die zweite, vierte u. s. f. anderseits untereinander wieder ganz unabhängig. In völlig analoger Weise ergeben sich ν Reihen für die Teilungsfehler $x_1 \ldots x_{n-1}$ des längeren Maßstabes.

Wären die Reihen voneinander unabhängig, so würden die aus ihnen folgenden Mittelwerte für ξ_i und $\xi_{\nu-i}$ einerseits, x_i und $x_{\nu-i}$ anderseits die Gewichte

$$P\,\xi_i = \frac{n\,\nu}{2\,i\,(\nu - i)}$$

bezw.

$$P\,x_i = \frac{n\,\nu}{2\,i\,(n - i)}$$

besitzen, bezogen auf das Gewicht einer der Bedingungsgleichungen als Einheit. Wegen der Abhängigkeit werden die Gewichte in Wirklichkeit etwas geringer, aber nicht kleiner als die Hälfte der obigen Werte ausfallen, wie leicht einzusehen, wenn man sich aus den beiden oben bezeichneten Gruppen voneinander unabhängiger Reihen zunächst zwei getrennte Mittelwerte gebildet und sodann zu einem Gesamtmittel vereinigt denkt. Eine genaue Feststellung der Gewichte ist natürlich nicht möglich, da das ganze Verfahren eben keine ganz strenge Ausgleichung darstellt.

Es ist jedoch sofort zu übersehen, daß die auf solche Weise gefundenen Näherungswerte selbst sich nicht sehr erheblich von den Ergebnissen der strengen Ausgleichung unterscheiden werden, da ja zu ihrer Ableitung nicht allein sämtliche Bedingungsgleichungen herangezogen werden, sondern auch bis auf die erste und letzte einer jeden Gruppe alle in gleichem Maße.